



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**RIGIDEZ TOPOLÓGICA DEL GRAFO DE  
SCHMUTZ**

**T E S I S**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
**MAESTRA EN CIENCIAS**

PRESENTA:

**ANAYELI TOMÁS ALVAREZ**

DIRECTOR DE TESIS  
DR. JESÚS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ  
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM  
CAMPUS MORELIA

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A todas esas personas que me han inspirado a realizar mis sueños.*

## Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	7
Capítulo 1. Preliminares	9
1. Superficies	9
2. Grupo modular de Teichmüller	12
Capítulo 2. Automorfismos del grafo de Schmutz	19
Capítulo 3. Morfismos de $\mathcal{G}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ .	33
1. Rigidez de $\mathcal{G}(S)$	34
2. Endomorfismos de $\mathcal{N}(S)$ .	46
Capítulo 4. Conclusiones	67
Bibliografía	69
Referencias	69



## Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mi familia, que siempre ha estado conmigo, en las buenas y las malas, que me ha enseñado a esforzarme y cumplir mis sueños y me ha impulsado a realizar cada una de mis metas. A mis papás que me aman y que siempre han aguantado mis locuras. A mi hermano Juan y mi cuñada Lore por amarme, apoyarme en todo, estar pendientes de mí, y por darme unos hermosos sobrinos. A mis sobrinos Mateo, Luis y Oswaldo que son un motorcito para mí, gracias por sus lindas palabras llenas de inocencia y ánimo, por hacerme reír y también enojar. A mi familia que tanto amo y respeto, este logro ha sido en buena parte gracias a ustedes.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi director de Tesis, Jesús Hernández Hernández, por su confianza para aceptarme como su alumna de maestría, por haber puesto todo lo que estaba a su alcance para que yo pudiera realizar este trabajo, todas esas sesiones de estudio, todo el tiempo que dedicó a la realización de esta tesis, y toda la paciencia para resolver mis dudas. Por sus explicaciones, comentarios y sugerencias para mejorar cada capítulo. Finalmente por esas charlas cotidianas a la hora de la comida. ¡Muchas gracias!

A mis sinodales: Noé Bárcenas, Rita Jiménez, Omar Antolin y Alberto Verjovsky por la revisión de esta tesis, por sus comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo.

A mis compañeros de la Unidad Cuernavaca: Joel, Mario, Eddy, Vanessa, Giovanna, Haremy, Dalid; de igual manera a sus profesores y personas que la hacen funcionar. Así como a mis compañeros del Centro de Ciencias Matemáticas: Johanna, Richar, Manuel, Jimmy, Gilberto, Yesenia, Tero, Karley, e Israel, por su acogida en el centro, sus preguntas, y su retroalimentación. A sus profesores que me dieron la confianza, particularmente a Noé Bárcenas por ayudarme a creer en mí misma, en mi trabajo, y el apoyo económico brindado a través de su proyecto. A Lidia por ser una cálida persona que encontré en el CCM. Al CCM en general, a todas las personas que lo hacen funcionar.

A mis roomies de Morelia; Pedro, Mario, Manuel y Elena, por sus charlas, las desveladas en casa, las salidas, por ser mi familia por un

tiempo. Particularmente a Manuel y Elena que me recibieron otros meses más para escribir esta tesis, por esa convivencia, que se hizo más estrecha estos últimos meses.

A mis amigos de la “corrida” en Cuernavaca y Morelia: Hernán, Chayito, Ale, Rosy, Leivi, Victor, Fer, Lety, Peter, Carmen, Claudia, Liborio, Lupita, Yoli, Ángel, Don Berna, Maritza, Chely y Richard, por ser una parte muy importante de esta etapa, me recibieron en el círculo de amigos, compartimos carrera, una que otra reunión, y el día a día en la pista, por todos sus consejos (acerca de la corrida o de la vida), o su simple sonrisa que me hacía comenzar mejor el día, gracias porque todo eso me ayudó a completar este paso.

A mi mejor amiga Angélica Álvarez, por tu apoyo, por siempre estar ahí, en los momentos buenos, alegres pero también en malos o difíciles, por escuchar mis anécdotas, aunque a la distancia, siempre he sentido tu apoyo, y cariño.

A Julio Díaz, por ser ese amigo que siempre me ha escuchado, estado ahí en mis dudas y mis preguntas existenciales.

A Rolando Jiménez, por siempre estar ahí (al teléfono), por cada drama escuchado de la tesis y de la vida en general, por su amistad.

A *Hernán Gómez Coronel*, por siempre estar pendiente de mí (sin importar dónde estuviéramos), por la estrecha amistad que hemos formado, la cual me ha marcado profundamente, por escucharme con respeto y atención cuando platicaba de mis planes a futuro, de mis angustias y de mis anécdotas, también por su charla, sus experiencias, por hacerme sonreír siempre que platicáramos, por ser un buen consejero, por abrirme las puertas de su casa siempre que lo necesitara, incluso más, por hacerme sentir muy acogida, por siempre querer y apoyar lo que sea mejor para mí. Por inspirarme e impulsarme de la manera que lo ha hecho, y por recordarme que nunca deje de sonreír, y que tampoco deje de ser tan *yo* en todo momento. Por todo ese cariño que me ha mostrado desde que nos conocimos en el “Centenario”. Este logro ha sido – en gran medida– gracias a tu apoyo incondicional, no hay palabras que expresen todo el agradecimiento y además cariño que siento contigo. Hernán, ¡muchas gracias por todo!

Agradezco el apoyo económico otorgado para la realización de esta tesis a través del proyecto **PAPIIT IN100119 Rigidez geométrica y de acciones**, del Dr. Noé Barcenás Torres.

A la *vida*, que como siempre, me ha mostrado el mejor camino para mí, me ha enseñado muchas cosas, dado lecciones valiosas, puesto en los lugares correctos para desenvolverme y presentado a las personas indicadas para crecer.



## Introducción

En esta tesis suponemos que  $S$  es una superficie de género  $g$ ,  $n$  ponchaduras, con frontera vacía y complejidad  $\kappa(S) = 3g - 3 + n$ . El objeto principal de estudio de esta tesis es el *grupo modular (de Teichmüller) extendido*  $\text{Mod}^*(S)$ , el cual es el grupo de homeomorfismos de  $S$  módulo isotopía.

En 1979 Harvey [7] definió el *complejo de curvas*  $\mathcal{C}(S)$  de una superficie  $S$ , cuyos vértices son las clases de isotopía de curvas simples cerradas esenciales, y los  $k$ -simplejos están dados conjuntos finitos de curvas ajenas por pares en  $S$  (ver Capítulo 1). El *grafo de curvas* es el 1-esqueleto del complejo de curvas, denotado también como  $\mathcal{C}(S)$ , esto es debido a que el complejo de curvas es un complejo bandera, entonces toda la información simplicial se encuentra en su 1-esqueleto. Este grafo fue definido para estudiar a  $\text{Mod}^*(S)$  a través de su acción en  $\mathcal{C}(S)$ . Ivanov [14] en 1997 probó que para el caso de superficies de género  $g \geq 2$  el grupo de automorfismos de  $\mathcal{C}(S)$  es el grupo modular extendido  $\text{Mod}^*(S)$  (excepto el caso de género 2 y 0 ponchaduras, donde la representación no es inyectiva), en otras palabras, cualquier automorfismo de  $\mathcal{C}(S)$  está inducido por un homeomorfismo de  $S$ . Después Korkmaz [15] y Luo [17] extendieron el resultado para los demás casos de superficies de tipo finito, salvo el caso de género 1 y 2 ponchaduras, donde la representación no es suprayectiva.

Irmak (ver [10], [12], [11]), Behrstock y Margalit [2], y Shackleton [20], probaron que morfismos de grafos de  $\mathcal{C}(S)$  más generales están inducidos por homeomorfismos de  $S$ . Posteriormente Hernández Hernández [8] probó un resultado de rigidez topológica en  $\mathcal{C}(S)$ , el cual afirma que si  $S$  es una superficie de género al menos 3, y su complejidad es mayor o igual a la complejidad de otra superficie  $S'$ , y  $\phi$  es un morfismo de grafos entre  $\mathcal{C}(S)$  y  $\mathcal{C}(S')$ , entonces  $S$  es homeomorfa a  $S'$ .

En el año 2000 Schmutz [19] definió un grafo análogo al grafo de curvas, actualmente llamado el *grafo de Schmutz*  $\mathcal{G}(S)$  de una superficie  $S$ , cuyos vértices son clases de isotopía de curvas no separadoras de  $S$ , y dos vértices están unidos por una arista si sus respectivas clases de isotopía tienen *intersección geométrica uno* (ver el Capítulo 1).

El grafo de Schmutz de  $S$ , entre otras cosas, ha sido usado para probar que  $\text{Mod}^*(S)$  es finitamente generado, esto usando la acción de  $\text{Mod}^*(S)$  en  $\mathcal{G}(S)$ , y algunos resultados de teoría geométrica de grupos y la sucesión exacta de Birman (ver [4]). Schmutz [19] probó que los automorfismos de  $\mathcal{G}(S)$  están inducidos por homeomorfismos de  $S$ .

En esta tesis probamos un resultado análogo al de Hernández, mencionado anteriormente, que trata de rigidez topológica de  $\mathcal{G}(S)$ . Lo probamos usando el grafo de curvas no separadoras  $\mathcal{N}(S)$ , y las técnicas utilizadas por Irmak [13], generalizando así, el resultado de Schmutz, para morfismos de grafos localmente inyectivos que preservan intersección cero.

TEOREMA. Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras respectivamente tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ , y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo de grafos localmente inyectivo que preserve intersección cero, entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, más aún,  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero abordamos definiciones y teoremas básicos de la teoría de grupos modulares y definimos el complejo de curvas de una superficie  $S$ , así como la acción del grupo modular  $\text{Mod}^*(S)$  en el complejo de curvas  $\mathcal{C}(S)$ . En el segundo capítulo estudiamos las técnicas utilizadas por Schmutz[19], para probar que  $\text{Mod}^*(S)$  es isomorfo a  $\mathcal{G}(S)$ , excepto en los casos en que  $(g, n) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ . En el tercer capítulo probamos nuestros resultados basándonos en las técnicas usadas por Hernández Hernández [8] e Irmak [13]. En el último capítulo presentamos nuestras conclusiones.

## Capítulo 1

### Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados necesarios para los siguientes capítulos. Las demostraciones que no se hallan en este apartado, se pueden encontrar en [4].

#### 1. Superficies

Denotamos por  $S_{g,n}^k$  a una superficie topológica, conexa y orientable de tipo finito (es decir,  $\pi_1(S_{g,n}^k)$  finitamente generado) con género  $g \geq 0$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y  $k$  componentes de frontera. Cuando  $k = 0$ , usamos simplemente la notación  $S_{g,n}$ . En el resto del capítulo  $S = S_{g,n}^k$ . En ciertas ocasiones es conveniente pensar a las ponchaduras de  $S$  como *puntos marcados* de  $S$ . Abusando del lenguaje en este capítulo hacemos uso indistinto de ambas expresiones, según convenga.

DEFINICIÓN 1.1. Si  $R$  es el conjunto de puntos marcados de  $S$ , un *arco propio simple* en  $S$  es un mapeo  $a : [0, 1] \rightarrow S$ , tal que  $a^{-1}(R \cup \partial S) = \{0, 1\}$  y  $\alpha$  es un encaje topológico en  $(0, 1)$ . Un arco se dice *esencial* si no es homotópico (con homotopía que fija los puntos finales) a un punto marcado ni a una componente de frontera.

DEFINICIÓN 1.2. Una *curva simple cerrada*  $a$  en  $S$  es un encaje topológico  $a : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ . Decimos que una curva simple cerrada es *esencial* si no es homotópica a un punto, a un punto marcado ni a una componente de frontera. Una *multicurva* en  $S$  es la unión finita de curvas simples, cerradas, esenciales y ajenas dos a dos en  $S$ .

En este trabajo abusamos de la notación al referirnos a una *curva*  $a$ ; en ocasiones nos referimos a la clase de homotopía de  $a$ , y en otras, nos referimos a un representante *adecuado* de la clase de isotopía de  $a$ , según convenga, adicionalmente a este abuso de notación, a una curva simple, cerrada y esencial la llamamos típicamente una *curva*. El lector

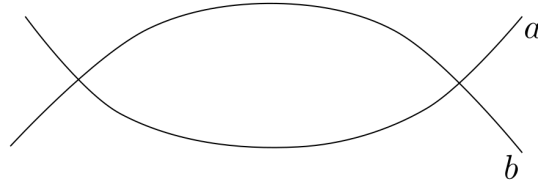


FIGURA 1. Curvas  $a$  y  $b$  formando un bígono.

podrá deducir fácilmente cuando nos referimos a la clase de homotopía de la curva  $a$  o a un representante particular.

DEFINICIÓN 1.3. El *número de intersección geométrica* entre dos curvas  $a$  y  $b$  es el mínimo número de puntos de intersección entre un representante en la clase de  $a$  y un representante en la clase de  $b$ , es decir:

$$i(a, b) := \min\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b\}.$$

En esta tesis usamos la convención de que  $a$  y  $b$  son *ajenas* si  $i(a, b) = 0$  y  $a \neq b$ .

En la práctica uno calcula el número de intersección geométrica de dos curvas  $a$  y  $b$ , encontrando representantes  $\alpha$  y  $\beta$  de  $a$  y  $b$  respectivos, que alcancen el mínimo número de intersección, esto es que  $i(a, b) = |\alpha \cap \beta|$ . En este caso decimos que  $\alpha$  y  $\beta$  están en *posición mínima*. También en la práctica puede resultar difícil saber si dos curvas están en posición mínima, así como encontrar representantes  $\alpha$  y  $\beta$  representantes en posición mínima. Para lidiar con estas dificultades, está el criterio del bígono.

DEFINICIÓN 1.4. Decimos que dos curvas simples cerradas transversales,  $a$  y  $b$  en  $S$  forman un *bígono* si existe un disco encajado en  $S$  cuya frontera es la unión de un arco de  $a$  y un arco de  $b$ , ver Figura 1.

PROPOSICIÓN 1.5 (Criterio del bígono). *Dos curvas simples cerradas transversales en una superficie  $S$  están en posición mínima si y sólo si ellas no forman un bígono.*

A continuación presentamos una técnica básica en la teoría de superficies, conocida como *el principio de cambio de coordenadas*, que es una especie de cambio de base para curvas en una superficie  $S$ . Un ejemplo del empleo de este principio es cuando se quiere probar una propiedad topológica acerca de cualquier curva, podemos probar dicha propiedad eligiendo una curva específica. Por ejemplo, decimos que una curva  $a$  es *separadora* si  $S \setminus a$  es una superficie no conexa; decimos que  $a$  no es separadora, en caso contrario. Con esta definición, tenemos la afirmación siguiente:

*Si  $a$  y  $b$  son curvas simples no separadoras en una superficie  $S$ , entonces existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  con  $h(a) = b$ .*

Esta afirmación se demuestra fácilmente usando *teorema de clasificación de superficies*: Si consideramos las superficies  $S \setminus a$  y  $S \setminus b$ , entonces  $S \setminus a$  y  $S \setminus b$  son conexas ya que  $a$  y  $b$  no son separadoras, luego por el teorema de clasificación de superficies que existe un homeomorfismo  $h : S \setminus a \rightarrow S \setminus b$ , este homeomorfismo  $h$  puede extenderse a todo  $S$ , de manera que  $h(a) = b$ .

En otras palabras, salvo homeomorfismo, existe una única curva simple cerrada no separadora. En términos generales *el principio de cambio de coordenadas* establece que cualquier par de multicurvas en  $S$  con los mismos datos de intersección y modelo, pueden ser intercambiados vía un homeomorfismo que preserve la orientación de  $S$ , sin embargo, cada caso debe analizarse de manera independiente. En este sentido cualquier configuración de curvas puede ser transformada a una configuración de curvas más sencilla de visualizar.

DEFINICIÓN 1.6. Un *pantalón* es una superficie compacta de género cero y tres componentes de frontera. Una *descomposición en pantalones* de una superficie  $S$  es una colección maximal de curvas (esenciales) ajenas dos a dos. El número de curvas que conforman a una descomposición en pantalones no depende de la descomposición en pantalones que consideremos, de manera que este número es llamado *la complejidad* de  $S$ , y es denotado por  $\kappa(S)$ . Más aún si  $S = S_{g,n}^b$ , entonces

$$\kappa(S) = 3g - 3 + b + n.$$

El nombre “descomposición en pantalones” es debido a que si cortamos  $S$  a lo largo de una descomposición en pantalones, obtenemos

varias componentes conexas, todas homeomorfas al interior de un pantalón, ver Figura 2. Cada una de las componentes conexas resultantes de retirar las curvas contenidas en  $\mathcal{P}$  de  $S$  es llamada un *pantalón inducido* por  $\mathcal{P}$ .

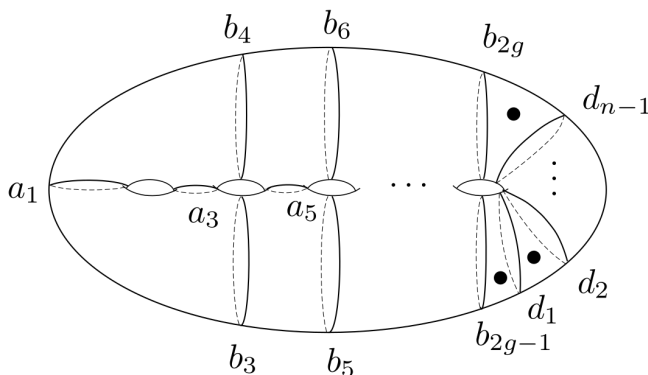


FIGURA 2. Descomposición en pantalones de  $S$ .

DEFINICIÓN 1.7. Dos curvas  $a, b \in \mathcal{P}$  son *adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$*  si están contenidas en la frontera de un pantalón inducido por  $\mathcal{P}$ .

OBSERVACIÓN. Es posible caracterizar dos curvas adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$  por medio de curvas auxiliares. Tal caracterización se encuentra en el Capítulo 3 de este trabajo.

DEFINICIÓN 1.8. Un *par periférico* de  $S$  es una multicurva  $\{a, b\}$  tal que  $a \neq b$ ,  $a$  y  $b$  son no separadoras y  $S$  tiene una subsuperficie  $\Sigma$  con frontera  $a \cup b$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,3}$ . Las curvas  $d_1$  y  $d_2$  de la Figura 2 son un ejemplo de un par periférico.

## 2. Grupo modular de Teichmüller

Consideremos  $\text{Homeo}^+(S; \partial S)$  el grupo de todos los homeomorfismos de  $S$  que preservan la orientación, y que restringidos a la frontera de  $S$  son la identidad, con la topología compacto-abierta. El *grupo modular (de Teichmüller)* de  $S$ , denotado por  $\text{Mod}(S)$  es el grupo:

$$\text{Mod}(S) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S; \partial S)).$$

Es decir,  $\text{Mod}(S)$  es el grupo de clases de homotopía de elementos de  $\text{Homeo}^+(S)$  que restringidos a la frontera son la identidad. Ligado a este

grupo, tenemos el *grupo modular extendido*, denotado por  $\text{Mod}^*(S)$ , y definido como:

$$\text{Mod}^*(S) = \pi_0(\text{Homeo}(S)).$$

A continuación presentamos los grupos modulares de algunas superficies particulares.

EJEMPLOS.

1.  $\text{Mod}(\mathbb{D}^2) = \{0\}$ ,
2.  $\text{Mod}(\mathbb{D}^2 \setminus \{*\}) = \{0\}$ ,
3.  $\text{Mod}(A) \cong \mathbb{Z}$ ,
4.  $\text{Mod}(S_{1,0}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

Donde  $\Sigma_n$  denota el grupo de permutaciones en  $n$  elementos, y  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  es el grupo de matrices de dos por dos con entradas enteras y determinante 1.

El ejemplo 1 es un resultado básico pero muy importante en el cálculo de grupos modulares de superficies, llamado el *lema de Alexander*. Este Lema implica un método para determinar si un homeomorfismo  $h$  de  $S$  es isotópico a la identidad, llamado el *método de Alexander*, que presentamos a continuación. Para ello, es preciso definir cuándo una colección finita de curvas *llena* a una superficie.

Llamamos *disco  $n$ -punteado* a un disco al que se le han retirado  $n$  puntos de su interior. Decimos que una colección finita de curvas  $A$  de una superficie  $S$  *llena* a una subsuperficie  $\Sigma \subset S$  si  $\Sigma \setminus A$  es una unión de discos cerrados uno punteados (si  $S$  tiene frontera no vacía), discos abiertos, y discos abiertos uno-punteados.

Definimos un *sistema de Alexander* como una colección de curvas y arcos propios  $c_1, c_2, \dots, c_m$  en  $S$  con las siguientes propiedades:

1. Las curvas  $c_i$  están en posición mínima dos a dos.
2. Las curvas  $c_i$  son distintas dos a dos.
3. Para distintos  $i, j, l$  al menos una de las intersecciones  $c_i \cap c_j$ ,  $c_i \cap c_l$ , o  $c_j \cap c_l$  es vacía.

LEMA 1.9 (Método de Alexander, Proposición 2.8 de [4]). *Sean  $S = S_{g,n}^k$  una superficie,  $h \in \text{Homeo}^+(S; \partial S)$  y un sistema de Alexander  $c_1, c_2, \dots, c_m$  en  $S$ , entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

- a. *Si existe una permutación  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $h(c_i)$  es isotópico a  $c_{\sigma(i)}$  relativo a  $\partial S$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $\phi(\cup c_i)$  es isotópico a  $\cup c_i$  relativo a  $\partial S$ .*

Si vemos a  $\cup c_i$  como un grafo  $\Gamma$  (posiblemente desconexo) en  $S$ , con vértices en los puntos de intersección y en los puntos finales de arcos, entonces la composición de  $h_i$  con esta isotopía induce un automorfismo  $h_*$  de  $\Gamma$ .

- b. Supongamos ahora que  $\{c_i\}$  llena a  $S$ . Si  $h_*$  fija a cada uno de los vértices y cada una de las aristas de  $\Gamma$  con sus orientaciones, entonces  $h$  es isotópico a la identidad, o bien,  $h$  tiene una potencia no trivial que es isotópica a la identidad.

Cuando la colección de curvas y arcos  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  cumple 1.9b. decimos que es un sistema de Alexander *estable*.

**2.1. Propiedades del grupo modular.** Dada la definición de grupo modular de una superficie  $S$ , surgen muchas preguntas acerca de este grupo; *¿qué propiedades tiene? ¿es finitamente generado? ¿finitamente presentado? ¿cómo son sus elementos?*

Las definiciones y proposiciones siguientes dan respuesta a estas preguntas.

Considere el anillo  $A = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . Para orientar  $A$  lo encajamos en el plano con coordenadas polares  $(\theta, t)$  vía el mapeo  $(\theta, t) \mapsto (\theta, t+1)$  y tomamos la orientación inducida por la orientación estándar del plano. Sea  $T : A \mapsto A$  el mapeo dado por la fórmula:

$$T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t).$$

El mapeo  $T$  es un homeomorfismo que preserva la orientación y fija los puntos de  $\partial A$ . Notemos que pudimos usar también  $\theta - 2\pi t$ . Por convención decimos que nuestra elección de transformación  $T$  es el giro izquierdo y la otra elección es el giro derecho. La clase de isotopía de este mapeo es un generador del grupo modular de  $A$ .

DEFINICIÓN 1.10. Sean  $a$  una curva en  $S$  y  $N$  una vecindad regular de  $a$  y un homeomorfismo que preserve la orientación  $h : A \rightarrow N$ . Obtenemos un homeomorfismo  $T_a : S \rightarrow S$ , llamado *giro de Dehn a lo largo de  $a$* , como sigue:

$$T_a(x) = \begin{cases} h \circ T \circ h^{-1}(x) & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in S \setminus N \end{cases}$$

En otras palabras, las instrucciones que da un giro de Dehn, son “corta un anillo de  $S$  aplica el giro en el anillo y vuelve a pegar”.

El complejo simplicial que presentamos a continuación es llamado el *complejo de curvas*, fue definido por Harvey [6], y fue usado para estudiar al grupo modular  $\text{Mod}(S)$ .



DEFINICIÓN 1.11. El *complejo de curvas*  $\mathcal{C}(S)$ , es un complejo simplicial abstracto asociado a una superficie  $S$ . Su uno esqueleto está dado por la siguiente información:

*Vértices.* Existe un vértice de  $\mathcal{C}(S)$  para cada curva en  $S$ .

*Aristas.* Existe una arista entre dos vértices de  $\mathcal{C}(S)$  si estos corresponden a dos curvas  $a$  y  $b$  con  $i(a, b) = 0$ .

De manera más general,  $\mathcal{C}(S)$  tiene un  $k$ -simplejo para cada  $(k + 1)$  vértices donde cada par de vértices corresponden a curvas con intersección cero.

El 1-esqueleto de  $\mathcal{C}(S)$  es llamado el *grafo de curvas* de  $S$ . Debido a que el complejo de curvas es un complejo bandera, toda su información simplicial está en su 1-esqueleto, de manera que el grafo de curvas es también denotado por  $\mathcal{C}(S)$ .

TEOREMA 1.12 (Teorema 4.3 de [4]). *Si  $\kappa(S) \geq 2$ , entonces  $\mathcal{C}(S)$  es conexo.*

El resultado anterior fue esencialmente probado por Harvey, y después por Lickorish [16]. Lickorish usó el Teorema 1.12 para probar que  $\text{Mod}^*(S)$  es finitamente generado.

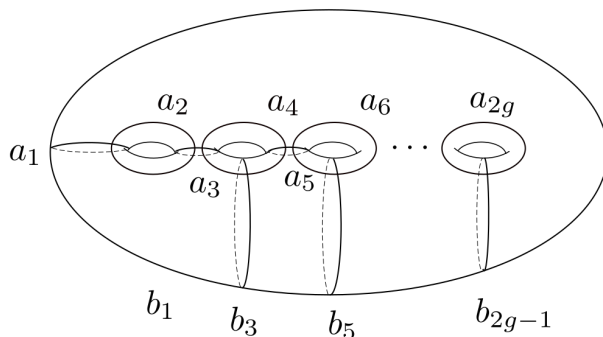


FIGURA 3. Generadores de Lickorish

En 1938 Dehn [3] probó que si  $g \geq 1$ , entonces  $\text{Mod}(S_{g,0})$  es generado por  $2g(g - 1)$  giros de Dehn. En 1964 Lichorish [16], aparentemente desconociendo el trabajo de Dehn, dio una prueba independiente de que  $\text{Mod}(S_{g,0})$  es generado por  $3g - 1$  giros de Dehn a lo largo de curvas no separadoras mostradas en la Figura 3. En 1979 Humphries [9] mejoró el número de giros de Dehn, probando que si  $g \geq 2$ , entonces

$\text{Mod}(S_{g,0})$  puede generarse con  $2g+1$  giros de Dehn a lo largo de curvas no separadoras mostradas en la Figura 4.

**TEOREMA 1.13 (Dehn-Lickorish).** *Para  $g \geq 1$ , el grupo modular  $\text{Mod}(S_{g,0})$  es generado por un número finito de giros de Dehn a lo largo de curvas no separadoras.*

El anterior teorema puede probarse usando una acción  $\text{Mod}^*(S)$  (definida más adelante) en un grafo simplicial análogo al grafo de curvas llamado el *grafo de Schmutz*, denotado por  $\mathcal{G}(S)$ , definido por Schmutz [19] como sigue:

Si  $S$  es una superficie de género  $g \geq 1$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y frontera vacía, decimos que el grafo de Schmutz es el grafo simplicial dado por los siguientes datos:

*Vértices.* Existe un vértice de  $\mathcal{G}(S)$  para cada curvas no separadora de  $S$ .

*Aristas.* Existe una arista entre dos vértices  $a$  y  $b$  de  $\mathcal{G}(S)$  si  $i(a, b) = 1$ .

Y la acción por automorfismos de  $\text{Mod}^*(S)$  en  $\mathcal{G}(S)$  está dado por lo siguiente:

$$\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$$

$$[h] \mapsto h_* : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S),$$

$$h_*[a] = [h(a)].$$

En palabras, el morfismo  $\Psi$  manda una clase de equivalencia de un homeomorfismo  $h$  de  $S$  en un isomorfismo de grafos  $h_*$  de  $\mathcal{G}(S)$  dado de la siguiente manera: a un vértice  $a \in \mathcal{G}^0(S)$  que a su vez representa a una clase de isotopía de curvas, la mandamos al vértice que representa a la clase de isotopía de la imagen bajo  $h$  (un elemento en la clase de  $[h]$ ) de un elemento  $a$  en la clase de  $[a]$ .

Esta acción es importante en el desarrollo de esta tesis. Particularmente, estudiamos esta acción en el siguiente capítulo. Cabe destacar que esta acción es definida de manera análoga para otros grafos como el grafo de curvas  $\mathcal{C}(S)$ , o el grafo de *curvas no separadoras*  $\mathcal{N}(S)$ , que es subgrafo de  $\mathcal{C}(S)$  cuyos vértices son las curvas no separadoras de  $S$ . Cabe destacar que esta aplicación  $\Psi$  está bien definida.

En los capítulos siguientes abusamos de la notación y omitimos el uso de los corchetes en la acción definida anteriormente.

**DEFINICIÓN 1.14.** Un morfismo simplicial  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S)$  se dice que *está inducido por un homeomorfismo* si existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $\Psi[h] = \varphi$ .

Notemos que la definición anterior tiene sentido también cuando cambiamos  $\mathcal{G}(S)$  por  $\mathcal{C}(S)$  o  $\mathcal{N}(S)$ . De acuerdo con la definición 1.14, si  $\Psi$  fuera suprayectiva, implicaría que todo automorfismo de  $\mathcal{G}(S)$  está inducido por un homeomorfismo. En efecto, la afirmación anterior es probada por Schmutz [19], con ciertas hipótesis adicionales, y es estudiada en el Capítulo 2 de esta tesis.

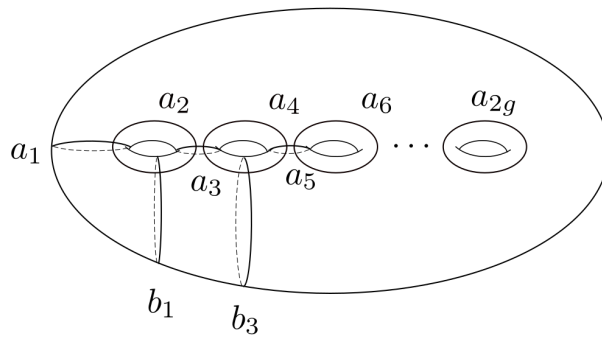


FIGURA 4. Generadores de Humphries

Finalmente, para responder las preguntas planteadas al inicio de esta subsección, enunciemos el siguiente teorema que puede ser demostrado usando el grafo de Schmutz.

**TEOREMA 1.15** (Teorema 5.7 de [4]). *Sea  $S$  una superficie de género  $g$  y  $n$  ponchaduras. Entonces el grupo  $\text{Mod}(S)$  tiene una presentación finita.*



## Automorfismos del grafo de Schmutz

El resultado de Schmutz dice que todo automorfismo del grafo de Schmutz de una superficie  $S$  está inducido por un homeomorfismo de  $S$ . Este capítulo está dedicado a revisar este teorema, y probar las partes más fundamentales de la prueba de Schmutz, siguiendo el esquema dado en [19]. Para los propósitos de esta tesis nos restringimos a superficies orientables de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq 4$ ; sin embargo, el teorema es más general, y puede revisarse en [19]. Para demostrar el teorema de Schmutz tenemos resultados clave, el primero es probar que cualquier automorfismo  $\phi$  de  $\mathcal{G}(S)$  manda curvas no separadoras ajenas en curvas no separadoras ajenas (Teorema 2.8). En seguida probamos que descomposiciones en pantalones por curvas no separadoras son mapeadas bajo  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$  en descomposiciones en pantalones por curvas no separadoras (Proposición 2.9). Después probamos que el número de intersección de dos curvas no separadoras se preserva bajo cualquier automorfismo de  $\mathcal{G}(S)$  (Teorema 2.11). Concluimos el capítulo demostrando el teorema de Schmutz.

Recordemos que el *Grafo de Schmutz de  $S$*  es el grafo simplicial cuyos vértices son las curvas no separadoras de  $S$ ; dos vértices  $a$  y  $b$  de este grafo forman una arista si  $i(a, b) = 1$ . Denotamos al grafo de Schmutz de  $S$  como:

$$\mathcal{G}(S).$$

Al conjunto de vértices de  $\mathcal{G}(S)$  lo denotamos por  $\mathcal{G}^0(S)$ .

Sea  $F = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathcal{G}^0(S)$ , definimos  $N(F) := \{x \in \mathcal{G}^0(S) : i(x, a_j) = 1, \forall j = 1, \dots, k\}$ . Denotamos por  $\text{Aut}(\mathcal{G}(S))$  el grupo de automorfismos simpliciales de  $\mathcal{G}(S)$ . En esta definición, abusamos nuevamente de la notación, como sigue,  $N(F) = N(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

En lo que sigue  $S$  es una superficie de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq 4$ . Denotamos por  $S \setminus \bar{a}$  a la superficie resultante de sustraer la curva  $a$  de la superficie  $S$  y agregar dos curvas frontera copias de  $a$  en los discos abiertos resultantes de haber retirado  $a$  (ver Figura 5).

**DEFINICIÓN 2.1.** Sean  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$ , tales que  $i(a, b) \geq 2$ , y  $b_1$  una componente conexa de  $b$  en  $S \setminus \bar{a}$ . Si  $S \setminus (a \cup b_1)$  no es conexo, entonces

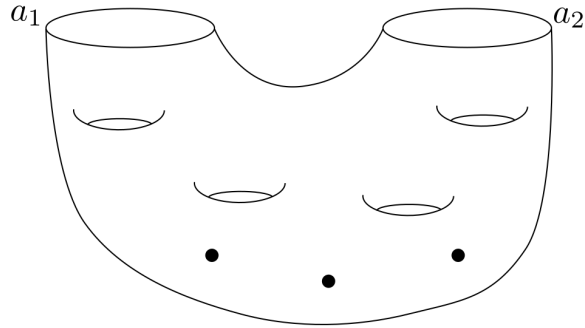


FIGURA 5. Ejemplo de  $S \setminus \bar{a}$ .

$b_1$  es llamado una *componente separadora de  $b$  con respecto a la curva  $a$*  (ver Figura 6(i)); en otro caso  $b_1$  es llamado una *componente no separadora de  $b$  con respecto a la curva  $a$*  (ver Figura 6(ii)).

Sean  $a_1$  y  $a_2$  dos copias de  $a$  en  $S \setminus \bar{a}$  y  $b_1$  una componente no separadora de  $b$  con respecto a  $a$ . Si  $b_1$  interseca a  $a_1$  y  $a_2$ , entonces se dice que  $b_1$  es de *dos lados*; en otro caso,  $b_1$  se dice que es de *un lado*. (ver la Figura 7).

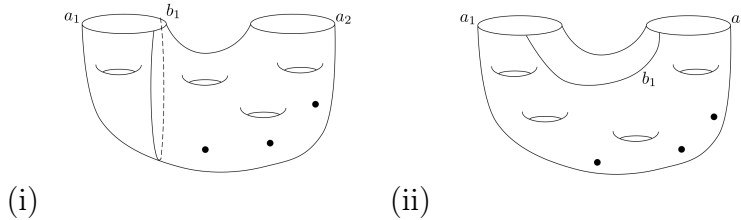


FIGURA 6. (i) Ejemplo de componente  $b_1$  separadora.  
(ii) Ejemplo de componente  $b_1$  no separadora.

LEMA 2.2. Sean  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  tales que  $i(a, b) \geq 2$ . Supongamos que  $b$  tiene una componente separadora  $b_1$  con respecto a la curva  $a$ , entonces existe  $c \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tal que  $N(a, b) \subset N(c)$ ; más aún,  $c$  es ajeno de  $a$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $\Sigma = S \setminus \bar{a}$  y  $a_1$  y  $a_2$  dos copias de  $a$  en  $\Sigma$  (ver la Figura 8) entonces  $b_1$  inicia y termina en la misma

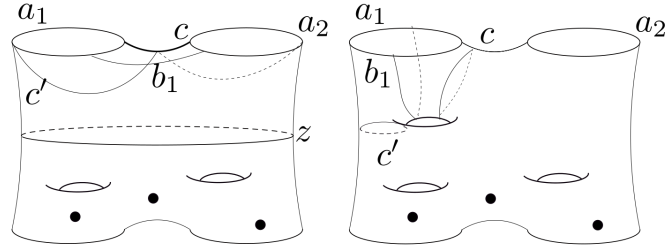


FIGURA 7. En la figura a la izquierda  $b_1$  es una componente de dos lados con respecto a  $a$ . En la figura a la derecha  $b_1$  es una componente de un lado con respecto a  $a$ .

curva frontera de  $\Sigma$ , digamos en  $a_1$ . Denotamos por  $V_1$  y  $V_2$  las dos componentes conexas de  $\Sigma \setminus b_1$ , donde la notación es escogida de manera que  $a_2$  está contenida en  $V_2$ . En  $V_2$  existe una única curva  $c$  tal que  $V_2 \setminus c$  tiene una componente conexa  $W$  de género cero la cual no contiene ponchaduras y tiene a  $b_1$  y a  $c$  en su frontera (ver la Figura 8). Notemos que  $c \neq a_2$ ; en caso contrario tendríamos que  $b$  se autointersecaría, pero esto no es posible ya que  $b$  es simple, así  $c \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$ . Consideremos  $X = W \cup V_1$  y  $s \in N(a, b)$ , ya que  $s \in N(a)$ , tenemos que  $s \cap X$  tiene una componente conexa  $s_1$  que interseca a  $a_1$  y  $c$ . Supongamos que  $s \cap X$  tiene una segunda componente conexa  $s_2$ . Entonces  $s_2$  empieza y termina en  $c$ , consecuentemente interseca a  $b_1$  al menos dos veces (ya que  $b_1$  separa a  $X$ ). Pero  $s \in N(b)$ , así  $s_2$  no puede existir y por lo tanto  $s \in N(c)$ .  $\square$

DEFINICIÓN 2.3. Un subconjunto  $\{a, b, c\} \subset \mathcal{G}^0(S)$  es llamado una *tripleta* si  $i(a, b) = i(a, c) = i(b, c) = 1$  y si  $S$  tiene una subsuperficie homeomorfa a  $S_{1,1}$  la cual contiene a  $a \cup b \cup c$ .

LEMA 2.4. Sean  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  con  $i(a, b) = 1$ , entonces  $\mathcal{G}^0(S)$  tiene exactamente dos diferentes elementos  $c$  tales que  $\{a, b, c\}$  es una tripleta. Más aún,  $S \setminus (a \cup b \cup c)$  tiene tres componentes conexas, dos de las cuales son triángulos topológicos.

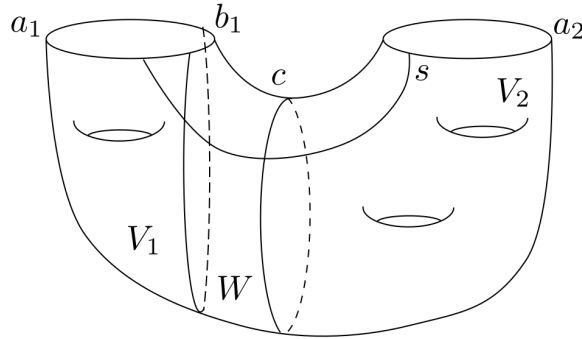


FIGURA 8. Componente separadora de  $b$ .

El lema anterior puede demostrarse usando el complejo de Farey, ver sección 4.1.1 de [4] para más detalles.

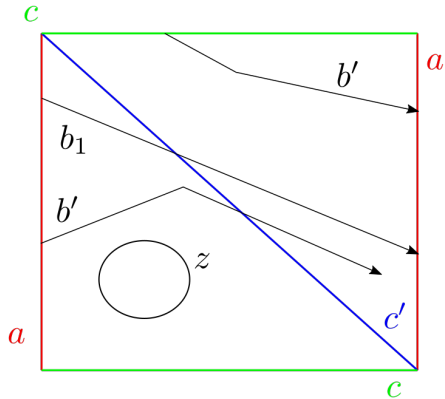


FIGURA 9. Tripletta  $\{a, c, c'\}$ .

LEMA 2.5. Sean  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  tales que  $i(a, b) \geq 2$ . Supongamos que  $b$  tiene una componente no separadora  $b_1$  con respecto a  $a$ , entonces existen  $c, c' \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tales que  $N(a, b) \subset (N(c) \cup N(c'))$ . Más aún, si  $b_1$  es de un lado, entonces  $a, c, c'$  pueden escogerse mutuamente ajenos; si  $b_1$  es de dos lados, entonces  $\{a, b, c'\}$  puede escogerse como una tripletta con



$$(1) \quad i(a, b) = i(b, c) + i(b, c') \quad y \quad \min\{i(b, c), i(b, c')\} > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\Sigma = S \setminus \bar{a}$  y  $a_1, a_2$  dos copias de  $a$  en  $\Sigma$ . Hacemos dos casos, el primero en el que  $b_1$  tiene dos lados y el segundo, en el que  $b_1$  tiene un lado.

**Caso 1:**

Supongamos que  $b_1$  tiene dos lados. Consideremos  $\Sigma \setminus \bar{b}_1$ ; entonces la frontera de la superficie resultante es una curva homotópica a una curva  $z$  que es la frontera de un pantalón  $Y$  en  $\Sigma$  que contiene a  $b_1$  (las otras dos fronteras de  $Y$  son  $a_1$  y  $a_2$ ). En  $S$ , la curva  $z$  separa a una subsuperficie  $Q \approx S_{1,1}$  del resto ( $Q$  contiene a  $a$ ).

Sean  $s \in N(a, b)$ , y  $s_1$  la componente conexa de  $s \cap Q$  que interseca a  $a$ . Supongamos que  $s \cap Q$  tiene una segunda componente conexa  $s_2$ . Como  $s \in N(a)$  entonces,  $s_2$  no interseca a  $a$ . Por construcción,  $s_2$  interseca a  $b_1$ . Ya que  $s \in N(b)$ , tenemos que  $s \cap Q$  tiene a lo más dos componentes conexas.

Dadas  $c$  y  $c'$  curvas en  $Q$  tales que  $\{a, c, c'\}$  es una tripleta y tales que  $c \cap Y$  y  $c' \cap Y$  son homotópicas a  $b_1$  (vea la Figura 10(i)) tenemos que  $b_1$  interseca a cada curva  $c$  y  $c'$  a lo más una vez. Consecuentemente por el Lema 2.4, se satisfacen uno de los dos enunciados siguientes: la curva  $s_1$  es ajena a  $c$  e interseca una vez a  $c'$ ; o bien, la curva  $s_1$  interseca una vez a  $c$  y es ajena a  $c'$ . Si  $s_2$  no existe, tenemos que  $s \in N(c) \cup N(c')$ . Si  $s_2$  existe, entonces interseca una vez a cada una de las curvas  $c$  y  $c'$ , y concluimos que  $s \in N(c) \cup N(c')$ . Ahora supongamos que  $s_1$  interseca a  $b_1$  (por lo tanto  $s_2$  no existe). Por el Lema 2.4 concluimos que  $s_1$  interseca una vez a una de las curvas  $c, c'$ ; así hemos probado que  $s \in N(c) \cup N(c')$ .

Debido al Lema 2.4 y el hecho de que  $b$  no puede intersecar transversalmente a  $b_1$ , tenemos que para cada intersección de una componente conexa de  $b$  en  $\Sigma$ , tenemos una intersección de  $b$  con  $c \cup c'$  (ver Figura 9), por lo que  $i(a, b) = i(b, c) + i(b, c')$ . Sea  $b' \subset b$  la componente conexa de  $b$  en  $Q$  tal que  $b_1 \subseteq b'$ , entonces  $b'$  interseca a la curva  $a$  al menos dos veces, por lo que  $b'$  no puede ser conexo en  $Q \setminus c$  ni en  $Q \setminus c'$  (ver Figura 9); esto prueba que  $b$  interseca tanto a  $c$  como a  $c'$ , y obtenemos (1).

**Caso 2:**

Supongamos ahora que  $b_1$  termina y empieza en  $a_1$ , entonces  $b_1$  separa a  $a_1$  en dos partes  $a_{1t}$  y  $a_{1s}$ . Sean  $c$  una curva en  $\Sigma$  homotópica a  $a_{1t} \cup v_1$ , y  $c'$  la curva libremente homotópica a  $a_{1s} \cup b_1$ , entonces  $a_1, c$  y  $c'$  son curvas frontera de un par de pantalones  $Y$  encajado en  $\Sigma$ . Notemos que  $b_1 \subset Y$ . Ya que  $b_1$  es una componente no separadora,  $c$  y

$c'$  están en  $\mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$ . Dado  $s \in N(a, b)$ , obtenemos que  $s \cap Y$  tiene una componente conexa  $s_1$  que empieza en  $a_1$  y termina en  $c$  o en  $c'$ . Sea  $s_2$  otra componenete conexa de  $s \cap Y$ . Entonces  $s_2$  debe intersectar a  $c$  y  $c'$ , y por tanto debe intersectar a  $b_1$ . Concluimos que  $s \cap Y$  tiene a lo más componentes dos conexas y consecuentemente  $s \in N(c, c')$ .  $\square$

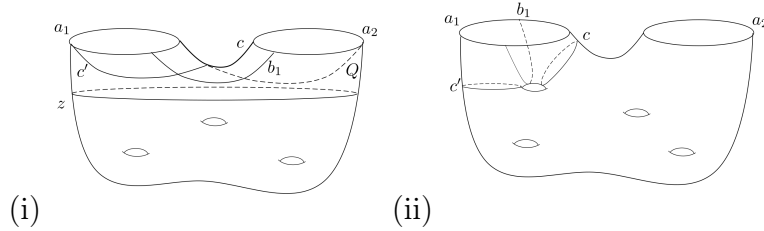


FIGURA 10. (i) Componente separadora  $b_1$ .

LEMA 2.6. *Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathcal{G}^0(S)$  tal que existe  $b \in \mathcal{G}^0(S)$  con  $i(a, b) = 0$  para todo  $a \in F$ . Si  $N(F)$  tiene un elemento  $c$  que intersecta a  $b$ , entonces  $N(F)$  es un conjunto infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $c \in N(F)$  tal que  $c$  intersecta a  $b$ . Hagamos un giro de Dehn a lo largo de  $b$ , denotado por  $T_b$ . Las curvas en  $F$  no han cambiado bajo este giro de Dehn, pero  $c_1 = T_b(c) \neq c$  y  $c_1 \in \mathcal{G}^0(S)$ , es claro que  $c_1 \in N(F)$ . De manera análoga tenemos que para toda  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c_k = T_b^k(c) \in N(F)$ ; entonces  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es un subconjunto infinito de  $N(F)$ .  $\square$

LEMA 2.7. *Sean  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  dos elementos ajenos, entonces no existen elementos  $c, c' \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tales que  $N(a, b) \subset (N(c) \cup N(c'))$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen  $c$  y  $c'$  en  $\mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tales que  $N(a, b) \subset (N(c) \cup N(c'))$ . Sea  $z \in \mathcal{G}^0(S)$  tal que  $i(c, z) > 0$  y  $i(a, z) = i(b, z) = 0$ . Dados  $z' \in \mathcal{G}^0(S)$  tal que  $i(c', z') > 0$  y  $i(a, z') = i(b, z') = 0$ , y  $T \subset N(a, b)$  tal que los elementos intersectan tanto a  $z$  y  $z'$ . Notemos que  $T \neq \emptyset$ . Consideremos  $t \in T$ ; por el Lema 2.6 podemos considerar la imagen de  $t$  bajo el giro de Dehn a lo largo de  $z$ ,  $T_z(t)$  y tenemos que  $T_z(t) \in T$ . Al aplicar  $k$  veces este giro de Dehn a lo largo de  $z$  a  $t$ ,  $T_z^k(t)$ , tenemos que la intersección de  $T_z^k(t)$  y  $c$  se vuelve arbitrariamente grande cuando  $k$  se vuelve grande, además  $T_z^k(t) \in T$ . Análogamente, aplicamos  $T_{z'}$  a  $t$  y se vuelve arbitrariamente grande

cuando  $k$  tiende a infinito y además  $T_z^k(t) \in T$ . Entonces, no es posible que  $T \subset (N(c) \cup N(c'))$ . □

**TEOREMA 2.8.** *Sean  $a, b, \in \mathcal{G}^0(S)$ ,  $a \neq b$ , entonces  $a$  y  $b$  son ajenos sí y sólo sí  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  son ajenos para toda  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Demostramos solamente una implicación del teorema, ya que la otra se prueba de manera análoga. Supongamos que  $i(a, b) > 0$ , a continuación probamos que  $i(\phi(a), \phi(b)) > 0$ .

Notemos que si  $i(a, b) = 1$ , entonces por ser  $\phi$  un morfismo de grafos  $i(\phi(a), \phi(b)) = 1$ . Es decir, en este caso, si  $a$  y  $b$  se intersecan, implica que  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  se intersecan. Supongamos así que  $i(a, b) \geq 2$ , nos queda demostrar que  $i(\phi(a), \phi(b)) > 0$ . Observemos que no es posible que  $i(\phi(a), \phi(b)) = 1$ ; de ser cierto, implicaría que  $\{\phi(a), \phi(b)\}$  es una arista en  $\mathcal{G}(S)$ , pero por ser  $\phi$  un automorfismo de  $\mathcal{G}(S)$ , se tiene que  $\{a, b\}$  forma una arista de  $\mathcal{G}(S)$ , y por lo tanto  $i(a, b) = 1$ , lo cual es una contradicción. Supongamos que  $i(\phi(a), \phi(b)) = 0$ . El Lema 2.7 implica que no existen elementos  $s, s' \in \mathcal{G}^0(S)$  ajenos tales que  $N(a, b) \subset (N(s) \cup N(s'))$ .

Por otro lado  $i(a, b) \geq 2$ , y según los Lemas 2.2 y 2.5, tenemos dos casos:

**Caso 1:**

Supongamos que  $b$  tiene una componente separadora  $v_1$ , entonces existe  $c \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tal que  $N(a, b) \subset N(c)$ . Más aún,  $c$  es ajeno a  $a$ . Observemos que  $N(a, b) \subset (N(c) \cup N(a))$ ; como  $\phi$  es un automorfismo  $N(\phi(a), \phi(b)) \subset (N(\phi(c)) \cup N(\phi(a)))$ , esto contradice al Lema 2.7.

**Caso 2:**

Supongamos que  $b$  tiene una componente no separadora  $b_1$ , entonces debido al Lema 2.5 existen  $c, c' \in \mathcal{G}^0(S) \setminus \{a, b\}$  tales que  $N(a, b) \subset (N(c) \cup N(c'))$ . Por lo que  $N(\phi(a), \phi(b)) \subset N(\phi(c), \phi(c'))$ , lo cual contradice el Lema 2.7.

Por lo tanto, no es posible que  $i(\phi(a), \phi(b)) = 0$ . Consecuentemente  $i(\phi(a), \phi(b)) > 0$  siempre que  $i(a, b) > 0$ . □

Recordemos las siguientes definiciones dadas en el capítulo 1: una *descomposición en pantalones* de curvas no separadoras es un subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}^0(S)$  con  $3g - 3 + n$  elementos mutuamente ajenos. En la Figura 11 observamos una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$ . Una colección  $\mathcal{P}$  es llamada así, ya que al cortar  $S$  a lo largo de las curvas de  $\mathcal{P}$ , obtenemos componentes conexas cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,3}$ , que es el interior de un pantalón. En virtud de esta observación, a

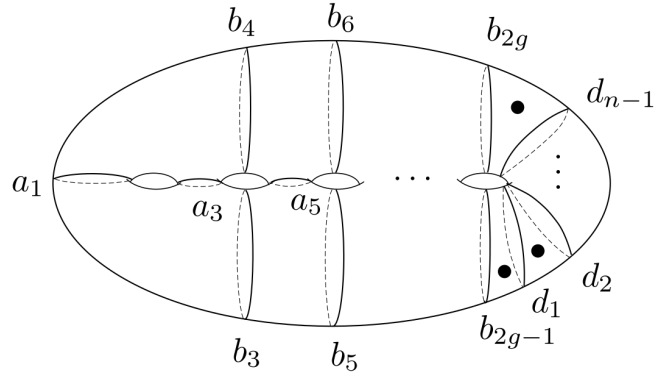


FIGURA 11. Ejemplo de descomposición en pantalones.

cada una de las componentes conexas, resultante de retirar las curvas de  $\mathcal{P}$ , la llamamos *un pantalón inducido por  $\mathcal{P}$* .

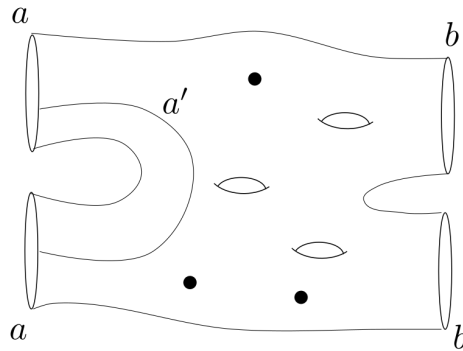


FIGURA 12. Ejemplo de curva  $a'$  de la Proposición 2.9.

PROPOSICIÓN 2.9. *Si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}^0(S)$  es una descomposición en pantalones de  $S$  y  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$ , entonces  $\phi(\mathcal{P})$  es una descomposición en pantalones de  $S$ . Más aún, existe  $h \in \text{Mod}^*(S)$  tal que  $h(a) = \phi(a)$  para toda  $a \in \mathcal{P}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema anterior es claro que  $\phi(\mathcal{P})$  es una descomposición en pantalones. Entonces es suficiente probar que las

componentes de frontera de un pantalón (inducido por  $\mathcal{P}$ ) son mapeadas por  $\phi$  a una componente de frontera de pantalones (inducidos por  $\phi(\mathcal{P})$ ); esto implicaría la existencia de  $h$  como es deseada.

Esta prueba está dividida en dos casos. El caso 1 cuando  $a, b, c$  son curvas frontera de un pantalón inducido por  $\mathcal{P}$ , y el caso 2 cuando  $\{a, b\}$  forman un par periférico.

Para probar este resultado, primero probamos que si  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  son ajenas, entonces existe  $a' \in N(a)$  ajena de  $b$  sí y sólo sí  $S \setminus (a \cup b)$  es conexo.

Supongamos que existe una curva  $a'$  como en el enunciado anterior, entonces existe una vecindad regular  $V$  de  $a \cup a'$  en  $S$  homeomorfa a  $S_{1,1}$  tal que  $b \subset S \setminus (a \cup a')$ . Dadas estas observaciones, es claro que  $S \setminus (a \cup b)$  es conexa. Para el converso supongamos que  $S \setminus (a \cup b)$  es conexa. La superficie  $S \setminus (a \cup b)$  es homeomorfa a  $S_{g-2, n+4}$ , entonces existe una curva  $a' \in N(a)$  ajena de  $b$ , ver la Figura 12.

**Caso 1:**

Ya que  $a, b, c \in \mathcal{P} \subset \mathcal{G}^0(S)$ , entonces  $N(a, b, c)$  es vacío, luego  $N(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$  también es vacío, ya que  $\phi$  es un automorfismo simplicial, preservando así intersección 1. Esto implica que  $S \setminus (\phi(a) \cup \phi(b) \cup \phi(c))$  no es conexo. Por otro lado, como  $a, b, c$  no son curvas separadoras y bordean un pantalón de  $S$ , entonces la unión de cada pareja  $a, b$ ,  $a, c$  y  $b, c$  no separan a  $S$ , así por la afirmación anterior existe  $a' \in N(a)$  ajena a  $b$ , por el Teorema 2.8 tenemos que  $\phi(a') \in N(\phi(a))$  es ajeno a  $\phi(b)$ . Esto implica por la afirmación anterior que  $S \setminus (\phi(a) \cup \phi(b))$  es conexo. Un argumento análogo al anterior muestra que  $S \setminus (\phi(a) \cup \phi(c))$  y  $S \setminus (\phi(b) \cup \phi(c))$  son conexos. Consecuentemente  $\phi(a), \phi(b)$  y  $\phi(c)$  son curvas frontera de un pantalón.

**Caso 2:**

Como  $\{a, b\}$  es un par periférico, entonces  $S \setminus (a \cup b)$  no es conexo, por la afirmación anterior no existe  $a' \in N(a)$  ajeno de  $b$ . Debido al Teorema 2.8 y a que  $\phi$  es un automorfismo simplicial de  $\mathcal{G}(S)$ , tenemos que  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  son ajenas, y no existe  $a' \in N(\phi(a))$  ajena a  $\phi(b)$ , por la afirmación anterior  $S \setminus (\phi(a) \cup \phi(b))$  no es conexo.

Más aún, existe  $z \in \mathcal{G}^0(S)$  ajena a  $a \cup b$  tal que  $z$  interseca a todos los elementos de  $\mathcal{P} \setminus \{a, b\}$ . Por el Teorema 2.8 esta propiedad es respetada bajo  $\phi$ . Consecuentemente  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  son componentes de frontera de un pantalón inducido por  $\phi(\mathcal{P})$ .

□

**TEOREMA 2.10.** *Dada una tripleta  $\{a, b, c\} \subset \mathcal{G}^0(S)$ , entonces  $\{\phi(a), \phi(b), \phi(c)\}$  es una tripleta para cualquier  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de una tripleta, existe una subsuperficie  $Q \approx S_{1,1}$  de  $S$  con componente de frontera  $z$  tal que  $a, b$  y  $c$  están en  $Q$ . Por hipótesis es una superficie de género  $g \geq 2$ . En lo siguiente suponemos que  $z$  es una curva esencial, en caso contrario  $z$  sería esencial y homotópico a un punto marcado de  $S$ , pero ese caso queda excluido ya que  $S$  es una superficie de género  $g \geq 2$ .

Dado que  $g \geq 2$ , entonces existe una subsuperficie  $R \approx S_{1,2}$  de  $S$  con componentes de frontera  $x, y \in \mathcal{G}^0(S)$ , tal que  $R$  contiene a  $Q$ . Más aún, existe  $t \in N(x, y)$ ,  $t$  ajena a  $z$ . Si consideramos  $z'$  como la curva dibujada en la Figura 13 entonces  $\{a, z', x\}$  y  $\{a, z', y\}$  son fronteras de dos pantalones, y por la Proposición 2.9  $\{\phi(a), \phi(z'), \phi(x)\}$  y  $\{\phi(a), \phi(z'), \phi(y)\}$  son frontera de dos pantalones en  $S$ . Por lo que  $\phi(a), \phi(b), \phi(c)$  están en una subsuperficie  $R' \approx S_{1,2}$  de  $S$  con componentes de frontera  $\phi(x)$  y  $\phi(y)$ . Ya que  $\phi(t)$  es ajeno a  $\phi(a), \phi(b)$  y  $\phi(c)$  e interseca una vez a cada componente de frontera de  $R'$ , tenemos que  $\phi(a), \phi(b)$  y  $\phi(c)$  están en una subsuperficie homeomorfa a  $S_{1,1}$  de  $S$ .  $\square$

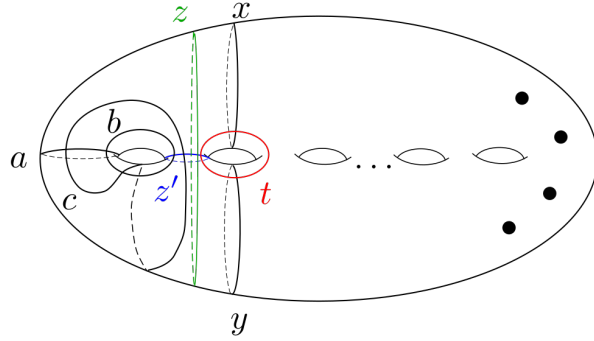


FIGURA 13. Curva  $z$  esencial.

TEOREMA 2.11. *Dados  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$ , entonces  $i(a, b) = i(\phi(a), \phi(b))$  para toda  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$ .*

DEMOSTRACIÓN. Demostramos este teorema por inducción sobre el número de intersección. Si  $i(a, b) = 0$ , entonces el resultado se sigue de la Proposición 2.8. Supongamos que el teorema es válido para todos  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  con  $i(a, b) \leq k - 1$  y  $k \geq 2$ .

Dados  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  tales que  $i(a, b) = k$ , queremos probar que  $i(\phi(a), \phi(b)) = k$ . En lo siguiente una componente de  $b$  es siempre una componente con respecto a  $a$ . Tenemos dos casos:

**Caso 1:**

Supongamos que existe una componente  $b_1$  de  $b$  de dos lados. Consideremos  $c$  y  $c'$  como en la demostración del Lema 2.5. Entonces  $\{a, c, c'\}$  es una tripleta, además se satisface que  $i(a, b) = i(b, c) + i(b, c')$  y  $\min\{i(b, c), i(b, c')\} > 0$ . Por hipótesis de inducción sobre  $k$ , tenemos que  $i(b, c) = i(\phi(b), \phi(c))$  y  $i(b, c') = i(\phi(b), \phi(c'))$ . Por el Teorema 2.10  $\{\phi(a), \phi(c), \phi(c')\}$  es una tripleta, por el Lema 2.4 y un argumento similar a la prueba del Caso 1 de la Proposición 2.9 tenemos que  $i(\phi(b), \phi(c)) + i(\phi(b), \phi(c')) \geq i(\phi(a), \phi(b))$ , lo cual implica  $i(a, b) \geq i(\phi(a), \phi(b))$ . Aplicando el mismo razonamiento a  $\phi^{-1}$  obtenemos la otra desigualdad y concluimos que  $i(a, b) = i(\phi(a), \phi(b))$ .

**Caso 2:**

Supongamos que  $b$  no tiene componentes de dos lados. Sean  $a_1$  y  $a_2$  dos copias de  $a$  en  $\Sigma = S_{g,n} \setminus \bar{a}$ , por el caso 1 se puede suponer que todas las componentes de  $b$  son separadoras o de un lado. Consideremos  $\Sigma_i$  la subsuperficie más pequeña encajada en  $\Sigma$  (las componentes de frontera de  $\Sigma_i$  son curvas esenciales o ponchaduras) tal que  $\Sigma_i$  contiene todas las componentes de  $b$  con puntos finales en  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Entonces  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  tienen interior ajeno. Ya que  $a$  no es separadora,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  tienen una componente de frontera común  $x = x_1 = x_2 \in \mathcal{G}^0(S)$  ó  $\Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$  tiene una componente conexa  $\Sigma_3$  la cual tiene una componente de frontera común  $x_i \in \mathcal{G}^0(S)$  con  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Esto implica que existe un arco  $t_i \subset \Sigma_i$  la cual interseca a  $a_i$  y  $x_i$  y es ajena a  $b$ , para  $i = 1, 2$ . Sea  $t \subset \Sigma$  una curva que interseca a  $a_1, a_2$  tal que  $t \cap \Sigma_i = t_i$ ,  $i = 1, 2$ . Consideremos  $t$  como una componente de una curva con respecto a  $a$ . Si definimos  $c$  y  $c'$  como en el Lema 2.5, tenemos que  $i(a, b) = i(b, c) + i(b, c')$ . Si  $b$  interseca a  $c$  y  $c'$ , entonces con el mismo argumento que en el Caso 1,  $i(a, b) = i(\phi(a), \phi(b))$ .

Dado que  $g \geq 2$ , notemos que podemos intercambiar los papeles de  $a$  y  $b$ , y por el mismo argumento de antes, construimos una tripleta  $\{b, \bar{c}, \bar{c}'\}$  tal que  $i(a, b) = i(a, \bar{c}) + i(a, \bar{c}')$  (donde  $i(\bar{c}, x_1) = 1 = i(\bar{c}', x_1)$ ). Podemos suponer que  $b$  no interseca a  $c$  y que  $a$  no interseca a  $\bar{c}$ . Consecuentemente  $M = \Sigma \setminus x_1$  es homeomorfa a una superficie  $S_{g-1, n+2}$ . Claramente  $\phi$  induce un elemento en  $\text{Aut}(\mathcal{G}(M))$ . Entonces por inducción con respecto a  $g$  obtenemos  $i(a, b) = i(\phi(a), \phi(b))$ .  $\square$

El grafo de Schmutz, no sólo se define para superficies  $S$  de género positivo, también puede definirse para superficies de género cero, en

cuyo caso  $\mathcal{G}(S)$  tiene como sus vértices a las curvas de  $S$  y dos vértices  $a, b$  forman una arista si sus respectivas curvas cumplen que  $i(a, b) = 2$

LEMA 2.12 (Lema 10 en [19]). *Los grafos  $\mathcal{G}(S_{1,1})$  y  $\mathcal{G}(S_{0,4})$  son isomorfos.*

La prueba del anterior lema no la incluimos ya que escapa a los objetivos de esta tesis, puede encontrarse una demostración en [19].

LEMA 2.13. *Considérense la superficie  $S_{0,4}$ ,  $a$  y  $b$  dos curvas en  $S_{0,4}$  con  $i(a, b) = 2$ .*

1. *Sea  $c$  una curva en  $S_{0,4}$  tal que  $i(a, c) = 2$ . Entonces existe  $h \in \text{Mod}^*(S_{0,4})$  tal que  $h(a) = a$  y  $h(b) = c$ .*
2. *Existen exactamente dos curvas  $c_i$  de  $S_{0,4}$  tales que  $i(a, c_i) = i(b, c_i) = 2$ ,  $i = 1, 2$ . Más aún, existe  $h \in \text{Mod}(S_{0,4})$  tal que  $h(a) = a$ ,  $h(b) = b$  y  $h(c_1) = c_2$ .*

DEMOSTRACIÓN. 1. Consideremos  $h$  como la clase de isotopía del giro de Dehn  $T_a$  a lo largo de  $a$ , obtenemos el resultado. Esto es posible ya que hasta giros de Dehn, existe un único arco esencial que une a una componente de frontera consigo misma, revise [5] para más detalles.

2. El lema 2.12 dice que existe una biyección entre  $\mathcal{G}(S_{1,1})$  y  $\mathcal{G}(S_{0,4})$  y el Lema 2.4 nos dice que estas dos curvas existen. Consideremos la involución dada por la reflexión a través de un plano que corte a la superficie  $S_{1,1}$  y aplicando la biyección tenemos el resultado.  $\square$

TEOREMA 2.14. *Sea  $S$  una superficie conexa, orientable de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq 4$ , entonces*

$$\Psi : \text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}(S)),$$

*es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\Psi$  es un homomorfismo de grupos. A continuación, probamos que es inyectivo. Sea  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$  tal que su imagen bajo  $\Psi$  es la identidad. En lo siguiente demostramos que  $\varphi$  es el homeomorfismo identidad. Consideremos el conjunto de curvas  $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2g+1}, b_4, b_5, \dots, b_{2g-1}, c\}$  si  $S$  es cerrada y  $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2g+1}, b_1, b_2, \dots, b_{2g}, c, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  si  $S$  tiene ponchaduras, como se muestra en la Figura 14(i)-(ii). Estas curvas no separadoras llenan a la superficie  $S$ , de hecho son un sistema de Alexander estable, en particular  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \mathcal{F}$ , por lo que  $\varphi$  es el homeomorfismo identidad.

Resta probar la suprayectividad de  $\Psi$ . Tomemos  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$ ,  $m = 3g - 3 + n$ ,  $\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathcal{G}^0(S)$  una descomposición en



pantalones y  $G = \mathcal{G}(S)$ . Esta parte de la demostración la dividimos en dos pasos:

*Paso 1*

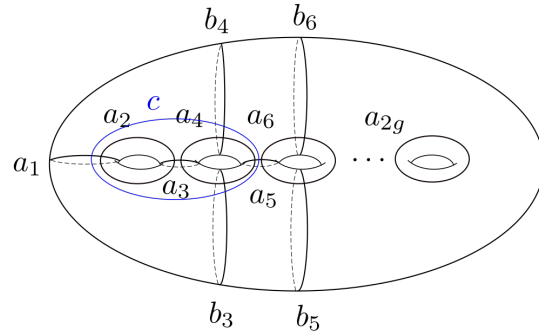
Sea  $\theta \in \text{Aut}(\mathcal{G}(S))$  tal que  $\theta(x_i) = x_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, m$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , existen  $x_i, y_i \in \mathcal{G}^0(S)$  tales que:

- $i(x_i, y_i) = 2$ ,
- $i(x_j, y_i) = 0$ ,  $j \neq i$ ,
- $i(x_i, z_i) = 2$ ,
- $i(y_i, z_i) = 2$ .

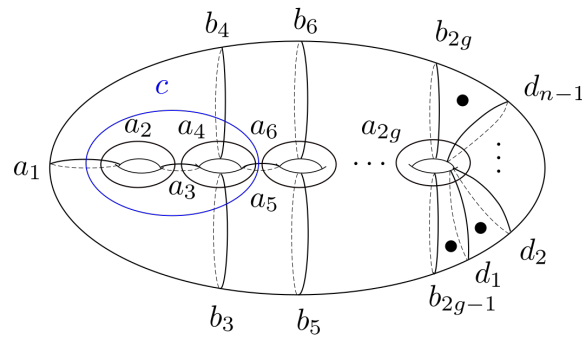
Por el Lema 2.13(1), podemos suponer que  $\theta(y_i) = y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Además, de acuerdo al Lema 2.13 parte 2 podemos asumir que  $\theta(z_i) = z_i$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Consideremos  $\mathcal{P}' = \{x_i, y_i, z_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ ; esto implica que  $x \in \mathcal{G}^0(S)$  está únicamente determinado por los  $3m$  números de intersección  $i(s, t)$ ,  $t \in \mathcal{P}'$ . Esto fue probado primero por Dehn [3] y redescubierto por Thurston, ver [18] para una prueba. Consecuentemente, por el Teorema 2.11,  $\theta(w) = w$  para todo  $w \in \mathcal{G}^0(S)$ , por lo que  $\theta$  es el morfismo identidad en  $\mathcal{G}(S)$ .

*Paso 2*

Por la Proposición 2.9 existe  $h \in \text{Mod}^*(S)$  tal que  $\Psi(h)(a_i) = \phi(a_i)$  para toda  $i = 1, 2, \dots, m$ , entonces  $a_i = \phi^{-1} \circ \Psi(h)(a_i)$ ; esto implica por el Paso 1 que  $\phi^{-1} \circ \Psi(h) = \text{id}_G$ , así  $\phi = \Psi(h)$  y por lo tanto  $\Psi$  es suprayectiva.  $\square$



(i)



(ii)

FIGURA 14. Sistemas de Alexander para probar inyectividad en el Teorema 2.14

## Capítulo 3

### Morfismos de $\mathcal{G}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ .

En el capítulo anterior, a grandes rasgos, probamos que cualquier automorfismo del grafo de Schmutz de una superficie  $S$ , orientable de género  $g$ ,  $n$  ponchaduras, y frontera vacía, es inducido por un homeomorfismo de  $S$ . En esta misma dirección, las preguntas que se responden (de manera parcial) en este capítulo son: *¿cuándo un endomorfismo de grafos de  $\mathcal{G}(S)$  está inducido por un homeomorfismo de  $S$ ?* Más aún, si existe  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo de grafos, donde a priori desconocemos si  $S$  y  $S'$  son homeomorfas o no, *¿bajo qué condiciones  $S$  es homeomorfa a  $S'$ ?* Y en tal caso, *¿cuándo  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo?* Para responder esta última pregunta, utilizamos técnicas propuestas por Irmak [13] y Aramayona y Leininger [1].

La primera sección de este capítulo damos condiciones suficientes a  $\varphi$ ,  $S$  y  $S'$ , para que  $S$  y  $S'$  sean homeomorfas. Para demostrar que  $S$  y  $S'$  son homeomorfas bajo las condiciones que nosotros damos, usamos el teorema de clasificación de superficies que nos dice que basta probar que el género y el número de ponchaduras de  $S$  y  $S'$  coinciden. Para ello el primer resultado importante que probamos es que bajo nuestras hipótesis el género de  $S$  es menor o igual que el género de  $S'$  (Teorema 3.3). Después probamos que la complejidad de  $S$  es igual a la complejidad de  $S'$  (Lema 3.5), y finalmente definimos los *pares periféricos*, y probamos que pares periféricos de  $S$  son mapeados bajo  $\varphi$  en pares periféricos de  $S'$  (Proposición 3.14), esto para probar que el número de ponchaduras de  $S$  es menor o igual al número de ponchaduras de  $S'$  y concluir la sección demostrando el Teorema 4.

Ya probado esto, en la sección 2 de este capítulo procedemos a probar que  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  está inducido por un homeomorfismo (Corolario 4), esta demostración está fuertemente basada en [13]. La prueba consiste en determinar únicamente hasta homeomorfismo ciertas colecciones de curvas en  $S$  y así probar que existe un homeomorfismo de  $S$  que preserva a las curvas de estas colecciones (Lemas 3.22, 3.23, 3.24). Posteriormente replicamos la prueba que da Irmak en [13] para probar que existe un homeomorfismo  $h$  de  $S$  que induce a  $\varphi$  (Teorema

3.27). Concluimos el capítulo demostrando el resultado central de este trabajo (Corolario 4) como un Corolario de los Teoremas 4 y 3.27.

### 1. Rigidez de $\mathcal{G}(S)$

En esta sección  $S$  y  $S'$  son superficies conexas, orientables, con frontera vacía, de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ . Sea  $a \in \mathcal{G}^0(S)$ , definimos el conjunto  $\text{star}(a) := \{b \in \mathcal{G}^0(S) : i(a, b) = 1\} \cup \{a\}$ ,

DEFINICIÓN 3.1. Decimos que un morfismo de grafos  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  es *localmente inyectivo* si para cada  $a \in \mathcal{G}^0(S)$ , se tiene que  $\varphi$  es inyectivo en  $\text{star}(a)$ ; además, decimos que  $\varphi$  *preserva intersección cero* si para cada par de vértices  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$  tales que  $i(a, b) = 0$  entonces  $i(\varphi(a), \varphi(b)) = 0$ .

En lo que sigue  $\varphi$  denota un morfismo de grafos entre  $\mathcal{G}(S)$  y  $\mathcal{G}(S')$  localmente inyectivo que preserva intersección cero.

LEMA 3.2. *Si  $a$  y  $b$  son dos curvas no separadoras ajenas en  $S$ , entonces  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos dos casos.

**Caso 1:**

Supongamos que  $a \cup b$  no separa a la superficie. Entonces, por el principio de cambio de coordenadas, hasta homeomorfismo se ven como en la Figura 15(i). En este caso, existe una curva no separadora  $c$  tal que  $i(a, c) = 1$  y  $i(b, c) = 0$ . Como  $\varphi$  es morfismo de grafos, entonces  $i(\varphi(a), \varphi(c)) = 1$ ; además  $i(\varphi(b), \varphi(c)) = 0$ , ya que  $\varphi$  preserva intersección cero. Por lo tanto  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ .

**Caso 2:**

Supongamos que  $a \cup b$  separa a la superficie. Consideremos  $S - a$  la superficie resultante de cortar  $S$  a lo largo de la curva  $a$ . Como  $a$  no es una curva separadora, entonces el género de  $S$  es reducido por 1 y su número de ponchaduras aumenta en 2, es decir,  $S - a \approx S_{g_1-1, n_1+2}$ . Por el principio de cambio de coordenadas, podemos pensar a  $a \cup b \subseteq S$  como en la Figura 15(ii). Sabemos que al cortar  $S - a$  a lo largo de  $b$ , desconectamos la superficie  $S - a$  ya que  $a \cup b$  separa a la superficie  $S$ ; denotemos por  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  a las componentes conexas de  $S \setminus (a \cup b)$ . Supongamos que  $\Sigma$  tiene las dos ponchaduras resultantes de retirar  $a$  de  $S$ , entonces  $b$  resulta ser una curva que separa a la superficie  $S$ , lo cual es una contradicción: lo mismo sucede si suponemos que  $\Sigma'$  tiene las dos ponchaduras resultantes de quitar  $a$  de  $S$ . Consecuentemente  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  tienen ambas, una ponchadura resultante de retirar  $a$  de  $S$ . Por

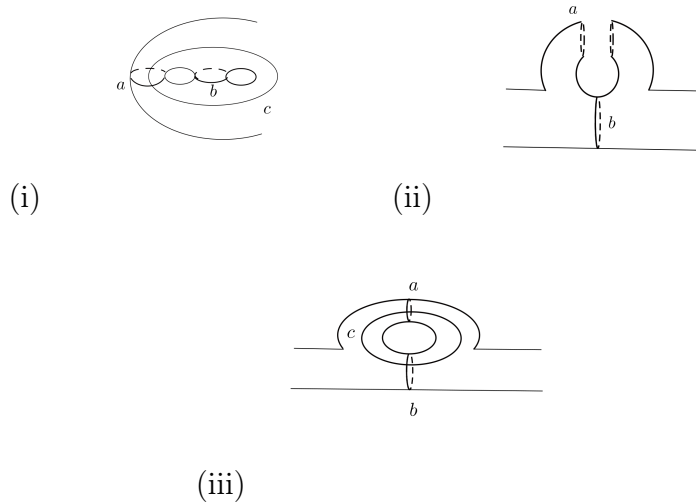


FIGURA 15. En (i)  $a \cup b$  no desconecta a  $S$ . En (ii) y (iii)  $a \cup b$  separa a  $S$ .

lo que, existe una curva  $c$  en  $S$  tal que  $i(a, c) = 1 = i(b, c)$  (ver Figura 15(iii)), como  $\varphi$  es localmente inyectiva, tenemos que  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ .  $\square$

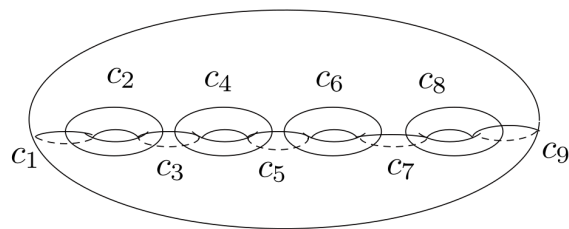


FIGURA 16. Una cadena en  $S \approx S_{4,0}$

Recordemos que una *cadena* en  $S$  es una colección de curvas  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  tales que  $i(c_i, c_{i+1}) = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ , y

$i(c_i, c_j) = 0$  para  $|i - j| > 1$ . Decimos que una cadena  $\mathcal{C}$  es *maximal* si  $m = 2g + 1$ . Ver la Figura 16 para un ejemplo.

**TEOREMA 3.3.** *Si  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  es un morfismo de grafos localmente inyectivo, que preserva intersección cero, entonces  $g_1 \leq g_2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos una cadena maximal  $\mathcal{C} = \{c_i\}$ ; notemos que la cadena  $\mathcal{C}$  tiene  $2g_1 + 1$  elementos distintos. Tomemos la imagen de la cadena  $\mathcal{C}$  bajo  $\varphi$ ,  $\{\varphi(c_i)\}$ . A continuación probamos que  $\varphi(\mathcal{C})$  es una cadena en  $S'$ . Sean  $c_i$  y  $c_j$  elementos distintos de  $\mathcal{C}$ ; entonces  $i(c_i, c_j) = 1$  o  $i(c_i, c_j) = 0$ . Si  $i(c_i, c_j) = 1$  entonces  $i(\varphi(c_i), \varphi(c_j)) = 1$ , debido a que  $\varphi$  es un morfismo de grafos y en particular  $\varphi(c_i) \neq \varphi(c_j)$ . Si  $i(c_i, c_j) = 0$ , el Lema 3.2 implica que  $\varphi(c_i) \neq \varphi(c_j)$ , y por hipótesis  $i(\varphi(c_i), \varphi(c_j)) = 0$ . Consecuentemente  $\varphi(\mathcal{C})$  es una cadena en  $S'$ , así  $2g_1 + 1 \leq 2g_2 + 1$ , concluimos que  $g_1 \leq g_2$ .  $\square$

**COROLARIO 3.4.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies cerradas de género  $g, g' \geq 2$ , respectivamente, tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$  y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo de grafos localmente inyectivo, que preserva intersección cero, entonces  $S$  es homeomorfa a  $S'$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema de clasificación de superficies, basta probar que  $g = g'$ . Como  $\kappa(S) \geq \kappa(S')$  y  $S$  y  $S'$  son cerradas tenemos que  $3g - 3 \geq 3g' - 3$ , por lo que  $g \geq g'$ ; el Teorema 3.3 nos da la otra desigualdad, por lo que  $g = g'$ .  $\square$

**LEMA 3.5.** *Si  $\mathcal{P}$  es una descomposición en pantalones de  $S$  formada de curvas no separadoras, entonces  $\varphi(\mathcal{P})$  es una descomposición en pantalones de  $S'$ , y  $\kappa(S) = \kappa(S')$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos  $\mathcal{P}$  una descomposición en pantalones de  $S_1$ , y la colección de curvas  $\varphi(\mathcal{P})$  en  $S'$ . Como  $\varphi$  preserva intersección cero, entonces los elementos de  $\varphi(\mathcal{P})$  son ajenos dos a dos. Por el Lema 3.2, tenemos que la cardinalidad de  $\varphi(\mathcal{P})$  es  $3g + n_1 + 1$ , por lo que  $\kappa(S) \leq \kappa(S')$ . Finalmente, por hipótesis obtenemos que  $\kappa(S) \geq \kappa(S')$ , entonces  $\kappa(S) = \kappa(S')$ ; así  $\varphi(\mathcal{P})$  es una descomposición en pantalones de  $S'$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 3.6.** Decimos que dos curvas  $a$  y  $b$  en  $S$  son *vecinos de Farey (esféricos)* si ellas llenan a una subsuperficie  $\Sigma \subset S$  homeomorfa a  $S_{0,4}$  y además  $i(a, b) = 2$  (ver Figura 17).

**DEFINICIÓN 3.7.** Dadas una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  de una superficie  $S$ , una curva  $b$  no separadora de  $S$ , y  $a \in \mathcal{P}$ , decimos que  $a$  es *sustituible con  $b$  respecto a  $\mathcal{P}$*  si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

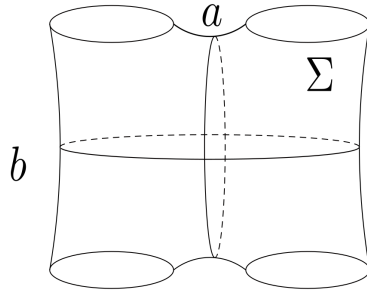


FIGURA 17. Vecinos de Farey (esféricos)

1. La colección de curvas  $(\mathcal{P} \setminus \{a\}) \cup \{b\}$  es una descomposición en pantalones de  $S$ .
2. Las curvas  $a$  y  $b$  son vecinos de Farey.

LEMA 3.8. *Si  $\mathcal{P}$  es una descomposición en pantalones de curvas no separadoras y  $a \in \mathcal{P}$ , entonces existe una curva  $a'$  tal que  $a$  es sustituible con  $a'$ .*

DEMOSTRACIÓN. Una curva  $a$  no separadora que es elemento de  $\mathcal{P}$ , está contenida en una subsuperficie de  $S$  inducida por  $\mathcal{P}$ , cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ , con curvas frontera  $c_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , las cuales pueden ser esenciales o no esenciales, o incluso ser iguales entre sí. Consideramos tres casos para probar que existe  $a'$ , ver Figura 18(i) para un ejemplo.

**Caso 1:**

Supongamos primero que todas las curvas  $c_i$  son distintas y esenciales. Entonces tenemos dos subcasos, el primero, en el que las curvas,  $c_1$  y  $c_2$  son curvas frontera de una subsuperficie conexa  $\Sigma' \subset S$ , en este caso, la Figura 18(i) muestra la curva no separadora de  $S$ ,  $a'$  que prueba el lema. El segundo subcaso sucede cuando las curvas  $c_1$  y  $c_3$  son curvas frontera de una subsuperficie conexa  $\Sigma'$  de  $S$  distinta de  $\Sigma$ , en este caso, 18(ii) muestra la curva no separadora de  $S$ ,  $a'$  que prueba el lema.

**Caso 2:**

Si  $c_1 = c_2$ , entonces la curva  $a'$  dibujada la Figura 18(i) prueba el lema; tomando  $\Sigma'$  homeomorfo a un anillo. O bien, si  $c_1 = c_3$ , la

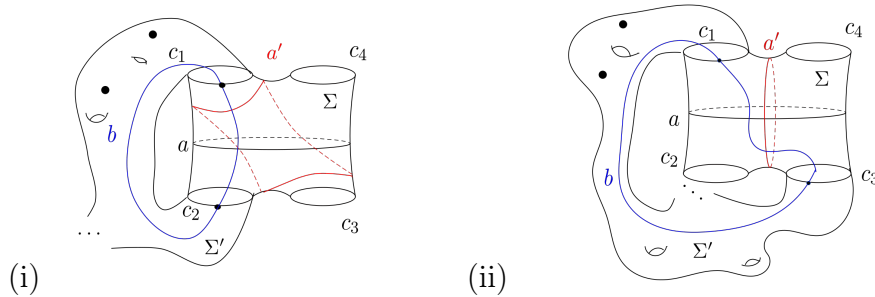


FIGURA 18. En (i)  $\Sigma' \subset S$  contiene un arco que conecta a un punto de  $c_1$  con un punto de  $c_2$ . En (ii)  $\Sigma' \subset S$  contiene un arco que conecta a un punto de  $c_1$  con un punto de  $c_3$ .

curva  $a'$  del lado derecho de la Figura 18(ii); tomando  $\Sigma'$  homeomorfo a un anillo, verifica las condiciones del lema, los demás subcasos son análogos.

**Caso 3:**

Alguna de las curvas  $c_i$  no son esenciales. Como  $a$  no es una curva separadora de  $S$ , entonces al menos dos curvas  $c_i$  y  $c_j$  son esenciales para  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  y se encuentran en un mismo pantalón de  $S$ . Por lo que en la Figura 18 las curvas  $c_i$  y  $c_j$  corresponden a las parejas  $\{c_1, c_2\}$  o  $\{c_1, c_3\}$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $c_i = c_1$ . Si  $c_j = c_2$ , entonces la curva  $a'$  dibujada en la Figura 18(i) es una curva no separadora de  $S$  y sustituible por  $a$ . En otro caso, si  $c_j = c_3$ , la Figura 18(ii) muestra una curva  $a'$  sustituible y no separadora de  $S$ . Notemos que en todos los casos,  $a$  y  $a'$  son vecinos de Farey.

Finalmente, podemos notar que  $a'$  no es separadora, ya que existe una curva  $b$  en  $S$  tal que  $i(a', b) = 1$ , vea la Figura 18, y recordemos que cualquier curva separadora tiene número de intersección par para cualquier curva; lo cual, completa la prueba.  $\square$

LEMA 3.9. Si  $\mathcal{P}$  es una descomposición en pantalones de  $S$  y  $a, b \in \mathcal{G}^0(S)$ , con  $a \in \mathcal{P}$  sustituible con  $b$  respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces  $(\varphi(\mathcal{P}) \setminus \{\varphi(a)\}) \cup \{\varphi(b)\}$  es una descomposición en pantalones de  $S'$  y  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  se intersecan.

DEMOSTRACIÓN. Por ser  $a$  sustituible con  $b$  respecto a  $\mathcal{P}$  tenemos que  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ , es una descomposición en pantalones de  $S$ . Por ser vecinos de Farey, las curvas  $a$  y  $b$  se ven hasta homeomorfismo como en la Figura 17. En virtud del Lema 3.5, tenemos que  $\varphi(\mathcal{P})$  y



$\varphi(\mathcal{P}')$  son descomposiciones en pantalones de  $S'$ , por lo que  $\varphi(a) \cup \varphi(b)$  está contenida en una subsuperficie de  $S'$  inducida por  $\mathcal{P}$ , homeomorfa a  $S_{0,4}$ . Como cualquier par de curvas distintas en  $S_{0,4}$  se intersecan, entonces basta demostrar que  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ .

**Afirmación.**

En  $S$  sucede una de las opciones siguientes:

- Existe una curva  $c$  en  $S_1$  tal que  $i(a, c) = 1$  y  $i(b, c) = 0$ ; o bien
- Existe una curva  $c$  en  $S_1$  tal que  $i(a, c) = 1$  y  $i(b, c) = 1$ .

En la Figura 19 se encuentran la subsuperficie  $\Sigma$  de  $S$ , cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ , que contiene a  $a \cup b$ . En dicha figura, se encuentran numeradas las curvas frontera de  $\Sigma$ ,  $c_i$  con  $i = 1, \dots, 4$ . Como  $a$  y  $b$  no son curvas separadoras de  $S$ , entonces tenemos dos casos: las curvas  $c_1$  y  $c_2$  son curvas frontera de la subsuperficie conexa  $\Sigma' \subset S_1 \setminus \Sigma$ , (ver Figura 19(i)); o bien,  $c_1$  y  $c_3$  son curvas frontera de una subsuperficie conexa  $\Sigma' \subset S \setminus \Sigma$ , (ver Figura 19(ii)). De no ser ciertos alguno de los dos casos anteriores, implicaría que  $a$  o  $b$  es una curva separadora de  $S$ , lo cual es una contradicción. Si  $c_1$  y  $c_2$  son curvas frontera de una subsuperficie conexa  $\Sigma' \subset S_1 \setminus \Sigma$ , entonces trazamos un arco  $d$  en  $\Sigma$  de un punto  $x$  en  $c_1$  a punto  $x'$  de  $c_2$  que interseque a una vez a  $b$  y no interseque a  $a$ ; o bien  $c_1$  y  $c_3$  son curvas frontera de una subsuperficie conexa  $\Sigma' \subset S \setminus \Sigma$ , entonces trazamos un arco  $d$  en  $\Sigma$  de un punto  $x$  en  $c_1$  a un punto  $x'$  en  $c_3$  que interseque exactamente una vez a ambas curvas  $a$  y  $b$ . En ambos casos, existe una subsuperficie  $\Sigma'$  donde podemos continuar el arco  $d$  uniendo el punto  $x$  y  $x'$ , por un arco  $d'$  en  $\Sigma'$ . Si tomamos  $c = d \cup d'$ , entonces se cumple la afirmación.

Por la afirmación anterior y dado que  $\varphi$  es morfismo de grafos que preserva intersección cero, se satisface una de las opciones siguientes:

- Existe una curva  $c'$  en  $S'$  tal que  $i(\varphi(a), c') = 0$  y  $i(\varphi(b), c') = 1$ ; o bien,
- Existe una curva  $c'$  en  $S'$  tal que  $i(\varphi(a), c') = 1$  y  $i(\varphi(b), c') = 1$ .

Finalmente, como  $\varphi$  es localmente inyectivo  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ . □

Recordemos que dada una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  de  $S$  de curvas no separadoras, decimos que dos curvas  $a$  y  $b$  elementos de  $\mathcal{P}$  son *adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$*  si existe un pantalón  $P$  de  $S$ , cuyas curvas frontera estén en  $\mathcal{P}$  y tal que  $a$  y  $b$  son parte de la frontera de  $P$ , ver Figura 20.

El lema siguiente da una caracterización de curvas adyacentes con respecto a una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$ , utilizando curvas auxiliares.

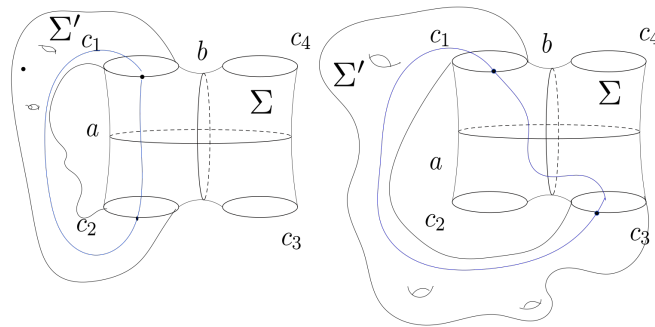


FIGURA 19. A la izquierda  $\Sigma' \subset \Sigma$  con  $c_1 \cup c_2 \subset \partial\Sigma'$ . A la derecha  $\Sigma' \subset \Sigma$  con  $c_1 \cup c_3 \subset \partial\Sigma'$ .

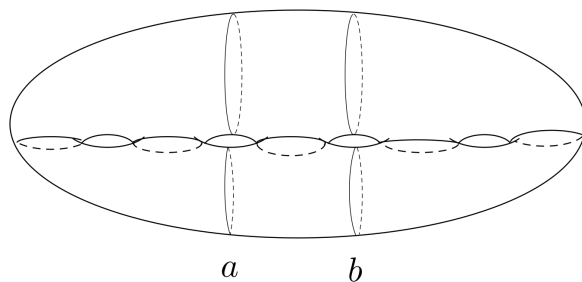


FIGURA 20. Ejemplo de curvas adyacentes con respecto a una descomposición  $\mathcal{P}$  en  $S$ .

LEMA 3.10. *Considere  $\mathcal{P}$  una descomposición en pantalones de  $S_1$  formada de curvas no separadoras. Entonces dos elementos  $a$  y  $b$  en  $\mathcal{P}$  son adyacentes sí y sólo sí, existen  $a'$  y  $b'$  curvas no separadoras tales que:*

1. *La curva  $a$  es sustituible con  $a'$  respecto a  $\mathcal{P}$ ;*
2. *La curva  $b$  es sustituible con  $b'$  respecto a  $\mathcal{P}$ ;*
3. *Las curvas  $a'$  y  $b'$  se intersecan.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $a$  y  $b$  son dos curvas adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ . Notemos que por ser adyacentes  $a$  y  $b$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , están contenidas en una subsuperficie  $\Sigma$  de  $S$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,5}$  ó  $S_{1,2}$ . El Lema 3.8 implica que existen  $a'$  y  $b'$  tales que  $a$  y  $b$  son sustituibles con  $a'$  y  $b'$  respectivamente. Para probar el punto 2 de este lema supongamos que no es cierto que  $a'$  y  $b'$  se intersequen; por lo que  $(b \cup b') \subset \Sigma \setminus (a \cup a')$ . Por otro lado, como las curvas  $a$  y  $a'$  son vecinos de Farey, en particular llenan a una subsuperficie  $\Sigma' \subset \Sigma$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ ; esto implica que el interior de la componente conexa de  $\Sigma \setminus (a \cup a')$  que contiene a  $b \cup b'$  es homeomorfa a  $S_{0,3}$  si  $\Sigma \approx S_{0,5}$ , o bien es homeomorfa a un anillo si  $\Sigma \approx S_{2,1}$ . Esto es una contradicción, ya que las únicas curvas (esenciales) de  $S$  contenidas en  $S_{0,3}$  y en un anillo, son las curvas frontera de estas dos superficies. Por lo que no puede suceder que  $b$  y  $b'$  sean distintas y se intersequen. Por lo tanto  $a'$  y  $b'$  se intersecan.

Para el converso, utilizamos demostración por contrapuesta. Supongamos que  $a$  y  $b$  no son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces, podemos visualizar que  $a$  y  $b$  están en subsuperficies  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_b$  (cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ ) de  $S$  ajenas.

Entonces cualquier sustituible  $a'$  de  $a$  está contenida en  $\Sigma_a$ , y cualquier sustituible  $b'$  de  $b$  está contenida en  $\Sigma_b$ , por lo que  $a'$  y  $b'$  no se intersecan.  $\square$

OBSERVACIÓN. La prueba del Lema 3.10 nos dice aún más,  $a$  y  $b$  son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$  sí y sólo sí cualquier par de curvas  $a'$  y  $b'$  que sustituyen a  $a$  y  $b$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , se intersecan.

Dada la definición de curvas adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ , resulta natural probar que si dos curvas no separadoras  $a$  y  $b$  son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$  entonces, las curvas  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ . Sin embargo, aún no contamos con las herramientas necesarias para probarlo; lo deducimos más adelante, pero primero probamos su converso, y para ello utilizamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.11. Definimos el *grafo de adyacencias*  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$  de una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  como el grafo cuyos vértices son las curvas que conforman a la descomposición  $\mathcal{P}$  y dos vértices de  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$  están unidos por una arista si son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ . Si  $a$  es un vértice de  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ , el grado de  $a$  es definido como:

$$\deg(a) = |\{x \in \mathcal{A}(\mathcal{P}) : x \text{ es adyacente a } a\}|$$

LEMA 3.12. Sean  $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}^0(S)$  una descomposición en pantalones y  $a, b \in \mathcal{P}$  no adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  están en  $\varphi(\mathcal{P})$  y no son adyacentes con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ .

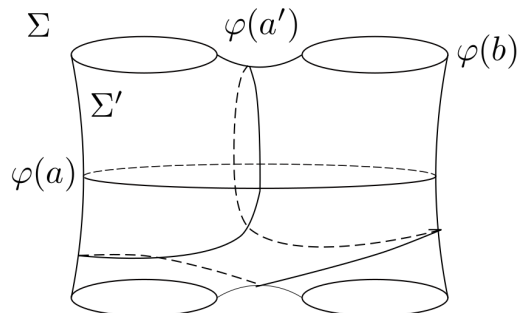


FIGURA 21. Curvas  $\varphi(a)$  y  $\varphi(a')$  contenidas en  $\Sigma$ .

DEMOSTRACIÓN. Demostramos este lema por contradicción. Sean  $a$  y  $b$  dos vértices no adyacentes en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ , tales que  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  son adyacentes en  $\varphi(\mathcal{A}(\mathcal{P}))$  (ver Figura 21). Por los Lemas 3.8 y 3.9 existen curvas  $a'$  y  $b'$  tales que las curvas  $a$  y  $b$  son sustituibles con  $a'$  y  $b'$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , y  $i(\varphi(a), \varphi(a')) \neq 0$ ,  $i(\varphi(b), \varphi(b')) \neq 0$ . Además, por el Lema 3.10 y dado que  $\varphi$  preserva intersección cero tenemos que  $i(\varphi(a'), \varphi(b')) = 0$ . Como  $\varphi(\mathcal{P}) \setminus \{\varphi(a)\} \cup \{\varphi(a')\}$  es una descomposición en pantalones, entonces  $\varphi(a) \cup \varphi(a')$  está contenida en una subsuperficie  $\Sigma \subset S$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ , inducida por  $\varphi(\mathcal{P})$ , más aún  $\varphi(a)$  y  $\varphi(a')$  llenan a  $\Sigma$  (ver Figura 21). Consideremos  $\Sigma' = \Sigma \setminus \varphi(a)$ , tenemos que la componente conexa  $\Sigma''$  de  $\Sigma'$  que contiene a  $\varphi(b)$ , es homeomorfa a  $S_{0,3}$ . Sea  $c$  una componente conexa de  $\varphi(b') \cap \Sigma''$ , entonces  $c$  es ajena a  $\varphi(a')$  ya que  $i(\varphi(a'), \varphi(b')) = 0$ . Lo cual es una contradicción, ya que  $\varphi(a)$  y  $\varphi(a')$  llenan a  $\Sigma$ , por lo que no existe un arco en  $\Sigma''$  que sea ajeno a  $\varphi(a')$ , que interseque a  $\varphi(b)$ , y no forme un bígono con  $\varphi(b)$ . Por lo tanto  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  no son adyacentes.  $\square$

COROLARIO 3.13. *Considere  $\mathcal{P}$  una descomposición en pantalones de  $S$ . Si  $a \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$ , entonces  $\deg(\varphi(a)) \leq \deg(a)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente del Lema 3.12.  $\square$

Uno de nuestros objetivos en este capítulo es probar que si existe  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo localmente inyectivo que preserva intersección cero, entonces  $S$  es homeomorfa a  $S'$ . Hasta ahora, el Corolario 3.4 prueba este resultado para el caso en que  $S$  y  $S'$  son superficies cerradas. Buscamos probar también el caso con ponchaduras, para ello

necesitamos contar pares periféricos de una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  de la superficie  $S$ .

Recordemos que un *par periférico* de  $S$  es una multicurva  $\{a, b\}$  tal que  $a \neq b$ ,  $a$  y  $b$  son curvas no separadoras, y  $S$  tiene una subsuperficie con frontera  $a \cup b$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,3}$ .

La proposición siguiente proporciona una manera de hallar pares periféricos, mediante la detección de curvas de grado dos en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ .

**PROPOSICIÓN 3.14.** *Considere  $\mathcal{P}$  una descomposición en pantalones de curvas no separadoras en  $S$ . Sea  $a$  una curva de grado dos en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ . Si  $b$  y  $c$  son las curvas adyacentes a la curva  $a$  con respecto a  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ , entonces  $\{a, b\}$  y  $\{a, c\}$  son pares periféricos.*

**DEMOSTRACIÓN.** La curva  $a$  está contenida en una subsuperficie  $\Sigma$  de  $S$  cuyo interior es homeomorfo a  $S_{0,4}$ , ver la Figura 22. Como  $b$  y  $c$  son las únicas curvas adyacentes a  $a$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces las curvas frontera de  $\Sigma$  contienen a  $b$  y  $c$ . Supongamos que todas las curvas frontera de  $\Sigma$  son esenciales, como  $b$  y  $c$  son las únicas curvas adyacentes a la curva  $a$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces las curvas frontera de  $\Sigma$  se identifican y resulta  $S \approx S_{2,0}$ , que contradice  $\kappa(S) \geq 4$ . Entonces no todas las curvas frontera de  $\Sigma$  son esenciales, por lo que existe al menos una curva  $d$  componente de frontera de  $\Sigma$  que no es esencial. Resta demostrar que  $e$  no es una curva esencial.

Si suponemos que  $b$  y  $c$  están en un mismo pantalón de  $\Sigma$ , entonces suceden uno de los dos casos siguientes: el otro pantalón de  $\Sigma$  tiene una curva frontera esencial  $e$ , y una curva frontera  $d$  que sabemos, es no esencial; o bien, las dos curvas frontera  $d$  y  $e$  no son esenciales. En el primer caso, como  $a$  tiene exactamente grado 2, así  $e = c$  ó  $b$ . Supongamos que  $e = b$ , entonces  $c$  es una curva separadora, lo cual es una contradicción. De manera análoga si  $e = c$ , tenemos que  $a$  es una curva separadora, que es también una contradicción. Por lo que las curvas frontera del otro pantalón de  $\Sigma$  no son esenciales, y da como resultado que  $a$  es una curva separadora de  $S$ , lo cual es una contradicción. Consecuentemente  $b$  y  $c$  se encuentran en distintos pantalones de  $\Sigma$ , ver Figura 22. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $d$  está en el mismo pantalón que  $b$ . Si asumimos que la curva  $e$  es esencial, entonces  $e = b$  ó  $c$  ya que  $a$  tiene grado dos; si suponemos que  $e = b$ , tenemos que  $c$  es una curva separadora de  $S$ , lo cual es una contradicción. Si  $e = c$ , entonces  $a$  es una curva separadora de  $S$ . Por lo que  $e$  no es una curva esencial. Por lo tanto,  $\{a, b\}$  y  $\{a, c\}$  son pares periféricos.

□

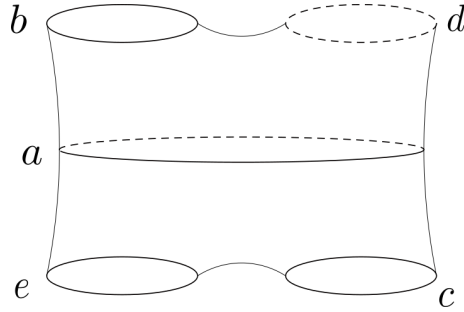


FIGURA 22. Curva  $a$  de grado dos en  $\mathcal{P}$ .

**COROLARIO 3.15.** *Si  $a$  es una curva no separadora en  $S$  de grado dos en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ , entonces  $\varphi(a)$  tiene grado dos en  $\mathcal{A}(\varphi(\mathcal{P}))$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La Proposición 3.13, dice que  $\deg(\varphi(a)) \leq 2$ . Si  $\varphi(a)$  tiene grado uno, entonces sería una curva separadora, o  $S'$  sería una superficie de complejidad 2; ahora si  $\varphi(a)$  tiene grado cero entonces tendríamos que  $\kappa(S') = 1$ . Pero no es posible ya que  $\kappa(S') \geq 4$ . Por lo tanto  $\deg(\varphi(a)) = 2$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.16.** *Sean  $\mathcal{P}$  una descomposición en pantalones de  $S$ , y una curva  $a \in \mathcal{P}$  de grado dos en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ . Si  $b$  y  $c$  son las curvas adyacentes a la curva  $a$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , entonces  $\varphi(b)$  y  $\varphi(c)$  son adyacentes a  $\varphi(a)$  con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Los elementos del conjunto  $\mathcal{P} \setminus \{a, b, c\}$  no son adyacentes a la curva  $a$  con respecto a  $\mathcal{P}$ . El Lema 3.12 dice que elementos no adyacentes a una curva  $a$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , se mapean bajo  $\varphi$  en elementos no adyacentes a  $\varphi(a)$ . Por lo que los elementos de  $\varphi(\mathcal{P}) \setminus \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\}$  no son adyacentes a  $\varphi(a)$  con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ . Consecuentemente los únicos elementos que posiblemente son adyacentes a  $\varphi(a)$  con respecto a  $\mathcal{P}$  son  $\varphi(b)$  y  $\varphi(c)$ ; ya que el Corolario 3.15 implica que  $\varphi(a)$  tiene grado dos y  $\varphi(a)$  no es adyacente a sí mismo, obtenemos el resultado.  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.17.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables, con frontera vacía, de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S')$  y  $n \leq 1$ , y  $\varphi : G(S) \rightarrow G(S')$  un morfismo de grafos localmente inyectivo, que preserva intersección cero, entonces  $S \approx S'$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema de clasificación de superficies, debemos mostrar que  $g = g'$  y  $n = n'$ . El Teorema 3.3 dice que bajo las hipótesis que tenemos,  $g \leq g'$ , y por el Lema 3.5, tenemos que  $\kappa(S) = \kappa(S')$ . Supongamos que  $n < n'$ , por otro lado tenemos que

$3g - 3 + n = 3g' - 3 + n'$ , por lo que  $3g = 3g' + (n' - n) > 3g'$ , que es una contradicción con  $g \leq g'$ , así  $n' \leq n$ . A partir de aquí, dividimos la prueba en dos casos:

**Caso 1,  $n = 0$ .**

Supongamos que  $n = 0$ , entonces  $n' \leq 0$ , pero tenemos que  $n' \geq 0$  siempre. Concluimos que  $n' = 0$  y  $g = g'$ .

**Caso 2,  $n = 1$ .**

Supongamos que  $n = 1$ , entonces  $n' \leq 1$ , así  $n' = 0$  o bien  $n' = 1$ . Si  $n' = 0$ , obtenemos que  $3g + 1 = 3g'$ , ya que  $\kappa(S) = \kappa(S')$ , pero no existe un número entero que sea congruente con cero módulo 3 y que también sea congruente con uno módulo 3. Consecuentemente  $n' = 1$  y  $g = g'$ .  $\square$

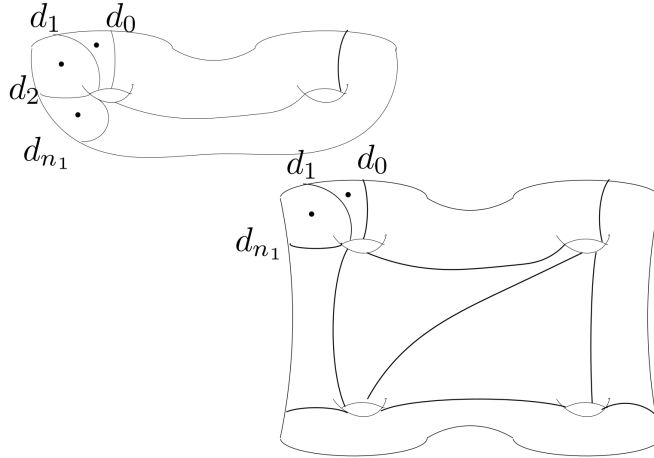


FIGURA 23. Descomposiciones en pantalones de  $S_{2,3}$  y  $S_{4,2}$ .

La proposición anterior nos dice que para los casos  $n = 0, 1$  el resultado que queremos probar es válido, por lo que en lo siguiente suponemos que  $n > 1$ .

Sean  $S$  y  $S'$  tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ . Si consideramos la descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  de  $S$  como en la Figura 23, entonces  $\varphi(\mathcal{P})$  es una descomposición en pantalones en  $S'$ . Notemos que la descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$  en  $S$  tiene  $n$  curvas  $\{d_i\}_{i=1}^{n-1}$  de grado dos en  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ , ver Figura 23. Debido al Corolario 3.15  $\{\varphi(d_i)\}_{i=1}^{n-1}$  es una colección de curvas de grado dos de  $\mathcal{A}(\varphi(\mathcal{P}))$  (posiblemente  $\mathcal{A}(\varphi(\mathcal{P}))$ ) contiene más curvas de grado dos), entonces por la Proposición 3.14 existen al menos  $n - 1$  pares periféricos contenidos en la descomposición  $\varphi(\mathcal{P})$ , la Proposición 3.16 implica que las adyacencias entre las

curvas en el conjunto  $\{d_i\}_{i=0}^{n-1}$  son preservadas bajo  $\varphi$ , lo que implica que hasta homeomorfismo, se ven como en la Figura 24. Por lo que hay al menos  $n$  ponchaduras en  $S'$ , es decir  $n \leq n'$ .

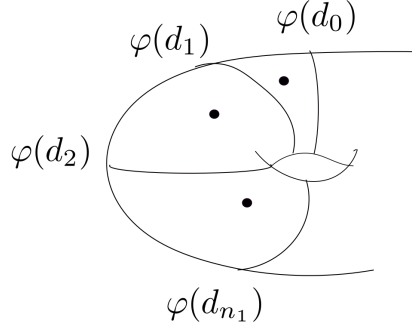


FIGURA 24. Imágenes de pares periféricos bajo  $\varphi$  en  $S'$ .

Con esta última afirmación, fácilmente podemos deducir el siguiente teorema:

**TEOREMA 3.18** (Jesús Hernández Hernández - Anayeli Tomás Álvarez). *Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables, con frontera vacía, de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras, tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ , y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo de grafos localmente inyectivo, que preserva intersección cero, entonces  $S \approx S'$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La Proposición 3.17 prueba los casos  $n = 0, 1$ , supongamos que  $n \geq 2$ . Del Lema 3.5, tenemos que  $3g + n - 3 = 3g' + n' - 3$ , la afirmación hecha anteriormente muestra que  $n' - n \geq 0$ , entonces  $3g = 3g' + (n' - n) \geq 3g'$ , además por el Teorema 3.3 tenemos que  $g \leq g'$ , lo cual implica que  $g = g'$  y consecuentemente  $n = n'$ . Por lo tanto  $S \approx S'$ .  $\square$

## 2. Endomorfismos de $\mathcal{N}(S)$ .

Hasta ahora tenemos que si dos superficies  $S_i$  con  $g_i \geq 2$ ,  $n_i \geq 0$  y  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$  son tales que existe un morfismo localmente inyectivo que preserva intersección cero  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$ , entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, de manera que podemos identificar  $S'$  con  $S$ . La pregunta siguiente a contestar es, ¿este morfismo  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$ ? Esta sección está dedicada a responder



esta pregunta, observando que  $\varphi$  induce un endomorfismo de grafos, en el *grafo de curvas no separadoras* (definido más adelante), además de usar técnicas expuestas por Irmak [13] y Aramayona y Leininger [1].

En esta sección,  $S$  denota una superficie de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq 4$ . Definimos el *grafo de curvas no separadoras*  $\mathcal{N}(S)$  como el grafo cuyos vértices son curvas en  $S$ , y dos vértices  $a$  y  $b$  en  $\mathcal{N}(S)$  forman una arista si  $i(a, b) = 0$ . Denotamos al conjunto de vértices por  $\mathcal{N}^0(S)$ . Aunque no lo usamos en esta tesis, cabe señalar que el grafo  $\mathcal{N}(S)$ , es un subgrafo del grafo de curvas  $\mathcal{C}(S)$ .

Dada la definición anterior y el Lema 3.2 un morfismo de grafos  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S)$  que preserve intersección cero, induce un morfismo de grafos (que por abuso de notación denotamos con la misma letra)  $\varphi : \mathcal{N}(S) \rightarrow \mathcal{N}(S)$  que preserve intersección uno.

OBSERVACIÓN. Un resultado en el texto de Irmak [13], dice que un endomorfismo de grafos  $\varphi$  de  $\mathcal{N}(S)$  está inducido por un homeomorfismo  $h$  de  $S$  siempre que  $S$  tenga género  $g \geq 2$  y  $n \geq 0$  ponchaduras, sin embargo, hallamos errores en la prueba para el caso de la superficie cerrada de género  $g = 2$ , en la cual (en el lenguaje de grafos) afirma la no existencia de un subgrafo finito de  $\mathcal{N}(S)$ , con una configuración específica y concluye la inyectividad de  $\varphi$  la cual es clave en la demostración de la existencia de  $h$ , ver Lema 2.3 Caso (ii) de [13] para más detalles.

Decidimos restringir el uso de sus técnicas a nuestro caso ( $\varphi : \mathcal{N}(S) \rightarrow \mathcal{N}(S)$  morfismo de grafos que preserve intersección uno).

En lo siguiente  $\varphi$  denota un morfismo de grafos de  $\mathcal{N}(S)$  que preserve intersección uno.

Los siguientes dos lemas prueban que si tres curvas son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$  a pares, entonces sus imágenes bajo  $\varphi$  también lo son.

LEMA 3.19. *Considere una descomposición en pantalones  $\mathcal{P} = \{a_1, a_3, \dots, a_{2g+1}, b_3, b_4, \dots, b_{2g-2}\}$ , si  $S$  es cerrada y  $\mathcal{P} = \{a_1, a_3, \dots, a_{2g-1}, b_3, b_4, \dots, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  si  $S$  tiene ponchaduras, como en la Figura 25(i)-(ii). Entonces  $\varphi(a_1), \varphi(a_3), \varphi(b_4)$  son adyacentes por pares con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Presentamos un esbozo de la prueba. Para demostrar la adyacencia de cada par de curvas  $a, b \in \{a_1, a_3, b_4\}$  con respecto a  $\mathcal{P}$ , se procede con los dos esquemas similares de prueba, que mostramos a continuación:

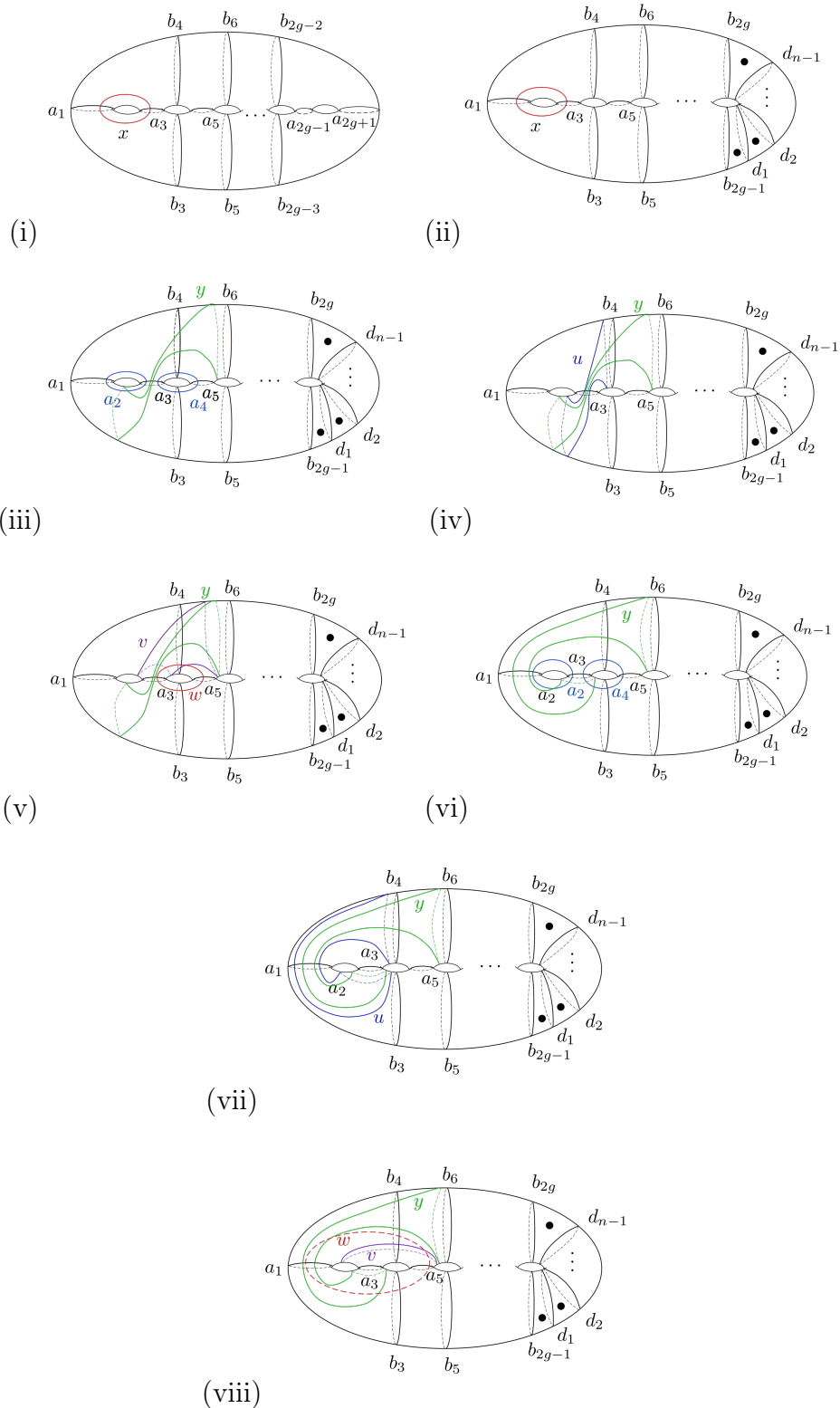


FIGURA 25. Caso  $g \geq 3$ . Figuras (iii)-(v) configuración para  $(a_3, b_4)$ . Figuras (vi)-(viii) configuración para  $(a_1, b_4)$ .

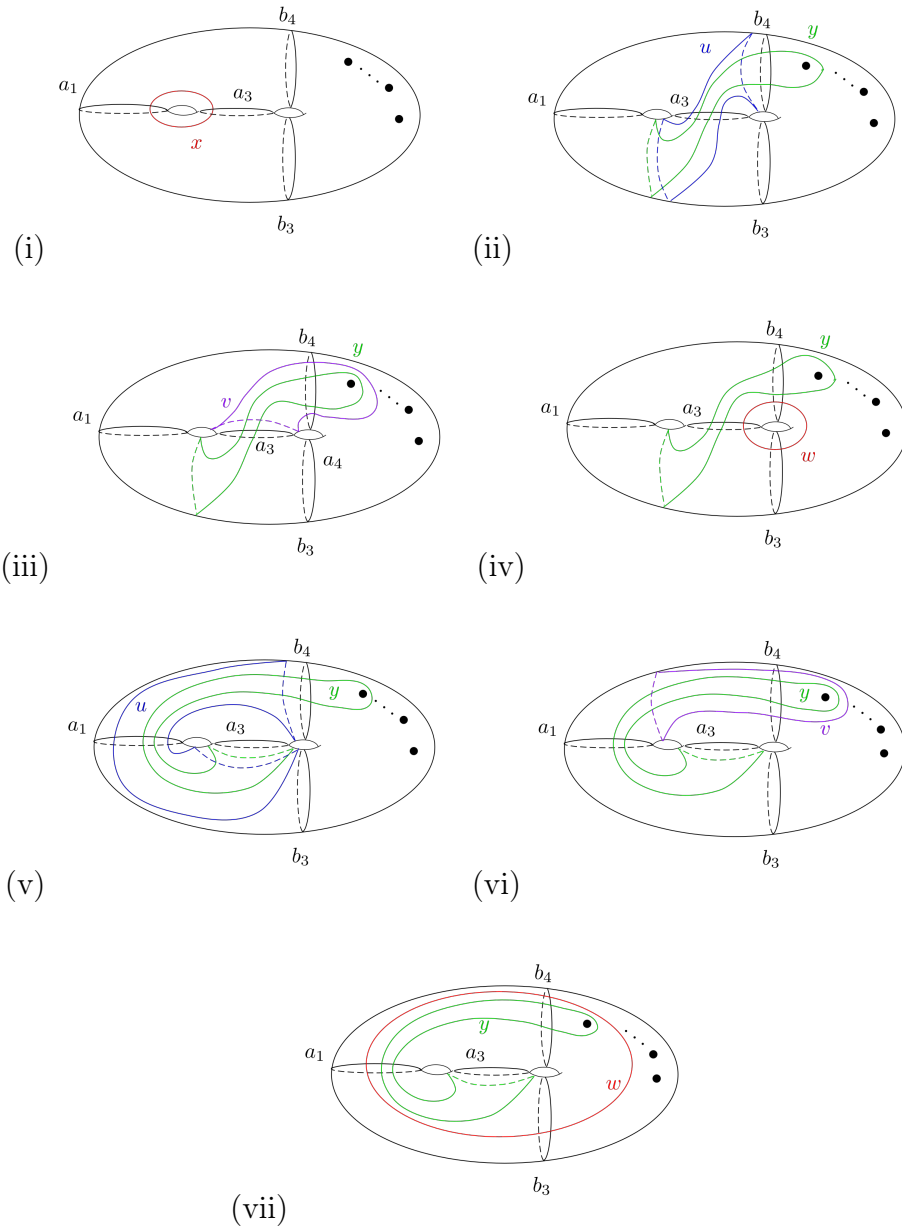


FIGURA 26. Caso  $g = 2$ ,  $n \geq 1$ . Figuras (ii)-(iv) configuración para  $(a_3, b_4)$ . Figuras (v)-(vii) configuración para  $(a_1, b_4)$ .

Si  $(a, b) = (a_1, a_3)$ , suponemos que  $\varphi(a_1), \varphi(a_3)$  no son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ . En este caso, consideramos la curva  $x$  (como en la Figura 25(i)) que interseca una vez a cada curva  $a_1$  y  $a_3$ , entonces  $i(\varphi(x), \varphi(a_1)) = 1$ ,  $i(\varphi(x), \varphi(a_3)) = 1$ , y  $i(\varphi(x), \varphi(c)) = 0$  para toda curva  $c \in \mathcal{P} \setminus \{a_1, a_3\}$ , ya que  $\varphi$  preserva intersección uno y es un morfismo de grafos. Pero estas afirmaciones no son posibles si  $\varphi(a_1)$  y  $\varphi(a_3)$  no son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ .

Si  $(a, b) \in \{(a_3, b_4), (a_1, b_4)\}$ , entonces procedemos de la siguiente forma: Elegimos una multicurva  $\{y, u, v, w\}$  en  $S$  tal que:

- La curva  $y$  interseque a  $a$ , y  $b$  sea ajena de todas las curvas en  $\mathcal{P} \setminus \{a, b\}$ ;
- la curva  $u$  sea sustituible con  $a$  respecto a  $\mathcal{P}$  y sea ajena a  $y$ ;
- la curva  $v$  sea sustituible con  $b$  respecto a  $\mathcal{P}$  y sea ajena a  $y$ ;
- la curva  $w$  cumpla  $i(a, w) = 1$ ,  $i(b, w) = 1$  y  $i(y, w) = 0$ .

Vea las Figuras 26 y 25 para ejemplificar una tal multicurva  $\{y, u, v, w\}$ .

El siguiente paso es demostrar que  $\varphi(y)$  interseca tanto a  $\varphi(a)$  como a  $\varphi(b)$ ; con lo cual concluiríamos que  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  son adyacentes con respecto a  $\mathcal{P}$ . Para probar lo anterior hacemos las siguientes observaciones:

Por construcción y el Lema 3.5 tenemos que si  $\mathcal{Q}_1 = (\mathcal{P} \setminus \{a\}) \cup \{u\}$  y  $\mathcal{Q}_2 = (\mathcal{P} \setminus \{b\}) \cup \{v\}$ , entonces  $\varphi(\mathcal{Q}_1)$  y  $\varphi(\mathcal{Q}_2)$  son descomposiciones en pantalones.

Por construcción y dado que  $\varphi$  es morfismo de grafos, tenemos que  $i(\varphi(y), \varphi(c)) = 0$  para toda  $c \in \mathcal{Q}_1 \setminus \{b\}$  y  $i(\varphi(y), \varphi(c)) = 0$  para toda  $c \in \mathcal{Q}_2 \setminus \{a\}$ . Por el enunciado anterior obtenemos que  $\varphi(y) \neq \varphi(e)$  para toda curva  $c \in \mathcal{Q}_1 \setminus \{b\}$ , y  $\varphi(y) \neq \varphi(c)$  para toda curva  $c \in \mathcal{Q}_2 \setminus \{a\}$ .

Lo anteriormente escrito implica que  $\varphi(\mathcal{Q}_1) \setminus \{\varphi(b)\} \cup \{\varphi(y)\}$  e  $\varphi(\mathcal{Q}_2) \setminus \{\varphi(a)\} \cup \{\varphi(y)\}$  son descomposiciones en pantalones. Por lo que  $\varphi(a) \cup \varphi(y)$  y  $\varphi(b) \cup \varphi(y)$  están contenidas en subsuperficies (no necesariamente la misma) de  $S$ , homeomorfas a  $S_{0,4}$ . Por construcción y debido a que  $\varphi$  preserva intersección uno  $i(\varphi(a), \varphi(w)) = 1$ ,  $i(\varphi(b), \varphi(w)) = 1$  y  $i(\varphi(y), \varphi(w)) = 0$ . Por esta última observación, obtenemos que  $\varphi(a) \neq \varphi(y)$  y  $\varphi(b) \neq \varphi(y)$ . Finalmente ya que  $\varphi(a) \cup \varphi(y)$  y  $\varphi(b) \cup \varphi(y)$  están contenidas en subsuperficies de  $S$  homeomorfas a  $S_{0,4}$ , tenemos que  $i(\varphi(a), \varphi(y)) \neq 0$  y  $i(\varphi(b), \varphi(y)) \neq 0$ , como se quería probar.  $\square$

**LEMA 3.20.** *Si  $a, b, c$  son vértices distintos en  $\mathcal{N}(S)$  que bordean a un pantalón en  $S$ . Entonces  $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)$  son vértices distintos en  $\mathcal{N}(S)$  que bordean a un pantalón en  $S$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Completamos la multicurva  $\{a, b, c\}$  a una descomposición en pantalones  $\mathcal{P}$ , de manera que en la Figura 27  $a =$

$a_1, b = a_3$  y  $c = b_4$ . Debido al Lema 3.19 tenemos que  $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)$  son curvas adyacentes a pares con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ . Entonces existe un pantalón  $Q_1$  en  $S$  inducido por  $\varphi(\mathcal{P})$  que contiene a  $\varphi(a_1), \varphi(a_3)$  en su frontera. Denotemos por  $x$  a la otra componente de frontera de  $Q_1$ . Si  $x = \varphi(b_4)$ , terminamos. Supongamos que  $x \neq \varphi(b_4)$ . Como  $\varphi(a_1)$  y  $\varphi(b_4)$  son adyacentes con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ , existe  $Q_2$  otro pantalón de  $S$  inducido por  $\varphi(\mathcal{P})$ , con  $\varphi(a_1)$  y  $\varphi(b_4)$  como dos de sus componentes de frontera. Si  $y$  es la componente de frontera restante de  $Q_2$ , y si  $y = \varphi(a_3)$ , terminamos, si no es el caso, tenemos que existe  $Q_3$  pantalón en  $S$  inducido por  $\varphi(\mathcal{P})$  que contiene en su frontera a  $\varphi(b_4) \cup \varphi(a_3)$ .

Por otro lado, consideremos la curva  $a_2$  como en la Figura 27, entonces  $i(a_2, a_1) = 1$  y  $i(a_2, a_3) = 1$  y  $a_2$  es ajena de todas las curvas en  $\mathcal{P} \setminus \{a_2, a_3\}$ , sabemos que  $i(\varphi(a_2), \varphi(a_1)) = 1$  y  $i(\varphi(a_2), \varphi(a_3)) = 1$ , y  $\varphi(a_2)$  es ajena a las curvas en  $\varphi(\mathcal{P} \setminus \{a_1, a_3\})$ . Pero esto es una contradicción ya que en particular  $i(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) = 1$ , consecuentemente existe un arco esencial de  $\varphi(a_2)$  en  $Q_2$  que comienza en  $\varphi(a_1)$  y no puede intersectar una vez más a  $\varphi(a_1)$ , y este arco no tiene manera de salir de  $Q_2$ , ya que es ajena a  $\varphi(b_4) \cup y$ .

Por lo tanto existe un pantalón cuya frontera es  $\varphi(a_1) \cup \varphi(a_3) \cup \varphi(b_4)$ .  $\square$

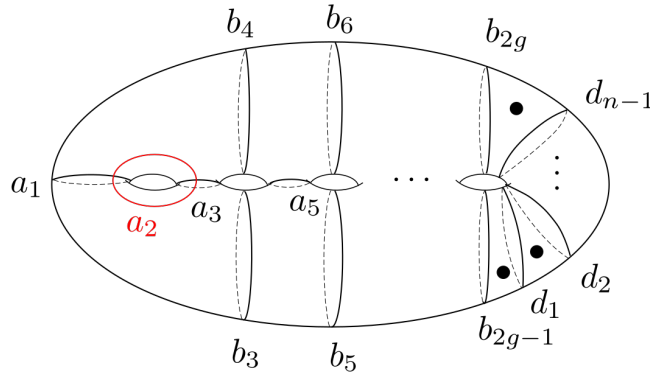


FIGURA 27. Las curvas en negro forman una descomposición en pantalones

LEMA 3.21. Si  $\{x, y\}$  es un par periférico en  $S$ , entonces  $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$  es un par periférico en  $S$ .

DEMOSTRACIÓN. Dividimos la prueba en dos casos:

**Caso 1,**  $g \geq 2$ ,  $n = 1$ .

Completemos la multicurva  $\{x, y\}$  a una descomposición en pantalones de  $S$ ,  $\mathcal{P} = \{a_1, a_3, \dots, a_{2g-1}, b_3, b_4, \dots, b_{2g+1}\}$  como en la Figura 28(i), donde  $x = b_{2g}$ ,  $y = b_{2g-1}$ , entonces el Lema 3.20 dice que multicurvas  $\{x_1, x_2, x_3\}$  contenidas en  $\mathcal{P}$  que bordean a un pantalón son mapeadas bajo  $\varphi$  a multicurvas que bordean a un pantalón en  $S$ , como  $S = S_{g,1}$  tenemos que  $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$  es un par periférico.

**Caso 2,**  $g \geq 2$ ,  $n \geq 2$ .

Completemos la multicurva  $\{x, y\}$  a una descomposición en pantalones de  $S$ ,  $\mathcal{P} = \{a_1, a_3, \dots, a_{2g-1}, b_3, b_4, \dots, b_{2g-1}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  como en la Figura 28(ii), con  $x = b_{2g}$ ,  $y = d_{n-1}$ . Notemos que las multicurvas  $\{b_{2g}, d_{n-1}\}$  y  $\{d_{n-1}, d_{n-2}\}$  (cuando  $n = 2$ ,  $d_{n-2} = b_{2g-1}$ ) son pares periféricos; por el Corolario 3.15 y la Proposición 3.16  $\varphi(d_{n-1})$  tiene grado dos en  $\mathcal{A}(\varphi(\mathcal{P}))$ , y  $\varphi(b_{2g})$  y  $\varphi(d_{n-2})$  son adyacentes a  $\varphi(d_{n-1})$  con respecto a  $\varphi(\mathcal{P})$ ; por la Proposición 3.14  $\{\varphi(b_{2g}), \varphi(d_{n-1})\}$  y  $\{\varphi(d_{n-2}), \varphi(d_{n-1})\}$  son pares periféricos, en particular  $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$  es un par periférico. □

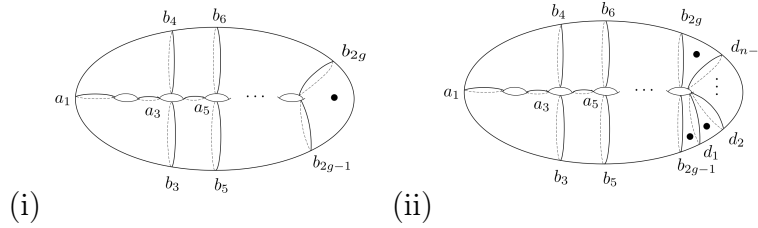


FIGURA 28. (i) Descomposición en pantalones  $n = 1$ .  
(ii) Descomposición en pantalones  $n \geq 2$ .

Considere las curvas de  $\mathcal{C}_1$  mostradas en la Figura 29(i) para el caso de que  $S$  es cerrada y en la Figura 29(ii) para el caso de que  $S$  tiene ponchaduras.

LEMA 3.22. *Sea  $S$  una superficie conexa, orientable de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y  $\kappa(S) \geq 4$ , entonces existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda curva  $x \in \mathcal{C}_1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $n \geq 1$ , la prueba para el caso de superficies cerradas es similar. Consideremos las curvas en  $\mathcal{C}_1$  como en la Figura 29 (ii). Como  $\varphi$  preserva intersección 1, tenemos que una vecindad abierta y regular de la unión de los elementos en  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  es una superficie de género  $g$  y varias ponchaduras. Debido a los Lemas 3.20

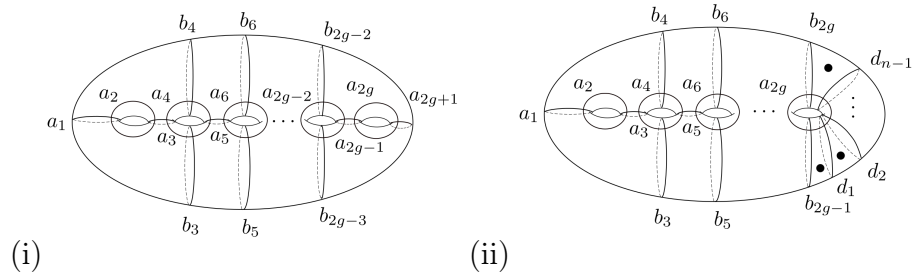


FIGURA 29. Curvas en  $\mathcal{C}_1$ .

y 3.21 tenemos que las curvas de  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  se ven como en la Figura 29 (ii). Entonces existe un homeomorfismo tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda curva  $x$  en la multicurva  $\mathcal{C}_1$ .

□

Cuando  $n \geq 1$ , sea el conjunto de curvas  $\mathcal{C}_2 = \{r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$  donde las curvas son las mostradas en la Figura 30. Si  $n = 0$   $\mathcal{C}_2 = \emptyset$ .

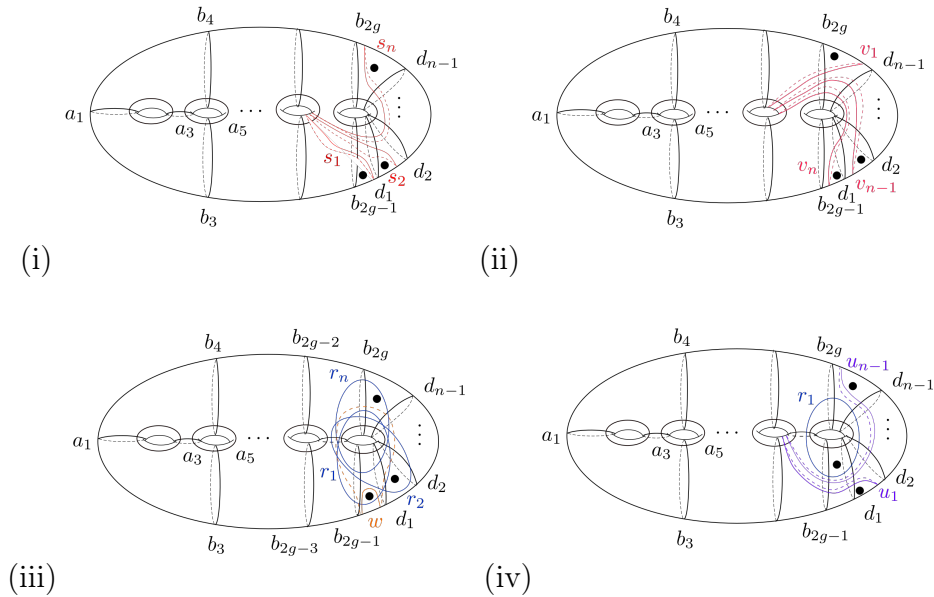


FIGURA 30. Curvas en  $\mathcal{C}_2$ .

LEMA 3.23. *Considere  $S$  una superficie de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y  $\kappa(S) \geq 4$ , entonces existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las curvas en la Figura 30. Cuando  $n = 0$ ,  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$  y el lema se sigue del Lema 3.22, supongamos en lo siguiente que  $n \geq 1$ . Por el Lema 3.22 existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1$ , resta probar  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_2$ .

Esta prueba está esencialmente basada en determinar únicamente toda curva  $x \in \mathcal{C}_2$ , usando intersección 0 y 1 de dos curvas, en algunos casos por formar parte de tres curvas que bordean un pantalón de  $S$  o por ser parte de un par periférico de  $S$ ; propiedades que son preservadas por homeomorfismos y por  $\varphi$  debido a que es morfismo de grafos que preserva intersección uno y gracias a los Lemas 3.20 y 3.16. De esta manera probamos que existe un homeomorfismo  $h$  de  $S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$ . Por lo que exhibiremos las curvas auxiliares con las cuales determinamos únicamente a cada curva  $x \in \mathcal{C}_2$ .

Para exhibir las curvas auxiliares que mencionamos párrafos arriba, lo haremos solamente para representantes de diferentes familias de curvas en  $\mathcal{C}_2$ , ver Figura 30(i)-(iv).

La curva  $s_1$  está determinada únicamente por ser ajena de todas las curvas en  $\mathcal{C}_1 \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g-1}\}$  e intersectar una vez a la curva  $a_{2g-2}$  y es distinta de  $b_{2g-3}$ . La curva  $s_2$  está únicamente determinada por ser ajena de las curvas en  $(\mathcal{C}_1 \cup s_1) \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g-1}, d_1\}$  e intersectar una vez a  $a_{2g-2}$ . De manera análoga determinamos únicamente las curvas  $s_i$  para  $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Por lo que  $h(s_i) = \varphi(s_i)$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

La curva  $v_1$  está determinada únicamente por ser ajena de las curvas en  $\mathcal{C}_1 \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g}\}$  e intersectar una vez a la curva  $a_{2g-2}$ . La curva  $v_2$  está únicamente determinada por ser ajena de las curvas  $(\mathcal{C}_1 \cup \{v_1\}) \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g}, d_{n-1}\}$  e intersectar una vez a la curva  $a_{2g-2}$ . De manera análoga determinamos las curvas  $v_i$  para  $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Entonces  $h(v_i) = \varphi(v_i)$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea  $w$  como en la Figura 30 (v). Existe un homeomorfismo  $\phi : S \rightarrow S$  de orden dos tal que el mapeo  $\phi_*$  inducido por  $\phi$  en  $\mathcal{N}(S)$  que manda las curvas de  $\mathcal{C}_1 \cup \{s_i, v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  en sí mismos e intercambia  $w$  con  $r_1$  (por ejemplo si tomamos  $\phi$  como la reflexión a través del plano de la hoja en la Figura 30(v)). Por otro lado, podemos probar que  $\varphi(r_1) \neq \varphi(w)$  como sigue:

Tenemos que  $h(v_1) = \varphi(v_1)$ ,  $h(b_{2g}) = \varphi(b_{2g})$ , entonces  $i(\varphi(v_1), \varphi(b_{2g})) = 2$ . Considere la curva  $p_{g-1}$  dada en la Figura 31 (viii). Notemos que  $p_{g-1}$  y  $r_1$  son vecinos de Farey, más aún, podemos completar  $p_{g-1}$  a una descomposición en pantalones de  $S$ , denotada por  $\mathcal{P}'$ , entonces  $p_{g-1}$  es sustituible por  $r_1$  con respecto a  $\mathcal{P}'$ ; por el Lema 3.9 tenemos que  $i(\varphi(p_{g-1}), \varphi(r_1)) \neq 0$ . Pero  $i(p_{g-1}, w) = 0$  entonces  $i(\varphi(p_{g-1}), \varphi(w)) = 0$ , por lo tanto  $\varphi(r_1) \neq \varphi(w)$ .



Reemplazando  $h$  por  $h \circ \phi$ , si es necesario, podemos suponer que  $h(r_1) = \varphi(r_1)$  y  $h(w) = \varphi(w)$ . Notemos que la prueba se transforma en demostrar el resultado para esta  $\varphi$ .

La curva  $r_2$  está únicamente determinada por ser ajena de cada curva en  $\{a_{2g-2}, b_{2g-2}, s_1, a_{2g}, v_{n-2}, w\}$ ; intersecar una vez a cada curva en  $\{a_{2g-1}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  y por formar un pantalón con  $a_{2g}$ . Análogamente determinamos de manera única a las curvas  $r_i$  para  $i = 3, 4, \dots, n$ . Por lo anterior  $h(r_i) = \varphi(r_i)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

La curva  $u_1$  está únicamente determinada por ser ajena a cada curva en  $(\mathcal{C}_1 \cup \{r_1\}) \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g-1}, d_1\}$ , por intersecar una vez a la curva  $a_{2g-2}$  y ser distinta de  $b_{2g-3}$ . La curva  $u_2$  está únicamente determinada por ser ajena a cada curva en  $(\mathcal{C}_1 \cup \{r_1, r_2\}) \setminus \{a_{2g-2}, b_{2g-1}, d_1, d_2\}$ , e intersecar una vez a la curva  $a_{2g-2}$  y es distinta de  $b_{2g-3}$ . Análogamente determinamos únicamente las curvas  $u_i$  para  $i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ . Entonces  $h(u_i) = \varphi(u_i)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Por lo tanto existe  $h : S \rightarrow S$  homeomorfismo tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .  $\square$

Si  $n \geq 1$ , definimos el conjunto de curvas  $\mathcal{C}_3 = \{p_1, p_2, \dots, p_g, t_1, t_2, \dots, t_n, y_0, y_1, \dots, y_n, w_1, w_2, \dots, w_{g-1}\}$  que se muestran en la Figura 31; y para  $n = 0$  consideremos  $\mathcal{C}_3 = \{p_1, p_2, \dots, p_{g-1}, w_1, w_2, \dots, w_{g-1}\}$  el conjunto de curvas mostradas en la Figura 31.

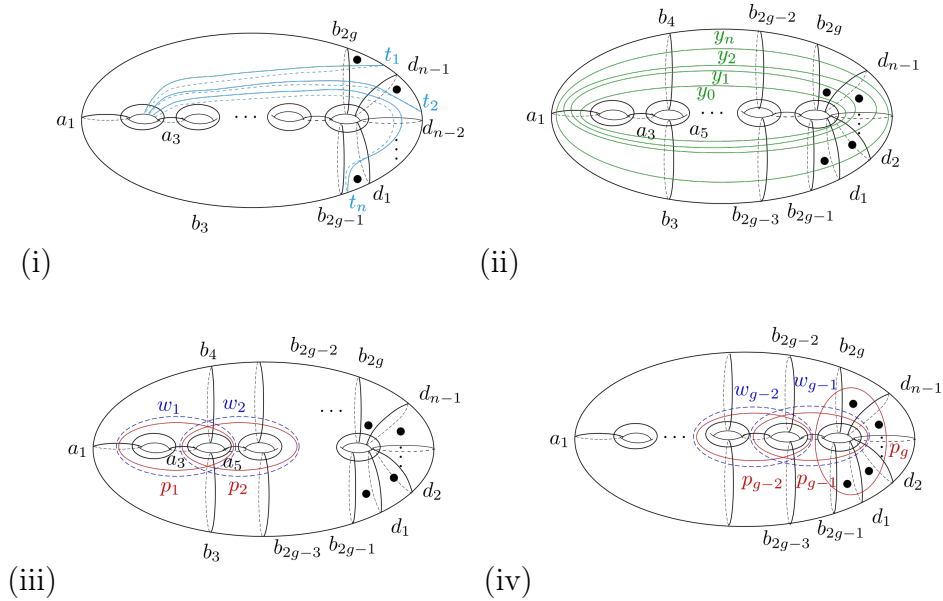


FIGURA 31. Curvas en  $\mathcal{C}_3$ .

LEMA 3.24. *Si  $S$  es una superficie conexa, orientable de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y  $\kappa(S) \geq 4$ . Existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este lema, como en la demostración anterior, está esencialmente basada en determinar únicamente toda curva  $x \in \mathcal{C}_3$ , usando intersección 0 y 1 de dos curvas, en algunos casos por formar parte de las componentes de frontera de un pantalón de  $S$  o por ser parte de un par periférico de  $S$ ; propiedades que son preservadas por homeomorfismos y por  $\varphi$  debido a que es morfismo de grafos que preserva intersección uno y a los Lemas 3.20 y 3.16. De esta manera probamos que existe un homeomorfismo  $h$  de  $S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$ . Por lo que exhibiremos las curvas auxiliares con las cuales determinamos únicamente a cada curva  $x \in \mathcal{C}_3$ , ver Figura 31.

**Caso 1,  $n \geq 1$ .**

Por el Lema 3.23 existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .

La curva  $t_1$  está determinada únicamente por ser ajena de cada curva en  $\mathcal{C}_1 \setminus \{a_2, b_2, b_4, \dots, b_{2g}\}$ , e intersectar una vez a la curva  $a_{2g}$  y ser distinta de  $a_1$ . La curva  $t_2$  está únicamente determinada por ser ajena de cada curva en  $(\mathcal{C}_1 \cup \{t_1\}) \setminus \{a_2, b_4, b_6, \dots, b_{2g}, d_{n-1}\}$  y por intersectar una vez a la curva  $a_{2g}$ . Análogamente determinamos las curvas  $t_i$  para  $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Por lo que  $h(t_i) = \varphi(t_i)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

La curva  $y_n$  está únicamente determinada por ser ajena a cada curva en  $\{a_2, a_3, \dots, a_{2g}, r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , e intersectar una vez a cada curva en  $\{a_1, b_3, b_4, \dots, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ . La curva  $y_{n-1}$  está únicamente determinada por ser ajena de cada curva en  $\{a_2, a_3, \dots, a_{2g}, r_2, \dots, r_n, y_n\}$  y por intersectar una vez a cada curva en  $\{a_1, b_3, b_4, \dots, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ . Análogamente determinamos únicamente  $y_i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ . Por lo cual  $h(y_i) = \varphi(y_i)$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

La curva  $p_g$  es la única curva ajena de cada curva en  $\{a_{2g-2}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, y_n, a_{2g}, r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , y que intersecta una vez a cada curva del conjunto  $\{a_{2g-1}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ ; entonces  $h(p_{g-1}) = \varphi(p_{g-1})$ .

Cuando  $g = 2$  tenemos que  $p_{g-1} = p_1 = y_0$  y así  $h(p_{g-1}) = \varphi(p_{g-1})$ . Si  $g \geq 2$ , la curva  $p_{g-1}$  está únicamente determinada por ser ajena de  $\{a_{2g-4}, b_{2g-5}, b_{2g-4}, y_0, t_n, a_{2g-2}, a_{2g-1}, a_{2g}, w\}$  e intersectar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-3}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ . Entonces  $h(p_{g-1}) = \varphi(p_{g-1})$ . De manera análoga, la curva  $w_{g-1}$  está únicamente determinada por ser ajena de cada curva en  $\{a_{2g-4}, b_{2g-5}, b_{2g-4}, y_0, t_n, a_{2g-2}, a_{2g-1}, a_{2g}, p_{g-1}\}$  e intersectar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-3}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  por lo que  $h(w_{g-1}) = \varphi(w_{g-1})$ . Si  $g = 3$ , la curva  $p_{g-2} = p_1$  queda determinada

únicamente por ser ajena a las curvas en  $\{a_2, a_3, a_4, a_6, b_5, b_6, w_{g-1}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  e intersectar una vez a las curvas en  $\{a_1, a_5, b_3, b_4\}$  así  $h(p_{g-2}) = \varphi(p_{g-2})$ . Si  $g \geq 3$ , la curva  $p_{g-2}$  es la única ajena de las curvas en  $\{a_{2g-6}, b_{2g-7}, b_{2g-6}, a_{2g}, b_{2g-1}, b_{2g}, a_{2g-4}, a_{2g-3}, a_{2g-2}, w_{g-1}\}$ , que intersecta una vez a cada curva en  $\{a_{2g-5}, b_{2g-5}, b_{2g-4}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, a_{2g-1}\}$ . Análogamente determinamos únicamente a las curvas  $p_i$  y  $w_i$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ . Por lo que  $h(p_i) = \varphi(p_i)$  y  $h(w_i) = \varphi(w_i)$  para  $i \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ . Por lo tanto existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ .

**Caso 2,  $n = 0$ .**

En este caso tenemos  $\mathcal{C}_2 = \emptyset$  y  $\mathcal{C}_3 = \{p_1, p_2, \dots, p_{g-1}, w_1, w_2, \dots, w_{g-1}\}$ . Por el Lema 3.22 sabemos que existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1$ . Existe un homeomorfismo  $\phi : S \rightarrow S$  de orden 2 tal que el mapeo inducido  $\phi_*$  de  $\phi$  en  $\mathcal{N}(S)$  que manda a cada curva de  $\mathcal{C}_1$  en sí misma e intercambia  $p_{g-1}$  con  $w_{g-1}$ . Por otro lado existen únicamente dos curvas llamadas  $p_{g-1}$  y  $w_{g-1}$  que son ajenas de las curvas en  $\{b_{2g-5}, b_{2g-4}, a_{2g-4}, a_{2g-2}, a_{2g-1}, a_{2g}\}$ , que intersectan una vez a cada curva en  $\{a_{2g-3}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, b_{2g-1}\}$  y son tales que los conjuntos  $\{a_{2g}, a_{2g-2}, p_{g-1}\}$  y  $\{a_{2g}, a_{2g-2}, w_{g-1}\}$  son curvas frontera de pantalones en  $S$ . Por reemplazar  $h$  por  $h \circ \phi$  si es necesario, podemos suponer que  $h(p_{g-1}) = \varphi(p_{g-1})$  y  $h(w_{g-1}) = \varphi(p_{g-1})$ . Si  $g = 3$  la curva  $p_{g-2} = p_1$ , es la única curva determinada por ser ajena a las curvas en  $\{a_2, a_3, a_4, a_6, b_5, b_6, w_{g-1}\}$  e intersectar a las curvas en  $\{a_1, a_5, b_3, b_4\}$  así  $h(p_{g-2}) = \varphi(p_{g-2})$ . Si  $g \geq 3$ , la curva  $p_{g-2}$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{b_{2g-7}, b_{2g-6}, a_{2g-6}, a_{2g}, a_{2g-4}, a_{2g-3}, a_{2g-2}, w_{g-1}\}$  e intersecta una vez a cada curva en  $\{a_{2g-5}, b_{2g-5}, b_{2g-4}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, a_{2g-1}\}$  y el conjunto  $\{p_{g-2}, a_{2g-2}, a_{2g-4}\}$  bordea a un pantalón en  $S$ , de manera análoga podemos determinar de manera única la curva  $w_{g-2}$  y también las curvas  $p_i$  y  $w_i$  para  $i \in \{1, 2, \dots, g-3\}$ ; por lo tanto  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3$ .  $\square$

Recordemos que  $\text{Mod}^*(S)$  actúa por automorfismos en  $\mathcal{C}(S)$ , en particular actúa en  $\mathcal{N}(S)$ . Respecto a esta acción decimos que un subconjunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}^0(S)$  tiene estabilizador trivial si para cada  $h \in \text{Mod}^*(S)$ ,  $h(x) = x$  para toda  $x \in \mathcal{A}$  implica que  $h$  es la identidad.

**LEMA 3.25.** *Sea  $S = S_{g,n}$  con  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  y  $\kappa(S) \geq 4$ . El conjunto  $\mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$  tiene estabilizador trivial.*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que  $\mathcal{C}_1$  es una multicurva que llena a la superficie  $S$ , más aún, es un sistema de Alexander estable <sup>1</sup>. Entonces el método de Alexander implica que los únicos homeomorfismos que

<sup>1</sup>Revise la sección de preliminares para la definición.

fijan las curvas de  $\mathcal{C}_1$  son la identidad y la reflexión en el plano de la hoja. Pero de estos dos homeomorfismos de  $S$ , solamente la identidad fija a  $p_1$ ; por lo tanto  $\mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$  tiene estabilizador trivial.  $\square$

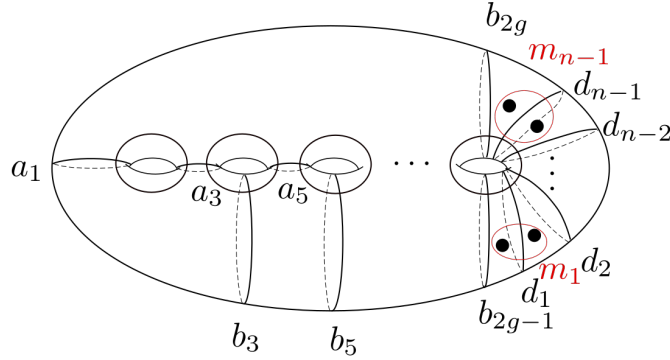


FIGURA 32. Generadores de Dehn-Lickorish.

Consideremos las curvas dadas en la Figura 32. Sean  $T_x$  el giro de Dehn a lo largo de  $x$ , y  $\sigma_i$  el medio giro de Dehn a lo largo de  $m_i$ .

Como vimos en el capítulo de preliminares, si  $g \geq 2$ , entonces  $\text{Mod}(S_{g,n})$  puede generarse por el conjunto

$$G = \{T_x : x \in \{a_1, a_2, \dots, a_{2g}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}\} \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$$

**PROPOSICIÓN 3.26.** *Sea  $S = S_{g,n}$  una superficie de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  perforaciones y  $\kappa(S) \geq 4$ . Para toda  $f \in G$  existe un conjunto  $L_f \subset \mathcal{N}^0(S)$  tal que  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in L_f \cup f(L_f)$ , más aún,  $L_f$  puede ser elegido para que tenga estabilizador trivial.*

**DEMOSTRACIÓN.** Dividimos la prueba en dos casos; cuando  $g \geq 3$  y  $n \geq 0$ , y cuando  $g = 2$  y  $n \geq 1$ . Como en las pruebas de los Lemas 3.23 y 3.24, la estrategia para demostrar el enunciado de esta proposición es determinando de manera única a curvas auxiliares mostradas en las Figuras 33, 35 y 37.

**Caso 1,**  $g \geq 3$ ,  $n \geq 0$ .

Realizamos la prueba suponiendo que  $g \geq 3$  y  $n \geq 1$ , el caso de superficies cerradas, se prueba de manera análoga a la demostración expuesta a continuación. Por el Lema 3.24 tenemos que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ . Si  $f = T_{b_{2g}} \in G$ , elegimos  $L_f = \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$ .

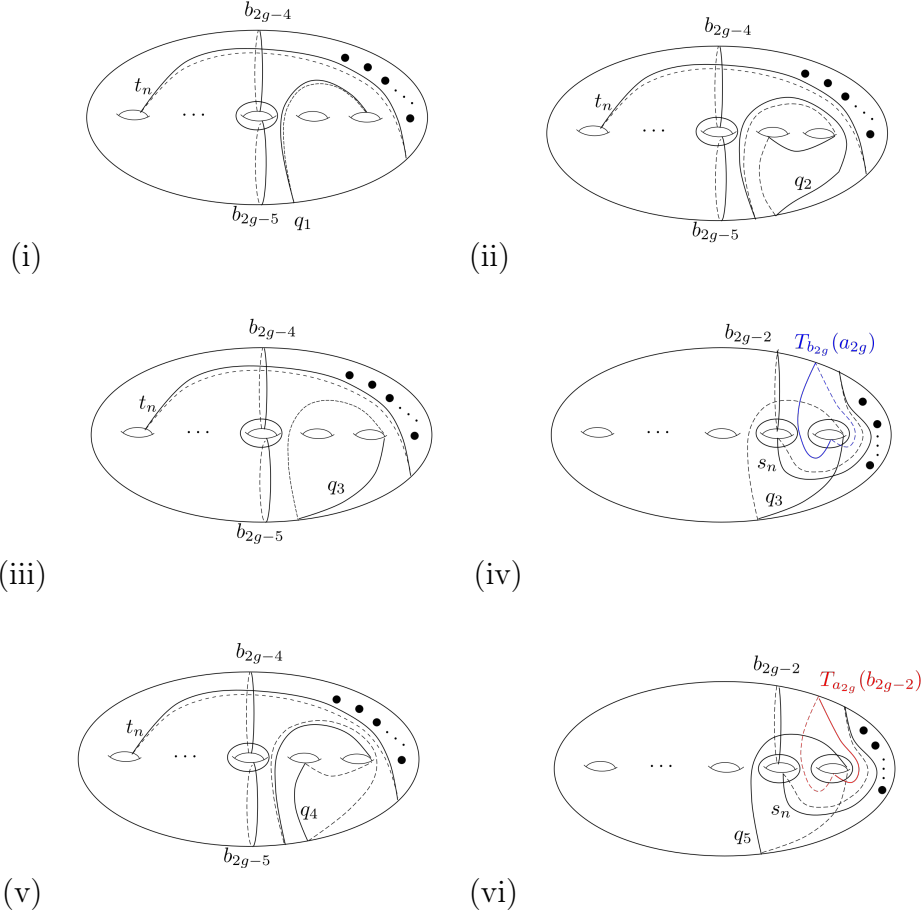


FIGURA 33. Configuración para giros de Dehn.

El conjunto  $L_f$  tiene estabilizador trivial debido a la Proposición 3.25. Entonces  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1$ . Dado que  $T_{b_{2g}}$  fija a todas las curvas en  $(\mathcal{C}_1 \setminus \{a_{2g}\}) \cup \{p_1\}$ , resta verificar la igualdad anterior para  $T_{b_{2g}}(a_{2g})$ . Considere las curvas dadas en la Figura 33(i)-(vi). La curva  $q_1$  está únicamente determinada por ser ajena de las curvas en  $\{b_{2g-5}, a_{2g-4}, b_{2g-4}, t_n, b_{2g-3}, a_{2g-2}, a_{2g-1}, b_{2g-1}\}$ , e intersectar una vez a  $a_{2g}$ , por lo que  $h(q_1) = \varphi(q_1)$ . La curva  $q_2$  es la única curva en  $S$  ajena de todas las curvas en  $\{b_{2g-5}, a_{2g-4}, b_{2g-4}, t_n, q_1, b_{2g-3}, a_{2g-1}, p_{g-1}\}$ , que intersecta una vez a la curva  $a_{2g}$  y es distinta de  $a_{2g-1}$ . Así tenemos que  $h(q_2) = \varphi(q_2)$ . La curva  $q_3$  está únicamente determinada por se ajena a las curvas en  $\{a_{2g-4} \cdot a_{2g-2}, a_{2g-1}, b_{2g-5}, b_{2g-4}, t_n, q_2\}$  y por intersectar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-3}, a_{2g}, b_{2g-3}, b_{2g-2}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, q_1, p_{g-1}\}$ , así concluimos que  $h(q_3) = \varphi(q_3)$ . La curva  $T_{b_{2g}}(a_{2g})$

es la única curva ajena de las curvas en  $\{b_{2g-2}, a_{2g-2}, s_n, q_3\}$  e interseca una vez a cada curva en  $\{a_{2g}, b_{2g}\}$ . Por lo tanto  $h(T_{b_{2g}}(a_{2g})) = \varphi(T_{b_{2g}}(a_{2g}))$ . Consecuentemente  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in L_f \cup f(L_f)$  cuando  $f = T_{b_{2g}}$ .

La curva  $q_4$  está únicamente determinada por ser ajena de todas las curvas en  $\{c_{2g-4}, a_{2g-4}, b_{2g-4}, t_n, q_1, b_{2g-3}, a_{2g-1}, w_{g-1}\}$ , e intersecar una vez a  $a_{2g}$  y ser distinta de  $a_{2g-1}$ . Así  $h(q_4) = \varphi(q_4)$ . De manera análoga determinamos únicamente a la curva  $q_5$  y concluimos que  $h(q_5) = \varphi(q_5)$ . La curva  $T_{a_{2g}}(b_{2g})$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{b_{2g-2}, a_{2g-2}, s_n, q_5\}$ , que interseca una vez a cada curva de  $\{a_{2g}, b_{2g}\}$ . Por lo que  $h(T_{a_{2g}}(b_{2g})) = \varphi(T_{a_{2g}}(b_{2g}))$ . Ahora podemos controlar otros giros de Dehn como sigue:

La curva  $T_{d_{n-1}}(a_{2g})$  está únicamente determinada por ser ajena de todas las curvas en  $\{a_{2g-2}, v_1, s_{n-1}, T_{b_{2g}}(a_{2g})\}$ , e intersecar una vez a ambas curvas  $a_{2g}$  y  $d_{n-1}$ . Por lo que  $h(T_{d_{n-1}}(a_{2g})) = \varphi(T_{d_{n-1}}(a_{2g}))$ . De manera análoga determinamos únicamente a las curvas  $T_{d_i}(a_{2g})$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n-3\}$ , por lo que  $h(T_{d_i}(a_{2g})) = \varphi(T_{d_i}(a_{2g}))$ .

La curva  $T_{a_{2g}}(d_{n-1})$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{a_{2g-2}, v_1, s_{n-1}, T_{a_{2g}}(b_{2g})\}$ , que interseca una vez a ambas curvas  $a_{2g}$  y  $d_{n-1}$ . Por lo que  $h(T_{a_{2g}}(d_{n-1})) = \varphi(T_{a_{2g}}(d_{n-1}))$ . La curva  $T_{a_{2g}}(d_{n-2})$  está únicamente determinada por ser ajena de las curvas en  $\{a_{2g-2}, v_2, s_{n-2}, T_{a_{2g}}(d_{n-1})\}$ , y por intersecar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g}, d_{n-2}\}$ . Por lo que  $h(T_{a_{2g}}(d_{n-2})) = \varphi(T_{a_{2g}}(d_{n-2}))$ . De manera análoga podemos determinar únicamente las curvas  $T_{a_{2g}}(d_i)$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n-3\}$  Por lo tanto  $h(T_{a_{2g}}(d_i)) = \varphi(T_{a_{2g}}(d_i))$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

La curva  $T_{a_{2g-1}}(a_{2g})$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{v_n, s_n, T_{b_{2g}}(a_{2g})\}$ , y que interseca una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-1}, a_{2g}\}$ . Por lo que  $h(T_{a_{2g-1}}(a_{2g})) = \varphi(T_{a_{2g-1}}(a_{2g}))$ . De manera similar determinamos la curva  $T_{a_{2g}}(a_{2g-1})$  y concluimos que  $h(T_{a_{2g}}(a_{2g-1})) = \varphi(T_{a_{2g}}(a_{2g-1}))$ . Consecuentemente  $h(T_x(y)) = \varphi(T_x(y))$  para toda  $x, y \in \{a_{2g-1}, a_{2g}, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ .

Antes de controlar otros giros de Dehn, vamos a considerar las curvas  $e_i, f_i$  para  $i \in \{4, 6, \dots, 2g-2\}$  mostradas en la Figura 34 (i)-(ii). La curva  $e_i$  está únicamente determinada por ser ajena de todas las curvas en  $\mathcal{C}_1 \setminus \{a_{i-2}, b_i, a_{i+2}\}$  y por intersecar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{i-2}, a_{i+2}\}$ . La curva  $f_i$  está únicamente determinada por ser ajena de  $\mathcal{C}_1 \setminus \{a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i+2}\}$ , y por intersecar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{i-2}, a_{i+2}\}$ .

Consideremos las curvas dadas en la Figura 35(i)-(ii). La curva  $T_{a_{2g-1}}(a_{2g-2})$  es la única curva ajena de cada curva en  $\{e_{2g-2}, f_{2g-2}, a_{2g-4},$

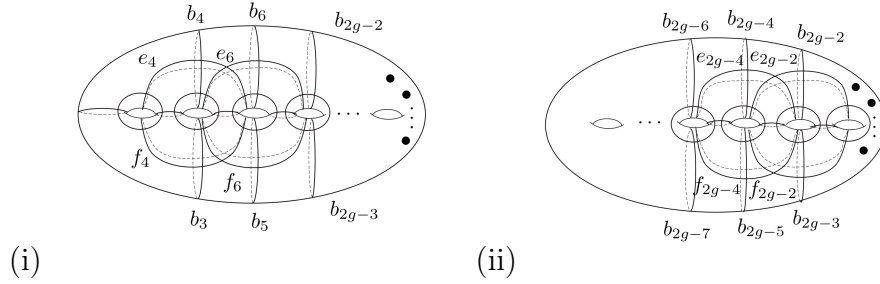


FIGURA 34. Configuración para giros de Dehn.

$T_{a_{a_{g-1}}}(a_{2g})\}$ , que además interseca una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-1}, a_{2g-2}\}$ . La curva  $T_{a_{2g-3}}(a_{2g-2})$  esta determinada únicamente por ser ajena a las curvas en  $\{e_{2g-2}, f_{2g-2}, a_{2g}, T_{a_{2g-1}}(a_{2g-2})\}$ , y por intersecar una vez a cada una de las curvas en  $\{a_{2g-3}, a_{2g-2}\}$ . Análogamente  $h(T_x(y)) = \varphi(T_x(y))$  para  $x, y \in \{a_1, a_2, \dots, a_{2g}, b_3, b_4, \dots, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ , ver Figura 35(iii)-(iv).

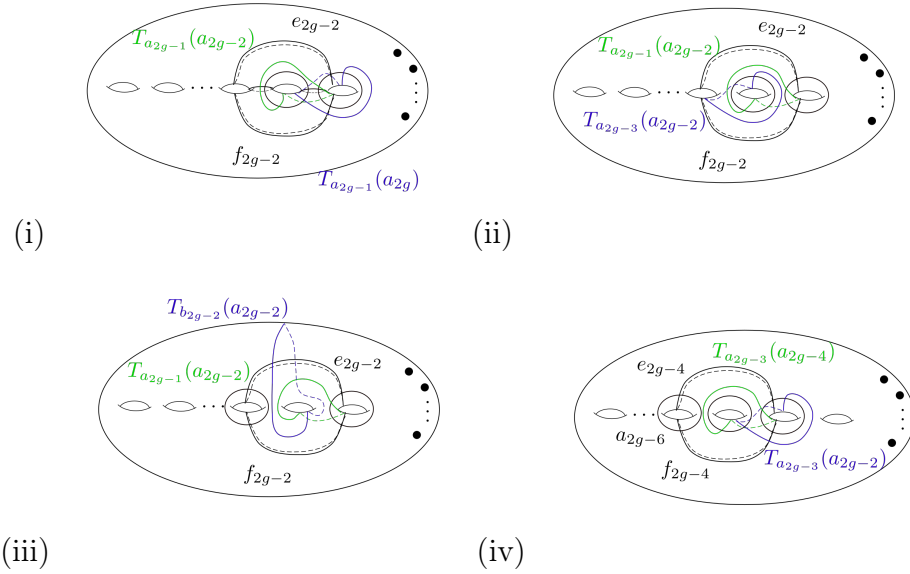


FIGURA 35. Curvas auxiliares para el caso  $g \geq 3$  y  $n \geq 0$ .

Consideremos las curvas en la Figura 36(i)-(ii). La curva  $j$  está completamente determinada por ser ajena a las curvas en  $\{b_3, a_2, a_4, a_5, b_6, w_1\}$ , por intersecar una vez a cada una de las curvas en la multicurva  $\{a_1, a_3, a_6\}$  y por bordear un pantalón de  $S$  junto con las curvas  $a_2, b_6$ .

Por lo que  $h(j) = \varphi(j)$ . La curva  $T_{b_4}(p_1)$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{a_6, b_6, c_6, j, a_2, a_3, T_{b_4}(a_4)\}$ , y que interseca una vez a cada curva en  $\{a_1, a_5, b_4, p_1\}$ . Entonces  $h(T_{b_4}(p_1)) = \varphi(T_{b_4}(p_1))$ . Análogamente a lo anteriormente descrito obtenemos que  $h(T_x(y)) = \varphi(T_x(y))$  para  $x, y \in \{a_1, a_5, c_4, p_1\}$ . Consecuentemente tenemos que  $h(T_x(y)) = \varphi(T_x(y))$  para toda pareja  $x, y \in \{a_1, a_2, \dots, a_{2g}, b_3, b_4, \dots, b_{2g}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, p_1\}$ .

Por lo anterior  $f = T_x$  donde  $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_{2g}, b_5, b_{2g-1}, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$  y  $L_f = \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$  tenemos que  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in L_f \cup f(L_f)$ .

Para  $f = \sigma_i$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , definimos  $L_f = \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$ . Sabemos que  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in L_f$ , y tenemos que  $\sigma_i(x) = x$  para  $x \in \mathcal{C}_1 \setminus \{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ . Entonces resta verificar que  $h(\sigma_i(d_i)) = \varphi(\sigma_i(d_i))$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

Para  $i = 1$  usamos la curva  $u_1$  mostrada en la Figura 36 (iii). La curva  $u_1 \in \mathcal{C}_2$ , la cual sabemos que  $h(u_1) = \varphi(u_1)$ . La curva  $\sigma_1(d_1)$  es la mostrada como  $j_1$  en la Figura 36 (iii), está únicamente determinada por ser ajena a las curvas en  $\{a_{2g-1}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, u_1\}$ , y por intersecar una vez a la curva  $a_{2g}$ . De manera similar la curva  $\sigma_2(d_2)$  que es la curva  $j_2$  mostrada en la Figura 36(iv), está únicamente determinada por ser ajena a las curvas en  $\{a_{2g-1}, b_{2g-1}, b_{2g}, d_1, d_3, d_4, \dots, d_{n-1}, u_2\}$  e intersecar una vez a la curva  $a_{2g}$ , por lo que  $h(\sigma_2(d_2)) = \varphi(\sigma_2(d_2))$ . Análogamente a lo anteriormente descrito usamos las curvas  $u_i$  con  $i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$  para determinamos únicamente las curvas  $\sigma_i(d_i)$  para toda  $i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ . Por lo que  $h(\sigma_i(d_i)) = \varphi(\sigma_i(d_i))$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ; esto concluye la prueba para este caso.

**Caso 2,**  $g = 2, n \geq 1$ .

Por el Lema 3.24 tenemos que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ . Sea  $f \in G$ , para  $f = T_x$ , donde  $x \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_3, b_4, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ , definimos  $L_f = \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$ ; por el Lema 3.25  $L_f$  tiene estabilizador trivial. Primero realizamos la prueba para  $f = T_{a_2}$ . Sabemos que  $\varphi(x) = h(x)$  para  $x \in \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$ . Demostramos la igualdad anterior para la curva  $T_{a_2}(a_1)$ .

Consideremos las curvas  $q_1, q_2, q_3, q_4$  mostradas en la Figura 37(i)-(iv). La curva  $q_1$  está únicamente determinada por ser ajena a las curvas en  $\{a_1, a_3, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, b_4, p_1\}$ , e intersecar una vez a ambas curvas  $a_2, a_4$ , por lo que  $h(q_1) = \varphi(q_1)$ . La curva  $q_2$  está únicamente determinada por ser ajena a las curvas en  $\{a_2, a_3, a_4, p_1\}$ , e intersecar una vez a cada curva en  $\{a_1, b_3, b_4, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ , por lo que  $h(q_2) = \varphi(q_2)$ . La curva  $q_3$  es la única curva ajena de las curvas en  $\{s_1, s_2, \dots, s_n, a_2, a_4, q_2\}$ , que interseca una vez a cada curva  $d_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . La curva  $q_4$  es la única curva ajena de las curvas



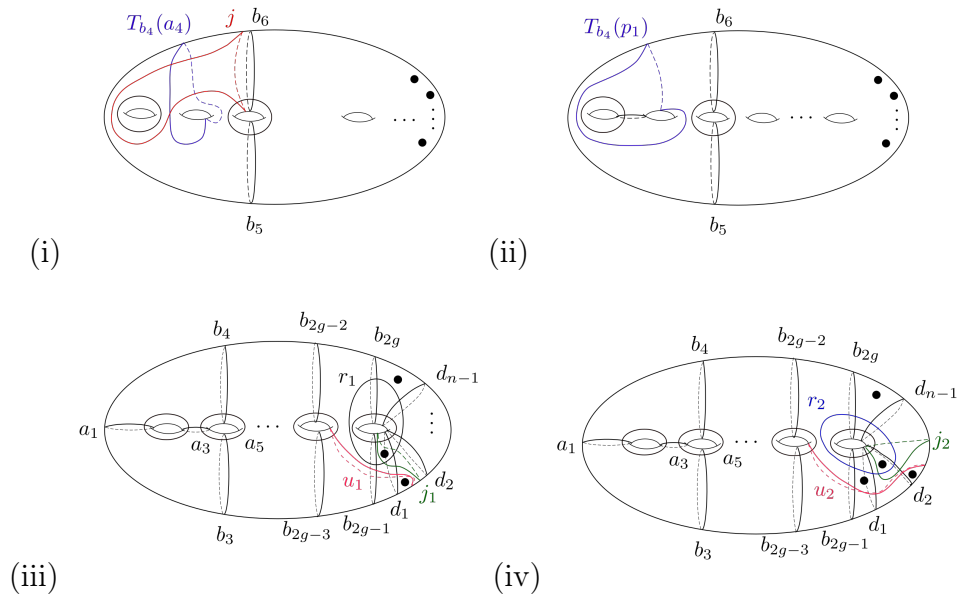


FIGURA 36. Curvas auxiliares para el caso  $g \geq 3$  y  $n \geq 0$ .

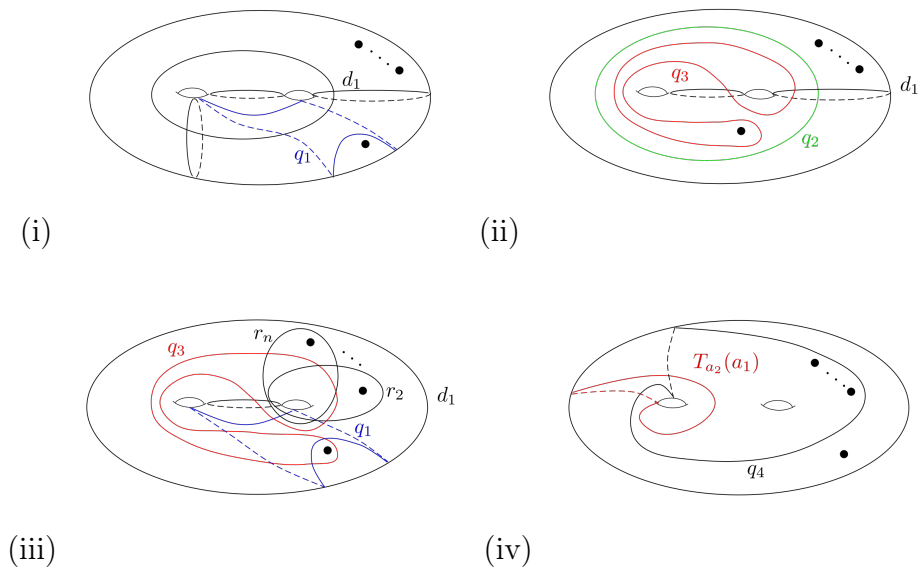


FIGURA 37. Curvas auxiliares para el caso  $g = 2$  y  $n \geq 1$ .

en  $\{a_3, a_4, r_1, s_2, \dots, r_n, q_1, q_3\}$ , y que interseca una vez a ambas curvas  $a_1$  y  $a_2$ . La curva  $T_{a_2}(a_1)$  es la única curva ajena de las curvas en

$\{a_4, b_3, b_4, q_4\}$  e interseca una vez a ambas curvas  $a_1$  y  $a_2$ , por lo que  $h(T_{a_2}(a_1)) = \varphi(T_{a_2}(a_1))$ .

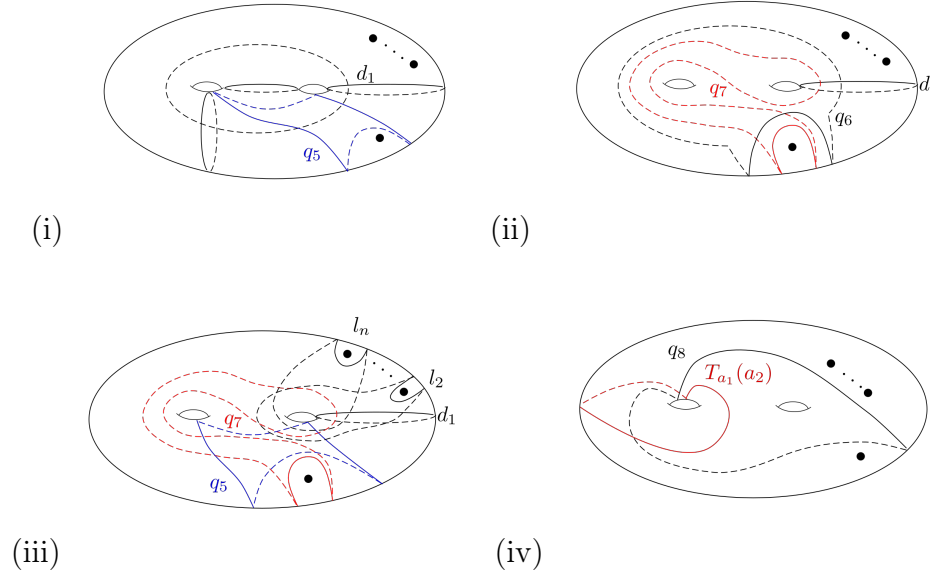


FIGURA 38. Curvas auxiliares para el caso  $g = 2$  y  $n \geq 1$ .

Consideremos las curvas  $q_5, q_6, q_7, q_8$  como en la Figura 38(i)-(iv). Por considerar el modelo como en la Figura 29(i) y tomar las imágenes de las curvas  $q_1, q_2, q_3, q_4$  bajo la reflexión a través del plano de la hoja, obtenemos las curvas  $q_5, q_6, q_7, q_8$ . Haciendo los mismos argumentos usados en la prueba del Lema 3.23 donde se intercambian  $w_1$  por  $p_1$ , obtenemos que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \{q_5, q_6, q_7, q_8\}$  y consecuentemente  $h(T_{a_1}(a_2)) = \varphi(T_{a_1}(a_2))$  como en el caso anterior. Usando las igualdades  $h(T_{a_2}(a_1)) = \varphi(T_{a_2}(a_1))$  y  $h(T_{a_1}(a_2)) = \varphi(T_{a_1}(a_2))$ , y configuraciones similares a las usadas en el caso 1, obtenemos que  $h(T_x(y)) = \varphi(T_x(y))$  para toda  $x, y \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_3, b_4, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, p_1\}$ , ver Figura 39(i)-(ii). Por lo que  $\varphi(x) = h(x)$  para toda  $x \in L_f \cup f(L_f)$ , para cualquier giro de Dehn  $f \in G$ . Para  $f = \sigma_i$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , definimos  $L_f = \mathcal{C}_1 \cup \{p_1\}$ ; la prueba es análoga al caso 1.  $\square$

**TEOREMA 3.27.** *Sea  $S$  una superficie conexa, orientable, de género  $g \geq 2$ ,  $n \geq 0$  ponchaduras y complejidad  $\kappa(S) \geq 4$ , y  $\varphi : \mathcal{N}(S) \rightarrow \mathcal{N}(S)$  un morfismo de grafos que preserva intersección uno. Existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$  único salvo isotopía, tal que  $h(a) = \varphi(a)$  para todo vértice  $a \in \mathcal{N}^0(S)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración está basada en técnicas de Aramayona y Leininger [1]. Dado  $f \in G$ , existe  $L_f \subset \mathcal{N}^0(S)$  que satisface el enunciado del Lema 3.26. Sea  $\mathcal{X} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup (\bigcup_{f \in G} (L_f \cup f(L_f)))$ . Para cada vértice  $x \in \mathcal{N}^0(S)$  existe  $r \in \text{Mod}(S)$  y un vértice  $y \in \mathcal{X}$  tales que  $r(y) = x$ . Definimos  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k-1} \cup (\bigcup_{f \in G} (f(\mathcal{X}_{k-1}) \cup f^{-1}(\mathcal{X}_{k-1})))$  cuando  $k \geq 2$ . Observemos que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k$  es el conjunto de todos los vértices en  $\mathcal{N}^0(S)$ . Ahora, probemos por inducción sobre  $k$  la existencia del homeomorfismo  $h$ . Por los Lemas 3.24 y 3.26, tenemos que existe  $h : S \rightarrow S$  tal que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{X}_1$ . Supongamos que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{X}_{k-1}$  para  $k \geq 2$ . Dado  $f \in G$ , existe un homeomorfismo  $h_f$  de  $S$  tal que  $h_f(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in f(\mathcal{X}_{k-1})$ . Tenemos que  $f(L_f) \subseteq \mathcal{X}_{k-1} \cap f(\mathcal{X}_{k-1})$ ; consecuentemente  $h_f = h$  ya que  $f(L_f)$  tiene estabilizador trivial. Análogamente existe un homeomorfismo  $h'_f$  de  $S$  tal que  $h'_f(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in f^{-1}(\mathcal{X}_{k-1})$ , pero tenemos que  $L_f \subseteq \mathcal{X}_{k-1} \cap f^{-1}(\mathcal{X}_{k-1})$ ; por lo que  $h'_f = h$  ya que  $L_f$  tiene estabilizador trivial, entonces  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{X}_k$ . Esto implica por inducción que  $h(x) = \varphi(x)$  para toda  $x \in \mathcal{X}_k$  y toda  $k \geq 1$ . Ya que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k = \mathcal{N}^0(S)$ , concluimos que  $h(x) = \varphi(x)$  para todo vértice  $x \in \mathcal{N}^0(S)$ .  $\square$

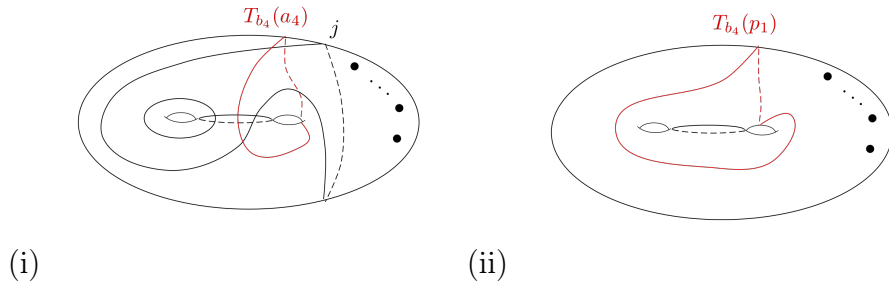


FIGURA 39. Configuración de curvas para giros de Dehn.

COROLARIO 3.28 (Jesús Hernández Hernández - Anayeli Tomás Alvarea). Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ ,  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo localmente inyectivo que preserva intersección cero, entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, más aún,  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 4 implica que  $S \approx S'$ , entonces  $\varphi$  es un endomorfismo de  $\mathcal{G}(S)$  localmente inyectivo que preserva intersección cero, este morfismo induce un morfismo de grafos  $\widehat{\varphi} : \mathcal{N}(S) \rightarrow$

$\mathcal{N}(S)$  que preserva intersección uno. Por el Teorema 3.27,  $\widehat{\varphi}$  está inducido por un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$ , pero  $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x)$  para toda  $x \in \mathcal{G}^0(S)$ , con lo que concluimos que  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S)$  está inducido por un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S$ .  $\square$

## Capítulo 4

### Conclusiones

En el capítulo anterior probamos un resultado nuevo acerca de rigidez combinatoria para el grafo de Schmutz  $\mathcal{G}(S)$ :

**COROLARIO** (Jesús Hernández Hernández-Anayeli Tomás Alvarez). Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ , y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo localmente inyectivo que preserva intersección cero, entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, más aún,  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo.

Esto a partir del uso de hipótesis adicionales sobre los morfismos de grafos de  $\mathcal{G}(S)$ , como inyectividad local y preservación de intersección cero. Logrando así, obtener un resultado análogo al de Hernández Hernández [8], y que por otro lado, busca generalizar el teorema de Schmutz 2.14, considerando en lugar de automorfismos de  $\mathcal{G}(S)$ , morfismos de grafos localmente inyectivos y que preservan intersección cero.

La demostración del Corolario 4 se realizó en dos partes importantes. En la primera parte probamos un resultado nuevo:

**TEOREMA** (Jesús Hernández Hernández - Anayeli Tomás Alvarez). Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies conexas, orientables, con frontera vacía, de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras, tales que  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$ , y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$  un morfismo de grafos localmente inyectivo, que preserva intersección cero, entonces  $S \approx S'$ .

Este Teorema es parte importante de la demostración del Corolario 4. La segunda parte de la demostración está basada en el trabajo de Irmak [13] y Aramayona y Leininger [1].

En relación a este resultado y al trabajo realizado para esta tesis, creemos que la siguiente conjetura podría probarse posteriormente:

**CONJETURA 4.1.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies de género  $g, g' \geq 2$ ,  $n, n' \geq 0$  ponchaduras y  $\kappa(S) \geq \kappa(S') \geq 4$  y  $\varphi : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$ , entonces  $S$  y  $S'$  son homeomorfas, más aún,  $\varphi$  está inducido por un homeomorfismo.*

Además, siguiendo nuestro estudio del grafo de Schmutz, nos preguntamos si existen subgrafos inducidos, “rígidos” y finitos de  $\mathcal{G}(S)$ ; un

subgrafo inducido  $Y$  de  $\mathcal{G}(S)$  es *rígido* si cualquier mapeo localmente inyectivo  $Y \rightarrow \mathcal{G}(S)$  es la restricción de un automorfismo de  $\mathcal{G}(S)$ . Si no existen subgrafos finitos como los anteriormente mencionados, ¿habrá de diámetro finito? Más aún, nos interesa saber si hay una saturación por subgrafos inducidos, rígidos, finitos de  $\mathcal{G}(S)$ . Lo anterior con el propósito de hallar una prueba de la conjetura 4.1, inspirada en las técnicas usadas en [8], y que tal prueba nos evite el uso del grafo de curvas no separadoras, como lo hicimos en la prueba del Corolario 4.

## Bibliografía

- [1] J. Aramayona and C. Leininger. Exhausting curve complexes by finite rigid sets. *Pacific Journal of Mathematics*, 282(2):257–283, 2016.
- [2] J. Behrstock and D. Margalit. Curve complexes and finite index subgroups of mapping class groups. *Geometriae Dedicata*, 118(1):71–85, 2006.
- [3] M. Dehn. Papers on group theory and topology. 1987.
- [4] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. Princeton University Press, 2011.
- [5] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru. *Thurston’s Work on Surfaces (MN-48)*, volume 48. Princeton University Press, 2012.
- [6] W. Harvey. Boundary structure of the modular group, in “Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 stony brook conference” edited by i. kra and b. maskit. *Ann. Math. Stud*, 97.
- [7] W. Harvey. Geometric structure of surface mapping class groups. In *Homological group theory, Proceedings of Symposium on Homological and Combinational techniques in Group Theory, Durham, 1977*, pages 255–269. Cambridge Univ. Press, 1979.
- [8] J. Hernández Hernández. Edge-preserving maps of curve graphs. *Topology and its Applications*, 246:83–105, 2018.
- [9] S. P. Humphries. Generators for the mapping class group. In *Topology of low-dimensional manifolds*, pages 44–47. Springer, 1979.
- [10] E. Irmak. Superinjective simplicial maps of complexes of curves and injective homomorphisms of subgroups of mapping class groups. *Topology*, 43(3):513–541, 2004.
- [11] E. Irmak. Complexes of nonseparating curves and mapping class groups. *Michigan Math. J.*, 54:81–110, 2006.
- [12] E. Irmak. Superinjective simplicial maps of complexes of curves and injective homomorphisms of subgroups of mapping class groups ii. *Topology and its Applications*, 153(8):1309–1340, 2006.
- [13] E. Irmak. Edge preserving maps of the nonseparating curve graphs, curve graphs and rectangle preserving maps of the Hatcher-Thurston graphs. *arXiv preprint arXiv:1708.05290*, 2017.
- [14] N. V. Ivanov. Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces. *International Mathematics Research Notices*, 1997(14):651–666, 1997.
- [15] M. Korkmaz. Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori. *Topology and its Applications*, 95(2):85–111, 1999.
- [16] W. B. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 60, pages 769–778. Cambridge University Press, 1964.

- [17] F. Luo. Automorphisms of the complex of curves. *Topology*, 39(2):283–298, 2000.
- [18] R. C. Penner and J. Harer. *Combinatorics of train tracks*. Princeton University Press, 1992.
- [19] P. Schmutz Schaller. Mapping class groups of hyperbolic surfaces and automorphism groups of graphs. *Compositio Mathematica*, 122(3):243–260, 2000.
- [20] K. Shackleton. Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(1):217–232, 2007.