



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

*EL n -ÉSIMO PSEUDOHIPERESPACIO SUSPENSIÓN
DE GRÁFICAS FINITAS Y DENDRITAS*

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ULISES MORALES FUENTES

DIRECTOR DE TESIS
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.
DR. JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
UNAM.

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE, 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

El n -ésimo Pseudohiperespacio Suspensión de Gráficas Finitas y Dendritas

Ulises Morales Fuentes

2 de septiembre de 2019

Resumen

Sean X un continuo métrico, n un entero positivo, $C_n(X)$ el espacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n componentes y $F_n(X)$ el conjunto de subconjuntos no vacíos con a lo más n elementos de X . El n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de X es el espacio cociente $C_n(X)/F_1(X)$, el cual será denotado como $PHS_n(X)$. En este trabajo demostramos lo siguiente:

- Si X es una gráfica finita y Y es un continuo tal que $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .
- Si X y Y son dendritas cuyos conjuntos de puntos extremos son cerrados y éstas son tales que $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(Y)$, entonces X es homeomorfa a Y .
- Si X es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado y Y es un continuo tal que $PHS_2(X)$ es homeomorfo a $PHS_2(Y)$, entonces X es homeomorfa a Y .

Adicionalmente, presentamos nuevas clases de continuos para las cuales el espacio cociente $HS_n(X)$ (definido como $C_n(X)/F_n(X)$) no es homeomorfo a $PHS_n(X)$: continuos localmente conexos que contienen una curva cerrada simple \mathcal{S} , tal que \mathcal{S} es la unión de dos arcos libres maximales; y, para el caso $n = 2$, las gráficas finitas diferentes de un k -odo simple, con al menos un punto de ramificación.

Índice general

Índice general	II
Introducción	IV
1 Preliminares	1
1.1. Definiciones básicas	1
1.2. Espacios cociente	4
1.3. Hiperespacios	4
1.4. El n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de continuos	6
2 $PHS_n(X)$ de Gráficas Finitas	8
2.1. Definiciones técnicas	9
2.2. Lemas	11
2.3. Modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$	19
2.4. Resultado principal	26
3 $PHS_n(X)$ de Dendritas	43
3.1. Definiciones técnicas	44
3.2. Resultados preliminares	46
3.3. Resultado principal	51
4 Unicidad de $PHS_2(X)$ para dendritas	62
4.1. Dendritas	63
4.2. Resultado principal	65

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
5 Continuos con $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no homeomorfos	71
5.1. Continuos indescomponibles	71
5.2. Continuos localmente conexos	72
5.3. Gráficas finitas	81
6 Preguntas abiertas	83
Bibliografía	84

Introducción

Un *hiperespacio* de un espacio topológico X es un espacio topológico cuyos elementos son subconjuntos cerrados de X . En el caso en que X es un *continuo* (espacio métrico, compacto, conexo y no vacío), la métrica de Hausdorff definida en el conjunto de subconjuntos cerrados (diferentes del vacío) de X hace que el hiperespacio sea un continuo.

El estudio de los hiperespacios comienza a principios del siglo XX con los trabajos de Felix Hausdorff y Leopold Vietoris [10] y [39]; Vietoris definió una topología en el conjunto de subconjuntos cerrados (diferentes del vacío) de un espacio topológico X (espacio denotado como 2^X) [39]; Hausdorff, una métrica en el conjunto de subconjuntos cerrados (diferentes del vacío) y acotados de un espacio métrico [10]. Posteriormente E. Michael retomó el estudio de los espacios mencionados; en particular, demostró que cuando el espacio X es métrico y compacto la topología definida por Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, en 2^X , coinciden [34]. Este hecho es fundamental en nuestro trabajo ya que nos centraremos en el estudio de ciertos hiperespacios de continuos.

El *n -ésimo hiperespacio* de un continuo X , denotado como $C_n(X)$, es el subespacio cerrado de 2^X , cuyos elementos son los subconjuntos cerrados de X que tienen a lo más n componentes. Se sabe que desde el trabajo de Wojdyslawski [40], realizado en 1939, muy poco se había estudiado al espacio $C_n(X)$; Wojdyslawski prueba que si X es un continuo localmente conexo, entonces $C_n(X)$ es un retracto absoluto, para cada $n \in \mathbb{N}$. En [22] Kelley menciona, sin demostrar, que algunos de sus resultados son ciertos para $C_n(X)$. En 2001 Sergio Macías [27] reconsideró el estudio del n -ésimo hiperespacio de X y aportó la mayoría de los resultados estructurales de $C_n(X)$.

El *n -ésimo producto simétrico de X* , denotado como $F_n(X)$, es el subespacio cerrado de 2^X , cuyos elementos son los subconjuntos de X que tienen a lo más n elementos. En [9], [36] y [37] se estudia la accesibilidad por arcos de los elementos de $F_1(X)$ desde puntos de $C_2(X)$.

Con el propósito de estudiar la propiedad del punto fijo en continuos, Sam B. Nadler, Jr. definió el hiperespacio suspensión de un continuo X como el espacio cociente $C_1(X)/F_1(X)$, denotado como $HS(X)$ [38]; Sergio Macías generalizó este espacio al definir el n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ [29], denotado como $HS_n(X)$. En 2008 Juan C. Macías definió el n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de un continuo X como el espacio cociente $C_n(X)/F_1(X)$ [23], el cual será denotado como $PHS_n(X)$; dicho autor, plantea varias preguntas abiertas sobre este espacio, una de estas, será contestada en esta tesis.

Existen continuos para los cuales el n -ésimo hiperespacio suspensión y el n -ésimo pseudohiperespacio suspensión son distintos; por ejemplo, los continuos hereditariamente indescomponibles (Juan C. Macías probó este hecho en su tesis doctoral). Esta observación es fundamental en el inicio del estudio de $PHS_n(X)$. En esta tesis el tema central de estudio será el espacio $PHS_n(X)$ para ciertas familias de continuos, sin embargo, dedicaremos un capítulo a presentar nuevas clases de continuos para las cuales $HS_n(X)$ no es homeomorfo a $PHS_n(X)$.

Una propiedad ampliamente estudiada, de los hiperespacios de continuos, es la unicidad. Sean X un continuo y $\mathcal{S}(X)$ alguno de los siguientes espacios: 2^X , $C_n(X)$, $F_n(X)$, $HS_n(X)$ o $PHS_n(X)$; se dice que el continuo X tiene hiperespacio $\mathcal{S}(X)$ único si: dado un continuo Y tal que $\mathcal{S}(X)$ y $\mathcal{S}(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y son homeomorfos. Un hiperespacio \mathcal{S} puede ser compartido por varios continuos no homeomorfos, en tal caso se dice que dichos continuos no tienen hiperespacio \mathcal{S} único; por ejemplo, $C_1(S^1)$ y $C_1([0, 1])$, ambos, son homeomorfos a una 2-celda (ver [21, Ejemplos 5.1 y 5.2]).

El problema de encontrar condiciones sobre X , las cuales impliquen que X tenga $\mathcal{S}(X)$ único, ha sido muy estudiado.

R. Duda, C. Eberhart, S.B. Nadler, Jr. y G. Acosta caracterizan ciertas familias de continuos cuyos miembros tienen hiperespacio $C_1(X)$ único: las gráficas finitas, diferentes de un arco y de una curva cerrada simple [6] y [7]; los continuos hereditariamente indescomponibles (Teorema 0.60 de [37]); en [1]

G. Acosta prueba que las compactaciones métricas de $[0, \infty)$, diferentes de un arco, tienen hiperespacio $C_1(X)$ único.

S. Macías prueba que los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio, tanto 2^X como $C_n(X)$, único (respectivamente en [25] y [28]); E. Castañeda y A. Illanes [3] prueban que las gráficas finitas tienen hiperespacio $F_n(X)$ único, para cada $n \in \mathbb{N}$; A. Illanes prueba que las gráficas finitas tienen hiperespacio $C_n(X)$ único, para $n > 1$, en [19] y [20]; D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, M. de J. López y A. Illanes, en [13], [14] y [15], prueban que las dendritas cuyo conjunto de puntos extremo es cerrado tiene hiperespacio $C_n(X)$ único, para cada $n \in \mathbb{N}$. En [12] los autores estudian la unicidad de $C_n(X)$ para continuos localmente conexos; en dicho trabajo se presentan condiciones necesarias y suficientes para que un continuo localmente conexo X tenga hiperespacio $C_n(X)$ único. En [16] se demuestra que las gráficas finitas tienen n -ésimo hiperespacio suspensión único, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ha resultado conveniente estudiar la unicidad de cierto hiperespacio para toda una familia de continuos con propiedades similares. El tema central de esta tesis es el estudio de la unicidad del n -ésimo pseudohiperespacio suspensión para las siguientes dos familias de continuos: la familia de las gráficas finitas y la familia de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremo es cerrado. En [23] el autor plantea la siguiente pregunta: ¿Las gráficas finitas tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único? En este trabajo se presenta, adaptando ciertas ideas presentadas en [16] y [12], una respuesta positiva a dicha pregunta.

Un paso esencial en la demostración de que cierta familia \mathcal{A} tiene hiperespacio $\mathcal{S}(X)$ único es la propiedad, de la familia \mathcal{A} , de ser \mathcal{S} -determinada. Esto es, sean X y Y miembros de \mathcal{A} , con la propiedad de tener hiperespacios $\mathcal{S}(X)$ y $\mathcal{S}(Y)$ homeomorfos; si esto implica que X y Y , a su vez, son homeomorfos, entonces se dice que la familia \mathcal{A} es \mathcal{S} -determinada. En esta tesis se demostrará que la familia de dendritas cuyo conjunto de puntos extremo es cerrado es una familia PHS_n -determinada, para todo $n \in \mathbb{N}$, y usando este hecho se demostrará que dicha familia tiene $PHS_2(X)$ único.

La organización de esta tesis será la siguiente:

En el Capítulo 1 se presentarán las definiciones básicas, que se utilizarán en capítulos posteriores, sobre continuos e hiperespacios de continuos.

El Capítulo 2 está dedicado a demostrar que, para todo entero positivo n , las gráficas finitas tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único. Este capítulo está dividido en cuatro partes. En la primera, se presentan definiciones técnicas de algunos subconjuntos de $C_n(X)$ y $PHS_n(X)$, que servirán como base de la demostración. En la segunda, se presentan los lemas técnicos para la demostración del resultado principal de este capítulo. La tercera, está dedicada a presentar modelos topológicos de cierto subconjunto de $PHS_2(X)$ (dicho subconjunto es esencial en la prueba de que las gráficas finitas tienen segundo pseudohiperespacio suspensión único). Finalmente, en la última parte se presenta el Teorema principal de este capítulo. Las aportaciones en este capítulo conforman el artículo citado en [35]; “*Finite graphs have unique n -fold pseudo-hyperspace suspension*”, publicado por el autor de esta tesis en *Topology Proceedings* **52** (2018), 219-233.

En el Capítulo 3 se presenta la demostración de la siguiente afirmación: Las dendritas cuyo conjunto de puntos extremo es cerrado son PHS_n -determinadas, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta demostración usa ideas similares a las presentadas en la demostración del Capítulo 2; sin embargo, el conjunto de puntos de la dendrita que no tienen una gráfica finita como vecindad son tratados de manera particular. Este capítulo está dividido en tres partes. En la primera, se presentan ciertas definiciones técnicas. En la segunda se dan los lemas técnicos necesarios para demostrar el resultado principal. En la tercera, se presenta el Teorema principal de este capítulo.

El Capítulo 4 está dedicado a mostrar la unicidad de $PHS_2(X)$ para dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado. Básicamente probaremos que cualquier continuo localmente conexo que comparta $PHS_2(Y)$ con una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, no puede tener curvas cerradas simples; y además, su conjunto de puntos extremos es cerrado también; de aquí, usando el resultado principal del Capítulo 3, se obtiene la unicidad de $PHS_2(X)$ para dendritas.

En el Capítulo 5 se presentan nuevas familias de continuos para las cuales $PHS_n(X)$ no es homeomorfo a $HS_n(X)$.

Por un lado se prueba que, para $n \in \mathbb{N}$, los continuos X pertenecientes a la familia de continuos localmente conexos que contienen una curva cerrada simple \mathcal{S} , tal que \mathcal{S} es la unión de dos arcos libres maximales no tienen $PHS_n(X)$ homeomorfo a $HS_n(X)$. Por otro lado, también se prueba en este capítulo que, para $n = 2$, el n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de una gráfica finita diferente de un k -odo simple, con al menos un punto de ramificación, no es homeomorfo al n -ésimo hiperespacio suspensión de dicha gráfica. Adicionalmente presentaremos, para mayor completitud y claridad de esta tesis, la prueba (debida a J. C. Macías) de que el espacio $PHS_n(X)$ no es homeomorfo al espacio $HS_n(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, para los continuos hereditariamente indescomponibles.

Finalmente en el Capítulo 6 se presenta una lista de preguntas abiertas, fruto del trabajo realizado.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como propósito presentar la notación, las definiciones básicas y los resultados sobre continuos que se usarán a lo largo de la tesis.

En la primera parte se presenta la notación que se usará y las definiciones más generales; en la segunda, las generalidades de los espacios cociente; y en la última sección, las propiedades de los hiperespacios necesarias para definir el n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de continuos.

1.1. Definiciones básicas

En esta sección presentaremos las definiciones básicas que usaremos a lo largo de la tesis. En este trabajo nos referiremos a un espacio topológico simplemente como: un espacio; es decir, omitiremos la palabra topológico.

La frontera topológica de U en X será denotada como $\text{fr}_X(U)$; el interior de U en X , $\text{int}_X(U)$ o simplemente U° (si es que esto no da lugar a confusión); la cerradura de U en X , como $\text{cl}_X(U)$.

El símbolo \mathbb{N} denotará a los enteros positivos; el símbolo \mathbb{R} , a los números reales; el símbolo \mathbb{R}^n , al n -ésimo espacio euclidiano. Denotaremos como $|X|$ a la cardinalidad de un conjunto X .

A la dimensión de un espacio la denotaremos como $\dim(X)$; a la dimensión

de un espacio en uno de sus puntos p , como $\dim_p(X)$. A lo largo de este trabajo usaremos la definición de dimensión dada en [18].

Dado un espacio métrico X , con métrica d , denotaremos como $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$ al conjunto $\{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Sean X un continuo y $x \in X$; X es *localmente conexo en x* si para cada abierto U tal que $x \in U$, U contiene un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. X es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Un *arco* es un espacio homeomorfo a $[0, 1]$. Sean I un arco y $\alpha : [0, 1] \rightarrow I$ un homeomorfismo. Definiremos como *puntos finales de I* a los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$.

Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1 .

Una *gráfica finita* es un continuo tal que puede ser escrito como la unión finita de arcos, de manera que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos finales.

Una *dendrita* es un continuo localmente conexo tal que no contiene curvas cerradas simples.

Sean X una gráfica finita o una dendrita, x un elemento de X y β un número cardinal. Decimos que X tiene *orden menor o igual a β en x* , denotado como $\text{ord}(x, X) \leq \beta$, si x tiene una base de vecindades, \mathfrak{B} , en X tal que para cada $U \in \mathfrak{B}$, tenemos que la cardinalidad de $\text{fr}_X(U)$ es menor o igual a β . Sea x un elemento de X . Entonces el *orden de X en x* , denotado como $\text{ord}(x, X)$, es igual a β si $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(x, X) \not\leq \alpha$, para ningún número cardinal α tal que $\alpha < \beta$.

Cabe mencionar que si X es una gráfica finita y x es un elemento de X entonces $\text{ord}(x, X) \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si X es una dendrita y $x \in X$, el *orden de X en x* , es igual al número de componentes de $X - \{x\}$.

Sea X una gráfica finita o una dendrita, $E(X)$ denotará a los elementos de X cuyo orden es igual a uno. A los elementos de $E(X)$ se les llamará *puntos extremos* de X . El conjunto de puntos de X , cuyo orden sea mayor o

igual a 3, será denotado como $R(X)$ y sus elementos serán llamados *puntos de ramificación* de X .

A los puntos extremos de una dendrita los clasificaremos de dos maneras: Sea $x \in E(X)$. Entonces x será llamado un *punto extremo aislado* si no existe una sucesión de puntos extremos de X que converja a x , al conjunto de dichos puntos se le denotará como $E_i(X)$. Por otro lado, x será llamado *punto extremo de acumulación* si existe una sucesión de puntos extremos de X que converge a x , dicho conjunto de puntos será denotado como $E_a(X)$.

Dada una gráfica finita X tal que $R(X) \neq \emptyset$, un *lazo* en X es una curva cerrada simple S tal que S contiene a lo más un punto de ramificación de X .

Un *arco libre* en un continuo X es un arco α tal que si su conjunto de puntos finales es $\{a, b\}$ entonces $\alpha - \{a, b\}$ es abierto en X .

Un *arco libre maximal* es un arco libre tal que es maximal con respecto a la inclusión.

Sea $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Un continuo X será llamado *la gráfica θ_m* si X es una gráfica finita tal que puede ser escrita como la unión de m arcos, J_1, \dots, J_m , tales que existe un conjunto de dos puntos $\{v, u\}$ en X , tal que el conjunto $\{v, u\}$ es el conjunto de puntos finales de cada J_i , y $J_i \cap J_j = \{v, u\}$ si $j \neq i$.

Denotaremos como F_ω al continuo dado por la siguiente construcción. Consideremos los siguientes puntos de \mathbb{R}^2 : $p = (0, 0)$ y $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, con $n \in \mathbb{N}$; ahora, sea $\overline{pa_n}$ el segmento de recta de \mathbb{R}^2 que une p con a_n . Entonces $F_\omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \overline{pa_n}$.

Denotaremos como W_0 al continuo dado por la siguiente construcción. Consideremos los siguientes puntos de \mathbb{R}^2 : $c = (-1, 0)$, $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea \overline{xy} el segmento de recta de \mathbb{R}^2 que une los puntos x y y . Entonces, $W_0 = \overline{cb_1} \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} \overline{a_n b_n})$.

1.2. Espacios cociente

En esta sección presentaremos la manera de construir un espacio Y a partir de colapsar, topológicamente, conjuntos de puntos de un espacio X .

Una *descomposición* de un conjunto X es una colección de conjuntos no vacíos, ajenos entre sí, cuya unión es X .

Sea \mathcal{G} una descomposición de un espacio métrico X . El *espacio cociente*, denotado como X/\mathcal{G} , es el conjunto cuyos puntos son los elementos de la descomposición \mathcal{G} . La función $q : X \rightarrow X/\mathcal{G}$ que envía a cada punto x de X al único elemento G de \mathcal{G} que lo contiene, es llamada *función cociente*.

Sean X un espacio métrico, \mathcal{G} una descomposición de X y $q : X \rightarrow X/\mathcal{G}$, la función cociente. La topología:

$$\mathcal{U} = \{U \subset X/\mathcal{G} : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

se llama la *topología cociente* para X/\mathcal{G} .

Sean X un espacio métrico y \mathcal{G} una descomposición de X . Decimos que \mathcal{G} es *semicontinua superiormente* si para cada $G \in \mathcal{G}$ y cada subconjunto abierto U de X tal que $G \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $G \subset V$ y tal que si $G' \in \mathcal{G}$ y $G' \cap V \neq \emptyset$ entonces $G' \subset U$.

Para una prueba del siguiente resultado véase el Teorema 1.7.3 de [32].

Teorema 1. *Si X es un continuo y \mathcal{G} es una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces X/\mathcal{G} es un continuo.*

1.3. Hiperespacios

A continuación, presentaremos los diferentes hiperespacios que usaremos a lo largo de la tesis.

Sea X un continuo. Definimos a 2^X como el conjunto:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\};$$

para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};$$

y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Estos conjuntos serán dotados de una topología a través de la métrica de Hausdorff, definida como la función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ dada por:

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A)\},$$

en donde $\mathcal{V}_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$.

Una prueba de que la función \mathcal{H} es efectivamente una métrica se puede encontrar en [32] (Teorema 1.8.3).

Sean X un espacio métrico, $m \in \mathbb{N}$ y U_1, \dots, U_m subconjuntos de X . Definimos:

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Sea:

$$\mathfrak{B} = \{\langle U_1, \dots, U_m \rangle : U_1, \dots, U_m \text{ son subconjuntos abiertos de } X, m \in \mathbb{N}\}.$$

Si X es un espacio métrico, entonces \mathfrak{B} es una base para una topología de 2^X [37, 0.13]; dicha topología es llamada la *Topología de Vietoris* para 2^X .

Una prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [37, 0.13].

Teorema 2. *Si X es un espacio métrico y compacto entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris para 2^X coinciden.*

Sean X un continuo, $m \in \mathbb{N}$ y U_1, \dots, U_m conjuntos abiertos de X . A lo largo de este trabajo y para simplificar la notación, $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$ denotará la intersección del abierto $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$, de la topología de Vietoris de 2^X , con $C_n(X)$; dado que X es un continuo y, usando el Teorema 2, es claro que:

$$\mathfrak{B} = \{ \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n : U_1, \dots, U_m \text{ son subconjuntos abiertos de } X, m \in \mathbb{N} \}$$

es una base para la topología, de $C_n(X)$, inducida por la métrica de Hausdorff.

Un *arco de orden* en $C_n(X)$ es un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que si $0 \leq s < t \leq 1$ entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$. Usando [37, 1.8], podemos afirmar que si X es un continuo, A y B elementos de $C_n(X)$, entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$ y cada componente de B intersecciona a A .

A lo largo de esta tesis usaremos el concepto de *dimensión* definido en [18]. Así mismo, usaremos extensamente la fórmula principal de [33], sea X una gráfica finita, entonces:

$$\dim_A(C_n(X)) = 2n + \sum_{p \in R(X) \cap A} (\text{ord}_X(p) - 2) \quad [\text{MV}]$$

1.4. El n -ésimo pseudohiperespacio suspensión de continuos

Dado $n \in \mathbb{N}$, el n -ésimo *pseudohiperespacio suspensión* de un continuo X , denotado como $PHS_n(X)$, será el espacio cociente:

$$C_n(X)/F_1(X).$$

El subconjunto $F_1(X)$ de $C_n(X)$ es un conjunto cerrado de $C_n(X)$. La partición:

$$\mathcal{D}_{F_1(X)} = \{F_1(X)\} \cup \{\{A\} : A \in C_n(X) \setminus F_1(X)\}$$

es semicontinua superiormente, por lo que, por el Teorema 1, $C_n(X)/F_1(X)$ es un continuo.

Dados un continuo X y un entero positivo n , denotaremos como:

$$q_X^n : C_n(X) \rightarrow PHS_n(X)$$

a la función cociente; $q_X^n(F_1(X))$, como $\{F_X^n\}$; y $q_X^n(X)$, como T_X^n .

Dado que $F_1(X)$ y $\{F_X^n\}$ son conjuntos cerrados en $C_n(X)$ y $PHS_n(X)$, respectivamente, notemos que la función

$$q_X^n |_{C_n(X)-F_1(X)} : C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\},$$

es una función continua, biyectiva y abierta; y, por lo tanto, un homeomorfismo.

En [23] se define $PHS_n(X)$ y se hace un análisis general del espacio; en particular en dicho trabajo se demuestra que:

- $PHS_2(X)$ es homeomorfo a $[0, 1]^4$ [23, Teorema 3.3];
- $PHS_n(S^1)$ no tiene la propiedad del punto fijo, para ninguna $n \in \mathbb{N}$ [23, Teorema 3.4];
- para toda $n \in \mathbb{N}$, X es un continuo localmente conexo si y sólo si $PHS_n(X)$ es localmente conexo [23, Teorema 4.1];
- si X es un continuo y $n \geq 2$, entonces X es una gráfica finita si y sólo si $PHS_n(X)$ es localmente conexo y $\dim(PHS_n(X)) < \infty$ [23, Lema 4.5];
- $PHS_n(X)$ es unicoherente, para toda $n \in \mathbb{N}$ [23, Corolario 5.2].

Capítulo 2

$PHS_n(X)$ de Gráficas Finitas

En este capítulo se demostrará que, para cualquier entero positivo n , las gráficas finitas tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único. Cabe mencionar, que para las gráficas S^1 y $[0, 1]$ la unicidad de PHS_n ya fue probada; para el caso $n = 1$, por S. Macías [29, Teoremas 5.5 y 5.6]; y para el caso $n \geq 2$, por J. C. Macías [23, Teorema 4.4].

La idea detrás de la demostración es, para el caso más general, la siguiente: sea J una arista de la gráfica finita X y Y un continuo con la propiedad de tener $PHS_n(Y)$ homeomorfo a $PHS_n(X)$. Entonces, usando cierta caracterización topológica de los subconjuntos conexos contenidos en algún arco libre, se prueba que los subconjuntos, de $PHS_n(X)$, de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ preservan su estructura bajo homeomorfismos; es decir, que la imagen de dichos subconjuntos se puede escribir como $q_Y^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$, en donde K resulta ser, de hecho, una arista de Y . Usando esto, y trabajando los casos $n = 2$ y $n \neq 2$ de manera particular, se construye un homeomorfismo entre X y Y .

Los argumentos de esta prueba son semejantes a los argumentos de la demostración del teorema principal de [16]. Sin embargo para las gráficas θ_m el argumento cambia.

Cabe mencionar que el material presentado en este capítulo está publicado por el autor de esta tesis en [35] (“*Finite graphs have unique n -fold pseudo-hyperspace suspension*”, Topology Proc. **52** (2018), 219-233).

2.1. Definiciones técnicas

Comencemos caracterizando a las aristas de una gráfica finita de manera topológica:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_S(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal o } J \text{ es un lazo } X\}, \\ \mathfrak{A}_R(X) &= \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \text{ es un lazo}\}, \\ \mathfrak{A}_E(X) &= \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \text{ es un arco y } |J \cap R(X)| = 1\}.\end{aligned}$$

Sea L_0 el continuo obtenido al tomar $L_0 = D_1 - \text{int}_{\mathbb{R}^2}(D_2)$, en donde D_1 y D_2 son discos cerrados de \mathbb{R}^2 , D_2 es un subconjunto propio de D_1 , y los discos D_1 y D_2 son tangentes. Véase la Figura 2.1.

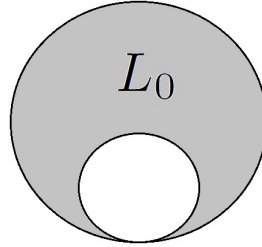


Figura 2.1: El continuo L_0 .

Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, definamos $\mathcal{E}(J)$ de la siguiente manera: Si J es un arco entonces $\mathcal{E}(J) = C_1(J)$. En el caso en que J sea un lazo, denotemos como p_J a su punto de ramificación y definamos a $\mathcal{E}(J)$ como:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(J) &= \{A \in C_1(J) : A = J \text{ o } A = \{p\} \text{ para alguna } p \in J \\ &\quad \text{o } A \text{ es un subarco de } J \text{ tal que } p_J \notin A \\ &\quad \text{o } A \text{ es un subarco de } J \text{ tal que} \\ &\quad p_J \text{ es uno de sus puntos extremos}\}.\end{aligned}$$

Como consecuencia del Ejemplo 5.2 de [21] si J es un lazo, entonces $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo al continuo L_0 . Véase la Figura 2.1.

Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{M}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin C_{n-1}(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\};$$

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N}, \text{ en } C_n(X), \\ \text{tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{L}_n = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N}, \text{ en } C_n(X), \text{ tal} \\ \text{que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda y } A \text{ pertenece a la frontera} \\ \text{como variedad de } \mathcal{N}\};$$

$$\mathcal{PHL}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N}, \text{ en } PHS_n(X), \\ \text{tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{PHL}_n = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N}, \text{ en } PHS_n(X), \\ \text{tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda y } \chi \text{ pertenece a la frontera} \\ \text{como variedad de } \mathcal{N}\};$$

$$\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ y } A \text{ tiene una base de vecindades, } \mathcal{B}, \\ \text{en } C_n(X), \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim[\mathcal{U}] \leq 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \\ \text{es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHD}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \notin \mathcal{PHL}_n(X) \text{ y } \chi \text{ tiene una} \\ \text{base de vecindades, } \mathcal{B}, \text{ en } PHS_n(X), \text{ tal que para cada} \\ \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim[\mathcal{U}] \leq 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{PHL}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHE}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \dim_\chi[PHS_n(X)] = 2n\}.$$

Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Definimos:

$$\mathcal{D}(J, K) = \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) \cap \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) - \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{PHD}(J, K) &= \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

2.2. Lemas

En esta sección presentaremos los lemas necesarios para probar el resultado principal de este capítulo.

Los siguientes dos lemas están demostrados en [12] (Lemas 32 y 33).

Lema 3. [12, Lema 32] *Sea X una gráfica finita. Entonces $\partial\mathcal{L}_2(X) = \{A \in \mathcal{L}_2(X) : \text{alguna de las siguientes tres propiedades se cumple: } A \text{ es conexo o } A \text{ tiene una componente degenerada o } A \text{ contiene un punto extremo de } X\}$.*

Lema 4. [12, Lema 33] *Sean X una gráfica finita y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{D}(J, K) = \{\{p\} \cup A : (p \in \text{fr}_X(J) \text{ y } A \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in \text{fr}_X(K) \text{ y } A \in \mathcal{E}(J))\}$.*

Las pruebas de los siguientes dos lemas son similares a las pruebas de los Lemas 2.3 y 2.4 de [16].

Lema 5. *Sean X una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X) - F_1(X)$. Si $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces $\dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] \geq 2n + 1$.*

Demostración. Primero observemos que, usando la formula principal de [33] (ver MV, p.6), $\dim_A(C_n(X)) \geq 2n + 1$. Ahora, dado que $C_n(X) - F_1(X)$ es abierto en $C_n(X)$, y dado que $q_X^n : C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo, se sigue que $\dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] \geq 2n + 1$. \square

Lema 6. *Sean X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada vecindad \mathcal{U} de F_X^n , en $PHS_n(X)$, tenemos $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} una vecindad abierta de F_X^n en $PHS_n(X)$ y $\mathcal{V} = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Entonces \mathcal{V} es un conjunto abierto en $C_n(X)$. Fijemos un punto $p \in R(X)$. Dado que $\{p\} \in \mathcal{V}$, podemos tomar un arco A en X tal que $p \in A$ y $A \in \mathcal{V}$. Por lo que, $q_X^n(A) \in \mathcal{U}$. Notemos que $\dim_{q_X^n(A)}(PHS_n(X)) \leq \dim(\mathcal{U})$, entonces, por Lema 5, $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$. \square

Los siguientes dos lemas están probados en [20] (Lemas 3.2 y 3.5).

Lema 7. [20, Lema 3.2] *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$.*

Lema 8. [20, Lema 3.5] *Sean X una gráfica finita y $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$.*

La prueba del siguiente lema es similar a la prueba del Lema 2.7 de [16].

Lema 9. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $n \geq 3$ o que $R(X) \neq \emptyset$. Entonces $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X)$.*

Demostración. Dado que $q_X^n|_{C_n(X)-F_1(X)}: C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo y $C_n(X) - F_1(X)$ y $PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ son abiertos, respectivamente, en $C_n(X)$ y $PHS_n(X)$; entonces tenemos que $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X) - \{F_X^n\}$. En el caso $R(X) \neq \emptyset$, por Lema 4, $\mathcal{PHL}_n(X) - \{F_X^n\} = \mathcal{PHL}_n(X)$. Por lo que $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X)$. Ahora, supongamos que $R(X) = \emptyset$ y $n \geq 3$. Mostraremos que $F_X^n \notin \mathcal{PHL}_n(X)$. Supongamos que $F_X^n \in \mathcal{PHL}_n(X)$. Sea \mathcal{M} una vecindad de F_X^n en $PHS_n(X)$ tal que \mathcal{M} es una $2n$ -celda. Fijemos un punto $p \in X$. Entonces $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{M})$ es una vecindad de $\{p\}$ en $C_n(X)$. Tomemos un elemento $A \in C_n(X)$ tal que A tenga exactamente $n - 1$ componentes no degeneradas y $q_X^n(A) \in \text{int}_{PHS_n(X)}(\mathcal{M})$. Entonces existe una $2n$ -celda \mathcal{N} tal que $q_X^n(A) \in \text{int}_{PHS_n(X)}(\mathcal{N})$ y $F_X^n \neq \mathcal{N}$.

Por lo que $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{N})$ es una $2n$ -celda que contiene a A en su interior en $C_n(X)$. Esto contradice Lema 8, por lo que $F_X^n \notin \mathcal{PHL}_n(X)$. De lo anterior, $\mathcal{PHL}_n(X) - \{F_X^n\} = \mathcal{PHL}_n(X)$ con lo cual se sigue que $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X)$. \square

Una prueba del siguiente resultado puede ser encontrada en [20] (Lema 3.6).

Lema 10. [20, Lema 3.6] *Sean X una gráfica finita y $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

La prueba del siguiente lema es análoga a la prueba de las partes correspondientes del Lema 2.9 de [16]. Para conveniencia del lector presentaremos la prueba.

Lema 11. *Sea X una gráfica finita. Entonces:*

(a) *Si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\} = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

(b) *Si $n \geq 3$ y $R(X) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{PHD}_n(X) = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

Demostración. (a) Sean $\chi \in \mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\}$ y A el único elemento de $C_n(X) - F_1(X)$ tal que $q_X^n(A) = \chi$. Primero mostraremos que:

$$\chi \in \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

Como consecuencia de que los espacios $C_n(X) - F_1(X)$ y $PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ son homeomorfos y de que $\chi \in \mathcal{PHD}_n(X)$, tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = \dim_\chi[PHS_n(X)] \leq 2n$; de modo que, el Lema 5 nos asegura $A \cap R(X) = \emptyset$. Como $\chi \notin \mathcal{PHL}_n(X)$, tenemos que $A \notin \mathcal{L}_n(X)$. Sea \mathcal{B} una base de vecindades de χ en $PHS_n(X)$, como en la definición de $\mathcal{PHD}_n(X)$. Dado que $\chi \neq F_X^n$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $F_X^n \notin \mathcal{U}$ para ninguna $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Por el Lema 9, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{PHL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap$

$(q_X^n)^{-1}(\mathcal{PHL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap (\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$ (la última igualdad está dada por el Lema 8). En consecuencia, tenemos que $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arcoconexo. Por lo que, $\{(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de A en $C_n(X)$, que asegura la pertenencia de A al conjunto $\mathcal{D}_n(X)$. Dado que $A \in \mathcal{D}_n(X)$, por el Lema 10, podemos afirmar que $A \in C_1(X)$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. En conclusión, $\mathcal{PHD}_n(X) - \{F_n^X\} \subset \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.

Ahora probaremos lo siguiente: $\{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\} \subset \mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\}$. Sean $\chi \in \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$ y $A \in C_n(X)$ tales que $\chi = q_X^n(A)$. Entonces, por el Lema 10, $A \in \mathcal{D}_n(X)$. Sea \mathcal{B} una base de vecindades de A , como en la definición de $\mathcal{D}_n(X)$. Dado que $A \notin F_1(X)$, tenemos que cada elemento $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, cumple que $F_1(X) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Entonces, $q_X^n(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)) = q_X^n(\mathcal{U}) \cap q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X))$ y, usando el Lema 9, tenemos que $q_X^n(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X)) = q_X^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{PHL}_n(X)$. Esto implica que $q_X^n(\mathcal{U})$ es una base de vecindades de χ que aseguran la pertenencia de éste a $\mathcal{PHD}_n(X)$. Como $A \notin F_1(X)$ tenemos que $\chi \notin \{F_X^n\}$, por lo que $\chi \in \mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\}$.

(b) En este caso tenemos que $R(X) \neq \emptyset$. Por el Lema 6, $F_X^n \notin \mathcal{PHD}_n(X)$. Entonces, (b) se sigue de (a). \square

El siguiente lema se puede probar de manera muy similar a las partes correspondientes del Lema 2.10 de [16]. Para conveniencia del lector presentamos aquí la prueba.

Lema 12. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X una gráfica finita. Entonces:

(a) Si $n \geq 3$ y $R(X) \neq \emptyset$, entonces las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.

(b) Si $R(X) \neq \emptyset$, entonces las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, y $m \leq n$.

Demostración. (a) Por el Lema 11(b), $\mathcal{PHD}_n(X) = \bigcup \{q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\} : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y A y B subarcos no degenerados

de J° . Usando arcos de orden es fácil construir un encaje $\alpha : [0, 1] \rightarrow \langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$ y tal que $\alpha(t) \cap F_1(J) = \emptyset$, para cada $t \in [0, 1]$. En consecuencia, los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$ son arcoconexos y, por lo tanto, conexos. Notemos que los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$ son abiertos en $\mathcal{PHD}_n(X)$ y mutuamente ajenos. En conclusión, dichos conjuntos son las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$.

(b) Por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), $\dim_A[C_n(X)] = 2n$ si y sólo si $A \cap R(X) = \emptyset$. Por el Lema 6, $F_X^n \notin \mathcal{PHE}_n(X)$. Por lo que, $\mathcal{PHE}_n(X) = \bigcup \{q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\} : J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Sean $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ y A y B elementos de $\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n$. Usando la Proposición 2.6 de [5], se puede construir un encaje $\alpha : [0, 1] \rightarrow \langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$ y tal que, para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \cap F_1(X) = \emptyset$. Concluimos que los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ son arcoconexos y, por tanto, conexos. Notemos que los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ son abiertos en $\mathcal{PHE}_n(X)$, y mutuamente ajenos. En consecuencia, dichos conjuntos son las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$. \square

Lema 13. *Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Sean $p \in X$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.*

1.- *Si J es un arco, entonces $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ es una 2-celda en $PHS_2(X)$.*

2.- *Si J es un lazo, entonces $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ es homeomorfo al continuo L_0 (véase la Figura 2.2).*

Demostración. Sea g el encaje de $C_1(X)$ en $C_2(X)$ dado por $g(A) = \{p\} \cup A$.

Sea J un arco. Entonces, por definición $\mathcal{E}(J) = C_1(J)$. En el Ejemplo 0.54 de [37] se muestra que $C_1(J)$ es homeomorfo a una 2-celda. Lo cual implica que $g(\mathcal{E}(J))$ es una 2-celda en $C_2(X)$. Notemos que $g(\mathcal{E}(J))/F_1(X)$ es homeomorfo a $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ y, dado que el conjunto $g(\mathcal{E}(J)) \cap F_1(X)$ es el conjunto \emptyset o el conjunto $\{p\}$, tenemos que $g(\mathcal{E}(J))/F_1(X)$ es una 2-celda y por lo tanto, $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ también lo es.

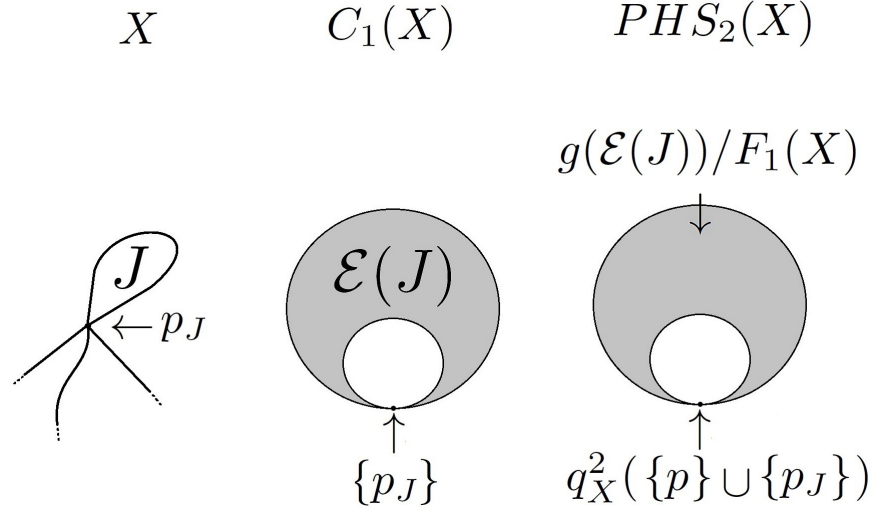


Figura 2.2: Modelos de $\mathcal{E}(J)$ y $g(\mathcal{E}(J))/F_1(X)$ para el caso $J \in \mathfrak{A}_R(X)$.

Ahora, sea J un lazo. De la construcción del Ejemplo 5.2 en [21], vemos que $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo al continuo L_0 . Por lo que, $g(\mathcal{E}(J))$ es homeomorfo al continuo L_0 . Notemos que $g(\mathcal{E}(J))/F_1(X)$ es homeomorfo a $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ y, dado que el conjunto $g(\mathcal{E}(J)) \cap F_1(X)$ es el conjunto \emptyset o el conjunto $\{p\}$, tenemos que $g(\mathcal{E}(J))/F_1(X)$ es homeomorfo al continuo L_0 y por lo tanto, $\{q_X^2(\{p\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$ también lo es. \square

La prueba del siguiente resultado es similar a la prueba del Lema 2.12 en [16].

Lema 14. Sean X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(a) \partial \mathcal{PHL}_n(X) = q_X^n(\partial \mathcal{L}_n(X) - F_1(X)),$$

(b) $\partial \mathcal{PHL}_2(X) = \{q_X^2(A) \in PHS_2(X) : A \in \mathcal{L}_2(X) - F_1(X) \text{ y alguna de las siguientes tres propiedades se cumple: } A \text{ es conexo o } A \text{ tiene una componente degenerada o } A \text{ contiene un punto extremo de } X\}$.

Demostración. (a) Por el Lema 6, tenemos que $F_X^n \notin \partial\mathcal{PHL}_n(X)$. Entonces, dado que $C_n(X) - F_1(X)$ y $PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ son homeomorfos tenemos la igualdad deseada.

(b) Usando la descripción del conjunto $\partial\mathcal{L}_2(X)$ dada en el Lema 3 y la parte (a), probada en el párrafo anterior, se obtiene trivialmente la igualdad deseada. \square

La prueba del siguiente resultado es parecida a la prueba del Lema 2.15 de [16]; sin embargo, se debe de tener cuidado con el elemento F_X^2 ya que, como se verá en su demostración, la pertenencia de F_X^2 a $\mathcal{PHD}(J, K)$ implica que la intersección de J y K , aristas de X , es no vacía. Notemos que, este hecho es falso cuando se trabaja con el conjunto análogo a $\mathcal{PHD}(J, K)$, en $HS_n(X)$. El siguiente lema es, en el caso $n = 2$, importante para la prueba del resultado principal de este capítulo; esto es debido a que nos permitirá construir modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$.

Lema 15. *Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{PHD}(J, K) = \{q_X^2(\{p\} \cup G) : (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$.*

Demostración. Primero, probaremos la siguiente contención: $\mathcal{PHD}(J, K) \subset \{q_X^2(\{p\} \cup G) : (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$. Sea $\chi \in \mathcal{PHD}(J, K)$. Si $\chi = F_X^2$, entonces, por la definición de $\mathcal{PHD}(J, K)$, tenemos que $F_X^2 \in cl_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Lo cual implica alguna de las siguientes dos situaciones: la primera, J y K comparten al menos un punto de ramificación de X , digamos p , pero $J \neq K$; la segunda, $J = K$, en cuyo caso llamaremos a alguno de los puntos de ramificación de X , perteneciente a J , como p . En ambas situaciones tomemos el punto p , dado que es un punto de ramificación de X que pertenece a J y también a K , tenemos que $p \in fr_X(J)$ y también, como $p \in K$, tenemos que $\{p\} \in \mathcal{E}(K)$. Observemos que $q_X^2(\{p\} \cup \{p\}) = q_X^2(\{p\}) = \chi$, lo cual implica que, en este caso $\chi = F_X^2$, χ pertenece a $\{q_X^2(\{p\} \cup G) : (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$.

Ahora supongamos que $\chi \neq F_X^2$. Sea A el único elemento de $C_2(X) - F_1(X)$ tal que $q_X^2(A) = \chi$. Dado que $\chi \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de $\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2$ tal que: $\lim q_X^2(A_m) = \chi$, $A_m \notin F_1(X)$, para ninguna $m \in \mathbb{N}$, y $q_X^2(A_m) \in \partial\mathcal{PHL}_2(X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de $(q_X^2)^{-1}$ en χ , $\lim A_m = A$. Por el Lema 14(a), $A_m \in \partial\mathcal{L}_2(X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo que, $A \in \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$. Por otro lado, dado que $\chi \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$, existe una sucesión $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de $\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$ tal que $\lim \psi_m = \chi$ y $\psi_m \neq F_X^2$, para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Dada $m \in \mathbb{N}$, sea D_m el único elemento de $C_2(X) - F_1(X)$ tal que $q_X^2(D_m) = \psi_m$. Entonces $\lim D_m = A$. Por el Lema 14(a), $D_m \in \partial\mathcal{L}_2(X) - \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo que, $A \in \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) - \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$. En conclusión, $A \in \mathcal{D}(J, K)$. Por el Lema 4, $A = \{p\} \cup G$ para algunas $p \in \text{fr}_X(J)$ y $G \in \mathcal{E}(K)$ o algunas $p \in \text{fr}_X(K)$ y $G \in \mathcal{E}(J)$. Esto completa la prueba de la primera inclusión.

Ahora probaremos que $\mathcal{PHD}(J, K) \supset \{q_X^2(\{p\} \cup G) : (p \in \text{fr}_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in \text{fr}_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$. Tomemos $\chi = q_X^2(\{p\} \cup G)$, tal que $p \in \text{fr}_X(J)$ y $G \in \mathcal{E}(K)$ o tal que $p \in \text{fr}_X(K)$ y $G \in \mathcal{E}(J)$. Por el Lema 4, el conjunto $A = \{p\} \cup G$ pertenece a $\mathcal{D}(J, K)$.

Primero supongamos que $\chi = F_X^2$; lo cual, implica que $\{p\} = G$. En este caso ($\chi = F_X^2$) se tienen dos situaciones: la primera, $K = J$; la segunda, J y K comparten el punto de ramificación de X , p , pero $K \neq J$. Supongamos la segunda situación. Sea $\{Q_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en $C_1(K)$ tal que $\lim Q_m = \{p\}$, $Q_m \subset K^\circ$ y Q_m es no degenerado, para cada $m \in \mathbb{N}$, y sea $\{\{p_m\}\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en $F_1(J^\circ)$ tal que $\lim \{p_m\} = \{p\}$. Por el Lema 3, tenemos que $Q_m \cup \{p_m\} \in \partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2$ y, entonces, por el Lema 14(b), $q_X^2(Q_m \cup \{p_m\}) \in \partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$. Por lo que, $\chi = q_X^2(\{p\}) = \lim q_X^2(Q_m \cup \{p_m\}) \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Ahora supongamos la primera situación; i.e., $J = K$. Sean $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ dos sucesiones con las siguientes propiedades: para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene $p_m \neq q_m$; p_m y q_m son elementos de K° ; $\lim \{p_m\} = \{p\}$, y, también, $\lim \{q_m\} = \{p\}$. Entonces, por el Lema 3, $\{q_m\} \cup \{p_m\} \in \partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle K^\circ \rangle_2 = \partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2$. De esto,

y por Lema 14(b), $q_X^2(\{p_m\} \cup \{q_m\}) \in \partial \mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$. Por lo que $\chi = q_X^2(\{p\}) = \lim q_X^2(\{p_m\} \cup \{q_m\}) \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Ahora, probaremos que $F_X^2 \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Dado que $R(X) \neq \emptyset$, X no es homeomorfo a S^1 ni a $[0, 1]$. Lo cual implica que X satisface alguna de las siguientes condiciones: X tiene estrictamente más de dos aristas; X es el continuo "lazo", es decir, el continuo homeomorfo a la letra mayúscula P; X es el continuo "figura ocho", es decir, dos curvas cerradas simples pegadas por un punto. Dado que X cumple alguna de las tres condiciones anteriores, siempre podemos tomar $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\{L\} \neq \{J, K\}$. Ahora bien, tomemos dicho $L \in \mathfrak{A}_S(X)$; p' un elemento de L° , y $\{\{q_m\}\}_{m=1}^\infty$ y $\{\{p_m\}\}_{m=1}^\infty$ dos sucesiones en $F_1(L^\circ)$ tales que, ambas, converjan a $\{p'\}$, con la siguiente propiedad: $p_m \neq q_m$, para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Por el Lema 14(b), tenemos que $q_X^2(\{p_m\} \cup \{q_m\}) \in \partial \mathcal{PHL}_2(X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por construcción, sabemos que $q_X^2(\{p_m\} \cup \{q_m\}) \in q_X^2(\langle L^\circ \rangle_2)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Dado que $\{L\} \neq \{J, K\}$, obtenemos que $F_X^2 = \lim q_X^2(\{p_m\} \cup \{q_m\}) \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Por lo que, $F_X^2 \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \cap \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \mathcal{PHD}(J, K)$.

Ahora supongamos que $\chi \neq F_X^2$. Dado que $A \in \mathcal{D}(J, K)$, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ en $\partial \mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2$ tal que $\lim A_m = A$ y $A_m \notin F_1(X)$, para ninguna $m \in \mathbb{N}$. De aquí que, $q_X^2(A_m) \in \partial \mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)$. De donde, $\chi \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. Similarmente, $\chi \in \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial \mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2))$. En conclusión, $\chi \in \mathcal{PHD}(J, K)$. \square

2.3. Modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$.

Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. En el caso en que $n \neq 2$, la prueba del teorema principal, de este capítulo, se basa en que las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. En el caso $n = 2$, dicha afirmación no se sabe cierta. Es por esta razón que, en este caso, se sigue otra estrategia; la cual, usa fuertemente

los diferentes modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$, que dependen de J y K . En esta sección presentaremos dichos modelos para su uso posterior.

Observemos que los modelos topológicos de $\mathcal{PHD}(J, K)$ dependen de qué clase de aristas J y K son; es decir, depende de a qué subconjunto, de $\mathfrak{A}_S(X)$, J y K pertenecen. En todos los casos, que a continuación presentaremos, usaremos el Lema 15 para expresar a $\mathcal{PHD}(J, K)$ de una manera conveniente. Más específicamente, usando el Lema 15, expresaremos a $\mathcal{PHD}(J, K)$ como la unión de conjuntos cuyos modelos fueron descritos en el Lema 13; lo cual, nos permitirá encontrar modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$.

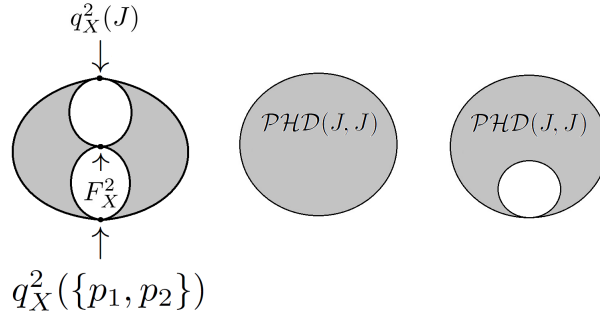
En todos los casos J y K serán elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$, en donde X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$.

Caso A: $J = K$, J es un arco, y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$. De acuerdo al Lema 15, $\mathcal{PHD}(J, J) = \{q_X^2(\{p_1\} \cup A) : A \in C_1(J)\} \cup \{q_X^2(\{p_2\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$, en donde p_1 y p_2 son los dos puntos de ramificación de X que pertenecen a J . Por el Lema 13, estos conjuntos son 2-celdas; cuya intersección es el conjunto: $\{F_X^2, q_X^2(J), q_X^2(\{p_1, p_2\})\}$.

Caso B: $J = K$ y $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. En este caso, $\mathcal{PHD}(J, J) = \{q_X^2(\{p_1\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$, en donde p_1 es el único punto de ramificación de X que pertenece a J ; por lo que, $\mathcal{PHD}(J, J)$ es una 2-celda.

Caso C: $J = K$ y $J \in \mathfrak{A}_R(X)$. En este caso $\mathcal{PHD}(J, J) = \{q_X^2(\{p_1\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$, en donde p_1 es el único punto de ramificación de X que pertenece a J ; por lo que, $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo al continuo L_0 ; Véase Figure 2.1.

En la siguiente figura mostramos los tres diferente modelos, de $\mathcal{PHD}(J, J)$, presentados en los casos A, B y C. Observemos que en estos tres casos, las aristas de los cuales depende $\mathcal{PHD}(J, K)$ son iguales; i.e $J = K$.


 Figura 2.3: Los tres posibles modelos de $\mathcal{PHD}(J, J)$.

Ahora, consideremos los casos en donde $J \neq K$.

Caso D: J y K son arcos tales que ninguno de ellos pertenece a $\mathfrak{A}_E(X)$. Sean $\{p_J, q_J\}$ los puntos de ramificación de X , que pertenece a J y $\{p_K, q_K\}$ los puntos de ramificación de X , que pertenecen a K . Sean $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in C_1(K)\}$, $\mathcal{D}_2 = \{q_X^2(\{q_J\} \cup A) : A \in C_1(K)\}$, $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$ y $\mathcal{G}_2 = \{q_X^2(\{q_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$. Notemos que, dado que, J y K son arcos, tenemos que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{G}_1$ y \mathcal{G}_2 son 2-celdas; de modo que, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Consideremos los siguientes tres subcasos:

Subcaso D.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}, \\ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \{q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, & \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{q_J, p_K\})\}, \\ \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_2 &= \{q_X^2(\{q_J, q_K\})\}, & \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Subcaso D.2: $J \cap K$ es un conjunto unipuntual; de aquí que, podamos considerar $p_J = p_K$. En este subcaso tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{F_X^2\}, \\ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \{q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, & \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{q_J, p_K\})\}, \\ \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_2 &= \{q_X^2(\{q_J, q_K\})\}, & \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Subcaso D.3: $J \cap K$ es un conjunto de dos puntos; esto nos permite considerar $p_J = p_K$ y $q_J = q_K$. En este subcaso tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\}), q_X^2(K)\}, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, \\
 \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, & \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, \\
 \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_2 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\})\}, & \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 &= \{F_X^2, q_X^2(\{p_J, q_K\}), q_X^2(J)\}.
 \end{aligned}$$

Caso E: Ambos, J y K , son arcos, tales que: $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y $K \in \mathfrak{A}_E(X)$. Sean $\{p_J, q_J\}$ los puntos de ramificación de X , que pertenecen a J ; p_K el único punto de ramificación de X , que pertenece a K ; $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in C_1(K)\}$; $\mathcal{D}_2 = \{q_X^2(\{q_J\} \cup A) : A \in C_1(K)\}$ y $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$. Notemos que, dado que J y K son arcos, tenemos que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ y \mathcal{G}_1 son 2-celdas; de modo que, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{G}_1$. Consideremos los siguientes dos subcasos.

Subcaso E.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}, \\
 \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{q_J, p_K\})\}.
 \end{aligned}$$

Subcaso E.2: $J \cap K$ es un conjunto unipuntual. En este subcaso, podemos suponer que $p_J = p_K$; por lo que obtenemos, que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{F_X^2\}, \\
 \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{p_J, q_J\})\}.
 \end{aligned}$$

Caso F: J es un arco tal que $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y K es un lazo. Sean $\{p_J, q_J\}$ el conjunto de puntos de ramificación de X , que pertenecen a J ; p_K el único punto de ramificación de X , que pertenece a K ; $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(K)\}$; $\mathcal{D}_2 = \{q_X^2(\{q_J\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(K)\}$ y $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$. Dado que J es un arco, tenemos que \mathcal{G}_1 es una 2-celda. Ya que K es un lazo, \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son homeomorfos a $\mathcal{E}(K)$; el cual es homeomorfo al continuo L_0 , véase Figura 2.1. Entonces, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{G}_1$. Consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso F.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}, \\ \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{q_J, p_K\})\}.\end{aligned}$$

Subcaso F.2: $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto. En este subcaso, podemos suponer que $p_J = p_K$. Por lo que, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= \emptyset, & \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 &= \{F_X^2\}, \\ \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{G}_1 &= \{q_X^2(\{p_J, q_J\})\}.\end{aligned}$$

Caso G: J y K son arcos tales que J y K pertenecen a $\mathfrak{A}_E(X)$. Sean p_J el único punto de ramificación de X que pertenece a J y p_K el único punto de ramificación de X que pertenece a K . Sean $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in C_1(K)\}$ y $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$. Notemos que, dado que J y K son arcos, tenemos que \mathcal{D}_1 y \mathcal{G}_1 son 2-celdas; de modo que, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{G}_1$. Consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso G.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}$.

Subcaso G.2: $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto. En este subcaso, podemos suponer que $p_J = p_K$, por lo que tenemos que:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{F_X^2\}$.

Caso H: J es un arco tal que $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y K es un lazo. Sean p_J el único punto de ramificación de X que pertenece a J y p_K el único punto de ramificación de X que pertenece a K . Sean $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(K)\}$ y $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in C_1(J)\}$. Como J es un arco, tenemos que \mathcal{G}_1 es una 2-celda. Y, \mathcal{D}_1 es homeomorfo a L_0 . Entonces, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{G}_1$. Consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso H.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}$.

Subcaso H.2: $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto. En este subcaso, podemos suponer que $p_J = p_K$. Por lo que:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{F_X^2\}$.

Case I: J y K son lazos. Sea p_J el único punto de ramificación de X que pertenece a J y sea p_K el único punto de ramificación de X que pertenece a K . Sean $\mathcal{D}_1 = \{q_X^2(\{p_J\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(K)\}$ y $\mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_K\} \cup A) : A \in \mathcal{E}(J)\}$. Notemos que, dado que J y K son lazos, \mathcal{D}_1 y \mathcal{G}_1 son homeomorfos al continuo L_0 . De modo que, $\mathcal{PHD}(J, K) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{G}_1$. Consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso I.1: $J \cap K = \emptyset$. En este subcaso, tenemos que:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{q_X^2(\{p_J, p_K\})\}$.

Subcaso I.2: $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto. En este subcaso, podemos suponer que $p_J = p_K$. Por lo que:

- $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{G}_1 = \{F_X^2\}$.

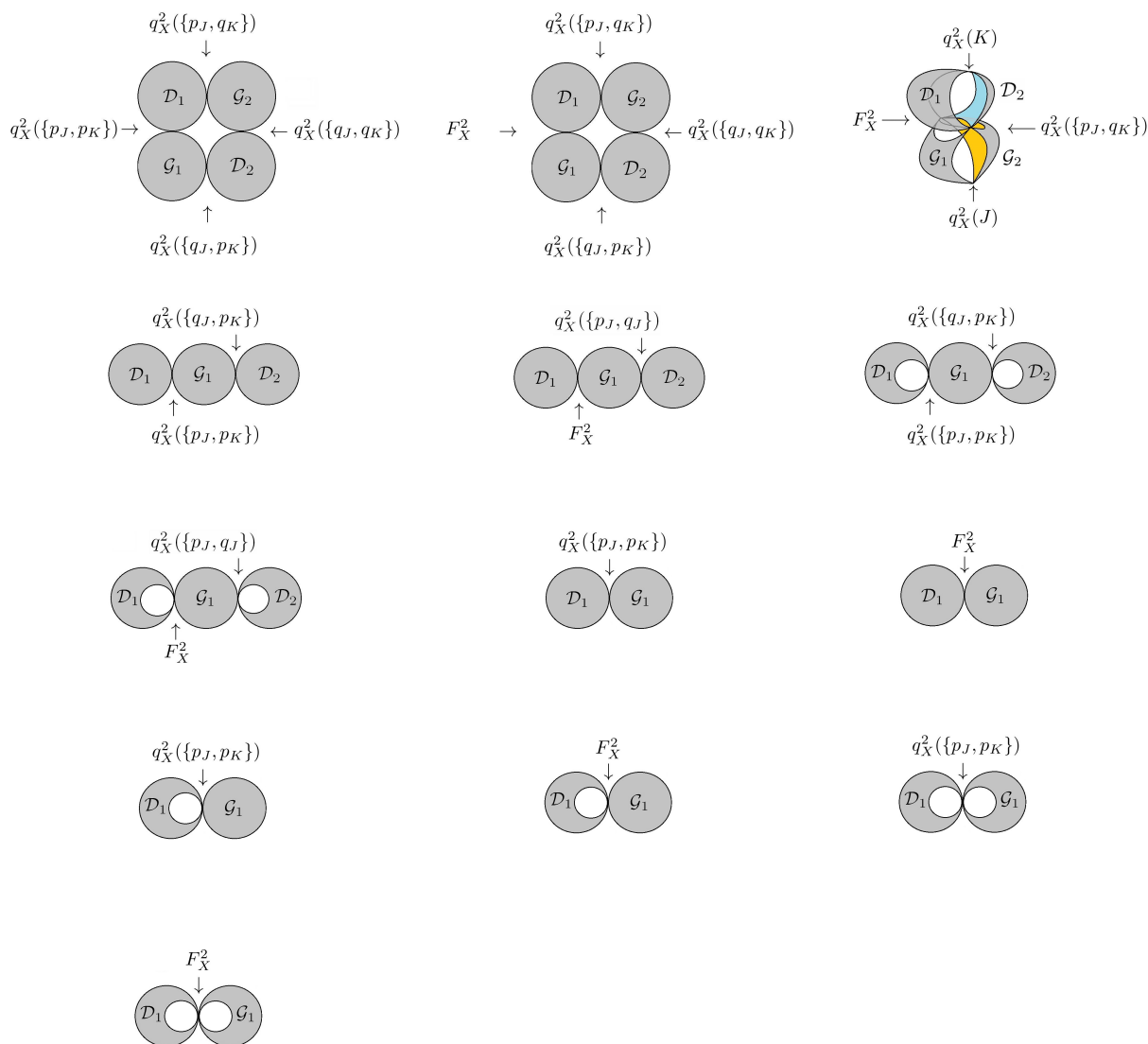


Figura 2.4: Todos los posibles modelos de $\mathcal{PHD}(J, K)$, cuando $J \neq K$.

Finalmente, en la Figura 2.4, presentamos una tabla con todos los posibles modelos de $\mathcal{PHD}_n(J, K)$, cuando $J \neq K$; Estos, están ordenados de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Corresponden a los subcasos en los casos D, E,

F, G, H e I, respectivamente. Es importante notar que, ninguno de los modelos en la Figura 2.3 es homeomorfo a algún modelo presentado en la Figura 2.4.

2.4. Resultado principal

En esta sección presentaremos el resultado principal de este capítulo: las gráficas finitas tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único; es decir, si X es una gráfica finita y Y es un continuo tal que $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . El primer paso será mencionar que, para las gráficas S^1 y $[0, 1]$, el resultado ya fue probado por S. Macías y J. C. Macías, respectivamente [29, 23]. Posteriormente probaremos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la gráfica θ_m tiene n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único. Finalmente, probaremos la unicidad del n -ésimo pseudohiperespacio suspensión para una gráfica finita X tal que $R(X) \neq \emptyset$ y tal que X no sea, para cada $m \in \mathbb{N}$, homeomorfa a la gráfica θ_m .

La prueba del siguiente lema es similar a la prueba de las partes (A), (B) y (C) del Teorema 3.1 de [16]; con el propósito de tener mayor completitud y claridad en esta tesis presentaremos su prueba.

Lema 16. *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$, $n \in \mathbb{N}$, y $h : PHS_n(X) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo. Supongamos que para $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Entonces:*

- (A) *Para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$,*
- (B) *para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $h^{-1}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\}) \subset q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$,*
- (C) *la relación $J \mapsto J_h$ es una biyección entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$.*

Demostración. Por el Lema 12(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ y

$m \leq n$. Dada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por el Lema 12(b), $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ es una componente de $\mathcal{PHE}_n(Y)$. Sean A y B dos subarcos diferentes y no degenerados de J° . Entonces, $h(q_X^n(A)), h(q_X^n(B)) \in h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h(q_X^n(A)) \neq F_Y^n$. Por hipótesis, $h(q_X^n(A)) \in q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. De modo que, $h(q_X^n(A))$ pertenece a los conjuntos $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ y $q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$; como estos conjuntos son componentes de $\mathcal{PHE}_n(Y)$, se sigue que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. Por lo tanto hemos probado (A).

Notemos que (B) es consecuencia directa de (A).

Ahora probaremos (C). Supongamos que $J, L \in \mathfrak{A}_S(X)$ y que, además, $J_h = L_h$. Por (A), $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = h(q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Por lo que, $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\} = q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$. Sea A un arco no degenerado tal que $A \subset J^\circ$. Entonces, existe $B \in \langle L^\circ \rangle_n - F_1(X)$ tal que $q_X^n(A) = q_X^n(B)$. Por lo que, $A = B \in \langle J^\circ \rangle_n \cap \langle L^\circ \rangle_n$, y, en consecuencia, $\emptyset \neq A \subset J^\circ \cap L^\circ$; lo cual implica $J = L$. Esto prueba (C). \square

Si $n \geq 2$, el siguiente lema (Lema 17) es esencial en la demostración de la unicidad de PHS_n de las gráficas θ_m . Cabe mencionar que, si se toman las intersecciones análogas de los respectivos conjuntos análogos, a los usados en el siguiente lema, en HS_n , con $n \geq 2$, el siguiente lema es falso; lo cual, hace ver que, para $n \geq 2$, existe cierta diferencia estructural entre PHS_n y HS_n de las gráficas θ_m ; esto se verá con todo detalle en el Capítulo 5 de esta tesis.

Lema 17. *Sean $n \geq 2$ y X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Entonces:*

$$|\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}| = 2$$

si y sólo si X es homeomorfo a θ_m , para alguna $m \in \mathbb{N}$; concretamente:

$$\bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} = \{F_{\theta_m}^n, q_{\theta_m}^n(\{v, w\})\},$$

en donde $\{v, w\}$ es el conjunto de puntos ramificación de θ_m . Además, si X no es homeomorfo a θ_m para ninguna $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \{F_X^n\}.$$

Demostración. Primero, veamos que si X es la gráfica θ_m , entonces:

$$|\bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\}| = 2.$$

Sean v y w los dos puntos de ramificación de θ_m ; con lo cual, $R(\theta_m) = \{v, w\}$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$. Como cada $\{p\}$, con $p \in J^\circ$, puede ser aproximado por elementos pertenecientes a $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(\theta_m)$, tenemos que:

$$\{p\} \in cl_{C_n(\theta_m)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(\theta_m));$$

esto implica que $F_{\theta_m}^n \in cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\})$. Además, dado que $n \geq 2$, $\{v, w\}$ puede ser aproximado por elementos pertenecientes a $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(\theta_m)$. Por lo que,

$$\{v, w\} \in cl_{C_n(\theta_m)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(\theta_m));$$

lo cual implica que $q_{\theta_m}^n(\{v, w\}) \in cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\})$. De lo anterior tenemos que:

$$F_{\theta_m}^n, q_{\theta_m}^n(\{v, w\}) \in \bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\}.$$

Ahora supongamos que existe χ tal que:

$$\chi \in \bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} - \{F_{\theta_m}^n, q_{\theta_m}^n(\{v, w\})\}.$$

Sean $J_0 \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$ y $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\langle J_0^\circ \rangle_n$ tal que $\lim q_{\theta_m}^n(A_k) = \chi$. Entonces, es claro que $\lim A_k = A$ para alguna $A \in \langle J_0 \rangle_n$. Dado que $\chi \neq F_{\theta_m}^n$, $\chi \neq q_{\theta_m}^n(\{v, w\})$ y $q_{\theta_m}^n(A) = \chi$, tenemos que $A \in C_n(J_0) - (F_1(J_0) \cup \{v, w\})$; esto implica que al menos una componente de A interseca a J_0° ; con lo cual podemos concluir que $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$ tal que $J \neq J_0$. Por un argumento similar al que acabamos de dar, podemos asegurar

que existe $D \in C_n(J) - (F_1(J) \cup \{v, w\})$ tal que $q_\theta^n(D) = \chi$. Como $\chi \neq F_{\theta_m}^n$, tenemos que $D = A$. Por lo que, $J_0^\circ \cap J \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción. En conclusión, $\{F_X^n\} \cup \{q_X^n(\{v, w\})\} = \bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\}$; por lo que, claramente, $|\bigcap \{cl_{PHS_n(\theta_m)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\}| = 2$.

Ahora, probaremos que si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y tal que X no es la gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \{F_X^n\}.$$

Sea X una gráfica finita tal que X no es la gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dado que cada elemento $\{p\}$, tal que $p \in J^\circ$, puede ser aproximado por elementos en $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X)$, tenemos que:

$$\{p\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X));$$

lo cual implica que, $F_X^n \in cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle) - \{F_X^n\})$. Por lo tanto,

$$F_X^n \in \bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}.$$

Ahora supongamos que existe χ tal que:

$$\chi \in \bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} - \{F_X^n\}.$$

Sea $J_0 \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces existe una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ de elementos de $\langle J_0^\circ \rangle_n$ tal que $\lim q_X^n(A_k) = \chi$. Es claro que $\lim A_k = A$ para alguna $A \in \langle J_0 \rangle_n$. Como $\chi \neq F_X^n$ y $q_X^n(A) = \chi$, tenemos que $A \in C_n(J_0) - F_1(J_0)$; lo cual, implica alguna de las siguientes dos situaciones: la primera, al menos una componente de A interseca a J_0° ; la segunda, A es el conjunto de puntos de ramificación de X que pertenecen a J_0 , el cual, es un conjunto de cardinalidad igual a 2 (esto es como consecuencia de que $A \in C_n(J_0) - F_1(J_0)$; de modo que, en este caso, podemos expresar: $A = \{a, b\}$, $a \neq b$).

Primero supongamos la primera situación: $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \neq J_0$. Por un argumento similar al dado en el caso anterior, existe $D \in C_n(J) - F_1(J)$ tal que $q_X^n(D) = \chi$. Dado que $\chi \neq F_X^n$, tenemos que $D = A$. Por lo que, $J_0^\circ \cap J \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos la segunda situación: $A = \{a, b\}$, con $a \neq b$. Dado que la única gráfica finita, con más de un punto de ramificación, en que todas sus aristas comparten el mismo conjunto de puntos de ramificación, es una gráfica θ_m , podemos suponer, dado que, por hipótesis, X no es una gráfica θ_m , que existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \neq J_0$ y tal que $J_0 \cap J \neq \{a, b\}$; tomando J y dando un argumento similar al dado anteriormente, podemos asegurar que existe $D \in C_n(J) - F_1(J)$ tal que $q_X^n(D) = \chi$ y, como $\chi \neq F_X^n$, tenemos que $D = A$. Lo cual implica que $\{a, b\} \in C_n(J) - F_1(J)$. Por lo que se concluye que J y J_0 comparten el mismo conjunto de puntos de ramificación de X lo cual es una contradicción. Esto implica que para un gráfica finita X tal que $R(X) \neq \emptyset$ y tal que esta no sea homeomorfa a ninguna gráfica θ_m , para toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \{F_X^n\}.$$

En conclusión, si X no es una gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$|\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}| = |\{F_X^n\}| = 1.$$

□

Teorema 18. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n([0, 1])$, entonces X es homeomorfo a $[0, 1]$. Si $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(S^1)$, entonces X es homeomorfo a S^1 .

Demostración. Para el caso $n = 1$, véanse los Teoremas 5.5 y 5.6 de [29]. Para el caso $n \geq 2$, véase el Teorema 4.4 de [23]. □

Ahora probaremos que la gráfica θ_m tiene n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único.

Teorema 19. *Las gráficas θ_m tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.*

Demostración. Sean Y un continuo, $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $h : PHS_n(\theta_m) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces, por el Corolario 4.6 de [23] y por el Teorema 18, Y es una gráfica finita tal que $R(Y) \neq \emptyset$.

Caso 1: $n = 1$.

Como $PHS_1(X)$ es exactamente igual al espacio $HS_1(X)$, para cualquier continuo X , el resultado principal de [16] asegura que Y es homeomorfo a θ_m .

Caso 2: $n \geq 3$.

Veamos que θ_m y Y satisfacen las hipótesis del Lema 16. Dado que h es un homeomorfismo, $h(\mathcal{PHL}_n(\theta_m)) = \mathcal{PHL}_n(Y)$. Lo cual, recordando la definición de $\mathcal{PHD}_n(X)$, implica que $h(\mathcal{PHD}_n(\theta_m)) = \mathcal{PHD}_n(Y)$. Entonces, por Lema 12(a), para cada $J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que

$$h(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(\theta_m)) - \{F_{\theta_m}^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\} \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}.$$

Dado que existe una correspondencia biyectiva entre las componentes de $\mathcal{PHD}_n(\theta_m)$ y las componentes de $\mathcal{PHD}_n(Y)$, obtenemos que la relación dada por $J \mapsto J_h$, entre $\mathfrak{A}_S(\theta_m)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$, es una biyección. Sea $R(\theta_m) = \{v, w\}$.

Entonces, por los Lemas 17 y 16, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= |h(\{F_{\theta_m}^n, q_{\theta_m}^n(\{v, w\})\})| = \\ &= \left| \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(h(q_{\theta_m}^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_{\theta_m}^n\})) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} \right| = \\ &= \left| \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} \right| = \\ &= \left| \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\} \right|. \end{aligned}$$

Por lo que, usando el Lema 17, concluimos que Y es homeomorfo a la gráfica θ_m .

Caso 3: $n = 2$.

Primero, veamos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_{\theta_m}^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$.

Dado que la definición de $\mathcal{PHE}_2(\theta_m)$ está dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(\theta_m)) = \mathcal{PHE}_2(Y)$. Por el Lema 12(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_2(\theta_m)$ son los conjuntos de la forma $q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_{\theta_m}^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$ y las componentes de $\mathcal{PHE}_2(Y)$ son los conjuntos de la forma $q_Y^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Por lo que, dado $J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $h(q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_{\theta_m}^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$. Por el Lema 6, $F_{\theta_m}^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(\theta_m)$ y, como $R(Y) \neq \emptyset$, por el Lema 6, $F_Y^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Dado que la definición de $\partial\mathcal{PHL}_2(\theta_m)$ está dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(\theta_m)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Lo cual implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(\theta_m) \cap q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) \cap q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(\theta_m) - q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) - q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

De lo anterior, concluimos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{PHD}(J_h, K_h)$. Supongamos que $J_h \neq K_h$. Entonces, $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo a $\mathcal{PHD}(J_h, K_h)$ con $J_h \neq K_h$. Lo cual implica que el modelo en alguno de los casos A, B o C es homeomorfo al modelo en alguno de los subcasos de los casos D, E, F, G, H o I (de la sección anterior, pp. 19-26); claramente, una contradicción. Por lo que concluimos que $J_h = K_h$. Lo cual implica que $h(q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_{\theta_m}^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$. Por simetría, la relación dada por $J \mapsto J_h$ entre $\mathfrak{A}_S(\theta_m)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$ es una biyección.

Ahora, sea $R(\theta_m) = \{v, w\}$. Entonces, por el Lema 17:

$$\begin{aligned} 2 &= |h(\{F_{\theta_m}^2, q_{\theta_m}^2(\{v, w\})\})| = \\ &= \left| \bigcap \{cl_{PHS_2(Y)}(h(q_{\theta_m}^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_{\theta_m}^2\})) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} \right| = \\ &= \left| \bigcap \{cl_{PHS_2(Y)}(q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) : J \in \mathfrak{A}_S(\theta_m)\} \right| = \end{aligned}$$

$$| \bigcap \{ cl_{PHS_2(Y)}(q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y) \} |,$$

En conclusión, usando el Lema 17, Y es homeomorfa a la gráfica θ_m . \square

La prueba del siguiente lema es similar a la prueba del Teorema 3.1 de [16]; presentaremos, aquí, la prueba para tener mayor claridad, en esta tesis.

Lema 20. *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$ y además que X no sea una gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $h : PHS_n(X) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo. Supongamos lo siguiente:*

- *Para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$,*

entonces $h(F_X^n) = F_Y^n$. Si, además, suponemos que:

- (1) *Si $J \in \mathfrak{A}_R(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$,*
- (2) *si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$,*

entonces X es homeomorfo a Y .

Demostración. Supongamos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Primero, mostraremos que $h(F_X^n) = F_Y^n$. Dado que X no es una gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$, por el Lema 17, tenemos que

$$\bigcap \{ cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X) \} = \{F_X^n\},$$

y, como la gráficas θ_m tienen n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único, Teorema 19, obtenemos que Y no es una gráfica θ_m . Por lo que, usando el Lema 17, concluimos que:

$$\bigcap \{ cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(Y) \} = \{F_Y^n\}.$$

Entonces, dado que estamos suponiendo que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, podemos usar las partes (A) y (C) del Lema 16 para afirmar que:

$$\begin{aligned} h(\{F_X^n\}) &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\} &= \{F_Y^n\}. \end{aligned}$$

En conclusión, $h(\{F_X^n\}) = \{F_Y^n\}$.

Ahora, supongamos (1) y (2) del teorema; a continuación mostraremos que X es, entonces, homeomorfo a Y .

Sea $A \in C_n(X) - F_1(X)$, por lo cual $q_X^n(A) \neq F_X^n$. Entonces, por lo demostrado anteriormente, $h(q_X^n(A)) \neq F_Y^n$; lo cual implica que, existe un único $D_A \in C_n(Y) - F_1(Y)$ tal que $h(q_X^n(A)) = q_Y^n(D_A)$. Notemos que la relación $A \mapsto D_A$ es un homeomorfismo entre $C_n(X) - F_1(X)$ y $C_n(Y) - F_1(Y)$. Por otro lado, $C_n(X) - F_1(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(X) - F_X^n(X)$. En consecuencia, $\dim_A[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(A))}[PHS_n(Y)] = \dim_{D_A}[C_n(Y)]$.

Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$; sea $\mathcal{K}_n(J, X) = cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n) - F_1(X)$.

Afirmación 1: Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, Entonces

- (a) $\mathcal{K}_n(J_h, Y) = \{D_A \in C_n(Y) - F_1(Y) : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}$,
- (b) $\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\} = \{\dim_B[C_n(Y)] : B \in \mathcal{K}_n(J_h, X)\}$,
- (c) $|J \cap R(X)| = |J_h \cap R(Y)|$,
- (d) si $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$ entonces $|A \cap R(X)| = |D_A \cap R(Y)|$.

Una prueba de la Afirmación 1 puede encontrarse dentro de la prueba del Teorema 3.1 de [16]; presentamos a continuación dicha prueba con el propósito de tener mayor claridad en la tesis.

Prueba de la Afirmación 1. (a): Sea $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$. Entonces existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ en $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X)$ tal que $A = \lim A_m$. Dado que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, $D_{A_m} \in \langle J_h^\circ \rangle_n - F_n(Y)$ y $D_A \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$; con lo cual queda probada la inclusión: $\mathcal{K}_n(J_h, Y) \supset \{D_A \in C_n(Y) - F_1(Y) : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}$. Similarmente se prueba la inclusión restante.

La propiedad (b) se sigue directamente de (a).

Para probar (c); sólo hace falta notar que por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), $|\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}| \geq 3$ si y sólo si $|J \cap R(X)| = 2$ y $|\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}| = 2$ si y sólo si $|J \cap R(X)| = 1$.

Finalmente, probemos (d). Tomemos $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$. Si $|A \cap R(X)| = 2$, entonces $|J \cap R(X)| = 2$. Por lo que $|J_h \cap R(Y)| = 2$ y, usando, la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6),

$$\dim_A[C_n(X)] = \text{máx}\{\dim_E[C_n(X)] : E \in \mathcal{K}_n(J, X)\}.$$

Por lo que, $\dim_{D_A}[C_n(Y)] = \text{máx}\{\dim_B[C_n(Y)] : B \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)\}$. Lo cual implica que $|D_A \cap R(Y)| = 2$. Similarmente, si $|D_A \cap R(Y)| = 2$, entonces $|A \cap R(X)| = 2$. Si $|A \cap R(X)| = 0$, por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), $2n = \dim_A[C_n(X)] = \dim_{D_A}[C_n(Y)]$. Aplicando otra vez la fórmula de [33], obtenemos que $|D_A \cap R(Y)| = 0$. Similarmente, si $|D_A \cap R(Y)| = 0$, entonces $|A \cap R(X)| = 0$. Finalmente, si $|A \cap R(X)| = 1$, entonces $|D_A \cap R(Y)| \notin \{0, 2\}$; por lo que, $|D_A \cap R(Y)| = 1$. Esto completa la prueba de la afirmación 1.

Afirmación 2: Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $v \in J \cap R(X)$. Entonces, el conjunto $\mathcal{K}(v, J) = \{A \in \mathcal{K}_n(J, X) : A \cap R(X) = \{v\}\}$ es arcoconexo.

Una prueba de la Afirmación 2 puede encontrarse dentro de la prueba del Teorema 3.1 de [16]; presentamos a continuación dicha prueba con el propósito de tener mayor claridad en la tesis.

Prueba de la Afirmación 2. Sea $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$ tal que $A \cap R(X) = \{v\}$. En el caso en que J es un arco, es fácil ver que hay un subarco L de J tal que

$A \subset L$ y $L \cap R(X) = \{v\}$. Por el Teorema 14.6 de [21], existe una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(L)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = L$, y $\alpha(s) \subset \alpha(t)$, si $s \leq t$. Claramente, $\text{Im}(\alpha) \subset \mathcal{K}_n(J, X)$ y $\alpha(s) \cap R(X) = \{v\}$ para todo $s \in [0, 1]$. Dado que el conjunto $\{N : N \text{ es un subarco de } J \text{ y } N \cap R(X) = \{v\}\}$ es arcoconexo, Concluimos que $\mathcal{K}(v, J)$ es arcoconexo. Ahora, supongamos que J es un lazo en X . Identificaremos a J con el círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^2 y v con el punto $(1, 0)$. Sea $e : [0, 1] \rightarrow S^1$ dada por $e(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$. Sea $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$, en donde A_1, \dots, A_r son las componentes de A . Supongamos que $v \in A_1$. Si $r < n$ o ($r = n = 1$ o $A = J$), entonces para cada $s \in (0, 1]$, el conjunto $B(s) = e(\{sx : x \in e^{-1}(A)\})$ pertenece a $\mathcal{K}(v, J)$. Notemos que la relación $s \mapsto B(s)$ es continua y que $B(\frac{1}{2}) \subset e([0, \frac{1}{2}])$. Dado que $e([0, \frac{1}{2}]) \in \mathcal{K}(v, J)$ y $e([0, \frac{1}{2}])$ es un subarco de J , podemos completar la prueba, de este caso, de la misma manera que cuando J era un arco. Si $r = n > 1$ (o $r = n = 1$ y A_1 es un subarco de J), dado que $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$, v no está en el interior como variedad de A_1 . Entonces podemos suponer que existe $s_0 \in [0, 1)$ tal que $A \subset e([0, s_0])$. Dado que $e([0, s_0]) \in \mathcal{K}(v, J)$ y $e([0, s_0])$ es un subarco de J , de nueva cuenta, podemos argumentar de la misma forma que en el caso en que J era un arco y, así, completar la prueba. Con esto queda concluida la prueba de la Afirmación 2.

Dado $v \in R(X)$, sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $v \in J$. Tomemos $\mathcal{K}(v, J)$ y $A \in \mathcal{K}(v, J)$. Por la Afirmación 1, $D_A \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$, además, existe un único punto $v_h(A) \in R(Y) \cap D_A$. Notemos que $v_h(A) \in J_h$.

Ahora, mostraremos que $v_h(A)$ no depende de A y, más aún, no depende de la elección de J ; es decir, si $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $E \in \mathcal{K}(v, K)$, entonces $v_h(A) = v_h(E)$. Probemos esto: Tomemos J, K, A , y E como los acabamos de describir. Consideremos un subarco A_1 de J tal que $A_1 \neq J$ y tal que v sea un punto final de A_1 . Notemos que $A_1 \in \mathcal{K}(v, J)$. Similarmente, existe $E_1 \in \mathcal{K}(v, K)$ tal que E_1 es conexo. Por la Afirmación 2, $\mathcal{K}(v, J)$ y $\mathcal{K}(v, K)$ son arcoconexos. Entonces, existen funciones $\alpha_A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, J)$ y $\alpha_E : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, K)$ tales que $\alpha_A(0) = A$, $\alpha_A(1) = A_1$, $\alpha_E(0) = E_1$, y $\alpha_E(1) = E$. Es fácil construir una función continua $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1)$ tal que $\alpha_0(0) = A_1$, $\alpha_0(1) = E_1$, y,

tal que para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha_0(t) \cap R(X) = \{v\}$ y $\alpha_0(t) \notin F_1(X)$. Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1) \cup \mathcal{K}(v, J) \cup \mathcal{K}(v, K)$ como:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_A(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ \alpha_0(3t - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ \alpha_E(3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = E$, α es continua, y para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \cap R(X) = \{v\}$. Sea i_0 el orden de X en v .

Por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), para cada $t \in [0, 1]$, $2n + (i_0 - 2) = \dim_{\alpha(t)}[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(\alpha(t))}[PHS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(\alpha(t)))}[PHS_n(Y)] = \dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))}[C_n(Y)]$. Sea $T = \{t \in [0, 1] : v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))\}$. Es claro que T es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y $0 \in T$. A continuación probaremos que $T = [0, 1]$. Supongamos lo contrario, es decir, $T \neq [0, 1]$. Sean R una componente de $[0, 1] - T$ y $t_0 = \inf R \in T$. Entonces existe una sucesión $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de R tal que $\lim r_m = t_0$. Supongamos que el orden de Y en el punto $v_h(A)$ es j . Entonces, $j \geq 3$. Usando la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), obtenemos que $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$ interseca a $R(Y)$ para cada $t \in [0, 1]$. Dado que $R(Y)$ es un conjunto finito, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $w \in R(Y)$ tal que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_m))))$, para cada $m \in \mathbb{N}$; esto implica que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$. Dado que $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0))))}[C_n(Y)] = 2n + (i_0 - 2)$ y el único punto de ramificación de Y en $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(A))) = (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0)))) = D_A$ es $v_h(A)$, por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), el orden de Y en $v_h(A)$ es i_0 ; por lo que, $j = i_0$. Dado que $r_1 \notin T$, $v_h(A) \notin (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_1))))$, tenemos que $v_h(A) \neq w$. Sea $j_0 \geq 3$ el orden de Y en w . Dado que $v_h(A)$, $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$, por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))}[C_n(Y)] \geq 2n + (i_0 - 2) + (j_0 - 2) > 2n + (i_0 - 2)$; lo cual es una contradicción. En conclusión $T = [0, 1]$; por lo que, para cada $t \in [0, 1]$, $v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$. Procediendo de igual manera a la anterior, se demuestra que $v_h(E)$ pertenece al conjunto $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(1-t))))$, para cada

$t \in [0, 1]$; lo cual implica que $v_h(A) = v_h(E)$. Por lo que, $v_h(A)$ no depende de la elección ni de J ni de A .

Usando esto, podemos, simplemente, escribir v_h en lugar de $v_h(A)$; de esta manera, se construye una función $\varphi : R(X) \rightarrow R(Y)$ dada por $\varphi(v) = v_h$. Notemos que φ satisface la siguiente propiedad: Si v es un punto de ramificación de X que también pertenece a la arista J de X , entonces $\varphi(v)$ es un punto de ramificación de Y que pertenece a la arista J_h de Y .

Por las partes (B) y (C) del Lema 16, X y Y satisfacen condiciones simétricas; por lo cual, se puede definir una función $\varphi^{-1} : R(Y) \rightarrow R(X)$ siguiendo un procedimiento similar al anteriormente planteado. Es decir, φ^{-1} se puede definir como sigue: dado $w \in R(Y)$, sean $K \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $w \in K$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K = J_h$. Sean B un arco tal que $B \subset K$, $B \neq K$ y w un punto final de B . Entonces, existe un único $A \in C_n(J)$ tal que $q_X^n(A) = h^{-1}(q_Y^n(B))$ y $\varphi^{-1}(w)$ es el único punto de $A \cap R(X)$. Claramente, φ^{-1} es la función inversa de φ .

Observemos que de lo anterior podemos asegurar que φ tiene la siguiente propiedad: Un punto de ramificación v , de X , pertenece a la arista J , de X , si y sólo si el punto de ramificación $\varphi(v)$, de Y , pertenece a la arista J_h , de Y .

Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $|J \cap R(X)| = 1$. Por la hipótesis (2), si J es un arco, entonces J_h es un arco. Por otro lado, si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ es tal que $|J \cap R(X)| = 1$ y J_h es un arco, por hipótesis (1), J no es un lazo; por lo que, J es un arco, también. En conclusión, si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un arco si y sólo si J_h es un arco. Similarmente, tenemos que si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ satisface que $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un lazo si y sólo si J_h es un lazo.

Ahora, extenderemos φ a un homeomorfismo entre X y Y . Tomemos $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. En el caso en que $|J \cap R(X)| = 2$, tenemos que J es un arco; usando la Afirmación 1 (c), obtenemos que $|J_h \cap R(X)| = 2$; por lo que, J_h es un arco. Sean u y v los puntos finales de J ; entonces, $\{u, v\} = J \cap R(X)$. Dado que J_h es un arco con puntos finales $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$, podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(u) = \varphi(u)$ y $\varphi_J(v) = \varphi(v)$. Ahora bien, en el caso en que $|J \cap R(X)| = 1$, podemos escribir $J \cap R(X) = \{w\}$;

entonces, se tiene que $J_h \cap R(Y) = \{\varphi(w)\}$. Si J es un arco, sabemos que w es un punto final de J y $\varphi(w)$ es un punto final del arco J_h . Por lo que, podemos tomar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(w) = \varphi(w)$. Finalmente, si J es un lazo, dado que J_h es un lazo también, y además $\varphi(w) \in J_h$, existe un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(w) = \varphi(w)$.

Entonces, podemos tomar la extensión común, Φ , de todos los homeomorfismos φ_J (con $J \in \mathfrak{A}_S(X)$). Claramente, Φ es un homeomorfismo entre X y Y . \square

Teorema 21. *Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces X tiene n -ésimo pseudohiperespacio suspensión único.*

Demostración. Por el Teorema 19, podemos suponer que X y Y no son homeomorfas a una gráfica θ_m , para ninguna $m \in \mathbb{N}$. Sean Y un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $h : PHS_n(X) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces, por el Corolario 4.6 de [23], Y es una gráfica finita y Y es tal que $R(Y) \neq \emptyset$, por el Teorema 18.

Caso 1: $n = 1$.

Dado que $PHS_1(X)$ es, exactamente, igual al espacio $HS_1(X)$ para cualquier continuo X , el resultado principal de [16] nos permite afirmar que Y es homeomorfa a X .

Caso 2: $n \geq 3$.

Veremos que X , Y y h satisfacen las hipótesis del Lema 20.

Dado que h es un homeomorfismo, $h(\mathcal{PHL}_n(X)) = \mathcal{PHL}_n(Y)$; esto, recordando la definición de $\mathcal{PHD}_n(X)$, implica que $h(\mathcal{PHD}_n(X)) = \mathcal{PHD}_n(Y)$. Por el Lema 12(a), obtenemos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que:

$$h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\} \subset q_Y^n(\langle J_h \rangle_n) - \{F_Y^n\}.$$

Como hay una biyección entre el conjunto de componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ y el conjunto de componentes de $\mathcal{PHD}_n(Y)$, obtenemos que la relación $J \mapsto J_h$, entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$, es una biyección. Por el Lema 20, $h(F_X^n) = F_Y^n$.

Ahora, por Lema 20, para concluir que X es homeomorfa a Y , sólo hace falta mostrar que:

- 1.- si $J \in \mathfrak{A}_R(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$,
- 2.- si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$.

Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $|J \cap R(X)| = 1$. A continuación, mostraremos que si J es un arco, entonces J_h es un arco (y, en consecuencia, por simetría, la afirmación recíproca también será verdadera). Primero, supongamos que J es un arco; y sean v y p los puntos finales de J , con $v \in R(X)$. Sea A un subarco de J tal que $p \in A$ y tal que $v \notin A$. Por la definición de J_h , tenemos que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\}$. Si J_h no es un arco, entonces es un lazo. Sea $\chi = q_X^n(A)$ y $\psi = h(\chi) \in q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\}$. Entonces existe $B \in \langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y) - F_1(Y)$ tal que $q_Y^n(B) = \psi$. Notemos que B es un subarco no degenerado de J_h . Usando la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6) podemos afirmar que: $2n = \dim_A[C_n(X)] = \dim_\chi[PHS_n(X)] = \dim_\psi[PHS_n(Y)] = \dim_B[C_n(Y)]$; entonces, usando la misma fórmula, podemos afirmar que $B \cap R(Y) = \emptyset$. Del Ejemplo 5.2 de [21], podemos asegurar que B tiene una vecindad \mathcal{M} en $\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y) \subset C_1(J_h)$, con las siguientes propiedades: \mathcal{M} es una 2-celda; contiene a B en su interior como variedad; y, $\mathcal{M} \cap F_1(Y) = \emptyset$. En consecuencia, $q_Y^n(\mathcal{M})$ es una 2-celda, es vecindad de ψ en $q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\}$ y contiene a ψ en su interior como variedad. Dado que $h(F_X^n) = F_Y^n$, $(q_X^n)^{-1}h^{-1}(q_Y^n(\mathcal{M}))$ es una vecindad de A en $\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X) - F_1(X) \subset C_1(J)$ tal que ésta es una 2-celda y que contiene a A en su interior como variedad. Dado que, $p \in A$ y p es un punto final de J , el modelo de $C_1(J)$ descrito en el Ejemplo 5.1 de [21] muestra que A no puede estar contenido en el interior como variedad de ninguna 2-celda de $C_1(J)$; por lo que tenemos una contradicción. En conclusión, J_h tiene que ser un arco.

Como consecuencia del hecho probado en el párrafo anterior, tenemos que si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ satisface $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un arco si y sólo si J_h es un arco. Y, como consecuencia de esto, si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ satisface $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un lazo si y sólo si J_h es un lazo. Entonces, por el Lema 20,

obtenemos que X es homeomorfo a Y .

Caso 3: $n = 2$.

Veremos que X , Y y h satisfacen las hipótesis del Lema 20. Por el Lema 12(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dado que la definición de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ esta dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Similarmente, $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{PHE}_2(Y)$. Por el Lema 12(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_2(Y)$ son los conjuntos de la forma $q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, en donde $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$; entonces, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$, tal que $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\} = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$; Por el Lema 6, $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $F_Y^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$; lo cual implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) \cap q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) - q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

En consecuencia, $h(\mathcal{PHD}(J, K)) = \mathcal{PHD}(J_h, K_h)$.

Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = h(\mathcal{PHD}(J_h, K_h))$, para algunas $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Usando la descripción de los modelos dados en la sección anterior, de este capítulo, tenemos que $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo a algún modelo de los casos: A, B o C (pp. 19-26). Dado que $\mathcal{PHD}(J, J)$ no es homeomorfo a ningún modelo de los subcasos de D, E, F, G, H o I (pp. 19-26), obtenemos que $\mathcal{PHD}(J_h, K_h)$ es homeomorfo a alguno de los modelos en los casos A, B o C (pp. 19-26). Por lo que, $J_h = K_h$. En consecuencia, tenemos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{PHD}(J_h, J_h)$.

Ahora, sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$ con $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Si suponemos que $J_h \neq K_h$, obtenemos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{PHD}(J_h, K_h)$ con $J_h \neq K_h$, lo cual contradice el hecho probado en el párrafo anterior; por lo que podemos afirmar que, $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, lo cual induce una relación $J \mapsto J_h$. Por simetría, la relación $J \mapsto J_h$, entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$, es una biyección. Como $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) -$

$\{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, claramente tenemos que:

$$h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2 \cap C_1(X)) - \{F_X^2\}) \subset q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2).$$

Entonces, para mostrar, usando el Lema 20, que X es homeomorfa a Y , sólo hace falta ver que:

- 1.- si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$,
- 2.- si $J \in \mathfrak{A}_R(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$.

Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo al modelo en el caso B (de la sección anterior, de este capítulo). Dado que $\mathcal{PHD}(J, J)$ no es homeomorfo a ninguno de los modelos de los casos A o C, obtenemos que $\mathcal{PHD}(J_h, J_h)$ es homeomorfo al modelo del caso B; por lo que, $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$. Si J es un lazo, entonces $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo al modelo del caso C. Dado que $\mathcal{PHD}(J, J)$ no es homeomorfo a ninguno de los modelos en los casos A o B, obtenemos que $\mathcal{PHD}(J_h, J_h)$ es homeomorfo al modelo en el caso C; por lo que, J_h es un lazo.

En conclusión, X , Y , y h satisfacen las hipótesis del Lema 20. Por lo que, X es homeomorfo a Y . \square

Entonces, por los Teoremas 18 y 21 podemos enunciar, ahora, el resultado principal de este capítulo:

Teorema 22. *Sea X una gráfica finita, entonces X tiene n -ésimo pseudohi-perespacio suspensión único, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Capítulo 3

$PHS_n(X)$ de Dendritas

En este capítulo se demostrará que las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado son PHS_n -determinadas; es decir, se demostrará que, si X y Y son dos dendritas cuyos conjuntos de puntos extremos son conjuntos cerrados, entonces el hecho de que $PHS_n(X)$ sea homeomorfo a $PHS_n(Y)$ implica que X es homeomorfo a Y .

La idea de esta demostración es, en esencia, la misma que para gráficas finitas; es decir, si X y Y son dos dendritas cuyos conjuntos de puntos extremos son cerrados, con la propiedad de tener n -ésimo pseudohiperespacio suspensión homeomorfos, entonces, dada una arista, J de X , que no es otra cosa que un arco libre maximal de X , se prueba que los subconjuntos, de $PHS_n(X)$, de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ preservan su estructura bajo homeomorfismos; es decir, que la imagen de dichos subconjuntos se puede escribir como $q_Y^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$, en donde K resulta ser una arista de Y . Usando esto y trabajando los casos $n = 2$ y $n \neq 2$ de manera particular, se construye un homeomorfismo, h , entre los espacios $X - E_a(X)$ y $Y - E_a(Y)$, que no son otra cosa que los conjuntos de puntos de X y Y que tienen una gráfica finita como vecindad; con lo cual, y usando el hecho de que tanto X como Y tienen conjunto de puntos extremos cerrados, se extiende el homeomorfismo h a un homeomorfismo entre X y Y .

3.1. Definiciones técnicas

A continuación definiremos ciertos subconjuntos de $PHS_n(X)$ con los cuales trabajaremos a lo largo de este capítulo; la mayoría de estos conjuntos tienen su análogo en el capítulo anterior.

A la familia de dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado la denotaremos con el símbolo \mathfrak{D} .

Las aristas de una dendrita serán los arcos libres maximales; denotémoslas como:

$$\mathfrak{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal}\}.$$

A las aristas que sólo contienen un punto de ramificación de X las denotaremos como:

$$\mathfrak{A}_E(X) = \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : |J \cap R(X)| = 1\}.$$

Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que en el primer capítulo se definió al conjunto $E_a(X)$ como el conjunto de puntos extremos de acumulación de una dendrita X . Definamos:

$$\mathcal{M}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin C_{n-1}(X), A \cap R(X) = \emptyset \text{ y } A \cap E_a(X) = \emptyset\};$$

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } C_n(X) \\ \text{tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{L}_n = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } C_n(X) \\ \text{tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda y } A \text{ pertenece a la frontera} \\ \text{como variedad de } \mathcal{M}\};$$

$$\mathcal{PHL}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } PHS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{PHL}_n = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } PHS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda y } \chi \text{ pertenece a la frontera como variedad de } \mathcal{M}\};$$

$$\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ y } A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim(\mathcal{U}) \leq 2n, \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHD}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \notin \mathcal{PHL}_n(X) \text{ y } \chi \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en } PHS_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim(\mathcal{U}) \leq 2n, \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{PHL}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHE}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \dim_\chi[PHS_n(X)] = 2n\}.$$

Para $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ definamos:

$$\mathcal{D}(J, K) = \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) \cap \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) - \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2);$$

y también, el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K) &= \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

3.2. Resultados preliminares

Lema 23. Sean X un elemento de la familia \mathfrak{D} , $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- 1.- $\dim_A [C_n(X)]$ es finita,
- 2.- existe una gráfica finita D contenida en X tal que $A \subset D^\circ$,
- 3.- $A \cap E_a(X) = \emptyset$.

Demostración. Primero supongamos que $A \cap E_a(X) \neq \emptyset$. Entonces podemos tomar $a \in A \cap E_a(X)$. Dado que $X \in \mathfrak{D}$, existe una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ de elementos de $R(X)$, tal que $\lim a_i = a$; esto implica que no existe una gráfica finita en X tal que A esté contenida en su interior.

Ahora supongamos que $A \cap E_a(X) = \emptyset$. Dado que $X \in \mathfrak{D}$, $E_a(X)$ es un conjunto cerrado de X ; por lo que, podemos tomar dos conjuntos abiertos U y V de X , tales que $A \subset U$ y $E_a(X) \subset V$. Usando la normalidad de X y el Teorema del borde en la frontera, podemos tomar un elemento B de $C_n(X)$ tal que $A \subset B^\circ \subset U$. A continuación, probaremos que $B \cap R(X)$ es un conjunto finito. Si X es un árbol la afirmación es obvia. Supongamos, entonces, que X no es un árbol y que $B \cap R(X)$ es un conjunto infinito; en consecuencia, $U \cap R(X)$ es un conjunto infinito; lo cual implica que existe una sucesión convergente $\{a_i\}_{i=0}^\infty \subset X$ tal que $a_i \in U \cap R(X)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Dado que $X \in \mathfrak{D}$ por [2, Proposición 3.4], tenemos que $\lim a_i \in E_a(X)$. Como V es un conjunto abierto de X y $\lim a_i \in E_a(X) \subset V$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{i_0} \in V$, lo cual implica que $U \cap V \neq \emptyset$, claramente una contradicción. De lo anterior podemos afirmar que, $B \cap R(X)$ es un conjunto finito. Dado que $X \in \mathfrak{D}$, por [2, Teorema 3.2], cada componente B_j de B es un elemento de \mathfrak{D} y, como $B \cap R(X)$ es un conjunto finito, obtenemos que $B_j \cap R(X)$ es un conjunto finito, por lo que, ninguna de las componentes B_j contiene una copia de W_0 . Por otro lado usando [2, Teorema 3.3], tenemos que X no contiene copia alguna de F_ω , por lo que B no contiene copia alguna de F_ω ; en consecuencia, por el Teorema 3.3 de [2], las componentes de B son árboles. Como $X \in \mathfrak{D}$, podemos

tomar una cantidad finita de arcos R_1, \dots, R_k , de modo que $R_i \cap E_a(X) = \emptyset$, tales que conecten a las componentes de B ; por lo que, $B \cup (\cup_{i=1}^k R_i)$ es una gráfica finita que contiene a A en su interior.

De lo anterior, tenemos que el teorema es una consecuencia directa de [12, Teorema 4]. \square

Lema 24. Sean X un elemento de la familia \mathfrak{D} , $\chi \in PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ y $B \in C_n(X) - F_1(X)$ tales que $q_X^n(B) = \chi$. Entonces:

$$\dim_\chi[PHS_n(X)] = \begin{cases} 2n + \sum_{q \in R(X) \cap B} (\text{ord}_X(q) - 2), & \text{si } B \cap E_a(X) = \emptyset, \\ \infty, & \text{si } B \cap E_a(X) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Demostración. Primero, supongamos que $B \cap E_a(X) = \emptyset$. Entonces, por el Lema 23, existe una gráfica finita D tal que $B \subset D^\circ \subset X$; por lo que, $C_n(D)$ es una vecindad de B en $C_n(X)$, lo cual implica que $\dim_B[C_n(D)] = \dim_B[C_n(X)]$. Por otro lado, $q_X^n : C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo y, como $F_1(X)$ es un conjunto cerrado en $C_n(X)$, obtenemos que $\dim_\chi[PHS_n(X)] = \dim_B[C_n(X)]$. Finalmente, usando la formula principal de [33] (ver MV, p.6), obtenemos que $\dim_\chi[PHS_n(X)] = \dim_B[C_n(X)] = \dim_B[C_n(D)] = 2n + \sum_{q \in R(D) \cap B} (\text{ord}_X(q) - 2) = 2n + \sum_{q \in R(X) \cap B} (\text{ord}_X(q) - 2)$.

Ahora supongamos que $B \cap E_a(X) \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 23, obtenemos que $\dim_B[C_n(X)] = \infty$. Otra vez, observemos que, $q_X^n : C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo y $F_1(X)$ es un conjunto cerrado en $C_n(X)$, en consecuencia, $\dim_\chi[PHS_n(X)] = \dim_B[C_n(X)] = \infty$. \square

Los dos siguientes lemas son un caso particular de los Lemas 32 y 33 de [12], respectivamente. En [12] dichos lemas están enunciados para continuos localmente conexos, aquí los presentamos para elementos de \mathfrak{D} .

Lema 25. Sea X una dendrita de la familia \mathfrak{D} . Entonces $\partial\mathcal{L}_2 = \{A \in C_2(X) : (A \text{ es conexo}) \text{ o } (A \text{ tiene una componente degenerada}) \text{ o } (A \text{ contiene un punto extremo de } X \text{ y } A \in \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2, \text{ con } J \text{ y } K \text{ elementos de } \mathfrak{A}_S(X))\}$.

Lema 26. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{D}(J, K) = \{\{p\} \cup A : (p \in \text{fr}(J) \text{ y } A \in C_1(K)) \text{ o } (p \in \text{fr}_X(K) \text{ y } A \in C_1(J))\}$.

Lema 27. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} , $n \in \mathbb{R}$ y $A \in C_n(X) - F_1(X)$. Si $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces $\dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] \geq 2n + 1$.

Demostración. La demostración de este lema se sigue inmediatamente del Lema 24. \square

Lema 28. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada vecindad \mathcal{U} de F_X^n en $PHS_n(X)$, tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$.

Demostración. Sean \mathcal{U} una vecindad abierta de F_X^n en $PHS_n(X)$ y $\mathcal{V} = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Entonces \mathcal{V} es abierto en $C_n(X)$. Fijemos un punto $p \in R(X)$. Dado que $\{p\} \in \mathcal{V}$, podemos tomar un arco A en X tal que $p \in A$ y $A \in \mathcal{V}$; por lo que, $q_X^n(A) \in \mathcal{U}$. Notemos que $\dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] \leq \dim[\mathcal{U}]$. En consecuencia, por el Lema 24, $2n + 1 \leq \dim[\mathcal{U}]$. \square

Los siguientes dos lemas pueden encontrarse en [15] (Lemas 3.3 y 3.6).

Lema 29. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$.

Lema 30. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$.

Lema 31. Sea X una dendrita de la familia \mathfrak{D} tal que $R(X) \neq \emptyset$. Entonces $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X)$.

Demostración. Dado que $q_X^n|_{C_n(X) - F_1(X)}: C_n(X) - F_1(X) \rightarrow PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo, y $C_n(X) - F_1(X)$ y $PHS_n(X) - \{F_X^n\}$ son abiertos en $C_n(X)$ y $PHS_n(X)$, respectivamente, obtenemos que $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{PHL}_n(X) - \{F_X^n\}$. Dado que $R(X) \neq \emptyset$, usando el Lema 28, $\mathcal{PHL}_n(X) - \{F_X^n\} = \mathcal{PHL}_n(X)$. \square

El siguiente lema puede encontrarse en [15] (Lema 3.7).

Lema 32. Sean X una dendrita de la familia \mathfrak{D} y $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \in C_1(X), A \cap E_a(X) = \emptyset \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.

Lema 33. Sean X un elemento de la familia \mathfrak{D} y $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{PHD}_n(X) = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.

Demostración. Primero veamos que: $\mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\} = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$. Sea $\chi = q_X^n(A) \in \mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\}$. Entonces $A \in C_n(X) - F_1(X)$ y $\dim_A[C_n(X)] = \dim_\chi[PHS_n(X)] \leq 2n$. Usando el Lema 27 concluimos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Dado que $\chi \notin \mathcal{PHL}_n(X)$ tenemos que $A \notin \mathcal{L}_n(X)$. Sea \mathcal{B} una base de vecindades en $PHS_n(X)$ como en la definición de $\mathcal{PHD}_n(X)$. Dado que $\chi \neq F_X^n$, podemos suponer que $F_X^n \notin \mathcal{U}$, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Por el Lema 31, Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{PHL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap (q_X^n)^{-1}(\mathcal{PHL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap (\mathcal{L}_n(X) - F_1(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$. Por lo que, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arcoconexo. Lo cual implica que, $\{(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de A en $C_n(X)$, como en la definición de $\mathcal{D}_n(X)$. Por lo cual, $A \in \mathcal{D}_n(X)$. Por el Lema 32, $A \in C_1(X)$, $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_a(X) = \emptyset$. En conclusión, hemos probado que $\mathcal{PHD}_n(X) - \{F_X^n\} \subset \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$. La inclusión inversa se prueba con argumentos similares. Ahora por el Lema 28, $F_X^n \notin \mathcal{PHD}_n(X)$. Por lo que $\mathcal{PHD}_n(X) = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C(X) - F_1(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$. \square

Lema 34. Sea X una dendrita de la familia \mathfrak{D} . Entonces

(a) Si $n \geq 3$ y $R(X) \neq \emptyset$ entonces las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$;

(b) si $R(X) \neq \emptyset$ entonces las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \in \mathfrak{A}_S(X)$, y $m \leq n$;

(c) si $R(X) \neq \emptyset$ entonces las componentes de $\mathcal{PHL}_1(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_1) - \{F_X^n\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.

Demostración. (a) Por el Lema 33, $\mathcal{PHD}_n(X) = \bigcup \{q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\} : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Dado que los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, son conexos, abiertos en $\mathcal{PHD}_n(X)$ y ajenos entre sí, concluimos que son, de hecho, las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$.

(b) Sean $A \in \mathcal{PHE}_n(X) - \{F_X^n\}$ y $B \in C_n(X)$ tales que $A = q_X^n(B)$. Entonces $\dim_A[PHS_n(X)] = 2n$, por lo que, por el Lema 24 $B \cap R(X) = \emptyset$. Entonces, $A \in q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ para algunas $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}(X)$. Por el Lema 27, $F_X^n \notin \mathcal{PHE}_n(X)$; lo cual nos permite asegurar que, $\mathcal{PHE}_n(X) = \bigcup \{q_X^1(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\} : J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. El resto de la prueba prosigue igual que la parte (a).

(c) Por (b) $\mathcal{PHE}_1 = \bigcup \{q_X^1(\langle J^\circ \rangle_1) - \{F_X^1\} : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, por el Ejemplo 5.1 en [21] $\langle J \rangle_1$ es una 2-celda tal que contiene a $F_1(J)$ en su frontera como variedad; por lo que tenemos, que cada elemento en $q_X^1(\langle J^\circ \rangle_1) - \{F_X^1\}$ tiene una vecindad que es una 2-celda. En consecuencia, $\mathcal{PHE}_1(X) \subset \mathcal{PHL}_1(X)$. Por otra parte, usando los Lemas 24 y 28 tenemos que $\mathcal{PHE}_1(X) \supset \mathcal{PHL}_1(X)$. En conclusión, $\mathcal{PHE}_1(X) = \mathcal{PHL}_1(X)$. Dado que los conjuntos de la forma $q_X^1(\langle J^\circ \rangle_1) - \{F_X^1\}$, en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, son conexos, abiertos en $\mathcal{PHL}_n(X)$ y mutuamente ajenos, concluimos que son las componentes de $\mathcal{PHL}_1(X)$. \square

Lema 35. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K) = \{q_X^2(\{p\} \cup G) \mid (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$.

Demostración. Notemos que, usando los Lemas 25, 26 y 31, la prueba de este resultado es exactamente igual a la prueba del Lema 15 del capítulo anterior de esta tesis. \square

Lema 36. Sean $X, Y \in \mathfrak{D}$ tales que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$; $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Si $J \neq K$ entonces $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ no es homomorfo a $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(L, L)$.

Demostración. Sean G un árbol (gráfica finita sin curvas cerradas simples) y J', K' y L' , elementos de $\mathfrak{A}_S(G)$, tales que $J' \neq K'$, $|J' \cap K'| = |J \cap K|$, $|fr_G(J')| = |fr_X(J)|$, $|fr_G(K')| = |fr_X(K)|$ y $|fr_G(L')| = |fr_X(L)|$.

Observemos que, usando la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ dada en el Lema 35 y usando el Lema 15 de esta tesis, podemos afirmar que $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ es homeomorfo al conjunto $\mathcal{PHD}(J', K')$ (definido en el capítulo anterior de esta tesis). Asimismo, $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(L, L)$ es homeomorfo al conjunto $\mathcal{PHD}(L', L')$. Ahora, usando los modelos del conjunto $\mathcal{PHD}(J, I)$ (presentados en la Sección 2.3 del Capítulo 2) concluimos que, dado que $J \neq K$, $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ no es homeomorfo a $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(L, L)$. \square

3.3. Resultado principal

En esta sección presentaremos el resultado principal de este capítulo: las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado son PHS_n -determinadas.

Definición 37. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $a_i \in R(X)$ y $a_i \neq a_j$, si $j \neq i$. La sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ será llamada una *sucesión consecutiva* si existe un conjunto $\{K_i\}$ de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ tales que $R(K_i) = \{a_i, a_{i+1}\}$. Notemos que, como consecuencia inmediata de la definición, tenemos que $K_i \cap K_{i+1} = \{a_{i+1}\}$.

Lema 38. Sean X y Y dendritas pertenecientes a la familia \mathfrak{D} . Si existen funciones biyectivas $\phi : R(X) \rightarrow R(Y)$ y $\psi : \mathfrak{A}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(Y)$, con la siguiente propiedad: $\psi(A) = B$ implica que $\phi(R(A)) = R(B)$; entonces, X es homeomorfo a Y .

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{A}(X)$. Consideremos $|A \cap R(X)| = 2$. Sean $A \cap R(X) = \{u, v\}$ y $B \in \mathfrak{A}(Y)$ tal que $\psi(A) = B$. Además, sea h_A un homeomorfismo entre A y B tal que $h_A(u) = \phi(u)$ (lo cual implica que $h_A(v) = \phi(v)$). En caso que $|A \cap R(X)| = 1$, consideremos $A \cap R(X) = \{u\}$ y $B \in \mathfrak{A}(Y)$ tal que $\psi(A) = B$. Denotemos como h_A un homeomorfismo entre A y B tal que $h_A(u) = \phi(u)$.

Sea h_I la extensión común de todos los homeomorfismos h_A . Entonces h_I es un homeomorfismo entre $X - E_a(X)$ y $X - E_a(Y)$. Notemos que si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es

una sucesión consecutiva en X entonces $\{h_I(a_i)\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión consecutiva en Y .

A continuación definiremos la función h_e , que será una función de $E_a(X)$ en $E_a(Y)$. Sean a un elemento de $E_a(X)$ y $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión consecutiva tal que $\lim a_i = a$. Ahora, definamos $h_e(a) = \lim h_I(a_i)$. Observemos que esto da lugar a una función bien definida: dado que $\{h_I(a_i)\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión consecutiva y dado que $Y \in \mathfrak{D}$, tenemos que $\lim h_I(a_i)$ existe y, además, $\lim h_I(a_i)$ pertenece al conjunto $E_a(Y)$. Ahora, veremos que h_e es, de hecho, una biyección. Sean $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ y $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ sucesiones consecutivas tales que $\lim\{a_i\} = a$ y $\lim\{b_i\} = b$. Supongamos que $h_e(a) = h_e(b)$, entonces $\lim h_I(a_i) = \lim h_I(b_i)$; por lo cual y, dado que $\{h_I(a_i)\}_{i=1}^\infty$ y $\{h_I(b_i)\}_{i=1}^\infty$ son sucesiones consecutivas, existen i_0 y j_0 en \mathbb{N} tales que aseguran la igualdad de los conjuntos $\{h_I(a_i)\}_{i=i_0}^\infty$ y $\{h_I(b_i)\}_{i=j_0}^\infty$ y, dado que h_I es un homeomorfismo, obtenemos que los conjuntos $\{a_i\}_{i=i_0}^\infty$ y $\{b_i\}_{i=j_0}^\infty$ son iguales, en consecuencia, sus límites también lo son. Por lo que $a = b$. En conclusión, la función h_e es inyectiva. Para ver que h_e es sobreyectiva, basta ver que para cada elemento s en $E_a(Y)$, existe una sucesión consecutiva $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ la cual converge a éste; de modo que $h_I^{-1}(\{s_i\}_{i=1}^\infty)$ es una sucesión consecutiva, la cual tiene un límite digamos z , por lo que $h_e(z) = s$. En consecuencia h_e es sobreyectiva.

Ahora, sea h función de X en Y , definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} h_I(x) & \text{si } x \in X \setminus E_a(X), \\ h_e(x) & \text{si } x \in E_a(X). \end{cases}$$

A continuación mostraremos que h es una función continua. Claramente, si $x \in A \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces h es continua en x . Sean $a \in E_a(X)$, $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión tal que $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ converge a a , $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión consecutiva en X tal que $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ converge a a y $b = \lim(h(a_i))$. Entonces, por definición: $h(a) = b$. Ahora, para probar que h es continua veremos que $\lim(h(r_i)) = b$. Supongamos que $\{h(r_i)\}_{i=1}^\infty$ no converge a b . Esto implica que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $X \setminus B(\varepsilon, b)$ contiene un número infinito de elementos de $\{h(r_i)\}_{i=1}^\infty$;

definamos $b_i = h(a_i)$ y sea $S = [X \setminus B(\varepsilon, b)] \cap \{h(r_i)\}_{i=1}^\infty$. Para cada elemento $s_j \in S$, tomemos el arco $\overline{s_j b}$ y definamos el orden natural en éste (el orden natural en el cual $s_i < b$). Ahora, tomemos el subarco $\overline{s_j b'_j}$, en donde b'_j es el mínimo elemento (en el orden natural previamente definido en $\overline{s_j b}$) que pertenece al conjunto $\{b_i\}_{i=1}^\infty \cap \{\overline{s_j b}\}$.

Sea j_0 un número natural, afirmamos que el conjunto $\{s_i \in S : \{\overline{s_i b_{j_0}}\} \cap \{b_i\}_{i=1}^\infty = \{b_{j_0}\}\}$ no es infinito. Probemos esta afirmación: Supongamos, por el contrario, que el conjunto $E_{j_0} = \{s_i \in S : \{\overline{s_i b_{j_0}}\} \cap \{b_i\}_{i=1}^\infty = \{b_{j_0}\}\}$ es infinito, para alguna $j_0 \in \mathbb{N}$. Dado que estamos suponiendo que el conjunto E_{j_0} es infinito, para alguna j_0 , entonces, debe de existir un subconjunto S' de S tal que para cada elemento s'_k de S' , se tiene que, en el orden natural dado al arco $\overline{s'_k b}$, el primer elemento que pertenece a $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ es b_{j_0} . Ahora, tomemos el conjunto $h^{-1}(S')$, dado que h es una biyección, entonces $h^{-1}(S')$ es un conjunto infinito. Tomemos los arcos $\overline{h^{-1}(s'_k)h^{-1}(b_{j_0})}$, notemos que el único elemento de la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ que también pertenece a la unión de los arcos $\overline{h^{-1}(s'_k)h^{-1}(b_{j_0})}$ es a_{j_0} , lo cual implica que a no es ninguno de los elementos de $h^{-1}(S')$; sin embargo, dado que $h^{-1}(S')$ es un conjunto infinito, éste debe de tener al menos un punto de acumulación, lo cual implica que $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ tiene al menos dos puntos de acumulación; lo cual, es una contradicción; por lo que la afirmación está probada.

Ahora, para cada $b_i \in \{b_j\}_{j=1}^\infty$, tomemos s_i tal que es uno de los elementos de S de tal forma que b_i es el primer elemento en el conjunto $\{\overline{s_i b}\} \cap \{b_i\}_{i=1}^\infty$, en el orden natural previamente dado al arco $\overline{s_i b}$, y tomemos los arcos $\overline{s_i b_i}$. Notemos que $\overline{s_i b_i} \cap \overline{s_j b_j} = \emptyset$ si $i \neq j$. Dado que X es hereditariamente localmente conexo la sucesión $\{\overline{s_i b_i}\}_{i=1}^\infty$ converge a un continuo degenerado, $\{p\}$. Dado que $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ converge a b y cada $\overline{s_i b_i}$ tiene un elemento de la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^\infty$, la sucesión $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ debe también de converger a b ; pero, dado que $\{s_i\}_{i=1}^\infty \subset X \setminus B(\varepsilon, b)$ tenemos que $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ no puede converger a b ; lo cual es una contradicción. Por lo que la sucesión $\{h(r_i)\}_{i=1}^\infty$ tiene que converger a b . En conclusión h es una función continua.

Por lo anterior tenemos que h es una biyección continua de X en Y ; en donde, en particular, X es compacto y Y Hausdorff; por lo tanto h es un homeomorfismo. \square

El siguiente lema será útil en la demostración del Lema 40.

Lema 39. *Sean Y un elemento de \mathfrak{D} y $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(Y)$ un arco de $C_n(Y)$ tal que $\alpha(t) \cap E_a(Y) = \emptyset$ para cada $t \in [0, 1]$. Entonces $(\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)) \cap R(Y)$ es un conjunto finito.*

Demostración. Supongamos que $(\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)) \cap R(Y)$ es un conjunto infinito. Dado que $(\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)) \cap R(Y) \subset \cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)$, tenemos que $\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)$ contiene una cantidad infinita de elementos de $R(Y)$; llamémosle S . Por el Lema 7.2 de [27] tenemos que $\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)$ es un elemento de $C_n(Y)$; de modo que, el hecho que $Y \in \mathfrak{D}$ y $S \subset \cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)$ implica que $\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t) \cap E_a(Y) \neq \emptyset$. De donde se tiene que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\alpha(t_0) \cap E_a(Y) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. En conclusión $(\cup_{t \in [0, 1]} \alpha(t)) \cap R(Y)$ es un conjunto finito. \square

La prueba del siguiente lema es muy parecida a la prueba del Lema 3.1 de [16]; sin embargo, en la prueba del Lema 3.1 de [16] se usa fuertemente que el conjunto $R(X)$, en donde X es una gráfica finita, es finito; dado que nosotros estamos trabajando con dendritas no tenemos esto; por lo que usaremos el Lema 39 para solventar el problema y adaptar los argumentos. Para mayor completitud de esta tesis presentamos la prueba completa.

Lema 40. *Sean X y $Y \in \mathfrak{D}$. Supongamos que $R(X) \neq \emptyset$. Sea $h : PHS_n(X) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo. Supongamos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Entonces:*

- (A) para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$;
- (B) para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $h^{-1}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\}) \subset q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$;
- (C) la relación $J \mapsto J_h$ es una biyección entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$;

- (D) $h(F_X^n) = F_Y^n$;
 (E) X es homeomorfo a Y .

Demostración. Primero, observemos que, por el Teorema 18 del capítulo anterior, tenemos que $R(Y) \neq \emptyset$. Por el Lema 34(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $m \leq n$; por lo que, los argumentos para probar (A), (B) y (C), en el caso $n \geq 2$, son exactamente iguales a los argumentos usado para probar (A), (B) y (C) del Lema 16 de la sección anterior; en el caso $n = 1$, (A) y (B) se siguen inmediatamente del Lema 34(c) (el punto (C) se prueba igual que en el caso anterior).

A continuación probaremos (D). Primero, veamos que: $\{F_X^2\} = \bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^2\})) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que cada elemento de la forma $\{p\}$, en donde $p \in J^\circ$, puede ser aproximado por elementos de $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X)$, por lo que $\{p\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X))$; esto implica que $F_X^n \in cl_{PHS_n}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Ahora, supongamos que existe un elemento $\chi \in \bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} - \{F_X^n\}$. Fijemos $J_0 \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos en $\langle J_0^\circ \rangle_n$, tal que $\lim q_X^n(A_m) = \chi$; podemos suponer que $\lim A_m = A$ para alguna $A \in \langle J_0 \rangle_n \cap C_n(X)$; dado que $\chi \neq F_X^n$ y $q_X^n(A) = \chi$, obtenemos que $A \in C_n(J_0) - F_1(J_0)$. Dado que X no es un arco y puesto que $X \in \mathfrak{D}$, tenemos dos casos posibles: $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$ o $A \subset R(X) \cap J_0$. Sea $J_1 \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J_0 \neq J_1$. Consideremos el primer caso: $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$; argumentado de igual manera que para J_0 , podemos afirmar que existe $D \in C_n(J_1) - F_1(J_1)$ tal que $q_X^n(D) = \chi$; ya que $\chi \neq F_X^n$, obtenemos que $A = D$. Entonces $J_0^\circ \cap J_1 \neq \emptyset$; lo cual es claramente una contradicción. Ahora, consideremos el segundo caso: $A \subset R(X) \cap J_0$. Sea $J_1 \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J_0 \neq J_1$; dado que $A \notin F_1(X)$ y $A \subset R(X) \cap J_0$ tenemos que A tiene que ser un conjunto de dos elementos; argumentado de igual manera que para J_0 , podemos afirmar que existe $D \in C_n(J_1) - F_1(J_1)$ tal que $q_X^n(D) = \chi$; dado que $\chi \neq F_X^n$, obtenemos que $A = D$; lo cual implica que $D \subset R(X) \cap J_0$. Entonces $J_0 \cup J_1$ es una

curva cerrada simple en $X \in \mathfrak{D}$; claramente una contradicción. Un argumento similar muestra que $\{F_Y^n\} = \bigcap \{cl_{PHS_2(Y)}(h(q_Y^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\})) : J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} h(\{F_X^n\}) &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\} &= \{F_Y^n\}, \end{aligned}$$

por lo que $h(\{F_X^n\}) = \{F_Y^n\}$.

Dado $A \in C_n(X) - F_1(X)$, $q_X^n(A) \neq F_X^n$. Entonces, $h(q_X^n(A)) \neq F_Y^n$ y existe un único $D_A \in C_n(Y) - F_1(Y)$ tal que $h(q_X^n(A)) = q_Y^n(D_A)$. Notemos que la relación $A \mapsto D_A$ es un homeomorfismo entre $C_n(X) - F_1(X)$ y $C_n(Y) - F_1(Y)$. Por lo que, $\dim_A[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(A)}[PHS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(A))}[PHS_n(Y)] = \dim_{D_A}[C_n(Y)]$.

Dados $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $v \in J \cap R(X)$, sean $\mathcal{K}_n(J, X) = cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n) - F_1(X)$ y $\mathcal{K}(v, J) = \{A \in \mathcal{K}_n(J, X) : A \cap R(X) = \{v\}\}$.

OBSERVACIÓN 1. Puesto que $X \in \mathfrak{D}$, tenemos que si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $J \cap E_a(X) = \emptyset$; por lo que, usando el Lema 23, existe una gráfica finita D tal que $J \subset D^\circ$; por lo que $\mathcal{K}_n(J, X) = \mathcal{K}_n(J, D)$, $J \cap R(X) = J \cap R(D)$ y si $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$, entonces $\dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(D))$; también, si $v \in J \cap R(X)$ entonces tenemos que $\mathcal{K}(v, J) = \{A \in \mathcal{K}_n(J, D) : A \cap R(D) = \{v\}\}$.

OBSERVACIÓN 2. Ya que $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ y como $Y \in \mathfrak{D}$, tenemos que $J_h \cap E_a(Y) = \emptyset$; por lo que, usando el Lema 23, existe una gráfica finita D_h tal que $J_h \subset D_h^\circ$. De aquí que $\mathcal{K}_n(J_h, X) = \mathcal{K}_n(J_h, D_h)$ y $J_h \cap R(Y) = J_h \cap R(D_h)$. También, si $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$ entonces $(q_Y^n)^{-1} \circ h \circ q_X^n(A) \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$ y $\dim_{(q_Y^n)^{-1} \circ h \circ q_X^n(A)}(C_n(Y)) = \dim_{(q_Y^n)^{-1} \circ h \circ q_X^n(A)}(C_n(D_h))$.

Afirmación 1. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces

$$(a) \mathcal{K}_n(J_h, Y) = \{D_A \in C_n(Y) - F_1(Y) : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\};$$

- (b) $\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\} = \{\dim_B[C_n(Y)] : B \in \mathcal{K}_n(J_h, X)\}$;
- (c) $|J \cap R(X)| = |J_h \cap R(Y)|$;
- (d) si $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$, entonces $|A \cap R(X)| = |D_A \cap R(Y)|$.

Prueba de la afirmación 1: Usando la Observación 1, la Afirmación 1 se sigue de la Afirmación 1 contenida en la prueba del Lema 20 de esta Tesis.

Afirmación 2. Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $\{v\} \in J \cap R(X)$. Entonces el conjunto $\mathcal{K}(v, J) = \{A \in \mathcal{K}_n(J, X) : A \cap R(X) = \{v\}\}$ es arconexo.

Prueba de la afirmación 2: Usando la Observación 2, la Afirmación 2 se sigue de la Afirmación 2 contenida en la prueba del Lema 20 de esta Tesis.

Dado $v \in R(X)$, sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $v \in J$. Sean $\mathcal{K}(v, J)$ como en la Afirmación 2 y $A \in \mathcal{K}(v, J)$. Por la Afirmación 1, $D_A \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$ y, además, existe un único punto $v_h(A) \in R(Y) \cap D_A$. Notemos que $v_h(A) \in J_h$.

Afirmamos que $v_h(A)$ no depende de A y, de hecho, afirmamos que no depende de la elección de J ; en otras palabras, si $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $E \in \mathcal{K}(v, K)$, entonces $v_h(A) = v_h(E)$. Para probar esto, tomemos J, K, A y E , como las acabamos de describir. Tomemos un subarco A_1 de J tal que $A_1 \neq J$ y tal que v sea un punto final de A_1 . Notemos que $A_1 \in \mathcal{K}(v, J)$. Similarmente, existe $E_1 \in \mathcal{K}(v, K)$ tal que E_1 es conexo. Usando la Afirmación 2, $\mathcal{K}(v, J)$ y $\mathcal{K}(v, K)$ son arcoconexos. Por lo que, existen funciones $\alpha_A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, J)$ y $\alpha_E : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, K)$ tales que $\alpha_A(0) = A$, $\alpha_A(1) = A_1$, $\alpha_E(0) = E_1$, y $\alpha_E(1) = E$. Es fácil construir una función, α_0 , tal que $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1)$, $\alpha_0(0) = A_1$, $\alpha_0(1) = E_1$, y, para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha_0(t) \cap R(X) = \{v\}$ y $\alpha_0(t) \notin F_1(X)$. Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1) \cup \mathcal{K}(v, J) \cup \mathcal{K}(v, K)$ como:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_A(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ \alpha_0(3t - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ \alpha_E(3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = E$, α es continua y, para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \cap R(X) = \{v\}$. Sea i_0 el orden de X en v .

Por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), para cada $t \in [0, 1]$, $2n < 2n + (i_0 - 2) = \dim_{\alpha(t)}[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(\alpha(t))}[PHS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(\alpha(t)))}[PHS_n(Y)] = \dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))}[C_n(Y)]$. Sea $T = \{t \in [0, 1] : v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))\}$. Es claro que T es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y $0 \in T$. Mostraremos que, de hecho, $T = [0, 1]$. Supongamos lo contrario, es decir, $T \neq [0, 1]$. Sea R una componente de $[0, 1] - T$. Entonces, si $t_0 = \inf R$ tenemos que $t_0 \in T$; por lo que existe una sucesión $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$, de elementos de R , tal que $\lim r_m = t_0$. Supongamos que el orden de Y en el punto de ramificación $v_h(A)$ es j ; claramente $j \geq 3$. Usando la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), obtenemos que $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$ intersecta a $R(Y)$, para cada $t \in [0, 1]$. Por el Lema 39, $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_m)))) \cap R(Y)$ es un conjunto finito; por lo que podemos suponer que existe $w \in R(Y)$ tal que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_m))))$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$. Dado que $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0))))}[C_n(Y)] = 2n + (i_0 - 2)$ y, como el único punto de ramificación de Y en $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(A))) = (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0)))) = D_A$ es $v_h(A)$, por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), el orden de Y en $v_h(A)$ es i_0 ; así, $j = i_0$. Dado que $r_1 \notin T$, tenemos que $v_h(A) \notin (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_1))))$, por lo que $v_h(A) \neq w$. Sea $j_0 \geq 3$ el orden de Y en w . Como $v_h(A)$, $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$ y, por la fórmula principal de [33] (ver MV, p.6), $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))}[C_n(Y)] \geq 2n + (i_0 - 2) + (j_0 - 2) > 2n + (i_0 - 2)$, lo cual es una contradicción. Con esto queda demostrado que $T = [0, 1]$. Por lo que, para cada $t \in [0, 1]$, $v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$. Procediendo de igual manera a la anterior, se demuestra que $v_h(E)$ pertenece al conjunto $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(1 - t))))$, para cada $t \in [0, 1]$. Lo cual implica que $v_h(A) = v_h(E)$. Por lo que, $v_h(A)$ no depende de la elección ni de J ni de A .

Usando lo anterior, podemos, simplemente, escribir v_h en lugar de $v_h(A)$. De esta manera, se construye una función $\varphi : R(X) \rightarrow R(Y)$ dada por $\varphi(v) = v_h$. Notemos que φ satisface las siguiente propiedad: Si v es un punto de ramificación de X , que también pertenece a la arista J de X , entonces $\varphi(v)$ es un puntos de ramificación de Y que pertenece a la arista J_h de Y .

Por las partes (A), (B) y (C) del Lema 40, X y Y satisfacen condiciones simétricas; por lo cual, se puede definir una función $\varphi^{-1} : R(Y) \rightarrow R(X)$ siguiendo un procedimiento similar al anteriormente planteado. Es decir, φ^{-1} se puede definir como a continuación: dado $w \in R(Y)$, sean $K \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $w \in K$, $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K = J_h$ y B un arco tal que $B \subset K$, $B \neq K$, y w un punto final de B . Entonces, existe un único $A \in C_n(J)$ tal que $q_X^n(A) = h^{-1}(q_Y^n(B))$ y $\varphi^{-1}(w)$ es el único punto de $A \cap R(X)$. Claramente, φ^{-1} es la función inversa de φ .

Observemos que de lo anterior podemos asegurar que φ tiene la siguiente propiedad: Un punto de ramificación v , de X , pertenece a la arista J , de X , si y sólo si el punto de ramificación $\varphi(v)$, de Y , pertenece a la arista J_h , de Y .

Ahora, extenderemos φ a un homeomorfismo entre X y Y . Tomemos $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. En el caso en que $|J \cap R(X)| = 2$, tenemos que J es un arco; usando la Afirmación 1 (c), obtenemos que $|J_h \cap R(X)| = 2$; por lo que, J_h es un arco. Sean u y v los puntos finales de J . Entonces $\{u, v\} = J \cap R(X)$. Dado que J_h es un arco con puntos finales $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$, podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(u) = \varphi(u)$ y $\varphi_J(v) = \varphi(v)$. Ahora bien, en el caso en que $|J \cap R(X)| = 1$, podemos escribir $J \cap R(X) = \{w\}$. Entonces, se tienen que $J_h \cap R(Y) = \{\varphi(w)\}$. Dado que w es un punto final de J , resulta que $\varphi(w)$ es un punto final del arco J_h . Por lo que, podemos tomar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(w) = \varphi(w)$.

Tomemos la extensión común, Φ , de todos los homeomorfismos φ_J (con $J \in \mathfrak{A}_S(X)$). Claramente, Φ es un homeomorfismo entre $\cup\{J \in \mathfrak{A}(X)\}$ y $\cup\{J \in \mathfrak{A}(Y)\}$. Ahora, X y Y son elementos de \mathfrak{D} ; esto, usando el Lema 23, implica que, para todo $J \in \mathfrak{A}(X)$, la intersección $J \cap E_a(X) = \emptyset$ y, para todo $J \in \mathfrak{A}(Y)$, también $J \cap E_a(Y) = \emptyset$. Entonces, por el Lema 23, Φ es, de hecho, un homeomorfismo entre $X - E_a(X)$ y $Y - E_a(Y)$; observemos que por construcción, Φ manda puntos de ramificación en puntos de ramificación de tal modo que la adyacencia se preserva; entonces, por el Lema 38, X es homeomorfo a Y . \square

Teorema 41. Sean X y $Y \in \mathfrak{D}$. Si $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Demostración. Dado que los arcos tienen hiperespacio PHS_n único (Teorema 18 del capítulo anterior), podemos suponer sin pérdida de generalidad que tanto X como Y no son arcos. Lo cual implica que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$. Sea $h : PHS_n(X) \rightarrow PHS_n(Y)$ un homeomorfismo.

Caso 1: $n \neq 2$.

Veremos que X , Y y h satisfacen las hipótesis del Lema 40. Dado que h es un homeomorfismo, $h(\mathcal{PHL}_n(X)) = \mathcal{PHL}_n(Y)$; esto (véase la definición del conjunto $\mathcal{PHD}_n(X)$) implica que $h(\mathcal{PHD}_n(X)) = \mathcal{PHD}_n(Y)$. Usando las caracterizaciones de las componentes de los conjuntos $\mathcal{PHD}_n(X)$ y $\mathcal{PHL}_1(X)$, dadas en las partes (A) y (C) del Lema 40, obtenemos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que:

$$h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(Y)) - \{F_Y^n\} \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\};$$

notemos que en el caso $n = 1$, en la primera parte de la igualdad anterior simplemente tenemos $h(q_X^1(\langle J^\circ \rangle_1) - \{F_X^1\}) = q_Y^1(\langle J_h^\circ \rangle_1) - \{F_Y^1\}$. Dado que hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ y el conjunto de componentes de $\mathcal{PHD}_n(Y)$, obtenemos que la relación $J \mapsto J_h$ entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$ es una biyección. El mismo argumento funciona para las componentes del conjunto $\mathcal{PHL}_1(X)$.

De lo anterior tenemos que X , Y y h satisfacen las hipótesis del Lema 40. Entonces X es homeomorfa a Y .

Caso 2: $n = 2$.

Veremos que X y Y satisfacen las hipótesis del Lema 40. Por el Lema 34, las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dado que la definición de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ esta dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Observemos que también tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{PHE}_2(Y)$. Dado que las componentes de $\mathcal{PHE}_2(Y)$ son los conjuntos de la forma

$q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$ (en donde $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$), tenemos que dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$, tales que $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\} = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$. Por el Lema 28, $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $F_Y^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Esto implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) \cap q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) - q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

Por lo que, $h(\mathcal{PHD}(J, K)) = \mathcal{PHD}(J_h, K_h)$.

Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por lo probado en el párrafo anterior, tenemos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = h(\mathcal{PHD}(J_h, K_h))$, en donde $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Por el Lema 36 $J_h = K_h$. Por lo que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{PHD}(J_h, J_h)$.

Ahora, sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$ con $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Si suponemos que $J_h \neq K_h$, obtenemos que $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{PHD}(J_h, K_h)$, con $J_h \neq K_h$; lo cual, contradice lo probado en el párrafo anterior. Entonces, $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, lo cual induce una relación $J \mapsto J_h$. Por simetría, la relación $J \mapsto J_h$, de $\mathfrak{A}_S(X)$ en $\mathfrak{A}_S(Y)$, es una biyección. Dado que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, es claro que:

$$h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2 \cap C_1(X)) - \{F_X^2\}) \subset q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2).$$

Entonces X, Y y h satisfacen las hipótesis del Lema 40. Por lo tanto, X y Y son homeomorfas. \square

Capítulo 4

Unicidad de $PHS_2(X)$ para dendritas

En este capítulo probaremos que dada una dendrita X cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, se cumple que si Y es un continuo tal que $PHS_2(Y)$ es homeomorfo a $PHS_2(X)$, entonces Y resulta ser homeomorfa a X . La idea de esta prueba es mostrar que la hipótesis, $PHS_2(Y)$ homeomorfo a $PHS_2(X)$, implica que Y es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples, es decir, una dendrita; usando esto y la dimensión puntual de $PHS_2(X)$ en ciertos puntos específicos, se muestra que, de hecho, $Y \in \mathfrak{D}$. Lo cual nos permite usar el resultado del capítulo anterior (la familia \mathfrak{D} es PHS_n -determinada) para concluir que Y es homeomorfa a X .

A lo largo de este capítulo usaremos las definiciones dadas en el capítulo pasado; sin embargo generalizaremos las siguientes definiciones: Sea X un continuo localmente conexo, *un lazo en X* , es una curva cerrada simple, S , en X tal que existe $p \in S$ de tal forma que $S - \{p\}$ es abierto en X . Sea X un continuo localmente conexo diferente de $[0, 1]$ y de S^1 , generalizaremos $\mathfrak{A}_S(X)$ como el conjunto $\{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal o } J \text{ es un lazo en } X\}$.

Adicionalmente, denotaremos como \mathfrak{LC} a la familia de continuos localmente conexos y definiremos, para un continuo localmente conexo X (y para $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$), los conjuntos:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{LC}}(J, K) = \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) \cap \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) \cap \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) - \langle J^\circ, K^\circ \rangle_2);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K) &= \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

4.1. Dendritas

Primero probaremos que si $X \in \mathfrak{D}$ y Y es una dendrita tal que $PHS_2(Y)$ es homeomorfo a $PHS_2(X)$, entonces $Y \in \mathfrak{D}$.

Lema 42. *Sea X una dendrita diferente de un arco. Entonces, X pertenece a la familia \mathfrak{D} si y sólo si para cada $\psi \in PHS_n(X)$, existe una sucesión $\{\chi_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ en $PHS_n(X)$ tal que $\lim \chi_s = \psi$ y $\dim_{\chi_s}(PHS_n(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Primero supongamos que $X \in \mathfrak{D}$. Sea $q_X^n(Z) \in PHS_n(X) - \{F_X^n\}$, con $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ en donde cada Z_k es una componente de Z . Por el Teorema 8 de [13], para cada Z_i , con $1 \leq i \leq k$, existe una sucesión $\{A_s^i\}_{s \in \mathbb{N}}$ en $C_1(X)$ tal que converge a Z_i y $\dim_{A_s^i}(C(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. De aquí que $A_s^i \cap E_a(X) = \emptyset$ para toda $s \in \mathbb{N}$. Sea $A_s = A_s^1 \cup \dots \cup A_s^k$, entonces $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_n(X)$ que converge a Z y tal que $A_s \cap E_a(X) = \emptyset$. Por lo que $\dim_{A_s}(C_n(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\dim_{q_X^n(A_s)}(PHS_n(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Observemos que en caso $q_X^n(Z) = F_X^n$, la implicación es trivial.

Ahora probaremos la implicación contraria. Supongamos que $X \notin \mathfrak{D}$. Entonces $E(X)$ no es un conjunto cerrado en X . Por el Teorema 3.3 de [2], X contiene una copia de W_0 o de F_ω (continuos definidos en las definiciones básicas de esta tesis). Supongamos que X contiene una copia de W_0 y sea $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ en donde Z_1, \dots, Z_n son subcontinuos ajenos de X y $Z_1 = [c, b_1]$ (en donde, en particular, $[c, b_1]$ es un arco que contiene al punto $(0, 0)$ en su interior, ver la parte de definiciones básicas de esta tesis). Por el Teorema 8 de [13], no existe una sucesión $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en $C_1(X)$ que converja a Z_1 y $\dim_{T_j}(C(X)) < \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces no existe una sucesión

$\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ en $C_n(X)$ tal que converja a Z y tal que $\dim_{A_s}(C(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. En consecuencia, no existe sucesión $\{A_s^i\}_{s \in \mathbb{N}}$ que converja a Z y tal que $\dim_{q_X^n(A_s^i)}(PHS_n(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. La prueba es similar en el caso de que X contenga una copia de F_ω ; sólo hace falta tomar $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ en donde Z_1, \dots, Z_n son subcontinuos de X y Z_1 un arco de F_ω tal que Z_1 contenga al único punto de ramificación p de F_ω y tal que p no sea un punto extremo de Z_1 . \square

Lema 43. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y una dendrita tales que $PHS_n(Y)$ es homeomorfo a $PHS_n(X)$. Entonces $Y \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Usando el resultado principal del segundo Capítulo de esta tesis, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que X no es un arco ni una gráfica finita.

Observemos que, dado que $X \in \mathfrak{D}$, tenemos que para cada $\psi \in PHS_n(X)$, existe una sucesión $\{\chi_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ en $PHS_n(X)$ tal que $\lim \chi_s = \psi$ y $\dim_{\chi_s}(PHS_n(X)) < \infty$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Entonces, dado que $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(Y)$, tenemos que lo mismo pasa para cada $\psi \in PHS_n(Y)$. Por lo que podemos concluir, usando el Lema 42, que $Y \in \mathfrak{D}$. \square

Ahora probaremos un lema técnico sobre las curvas cerradas simples de ciertos continuos localmente conexos.

Lema 44. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo tal que contiene una curva cerrada simple S . Si $PHS_2(Y)$ es homeomorfo a $PHS_2(X)$, entonces Y contiene una curva cerrada simple contenida en el interior de una gráfica finita.*

Demostración. Observemos que, dado que X es localmente conexo, tenemos que $PHS_2(X)$ es localmente conexo [23, Teorema 4.1]; por lo que $PHS_2(Y)$ es localmente conexo y, por tanto, Y es localmente conexo.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos dos puntos, p_1 y p_2 , en la curva cerrada simple S y sea J uno de los arcos, de S , que los une. Tomemos el conjunto $\mathfrak{U} = q_X^2(\langle U, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle_2)$; en donde \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son conjuntos abiertos y conexos de Y , de

diámetro menor que ε , los cuales contienen a p_1 y p_2 , respectivamente, y U es la unión de los conjuntos abiertos y conexos, de radio menor a ε , que contienen un punto de J . Observemos que \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 están contenidos en U . Notemos que $q_X^2(J) \in \mathfrak{U}$. Dado que $PHS_2(Y)$ es homeomorfo a $PHS_2(X)$, para cada abierto U de $PHS_2(Y)$, existe un punto $\chi \in U$ tal que $\dim_\chi(PHS_2(Y)) < \infty$. En particular, existe $\chi \in \mathfrak{U}$, tal que $\dim_\chi(PHS_2(Y)) < \infty$. Esto implica que $q_X^2(\chi)$ está contenido en el interior de una gráfica finita D . Por construcción D interseca a \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 ; dado que Y es localmente conexo, compacto y \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son conexos, por el Teorema 3-16 de [17], \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son arcoconexos. Usando el arco de S diferente a J que une a p_1 con p_2 y la arcoconexidad de \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , se construye un arco que une a dos puntos de D . Lo cual da lugar a una curva cerrada simple O , la cual contiene un arco libre A . Tomemos dos puntos interiores de A , q_1 y q_2 , el arco de O que une a q_1 con q_2 y que no está contenido en A . Argumentado de manera similar a la anterior, se construye un arco A' , contenido en una gráfica finita que une a q_1 y q_2 . Entonces, tomando el subarco de A que une a q_1 con q_2 y uniéndolo con A' , obtenemos una curva cerrada simple contenida en el interior de una gráfica finita. \square

4.2. Resultado principal

Consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{FA}(X) = \bigcup \{J^\circ : J \text{ es un arco libre de } X\}$.

Lema 45. [12, Lemma 33] *Sean X un continuo localmente conexo y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $fr_X(J) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) - J)$ y $fr_X(K) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) - K)$. Entonces $\mathcal{D}_{\mathfrak{GC}}(J, K) = \{\{p\} \cup A : (p \in fr_X(J) \text{ y } A \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } A \in \mathcal{E}(J))\}$.*

Lema 46. *Sean X un continuo localmente conexo y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $fr_X(J) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) - J)$ y $fr_X(K) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) - K)$. Entonces*

$\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K) = \{q_X^2(\{p\} \cup G) : (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$.

Demostración. Este lema se prueba usando el Lema 45 y procediendo de igual manera que en la demostración del Lema 15 de esta tesis. \square

Lema 47. Sean $Y \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}$, tal que contiene una curva cerrada simple, S , contenida en el interior de una gráfica finita, D , y $X \in \mathfrak{D}$. Si $h : PHS_2(X) \rightarrow PHS_2(Y)$ es un homeomorfismo, entonces, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(S)$, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(I, L)$, en donde $I, L \in \mathfrak{A}_S(X)$.

Demostración. Dado que la definición de $\mathcal{PHE}_2(X)$ está dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{PHE}_2(Y)$. Por el [12, Lema 11], las componentes de $\mathcal{PHE}_2(Y)$ son los conjuntos de la forma $q_Y^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(Y)$ y, dado que las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $h^{-1}(q_Y^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) = q_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$. Como las definiciones de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $\partial\mathcal{PHL}_2(Y)$ están dadas en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h^{-1}(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Por otro lado, sabemos que $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $F_Y^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$; lo cual implica que:

$$h^{-1}(\partial\mathcal{PHL}_2(Y) \cap q_Y^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{H}\mathcal{L}_2(X) \cap q_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h^{-1}(\partial\mathcal{PHL}_2(Y) - q_Y^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{H}\mathcal{L}_2(X) - q_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

Entonces $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(I, L)$, en donde $I, L \in \mathfrak{A}_S(X)$. \square

Lema 48. Sean $Y \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}$ y $X \in \mathfrak{D}$ y supongamos que $h : PHS_2(X) \rightarrow PHS_2(Y)$ es un homeomorfismo. Sean J y K elementos diferentes de $\mathfrak{A}_S(Y)$ contenidos en el interior de una gráfica finita; J' y K' elementos diferentes de $\mathfrak{A}_S(X)$ tales que $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J', K')$. Entonces $J \cap K \neq \emptyset$ si y sólo si $J' \cap K' \neq \emptyset$.

Demostración. Primero supongamos que $|J \cap K| = 2$, en este caso, usando la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}\mathfrak{C}}(J, K)$ dada en el Lema 46, la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J', K')$, dada en el Lema 35, y los modelos de $\mathcal{PHD}(L, I)$ dados en el segundo Capítulo; tenemos que $|J' \cap K'| = 2$. De igual forma $|J' \cap K'| = 2$ implica que $|J \cap K| = 2$.

Ahora, observemos que, de la definición de $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}\mathfrak{C}}(J, K)$ tenemos que $F_Y^n \in \mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}\mathfrak{C}}(J, K)$ si y sólo si $J \cap K \neq \emptyset$. De igual forma $F_X^n \in \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J', K')$ si y sólo si $J' \cap K' \neq \emptyset$. De esto concluimos que, para terminar la demostración, sólo hace falta probar que $h^{-1}(\{F_Y^n\}) = \{F_X^n\}$. Primero veamos que, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$. Dado que la definición de $\mathcal{PHE}_2(X)$ está dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{PHE}_2(Y)$. Como las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y las componentes de $\mathcal{PHE}_2(Y)$ son los conjuntos de la forma $q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Tenemos que, dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$. Por otro lado, $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $F_Y^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Ya que la definición de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ está dada en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y)$. Lo cual implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) \cap q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{PHL}_2(Y) - q_Y^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

De lo anterior, concluimos que $h(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, J)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}\mathfrak{C}}(J_h, K_h)$. Supongamos que $J_h \neq K_h$. Usando la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}\mathfrak{C}}(J, K)$ dada en el Lema 46, la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J_h, K_h)$ dada en el Lema 35, tenemos que $\mathcal{PHD}(J, J)$ es homeomorfo a $\mathcal{PHD}(J_h, K_h)$ con $J_h \neq K_h$. Lo cual implica que el modelo en alguno de los casos A, B o C (pp. 19-26) es homeomorfo al modelo en alguno de los subcasos de los casos D, E, F, G, H o I (pp. 19-26); claramente, una contradicción. Por lo que concluimos que $J_h = K_h$. Lo cual implica que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = q_Y^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}$.

Observemos que, por el primer párrafo de esta demostración, podemos suponer que $|J \cap K| \leq 1$. Ahora, simétricamente, $h^{-1}(q_Y^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) = q_X^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\{F_Y^2\}) &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_2(X)}(h^{-1}(q_Y^2(\langle I^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\})) : I \in \{J, K\}\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_2(X)}(q_X^2(\langle I_h^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) : I_h \in \{J_h, K_h\}\} &= \\ \bigcap \{cl_{PHS_2(X)}(q_X^2(\langle I_h^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) : I_h \in \{J_h, K_h\}\}. \end{aligned}$$

Observemos que, dado que $X \in \mathfrak{D}$, para cada pareja J y K de elementos diferentes de $\mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que $|J \cap K| \leq 1$, de aquí que $\bigcap \{cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle I_h^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : I_h \in \{J_h, K_h\}\} = \{F_X^n\}$. En conclusión, $h^{-1}(\{F_Y^n\}) = \{F_X^n\}$ y, con esto, concluye la prueba. \square

A continuación demostraremos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 49. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo. Si $PHS_2(Y)$ es homeomorfo a $PHS_2(X)$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. Por el Teorema 4.1(a) de [23], tenemos que Y es un continuo localmente conexo. Por el resultado principal del Capítulo 2, de esta tesis (Teorema 22), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $R(X) \neq \emptyset$; lo cual implica, dado que $[0, 1]$ y S^1 son gráficas finitas, que $R(Y) \neq \emptyset$; del mismo modo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Y no es una gráfica finita.

Primero veamos que Y es una dendrita; es decir, mostraremos que Y no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que Y contiene una curva cerrada simple. Por el Lema 44, el continuo Y contiene una curva cerrada simple S , contenida en el interior de una gráfica finita D . Denotaremos como $\mathfrak{A}_S(Y)$ al conjunto de aristas de S y como h a un homeomorfismo de $PHS_2(X)$ en $PHS_2(Y)$.

Caso 1. $|\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)| = 1$.

Sea $J \in \mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)$. Por el Lema 47, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, J)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(I, L)$ con $I, L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, J)$ hecha en el Lema 46 y la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ hecha en el Lema 35 y usando el Lema 15, tenemos que $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K)$ y $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ son homeomorfos al correspondiente modelo de \mathcal{PHD} (definido para gráficas). Esto implica que $I = L$ y, además, que L es una curva cerrada simple en X lo cual es una contradicción.

Caso 2. $|\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)| = 2$.

Sea $J \in \mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)$. Por el Lema 47, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, J)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(I, L)$ con $I, L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, J)$ hecha en el Lema 46 y la descripción del conjunto $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ hecha en el Lema 35 y usando el Lema 15, tenemos que $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{C}}(J, K)$ y $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J, K)$ son homeomorfos al correspondiente modelo de \mathcal{PHD} (definido para gráficas). Esto implica que $I \cup L$ es una curva cerrada simple en X lo cual es una contradicción.

Caso 3. $|\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)| = 3$. Sea $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_1, J_2, J_3\}$. Primero observemos que, dando un argumento similar al dado en el Lema 48, tenemos que $h^{-1}(q_Y^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) = q_X^2(\langle J_h^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$. Lo cual implica que $h^{-1}(q_Y^2(\langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) = q_X^2(\langle J_{1h}^\circ, J_{2h}^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, con $J_{1h}, J_{2h} \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $J_{1h} \neq J_{2h}$. Observemos que:

$$cl_{PHS_2(Y)}(q_Y^2(\langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) \cap cl_{PHS_2(X)}(q_X^2(\langle J_3^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = \{F_Y^2, q_Y^2(\{u, v\})\},$$

en donde $\{u\} = J_1 \cap J_3$ y $\{v\} = J_2 \cap J_3$. De lo anterior que:

$$|h^{-1}(cl_{PHS_2(Y)}(q_Y^2(\langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) \cap cl_{PHS_2(X)}(q_X^2(\langle J_3^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}))| = 2,$$

de lo cual, dado que $h^{-1}(q_Y^2(\langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2) - \{F_Y^2\}) = q_X^2(\langle J_{1h}^\circ, J_{2h}^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, se sigue que X contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción.

Caso 4. $|\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)| \geq 4$.

Sean J y K elementos diferentes de $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)$ y $J', K' \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $h^{-1}(\mathcal{PHD}_{\mathfrak{L}\mathfrak{A}}(J, K)) = \mathcal{PHD}_{\mathfrak{D}}(J', K')$. Observemos que, usando los modelos de $\mathcal{PHD}(J', K')$ del segundo Capítulo, obtenemos que $J' \neq K'$. Notemos también, que el Lema 48 nos asegura que J es adyacente a K si y sólo si J' es adyacente a K' . Por lo que, usando el Teorema de las gráficas de Líneas de Whitney [11, Corolario del Teorema 1], tenemos que X contiene una gráfica isomorfa a la gráfica formada por los elementos de $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_S(Y)$; dicha gráfica es topológicamente una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción.

De lo anterior, concluimos que Y es una dendrita. De donde, por el Lema 43, resulta que $Y \in \mathfrak{D}$. Entonces, por el Teorema 41, Y es homeomorfo a X . \square

Capítulo 5

Continuos con $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no homeomorfos

En este capítulo presentaremos nuevas familias de continuos para los cuales $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no son homeomorfos; para evitar confusión distinguiremos los siguientes conceptos: q_X^n denotará la función cociente $q_X^n : C_n(X) \rightarrow PHS_n(X)$; F_X^n , el elemento $q_X^n(F_1(X))$; y T_X^n , el elemento $q_X^n(X)$. Por otro lado, s_X^n denotará la función cociente $s_X^n : C_n(X) \rightarrow HS_n(X)$; P_X^n , el elemento $s_X^n(F_n(X))$; y G_X^n , el elemento $s_X^n(X)$.

Un continuo X será llamado un continuo *descomponible*, si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son continuos indescomponibles.

Denotaremos como \mathfrak{S} a la familia de continuos localmente conexos que contienen una curva cerrada simple S , tal que S es la unión de dos arcos libres maximales.

5.1. Continuos indescomponibles

En esta sección demostraremos que los continuos hereditariamente indescomponibles producen hiperespacios $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no homeomorfos.

Este resultado es debido a J. C. Macías; para mayor completitud de esta tesis presentamos la prueba.

Lema 50. *Sean $n \geq 2$ y X un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $PHS_n(X) \setminus \{T_X^n\}$ no es arcoconexo.*

Demostración. Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 cuatro puntos de X en diferentes componentes de X . Consideremos $\{x_1, x_2\}$ y $\{x_3, x_4\}$ como elementos de $F_2(X)$. Dado que X es un continuo indescomponible, cualquier arco en $C_n(X)$ que une a $\{x_1, x_2\}$ y a $\{x_3, x_4\}$ debe contener al elemento X [27, Teorema 6.3]. Dado que X es un continuo hereditariamente indescomponible, $F_n(X)$ no contiene arcos [4, Lema 2.2]. Por lo que, cualquier arco que une a $q_X^n(\{x_1, x_2\})$ con $q_X^n(\{x_3, x_4\})$, debe contener al elemento T_X^n . De donde concluimos que, $PHS_n(X) \setminus \{T_X^n\}$ no es arcoconexo. \square

Una consecuencia directa de [30, Teorema 4.3] es el siguiente resultado:

Teorema 51. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $\chi \in HS_n(X)$, $HS_n(X) \setminus \{\chi\}$ es arcoconexo.*

Entonces como consecuencia del Lema 50 y el Teorema 51 tenemos:

Teorema 52. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $HS_n(X)$ no es homeomorfo a $PHS_n(X)$, para ninguna $n \geq 2$.*

5.2. Continuos localmente conexos

En esta sección probaremos que $PHS_n(X)$ no es homeomorfo a $HS_n(X)$ para los continuos localmente conexos que contienen una curva cerrada simple, la cual es la unión de dos arcos libres maximales. Sea $n \geq 2$ y $X \in \mathfrak{G}$. Ahora, consideraremos los siguientes conjuntos, muchos de éstos son la generalización de ciertos conjuntos previamente definidos. Aquí, se presentan para continuos

localmente conexos (notemos que todos ellos están dados en términos de propiedades topológicas):

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda y } A \text{ está en la frontera como variedad de } \mathcal{N}\};$$

$$\Gamma_n(X) = \{\chi \in C_n(X) : \chi \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ y } \chi \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim(\mathcal{U}) \leq 2n, \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHL}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } PHS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{PHL}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } PHS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda y } \chi \text{ está en la frontera como variedad de } \mathcal{N}\};$$

$$\mathcal{PHD}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \chi \notin \mathcal{PHL}_n(X) \text{ y } \chi \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en } PHS_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim(\mathcal{U}) \leq 2n, \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{PHL}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{PHE}_n(X) = \{\chi \in PHS_n(X) : \dim_\chi[PHS_n(X)] = 2n\}.$$

$$\mathcal{HL}_n(X) = \{\chi \in HS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } HS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda}\};$$

$$\partial\mathcal{HL}_n(X) = \{\chi \in HS_n(X) : \chi \text{ tiene una vecindad } \mathcal{N} \text{ en } HS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{N} \text{ es una } 2n\text{-celda y } \chi \text{ está en la frontera como variedad de } \mathcal{N}\};$$

$$\mathcal{HD}_n(X) = \{\chi \in HS_n(X) : \chi \notin \mathcal{HL}_n(X) \text{ y } \chi \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en } HS_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim(\mathcal{U}) \leq 2n, \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{HL}_n(X) \text{ es arcoconexo}\};$$

$$\mathcal{HE}_n(X) = \{\chi \in HS_n(X) : \dim_\chi[HS_n(X)] = 2n\}.$$

Clarifiquemos, que dado un elemento X de \mathfrak{S} , definiremos los siguientes conjuntos (generalizaciones de conjuntos antes definidos):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathfrak{S}}(J, K) &= \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{C_2(X)}(\partial\mathcal{L}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, K) &= \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{PHS_2(X)}(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(J, K) &= \text{cl}_{HS_2(X)}(\partial\mathcal{HL}_2(X) \cap s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \\ &\quad \cap \text{cl}_{HS_2(X)}(\partial\mathcal{HL}_2(X) - s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)). \end{aligned}$$

Sea X un continuo localmente conexo. Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, generalizaremos $\mathcal{E}(J)$ (definido anteriormente) de la siguiente manera: Si J es un arco entonces $\mathcal{E}(J) = C_1(J)$. En el caso en que J sea un lazo, denotemos como p_J al único punto de J tal que $J \setminus \{p_J\}$ es abierto en X ; y definamos a $\mathcal{E}(J)$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(J) = \{ & A \in C_1(J) : A = J \text{ o } A = \{p\} \text{ para alguna } p \in J \\ & \text{o } A \text{ es un subarco de } J \text{ tal que } p_J \notin A \\ & \text{o } A \text{ es un subarco de } J \text{ tal que} \\ & p_J \text{ es uno de sus puntos extremos}\}. \end{aligned}$$

La prueba del siguiente lema es similar a la prueba del Lema 2.4 de [16] (ver demostración del Lema 6 de esta tesis).

Lema 53. *Sean $X \in \mathfrak{S}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada vecindad \mathcal{U} de F_X^n en $PHS_n(X)$ (vecindad \mathcal{U} de P_X^n en $HS_n(X)$), tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$.*

El siguiente Lema puede encontrarse en [12].

Lema 54. [12, Lemma 28] *Sean X un continuo localmente conexo y $n \geq 3$. Entonces $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y existe } J \in \mathfrak{A}_S(X) \text{ tal que } A \in J^\circ\}$.*

Como una consecuencia del Lema 54 y dado un argumento similar al dado en el Lema 2.9 de [16], obtenemos:

Lema 55. *Sea $X \in \mathfrak{S}$. Si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{PHD}_n(X) = \{q_X^n(A) \in PHS_n(X) : A \in C_1(X) - F_1(X) \text{ y } A \subset J^\circ \text{ con } J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ y $\mathcal{HD}_n(X) = \{s_X^n(A) \in HS_n(X) : A \in C_1(X) - F_n(X) \text{ y } A \subset J^\circ \text{ con } J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.*

Del Lema 55 y de [12, Lema 11], obtenemos:

Lema 56. *Sea $X \in \mathfrak{S}$. Entonces*

(a) *Si $n \geq 3$, entonces las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ ($\mathcal{HD}_n(X)$) son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}$ ($s_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{P_X^n\}$), en donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.*

(b) *Las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ ($\mathcal{HE}_n(X)$) son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$ ($s_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$), en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, y $m \leq n$.*

Consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{FA}(X) = \bigcup \{J^\circ : J \text{ es un arco libre en } X\}$. En el primer párrafo de la prueba de [12, Lema 32] se prueba que las componentes de $\mathcal{L}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2$ con J_1 y J_2 en $\mathfrak{A}_S(X)$; usando esto podemos parafrasear el [12, Lema 32] de la siguiente manera:

Lema 57. *Sea $X \in \mathfrak{S}$. Entonces $\partial\mathcal{L}_2(X) = \{A \in C_2(X) : A \text{ es conexo o } A \text{ tiene una componente degenerada o } A \text{ contiene un punto extremo de } X; \text{ y existen } J_1 \text{ y } J_2 \text{ en } \mathfrak{A}_S(X) \text{ tales que } A \in \langle J_1^\circ, J_2^\circ \rangle_2\}$.*

El siguiente lema es el Lema 33 de [12].

Lema 58. *[12, Lemma 33] Sean X un continuo localmente conexo perteneciente a la familia \mathfrak{S} , $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $fr_X(J) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus J)$ y $fr_X(K) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus K)$. Entonces $\mathcal{D}_{\mathfrak{S}}(J, K) = \{\{p\} \cup A \mid (p \in fr_X(J) \text{ y } A \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } A \in \mathcal{E}(J))\}$.*

Lema 59. *Sea $X \in \mathfrak{S}$. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $fr_X(J) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus J)$ y $fr_X(K) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus K)$. Entonces $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, K) = \{q_X^2(\{p\} \cup G) \mid (p \in fr_X(J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\}$.*

Demostración. Este lema se prueba usando el Lema 58 y procediendo de igual manera que en la prueba del Lema 15 de esta Tesis. \square

Lema 60. *Sean $X \in \mathfrak{S}$ y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(J, K) = \{s_X^2(\{p\} \cup G) \mid (p \in fr_X(J) \cap cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus J) \text{ y } G \in \mathcal{E}(K)) \text{ o } (p \in fr_X(K) \cap cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus K) \text{ y } G \in \mathcal{E}(J))\} \cup \{P_X^n\}$.*

Demostración. Este Lema se prueba usando el Lema 57, procediendo de igual manera que en [12, Lema 33]. Sin embargo, se necesita atención especial al caso: $fr_X(J) \cap cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus J) = \emptyset$ y $fr_X(K) \cap cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus K) = \emptyset$. Notemos que en este caso, usando Lema 57, se prueba que: $cl_{HS_2(X)}(\partial\mathcal{HL}_2(X) \cap s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) \cap cl_{HS_2(X)}(\partial\mathcal{HL}_2(X) \setminus s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2)) = \{P_X^n\}$. Por lo que, en este caso, el Lema se sigue directamente de este hecho. \square

Lema 61. *Sean $X \in \mathfrak{S}$ y S una curva cerrada simple de X , tal que S es la unión de dos arcos libres maximales K y L . Sean $J \in \{K, L\}$ y $R, O \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, J)$ no homeomorfo a $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(R, O)$.*

Demostración. Observemos que dado que, $J \in \{K, L\}$, tenemos que $fr_X(J) \subset cl_X(\mathcal{FA}(X) \setminus J)$. De aquí que, por los Lemas 59 y 15 de esta tesis, $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, J)$ es homeomorfo a $\mathcal{PHD}(J', J')$, en donde J' es un arco libre maximal de una gráfica finita G y $|fr_G(J')| = 2$. Entonces, usando los modelos presentados en la sección 2.3 del segundo capítulo de esta tesis, tenemos que $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, J)$ es homeomorfo a la unión de dos 2-celdas unidas por tres puntos de su frontera como variedad. Por otro lado, usando la descripción del conjunto $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(R, O)$ dada en el Lema 60, y dando un argumento similar al dado en [16, p. 85], obtenemos que $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(R, O) = \{P_X^n\}$ o $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(R, O)$ es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios: una 2-celda; la unión de m ($m \leq 4$) 2-celdas, de modo que la intersección de dos de ellas es un conjunto unipuntual (observemos

que esta última condición es suficiente para asegurar que el conjunto no es homeomorfo a $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, J)$; la unión de dos 2-celdas unidas por dos puntos de su frontera como variedad; la unión de cuatro 2-celdas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ y \mathcal{D}_4 tales que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{a, b\}$, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_4 = \{b\}$, $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_4 = \{b, c\}$, en donde a, b y c son tres puntos diferentes que pertenecen a las fronteras como variedad de las correspondientes 2-celdas y, finalmente, la unión de tres 2-celdas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, y \mathcal{D}_3 tales que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{a, b\}$ y $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{b\}$, en donde a y b son dos puntos diferentes que pertenecen a la frontera como variedad de las correspondientes 2-celdas. Todo lo anterior implica que $\mathcal{PHD}_{\mathfrak{S}}(J, J)$ no es homeomorfo a $\mathcal{HD}_{\mathfrak{S}}(R, O)$, en ningún caso. \square

Lema 62. Sean $X \in \mathfrak{S}$ y $n \geq 2$ y $h : PHS_n(X) \rightarrow HS_n(X)$ un homeomorfismo. Supongamos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) \subset s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$. Entonces:

- Para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$,

Demostración. Por el Lema 56(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $m \leq n$. Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por el Lema 56(b), $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ es una componente de $\mathcal{HE}_n(X)$. Tomemos dos subarcos no degenerados A y B de J° . Entonces:

$h(q_X^n(A)), h(q_X^n(B)) \in h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Supongamos que $h(q_X^n(A)) \neq P_X^n$. Por hipótesis, $h(q_X^n(A)) \in s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$. De aquí, concluimos que $h(q_X^n(A))$ pertenece a los conjuntos $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ y $s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$. Por el Lema 56(b) estos dos conjuntos son componentes de $\mathcal{HE}_n(X)$; por lo que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$. \square

Lema 63. Sean $X \in \mathfrak{S}$, $n \geq 2$, S una curva cerrada simple de X , tal que S es la unión de dos arcos libres maximales K y L y supongamos que $K \cap L = \{v, w\}$. Entonces:

$$(cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) \cap (cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) =$$

$$\{F_X^n, q_X^n(\{v, w\})\}.$$

Demostración. Sean $\mathfrak{L} = \{K, L\}$ y $J \in \mathfrak{L}$. Dado que cada $\{p\}$, en donde $p \in J^\circ$, puede ser aproximado por elementos en $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X)$, tenemos que $\{p\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X))$. Esto implica que $F_X^n \in cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. También, dado que $n \geq 2$, $\{v, w\}$ puede ser aproximado por elementos en $\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X)$. Entonces tenemos que $\{v, w\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_1(X))$. Por lo cual, $q_X^n(\{v, w\}) \in cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. En consecuencia:

$$\{F_X^n, q_X^n(\{v, w\})\} \subset \bigcap [cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{L}].$$

Ahora, supongamos que:

$$\chi \in \bigcap [cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{L}] - \{F_X^n, q_X^n(\{v, w\})\}.$$

Sean $J_0 \in \mathfrak{L}$, y $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de $\langle J_0^\circ \rangle_n$ tal que $\lim q_X^n(A_k) = \chi$. Es claro que $\lim A_k = A$ para alguna $A \in \langle J_0^\circ \rangle_n$. Dado que $\chi \neq F_X^n$, $\chi \neq q_X^n(\{v, w\})$ y $q_X^n(A) = \chi$, tenemos que $A \in C_n(J_0) - (F_1(J_0) \cup \{\{v, w\}\})$. Esto implica que, al menos, una componente de A interseca a J_0° ; entonces $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$. Tomemos $J \in \mathfrak{L} \setminus \{J_0\}$. Por un argumento similar al anterior, existe $D \in C_n(J) - (F_1(J) \cup \{\{v, w\}\})$ tal que $q_X^n(D) = \chi$. Como $\chi \neq F_X^n$, tenemos que $D = A$. Entonces, $J_0^\circ \cap J \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\{F_X^n, q_X^n(\{v, w\})\} = \bigcap [cl_{PHS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathfrak{L}]$. \square

Lema 64. Sean $X \in \mathfrak{G}$, $n \geq 2$ y L y K dos elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$. Entonces:

$$(cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\})) \cap (cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\})) = \{P_X^n\}.$$

Demostración. Sean $\mathfrak{L} = \{L, K\}$ y $J \in \mathfrak{L}$. Dado que cada elemento $\{p\}$, tal que $p \in J^\circ$, puede ser aproximado por elementos de $\langle J^\circ \rangle_n - F_n(X)$, tenemos que $\{p\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_n(X))$. Por lo que, $P_X^n \in cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\})$. En consecuencia:

$$P_X^n \in \bigcap \{cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}) : J \in \mathfrak{L}\}.$$

Ahora, supongamos que:

$$\chi \in \bigcap \{cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}) : J \in \mathfrak{L}\} - \{P_X^n\}.$$

Sean $J \in \mathfrak{L}$ y $J_0 \in \mathfrak{L} \setminus \{J\}$. Entonces existe una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ en $\langle J_0^\circ \rangle_n$ tal que $\lim s_X^n(A_k) = \chi$. Es claro que $\lim A_k = A$ para alguna $A \in \langle J_0 \rangle_n$. Dado que $\chi \neq P_X^n$ y $s_X^n(A) = \chi$, tenemos que $A \in C_n(J_0) - F_n(J_0)$. Lo cual implica que, al menos, una componente de A interseca a J_0° . Por un argumento similar al anteriormente dado, existe $D \in C_n(J) - F_n(J)$ tal que $s_X^n(D) = \chi$. Como $\chi \neq P_X^n$, tenemos que $D = A$. Entonces tenemos que $J_0^\circ \cap J \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. \square

Teorema 65. *Sean $n \geq 2$ y $X \in \mathfrak{S}$. Entonces $PHS_n(X)$ no es homeomorfo a $HS_n(X)$.*

Demostración. Sean S una curva cerrada simple de X tal que S es la unión de dos arcos libres maximales K y L y supongamos que $K \cap L = \{v, w\}$ y que $h : PHS_n(X) \rightarrow HS_n(X)$ es un homeomorfismo.

Caso 1: $n \geq 3$. A continuación veremos que X y h satisfacen las hipótesis del Lema 62. Dado que h es un homeomorfismo, $h(\mathcal{PHL}_n(X)) = \mathcal{HL}_n(X)$. Lo cual, recordando la definición de $\mathcal{PHD}_n(X)$, implica que $h(\mathcal{PHD}_n(X)) = \mathcal{HD}_n(X)$. Entonces, por el Lema 56(a), para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que:

$$\begin{aligned} h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{F_X^n\}) &= s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C_1(X)) - \{P_X^n\} \\ &\subset s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}. \end{aligned}$$

Dado que la correspondencia entre las componentes de $\mathcal{PHD}_n(X)$ y las componentes de $\mathcal{HD}_n(X)$ es inyectiva, obtenemos que la relación $J \mapsto J_h$ entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(X)$ es una biyección. Entonces, por los Lemas 62, 63 y 64:

$$\begin{aligned} 2 &= |h(\{F_X^n, q_X^n(\{v, w\})\})| = \\ &= |\bigcap [cl_{HS_n(X)}(h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) : J \in \{K, L\}]| = \\ &= |\bigcap [cl_{HS_n(X)}(s_X^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}) : J \in \{K, L\}]| = |\{P_X^n\}| = 1 \end{aligned}$$

Claramente esto es una contradicción. En conclusión, $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no son homeomorfos.

Caso 2: $n = 2$. Dado que las definiciones de $\mathcal{PHE}_2(X)$ y $\mathcal{HE}_2(X)$ están dadas en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{HE}_2(X)$. Por el Lema 56(b), las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y, por el Lema 56(b), las componentes de $\mathcal{HE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{P_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. De esto tenemos que, dados $J \in \{L, K\}$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{P_X^2\}$. Como las definiciones de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $\partial\mathcal{HL}_2(X)$ están dadas en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{HL}_2(X)$. Por el Lema 53, $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $P_X^2 \notin \partial\mathcal{HL}_2(X)$. Lo cual implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{HL}_2(X) \cap s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{HL}_2(X) - s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2).$$

Entonces $h(\mathcal{PHD}_\mathfrak{G}(J, J)) = \mathcal{HD}_\mathfrak{G}(J_h, K_h)$. Como $J \in \{L, K\}$, esto contradice el Lema 61. Por lo cual, $PHS_n(X)$ y $HS_n(X)$ no son homeomorfos. \square

Corolario 66. *Sean $n \geq 2$ y $m \geq 3$. Si X es la suspensión topológica de la unión ajena de m continuos localmente conexos, de los cuales al menos dos de ellos son degenerados; entonces $PHS_n(X)$ no es homeomorfo a $HS_n(X)$.*

Demostración. Sean W la unión ajena de m continuos localmente conexos, de los cuales al menos dos son degenerados, digamos a y b , y X la suspensión sobre W . Es claro que X contiene una copia de la suspensión topológica de $\{a, b\}$; la cual es una curva cerrada simple S . Dado que $m \geq 3$, $|S \cap \text{cl}_X(X - S)| = 2$. Por lo que, S es una curva cerrada simple en X , la cual es la unión de dos arcos libres; por lo que, el corolario se sigue del Teorema 65. \square

5.3. Gráficas finitas

En esta sección probaremos que las gráficas finitas con al menos un punto de ramificación, diferentes de un k -odo simple producen $PHS_2(X)$ y $HS_2(X)$ no homeomorfos.

Las definiciones que usaremos a continuación son las que se han presentado en secciones previas.

El siguiente lema es la conjunción del Lema 6 de esta tesis y el Lema 2.4 de [16]; la prueba es muy similar en ambos casos (ver demostración del Lema 6 de esta tesis).

Lema 67. *Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada vecindad \mathcal{U} de F_X^n en $PHS_n(X)$ (vecindad \mathcal{U} de P_X^n en $HS_n(X)$), tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$.*

Recordemos el Lema 12(b) de esta tesis: Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$, Entonces las componentes de $\mathcal{PHE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, y $m \leq n$.

Lema 68. [16, Lema 2.10 partes (a) y (b)] *Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Entonces las componentes de $\mathcal{HE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $s_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{P_X^n\}$, en donde $J_1, \dots, J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $m \leq n$.*

Teorema 69. *Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y tal que no es un k -odo simple, entonces $PHS_2(X)$ no es homeomorfo a $HS_2(X)$.*

Demostración. Supongamos que $PHS_2(X)$ es homeomorfo a $HS_2(X)$. Dado que las definiciones de $\mathcal{PHE}_2(X)$ y $\mathcal{HE}_2(X)$ están dadas en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\mathcal{PHE}_2(X)) = \mathcal{HE}_2(X)$. Por el Lema 12(b) de esta tesis, las componentes de $\mathcal{PHE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, y, por el Lema 68, las componentes de $\mathcal{HE}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $s_X^2(\langle J^\circ, K^\circ \rangle_2) - \{P_X^2\}$, en donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por lo tanto, dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existen $J_h, K_h \in \mathfrak{A}_S(X)$ ta-

les que $h(q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2) - \{F_X^2\}) = s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2) - \{P_X^2\}$. Como las definiciones de $\partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $\partial\mathcal{HL}_2(X)$ están dadas en términos de propiedades topológicas, tenemos que $h(\partial\mathcal{PHL}_2(X)) = \partial\mathcal{HL}_2(X)$. Por el Lema 67, $F_X^2 \notin \partial\mathcal{PHL}_2(X)$ y $P_X^2 \notin \partial\mathcal{HL}_2(X)$. Lo cual implica que:

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) \cap q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{HL}_2(X) \cap s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2)$$

y

$$h(\partial\mathcal{PHL}_2(X) - q_X^2(\langle J^\circ \rangle_2)) = \partial\mathcal{HL}_2(X) - s_X^2(\langle J_h^\circ, K_h^\circ \rangle_2);$$

por lo que, $h(\mathcal{PHD}(J, J)) = \mathcal{HD}(J_h, K_h)$.

Como X no es un k -odo simple y tiene al menos un punto de ramificación, podemos tomar $J_0 \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J_0 \notin \mathfrak{A}_E(X)$. Ahora, usando los modelos de $\mathcal{PHD}(K, L)$ dados en el Capítulo 1 y los modelos de $\mathcal{HD}(K, L)$ dados en [16, p. 85], podemos ver que, dado que $J_0 \notin \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathcal{PHD}(J_0, J_0)$ no es homeomorfo a $\mathcal{HD}(K, L)$, para ninguna pareja K y $L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Lo cual contradice el hecho probado en el párrafo anterior. Por lo tanto, $PHS_2(X)$ y $HS_2(X)$ no son homeomorfos. \square

Capítulo 6

Preguntas abiertas

A continuación presentamos una lista de preguntas abiertas fruto del trabajo realizado en esta tesis:

- ¿Los continuos encadenables tienen $PHS_n(X)$ único?
- ¿Los continuos arbolados tienen $PHS_n(X)$ único?
- ¿Los continuos circularmente encadenables tienen $PHS_n(X)$ único?
- ¿Los continuos tales que todos sus subcontinuos propios son arcos tienen $PHS_n(X)$ único?
- ¿Si X es un k -odo simple entonces $HS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(X)$?
- ¿Para qué familias de continuos $HS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(X)$?
- ¿Para qué familias de continuos $HS_n(X)$ no es homeomorfo a $PHS_n(X)$?

Bibliografía

- [1] Gerardo Acosta, *Continua with unique hyperspace*, in: Continuum Theory, Denton, TX, 1999, in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 230, Dekker, New York, 2002, 33-49.
- [2] Daniel Arévalo, Włodzimierz J. Charatonik, Patricia Pellicer Covarrubias y Likin Simón, *Dendrites with closed set of end points*, Topology Appl. 115 (2001), 1-17.
- [3] Enrique Castañeda, Alejandro Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl., 153 (2006), 1434-1450.
- [4] D. Curtis y N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces*, Topology Appl., 19 (1985), 251-260.
- [5] Janusz J. Charatonik and Sergio Macías, *Mappings of some hyperspaces*, JP Jour. Geometry & Topology 4(1) (2004), 53-80.
- [6] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math. 62 (1968) 265-286.
- [7] R. Duda, *Corrections on the paper "On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I"*, Fund. Math. 69 (1970) 207-211.
- [8] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl., 138 (2004), 109-124.

- [9] J. Grispolakis and E. D. Tymchatyn, *Irreducible continua with nondegenerate end-tranches and arcwise accessibility in hyperspaces*, Fund. Math., 100 (1980), 117-130.
- [10] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.
- [11] R.L. Hemminger, *On Whitney's Line Graph Theorem*, The American Mathematical Monthly, 79 (1972), 374-378.
- [12] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes, and Verónica Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 43 (2013), 1583-1624.
- [13] David Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (2007), 795-805.
- [14] David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, María de J. López, and Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549-557.
- [15] David Herrera-Carrasco and Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique n -fold hyperspace*, Topology Proc., 32 (2008), 321-337.
- [16] David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías-Romero, and Francisco Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75-95.
- [17] J. Hocking and G. Young, *Topology*, Dover Publications Inc., 1988.
- [18] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1948.
- [19] Alejandro Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glas. Mat., 37 (57) (2002) 347-363.

- [20] Alejandro Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topology Proc., 27 (2003), 179–188.
- [21] Alejandro Illanes and Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York 1999.
- [22] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22–36
- [23] Juan C. Macías, *On the n -fold pseudo-hyperspace suspension of continua*, Glasnik Mat., 43 (2008), 439-449.
- [24] Sergio Macías, *On C -determined continua*, Glasnik Mat., 32 (52) (1997), 259-262.
- [25] Sergio Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace 2^X* , Bol. Soc. Mat. Mexicana 5 (1999), 415-418.
- [26] S. Macías. *Hiperespacios y productos simétricos de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones #27, Sociedad Matemática Mexicana, (2000), 211–223.
- [27] Sergio Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl., 109 (2001), 237–256.
- [28] Sergio Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc., 25 (2000), 255–276.
- [29] Sergio Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), 125–138.
- [30] Sergio Macías, *On the n -fold hyperespace suspension of continua, II*, Glas. Mat., 41(61) (2006), 335-343.

- [31] Sergio Macías and Sam B. Nadler, Jr., *Absolute n -fold hyperspace suspensions*, Colloq. Math., 105 (2006), 221–231.
- [32] Sergio Macías, *Topics on continua*, 2nd edition, Springer, 2018.
- [33] Verónica Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math., 32 (2006), 783–799.
- [34] Ernest Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 152 – 182.
- [35] Ulises Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n -fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 219-233.
- [36] S. B. Nadler, Jr. *Arcwise accessibility in hyperspaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 138 (1976), 1–29.
- [37] Sam B. Nadler Jr. *Hyperspace of sets*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978. Reimpreso en: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie de Textos #33, 2006.
- [38] Sam B. Nadler Jr. *A fixed point theorem for hyperspace suspension*, Houston J. Math., 5 (1979), 125-132.
- [39] Leopold Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 32 (1922), 258-280.
- [40] M. Wojdislawski. *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math., 32 (1939), 184-192.