UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ÁLGEBRAS DE OPERADORES DEL TIPO DE BERGMAN CON DATOS DISCONTINUOS EN DOMINIOS CON ÁNGULOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ENRIQUE ESPINOZA LOYOLA

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. YURI KARLOVICH OZOLINSH

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. NATIG ATAKISHIYEV

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2019

Agradecimientos

- A mi familia, la que me tocó, quienes han sido apoyo invaluable en cada paso que he dado.
- A mi otra familia, la que yo elegí, que incluye a todos aquellos que, sin tener un lazo de sangre que nos una, han hecho que disfrute aún más este camino.
- A mi director de tesis, que ha terminado de dar forma al profesionista que hoy soy.
- A mis sinodales, que con sus preguntas y observaciones no solo mejoraron el trabajo, sino que me hicieron tener una mejor perspectiva del mismo.
- A la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas, principalmente a su biblioteca, y a todo el personal que ahí labora.
- A CONACYT, sin cuya beca esto no habría sido posible.

Enrique Espinoza Loyola

Introducción

La teoría moderna de los espacios de Bergman es una mezcla del Análisis Complejo con el Análisis Funcional y la Teoría de Operadores (ver libros [2], [8], [13], [45]). El estudio de álgebras de operadores generadas por proyecciones del tipo de Bergman y poli-Bergman con diferentes clases de operadores presenta una dirección importante de la Teoría de Operadores.

Las investigaciones de las álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman y poli-Bergman con coeficientes continuos a trozos en diferentes dominios forman un área importante de la teoría de operadores del tipo de convolución y operadores pseudodiferenciales bidimensionales con símbolos discontinuos y no-regulares (por ejemplo, ver [15], [18]–[21], [22]–[24], [39]–[44]).

La teoría de operadores pseudodiferenciales fue creada en su forma moderna en los años 60's y actualmente tiene una importancia fundamental en la Física Matemática y el Análisis (ver, por ejemplo [14], [27], [32], [34], [35], [36] or [38]).

El corazón de la teoría de operadores pseudodiferenciales es el álgebra de símbolos, que da la posibilidad de construir soluciones a ecuaciones diferenciales y a problemas asociados con valores en la frontera (salvo términos suaves) por medio de herramientas algebraicas.

Las investigaciones de las álgebras de operadores del tipo de Bergman con datos continuos a trozos (ver [15], [22], [30], [39]–[44]) fueron extendidas a las álgebras C^* generadas por proyecciones de poli-Bergman y anti-poli-Bergman con datos continuos a trozos en dominios con fronteras suaves en [18]-[21]. Fueron construidos cálculos simbólicos y fueron establecidos criterios de Fredholm para operadores en tales álgebras. Las proyecciones de poli-Bergman y anti-poli-Bergman están estrechamente relacionadas con operadores integrales singulares bidimensionales.

La propiedad de Fredholm para el álgebra C^* generada por la proyección de Bergman con dominio, U, acotado y múltiplemente conexo, con frontera suave, ∂U, y por coeficientes continuos a trozos que tienen a lo más dos límites laterales en los puntos de ∂U, fue investigada en [39]. Una generalización de este trabajo a coeficientes continuos a trozos que admiten más de dos límites laterales en los puntos de ∂U fue elaborada en [22] (ver también [23] y [24]). Las álgebras C^* generadas por las proyecciones de Bergman y de anti-Bergman (así como por n proyecciones poli-Bergman y por m proyecciones anti-pol-Bergman) con coeficientes continuos a trozos, que admiten un número finito de límites laterales en los puntos de la frontera, fueron estudiados en los artículos [18]–[21]. La teoría profunda de operadores de Toeplitz con diferentes clases de símbolos homogéneos y discontinuos en espacios de Bergman, con y sin pesos, y las álgebras C^* de tales operadores fue desarrollada en [40] (ver también las referencias mencionadas ahí). En todos esos artículos y en el libro mencionado se asumió que la frontera del dominio es suficientemente suave.

Por otro lado, la teoría de operadores del tipo de Bergman con datos discontinuos en dominios que tienen frontera no suave, no estaba desarrollada.

Las investigaciones de las álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman sobre dominios con frontera no suave, que admiten ángulos distintos de π, comenzó en [12] y [17]. Comenzamos considerando sectores abiertos de la forma

$$\mathbb{K}_\alpha = \{z = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (0, \pi\alpha)\}$$

con $\alpha \in (0, 2]$. En [12], se estudió la invertibilidad del álgebra C^* generada por los operadores de multiplicación por funciones constantes a trozos y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman en el espacio $L^2(\mathbb{K}_{1/m})$, para $m \in \mathbb{N}$. En [17], se estudiaron las álgebras C^* generadas por el operador identidad I, por la proyección de Bergman $B_{\mathbb{K}_\alpha}$ y por la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}$ sobre el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$ para cualquier $\alpha \in (0, 2]$, y las álgebras C^* generadas por los operadores aI de multiplicación, que actúan sobre las funciones complejas $a \in C(\overline{U})$, por la proyección de Bergman B_U y por la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ sobre el espacio $L^2(U)$, donde $\overline{U}$ es la cerradura de un dominio poligonal acotado U simplemente conexo, cuyos ángulos admiten valores $\pi\alpha$ con $\alpha \in (0, 2]$.

La tesis presentada se dedica al estudio de la invertibilidad y de la propiedad de Fredholm para álgebras C^* generadas por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman y por operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos y lentamente oscilatorias a trozos en dominios, acotados y no acotados, del plano con fronteras no regulares que admiten ángulos distintos de π y cortes. Entonces, la teoría de álgebras C^* de operadores del tipo de Bergman está desarrollada en dos direcciones: para clases nuevas y más amplias de coeficientes discontinuos, y para geometría más complicada de los dominios considerados, con fronteras no suaves.

Este trabajo de tesis está organizado como sigue.

En el capítulo 1, se enuncia el principio local de Allan-Douglas, se presentan los resultados de Plamenevsky acerca de la transformada de Fourier multidimensional y sus aplicaciones y extensiones obtenidas en el caso bidimensional en [15], se da un isomorfismo entre un álgebra C^* $\mathcal{A}$ y un álgebra C^* de sumas ortogonales de matrices finitas, la cual está basada en un cálculo simbólico abstracto desarrollado en [12] para las álgebras C^* generadas por n proyecciones ortogonales cuya suma es igual a la identidad y por m proyecciones unidimensionales, y se dan las propiedades necesarias acerca de los módulos de continuidad.

En el capítulo 2, dada $\alpha \in (0, 2]$, se estudia el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$, generada por los operadores de mutiplicación por funciones constantes a trozos con discontinuidades en una unión finita de rayos que emanan del origen, y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan sobre el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, en donde

$$\mathbb{K}_\alpha := \{z = re^{i\theta} : r > 0, \quad \theta \in (0, \pi\alpha)\}.$$

Se construye un cálculo simbólico para $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ y se da un criterio de invertibilidad para los operadores $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$. Después, para cualquier dominio poligonal acotado y simplemente conexo U, se investiga el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, generada por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en una unión finita de segmentos de recta, y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman definidas sobre el espacio $L^2(U)$. Haciendo uso del principio local de Allan-Douglas, de los resultados para las álgebras C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$, y de las técnicas de operadores límite, se contruye un cálculo simbólico para $\mathfrak{B}_U$ y se da un criterio de Fredholm para los operadores $B \in \mathfrak{B}_U$.

En el capítulo 3, dado un dominio simplemente conexo U, acotado o no acotado, con frontera Dini-suave a trozos que tiene esquinas Dini-suaves, se estudian las álgebras C^* $\mathfrak{B}_U$ generadas por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman que actúan en el espacio $L^2(U)$, y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en una unión finita de curvas Dini-suaves a trozos, las cuales tienen tangentes laterales en todo punto, no forman cúspides y no son tangentes a la frontera. Haciendo uso de los resultados del capítulo 2, del principio local de Allan-Douglas, de las técnicas de operadores límite, y construyendo, y aplicando, un adecuado mapeo cuasiconforme, se establece un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra $\mathfrak{B}_U$ y un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$ en términos de sus símbolos. Entonces, aplicando en este capítulo las herramientas nuevas- los mapeos cuasiconformes- las álgebras C^* $\mathfrak{B}_U$ fueron investigadas para dominios esencialmente más generales con fronteras no suaves y para más complicadas líneas de discontinuidad de los coeficientes de los operadores.

En el capítulo 4, nuevamente se trabaja con un dominio simplemente conexo U, cuya frontera es Dini-suave a trozos y tiene una cantidad finita de esquinas Dini-suaves. Consideramos el álgebra $\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ generada por las funciones que son continuas a trozos en la cerradura de U y cuyas discontinuidades están sobre una unión finita de curvas Dini-suaves a trozos que tienen tangentes laterales en cada punto, que no forman cúspides y que no son tangentes a la frontera de U, y por las funciones continuas y acotadas en U que oscilan lentamente en puntos de la frontera de U. Así, se estudia el álgebra $\mathfrak{B}_U$ generada por los operadores de multiplicación por funciones en $\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman actuando en el espacio $L^2(U)$. Finalmente, usando el principio local de Allan-Douglas, las técnicas de operadores límite y los resultados de Kehe Zhu acerca de la clase Q, también se construye un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra $\mathfrak{B}_U$ y se obtiene un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dan los conceptos y resultados que serán usados a lo largo de este trabajo de tesis.

Si H es un espacio de Hilbert, entonces con $\mathcal{B}(H)$ denotaremos al álgebra C^* de todos los operadores lineales acotados que actúan en H, y con $\mathcal{K}(H)$ denotamos al ideal de operadores compactos en H. Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es llamado *Fredholm* si la clase lateral $A^\pi := A + \mathcal{K}(H)$ es invertible en el álgebra C^* cociente $\mathcal{B}^\pi(H) := \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ (ver, por ejemplo, [5]).

Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ equipado con la medida de área de Lebesgue $dA(z) = dxdy$, entonces $\mathcal{A}^2(U)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$ son los subespacios de Hilbert de $L^2(U) = L^2(U, dA)$ (ver, por ejemplo, [6], [19]) que consisten de las funciones diferenciables tales que $\partial_{\overline{z}} f = 0$ y $\partial_z f = 0$, respectivamente, donde

$$\partial_{\overline{z}} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial_z := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Además, los subespacios están relacionados mediante el operador anti-lineal

$$C: \ L^2(U) \to L^2(U), \ \ Cf = \overline{f}. \tag{1.1}$$

Es claro que $C(\mathcal{A}^2(U)) = \widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$, pues $\overline{\partial_z f} = \partial_{\overline{z}} \overline{f}$.

La *proyección de Bergman* B_U y la *proyección de anti-Bergman* $\widetilde{B}_U$ son las proyecciones ortogonales del espacio de Lebesgue $L^2(U)$ sobre sus subespacios $\mathcal{A}^2(U)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$, respectivamente. También, es claro que $\widetilde{B}_U = CB_UC$. Para el semiplano superior complejo, $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, esas proyecciones están dadas por (ver, por ejemplo, [40, Chapter 3], [45, Chapter 4])

$$
\begin{aligned}
(B_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Pi \frac{f(w)}{(z-\overline{w})^2}\,dA(w), \quad f \in L^2(\Pi), \quad z \in \Pi,\\
(\widetilde{B}_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Pi \frac{f(w)}{(\overline{z}-w)^2}\,dA(w), \quad f \in L^2(\Pi), \quad z \in \Pi.
\end{aligned}
$$

De acuerdo con [6, Chapter 2], para un dominio acotado múltiplemente conexo, $U \subset \mathbb{C}$, con frontera suficientemente suave, las proyecciones de Bergman y anti-Bergman están representadas por

$$B_U = I - S_U S_U^* + K, \quad \widetilde{B}_U = I - S_U^* S_U + \widetilde{K}, \tag{1.2}$$

donde S_U y S_U^* son operadores integrales singulares bidimensionales acotados en el espacio $L^2(U)$ (ver [25], [26]) y definidos, para $f \in L^2(U)$ y $z \in U$, por

$$
\begin{aligned}
(S_U f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dA(w),\\
(S_U^* f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{f(w)}{(\overline{w}-\overline{z})^2}\,dA(w),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

y los operadores K y $\widetilde{K}$ son compactos en el espacio $L^2(U)$. Claramente, $S_U^* = CS_UC$ es el operador adjunto para S_U.

Si $U = \Pi$, entonces $K = \widetilde{K} = 0$ y, por lo tanto, (1.2) toma la forma (ver, por ejemplo, [40, Theorem 3.5.7]):

$$B_\Pi = I - S_\Pi S_\Pi^*, \quad \widetilde{B}_\Pi = I - S_\Pi^* S_\Pi. \tag{1.4}$$

Por otro lado, si la frontera de un dominio U admite ángulos diferentes de π, entonces las fórmulas (1.2) y (1.4), en general, no son ciertas. Por ejemplo (ver [20, Theorem 5.3]), esto pasa para los sectores abiertos

$$\mathbb{K}_\alpha = \left\{z = re^{i\theta} :\ r > 0,\ \theta \in (0, \pi\alpha)\right\} \quad (\alpha \in (0,2]) \tag{1.5}$$

si $\alpha \in \{1/m :\ m = 2, 3, \ldots\}$.

Además, las proyecciones de Bergman y anti-Bergman de dominios arbitrarios en $\mathbb{C}$ se encuentran relacionados. Si $U, V \subset \mathbb{C}$ son dominios arbitrarios, para los cuales existe una biyección analítica $\varphi : U \to V$, entonces definimos el operador de desplazamiento unitario

$$W_\varphi : L^2(V) \to L^2(U), \qquad (W_\varphi f)(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z), \qquad z \in U.$$

Notemos que $W_\varphi^* = W_{\varphi^{-1}} = W_\varphi^{-1}$ y que el operador W_φ preserva espacios de Bergman. Definiendo $\widetilde{W}_\varphi := c_\varphi W_\varphi$, con $c_\varphi := \overline{\varphi'}/\varphi$, el operador $\widetilde{W}_\varphi$ es unitario y, también, preserva espacios de Bergman. Así, se tiene la siguiente proposición (ver [18], [43], [45]).

Proposición 1.0.1. *Si se tienen las condiciones arriba mencionadas, entonces las siguientes relaciones se cumplen:*

i) $W_\varphi \, B_V \, W_\varphi^* = B_U$;

ii) $\widetilde{W}_\varphi \, \widetilde{B}_V \, \widetilde{W}_\varphi^* = \widetilde{B}_U$;

iii) $W_\varphi \, aI \, W_\varphi^* = (a \circ \varphi)\, I$, *para toda* $a \in L^\infty(V)$;

iv) $K_U(z,w) = \overline{\varphi'(w)}\, K_V(\varphi(z), \varphi(w))\, \varphi'(z)$, *donde* K *es el núcleo de Bergman.*

1.1 El principio local de Allan-Douglas

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $\mathcal{Z}$ una subálgebra C^* central de $\mathcal{A}$ que contiene a la identidad de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{Z})$ al espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}$. Si a cada $x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$ le asociamos el ideal bilátero cerrado I_x de $\mathcal{A}$ generado por el ideal x de $\mathcal{Z}$, entonces $I_x = x\mathcal{A}$ (ver [3, Proposition 8.6]). Consideremos el álgebra cociente C^* $\mathcal{A}_x := \mathcal{A}/I_x$ y el homomorfismo canónico $\pi_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_x$.

Tenemos el principio local de Allan-Douglas. (ver [5, Theorem 1.34], [7, Thorem 7.47]).

Teorema 1.1.1. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra* C^* *con unidad que satisface las condiciones mencionadas arriba.*

(i) Si $a \in \mathcal{A}$, *entonces* a *es invertible en* $\mathcal{A}$, *si y solo si, para toda* $x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$ *la clase lateral* $a_x := \pi_x(a)$ *es invertible en* $\mathcal{A}_x$.

(ii) *Para cada $a \in \mathcal{A}$, la función*

$$\mathcal{M}(\mathcal{Z}) \to \mathbb{R}_+, \qquad x \mapsto \|a_x\|$$

es semicontinua superiormente. Si $a \in \mathcal{A}$ y la clase lateral $a_{x_0} \in \mathcal{A}_{x_0}$ es invertible en $\mathcal{A}_{x_0}$ para algún $x_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$, entonces las clases laterales a_x son invertibles en $\mathcal{A}_x$ para toda x en alguna vecindad de x_0.

(iii) *Para cada $a \in \mathcal{A}$, se tiene $\|a\| = \max_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{Z})}\|a_x\|$.*

Definición 1.1.1. *Decimos que dos elementos $a, b \in \mathcal{A}$ son localmente equivalentes en un punto $x \in \mathcal{M}(\mathcal{Z})$ si $a - b \in I_x$, y en ese caso escribimos $a \overset{x}{\sim} b$.*

1.2 Álgebra C^* de operadores de tipo convolución con datos homogéneos

Los resultados de esta sección se deben esencialmente a la descomposición de Plamenevsky de la transformada de Fourier multidimensional [27]. Tal técnica también se aplicó en [15], donde los resultados de Plamenevsky fueron extendidos al caso bidimensional.

Siguiendo [27] y [15], para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}\lambda > 0$ y $\lambda \neq ik,\ k = 1, 2, \ldots$, definimos los operadores $E(\lambda) \in L^2(\mathbb{T})$, sobre funciones $u \in C^\infty(\mathbb{T})$, por

$$(E(\lambda)u)(\tau) = \gamma(\lambda)\int_{\mathbb{T}}(-\tau\cdot\omega + i0)^{-i\lambda-1}u(\omega)\,d\omega, \quad \tau \in \mathbb{T}, \tag{1.6}$$

donde $d\omega$ es la medida de longitud en $\mathbb{T}$,

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\,\Gamma(1+i\lambda)\,e^{\pi(i-\lambda)/2} \tag{1.7}$$

y la expresión $(t \pm i0)^\mu$, para $t \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{C}$, se entiende en el sentido de distribuciones:

$$(t \pm i0)^\mu = \begin{cases} t_+^\mu + e^{\pm i\pi\mu}\, t_-^\mu & \text{si } \ \mu \neq -1, -2, \ldots, \\ t^\mu \pm (-1)^\mu \dfrac{i\pi}{(-\mu-1)!}\,\delta^{(-\mu-1)}(t) & \text{si } \ \mu = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$t_+^\mu = 0$ para $t \leq 0$, $t_+^\mu = e^{\mu \log t}$ para $t > 0$, y $t_-^\mu = (-t)_+^\mu$.

Para $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$, la integral (1.6) es definida en el sentido de continuación analítica, porque para toda $u \in C^\infty(\mathbb{T})$, la función $\lambda \mapsto E(\lambda)u(t)$ admite una continuación analítica en el plano complejo menos los polos $\lambda = ik$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de la función Γ en (1.7) (ver [27]). El operador inverso $E(\lambda)^{-1}$ está dado por

$$(E(\lambda)^{-1}v)(\omega) = \gamma(-\lambda) \int_{\mathbb{T}} (\omega \cdot \tau + i0)^{i\lambda - 1} v(\tau) d\tau, \quad \lambda \neq -ik, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Por [27, Proposition 4.4], los operadores $E(\lambda)$ son unitarios para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Aunque las funciones $\lambda \mapsto E(\lambda)^{\pm 1}$ no son continuas (en sentido de la norma), tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.2.1. [12, Lemma 2.2] *Para toda $b \in C(\mathbb{T})$, la función*

$$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \quad \lambda \mapsto E(\lambda)^{-1} b E(\lambda)$$

es acotada y continua (en sentido de la norma).

Pasando a coordenadas polares en el plano, obtenemos la descomposición

$$L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2(\mathbb{T}).$$

Así, los productos tensoriales $M \otimes I$ y $M^{-1} \otimes I$ considerarán esta descomposición, donde M es la transformada de Mellin y M^{-1} es su inversa, las cuales están dadas por

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Mv)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} v(r) r^{-i\lambda} dr,$$
$$M^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+, rdr), \quad (M^{-1}u)(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(\lambda) r^{i\lambda - 1} d\lambda.$$

Para una función, cuya imagen es un operador,

$$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \quad \lambda \mapsto L(\lambda),$$

denotaremos por $I \otimes_\lambda L(\lambda)$ al operador en $\mathcal{B}\big(L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T})\big)$ dado por la fórmula

$$[(I \otimes_\lambda L(\lambda))f](\lambda, t) = [L(\lambda) f(\lambda, \cdot)](t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}. \tag{1.8}$$

Si $F : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ es la transformada de Fourier, definida por

$$(Fu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(t) e^{-ix\cdot t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.9}$$

donde $x \cdot t$ es el producto escalar de vectores $x, t \in \mathbb{R}^2$, y F^{-1} es la transformada de Fourier inversa, entonces, de acuerdo a [15, Proposition 2.4] (ver también [27, Proposition 2.1]), tenemos la descomposición $F = (M^{-1} \otimes I)(V \otimes I)(I \otimes_\lambda E(\lambda))(M \otimes I)$, donde V es el operador de reflexión $V : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definido por $(Vf)(\lambda) = f(-\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, y el operador $I \otimes_\lambda E(\lambda)$ está dado de acuerdo a (1.8).

Además, si $PC(\mathbb{T})$ es el álgebra C^* de las funciones continuas a trozos, con valores complejos, definidas sobre el círculo unitario $\mathbb{T}$, $\mathcal{H}(PC(\mathbb{T}))$ es el álgebra C^* de las funciones homogéneas de orden cero en $L^\infty(\mathbb{C})$ cuyas restricciones a $\mathbb{T}$ pertenecen a $PC(\mathbb{T})$ y, para toda $\tau \in \mathbb{T}$ y toda $t > 0$,

$$\lim_{\theta \to +0} a(te^{i\theta}\tau) = \lim_{\theta \to +0} a(e^{i\theta}\tau), \quad \lim_{\theta \to -0} a(te^{i\theta}\tau) = \lim_{\theta \to -0} a(e^{i\theta}\tau),$$

y $\mathcal{H}(C(\mathbb{T}))$ es el álgebra C^* que consiste de las funciones $a \in \mathcal{H}(PC(\mathbb{T}))$ tales que $a|_\mathbb{T} \in C(\mathbb{T})$, entonces definimos a $\mathcal{R}$ como la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ generada por los operadores de multiplicación $A = aI$, con $a \in \mathcal{H}(PC(\mathbb{T}))$, y por los operadores integrales singulares bidimensionales $F^{-1}bF$, con $b \in \mathcal{H}(C(\mathbb{T}))$.

Tomando $a \in \mathcal{H}(PC(\mathbb{T}))$ y $b \in \mathcal{H}(C(\mathbb{T}))$, obtenemos las igualdades (ver [15]):

$$\begin{aligned} (M \otimes I)(aI)(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes (a|_\mathbb{T})I, \\ (M \otimes I)(F^{-1}bF)(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda (E(\lambda)^{-1}(b|_\mathbb{T})E(\lambda)), \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde la función $\lambda \mapsto E(\lambda)^{-1}(b|_\mathbb{T})E(\lambda)$ es acotada y continua (en sentido de la norma) por el Lema 1.2.1.

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$, introducimos el álgebra C^* $\Omega_\lambda \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ generada por los operadores

$$aI \ \text{ y } \ E(\lambda)^{-1}bE(\lambda) \quad (a \in PC(\mathbb{T}),\ b \in C(\mathbb{T})).$$

Si Ω es el álgebra C^* de funciones acotadas, continuas (en sentido de la norma) y cuya imagen es un operador

$$U : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \quad \lambda \mapsto U(\lambda) \in \Omega_\lambda, \tag{1.11}$$

dotada con la norma $\|U\| = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|U(\lambda)\|$, entonces, usando la notación $(U(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ para la función (1.11), obtenemos lo siguiente.

Proposición 1.2.1. [15, Proposition 2.5] *El álgebra C^* $\mathcal{R}$ es isomorfa a una subálgebra C^* de Ω. El isomorfismo está dado sobre los generadores, aI ($a \in \mathcal{H}(PC(\mathbb{T}))$) y $F^{-1}bF$ ($b \in \mathcal{H}(C(\mathbb{T}))$), de $\mathcal{R}$ por*

$$aI \mapsto ((a|_{\mathbb{T}})I)_{\lambda\in\mathbb{R}}, \quad F^{-1}bF \mapsto (E(\lambda)^{-1}(b|_{\mathbb{T}})E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}.$$

De la fórmula para la transformada de Fourier de los núcleos de operadores integrales singulares bidimensionales (ver, por ejemplo, [26, Chapter X, p. 249]) se sigue que

$$S_{\mathbb{C}} = F^{-1}\widetilde{h}^{-1}F, \quad S_{\mathbb{C}}^* = F^{-1}\widetilde{h}F,$$

donde la transformada de Fourier F actúa sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ por (1.9), y la función $\widetilde{h} \in \mathcal{H}(C(\mathbb{T}))$ está dada por $\widetilde{h}(z) = z/\overline{z}$, para toda $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $S_{\mathbb{C}}, S_{\mathbb{C}}^* \in \mathcal{R}$ y, por (1.10),

$$(M \otimes I)S_{\mathbb{C}}(M^{-1} \otimes I) = I \otimes_\lambda S(\lambda),$$
$$(M \otimes I)S_{\mathbb{C}}^*(M^{-1} \otimes I) = I \otimes_\lambda S^*(\lambda),$$

donde los operadores $S(\lambda), S^*(\lambda) \in \Omega_\lambda \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ están dados, para $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$S(\lambda) := E(\lambda)^{-1}h^{-2}E(\lambda), \quad S^*(\lambda) := E(\lambda)^{-1}h^2E(\lambda), \quad h(t) = t \quad (t \in \mathbb{T}). \tag{1.12}$$

1.3 Un álgebra C^* generada por proyecciones

En [12], establecimos un isomorfismo de álgebras C^*, entre el álgebra C^* $\mathcal{A}$ y un álgebra C^* de sumas ortogonales de matrices finitas. En el caso $r = 1$, tal isomorfismo fue construido en [44], para arbitrarios $n, r \in \mathbb{N}$ y proyecciones ortogonales dos a dos P_k, tal isomorfismo fue establecido en [18], y en el caso $n = 1$ fue obtenido en [17].

Consideramos a $\mathbb{C}^n$ como el álgebra C^* de vectores con entradas complejas $x = (x_1, \dots, x_n)$, dotada con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares complejos, la multiplicación entrada a entrada, el adjunto $x^* = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, y la norma

$\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Además, sean $\langle x, y\rangle$ el producto interno en un espacio de Hilbert H, $\delta_{k,j}$ el símbolo de Kronecker, e I_k la matriz identidad de $k \times k$. Denotaremos por $H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_n$ la suma directa de espacios de Hilbert $H_1, H_2, \dots, H_n$ que consiste de elementos $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, con $x_i \in H_i$, tales que si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, entonces $x_i = 0$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$.

La demostración del siguiente teorema fue obtenida de [12, Theorem 6.1]

Teorema 1.3.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sean Q_i, P_k $(i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, ..., r)$ proyecciones autoadjuntas en $\mathcal{B}(H)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $Q_iQ_j = 0$ $(i, j = 1, 2, ..., n; i \neq j)$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} Q_i = I$;

(iii) P_k $(k = 1, 2, ..., r)$ *son proyecciones unidimensionales;*

(iv) $\bigcap_{k=1}^{r} (\mathrm{Im}\ P_k)^{\perp} \cap \mathrm{Im}\ Q_i \neq \{0\}$, $i = 1, 2, ..., n$;

(v) si $v_1, ..., v_r$ son los generadores, con norma uno, de los espacios $\mathrm{Im}\ P_1, ..., \mathrm{Im}\ P_r$, respectivamente, entonces los vectores $Q_iv_1, ..., Q_iv_r$ son linealmente independientes, para toda $i = 1, 2, ..., n$.

Sean $\mathcal{A}$ la subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$ generada por las proyecciones Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ y P_k $(k = 1, 2, ..., r)$, $S = \mathrm{diag}\{S_i\}_{i=1}^{n}$ donde las S_i son matrices invertibles en $\mathbb{C}^{m\times m}$ que transforman los sistemas $\nu_i = \{Q_iv_1, Q_iv_2, ..., Q_iv_r\}$, de vectores linealmente independientes en H, en sistemas ortonormales, y $\mathfrak{S}$ la subálgebra C^* de $\mathbb{C}^{rn\times rn}$ generada por las matrices, $\widetilde{Q}_i = \mathrm{diag}\{\delta_{i,j} I_r\}_{j=1}^{n}$ y $S\widetilde{P}_k S^{-1}$, con $i = 1, 2, ..., n$ y $k = 1, 2, ..., r$, donde $\widetilde{P}_k = \left(\mathrm{diag}\{\delta_{k,j}\}_{j=1}^{r} E_{s,i}\right)_{s,i=1}^{n}$ y

$$E_{s,i} = \begin{pmatrix} \langle Q_iv_1, Q_iv_1\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_1\rangle & \cdots & \langle Q_iv_r, Q_iv_1\rangle \\ \langle Q_iv_1, Q_iv_2\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_2\rangle & \cdots & \langle Q_iv_r, Q_iv_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Q_iv_1, Q_iv_r\rangle & \langle Q_iv_2, Q_iv_r\rangle & \cdots & \langle Q_iv_r, Q_iv_r\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{r\times r}.$$

Entonces, el mapeo σ definido, sobre los generadores de $\mathcal{A}$, por

$$\begin{aligned} Q_i &\mapsto (\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i \ (i = 1, 2, ..., n), \\ P_k &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_k S^{-1} \ (k = 1, 2, ..., r), \end{aligned} \tag{1.13}$$

se extiende a un isomorfismo-* del álgebra C^* $\mathcal{A}$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$.

Demostración. Sean $M_i := \text{Im } Q_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ y $L_k := \text{Im } P_k$ $(k = 1, 2, ..., r)$. Para toda k, fijamos a v_k, un generador de norma uno de L_k. Dividimos la prueba en varios pasos.

1) Como las proyecciones $Q_1, ..., Q_n$ y $P_1, ..., P_r$ son autoadjuntas, los subespacios cerrados $H_0 := (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_n)$ y $\mathfrak{M} := H_0^\perp$ de H son invariantes con respecto a esas proyecciones:

$$Q_i H_0 = L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_i, \ P_k H_0 = \{0\}, \ Q_i \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \ P_k \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}.$$

2) Consideremos las restricciones

$$Q_i' := Q_i|_{\mathfrak{M}} \ (i = 1, 2, ..., n) \text{ y } P_k' := P_k|_{\mathfrak{M}} \ (k = 1, 2, ..., r).$$

Por (i), $Q_i' Q_j' = \delta_{i,j} Q_i'$, y por (ii), $Q_i' Q_j'$ y $I' = Q_1' + \cdots + Q_n'$, donde I' es el operador identidad sobre $\mathfrak{M}$, lo cual implica que $\mathfrak{M} = \text{Im } Q_1' \oplus \cdots \oplus \text{Im } Q_n'$.

3) Por 1), $Q_i(\mathfrak{M}) \subset M_i' := M_i \cap \mathfrak{M}$. Por otro lado, $M_i' \subset Q_i(\mathfrak{M})$ porque $y = Q_i(y)$ para toda $y \in M_i'$. Así, $M_i' = Q_i(\mathfrak{M}) = \text{Im } Q_i'$ y por lo tanto

$$\mathfrak{M} = M_1' \oplus \cdots \oplus M_n'.$$

4) Además, tenemos que $L_k \subset \mathfrak{M}$ para toda $k = 1, ..., r$. En efecto, representando a cada elemento $l_k \in L_k$ en la forma $l_k = (\sum_{i=1}^n x_i) + y$ donde $y \in \mathfrak{M}$ y $x_i \in (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_i)$, obtenemos

$$0 = \langle l_k, x_i \rangle = ||x_i||^2 + \langle y, x_i \rangle = ||x_i||^2.$$

Así, toda $x_i = 0$ y por lo tanto, $l_k \in \mathfrak{M}$.

5) Consideremos los operadores

$$\Pi_i = (P_1 + \cdots + P_r)|_{M_i'} \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Si $g \in M_i'(= M_i \cap \mathfrak{M})$ y $\Pi_i(g) = 0$, entonces $P_1(g) + \cdots + P_r(g) = 0$. Por (iii), $P_k(g) = c_k v_k$ para toda $k = 1, 2, ..., r$, donde v_k es un generador, con norma uno, del espacio Im P_k y $c_k \in \mathbb{C}$. Entonces, $c_1 v_1 + ... + c_r v_r = 0$, lo cual implica que

$$c_1 Q_i v_1 + \cdots + c_r Q_i v_r = 0 \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Como los vectores $Q_i v_1, ..., Q_i v_r$ son linealmente independientes para cada $i = 1, 2, ..., n$ en vista de (v), deducimos que $c_k = 0$, y por lo tanto $P_k(g) = c_k v_k = 0$ para toda $k = 1, 2, ..., r$. Por consiguiente,

$$\Pi_i : M_i' \to L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_r \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Por otro lado, como $P_k(g) = 0$ para toda $k = 1, 2, ..., r$, concluimos que $g \in L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp$. Así,

$$g \in (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_i) \cap \mathfrak{M} = \{0\},$$

y por lo tanto, cada operador Π_i es inyectivo.

6) Aseguramos que dim $M_i' = m$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. En efecto, como $v_k \in L_k \subset \mathfrak{M}$ para $k = 1, 2, ...r$, $Q_i(\mathfrak{M}) = M_i'$ y los vectores $Q_i v_1, ..., Q_i v_r \in M_i'$ son linealmente independientes en vista de (v), concluimos que dim $M_i' \geq r$. Por otro lado, como $\Pi_i : M_i' \to L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_r$ es un operador inyectivo y dim $(L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_r) = r$ (ver (iii)), se sigue que dim $M_i' \leq r$, lo cual prueba nuestra afirmación.

7) Como dim $M_i' = r$, inferimos de (i) y (v) que el sistema

$$\nu = \{Q_1 v_1, ..., Q_1 v_r, Q_2 v_1, ..., Q_2 v_r, ..., Q_n v_1, ..., Q_n v_r\}.$$

es una base ordenada de $\mathfrak{M}$. Obviamente, las representaciones matriciales de las proyecciones $Q_i' \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$, con respecto a la base ν, tienen la forma

$$\widetilde{Q}_i = \mathrm{diag}\{\delta_{i,j} I_r\}_{j=1}^n, \ i = 1, 2, ...n.$$

Además, para toda $k, j = 1, 2, ..., r$ y toda $i = 1, 2, ...n$, obtenemos

$$P_k(Q_i v_j) = \langle Q_i v_j, v_k \rangle v_k = \langle Q_i v_j, Q_i v_k \rangle v_k = \langle Q_i v_j, Q_i v_k \rangle (Q_1 v_k + \cdots + Q_n v_k).$$

De esto se sigue que las representaciones matriciales de las proyecciones $P'_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$, relativas a la base ν, son de la forma

$$\widetilde{P}_k = \left(\operatorname{diag}\{\delta_{k,j}\}_{j=1}^r E_{s,i}\right)_{s,i=1}^n, \ k = 1, 2, ..., r,$$

donde las matrices $E_{s,i}$ fueron descritas al enunciar el teorema.

8) Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos obtener una base ortonormal ν_0 de $\mathfrak{M}$ a partir de la base ν. Así, existe una matriz invertible $S = \operatorname{diag}\{S_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^{rn\times rn}$ tal que las representaciones matriciales de P'_k, relativas a la base ν_0, son de la forma $S\widetilde{P}_k S^{-1}$, respectivamente. Obviamente, las representaciones matriciales de Q'_i en la base ν_0 preservan la forma de $\widetilde{Q}_i$.

9) De acuerdo a la descomposición

$$H = (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (L_1^\perp \cap \cdots \cap L_r^\perp \cap M_n) \oplus \mathfrak{M}$$

donde, por (iv), $\bigcap_{k=1}^r (\text{Im } P_k)^\perp \cap \text{Im } Q_i \neq \{0\}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$, y $\mathfrak{M}$ es tomada con la base ν_0, obtenemos las representaciones (1.13) de los generadores Q_i y P_k del álgebra C^* $\mathcal{A}$ en el álgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{G}$. Así, existe un isomorfismo-* entre álgebras C^*, del álgebra C^* $\mathcal{A}$ sobre el álgebra C^* $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$, generada por los elementos

$$\begin{aligned} Q_i &\mapsto (\delta_{i,1} \oplus \delta_{i,2} \oplus \cdots \oplus \delta_{i,n}) \oplus \widetilde{Q}_i \ (i = 1, 2, ..., n), \\ P_k &\mapsto (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus S\widetilde{P}_k S^{-1} \ (k = 1, 2, ..., r). \end{aligned} \tag{1.14}$$

■

Las matrices $\sigma(A) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ son llamadas los *símbolos* de los operadores $A \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.3.1. *Un operador $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el espacio de Hilbert H, si y solo si, su símbolo $\sigma(A) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ es invertible en $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{rn\times rn}$.*

Sean $M_i := \text{Im } Q_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ y $L_k := \text{Im } P_k$ $(k = 1, 2, ..., r)$, definimos $H_0 := (L_1^\perp \cap \cdots L_r^\perp \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (L_1^\perp \cap \cdots L_r^\perp \cap M_r)$ y $\mathfrak{M} := H_0^\perp$. Consideremos la base ortonormal

$$\nu_0 := \left\{e_1^{(1)}, \ldots, e_r^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_r^{(2)}, \ldots, e_1^{(n)}, \ldots, e_r^{(n)}\right\}$$

de $\mathfrak{M}$ obtenida de la base ordenada

$$\nu = \{Q_1 v_1, \ldots, Q_1 v_r,\, Q_2 v_1, \ldots, Q_2 v_r,\, \ldots,\, Q_n v_1, \ldots, Q_n v_r\}$$

por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Como las proyecciones $Q_1, \ldots, Q_n$ son ortogonales dos a dos, podemos aplicar ortogonalización de forma separada a cada sistema $\nu_i := \{Q_i v_1, \ldots, Q_i v_r\}$. Así, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $k, j = 1, 2, \ldots, r$, obtenemos las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned}
&e_j^{(i)} = f_j^{(i)} / \|f_j^{(i)}\|, \quad f_j^{(i)} = Q_i v_j - \sum_{s=1}^{j-1} \langle Q_i v_j, e_s^{(i)} \rangle e_s^{(i)}, \\
&\|f_j^{(i)}\|^2 = \langle Q_i v_j, Q_i v_j \rangle - \sum_{s=1}^{j-1} |\langle e_s^{(i)}, v_j \rangle|^2 \neq 0, \\
&\langle e_j^{(i)}, v_k \rangle = \begin{cases} \|f_j^{(i)}\|^{-1} \Big(\langle Q_i v_j, Q_i v_k \rangle - \sum_{s=1}^{j-1} \overline{\langle e_s^{(i)}, v_j \rangle} \langle e_s^{(i)}, v_k \rangle \Big) & \text{if } \; j < k, \\ \|f_k^{(i)}\| & \text{if } \; j = k, \\ 0 & \text{if } \; j > k. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Además, por la prueba de [18, Lemma 8.5], concluimos que las entradas $\big[B_k^{(i,\tau)}\big]_{s,j}$ $(s, j = 1, 2, \ldots, r)$ de los bloques

$$B_k^{(i,\tau)} = S_i \big(\mathrm{diag}\big\{ \delta_{k,l} \big\}_{l=1}^{r} E_{i,\tau} \big) S_\tau^{-1} \in \mathbb{C}^{r \times r}$$

de la matriz $S \widetilde{P}_k S^{-1} = \big[B_k^{(i,\tau)} \big]_{i,\tau=1}^{n}$ están dadas por las fórmulas

$$\big[B_k^{(i,\tau)} \big]_{s,j} = \begin{cases} \overline{\langle e_s^{(i)}, v_k \rangle} \langle e_j^{(\tau)}, v_k \rangle, & \text{si } \; s, j = 1, 2, \ldots, k; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.16}$$

Así, todo bloque $B_k^{(i,\tau)}$ tiene la forma

$$B_k^{(i,\tau)} = \begin{bmatrix} C_k^{(i,\tau)} & 0_{r-k} \\ 0_{r-k} & 0_{r-k} \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

donde $C_k^{(i,\tau)} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y su (k,k)-entrada $\beta_k^{(i,\tau)} = \|f_k^{(i)}\| \|f_k^{(\tau)}\|$ es distinta de cero.

En el caso $r = 2$, el Teorema 1.3.1 es reforzado debido a [18, Lemma 8.6]:

Lema 1.3.1. [12, Lemma 6.3] *Si $r = 2$, todas las condiciones del Teorema* 1.3.1 *se satisfacen y*

$$\zeta_{12}^{i_0} := \langle Q_{i_0} v_1, Q_{i_0} v_2 \rangle \neq 0 \quad \textit{para algún} \quad i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

entonces el álgebra C^* $\mathbb{C}^n \oplus \mathfrak{S}$ coincide con $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{2n \times 2n}$.

1.4 Módulo de continuidad y esquinas Dini-suaves

1.4.1 Módulo de continuidad y sus propiedades

Definición 1.4.1. *Si una función f es continua en un segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces su módulo de continuidad está definido por*

$$\omega_f(t) := \sup_{x_1, x_2 \in [a,b],\, |x_1 - x_2| \leq t} |f(x_1) - f(x_2)|, \qquad \textit{para todo} \;\; t \in [0, b-a].$$

Para cualquier función continua f dada en $[a, b]$, su módulo de continuidad $\omega_f(t) =: \omega(t)$, definido para $t \in [0, b-a]$, tiene las siguientes propiedades (ver [37, Section 3.2]):

(i) $\omega(0) = 0$,

(ii) ω *es una función creciente*,

(iii) ω *es una función continua*,

(iv) ω *es una función semi-aditiva, es decir,* $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ *para toda* $t_1, t_2 \geq 0$ *con* $t_1 + t_2 \leq b - a$.

Además, esas son propiedades características, es decir, cualquier función ω que tenga esas propiedades es un módulo de continuidad de una función continua en $[a, b]$. Esto nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.4.2. *Cualquier función ω que satisfaga (i)-(iv) se llamará módulo de continuidad.*

Por otro lado, si una función ω tiene las propiedades (i)-(iii) y la propiedad

(v) *la función* $t \mapsto \omega(t)/t$ *es creciente en* $[0, b-a]$,

entonces ω es un módulo de continuidad. Más aún, si ω tiene las propiedades (i)-(iii), entonces la función

$$\omega^*(t) := t \inf_{0<x\leq t} \frac{\omega(x)}{x} \quad \text{definida para} \quad t \in [0, b-a] \tag{1.18}$$

es un módulo de continuidad porque tiene las propiedades (i)-(iii) y (v). Si las funciones ω y ω^* son módulos de continuidad, entonces

$$\frac{1}{2}\,\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq \omega(t), \quad \text{para toda} \quad t \in [0, b-a], \tag{1.19}$$

donde la desigualdad de la izquierda en (1.19) se deduce de la propiedad (iv) para ω. Así, para cualquier módulo de continuidad ω, existe el módulo de continuidad ω^* dado por (1.18) que tiene la propiedad (v) y satisface (1.19).

Por lo tanto, debido a (1.18)–(1.19), es suficiente pedir para ω solo las propiedades (i)-(iii). Más aún, podemos considerar un módulo de continuidad como una función $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = \omega(0) = 0. \tag{1.20}$$

De hecho, si (1.20) es cierta, entonces, para toda $t \in (0, \infty)$, la función

$$t \mapsto \omega_1(t) := \sup_{0<x\leq t} \omega(x) \;\; \text{es creciente, y} \;\; \omega_1(t) \geq \omega(t);$$

y la función

$$t \mapsto \omega_2(t) := \frac{1}{t}\int_t^{2t} \omega_1(x)dx \;\; \text{también es continua, y} \;\; \omega_2(t) \geq \omega_1(t).$$

Así, la función ω_2 tiene todas las propiedades (i)-(iii).

En este trabajo, vamos a asumir que un módulo de continuidad es una función $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$ que posee las propiedades (i)-(iii) y (v) para toda $t \in [0, \infty]$.

Si $\{\omega_\nu\}_{\nu\in\mathfrak{N}}$ es un conjunto finito de módulos de continuidad con esas propiedades, entonces las funciones $\omega_\Sigma := \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} \omega_\nu$ y $\omega_M := \max_{\nu\in\mathfrak{N}} \omega_\nu$ también tienen esas propiedades, y $\omega_\nu \leq \omega_M \leq \omega_\Sigma$.

Bajo estas condiciones damos la siguiente definición.

Definición 1.4.3. *Decimos que un módulo de continuidad* ω *es de la clase de Dini si*

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty, \quad \text{para cualquier } \; \delta > 0.$$

Si una función f es uniformemente continua en un conjunto conexo $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$, su módulo de continuidad está definido como

$$\omega_f(t) := \sup\left\{ |f(z_1) - f(z_2)| : \; z_1, z_2 \in \mathcal{A}, \; |z_1 - z_2| \leq t \right\}, \quad \text{para } \; t \geq 0.$$

Definición 1.4.4. *Una función* $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *se dice Dini-continua en* $\mathcal{A}$ *si existe una constante* $A_f \geq 0$ *tal que*

$$\omega_f(t) \leq A_f\, \omega(t), \quad \text{para toda } \; t \in \operatorname{diám} \mathcal{A},$$

donde ω *es un módulo de continuidad de la clase de Dini.*

1.4.2 Dominios con frontera Dini-suave y esquinas Dini-suaves

Para $\zeta \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$, tomamos los conjuntos $D(\zeta, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < \rho\}$ y $\overline{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$, donde este último es la cerradura del disco unitario abierto $\mathbb{D} := D(0, 1)$ y $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. De [28, Section 2.2], tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4.5. *Un conjunto cerrado* $A \subset \mathbb{C}$ *se dice que es localmente conexo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una* $\delta > 0$ *tal que, para cualesquiera dos puntos* $a, b \in A$ *con* $|a - b| < \delta$ *existe un continuo* B *(un conjunto compacto y conexo con más de un punto) tal que* $a, b \in B \subset A$ *y* $\operatorname{diám} B < \varepsilon$*, donde* $\operatorname{diám} B$ *es el diámetro euclidiano de* B*.*

Sea f un mapeo conforme del disco unitario abierto $\mathbb{D}$ sobre un dominio $U \subset \mathbb{C}$, el cual tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$. Si U es un dominio acotado, entonces, por [28, Theorem 2.1], las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) el mapeo conforme $f : \mathbb{D} \to U$ tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$;

(ii) la frontera ∂U de U es una curva, es decir, $\partial U = \{\varphi(z) : z \in \mathbb{T}\}$ con una función continua φ;

(iii) el conjunto ∂U es localmente conexo.

Esto resulta cierto para dominios no acotados $U \subset \mathbb{C}$ si la métrica esférica

$$d^\sharp(z,w) = \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} & \text{si } z,w \in \mathbb{C}, \\ 1/(1+|z|^2)^{1/2} & \text{si } z \in \mathbb{C},\ w = \infty, \\ 0 & \text{si } z = w = \infty \end{cases}$$

es usada en lugar de la métrica euclidiana $|z-w|$. En general, la extensión de f a $\overline{\mathbb{D}}$ no es biyectiva, y distinguiremos los puntos $f(z_1), f(z_2) \in \partial U$ para puntos diferentes $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ si $f(z_1) = f(z_2)$.

Las siguientes definiciones se encuentran en [28, Section 3.3] y [28, Section 3.4], respectivamente.

Definición 1.4.6. *Decimos que una curva $C \subset \mathbb{C}$ es Dini-suave si tiene una parametrización $C : w = w(\tau),\ \tau \in [0, 2\pi]$ tal que la función $\tau \mapsto w'(\tau)$ es Dini-continua y $w'(\tau) \neq 0$ para toda $\tau \in [0, 2\pi]$.*

Definición 1.4.7. *Decimos que la frontera ∂U de un dominio $U \subset \mathbb{C}$ tiene una esquina Dini-suave de apertura $\pi\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ en $f(\zeta)$ si existen arcos cerrados $\mathcal{A}^\pm \subset \mathbb{T}$, que terminan en $\zeta \in \mathbb{T}$ y permanecen en lados opuestos de ζ, que son mapeados sobre los arcos de Jordan Dini-suaves C^+ y C^- formando el ángulo $\pi\alpha$ en $f(\zeta)$.*

Teorema 1.4.1. [28, Theorem 3.9] *Si ∂U tiene una esquina Dini-suave de apertura $\pi\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ en $f(\zeta) \neq \infty$, entonces las funciones*

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{(z-\zeta)^\alpha} \quad y \quad \frac{f'(z)}{(z-\zeta)^{\alpha-1}}$$

son continuas y están separadas de 0 e ∞ en $\overline{\mathbb{D}} \cap D(\zeta, \rho)$, para algún $\rho > 0$.

Si $\infty \in \partial U$, entonces decimos que ∂U tiene una esquina de apertura $\pi\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ en ∞ si $w \to 1/\overline{w}$ lo lleva a una esquina de apertura $\pi\alpha$ en 0, y decimos que la esquina en ∞ es Dini-suave si la correspondiente esquina en 0 es Dini-suave.

Capítulo 2

Álgebras con datos continuos a trozos sobre dominios poligonales acotados

En este capítulo, para cualquier $\alpha \in (0, 2]$, construimos un cálculo simbólico y estudiamos la invertibilidad del álgebra C^*

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha} = \text{álg}\left\{aI, B_{\mathbb{K}_\alpha}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} : \ a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)\right\},$$

generada por los operadores de multiplicación aI $(a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega))$ y por las proyecciones de Bergman y anti-Bergman, $B_{\mathbb{K}_\alpha}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}$, que actúan en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$ definido sobre el sector abierto $\mathbb{K}_\alpha$ dado por (1.5), donde $\mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)$ es el conjunto de funciones constantes a trozos sobre $\mathbb{K}_\alpha$, con discontinuidades en la unión finita $\mathfrak{L}_\omega = \bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{L}_j$ de rayos $\mathcal{L}_j = \{re^{i\theta_j} : r \geq 0\}$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ asociados con la tupla

$$\omega := (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1}, \theta_N), \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1} < \theta_N = \pi\alpha.$$

Después, para cualquier dominio poligonal acotado y simplemente conexo U, cuya frontera es una curva de Jordan con posibles cortes y los lados de los cortes son distinguidos, construimos un cálculo simbólico de Fredholm y estudiamos la propiedad de Fredholm para el álgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\left\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \ a \in PC(\mathfrak{L})\right\} \subset \mathcal{B}(L^2(U)),$$

generada por la proyección de Bergman B_U, la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$, y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en una unión finita $\mathfrak{L}$ de segmentos de líneas rectas en U. Así, generalizamos los resultados de los artículos [12] y [17].

2.1 El álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$

Dada $\alpha \in (0,2]$, obtenemos las representaciones de las proyecciones de Bergman, $B_{\mathbb{K}_\alpha}$, y anti-Bergman, $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}$, del espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, definido en el sector abierto $\mathbb{K}_\alpha$ dado por (1.5), sobre los espacios $\mathcal{A}^2(\mathbb{K}_\alpha)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_\alpha)$, respectivamente, vía los operadores integrales singulares bidimensionales S_Π y S_Π^*, definidos por (1.3) con $U = \Pi$. Obviamente, $\mathbb{K}_1$ coincide con el semiplano superior complejo Π y entonces tales representaciones están dadas por (1.4).

Definimos el operador isométrico de desplazamiento

$$W_\alpha : L^2(\mathbb{K}_\alpha) \to L^2(\Pi), \quad (W_\alpha f)(z) = \alpha z^{\alpha-1} f(z^\alpha) \ \text{ para } \ z \in \Pi, \tag{2.1}$$

e identificando a $B_{\mathbb{K}_\alpha}$ y $\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}$ con los operadores $\chi_{\mathbb{K}_\alpha} B_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I$ y $\chi_{\mathbb{K}_\alpha} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I$, que actúan en el espacio $L^2(\mathbb{C})$, obtenemos la siguiente modificación de [20, Theorem 5.3].

Lema 2.1.1. [17, Lemma 3.1] *Para toda $\alpha \in (0,2]$, las proyecciones de Bergman y anti-Bergman, sobre el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, son proyecciones autoadjuntas que tienen, respectivamente, la forma*

$$B_{\mathbb{K}_\alpha} = W_\alpha^{-1} B_\Pi W_\alpha = I - W_\alpha^{-1} S_\Pi S_\Pi^* W_\alpha,$$
$$\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} = C W_\alpha^{-1} B_\Pi W_\alpha C = I - C W_\alpha^{-1} S_\Pi S_\Pi^* W_\alpha C,$$

donde el operador de desplazamiento W_α está dado por (2.1) y el operador C está dado por (1.1), para $U = \mathbb{K}_\alpha$.

Consideremos el arco $\gamma_\alpha := \{e^{i\tau} : \tau \in [0, \alpha\pi]\}$ del círculo unitario $\mathbb{T}$, el semicírculo superior $\mathbb{T}_+ := \gamma_1$, χ_B la función característica de un conjunto $B \subset \mathbb{C}$ y $\chi_+ := \chi_{\mathbb{T}_+}$.

Lema 2.1.2. *Si $\alpha \in (0,2]$, entonces*

$$(M \otimes I)(\chi_\Pi W_\alpha \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I)(M^{-1} \otimes I) = U_{1/\alpha} \otimes (\chi_+ \widetilde{U}_\alpha \chi_{\gamma_\alpha} I), \tag{2.2}$$

donde $U_{1/\alpha} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ y $\widetilde{U}_\alpha : L^2(\gamma_\alpha) \to L^2(\mathbb{T}_+)$ son operadores unitarios dados, respectivamente, por

$$[U_{1/\alpha}\psi](\lambda) = (1/\alpha)^{1/2}\psi(\lambda/\alpha), \quad \textit{para toda } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$[\widetilde{U}_\alpha \phi](t) = \alpha^{1/2} t^{\alpha-1}\phi(t^\alpha), \quad \textit{para toda } t \in \mathbb{T}_+.$$

Demostración. Las igualdades

$$\chi_\Pi W_\alpha \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I = W_\alpha \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I = \chi_\Pi W_\alpha, \qquad \chi_+ \widetilde{U}_\alpha \chi_{\gamma_\alpha} I = \widetilde{U}_\alpha \chi_{\gamma_\alpha} I = \chi_+ \widetilde{U}_\alpha$$

son ciertas en $L^2(\mathbb{C})$ y $L^2(\mathbb{T})$, respectivamente, y

$$(M \otimes I)\chi_{\mathbb{K}_\alpha}(M^{-1} \otimes I) = I \otimes \chi_{\gamma_\alpha}.$$

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T})$, para $(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, tenemos

$$\begin{aligned}
[(M \otimes I)(\chi_\Pi W_\alpha \chi_{\mathbb{K}_\alpha} I)(M^{-1} \otimes I)f](\lambda, t) &= \frac{\chi_\Pi(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} [W_\alpha \chi_{\gamma_\alpha}(M^{-1} \otimes I)f](r,t) r^{-i\lambda} dr \\
&= \frac{\chi_+(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \alpha r^{\alpha-1} t^{\alpha-1} [(M^{-1} \otimes I)f](r^\alpha, t^\alpha) r^{-i\lambda} dr \\
&= \frac{\chi_+(t) t^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} [(M^{-1} \otimes I)f](\rho, t^\alpha) \rho^{-i\lambda/\alpha} d\rho \\
&= \frac{\chi_+(t) t^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\mu, t^\alpha) \rho^{i\mu-1} d\mu \right) \rho^{-i\lambda/\alpha} d\rho = \chi_+(t) t^{\alpha-1} f(\lambda/\alpha, t^\alpha) \\
&= [U_{1/\alpha} \otimes (\chi_+ \widetilde{U}_\alpha \chi_{\gamma_\alpha} I)f](\lambda, t),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene (2.2). ∎

Lema 2.1.3. *Si $C : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$ es el operador antilineal (1.1), entonces*

$$(M \otimes I)C(M^{-1} \otimes I) = \widehat{C}V \otimes \widetilde{C} \tag{2.3}$$

donde $V \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ es el operador de reflexión y los operadores antilineales $\widehat{C} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ y $\widetilde{C} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ actúan por $\widehat{C}f = \overline{f}$ y $\widetilde{C}f = \overline{f}$, respectivamente.

Demostración. Para $f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T})$ y $(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, tenemos

$$[(M \otimes I)C(M^{-1} \otimes I)f](\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} [C(M^{-1} \otimes I)f](r, t) r^{-i\lambda} dr$$
$$= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} [(M^{-1} \otimes I)f](r, t) r^{i\lambda} dr} = \overline{f(-\lambda, t)} = [(\widehat{C} V \otimes \widetilde{C})f](\lambda, t),$$

de lo cual se deduce (2.3). ■

Comenzamos a estudiar el álgebra C^*

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha} = \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_\alpha}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)\} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_\alpha))$$

con coeficientes constantes a trozos, que admiten discontinuidades en la unión $\mathfrak{L}_\omega$ de $N-1$ rayos $\mathcal{L}_j$ asociados con la tupla $\omega = (\theta_0, \ldots, \theta_N)$. Los rayos $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ dividen al sector $\mathbb{K}_\alpha$ en N sectores abiertos

$$R_l = \{z \in \mathbb{K}_\alpha : \ \theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\} \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.4}$$

donde $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_N = \pi\alpha$. Considerando

$$\gamma_\alpha = \mathbb{T} \cap \mathbb{K}_\alpha, \quad \eta_l = \mathbb{T} \cap R_l \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.5}$$

vemos que $\gamma_\alpha \setminus \{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{N-1}}\} = \bigcup_{l=1}^N \eta_l$.

Con $\widetilde{\Omega}$ denotamos al álgebra C^* de las funciones acotadas, continuas (en sentido de la norma) y cuya imagen es un operador

$$Y : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})), \quad \lambda \mapsto Y(\lambda), \quad \text{con} \quad \|Y\| = \sup\{\|Y(\lambda)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Obviamente, el álgebra C^* $\widetilde{\Omega}$ contiene propiamente al álgebra C^* Ω.

Aplicando el Lema 2.1.1, los lemas [17, Lemmas 3.3, 3.4] y (1.10), inmediatamente obtenemos la siguiente modificación de [17, Theorem 3.5].

Teorema 2.1.1. *Para toda $\alpha \in (0, 2]$, el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\widetilde{\Omega}_{\alpha,\omega}$ de $\widetilde{\Omega}$ generada por las funciones acotadas y continuas (en sentido de la norma), $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$, de la forma*

$$\lambda \mapsto B_\alpha(\lambda), \quad \lambda \mapsto \widetilde{B}_\alpha(\lambda), \quad \lambda \mapsto \chi_{\eta_l} I \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.6}$$

donde χ_{η_l} es la función característica del arco $\eta_l := \{e^{i\theta} : \theta \in (\theta_{l-1}, \theta_l)\}$ y, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B_\alpha(\lambda) &= \widetilde{U}_\alpha^{-1} B_1(\lambda\alpha)\widetilde{U}_\alpha, \\ \widetilde{B}_\alpha(\lambda) &= (\widetilde{C}\widetilde{U}_\alpha^{-1}\widetilde{C})\widetilde{B}_1(\lambda\alpha)(\widetilde{C}\widetilde{U}_\alpha\widetilde{C}), \\ B_1(\lambda) &= \chi_+ I - \chi_+ S(\lambda)\chi_+ S^*(\lambda)\chi_+ I, \\ \widetilde{B}_1(\lambda) &= \chi_+ I - \chi_+ S^*(\lambda)\chi_+ S(\lambda)\chi_+ I, \end{aligned} \tag{2.7}$$

χ_+ es la función característica de $\mathbb{T}_+ = \mathbb{T} \cap \Pi$, el operador de desplazamiento $\widetilde{U}_\alpha : L^2(\gamma_\alpha) \to L^2(\mathbb{T}_+)$ está dado por $[\widetilde{U}_\alpha \phi](t) = \alpha^{1/2} t^{\alpha-1}\phi(t^\alpha)$ para toda $t \in \mathbb{T}_+$, $\widetilde{C}f = \overline{f}$ sobre los subespacios de $L^2(\mathbb{T})$, y los operadores $S(\lambda), S^*(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, están dados por (1.12).

La prueba está basada en las relaciones (comparar [17, Section 3]):

$$\begin{aligned} (M \otimes I)B_{\mathbb{K}_\alpha}(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda B_\alpha(\lambda), \\ (M \otimes I)\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes_\lambda \widetilde{B}_\alpha(\lambda), \\ (M \otimes I)(\chi_{R_l} I)(M^{-1} \otimes I) &= I \otimes (\chi_{\eta_l} I) \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde χ_{R_l} es la función característica del sector abierto R_l dado por (2.4), y $B_\alpha(\lambda), \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ están definidos por (2.7). Claramente, el álgebra C^* $\widetilde{\Omega}_{\alpha,\omega}$ puede ser identificada con una subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(\gamma_\alpha))$, donde γ_α está dada por (2.5).

El siguiente lema generaliza a [22, Proposition 3.10], [18, Lemma 9.3] y [12, Lemma 5.2], al caso de sectores arbitrarios $\mathbb{K}_\alpha$.

Lema 2.1.4. [17, Lemma 4.2] *Para toda $\alpha \in (0, 2]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, los operadores $B_\alpha(\lambda)$ y $\widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ son proyecciones unidimensionales en el espacio $L^2(\gamma_\alpha)$, y los generadores, de norma uno, de los espacios $\operatorname{Im} B_\alpha(\lambda)$, $\operatorname{Im} \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ están dados, para $t \in \gamma_\alpha$, por*

$$g_{\alpha,\lambda}(t) = G_\alpha(\lambda)t^{i\lambda-1}, \quad \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}(t) = \overline{g_{\alpha,-\lambda}} = G_\alpha(-\lambda)t^{1-i\lambda}, \tag{2.9}$$

respectivamente, donde

$$G_\alpha(\lambda) := \begin{cases} \left(\dfrac{2\lambda}{1 - e^{-2\lambda\pi\alpha}}\right)^{1/2} & si\ \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \lim\limits_{\lambda \to 0} G_\alpha(\lambda) = (\pi\alpha)^{-1/2} & si\ \ \lambda = 0. \end{cases}$$

Lema 2.1.5. [17, Lemma 4.4] *Para toda $\alpha \in (0,2]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el producto interno $\langle g_{\alpha,\lambda}, \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}\rangle$ en el espacio $L^2(\gamma_\alpha)$ está dado por*

$$\langle g_{\alpha,\lambda}, \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}\rangle = \zeta_{\alpha,\lambda} := e^{-\pi\alpha i}\beta_\alpha(\lambda)\,\mathrm{sen}(\pi\alpha), \tag{2.10}$$

donde

$$\beta_\alpha(\lambda) := G_\alpha(\lambda)G_\alpha(-\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sinh(\lambda\pi\alpha)} & si \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ (\pi\alpha)^{-1} & si \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

y por lo tanto $\beta_\alpha(\lambda) \neq 0$, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \beta_\alpha(\lambda) = 0$.

Así, se puede ver, del Lema 2.1.5, que para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ los subespacios unidimensionales $\operatorname{Im} B_\alpha(\lambda)$ e $\operatorname{Im} \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ de $L^2(\gamma_\alpha)$ no son ortogonales si $\alpha \in (0,1)\cup(1,2)$, mientras que $B_\alpha(\lambda)\widetilde{B}_\alpha(\lambda) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ cuando $\alpha = 1,2$.

Dadas $\alpha \in (0,2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\omega = (\theta_0,\ldots,\theta_N)$, definimos la subálgebra C^*

$$\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda} := \text{álg}\,\{B_\alpha(\lambda), \widetilde{B}_\alpha(\lambda), \chi_{\eta_l}I :\ l = 1,2,\ldots,N\},$$

donde χ_{η_l} son las funciones características de los arcos η_l que surgen de la partición del arco $\gamma_\alpha := \mathbb{T}\cap\mathbb{K}_\alpha$ hecha por los rayos $\mathcal{L}_j$ $(j = 1,2,\ldots,N-1)$ de $\mathcal{B}(L^2(\gamma_\alpha))$, generada por los operadores $B_\alpha(\lambda), \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ y $\chi_{\eta_l}I$ $(l = 1,2,\ldots,N)$. Por (2.8), para toda $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un operador $A_{\alpha,\omega}(\lambda) \in \mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$ tal que $(M\otimes I)A(M^{-1}\otimes I) = I\otimes_\lambda A_{\alpha,\omega}(\lambda)$, y la función $\lambda \mapsto A_{\alpha,\omega}(\lambda)$ es acotada y continua (en sentido de la norma). Como el álgebra C^* $\widetilde{\Omega}_{\alpha,\omega}$, generada por las funciones (2.6), puede ser considerada como $\widetilde{\Omega}_{\alpha,\omega} \subset \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$, del Teorema 2.1.1, se implica inmediatamente el siguiente criterio de invertibilidad.

Teorema 2.1.2. *Dadas $\alpha \in (0,2]$ y $\omega = (\theta_0,\ldots,\theta_N)$, un operador $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, si y solo si, los operadores $A_{\alpha,\omega}(\lambda) \in \mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$ son invertibles en el espacio $L^2(\gamma_\alpha)$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|(A_{\alpha,\omega}(\lambda))^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\gamma_\alpha))} < \infty.$$

2.2 Cálculo simbólico e invertibilidad para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$

2.2.1 Condiciones del Teorema 1.3.1

Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}$ para dadas $\alpha \in (0,2]$ y $\omega = (\theta_0, \ldots, \theta_N)$. Definimos las siguientes proyecciones en el álgebra C^* $\mathcal{B}(L^2(\gamma_\alpha))$:

$$P_1 := B_\alpha(\lambda), \quad P_2 := \widetilde{B}_\alpha(\lambda), \quad Q_l := \chi_{\eta_l} I \quad (l = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.11}$$

Las proyecciones unidimensionales $B_\alpha(\lambda)$ y $\widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ están dadas sobre $L^2(\gamma_\alpha)$ por

$$B_\alpha(\lambda) f = \langle f, g_{\alpha,\lambda} \rangle g_{\alpha,\lambda}, \quad \widetilde{B}_\alpha(\lambda) f = \langle f, \widetilde{g}_{\alpha,\lambda} \rangle \widetilde{g}_{\alpha,\lambda},$$

donde las funciones $g_{\alpha,\lambda}, \widetilde{g}_{\alpha,\lambda} \in L^2(\gamma_\alpha)$ están definidas por (2.9).

Claramente, Q_l son proyecciones ortogonales que satisfacen las condiciones:

$$Q_l Q_j = \delta_{l,j} Q_j, \quad \sum_{l=1}^{N} Q_l = I. \tag{2.12}$$

En vista de (2.11), (2.12) y Lema 2.1.4, para aplicar el Teorema 1.3.1 con $n = N$ y $r = 2$ al álgebra C^*

$$\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda} = \text{álg}\left\{ B_\alpha(\lambda), \widetilde{B}_\alpha(\lambda), Q_l : \ l = 1, 2, \ldots, N \right\} \subset \mathcal{B}(L^2(\gamma_\alpha)), \tag{2.13}$$

solo resta verificar las condiciones (iv) y (v) del teorema referido. Como cada espacio $\text{Im}(\chi_{\eta_l} I)$ tiene dimensión infinita, existe $g \in \text{Im}(\chi_{\eta_l} I)$ tal que $0 \neq g \in \{\chi_{\eta_l} g_{\alpha,\lambda}, \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}\}^\perp$. Entonces, para toda $l = 1, 2, \ldots, N$,

$$0 \neq g \in (\text{Im}\, P_1)^\perp \cap (\text{Im}\, P_2)^\perp \cap \text{Im}\, Q_l,$$

y así la condición (iv) del Teorema 1.3.1 se satisface.

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualquier $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$, consideramos la combinación lineal $a g_{\alpha,\lambda} + b \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}$ con constantes $a, b \in \mathbb{C}$, y supongamos que $\chi_{\eta_l}(a g_{\alpha,\lambda} + b \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}) = 0$. Luego, la función

$$\varphi(t) := a g_{\alpha,\lambda}(t) + b \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}(t)$$

es igual a cero, para toda $t \in \eta_l$. Pero la función φ, en vista de (2.9), admite una extensión analítica al conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$, donde $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Como esta función es igual a cero en el arco η_l, inferimos que $\varphi(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$ y, por lo tanto, para toda $t \in \mathbb{T}_+$. La última igualdad implica que $a = b = 0$ porque, por [17, Lemma 6.1], las funciones (2.9) son ortogonales en el espacio $L^2(\mathbb{T}_+)$, mientras que sus normas en $L^2(\mathbb{T}_+)$ son diferentes de 0. Podemos inferir ortogonalidad de (2.10), porque

$$\langle g_{\alpha,\lambda}, \widetilde{g}_{\alpha,\lambda} \rangle_{L^2(\mathbb{T}_+)} = \frac{G_\alpha(\lambda)\overline{G_\alpha(-\lambda)}}{G_1(\lambda)\overline{G_1(-\lambda)}} \langle g_{1,\lambda}, \widetilde{g}_{1,\lambda} \rangle_{L^2(\mathbb{T}_+)} = 0.$$

Por lo tanto, las funciones $g_{\alpha,\lambda}$ y $\widetilde{g}_{\alpha,\lambda}$ son linealmente independientes en todo arco η_l $(l = 1, 2, \ldots, N)$, y así la condición (v) del Teorema 1.3.1 también se satisface.

2.2.2 Aplicación del Teorema 1.3.1

Para $\alpha \in (0, 2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $l = 1, 2, \ldots, N$, consideramos los siguientes productos internos en el espacio $L^2(\gamma_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \zeta^l_{\alpha,11}(\lambda) &:= \langle \chi_{\eta_l} g_{\alpha,\lambda}, \chi_{\eta_l} g_{\alpha,\lambda} \rangle, \quad & \zeta^l_{\alpha,12}(\lambda) &:= \langle \chi_{\eta_l} g_{\alpha,\lambda}, \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{\alpha,\lambda} \rangle, \\ \zeta^l_{\alpha,21}(\lambda) &:= \langle \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}, \chi_{\eta_l} g_{\alpha,\lambda} \rangle, \quad & \zeta^l_{\alpha,22}(\lambda) &:= \langle \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}, \chi_{\eta_l} \widetilde{g}_{\alpha,\lambda} \rangle. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las igualdades $\zeta^l_{\alpha,21}(\lambda) = \overline{\zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)}$ y $\zeta^l_{\alpha,22}(\lambda) = \zeta^l_{\alpha,11}(-\lambda)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos calcular fácilmente de (2.9) que, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \zeta^l_{\alpha,11}(\lambda) &= \frac{e^{-2\lambda\theta_l} - e^{-2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{-2\lambda\pi\alpha} - 1}, \\ \zeta^l_{\alpha,12}(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sinh(\lambda\pi\alpha)} \, \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2i}, \\ \zeta^l_{\alpha,21}(\lambda) &= \overline{\zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)} = \frac{\lambda}{\sinh(\lambda\pi\alpha)} \, \frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2i}, \\ \zeta^l_{\alpha,22}(\lambda) &= \zeta^l_{\alpha,11}(-\lambda) = \frac{e^{2\lambda\theta_l} - e^{2\lambda\theta_{l-1}}}{e^{2\lambda\pi\alpha} - 1}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado, aplicando las igualdades

$$\zeta^l_{\alpha,kn}(0) = \lim_{\lambda \to 0} \zeta^l_{\alpha,kn}(\lambda), \quad k, n = 1, 2,$$

deducimos, de (2.14), que para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} \zeta^l_{\alpha,11}(0) &= \frac{\theta_l - \theta_{l-1}}{\pi\alpha}, & \zeta^l_{\alpha,12}(0) &= \frac{e^{-2i\theta_l} - e^{-2i\theta_{l-1}}}{-2\pi\alpha i}, \\ \zeta^l_{\alpha,21}(0) &= \frac{e^{2i\theta_l} - e^{2i\theta_{l-1}}}{2\pi\alpha i}, & \zeta^l_{\alpha,22}(0) &= \frac{\theta_l - \theta_{l-1}}{\pi\alpha}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como las proyecciones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ son ortogonales por pares, tomando $v_{\alpha,\lambda,1} := g_{\alpha,\lambda}$ y $v_{\alpha,\lambda,2} := \widetilde{g}_{\alpha,\lambda}$, inferimos, de (1.15), que para $l = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1} &= \frac{Q_l v_{\alpha,\lambda,1}}{\big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{1/2}}, \\ e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2} &= \frac{Q_l v_{\alpha,\lambda,2} - \big(\zeta^l_{\alpha,21}(\lambda)/\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big) Q_l v_{\alpha,\lambda,1}}{\big(\zeta^l_{\alpha,22}(\lambda) - |\zeta^l_{\alpha,21}(\lambda)|^2/\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{1/2}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde el denominador no nulo, $\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\|$, de $e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}$ es obtenido por la regla

$$\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\| = \frac{\big[\sinh^2(\lambda(\theta_l - \theta_{l-1})) + \lambda^2 \sinh^2(i(\theta_l - \theta_{l-1}))\big]^{1/2}}{|\sinh(\lambda\pi\alpha)|\big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{1/2}}, \tag{2.17}$$

para toda $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mientras que para $\lambda = 0$ concluimos, de (2.17) y (2.15), que

$$\|f^{(l)}_{\alpha,0,2}\| = \left[\frac{(\theta_l - \theta_{l-1})^2 + \sinh^2(i(\theta_l - \theta_{l-1}))}{\pi\alpha(\theta_l - \theta_{l-1})}\right]^{1/2}. \tag{2.18}$$

Además, de (2.16) y (1.15), se sigue que

$$\begin{aligned} &\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,1}\rangle = \langle Q_l v_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,1}\rangle \big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{-1/2} = \big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{1/2}, \\ &\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle = \langle Q_l v_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle \big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{-1/2} = \zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)\big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{-1/2}, \\ &\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,1}\rangle = 0, \\ &\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle = \big(\zeta^l_{\alpha,22}(\lambda) - |\zeta^l_{\alpha,21}(\lambda)|^2/\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{1/2} = \|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Tomando $P_1 = B_\alpha(\lambda)$, $P_2 = \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$ y siguiendo el Teorema 1.3.1 y (1.16)–(1.17), definimos las matrices $M_{\alpha,\omega}(\lambda), \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\omega}(\lambda) &:= S\widetilde{P}_1 S^{-1} = \big[B^{(l,\tau)}_{\alpha,\lambda,1}\big]^N_{l,\tau=1}, \quad \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda) := S\widetilde{P}_2 S^{-1} = \big[\widetilde{B}^{(l,\tau)}_{\alpha,\lambda,2}\big]^N_{l,\tau=1}, \\ B^{(l,\tau)}_{\alpha,\lambda,1} &:= \begin{bmatrix} \overline{\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,1}\rangle}\langle e^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,1}\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B^{(l,\tau)}_{\alpha,\lambda,2} &:= \begin{bmatrix} \overline{\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle & \overline{\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle \\ \overline{\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,1}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle & \overline{\langle e^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle}\langle e^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,2}, v_{\alpha,\lambda,2}\rangle \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sean $e_{\alpha,\lambda,2(l-1)+k} = e^{(l)}_{\alpha,\lambda,k}$ para toda $l = 1,2,\dots,N$ y $k = 1,2$. Entonces, de (2.19) y de (2.20), se sigue que las entradas de las matrices $M_{\alpha,\omega}(\lambda)$ y $\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $s, j = 1,2,\dots,2N$ están dadas por

$$
\begin{aligned}
\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{s,j} &= \langle B_\alpha(\lambda)e_{\alpha,\lambda,j}, e_{\alpha,\lambda,s}\rangle \\
&= \begin{cases} \big[\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\zeta^\tau_{\alpha,11}(\lambda)\big]^{1/2} & \text{si} \quad j = 2l-1,\ s = 2\tau-1, \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \\
\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{s,j} &= \langle \widetilde{B}_\alpha(\lambda)e_{\alpha,\lambda,j}, e_{\alpha,\lambda,s}\rangle \\
&= \begin{cases} \zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)\overline{\zeta^\tau_{\alpha,12}(\lambda)}\,\big[\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\zeta^\tau_{\alpha,11}(\lambda)\big]^{-1/2} & \text{si} \ \ j = 2l-1,\ s = 2\tau-1, \\ \zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)\big(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{-1/2}\big\|f^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| & \text{si} \ \ j = 2l-1,\ s = 2\tau, \\ \overline{\zeta^\tau_{\alpha,12}(\lambda)}\big(\zeta^\tau_{\alpha,11}(\lambda)\big)^{-1/2}\big\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| & \text{si} \ \ j = 2l,\ s = 2\tau-1, \\ \big\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\big\|\,\big\|f^{(\tau)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| & \text{si} \ \ j = 2l,\ s = 2\tau, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

donde $\zeta^l_{\alpha,kn}(\lambda)$, para $k, n = 1,2$ y $\big\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\big\|$, están dados por (2.14)–(2.15) y (2.17)–(2.18), respectivamente.

Haciendo uso de (2.14), (2.17), y modificando, para $\alpha \in (0,2]$, cálculos hechos en [12] para $\alpha = 1/m$ con $m \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$
\begin{gathered}
\lim_{\lambda\to+\infty} \zeta^1_{\alpha,11}(\lambda) = 1, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} \zeta^1_{\alpha,11}(\lambda) = 0, \\
\lim_{\lambda\to+\infty} \zeta^N_{\alpha,11}(\lambda) = 0, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} \zeta^N_{\alpha,11}(\lambda) = 1, \\
\lim_{\lambda\to\pm\infty} \zeta^l_{\alpha,11}(\lambda) = 0 \quad (1 < l < N), \\
\lim_{\lambda\to\pm\infty} \big[\zeta^l_{\alpha,12}(\lambda)(\zeta^l_{\alpha,11}(\lambda))^{-1/2}\big] = 0 \quad (1 \le l \le N); \\
\lim_{\lambda\to+\infty} \big\|f^{(1)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| = 0, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} \big\|f^{(1)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| = 1, \\
\lim_{\lambda\to+\infty} \big\|f^{(N)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| = 1, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} \big\|f^{(N)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| = 0, \\
\lim_{\lambda\to\pm\infty} \big\|f^{(l)}_{\alpha,\lambda,2}\big\| = 0 \quad (1 < l < N).
\end{gathered}
$$

Esto y (2.21) implican, immediatamente, el siguiente resultado, en analogía con [18, Proposition 9.4] y [12, Proposition 7.1].

Proposición 2.2.1. *Si $N \geq 2$, entonces las siguientes igualdades son ciertas:*

$$\begin{gathered} \lim_{\lambda\to+\infty}\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{1,1}=1, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{1,1}=0, \\ \lim_{\lambda\to+\infty}\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2N-1,2N-1}=0, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2N-1,2N-1}=1, \\ \lim_{\lambda\to\pm\infty}\big[M_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{s,j}=0 \quad \textit{para todos las demás} \ \ s,j=1,2,\dots,2N; \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered} \lim_{\lambda\to+\infty}\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2,2}=0, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2,2}=1, \\ \lim_{\lambda\to+\infty}\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2N,2N}=1, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{2N,2N}=0, \\ \lim_{\lambda\to\pm\infty}\big[\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\big]_{s,j}=0 \quad \textit{para todos las demás} \ \ s,j=1,2,\dots,2N. \end{gathered} \tag{2.23}$$

De acuerdo a la Proposición 2.2.1, escribimos

$$M_{\alpha,\omega}(\pm\infty):=\lim_{\lambda\to\pm\infty}M_{\alpha,\omega}(\lambda), \quad \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\pm\infty):=\lim_{\lambda\to\pm\infty}\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda). \tag{2.24}$$

Sea $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$. Entonces (2.21)–(2.24) y la Proposición 2.2.1 nos dan lo siguiente.

Corolario 2.2.1. *Si $\alpha\in(0,2]$ y $N\geq 2$, entonces $M_{\alpha,\omega}(\cdot)$, $\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\cdot)\in C(\overline{\mathbb{R}},\mathbb{C}^{2N\times 2N})$.*

Por analogía con [12, Theorem 7.3], el Teorema 1.3.1 implica el siguiente resultado para las álgebras C^* $\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$.

Teorema 2.2.1. *Para toda $\alpha\in(0,2]$, $\omega=(\theta_0,\dots,\theta_N)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, el álgebra C^* $\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$, dada por (2.13), es isomorfo-* al álgebra C^* $\mathbb{C}^N\oplus\mathbb{C}^{2N\times 2N}$, y este isomorfismo está dado sobre los generadores de $\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$ por*

$$\begin{aligned} \chi_{\eta_l}I &\mapsto (\delta_{l,1}\oplus\delta_{l,2}\oplus\cdots\oplus\delta_{l,N})\oplus\operatorname{diag}\big\{\delta_{l,j}I_2\big\}_{j=1}^N, \\ B_\alpha(\lambda) &\mapsto (0\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0)\oplus M_{\alpha,\omega}(\lambda), \\ \widetilde{B}_\alpha(\lambda) &\mapsto (0\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0)\oplus \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda), \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde las matrices $M_{\alpha,\omega}(\lambda)$, $\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda)\in\mathbb{C}^{2N\times 2N}$ están definidas por (2.21).

Demostración. Como mostramos antes, podemos aplicar el Teorema 1.3.1 al álgebra C^* $\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$. Por (2.14)–(2.15), $\zeta^l_{\alpha,kj}(\lambda)\neq 0$ para toda $\alpha\in(0,2]$, toda $k,j=1,2$, toda

$l = 1, 2, \dots, N$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$. En vista del Lema 1.3.1, el álgebra C^* $\mathcal{A}_{\alpha,\omega,\lambda}$ es isomorfa al álgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{2N\times 2N}$. En el caso de dos proyecciones unidimensionales $P_1 = B_\alpha(\lambda)$ y $P_2 = \widetilde{B}_\alpha(\lambda)$, de las primeras igualdades en (2.20) se sigue que

$$S\widetilde{P}_1 S^{-1} = M_{\alpha,\omega}(\lambda), \quad S\widetilde{P}_2 S^{-1} = \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda).$$

Finalmente, (1.13) implica (2.25). ■

Toda función $a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)$ es representada en la forma

$$a(z) = \sum_{l=1}^{N} a_l \chi_{R_l}(z) \quad (z \in \mathbb{K}_\alpha), \tag{2.26}$$

donde a_l son constantes complejas.

De forma similar a la prueba de [12, Theorem 7.4], usando los Teoremas 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 y el Corolario 2.2.1, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2. *Para toda $\alpha \in (0, 2]$ y $\omega = (\theta_0, \dots, \theta_N)$, el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$, donde*

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha} = \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_\alpha}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)\},$$

es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus \mathfrak{S}_{\alpha,\omega}$ de $\mathbb{C}^N \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$, y este isomorfismo $\Phi_{\alpha,\omega} = \Phi^0_{\alpha,\omega} \oplus \big(\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \Phi_{\alpha,\omega,\lambda}\big)$, de $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ sobre $C^N \oplus \mathfrak{S}_{\alpha,\omega}$, está dado por

$$\begin{aligned} \Phi^0_{\alpha,\omega}(aI) &= \big[a_j\big]_{j=1}^N, & \Phi_{\alpha,\omega,\lambda}(aI) &= \operatorname{diag}\big\{a_j I_2\big\}_{j=1}^N, \\ \Phi^0_{\alpha,\omega}(B_{\mathbb{K}_\alpha}) &= \big[0\big]_{j=1}^N, & \Phi_{\alpha,\omega,\lambda}(B_{\mathbb{K}_\alpha}) &= M_{\alpha,\omega}(\lambda), \\ \Phi^0_{\alpha,\omega}(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}) &= \big[0\big]_{j=1}^N, & \Phi_{\alpha,\omega,\lambda}(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}) &= \widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\lambda), \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde $a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_\omega)$ está dada por (2.26), y las funciones $M_{\alpha,\omega}(\cdot)$, $\widetilde{M}_{\alpha,\omega}(\cdot) \in C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$ están definidas por (2.21)–(2.24), para toda $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Un operador $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ es invertible en el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, si y solo si, su símbolo $\Phi_{\alpha,\omega}(A)$ es invertible en el álgebra C^* $\mathbb{C}^N \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$, es decir, si

$$\begin{aligned} [\Phi^0_{\alpha,\omega}(A)]_j &\neq 0, \quad \textit{para toda} \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \det\big[\Phi_{\alpha,\omega,\lambda}(A)\big] &\neq 0, \quad \textit{para toda} \quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

donde $[\Phi^0_{\alpha,\omega}(A)]_j$ son las j-ésimas entradas del vector $\Phi^0_{\alpha,\omega}(A) \in \mathbb{C}^N$ y $\Phi_{\alpha,\omega,\lambda}(A)$ son los valores de la función $\Phi_{\alpha,\omega,(\cdot)}(A) \in C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2N\times 2N})$.

Si todos los coeficientes a en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ son constantes y, por lo tanto, $N=1$, del Teorema 2.2.2 se obtiene la siguiente forma más simple.

Teorema 2.2.3. [17, Theorem 7.2] *Para toda* $\alpha \in (0,2]$, *el álgebra* C^*

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha} := \text{álg}\left\{I, B_{\mathbb{K}_\alpha}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}\right\} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_\alpha))$$

*es isomorfa-** *a la subálgebra* C^* $\mathbb{C}\oplus\mathfrak{S}_\alpha$ *del álgebra* C^* $\mathbb{C}\oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2\times 2})$, *y este isomorfismo* $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^0 \oplus (\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \Phi_{\alpha,\lambda})$, *de* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ *sobre* $\mathbb{C}\oplus\mathfrak{S}_\alpha$, *está dado por*

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha^0(I) = 1, &\qquad \Phi_{\alpha,\lambda}(I) = I_2, \\ \Phi_\alpha^0(B_{\mathbb{K}_\alpha}) = 0, &\quad \Phi_{\alpha,\lambda}(B_{\mathbb{K}_\alpha}) = M_\alpha(\lambda), \\ \Phi_\alpha^0(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}) = 0, &\quad \Phi_{\alpha,\lambda}(\widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}) = \widetilde{M}_\alpha(\lambda), \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde las funciones $M_\alpha(\cdot)$, $\widetilde{M}_\alpha(\cdot) \in C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ *están definidas por*

$$M_\alpha(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{M}_\alpha(\lambda) = \begin{bmatrix} |\zeta_{\alpha,\lambda}|^2 & \overline{\zeta_{\alpha,\lambda}}\, \Delta_{\alpha,\lambda}^{1/2} \\ \zeta_{\alpha,\lambda}\, \Delta_{\alpha,\lambda}^{1/2} & \Delta_{\alpha,\lambda} \end{bmatrix}, \quad \text{para toda } \ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{2.29}$$

$\Delta_{\alpha,\lambda} := 1 - |\zeta_{\alpha,\lambda}|^2$ *y* $\zeta_{\alpha,\lambda}$ *está dada por* (2.10). *Un operador* $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ *es invertible en el espacio* $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$, *si y solo si, su símbolo* $\Phi_\alpha(A)$ *es invertible en el álgebra* C^* $\mathbb{C}\oplus\mathfrak{S}_\alpha$, *es decir, si*

$$\Phi_\alpha^0(A) \neq 0 \quad y \quad \det[\Phi_{\alpha,\lambda}(A)] \neq 0, \quad \text{para toda } \ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

2.3 Álgebras C^* $\mathfrak{B}_U$ sobre dominios poligonales acotados U

2.3.1 El álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

Sea U un dominio poligonal acotado y simplemente conexo, cuya frontera es una curva de Jordan con posibles cortes, donde distinguimos ambos lados de los cortes. De aquí en adelante, denotaremos por ∂U a la frontera extendida de U, obtenida de la frontera usual pero reemplazando todos los cortes por sus dos lados distinguidos, donde no duplicaremos los puntos finales de los cortes, para los cuales los ángulos internos de U son igual a 2π. Sea $\overline{U} := U \cup \partial U$ la cerradura extendida del dominio poligonal U.

El dominio poligonal acotado y simplemente conexo, U, tiene ángulos internos $\pi\alpha_k \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ $(k = 1, 2, ..., m)$ en las esquinas $z_k \in \partial U$, y sea $\mathcal{C} = \{z_k : k = 1, 2, ..., m\}$ el conjunto de todas las esquinas, donde duplicaremos las esquinas z que sean las intersecciones de cortes y la frontera usual de U, y distinguiremos esos dos puntos de ∂U. Como es sabido, para un dominio poligonal acotado y simplemente conexo U, se tiene que $\sum_{k=1}^{m} \pi\alpha_k = \pi(m-2)$. Si $\mathcal{D}$ es un subconjunto finito de ∂U y asumimos que para cada punto $z \in \mathcal{D}$ existe una unión finita $\mathfrak{L}_z$ de segmentos de línea recta en $U \cup \{z\}$ que emanan de z, entonces $\mathfrak{L} = \bigcup_{z \in \mathcal{D}} \mathfrak{L}_z$ y $\mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$.

Vamos a estudiar la subálgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \ a \in PC(\mathfrak{L})\}, \tag{2.30}$$

de $\mathcal{B}(L^2(U))$ generada por la proyección de Bergman B_U, la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en $\mathfrak{L}$.

De aquí en adelante, asumiremos que el conjunto $\mathfrak{L}$ satisface las condiciones:

($\mathfrak{L}$1) para cada punto $z \in U \cap \mathfrak{L}$, existen números $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ tales que todo disco abierto abierto $D(z, r)$, de radio $r \in (0, r_z)$ y centrado en z, es dividido por $\mathfrak{L}$ en n_z dominios con z como un punto límite común;

($\mathfrak{L}$2) para cada punto $z \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, existe una vecindad V_z de z tal que $\overline{V_z \cap \mathfrak{L}}$ es una unión de $n_z - 1$ segmentos de línea recta que tienen solo al punto z en común y que forman en este punto ángulos, no cero y distintos dos a dos $\theta_1 < \ldots < \theta_{n_z-1}$, con la semivecindad de $z \in \partial U$.

Así, para una vecindad suficientemente pequeña V_z de cualquier punto $z \in \overline{U}$, el conjunto $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L})$ consiste de $n_z \in \mathbb{N}$ componentes conexas cuyas cerraduras contienen a z. Con todo punto $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$, asociamos la tupla $\omega_z = (\theta_0, \ldots, \theta_{n_z})$, donde $\theta_0 = 0$. Claramente, si $z \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{L}$, entonces $n_z = 1$.

2.3.2 Operadores compactos

Por analogía con [17, Lemma 8.1], obtenemos el siguiente resultado de compacidad.

Lema 2.3.1. *Para un dominio poligonal acotado U y cualquier función $a \in C(\overline{U})$, los conmutadores $aB_U - B_U aI$ y $a\widetilde{B}_U - \widetilde{B}_U aI$ son compactos en el espacio $L^2(U)$.*

De acuerdo a [33], un operador $A \in \mathcal{B}(L^2(U))$ es llamado un *operador de tipo local* si los conmutadores $cA - AcI$ son compactos para todo $c \in C(\overline{U})$. Así, por el Lema 2.3.1, los operadores B_U, $\widetilde{B}_U$, y entonces todos los operadores en el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : a \in PC(\mathfrak{L})\}$ son de tipo local.

Denotaremos por Λ_U al conjunto de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^2(U))$. Es fácil ver que Λ_U es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}$, y $\mathfrak{B}_U \subset \Lambda_U$.

Repitiendo literalmente la prueba de [18, Lemma 2.6], obtenemos lo siguiente.

Lema 2.3.2. *Para un dominio poligonal acotado $U \subset \mathbb{C}$, el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, dada por* (2.30)*, contiene a todos los operadores que son compactos en el espacio $L^2(U)$.*

2.3.3 Primera aplicación del principio local de Allan-Douglas

Por el Lema 2.3.2, el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$ contiene al ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(U))$ de todos los operadores compactos en el álgebra C^* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(U))$. Entonces, el álgebra C^* cociente $\mathfrak{B}_U^\pi := \mathfrak{B}_U/\mathcal{K}$ está bien definida. Para obtener un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$, necesitamos estudiar la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}$ en el álgebra C^* cociente $\mathfrak{B}_U^\pi$. Para terminar esto, aplicaremos el principio local de Allan-Douglas al álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$.

Del Lema 2.3.1 se sigue que $\mathcal{Z}^\pi := \{cI + \mathcal{K} : c \in C(\overline{U})\}$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$. Así, el álgebra C^* conmutativa $\mathcal{Z}^\pi$ es (isométricamente) isomorfa-* al álgebra C^* $C(\overline{U})$, y entonces el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}^\pi$ puede identificarse con $\overline{U}$. Para todo punto $z \in \overline{U}$, con J_z^π denotaremos el ideal bilátero cerrado del álgebra C^* cociente $\Lambda_U^\pi := \Lambda_U/\mathcal{K}$ generada por el ideal maximal

$$I_z^\pi := \{cI + \mathcal{K} : \ c \in C(\overline{U}),\ c(z) = 0\} \subset \mathcal{Z}^\pi.$$

Por [3, Proposition 8.6] y [31, Proposition 2.2.5], el ideal J_z^π tiene la forma

$$J_z^\pi = \{(cA)^\pi : \ c \in C(\overline{U}), \ c(z) = 0, \ A \in \Lambda_U\}. \tag{2.31}$$

Luego, con toda $z \in \overline{U}$ asociamos el álgebra C^* cociente $(\Lambda_U)_z^\pi := \Lambda_U^\pi / J_z^\pi$.

El principio local de Allan-Douglas, dado por el Teorema 1.1.1, implica el siguiente criterio de Fredholm.

Teorema 2.3.1. *Un operador $A \in \mathfrak{B}_U$ es Fredholm en el espacio $L^2(U)$, si y solo si, para toda $z \in \overline{U}$ la clase lateral $A_z^\pi := A^\pi + J_z^\pi$ es invertible en el álgebra C^* cociente $(\Lambda_U)_z^\pi$.*

El conjunto $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi := \{A_z^\pi : A \in \mathfrak{B}_U\}$ es una subálgebra C^* de $(\Lambda_U)_z^\pi$ (ver, por ejemplo, [5, 1.26(g)]), y entonces una clase lateral A_z^π, asociada con $A \in \mathfrak{B}_U$, es invertible en las álgebras C^* $(\Lambda_U)_z^\pi$ y $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$, solo simultáneamente.

Decimos que las clases laterales $A^\pi, B^\pi \in \mathfrak{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes en un punto $z \in \overline{U}$, si $A^\pi - B^\pi \in J_z^\pi$, y en ese caso escribiremos $A^\pi \stackrel{z}{\sim} B^\pi$.

Similarmente a [18, Lemma 3.3], obtenemos lo siguiente.

Lema 2.3.3. *Las clases laterales B_U^π y $\widetilde{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes a cero en todo punto $z \in U$.*

2.4 Estudio de Fredholm del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

2.4.1 Caracterización de las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$

Vamos a caracterizar a las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ $(z \in \overline{U})$, donde $\overline{U} = U \cup \partial U$ es la cerradura extendida de U y ∂U es la frontera extendida de U.

Para algunos puntos $z \in \overline{U}$, necesitamos el siguiente lema simple.

Lema 2.4.1. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, con unidad, generada por idempotentes no nulos P_i $(i = 1, 2, ..., n)$, tales que $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ para $i, j = 1, 2, ..., n$ y $P_1 + \cdots P_n = I$, entonces el álgebra C^* $\mathcal{A}$ tiene la forma*

$$\text{álg}\,\{P_1, ..., P_n\} = \{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n : \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}$$

y el mapeo

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \mapsto \left[\lambda_j\right]_{j=1}^n$$

es un isomorfismo de álgebras C^*, del álgebra C^* álg$\{P_1, ..., P_n\}$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^n$.

Si dos álgebras C^* $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son (isométricamente) isomorfas-*, escribiremos $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$.

Teorema 2.4.1. *Para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, dada por* (2.30)*, y cualquier punto $z \in \overline{U}$, se cumple lo siguiente:*

(i) si $z \in U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathbb{C}$;

(ii) si $z \in U \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathbb{C}^{n_z}$, donde $n_z \in \mathbb{N}$ está dada por la condición $(\mathfrak{L}1)$;

(iii) si $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{C})$, entonces $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathbb{C}^3$;

(iv) si $z \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong$ álg$\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$;

(v) si $z \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} :=$ álg$\left\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} :\ a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\right\}$, donde $\mathfrak{L}_{\omega_z} \subset \mathbb{K}_{\alpha_z}$ es la unión finita de rayos asociados con la tupla $\omega_z := (\theta_0, \ldots, \theta_{n_z})$ en vista de $(\mathfrak{L}2)$, y $\alpha_z = 1$ si $z \in \partial U \setminus \mathfrak{C}$.

Demostración. (i) Sea $z \in U \setminus \mathfrak{L}$. Si $a \in PC(\mathfrak{L})$, entonces $(aI)^\pi \overset{z}{\sim} a(z)I^\pi$ porque la función a es continua en z. Del Lema 2.3.3, se sigue que $B_U^\pi \overset{z}{\sim} 0$, $\widetilde{B}_U^\pi \overset{z}{\sim} 0$. Entonces, los generadores del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ tienen la forma $(aI)_z^\pi$, y así el mapeo, dado por $(aI)_z^\pi \mapsto a(z)$ para $a \in PC(\mathfrak{L})$, se extiende a un isomorfismo de álgebras C^* de $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Sea $z \in U \cap \mathfrak{L}$. De nuevo tenemos $B_U^\pi \overset{z}{\sim} 0$ y $\widetilde{B}_U^\pi \overset{z}{\sim} 0$. Sean $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ los números dados por la condición $(\mathfrak{L}1)$. Fijamos un disco $D(z, r)$ de radio $r \in (0, r_z)$ centrado en z. Por $(\mathfrak{L}1)$, $\mathfrak{L}$ divide a $D(z, r)$ en n_z dominios D_l $(l = 1, 2, ..., n_z)$ que tienen a z como punto límite común. Fijamos $a \in PC(\mathfrak{L})$ y ponemos

$$a_l(z) := \lim_{\zeta \to z,\ \zeta \in D_l} a(\zeta) \quad (l = 1, 2, ..., n_z).$$

Sea χ_{D_l} la función característica del dominio D_l. Claramente, la función $g = a - \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)\chi_{D_l}$ es continua en el punto z si ponemos $g(z) = 0$ (note que los límites unilaterales de a dan sus valores en ambos lados de $\mathfrak{L}$). Entonces,

$$(aI)^\pi \overset{z}{\sim} \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)(\chi_{D_l} I)^\pi.$$

Así, el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es generada por n_z idempotentes no cero $(\chi_{D_l} I)_z^\pi$ tales que

$$\sum_{l=1}^{n_z} (\chi_{D_l} I)_z^\pi = I_z^\pi, \quad (\chi_{D_l} I)_z^\pi (\chi_{D_j} I)_z^\pi = \delta_{l,j} (\chi_{D_l} I)_z^\pi \quad (l, j = 1, 2, ..., n_z). \tag{2.32}$$

Como todos los idempotentes $(\chi_{D_l})_z^\pi$ son no cero y satisfacen (2.32), el Lema 2.4.1 implica que las álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ y $\mathbb{C}^{n_z}$ son isomorfas-*, y el isomorfismo de álgebras C^* está dado sobre los generadores $(aI)_z^\pi$ $(a \in PC(\mathfrak{L}))$ del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ por $(aI)_z^\pi \mapsto \big[a_l(z)\big]_{l=1}^{n_z}$.

(iii) Sea $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathcal{C})$. Tomamos el mapeo conforme de Schwarz-Christoffel $\beta_z : \Pi \to U$ tal que $\beta_z(0) = z$. Entonces $\beta_z'(0) \neq 0$. Haciendo uso del operador isométrico

$$W_{\beta_z} : L^2(U) \to L^2(\Pi), \quad f \mapsto \beta_z'(f \circ \beta_z),$$

deducimos de la Proposición 1.0.1, que

$$W_{\beta_z}(aI)W_{\beta_z}^{-1} = (a \circ \beta_z)I, \quad W_{\beta_z} B_U W_{\beta_z}^{-1} = B_\Pi, \quad W_{\beta_z} \widetilde{B}_U W_{\beta_z}^{-1} = c_z \widetilde{B}_\Pi c_z^{-1} I, \tag{2.33}$$

donde $c_z := \beta_z' / \overline{\beta_z'}$.

Fijamos $A \in \mathfrak{B}_U$. Si la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es invertible, entonces, en vista de (2.31), existe un operador $B \in \mathfrak{B}_U$, operadores $D_1, D_2 \in \Lambda_U$, operadores $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(L^2(U))$ y funciones $c_1, c_2 \in C(\overline{U})$ tales que $c_1(z) = c_2(z) = 0$ y

$$BA = I + c_1 D_1 + K_1, \quad AB = I + c_2 D_2 + K_2.$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} (W_{\beta_z} B W_{\beta_z}^{-1})(W_{\beta_z} A W_{\beta_z}^{-1}) &= I + (c_1 \circ \beta_z)\widetilde{D}_1 + \widetilde{K}_1, \\ (W_{\beta_z} A W_{\beta_z}^{-1})(W_{\beta_z} B W_{\beta_z}^{-1}) &= I + (c_2 \circ \beta_z)\widetilde{D}_2 + \widetilde{K}_2, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2 \in \mathcal{K}(L^2(\Pi))$ y $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2 \in W_{\beta_z}\Lambda_U W_{\beta_z}^{-1}$. Para constantes $k>0$, introducimos los operadores unitarios de dilatación

$$U_k : L^2(\Pi) \to L^2(\Pi), \quad (U_k f)(w) = kf(kw) \ \text{ para toda } \ w \in \Pi. \tag{2.35}$$

Entonces, en vista de (1.4) y la igualdad $\text{s-lím}_{k\to 0}(U_k(c_z I)U_k^{-1}) = (\beta_z'(0)/\overline{\beta_z'(0)})I$, inferimos para los generadores (2.33) del álgebra C^* $W_{\beta_z}\mathfrak{B}_U W_{\beta_z}^{-1} \subset \mathcal{B}(L^2(\Pi))$ que

$$\operatorname*{s-lím}_{k\to 0}(U_k((a\circ\beta_z)I)U_k^{-1}) = a(z)I,$$
$$\operatorname*{s-lím}_{k\to 0}(U_k B_\Pi U_k^{-1}) = B_\Pi, \quad \operatorname*{s-lím}_{k\to 0}(U_k(c_z\widetilde{B}_\Pi\overline{c_z}I)U_k^{-1}) = \widetilde{B}_\Pi.$$

Luego, para toda $A \in \mathfrak{B}_U$ y toda $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathcal{C})$ existe el límite fuerte

$$A_z := \operatorname*{s-lím}_{k\to 0}(U_k(W_{\beta_z}AW_{\beta_z}^{-1})U_k^{-1}) \in \text{álg}\,\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}. \tag{2.36}$$

Aplicando ahora [18, Proposition 7.5], deducimos, de (2.34), que $B_zA_z = I$ y $A_zB_z = I$. Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ implica la invertibilidad del operador $A_z \in \text{álg}\,\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$.

Por otro lado, la invertibilidad del operador $A_z \in \text{álg}\,\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$, asociado con un operador $A \in \mathfrak{B}_U$, implica la invertibilidad del operador

$$W_{\beta_z}^{-1}A_zW_{\beta_z} \in \widehat{\mathfrak{B}}_U := \text{álg}\,\{I, B_U, d_z\widetilde{B}_U d_z^{-1}I\},$$

donde $d_z := (\beta_z^{-1})'/\overline{(\beta_z^{-1})'}$. Como $(d_zI)^\pi \overset{z}{\sim} (\overline{\beta_z'(0)}/\beta_z'(0))I^\pi$, entonces $(d_z\widetilde{B}_Ud_z^{-1}I)^\pi \overset{z}{\sim} \widetilde{B}_U^\pi$, y como $(aI)^\pi \overset{z}{\sim} a(z)I^\pi$ para toda $a \in PC(\mathfrak{L})$, concluimos que las álgebras C^* cociente $(\widehat{\mathfrak{B}}_U)_z^\pi$ y $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ coinciden. Consecuentemente, la invertibilidad del operador $W_{\beta_z}^{-1}A_zW_{\beta_z} \in \widehat{\mathfrak{B}}_U$ implica la invertibilidad de la clase lateral $(W_{\beta_z}^{-1}A_zW_{\beta_z})_z^\pi = A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$.

Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$, para $A \in \mathfrak{B}_U$, es equivalente a la invertibilidad del operador $A_z \in \text{álg}\,\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ dado por (2.36). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \to \text{álg}\,\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$, dado sobre los generadores del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ por

$$(aI)_z^\pi \mapsto a(z)I, \quad (B_U)_z^\pi \mapsto B_\Pi, \quad (\widetilde{B}_U)_z^\pi \mapsto \widetilde{B}_\Pi,$$

es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* álg $\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$. Finalmente, el álgebra C^* álg $\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ es generada por las tres proyecciones, no cero y ortogonales dos a dos, $B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi$ e $I - B_\Pi - \widetilde{B}_\Pi$ (ver, por ejemplo, [40, Theorem 3.3.5]), el cual, en vista de Lema 2.4.1, implica el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathbb{C}^3$.

(iv) Sea ahora $z \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{L}$ una esquina de apertura $\pi\alpha_z$. Consideremos el mapeo conforme $\gamma_z : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$, donde $\mathbb{K}_{\alpha_z} = \big\{ z = re^{i\theta} : \ r > 0, \ \theta \in (0, \pi\alpha_z) \big\}$. Claramente, $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1}$, donde el mapeo conforme $\phi_\alpha : \Pi \to \mathbb{K}_\alpha$ está dado por $\phi_\alpha(w) = w^\alpha$ para $\alpha \in (0, 2]$ y $w \in \Pi$, $\beta_z : \Pi \to U$ es el mapeo conforme de Schwarz-Christoffel tal que $\beta_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$. Tomando el operador isométrico

$$W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad f \mapsto \gamma_z'(f \circ \gamma_z), \tag{2.37}$$

se deduce, de la Proposición 1.0.1, que

$$W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a \circ \gamma_z)I, \ \ W_{\gamma_z} B_U W_{\gamma_z}^{-1} = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \ \ W_{\gamma_z} \widetilde{B}_U W_{\gamma_z}^{-1} = c_z \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} c_z^{-1} I, \tag{2.38}$$

donde ahora $c_z := \gamma_z' / \overline{\gamma_z'}$. Aplicando los operadores unitarios de dilatación U_k, dados por (2.35) y considerados ahora en el espacio $L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})$, y usando la Proposición 1.0.1 de nuevo, inferimos de (2.38), en vista de la continuidad de los coeficientes a en el punto z, que

$$\begin{gathered}
\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0} \big(U_k(c_z I) U_k^{-1} \big) = (\gamma_z'(0)/\overline{\gamma_z'(0)})I, \quad \operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0} \big(U_k((a\circ\gamma_z)I) U_k^{-1} \big) = a(z)I, \\
\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0} \big(U_k B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} U_k^{-1} \big) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad \operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0} \big(U_k(c_z \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \overline{c_z} I) U_k^{-1} \big) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}.
\end{gathered}$$

Entonces, por analogía con parte (iii), inferimos que el mapeo

$$(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \to \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\},$$

dado sobre los generadores del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ por

$$(aI)_z^\pi \mapsto a(z)I, \ \ (B_U)_z^\pi \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \ \ (\widetilde{B}_U)_z^\pi \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

es un isomorfismo de álgebras C^* de $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* álg $\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$, lo cual completa la prueba de la parte (iv).

(v) Finalmente, sea $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$. Consideraremos a z como una esquina de apertura $\pi\alpha_z$, donde α_z puede tomar el valor de 1. Por $(\mathfrak{L}2)$, asociamos la tupla $\omega_z = (\theta_0, \dots, \theta_{n_z})$ con la unión finita $\mathfrak{L}_z \subset U$ de segmentos de línea recta que comienzan en z. Siguiendo la parte (iv), consideramos el mapeo conforme $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1} : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$, y calculamos los límites fuertes s-lím$_{k\to 0}(U_k W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1})$ para los generadores A del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, donde el operador isométrico de desplazamiento $W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ y los operadores unitarios de dilatación $U_k \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$ están dados por (2.37) y (2.35), respectivamente. Entonces, por analogía con parte (iv), obtenemos

$$\underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k W_{\gamma_z}(aI) W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1}\right) = a_z I,$$
$$\underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k W_{\gamma_z} B_U W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1}\right) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad \underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k W_{\gamma_z} \widetilde{B}_U W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1}\right) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

donde a_z es una función constante a trozos en $\mathbb{K}_{\alpha_z}$, la cual está definida como sigue.

Elegimos una vecindad V_z de z que satisfaga la condición ($\mathfrak{L}2$) impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z) = \bigcup_{l=1}^{n_z} D_l$, donde $n_z - 1$ es el número de segmentos de línea recta en $\mathfrak{L}_z$ con punto final z y D_l son las componentes conexas de $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z)$. Luego, $\widetilde{\mathfrak{L}}_z := \gamma_z^{-1}(\mathfrak{L}_z)$ es la unión de $n_z - 1$ arcos suaves en $\mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$ que emanan del origen y tienen en este punto tangentes que contienen a los rayos $\mathcal{L}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n_z - 1$), asociados con la tupla ω_z. Sea $\mathfrak{L}_{\omega_z}$ la unión de estos rayos $\mathcal{L}_j$ en $\mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$. Consecuentemente,

$$\gamma_z^{-1}(V_z \cap U) \setminus \widetilde{\mathfrak{L}}_z = \bigcup_{l=1}^{n_z} \widetilde{R}_l, \quad \mathbb{K}_{\alpha_z} \setminus \mathfrak{L}_{\omega_z} = \bigcup_{l=1}^{n_z} R_l,$$

donde $\widetilde{R}_l := \gamma_z^{-1}(D_l) \subset \mathbb{K}_{\alpha_z}$, y R_l son sectores abiertos de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$ con vértice en el origen, el cual corresponde a los dominios $\widetilde{R}_l$ (los conjuntos D_l, $\widetilde{R}_l$ y R_l son numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj). Claramente, los sectores R_l tienen ángulos internos $\theta_l - \theta_{l-1}$, donde $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n_z-1} < \theta_{n_z} = \pi\alpha_z$. Con $\chi_{\widetilde{R}_l}$ y χ_{R_l}, denotamos a las funciones características de los conjuntos $\widetilde{R}_l$ y R_l, respectivamente.

Además, $W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a \circ \gamma_z)I$. Como la restricción de la función $a \circ \gamma_z$ al conjunto $\widetilde{V}_z := \gamma_z^{-1}(V_z \cap U)$ está dada por

$$(a \circ \gamma_z)|_{\widetilde{V}_z} = \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)\chi_{\widetilde{R}_l} + \varepsilon(\cdot), \quad a_l(z) = \lim_{\zeta\to z,\ \zeta\in D_l} a(\zeta) \quad (l = 1, 2, ..., n_z), \tag{2.39}$$

con $\lim_{\xi\to 0} \varepsilon(\xi) = 0$, y como $\underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k \chi_{\widetilde{R}_l} U_k^{-1}\right) = \chi_{R_l} I$ para toda l, concluimos que

$$\underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k((a \circ \gamma_z)I)U_k^{-1}\right) = a_z I,$$

donde la función $a_z = \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)\chi_{R_l}$, con límites $a_l(z)$ dados por (2.39), está en $\mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})$.

Recíprocamente, por [18, Lemmas 5.1, 6.2], existe un mapeo cuasiconforme a trozos y biyectivo δ_z de $\overline{\Pi} := \Pi \cup \partial\Pi$ sobre sí mismo, tal que $\chi_{\widetilde{R}_l} \circ \phi_{\alpha_z} \circ \delta_z = \chi_{R_l} \circ \phi_{\alpha_z}$ para toda l, el mapeo cuasiconforme a trozos y biyectivo $\lambda_z = \beta_z \circ \delta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1} : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$, con Jacobiano $\mathcal{J}_{\lambda_z} > 0$, da el operador unitario $\widehat{W}_{\lambda_z} f = \mathcal{J}_{\lambda_z}^{1/2}(f \circ \lambda_z)$, y las clases laterales $(\widehat{W}_{\lambda_z}^{-1}(a_z I)\widehat{W}_{\lambda_z} - aI)^\pi$, $(\widehat{W}_{\lambda_z}^{-1} B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \widehat{W}_{\lambda_z} - B_U)^\pi$, $(\widehat{W}_{\lambda_z}^{-1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \widehat{W}_{\lambda_z} - \widetilde{B}_U)^\pi$ pertenecen al ideal J_z^π. Por lo tanto, en analogía con las partes (iii) y (iv), el mapeo $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \to \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\}$, dado sobre los generadores del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ por $(aI)_z^\pi \mapsto a_z I$, $(B_U)_z^\pi \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ y $(\widetilde{B}_U)_z^\pi \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, es un isomorfismo de álgebras C^*, del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, lo cual completa la prueba de la parte (v). ∎

2.4.2 Cálculo simbólico de Fredholm y un criterio de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

Para describir el siguiente teorema, consideramos los espacios de Hilbert no separables

$$l^2(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}), \quad l^2(\partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}), \mathbb{C}^2), \quad l^2((\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n_z})$$

que consisten, respectivamente, de las funciones vectoriales $f : z \mapsto \{f_k(z)\}_{k=1}^{n_z}$ definidas en el conjunto $\overline{U}$, $g : z \mapsto \{g_k(z)\}_{k=1}^{2}$ definidas en $\partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$, y $h : (z, \lambda) \mapsto \{h_k(z,\lambda)\}_{k=1}^{2n_z}$ definidas en $(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}}$, donde estas funciones vectoriales tienen conjuntos a lo más numerables de valores no nulos y están dotados con las normas

$$\|f\| := \left(\sum_{z \in \overline{U}} \sum_{k=1}^{n_z} |f_{z,k}(\xi)|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|g\| := \left(\sum_{z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})} \sum_{k=1}^{2} |g_k(z)|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|h\| := \left(\sum_{(z,\lambda) \in (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}}} \sum_{k=1}^{2n_z} |h_k(z,\lambda)|^2 \right)^{1/2}.$$

Con el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, asociamos el álgebra C^*

$$\mathfrak{D} := \left(\bigoplus_{z \in \overline{U}} \mathbb{C}^{n_z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})} \mathbb{C}^2 \right) \oplus \left(\bigoplus_{(z,\lambda) \in (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z} \right)$$

de los operadores lineales acotados que actúan sobre el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} := l^2\big(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}\big) \oplus l^2\big(\partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}),\ \mathbb{C}^2\big) \oplus l^2\big((\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big),$$

donde los operadores $A \in \mathfrak{D}$ actúan en los subespacios de $\mathcal{H}$ de la siguiente manera.

Un operador $A \in \bigoplus_{z\in\overline{U}} \mathbb{C}^{n_z}$ que actúa en el espacio $l^2\big(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}\big)$ es de la forma $A = \bigoplus_{z\in\overline{U}} A_z$, donde A_z son operadores de multiplicación en $\mathbb{C}^{n_z}$ por los vectores $A_z = \{A_{z,k}\}_{k=1}^{n_z} \in \mathbb{C}^{n_z}$ dotados con la norma $\|A_z\| = \max\{|A_{z,k}| : k = 1, 2, \dots, n_z\}$ y la multiplicación de dos vectores en $\mathbb{C}^{n_z}$, es entrada a entrada. Así, A actúa sobre funciones vectoriales $f \in l^2\big(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}\big)$ con valores en $\mathbb{C}^{n_z}$ por medio de la regla: para toda $z \in \overline{U}$,

$$(Af)(z) := A_z f(z) \in \mathbb{C}^{n_z}.$$

Un operador $A \in \bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} \mathbb{C}^2$ que actúa en el espacio $l^2\big(\partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}),\ \mathbb{C}^2\big)$ tiene la forma $A = \bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} A_z$, donde A_z son operadores de multiplicación por vectores $A_z = \{A_{z,k}\}_{k=1}^{2} \in \mathbb{C}^2$ con la norma $\|A_z\| = \max\{|A_{z,1}|, |A_{z,2}|\}$; y A actúa en funciones vectoriales $g \in l^2\big(\partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}),\ \mathbb{C}^2\big)$ con la regla:

$$(Af)(z) := A_z g(z) \in \mathbb{C}^2 \ \text{ para toda } \ z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}).$$

Finalmente, un operador $A \in \bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ que actúa en el espacio $l^2\big((\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)$ es de la forma $A = \bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} A_{z,\lambda}$, donde $A_{z,\lambda}$ son operadores de multiplicación por matrices $A_{z,\lambda} \in \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$, y A actúa en funciones vectoriales $f \in l^2\big((\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)$ con valores en $\mathbb{C}^{2n_z}$ por medio de la regla: para toda $(z, \lambda) \in (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}}$,

$$[(Af)](z, \lambda) := A_{z,\lambda} f(z, \lambda) \in \mathbb{C}^{2n_z}.$$

Los Teoremas 2.4.1, 2.2.2 y 2.2.3 dan la descripción completa de las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ para todos los puntos $z \in \overline{U}$, donde distinguimos el punto izquierdo z_- y el punto derecho z_+ de la frontera extendida ∂U, la cual está relacionada con los puntos z en la intersección de los cortes y la frontera usual de U. Combinando los teoremas mencionados con el Teorema 2.3.1, obtenemos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.4.2. *Para un dominio poligonal acotado y simplemente conexo U, el álgebra C^* cociente*

$$\mathfrak{B}_U^\pi := \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \ a \in PC(\mathfrak{L})\}/\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(L^2(U))/\mathcal{K}$$

es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$ del álgebra C^*

$$\mathfrak{D} = \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \mathbb{C}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} \mathbb{C}^2\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\Big), \tag{2.40}$$

de todos los operadores lineales acotados que actúan sobre el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} := l^2\big(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}\big) \oplus l^2\big(\partial U \setminus (\mathcal{C}\cup\mathcal{D}),\ \mathbb{C}^2\big) \oplus l^2\big((\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big),$$

y el isomorfismo correspondiente

$$\Psi = \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \Psi_z^0\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} \Psi_z\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}\Big) \tag{2.41}$$

está dado sobre los generadores del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$, por

$$\begin{aligned}
\Psi((aI)^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \big[a_l(z)\big]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} \big(a(z), a(z)\big)\Big) \\
&\oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \text{diag}\big\{a_l(z)I_2\big\}_{l=1}^{n_z}\Big),\ \text{para } a \in PC(\mathfrak{L}) \\
\Psi(B_U^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} [0]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} (1,0)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} M_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda)\Big), \\
\Psi(\widetilde{B}_U^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} [0]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} (0,1)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \widetilde{M}_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda)\Big),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

donde $a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, las matrices $M_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda), \widetilde{M}_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$, para toda $z \in \mathcal{D}$ y toda $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ están definidas por (2.21)–(2.24), mientras que para toda $z \in \mathcal{C}\setminus\mathfrak{L}$ y toda $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, las matrices $M_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda) := M_{\alpha_z}(\lambda)$ y $\widetilde{M}_{\alpha_z,\omega_z}(\lambda) := \widetilde{M}_{\alpha_z}(\lambda)$ están dadas por (2.29) con $\alpha = \alpha_z$, n_z es el número de componentes conexas D_l del conjunto $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L})$ para una vecindad suficientemente pequeña V_z de un punto $z \in \overline{U}$, $\pi\alpha_z \in (0, 2\pi]$ es el ángulo interno de U en un punto $z \in \partial U$, ω_z es la tupla relacionada a un punto $z \in \mathcal{D}$, y

$$a_l(z) = \lim_{\zeta\to z,\ \zeta\in D_l} a(\zeta) \quad (l = 1, 2, ..., n_z).$$

Un operador $A \in \mathfrak{B}_U$ es Fredholm en el espacio $L^2(U)$, si y solo si, su símbolo $\Psi(A^\pi)$ es invertible en el álgebra C^* (2.40), es decir, si

$$[\Psi_z^0(A^\pi)]_l \neq 0, \quad \text{para toda} \quad z \in \overline{U} \quad \text{y toda} \quad l = 1, 2, ..., n_z;$$
$$[\Psi_z(A^\pi)]_k \neq 0, \quad \text{para toda} \quad z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \quad \text{y toda} \quad k = 1, 2;$$
$$\det[\Psi_{z,\lambda}(A^\pi)] \neq 0, \quad \text{para toda} \quad z \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \quad \text{y toda} \quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}},$$

donde $[\Psi_z^0(A^\pi)]_l$ son las l-ésimas entradas del vector $\Psi_z^0(A^\pi)$ y $[\Psi_z(A^\pi)]_k$ son las k-ésimas entradas del vector $\Psi_z(A^\pi)$.

Demostración. Consideremos los homomorfismos $\Psi_z^0 : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{n_z}$, para $z \in \overline{U}$, $\Psi_z : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^2$ para $z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ y $\Psi_{z,\lambda} : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z}$ para $z \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ y $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, los cuales están dados por (2.42), donde $n_z = 1$, para $z \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{L}$.

Por Teorema 2.4.1(i),(ii), para cada $z \in U$, el mapeo $\Psi_z^0 : A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^{n_z}$, mientras que para toda $z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ del Teorema 2.4.1(iii) se sigue que el mapeo $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \Psi_z(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$. Además, por los Teoremas 2.4.1(iv) y 2.2.3, para toda $z \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{L}$ el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\alpha_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{S}_{\alpha_z}$ de $\mathbb{C} \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2\times 2})$, donde $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$ y Φ_{α_z} está dado por (2.28) con $\alpha = \alpha_z$, y este isomorfismo-* está dado por $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$. Finalmente, por los Teoremas 2.4.1(v) y 2.2.2, para toda $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$, el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\alpha_z,\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}^{n_z} \oplus \mathfrak{S}_{\alpha_z,\omega_z}$ de $\mathbb{C}^{n_z} \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z})$, donde ahora $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\}$ y Φ_{α_z,ω_z} está dado por (2.27) con $\alpha = \alpha_z$ y $\omega = \omega_z$, y el ismorfismo-* también está dado por $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$.

Luego, aplicando el Teorema 2.3.1, concluimos que el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^*

$$\left(\bigoplus_{z\in U} \mathbb{C}^{n_z}\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{D})} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z\in\mathcal{C}\cup\mathcal{D}} \left(\mathbb{C}^{n_z} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\right)\right)\right) \tag{2.43}$$

compuesta para toda $A^\pi \in \mathfrak{B}_U^\pi$ por los elementos $\Psi_z^0(A^\pi)$ para $z \in U$, $\Psi_z^0(A^\pi) \oplus \Psi_z(A^\pi)$ para $z \in \partial U \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ y $\Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$ para $z \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$.

Es fácil ver que la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^* (2.43) es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$ del álgebra C^* (2.40), donde el isomorfismo Ψ está dado por (2.41) y (2.42). Así, $\mathfrak{B}_U^\pi \cong \Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$, lo cual implica inmediatamente el correspondiente criterio de Fredholm. ■

Capítulo 3

Álgebras con datos continuos a trozos sobre dominios con esquinas Dini-suaves

En este capítulo estudiaremos el álgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \ a \in PC(\mathfrak{L})\} \subset \mathcal{B}(L^2(U)) \tag{3.1}$$

generada por la proyección de Bergman B_U, la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ y por los operadores de multiplicación aI ($a \in PC(\mathfrak{L})$), con $PC(\mathfrak{L})$ el conjunto de funciones continuas a trozos con discontinuidades en una curva Dini-suave a trozos $\mathfrak{L}$, donde U es un dominio simplemente conexo, acotado o no acotado, en el plano complejo $\mathbb{C}$, cuya frontera ∂U es Dini-suave a trozos y admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0, 2] \setminus \{1\}$. Distinguimos los puntos de ∂U, los cuales pueden ser aproximados por diferentes sectores curvilíneos de U, en particular, U puede admitir cortes. Construimos un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$ y establecemos un criterio de Fredholm para cualquier operador $A \in \mathfrak{B}_U$ en términos de sus símbolos. Para esto, aplicamos un cálculo simbólico de invertibilidad de [9] para el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_\alpha}$ de la forma (3.1), donde $U = \mathbb{K}_\alpha$ y los coeficientes son funciones constantes a trozos que admiten discontinuidades en un conjunto finito de rayos en $\mathbb{K}_\alpha$, usamos el principio local de Allan-Douglas, dado por la Proposición 1.1.1, y técnicas de operadores límite [29], y además, construimos y aplicamos mapeos cuasiconformes adecuados para estudiar las álgebras locales.

3.1 Álgebras C^* sobre dominios con esquinas Dini-suaves

3.1.1 El álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

Ahora consideramos a U un dominio acotado o no acotado y simplemente conexo en el plano complejo $\mathbb{C}$ con frontera Dini-suave a trozos ∂U que admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0, 2] \setminus \{1\}$. Así, ∞ puede pertenecer a ∂U pero no puede ser un punto interior de U. Nuevamente, distinguimos los puntos de ∂U que pueden ser aproximados por diferentes sectores curvilíneos de U. Por ejemplo, duplicamos las esquinas z que son intersecciones de cortes y la frontera usual de U, y distinguimos esos dos puntos, así como los dos lados de los cortes. Entonces, denotaremos por ∂U a la frontera extendida de U, en contraste con la frontera usual de U.

Sea f un mapeo conforme del disco unitario abierto $\mathbb{D}$ sobre el dominio U, el cual existe por el teorema del mapeo de Riemann. Como ∂U es una curva, entonces, de la Subsección 1.4.2, concluimos que f tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$. Como ya mencionamos, en general, esta extensión no es biyectiva y distinguiremos los puntos $f(z) \in \partial U$ para diferentes $z \in \mathbb{T}$. Así, la frontera extendida ∂U, con posibles autointersecciones, puede ser parametrizada de manera conforme como $\partial U = \{f(z) : z \in \mathbb{T}\}$.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto finito de la frontera extendida ∂U tal que para cada punto $z \in \mathcal{D}$ existe una unión finita $\mathfrak{L}_z$ de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos en $U \cup \{z\}$, con punto final z, que tienen tangentes unilaterales en cada uno de sus puntos. Entonces $\mathfrak{L} = \bigcup_{z\in\mathcal{D}}$ y $\mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$.

Nos centramos en estudiar la subálgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U :\; a \in PC(\mathfrak{L})\}, \tag{3.2}$$

de $\mathcal{B}(L^2(U))$ generada por la proyección de Bergman, la proyección de anti-Bergman y por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos con discontinuidades en $\mathfrak{L}$.

Ahora asumiremos que el conjunto $\mathfrak{L}$ satisface las condiciones:

($\mathfrak{L}$1) para cada punto $z \in U \cap \mathfrak{L}$, existen números $r_z > 0$ y $n_z \in \mathbb{N}$ tales que todo disco abierto $D(z, r)$, de radio $r \in (0, r_z)$ y centrado en z, es dividido por $\mathfrak{L}$ en n_z dominios, con z un punto límite en común;

($\mathfrak{L}$2) para cada punto $z \in (\partial U \cap \mathfrak{L}) \setminus \{\infty\}$ existe una vecindad V_z de z, tal que $\overline{V_z \cap \mathfrak{L}}$ es una unión de $n_z - 1$ arcos de Jordan Dini-suaves que tienen solo al punto z en común y forman en este punto ángulos, no cero y distintos dos a dos, $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n_z-1}$ con la semivencindad de $z \in \partial U$;

($\mathfrak{L}$3) si $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, entonces existe una vecindad V_∞ del punto $z = \infty$, tal que el conjunto $\{1/\overline{\zeta} : \zeta \in \overline{V_\infty \cap \mathfrak{L}}\}$ consiste de un número finito de arcos de Jordan Dini-suaves que tienen solo al origen como punto común y forman en este punto ángulos distintos dos a dos, no cero, $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n_\infty - 1}$ con la semivecindad de 0 en la curva $\{1/\overline{\zeta} : \zeta \in \partial U\}$.

Así, para una vecindad suficientemente pequeña V_z, de cualquier punto $z \in \overline{U}$, el conjunto $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L})$ consiste de $n_z \in \mathbb{N}$ componentes conexas cuyas cerraduras contienen a z. A cada punto $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$, le asociamos la tupla $\omega_z = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_z})$, donde $\theta_0 = 0$. Es inmediato, que si $z \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $n_z = 1$.

3.1.2 Segunda aplicación del principio local de Allan-Douglas

Similarmente a [17, Lemma 8.1], obtenemos el siguiente resultado de compacidad.

Lema 3.1.1. *Si f mapea a $\mathbb{D}$, de manera conforme, sobre un dominio $U \subset \mathbb{C}$ y se extiende por continuidad a $\overline{\mathbb{D}}$, entonces, para cualquier función $a \in C(\overline{U})$, donde $\overline{U} = f(\overline{\mathbb{D}})$, los conmutadores $aB_U - B_U aI$ y $a\widetilde{B}_U - \widetilde{B}_U aI$ son compactos en el espacio $L^2(U)$.*

Además, repitiendo la prueba de [18, Lemma 2.6], obtenemos.

Lema 3.1.2. *Si $U \subset \mathbb{C}$ es un dominio como se describió antes, entonces el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, definida en (3.2), contiene al ideal $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^2(U))$ de todos los operadores compactos en el álgebra C^* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^2(U))$.*

Nuevamente, para obtener un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$, estudiamos la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}$ en el álgebra cociente C^* $\mathfrak{B}_U^\pi = \mathfrak{B}_U/\mathcal{K}$, para lo cual aplicamos a $\mathfrak{B}_U^\pi$ el principio local de Allan-Douglas.

Con Λ_U denotamos al conjunto de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B}$, el cual sabemos que es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}$ y por Lema 3.1.1, $\mathfrak{B}_U \subset \Lambda_U$. Además, por el Lema 3.1.1, $\mathcal{Z}_U^\pi := \{(cI)^\pi : c \in C(\overline{U})\}$ es una subálgebra central del álgebra $\mathfrak{B}_U^\pi$. Al igual que antes, el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}_U^\pi$ puede ser identificado con $\overline{U}$. Para todo $z \in \overline{U}$, con $J_{z,U}^\pi$ denotamos el ideal bilátero cerrado del álgebra cociente C^* $\Lambda_U^\pi := \Lambda_U/\mathcal{K}$ generado por el ideal maximal

$$I_{z,U}^\pi := \{(cI)^\pi : \ c \in C(\overline{U}), \ c(z) = 0\} \subset \mathcal{Z}_U^\pi.$$

Por [3, Proposition 8.6] y [31, Proposition 2.2.5],

$$J_{z,U}^\pi = \{(cA)^\pi : \ c \in C(\overline{U}), \ c(z) = 0, \ A \in \Lambda_U\}. \tag{3.3}$$

El principio local de Allan-Douglas implica el siguiente criterio de Fredholm.

Teorema 3.1.1. *Un operador $A \in \mathfrak{B}_U$ es de Fredholm en el espacio $L^2(U)$, si y solo si, para todo $z \in \overline{U}$, la clase lateral $A_z^\pi := A^\pi + J_{z,U}^\pi$ es invertible en el álgebra cociente C^* $(\Lambda_U)_z^\pi := \Lambda_U^\pi / J_{z,U}^\pi$.*

El conjunto $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi := \{A_z^\pi : A \in \mathfrak{B}_U\}$ es una subálgebra C^* de $(\Lambda_U)_z^\pi$ y entonces cada clase lateral A_z^π, asociada con $A \in \mathfrak{B}_U$, es invertible en las álgebras C^* $(\Lambda_U)_z^\pi$ y $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$, solo simultáneamente.

Decimos que las clases laterales $A^\pi, B^\pi \in \mathfrak{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes en el punto $z \in \overline{U}$ si $A^\pi - B^\pi \in J_{z,U}^\pi$, y en este caso escribiremos $A^\pi \overset{z}{\sim} B^\pi$.

Así, obtenemos lo siguiente.

Lema 3.1.3. *Las clases laterales B_U^π y $\widetilde{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes a cero en todo punto $z \in U$.*

3.2 Mapeos cuasiconformes Dini-suaves

Para estudiar las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ construimos unos mapeos cuasiconformes especiales de los discos cerrados $\overline{\mathbb{D}}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ sobre sí mismos.

Es conocido (ver [1, Chapter 2]) que un homeomorfismo $\sigma = \sigma(z)$ de un dominio $U \subset \mathbb{C}$ sobre un dominio $V \subset \mathbb{C}$ es llamado *cuasiconforme* si σ tiene derivadas generalizadas localmente integrables

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} - i\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} + i\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) \tag{3.4}$$

que satisfacen la desigualdad

$$\left|\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\right| \le k\left|\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right| \ \text{ donde } \ k = \text{constante} < 1. \tag{3.5}$$

Las derivadas parciales (3.4) existen casi en todos lados en U, σ es diferenciable casi en todos lados, y el Jacobiano $J_\sigma = \left|\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\right|^2$ del mapeo $\sigma : U \to V$ es estrictamente positivo para casi toda $z \in U$.

Sea V_0 una vecindad del origen y sea $\overline{\mathbb{K}}_\alpha$ la cerradura del sector $\mathbb{K}_\alpha$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $V_0 \cap \overline{\mathbb{K}}_\alpha = \bigcup_{j=1}^n \mathbb{S}_j$, donde $n = n_0 - 1$ y los conjuntos cerrados

$$\mathbb{S}_j := \left\{z = re^{i\varphi} : \ (r,\varphi) \in [0, r_0] \times [\varphi_{j-1}, \varphi_j]\right\}, \tag{3.6}$$

con $0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \alpha\pi$, son sectores del disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ que tienen interiores disjuntos con exactamente un arco Dini-suave l_j (sin sus extremos) que emana del origen y tal que $V_0 \cap \mathfrak{L} = \bigcup_{j=1}^n l_j$. Si r_0 es suficientemente pequeño, podemos asumir que todo arco Dini-suave l_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ está dado por la ecuación

$$z = z_j(r) := re^{i(\theta_j + \eta_j(r))}, \quad r \in [0, r_0], \tag{3.7}$$

donde $\eta_j' \in C(0, r_0]$, $\theta_j + \eta_j(r) \in (\varphi_{j-1}, \varphi_j)$ para toda $r \in (0, r_0]$, y que

$$\lim_{r \to 0} z_j'(r) = e^{i\theta_j}. \tag{3.8}$$

Como

$$z_j'(r) = e^{i(\theta_j + \eta_j(r))}(1 + ir\eta_j'(r)) \tag{3.9}$$

debido a (3.7), y entonces $|z_j'(r)|^2 = 1 + (r\eta_j'(r))^2$; se sigue de (3.8) que

$$\lim_{r \to 0} r\eta_j'(r) = 0, \quad \lim_{r \to 0} \eta_j(r) = 0. \tag{3.10}$$

Así, en particular, $\eta_j \in C[0, r_0]$ y $\eta_j(0) = \lim_{r \to 0} \eta_j(r) = 0$.

De acuerdo a la Subsección 1.4.1, existe un módulo de continuidad ω de la clase de Dini que satisface la condición (v) y tal que

$$\omega_f(r) \leq A_f\, \omega(r) \text{ para toda } f \in \{z_j' : 1, 2, \ldots, n\} \text{ y toda } r \in [0, r_0], \tag{3.11}$$

donde $A_f \geq 0$ son constantes.

Lema 3.2.1. *Para toda $j = 1, 2, \ldots, n$ y $r_0 > 0$ suficientemente pequeña, las funciones f dadas por*

$$r \mapsto e^{i(\theta_j + \eta_j(r))}, \quad r \mapsto r\eta_j'(r), \quad r \mapsto \eta_j(r) \tag{3.12}$$

son Dini-continuas en $[0, r_0]$ y satisfacen (3.11) con z_j'.

Demostración. Fijamos a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por (3.7),

$$e^{i(\theta_j + \eta_j(r))} = \frac{z_j(r)}{r} = \int_0^1 z_j'(rt)dt,$$

lo cual implica que para toda $r_1, r_2 \in [0, r_0]$, por (3.11), que

$$\left|e^{i(\theta_j + \eta_j(r_1))} - e^{i(\theta_j + \eta_j(r_2))}\right| \leq \int_0^1 |z_j'(r_1 t) - z_j'(r_2 t)|dt \leq A_{z_j'}\omega(|r_1 - r_2|). \tag{3.13}$$

Aplicando (3.9), (3.11) y (3.13), deducimos que

$$\begin{aligned}
&|r_1\eta_j'(r_1) - r_2\eta_j'(r_2)| \leq \left|z_j'(r_1)e^{-i(\theta_j + \eta_j(r_1))} - z_j'(r_2)e^{-i(\theta_j + \eta_j(r_2))}\right| \\
&\leq |z_j'(r_1) - z_j'(r_2)| + |z_j'(r_2)|\left|e^{-i(\theta_j + \eta_j(r_1))} - e^{-i(\theta_j + \eta_j(r_2))}\right| \\
&\leq \Big(1 + \max\nolimits_{r \in [0, r_0]}|z_j'(r)|\Big)A_{z_j'}\omega(|r_1 - r_2|) \quad \text{para toda } r_1, r_2 \in [0, r_0].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Si $r_1, r_2 \in [0, r_0]$ y $|\eta_j(r_1) - \eta_j(r_2)| \leq \pi$, entonces

$$(2/\pi)|\eta_j(r_1) - \eta_j(r_2)| \leq \left|e^{-i(\theta_j+\eta_j(r_1))} - e^{-i(\theta_j+\eta_j(r_2))}\right| \leq |\eta_j(r_1) - \eta_j(r_2)|.$$

Por lo tanto, eligiendo $r_0 > 0$ tan pequeña que $|\eta_j(r_1)-\eta_j(r_2)| \leq \pi$ para toda $r_1, r_2 \in [0, r_0]$, concluimos que

$$|\eta_j(r_1) - \eta_j(r_2)| \leq (\pi/2)A_{z_j'}\omega(|r_1 - r_2|). \tag{3.15}$$

Las desigualdades (3.13)–(3.15) para las funciones (3.12) completan la prueba. ■

Lema 3.2.2. *Si los arcos Dini-suaves l_j, dados por* (3.7)*, satisfacen las condiciones de arriba, entonces para toda $r_0 > 0$ suficientemente pequeña existe un difeomorfismo cuasiconforme $\sigma : \overline{\mathbb{D}}_{r_0} \to \overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ tal que las derivadas parciales* (3.4) *son Dini-continuas en $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$,*

$$\sigma(z) = z, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z}(z) = 1, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \quad \textit{para toda} \quad z \in \partial\mathbb{K}_\alpha \cap \overline{\mathbb{D}}_{r_0}, \tag{3.16}$$

y

$$\sigma(\mathbb{S}_j) = \mathbb{S}_j, \quad \sigma(\gamma_j) = l_j \quad \textit{para toda} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.17}$$

donde $\gamma_j := \{z = re^{i\theta_j} : r \in [0, r_0]\}$ son segmentos de línea recta en los sectores $\mathbb{S}_j$ definidos por (3.6)*.*

Demostración. De manera similar a la prueba de [18, Lemma 5.1], para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, definimos las funciones diferenciables

$$\zeta_j(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{(\varphi - \varphi_{j-1})^2(3\theta_j - 2\varphi - \varphi_{j-1})}{(\theta_j - \varphi_{j-1})^3} & \text{si} \quad \varphi \in [\varphi_{j-1}, \theta_j], \\[2ex] \dfrac{(\varphi_j - \varphi)^2(2\varphi + \varphi_j - 3\theta_j)}{(\varphi_j - \theta_j)^3} & \text{si} \quad \varphi \in [\theta_j, \varphi_j], \end{cases} \tag{3.18}$$

con derivadas continuas

$$\zeta_j'(\varphi) = \begin{cases} 6\dfrac{(\varphi - \varphi_{j-1})(\theta_j - \varphi)}{(\theta_j - \varphi_{j-1})^3} & \text{si} \quad \varphi \in [\varphi_{j-1}, \theta_j], \\[2ex] -6\dfrac{(\varphi_j - \varphi)(\varphi - \theta_j)}{(\varphi_j - \theta_j)^3} & \text{si} \quad \varphi \in [\theta_j, \varphi_j]. \end{cases} \tag{3.19}$$

Por (3.18) y (3.19), para toda $j = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos

$$\zeta_j(\varphi_{j-1}) = \zeta_j(\varphi_j) = 0, \quad \zeta_j(\theta_j) = 1, \quad \zeta_j'(\varphi_{j-1}) = \zeta_j'(\varphi_j) = \zeta_j'(\theta_j) = 0. \tag{3.20}$$

Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, definimos las funciones ψ_j por

$$\psi_j(r, \varphi) := \varphi + \eta_j(r)\zeta_j(\varphi) \quad \text{para toda} \quad (r, \varphi) \in \mathbb{S}_j. \tag{3.21}$$

Se deduce de (3.20) y (3.21) con $(r, \varphi) \in \mathbb{S}_j$, que

$$\psi_j(r, \varphi_{j-1}) = \varphi_{j-1}, \quad \psi_j(r, \varphi_j) = \varphi_j, \quad \psi_j(r, \theta_j) = \theta_j + \eta_j(r). \tag{3.22}$$

Ahora introducimos el mapeo $\sigma : \overline{\mathbb{D}}_{r_0} \to \overline{\mathbb{D}}_{r_0}$, dado en coordenadas polares por

$$\sigma(re^{i\varphi}) := re^{i\psi(r,\varphi)} \quad \text{para toda} \quad (r, \varphi) \in [0, r_0] \times [0, 2\pi], \tag{3.23}$$

donde

$$\psi(r, \varphi) := \begin{cases} \psi_j(r, \varphi) & \text{si} \quad (r, \varphi) \in [0, r_0] \times [\varphi_{j-1}, \varphi_j], \ j = 1, 2, \ldots, n; \\ \varphi & \text{si} \quad (r, \varphi) \in [0, r_0] \times [\pi\alpha, 2\pi]. \end{cases} \tag{3.24}$$

Como $\eta_j(0) = 0$ por (3.10), de (3.24) y de las igualdades

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial r}(r, \varphi) = \eta_j'(r)\zeta_j(\varphi), \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi}(r, \varphi) = 1 + \eta_j(r)\zeta_j'(\varphi) \tag{3.25}$$

concluimos que existe r_0 suficientemente pequeño tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(r, \varphi) > 0 \quad \text{para toda} \quad (r, \varphi) \in [0, r_0] \times [0, 2\pi]. \tag{3.26}$$

Entonces, para cada $r \in [0, r_0)$, la función $\varphi \mapsto \psi(r, \varphi)$ es monótona creciente en $[0, 2\pi]$, y $\psi(r, \varphi_j) = \varphi_j$ para toda $j = 0, 1, \ldots, n$ debido a (3.22). Por lo tanto, el mapeo σ dado por (3.23) es un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ en sí mismo.

Luego, por (3.20) y (3.25), para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi_j}{\partial r}(r, \varphi_{j-1}) = \frac{\partial \psi_j}{\partial r}(r, \varphi_j) = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial r}(r, \theta_j) = \eta_j'(r), \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi}(r, \varphi_{j-1}) = \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi}(r, \varphi_j) = \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi}(r, \theta_j) = 1. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Así, inferimos de (3.24), (3.25) y (3.27) que

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \in C((0, r_0] \times [0, 2\pi]), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \in C([0, r_0] \times [0, 2\pi]). \tag{3.28}$$

Aplicando (3.4), (3.23) y (3.25), en analogía con [18, Lemma 5.1] inferimos que, para cada $(r,\varphi)\in\mathbb{S}_j$ y toda $j=1,2,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial z}&=2^{-1}e^{i(\psi(r,\varphi)-\varphi)}\Big(1+ir\frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(r,\varphi)\Big)\\&=2^{-1}e^{i\eta_j(r)\zeta_j(\varphi)}\big(2+ir\eta_j'(r)\zeta_j(\varphi)+\eta_j(r)\zeta_j'(\varphi)\big),\\\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}&=2^{-1}e^{i(\psi(r,\varphi)+\varphi)}\Big(1+ir\frac{\partial\psi}{\partial r}(r,\varphi)-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(r,\varphi)\Big)\\&=2^{-1}e^{i(\eta_j(r)\zeta_j(\varphi)+2\varphi)}\big(ir\eta_j'(r)\zeta_j(\varphi)-\eta_j(r)\zeta_j'(\varphi)\big),\end{aligned}\tag{3.29}$$

mientras que $\frac{\partial\sigma}{\partial z}=1$ y $\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}=0$ para toda $(r,\varphi)\in\mathbb{S}_0:=[0,r_0]\times[\pi\alpha,2\pi]$, donde $\zeta_j(\varphi)$ y $\zeta_j'(\varphi)$ están dadas por (3.18) y (3.19). De (3.28) y (3.29) vemos que $\frac{\partial\sigma}{\partial z},\ \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\in C(\overline{\mathbb{D}}_{r_0})$ y su Jacobiano es $J_\sigma=\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(r,\varphi)$. Si r_0 es suficientemente pequeño, entonces $J_\sigma>0$ por (3.26), y por lo tanto σ es un difeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ sobre sí mismo.

Para cada $j=1,2,\ldots,n$, deducimos de (3.18) y de (3.19) que

$$\begin{aligned}C&:=\text{máx}_{\varphi\in[\varphi_{j-1},\varphi_j]}|\zeta_j(\varphi)|=1,\\C_j&:=\text{máx}_{\varphi\in[\varphi_{j-1},\varphi_j]}|\zeta_j'(\varphi)=(3/2)\text{máx}\big\{(\theta_j-\varphi_{j-1})^{-1},(\varphi_j-\theta_j)^{-1}\big\},\\\widetilde{C}_j&:=\text{máx}_{\varphi\in[\varphi_{j-1},\varphi_j]}|\zeta_j''(\varphi)|=6\text{máx}\big\{(\theta_j-\varphi_{j-1})^{-2},(\varphi_j-\theta_j)^{-2}\big\}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Ahora definimos las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}&M_1:=\text{máx}_{j=1,2,\ldots,n}C_j,\quad \widetilde{M_1}:=\text{máx}_{j=1,2,\ldots,n}\widetilde{C}_j,\\&M_2:=\text{máx}\Big\{2,\text{máx}_{j=1,2,\ldots,n}\ \text{máx}_{(r,\varphi)\in\mathbb{S}_j}\big|2+ir\eta_j'(r)\zeta_j(\varphi)+\eta_j(r)\zeta_j'(\varphi)\big|\Big\}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Si $|\phi_1-\phi_2|\le\pi$, entonces

$$(2/\pi)|\phi_1-\phi_2|\le|e^{i\phi_1}-e^{i\phi_2}|\le|\phi_1-\phi_2|.\tag{3.32}$$

Si $|\phi_1-\phi_2|\le 1$, entonces de (3.32) y de la propiedad (v) del módulo de continuidad ω se deduce que

$$\frac{\omega(r)}{r}\le\frac{\omega(r|e^{i\phi_1}-e^{i\phi_2}|)}{r|e^{i\phi_1}-e^{i\phi_2}|},$$

lo cual implica, de (3.32), que

$$\omega(r)|\phi_1-\phi_2|\le(\pi/2)\omega(r)|e^{i\phi_1}-e^{i\phi_2}|\le(\pi/2)\omega(|re^{i\phi_1}-re^{i\phi_2}|).\tag{3.33}$$

Para toda $r \in [0, r_0]$ y toda $\phi_1, \phi_2 \in [\varphi_{j-1}, \varphi_j]$, de (3.29) inferimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_1) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_2) \\
&= 2^{-1}\big(e^{i\eta_j(r)\zeta_j(\phi_1)} - e^{i\eta_j(r)\zeta_j(\phi_2)}\big)\big(2 + ir\eta_j'(r)\zeta_j(\phi_1) + \eta_j(r)\zeta_j'(\phi_1)\big) \\
&\quad + 2^{-1}e^{i\eta_j(r)\zeta_j(\phi_2)}\big(ir\eta_j'(r)(\zeta_j(\phi_1) - \zeta_j(\phi_2)) + \eta_j(r)(\zeta_j'(\phi_1) - \zeta_j'(\phi_2))\big).
\end{aligned}$$

Aplicando ahora (3.11) a las funciones de Dini η_j y $\widetilde{\eta}_j : r \mapsto r\eta_j'(r)$ (ver Lema 3.2.1) y usando (3.30)–(3.31), inferimos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_1) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_2)\Big| \\
&\le 2^{-1}|\eta_j(r)|\,|\zeta_j(\phi_1) - \zeta_j(\phi_2)|\big|2 + ir\eta_j'(r)\zeta_j(\phi_1) + \eta_j(r)\zeta_j'(\phi_1)\big| \\
&\quad + 2^{-1}\big(|r\eta_j'(r)|\,|\zeta_j(\phi_1) - \zeta_j(\phi_2)| + |\eta_j(r)|\,|\zeta_j'(\phi_1) - \zeta_j'(\phi_2)|\big) \\
&\le \frac{1}{2}\big(A_{\eta_j}\omega(r)M_1|\phi_1 - \phi_2|M_2 + A_{\widetilde{\eta}_j}\omega(r)M_1|\phi_1 - \phi_2| + A_{\eta_j}\omega(r)\widetilde{M}_1|\phi_1 - \phi_2|\big) \\
&\le \widehat{C}_1\omega(r)|\phi_1 - \phi_2|, \quad \widehat{C}_1 := 2^{-1}\text{máx}_{\,j=1,2,\dots,n}\big(A_{\eta_j}M_1M_2 + A_{\widetilde{\eta}_j}M_1 + A_{\eta_j}\widetilde{M}_1\big).
\end{aligned}$$

Esta estimación es válida para toda $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi]$. En efecto, si, por ejemplo, $\phi_1 \in [\varphi_{j-1}, \varphi_j]$ y $\phi_2 \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}]$, inferimos que

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_1) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_2)\Big| &\le \Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_1) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\varphi_j)\Big| + \Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\varphi_j) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_2)\Big| \\
&\le \widehat{C}_1\omega(r)(|\phi_1 - \varphi_j| + |\varphi_j - \phi_2|) = \widehat{C}_1\omega(r)|\phi_1 - \phi_2|.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora (3.33), concluimos que para toda $r \in [0, r_0]$ y arbitrarias $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi]$ con $|\phi_1 - \phi_2| \le 1$, se satisface

$$\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_1) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(r,\phi_2)\Big| \le \widehat{C}_1\omega(r)|\phi_1 - \phi_2| \le \frac{\widehat{C}_1\pi}{2}\,\omega(|re^{i\phi_1} - re^{i\phi_2}|). \tag{3.34}$$

Análogamente, para cada $\varphi \in [\varphi_{j-1}, \varphi_j]$ y toda $r_1, r_2 \in [0, r_0]$, inferimos de (3.11) y

(3.29)–(3.31) que

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_1,\varphi)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_2,\varphi)\Big|\\
&\le 2^{-1}|\zeta_j(\varphi)|\,|\eta_j(r_1)-\eta_j(r_2)|\big|2+ir_1\eta_j'(r_1)\zeta_j(\varphi)+\eta_j(r_1)\zeta_j'(\varphi)\big|\\
&\quad+2^{-1}\big(|\zeta_j(\varphi)|\,|r_1\eta_j'(r_1)-r_2\eta_j'(r_2)|+|\zeta_j'(\varphi)|\,|\eta_j(r_1)-\eta_j(r_2)|\big)\\
&\le 2^{-1}\big(A_{\eta_j}\omega(|r_1-r_2|)M_2+A_{\widetilde{\eta}_j}\omega(|r_1-r_2|)+M_1A_{\eta_j}\omega(|r_1-r_2|)\big)\\
&\le \widehat{C}_2\omega(|r_1-r_2|),\quad \widehat{C}_2:=2^{-1}\text{máx}_{\,j=1,2,\dots,n}\big(A_{\eta_j}(M_1+M_2)+A_{\widetilde{\eta}_j}\big).
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Si $z_1=r_1e^{i\phi_1}$, $z_2=r_2e^{i\phi_2}$, $0\le r_1\le r_2\le r_0$ y $|\phi_1-\phi_2|\le 1$, entonces tenemos

$$|r_1e^{i\phi_1}-r_1e^{i\phi_2}|\le|z_1-z_2|,\quad |r_1e^{i\phi_2}-r_2e^{i\phi_2}|\le|z_1-z_2|.\tag{3.36}$$

Aplicando (3.34)–(3.36), inferimos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_1,\phi_1)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_2,\phi_2)\Big|\\
&\le\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_1,\phi_1)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_1,\phi_2)\Big|+\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_1,\phi_2)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(r_2,\phi_2)\Big|\\
&\le(\widehat{C}_1\pi/2)\omega(|r_1e^{i\phi_1}-r_1e^{i\phi_2}|)+\widehat{C}_2\omega(|r_1e^{i\phi_2}-r_2e^{i\phi_2}|)\\
&\le(\widehat{C}_1\pi/2+\widehat{C}_2)\omega(|z_1-z_2|)=:A\omega(|z_1-z_2|).
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Análogamente, de (3.29) concluimos que existe una constante $B>0$ para la cual

$$\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial\bar z}(r_1,\phi_1)-\frac{\partial\sigma}{\partial\bar z}(r_2,\phi_2)\Big|\le B\omega(|z_1-z_2|)\tag{3.38}$$

si $z_1=r_1e^{i\phi_1}$ y $z_2=r_2e^{i\phi_2}$ están en $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ y $|\phi_1-\phi_2|\le 1$.

Así, por (3.37) y (3.38), las derivadas parciales $\frac{\partial\sigma}{\partial z}(z)$ y $\frac{\partial\sigma}{\partial\bar z}(z)$ son Dini-continuas en $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$. Finalmente, de (3.21)–(3.24) y (3.29), concluimos que las relaciones (3.16) y (3.17) son ciertas. ■

3.3 Aplicación de los mapeos cuasiconformes Dini-suaves

Escribiremos $A\simeq B$ si $A-B$ es un operador compacto. Modificando la prueba de [26, Chapter VIII, Theorem 3.3] y de [25, Lemma 1.4], llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. *El operador $\widetilde{K}$, dado por*

$$(\widetilde{K}f)(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, f(z)\, dxdy \quad \text{para toda} \;\; f \in L^2(\mathbb{D}),$$

donde ω es un módulo de continuidad de la clase de Dini, es un operador compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sean $f \in L^2(\mathbb{D})$ y

$$\psi(w) := \int_{\mathbb{D}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, f(z)\, dxdy.$$

Entonces tenemos que

$$|\psi(w)| \leq \bigg(\int_{\mathbb{D}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, dxdy \bigg)^{1/2} \bigg(\int_{\mathbb{D}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, |f(z)|^2\, dxdy \bigg)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Tomando $z = x + iy$ y $w = \xi + i\eta$, y pasando a coordenadas polares $x = \xi + r\cos\varphi$, $y = \eta + r\,\mathrm{sen}\varphi$, deducimos que los valores

$$A(w) := \int_{\mathbb{D}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, dxdy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\varphi)} \frac{\omega(r)}{r^2}\, rdrd\varphi & \text{si} \;\; |w| < 1, \\ \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{r(\varphi)} \frac{\omega(r)}{r^2}\, rdrd\varphi & \text{si} \;\; |w| = 1, \end{cases}$$

donde $w \in \overline{\mathbb{D}}$ y $r(\varphi) \leq 2$, están acotados por $A := 2\pi \int_0^2 \frac{\omega(r)}{r} dr < \infty$. Entonces, de (3.39) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{D}}} |\psi(w)|^2 d\xi d\eta &\leq A \int_{\overline{\mathbb{D}}} \bigg(\int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, |f(z)|^2\, dxdy \bigg) d\xi d\eta \\ &\leq A \int_{\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|^2 \bigg(\int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, d\xi d\eta \bigg) dxdy \\ &\leq A^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{D})}, \end{aligned}$$

lo cual significa que el operador $\widetilde{K}$ es acotado en $L^2(\mathbb{D})$, y que $\|\widetilde{K}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))} \leq A$.

Para probar que el operador es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$, representamos al operador en la forma $\widetilde{K} = \widetilde{K}_\varepsilon + \widetilde{K}'_\varepsilon$, donde

$$\begin{aligned} (\widetilde{K}_\varepsilon f)(w) &:= \int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, \chi_{\overline{\mathbb{D}} \cap \mathbb{D}_\varepsilon(w)}(z) f(z)\, dxdy, \\ (\widetilde{K}'_\varepsilon f)(w) &:= \int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\, \chi_{\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(w)}(z) f(z)\, dxdy \end{aligned}$$

para toda $w \in \overline{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z-w| < \varepsilon\}$, y además, $\chi_{\overline{\mathbb{D}}\cap\mathbb{D}_\varepsilon(w)}$ y $\chi_{\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(w)}$ son las funciones características de los conjuntos $\overline{\mathbb{D}}\cap\mathbb{D}_\varepsilon(w)$ y $\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(w)$, respectivamente. El operador $\widetilde{K}'_\varepsilon$ es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$ porque la función $K'_\varepsilon(z,w) := \frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}\chi_{\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(w)}(z)$ es acotada en el conjunto $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$. Por otro lado, la norma del operador $\widetilde{K}_\varepsilon$ en el espacio $L^2(\mathbb{D})$ es acotado porque

$$\|\widetilde{K}_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))} \leq 2\pi \int_0^{2\varepsilon} \frac{\omega(r)}{r}\, dr,$$

y por lo tanto $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\widetilde{K}_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))} = 0$. Así, el operador $\widetilde{K}$ es el límite uniforme de los operadores compactos $\widetilde{K}'_\varepsilon \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))$ cuando $\varepsilon \to 0$, y entonces $\widetilde{K} \simeq 0$. ■

Ahora sea σ el difeomorfismo cuasiconforme dado por el Lema 3.2.2. La parte lineal de σ en el punto $w \in \overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ está definida por

$$\widehat{\sigma}_w(z) := \sigma(w) + \frac{\partial\sigma}{\partial z}(w)(z-w) + \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w)(\overline{z}-\overline{w}). \tag{3.40}$$

el Jacobiano J_σ del mapeo σ en el punto w puede ser escrito en la forma

$$J_\sigma(w) := |\beta_\sigma(w)|^2 - |\gamma_\sigma(w)|^2, \quad \beta_\sigma(w) := \frac{\partial\sigma}{\partial z}(w), \quad \gamma_\sigma(w) := \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w). \tag{3.41}$$

Si $r_0 > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $J_\sigma(w) > 0$, para toda $w \in \overline{\mathbb{D}}_{r_0}$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $J_\sigma > 0$ y, por lo tanto, es separado de cero en el disco cerrado unitario $\overline{\mathbb{D}}$. Tomamos $\widehat{W}_\sigma$, el operador unitario en $L^2(\mathbb{D})$, dado por

$$\widehat{W}_\sigma f = |J_\sigma|^{1/2}(f\circ\sigma) \quad \text{para toda} \quad f \in L^2(\mathbb{D}). \tag{3.42}$$

Ahora modificamos parcialmente la prueba de [18, Lemma 6.1], y obtenemos.

Lema 3.3.1. *Si σ es un difeomorfismo cuasiconforme del disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ sobre sí mismo con derivadas parciales, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ y $\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}$, Dini-continuas en $\overline{\mathbb{D}}$, y el Jacobiano* (3.41) *del mapeo σ es positivo en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces el operador*

$$\widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}} \widehat{W}_\sigma^{-1} - \frac{J_\sigma}{\beta_\sigma^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\sigma}{\beta_\sigma}\right)^{n-1}\left(S_{\mathbb{D}}\right)^n + \frac{\overline{\gamma_\sigma}}{\beta_\sigma} I \tag{3.43}$$

es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Por (3.42), $\widehat{W}_\sigma f = |J_\sigma|^{1/2} V_\sigma$, donde $V_\sigma \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))$ es el operador invertible dado por $f \mapsto f \circ \sigma$. De acuerdo a [25, Section 5] y siguiendo [18, Lemma 6.1], para una función $f \in L^2(\mathbb{D})$ y $w \in \mathbb{D}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\big[\big(V_\sigma S_{\mathbb{D}} V_\sigma^{-1}\big) f\big](w) &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}\setminus\widetilde{\mathbb{D}}_\varepsilon(w)} \frac{J_\sigma(z)}{\big(\sigma(z)-\sigma(w)\big)^2}\, f(z)\, dxdy \\ &= (Kf)(w) + (K_0 f)(w),\end{aligned} \tag{3.44}$$

donde $z = x + iy$, $\widetilde{\mathbb{D}}_\varepsilon(w) := \sigma^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(\sigma(w)))$, $\mathbb{D}_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} : \, |z-w| < \varepsilon\}$,

$$\begin{aligned}(Kf)(w) &:= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}\setminus\widetilde{\mathbb{D}}_\varepsilon(w)} K(z,w) f(z) dxdy, \\ (K_0 f)(w) &:= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_\sigma(w)}{\pi} \int_{\mathbb{D}\setminus\widetilde{\mathbb{D}}_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{(\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w))^2}\, dxdy,\end{aligned} \tag{3.45}$$

y

$$\begin{aligned}K(z,w) &:= \frac{J_\sigma(z)}{(\sigma(z)-\sigma(w))^2} - \frac{J_\sigma(w)}{(\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w))^2} \\ &= \frac{J_\sigma(z)-J_\sigma(w)}{(\sigma(z)-\sigma(w))^2} - J_\sigma(w)\bigg(\frac{1}{(\sigma(z)-\sigma(w))^2} - \frac{1}{(\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w))^2}\bigg).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Como σ es un difeomorfismo cuasiconforme de $\overline{\mathbb{D}}$ en sí mismo, entonces existen constantes positivas C_1, C_2 tales que, para toda $z, w \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\begin{aligned}C_1|z-w| &\le \big|\sigma(z)-\sigma(w)\big| \le C_2|z-w|, \\ C_1|z-w| &\le \big|\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w)\big| \le C_2|z-w|.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Por (3.37) y (3.38), existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|J_\sigma(z)-J_\sigma(w)| &= \left|\left(\left|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(z)\right|^2 - \left|\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(z)\right|^2\right) - \left(\left|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(w)\right|^2 - \left|\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w)\right|^2\right)\right| \\ &\le C_3\omega(|z-w|),\end{aligned}$$

lo cual, junto con (3.47), implica que

$$\frac{|J_\sigma(z)-J_\sigma(w)|}{(\sigma(z)-\sigma(w))^2} \le \frac{C_3\omega(|z-w|)}{C_1^2|z-w|^2}. \tag{3.48}$$

Por otro lado, inferimos de (3.37), (3.38) y (3.40), que

$$
\begin{aligned}
\big|\sigma(z)-\widehat{\sigma}_w(z)\big| &= \Big|\sigma(z)-\sigma(w)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(w)(z-w)-\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w)(\overline{z}-\overline{w})\Big|\\
&= \Big|\int_w^z\Big(\Big[\frac{\partial\sigma}{\partial z}(\zeta)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(w)\Big]d\zeta+\Big[\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(\zeta)-\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w)\Big]d\overline{\zeta}\Big)\Big|\\
&\le \int_w^z\Big(\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(\zeta)-\frac{\partial\sigma}{\partial z}(w)\Big|\,|d\zeta|+\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(\zeta)-\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(w)\Big|\,|d\overline{\zeta}|\Big)\\
&\le C_4\int_w^z\omega(|\zeta-w|)|d\zeta|\le C_4\omega(|z-w|)|z-w|,
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

donde C_4 es una constante positiva y las integrales son tomadas sobre los segmentos de línea recta que conectan a los puntos z y w en $\overline{\mathbb{D}}$. Por (3.47) y (3.49), tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{(\sigma(z)-\sigma(w))^2}-\frac{1}{(\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w))^2}\Big|\\
&=\frac{|\sigma(z)-\widehat{\sigma}_w(z)|\,|\sigma(z)-\sigma(w)+\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w)|}{|\sigma(z)-\sigma(w)|^2|\widehat{\sigma}_w(z)-\sigma(w)|^2}\\
&\le\frac{C_4\omega(|z-w|)|z-w|\,2C_2|z-w|}{(C_1^2|z-w|^2)^2}\le\frac{2C_2C_4}{C_1^4}\frac{\omega(|z-w|)}{|z-w|^2}.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Finalmente, combinando (3.46), (3.48) y (3.50), obtenemos la cota

$$
|K(z,w)|\le C\omega(|z-w|)|z-w|^{-2}. \tag{3.51}
$$

Para toda $\varepsilon>0$, existen números $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ tales que

$$
\mathbb{D}_{\varepsilon_1}(w)\subset\widetilde{\mathbb{D}}_\varepsilon(w)\subset\mathbb{D}_{\varepsilon_2}(w). \tag{3.52}
$$

En efecto: aplicando (3.47) y eligiendo los números $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ tales que

$$
0<\varepsilon_1<C_1\varepsilon\le C_2\varepsilon<\varepsilon_2,
$$

obtenemos las inclusiones

$$
\{\sigma(z):|z-w|<\varepsilon_1\}\subset\{\sigma(z):|\sigma(z)-\sigma(w)|<\varepsilon\}\subset\{\sigma(z):|z-w|<\varepsilon_2\},
$$

lo cual da (3.52).

Esto significa que las definiciones de la función $w\mapsto(Kf)(w)$, dadas por (3.45) y por

$$
(Kf)(w):=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(w)}K(z,w)f(z)dxdy\quad(w\in\overline{\mathbb{D}}),
$$

son equivalentes. Entonces, aplicando (3.51), concluimos del Teorema 3.3.1 que el operador K, dado por (3.45), es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$.

De manera similar a la prueba de [18, Lemma 6.1], inferimos que

$$K_0 = \frac{J_\sigma}{\beta_\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\gamma_\sigma}{\beta_\sigma}\Big)^{n-1} (S_{\mathbb{D}})^n - \frac{\overline{\gamma_\sigma}}{\beta_\sigma} I. \tag{3.53}$$

Finalmente, aplicamos (3.44) y obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}} \widehat{W}_\sigma^{-1} &= |J_\sigma|^{1/2} \big(V_\sigma S_{\mathbb{D}} V_\sigma^{-1}\big) |J_\sigma|^{-1/2} I \\ &= |J_\sigma|^{1/2} (K + K_0) |J_\sigma|^{-1/2} I, \end{aligned}$$

donde $K \simeq 0$ y $|J_\sigma|^{1/2} K_0 |J_\sigma|^{-1/2} I \simeq K_0$ por (3.53) y por la compacidad del conmutador $|J_\sigma|^{1/2} S_{\mathbb{D}} - S_{\mathbb{D}} |J_\sigma|^{1/2} I$ (ver [26, Theorem 7.1]). Por lo tanto, $\widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}} \widehat{W}_\sigma^{-1} \simeq K_0$, lo cual nos da la compacidad del operador (3.43). ■

En el siguiente resultado consideraremos al conjunto $\mathbb{D}_\alpha := \mathbb{D} \cap \mathbb{K}_\alpha$, y a $\overline{\mathbb{D}}_\alpha$ como la cerradura de $\mathbb{D}_\alpha$ en $\mathbb{C}$.

Lema 3.3.2. *Supongamos que $\alpha \in (0, 2] \setminus \{1\}$, σ_α es una biyección de $\overline{\mathbb{K}}_\alpha$ sobre sí mismo, tal que $\sigma_\alpha(z) = z$ para $z \in \overline{\mathbb{K}}_\alpha \setminus \overline{\mathbb{D}}_\alpha$, $\sigma_\alpha|_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha}$ es un difeomorfismo cuasiconforme de $\overline{\mathbb{D}}_\alpha$ sobre sí mismo, el Jacobiano J_{σ_α} es positivo y separado de cero, y*

$$\sigma_\alpha(z) = z, \quad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z) = 1, \quad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \qquad \textit{para toda} \ \ z \in \partial \mathbb{K}_\alpha. \tag{3.54}$$

Entonces, el mapeo $\sigma_1 = \phi_\alpha^{-1} \circ \sigma_\alpha \circ \phi_\alpha : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_1$, donde $\phi_\alpha(z) = z^\alpha$, posee todas las propiedades del mapeo σ_α para $\alpha = 1$.

Demostración. Como $\sigma_1(z) = (\sigma_\alpha(z^\alpha))^{1/\alpha - 1}$, deducimos de las propiedades de σ_α que $\sigma_1(z) = z$ para toda $z \in \overline{\mathbb{K}}_1 \setminus \overline{\mathbb{D}}_1$, σ_1 es un mapeo biyectivo de $\overline{\mathbb{D}}_1$ sobre sí mismo, y $\sigma_1(z) = z$ para toda $z \in \partial \mathbb{K}_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z) &= (\sigma_\alpha(z^\alpha))^{1/\alpha - 1} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z^\alpha) z^{\alpha - 1}, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \overline{z}}(z) &= (\sigma_\alpha(z^\alpha))^{1/\alpha - 1} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z^\alpha) \overline{z}^{\alpha - 1}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

de (3.54) deducimos que para toda $z \in \partial\mathbb{K}_1$,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z) = (\sigma_\alpha(z^\alpha))^{1/\alpha-1} z^{\alpha-1} = (z^\alpha)^{1/\alpha-1} z^{\alpha-1} = 1, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \overline{z}}(z) = 0.$$

Entonces, aplicando (3.55), tenemos que

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_1) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_2) = \Big(\frac{\sigma_\alpha(z_1^\alpha)}{z_1^\alpha}\Big)^{1/\alpha-1} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_1^\alpha) - \Big(\frac{\sigma_\alpha(z_2^\alpha)}{z_2^\alpha}\Big)^{1/\alpha-1} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_2^\alpha),$$

lo cual implica que, para $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}_1$,

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_1) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_2)\Big| &\le C_1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_1^\alpha) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_2^\alpha)\Big| \\ &\quad + C_2 \Big|\big(\sigma_\alpha(z_1^\alpha)/z_1^\alpha\big)^{1/\alpha-1} - \big(\sigma_\alpha(z_2^\alpha)/z_2^\alpha\big)^{1/\alpha-1}\Big|, \end{aligned} \tag{3.56}$$

donde

$$C_1 := \max{}_{z\in\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \big|\sigma_\alpha(z)/z\big|^{1/\alpha-1} < \infty, \quad C_2 := \max{}_{z\in\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z)\Big| < \infty.$$

Para $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}_1$, concluimos que

$$\Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_1^\alpha) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_2^\alpha)\Big| \le A_{(\sigma_\alpha)_z} \omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|), \tag{3.57}$$

donde $(\sigma_\alpha)_z = \partial\sigma_\alpha/\partial z$. Como

$$C_3 := |1/\alpha - 1| \max{}_{z\in\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \big|\sigma_\alpha(z)/z\big|^{1/\alpha-2} < \infty,$$

y como

$$\frac{\sigma_\alpha(z^\alpha)}{z^\alpha} = \int_0^1 \Big(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z^\alpha t)dt - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z^\alpha t)\frac{\overline{z}^\alpha}{z^\alpha}\, dt\Big)$$

de $\sigma_\alpha(0) = 0$, inferimos que

$$\begin{aligned} &\Big|\big(\sigma_\alpha(z_1^\alpha)/z_1^\alpha\big)^{1/\alpha-1} - \big(\sigma_\alpha(z_2^\alpha)/z_2^\alpha\big)^{1/\alpha-1}\Big| \le C_3 \big|\sigma_\alpha(z_1^\alpha)/z_1^\alpha - \sigma_\alpha(z_2^\alpha)/z_2^\alpha\big| \\ &\le C_3 \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_1^\alpha t) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_2^\alpha t)\Big| dt + C_3 \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_1^\alpha t) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_2^\alpha t)\Big| dt \\ &\quad + C_3 \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_1^\alpha t)\Big| \Big|\frac{\overline{z_1}^\alpha}{z_1^\alpha} - \frac{\overline{z_2}^\alpha}{z_2^\alpha}\Big| dt, \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq 1$. Entonces, tomando $\alpha|\varphi_1 - \varphi_2| < 1$, poniendo $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ y aplicando (3.32) y (3.33), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_1^\alpha t)\Big| \Big|\frac{\overline{z_1}^\alpha}{z_1^\alpha} - \frac{\overline{z_2}^\alpha}{z_2^\alpha}\Big| dt \leq A_{(\sigma_\alpha)_z} \omega(|z_1|^\alpha) \big|e^{-2i\alpha\varphi_1} - e^{-2i\alpha\varphi_2}\big| \\ \leq 2A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(r_1^\alpha)|e^{i\alpha\varphi_1} - e^{i\alpha\varphi_2}| \leq 2A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(r_1^\alpha|e^{i\alpha\varphi_1} - e^{i\alpha\varphi_2}|) \\ \leq 2A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|). \end{aligned} \tag{3.59}$$

De manera análoga a (3.57), se deduce que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_1^\alpha t) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial z}(z_2^\alpha t)\Big| dt \leq A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|), \\ \int_0^1 \Big|\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_1^\alpha t) - \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \overline{z}}(z_2^\alpha t)\Big| dt \leq A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Combinando (3.57), (3.59) y (3.60), de (3.56) y (3.58) inferimos que

$$\Big|\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_1) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(z_2)\Big| \leq (C_1 + 4C_2C_3)A_{(\sigma_\alpha)_z}\omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|),$$

$$\omega(|z_1^\alpha - z_2^\alpha|) \leq \begin{cases} \omega_\alpha(|z_1 - z_2|) & \text{si } \ \alpha \in (0,1], \\ (\alpha+1)\omega(|z_1 - z_2|) & \text{si } \ \alpha \in (1,2], \end{cases}$$

donde, para toda $\alpha \in (0,1]$, la función $t \mapsto \omega_\alpha(t) := \omega(t^\alpha)$ es un módulo de continuidad de la clase de Dini, porque

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t^\alpha)}{t}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\delta^\alpha} \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau < \infty \qquad \text{para cualquier } \ \delta > 0.$$

Por lo tanto, la derivada $\partial\sigma_1/\partial z$ es Dini-continua en $\overline{\mathbb{D}}_1$. De manera similar, usando (3.55), también concluimos que la derivada $\partial\sigma_1/\partial\overline{z}$ es Dini-continua en $\overline{\mathbb{D}}_1$.

Por (3.55), la desigualdad (3.5) para $\sigma = \sigma_\alpha$ en $\overline{\mathbb{D}}_\alpha$, implica la misma desigualdad para $\sigma = \sigma_1$ en $\overline{\mathbb{D}}_1$. Como $J_{\sigma_\alpha} > 0$ en $\overline{\mathbb{D}}_\alpha$, concluimos de (3.55) que

$$J_{\sigma_1}(z) = \Big|\frac{\sigma_\alpha(z^\alpha)}{z^\alpha}\Big|^{2/\alpha - 2} J_{\sigma_\alpha}(z^\alpha) > 0 \quad \text{para toda } \ z \in \overline{\mathbb{D}}_1$$

porque $\sigma_\alpha(z) = 0$ para $z = 0$ solo si $\lim_{z\to 0,\ z\in\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \frac{\sigma_\alpha(z)}{z} = 1$. Así, $\sigma_1|_{\overline{\mathbb{D}}_1}$ es el difeomorfismo cuasiconforme requerido de $\overline{\mathbb{D}}_1$ sobre sí mismo. ■

Lema 3.3.3. *Si σ es un difeomorfismo cuasiconforme Dini-suave de un dominio $U \subset \mathbb{C}$ sobre un dominio $V \subset \mathbb{C}$, con Jacobiano positivo J_σ, y si $\mathcal{L} \in U$ es un arco de Jordan dado por una función Dini-suave $z = z(r)$, $r \in [0,1]$, entonces $\sigma(\mathcal{L})$ también es un arco de Jordan Dini-suave.*

Demostración. El arco de Jordan $\sigma(\mathcal{L})$ está dado por la función $w = \sigma(z(r))$, $r \in [0,1]$. Por definición, un arco de Jordan $\mathcal{L}$ con punto final ∞ es Dini-suave si el arco de Jordan $\{1/\overline{z(r)} : r \in [0,1]\}$ es Dini-suave. Entonces, será suficiente probar que la afirmación es cierta en el caso en que ambos arcos, $\mathcal{L}$ y $\sigma(\mathcal{L})$, son acotados. Como

$$w'(r) = \frac{\partial\sigma}{\partial z}(z(r))z'(r) + \frac{\partial\sigma}{\partial \bar{z}}(z(r))\overline{z'(r)}, \tag{3.61}$$

y como

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(z(r_1)) - \frac{\partial\sigma}{\partial z}(z(r_2))\Big| &\le A_{\sigma_z}\omega(|z(r_1) - z(r_2)|) \le A_{\sigma_z}(C+1)\omega(|r_1 - r_2|),\\
\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial \bar{z}}(z(r_1)) - \frac{\partial\sigma}{\partial \bar{z}}(z(r_2))\Big| &\le A_{\sigma_{\bar{z}}}\omega(|z(r_1) - z(r_2)|) \le A_{\sigma_{\bar{z}}}(C+1)\omega(|r_1 - r_2|),\\
|z'(r_1) - z'(r_2)| &\le A_{z'}\omega(|r_1 - r_2|),
\end{aligned}$$

donde $C := \sup_{r\in[0,1]} |z'(r)|$, entonces

$$|w'(r_1) - w'(r_2)| \le C(A_{\sigma_z} + A_{\sigma_{\bar{z}}})(C+1)\omega(|r_1 - r_2|) + C_0 A_{z'}\omega(|r_1 - r_2|),$$

donde

$$C_0 := \text{máx}_{\,r\in[0,1]}\Big(\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial z}(z(r))\Big| + \Big|\frac{\partial\sigma}{\partial \bar{z}}(z(r))\Big|\Big).$$

Por lo tanto, la función $r \mapsto w'(r)$ es Dini-continua. Finalmente, por (3.61), $w'(r) \ne 0$ para toda $r \in [0,1]$ porque $z'(r) \ne 0$ y $J_\sigma(z(r)) > 0$ para esos valores de r. ■

Por el Lema 2.3.2, el álgebra C^* álg $\{aI, S_{\mathbb{D}}, S_{\mathbb{D}}^* : \ a \in C(\overline{\mathbb{D}})\}$, generada por los operadores de multiplicación (por las funciones $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$) y por los operadores $S_{\mathbb{D}}$ y $S_{\mathbb{D}}^*$, contiene a todos los operadores compactos del álgebra C^* $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}))$. Entonces, concluimos del Lema 3.3.1 que el operador $\widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}} \widehat{W}_\sigma^{-1}$ y su adjunto $\widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}}^* \widehat{W}_\sigma^{-1}$ pertenecen al álgebra C^* álg $\{aI, S_{\mathbb{D}}, S_{\mathbb{D}}^* : \ a \in C(\overline{\mathbb{D}})\}$.

Sea $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{K}_\alpha}$ el álgebra C^* de todos los operadores de tipo local en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_\alpha))$, donde $\alpha \in (0, 2]$, y sea $\Lambda^\pi = \Lambda/\mathcal{K}$. Con todo punto $z \in \overline{\mathbb{K}}_\alpha$ asociamos el ideal bilátero cerrado $J_z^\pi = J_{z,\mathbb{K}_\alpha}^\pi$ de Λ^π, definido por (3.3) con $U = \mathbb{K}_\alpha$. También, introducimos las álgebras cociente C^* $\Lambda_z^\pi := \Lambda^\pi / J_z^\pi$.

Teorema 3.3.2. *Si σ_α es una biyección de $\overline{\mathbb{K}}_\alpha$ sobre sí mismo, la cual satisface todas las condiciones del Lema* 3.3.2, *y si el operador unitario $\widehat{W}_{\sigma_\alpha} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_\alpha))$ está dado por* (3.42) *con $\sigma = \sigma_\alpha$, entonces*

$$\big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} B_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} - B_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^\pi \in J_{0,\mathbb{K}_\alpha}^\pi, \quad \Big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}\Big)^\pi \in J_{0,\mathbb{K}_\alpha}^\pi. \tag{3.62}$$

Demostración. Introducimos los difeomorfismos cuasiconformes

$$\sigma :\ \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \sigma_\alpha(z) & \text{si } \ z \in \overline{\mathbb{D}}_\alpha, \\ z & \text{si } \ z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\alpha. \end{cases} \tag{3.63}$$

Como σ satisface las condiciones del Lema 3.3.1, se sigue que el operador (3.43) es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$, y entonces

$$\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \widehat{W}_\sigma S_{\mathbb{D}} \widehat{W}_\sigma^{-1} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I - \frac{J_\sigma}{\beta_\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_\sigma}{\beta_\sigma}\right)^{n-1} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \big(S_{\mathbb{D}}\big)^n \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I + \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \frac{\overline{\gamma_\sigma}}{\beta_\sigma} I \tag{3.64}$$

es un operador compacto en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{D}_\alpha))$. Considerando a los operadores en (3.64) como operadores que actúan en el espacio $L^2(\mathbb{K}_\alpha)$ y teniendo en cuenta las igualdades

$$\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \widehat{W}_\sigma = \widehat{W}_{\sigma_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I, \quad \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} = \widehat{W}_\sigma^{-1} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I, \quad \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{D}} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I = \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I,$$

podemos reescribir (3.64) en la forma

$$\widehat{W}_{\sigma_\alpha} \big(\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I\big) \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} = \frac{J_\sigma}{\beta_\sigma^2} \big(\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I\big) + \Phi_\sigma, \tag{3.65}$$

donde

$$\Phi_\sigma \simeq \frac{J_\sigma}{\beta_\sigma^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\gamma_\sigma}{\beta_\sigma}\right)^{n-1} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \big(S_{\mathbb{D}}\big)^n \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I - \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} \frac{\overline{\gamma_\sigma}}{\beta_\sigma} I. \tag{3.66}$$

Como $\beta_\sigma(0) = 1$, $\gamma_\sigma(0) = 0$ y $J_\sigma(0) = 1$ de (3.41), (3.54) y (3.63), concluimos que las clases laterales $((J_\sigma/\beta_\sigma^2)I - I)^\pi$ y $(\Phi_\sigma)^\pi$ (ver (3.66)) pertenecen al ideal $J_{0,\mathbb{K}_\alpha}^\pi$ del álgebra C^* $\Lambda_{\mathbb{K}_\alpha}^\pi$. Tenemos que las clases laterales

$$\big(\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I - S_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^\pi, \quad \big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} \big(\chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \chi_{\overline{\mathbb{D}}_\alpha} I - S_{\mathbb{K}_\alpha}\big) \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1}\big)^\pi$$

también están en $J^{\pi}_{0,\mathbb{K}_\alpha}$. Por lo tanto, de (3.65), se sigue que

$$\begin{aligned} T^{\pi} &:= \big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} S_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_\alpha} - S_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^{\pi} \in J^{\pi}_{0,\mathbb{K}_\alpha}, \\ (T^*)^{\pi} &:= \big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} S^*_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_\alpha} - S^*_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^{\pi} \in J^{\pi}_{0,\mathbb{K}_\alpha}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Si $\alpha = 1$, es decir, si $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_1 = \Pi$, entonces

$$B_{\mathbb{K}_1} = I - S_{\mathbb{K}_1} S^*_{\mathbb{K}_1}, \quad \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} = I - S^*_{\mathbb{K}_1} S_{\mathbb{K}_1}$$

por (1.4). Combinando las últimas igualdades y (3.67) para $\alpha = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_{\sigma_1} B_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1} - B_{\mathbb{K}_1})^{\pi} &= \big(S_{\mathbb{K}_1} S^*_{\mathbb{K}_1} - (\widehat{W}_{\sigma_1} S_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1})(\widehat{W}_{\sigma_1} S^*_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1})\big)^{\pi} \\ &= -(S_{\mathbb{K}_1})^{\pi} (T^*)^{\pi} + T^{\pi} (S^*_{\mathbb{K}_1})^{\pi} + T^{\pi} (T^*)^{\pi} \in J^{\pi}_{0,\mathbb{K}_1}, \\ (\widehat{W}_{\sigma_1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1})^{\pi} &= \big(S^*_{\mathbb{K}_1} S_{\mathbb{K}_1} - (\widehat{W}_{\sigma_1} S^*_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1})(\widehat{W}_{\sigma_1} S_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1})\big)^{\pi} \\ &= -(S^*_{\mathbb{K}_1})^{\pi} T^{\pi} + (T^*)^{\pi} (S_{\mathbb{K}_1})^{\pi} + (T^*)^{\pi} T^{\pi} \in J^{\pi}_{0,\mathbb{K}_1}, \end{aligned}$$

lo cual nos permite obtener (3.62), para $\alpha = 1$.

Ahora, sea $\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$. Por el Lema 2.1.1,

$$B_{\mathbb{K}_\alpha} = W^{-1}_{\phi_\alpha} B_{\mathbb{K}_1} W_{\phi_\alpha}, \quad \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} = (C W^{-1}_{\phi_\alpha} C) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} (C W_{\phi_\alpha} C), \tag{3.68}$$

donde el mapeo ϕ_α y el operador W_{ϕ_α} están dados por (2.1) y el operador C está dado por (1.1) para $U = \mathbb{K}_\alpha$. Por el Lema 3.3.2, el mapeo $\sigma_1 := \phi^{-1}_\alpha \circ \sigma_\alpha \circ \phi_\alpha : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_1$ tiene todas las propiedades del mapeo σ_α. Como $\widehat{W}_{\sigma_1} = W_{\phi_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha} W^{-1}_{\phi_\alpha}$ y $C W_{\phi_\alpha} C = (\overline{\phi'_\alpha}/\phi'_\alpha) W_{\phi_\alpha}$, deducimos que

$$\begin{aligned} (C W_{\phi_\alpha} C) \widehat{W}_{\sigma_\alpha} (C W^{-1}_{\phi_\alpha} C) &= (\overline{\phi'_\alpha}/\phi'_\alpha)(W_{\phi_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha} W^{-1}_{\phi_\alpha})(\phi'_\alpha/\overline{\phi'_\alpha}) I \\ &= (\overline{\phi'_\alpha}/\phi'_\alpha) \widehat{W}_{\sigma_1} (\phi'_\alpha/\overline{\phi'_\alpha}) I, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\widehat{W}_{\sigma_\alpha} B_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_\alpha} = W^{-1}_{\phi_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_1} B_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1} W_{\phi_\alpha}, \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\sigma_\alpha} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_\alpha} &= \widehat{W}_{\sigma_\alpha} (C W^{-1}_{\phi_\alpha} C) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} (C W_{\phi_\alpha} C) \widehat{W}^{-1}_{\sigma_\alpha} \\ &= W^{-1}_{\phi_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_1} (\phi'_\alpha/\overline{\phi'_\alpha}) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} (\overline{\phi'_\alpha}/\phi'_\alpha) \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1} W_{\phi_\alpha} \\ &= (C W^{-1}_{\phi_\alpha} C) b \big(\widehat{W}_{\sigma_1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}^{-1}_{\sigma_1}\big) b^{-1} (C W_{\phi_\alpha} C), \end{aligned} \tag{3.70}$$

donde $b := [(\phi'_\alpha \circ \sigma_1)\overline{\phi'_\alpha}]/[(\overline{\phi'_\alpha \circ \sigma_1})\phi'_\alpha]$. Por la parte que ya probamos, tenemos que

$$\big(\widehat{W}_{\sigma_1} B_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}_{\sigma_1}^{-1} - B_{\mathbb{K}_1}\big)^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_1}, \quad \big(\widehat{W}_{\sigma_1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}_{\sigma_1}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1}\big)^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_1}. \tag{3.71}$$

Por lo tanto, de (3.69) y de la primera relación en (3.71), inferimos que

$$\begin{aligned}\big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} B_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} - B_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^\pi &= (W^{-1}_{\phi_\alpha})^\pi \big(\widehat{W}_{\sigma_1} B_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}_{\sigma_1}^{-1} - B_{\mathbb{K}_1}\big)^\pi (W_{\phi_\alpha})^\pi \\ &\in J^\pi_{0,\mathbb{K}_\alpha} = (W^{-1}_{\phi_\alpha})^\pi J^\pi_{0,\mathbb{K}_1} (W_{\phi_\alpha})^\pi,\end{aligned}$$

lo cual nos da la primera relación en (3.62), para cualquier $\alpha \in (0,2]$.

Por (3.54), $\widehat{\sigma}_0(z) = \frac{\partial\sigma}{\partial z}(0)z + \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}(0)\overline{z} = z$, y entonces, de (3.49), deducimos que $|\sigma(z) - z| = |\sigma(z) - \widehat{\sigma}_0(z)| \le C_4\omega(|z|)|z|$ en una vecindad de $z = 0$. Por lo tanto, $\sigma(z) \sim z$ cuando $z \to 0$ en $\mathbb{K}_1$, lo cual implica que

$$\lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_1} \frac{\sigma_1(z)}{z} = \lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_\alpha} \frac{\phi_\alpha^{-1}(\sigma_\alpha(z))}{\phi_\alpha^{-1}(z)} = \lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_\alpha} \Big(\frac{\sigma_\alpha(z)}{z}\Big)^{1/\alpha} = 1.$$

Aplicando este hecho, inferimos que

$$\lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_1} b(z) = \lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_1} \frac{(\phi'_\alpha[\sigma_1(z)])\overline{\phi'_\alpha(z)}}{(\overline{\phi'_\alpha[\sigma_1(z)]})\phi'_\alpha(z)} = \lim_{z\to 0,\, z\in\mathbb{K}_1} \Big(\frac{\sigma_1(z)}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{\sigma_1(z)}}\Big)^{\alpha-1} = 1,$$

de donde se deduce que $[(b-1)I]^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_1}$. Por lo tanto, inferimos de la segunda relación en (3.71) que

$$\big(b\widehat{W}_{\sigma_1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}_{\sigma_1}^{-1} b^{-1} I - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1}\big)^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_1}. \tag{3.72}$$

Combinando (3.68), (3.70) y (3.72), obtenemos

$$\begin{aligned}\big(\widehat{W}_{\sigma_\alpha} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha} \widehat{W}_{\sigma_\alpha}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_\alpha}\big)^\pi &= \big[(CW^{-1}_{\phi_\alpha}C)\big(b\widehat{W}_{\sigma_1} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1} \widehat{W}_{\sigma_1}^{-1} b^{-1} I - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_1}\big)(CW_{\phi_\alpha}C)\big]^\pi \\ &\in J^\pi_{0,\mathbb{K}_\alpha} = (CW^{-1}_{\phi_\alpha}C)^\pi J^\pi_{0,\mathbb{K}_1} (CW_{\phi_\alpha}C)^\pi,\end{aligned}$$

lo cual nos da la segunda relación en (3.62), para toda $\alpha \in (0,2]$. ■

En general, el mapeo σ_α en el Teorema 3.3.2 admite diferentes límites unilaterales en el arco $\mathbb{T} \cap \mathbb{K}_\alpha$. Notemos que el Teorema 3.3.2 resulta válido si reemplazamos a $\mathbb{D}_\alpha = \mathbb{D} \cap \mathbb{K}_\alpha$ con $D(0,r) \cap \mathbb{K}_\alpha$, para cualquier $r \in (0,1)$.

3.4 Caracterización de las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z$

3.4.1 Álgebras locales para $z \in \overline{U} \setminus \{\infty\}$

Vamos a caracterizar a las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z$ $(z \in \overline{U})$, donde $\overline{U} = U \cup \partial U$ y ∂U es la frontera Dini-suave a trozos de U.

Si dos álgebras C^* $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son isométricamente isomorfas-*, escribiremos $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$.

Teorema 3.4.1. *Para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, dada por* (3.2), *y cualquier $z \in \overline{U} \setminus \{\infty\}$, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(i) si $z \in U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathbb{C}$;

(ii) si $z \in U \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathbb{C}^{n_z}$, con $n_z \in \mathbb{N}$ dada por la condición ($\mathfrak{L}1$)*;*

(iii) si $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T})$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathbb{C}^3$;

(iv) si $z \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathrm{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$;

(v) si $z \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} := \mathrm{álg}\,\big\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\big\}$,

donde $\mathfrak{L}_{\omega_z} \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$ es la unión finita de rayos asociados con la tupla ω_z, donde $\omega_z := (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n_z})$, considerando las condiciones ($\mathfrak{L}2$) *y* ($\mathfrak{L}3$)*; y $\alpha_z = 1$ si $z \in \partial U \setminus \mathfrak{T}$.*

Demostración. (i)–(ii). Sea $z \in U$. Entonces por el Lema 2.3.3, $B^\pi_U \overset{z}{\sim} 0$, $\widetilde{B}^\pi_U \overset{z}{\sim} 0$. Para $a \in PC(\mathfrak{L})$, se sigue que $(aI)^\pi \overset{z}{\sim} a(z)I^\pi$ si $z \in U \setminus \mathfrak{L}$, y si $z \in U \cap \mathfrak{L}$, entonces

$$(aI)^\pi \overset{z}{\sim} \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)(\chi_{D_l} I)^\pi \quad \text{con} \quad a_l(z) := \lim_{\zeta \to z,\ \zeta \in D_l} a(\zeta) \quad (l = 1, 2, \dots, n_z),$$

donde, por ($\mathfrak{L}1$), la curva $\mathfrak{L}$ divide al disco $D(z, r) \subset U$, de radio pequeño $r > 0$, en n_z dominios distintos dos a dos D_l que tienen a z como punto límite en común. Así, el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z$ es generada por los n_z idempotentes, no cero y ortogonales dos a dos, $(\chi_{D_l} I)^\pi_z$ y cuya suma es igual a I^π_z. Entonces, $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong \mathbb{C}^{n_z}$, donde $n_z = 1$ si $z \in U \setminus \mathfrak{L}$, y el isomorfismo correspondendiente está dado por $(aI)^\pi_z \mapsto [a_l(z)]^{n_z}_{l=1}$, para toda $a \in PC(\mathfrak{L})$, mientras que $(B_U)^\pi_z \mapsto [0]^{n_z}_{l=1}$ y $(\widetilde{B}_U)^\pi_z \mapsto [0]^{n_z}_{l=1}$.

(iii)–(iv). Sea $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \{\infty\})$. Entonces, tenemos que z es una esquina Dini-suave de apertura $\pi\alpha_z$ o $z \in \partial U \setminus \mathcal{T}$, en cuyo caso $\alpha_z = 1$. Para un dominio $U \subset \mathbb{C}$, con frontera Dini-suave a trozos, consideramos el mapeo conforme $\gamma_z : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$, donde $\mathbb{K}_{\alpha_z}$ está dado por (1.5) con $\alpha = \alpha_z$, y $\mathbb{K}_{\alpha_z} = \Pi$ si $\alpha_z = 1$. Así $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1}$, donde el mapeo conforme $\phi_\alpha : \Pi \to \mathbb{K}_\alpha$ está dado por $\phi_\alpha(w) = w^\alpha$ para $w \in \Pi$ y $\alpha \in (0, 2]$, y $\beta_z : \Pi \to U$ es un mapeo conforme tal que $\beta_z(0) = z$, el cual existe por el teorema del mapeo de Riemann. Aplicando el Teorema 1.4.1, concluimos que la función γ_z' es continua y está separada de 0 e ∞ en una vecindad de 0 en $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$. Recordemos que γ_z admite una extensión continua de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$ a $\overline{U}$, la cual no siempre es biyectiva.

Tomando el operador isométrico

$$W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad f \mapsto \gamma_z'(f \circ \gamma_z), \tag{3.73}$$

de la Proposición 1.0.1, deducimos que

$$W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a \circ \gamma_z)I, \quad W_{\gamma_z} B_U W_{\gamma_z}^{-1} = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad W_{\gamma_z} \widetilde{B}_U W_{\gamma_z}^{-1} = c_z \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} c_z^{-1} I, \tag{3.74}$$

donde la función $c_z := \gamma_z' / \overline{\gamma_z'}$ es continua en una vecindad de 0 en $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$.

Fijamos $A \in \mathfrak{B}_U$. Si la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es invertible, entonces por (3.3) existe un operador $B \in \mathfrak{B}_U$, operadores $D_1, D_2 \in \Lambda_U$, operadores $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(L^2(U))$ y funciones $c_1, c_2 \in C(\overline{U})$, tales que $c_1(z) = c_2(z) = 0$ y

$$BA = I + c_1 D_1 + K_1, \quad AB = I + c_2 D_2 + K_2.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} (W_{\gamma_z} B W_{\gamma_z}^{-1})(W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1}) &= I + (c_1 \circ \gamma_z)\widetilde{D}_1 + \widetilde{K}_1, \\ (W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1})(W_{\gamma_z} B W_{\gamma_z}^{-1}) &= I + (c_2 \circ \gamma_z)\widetilde{D}_2 + \widetilde{K}_2, \end{aligned} \tag{3.75}$$

donde $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2 \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$ y $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2 \in \Lambda_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$. Para constantes $k > 0$, introducimos los operadores unitarios

$$U_k : L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad (U_k f)(w) = kf(kw) \;\text{ para toda }\; w \in \mathbb{K}_{\alpha_z}. \tag{3.76}$$

Entonces, por la continuidad de c_z que implica la igualdad

$$\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0}(U_k(c_z I)U_k^{-1}) = (\gamma_z'(0)/\overline{\gamma_z'(0)})I,$$

inferimos, para los generadores (3.74) del álgebra C^* $W_{\gamma_z}\mathfrak{B}_U W_{\gamma_z}^{-1}$, que

$$\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0}(U_k((a\circ\gamma_z)I)U_k^{-1}) = a(z)I, \tag{3.77}$$

$$\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0}(U_k B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} U_k^{-1}) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad \operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0}(U_k(c_z \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \overline{c_z} I)U_k^{-1}) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}. \tag{3.78}$$

Por lo tanto, para toda $A\in\mathfrak{B}_U$ y toda $z\in\partial U\setminus(\mathfrak{L}\cup\{\infty\})$, existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_z := \operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to 0}(U_k(W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1})U_k^{-1}) \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}. \tag{3.79}$$

Aplicando ahora [18, Proposition 7.5], de (3.75) deducimos que $\widehat{B}_z\widehat{A}_z = I$ y $\widehat{A}_z\widehat{B}_z = I$. Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ implica la invertibilidad del operador $\widehat{A}_z \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$.

Recíprocamente, la invertibilidad del operador $\widehat{A}_z \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$, asociado con un operador $A\in\mathfrak{B}_U$, implica la invertibilidad del operador

$$W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_z W_{\gamma_z} \in \widehat{\mathfrak{B}}_U := \text{álg}\,\{I, B_U, d_z\widetilde{B}_U d_z^{-1}I\},$$

donde $d_z := (\gamma_z^{-1})'/\overline{(\gamma_z^{-1})'}$. Como $(d_zI)^\pi \overset{z}{\sim} (\overline{\gamma_z'(0)}/\gamma_z'(0))I^\pi$, entonces $(d_z\widetilde{B}_U d_z^{-1}I)^\pi \overset{z}{\sim} \widetilde{B}_U^\pi$, y como $(aI)^\pi \overset{z}{\sim} a(z)I^\pi$ para toda $a\in PC(\mathfrak{L})$, concluimos que las álgebras cociente C^* $(\widehat{\mathfrak{B}}_U)_z^\pi$ y $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ coinciden. Consecuentemente, la invertibilidad del operador $W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_z W_{\gamma_z} \in \widehat{\mathfrak{B}}_U$ implica la invertibilidad de la clase lateral $(W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_z W_{\gamma_z})_z^\pi = A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$.

Así, la invertibilidad de la clase lateral $A_z^\pi\in(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$, para $A\in\mathfrak{B}_U$, es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_z \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$ dada por (3.79). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \to \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$, dado por

$$(aI)_z^\pi \mapsto a(z)I \ \text{ para } \ a\in PC(\mathfrak{L}), \quad (B_U)_z^\pi \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad (\widetilde{B}_U)_z^\pi \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

es el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$.

Finalmente, si $\alpha_z = 1$ y $\mathbb{K}_{\alpha_z} = \Pi$, entonces el álgebra C^* álg $\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ está generada por las tres proyecciones no cero que son ortogonales dos a dos $B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi$ y $I - B_\Pi - \widetilde{B}_\Pi$ (ver

[40, Theorem 3.3.5]), lo cual implica el isomorfismo de álgebras $C^*\,(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathbb{C}^3$, y así se completa la prueba de las partes (iii)–(iv).

(v) Finalmente, sea $z \in (\partial U \cap \mathfrak{L}) \setminus \{\infty\}$. De nuevo consideraremos a z como una esquina de apertura $\pi\alpha_z$, donde α_z puede tomar el valor de 1. Por ($\mathfrak{L}2$), asociamos la tupla $\omega_z = (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_z})$, con la unión finita $\mathfrak{L}_z \subset U$ de segmentos de arco que comienzan en z. Siguiendo las partes (iii)–(iv), consideramos el mapeo conforme $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1} : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$, y calculamos los límites fuertes $\text{s-lím}_{k\to 0}(U_k W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1})$ para los generadores A del álgebra $C^*\,\mathfrak{B}_U$, donde los operadores $W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ y $U_k \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$ están dados por (3.73) y (3.76), respectivamente. Entonces, obtenemos las igualdades (3.78), mientras que la igualdad (3.77), para $a \in PC(\mathfrak{L})$, es reemplazada por

$$\underset{k\to 0}{\text{s-lím}} \left(U_k W_{\gamma_z}(aI) W_{\gamma_z}^{-1} U_k^{-1}\right) = a_z I,$$

donde a_z es una función constante a trozos en $\mathbb{K}_{\alpha_z}$, la cual será definida más adelante (ver (3.82) y (3.84)).

Elegimos una vecindad V_z de z que satisfaga la condición ($\mathfrak{L}2$) impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z) = \bigcup_{l=1}^{n_z} D_l$, donde $n_z - 1$ es el número de arcos de Jordan Dini-suaves en $\mathfrak{L}_z$ con punto final z y D_l son las componentes conexas de $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z)$. Por lo tanto, $\widetilde{\mathfrak{L}}_z := \gamma_z^{-1}(\mathfrak{L}_z) = \bigcup_{j=1}^{n_z-1} l_j$ es la unión de $n_z - 1$ arcos de Jordan Dini-suaves a trozos $l_j \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$ que emanan del origen y que tienen en este punto tangentes que contienen a los rayos $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2, ..., n_z - 1)$ asociados a la tupla ω_z (ver Lema 3.3.3).

Sea $\mathfrak{L}_{\omega_z} = \bigcup_{j=1}^{n_z-1} \mathcal{L}_j \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$. Entonces

$$\gamma_z^{-1}(V_z \cap U) \setminus \widetilde{\mathfrak{L}}_z = \bigcup_{l=1}^{n_z} \widetilde{R}_l, \quad \mathbb{K}_{\alpha_z} \setminus \mathfrak{L}_{\omega_z} = \bigcup_{l=1}^{n_z} R_l,$$

donde $\widetilde{R}_l := \gamma_z^{-1}(D_l)$, y R_l son los sectores abiertos de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$ con vértices en el origen, los cuales están dados por (2.4) y corresponden a los dominios $\widetilde{R}_l$ (los conjuntos $D_l, \widetilde{R}_l$ y R_l están numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Los sectores R_k tienen ángulos internos $\theta_k - \theta_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_z)$, donde $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n_z-1} < \theta_{n_z} = \pi\alpha_z$. En efecto: el ángulo interno del sector R_k coincide con el ángulo δ formado en el origen por los arcos de Jordan Dini-suaves l_k y l_{k-1} en $\gamma_z^{-1}(\mathfrak{L}_z)$. Sean los arcos l_k y l_{k-1} dados por las funciones Dini-suaves $f_k(t)$ y $f_{k-1}(t)$, respectivamente. Entonces $\delta = \arg f_k'(0) - \arg f_{k-1}'(0)$. Por otro lado, el ángulo $\theta_k - \theta_{k-1}$, formado en el punto z por los arcos de Jordan Dini-suaves $\gamma_z(l_k)$ y $\gamma_z(l_{k-1})$ en $\mathfrak{L}_z$, está dado por el $\lim_{t\to 0} \arg \frac{[\gamma_z(f_k(t))]'}{[\gamma_z(f_{k-1}(t))]'}$, donde

$$\frac{[\gamma_z(f_k(t))]'}{[\gamma_z(f_{k-1}(t))]'} = \frac{[\beta_z((f_k(t))^{1/\alpha_z})]'}{[\beta_z((f_{k-1}(t))^{1/\alpha_z})]'} = \frac{\frac{\beta_z'((f_k(t))^{1/\alpha_z})}{((f_k(t))^{1/\alpha_z})^{\alpha_z-1}} f_k'(t)}{\frac{\beta_z'((f_{k-1}(t))^{1/\alpha_z})}{((f_{k-1}(t))^{1/\alpha_z})^{\alpha_z-1}} f_{k-1}'(t)}. \tag{3.80}$$

Pero, β_z mapea a Π sobre U de manera conforme y ∂U tiene una esquina Dini-suave de apertura $\pi\alpha_z$ en $\beta_z(0) = z$. Luego, por el Teorema 1.4.1, la función $\zeta \mapsto \frac{\beta_z'(\zeta)}{\zeta^{\alpha_z-1}}$ es continua y está separada de cero e ∞ en $\overline{\Pi} \cap D(0,\rho)$, para algún $\rho > 0$. Finalmente, inferimos de (3.80) que

$$\theta_k - \theta_{k-1} = \arg\left(\lim_{t\to 0} \frac{[\gamma_z(f_k(t))]'}{[\gamma_z(f_{k-1}(t))]'}\right) = \arg\left(\lim_{t\to 0} \frac{f_k'(t)}{f_{k-1}'(t)}\right) = \delta.$$

Para $l = 1, 2, \ldots, n_z$, sean $\chi_{\widetilde{R}_l}$ y χ_{R_l} las funciones características de los conjuntos $\widetilde{R}_l$ y R_l, respectivamente. Tomando los operadores (3.76), queremos que

$$\operatorname*{s-lím}_{k\to 0} \left(U_k \chi_{\widetilde{R}_l} U_k^{-1}\right) = \chi_{R_l} I, \quad \text{para toda} \quad l = 1, 2, \ldots, n_z. \tag{3.81}$$

En efecto: como

$$((U_k \chi_{\widetilde{R}_l} U_k^{-1})f)(\zeta) = \chi_{\widetilde{R}_l}(k\zeta) f(\zeta),$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ y toda $\zeta \in R_l$, deducimos que

$$\lim_{k\to 0}((U_k \chi_{\widetilde{R}_l} U_k^{-1})f)(\zeta) = f(\zeta) \lim_{k\to 0} \chi_{\widetilde{R}_l}(k\zeta).$$

Fijando $\vartheta \in (\theta_l, \theta_{l-1})$ y tomando $\zeta = |\zeta| e^{i\vartheta}$, entonces $k\zeta$ tiende a 0 a lo largo del rayo $\{re^{i\vartheta} : r \geq 0\}$. Como el sector R_l está formado por las tangentes en 0 a las curvas que forman sectores curvilíneos $\widetilde{R}_l$ con vértice en 0, concluimos que existe $k_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $k\zeta \in \widetilde{R}_l \cap R_l$ para toda $k < k_0$. Por lo tanto, $\lim_{k\to 0} \chi_{\widetilde{R}_l}(k\zeta) = 1 = \chi_{R_l}(\zeta)$, lo cual implica (3.81).

Como $W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a\circ\gamma_z)I$ y como la restricción de la función $a\circ\gamma_z$ al conjunto $\widetilde{V}_z := \gamma_z^{-1}(V_z\cap U)$ puede ser escrita en la forma

$$(a\circ\gamma_z)|_{\widetilde{V}_z} = \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)\chi_{\widetilde{R}_l} + \varepsilon(\cdot) \quad \text{con} \quad a_l(z) = \lim_{\zeta\to z,\ \zeta\in D_l} a(\zeta) \tag{3.82}$$

y $\lim_{\zeta\to 0,\,\zeta\in\widetilde{V}_z}\varepsilon(\zeta)=0$, de (3.81)–(3.82) inferimos que, para toda $a\in PC(\mathfrak{L})$,

$$\operatorname*{s-lím}_{k\to 0}\big(U_k W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1}U_k^{-1}\big) = \operatorname*{s-lím}_{k\to 0}\big(U_k((a\circ\gamma_z)I)U_k^{-1}\big) = a_z I, \tag{3.83}$$

donde la función constante a trozos a_z es de la forma

$$a_z = \sum_{l=1}^{n_z} a_l(z)\chi_{R_l} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z}), \tag{3.84}$$

con constantes $a_l(z)$ dadas por (3.82).

Así, de (3.78), (3.83) y (3.84) concluimos que, para toda $A\in\mathfrak{B}_U$ y toda $z\in(\partial U\cap\mathfrak{L})\setminus\{\infty\}$, existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_z := \operatorname*{s-lím}_{k\to 0}(U_k W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1}U_k^{-1}) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a\in\mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z}\},$$

el cual vale 0 para cualquier operador compacto A, esto debido a [18, Proposition 7.5]. Por lo tanto, el mapeo $A_z^\pi \mapsto \widehat{A}_z$ es un homomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$.

Recíprocamente, el mapeo $\widehat{A}_z \mapsto (\widehat{A}_z)^\pi + J_{0,\mathbb{K}_{\alpha_z}}^\pi$ es un homomorfismo-* del álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ sobre el álgebra C^* $(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})_0^\pi$. Para probar el isomorfismo-* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, solo resta probar que $(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})_0^\pi \cong (\mathfrak{B}_U)_z^\pi$. Por el Lema 3.2.2 y Teorema 3.3.2, existe un difeomorfismo cuasiconforme Dini-suave a trozos δ_0, de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$ sobre sí mismo y con Jacobiano positivo J_{δ_0}, tal que $\delta_0(0)=0$, $\chi_{\widetilde{R}_l}\circ\delta_0 = \chi_{R_l}$, para toda $l=1,2,\dots,n_z$, y las clases laterales

$$(\widehat{W}_{\delta_0}B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\widehat{W}_{\delta_0}^{-1} - B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi, \quad (\widehat{W}_{\delta_0}\widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\widehat{W}_{\delta_0}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi,$$
$$(\widehat{W}_{\delta_0}[(a\circ\gamma_z)I]\widehat{W}_{\delta_0}^{-1} - a_z I)^\pi$$

pertenecen al ideal $J_{0,\mathbb{K}_{\alpha_z}}^\pi = (W_{\gamma_z})^\pi J_{z,U}^\pi (W_{\gamma_z}^{-1})^\pi$, donde $\widehat{W}_{\delta_0}f = J_{\delta_0}^{1/2}(f\circ\delta_0)$ y $J_{0,\mathbb{K}_{\alpha_z}}^\pi = (\widehat{W}_{\delta_0})^\pi J_{0,\mathbb{K}_{\alpha_z}}^\pi (\widehat{W}_{\delta_0}^{-1})^\pi$. Escribiendo $\lambda_z := \gamma_z\circ\delta_0$, definimos el operador

$$\widehat{W}_{\lambda_z} :\ L^2(U)\to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad \widehat{W}_{\lambda_z}f = J_{\lambda_z}^{1/2}(f\circ\lambda_z), \quad \text{para toda } \ f\in L^2(U).$$

Entonces, de manera similar a las partes (iii)–(iv), deducimos que

$$(\widehat{W}_{\lambda_z} B_U \widehat{W}_{\lambda_z}^{-1})^\pi_0 = (B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi_0, \quad (\widehat{W}_{\lambda_z} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\lambda_z}^{-1})^\pi_0 = (\widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi_0,$$
$$(\widehat{W}_{\lambda_z} (aI) \widehat{W}_{\lambda_z}^{-1})^\pi_0 = (a_z I)^\pi_0,$$

y así

$$(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \cong (\widehat{W}_{\lambda_z} \mathfrak{B}_U \widehat{W}_{\lambda_z}^{-1})^\pi_0 \cong (\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi_0.$$

Por lo tanto, el mapeo $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z \to \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ dado por

$$(aI)^\pi_z \mapsto a_z I \ \text{ for } \ a \in PC(\mathfrak{L}), \quad (B_U)^\pi_z \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad (\widetilde{B}_U)^\pi_z \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

es un isomorfismo de álgebras C^*, entre $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z$ y $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, lo cual prueba (v). ■

3.4.2 Álgebra local para $z = \infty \in \partial U$

Si $\infty \in \partial U$ y la condición $(\mathfrak{L}3)$ es cierta, entonces consideramos los mapeos anti-conformes $g : V \to U$ y $\widehat{g} : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ dados por $g(w) = 1/\overline{w}$, para toda $w \in V$, y por $\widehat{g}(w) = 1/\overline{w}$, para toda $w \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$. Entonces $g(0) = \infty \in \partial U$ y $\widehat{g}(\infty) = 0 \in \partial \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$, y la apertura $\pi\alpha_0$ del origen en $\overline{V}$ coincide con la apertura $\pi\alpha_\infty$ de ∞ en $\overline{U}$.

Por el teorema del mapeo de Riemann, existe un mapeo conforme $\psi : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to V$ tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) \neq 0$, donde $\psi = \beta_0$ si $\infty \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T})$, en cuyo caso $\alpha_\infty = 1$, y $\psi = \gamma_0$ si $\infty \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{L}$, cumpliendo que $\alpha_\infty \in (0, 2] \setminus \{1\}$ (ver mapeos β_z y γ_z en la prueba de las afirmaciones (iii)–(iv) del Teorema 3.4.1).

Si $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, entonces $0 \in \partial V \cap g^{-1}(\mathfrak{L})$, donde $g^{-1}(\mathfrak{L}) \subset V \cup g^{-1}(\mathfrak{T})$ es la unión de un conjunto finito de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos. Tomando el subconjunto $\mathfrak{L}_\infty$ de arcos en $\mathfrak{L}$ que tienen punto final en ∞, vemos que el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ también es la unión de un conjunto finito de arcos de Jordan Dini-sauves a trozos. De acuerdo a la afirmación (v) en el Teorema 3.4.1, consideramos la unión $\mathfrak{L}_{\omega_\infty}$ de rayos en $\mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ que son tangentes en el origen a los arcos en $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty)$ y consideramos el difeomorfismo cuasiconforme Dini-suave a trozos δ_0 de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_\infty}$ sobre sí mismo que envía al conjunto $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \cap D(0, r_0)$ en el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \cap D(0, r_0)$, donde $r_0 > 0$ es suficientemente pequeño (ver Lema 3.2.2 y Teorema 3.3.2). Entonces, definimos el mapeo cuasiconforme $\lambda_0 := \psi \circ \delta_0 : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to U$.

Proposición 3.4.1. *Si las funciones g, ψ, δ_0 y $\widehat{g}$ son las funciones definidas anteriormente, entonces $\mu_\infty := g \circ \psi \circ \widehat{g}$ es un mapeo conforme de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ sobre U, y $\nu_\infty := g \circ \psi \circ \delta_0 \circ \widehat{g}$ es un mapeo cuasiconforme de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ sobre U con Jacobiano positivo.*

Demostración. Como $\mu_\infty = 1/\overline{\psi(1/\overline{z})}$, donde la función $\psi : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to V$ es analítica y tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) \neq 0$, inferimos que la función $\mu_\infty : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to U$ también es analítica, porque en cada punto $z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ existe la derivada

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_\infty}{dz}(z) &= \lim_{w\to z} \frac{1/\overline{\psi(1/\overline{w})} - 1/\overline{\psi(1/\overline{z})}}{w - z} \\
&= \lim_{w\to z} \left(\frac{1/\overline{\psi(1/\overline{w})} - 1/\overline{\psi(1/\overline{z})}}{\overline{\psi(1/\overline{w})} - \overline{\psi(1/\overline{z})}} \cdot \frac{\overline{\psi(1/\overline{w})} - \overline{\psi(1/\overline{z})}}{\overline{1/\overline{w} - 1/\overline{z}}} \cdot \frac{1/w - 1/z}{w - z} \right) \\
&= \big(1/\overline{\psi^2(1/\overline{z})}\big)\overline{\psi'(1/\overline{z})}\big(1/z^2\big). \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

Como $\mu_\infty'(z) \neq 0$, para toda $z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$, con $\psi'(z) \neq 0$, concluimos que $\mu_\infty : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to U$ es un mapeo conforme. En particular, deducimos de la igualdad $\psi(0) = 0$, que

$$\lim_{z\to\infty} \big(1/\overline{\psi^2(1/\overline{z})}\big)\big(1/z^2\big) = \big(1/\overline{\psi'(0)}\big)^2,$$

lo cual, de (3.85), implica que

$$\mu_\infty'(\infty) := \lim_{z\to\infty} \mu_\infty'(z) = 1/\overline{\psi'(0)} \notin \{0, \infty\}. \qquad (3.86)$$

De manera análoga, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu_\infty}{\partial z}(z) &= \big(1/\overline{(\psi^2[\delta_0(1/\overline{z})]}\big)\overline{\psi'[\delta_0(1/\overline{z})]}\,\overline{\frac{\partial \delta_0}{\partial z}(1/\overline{z})}\big(1/z^2\big), \\
\frac{\partial \nu_\infty}{\partial \overline{z}}(z) &= \big(1/\overline{(\psi^2[\delta_0(1/\overline{z})]}\big)\overline{\psi'[\delta_0(1/\overline{z})]}\,\overline{\frac{\partial \delta_0}{\partial \overline{z}}(1/\overline{z})}\big(1/\overline{z}^2\big),
\end{aligned} \qquad (3.87)$$

lo cual, por la positividad del Jacobiano J_{δ_0}, implica que

$$J_{\nu_\infty}(z) = \big|1/(\psi^2[\delta_0(1/\overline{z})]\big|^2 \big|\psi'[\delta_0(1/\overline{z})]\big|^2 (J_{\delta_0}(1/\overline{z}))\big|1/z^4\big| > 0.$$

Así, ν_∞ es un mapeo cuasiconforme, y

$$\frac{\partial \nu_\infty}{\partial z}(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\partial \nu_\infty}{\partial z}(z) = 1/\overline{\psi'(0)}, \quad \frac{\partial \nu_\infty}{\partial \overline{z}}(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\partial \nu_\infty}{\partial \overline{z}}(z) = 0$$

debido a (3.86), (3.87) y a las igualdades $\frac{\partial \delta_0}{\partial z}(0) = 1$ y $\frac{\partial \delta_0}{\partial \overline{z}}(0) = 0$. ■

Teorema 3.4.2. *Si* $\infty \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$*, entonces* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty \cong \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\}$*, donde* $\alpha_\infty = 1$ *si* $\infty \notin \mathfrak{T}$*.*

Demostración. Sea $\infty \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$, y así $\omega_\infty = (0, \pi\alpha_\infty)$, donde $\alpha_\infty = 1$ si $\infty \notin \mathfrak{T}$. Por la prueba de la Proposición 3.4.1, $\mu_\infty = g \circ \psi \circ \widehat{g}$ es un mapeo conforme de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ sobre U tal que $\mu_\infty(\infty) = \infty$ y $\mu'_\infty(\infty) \notin \{0, \infty\}$. Aplicando el operador isométrico

$$W_{\mu_\infty} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}), \quad f \mapsto \mu'_\infty(f \circ \mu_\infty),$$

de la Proposición 1.0.1, deducimos que

$$\begin{aligned} W_{\mu_\infty}(aI)W^{-1}_{\mu_\infty} &= (a \circ \mu_\infty)I, \quad \text{para toda} \quad a \in PC(\mathfrak{L}), \\ W_{\mu_\infty} B_U W^{-1}_{\mu_\infty} &= B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad W_{\mu_\infty} \widetilde{B}_U W^{-1}_{\mu_\infty} = c_\infty \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} c^{-1}_\infty I, \end{aligned} \tag{3.88}$$

donde $c_\infty := \mu'_\infty / \overline{\mu'_\infty}$. Tomando, para $k > 0$, los operadores unitarios de dilatación

$$U_k : L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}), \quad (U_k f)(w) = k f(kw), \quad \text{para toda} \;\; w \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}, \tag{3.89}$$

de (3.88) y (3.89), deducimos que

$$\begin{gathered} \operatorname*{s-lím}_{k\to\infty}(U_k((a \circ \mu_\infty)I)U_k^{-1}) = a(\infty)I, \quad \operatorname*{s-lím}_{k\to\infty}(U_k(c_\infty I)U_k^{-1}) = (\mu'_\infty/\overline{\mu'_\infty})(\infty)I, \\ \operatorname*{s-lím}_{k\to\infty}(U_k B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} U_k^{-1}) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \operatorname*{s-lím}_{k\to\infty}(U_k(c_\infty \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \overline{c_\infty} I)U_k^{-1}) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{gathered}$$

Por lo tanto, para toda $A \in \mathfrak{B}_U$ existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_\infty := \operatorname*{s-lím}_{k\to\infty}(U_k W_{\mu_\infty} A W^{-1}_{\mu_\infty} U_k^{-1}) \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\}. \tag{3.90}$$

Dada $A \in \mathfrak{B}_U$, similarmente a la prueba de las partes (iii)–(iv) del Teorema 3.4.1, se sigue que la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi_\infty \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty$ es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\infty$ definido en (3.90), de donde $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty \cong \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\}$. Finalmente, si $\infty \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T})$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty \cong \mathbb{C}^3$ por analogía con el Teorema 3.4.1(iii), porque $\alpha_\infty = 1$ y $\mathbb{K}_{\alpha_\infty} = \Pi$. ∎

Teorema 3.4.3. *Si* $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$*, entonces*

$$(\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} := \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} : \; a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_\infty})\}, \tag{3.91}$$

donde $\mathfrak{L}_{\omega_\infty}$ *es la unión de rayos asociados con la tupla* $\omega_\infty = (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_\infty})$ *por la condición* $(\mathfrak{L}3)$*,* $\theta_{n_\infty} = \pi\alpha_\infty$ *y* $\alpha_\infty = 1$ *si* $\infty \notin \mathfrak{T}$*.*

Demostración. Si $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$ y $\omega_\infty = (0, \theta_1, \dots, \theta_{n_\infty - 1}, \pi\alpha_\infty)$ es la tupla asociada, por ($\mathfrak{L}3$), con la unión $\mathfrak{L}_\infty$ de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos, entonces $g^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \subset V \cup \{0\}$ es la unión de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos que forman en el origen ángulos, no nulos y distintos dos a dos, $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n_\infty - 1}$ con la semivecindad de 0 en la curva $\{g^{-1}(\zeta) : \zeta \in \partial U\}$. Sea $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ la unión de rayos que comienzan en 0 y que son tangentes en este punto a los arcos en $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty)$. Siguiendo la prueba del Teorema 3.4.1(v), consideramos el mapeo cuasiconforme Dini-suave a trozos invertible δ_0, de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_\infty}$ sobre sí mismo, que manda al conjunto $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \cap D(0, r_0)$ en el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \cap D(0, r_0)$, donde $r_0 > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces, el mapeo cuasiconforme $\lambda_0 := \psi \circ \delta_0 : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to U$ tiene Jacobiano positivo en el origen, y $\lambda_0(0) = 0$.

Ahora, definimos los operadores isométricos

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_g &: \mathcal{A}^2(U) \to \widetilde{\mathcal{A}}^2(V), \quad (\widetilde{W}_g f)(z) = (-1/\overline{z}^2) f(1/\overline{z}), \quad \text{para} \;\; z \in V, \\ \widetilde{W}_{\widehat{g}} &: \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}) \to \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}), \quad (\widetilde{W}_{\widehat{g}} f)(z) = (-1/\overline{z}^2) f(1/\overline{z}), \quad \text{para} \;\; z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}, \end{aligned} \tag{3.92}$$

donde sus inversos están dados por

$$\begin{aligned} (\widetilde{W}_g^{-1} \varphi)(z) &= (-1/z^2) \varphi(1/\overline{z}), \quad \text{para} \;\; z \in U, \\ (\widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} \varphi)(z) &= (-1/z^2) \varphi(1/\overline{z}), \quad \text{para} \;\; z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Como $(\overline{z}^2/z^2)\widetilde{W}_g$ es un operador isométrico de $\widetilde{\mathcal{A}}^2(U)$ sobre $\mathcal{A}^2(V)$, tenemos que

$$(\overline{z}^2/z^2)\widetilde{W}_g \widetilde{B}_U \widetilde{W}_g^{-1} (z^2/\overline{z}^2) I = B_V,$$

y así, de (3.92), (3.93) y esta última igualdad, deducimos que

$$\widetilde{W}_g B_U \widetilde{W}_g^{-1} = \widetilde{B}_V, \quad \widetilde{W}_g \widetilde{B}_U \widetilde{W}_g^{-1} = (z^2/\overline{z}^2) B_V (\overline{z}^2/z^2) I. \tag{3.94}$$

Análogamente,

$$\widetilde{W}_{\widehat{g}} B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \widetilde{W}_{\widehat{g}} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = (z^2/\overline{z}^2) B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} (\overline{z}^2/z^2) I. \tag{3.95}$$

Sean $J^\pi_{\infty,U}$, $J^\pi_{0,V}$, $J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ y $J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ los ideales de Λ^π_U en ∞, de Λ^π_V en 0, de $\Lambda^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ en 0 y de $\Lambda^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ en ∞, respectivamente. Consideremos el operador isométrico $\widehat{W}_{\nu_\infty} := \widetilde{W}_{\widehat{g}} \widehat{W}_{\delta_0} W_\psi \widetilde{W}_g$

$L^2(U)$ sobre $L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty})$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_g J^\pi_{\infty,U} \widetilde{W}_g^{-1} = J^\pi_{0,V}, \quad W_\psi J^\pi_{0,V} W_\psi^{-1} = J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \widehat{W}_{\delta_0} J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widehat{W}_{\delta_0}^{-1} = J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \widetilde{W}_{\widehat{g}} J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Tomando $\lambda_0 = \psi \circ \delta_0$ y $\widehat{W}_{\lambda_0} := \widehat{W}_{\delta_0} W_\psi$, deducimos de la parte (v) de la prueba del Teorema 3.4.1, que

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_{\lambda_0} B_V \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}})^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad (\widehat{W}_{\lambda_0} \widetilde{B}_V \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}})^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ (\widehat{W}_{\lambda_0}((a \circ g)I) \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - (a \circ g \circ \lambda_0)I)^\pi \in J^\pi_{0,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Combinando (3.94)–(3.97), inferimos que

$$\begin{aligned} \big[\widehat{W}_{\nu_\infty} B_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - (z^2/\overline{z}^2) B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} (\overline{z}^2/z^2) I\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[\widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - \big(\lambda_0^2(1/\overline{z})/\overline{\lambda_0^2(1/\overline{z})}\big) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \big(\overline{\lambda_0^2(1/\overline{z})}/\lambda_0^2(1/\overline{z})\big) I\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

Entonces, aplicando la relación

$$\big[(\lambda_0^2(1/\overline{z})/\overline{\lambda_0^2(1/\overline{z})})I - (\psi'(0)/\overline{\psi'(0)})^2 (z^2/\overline{z}^2) I\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},$$

y la segunda relación en (3.98), deducimos que

$$\big[\widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - (z^2/\overline{z}^2) \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} (\overline{z}^2/z^2) I\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \tag{3.99}$$

Haciendo uso de (3.98) y (3.99), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \big[(\overline{z}^2/z^2) \widehat{W}_{\nu_\infty} B_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} (z^2/\overline{z}^2) I - B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[(\overline{z}^2/z^2) \widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} (z^2/\overline{z}^2) I - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\big]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[(\overline{z}^2/z^2) \widehat{W}_{\nu_\infty} (aI) \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} (z^2/\overline{z}^2) I - (a \circ \nu_\infty) I\big]^\pi = [0]^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Más aún, para todo operador $K \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ y todo operador $C \in \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ tal que $C^\pi \in J^\pi_{\infty,\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, por analogía con [18, Proposition 7.5], deducimos que

$$\operatorname*{s-lím}_{k\to\infty} \big(U_k (C+K) U_k^{-1}\big) = 0. \tag{3.101}$$

Entonces, de (3.100) y (3.101) de manera similar a la prueba de los Teoremas 3.4.1 y 3.4.2, concluimos que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to\infty}\big(U_k\big[(\overline{z}^2/z^2)\widehat{W}_{\nu_\infty}B_U\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}(z^2/\overline{z}^2)I\big]U_k^{-1}\big) &= B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},\\
\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to\infty}\big(U_k\big[(\overline{z}^2/z^2)\widehat{W}_{\nu_\infty}\widetilde{B}_U\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}(z^2/\overline{z}^2)I\big]U_k^{-1}\big) &= \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},\\
\operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to\infty}\big(U_k\big[(\overline{z}^2/z^2)\widehat{W}_{\nu_\infty}(aI)\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}(z^2/\overline{z}^2)I\big]U_k^{-1}\big) &= a_\infty I,
\end{aligned} \tag{3.102}$$

donde la función constante a trozos a_∞ es de la forma

$$a_\infty = \sum_{l=1}^{n_\infty} a_l(\infty)\chi_{R_l} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_\infty}), \tag{3.103}$$

$\omega_\infty = (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_\infty-1}, \pi\alpha_\infty)$, y los sectores $R_l \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ están dados por

$$\begin{aligned}
R_l &= \{z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty} :\ \theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\} \quad (l = 1, 2, \ldots, n_\infty),\\
a_l(\infty) &= \lim_{z\to\infty,\ z\in(g\circ\lambda_0)(R_l)} a(z) \quad (l = 1, 2, \ldots, n_\infty).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Fijamos $A \in \mathfrak{B}_U$. Si la clase lateral $A_z^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_\infty^\pi$ es invertible, de (3.101) y (3.102) de manera similar a la prueba de las partes (iii)–(v) en el Teorema 3.4.1, inferimos que existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_\infty := \operatorname*{s\text{-}lím}_{k\to\infty}\big(U_k\big[(\overline{z}^2/z^2)\widehat{W}_{\nu_\infty}A\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}(z^2/\overline{z}^2)I\big]U_k^{-1}\big) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \tag{3.105}$$

donde el operador $\widehat{A}_\infty$ es invertible en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, dada por (3.91).

Por otro lado, la invertibilidad del operador límite $\widehat{A}_\infty \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ asociado con un operador $A \in \mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : a \in PC(\mathfrak{L})\}$, de (3.100), implica la invertibilidad de la clase lateral

$$\big(\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}(z^2/\overline{z}^2)\widehat{A}_\infty(\overline{z}^2/z^2)\widehat{W}_{\nu_\infty}\big)_\infty^\pi \tag{3.106}$$

en el álgebra cociente C^* $(\mathfrak{B}_U)_\infty^\pi$. De (3.100), se sigue que la clase lateral (3.106) coincide con la clase lateral $A_\infty^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_\infty^\pi$.

Luego, la invertibilidad de la clase lateral $A_\infty^\pi \in (\mathfrak{B}_U)_\infty^\pi$, para $A \in \mathfrak{B}_U$, es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\infty \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ dado por (3.105). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{B}_U)_\infty^\pi \to \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, dado por

$$(aI)_\infty^\pi \mapsto a_\infty I \ \text{ para } \ a \in PC(\mathfrak{L}), \quad (B_U)_\infty^\pi \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad (\widetilde{B}_U)_\infty^\pi \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},$$

donde la función constante a trozos a_∞ es definida por (3.103) y (3.104), es un isomorfismo de álgebras C^* entre $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\infty$ y $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$. ■

3.5 Cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

Sea U un dominio simplemente conexo, acotado o no acotado, en el plano complejo $\mathbb{C}$, con frontera Dini-suave a trozos ∂U que admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0, 2] \setminus \{1\}$. Recordemos que distinguimos los puntos de ∂U, los cuales pueden ser aproximados por diferentes sectores curvilíneos de U. En particular, si U tiene cortes, entonces distinguimos los puntos en ambos lados de los cortes.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto finito de ∂U tal que para cada $z \in \mathcal{D}$ existe una unión finita $\mathfrak{L}_z$ de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos en $U \cup \{z\}$ con extremo z que tienen tangentes unilaterales en cada uno de sus puntos. Supongamos que el conjunto $\mathfrak{L} = \bigcup_{z\in\mathcal{D}} \mathfrak{L}_z$ satisface las condiciones ($\mathfrak{L}1$)–($\mathfrak{L}3$).

Los Teoremas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 y 2.2.2 dan la descripción completa de las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)^\pi_z$, para todos los puntos $z \in \overline{U}$. Combinando esos teoremas con el Teorema 3.1.1, inmediatamente establecemos un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$ y un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$ en términos de sus símbolos.

Teorema 3.5.1. *El álgebra cociente C^**

$$\mathfrak{B}^\pi_U := \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U :\ a \in PC(\mathfrak{L})\}/\mathcal{K}(L^2(U)) \subset \mathcal{B}(L^2(U))/\mathcal{K}(L^2(U))$$

es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}^\pi_U)$ del álgebra C^*

$$\mathfrak{D} = \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \mathbb{C}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})} \mathbb{C}^2\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\Big), \tag{3.107}$$

de todos los operadores lineales acotados que actúan en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} := l^2\big(\overline{U}, \mathbb{C}^{n_z}\big) \oplus l^2\big(\partial U \setminus (\mathcal{T}\cup\mathcal{D}),\ \mathbb{C}^2\big) \oplus l^2\big((\mathcal{T}\cup\mathcal{D}) \times \overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big),$$

y el correspondiente isomorfismo

$$\Psi = \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \Psi_z^0\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})} \Psi_z\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}\Big) \tag{3.108}$$

está dado sobre los generadores del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$ por

$$\begin{aligned}
\Psi((aI)^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} \big[a_l(z)\big]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})} \big(a(z), a(z)\big)\Big)\\
&\oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \mathrm{diag}\big\{a_l(z)I_2\big\}_{l=1}^{n_z}\Big) \quad \textit{para} \quad a\in PC(\mathfrak{L}),\\
\Psi(B_U^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} [0]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})} (1,0)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})\times\overline{\mathbb{R}}} M_{\omega_z}(\lambda)\Big),\\
\Psi(\widetilde{B}_U^\pi) :=& \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U}} [0]_{l=1}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})} (0,1)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(z,\lambda)\in(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})\times\overline{\mathbb{R}}} \widetilde{M}_{\omega_z}(\lambda)\Big),
\end{aligned} \tag{3.109}$$

donde las matrices $M_{\omega_z}(\lambda), \widetilde{M}_{\omega_z}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ están definidas por (2.21)–(2.24) *con $\alpha = \alpha_z$, para toda $z\in\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D}$ y toda $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, n_z es el número de componentes conexas D_l del conjunto $V_z\cap(U\setminus\mathfrak{L})$ para una vecindad suficientemente pequeña V_z de un punto $z\in\overline{U}$, $\pi\alpha_z\in(0,2\pi]$ es el ángulo interno de U en un punto $z\in\partial U$, ω_z es la tupla relacionada al punto $z\in\mathfrak{D}$, y $a_l(z) = \lim_{\zeta\to z,\,\zeta\in D_l} a(\zeta)$, para $l = 1,2,\dots,n_z$.*

Un operador $A\in\mathfrak{B}_U$ es de Fredholm en el espacio $L^2(U)$, si y solo si, su símbolo $\Psi(A^\pi)$ es invertible en el álgebra C^* (3.107)*, es decir, si*

$$\begin{aligned}
[\Psi_z^0(A^\pi)]_l \neq 0, &\quad \textit{para toda} \ \ z\in\overline{U} \ \ \textit{y toda} \ \ l = 1,2,...,n_z;\\
[\Psi_z(A^\pi)]_k \neq 0, &\quad \textit{para toda} \ \ z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D}) \ \ \textit{y toda} \ \ k = 1,2;\\
\det[\Psi_{z,\lambda}(A^\pi)] \neq 0, &\quad \textit{para toda} \ \ z\in\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D} \ \ \textit{y toda} \ \ \lambda\in\overline{\mathbb{R}},
\end{aligned}$$

donde $[\Psi_z^0(A^\pi)]_l$ son las l-ésimas entradas del vector $\Psi_z^0(A^\pi)$ y $[\Psi_z(A^\pi)]_k$ son las k-ésimas entradas del vector $\Psi_z(A^\pi)$.

Demostración. Consideremos los homomorfismos $\Psi_z^0 : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{n_z}$ para $z\in\overline{U}$, $\Psi_z : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^2$ para $z\in\partial U\setminus(\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D})$ y $\Psi_{z,\lambda} : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ para $z\in\mathfrak{T}\cup\mathfrak{D}$ y $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, los cuales están dados por (3.109), donde $n_z = 1$ para $z\in\overline{U}\setminus\mathfrak{L}$.

Por el Teorema 3.4.1(i),(ii), para cada $z \in U$, el mapeo $\Psi_z^0 : A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^{n_z}$, mientras que para toda $z \in \partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})$, del Teorema 3.4.1(iii) y Teorema 3.4.2 (en el caso de $\alpha_\infty = 1$), se sigue que el mapeo $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \Psi_z(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$. Luego, por el Teorema 3.4.1(iv), el Teorema 3.4.2 (en el caso de $\alpha_\infty \in (0,2] \setminus \{1\}$) y el Teorema 2.2.2, para toda $z \in \mathcal{T} \setminus \mathfrak{L}$, el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ de $\mathbb{C} \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2\times 2})$, donde $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$ y Φ_{ω_z} está dado por el Teorema 2.2.2 con $\omega := \omega_z = (0, \alpha_z)$, y el isomorfismo-* de $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{S}_{\alpha_z}$ está dado por $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$. Finalmente, por los Teoremas 3.4.1(v), 3.4.3 y 2.2.2, para toda $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$, el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}^{n_z} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ de $\mathbb{C}^{n_z} \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z})$, donde ahora $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\}$ y Φ_{ω_z} está dado por el Teorema 2.2.2 con $\omega := \omega_z = (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_z - 1}, \pi\alpha_z)$, y el isomorfismo-* de $(\mathfrak{B}_U)_z^\pi$ sobre el álgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}^{n_z} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ es también dado por $A_z^\pi \mapsto \Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.1.1, concluimos que el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^*

$$\left(\bigoplus_{z \in U} \mathbb{C}^{n_z}\right) \oplus \left(\bigoplus_{z \in \partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2)\right) \oplus \left(\bigoplus_{z \in \mathcal{T} \cup \mathcal{D}} \left(\mathbb{C}^{n_z} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z \times 2n_z}\right)\right)\right) \tag{3.110}$$

compuesta, para toda $A^\pi \in \mathfrak{B}_U^\pi$, por los elementos $\Psi_z^0(A^\pi)$, para $z \in U$, $\Psi_z^0(A^\pi) \oplus \Psi_z(A^\pi)$, para $z \in \partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})$, y $\Psi_z^0(A^\pi) \oplus \big(\oplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\lambda}(A^\pi)\big)$, para $z \in \mathcal{T} \cup \mathcal{D}$.

Finalmente, se nota que la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^* (3.110) es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$ del álgebra C^* (3.107), donde el isomorfismo Ψ está dado por (3.108) y (3.109). Así, $\mathfrak{B}_U^\pi \cong \Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$, lo cual implica inmediatamente el criterio de Fredholm. ■

Capítulo 4

Álgebras con datos lentamente oscilatorios a trozos sobre dominios con esquinas Dini-suaves

En este capítulo, estaremos considerando a $U \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, acotado o no acotado, con frontera ∂U Dini-suave a trozos, y además, U admite cortes y autointersecciones. Definimos el álgebra C^* $SO_\partial(U)$ de funciones continuas y acotadas definidas en U, que oscilan lentamente en puntos arbitrarios de ∂U y mostramos que $SO_\partial(U)$ está contenida en el álgebra C^* $Q = VMO_\partial(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$ introducida por Kehe Zhu en [46]. Dado un conjunto finito $\mathcal{D} \subset \partial U$, definimos el álgebra C^* $\mathfrak{X}(\mathfrak{L}) \subset L^\infty(U)$ generada por las funciones en $SO_\partial(U)$ y por las funciones en $PC(\mathfrak{L})$ con discontinuidades en una unión finita $\mathfrak{L} \subset U \cup \mathcal{D}$ de curvas Dini-suaves a trozos que tienen tangentes laterales en todo punto, y que no forman cúspides ni son tangentes a ∂U en los puntos de $\mathcal{D} = \mathfrak{L} \cap \partial U$.

Así, estudiamos el álgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \ a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})\} \subset \mathcal{B}(L^2(U))$$

generada por los operadores de multiplicación por funciones que están en el álgebra C^* $\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, por la proyección de Bergman B_U y la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ actuando en el espacio de Lebesgue $L^2(U)$, donde U es un dominio con las características mencionadas y admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0,2] \setminus \{1\}$, y distinguimos los puntos de ∂U que pueden ser aproximados por medio de diferentes sectores curvilíneos de U.

Aplicando resultados de [46] acerca del álgebra C^* Q, el principio local de Allan-Douglas y técnicas de operadores límite, construimos un cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$ y establecemos un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$ en términos de sus símbolos de Fredholm.

4.1 Las álgebras C^* Q y $SO_\partial(\mathbb{D})$

4.1.1 El álgebra C^*Q

Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ el disco unitario abierto en el plano complejo. Siguiendo a [46], definimos

$$\Gamma := \big\{ f \in L^\infty(\mathbb{D}) : \ T_g T_f - T_{gf} \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) \ \text{ para toda } \ g \in L^\infty(\mathbb{D}) \big\}, \quad Q := \Gamma \cap \overline{\Gamma},$$

donde $T_g = B_{\mathbb{D}} g B_{\mathbb{D}} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, para $g \in L^\infty(\mathbb{D})$, es un operador de Toeplitz en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, y $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ es el ideal de operadores compactos en el álgebra C^* $\mathcal{B}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, de operadores lineales acotados en el espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Sea $dA(z) = dxdy$ la medida de área en $\mathbb{D}$. Para cualquier $z \in \mathbb{D}$, se define la caja de Carleson como

$$S_z := \big\{ w \in \mathbb{D} : \ |w| \geq |z|, \ |\arg w - \arg z| \leq \pi(1 - |z|) \big\}. \tag{4.1}$$

Por [46, Theorem 13], $g \in Q$, si y solo si, $g \in VMO_\partial(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$, donde $VMO_\partial(\mathbb{D})$ consiste de todas las funciones $g \in L^1(\mathbb{D})$ para las cuales

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1}{|S_z|} \int_{S_z} \left| g(w) - \frac{1}{|S_z|} \int_{S_z} g(u)dA(u) \right| dA(w) = 0, \tag{4.2}$$

y $|S_z| = \pi(1+|z|)(1-|z|)^2$ es la medida de S_z.

Proposición 4.1.1. *Dada $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, los conmutadores $[aI, B_\mathbb{D}]$ y $[aI, \widetilde{B}_\mathbb{D}]$ son operadores compactos en el espacio $L^2(\mathbb{D})$ si y solo si $a \in Q$.*

Demostración. De acuerdo con [46, Proposition 6], los operadores de Hankel

$$H_a = (I - B_\mathbb{D})aB_\mathbb{D} : \ \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to (I - B_\mathbb{D})L^2(\mathbb{D}),$$
$$H_{\overline{a}} = (I - B_\mathbb{D})\overline{a}B_\mathbb{D} : \ \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to (I - B_\mathbb{D})L^2(\mathbb{D})$$

son compactos para toda $a \in Q$. Entonces, sus operadores adjuntos

$$H_a^* = B_\mathbb{D}\overline{a}(I - B_\mathbb{D}) : (I - B_\mathbb{D})L^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D}),$$
$$H_{\overline{a}}^* = B_\mathbb{D}a(I - B_\mathbb{D}) : (I - B_\mathbb{D})L^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$$

también son compactos. Representando al conmutador $[aI, B_\mathbb{D}]$ en $L^2(\mathbb{D})$ como un operador matriz actuando sobre la suma ortogonal $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus (I - B_\mathbb{D})L^2(\mathbb{D})$ de subespacios de $L^2(\mathbb{D})$, concluimos que el operador

$$[aI, B_\mathbb{D}] = aB_\mathbb{D} - B_\mathbb{D}aI = (I - B_\mathbb{D})aB_\mathbb{D} - B_\mathbb{D}a(I - B_\mathbb{D}) = \begin{bmatrix} 0 & -H_{\overline{a}}^* \\ H_a & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$. Sea $Cf = \overline{f}$ para toda $f \in L^2(\mathbb{D}) \cup L^\infty(\mathbb{D})$. Como

$$[aI, \widetilde{B}_\mathbb{D}] = C[\overline{a}I, B_\mathbb{D}]C,$$

la compacidad del conmutador $[aI, \widetilde{B}_\mathbb{D}]$ en el espacio $L^2(\mathbb{D})$, para cualquier $a \in Q$, se sigue de la parte ya probada, porque $\overline{a} \in Q$, al igual que a.

Recíprocamente, si el conmutador $[aI, B_\mathbb{D}]$ es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{D})$, para $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces los operadores de Hankel H_a y $H_{\overline{a}}$ son compactos debido a (4.3), y por lo tanto $a \in Q$, por [46, Proposition 6]. ■

Así, Q es la subálgebra C^* más grande de $L^\infty(\mathbb{D})$ tal que, para toda $a \in Q$, los conmutadores $[aI, B_\mathbb{D}]$ y $[aI, \widetilde{B}_\mathbb{D}]$ son operadores compactos en el espacio $L^2(\mathbb{D})$.

4.1.2 El álgebra C^* $SO_\partial(\mathbb{D})$

Para toda $a \in \mathbb{C}$ y toda $r > 0$, denotamos por $D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ al disco abierto con centro en a y radio r en el plano complejo $\mathbb{C}$. Dada $\zeta \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ y

$0 < \varrho < r < \infty$, definimos

$$\mathbb{D}(\zeta; \varrho, r) := \overline{(D(\zeta, r) \setminus D(\zeta, \rho)) \cap \mathbb{D}},$$

donde $\overline{Y}$ denota la cerradura de un conjunto $Y \subset \mathbb{C}$. Decimos que una función $g \in C_b(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\zeta\})$ es lentamente oscilatoria en un punto $\zeta \in \mathbb{T}$, si

$$\lim_{r \to 0} \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}(\zeta; r/2, r)} |g(z_1) - g(z_2)| = 0.$$

Sea SO_ζ el conjunto de todas las funciones $g \in C_b(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\zeta\})$ que oscilan lentamente en el punto $\zeta \in \mathbb{T}$, y sea $SO_\partial(\mathbb{D})$ la subálgebra C^* mínima (minimal) de $L^\infty(\mathbb{D})$ que contiene a todos los conjuntos SO_ζ, para $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Es claro que cualquier función $g \in SO_\partial(\mathbb{D})$ puede admitir a lo más un conjunto numerable de puntos $\zeta \in \mathbb{T}$ de discontinuidades lentamente oscilatorias.

Teorema 4.1.1. *Para toda $\zeta \in \mathbb{T}$, el conjunto SO_ζ está contenido en el álgebra C^* Q.*

Demostración. Dada $z \in \mathbb{D}$, consideramos la caja de Carleson $S_z \subset \mathbb{D}$ definida por (4.1) y tomamos un punto $\zeta = e^{i \arg z} \in \mathbb{T}$. Definimos

$$R := \left|\zeta - z e^{i\pi(1-|z|)}\right| = \left|1 - |z| e^{i\pi(1-|z|)}\right|, \quad r := 2\,\mathrm{sen}(\pi(1 - |\mathrm{z}|)/2),$$

y probamos que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$r_z = 2\,\mathrm{sen}(\pi(1 - |\mathrm{z}|)/2) < \mathrm{R_z} = \sqrt{1 - 2|\mathrm{z}| \cos(\pi(1 - |\mathrm{z}|)) + |\mathrm{z}|^2}$$

para toda $|z| \in [1 - \varepsilon_0, 1)$. Esto se sigue de la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{|z| \to 1^-} \frac{4\,\mathrm{sen}^2(\pi(1 - |\mathrm{z}|)/2)}{1 - 2|z| \cos(\pi(1 - |z|)) + |z|^2} \\
&\quad = \lim_{|z| \to 1^-} \frac{-2\pi\,\mathrm{sen}(\pi(1 - |\mathrm{z}|))}{-2\cos(\pi(1 - |z|)) - 2\pi|z|\,\mathrm{sen}(\pi(1 - |\mathrm{z}|)) + 2|\mathrm{z}|} \\
&\quad = \lim_{|z| \to 1^-} \frac{2\pi^2 \cos(\pi(1 - |z|))}{-4\pi\,\mathrm{sen}(\pi(1 - |\mathrm{z}|)) + 2\pi^2|\mathrm{z}| \cos(\pi(1 - |\mathrm{z}|)) + 2} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} < 1.
\end{aligned}$$

Así, $S_z \subset \mathbb{D} \cap D(\zeta, R_z)$, para toda $|z| \in [1 - \varepsilon_0, 1)$.

Tomamos una función $g \in SO_\zeta$, donde $\zeta = e^{i\arg z} \in \mathbb{T}$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ existe un $R_0 \in (0, \sqrt{2-2(1-\varepsilon_0)\cos(\pi\varepsilon_0)}]$ tal que $|g(w)-g(u)| < \varepsilon$, para toda $w, u \in \mathbb{D}(\zeta; R/2, R)$ y toda $R \in (0, R_0)$. Si fijamos $R := R_z \in (0, R_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|S_z|}\int_{S_z}\left|g(w) - \frac{1}{|S_z|}\int_{S_z} g(u)dA(u)\right| dA(w)\\
&\qquad = \frac{1}{|S_z|^2}\int_{S_z}\left|\int_{S_z}[g(w)-g(u)]dA(u)\right| dA(w)\\
&\qquad \le \frac{1}{|S_z|^2}\int_{S_z}\int_{S_z}|g(w)-g(u)|dA(u)\,dA(w).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Definiendo

$$S_n := S_z \cap \mathbb{D}(\zeta; 2^{-n}R, 2^{1-n}R) \ \subset\ \widetilde{S}_n := \overline{D(\zeta, 2^{1-n}R) \setminus D(\zeta, 2^{-n}R)}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, se deduce que $S_z = \bigcup_{n=1}^\infty S_n \subset \widetilde{S} := \bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{S}_n$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{S_z}\int_{S_z}|g(w)-g(u)|dA(u)\,dA(w) &= \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \int_{S_n}\int_{S_k}|g(w)-g(u)|dA(u)\,dA(w)\\
&\le \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \varepsilon(|n-k|+1)\int_{S_n}\int_{S_k} dA(u)\,dA(w)\\
&= \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \varepsilon(|n-k|+1)|S_n|\,|S_k|\\
&\le \varepsilon\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty (|n-k|+1)|\widetilde{S}_n|\,|\widetilde{S}_k|.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Es fácil ver que

$$|\widetilde{S}| = \pi R^2, \quad |\widetilde{S}_n| = \frac{\pi R^2}{4^{n-1}} - \frac{\pi R^2}{4^n} = \frac{3}{4^n}|\widetilde{S}|, \quad \text{para toda } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Entonces, inferimos de (4.5) y de (4.6), que

$$\begin{aligned}
\int_{S_z}\int_{S_z}|g(w)-g(u)|dA(u)\,dA(w) &< \varepsilon\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty (|n-k|+1)\frac{9}{4^{n+k}}|\widetilde{S}|^2\\
&= 9|\widetilde{S}|^2\varepsilon\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \frac{(|n-k|+1)}{4^{n+k}}\\
&= 9|\widetilde{S}|^2\varepsilon\left(2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{4^{2n-1}}\sum_{k=1}^\infty\frac{k}{4^k} - \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{4^{2n}}\right)\\
&= 9|\widetilde{S}|^2\varepsilon\frac{8A-1}{15} = \varepsilon\widetilde{A}|\widetilde{S}|^2,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} < \infty \quad \text{y} \quad \widetilde{A} := \frac{24A-3}{5} < \infty. \tag{4.8}$$

Finalmente, por (4.4), (4.5) y (4.7), obtenemos

$$\frac{1}{|S_z|}\int_{S_z}\left|g(w) - \frac{1}{|S_z|}\int_{S_z} g(u)dA(u)\right| dA(w) < \varepsilon \widetilde{A}\frac{|\widetilde{S}|^2}{|S_z|^2} < \varepsilon\widetilde{A}(\pi^2+1)^2/2 \tag{4.9}$$

para toda $|z| < 1$ suficientemente cercana a 1, porque

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1^-} \frac{|\widetilde{S}|}{|S_z|} &= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\pi(1-2|z|\cos(\pi(1-|z|)) + |z|^2)}{\pi(1+|z|)(1-|z|)^2} \\
&= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{-2\cos(\pi(1-|z|)) - 2\pi|z|\operatorname{sen}(\pi(1-|\mathrm{z}|)) + 2|\mathrm{z}|}{-(1-|z|)(1+3|z|)} \\
&= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{-4\pi\operatorname{sen}(\pi(1-|\mathrm{z}|)) + 2\pi^2\cos(\pi(1-|\mathrm{z}|)) + 2}{(1+3|z|) + 3(|z|-1)} \\
&= (\pi^2+1)/2.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dada $R = R_z \in (0, R_0)$, como la función g es uniformemente continua en el conjunto compacto $\overline{\mathbb{D}} \setminus D(\zeta, R/2)$, se sigue que dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, R/2)$ tal que $|g(z_1) - g(z_2)| < \varepsilon$ para $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(\zeta, R/2)$, siempre que $|z_1 - z_2| < 2\delta$.

Para toda $w \in \mathbb{T}$, consideramos el conjunto $\overline{\mathbb{D} \cap D(w,\delta)}$ y tomamos una caja de Carleson $S_{\widetilde{z}} \subset \overline{\mathbb{D} \cap D(w,\delta)}$, donde $\widetilde{z} = |\widetilde{z}|e^{i \arg w}$ y $|\widetilde{z}|$ es tal que

$$\delta = \sqrt{1 - 2|\widetilde{z}|\cos(\pi(1-|\widetilde{z}|)) + |\widetilde{z}|^2}$$

. Entonces, para $w \in \mathbb{T} \setminus D(\zeta, R)$ y la caja de Carleson asociada $S_{\widetilde{z}}$ contenida en $\overline{\mathbb{D} \cap D(w,\delta)}$, obtenemos la estimación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|S_{\widetilde{z}}|}\int_{S_{\widetilde{z}}}\left|g(v) - \frac{1}{|S_{\widetilde{z}}|}\int_{S_{\widetilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) &\le \frac{1}{|S_{\widetilde{z}}|^2}\int_{S_{\widetilde{z}}}\int_{S_{\widetilde{z}}} |g(v)-g(u)|dA(u)\, dA(v) \\
&< \varepsilon\frac{|S_{\widetilde{z}}|^2}{|S_{\widetilde{z}}|^2} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.11}$$

porque $|g(v) - g(u)| < \varepsilon$ para toda $v, u \in \overline{\mathbb{D} \cap D(w,\delta)}$.

Consideramos los conjuntos

$$\mathbb{D} \cap D(\zeta, \delta) \subset \mathbb{D} \cap D(\zeta, 2\delta) \subset \mathbb{D} \cap D(\zeta, 4\delta).$$

Si $w \in \mathbb{T} \cap \overline{D(\zeta, R) \setminus D(\zeta, 2\delta)}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}}\left|g(v)-\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) &\leq \frac{1}{|S_{\tilde{z}}|^2}\int_{S_{\tilde{z}}}\int_{S_{\tilde{z}}}|g(v)-g(u)|dA(u)\,dA(v)\\ &< 2\varepsilon\frac{|S_{\tilde{z}}|^2}{|S_{\tilde{z}}|^2} = 2\varepsilon \end{aligned}\tag{4.12}$$

porque $|g(v) - g(u)| < 2\varepsilon$, para toda $v, u \in \overline{\mathbb{D} \cap D(w, \delta)}$. Esto se sigue porque el conjunto $\overline{\mathbb{D} \cap D(w, \delta)}$ está contenido en uno o en dos anillos consecutivos $\overline{D(\zeta, 2^{k+1}\delta) \setminus D(\zeta, 2^k\delta)}$ ($k \in \mathbb{N}$), para toda $w \in \mathbb{T} \cap \overline{D(\zeta, R) \setminus D(\zeta, 2\delta)}$.

Finalmente, si $w \in \mathbb{T} \cap D(\zeta, 2\delta)$, entonces la correspondiente caja de Carleson $S_{\tilde{z}}$ está contenida en $\overline{\mathbb{D} \cap D(w, \delta)} \subset \overline{\mathbb{D} \cap D(\zeta, 3\delta)}$, y así, por (4.4), (4.5), (4.7) y (4.9),

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}}\left|g(v)-\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) &\leq \frac{1}{|S_{\tilde{z}}|^2}\int_{S_{\tilde{z}}}\int_{S_{\tilde{z}}}|g(v)-g(u)|dA(u)\,dA(v)\\ &< \varepsilon\widetilde{A}\frac{|\widetilde{S}|^2}{|S_{\tilde{z}}|^2}, \end{aligned}\tag{4.13}$$

donde $\widetilde{A}$ está dada por (4.8), $|S_{\tilde{z}}| = \pi(1 + |\tilde{z}|)(1 - |\tilde{z}|)^2$ y

$$|\widetilde{S}| = \pi(3\delta)^2 = 9\pi(1 - 2|\tilde{z}|\cos(\pi(1 - |\tilde{z}|)) + |\tilde{z}|^2).$$

Entonces, por (4.10),

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{|\widetilde{S}|}{|S_{\tilde{z}}|} = \lim_{|\tilde{z}|\to 1}\frac{9\pi\operatorname{sen}^2(\pi(1-|\tilde{z}|)/2)}{\pi(1+|\tilde{z}|)(1-|\tilde{z}|)^2} = \frac{9(\pi^2+1)}{2}.$$

Esto y (4.13) implican que

$$\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}}\left|g(v)-\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) < \varepsilon\widetilde{A}|\widetilde{S}|^2|S_{\tilde{z}}|^{-2} < 25\varepsilon\widetilde{A}(\pi^2+1)^2. \tag{4.14}$$

Así, inferimos de (4.11), (4.12) y (4.14) que, para toda $w \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}}\left|g(v)-\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) < \varepsilon\max\{1, 2, 25\widetilde{A}(\pi^2+1)^2\},$$

y entonces

$$\lim_{|\tilde{z}|\to 1^-}\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}}\left|g(v)-\frac{1}{|S_{\tilde{z}}|}\int_{S_{\tilde{z}}} g(u)dA(u)\right| dA(v) = 0,$$

lo cual significa, debido a (4.2), que $SO_\zeta \subset Q$. ■

El Teorema 4.1.1 inmediatamente implica lo siguiente.

Corolario 4.1.1. *El álgebra C^* $SO_\partial(\mathbb{D})$ está contenida en el álgebra C^* Q.*

4.2 El espacio de ideales maximales del álgebra $SO_\partial(\mathbb{D})$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ al espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}$. Identificando los puntos $z \in \overline{\mathbb{D}}$ con los funcionales de evaluación δ_z, dados por $\delta_z(f) = f(z)$, para toda $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, obtenemos que $\mathcal{M}(C(\overline{\mathbb{D}})) = \overline{\mathbb{D}}$. Como $C(\overline{\mathbb{D}})$ es una subálgebra C^* del álgebra C^* $SO_\partial(\mathbb{D})$, cualquier funcional δ_z $(z \in \overline{\mathbb{D}})$ se extiende a un funcional lineal multiplicativo en $\mathcal{M}(SO_\partial(\mathbb{D}))$. Para toda $z \in \overline{\mathbb{D}}$, definimos a

$$\mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D})) := \left\{ \xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(\mathbb{D})) : \ \xi|_{C(\overline{\mathbb{D}})} = \delta_z \right\}$$

como la fibra de $\mathcal{M}(SO_\partial(\mathbb{D}))$ sobre z. Así, $\mathcal{M}(SO_\partial(\mathbb{D})) = \bigcup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D}))$.

Dada $\Upsilon := (0, 1]$, definimos el álgebra C^* $SO(\Upsilon)$ de las funciones continuas y acotadas sobre Υ que oscilan lentamente en 0, es decir, son tales que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{t,\tau\in[\lambda r, r]} |f(t) - f(\tau)| = 0, \quad \text{para toda } \ \lambda \in (0, 1). \tag{4.15}$$

Identificando al punto 0 en $\overline{\Upsilon} = [0, 1]$ con el funcional de evaluación δ_0 dado por $\delta_0(f) = f(0)$, para toda $f \in C(\overline{\Upsilon})$, se define la fibra de $\mathcal{M}(SO(\Upsilon))$ sobre 0 como

$$\mathcal{M}_0(SO(\Upsilon)) := \left\{ \xi \in \mathcal{M}(SO(\Upsilon)) : \ \xi|_{C(\overline{\Upsilon})} = \delta_0 \right\}.$$

Por [16, Lemma 2.2], $\mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ es un espacio Hausdorff compacto y conexo.

Por un lado, si $z \in \mathbb{D}$, entonces la fibra $\mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D}))$ consiste de un único funcional de evaluación δ_z, es decir, $\mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D})) = \{z\}$, y entonces $\bigcup_{z\in\mathbb{D}} \mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D})) = \mathbb{D}$. Por otro lado, si $z \in \partial\mathbb{D}$, entonces $\mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D})) = \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$, donde identificamos los caracteres $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D}))$ y $\eta_\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ por medio de la regla: $\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_z)$ para toda $a \in SO_\partial(U)$, donde $\upsilon_z(x) := z(1 - x)$, para toda $x \in \Upsilon$. Así

$$\mathcal{M}(SO_\partial(\mathbb{D})) = \bigcup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D})) = \mathbb{D} \cup \bigsqcup_{z\in\partial\mathbb{D}} \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon)). \tag{4.16}$$

Por [4, Proposition 4.2, Corollary 4.3], tenemos lo siguiente.

Lema 4.2.1. *Sea* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *un subconjunto numerable de* $SO(\Upsilon)$*. Para toda* $\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ *existe una sucesión* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Upsilon$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ *y*

$$\xi(a_k) = \lim_{n\to\infty} a_k(t_n), \quad \textit{para toda} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Recíprocamente, si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Upsilon$*,* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_k(t_n)$ *existe para toda* $k \in \mathbb{N}$*, entonces, existe un caracter* $\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ *tal que* (4.17) *se cumple.*

También necesitamos el siguiente lema basado en (4.15).

Lema 4.2.2. *Si* $a \in SO(\Upsilon)$*,* $\alpha \in (0, 2]$ *y* $\phi_\alpha(x) = x^\alpha$*, para* $x \in \Upsilon$*, entonces* $(a \circ \phi_\alpha) \in SO(\Upsilon)$*.*

4.3 Dominios y coeficientes para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$

4.3.1 El dominio U

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo (acotado o no acotado) con frontera Dini-suave a trozos, ∂U, que admite cortes y autointersecciones, y f un mapeo conforme del disco unitario abierto sobre el dominio $U \subset \mathbb{C}$. Como la frontera de U es una curva, entonces la función f tiene una extensión continua a la cerradura $\overline{\mathbb{D}}$ de $\mathbb{D}$ (ver [28, Section 2.2]). En general, esta extensión no es biyectiva, entonces distinguiremos los puntos $f(z) \in \partial U$ los cuales puedan ser aproximados desde diferentes curvas de U, por ejemplo, distinguiremos dos lados en los cortes que haya. La frontera ∂U, con posibles autointersecciones, puede parametrizarse de manera conforme como $\partial U = \{f(z) : z \in \mathbb{T}\}$.

En este capítulo, vamos a asumir que ∂U admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0, 2] \setminus \{1\}$. Además, el punto ∞ puede pertenecer a ∂U, pero no puede ser un punto interior de U.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto finito de la frontera ∂U tal que cada punto $z \in \mathcal{D}$ existe una unión finita $\mathfrak{L}_z$ de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos en $U \cup \{z\}$ con extremo z y que tienen tangentes laterales en cada uno de sus puntos. Entonces $\mathfrak{L} = \bigcup_{z\in\mathcal{D}} \mathfrak{L}_z$ y $\mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$. Estaremos asumiendo que $\mathfrak{L}$ no contiene cúspides.

Sean $\overline{U} = f(\overline{\mathbb{D}})$ y $PC(\mathfrak{L})$ el álgebra C^* de las funciones continuas $a : \overline{U} \to \mathbb{C}$ que admiten discontinuidades solo en $\mathfrak{L}$, con límites laterales finitos en todo punto $z \in \partial U \cup \mathfrak{L}$ de los sectores curvilíneos de $U \setminus \mathfrak{L}$ contenidos en una vecindad suficientemente pequeña de su vértice z.

Nuevamente, estaremos asumiendo que el conjunto $\mathfrak{L}$ satisface las condiciones ($\mathfrak{L}1$), ($\mathfrak{L}2$) y ($\mathfrak{L}3$), descritas en el Capítulo 3.

Como estamos distinguiendo los puntos $z \in \partial U$ los cuales pueden aproximarse por medio de diferentes sectores curvilíneos de U, entonces las vecindades V_z y V_∞ en ($\mathfrak{L}2$) y ($\mathfrak{L}3$) son, en realidad, sus intersecciones con los sectores curvilíneos de U, ya mencionados.

Así, para una vecindad suficientemente pequeña V_z de cualquier punto $z \in \overline{U}$, el conjunto $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L})$ consiste de $n_z \in \mathbb{N}$ componentes conexas cuyas cerraduras contienen a z. Con todo punto $z \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, asociamos la tupla $\omega_z = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n_z})$, donde $\theta_0 = 0$ y $\theta_{n_z} = \pi\alpha_z$. Claramente, si $z \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $n_z = 1$.

4.3.2 Las álgebras C^* $SO_\partial(U)$, $\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ y $\mathfrak{B}_U$

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, acotado o no acotado, con frontera Dini-suave a trozos ∂U que admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0, 2] \setminus \{1\}$. A tal dominio U le llamaremos *dominio Dini-suave.*

Consideramos la subálgebra C^* $\mathfrak{X}(\mathfrak{L}) \subset L^\infty(U)$ generada por las álgebras C^* $PC(\mathfrak{L})$ y $SO_\partial(U)$, donde el álgebra C^* $SO_\partial(U)$ está definida por

$$SO_\partial(U) = \left\{ a \circ f^{-1} : \; a \in SO_\partial(\mathbb{D}) \right\}, \tag{4.18}$$

y f es un mapeo conforme del disco $\mathbb{D}$ sobre U. Es claro que el conjunto $SO_\partial(\mathbb{D})$ es invariante bajo mapeos conformes $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Entonces, la definición del álgebra C^* $SO_\partial(U)$ no depende de la elección del mapeo conforme $f : \mathbb{D} \to U$. Esto implica la siguiente proposición.

Proposición 4.3.1. *Si $f : U \to V$ es un mapeo conforme de un dominio Dini-suave U sobre un dominio Dini-suave V, entonces $a \mapsto a \circ f$ es una biyección de $SO_\partial(V)$ sobre $SO_\partial(U)$.*

Si un dominio Dini-suave U no tiene cortes ni autointersecciones, podemos definir localmente a $SO_\partial(U)$ de manera similar a $SO_\partial(\mathbb{D})$, usando el Lema 4.2.2.

Dedicaremos lo que resta de este capítulo a estudiar el álgebra C^*

$$\mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : \; a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})\} \subset \mathcal{B}(L^2(U)) \tag{4.19}$$

generada por los operadores de multiplicación por funciones que están en el álgebra C^* $\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, por la proyección de Bergman B_U y la proyección de anti-Bergman $\widetilde{B}_U$ actuando en el espacio de Lebesgue $L^2(U)$, donde U es descrito en esta Sección.

4.3.3 El espacio de ideales maximales del álgebra C^* $SO_\partial(U)$

Identificando los puntos $z \in \overline{U}$ con los funcionales de evaluación δ_z dados por $\delta_z(f) = f(z)$, para $f \in C(\overline{U})$, tenemos que $\mathcal{M}(C(\overline{U})) = \overline{U}$. Como $C(\overline{U}) \subset SO_\partial(U)$, los conjuntos

$$\mathcal{M}_z(SO_\partial(U)) := \left\{\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U)) : \; \xi|_{C(\overline{U})} = \delta_z\right\} \quad (z \in \overline{U})$$

son las fibras del espacio de ideales maximales $\mathcal{M}(SO_\partial(U))$ del álgebra C^* $SO_\partial(U)$. De manera análoga a $\mathcal{M}_z(SO_\partial(\mathbb{D}))$, concluimos que $\mathcal{M}_z(SO_\partial(U)) = \{z\}$ para toda $z \in U$, y $\mathcal{M}_z(SO_\partial(U)) = \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ para toda $z \in \partial U$, donde identificamos los caracteres $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ para $z \in \partial U$ y $\eta_\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ mediante la regla:

$$\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_z) \quad \text{para toda} \quad a \in SO_\partial(U), \tag{4.20}$$

donde $\upsilon_z(x) := f(w_z(1-x))$ para toda $x \in \Upsilon$, $w_z = f^{-1}(z) \in \partial\mathbb{D}$, y $f : \mathbb{D} \to U$ es un mapeo conforme en (4.18). En consecuencia, de manera similar a (4.16), obtenemos que

$$\mathcal{M}(SO_\partial(U)) = \bigcup_{z \in \overline{U}} \mathcal{M}_z(SO_\partial(U)) = U \cup \bigsqcup_{z \in \partial U} \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon)). \tag{4.21}$$

4.4 Tercera aplicación del principio local de Allan-Douglas

De manera análoga a [17, Lemma 8.1] y [10, Lemma 4.1], obtenemos lo siguiente.

Lema 4.4.1. *Si U es un dominio Dini-suave, entonces para cualquier función $a \in SO_\partial(U)$ los conmutadores $[aI, B_U]$ y $[aI, \widetilde{B}_U]$ son compactos en $L^2(U)$.*

Demostración. Por el teorema del mapeo de Riemann, existe un mapeo conforme $\varphi : \mathbb{D} \to U$. Luego, por la Proposición 1.0.1, las siguientes afirmaciones se cumplen:

$$W_\varphi B_U W_\varphi^* = B_\mathbb{D}, \quad \widetilde{W}_\varphi \widetilde{B}_U \widetilde{W}_\varphi^* = \widetilde{B}_\mathbb{D}, \quad W_\varphi a W_\varphi^* = (a \circ \varphi)I, \tag{4.22}$$

donde $a \in SO_\partial(U)$, $\widetilde{W}_\varphi := c_\varphi W_\varphi$ con $c_\varphi := \overline{\varphi'}/\varphi'$, y

$$W_\varphi : \ L^2(U) \to L^2(\mathbb{D}), \quad (W_\varphi f)(z) = \varphi'(z) f(\varphi(z)), \quad \text{para toda} \ \ z \in \mathbb{D}.$$

Así, para toda $a \in SO_\partial(U)$, se deduce que

$$W_\varphi [aI, B_U] W_\varphi^* = [(a \circ \varphi)I, B_\mathbb{D}]. \tag{4.23}$$

Como $a \circ \varphi \in SO_\partial(\mathbb{D})$ siempre que $a \in SO_\partial(U)$ debido a la Proposición 4.3.1, inferimos del Corolario 4.1.1 que $a \circ \varphi \in Q$. Entonces, por la Proposición 4.1.1, el conmutador $[(a \circ \varphi)I, B_\mathbb{D}]$ es compacto en $L^2(\mathbb{D})$, lo cual implica, debido a (4.23), que $[aI, B_U]$ es un operador compacto en $L^2(U)$.

Análogamente, aplicando la segunda igualdad de (4.22), tenemos que $[aI, \widetilde{B}_U]$ es un operador compacto en $L^2(U)$. ■

Repitiendo la prueba del [18, Lemma 2.6], obtenemos.

Lema 4.4.2. *Si $U \subset \mathbb{C}$ un dominio Dini-suave, entonces el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, dada por (4.19), contiene al ideal $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^2(U))$ de los operadores compactos en el álgebra C^* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^2(U))$.*

Para obtener un criterio de Fredholm para los operadores $A \in \mathfrak{B}_U$, necesitamos estudiar la invertibilidad de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}$ en el álgebra C^* cociente $\mathfrak{B}_U^\pi = \mathfrak{B}_U/\mathcal{K}$. Para terminar, aplicaremos a $\mathfrak{B}_U^\pi$ el principio local de Allan-Douglas.

Sean $\mathcal{Z}_U := \{cI : \ c \in SO_\partial(U)\}$ una subálgebra C^* de $\mathcal{B}$, y

$$\Lambda_U := \big\{A \in \mathcal{B} : \ AC - CA \in \mathcal{K} \ \text{ para toda } \ C \in \mathcal{Z}_U\big\},$$

el álgebra C^* que consiste de los *operadores de tipo local con respecto a* $\mathcal{Z}_U$ (ver [33]). Por el Lema 4.4.1, $\mathfrak{B}_U \subset \Lambda_U$ y $\mathcal{Z}_U^\pi := \{(cI)^\pi : \ c \in SO_\partial(U)\}$ es una subálgebra central del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$. Obviamente, el álgebra C^* conmutativa $\mathcal{Z}_U^\pi$ es isomorfa-* al álgebra C^* $SO_\partial(U)$. Por lo tanto, el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}_U^\pi$ es homeomorfo a $\mathcal{M}(SO_\partial(U))$.

Para cada $\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U))$, con $J_{\xi,U}^\pi$ denotamos al ideal bilátero cerrado del álgebra C^* $\Lambda_U^\pi := \Lambda_U/\mathcal{K}$ el cual es generado por el ideal maximal

$$I_{\xi,U}^\pi := \big\{(cI)^\pi : \ c \in SO_\partial(U), \ \xi(c) = 0\big\} \subset \mathcal{Z}_U^\pi.$$

Por [3, Proposition 8.6] y [31, Proposition 2.2.5], tenemos que

$$J_{\xi,U}^\pi = \big\{(cA)^\pi : \ c \in SO_\partial(U), \ \xi(c) = 0, \ A \in \Lambda_U\big\}. \tag{4.24}$$

El principio local de Allan-Douglas (ver [7, Theorem 7.47] y [5, Theorem 1.35]) implica el siguiente criterio de Fredholm.

Teorema 4.4.1. *Un operador $A \in \mathfrak{B}_U$ es Fredholm en $L^2(U)$, si y solo, si para toda $\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U))$ la clase lateral $A_\xi^\pi := A^\pi + J_{\xi,U}^\pi$ es invertible en el álgebra C^* cociente $(\Lambda_U)_\xi^\pi := \Lambda_U^\pi / J_{\xi,U}^\pi$.*

El conjunto $(\mathfrak{B}_U)_\xi^\pi := \{A_\xi^\pi : A \in \mathfrak{B}_U\}$ es una subálgebra C^* de $(\Lambda_U)_\xi^\pi$ (ver, por ejemplo, [5, 1.26(g)]), y por lo tanto, cada clase lateral A_ξ^π asociada con $A \in \mathfrak{B}_U$ es invertible en las álgebras C^* $(\Lambda_U)_\xi^\pi$ y $(\mathfrak{B}_U)_\xi^\pi$, solo simultáneamente.

Decimos que las clases laterales $A^\pi, B^\pi \in \mathfrak{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes en un punto $\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U))$ si $A^\pi - B^\pi \in J_{\xi,U}^\pi$, y en tal caso escribimos $A^\pi \overset{\xi}{\sim} B^\pi$.

De manera similar a [18, Lemma 3.3], obtenemos lo siguiente.

Lema 4.4.3. *Las clases laterales B_U^π y $\widetilde{B}_U^\pi$ son localmente equivalentes a la clase lateral del cero en todo punto $\xi \in U$.*

4.5 Caracterización de las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$

De manera análoga a la Subsección 3.4.2, para caracterizar a las álgebras locales para $z = \infty \in \partial U$, usamos la condición ($\mathfrak{L}3$) y consideramos los mapeos anticonformes $g : V \to U$ y $\widehat{g} : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ dados por $g(w) = 1/\overline{w}$, para toda $w \in V$, y por $\widehat{g}(w) = 1/\overline{w}$, para toda $w \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$. Entonces $g(0) = \infty \in \partial U$, $\widehat{g}(\infty) = 0 \in \partial\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$, y la apertura $\pi\alpha_0$ de $0 \in \overline{V}$ coincide con la apertura $\pi\alpha_\infty$ de $\infty \in \overline{U}$. Por el teorema del mapeo de Riemann, existe un mapeo conforme $\psi : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to V$ tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) \neq 0$.

Nuevamente, por la Subsección 3.4.2, si $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, entonces $0 \in \partial V \cap g^{-1}(\mathfrak{L})$, donde $g^{-1}(\mathfrak{L}) \subset V \cup g^{-1}(\mathcal{T})$ es la unión de un conjunto finito de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos. Tomando el subconjunto $\mathfrak{L}_\infty$ de arcos en $\mathfrak{L}$ con extremo en ∞, vemos que el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ también es la unión de un conjunto finito de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos. Entonces, consideramos la unión $\mathfrak{L}_{\omega_\infty}$ de rayos en $\mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ que son tangentes en el origen a los arcos $(g\circ\psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty)$ y, además, consideramos el difeomorfismo cuasiconforme Dini-suave a trozos σ_0 de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_\infty}$ (ver [1]) sobre sí mismo que envía el conjunto $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \cap D(0, r_0)$ en el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \cap D(0, r_0)$, donde $r_0 > 0$ es suficientemente pequeño, $\frac{\partial\sigma_0}{\partial z}(0) = 1$ y $\frac{\partial\sigma_0}{\partial \overline{z}}(0) = 0$ (ver [10, Lemmas 5.2, 6.3, 6.4]).

En la prueba del siguiente teorema, cuando ocupemos la Proposición 3.4.1, será haciendo uso de σ_0, en lugar de δ_0.

Caracterizaremos a las álgebras locales $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$, para toda $\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U))$, donde $\mathcal{M}(SO_\partial(U))$ está dado por (4.21) y las álgebras $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ consisten de las clases laterales $A^\pi_\xi := A^\pi + J^\pi_{\xi,U}$ para toda $A \in \mathfrak{B}_U$. Si dos álgebras C^* $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son (isométricamente) isomorfas-*, escribiremos $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$.

Teorema 4.5.1. *Sean $z \in \overline{U}$ y $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$. Para el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$ dada por* (4.19), *las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(i) si $z \in U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathbb{C}$;

(ii) si $z \in U \cap \mathfrak{L}$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathbb{C}^{n_z}$, con $n_z \in \mathbb{N}$ dada por la condición ($\mathfrak{L}1$)*;*

(iii) si $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathcal{T})$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathbb{C}^3$;

(iv) si $z \in \mathcal{T} \setminus \mathfrak{L}$*, entonces* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$*;*

(v) si $z \in \partial U \cap \mathfrak{L}$*, entonces* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} := \text{álg}\,\big\{aI, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\big\}$*,*

donde $\mathfrak{L}_{\omega_z} \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0, \infty\}$ *es la unión finita de rayos asociados con la tupla* $\omega_z := (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_z})$ *en virtud de* ($\mathfrak{L}2$) *y* ($\mathfrak{L}3$)*,* $\theta_{n_z} = \pi\alpha_z$*, y* $\alpha_z = 1$ *para* $z \in \partial U \setminus \mathcal{T}$*.*

Demostración. (i)–(ii) Como $\xi = z$ para $z \in U$ y como las funciones $a \in SO_\partial(U)$ están localmente en $PC(\mathfrak{L})$ en vecindades de z, entonces (i)–(ii) se sigue del Teorema 3.4.1, partes (i) y (ii).

(iii)–(iv) Sea $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \{\infty\})$. Entonces, z es una esquina Dini-suave de apertura $\pi\alpha_z$, o $z \in \partial U \setminus \mathcal{T}$ y entonces $\alpha_z = 1$. Para un dominio $U \subset \mathbb{C}$ con frontera Dini-suave a trozos ∂U, consideramos el mapeo conforme $\gamma_z : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$, donde $\mathbb{K}_{\alpha_z}$ está dado por (1.5) con $\alpha = \alpha_z$, y $\mathbb{K}_{\alpha_z} = \Pi$ si $\alpha_z = 1$. Es claro que $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1}$, donde el mapeo conforme $\phi_\alpha : \Pi \to \mathbb{K}_\alpha$ está dado por $\phi_\alpha(w) = w^\alpha$, para $w \in \Pi$ y $\alpha \in (0, 2]$, y $\beta_z : \Pi \to U$ es un mapeo conforme tal que $\beta_z(0) = z$. Aplicando el Teorema 1.4.1, concluimos que la función γ_z' es continua y está separada del 0 y de ∞ en una vecindad del 0 en la cerradura $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$ de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$. Recordemos que γ_z admite una extensión continua de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$ sobre $\overline{U}$, la cual no siempre es biyectiva.

Tomando el operador isométrico

$$W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad f \mapsto \gamma_z'(f \circ \gamma_z), \tag{4.25}$$

deducimos de la Proposición 1.0.1, que para toda $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ se cumple

$$W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a \circ \gamma_z)I, \quad W_{\gamma_z} B_U W_{\gamma_z}^{-1} = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad W_{\gamma_z} \widetilde{B}_U W_{\gamma_z}^{-1} = c_z \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} c_z^{-1} I, \tag{4.26}$$

en donde la función $c_z := \gamma_z' / \overline{\gamma_z'}$ es continua en una vecindad de 0 en $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$.

Fijamos $A \in \mathfrak{B}_U$ y $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$. Si la clase lateral $A^\pi_\xi = A^\pi + J^\pi_{\xi,U} \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ es invertible, entonces, por (4.24), existe un operador $B \in \mathfrak{B}_U$, operadores $D_1, D_2 \in \Lambda_U$, operadores $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(L^2(U))$ y funciones $c_1, c_2 \in SO_\partial(U)$ tales que $\xi(c_1) = \xi(c_2) = 0$ y

$$BA = I + c_1 D_1 + K_1, \quad AB = I + c_2 D_2 + K_2.$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}(W_{\gamma_z}BW_{\gamma_z}^{-1})(W_{\gamma_z}AW_{\gamma_z}^{-1}) &= I+(c_1\circ\gamma_z)\widetilde{D}_1+\widetilde{K}_1,\\ (W_{\gamma_z}AW_{\gamma_z}^{-1})(W_{\gamma_z}BW_{\gamma_z}^{-1}) &= I+(c_2\circ\gamma_z)\widetilde{D}_2+\widetilde{K}_2,\end{aligned}\tag{4.27}$$

donde $c_i\circ\gamma_z\in SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z})$, $\widetilde{D}_i\in\Lambda_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ y $\widetilde{K}_i\in\mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$, para $i=1,2$.

Como $z\in\partial U\setminus(\mathfrak{L}\cup\{\infty\})$, existe una vecindad V_z, de z, tal que $V_z\cap U$ es un conjunto conexo separado de $\mathfrak{L}$ y la restricción de cualquier función $a\in\mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, a este conjunto, pertenece a $SO_\partial(U)$ restringido a $V_z\cap U$. Entonces, $(a\circ\gamma_z)$ pertenece a $SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ restringido al conjunto $\gamma_z^{-1}(V_z\cap U)\subset\mathbb{K}_{\alpha_z}$ cuya cerradura contiene a 0. Luego, para $w\in\mathbb{K}_{\alpha_z}$ suficientemente cercana a cero, de la definición de $SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ y en analogía con $SO_\partial(\mathbb{D})$, se sigue que

$$(a\circ\gamma_z)(w)=\widetilde{a}(|w|)+\varepsilon(w),\tag{4.28}$$

donde la función $\widetilde{a}:=(a\circ\gamma_z)(e^{i\pi\alpha_z/2}(\cdot))$ pertenece a $SO(\Upsilon)$ y $\lim_{w\to0}\varepsilon(w)=0$. Similarmente a (4.20), con cada $\xi\in\mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ asociamos un funcional $\eta_\xi\in\mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ mediante la regla: $\xi(a)=\eta_\xi(a\circ\upsilon_z)$, para toda $a\in SO_\partial(U)$, donde $\upsilon_z(x):=\gamma_z(e^{i\pi\alpha_z/2}x)$, para toda $x\in\Upsilon$. Entonces, de (4.28), se sigue que

$$\xi(a)=\eta_\xi(a\circ\upsilon_z)=\eta_\xi(\widetilde{a}),\quad \text{para toda } \ a\in SO_\partial(U).\tag{4.29}$$

Por el Lema 4.2.1, existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty\subset\Upsilon$ tal que $t_n\to0$ cuando $n\to\infty$ y $\eta_\xi(\widetilde{a})=\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}(t_n)$. Así, de (4.28), (4.15) y (4.29), inferimos que

$$\lim_{n\to\infty}(a\circ\gamma_z)(t_nw)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}(t_n|w|)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{a}(t_n)=\eta_\xi(\widetilde{a})=\xi(a)\tag{4.30}$$

para toda w en subconjuntos compactos de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$.

Ahora, introducimos los operadores unitarios de dilatación

$$U_{t_n}:L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})\to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}),\quad (U_{t_n}f)(w)=t_nf(t_nw)\ \text{ para toda }\ w\in\mathbb{K}_{\alpha_z}.\tag{4.31}$$

Entonces, por (4.30) y por la continuidad de c_z en (4.26), que implica la igualdad

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}(c_zI)U_{t_n}^{-1})=(\gamma_z'(0)/\overline{\gamma_z'(0)})I,$$

inferimos que, para los generadores (4.26) del álgebra C^* $W_{\gamma_z}\mathfrak{B}_U W_{\gamma_z}^{-1}$ se cumple

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}((a\circ\gamma_z)I)U_{t_n}^{-1}) = \xi(a)I \quad (a\in\mathfrak{X}(\mathfrak{L})), \tag{4.32}$$

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}U_{t_n}^{-1}) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}(c_z\widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}c_z^{-1}I)U_{t_n}^{-1}) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}. \tag{4.33}$$

Luego, por el Lema 4.2.1, para toda $A\in\mathfrak{B}_U$, $z\in\partial U\setminus(\mathfrak{L}\cup\{\infty\})$ y $\xi\in\mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_\xi := \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}W_{\gamma_z}AW_{\gamma_z}^{-1}U_{t_n}^{-1}) \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}. \tag{4.34}$$

En analogía con [18, Proposition 7.5], de (4.27) se deduce que $\widehat{B}_\xi\widehat{A}_\xi = I$ y $\widehat{A}_\xi\widehat{B}_\xi = I$. Así, la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi_\xi\in(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ implica la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\xi\in\text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$.

Recíprocamente, la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\xi\in\text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$, asociado con un operador $A\in\mathfrak{B}_U$, implica la invertibilidad del operador

$$W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_\xi W_{\gamma_z} \in \widehat{\mathfrak{B}}_U := \text{álg}\,\{I, B_U, d_z\widetilde{B}_U d_z^{-1}I\},$$

donde $d_z := (\gamma_z^{-1})'/\overline{(\gamma_z^{-1})'}$. Como $(d_zI)^\pi \overset{\xi}{\sim} (\overline{\gamma_z'(0)}/\gamma_z'(0))I^\pi$, entonces $(d_z\widetilde{B}_Ud_z^{-1}I)^\pi \overset{\xi}{\sim} \widetilde{B}_U^\pi$, y como $(aI)^\pi \overset{\xi}{\sim} \xi(a)I^\pi$, para toda $a\in SO_\partial(U)$ y $\xi\in\mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$, concluimos que las álgebras C^* cociente $(\widehat{\mathfrak{B}}_U)^\pi_\xi$ y $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$, coinciden. Por lo tanto, la invertibilidad del operador $W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_\xi W_{\gamma_z}\in\widehat{\mathfrak{B}}_U$ implica la invertibilidad de la clase lateral $(W_{\gamma_z}^{-1}\widehat{A}_\xi W_{\gamma_z})^\pi_\xi = A^\pi_\xi\in(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$.

Así, la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi_\xi\in(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$, para $A\in\mathfrak{B}_U$, es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\xi\in\text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$ dado por (4.34). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi\to\text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$, dado por

$$(aI)^\pi_\xi\mapsto\xi(a)I \;\text{ para }\; a\in SO_\partial(U), \quad (B_U)^\pi_\xi\mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \quad (\widetilde{B}_U)^\pi_\xi\mapsto\widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

es el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi\cong\text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$.

Finalmente, si $\alpha_z = 1$ y $\mathbb{K}_{\alpha_z} = \Pi$, entonces el álgebra C^* álg $\{I, B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi\}$ está generada por las proyecciones ortogonales dos a dos, y no nulas, $B_\Pi, \widetilde{B}_\Pi$ y $I - B_\Pi - \widetilde{B}_\Pi$ (ver, por ejemplo, [40, Theorem 3.3.5]), lo que implica el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi\cong\mathbb{C}^3$.

Si $\infty \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$, entonces $\omega_\infty = (0, \pi\alpha_\infty)$, donde $\alpha_\infty = 1$ si $\infty \notin \mathfrak{T}$. Consideramos a g, ψ, $\widehat{g}$ tal y como se definieron al inicio de esta Sección. Por la Proposición 3.4.1 y su demostración, $\mu_\infty = g \circ \psi \circ \widehat{g}$ es un mapeo conforme de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ sobre U tal que $\mu_\infty(\infty) = \infty$ y $\mu'_\infty(\infty) \notin \{0, \infty\}$. Aplicando el operador isométrico

$$W_{\mu_\infty} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}), \quad f \mapsto \mu'_\infty(f \circ \mu_\infty),$$

de la Proposición 1.0.1, deducimos que

$$\begin{gathered} W_{\mu_\infty}(aI)W_{\mu_\infty}^{-1} = (a \circ \mu_\infty)I \quad \text{para toda} \;\; a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L}), \\ W_{\mu_\infty} B_U W_{\mu_\infty}^{-1} = B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad W_{\mu_\infty} \widetilde{B}_U W_{\mu_\infty}^{-1} = c_\infty \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} c_\infty^{-1} I, \end{gathered} \tag{4.35}$$

donde $c_\infty := \mu'_\infty / \overline{\mu'_\infty}$. Para puntos $w \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ suficientemente cercanos a ∞, de la definición de $SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_\infty})$ y en analogía con $SO_\partial(\mathbb{D})$, se tiene que

$$(a \circ \mu_\infty)(w) = (a \circ \mu_\infty)(e^{i\pi\alpha_\infty/2}|w|) + \varepsilon(w), \tag{4.36}$$

la función $\widehat{a}$ definida por $\widehat{a}(x) := (a \circ \mu_\infty)(e^{i\pi\alpha_\infty/2}x^{-1})$, para $x \in \Upsilon$, pertenece a $SO(\Upsilon)$, y $\text{lím}_{w\to\infty} \varepsilon(w) = 0$. A cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U))$, le asociamos un funcional $\eta_\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ por la regla: $\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_\infty)$, para toda $a \in SO_\partial(U)$, donde $\upsilon_\infty(x) := \mu_\infty(e^{i\pi\alpha_\infty/2}x^{-1})$ para toda $x \in \Upsilon$. Entonces, (4.36) implica que

$$\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_\infty) = \eta_\xi(\widehat{a}), \quad \text{para toda} \;\; a \in SO_\partial(U). \tag{4.37}$$

De manera similar a la prueba para $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \{\infty\})$, para cada $a \in SO_\partial(U)$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \Upsilon$ tal que $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \widehat{a}(t_n) = \eta_\xi(\widehat{a})$. En analogía con (4.30), de (4.36), (4.15) y (4.37), se infiere que

$$\lim_{n\to\infty} (a \circ \mu_\infty)(t_n^{-1}w) = \lim_{n\to\infty} \widehat{a}(t_n|w|^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \widehat{a}(t_n) = \eta_\xi(\widehat{a}) = \xi(a) \tag{4.38}$$

para toda w en subconjuntos compactos de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$.

Tomando para t_n los operadores unitarios $U_{t_n} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ dados por (4.31), de (4.35) (4.38), deducimos que

$$\begin{gathered} \underset{n\to\infty}{\text{s-lím}} (U_{t_n}^{-1}((a \circ \mu_\infty)I)U_{t_n}) = \xi(a)I, \quad \underset{n\to\infty}{\text{s-lím}} (U_{t_n}^{-1}(c_\infty I)U_{t_n}) = (\mu'_\infty / \overline{\mu'_\infty})(\infty)I, \\ \underset{n\to\infty}{\text{s-lím}} (U_{t_n}^{-1} B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} U_{t_n}) = B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \underset{n\to\infty}{\text{s-lím}} (U_{t_n}^{-1}(c_\infty \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} c_\infty^{-1} I)U_{t_n}^{-1}) = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{gathered}$$

Luego, para cada $A \in \mathfrak{B}_U$ existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_\xi := \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n}^{-1} W_{\mu_\infty} A W_{\mu_\infty}^{-1} U_{t_n}) \in \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\}. \tag{4.39}$$

Dada $A \in \mathfrak{B}_U$, de manera similar a la prueba para $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \{\infty\})$, se sigue que la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi_\xi \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\xi$ definido en (4.39), de donde $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\}$. Finalmente, si $\infty \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T})$, entonces $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathbb{C}^3$ en analogía con el caso $z \in \partial U \setminus (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{T})$, porque $\alpha_\infty = 1$ y $\mathbb{K}_{\alpha_\infty} = \Pi$, lo cual completa la prueba de las partes (iii)–(iv).

(v) Ahora tomamos $z \in (\partial U \cap \mathfrak{L}) \setminus \{\infty\}$. De nuevo consideraremos a z como una esquina de apertura $\pi\alpha_z$, donde α_z puede tomar el valor de 1. Por ($\mathfrak{L}2$), asociamos la tupla $\omega_z = (0, \theta_1, \dots, \theta_{n_z})$, con la unión finita $\mathfrak{L}_z \subset U$ de arcos de Jordan Dini-suaves que comienzan en z. Siguiendo a las partes (iii)–(iv), tomamos el mapeo conforme $\gamma_z = \beta_z \circ \phi_{\alpha_z}^{-1} : \mathbb{K}_{\alpha_z} \to U$ tal que $\gamma_z(0) = z$ y $\gamma_z'(0) \neq 0$, y calculamos los límites fuertes $\text{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n} W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1} U_{t_n}^{-1})$ para los generadores A del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, donde los operadores $W_{\gamma_z} : L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z})$ y $U_{t_n} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$ están dados por (4.25) y (4.31), respectivamente. Entonces, obtenemos las igualdades (4.33), mientras que la igualdad (4.32) para $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ es reemplazada por

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}\left(U_{t_n} W_{\gamma_z}(aI) W_{\gamma_z}^{-1} U_{t_n}^{-1}\right) = a_{z,\xi} I,$$

donde la función $a_{z,\xi}$ es constate a trozos y será definida a continuación.

Elegimos una vecindad V_z de z, que satisface la condición ($\mathfrak{L}2$) impuesta sobre $\mathfrak{L}$. Entonces $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z) = \bigcup_{l=1}^{n_z} D_l$, donde $n_z - 1$ es el número de arcos de Jordan Dini-suaves en $\mathfrak{L}_z$ con extremo z y D_l son las componentes conexas de $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z)$. Cualquier función $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ restringida a $V_z \cap U$ es de la forma

$$a|_{V_z \cap U} = \sum_{l=1}^{n_z} a_l \,\chi_{D_l} \quad \text{con} \quad a_l \in SO_\partial(U), \tag{4.40}$$

donde χ_{D_l}, para cada l, es la función característica de D_l. Se sigue que $\widetilde{\mathfrak{L}}_z := \gamma_z^{-1}(\mathfrak{L}_z) = \bigcup_{j=1}^{n_z-1} l_j$ es la unión de $n_z - 1$ arcos de Jordan Dini-suaves a trozos $l_j \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$ que emanan del origen y que tienen en este punto tangentes que contienen a los rayos $\mathcal{L}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n_z - 1$) asociados con la tupla ω_z (ver [10, Lemma 6.4]).

Sea $\mathfrak{L}_{\omega_z} = \bigcup_{j=1}^{n_z-1} \mathcal{L}_j \subset \mathbb{K}_{\alpha_z} \cup \{0\}$. De acuerdo a (4.40), tenemos que

$$\gamma_z^{-1}(V_z \cap U) \setminus \widetilde{\mathfrak{L}}_z = \bigcup_{l=1}^{n_z} \widetilde{R}_l, \quad \mathbb{K}_{\alpha_z} \setminus \mathfrak{L}_{\omega_z} = \bigcup_{l=1}^{n_z} R_l,$$

donde $\widetilde{R}_l := \gamma_z^{-1}(D_l)$, R_l son sectores abiertos de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$ con vértice en origen, los cuales están dados por $R_l := \{z \in \mathbb{K}_{\alpha_z} : \theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\}$, para $l = 1, 2, \ldots, n_z$, y corresponden a los dominios $\widetilde{R}_l$ (los conjuntos D_l, $\widetilde{R}_l$ y R_l están numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj), y $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n_z-1} < \theta_{n_z} = \pi\alpha_z$. Para $l = 1, 2, \ldots, n_z$, con $\chi_{\widetilde{R}_l}$ y χ_{R_l} denotaremos a las funciones características de $\widetilde{R}_l$ y R_l.

Por la parte (v) en la prueba del Teorema 3.4.1, para toda sucesión $\{t_n\} \subset \Upsilon$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y operadores asociados U_{t_n} definidos por (4.31), obtenemos

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \left(U_{t_n} \chi_{\widetilde{R}_l} U_{t_n}^{-1}\right) = \chi_{R_l} I, \quad \text{para toda} \quad l = 1, 2, \ldots, n_z. \tag{4.41}$$

A cada $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ le asociamos el funcional $\eta_\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ tal que $\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_z)$, para toda $a \in SO_\partial(U)$, donde $\upsilon_z(x) = \gamma_z(e^{i\pi\alpha_z/2}x)$, para $x \in \Upsilon$. Como $W_{\gamma_z}(aI)W_{\gamma_z}^{-1} = (a \circ \gamma_z)I$ y como la restricción de la función $a \circ \gamma_z$ al conjunto $\widetilde{V}_z := \gamma_z^{-1}(V_z \cap U)$ puede ser escrita en la forma

$$(a \circ \gamma_z)|_{\widetilde{V}_z} = \sum_{l=1}^{n_z} (a_l \circ \gamma_z)\chi_{\widetilde{R}_l} \quad \text{con} \;\; a_l \in SO_\partial(U), \;\; a_l \circ \gamma_z \in SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \tag{4.42}$$

podemos elegir una sucesión $\{t_n\} \subset \Upsilon$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_l(t_n) = \eta_\xi(\widetilde{a}_l), \quad \text{para toda} \;\; l = 1, 2, \ldots, n_z,$$

donde las funciones $\widetilde{a}_l := a_l \circ \upsilon_z$ pertenecen a $SO(\Upsilon)$. En analogía con (4.28), para cada $l = 1, 2, \ldots, n_z$,

$$(a_l \circ \gamma_z)(w) = \widetilde{a}_l(|w|) + \varepsilon_l(w) \tag{4.43}$$

para toda $w \in \mathbb{K}_{\alpha_z}$ suficientemente cercana a cero, donde $\lim_{w\to 0} \varepsilon_l(w) = 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_l \circ \gamma_z)(t_n w) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_l(t_n|w|) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_l(t_n) = \eta_\xi(\widetilde{a}_l) = \xi(a_l) \tag{4.44}$$

para w en subconjuntos compactos de $\mathbb{K}_{\alpha_z}$. Luego, de (4.41)–(4.44), inferimos que

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \left(U_{t_n} W_{\gamma_z}(aI) W_{\gamma_z}^{-1} U_{t_n}^{-1}\right) = \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \left(U_{t_n}((a \circ \gamma_z)I) U_{t_n}^{-1}\right) = a_{z,\xi} I \tag{4.45}$$

para la función considerada $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, donde la función constante a trozos $a_{z,\xi} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})$ es de la forma

$$a_{z,\xi} = \sum_{l=1}^{n_z} a_l(\xi)\chi_{R_l}, \quad \text{con} \quad a_l(\xi) = \xi(a_l). \tag{4.46}$$

De (4.26), (4.33), (4.45) y (4.46), se sigue que para cada $A \in \mathfrak{B}_U$, $z \in (\partial U \cap \mathfrak{L}) \setminus \{\infty\}$ y $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ existen los límites fuertes

$$\widehat{A}_\xi := \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}(U_{t_n} W_{\gamma_z} A W_{\gamma_z}^{-1} U_{t_n}^{-1}) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

los cuales valen 0 para cualquier operador compacto A debido a [18, Proposition 7.5], y

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\left\{a_z I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : \ a_z \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\right\}, \tag{4.47}$$

Así, el mapeo $A^\pi_\xi \mapsto \widehat{A}_\xi$ es un homomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ sobre el álgbra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$.

Recíprocamente, con cada ideal bilátero cerrado $J^\pi_{\xi,U}$ del álgebra C^* Λ^π_U, la cual está dada por (4.24) para $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ y $z \in \partial U$, asociamos el ideal bilátero cerrado $J^\pi_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ del álgebra C^* $\Lambda^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, la cual está definida por

$$J^\pi_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}} := \left\{(cA)^\pi : \ c \in SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \ c(\widetilde{\xi}) = 0, \ A \in \Lambda_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\right\}, \tag{4.48}$$

donde $\widetilde{\xi} \in \mathcal{M}_0(SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_z}))$ es tal que $\xi(a) = \widetilde{\xi}(a \circ \gamma_z)$, para toda $a \in SO_\partial(U)$. Entonces el mapeo $\widehat{A}_\xi \mapsto (\widehat{A}_\xi)^\pi + J^\pi_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, es un homomorfismo-* del álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ sobre el álgebra C^* $(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi_{\widetilde{\xi}} := \mathfrak{A}^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}/J^\pi_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, donde el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ está dada por (4.47).

Para probar el isomorfismo de álgebras C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \cong \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$, solo resta probar que $(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi_{\widetilde{\xi}} \cong (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$. Por [10, Lemmas 5.2, 6.3, 6.4] y [10, Theorem 6.5], existe un difeomorfismo cuasiconforme Dini-suave a trozos e invertible σ_0 de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_z}$ sobre sí mismo, con Jacobiano positivo J_{σ_0}, tal que $\sigma_0(0) = 0$, $\frac{\partial\sigma_0}{\partial z}(0) = 1$, $\frac{\partial\sigma_0}{\partial \bar{z}}(0) = 0$, $\chi_{\widetilde{R}_l} \circ \sigma_0 = \chi_{R_l}$, para toda $l = 1, 2, \ldots, n_z$, y las clases laterales

$$(\widehat{W}_{\sigma_0} B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \widehat{W}_{\sigma_0}^{-1} - B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi, \quad (\widehat{W}_{\sigma_0} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} \widehat{W}_{\sigma_0}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^\pi,$$
$$(\widehat{W}_{\sigma_0}[(a \circ \gamma_z)I]\widehat{W}_{\sigma_0}^{-1} - a_{z,\xi} I)^\pi$$

pertenecen al ideal $J^{\pi}_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}} = (W_{\gamma_z})^{\pi} J^{\pi}_{\xi,U}(W^{-1}_{\gamma_z})^{\pi}$, donde $\widehat{W}_{\sigma_0} f = J^{1/2}_{\sigma_0}(f \circ \sigma_0)$. Más aún, $J^{\pi}_{\xi,\mathbb{K}_{\alpha_z}} = (\widehat{W}_{\sigma_0})^{\pi} J^{\pi}_{\widetilde{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_z}}(\widehat{W}^{-1}_{\sigma_0})^{\pi}$. Ahora, definimos al operador

$$\widehat{W}_{\lambda_z} :\ L^2(U) \to L^2(\mathbb{K}_{\alpha_z}), \quad \widehat{W}_{\lambda_z} f = J^{1/2}_{\lambda_z}(f \circ \lambda_z), \quad \text{para toda}\ \ f \in L^2(U),$$

donde $\lambda_z := \gamma_z \circ \sigma_0$. De manera similar a la prueba de las partes (iii)–(iv), inferimos que

$$(\widehat{W}_{\lambda_z} B_U \widehat{W}^{-1}_{\lambda_z})^{\pi}_{\widetilde{\xi}} = (B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^{\pi}_{\widetilde{\xi}}, \quad (\widehat{W}_{\lambda_z} \widetilde{B}_U \widehat{W}^{-1}_{\lambda_z})^{\pi}_{\widetilde{\xi}} = (\widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^{\pi}_{\widetilde{\xi}},$$
$$(\widehat{W}_{\lambda_z}(aI)\widehat{W}^{-1}_{\lambda_z})^{\pi}_{\widetilde{\xi}} = (a_{z,\xi} I)^{\pi}_{\widetilde{\xi}},$$

y entonces

$$(\mathfrak{B}_U)^{\pi}_{\xi} \cong (\widehat{W}_{\lambda_z} \mathfrak{B}_U \widehat{W}^{-1}_{\lambda_z})^{\pi}_{\widetilde{\xi}} \cong (\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}})^{\pi}_{\widetilde{\xi}}.$$

Luego, el mapeo $(\mathfrak{B}_U)^{\pi}_{\xi} \to \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$ dado por

$$(aI)^{\pi}_{\xi} \mapsto a_{z,\xi} I \ \ \text{para}\ \ a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L}), \ \ (B_U)^{\pi}_{\xi} \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \ \ (\widetilde{B}_U)^{\pi}_{\xi} \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}},$$

es un isomorfismo de álgebras C^* de $(\mathfrak{B}_U)^{\pi}_{\xi}$ sobre $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}$.

Finalmente, sean $\infty \in \partial U \cap \mathfrak{L}$, $\omega_\infty = (0, \theta_1, \ldots, \theta_{n_\infty - 1}, \pi\alpha_\infty)$ la tupla asociada, por ($\mathfrak{L}3$), con la unión $\mathfrak{L}_\infty$ de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos, y los mapeos g, ψ, σ_0 y $\widehat{g}$ definidos al inicio de esta Sección. Entonces, $g^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \subset V \cup \{0\}$ es la unión de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos que forman en el origen ángulos $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{n_\infty - 1}$, no nulos y distintos dos a dos, con la semivecindad del cero 0 en la curva $\{g^{-1}(\zeta) : \zeta \in \partial U\}$. Sean $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \cup \{0\}$ la unión de rayos que emanan del 0 y que son tangentes en este punto a los arcos que están en $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty)$. Siguiendo la prueba para $z \in (\partial U \cap \mathfrak{L}) \setminus \{\infty\}$, consideramos el mapeo cuasiconforme Dini-suave a trozos e invertible σ_0 de $\overline{\mathbb{K}}_{\alpha_\infty}$ sobre sí mismo y que manda el conjunto $\mathfrak{L}_{\omega_\infty} \cap D(0, r_0)$ en el conjunto $(g \circ \psi)^{-1}(\mathfrak{L}_\infty) \cap D(0, r_0)$, donde $r_0 > 0$ es suficientemente pequeña, $\sigma_0(0) = 0$ y $\frac{\partial \sigma_0}{\partial z}(0) = 1$, $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \overline{z}}(0) = 0$. Entonces, el mapeo cuasiconforme $\lambda_0 := \psi \circ \sigma_0 : \mathbb{K}_{\alpha_\infty} \to U$ tiene el Jacobiano separado del cero y de ∞, en el origen, y, además, $\lambda_0(0) = 0$.

Siguiendo la prueba de [10, Theorem 7.4], definimos los operadores isométricos

$$\widetilde{W}_g : \mathcal{A}^2(U) \to \widetilde{\mathcal{A}}^2(V), \quad (\widetilde{W}_g f)(z) = (-1/\overline{z}^2) f(1/\overline{z}), \ \ \text{para}\ \ z \in V,$$
$$\widetilde{W}_{\widehat{g}} : \mathcal{A}^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}) \to \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}), \quad (\widetilde{W}_{\widehat{g}} f)(z) = (-1/\overline{z}^2) f(1/\overline{z}), \ \ \text{para}\ \ z \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty},$$

lo cual, con $h(z) := z^2/\overline{z}^2$, nos lleva a las identidades:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_g B_U \widetilde{W}_g^{-1} = \widetilde{B}_V, \quad \widetilde{W}_g \widetilde{B}_U \widetilde{W}_g^{-1} = h B_V h^{-1} I, \\ \widetilde{W}_{\widehat{g}} B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \widetilde{W}_{\widehat{g}} \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = h B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} h^{-1} I. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Sean $J^\pi_{\xi,U}$, $J^\pi_{\breve{\xi},V}$, $J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ y $J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, respectivamente, los ideales de Λ^π_U, Λ^π_V, $\Lambda^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ y $\Lambda^\pi_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ de la forma (4.48) con $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U))$, $\breve{\xi} \in \mathcal{M}_0(SO_\partial(V))$, $\widehat{\xi} \in \mathcal{M}_0(SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ y $\xi' \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$. Considerando el operador isométrico $\widehat{W}_{\nu_\infty} := \widetilde{W}_{\widehat{g}} \widehat{W}_{\sigma_0} W_\psi \widetilde{W}_g$ de $L^2(U)$ sobre $L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty})$, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_g J^\pi_{\xi,U} \widetilde{W}_g^{-1} = J^\pi_{\breve{\xi},V}, \quad W_\psi J^\pi_{\breve{\xi},V} W_\psi^{-1} = J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \widehat{W}_{\sigma_0} J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widehat{W}_{\sigma_0}^{-1} = J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad \widetilde{W}_{\widehat{g}} J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} \widetilde{W}_{\widehat{g}}^{-1} = J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Tomando $\lambda_0 = \psi \circ \sigma_0$ y $\widehat{W}_{\lambda_0} := \widehat{W}_{\sigma_0} W_\psi$, deducimos, de manera similar a la prueba de esta parte para $z \neq \infty$, que

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_{\lambda_0} B_V \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}})^\pi \in J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad (\widehat{W}_{\lambda_0} \widetilde{B}_V \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}})^\pi \in J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ (\widehat{W}_{\lambda_0}((a \circ g)I) \widehat{W}_{\lambda_0}^{-1} - (a \circ g \circ \lambda_0)I)^\pi \in J^\pi_{\widehat{\xi},\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Combinando (4.49)–(4.51) y definiendo $d(z) := \lambda_0^2(1/\overline{z})/\overline{\lambda_0^2(1/\overline{z})}$, inferimos que

$$\begin{aligned} \big[\widehat{W}_{\nu_\infty} B_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - h B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} h^{-1} I\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[\widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - d \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} d^{-1} I\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

Aplicando la relación $\big[(d - (\psi'(0)/\overline{\psi'(0)})^2 h)I\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, de la segunda relación en (4.52), deducimos que

$$\big[\widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} - h \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} h^{-1} I\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \tag{4.53}$$

Haciendo uso de (4.52) y (4.53), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \big[h^{-1} \widehat{W}_{\nu_\infty} B_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} h I - B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[h^{-1} \widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} h I - \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}\big]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \\ \big[h^{-1} \widehat{W}_{\nu_\infty} (aI) \widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} h I - (a \circ \nu_\infty) I\big]^\pi = [0]^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

En analogía al caso $\infty \in \partial U \setminus \mathfrak{L}$, con cada $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U))$ le asociamos el funcional $\eta_\xi \in \mathcal{M}_0(SO(\Upsilon))$ tal que $\xi(a) = \eta_\xi(a \circ \upsilon_\infty)$, para toda $a \in SO_\partial(U)$, donde $\upsilon_\infty(x) =$

$\nu_\infty(e^{i\pi\alpha_\infty/2}x^{-1})$, para $x \in \Upsilon$. Como $\widehat{W}_{\nu_\infty}(aI)\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1} = (a\circ\nu_\infty)I$ y la restricción de la función $a\circ\nu_\infty$ al conjunto $\widehat{V}_\infty := \nu_\infty^{-1}(V_\infty \cap U) \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ puede escribirse en la forma

$$(a\circ\nu_\infty)|_{\widehat{V}_\infty} = \sum_{l=1}^{n_\infty}(a_l\circ\nu_\infty)\chi_{R_l} \quad \text{con} \quad a_l \in SO_\partial(U), \tag{4.55}$$

se sigue, para toda $l = 1, 2, \dots, n_\infty$, que

$$(a_l\circ\nu_\infty)(w) = (a_l\circ\nu_\infty)(e^{i\pi\alpha_\infty/2}|w|) + \varepsilon_l(w) \tag{4.56}$$

para toda $w \in \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$ suficientemente cercana a ∞, donde $\text{lím}_{w\to\infty}\varepsilon_l(w) = 0$. Definiendo

$$\widehat{a}_l(x) := (a_l\circ\upsilon_\infty)(x) = (a_l\circ\nu_\infty)(e^{i\pi\alpha_\infty/2}x^{-1}), \quad \text{para} \;\; x\in\Upsilon,$$

concluimos que toda función $\widehat{a}_l$ pertenece a $SO(\Upsilon)$. Así, para toda $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U))$, existe una sucesión $\{t_n\} \subset \Upsilon$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} t_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{a}_l(t_n) = \eta_\xi(\widehat{a}_l) = \eta_\xi(a_l\circ\upsilon_\infty) = \xi(a_l), \quad \text{para toda} \;\; l = 1, 2, \dots, n_\infty.$$

Entonces, de (4.56), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(a_l\circ\nu_\infty)(t_n^{-1}w) = \lim_{n\to\infty}\widehat{a}_l(t_n|w|^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\widehat{a}_l(t_n) = \xi(a_l) \tag{4.57}$$

para toda w en subconjuntos compactos de $\mathbb{K}_{\alpha_\infty}$. Luego, de (4.55)–(4.57), inferimos que

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}\left(U_{t_n}^{-1}\widehat{W}_{\nu_\infty}(aI)\widehat{W}_{\nu_\infty}^{-1}U_{t_n}\right) = \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty}\left(U_{t_n}^{-1}((a\circ\nu_\infty)I)U_{t_n}\right) = a_{\infty,\xi}I \tag{4.58}$$

para toda $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$, donde la función constante a trozos $a_{\infty,\xi}$ es de la forma

$$a_{\infty,\xi} = \sum_{l=1}^{n_\infty} a_l(\xi)\chi_{R_l}, \;\; \text{con} \;\; a_l(\xi) = \xi(a_l) \;\; \text{para} \;\; \xi\in\mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U)), \tag{4.59}$$

los sectores $R_l \subset \mathbb{K}_{\alpha_\infty}$, para $\omega_\infty = (0, \theta_1, \dots, \theta_{n_\infty-1}, \pi\alpha_\infty)$, están dados por

$$R_l = \{z\in\mathbb{K}_{\alpha_\infty} : \;\theta_{l-1} < \arg z < \theta_l\} \quad (l = 1, 2, \dots, n_\infty)$$

Del Lema 4.2.1, en analogía con [18, Proposition 7.5], se sigue que, para toda $\xi' \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ y arbitrarios conjuntos numerables de operadores $K_m \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ y

$C_m \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{K}_{\alpha_\infty}))$ con clases laterales $C_m^\pi \in J^\pi_{\xi',\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, existe una sucesión $\{t_n\} \subset \Upsilon$ tal que $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y

$$\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \big(U_{t_n}^{-1}(C_m + K_m)U_{t_n}\big) = 0. \tag{4.60}$$

Entonces, de (4.54), (4.58) y (4.60), concluimos que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \big(U_{t_n}^{-1}\big[h^{-1}\widehat{W}_{\nu_\infty} B_U \widehat{W}^{-1}_{\nu_\infty} hI\big]U_{t_n}\big) &= B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},\\
\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \big(U_{t_n}^{-1}\big[h^{-1}\widehat{W}_{\nu_\infty} \widetilde{B}_U \widehat{W}^{-1}_{\nu_\infty} hI\big]U_{t_n}\big) &= \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},\\
\operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \big(U_{t_n}^{-1}\big[h^{-1}\widehat{W}_{\nu_\infty} (aI) \widehat{W}^{-1}_{\nu_\infty} hI\big]U_{t_n}\big) &= a_{\infty,\xi} I,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

donde la función $a_{\infty,\xi} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_\infty})$, para $\xi \in \mathcal{M}_\infty(SO_\partial(U))$, está dada por (4.59).

Fijamos $A \in \mathfrak{B}_U$. Si la clase lateral $A^\pi_\xi \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ es invertible, entonces, de (4.60) y (4.61), inferimos que existe el límite fuerte

$$\widehat{A}_\xi := \operatorname*{s-lím}_{n\to\infty} \big(U_{t_n}^{-1}\big[h^{-1}\widehat{W}_{\nu_\infty} A \widehat{W}^{-1}_{\nu_\infty} hI\big]U_{t_n}\big) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \tag{4.62}$$

donde el operador $\widehat{A}_\xi$ es invertible en el álgebra C^* $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ dada por

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} := \text{álg}\,\big\{a_\infty I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}} :\ a_\infty \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_\infty})\big\}. \tag{4.63}$$

Por otro lado, la invertibilidad del operador límite $\widehat{A}_\xi \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, asociado con un operador $A \in \mathfrak{B}_U = \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U : a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})\}$, implica, en vista de (4.54), la invertibilidad de la clase lateral

$$\big(\widehat{W}^{-1}_{\nu_\infty} h \widehat{A}_\xi h^{-1} \widehat{W}_{\nu_\infty}\big)^\pi_\xi \tag{4.64}$$

en el álgebra C^* cociente $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$. De (4.54), se deduce que la clase lateral (4.64) coincide con la clase lateral $A^\pi_\xi \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$.

Por lo tanto, la invertibilidad de la clase lateral $A^\pi_\xi \in (\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$, para $A \in \mathfrak{B}_U$, es equivalente a la invertibilidad del operador $\widehat{A}_\xi \in \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, dado por (4.62). Esto implica que el mapeo $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi \to \mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$, dado por

$$(aI)^\pi_\xi \mapsto a_{\infty,\xi} I \ \text{ para } \ a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L}), \quad (B_U)^\pi_\xi \mapsto B_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}, \quad (\widetilde{B}_U)^\pi_\xi \mapsto \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}},$$

donde la función $a_{\infty,\xi}$ está definida por (4.59), es un isomorfimo entre álgebras C^* de $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ sobre $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_\infty}}$ dada por (4.63), lo cual completa la prueba de la parte (v).

■

4.6 Cálculo simbólico y de Fredholm para el álgebra $C^* \mathfrak{B}_U$

Sea U un dominio simplemente conexo, acotado o no acotado, en el plano complejo $\mathbb{C}$ con frontera Dini-suave a trozos ∂U que admite un conjunto finito $\mathcal{T} \subset \partial U$ de esquinas Dini-suaves con ángulos internos $\pi\alpha_z$ en las esquinas $z \in \mathcal{T}$, donde $\alpha_z \in (0,2] \setminus \{1\}$. Recordemos que distinguimos los puntos de ∂U, los cuales pueden ser aproximados desde diferentes sectores curvilíneos de U. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto finito de ∂U y ($\mathfrak{L}1$)–($\mathfrak{L}3$) se cumple para el conjunto $\mathfrak{L} = \bigcup_{z \in \mathcal{D}} \mathfrak{L}_z$, donde $\mathfrak{L}_z$ es una unión finita de arcos de Jordan Dini-suaves a trozos en $U \cup \{z\}$, con extremo en z, que tienen tangentes laterales en cada uno de sus puntos.

Toda función $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ está representada de manera única en vecindades pequeñas de puntos $z \in \overline{U}$, en la forma $a = \sum_{l=1}^{n_z} a_l \chi_{D_l}$, donde χ_{D_l} son las funciones características de las componentes conexas D_l de $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L}_z)$, $a_l \in C(U)$ si $z \in U$, y $a_l \in SO_\partial(U)$ si $z \in \partial U$. Esto nos lleva a definir los valores $a_l(\xi)$ para toda $a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})$ y $\xi \in \mathcal{M}(SO_\partial(U))$, como $a_l(\xi) = \lim_{\zeta \to z,\, \zeta \in D_l} a(\zeta)$ si $\xi = z \in U$, y por $a_l(\xi) = \eta_\xi(a_l \circ v_z)$ si $\xi \in \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$ y $z \in \partial U$, y $a(\xi) = a_1(\xi)$ si $n_z = 1$. También definimos

$$\Omega_{\partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})} := \bigcup_{z \in \partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})} \mathcal{M}_z(SO_\partial(U)), \quad \Omega_z := \mathcal{M}_z(SO_\partial(U)). \tag{4.65}$$

Ahora consideramos los espacios de Hilbert no separables

$$l^2\big(\Omega_z,\, \mathbb{C}^{n_z}\big), \quad l^2\big(\Omega_{\partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})},\, \mathbb{C}^2\big), \quad l^2\big(\Omega_z \times \overline{\mathbb{R}},\, \mathbb{C}^{2n_z}\big)$$

que consisten, respectivamente, de las funciones vectoriales $f_z : \xi \mapsto \big\{f_{z,k}(\xi)\big\}_{k=1}^{n_z}$ definidas en el conjunto Ω_z, $g : \xi \mapsto \big\{g_k(\xi)\big\}_{k=1}^{2}$ definidas en $\Omega_{\partial U \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{D})}$, y $h_z : (\xi, \lambda) \mapsto \big\{h_{z,k}(\xi,\lambda)\big\}_{k=1}^{2n_z}$ definidas en $\Omega_z \times \overline{\mathbb{R}}$, donde estas funciones vectoriales tienen conjuntos a lo más numerables de valores no nulos y están dotados con las normas

$$\|f_z\|_{l^2(\Omega_z,\, \mathbb{C}^{n_z})} := \left(\sum_{\xi \in \Omega_z} \sum_{k=1}^{n_z} |f_{z,k}(\xi)|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|g\|_{l^2(\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})},\,\mathbb{C}^2)} := \left(\sum_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}}\sum_{k=1}^{2}|g_k(\xi)|^2\right)^{1/2},$$

$$\|h_z\|_{l^2(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\,\mathbb{C}^{2n_z})} := \left(\sum_{(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}}\sum_{k=1}^{2n_z}|h_{z,k}(\xi,\lambda)|^2\right)^{1/2}.$$

De manera análoga, definimos los espacios de Hilbert

$$l^2\big(\overline{U},\, l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})\big), \quad l^2\big(\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\, l^2(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\,\mathbb{C}^{2n_z})\big)$$

de funciones $f : z \mapsto f_z$ definidas en el conjunto $\overline{U}$, donde $f_z \in l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})$, y funciones $h : z \mapsto h_z$ definidas en $\mathcal{T}\cup\mathcal{D}$, con $h_z \in l^2(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\,\mathbb{C}^{2n_z})$, donde estas funciones también tienen conjuntos a lo más numerables de valores no nulos, lo cual implica que sus normas

$$\|f\| := \left(\sum_{z\in\overline{U}}\|f_z\|^2_{l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})}\right)^{1/2}, \quad \|h\| := \left(\sum_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D}}\|h_z\|^2_{l^2(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\,\mathbb{C}^{2n_z})}\right)^{1/2}.$$

están bien definidas.

Con el álgebra C^* $\mathfrak{B}_U$, asociamos el álgebra C^*

$$\mathfrak{D} := \left(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z}\mathbb{C}^{n_z}\right)\oplus\left(\bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}}\mathbb{C}^2\right)\oplus\left(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}}\mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\right)$$

de los operadores lineales acotados que actúan sobre el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} := l^2\big(\overline{U},\, l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})\big)\oplus l^2\big(\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})},\,\mathbb{C}^2\big)\oplus l^2\big(\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\, l^2(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\,\mathbb{C}^{2n_z})\big),$$

donde los operadores $A\in\mathfrak{D}$ actúan en los subespacios de $\mathcal{H}$ de la siguiente manera.

Un operador $A\in\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z}\mathbb{C}^{n_z}$ que actúa en el espacio $l^2\big(\overline{U},\, l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})\big)$ es de la forma $A=\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z}A_{z,\xi}$, donde $A_{z,\xi}$ son operadores de multiplicación en $\mathbb{C}^{n_z}$ por los vectores $A_{z,\xi}=\{A_{z,\xi,k}\}_{k=1}^{n_z}\in\mathbb{C}^{n_z}$ dotados con la norma $\|A_{z,\xi}\|=\max\{|A_{z,\xi,k}| : k=1,2,\dots,n_z\}$ y la multiplicación de dos vectores en $\mathbb{C}^{n_z}$, es entrada a entrada. Así, A actúa sobre funciones vectoriales $f\in l^2\big(\overline{U},\, l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})\big)$ con valores $f_z\in l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z})$ por medio de la regla: para toda $z\in\overline{U}$ y toda $\xi\in\Omega_z$,

$$(Af)(z) := (Af)_z \in l^2(\Omega_z,\,\mathbb{C}^{n_z}) \;\text{ y }\; [(Af)_z](\xi) := A_{z,\xi}f_z(\xi)\in\mathbb{C}^{n_z}.$$

Un operador $A \in \bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}} \mathbb{C}^2$ que actúa en el espacio $l^2\big(\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})},\ \mathbb{C}^2\big)$ tiene la forma $A = \bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}} A_\xi$, donde A_ξ son operadores de multiplicación por vectores $A_\xi = \{A_{\xi,k}\}_{k=1}^2 \in \mathbb{C}^2$ con la norma $\|A_\xi\| = \max\{|A_{\xi,1}|, |A_{\xi,2}|\}$; y A actúa en funciones vectoriales $g \in l^2\big(\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})},\ \mathbb{C}^2\big)$ con la regla:

$$(Af)(\xi) := A_\xi g(\xi) \ \text{ para toda } \ \xi \in \Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}.$$

Finalmente, un operador $A \in \bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ que actúa en el espacio $l^2\big(\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\ l^2\big(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)\big)$ es de la forma $A = \bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}} A_{z,\xi,\lambda}$, donde $A_{z,\xi,\lambda}$ son operadores de multiplicación por matrices $A_{z,\xi,\lambda} \in \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$, y A actúa en funciones vectoriales $f \in l^2\big(\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\ l^2\big(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)\big)$ con valores $f_z \in l^2\big(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)$ por medio de la regla: para toda $z \in \mathcal{T}\cup\mathcal{D}$ y toda $(\xi,\lambda) \in \Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}$,

$$(Af)(z) := (Af)_z \in l^2\big(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big), \quad [(Af)_z](\xi,\lambda) := A_{z,\xi,\lambda} f_z(\xi,\lambda) \in \mathbb{C}^{2n_z}.$$

El siguiente teorema es el resultado principal de toda esta tesis.

Teorema 4.6.1. *El álgebra C^* cociente*

$$\mathfrak{B}_U^\pi := \text{álg}\,\{aI, B_U, \widetilde{B}_U :\ a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L})\}/\mathcal{K}(L^2(U)) \subset \mathcal{B}^\pi(L^2(U))$$

es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}_U^\pi)$ del álgebra C^*

$$\mathfrak{D} = \Bigg(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z} \mathbb{C}^{n_z}\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}} \mathbb{C}^2\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\Bigg), \tag{4.66}$$

de todos los operadores lineales acotados que actúan en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} := l^2\big(\overline{U},\ l^2\big(\Omega_z,\ \mathbb{C}^{n_z}\big)\big) \oplus l^2\big(\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})},\ \mathbb{C}^2\big) \oplus l^2\big(\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\ l^2\big(\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\ \mathbb{C}^{2n_z}\big)\big),$$

y el correspondiente isomorfismo

$$\Psi = \Bigg(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z} \Psi_{z,\xi}\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}} \Psi_\xi\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\xi,\lambda}\Bigg) \tag{4.67}$$

está dado sobre los generadores del álgebra C^* $\mathfrak{B}_U^\pi$ por

$$\begin{aligned}\Psi((aI)^\pi) :=& \Bigg(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z} \big[a_l(\xi)\big]_{l=1}^{n_z}\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}} \big[a(\xi), a(\xi)\big]\Bigg)\\ &\oplus \Bigg(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}} \text{diag}\big\{a_l(\xi)I_2\big\}_{l=1}^{n_z}\Bigg), \quad \textit{para toda } \ a \in \mathfrak{X}(\mathfrak{L}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(B_U^\pi) &:= \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z}[0]_{l=1}^{n_z}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}}[1,0]\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}}M_{\omega_z}(\lambda)\Big),\\ \Psi(\widetilde{B}_U^\pi) &:= \Big(\bigoplus_{z\in\overline{U},\,\xi\in\Omega_z}[0]_{l=1}^{n_z}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}}[0,1]\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,(\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}}}\widetilde{M}_{\omega_z}(\lambda)\Big),\end{aligned} \tag{4.68}$$

donde las matrices $M_{\omega_z}(\lambda), \widetilde{M}_{\omega_z}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ están definidas por (2.21)–(2.24) con $N = n_z$, $\alpha = \alpha_z$ y $\omega = \omega_z$, para toda $z \in \mathcal{T}\cup\mathcal{D}$ y toda $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, n_z es el número de componentes conexas D_l del conjunto $V_z \cap (U \setminus \mathfrak{L})$ para una vecindad suficientemente pequeña V_z de un punto $z \in \overline{U}$, $\pi\alpha_z \in (0, 2\pi]$ es el ángulo interno de U en el punto $z \in \partial U$, y ω_z es la tupla relacionada al punto $z \in \mathcal{D}$.

Un operador $A \in \mathfrak{B}_U$ es Fredholm en el espacio $L^2(U)$, si y solo si, su símbolo $\Psi(A^\pi)$ es invertible en el álgebra C^* (4.66), es decir, si

$$\begin{aligned}[\Psi_{z,\xi}(A^\pi)]_l &\neq 0, \ \ \textit{para toda} \ \ z\in U, \ \ \textit{toda} \ \ \xi\in\Omega_z \ \ \textit{y toda} \ \ l=1,2,...,n_z;\\ [\Psi_\xi(A^\pi)]_k &\neq 0, \ \ \textit{para toda} \ \ \xi\in\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})} \ \ \textit{y toda} \ \ k=1,2;\\ \det[\Psi_{z,\xi,\lambda}(A^\pi)] &\neq 0, \ \ \textit{para toda} \ \ z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D} \ \ \textit{y toda} \ \ (\xi,\lambda)\in\Omega_z\times\overline{\mathbb{R}},\end{aligned}$$

donde $[\Psi_{z,\xi}(A^\pi)]_l$ son las l-ésimas entradas del vector $\Psi_{z,\xi}(A^\pi)$ y $[\Psi_\xi(A^\pi)]_k$ son las k-ésimas entradas del vector $\Psi_\xi(A^\pi)$.

Demostración.

Consideremos los homomorfismos $\Psi_{z,\xi} : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{n_z}$ para $z \in \overline{U}$ y $\xi \in \Omega_z$, donde $\Omega_z = \mathcal{M}_z(SO_\partial(U))$, $\Psi_\xi : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^2$ para $\xi \in \Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}$ y $\Psi_{z,\xi,\lambda} : \mathfrak{B}_U^\pi \to \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}$ para $z \in \mathcal{T}\cup\mathcal{D}$ y $(\xi,\lambda) \in \Omega_z \times \overline{\mathbb{R}}$, los cuales están dados por (4.68), donde $\Omega_{\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D})}$ está definido en (4.65), y $n_z = 1$ para $z \in \overline{U} \setminus \mathfrak{L}$.

Por el Teorema 4.5.1(i),(ii), para toda $z = \xi \in U$ el mapeo $\Psi_{z,\xi} : A_\xi^\pi \mapsto \Psi_{z,\xi}(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_\xi^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^{n_z}$, mientras que para toda $z \in \partial U \setminus (\mathcal{T}\cup\mathcal{D})$ y $\xi \in \Omega_z$, del Teorema 4.5.1(iii), se sigue que el mapeo $A_\xi^\pi \mapsto \Psi_{z,\xi}(A^\pi) \oplus \Psi_\xi(A^\pi)$ es un isomorfismo-* del álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_\xi^\pi$ sobre el álgebra C^* $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^2$. Además, por los Teoremas 4.5.1(iv) y 2.2.2, para toda $z \in \mathcal{T}\setminus\mathfrak{L}$ y $\xi \in \Omega_z$ el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)_\xi^\pi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}\oplus\mathfrak{S}_{\omega_z}$ de $\mathbb{C}\oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2\times 2})$, donde

$\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\{I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}\}$ y Φ_{ω_z} están dadas por el Teorema 2.2.2 con $\omega := \omega_z = (0, \pi\alpha_z)$, y el isomorfismo-* de $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ sobre el álgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ esá dado por

$$A^\pi_\xi \mapsto \Psi_{z,\xi}(A^\pi) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\xi,\lambda}(A^\pi)\Big). \tag{4.69}$$

Finalmente, por los Teoremas 4.5.1(v) y 2.2.2, para toda $z \in \mathcal{D} = \partial U \cap \mathfrak{L}$ y toda $(\xi, \lambda) \in \Omega_z \times \overline{\mathbb{R}}$ el álgebra C^* $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}^{n_z} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ de $\mathbb{C}^{n_z} \oplus C(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z})$, donde ahora $\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} = \text{álg}\,\big\{a_z I, B_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}, \widetilde{B}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}} : a_z \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_{\omega_z})\big\}$ y Φ_{ω_z} está dado por el Teorema 2.2.2 con $\omega := \omega_z = (0, \theta_1, \dots, \theta_{n_z-1}, \pi\alpha_z)$, y el isomorfismo-* de $(\mathfrak{B}_U)^\pi_\xi$ sobre el álgebra C^* $\Phi_{\omega_z}(\mathfrak{A}_{\mathbb{K}_{\alpha_z}}) = \mathbb{C}^{n_z} \oplus \mathfrak{S}_{\omega_z}$ también está dado por (4.69).

Entonces, aplicando el Teorema 4.4.1, concluimos que el álgebra C^* $\mathfrak{B}^\pi_U$ es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^*

$$\begin{gathered}\Big(\bigoplus_{z\in U,\,\xi\in\Omega_z} \mathbb{C}^{n_z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D}),\,\xi\in\Omega_z} \big(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^2\big)\Big) \\ \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,\xi\in\Omega_z} \Big(\mathbb{C}^{n_z} \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{C}^{2n_z\times 2n_z}\Big)\Big)\Big)\end{gathered} \tag{4.70}$$

compuesta, para toda $A^\pi \in \mathfrak{B}^\pi_U$, por los elementos

$$\begin{gathered}\Big(\bigoplus_{z=\xi\in U} \Psi_{z,\xi}(A^\pi)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\partial U\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{D}),\,\xi\in\Omega_z} \big(\Psi_{z,\xi}(A^\pi) \oplus \Psi_\xi(A^\pi)\big)\Big) \\ \oplus \Big(\bigoplus_{z\in\mathcal{T}\cup\mathcal{D},\,\xi\in\Omega_z} \Big(\Psi_{z,\xi}(A^\pi) \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}} \Psi_{z,\xi,\lambda}(A^\pi)\Big)\Big)\Big)\end{gathered}$$

Es claro que la subálgebra C^* $\widetilde{\mathfrak{B}}_U$ del álgebra C^* dada por (4.70) es isomorfa-* a la subálgebra C^* $\Psi(\mathfrak{B}^\pi_U)$ del álgebra C^* (4.66), donde el isomorfismo Ψ está dado por (4.67) y (4.68). Por lo tanto, $\mathfrak{B}^\pi_U \cong \Psi(\mathfrak{B}^\pi_U)$, lo cual implica el correspondiente criterio de Fredholm y completa la prueba. ■

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.V., *Lectures on Quasiconformal Mappings.* D. Van Nostrand, Princeton, NJ (1966).

[2] S. Axler, *Bergman Spaces and their operators.* Survey of Some Recent Results in Operator Theory, Vol. I (J. B. Conway and B. B. Morrel, eds.) Pitman research Notes in Math. No. 171, John Wiley & Sons, New York, 1988, pp. 1-50.

[3] A. Böttcher and Yu. I. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators.* Progress in Mathematics **154**, Birkhäuser, Basel, 1997.

[4] Böttcher, A., Karlovich, Yu.I., Rabinovich, V.S., *The method of limit operators for one-dimensional singular integrals con slowly oscillating data.* J. Oper. Theory **43**, 171–198 (2000)

[5] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators.* 2nd edn. Springer, Berlin, 2006.

[6] A. Dzhuraev, *Methods of Singular Integral Equations.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[7] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory.* Academic Press, New York, 1972.

[8] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces.* Amer. Math. Soc., Providence, RI 2004.

[9] Espinoza-Loyola, E., Karlovich, Yu.I., *C^*-algebras of Bergman type operators with piecewise continuous coefficients over bounded polygonal domains*. Oper. Theory Adv. Appl. vol. 258, 145–171, Birkhäuser, Basel (2017)

[10] Espinoza-Loyola, E. and Karlovich, Yu.I., *C^*-algebras of Bergman type operators with piecewise continuous coefficients over domains with Dini-smooth corners.* Complex Anal. Oper. Theory **13**, 151–192 (2019)

[11] Espinoza-Loyola, E. and Karlovich, Yu.I., *C^*-algebras of Bergman type operators with piecewise slowly oscillating coefficients over domains with Dini-smooth corners.* Aceptado para su publicación en la revista: Integral Equations and Operator Theory.

[12] Espinoza-Loyola, E., Karlovich, Yu.I., Vilchis-Torres, O., *C^*-algebras of Bergman type operators with piecewise constant coefficients over sectors.* Integral Equ. Oper. Theory **83**, 243–269 (2015)

[13] H. Hedelman, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces.* Springer-Verlag, New York 2000.

[14] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.* Vols. 1-4. Springer, Berlin, 1983-1985.

[15] A. N. Karapetyants, V. S. Rabinovich, and N. L. Vasilevski, *On algebras of two dimensional singular integral operators con homogeneous discontinuities in symbols.* Integr. Equ. Oper. Theory **40** (2001), 278–308.

[16] Karlovich, A.Yu., Karlovich, Yu.I., Lebre, A.B., *Necessary conditions for Fredholmness of singular integral operators con shifts and slowly oscillating data.* Integral Equ. Oper. Theory **71**, 29–53 (2011)

[17] Yu. I. Karlovich, *C^*-algebras of Bergman type operators con continuous coefficients on polygonal domains.* Operators and Matrices **9** (2015), 773–802.

[18] Yu. I. Karlovich and L. Pessoa, *Algebras generated by Bergman and anti-Bergman projections and by multiplications by piecewise continuous coefficients.* Integr. Equ. Oper. Theory **52** (2005), 219–270.

[19] Yu. I. Karlovich and L. V. Pessoa, *C^*-algebras of Bergman type operators con piecewise continuous coefficients.* Integr. Equ. Oper. Theory **57** (2007), 521–565.

[20] Yu. I. Karlovich and L. V. Pessoa, *Poly-Bergman projections and orthogonal decompositions of L^2-spaces over bounded domains.* Operator Theory: Advances and Applications **181** (2008), 263–282.

[21] Yu. I. Karlovich and L. V. Pessoa, *C^*-algebras of Bergman type operators con piecewise continuous coefficients on bounded domains.* In: "More Progresses in Analysis (Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy, July 25–30, 2005)", pp. 339–348. World Scientific, Singapore, 2009.

[22] M. Loaiza, *Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions.* Integr. Equ. Oper. Theory **46** (2003), 215–234.

[23] M. Loaiza, *On the algebra generated by the harmonic Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions.* Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **10** (2004), 179–193.

[24] M. Loaiza, *On an algebra of Toeplitz operators con piecewise continuous symbols.* Integr. Equ. Oper. Theory **51** (2005), 141–153.

[25] S. G. Mikhlin, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations.* Pergamon Press, Oxford, 1965.

[26] S. G. Mikhlin and S. Prössdorf, *Singular Integral Operators.* Springer, Berlin, 1986.

[27] B. A. Plamenevsky, *Algebras of Pseudodifferential Operators.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[28] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[29] V. S. Rabinovich, S. Roch, and B. Silbermann, *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory.* Operator Theory: Advances and Applications **150**, Birkhäuser, Basel, 2004.

[30] J. Ramírez, I. M. Spitkovsky, *On the algebra generated by the poly-Bergman projection and a composition operator.* Factorization, Singular Operators and Related Problems, Proc. of the Conf. in Honour of Professor Georgii Litvinchuk, (eds. S. Samko, A. Lebre, and A. F. dos Santos), (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, ondon, 2003) pp. 273–289.

[31] S. Roch, P. A. Santos, and B. Silbermann, *Non-commutative Gelfand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts.* Springer, London, 2011.

[32] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory.* Springer, Berlin 1987.

[33] I. B. Simonenko and Chin Ngok Min, *A Local Method in the Theory of One-Dimensional Singular Integral Equations con Piecewise Continuous Coefficiens. Noetherity.* University Press, Rostov on Don, 1986 (Russian).

[34] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1993.

[35] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators.* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1981.

[36] M. E. Taylor, *Tools for PDE. Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators, and Layer Potentials.* American Mathematical Society, Providence, RI 2000.

[37] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable.* Pergamon Press, Oxford, 1963.

[38] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators.* Vols. 1 and 2. Plenum Press, New York 1982.

[39] N. L. Vasilevski, *Banach algebras generated by two-dimensional integral operators con a Bergman kernel and piecewise continuous coefficients. I.* Soviet Math. (Izv. VUZ) **30** (1986), No. 2, 14–24.

[40] N. L. Vasilevski, *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space.* Birkhäuser, Basel, 2008.

[41] N. L. Vasilevski, *On the structure of Bergman and poly-Bergman spaces.* Integr. Equ. Oper. Theory **33** (1999), 471–488.

[42] N. L. Vasilevski, *Poly-Bergman spaces and two-dimensional singular integral operators.* In: The Extended Field of Operator Theory (ed. M. A. Dritschel), Operator Theory: Advances and Applications **171** (2006), 349–359.

[43] N. L. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Bergman spaces: Inside-the-domain effects.* Contemporary Mathematics **289** (2001), No. 2, 79– 146.

[44] N. L. Vasilevski, *C^*-algebras generated by orthogonal projections and their applications.* Integr. Equ. Oper. Theory **31** (1998), 113–132.

[45] Kehe Zhu, *Operator Theory in Function Spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[46] Zhu, K., *VMO, ESV, and Toeplitz operators on the Bergman space*. Trans.Amer. Math. Soc. **302**, 617–645 (1987)