Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Existencia de una solución a la ecuación de Schrödinger no lineal en su estado estacionario.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Matemático

PRESENTA :

Abraham Quiles Sánchez

TUTORA

Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.. 2019

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Existencia de una solución a la ecuación de Schrödinger no lineal en su estado estacionario.

por

Abraham Quiles Sánchez

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemático

en la

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.. 2019

A la memoria de Rámon Quiles Villalvazo.

Agradecimientos

Gracias a mi padre por su apoyo, a mi madre por sus sueños y a mis hermanos por sus deseos y su amor.
Gracias a los profesores que me enseñaron y a mis amigos que me motivaron.

Quiero hacer la mención especial al **Dr. Nils Heye Ackermann** que fue el tutor original de este trabajo, gracias a su apoyo y confianza esto fue posible.
También, me gustaría reconocer el apoyo del jurado, el M. Felipe Angeles García, la Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora, el Dr. Rámon Gabriel Plaza Villegas, el Dr. Alafredo Cano Rodríguez y el Dr. Eric Fabián Hernández Martínez que tienen mi admiración y respeto.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

En esta tesis se estudiarán los siguientes artículos:

1. Louis Jeanjean. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbb{R}^N$ [15].

2. Louis Jeanjean y Kazunaga Tanaka. A positive Solution for a Nonlinear Schrödinger Equation on $\mathbb{R}^N$ [17].

Para ello, se planteará como objetivo el resultado que consiguen Jeanjean y Tanaka en [17], demostrar la existencia de una solución positiva puntual al siguiente problema:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{para } u \in H^1(\mathbb{R}^N) =: H, \text{ con } N \geq 2. \tag{1-1}$$

Para la función $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vamos a pedir que sea continua y además:

(v1) $0 < \inf \sigma(-\Delta + V(x)) =: \alpha_0$, donde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota el espectro del operador auto adjunto (véase [23], teorema 5.5) $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) =^{1} \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx},$$

(v2) $V(x) \to V_\infty \in \mathbb{R}$ cuando $|x| \to \infty$,

(v3) $V(x) \leq V_\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(v4) Existe una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|x||\nabla V(x)| \leq \varphi(x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

[1] Para la demostración de esta ecuación véase [6], teorema 6.10-2. Esta ecuación es conocida como la caracterización o el cociente de Rayleigh.

Sea $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$. Necesitamos que la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ sea continuamente diferenciable y, tomando o bien $1 < p < \infty$ si $N = 2$ o bien $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$, que cumpla las siguientes condiciones:

(f1) $f(s) \leq C(s + s^p)$ para $s \geq 0$, con alguna $C > 0$,

(f2) $|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$, con $C > 0$,

(f3) $f'(0) = 0$,

(f4) $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$,

(f5) $f \geq 0$.

El espacio H al que pertenece la solución, junto con $H^2(\mathbb{R}^N)$, $L^2(\mathbb{R}^N)$ y $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ se explicarán más adelante. Si comparamos este problema con el artículo [17], se puede notar que se agregan hipótesis para la función f, esto es con el propósito de no hacer muy largo el trabajo y dar más peso al resultado de Jeanjean en el artículo [15] que es esencial para demostrar la existencia de la solución.

El problema (1-1) ya se ha estudiado anteriormente, sólo que con más hipótesis para f. Explícitamente, la condición de superlinealidad global de Ambrosetti-Rabinowitz [2], que es la siguiente:

$$\exists \mu > 2 \text{ tal que } 0 < \mu \int_0^s f(\tau)d\tau \ \leq sf(s) \quad \forall\ s > 0. \tag{1-2}$$

Con las hipótesis (f1)-(f5) y el resultando de Jeanjean [15], que presenta una variante del teorema de paso de montaña (véase [14, 28]), es posible prescindir de la condición (1-2).

La ecuación (1-1) es un caso muy interesante de la ecuación no lineal de Schrödinger o problema NLS. Una de las formas más generales de la ecuación NLS es la siguiente:

$$i\psi_t = -\Delta\psi + V(x,t)\psi + f(x,t,\psi) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1-3}$$

En [11] con $f(x,\psi) = \gamma|\psi|^{p-1}\psi$ donde $1 < p < (N+2)/(N-2)$ o en [27] con sus no linealidades arbitrarias de la ley de potencias $f(x,\psi) = \gamma|\psi|^{2\sigma}\psi$ donde $0 \leq \sigma < (2/N-2)$ (sin condiciones para σ cuando $N = 1, 2$). El nombre tiene que ver con la forma más que con su interpretación, tiene una curiosa semejanza con la conocida ecuación de Schrödinger. La ecuación NLS es una de las ecuaciones más interesantes en física matemática. "La ecuacion de Schrödinger no lineal (NLS) es una de las ecuaciones más importantes en la física matemática. Esta ecuación aparece en la modelación de muchos fenómenos físicos con aplicaciones en diferentes campos [22], tales como física de semiconductores [5], óptica no lineal [19], condensados de Bose-Einstein [9], mecánica cuántica [24], física de plasma [12] o dinámica biomolecular [10], por citar algunos ejemplos" [3].

Un caso particular de la ecuación (1-3) es la siguiente ecuacion [8]:

$$i\psi_t - \Delta\psi + (a(x)+\omega)\psi - q(x)|\psi|^{p-2}\psi = 0. \tag{1-4}$$

"Esta adquiere más importancia en las aplicaciones físicas cuando *la densidad de estados permanece constante*[2]. Tales estados se conocen como ondas solitarias, ondas estacionarias o estados estacionarios" [3]. En estos estados el sistema posee una dependencia temporal factorizada. Siguiendo con el articulo [8] se establece que la solución para ondas estacionarioas tiene que ser de la forma

$$\psi(x,t) = u(x)e^{i\omega t}. \tag{1-5}$$

Si sustituimos la factorización (1-5) en la ecuación (1-4), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= i\psi_t - \Delta\psi + (a(x)+\omega)\psi - q(x)|\psi|^{p-2}\psi \\ &= (-\omega u(x)e^{i\omega t}) - e^{i\omega t}\Delta u(x) + (a(x)+\omega)u(x)e^{i\omega t} - q(x)|u(x)e^{i\omega t}|^{p-2}u(x)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Así se obtiene la ecuación [3]

$$-\Delta u + a(x)u - q(x)|u|^{p-2}u(x) = 0. \tag{1-6}$$

La ecuación (1-6) es una variante de la ecuación (1-1). Esto indicaría que la ecuación (1-1) proviene de:

$$i\psi_t - \Delta\psi + (V(x)+\omega)\psi - f(|\psi|) = 0. \tag{1-7}$$

Para demostrar la existencia de soluciones se ocupa el método variacional, asociando una función cuyos puntos críticos sean las soluciones a la ecuación diferencial parcial, más adelante se explicará esta idea. En el año 1973, ya se estaba trabajando con variantes de la ecuación (1-7), (véase articulo [2]), que es donde ocupan la condición (1-2).

En el artículo [17] Jeanjean y Tanaka van más allá, incluso, se generaliza más que en esta tesis. No se pone aquí tal cual de esa manera ya que se necesita trabajar con una versión del "Splitting Lema"(teorema 4.10) más técnica, que ellos mismos formulan, y el concepto de pseudogradiente. Lejos de esto, se mantiene la esencia de la idea de una generalización que sobrepasa los resultados clásicos.

---

[2] La densidad de estados de un sistema describe la cantidad de estados que están disponibles para ser ocupados por el sistema en cada nivel de energía.

[3] Aquí el operador Δ solo afecta a las variables espaciales, es decir, se debería escribir Δ_x.

Capítulo 2

Preliminares

Diferenciabilidad.

A continuación se introducirá el concepto de diferenciabilidad en espacios de Banach y se enunciarán algunos resultados tomados de [6, 7].
Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo. Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$. Definimos a $L(X,Y)$ como el espacio de todas las transformaciones lineales continuas que van de X a Y. $L(X,Y)$ es un espacio vectorial normado con la siguiente norma

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}, \quad T \in L(X,Y).$$

Definición 2.1. Sea Ω un subconjunto abierto de X, $f : \Omega \to Y$ una función y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es Fréchet diferenciable en x_0 si existe $T \in L(X,Y)$ tal que

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Tv + o(\|v\|_X),$$

donde $o(\|v\|_X) \in Y$ y cumple que

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{o(\|v\|_X)}{\|v\|_X} = 0 \quad \text{en } Y.$$

A T se le llama la derivada de Fréchet de f en x_0 y se denota como

$$T := f'(x_0) \quad \text{o bien} \quad T := Df(x_0).$$

(Véase [6]).

Proposición 2.2. *Si f es Fréchet diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Para la demostración véase [7], proposición 9.11.

Definición 2.3. Decimos que $f : \Omega \to Y$ es Fréchet diferenciable en todo Ω si lo es en cada $x \in \Omega$. La función

$$f' : \Omega \to L(X,Y), \text{ dada por } u \longmapsto f'(u),$$

se llama la derivada de Fréchet de f. La denotaremos también por $Df : \Omega \to L(X, Y)$.

Cuando $f : \Omega \to Y$ es Fréchet diferenciable en todo Ω y el mapeo $f' : \Omega \to L(X, Y)$ resulta ser continuo, diremos que $f \in C^1(\Omega)$.

Usualmente diremos que $f : \Omega \to Y$ es diferenciable, en vez de Fréchet diferenciable, y hablaremos de su derivada para referirnos a su derivada de Fréchet (véase [7], definición 9.7).

TEOREMA 2.4. *Sean U, V, W espacios normados, $\Omega \subset V$ abierto, $x_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to W$ Fréchet diferenciable en x_0. También, tomemos $\Sigma \subset W$ abierto, $y_0 = f(x_0) \in \Sigma$ y $g : \Sigma \to U$ Fréchet diferenciable en y_0.*
Entonces $g \circ f$ es Fréchet diferenciable en x_0 y

$$D(g \circ f)(x_0)v = Dg(y_0)[Df(x_0)v] \quad \forall\ v \in V. \tag{2-1}$$

Para la demostración de este teorema véase [1], proposición 1.4.

DEFINICIÓN 2.5. Sea $f : X \to Y$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que f tiene una derivada de Gâteaux en x_0, si para cada $v \in X$

i) $f(x_0 + \varepsilon v)$ está definida para $|\varepsilon| \in \mathbb{R}$ pequeño,

ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon v)-f(x_0)}{\varepsilon}$ existe en la norma de Y.

A $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon v)-f(x_0)}{\varepsilon}$ se denota como $D_v f(x_0) = [d_G f(x_0)](v)$ y $[d_G f(x_0)]$ es la derivada de Gâteaux en x_0.

DEFINICIÓN 2.6. Si f tiene derivada de Gâteaux en x, para toda $x \in \Omega$, diremos que f tiene derivada de Gâteaux en Ω. La función [1]

$$[d_G f(.)] : \Omega \to L(X, Y)$$

Para las dos definiciones anteriores véase [7], definición 9.19.

PROPOSICIÓN 2.7. *Si f es Fréchet derivable en Ω, entonces f tiene derivada de Gâteaux en Ω.*

Para la demostración solo tenemos que observar que de la definición 2.5 se tiene que

$$\lim_{\|u\|_X \to 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0) - Df(x_0)u}{\|u\|_X} = 0.$$

Escribiendo $u = \varepsilon v$ para algún $v \in X$ fijo, se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon v) - f(x_0)}{\varepsilon} = Df(x_0)v.$$

TEOREMA 2.8. *Sea $f : \Omega \subseteq X \to Y$ una función que tiene derivada de Gâteaux en Ω y $u_0 \in \Omega$ tales que*

[1] Algunas definiciones no dan por hecho que $[d_G f(x_0)] \in L(X, Y)$ y definen la derivada de Gâteaux como una derivada direccional para una única dirección.

i) $[d_G f(u)] \in L(X,Y)$ *para toda* $u \in \Omega$,

ii) $d_G f : \Omega \to L(X,Y)$ *es continuo en* u_0*, es decir, si* $\|u - u_0\|_X \to 0$*, entonces* $\|d_G f(u) - d_G f(u_0)\|_{L(X,Y)} \to 0$ *cuando* $u \to u_0$.

Entonces f *es Fréchet diferenciable en* u_0 *y* $Df(u_0) = d_G f(u_0)$.

Para la demostración se requiere el teorema de Hahn–Banach aplicado al conjunto $M = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (véase [1], teorema 1.9).

Observación 2.9. Con el teorema anterior podemos concluir que si una función f tiene derivada de Gâteaux continua en Ω y que pertenezca a $L(X,Y)$ en cada punto de Ω, entonces $f \in C^1(\Omega)$.

Espacios de Sobolev.

Las siguientes definiciones y resultados pertenecen al libro [7].

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. En el conjunto

$$M(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es medible}\}$$

consideremos la relación de equivalencia dada por

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ para casi todo punto } x \in \mathbb{R}^N.$$

Al conjunto de clases de equivalencia lo denotaremos por

$$N(\Omega) := M(\Omega)/\sim .$$

Definición 2.10. Si $p \in [1, \infty)$, denotaremos por

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \in N(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f|^p \ < \infty \right\}.$$

$L^p(\Omega)$ es conocido como el espacio de Lebesgue, es un espacio normado con la siguiente norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Definición 2.11. Definimos

$$L^\infty(\Omega) := \{f \in N(\Omega) \mid \text{existe } c \in \mathbb{R} : |f(x)| \le c \text{ para casi todo } x \in \Omega\}.$$

A una función $f \in L^\infty(\Omega)$ se le llama una función esencialmente acotada. $L^\infty(\Omega)$ también es un espacio normado con la siguiente norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty := \text{ínf}\{c \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| \le c \text{ para casi toda } x \in \Omega\}.$$

Definición 2.12. Un subconjunto abierto ω de $\mathbb{R}^N$ está compactamente contenido en Ω si su cerradura $\overline{\omega}$ es compacta y $\overline{\omega} \subset \Omega$. Escribimos $\omega \subset\subset \Omega$ para denotar que ω está compactamente contenido en Ω. Definimos

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f \in N(\Omega) \ : \ \int_\omega |f| \ < \infty \text{ para todo abierto } \omega \subset\subset \Omega \right\}.$$

Definición 2.13. Se dice que una función $\varphi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ tiene soporte compacto en Ω, si la cerradura del conjunto de puntos donde la función es distinta de cero forman un subconjunto compacto de Ω. Definamos

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega),$$

donde

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ : \ \varphi \text{ tiene soporte compacto en } \Omega\}.$$

Definición 2.14. a) Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, donde cada componente α_i es un entero no negativo, se llama multi-índice de orden k si

$$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_N = k.$$

b) Dado un multi-índice α y una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se define

$$D^\alpha \varphi(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_N}^{\alpha_N} \varphi(x).$$

Definición 2.15. Supongamos que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Decimos que v es la α-derivada débil de u si:

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \ = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A v se le denota como $D^\alpha u$.

Definición 2.16. Sea $k > 0$ un entero y sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se define como:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ \forall |\alpha| \leq k, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Para $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_p^p)^{1/p} & \text{si } p \in [1, \infty), \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \{\|D^\alpha u\|_\infty\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Con esta norma $W^{k,p}(\Omega)$ resulta ser un espacio de Banach.

Teorema 2.17. *$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, donde $p \in [1, N)$ y $p^* = \frac{Np}{N-p}$, y existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de N y p, tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \, \|\nabla u\|_p \quad \forall \ u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Para la demostración véase [7], teorema 16.18 y corolario 17.5.

Definimos

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Este conjunto resulta ser un espacio de Hilbert, con el producto escalar

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \int_\Omega uv \ + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v).$$

Definición 2.18. Sea $p \in [1\ ,\ \infty)$ y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.19. *(de encaje de Sobolev). Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $p \in [1\ ,\ n)$, entonces*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p\ \ p^*],$$

y esta inclusión es continua.

Para la demostración véase [7], teorema 17.6.

Capítulo 3

Existencia de una sucesión acotada de Palais-Smale.

Enunciado y discusión del resultado.

A lo largo de este capítulo supondremos que $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert.

Definición 3.1. Una sucesión (u_n) en $\mathbb{H}$ se llama sucesión de Palais-Smale para I en el nivel $c \in \mathbb{R}$ si satisface:

i) $I(u_n) \to c$,

ii) $I'(u_n) \to 0$.

Si además la sucesión (u_n) está acotada decimos que es una sucesión acotada de Palais-Smale (BPS) (véase [15]).

Definición 3.2. Sea $(X, \| \ \|_X)$ y $(Y, \| \ \|_Y)$ dos espacios normados. La función $f : X \to Y$ es localmente Lipschitz continua en $x \in X$ si existen $\delta > 0$ y $L > 0$, tales que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq L \|x_1 - x_2\|_X \tag{3-1}$$

cuando $\|x_1 - x\|_X \leq \delta$ y $\|x_2 - x\|_X \leq \delta$ (véase [13], teorema 3.1.4).

El objetivo de este capítulo será desarrollar el resultado principal de Jeanjean en el articulo [15] que es probar el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalo. Consideramos una familia de funciones $I_\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{R},\ \lambda \in J$, de clase C^1 y con derivada localmente Lipschitz continua de la forma*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u) \quad \forall \lambda \in J,$$

donde $B(u) \geq 0$ para cualquier $u \in \mathbb{H}$, y o bien $A(u) \to +\infty$ ó bien $B(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to \infty$. También supongamos que existen dos puntos $v_1, v_2 \in \mathbb{H}$, los mismos para cada $\lambda \in J$, tales que se cumple la condición:

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\},$$

donde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathbb{H}) \mid \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}.$$

Entonces, para casi toda $\lambda \in J$, existe una sucesión acotada de Palais-Smale para I_λ en el nivel c_λ.

El teorema presenta una modificación con respecto a $\mathbb{H}$, ya que en el teorema original se considera un espacio de Banach. Esto es con el único fin de no involucrar el concepto de pseudogradiente (véase [28] definición 2.1).

Observación 3.4. Si (u_n) es una sucesión de Palais-Smale para I_λ en el nivel c_λ, y si además $u_k \to u$ en $\mathbb{H}$, entonces u es un punto crítico de I_λ con valor crítico c_λ. Esto es facil de comprobar, solo hay que tener en cuenta que $I_\lambda \in C^1(\mathbb{H})$.
Sin embargo, una sucesión de Palais-Smale no tiene por que contener una subsucesión convergente, como se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Tomamos la función $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $I(x,y) := e^x - y^2$, y la sucesión $(-n, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Al evaluar $(-n, 0)$ en I y tomar la sucesión de imágenes tenemos que converge a 0, y también, al calcular I', que es

$$I'(x,y) = (e^x, -2y),$$

tenemos que

$$I'(-n,0) = (e^{-n}, 0) \to (0,0) \text{ cuando } n \to \infty.$$

Con lo cual podemos decir que $(-n, 0)$ es una sucesión de Palais-Smale de I en el nivel $c = 0$, pero esta sucesión no converge.

Esta es la razón del porqué en otras versiones del teorema de paso de montaña piden como hipótesis que la función cumpla la siguiente definición:

Definición 3.5. $I \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ satisface la condición Palais-Smale compacto (la condición $(PS)_c$) si dada una sucesión $(u_n) \in \mathbb{H}$ que cumpla que:

i) $(I(u_n))$ es acotada,

ii) $I'(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en $\mathbb{H}$

es precompacta en $\mathbb{H}$ (vease [28], definición 1.16).

Cuando en los artículos previos se habla de la condición Ambrosetti-Rabinowitz, por ejemplo [2], es porque con esa premisa se puede hacer que la función asociada al problema de ecuaciones diferenciales parciales logre cumplir con la definición anterior.

Observación 3.6. Algo muy importante es que en la conclusión del teorema 3.3 no se garantiza la existencia de la sucesión acotada de Palais-Smale para cada $\lambda \in J$. Un ejemplo donde se puede apreciar esta situación es el siguiente:

Ejemplo 2. Exhibiremos una familia de funciones (I_λ) donde no existe una sucesión BPS para cada $\lambda \in J$. Sea $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido como

$$I(x,y) = x^2 - (x-1)^3 y^2.$$

Tomamos $\mathbb{R}^2$ con la norma Euclidiana $\|u\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Cerca del origen I se comporta como $\|(x,y)\|^2$. Además, si $x>0$ es suficientemente grande, $I(x,1)<0$.

Probemos que existe $\varepsilon>0$ tal que la familia de funciones $\{I_\lambda\}_{\lambda\in[0,\varepsilon]}$ definida como

$$I_\lambda(x,y) = I(x,y) - \lambda(x^2+y^2),$$

satisface las hipótesis del teorema 3.3.

Sea $v_1 = \overline{0} := (0,0)$, y tomemos $v_2 \in \mathbb{R}^2$ de tal forma que $I(v_2)<0$, por el argumento anterior lo podemos hacer, así definimos

$$c_\lambda := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)),$$

donde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],\mathbb{R}^2) \mid \gamma(0)=v_1, \gamma(1)=v_2\}.$$

La primera hipótesis es que la función I_λ sea de clase C^1. Esto se puede ver porque las derivadas parciales existen en cualquier punto y son continuas ya que son polinomios. Posteriormente, para asegurar que se cumple que $c_\lambda>0$ tenemos que ver que hay una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ que encierra a $\overline{0}$, y al evaluarla en I_λ siempre es positiva. Para esto tomemos como curva a $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\|^2 = \frac{1}{4}\}$. Si $(x,y)\in A$, entonces $x\leq\frac{1}{2}$, lo que nos diría que

$$I(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2 \geq x^2 + \frac{1}{8}y^2 \geq 0.$$

Sea $r := x^2+\frac{1}{8}y^2$. Por lo tanto, $I_\lambda \geq r - \lambda\frac{1}{4}$. Ahora solo tenemos que tomar $\varepsilon = r/2$, así $\lambda \leq r/2$. Entonces, para cualquier $\gamma\in\Gamma$ existe $t_0\in[0,1]$ tal que

$$I_\lambda(\gamma(t_0)) \geq r - \lambda\frac{1}{4} \geq r - \frac{r}{8} = \frac{7r}{8} > 0.$$

Por lo tanto,

$$c_\lambda > 0.$$

Ahora mostremos que no hay una sucesión BPS para $I = I_0$ en el nivel c_0.
Tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} I_x = 2x - 3(x-1)^2y^2, \\ I_y = -2(x-1)^3y. \end{array}\right\}$$

Entonces, cualquier sucesión $((x_n,y_n))\subset\mathbb{R}^2$ tal que $\|I'(x_n,y_n)\|\to 0$ también satisface

$$2x_n - 3(x_n-1)^2y_n^2 \to 0. \tag{3-2}$$

$$(x_n-1)^3y_n \to 0. \tag{3-3}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_n\to x\in[-\infty,\infty]$ y $y_n\to y\in[-\infty,\infty]$, de lo cual, podemos distinguir dos casos:

i) $x_n \nrightarrow 1$. Entonces, por (3-3), tenemos que $y_n \to 0$ y también

$$(x_n-1)^2 y_n^2 = [(x_n-1)^3 y_n]^{2/3} y_n^{4/3} \to 0,$$

combinando con (3-2) se sigue que $x_n \to 0$.

ii) Si $x_n \to 1$. Entonces, por (3-2), $(x_n-1)^2 y_n^2 \to \frac{2}{3}$. y en particular, $|y_n| \to \infty$.

En el primer caso $I(x_n, y_n) \to 0$ y en el segundo caso $I(x_n, y_n) \to 1$, es decir, que $c_0 = 0$ ó $c_0 = 1$. Ya vimos que c_0 tiene que ser mayor a cero, por lo tanto, pasa que $c_0 = 1$. En consecuencia, de haber una sucesión de Palais-Smale para I en el nivel 1, no sería acotada.

Para demostrar el teorema 3.3 requerimos un lema de deformación que enunciaremos y demostraremos en la siguiente sección.

Lema de Deformación

Sea $B_\delta(0) := \{x \in \mathbb{H} \ : \ \|x\| < \delta\}$ y $\varphi^d := \varphi^{-1}((-\infty, d])$ para $\delta > 0$, $d \in \mathbb{R}$ y una función φ con imagen en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.7. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, $\varphi \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ con derivada localmente Lipschitz continua, $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tal que:*

$$\forall u \in \varphi^{-1}([c-\alpha, c+\alpha]) \cap B_{k+1}(0) \text{ se cumple que } \|\varphi'(u)\|_{\mathbb{H}^{-1}} \geq \alpha.$$

Entonces existe $\eta \in C([0,1] \times \mathbb{H}, \mathbb{H})$ tal que

i) $\eta(t, u) = u$ cuando $t = 0$ ó cuando $u \notin \varphi^{-1}([c-\alpha, c+\alpha]) \cap B_{k+1}(0)$.

ii) $\eta(1, \varphi^{c+\frac{1}{2}} \cap B_k(0)) \subset \varphi^{c-\frac{1}{2}}$.

iii) $\eta(t, .)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{H}$ $\forall t \in [0,1]$.

iv) $\varphi(\eta(., u))$ es no creciente $\forall u \in \mathbb{H}$.

Demostración. Definamos los siguientes conjuntos

$$A := \varphi^{-1}([c-\alpha, c+\alpha]) \cap B_{k+1}(0).$$

$$B := \varphi^{-1}([c-\tfrac{\alpha}{2}, c+\tfrac{\alpha}{2}]) \cap B_{k+1}(0).$$

Tomemos

$$\psi(u) := \frac{dist(u, \mathbb{H} \setminus A)}{dist(u, \mathbb{H} \setminus A) + dist(u, B)},$$

que es localmente Lipschitz continua (ya que el cociente de funciones Lipschitz continuas, es localmente Lipschitz continua cuando el denominador no se anula, y porque $(\overline{\mathbb{H} \setminus A}) \cap \overline{B} = \varnothing$). Notemos también que $\psi = 1$ *en* B y $\psi = 0$ en $\mathbb{H} \setminus A$.
Sea f definida de la siguiente forma

$$f(u) := \begin{cases} -\dfrac{\psi(u)}{\|\nabla\varphi(u)\|^2} \nabla\varphi(u), & u \in A, \\ 0, & u \in \mathbb{H} \setminus A. \end{cases}$$

Aquí $\nabla\varphi(u)$ es el campo vectorial gradiente de $\varphi(u)$, definido para cada $\varphi'(u)$ mediante el lema de Riesz (véase [7], proposición 15.18). $\nabla\varphi(u)$ es localmente Lipschitz continua ya que $\varphi'(u)$ es localmente Lipschitz continua. Por lo tanto f es localmente Lipschitz continua y

$$\|f(u)\| = \frac{\|\psi(u)\|}{\|\nabla\varphi(u)\|^2}\|\nabla\varphi(u)\| \leq \frac{1}{\|\nabla\varphi(u)\|} = \frac{1}{\|\varphi'(u)\|_{\mathbb{H}^{-1}}} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall u \in \mathbb{H}. \tag{3-4}$$

Por lo anterior y usando el teorema de existencia y unicidad, el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \\ &\sigma(0,u) = u, \end{aligned} \tag{3-5}$$

tiene una única solución $\sigma(\cdot,u)$ definida en todo $\mathbb{R}$ (véase [13], teorema 3.1.4 y corolario 3.1.6). Así mismo, por las propiedades de flujo de la solución, σ es continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{H}$ y $\sigma(t,\cdot)$ es un homeomorfismo para cada $t\in\mathbb{R}$ [25]. Así definimos η sobre $[0\ ,\ 1]\times\mathbb{H}$ como $\eta(t,u) := \sigma(\alpha t,u)$, esto justifica (iii). Usando (3-4) y (3-5), notemos que

$$\begin{aligned} \|\sigma(t,u)-u\| &= \left\|\int_0^t f(\sigma(\tau,u))\ d\tau\right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|\ d\tau \leq \tfrac{t}{\alpha}, \end{aligned}$$

y por la desigualdad del triángulo

$$\|\sigma(t,u)\| \leq \|u\| + \frac{t}{\alpha} \quad \text{para } u\in\mathbb{H} \text{ y } t\geq 0. \tag{3-6}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena (teorema 2.4) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= (\nabla\varphi(\sigma(t,u)), \tfrac{d}{dt}\sigma(t,u)) \\ &= (\nabla\varphi(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u))). \end{aligned}$$

Aquí tenemos dos opciones: si $\sigma(t,u)\in\mathbb{H}\backslash A$, entonces $f(\sigma(t,u))=0$ o si $\sigma(t,u)\in A$, $f(\sigma(t,u)) = -\dfrac{\psi(\sigma(t,u))}{\|\nabla\varphi(\sigma(t,u))\|^2}\nabla\varphi(\sigma(t,u)))$.

Tomando $\sigma(t,u)\in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \left(\nabla\varphi(\sigma(t,u)), -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|\nabla\varphi(\sigma(t,u))\|^2}\nabla\varphi(\sigma(t,u))\right) \\ &= -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|\nabla\varphi(\sigma(t,u))\|^2}\left(\nabla\varphi(\sigma(t,u)), \nabla\varphi(\sigma(t,u))\right) \\ &= -\psi(\sigma(t,u)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) = \begin{cases} -\psi(\sigma(t,u)), & \sigma(t,u)\in A, \\ 0, & \sigma(t,u)\in\mathbb{H}\setminus A. \end{cases} \tag{3-7}$$

Ahora notemos que si $t = 0$, tenemos que $\eta(0, u) = \sigma(0, u) = u$. Si $u \in \mathbb{H} \setminus A$, se tiene que $f(u) = 0$, esto nos dice que la solución pasando por u es constante y, por la unicidad de la solución, para cualquier tiempo se mantendrá la condición inicial. Esto demuestra el inciso (i).
Para demostrar el inciso (iv), solo tenemos que notar que la derivada de $\varphi(\eta(t, u))$ con respecto a t es siempre no positiva, como se ve en (3-7).
Ahora, para demostrar el inciso (ii), sea $u \in \varphi^{-1}((-\infty\ ,\ c + \frac{\alpha}{2}]) \cap B_k(0)$. Por la monotonía en el inciso (iv), $\varphi(\sigma(t, u)) \leq c + \frac{\alpha}{2}$ para cualquier tiempo. Adicionalmente, por (3-6), $\|\sigma(t, u)\| \leq K + 1$, pensando que $t \in [0\ ,\ \alpha]$ y usando $u \in B_k(0)$. Si hay una $t \in [0\ ,\ \alpha]$ tal que $\varphi(\sigma(t, u)) < c - \frac{\alpha}{2}$, por ser no creciente (inciso (iv)), entonces $\varphi(\sigma(\alpha, u)) < c - \frac{\alpha}{2}$. Por lo que se satisface (ii). Si en cambio

$$\sigma(t, u) \in \varphi^{-1}\left(\left[c - \tfrac{\alpha}{2}\ ,\ c + \tfrac{\alpha}{2}\right]\right) \quad \forall t \in [0\ ,\ \alpha],$$

usando (3-7) y $\sigma(t, u) \in B \subset A$ para toda $t \in [0, \alpha]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma(\alpha, u)) &= \varphi(u) + \textstyle\int_0^\alpha \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t, u))\ dt \\
&\leq c + \tfrac{\alpha}{2} + \textstyle\int_0^\alpha \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t, u))\ dt, \\
&= c + \tfrac{\alpha}{2} + \textstyle\int_0^\alpha -\psi(\sigma(t, u))\ dt \\
&= c + \tfrac{\alpha}{2} - \alpha = c - \tfrac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se satisface (ii).

□

Demostración del teorema 3.3

En toda esta sección supondremos que $J \subset \mathbb{R}^+$ es un intervalo y que $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ es una familia de funciones que satisface las hipótesis del teorema 3.3.

También, para c_λ definida en el teorema 3.3 definamos la función $h : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(\lambda) := c_\lambda.$$

Denotemos por

$$c'_\lambda := h'(\lambda),$$

si dicha derivada existe.

Observación 3.8. Si $h(\lambda)$ es no creciente y acotada, entonces $h(\lambda)$ es diferenciable en casi todo λ. Para la demostración de este resultado véase [26], lema 3.13 y teorema 3.14.

Efectivamente, $h(\lambda)$ es una función no creciente ya que, si $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces $I_{\lambda_1}(\gamma(t)) \geq I_{\lambda_2}(\gamma(t))$. La razón de esto último es que $B(u) \geq 0$ para toda $u \in \mathbb{H}$. Tomando $\max_{t\in[0,1]}$ é $\inf_{\gamma\in\Gamma}$ de $I_{\lambda_1}(\gamma(t)) \geq I_{\lambda_2}(\gamma(t))$, se tiene que $c_{\lambda_1} \geq c_{\lambda_2}$, es decir, $h(\lambda_1) \geq h(\lambda_2)$.

Ahora, $h(\lambda)$ es no creciente en J. Sabemos que J es un intervalo, tomando un subintervalo cerrado de él, es posible asegurar que ahí $h(\lambda)$ es acotada y, por la observación 3.8, $h(\lambda)$ es diferenciable en casi todo punto de este subintervalo.

Antes de la demostración del teorema 3.3 demostraremos un par de resultados.

Lema 3.9. *Sea $\lambda \in J$ tal que la derivada c'_λ, del mapeo $\lambda \longmapsto c_\lambda$, exista, y sea (λ_n) una sucesión estrictamente creciente que converja a $\lambda \in J$. Entonces existe una sucesión de trayectorias (γ_n) en Γ y una constante $K = K(c'_\lambda) > 0$ tal que:*

i) $\|\gamma_n(t)\| \leq K$ *si* $t \in [0,1]$ *y* $\gamma_n(t)$ *satisface*

$$I_\lambda(\gamma_n(t)) \geq c_\lambda - (\lambda - \lambda_n); \tag{3-8}$$

ii) $\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t)) \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n)$.

Demostración. Sea (γ_n) en Γ una sucesión que cumple que

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n). \tag{3-9}$$

Dicha sucesión existe porque $\lambda - \lambda_n > 0$ y

$$c_{\lambda_n} := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma(t)).$$

Esto implica que

$$I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3-10}$$

Como c'_λ existe, hay una $n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ (depende de λ porque es un punto donde existe la derivada) tal que para cualquier $n \geq n_0(\lambda)$ se tiene que

$$\left| \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda_n - \lambda} - c'_\lambda \right| = \left| \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} + c'_\lambda \right| \leq 1.$$

Así

$$-c'_\lambda - 1 \leq \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 1. \tag{3-11}$$

Para probar *i*), sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\lambda)$, y $t \in [1,0]$ fijos tales que $I_\lambda(\gamma_n(t)) \geq c_\lambda - (\lambda - \lambda_n)$. Usando la desigualdad (3-10) tenemos que

$$\frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} \leq \frac{c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) - c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} + 2.$$

Entonces, por las desigualdades (3-11),

$$\frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 3.$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t)) &= A(\gamma_n(t)) - \lambda_n B(\gamma_n(t)) - A(\gamma_n(t)) + \lambda B(\gamma_n(t)) \\ &= (\lambda - \lambda_n) B(\gamma_n(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} = B(\gamma_n(t)) \leq -c'_\lambda + 3,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} A(\gamma_n(t)) &= I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) + \lambda_n B(\gamma_n(t)) \\ &\leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) + \lambda_n(-c'_\lambda + 3) \\ &\leq C_1(c'_\lambda), \end{aligned}$$

por ser c_λ no creciente y λ_n convergente.

Como o bien $A(u) \to +\infty$ o bien $B(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to \infty$; entonces también es cierto que, si $A(u) \leq C_1(c'_\lambda)$ y $B(u) \leq C_2(c'_\lambda)$ para todo u en un subconjunto S de $\mathbb{H}$, entonces $\|u\| \leq K(c'_\lambda)$ para toda $u \in S$. Sin pérdida de generalidad $K(c'_\lambda) > 0$.

Sea

$$S := \{\gamma_n(t) \mid n \geq n_0(\lambda),\ t \in [1,0] \text{ y } I_\lambda(\gamma_n(t)) \geq c_\lambda - (\lambda - \lambda_n)\}.$$

Por lo anterior tenemos que $A(\gamma_n(t)) \leq C_1(c'_\lambda)$ y $B(\gamma_n(t)) \leq C_2(c'_\lambda)$. Entonces $\|\gamma_n(t)\| \leq K(c'_\lambda)$ para todo $\gamma_n(t) \in S$.

Para demostrar *ii*); observemos que $I_{\lambda_n}(v) \geq I_\lambda(v)$ para todo $v \in \mathbb{H}$ gracias a que la sucesión (λ_n) es creciente.
Por lo anterior y ocupando las desigualdades (3-9) y (3-11), obtenemos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(\gamma_n(t)) &\leq I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \\ &\leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) \\ &\leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n). \end{aligned}$$

Tomando el máximo para $t \in [0,1]$ se tiene *ii*), es decir, $\max_{t\in[0,1]} I_\lambda \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n)$.

□

Para K como en el Lema 3.9 y para $\alpha > 0$ definimos

$$F_\alpha := \{u \in \mathbb{H} \ : \ \|u\| \leq K + 1 \ y \ |I_\lambda(u) - c_\lambda| \leq \alpha\}.$$

Proposición 3.10. *El conjunto $F_\alpha \neq \varnothing$ para cualquier $\alpha > 0$.*

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y sea (γ_n) en Γ como en el Lema 3.9. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in [1, 0]$ tal que $I_\lambda(\gamma_n(t_n)) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t))$.

Entonces $I_\lambda(\gamma_n(t_n)) \geq c_\lambda$ por la definición de c_λ. El inciso $i)$ del Lema 3.9 implica que $\|\gamma_n(t_n)\| \leq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y el inciso $ii)$ del Lema 3.9 implica que $|I_\lambda(\gamma_n(t_n)) - c_\lambda| \leq \alpha$ para n suficientemente grande. En ese caso $\gamma_n(t_n) \in F_\alpha$.

$\square$

Lema 3.11. *Suponiendo las mismas hipótesis del teorema 3.3. Si c'_λ existe, entonces*

$$\inf\{\|I'_\lambda(u)\| \ : \ u \in F_\alpha\} = 0, \quad \forall \alpha > 0. \tag{3-12}$$

Demostración. Primer paso; suponer lo contrario, entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$\inf\{\|I'_\lambda(u)\| \ : \ u \in F_\alpha\} \neq 0.$$

Reemplazando α por $\min\{\alpha, \ \inf\{\|I'_\lambda(u)\| \text{ tal que } u \in F_\alpha\}\}$ obtenemos que

$$\exists\ \alpha > 0 \text{ tal que } \forall u \in F_\alpha, \ \|I'_\lambda(u)\| \geq \alpha. \tag{3-13}$$

También, sabemos que $c_\lambda > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}$. Tomando α aun más pequeño podemos suponer que

$$0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\left[c_\lambda - \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}\right]. \tag{3-14}$$

Por (3-13) y el teorema 3.7, para $\varepsilon := \frac{\alpha}{2}$ existe un homeomorfismo $\eta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que

$$\eta(u) = u \quad si \quad |I_\lambda(u) - c_\lambda| \geq \alpha, \tag{3-15}$$

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq I_\lambda(u) \quad \forall u \in \mathbb{H}, \tag{3-16}$$

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon, \quad \forall u \in \mathbb{H} \text{ que satisface } \|u\| \leq K \ y \ I_\lambda(u) \leq c_\lambda + \varepsilon. \tag{3-17}$$

Sea (γ_n) en Γ la sucesión obtenida en el Lema 3.9. Vamos a fijar $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$\lambda - \lambda_m \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_m) \leq \varepsilon. \tag{3-18}$$

Por (3-14), tenemos que

$$|I_\lambda(v_1) - c_\lambda| \geq [c_\lambda - I_\lambda(v_1)] \geq [c_\lambda - \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}] > 2\alpha > \alpha$$

y

$$|I_\lambda(v_2) - c_\lambda| \geq [c_\lambda - I_\lambda(v_2)] \geq [c_\lambda - \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}] > 2\alpha > \alpha.$$

Usando (3-15) y lo anterior, $\eta \circ \gamma_m \in \Gamma$.

Sea $t \in [0, 1]$ y sea $u := \gamma_m(t)$. Vamos a destacar dos casos. En el primero supongamos que u satisface

$$I_\lambda(u) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m).$$

Por (3-16),

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m). \tag{3-19}$$

En el segundo caso supongamos que u satisface

$$I_\lambda(u) > c_\lambda - (\lambda - \lambda_m).$$

Por los dos incisos del Lema 3.9 y (3-18), se tiene que $\|u\| \leq K$ con $I_\lambda(u) \leq c_\lambda + \varepsilon$.

Aplicando (3-17) y (3-18), se tiene que

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m). \tag{3-20}$$

Notemos que (3-19) y (3-20) son las mismas desigualdades, es decir, en los dos casos concluimos que

$$I_\lambda(\eta(\gamma_m(t))) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m).$$

Por consecuente,

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\eta(\gamma_m(t))) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m),$$

lo cual contradice la definición de c_λ, es decir,

$$c_\lambda := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)).$$

□

Demostración del teorema 3.3

DEMOSTRACIÓN. Sea (α_n) una sucesión en el intervalo $(0,\infty)$ tal que $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Usando el Lema 3.11, para cada n escogemos $u_n \in F_{\alpha_n}$ tal que $\|I'_\lambda(u_n)\| \leq \frac{1}{n}$.

Se sigue que (u_n) es una sucesión acotada de Palais-Smale para I_λ en el nivel c_λ.

□

Para probar la existencia de la solución del problema (1-1) necesitamos asegurar la continuidad del mapeo $\lambda \longmapsto c_\lambda$, lo cual se probará a continuación.

LEMA 3.12. *El mapeo $\lambda \longmapsto c_\lambda$ es continuo por la izquierda.*

DEMOSTRACIÓN. Buscando una contradicción tomemos (λ_n) una sucesión en J que cumpla que $\lambda_n \to \lambda_0$, $\lambda_n < \lambda_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que

$$c_{\lambda_0} < \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n}.$$

Definimos $\delta := \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n} - c_{\lambda_0} > 0$. Por la definición de c_{λ_0} existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \tfrac{1}{3}\delta. \tag{3-21}$$

Ahora, sabemos que $I_\lambda = I_{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda)B$ para toda $\lambda \in J$. Por lo tanto, usando (3-21) y $\lambda = \lambda_n$, tenemos que

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \tfrac{1}{3}\delta + (\lambda_0 - \lambda_n) \max_{t\in[0,1]} B(\gamma_0(t)).$$

Ahora, usando la continuidad de B, que $B(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{H}$, y el hecho de que $\{\gamma_0(t) \ : \ t \in [0,1]\}$ es compacto pasa que $\max_{t\in[0,1]} B(\gamma_0(t)) \leq C$ para $C > 0$. Así para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \tfrac{2}{3}\delta.$$

La definición de c_{λ_n} nos permite garantizar que

$$\max\nolimits_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) \geq c_{\lambda_n}.$$

Por lo tanto,

$$c_{\lambda_0} + \delta = \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n} \leq c_{\lambda_0} + \tfrac{2}{3}\delta \tag{3-22}$$

que es una contradicción.

$\square$

Capítulo 4

Existencia de la solución

Relevancia del teorema 3.3

En este capítulo se demostrará la existencia de una solución positiva para el conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{para } u \in H^1(\mathbb{R}^N) =: H, \text{ con } N \geq 2. \tag{4-1}$$

Con las hipótesis para V (v1)-(v4) y las hipótesis para f (f1)-(f5) de la introducción, es decir, se demostrara el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1. *Asumiendo que $N \geq 2$, $f \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ no lineal, $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ no constante, (v1)-(v4) y (f1)-(f5). Entonces el problema (4-1) tiene una solución no trivial positiva.*

OBSERVACIÓN 4.2. Notemos que bajo la condición (v1)

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq \alpha_0 \leq V_\infty. \tag{4-2}$$

Para demostrar esto, sea primero $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y, para $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(\varepsilon x)$. Se sigue que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon^2} = \varepsilon^2 \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2} \quad \longrightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Esto implica que

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2} = 0.$$

En seguida, para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \mu u^2)}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2} = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2} + \mu \right) = \mu,$$

lo que implica la propiedad (4-2).

Para probar el teorema 4.1 tenemos que aplicar entre otras cosas el teorema 3.3 del capítulo anterior. Para ello tenemos que ver que la función $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$; definida como

$$I_\lambda(u) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\ dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\ dx \text{ para } \lambda \in [\tfrac{1}{2}, 1], \tag{4-3}$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, y extendemos f a $\mathbb{R}$ por $f(t) := 0$ si $t < 0$, cumpla las hipótesis del teorema 3.3.

Definimos

$$I(u) := I_1(u) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\ dx. \tag{4-4}$$

Observemos que los puntos críticos de I coinciden con las soluciones débiles de (4-1). Es decir, si u es punto critico, entonces $D_v I(u) = 0$ para toda $v \in H$ (si la derivada de Gâteaux existe, pero esto se vera mas adelante). En particular

$$D_\varphi I(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(u + \varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

que es equivalente a la ecuación:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u + \varepsilon\varphi)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x)u\varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\ dx = 0.$$

Usando integración por partes y el hecho de que φ tiene soporte compacto obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u\varphi + V(x)u\varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\ dx = 0.$$

Por el lema 3.2.3 de [18]

$$-\Delta u + V(x)u - f(u) = 0.$$

Por eso a (4-4) se le conoce también como el funcional asociado al problema (4-1), el término funcional solo hace alusión a que $I(u)$ tiene como codominio a $\mathbb{R}$.

Así es como será de gran relevancia el teorema 3.3 que nos ayudará a ver que el funcional (4-4) tiene un punto crítico que se interpreta como una solución de la ecuación (4-1).

Proposición 4.3. *El funcional (4-3) es de clase C^1 y con derivada de Fréchet localmente Lipschitz continua suponiendo las hipótesis (f1), (f2) y (v2).*

Antes de demostrar la proposición, necesitamos el siguiente Lema.

Lema 4.4. *Definimos*

$$B[u, v] := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv]\ dx.$$

Entonces $B[u, v]$ es bilineal, simétrico y $|B[u, v]| \leq c\,\|u\|_H \|v\|_H$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato ver que $B[u,v]$ es bilineal y simétrico.

Para demostrar $|B[u,v]| \leq c\,\|u\|_H\,\|v\|_H$, tenemos lo siguiente:

$$|B[u,v]| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla v|\;dx + \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||u||v|\;dx.$$

Sabemos por Cauchy-Schwartz $|\nabla u \cdot \nabla v| \leq |\nabla u||\nabla v|$.

Por la hipótesis (v2), $V(x) \to V_\infty$ cuando $|x| \to \infty$. Eso nos dice que

$$|V(x) - V_\infty| \leq \delta \quad \text{si } |x| > k \text{ y para alguna } k \in \mathbb{R}.$$

En tal caso,

$$|V(x)| - |V_\infty| \leq |V(x) - V_\infty| \leq \delta.$$

Por lo tanto

$$|V(x)| \leq \delta + |V_\infty|.$$

También, $V(x)$, como es continua, alcanza su máximo en $\overline{B_k(0)}$ que lo definiremos como V_m.
Si $c_m := \max\{V_m, \delta + |V_\infty|\}$ y usando la desigual de Hölder,

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla v| \; + c_m \int_{\mathbb{R}^N} |u||v| \\
&\leq |\nabla u|_2 |\nabla v|_2 + |c_m||u|_2|v|_2 \\
&\leq \|u\|_H\,\|v\|_H\,(1 + |c_m|) \\
&\leq c\,\|u\|_H\,\|v\|_H.
\end{aligned}$$

□

Demostración de la proposición 4.3.

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que el funcional I_λ es de clase $C^1(H,\mathbb{R})$ con derivada localmente Lipschitz continua , es decir, I_λ es de clase $C(H,\mathbb{R})$ y su derivada I'_λ, definida como el mapeo $I'_\lambda : H \to H'$, es localmente Lipschitz continua. Para esto vamos a escribir el funcional I_λ de la siguiente manera.

$$I_\lambda = \tfrac{1}{2}J - \lambda K.$$

Donde

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\;dx \qquad y \qquad K(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\;dx.$$

A continuación demostraremos la existencia de la derivada de Gâteaux para K.

Sea $u, h \in H$. Dada $x \in \mathbb{R}^N$ y $0 < |t| < 1$, por el teorema del valor medio, existe $\lambda = \lambda(x,t) \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(u+th) - F(u)}{t} = f(u + \lambda th)h, \text{ donde escribimos } u \text{ y } h \text{ por } u(x) \text{ y } h(x).$$

Por consiguiente,

$$\frac{|F(u+th) - F(u)|}{|t|} = |f(u + \lambda th)h|.$$

Sea $k = p+1$, donde p es la misma que en las hipótesis para f, o bien $1 < p < \infty$ si $N = 2$ o bien $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$. Entonces tenemos que o bien $2 < k < \infty$ si $N = 2$ o bien $2 < k < \frac{N+2}{N-2} + 1 = \frac{2N}{N-2} = 2^*$ si $N \geq 3$. Usando un teorema clásico de análisis funcional sobre los encajes de espacios de Sobolev se tiene que

$$H \subset L^k(\mathbb{R}^N). \tag{4-5}$$

(véase [7], teorema 16.18 y teorema 17.6).

Gracias a (f1) sabemos que

$$|f(u + \lambda th)h| < C\left(|u + \lambda th|^{k-1} + |u + \lambda th|\right)|h|.$$

Como $|t| < 1$ y $\lambda \in (0,1)$,

$$|f(u + \lambda th)h| < C\left((|u| + |h|)^{k-1} + |u| + |h|\right)|h|.$$

Recordemos la siguiente propiedad. Si $0 \leq a, b$, y definiendo $c = \max\{a,\ b\}$, tenemos que $(a+b)^k \leq 2^k c^k \leq 2^k(a^k + b^k)$. Entonces

$$\begin{aligned} &C\left((|u| + |h|)^{k-1} + |u| + |h|\right)|h| \\ &\leq C\left(2^{k-1}(|u|^{k-1} + |h|^{k-1}) + |u| + |h|\right)|h| := g, \end{aligned} \tag{4-6}$$

y luego

$$\frac{|F(u+th) - F(u)|}{|t|} \leq g. \tag{4-7}$$

Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad del triángulo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \ \leq 2C\left(\|u\|_k^{k-1} + \|h\|_k^{k-1}\right)\|h\|_k + \left(\|u\|_2 + \|h\|_2\right)\|h\|_2.$$

Por (4-5) y lo anterior,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \ < \infty. \tag{4-8}$$

Ahora calculemos la derivada.

$$[d_G K(u)](h) = \lim_{t \to 0} \frac{K(u+th) - K(u)}{t}.$$

Usando (4-7) y (4-8), para aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (véase [7], teorema 13.26), tenemos que

$$[d_G K(u)](h) = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} f(u+\lambda th)h\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h\ dx.$$

Aquí también podemos concluir fácilmente que $d_G K(u) \in H'$.

El siguiente paso será ver que la derivada K' existe y es localmente Lipschitz continua. Por el teorema 2.8, basta con ver que el mapeo $[d_G K(\cdot)]$ es localmente Lipschitz continuo.

Notemos primero que existen $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$ tales que $f = f_1 + f_2$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $|f_1'(s)| \leq C$ y $|f_2'(s)| \leq C|s|^{p-1}$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Para ver esto, sea $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\psi \equiv 1$ en el intervalo $[-1,1]$ y $\psi \equiv 0$ en el conjunto $\mathbb{R}\setminus[-2,2]$. Entonces basta definir

$$f_1(s) := \int_0^s \psi(x)f'(x)\ dx \quad \text{y} \quad f_2 := f - f_1.$$

Para $s, t \in \mathbb{R}$ existe $\lambda \in [\text{mín}\{s,t\}, \text{máx}\{s,t\}]$ tal que

$$|f_1(s) - f_1(t)| = |f_1'(\lambda)||s-t| \leq C|s-t|$$

y

$$\begin{aligned} |f_2(s) - f_2(t)| &= |f_2'(\lambda)||s-t| \\ &\leq C|\lambda|^{p-1}|s-t| \\ &\leq C(|s|^{p-1} + |t|^{p-1})|s-t|. \end{aligned}$$

Para $u,\ v,\ h \in H$, lo anterior implica que

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}(f_1(u) - f_1(v))h\ \right| &\leq C\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}|u-v||h|\ dx \leq C\left\|u-v\right\|_2\left\|h\right\|_2 \\ &\leq C\left\|u-v\right\|_H\left\|h\right\|_H, \end{aligned}$$

es decir,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f_1(u) - f_1(v))h\right| \leq C\left\|u-v\right\|_H\left\|h\right\|_H, \tag{4-9}$$

y

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f_2(u) - f_2(v))h\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u-v||h|. \tag{4-10}$$

Usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$C\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u-v||h| \leq C\left(\left\|u\right\|_k^{k-1} + \left\|v\right\|_k^{k-1}\right)\left\|u-v\right\|_k\left\|h\right\|_k. \tag{4-11}$$

Haciendo uso de la demostración del teorema 2.19, que usa la desigualdad de interpolación, tenemos que

$$C\left(\|u\|_k^{k-1}+\|v\|_k^{k-1}\right)\|u-v\|_k\|h\|_k \le C\left(\|u\|_H^{k-1}+\|v\|_H^{k-1}\right)\|u-v\|_H\|h\|_H. \tag{4-12}$$

Juntando las desigualdades (4-10), (4-11) y (4-12) obtenemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f_2(u)-f_2(v))h\ dx\right| \le C\left(\|u\|_H^{k-1}+\|v\|_H^{k-1}\right)\|u-v\|_H\|h\|_H. \tag{4-13}$$

En combinación con (4-9) y (4-13),

$$|(d_GK(u)-d_GK(v))\,h| \le C\left(1+\|u\|_H^{k-1}+\|v\|_H^{k-1}\right)\|u-v\|_H\|h\|_H.$$

Así que

$$\|d_GK(u)-d_GK(v)\|_{H'} \le C\left(1+\|u\|_H^{k-1}+\|v\|_H^{k-1}\right)\|u-v\|_H.$$

En consecuencia, d_GK es Lipschitz continuo en conjuntos acotados y particularmente es localmente Lipschitz continuo.

Ahora probemos lo mismo para J. Por el Lema 4.4 tenemos la siguiente desigualdad:

$$|J(u)| = |B[u,u]| \le C\|u\|_H^2.$$

Esto nos asegura la existencia de la derivada de Fréchet, como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} J(u_0+v)-J(u_0) &= B[u_0+v,u_0+v]-B[u_0,u_0] \\ &= B[u_0,u_0]+2B[u_0,v]+B[v,v]-B[u_0,u_0]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$J(u_0+v)-J(u_0) = 2B[u_0,v]+B[v,v],$$

y como $|B[v,v]| \le C\|v\|_H^2$,

$$\lim_{\|v\|_H\to 0}\frac{|B[v,v]|}{\|v\|_H} = 0.$$

Por consiguiente, $DJ(u_0)v = 2B[u_0,v]$.

Para ver que $DJ(u)$ es Lipschitz continua tomaremos $u, v \in H$. Por el Lema 4.4,

$$\|DJ(u)-DJ(v)\|_{H'} = \sup_{h\in H,\ h\neq 0}\frac{|2B[u,h]-2B[v,h]|}{\|h\|_H} \le C\|u-v\|_H.$$

□

Lema 4.5. *Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$ tal que*

$$c_\varepsilon\|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0-\varepsilon)\|u\|_2^2 \le \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\ dx, \quad \forall u \in H. \tag{4-14}$$

En particular, con las hipótesis (V1), (V2) y (f5), la norma $\|\cdot\|$, definida por

$$\|u\|^2 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\ dx,$$

es equivalente a $\|\cdot\|_H$.

Demostración. Para $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ definimos

$$\mu_\delta = \inf_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}((1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\ dx}{\|u\|_2^2},$$

Como V es continua, (v2) implica que $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > -\infty$, así que

$$\mu_\delta \geq \inf_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\ dx}{\|u\|_2^2} \geq \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > -\infty.$$

Más aún, $\delta \longmapsto \mu_\delta$ es decreciente y $\mu_\delta \leq \alpha_0$ para todo $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. En consecuencia, existe $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta \leq \alpha_0$.

Para cada $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ existe $u_\delta \in H$ tal que $\|u_\delta\|_H = 1$ y

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}((1-\delta)|\nabla u_\delta|^2 + V(x)u_\delta^2)\ dx}{\|u_\delta\|_2^2} \leq \mu_\delta + \delta.$$

Como $\delta \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\frac{\|\nabla u_\delta\|_2^2}{\|u_\delta\|_2^2} &\leq 2(1-\delta)\frac{\|\nabla u_\delta\|_2^2}{\|u_\delta\|_2^2} \leq 2\frac{\int_{\mathbb{R}^N}((1-\delta)|\nabla u_\delta|^2 + V(x)u_\delta^2)\ dx}{\|u_\delta\|_2^2} \\ &\leq 2(\mu_\delta + \delta) \leq 2\alpha_0 + 1.\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\delta|^2 + V(x)u_\delta^2)\ dx}{\|u_\delta\|_2^2} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}((1-\delta)|\nabla u_\delta|^2 + V(x)u_\delta^2)\ dx}{\|u_\delta\|_2^2} + \delta\frac{\|\nabla u_\delta\|_2^2}{\|u_\delta\|_2^2} \\ &\leq \mu_\delta + 2\delta(\alpha_0 + 1).\end{aligned}$$

Es decir, $\alpha_0 \leq \lim_{\delta\to 0}\mu_\delta$. Esto muestra que $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta = \alpha_0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por lo anterior existe $c_\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $\alpha_0 - \varepsilon \leq \mu_{c_\varepsilon}$ y luego

$$\alpha_0 - \varepsilon \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N}((1-c_\varepsilon)|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\ dx}{\|u\|_2^2} \quad \forall u \in H\setminus\{0\}.$$

Esto implica la propiedad (4-14), y como $\|V(x)\|_\infty < \infty$, se sigue la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|$.

$\square$

Lema 4.6. *Para toda $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon |s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Como $f'(0) = 0$, existe $\kappa > 0$ tal que $\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq \varepsilon$ para $s \in [-\kappa, \kappa]$.

Por otro lado existe $C_\varepsilon > 0$ tal que, si $|s| \geq \kappa$,

$$\frac{||f(s)| - \varepsilon|s||}{|s|^p} \leq \frac{C\left(|s| + |s|^p\right)}{|s|^p} \leq C_\varepsilon.$$

En consecuencia,

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon |s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Lema 4.7. *Asumiendo (f1)-(f5), (v1)-(v3). Se da lo siguiente:*

i) Existe $v \in H \setminus \{0\}$, con $I_\lambda(v) \leq 0$ para todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$.

ii) $c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(\gamma(0)), I_\lambda(\gamma(1))\}$, para toda $\lambda \in \left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$ donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H)$ tal que $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$.

Demostración. Por (f5), tenemos que $F \geq 0$. Esto implica que

$$-\lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\ dx \leq -\tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\ dx \quad \forall\ \lambda \in [\tfrac{1}{2}\ ,\ 1] \text{ y } \forall u \in H.$$

Por lo cual,

$$I_\lambda(u) \leq I_{\frac{1}{2}}(u) \quad \forall u \in H.$$

Primero mostremos que $\lim_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \infty$.

Sea $C > 0$. Por (f4) existe s_0 tal que

$$\frac{f(s)}{s} \geq 2C \quad \text{para } s \geq s_0.$$

Se sigue, para $s \geq s_0$, que

$$\begin{aligned} \tfrac{F(s)}{s^2} &\geq \tfrac{1}{s^2}\int_0^{s_0} f(t)\ dt + \tfrac{2C}{s^2}\int_{s_0}^{s} t\ dt \\ &= \tfrac{1}{s^2}\int_0^{s_0} f(t)\ dt + C\tfrac{s^2 - s_0^2}{s^2} \ \to C \end{aligned}$$

cuando $s \to \infty$, así que $\liminf_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} \geq C$. Como C fue arbitrario, $\lim_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \infty$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi \geq 0$ y $\varphi \neq 0$. Para $t > 0$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
I_{\frac{1}{2}}(t\varphi) &= \tfrac{1}{2}t^2\left(\|\varphi\|^2 - \textstyle\int_{\varphi>0} \dfrac{F(t\varphi)}{t^2\varphi^2}\varphi^2\right) \\
&\to -\infty \text{ cuando } t \to \infty,
\end{aligned}
$$

por lo anterior y por el lema de Fatou, (véase [7], teorema 13.24).

Para t suficientemente grande definimos $v := t\varphi$, así que $I_\lambda(v) \leq I_{\frac{1}{2}}(v) \leq 0$ para $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Por el Lema 4.5 existe $C_1 > 0$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)\, dx \geq C_1 \|\nabla u\|_2^2 + \tfrac{2\alpha_0}{3} \|u\|_2^2 \quad \forall u \in H.
$$

Después de integrar f y usando el Lema 4.6 existe C_2 tal que $|F(s)| \leq \frac{\alpha_0}{6}s^2 + C_2|s|^{p+1}$.

Sea $C_3 := \text{mín}\{\frac{C_1}{2}, \frac{\alpha_0}{6}\} > 0$. Existe $\delta < \|v\|_H$ tal que para todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ y para toda $u \in H$ con $\|u\|_H \leq \delta$:

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \tfrac{C_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \tfrac{\alpha_0}{3} \|u\|_2^2 - \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\alpha_0}{6}u^2 + C_2|u|^{p+1}\right) \\
&\geq C_3 \|u\|_H^2 - C_4 \|u\|_H^{p+1} \\
&\geq C \|u\|_H^2.
\end{aligned}
$$

Si $\gamma \in \Gamma$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $t \in [0,1]$ tal que $\|\gamma(t)\|_H = \delta$, así que

$$
\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \geq C\delta^2.
$$

Por lo tanto,

$$
c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \geq C\delta^2.
$$

□

Proposición 4.8. *Bajo (f1)-(f5) y (v1), existe $\delta_0 > 0$, independiente de $\lambda \in [\frac{1}{2}\ ,\ 1]$, tal que*

$$
\|u\|_H \geq \delta_0 \text{ para cualquier } u \text{ punto crítico no trivial de } I_\lambda.
$$

Demostración. Sea u punto crítico. Como u es punto crítico cumple lo siguiente:

$$
0 = I_\lambda'(u)[u] = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\, dx.
$$

Eso implica, por el Lema 4.5, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$
\varepsilon \|u\|_H^2 \leq \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)u|\, dx.
$$

Por el Lema 4.6 existe $C > 0$, indepependiente de u, tal que

$$|f(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s| + C|s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Usando las dos desigualdades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u\|_H^2 &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |f(u)u| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 + C \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} \|u\|_H^2 + C \|u\|_H^{p+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta_0 := \left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \|u\|_H .$$

□

Siguiendo con el cumplimiento de las hipótesis del teorema 3.3 si escribimos $I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx = A(u) - \lambda B(u)$, por la equivalencia de normas se satisface que $A(u) \to \infty$ cuando $\|u\|_H \to \infty$, y $B(u) \geq 0$ para toda $u \in H$, por como se definió $F(u)$. Entonces, por el teorema 3.3 y el Lema 4.7, podemos asegurar que existe una sucesión acotada Palais-Smale en el nivel c_λ para casi toda $\lambda \in [\frac{1}{2}\ ,\ 1]$. Sobre la convergencia de estas sucesiones acotadas se tiene el siguiente resultado.

LEMA 4.9. *Asumiendo (f1)-(f5), (v2), (v3) y tomando $\lambda \in [\frac{1}{2}\ ,\ 1]$ arbitraria pero fija se tiene que cualquier sucesión de Palais-Smale acotada (u_n) para I_λ que satisfaga* $\limsup_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda$ *y $\|u_n\|_H \nrightarrow 0$, después de extraer una subsucesión, converge débilmente a un punto crítico no trivial u_λ de I_λ, con $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$.*

Para demostrar este Lema haremos uso del siguiente teorema:

TEOREMA 4.10. *Suponiendo (f1)-(f5) y (v1). Entonces dada una sucesión de Palais-Smale acotada (u_n) para I y $I^\infty : H \to \mathbb{R}$ definido como*

$$I^\infty(u) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u),$$

existe una subsucesión de (u_n) que denotaremos (u_n), un entero $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $w^k \in H$ con $1 \leq k \leq l$ tal que:

i)

$$(u_n) \text{ converge débilmente a } u_0, \text{ con } I'(u_0) = 0,$$

ii)

$$w^k \neq 0 \ \text{ y } \ (I^\infty)'(w^k) = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq l,$$

iii)

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k).$$

Este resultado es el teorema 5.1 de [17], la demostración de este teorema no se incluye porque con las hipótesis adicionales (f3)-(f5) es un resultado bastante conocido (véase [], teorema 8.4).

Demostración de el Lema 4.9.

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale acotada para I_λ que satisface

$$\limsup_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda \quad \text{y} \quad \|u_n\|_H \nrightarrow 0.$$

Por el teorema anterior, después de tomar una subsucesión, sabemos que

$$I_\lambda(u_n) \to I_\lambda(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(\omega_\lambda^k), \tag{4-15}$$

con $l \geq 0$, u_0 un punto crítico de I_λ, y $I_\lambda^\infty : H \to \mathbb{R}$ definido como

$$I_\lambda^\infty(u) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2) - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

Los ω_λ^k, para $k = 1, ..., l$, son puntos críticos no triviales de I_λ^∞.
Notemos que cualquier solución de

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u) \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) = H, \tag{4-16}$$

es solución de (A-1) si definimos g de la siguiente forma:

$$g(s) = \begin{cases} -V_\infty s + \lambda f(s), & \text{para} \quad s \geq 0. \\ \\ -g(-s), & \text{para} \quad s < 0. \end{cases}$$

Para comprobar lo anterior, tenemos que ver que g cumple las hipótesis (g0)-(g3) del Apéndice A. (g0) se da por la definición de g y la continuidad de f. (g1) es por (f1) aplicada de la siguiente forma

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{-V_\infty s + \lambda f(s)}{s} = -V_\infty.$$

(g2) es por (f1), ya que, cuando $N \geq 3$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^{(N+2)/(N-2)}} = \lim_{s\to\infty} \frac{-V_\infty s + \lambda f(s)}{s^{(N+2)/(N-2)}} = \lim_{s\to\infty} \frac{-V_\infty s}{s^{(N+2)/(N-2)}} = 0;$$

cuando $N = 2$, sea $\alpha > 0$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{e^{\alpha s^2}} \leq \lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{s^2} = 0,$$

En consecuencia, si $C > 0$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|g(s)| \leq Ce^{\alpha s^2}$ cuando $k < s$. Si $0 \leq s \leq k$, existe C_1 tal que

$$|g(s)| \leq C_1 \leq C_\alpha e^{\alpha s^2},$$

por último, tomando $C_2 = \text{mín}\{C, C_\alpha\}$, tenemos

$$|g(s)| \leq C_2 e^{\alpha s^2}, \quad \text{para } s \in \mathbb{R}.$$

Para ver que se satisface (g3), por (f4), si s es suficientemente grande,

$$g(s) > Ms \quad \text{para alguna } M > 0,$$

por lo tanto, existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$.

Con los argumentos anteriores podemos concluir que la solución de mínima energía para (A-1) (definiendo g como antes) es también una solución de mínima energía para (4-16) y viceversa.

Ahora, tomando un punto crítico no trivial ω_λ de I_λ^∞, sabemos que $I_\lambda^\infty(\omega_\lambda)$ pertenece al siguiente conjunto

$$S := \{I_\lambda^\infty(u) \mid u \in H \setminus \{0\} \text{ es solución de (4-16)}\},$$

por el teorema A.2 $\text{ínf}(S) > 0$. Por lo tanto, $I_\lambda^\infty(\omega_\lambda) > 0$, y entonces,

$$I_\lambda(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(\omega_\lambda^k) = \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda.$$

Por lo tanto, $I_\lambda(u_0) \leq c_\lambda$.

Solo bastaría probar que $u_0 \neq 0$. Sabemos que $\|u_n\|_H \nrightarrow 0$. Si $u_0 = 0$, por la condición (4-15)

$$c_\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(\omega_\lambda^k).$$

Lo anterior ocurre porque $I_\lambda(0) = 0$. Como $I_\lambda^\infty(\omega_\lambda^k) \geq \text{ínf}\{I_\lambda^\infty(u) \mid u \neq 0,\ (I_\lambda^\infty)'(u) = 0\}$, tenemos que

$$\frac{c_\lambda}{l} \geq m_\lambda := \text{ínf}\{I_\lambda^\infty(u) \mid u \neq 0,\ (I_\lambda^\infty)'(u) = 0\}.$$

En consecuencia,

$$c_\lambda \geq m_\lambda.$$

A continuación veamos que

$$c_\lambda < m_\lambda.$$

Sea w_λ una solución de mínima energía para (4-16), la cual existe por teorema A.2. Por el teorema A.3, podemos encontrar una trayectoria $\gamma(t) \in C([0\ ,\ 1], H)$ tal que $\gamma(t)(x) > 0$ para cualquier $(x, t) \in (0, 1] \times \mathbb{R}^N$; $\gamma(0) = 0$; $I_\lambda^\infty(\gamma(1)) < 0$; $w_\lambda \in \gamma([0\ , 1])$,

y
$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda^\infty(\gamma(t)) = I_\lambda^\infty(\omega_\lambda).$$
Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $V(x) \not\equiv V_\infty$ en (v3). En otro caso el resultado está contenido en el teorema A.2. Entonces
$$I_\lambda((\gamma(t)) < I_\lambda^\infty((\gamma(t)) \ \forall t \in (0\ ,\ 1].$$
Por la definición de c_λ se tiene que
$$c_\lambda \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda((\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^\infty((\gamma(t)) = m_\lambda.$$
Lo anterior es una contradicción. Por lo que, $u_0 \neq 0$.

□

OBSERVACIÓN 4.11. Combinando el teorema 3.3, que garantiza la existencia de sucesiones Palais-Smale acotadas (u_n) para casi toda $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, y que cumplen que $\limsup_{n\to\infty} u_n \leq c_\lambda$; el Lema 4.7, que ayuda a que se cumplan las hipótesis del teorema 3.3 para el funcional I_λ; la observación que si $I_\lambda \to c_\lambda \neq 0$, entonces $\|u_n\|_H \nrightarrow 0$, y el Lema 4.9 se deduce que I_λ tiene un punto crítico no trivial para casi todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. Así, podemos decir que existe una sucesión $(\langle\lambda_j, u_j\rangle)$ en $[\frac{1}{2}, 1]\times H$ con $\lambda_j \to 1$ y $u_j \neq 0$ que satisface $I'_{\lambda_j}(u_j) = 0$ y $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$.

Demostración del teorema 4.1.

Recordemos que $I_1 = I$, entonces definamos $c := c_1$.

La idea de la demostración es probar que la sucesión de puntos críticos (u_j), obtenida en la sección anterior, es acotada. Esta sucesión se conforma de los limites débiles de las sucesiones BPS. También se tiene que probar que esta sucesión, formada por los puntos críticos, es una sucesión de Palais-Smale para I y que satisface $\limsup_{j\to\infty} I(u_j) \leq c$ y $\|u_j\|_H \nrightarrow 0$. Con esto podemos aplicar el Lema 4.7 y obtener así un punto crítico para I, lo cual ayuda a finalizar la demostración del teorema 4.1. Para probar que (u_j) es acotada se necesita la siguiente identidad de tipo Pohozaev.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sea $u(x)$ un punto crítico de I_λ, con $\lambda \in [\frac{1}{2}\ ,\ 1]$ arbitrario; entonces $u(x)$ satisface*
$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\, dx + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x)xu^2\, dx - N\lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx = 0. \tag{4-17}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $u(x)$ es punto crítico de I_λ, entonces se satisface la siguiente ecuación
$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = \lambda f(u(x)), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) = H.$$
Entonces, tenemos que
$$V(x)u(x) \ = \ \Delta u(x) + \lambda f(u(x)).$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por $x \cdot \nabla u(x)$, que está en $\mathbb{R}$, se tiene

$$(V(x)u(x))x \cdot \nabla u(x) \;=\; (\Delta u(x) + \lambda f(u(x)))x \cdot \nabla u(x).$$

Desarrollando la expresión anterior, y tomando por facilidad $V = V(x)$ y $u = u(x)$

$$(Vu)x \cdot \nabla u \;=\; (\Delta u + \lambda f(u))x \cdot \nabla u.$$

Por tanto,

$$Vu\ x \cdot \nabla u \;=\; \Delta u\ x \cdot \nabla u + \lambda f(u)x \cdot \nabla u.$$

En lo siguiente usaremos que u y sus primeras y segundas derivadas parciales tienen decaimiento exponencial al infinito. Esto es una consecuencia de que $V_\infty > 0$. Integrando sobre $\mathbb{R}^N$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} Vu\ x \cdot \nabla u\ dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\ (x \cdot \nabla u)\ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda f(u)x \cdot \nabla u\ dx. \tag{4-18}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} div(\tfrac{1}{2}Vu^2x) \;=\; \tfrac{1}{2}[\nabla \cdot Vu^2x] &= \tfrac{1}{2}\sum \tfrac{\partial}{\partial x_i}Vu^2x_i \\ &= \tfrac{1}{2}\sum \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}(Vu^2)x_i + Vu^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum \left([(\tfrac{\partial}{\partial x_i}V)u^2 + V2u\tfrac{\partial u}{\partial x_i}]x_i + Vu^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}[u^2\ \nabla V \cdot x + V2u\ \nabla u \cdot x + NVu^2] \\ &= \tfrac{1}{2}u^2\ \nabla V \cdot x + Vu\ x \cdot \nabla u + \tfrac{N}{2}Vu^2 \end{aligned}$$

Así, $Vu\ x \cdot \nabla u = div(\frac{1}{2}Vu^2x) - \frac{1}{2}u^2\ \nabla V \cdot x - \frac{N}{2}Vu^2$.

También,

$$\begin{aligned} div[(x \cdot \nabla u)\nabla u] &= \nabla \cdot [(x \cdot \nabla u)\nabla u] \\ &= \sum \tfrac{\partial}{\partial x_i}[(x \cdot \nabla u)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}] \\ &= \sum \left([\tfrac{\partial}{\partial x_i}(x \cdot \nabla u)]\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + (x \cdot \nabla u) \vartriangle u \\ &= \sum_i \left(\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\sum_j [x_j \tfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}]\right) + (x \cdot \nabla u) \vartriangle u \\ &= |\nabla u|^2 + \sum_i \left(\sum_j [x_j \tfrac{2}{2}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)]\right) + (x \cdot \nabla u) \vartriangle u \\ &= |\nabla u|^2 + \sum_i \left(\sum_j [x_j \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2]\right) + (x \cdot \nabla u) \vartriangle u \\ &= |\nabla u|^2 + x \cdot \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + (x \cdot \nabla u) \vartriangle u. \end{aligned}$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
div\left[x\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right] \;=\; \nabla\cdot\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \;&=\; \sum \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\\
&=\; \sum\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}+x_i\tfrac{\partial}{\partial x_i}\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\\
&=\; N\frac{|\nabla u|^2}{2}+x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
(x\cdot\nabla u)\Delta u \quad &= div\left[(x\cdot\nabla u)\nabla u - x\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right]+N\frac{|\nabla u|^2}{2}-|\nabla u|^2\\
&= div\left[(x\cdot\nabla u)\nabla u - x\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right]+\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2).
\end{aligned}
$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
div(xF(u)) \;=\; \nabla\cdot xF(u) \;&=\; \sum \tfrac{\partial}{\partial x_i}(x_iF(u))\\
&=\; \sum\left(x_i\tfrac{\partial}{\partial x_i}F(u)+F(u)\right)\\
&=\; \sum\left(x_if(u)\tfrac{\partial}{\partial x_i}u+F(u)\right)\\
&=\; f(u)(x\cdot\nabla u)+NF(u).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, multiplicando por λ la ecuación anterior tenemos que $\lambda f(u)(x\cdot\nabla u) = div(x\lambda F(u)) - N\lambda F(u)$.

Sustituyendo la expresión anterior en (4-18) se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(div\left[\tfrac{1}{2}Vu^2x\right]-\tfrac{1}{2}u^2\ \nabla V\cdot x-\tfrac{N}{2}Vu^2\right)\ dx \;=\\
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(div\left[(x\cdot\nabla u)\nabla u - x\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right]+\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2\right)\ dx\ +\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(div\left[xF(u)\right]-NF(u)\right)\ dx.
\end{aligned}
\tag{4-19}
$$

Usando el teorema de Gauss y viendo a $\mathbb{R}^N$ como unión de bolas de radio k centradas en el origen (véase [4], proposición 1), en (4-19) se tiene lo que queríamos,es decir,

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\tfrac{1}{2}u^2\ \nabla V\cdot x-\tfrac{N}{2}Vu^2\right)\ dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^N}\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2\ dx\ -\lambda\int_{\mathbb{R}^N}NF(u)\ dx.
$$

□

Aplicaremos la proposición anterior a cada elemento de la sucesión $(\langle\lambda_j,u_j\rangle)$ en $[\frac{1}{2}\ ,\ 1]\times H$, que se obtuvo antes.

PROPOSICIÓN 4.13. *Supongamos las hipótesis (f1)-(f5), (v1)-(v4). Entonces concluimos que la sucesión (u_j) de puntos críticos en H, descrita en la observación 4.11, es acotada.*

Demostración. Sabemos que $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j} \leq c_{\frac{1}{2}}$. La primera desigualdad se muestra en el Lema 4.9, mientras que la segunda es consecuencia de que el mapeo $\lambda \longmapsto c_\lambda$ es continuo y decreciente. Por tanto,

$$I_{\lambda_j}(u_j) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2)\ dx - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\ dx\ \leq c_{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando por N ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2)\ dx - N\lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\ dx\ \leq Nc_{\frac{1}{2}}.$$

Lo anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2\ dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2)\ dx\ - N\lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\ dx\ \leq Nc_{\frac{1}{2}}.$$

Por la proposición 4.12,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2\ dx - \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x)xu^2\ dx \leq Nc_{\frac{1}{2}}. \tag{4-20}$$

La hipótesis (v4) nos dice que $\exists\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|x||\nabla V(x)| \leq (\varphi(x))^2$. Por propiedades de la integral aplicadas a (4-20), y usando la hipótesis (v4), obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2\ \leq \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\ \varphi^2\ + Nc_{\frac{1}{2}}. \tag{4-21}$$

Como u_j es punto crítico

$$I'_{\lambda_j}(u_j)(\varphi^2 u_j) = 0.$$

Desarrollando la derivada

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)\ dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_j^2\varphi^2\ dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\varphi^2\ dx. \tag{4-22}$$

Por (f4) $\text{lím}_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$. Entonces, para toda $L > 0$ existe $C(L) > 0$ tal que $f(s)s \geq Ls^2 - C(L)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\varphi^2\ \geq \int_{\mathbb{R}^N} Lu_j^2\varphi^2\ - C(L)\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2\ = L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\varphi^2\ - C(L)\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2.$$

Sabemos que $C(L)\int_{\mathbb{R}^N}\varphi^2\ dx =: C_2(L) > 0$, porque $\varphi \in L^2$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\varphi^2\ \geq L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\varphi^2\ - C_2(L),$$

en unión con (4-22),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)\ dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_j^2\varphi^2\ dx \geq \lambda_j\left[L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\varphi^2\ dx - C_2(L)\right]. \tag{4-23}$$

Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}|\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)| &= \left|\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^2 |\nabla u_j|^2 + 2u_j \varphi \nabla\varphi \nabla u_j)\right| \\ &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 |\nabla u_j|^2 \ + 2\int_{\mathbb{R}^N} |u_j| \ |\varphi||\nabla\varphi \nabla u_j|.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j) \ \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 |\nabla u_j|^2 \ + 2\int_{\mathbb{R}^N} |u_j| \ |\varphi||\nabla\varphi| \ |\nabla u_j|.$$

La propiedad de números reales; $0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, implica que $2ab < a^2 + b^2$, nos permite decir que

$$\begin{aligned}|\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)| &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 |\nabla u_j|^2 \ + \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 \ |\varphi|^2 \ dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 \ |\nabla u_j|^2 \\ &\leq (\|\varphi\|_\infty^2 + \|\nabla\varphi\|_\infty^2) \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 \ + \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 \ |\varphi|^2.\end{aligned}$$

Luego, aplicando (4-21) a la desigualdad anterior, tenemos que

$$|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)| \leq (\|\varphi\|_\infty^2 + \|\nabla\varphi\|_\infty^2) \left(\tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2 \ + Nc_{\frac{1}{2}}\right) + \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2.$$

Entonces, para alguna $C_3 > 0$, se cumple que

$$|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j)| \leq C_3 \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2 \ + C_3. \tag{4-24}$$

Por la hipótesis (v3), sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_j^2 \varphi^2 \ dx \leq V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ dx. \tag{4-25}$$

Juntando (4-23) y (4-25), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\varphi^2 u_j) \ + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ \geq \lambda_j \left[L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ - C_2(L)\right]. \tag{4-26}$$

Juntando (4-24) y (4-26),

$$C_3 \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2 \ + C_3 + V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ \geq \lambda_j \left[L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ - C_2(L)\right].$$

Entonces,

$$\lambda_j^{-1} \left[(C_3 + V_\infty) \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2 \ + C_3\right] \geq L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ - C_2(L).$$

Lo que implica que

$$2(C_3 + V_\infty) \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \ \varphi^2 \ + 2C_3 \geq L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \varphi^2 \ - C_2(L).$$

Tomando $L > 0$ suficientemente grande para que $L > 2(C_3 + V_\infty)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\, \varphi^2 + \leq \frac{2C_3 + C_2(L)}{L - 2(C_3 + V_\infty)}.$$

Lo que nos dice que $\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\, \varphi^2$ es acotado, y, por (4-21), $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2$ también es acotado.

Ahora, vamos a probar que

$$\|u_j\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2$$

se mantiene acotada cuando $j \to \infty$. Para ello definimos $r_j := \|u_j\|_2^{2/N}$, y supongamos que

$$r_j \to \infty \text{ cuando } j \to \infty.$$

Sea $\tilde{u}_j(x) = u_j(r_j x)$, entonces

$$\nabla \tilde{u}_j(x) = r_j \nabla u_j(r_j x).$$

Por el teorema de cambio de variable,

$$\|\nabla \tilde{u}_j\|_2^2 = r_j^{2-N} \|\nabla u_j\|_2^2.$$

También, por el teorema de cambio de variable,

$$\|\tilde{u}_j\|_2^2 = r_j^{-N} \|u_j\|_2^2 = 1. \tag{4-27}$$

En particular la sucesión $(\tilde{u}_j)$ es acotada en H (recordar que el problema tratado aquí es con $N \geq 2$). Podemos observar que $\tilde{u}_j$, al usar la regla de la cadena, es una solución débil de

$$-\frac{1}{r_j^2}\Delta \tilde{u}_j + V(r_j x)\tilde{u}_j = \lambda_j f(\tilde{u}_j) \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \tag{4-28}$$

Ahora tomemos una sucesión $(y_j) \subset \mathbb{R}^N$ y definimos $v_j \in H$ como una traslación de $\tilde{u}_j$ definida por $v_j(x) = \tilde{u}_j(x + y_j)$. Como la sucesión (v_j) es acotada en H podemos suponer que existe $v \in H$ tal que

$$\begin{aligned} & v_j \rightharpoonup v && \text{en } H, \\ & v_j(x) \to v(x) && \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ & v_j \to v && \text{en } L^{p+1}_{loc}(\mathbb{R}^N) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

De las tres afirmaciones anteriores, la segunda se da de forma inmediata por la convergencia anterior. Para la tercera véase [20], Capítulo 22, teorema 2.

Cada v_j es solución débil de

$$-\frac{1}{r_j^2}\Delta v_j + V\left(r_j(x + y_j)\right) v_j = \lambda_j f(v_j).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (y_j) tiene a lo más un punto de agregación en $\mathbb{R}^N$.
En consecuencia, $V(r_j(x+y_j)) \to V_\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que, para $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ fijo,

$$
\begin{aligned}
0 &= \operatorname{lím}_{j\to\infty} \tfrac{1}{r_i^2} \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_j \nabla \psi \; dx \\
&= \operatorname{lím}_{j\to\infty} \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda_j f(v_j) - V(r_j(x+y_j))v_j\right) \psi \; dx \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(f(v) - V_\infty v\right) \psi \; dx.
\end{aligned}
$$

Aquí usamos que $f(v_j) \to f(v)$ en $L_{loc}^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ por las propiedades de f.
Como $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ fue arbitraria, $f(v(x)) = V_\infty v(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$. Después de cambiar v en un conjunto nulo, podemos suponer que $f(v) \equiv V_\infty v$ en $\mathbb{R}^N$, y $v \in H$ todavía es cierto. No sabemos si v es continuo pero usaremos que v es Lipschitz continuo en casi cada línea en $\mathbb{R}^N$ como sigue: definimos los conjuntos

$$A_1 := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} | \forall t \in \mathbb{R} : \; v(x',t) = 0\}$$

$$A_2 := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} | t \longmapsto v(x',t) \text{ es continuo y } \exists t_0 \in \mathbb{R} : \; v(x',t_0) \neq 0\}$$

$$A_3 := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} | t \longmapsto v(x',t) \text{ no es continuo}\}.$$

Entonces $\{A_1, A_2, A_3\}$ forman una partición de $\mathbb{R}^{N-1}$. A_3 es un conjunto nulo (véase [29], teorema 2.1.4). Si $x' \in A_2$, el teorema del valor intermedio y el hecho de que 0 es un cero aislado de $s \longmapsto f(s) - s$ implica que

$$|v(x',t)| \geq \mu := \operatorname{mín}\{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | f(s) - s = 0\} > 0.$$

Si A_2 no fuera nulo en R^{N-1} entonces tendríamos $\infty > \|v\|_2^2 \geq \int_{A_2\times\mathbb{R}} v^2 \geq \int_{A_2\times\mathbb{R}} \mu^2 = \infty$, una contradicción. Entonces A_2 es nulo en R^{N-1} y luego, como $(A_2 \cup A_3) \times \mathbb{R}$ es nulo en $\mathbb{R}^N$, $v(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, es decir, $v_j \to 0$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto,

$$\int_{B_1(0)} \tilde{u}_j^2(x+y_j) \; dx \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{4-29}$$

Vamos a probar que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} \tilde{u}_j^2 \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{4-30}$$

Para cada j escogemos $y_j \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(y_j)} \tilde{u}_j^2 \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} \tilde{u}_j^2 - \frac{1}{j}.$$

Ahora (4-29) implica (4-30).

Ahora tenemos que usar el siguiente Lema:

Lema 4.14. *Supongamos que* (v_n) *es acotada en* H *y que*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(z)}|v_n|^2\to 0.$$

Entonces $\|v_n\|_r\to 0$ *para* $r\in(2,2N/(N-2))$*, donde* $N\geq 3$*, y para* $r\in(2,\infty)$*, donde* $N=1,2$*.*

Para la demostración de este resultado (véase [21], Lema I.1).

Continuación de la demostración de la proposición 4.13.

Notemos que la sucesión $(\tilde{u}_j)$ es acotada por (4-27), y, por (4-30), satisface las hipótesis del Lema 4.14. Consideremos además el valor p dado en las hipótesis de f, concluimos que $\|\tilde{u}_j\|_{p+1}\to 0$ cuando $j\to\infty$.

Sea $\delta>0$. Por el Lema 4.6 existe $C_\delta>0$ tal que

$$|f(s)||s|\leq \delta s^2+C_\delta|s|^{p+1}\quad \forall s\in\mathbb{R}.$$

Haciendo $s=\tilde{u}_j$, integrando respecto a x, usando la ecuación (4-27) y recordando el Lema 4.14, que nos dice que $\|\tilde{u}_j\|_{p+1}\to 0$ cuando $j\to\infty$, tenemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f(\tilde{u}_j))\tilde{u}_j\right|\leq \delta\,\|\tilde{u}_j\|_2^2+C_\delta\,\|\tilde{u}_j\|_{p+1}^{p+1}\to\delta \text{ cuando } j\to\infty. \tag{4-31}$$

Como es para toda $\delta>0$, se tiene que $\int_{\mathbb{R}^N}(f(\tilde{u}_j))\tilde{u}_j\,dx\to 0$ cuando $j\to\infty$.

Mostremos que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(r_jx)\tilde{u}_j^2\,dx=V_\infty. \tag{4-32}$$

Para ver esto, sea $\varepsilon>0$. Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $j\geq N$ y $y\in\mathbb{R}^N\setminus B_{r_j}(0)$ se tiene que $|V(y)-V_\infty|\leq\varepsilon$. Para $j\geq N$ esto implica que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(V(r_jx)-V_\infty\right)\tilde{u}_j^2\,dx\right|\\
&\leq \int_{B_1(0)}|V(r_jx)-V_\infty|\,\tilde{u}_j^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}|V(r_jx)-V_\infty|\,\tilde{u}_j^2\,dx\\
&\overset{(4-27)}{\leq} 2\,\|V\|_\infty\int_{B_1(0)}\tilde{u}_j^2\;+\varepsilon\\
&\longrightarrow\varepsilon,\text{ para } j\to\infty,\text{ por (4-30)}.
\end{aligned}$$

Dejando $\varepsilon\to 0$ mostramos (4-32), otra vez usando (4-27).

Ahora, como para cada $j\in\mathbb{N}$ $\tilde{u}_j$ es una solución débil de (4-28); (4-32) y (4-31) implican

$$0\leq\frac{1}{r_j^2}\,\|\nabla\tilde{u}_j\|_2^2=-\int_{\mathbb{R}^N}V(r_jx)\tilde{u}_j^2\,dx+\lambda_j\int_{\mathbb{R}^N}f(\tilde{u}_j)\tilde{u}_j\,dx\to -V_\infty<0,$$

una contradicción. En consecuencia, (r_j) es acotada, lo cual termina la demostración.

$\square$

OBSERVACIÓN 4.15. Cuando $N \geq 3$, probar que $\|u_j\|_2^2$ es acotada resulta mas directo. Sabemos que $I_{\lambda_j}(u_j)u_j = 0$, por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2 \; dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j \; dx.$$

Como en la demostración del Lema 4.6 existe $C > 0$ tal que

$$f(s)s \leq \tfrac{\alpha_0}{2} s^2 + Cs^{2^*} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Usando la definición de α_0 se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|u_j\|_2^2 &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_j|^2 + V u_j^2\right) \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j \\ &\leq \tfrac{\alpha_0}{2} \|u_j\|_2^2 + C \|u_j\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Usando el teorema 2.17 tenemos que

$$\alpha_0 \|u_j\|_2^2 \leq \tfrac{\alpha_0}{2} \|u_j\|_2^2 + C \|\nabla u_j\|_2^{2^*}.$$

Esto prueba que $\|u_j\|_2^2$ es acotada, ya que $\|\nabla u_j\|_2^p$ es acotada por como observamos en la demostración de la proposición 4.13.

LEMA 4.16. *Dadas las hipótesis (v1)-(v4), (f1)-(f5). Se tiene que la sucesión* $(u_j) \subset H$ *de la observación 4.11 es una sucesión de Palais-Smale para I, que satisface que* $\limsup_{j\to\infty} I(u_j) \leq c$ *y* $\|u_j\|_H \nrightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos ver que, por la proposición 4.8, $\|u_j\|_H \nrightarrow 0$. Ahora tenemos que

$$I(u_j) = I_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1) \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) \; dx. \tag{4-33}$$

Como (u_j) es acotada, $\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)dx$ permanece acotada cuando $j \to \infty$. También, $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$ por el Lema 4.9, y, por el Lema 3.12, $\lim_{j\to\infty} c_{\lambda_j} = c$. Entonces, por (4-33), obtenemos que

$$\limsup_{j\to\infty} I(u_j) \leq c.$$

Y en el dual de H,

$$I'(u_j) = I'_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1)f(u_j),$$

Entonces, $\lim_{j\to\infty} I'(u_j) = 0$.

Demostración del teorema 4.1.

DEMOSTRACIÓN. La proposición 4.13 nos dice que la sucesión (u_j) de la observación 4.11 es acotada en H y el Lema 4.16 que esa misma sucesión es una sucesión de Palais-Smale para la que $\limsup_{j\to\infty} I(u_j) \leq c$ y $\|u_j\|_2 \nrightarrow 0$, es decir, satisface las hipótesis del Lema 4.9 para $\lambda = 1$. Entonces I tiene un punto crítico no trivial y por tanto el problema tiene una solución positiva.

$\square$

Apéndice A

Problema autónomo

Aquí los siguientes resultados involucran a $N = 1$. Definimos el siguiente problema autónomo

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{para } u \in H^1(\mathbb{R}^N) = H. \tag{A-1}$$

Con las hipótesis para g:

(g0) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ e impar.

(g1) $-\infty < \liminf_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu < 0$ para $N \geq 3$ y $\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu < 0 \quad$ para $\quad N = 1, 2$.

(g2) $\lim_{s\to 0} \frac{|g(s)|}{s^p} = 0 \quad p = \frac{N+2}{N-2}$ para $N \geq 3$ y cuando $N = 2$, para toda $\alpha > 0$, existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \forall s \geq 0.$$

(g3) Cuando $N \geq 2$, existe $\xi_0 > 0$ tal que $G(\xi_0) > 0$. Cuando $N = 1$, existe $\xi_0 > 0$ tal que

$$G(\xi) < 0. \quad \forall \xi \in (0\ ,\ \xi_0), \quad G(\xi_0) = 0 \quad y \quad g(\xi_0) > 0.$$

Definición A.1. Una solución v de (A-1) es llamada una solución de mínima energía si y solo si

$$J(v) = m, \quad \text{donde } m = \inf\{J(u) \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N) - \{0\} \text{ es solución de } (A-1)\}.$$

$J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, el funcional correspondiente a (A-1)

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \ - \int_{\mathbb{R}^N} G(u),$$

con $G(s) = \int_0^s g(\tau)\, d\tau$.

Teorema A.2. *J esta bien definido y de clase C^1. Más aún, $m > 0$, y existe una solución de energía mínima ω de (A-1), la cual es una solución clásica y satisface $\omega > 0$ sobre $\mathbb{R}^N$.*

Para consultar la demostración de este teorema véase [16], teorema 0.1.

TEOREMA A.3. *Supongamos (g0)-(g3). Entonces*

$$\Gamma_j = \{\gamma \in C([0\ ,\ 1], H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0,\ y\ J(\gamma(1)) < 0\} \neq \varnothing \quad y$$

$$m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) > 0.$$

Más aún, para cualquier solución de energía mínima ω *de (A-1) dada por el teorema anterior, existe* $\gamma \in \Gamma$ *tal que* $\gamma(t)(x) > 0$ *para cualquier* $\langle t, x\rangle \in (0\ ,\ 1] \times \mathbb{R}^N$, $\quad \omega \in \gamma([0\ ,\ 1])$ *y*

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))) = m.$$

Para consultar la demostración de este teorema véase [16], teorema 0.2.

PROPOSICIÓN A.4. *Bajo las hipótesis (g1)-(g2), existen* $c_1 > 0$ *y* δ_0 *tales que*

$$J(u) \geq c_1 \left\|u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},\ donde\ \left\|u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0. \tag{A-2}$$

Para consultar la demostración de este teorema véase [16], lema 1.1 y observación 1.2.

Bibliografía

[1] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. *A primer of nonlinear analysis*. Number 34. Cambridge University Press, 1995.

[2] Antonio Ambrosetti and Paul H Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.

[3] Juan Gabriel Belmonte Beitia. Ecuaciones de schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogenea. 2008.

[4] Henry Berestycki and P-L Lions. Nonlinear scalar field equations, i existence of a ground state. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82(4):313–345, 1983.

[5] Franco Brezzi and Peter A Markowich. The three-dimensional wigner-poisson problem: Existence, uniqueness and approximation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 14(1):35–61, 1991.

[6] Philippe G Ciarlet. *Linear and nonlinear functional analysis with applications*, volume 130. Siam, 2013.

[7] Mónica Clapp. *Análisis matemático*. UNAM, 2015.

[8] Mónica Clapp and Tobias Weth. Multiple solutions of nonlinear scalar field equations. 2005.

[9] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, 71(3):463, 1999.

[10] Aleksandr Sergeevich Davydov et al. *Solitons in molecular systems*. Springer, 1985.

[11] Manuel del Pino and Patricio L Felmer. Semi-classical states for nonlinear schrödinger equations. *journal of functional analysis*, 149(1):245–265, 1997.

[12] Roger K Dodd, Hedley C Morris, JC Eilbeck, and JD Gibbon. Soliton and nonlinear wave equations. *London and New York, Academic Press, 1982, 640 p.*, 1982.

[13] Pavel Drábek and Jaroslav Milota. *Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations*. Springer Science & Business Media, 2007.

[14] Lawrence Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1998.

[15] Louis Jeanjean. On the existence of bounded palais–smale sequences and application to a landesman–lazer-type problem set on $\mathbb{R}^N$. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 129(4):787–809, 1999.

[16] Louis Jeanjean and Kazunaga Tanaka. A remark on least energy solutions in r n. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 2399–2408, 2003.

[17] Louis Jeanjean and Kazunaga Tanaka. A positive solution for a nonlinear schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 443–464, 2005.

[18] Xianqing Li-Jost Jürgen Jost. *Calculus of variations*. Cambridge studies in advanced mathematics 64. Cambridge University Press, 1998.

[19] Yuri S Kivshar and Govind Agrawal. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003.

[20] Peter D. Lax. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2002.

[21] Pierre-Louis Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 1, pages 223–283. Elsevier, 1984.

[22] Vazquez Luis, Streit Ludwig, and Perez-garcia Victor Manuel. *Nonlinear Klein-Gordon and Schrodinger Systems: Theory and Applications*. World Scientific, 1996.

[23] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.

[24] JL Rosales and JL Sánchez-Gómez. Non-linear schrödinger equation coming from the action of the particle's gravitational field on the quantum potential. *Physics Letters A*, 166(2):111–115, 1992.

[25] Laurent Schwartz. Cours d'analyse. 1960.

[26] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

[27] Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*, volume 139. Springer Science & Business Media, 1999.

[28] Michel Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Springer Science & Business Media, 1997.

[29] William P Ziemer. *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*, volume 120. Springer Science & Business Media, 2012.