UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES CARDINALES EN EL HIPERESPACIO DE SUCESIONES CONVERGENTES NO TRIVIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA :

ANDRÉS VALENCIA ZAMBRANO

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2019

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   Valencia
   Zambrano
   Andrés
   5543675518
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   310632355

2. Datos de la Tutora
   Dra.
   Patricia
   Pellicer
   Covarrubias

3. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Sergio
   Macías
   Álvarez

4. Datos del Sinodal 2
   Dr.
   Gerardo
   Acosta
   García

5. Datos del Sinodal 3
   Dr.
   Marco Antonio
   Montes de Oca
   Balderas

6. Datos del Sinodal 4
   Dr.
   Raúl
   Escobedo
   Conde

7. Datos del Trabajo Escrito
   Funciones Cardinales en el Hiperespacio de Sucesiones Convergentes no Triviales
   67 pp.
   2019

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo de ExxonMobil, la Universidad Nacional Autónoma de México y el Instituto Internacional de Educación (IEE), a través del Programa de Becas ExxonMobil para la Investigación (BEI).

Índice

Capítulo 1

Introducción

Los artículos de investigación matemática son textos complicados. Tratan temas abstractos y altamente especializados, de los que se presume un conocimiento avanzado por parte del lector, utilizan una notación compleja, tienden a obviar resultados básicos del área y con cierta frecuencia citan como referencia a textos en los cuales no hay una clara exposición del elemento referido. En sí mismo, este enfoque no es necesariamente nocivo; al final del día, estos escritos están dirigidos a otros expertos en el campo. Su audiencia son personas que conocen profundamente el contexto en donde se inserta el documento, están familiarizadas con la terminología del autor y dominan las bases sobre las cuales se fundamentan los nuevos hallazgos. Es perfectamente razonable diseñar una herramienta para el individuo que cuente con la mayor competencia, especialmente si esta pretende usarse para traspasar los límites del conocimiento humano.

Sin embargo, para alguien que tiene poco tiempo estudiando un campo específico dentro de las matemáticas, la investigación relacionada a este resulta intimidante y desalentadora. Leer una publicación implica, habitualmente, enfrentarse a un listado aparentemente arbitrario de propiedades, cuyas demostraciones no son siempre claras, están basadas en resultados que no están incluidos en el trabajo o construyen inferencias sobre procedimientos que no se explican por considerarse en exceso simples. Incluso, en algunos casos, se necesita una especie de convicción científica para creer ciertas aseveraciones, porque se citan fuentes que no se pueden verificar: artículos de difícil acceso, observaciones en libros que no cuentan con ningún tipo de prueba o ejercicios donde la responsabilidad de la prueba recae en el lector.

Esta brecha entre la investigación y el aprendizaje es lo que motivó la elaboración de esta tesis. Este trabajo quiere fungir como un puente para esta separación, uniendo estos dos aspectos fundamentales de la ciencia y acercando al alumno promedio a las fronteras del saber. Intento hacer una suerte de "traducción" de un artículo de investigación; me refiero a facilitar la lectura a alguien que no es un experto en el tema pero quiere llegar a serlo, abordando los problemas que mencioné anteriormente y buscando que casi todos los resultados necesarios estén contenidos dentro de esta obra.

Este enfoque –construir una explicación autosustentada– es habitual dentro de las matemáticas modernas, aunque siempre debe decidirse hasta qué punto se construye y qué tanto de las bases se incluye. En el caso de este trabajo, mi elección fue dirigirme a los alumnos de los últimos semestres de la licenciatura de matemáticas con conocimientos en el área de topología e inclinación por los hiperespacios y la teoría de conjuntos.

Elegí trabajar el artículo *Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences*, [10] publicado en 2018 por los doctores Maya, Pichardo y Pellicer, porque me interesan los hiperespacios topológicos. Si bien es un artículo claro, conciso y riguroso, consideré que puede ayudar este ejercicio de “traducción” porque su lectura es aún muy especializada, dado que no incluye algunos resultados que podrían parecer sencillos. A continuación explico la ruta que sigo:

Para el lector no familiarizado con la idea de los hiperespacios, dedico la mayoría del segundo capítulo a explicar qué son y cómo se les da una topología. Como noción intuitiva, un hiperespacio es un espacio topológico basado en una colección de subconjuntos de otro espacio. Si fuera necesario profundizar más en el tema que los puntos incluidos, recomiendo consultar el libro *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, de A. Illanes y S.B. Nadler Jr [8].

Las funciones cardinales son asignaciones de conjuntos con cierta propiedad a números cardinales. Dentro de la topología, son herramientas muy valiosas para describir varias propiedades y se han estudiado extensivamente por más de treinta años. Examino principalmente tres de ellas, dedicando los últimos tres capítulos a la densidad, el peso y el carácter, e incluyo algunas que derivan de estas. Por la naturaleza de este tipo de funciones, el segundo capítulo también trata temas sobre aritmética cardinal. En caso de que el lector quiera aprender más sobre funciones cardinales, recomiendo el libro *Cardinal Functions in Topology: Ten Years Later* de I. Juhász [9].

Como el protagonista de esta obra es el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales, uso el tercer capítulo para establecer algunas de sus propiedades generales. Además, mencionaré brevemente dos funciones cardinales más: la cofinalidad y la celularidad.

Aunque el texto sobre el que está basada esta tesis incluye otras funciones cardinales, acoto el tratamiento a las que mencioné antes. Por otro lado, incorporo algunos resultados de otro artículo de los mismos autores, *General properties of the hyperspace of convergent sequences*, [11], para abarcar más información sobre el tema. En caso de que el lector se viera inclinado hacia estudiar este hiperespacio con mayor profundidad, se le invita a consultar el trabajo que han desarrollado los investigadores García Ferreira, Ortiz Castillo, Rojas Hernández, Maya, Pellicer Covarrubias y Pichardo Mendoza, entre otros ([1], [3], [4], [5], [12], [15]).

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Notación

El símbolo ω denotará tanto al primer ordinal infinito como al primer cardinal infinito. En particular, consideraremos a los enteros no negativos como ordinales, de manera que $n \in \omega$ implica que $n = \{0, \dots, n-1\}$ y que $\omega \setminus n = \{k \in \omega : k \geq n\}$. El conjunto $\omega \setminus \{0\}$ quedará denotado por $\mathbb{N}$. Usaremos ω_1 para referirnos al primer ordinal no numerable. El sucesor de un cardinal infinito κ es el ordinal $\kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$, por lo que los símbolos $i \in \kappa + 1$, $i < \kappa + 1$ e $i \leq \kappa$ representan lo mismo. Como de costumbre, $\mathfrak{c}$ representará la cardinalidad de la recta real, $\mathbb{R}$.

Si X es un conjunto, el símbolo $|X|$ representará la cardinalidad de X. Si κ es un cardinal, usaremos los símbolos $[X]^{\kappa}$, $[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{<\kappa}$ para referirnos a familias de subconjuntos de X que tienen cardinalidad κ, $\leq \kappa$ y $< \kappa$, respectivamente. Particularmente, $[X]^{<\omega}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de X, $[X]^{\omega}$ la de los subconjuntos infinitos numerables y $[X]^{<n+1}$ la de los subconjuntos de X con a lo más n puntos, siempre que $n \in \omega$.

Si X es un conjunto, denotaremos por $\bigcup X$ al conjunto $\{z \in y : y \in X\}$. Otra notación para este último será $\bigcup_{y \in X} y$, o, en el caso en que X esté indexado por algún conjunto I, escribiremos $\bigcup_{\alpha \in I} y_{\alpha}$.

La colección de todos los subconjuntos de un conjunto X quedará denotada por el símbolo $\mathcal{P}(X)$.

Para una función $f : X \longrightarrow Y$, el símbolo $Im(f)$ representará su imagen, mientras que $Dom(f)$ indicará su dominio. Dado un subconjunto A de $Dom(f)$, el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ estará denotado por $f[A]$. Por otra parte, si $B \subseteq X$, utilizaremos la notación $f \restriction_B$ para referirnos a la función $f \restriction_B : B \longrightarrow Y$ dada por $f \restriction_B (x) = f(x)$, para cada $x \in B$.

El producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{X_{\alpha} : \alpha \in I\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones f que van de I a $\bigcup_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ de manera que $f(\alpha) \in X_{\alpha}$, para cada $\alpha \in I$, estará denotado por $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$. Otra manera de referirnos a los elementos de $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ será como puntos de la forma $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ con $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$, para cada $\alpha \in I$.

A lo largo de esta tesis, el término *espacio* se referirá a un espacio de Hausdorff. Para un espacio X, el símbolo τ_X se referirá a la colección de subconjuntos abiertos de X. Además, para un conjunto $A \subseteq X$, usaremos la notación $int_X(A)$ y $\overline{A}^X$ para señalar su interior en X y su cerradura en X, respectivamente. En caso de que no haya riesgo de confusión, escribiremos

$int(A)$ y $\overline{A}$.

Dado un conjunto linealmente ordenado X, la colección de todos los intervalos del tipo (a, b), con $a, b \in X$, forma una base para una topología sobre X [14, Sección 14, p. 95]. En caso de que X tenga un elemento mínimo a_0 o un máximo b_0, agregaremos a esta colección los intervalos del tipo $[a_0, b)$ o $(a, b_0]$, respectivamente, para conformar la base. Llamaremos a estos espacios *espacios linealmente ordenados*.

El símbolo $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ denotará la suma topológica de la familia de espacios $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ (ver [2, Sección 2.2, p. 74]).

Utilizaremos los símbolos lógicos $\wedge$, $\exists$ y $\forall$ para referirnos al conector lógico de conjunción, al cuantificador existencial y al cuantificador universal, respectivamente.

2.2. Aritmética Cardinal

El objetivo central de este trabajo será establecer relaciones entre las funciones cardinales de un espacio X y aquellas de su hiperespacio de sucesiones convergentes $\mathcal{S}_c(X)$, el cuál definiremos más adelante. Sin embargo, para poder llegar a esto, necesitamos primero tener claras algunas propiedades de la aritmética cardinal. Por el enfoque de esta tesis, todos los números cardinales que consideremos en esta sección serán infinitos.

Definición 2.2.1. Sea $\{\kappa_i : i \in I\}$ una familia de números cardinales. Consideremos una familia de conjuntos ajenos dos a dos $\{A_i : i \in I\}$ de manera que, para cada $i \in I$, ocurra que $|A_i| = \kappa_i$. Definimos la suma de $\{\kappa_i : i \in I\}$ como:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i\in I} A_i \right|.$$

Notemos que siempre que tengamos una familia de conjuntos ajenos dos a dos $\{A_i : i \in I\}$, ocurrirá que $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ si y sólo si existe un único $i \in I$ para el que $a \in A_i$. Por esto, para esta sección, cada elemento $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ quedará denotado por a_i, haciendo referencia al conjunto dentro de la unión al que este pertenece.

Los siguientes dos resultados garantizarán que la definición anterior es legítima.

Proposición 2.2.2. *Sean $\{A_i : i \in I\}$ y $\{B_i : i \in I\}$ familias de conjuntos ajenos dos a dos y $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i \mid i \in I\}$ una familia de funciones bien definidas. Entonces la función $f = \bigcup_{i\in I} f_i \ : \ \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i$ dada por $f(a_i) = f_i(a_i)$ está bien definida. Más aún:*

1. *Si para cada $i, \in I$ la función f_i es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

2. *Si para cada $i, \in I$ la función f_i es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.*

3. *Si para cada $i, \in I$ la función f_i es biyectiva, entonces f es biyectiva.*

Demostración. Supongamos que para cada $i \in I$ la función $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ está bien definida. Sea $a_i \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Se sigue que $f(a_i) = f_i(a_i) \in B_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$, mostrando que, en efecto, f está bien definida.

Presupongamos ahora que para cada $i \in I$ la función f_i es inyectiva. Veamos que f es inyectiva. Para ello, consideremos $x_i, y_j \in \bigcup_{i\in I} A_i$ distintos. Tomamos dos casos:

Caso 1: $i = j$. Debido a que la función f_i es inyectiva, tendríamos que:

$$f(x_i) = f_i(x_i) \neq f_i(y_i) = f(y_i).$$

Caso 2: $i \neq j$. En este caso, como $B_i \cap B_j = \emptyset$, se sigue que:

$$f(x_i) = f_i(x_i) \neq f_j(y_j) = f(y_j).$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Por otra parte, si para cada $i \in I$ sucediera que f_i fuera sobreyectiva, ocurriría que $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f_i[A_i] = \bigcup_{i\in I} B_i$, comprobando la sobreyectividad de f.

Por último, notamos que la tercera afirmación de la proposición es una consecuencia de las dos anteriores, concluyendo la demostración. □

Lema 2.2.3. *Si $\{A_i : i \in I\}$ y $\{A'_i : i \in I\}$ son familias de conjuntos ajenos dos a dos tales que $|A_i| = |A'_i|$ para toda $i \in I$, entonces $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} A'_i\right|$.*

Demostración. Como para cada $i \in I$, se tiene que $|A_i| = |A'_i|$, podemos considerar una función biyectiva $f_i : A_i \to A'_i$. Luego, por la Proposición 2.2.2, sabemos que la función $\bigcup_{i\in I} f_i : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A'_i$ está bien definida y es biyectiva. Por lo tanto, $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} A'_i\right|$. □

Notemos que en el caso en que la familia $\{A_i : i \in I\}$ no consistiera de conjuntos ajenos dos a dos, tendríamos que limitarnos a la desigualdad $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$.

Durante el resto de esta sección iremos obteniendo propiedades relevantes de la suma infinita de cardinales, que culminarán en el Teorema 2.2.13.

Lema 2.2.4. *Sean $\{\kappa_i : i \in I\}$ y $\{\lambda_i : i \in I\}$ familias de números cardinales tales que $\kappa_i \leq \lambda_i$ para toda $i \in I$. Entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i$.*

Demostración. Sean $\{A_i : i \in I\}$ y $\{B_i : i \in I\}$ familias de conjuntos ajenos dos a dos, que cumplan que, para cada $i \in I$, se dan las igualdades $|A_i| = \kappa_i$ y $|B_i| = \lambda_i$.

Como para cada $i \in I$ sabemos que $\kappa_i \leq \lambda_i$, podemos tomar una función inyectiva $f_i : A_i \to B_i$. Entonces por la Proposición 2.2.2, la función $\bigcup_{i\in I} f_i : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$ está bien definida y es inyectiva. Así, $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in I} B_i\right|$, o, en otras palabras, $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i$. □

Como sucede con los números naturales, existe una relación entre la suma y el producto de números cardinales. Para poder establecerla, necesitamos primero definir el producto de cardinales.

Definición 2.2.5. Sean κ y λ números cardinales. Consideremos A y B conjuntos de manera que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Definimos el producto de κ por λ como la cardinalidad del producto cartesiano de A por B. En símbolos, $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$.

El próximo lema mostrará que esta operación entre cardinales está bien definida.

Lema 2.2.6. *Sean A, A', B y B' conjuntos de manera que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$. Entonces $|A \times B| = |A' \times B'|$.*

Demostración. Consideremos dos funciones biyectivas $f_A : A \longrightarrow A'$ y $f_B : B \longrightarrow B'$. Definimos la función $f : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ dada por $f\big((a,b)\big) = \big(f_A(a), f_B(b)\big)$. Como f_A y f_B están bien definidas y son biyectivas, f está bien definida y es biyectiva. Así $|A \times B| = |A' \times B'|$.

□

Claramente, para dos números cardinales κ y λ ocurre que $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$ y que $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$. De nuevo, como en los números naturales, se puede definir la exponenciación cardinal.

Definición 2.2.7. Sean κ y λ números cardinales. Consideremos dos conjuntos A y B tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Definimos $\kappa^\lambda = |A^B| = |\{f : B \longrightarrow A \mid f \text{ es una función}\}|$.

Como con la suma y el producto, usaremos un lema para garantizar que nuestra operación de exponenciación está bien definida.

Lema 2.2.8. *Consideremos cuatro conjuntos A, A', B y B' tales que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$. Entonces $|A^B| = |(A')^{B'}|$*

Demostración. Sean $f_A : A \longrightarrow A'$ y $f_B : B \longrightarrow B'$ funciones biyectivas. Observemos que para cada $g \in A^B$, la función $h_g = f_A \circ g \circ f_B^{-1}$ es un elemento de $(A')^{B'}$. Además, para cada $b \in B$ sucede que $h_g\big(f_B(b)\big) = f_A\big(g(b)\big)$. Así, definimos la función $F : A^B \longrightarrow (A')^{B'}$ dada por $F(g) = h_g$, que por lo anterior está bien definida.

Mostraremos que F es biyectiva. Para la inyectividad, supongamos que $g_1, g_2 \in A^B$ son distintas. De esta manera, existe $b \in B$ para el cual $g_1(b) \neq g_2(b)$. Como f_B es una función biyectiva, existe un único $b' \in B'$ tal que $(f_B)^{-1}(b') = b$. Luego, como f_A es inyectiva, se tiene que $h_{g_1}(b') = (f_A \circ g_1 \circ f_B^{-1})(b') = (f_A \circ g_1)(b) \neq (f_A \circ g_2)(b) = (f_A \circ g_2 \circ f_B^{-1})(b') = h_{g_2}(b')$, evidenciando que $F(g_1) \neq F(g_2)$. Se sigue que F es inyectiva.

Por último, si $h_0 \in A'^{B'}$, entonces la función $g_0 = f_A^{-1} \circ h_0 \circ f_B$ es un miembro de A^B tal que $F(g_0) = h_{g_0} = f_A \circ (f_A^{-1} \circ h_0 \circ f_B) \circ f_B^{-1} = h_0$. Por ello, F es sobreyectiva y, por ende, biyectiva. Concluimos que $|A^B| = |(A')^{B'}|$.

□

Proposición 2.2.9. *Sean κ y λ números cardinales. Entonces sucede que $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.*

Demostración. Sea A un conjunto tal que $|A| = \kappa$. Entonces, $2 \cdot \kappa$ es el cardinal de $\{0,1\} \times A$. Notemos que $\{0,1\} \times A = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times A)$. De esta manera:

$$2 \cdot \kappa = |\{0,1\} \times A| = |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times A)| = |(\{0\} \times A)| + |(\{1\} \times A)| = \kappa + \kappa.$$

□

La siguiente proposición es muy importante en la teoría de números cardinales. Sin embargo, su prueba es muy extensa y se desvía bastante del objetivo de este trabajo. Por ello, invitamos al lector a consultarla en [7, Lema 7.33(ñ) y Ejemplo 4.58, p. 167 y p. 64].

Proposición 2.2.10. *Sea κ un número cardinal. Entonces $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Corolario 2.2.11. *Sean κ y λ números cardinales y $n \in \omega$. Entonces ocurre que:*

1. $\kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$,
2. $\kappa + \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$ *y*
3. $\kappa^n = \kappa$

Demostración. Para probar el primer inciso, basta notar que, sin pérdida de generalidad, si $\kappa \leq \lambda$, entonces, por la Proposición 2.2.10, $\text{máx}\{\kappa, \lambda\} = \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

El segundo inciso se comprueba de manera similar, observando que si $\kappa \leq \lambda$, se sigue por la Proposición 2.2.9 y el inciso anterior que $\text{máx}\{\kappa, \lambda\} = \lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda = \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

Para el tercer enunciado procederemos por inducción. El caso base, es decir $n = 2$, se tiene por la Proposición 2.2.10. Supongamos que $\kappa^{n-1} = \kappa$. Entonces $\kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa \cdot \kappa^{n-1} = \kappa^n$. □

Lema 2.2.12. *Sean κ y λ números cardinales y $\{\kappa_i : i \in \lambda\}$ una familia de números cardinales tales que, para cada $i \in I$, ocurre que $\kappa_i = \kappa$. Entonces:*

$$\sum_{i \in \lambda} \kappa_i = \sum_{i < \lambda} \kappa_i = \kappa \cdot \lambda.$$

Demostración. Sean A y B conjuntos tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Observemos que tenemos la igualdad $A \times B = \bigcup_{b \in B}(A \times \{b\})$. Además, como $|B| = \lambda$, a cada elemento $b \in B$ le corresponde un único $i \in \lambda$; es decir, $|\bigcup_{b \in B}(A \times \{b\})| = |\bigcup_{i \in \lambda}(A \times \{i\})|$. Por ello, notando que $|A \times \{i\}| = \kappa_i$ para cada $i \in \lambda$, se tiene que

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B| = |\bigcup_{b \in B}(A \times \{b\})| = |\bigcup_{i \in \lambda}(A \times \{i\})| = \sum_{i < \lambda} \kappa_i.$$

□

Esto nos lleva al teorema definitivo sobre aritmética cardinal, el cual nos permitirá operar fácilmente con conjuntos de gran cardinalidad.

Teorema 2.2.13. *Sean λ un cardinal infinito y, para cada $\alpha < \lambda$, κ_α un cardinal no nulo. Tomemos $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Entonces:*

$$\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa.$$

Demostración. Por un lado, para cada $\alpha < \lambda$, ocurre que $\kappa_\alpha \leq \kappa$, así que los Lemas 2.2.4 y 2.2.12 garantizan que:

$$\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa = \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa.$$

Por otra parte, usando los mismos lemas, notamos que $\lambda = \sum_{\alpha < \lambda} 1 \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$. También, $\kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ para cada $\alpha < \lambda$ y, como $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}$, podemos asegurar que $\kappa \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$. Por el Corolario 2.2.11, concluimos que

$$\lambda \cdot \kappa = \text{máx}\{\lambda, \kappa\} \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha.$$

□

Corolario 2.2.14. *Si $\{\kappa_i : i \in I\}$ es una familia de números cardinales para la cual ocurre que $|I| \leq \sup\{\kappa_i : i \in I\}$, entonces:*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup\{\kappa_i : i \in I\}.$$

□

Como veremos más adelante, las familias finitas de subconjuntos de un conjunto X serán de particular importancia en esta tesis. Por ello, es relevante conocer la cardinalidad de la colección $[X]^{<\omega}$.

Lema 2.2.15. *Sea X un conjunto tal que $|X| = \kappa \geq \omega$. Entonces $|[X]^{<\omega}| = \kappa$.*

Demostración. Primero observemos que $\big\{\{x\} : x \in X\big\} = [X]^1 \subseteq [X]^{<\omega}$, así que:

$$\kappa \leq \left|[X]^{<\omega}\right|. \tag{2.1}$$

Ahora bien, notemos que $[X]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega}[X]^n$, por lo que:

$$\left|[X]^{<\omega}\right| = \left|\bigcup_{n\in\omega}[X]^n\right| = \sum_{n\in\omega}\left|[X]^n\right|. \tag{2.2}$$

Mostraremos a continuación que para cada $n \in \omega$ se tiene la desigualdad:

$$|[X]^n| \leq \kappa. \tag{2.3}$$

Fijemos $n \in \omega$, sea $D_n = \big\{(x_i)_{i=1}^n \in X^n \ : \ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}(i \neq j) \text{ entonces } x_i \neq x_j\big\}$ y consideremos la función

$$f : D_n \subseteq X^n \longrightarrow [X]^n \quad \text{dada por} \quad f((x_i)_{i=1}^n) = \{x_i\}_{i=1}^n.$$

Como cualquier elemento del conjunto D_n debe de tener exactamente n coordenadas distintas dos a dos, ocurre que $Im(f) \subseteq [X]^n$, comprobando que f está bien definida.

Veamos que f, además, es suprayectiva. Sea $\{a_i\}_{i=1}^n \in [X]^n$. Si ocurriera que para algunas $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, distintas, se diera que $a_i = a_j$, entonces $\{a_i\}_{i=1}^n \in [X]^m$ para alguna $m < n$, contradiciendo la elección de $\{a_i\}_{i=1}^n$. De esto, deducimos que $(a_i)_{i=1}^n \in D_n$ y, por ello, $f((a_i)_{i=1}^n) = \{a_i\}_{i=1}^n$. Por lo tanto, f es suprayectiva, lo que a su vez implica que $|X^n| \geq |[X]^n|$.

Recordemos que, bajo la Definición 2.2.7, de exponenciación de cardinales, $|X^n| = |X|^{|n|} = |X|^n$. Por ende, invocando el Corolario 2.2.11, notamos que:

$$\kappa = \kappa^n = |X|^n = |X^n| \geq |[X]^n|.$$

Usando el Lema 2.2.4, observamos que $\sum_{n\in\omega}|[X]^n| \leq \sum_{n\in\omega}\kappa$. Luego, la igualdad (2.2) y el Corolario 2.2.14 muestran que $|[X]^{<\omega}| \leq \kappa$. Finalmente, por (2.1), obtenemos que $|[X]^{<\omega}| = \kappa$. □

Corolario 2.2.16. *Si X es un conjunto tal que $|X| = \kappa \geq \omega$, entonces $|[X]^{\leq\omega}| \leq \kappa^\omega$.*

Demostración. Notemos que $|[X]^{\leq\omega}| = |[X]^{<\omega}| + |[X]^{\omega}|$. Por el Lema 2.2.15, sabemos que $|[X]^{<\omega}| = \kappa$, así que, gracias al Corolario 2.2.14, basta con mostrar que $|[X]^{\omega}| \leq \kappa^{\omega}$.

Observemos que $X^{\omega} = \{f : \omega \longrightarrow X \mid f \text{ es una función}\}$, es decir, X^{ω} es el conjunto de todas las sucesiones (en el sentido clásico) de X. Por otra parte, cada elemento de $[X]^{\omega}$ es de la forma $\{x_i\}_{i\in\omega}$, con $x_i \in X$, para cada $i \in \omega$. En otras palabras, cada elemento de $[X]^{\omega}$ es la imagen de una función $f : \omega \longrightarrow X$ dada por $f(i) = x_i$. Por ello, el conjunto X^{ω} tiene al menos tantos elementos como $[X]^{\omega}$. Concluimos por el Lema 2.2.8 que $|[X]^{\omega}| \leq |X^{\omega}| = \kappa^{\omega}$, asegurando que $|[X]^{\leq\omega}| \leq \kappa^{\omega}$.

□

Similarmente, la cardinalidad de la unión de un conjunto será algo con lo que estaremos lidiando a menudo. Debido a esto, introduciremos el siguiente resultado.

Lema 2.2.17. *Sea A un conjunto. Entonces $|\bigcup A| \leq |A| \cdot \sup\{|B| : B \in A\}$.*

Demostración. Sean $\kappa = |A|$ y $\lambda = \sup\{|B| : B \in A\}$. Como $\kappa = |A|$, podemos indexar al conjunto A con κ, es decir, $A = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Ahora, si para cada $\alpha < \kappa$, fijamos $\lambda_\alpha = |B_\alpha|$, podemos escribir $B_\alpha = \{b_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda_\alpha\}$.

Definimos la función $f : \kappa \times \lambda \longrightarrow \bigcup A$ dada por $f\big((\alpha, \beta)\big) = b_{\alpha,\beta}$, la cual, por el párrafo anterior, está bien definida y es sobreyectiva. Por lo tanto, $|\bigcup A| \leq |\kappa \times \lambda| = \kappa \cdot \lambda$. □

2.3. Definiciones y Topología General

Una vez tratadas estas nociones básicas de números cardinales y aritmética cardinal, podemos retomar el rumbo hacia el estudio de nuestro objetivo central: las funciones cardinales en el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales. Para ello, comenzaremos con definiciones relacionadas a la topología general.

Diremos que un espacio es *denso en sí mismo* si no cuenta con puntos aislados.

Una *red básica* de un espacio X es una familia de conjuntos $\mathcal{N}$ para la cual, para cada punto $x \in X$ y cada vecindad abierta U que contiene a x, existe $B \in \mathcal{N}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de algún conjunto X y tenemos $Y \subseteq X$, la *traza de $\mathcal{A}$ sobre Y* es $\mathcal{A} \restriction Y := \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$.

Una *sucesión convergente* en un espacio topológico X es una función $f : \omega \longrightarrow X$ para la cual hay un $x_0 \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $U \in \tau_X$, con $x_0 \in U$, existe $n \in \omega$ tal que $f[\omega \setminus n] \subseteq U$. En dado caso, diremos que f converge a x_0, y denotaremos este hecho por $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = x_0$. De manera similar al producto cartesiano, escribiremos $(f(n))_{n\in\omega}$ para referirnos a f. Si $|Im(f)| = \omega$ diremos que f es *no trivial.*

Definición 2.3.1. Una *familia celular* en un espacio topológico X es una familia de conjuntos abiertos, no vacíos, que son ajenos dos a dos. A la colección de todas las familias celulares finitas de X se le denota con $\mathfrak{C}(X)$.

Con relación al concepto de sucesión convergente en un espacio topológico, a lo largo de esta tesis haremos uso de la siguiente noción:

Definición 2.3.2. Sean (X, τ_X) un espacio y $S \subseteq X$. Diremos que S es una *sucesión convergente no trivial* en X si $S \in [X]^\omega$ y existe $x \in S$ de manera que $S \setminus U \in [X]^{<\omega}$ para cada $U \in \tau_X$ con $x \in U$.
En dado caso, diremos que x es un *punto límite* de S o bien que S *converge* a x, denotando esto por $\lim S = x$.

Definición 2.3.3. Si S es una sucesión convergente no trivial en un espacio X, diremos que $\{x_n : n \leq \omega\}$ es una *enumeración adecuada* de S si ocurre que $S = \{x_n : n \leq \omega\}$, $\lim S = x_\omega$ y $x_i \neq x_j$ siempre que $i < j \leq \omega$.

Lema 2.3.4. *Sea X un espacio y consideremos una sucesión convergente $S \subseteq X$. Entonces S converge a un único $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que $\lim S = x_1$ y $\lim S = x_2$. Como X es de Hausdorff, tomemos dos abiertos ajenos U_1 y U_2 de manera que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$. Luego, $S \setminus U_1, S \setminus U_2 \in [X]^{<\omega}$. Sin embargo, como $S \cap U_1 \subseteq S \setminus U_2$, se sigue que:

$$|S| = |(S \cap U_1) \cup (S \setminus U_1)| = |S \cap U_1| + |S \setminus U_1| \leq |S \setminus U_2| + |S \setminus U_1| < \omega,$$

lo cual es una contradicción. □

Algunos Conceptos de Topología General

Recordemos que los espacios topológicos que trataremos serán espacios de Hausdorff.

Proposición 2.3.5. *Si X es un espacio sin puntos aislados entonces X es infinito.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $n \in \omega$ tal que $X = \{x_i\}_{i=1}^n$. Como, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, el conjunto $\{x_i\}$ es cerrado, entonces el conjunto $\{x_2, \dots, x_n\}$ es cerrado. Luego, $\{x_1\}$ es un subconjunto abierto de X, lo cual implica que x_1 es un punto aislado de X.

□

La noción de conjuntos cero y co-cero, que introduciremos a continuación, será de particular importancia cuando tratemos espacios de Tychonoff.

Definición 2.3.6. Sea X un espacio. Decimos que $A \subseteq X$ es un *conjunto cero de* X si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(\{0\})$.
Llamaremos al complemento de un conjunto cero de X un *conjunto co-cero de* X. Otra manera de decir esto es que $B \subseteq X$ es un conjunto co-cero de X si existe una función continua $g : X \longrightarrow [0,1]$ de manera que $B = g^{-1}((0,1])$.

Proposición 2.3.7. *Sean X un espacio, $n \in \omega$ y $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos co-cero (cero, respectivamente) de X. Entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un conjunto co-cero (cero, respectivamente) de X.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Supongamos primero que A_1 y A_2 son conjuntos co-cero de X. Entonces existen dos funciones continuas $f_1 : X \longrightarrow [0,1]$ y $f_2 : X \longrightarrow [0,1]$ de manera que $A_1 = f_1^{-1}\big((0,1]\big)$ y $A_2 = f_2^{-1}\big((0,1]\big)$. Consideremos la función producto $f_1 \cdot f_2 : X \longrightarrow [0,1]$ dada por $(f_1 \cdot f_2)(a) = f_1(a)f_2(a)$. Así, $f_1 \cdot f_2$ está bien definida y es continua. Mostraremos que $A_1 \cap A_2 = (f_1 \cdot f_2)^{-1}\big((0,1]\big)$. Sea $x \in X$. Consideramos dos casos:

Caso 1: $x \in X \setminus (A_1 \cap A_2)$.

Observemos que $f_1(x) = 0$ o $f_2(x) = 0$, así que $(f_1 \cdot f_2)(x) = 0$.

Caso 2: $x \in A_1 \cap A_2$.

En este caso se tiene que $f_1(x) > 0$ y $f_2(x) > 0$. Luego, $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x)f_2(x) > 0$; es decir, $(f_1 \cdot f_2)(x) \in (0,1]$.

De los dos casos, llegamos a que $A_1 \cap A_2 = (f_1 \cdot f_2)^{-1}\big((0,1]\big)$, confirmando que $A_1 \cap A_2$ es un conjunto co-cero de X.

Supongamos ahora que A_1 y A_2 son conjuntos cero de X. Consideremos dos funciones continuas $g_1 : X \longrightarrow [0,1]$ y $g_2 : X \longrightarrow [0,1]$ tales que $A_1 = g_1^{-1}\big(\{0\}\big)$ y $A_2 = g_2^{-1}\big(\{0\}\big)$. Definimos la función $\max\{g_1, g_2\} : X \longrightarrow [0,1]$ dada por $\max\{g_1, g_2\}(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$. Observemos que está bien definida y es continua ([2, Ejemplo 1.4.3, p. 29]), por lo que resta probar que $A_1 \cap A_2 = \big(\max\{g_1, g_2\}\big)^{-1}\big(\{0\}\big)$. Tomemos $x \in X$ y consideremos dos casos:

Caso 1: $x \in X \setminus (A_1 \cap A_2)$.

Si $x \in X \setminus A_1$, ocurre que $g_1(x) > 0$, asegurando que $\max\{g_1, g_2\}(x) > 0$. Análogamente, si $x \in X \setminus A_2$, sucede que $g_2(x) > 0$, garantizando que $\max\{g_1, g_2\}(x) > 0$. De esta manera, $\max\{g_1, g_2\}(x) \in (0,1]$.

Caso 2: $x \in A_1 \cap A_2$.

Notemos que $g_1(x) = 0 = g_2(x)$, de lo que se sigue que $\max\{g_1, g_2\}(x) = 0$.

De ambos casos, deducimos que $A_1 \cap A_2 = \big(\max\{f_1, f_2\}\big)^{-1}\big(\{0\}\big)$. En otras palabras, $A_1 \cap A_2$ es un conjunto cero de X.

Por último, presupongamos ahora que $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de conjuntos co-cero (cero, respectivamente) de X y que $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$ es también un conjunto co-cero (cero) de X. Por el razonamiento expuesto para $n = 2$, inferimos que la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\big) \cap A_n$ es un conjunto co-cero (cero, respectivamente) de X.

□

La siguiente caracterización de los espacios de Tychonoff usa precisamente los conjuntos co-cero.

Lema 2.3.8. *Un espacio topológico es de Tychonoff si y sólo si tiene una base de conjuntos co-cero.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Tychonoff. Sean $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Entonces $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado de X que no contiene a x, así que existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f \restriction_{(X \setminus U)} = \{1\}$. Sea $V = \{y \in X : f(y) < \frac{1}{2}\}$ y consideremos la función $g : X \longrightarrow [0,1]$ dada por $g(z) = |f(z) - \frac{1}{2} - |f(z) - \frac{1}{2}||$. Por un lado, g está bien definida y es continua ([2, Ejemplo 1.4.3, p. 29]). Además, para cualquier $y \in X$ tal que $f(y) \geq \frac{1}{2}$, ocurre que $g(y) = 0$. Dicho de otro modo, $g[\{y \in X : f(y) \geq \frac{1}{2})\}] = \{0\}$. De esta manera, V es un conjunto co-cero que cumple que $x \in V \subseteq U$. Por lo tanto, X tiene una base de conjuntos co-cero.

Presupongamos ahora que X cuenta con una base, $\mathcal{B}$, de conjuntos co-cero. Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$. Como $X \setminus F \in \tau_X$ y $x \in X \setminus F$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X \setminus F$; por ello, hay una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ para la cual $f^{-1}\big((0,1]\big) = B$. Debido a que $x \in B$, ocurre que $f(x) > 0$. Definimos la función:

$$h : [0,1] \longrightarrow [0,1] \quad \text{dada por} \quad h(y) = \begin{cases} \frac{-y}{f(x)} + 1 & \text{si } y \in [0, f(x)] \\ 0 & \text{si } y \geq f(x). \end{cases}$$

Observemos que si $y = 0$, entonces $h(y) = 1$. También, si $y \geq f(x)$, se tiene que $h(y) = 0$. Por último, si $y < f(x)$, entonces $0 < \frac{-y}{f(x)} + 1 \leq 1$. Por ello, h está bien definida. Por otra parte, las funciones $h \restriction_{[0,f(x)]}$ y $h \restriction_{[f(x),1]}$ son continuas, así que h es continua.

Consideremos la función $g' := h \circ f : X \longrightarrow [0,1]$. Como f y h son continuas entonces g' es continua. Además $g(x) = 0$ y $g \restriction_F = \{1\}$. Por lo tanto, X es un espacio de Tychonoff. $\square$

2.4. Hiperespacios

El propósito de este trabajo es el estudio de la colección de todas las sucesiones convergentes no triviales en un espacio X (en el sentido de la definición 2.3.2). Para estudiar esta colección, sería deseable contar con alguna manera de establecer relaciones entre ella y el espacio original. Por lo mismo, sería conveniente desarrollar herramientas topológicas que nos permitan indagar sobre colecciones de subconjuntos de un espacio. Afortunadamente, este es el tipo de análisis que hace el estudio de los *hiperespacios* topológicos, los cuales, precisamente, están definidos como colecciones de subconjuntos de un espacio que cumplen cierta propiedad. Definimos a continuación algunos de los hiperespacios más comunes.

Definición 2.4.1. Sea (X, τ_X) un espacio. Se definen los siguientes hiperespacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{CL}(X) &:= \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{K}(X) &:= \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \text{ es compacto}\}, \\ \mathcal{S}_c(X) &:= \{S \in \mathcal{K}(X) : S \text{ es una sucesión convergente no trivial en } X\}, \\ \mathcal{F}_n(X) &:= \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \in [X]^{<n+1}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y} \\ \mathcal{F}(X) &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X) = \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \in [X]^{<\omega}\}. \end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{F}(X),\ \mathcal{S}_c(X) \subseteq \mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X)$.

Topología de Vietoris

Para poder considerar una topología sobre $\mathcal{CL}(X)$, y, así, empezar a trabajar sobre $\mathcal{S}_c(X)$, haremos uso de la siguiente definición:

Definición 2.4.2. Sea X un espacio y consideremos una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X. Se define el *vietórico* de $\mathcal{U}$ como:

$$\langle \mathcal{U} \rangle := \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq \bigcup \mathcal{U} \ \wedge \ \forall U \in \mathcal{U}\ (A \cap U \neq \emptyset)\}.$$

Así, de manera natural, usaremos la siguiente notación:

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{K}} := \langle \mathcal{U} \rangle \cap \mathcal{K}(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq \bigcup \mathcal{U} \ \wedge \ \forall U \in \mathcal{U}\ (A \cap U \neq \emptyset)\} \ \text{ y}$$
$$\langle \mathcal{U} \rangle_c := \langle \mathcal{U} \rangle \cap \mathcal{S}_c(X) = \{S \in \mathcal{S}_c(X) : S \subseteq \bigcup \mathcal{U} \ \wedge \ \forall U \in \mathcal{U}\ (S \cap U \neq \emptyset)\}.$$

En el caso en que $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, el vietórico de $\mathcal{U}$ podrá ser expresado como $\langle \mathcal{U} \rangle = \langle \{U_1, \ldots, U_n\} \rangle = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, simplificando la notación.

En particular si $U, V \subseteq X$ podemos considerar a los siguientes vietóricos, que serán de gran importancia:

$$\langle U \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq U\} \ \text{ y}$$
$$\langle X, V \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \cap V \neq \emptyset\}.$$

Observemos que para una familia de subconjuntos $\mathcal{U}$ de un espacio X, si $\emptyset \in \mathcal{U}$ entonces $\langle \mathcal{U} \rangle = \emptyset$. Por ello, a menos que indiquemos lo contrario, de ahora en adelante consideraremos familias de subconjuntos que no contengan al vacío. Estudiemos ahora algunas propiedades básicas de los vietóricos.

Proposición 2.4.3. *Sean X un espacio y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X no vacíos. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $\langle \bigcup_{i=1}^n U_i, U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.
2. $\bigcap_{i=1}^n \langle U_i \rangle = \langle \bigcap_{i=1}^n U_i \rangle$.
3. $\bigcap_{i=1}^n \langle X, U_i \rangle = \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle$.

Demostración. Comencemos mostrando que $\langle \bigcup_{i=1}^n U_i, U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Para ello, sea $A \in \langle \bigcup_{i=1}^n U_i, U_1, \ldots, U_n \rangle$. Entonces $A \subseteq (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cup (\bigcup_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y, como, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la intersección $A \cap U_i$ es no vacía, deducimos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Cuando $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, notamos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i = (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cup (\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y que, también, $\emptyset \neq A \cap U_i \subseteq A \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)$, asegurando que $A \in \langle \bigcup_{i=1}^n U_i, U_1, \ldots, U_n \rangle$.

La segunda afirmación es casi inmediata, observando que, para $A \in \mathcal{CL}(X)$, sucede que $A \in \bigcap_{i=1}^n \langle U_i \rangle$ si y sólo si para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ ocurre que $A \subseteq U_i$, es decir, $A \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$, lo cual se da si y sólo si $A \in \langle \bigcap_{i=1}^n U_i \rangle$.

Para la tercera aseveración, tomando $A \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle$ garantizamos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $A \cap U_i$ es no vacío, asegurando que $A \in \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle$. De igual manera, si $A \in \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle$, la definición de vietórico nos dice que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto A interseca a U_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, A es un elemento del vietórico $\langle X, U_i \rangle$, lo cual tiene como consecuencia que $A \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle$.

□

El siguiente lema nos permitirá dotar a $\mathcal{CL}(X)$ con una topología.

Lema 2.4.4. *Sean X un espacio y $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m$ subconjuntos de X. Entonces si consideramos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, se tiene que:*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V,\ U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Demostración. Primero notemos que por la distributividad de la unión sobre la intersección:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} (U \cap V_j)) = (U \cap V) \cup (U \cap V) = U \cap V. \tag{2.4}$$

Procedamos con la demostración del enunciado mediante el método de doble contención. Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Entonces:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U \quad \text{y} \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j = V. \tag{2.5}$$

Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ ocurre que:

$$A \cap U_i \neq \emptyset \quad \text{y} \quad A \cap V_j \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Usando (2.4) y (2.5), llegamos a que:

$$A \subseteq U \cap V = (\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} (U \cap V_j)).$$

Por otro lado, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y toda $j \in \{1, \ldots, m\}$, gracias a (2.6), sucede que:

$$\emptyset \neq A \cap U_i = (A \cap V) \cap U_i \quad \text{y} \quad \emptyset \neq A \cap V_j = (A \cap U) \cap V_j,$$

así que concluimos que $A \in \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Consideremos ahora $A \in \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$. Entonces por (2.4):

$$A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} (U \cap V_j)) = U \cap V.$$

También, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sucede que $\emptyset \neq A \cap (U_i \cap V) \subseteq A \cap U_i$. Así, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. De manera similar, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $\emptyset \neq A \cap V_j$ y, por ello, $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Por lo tanto, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, concluyendo la demostración. □

Corolario 2.4.5. *Sean X un espacio topológico y $U_1, \dots, U_n$ subconjuntos de X. Entonces se cumple la igualdad $\langle U_1, \dots, U_n\rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n U_i\rangle \cap \langle X, U_1\rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n\rangle$.*

Demostración. Basta notar que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ pasa que $X \cup U_i = X$. Luego, por el Lema 2.4.4, en conjunto con el primer y el tercer inciso de la Proposición 2.4.3:

$$\begin{aligned} \langle \bigcup_{i=1}^n U_i\rangle \cap \langle X, U_1\rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n\rangle &= \langle \bigcup_{i=1}^n U_i\rangle \cap \langle X, U_1, \dots, U_n\rangle = \\ = \langle (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap X, (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap U_1, \dots, (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap U_n\rangle &= \langle \bigcup_{i=1}^n U_i, U_1, \dots, U_n\rangle = \\ &= \langle U_1, \dots, U_n\rangle. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.6. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. El conjunto $\{\langle \mathcal{U}\rangle : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\}$ es una base para alguna topología de $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Como $\langle X\rangle = \mathcal{CL}(X)$, basta notar que si $\mathcal{W}, \mathcal{V} \in [\tau_X]^{<\omega}$ de manera que $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_n\}$ y $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$, el Lema 2.4.4 nos dice que $\langle \mathcal{W}\rangle \cap \langle \mathcal{V}\rangle$ es un elemento del conjunto $\{\langle \mathcal{U}\rangle : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\}$. □

Definición 2.4.7. Se define la *topología de Vietoris* en $\mathcal{CL}(X)$ como la topología generada por la base:

$$\{\langle \mathcal{U}\rangle : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\}.$$

Para evitar ser redundantes, de ahora en adelante consideraremos a $\mathcal{CL}(X)$ como un espacio topológico con la topología de Vietoris y tomaremos a $\mathcal{S}_c(X)$ como subespacio de $\mathcal{CL}(X)$. En consecuencia, una base para $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{S}_c(X)$, respectivamente, está dada por los conjuntos:

$$\begin{gathered} \{\langle \mathcal{U}\rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\} = \{\langle \mathcal{U}\rangle \cap \mathcal{K}(X) : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\} \text{ y} \\ \{\langle \mathcal{U}\rangle_c : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\} = \{\langle \mathcal{U}\rangle \cap \mathcal{S}_c(X) : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\}. \end{gathered}$$

Una vez establecida la topología sobre $\mathcal{CL}(X)$, hay algunas propiedades básicas que es importante desarrollar para empezar a comprender este espacio.

Lema 2.4.8. *Sean X un espacio y $U, V \subseteq X$ abiertos (cerrados, respectivamente) en X. Entonces $\langle U\rangle$ y $\langle X, V\rangle$ son abiertos (cerrados, respectivamente) en $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Supongamos primero que $U, V \in \tau_X$. Debido a que $X \in \tau_X$, se sigue que $\langle U\rangle$ y $\langle X, V\rangle$ son abiertos básicos de $\mathcal{CL}(X)$.
Ahora, si U y V son cerrados en X, se tiene que $X \setminus U, X \setminus V \in \tau_X$, por lo tanto $\langle X, X \setminus U\rangle$ y $\langle X \setminus V\rangle$ son abiertos básicos de $\mathcal{CL}(X)$. Como

$$\mathcal{CL}(X) \setminus \langle U\rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \nsubseteq U\} = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\} = \langle X, X \setminus U\rangle,$$

se tiene que $\mathcal{CL}(X) \setminus \langle U \rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$, y así, $\langle U \rangle$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.
Similarmente:

$$\mathcal{CL}(X) \setminus \langle X, V \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \cap V = \emptyset\} = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq X \setminus V\} = \langle X \setminus V \rangle,$$

por lo que $\langle X, V \rangle$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$.

□

Corolario 2.4.9. *Si X es un espacio y $U, V \subseteq X$ son abiertos (cerrados), entonces $\langle U \rangle_c$ y $\langle X, V \rangle_c$ son abiertos (cerrados) en $\mathcal{S}_c(X)$.* □

La importancia de los vietóricos del tipo $\langle U \rangle$ y $\langle X, V \rangle$ quedará evidenciada por el siguiente resultado, que establecerá una subbase para $\mathcal{CL}(X)$.

Lema 2.4.10. *Si (X, τ_X) un espacio topológico, el conjunto $\zeta = \{\langle U \rangle : U \in \tau_X\} \cup \{\langle X, V \rangle : V \in \tau_X\}$ es una subbase para $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}\}$, fijemos $n \in \omega$ y tomemos $\mathcal{S} \subseteq \zeta$ con $|\mathcal{S}| = n$. Consideramos tres casos:

Caso 1: $\mathcal{S} = \{\langle U_1 \rangle, \ldots, \langle U_n \rangle\}$ para alguna colección $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \tau_X$.
Usando el segundo inciso de la Proposición 2.4.3, notamos que

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \langle U_i \rangle = \langle \bigcap_{i=1}^{n} U_i \rangle \in \mathcal{B}.$$

Caso 2: $\mathcal{S} = \{\langle X, V_1 \rangle, \ldots, \langle X, V_n \rangle\}$ para alguna colección $\{V_1, \ldots, V_n\} \subseteq \tau_X$.
Por el tercer inciso de la Proposición 2.4.3, observamos que

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \langle X, V_i \rangle = \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \in \mathcal{B}.$$

Caso 3: $\mathcal{S} = \{\langle U_1 \rangle, \ldots, \langle U_k \rangle, \langle X, V_1 \rangle, \ldots, \langle X, V_m \rangle\}$ para algunos $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_m \in \tau_X$.
Gracias a la asociatividad de la intersección, la Proposición 2.4.3 y el Lema 2.4.4, llegamos a que:

$$\bigcap \mathcal{S} = \big(\bigcap_{i=1}^{k} \langle U_i \rangle\big) \cap \big(\bigcap_{j=1}^{m} \langle X, V_j \rangle\big) = \langle \bigcap_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap \langle X, V_1, \ldots, V_m \rangle \in \mathcal{B}.$$

En cualquier caso, $\bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{B}$.

Por otra parte, por el Corolario 2.4.5, cualquier elemento de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{CL}(X)$ se puede expresar como una intersección finita de elementos de ζ, por lo que podemos concluir que ζ es una subbase para $\mathcal{CL}(X)$. □

El siguiente lema nos permitirá establecer relaciones entre dos familias de subconjuntos abiertos en un espacio X y sus respectivos vietóricos en $\mathcal{CL}(X)$.

Lema 2.4.11. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ familias finitas de subconjuntos no vacíos de un conjunto no vacío X. Entonces $\langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$ si y sólo si:*

a) $\bigcup\mathcal{U} \subseteq \bigcup\mathcal{V}$ *y*

b) para cualquier $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$.

Demostración. Observemos que como $\emptyset \notin \mathcal{U}$, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $z_U \in U$, de manera que el conjunto $\{z_U : U \in \mathcal{U}\}$ es un elemento de $\langle\mathcal{U}\rangle$, garantizando que $\langle\mathcal{U}\rangle \neq \emptyset$.

Supongamos que $\langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$. Sea $x \in \bigcup\mathcal{U}$ y tomemos $A \in \langle\mathcal{U}\rangle$. Así, $A \cup \{x\} \in \langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$, por lo que $x \in \bigcup\mathcal{V}$, confirmando que $\bigcup\mathcal{U} \subseteq \bigcup\mathcal{V}$.

Ahora bien, veamos que dado $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Presupongamos que ocurre lo contrario. Entonces existe un $V_0 \in \mathcal{V}$ para el cual, para cada $U \in \mathcal{U}$, el conjunto $U \setminus V_0$ es distinto del vacío. Consideremos para cada $U \in \mathcal{U}$ un punto $x_U \in U \setminus V_0$. Esto implicaría que $\{x_U : U \in \mathcal{U}\} \in \langle\mathcal{U}\rangle \setminus \langle\mathcal{V}\rangle$, lo cual contradice la hipótesis de que $\langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$. Con esto, concluimos que dado cualquier $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$.

Supongamos ahora que $\bigcup\mathcal{U} \subseteq \bigcup\mathcal{V}$ y que para cualquier $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Veremos que $\langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$. Para ello, tomemos $A \in \langle\mathcal{U}\rangle$. Entonces para todo $U \in \mathcal{U}$ ocurre que $A \cap U \neq \emptyset$. Así, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\emptyset \neq A \cap U \subseteq A \cap V$; es decir, para todo $V \in \mathcal{V}$ sucede que $A \cap V \neq \emptyset$. Luego, como $A \subseteq \bigcup\mathcal{U} \subseteq \bigcup\mathcal{V}$, concluimos que $A \in \langle\mathcal{V}\rangle$. En consecuencia, $\langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle$.

□

Un resultado importante en el estudio de los hiperespacios es que un espacio X es homeomorfo a su hiperespacio $F_1(X)$. Para mostrar esto, presentaremos a continuación una función continua entre el espacio producto X^n y el hiperespacio $F_n(X)$.

Lema 2.4.12. *Sea X un espacio. Entonces para cada $n \in \omega$, la función*

$$\pi_n : X^n \longrightarrow \mathcal{F}_n(X) \quad \text{dada por} \quad \pi_n((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

es continua.

Demostración. Por el Lema 2.4.10, basta con considerar subconjuntos abiertos del tipo $\langle U\rangle$ y $\langle X, V\rangle$. De acuerdo a esto, tomemos $U, V \in \tau_X$ y fijemos $n \in \omega$. Primero veremos que:

$$\pi_n^{-1}(\langle U\rangle) = U^n. \tag{2.7}$$

Comencemos notando que si $(x_i)_{i=1}^n \in U^n$, tenemos que $\pi_n((x_i)_{i=1}^n) = \{x_i\}_{i=1}^n \in \langle U\rangle$; es decir, $(x_i)_{i=1}^n \in \pi_n^{-1}(\langle U\rangle)$. Así $U^n \subseteq \pi_n^{-1}(\langle U\rangle)$. Consideremos ahora $(x_i)_{i=1}^n \in \pi_n^{-1}(\langle U\rangle)$. Entonces $\{x_i\}_{i=1}^n = \pi_n((x_i)_{i=1}^n) \in \langle U\rangle$, por lo que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $x_i \in U$. Consecuentemente, $(x_i)_{i=1}^n \in U^n$, lo cual prueba (2.7).

Por otra parte, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $V_i = V$ y $X_j = X$. Mostraremos que:

$$\begin{aligned}\pi_n^{-1}(\langle X, V\rangle) &= (V \times X \times \cdots \times X) \cup (X \times V \times X \times \cdots \times X) \cup \cdots \cup (X \times \cdots \times X \times V) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}(V_i \times \prod_{j\neq i} X_j).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sea $(y_i)_{i=1}^n \in \pi_n^{-1}(\langle X, V \rangle)$. Por ello, $\{y_i\}_{i=1}^n = \pi_n((y_i)_{i=1}^n) \in \langle X, V \rangle$, lo cual implica que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y_k \in V$. De esta manera:

$$(y_i)_{i=1}^n \in V_k \times \prod_{j \neq k} X_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n (V_i \times \prod_{j \neq i} X_j).$$

Ahora fijemos $k \in \{1, \ldots, n\}$ y consideremos $(z_i)_{i=1}^n \in V_k \times \prod_{j \neq k} X_j$. Entonces $z_k \in V$, por lo que $\pi_n((z_i)_{i=1}^n) \cap V = \{z_i\}_{i=1}^n \cap V \neq \emptyset$. De esto, concluimos que $\pi_n((z_i)_{i=1}^n) \in \langle X, V \rangle$ y, por ende, $(z_i)_{i=1}^n \in \pi_n^{-1}(\langle X, V \rangle)$. Esto prueba (2.8).

Dado que se cumplen (2.7) y (2.8), deducimos que $\pi_n^{-1}(\langle U \rangle)$ y $\pi_n^{-1}(\langle X, V \rangle)$ son abiertos en X^n. Por consiguiente, la función π_n es continua.

□

Corolario 2.4.13. *Cualquier espacio X es homeomorfo a su hiperespacio $F_1(X)$.*

Demostración. Sea X un espacio y consideremos la función $\pi_1 : X \longrightarrow F_1(X)$. Por el Lema 2.4.12, esta función es continua. Veamos que también es biyectiva y abierta.

La biyectividad es casi inmediata. Por un lado, si tomamos $x_1, x_2 \in X$ distintos, se tiene que $\pi_1(x_1) = \{x_1\} \neq \{x_2\} = \pi_1(x_2)$, evidenciando que π_1 es inyectiva. Por otra parte, si $\{x\} \in F_1(X)$, entonces $\pi_1(x) = \{x\}$, asegurando que π_1 es sobreyectiva.

Para mostrar que π_1 es abierta, consideremos una base $\mathcal{B}$ para X. Sea $B \in \mathcal{B}$. Si $x \in B$, entonces $\pi_1(x) = \{x\} \subseteq B$. Se sigue que $\pi_1[B] \subseteq \langle B \rangle \cap F_1(X)$. Ahora bien, si $\{y\} \in \langle B \rangle \cap F_1(X)$, esto quiere decir que $\{y\} \subseteq B$. Así, $y \in B$ y $\pi_1(y) = \{y\}$. Por lo tanto, $\pi_1[B] = \langle B \rangle \cap F_1(X)$. Por el Lema 2.4.10 y el hecho que $B \in \tau_X$, el conjunto $\langle B \rangle \cap F_1(X)$ es abierto en $F_1(X)$. Deducimos que π_1 es abierta y, por ende, un homeomorfismo.

□

Algunas propiedades de $\mathcal{CL}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{S}_c(X)$.

Uno de los beneficios del estudio de los hiperespacios es que, habitualmente, podemos establecer relaciones importantes entre estos y el espacio original. Por ejemplo, algunos de los principales axiomas de separación se preservan entre un espacio y su hiperespacio de subespacios compactos no vacíos.

Lema 2.4.14. *Sean X un espacio, $A \in \mathcal{K}(X)$ y $x \in X \setminus A$. Entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $x \in V$.*

Demostración. Notemos que como X es de Hausdorff, para cada $y \in A$ existen abiertos ajenos U_y y V_y de X tales que $y \in U_y$ y $x \in V_y$. Debido a que A es compacto y $\{U_y : y \in A\}$ es una cubierta abierta de A, existe una subcubierta finita $\{U_{y_i} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ de A. Definimos $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$, los cuales son abiertos en X y cumplen que $A \subseteq U$ y $x \in V$. Para mostrar que son ajenos, podemos observar que si $z \in U \cap V$, entonces para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tendríamos que $z \in U_{y_i} \cap V_{y_i}$, lo cual es una contradicción. □

Corolario 2.4.15. *Sean X un espacio, $A \in \mathcal{K}(X)$ y $Y \in [X \setminus A]^{<\omega}$. Entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $Y \subseteq V$.*

Demostración. Por el Lema 2.4.14, sabemos que, para cada $y \in Y$, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos, $U_{1,y}$ y $U_{2,y}$, de manera que $A \subseteq U_{1,y}$ y $y \in U_{2,y}$. Definimos $U = \bigcap_{y \in Y} U_{1,y}$ y $V = \bigcup_{y \in Y} U_{2,y}$, los cuales son subconjuntos abiertos de X ya que Y es finito. También, observemos que $A \subseteq U$ y $Y \subseteq V$. Veamos que además $U \cap Y = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que $x \in U \cap Y$. Entonces, existe $y \in Y$ de manera que $x \in U_{2,y}$. Sin embargo, debido a que $x \in U$, ocurre también que $x \in U_{1,y}$, lo cual contradice la elección de $U_{1,y}$ y $U_{2,y}$. Por lo tanto, $U \cap V = \emptyset$. □

Teorema 2.4.16. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces X es T_2 si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es T_2. En particular, si X es T_2, entonces también lo es $\mathcal{S}_c(X)$.*

Demostración. Supongamos primero que X es de Hausdorff y consideremos $A, B \in \mathcal{K}(X)$, con $A \neq B$. Así, podemos presuponer que existe $x \in A \setminus B$. Por el Lema 2.4.14, existen subconjuntos abiertos y ajenos U_1 y U_2 tales que $x \in U_1$ y $B \subseteq U_2$. Luego, $A \in \langle X, U_1 \rangle_{\mathcal{K}}$ y $B \in \langle U_2 \rangle_{\mathcal{K}}$. Veamos que estos vietóricos son ajenos. Para ello, supongamos lo contrario; es decir, que existe $D \in \langle X, U_1 \rangle_{\mathcal{K}} \cap \langle U_2 \rangle_{\mathcal{K}}$. Entonces $D \cap U_1 \neq \emptyset$ y $D \subseteq U_2$, de manera que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $\mathcal{K}(X)$ es de Hausdorff. Luego, $F_1(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ es de Hausdorff. Por último, el Corolario 2.4.13 asegura que X es homeomorfo a $F_1(X)$ y, por ende, es un espacio Hausdorff.

Por último, como $\mathcal{S}_c(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$, si X es un espacio de Hausdorff se tiene que $\mathcal{S}_c(X)$ también lo es. □

Para mostrar un resultado análogo en espacios de Tychonoff, emplearemos la noción de conjuntos cero y co-cero, que presentamos en la Definición 2.3.6.

Usaremos también que cualquier función continua entre dos espacios tiene asociada una función continua entre sus hiperespacios.

Proposición 2.4.17. *Sean X y Y dos espacios y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces la función $f^* : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ dada por $f^*(A) = f[A]$ está bien definida y es continua.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{K}(X)$. Como f es continua, $f[A] \in \mathcal{K}(Y)$; es decir, $f^*(A) \in \mathcal{K}(Y)$, evidenciando que f^* está bien definida.

Para la continuidad, gracias al Lema 2.4.10, basta considerar subconjuntos abiertos del tipo $\langle U \rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle Y, V \rangle_{\mathcal{K}}$. Sean $U, V \in \tau_Y$. Argumentaremos que:

$$(f^*)^{-1}\big(\langle U \rangle_{\mathcal{K}}\big) = \langle f^{-1}(U) \rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{y que} \quad (f^*)^{-1}\big(\langle Y, V \rangle_{\mathcal{K}}\big) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Observemos que $A \in (f^*)^{-1}\big(\langle U \rangle_{\mathcal{K}}\big)$ si y sólo si $f[A] = f^*(A) \in \langle U \rangle_{\mathcal{K}}$; es decir, $f[A] \subseteq U$. Esto ocurre si y sólo si $A \subseteq f^{-1}(U)$ o, en otras palabras, $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle_{\mathcal{K}}$. Por lo tanto, $(f^*)^{-1}\big(\langle U \rangle_{\mathcal{K}}\big) = \langle f^{-1}(U) \rangle_{\mathcal{K}}$.

Por otra parte, $B \in (f^*)^{-1}\big(\langle Y, V \rangle_{\mathcal{K}}\big)$ si y sólo si $f[B] = f^*(B) \in \langle Y, V \rangle_{\mathcal{K}}$, lo que significa que $f[B]$ interseca a V. Esto pasa si y sólo si $B \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, que es equivalente a que $B \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{\mathcal{K}}$. Concluimos que $(f^*)^{-1}\big(\langle Y, V \rangle_{\mathcal{K}}\big) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{\mathcal{K}}$.

Como f es continua, los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos de X. Luego, por el Lema 2.4.8, $\langle f^{-1}(U) \rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X, f^{-1}(V) \rangle_{\mathcal{K}}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{K}(X)$. En consecuencia, f^* es continua □

Para nuestro trabajo, será de especial importancia la relación que hay entre un conjunto co-cero A de X y sus respectivos vietóricos $\langle A\rangle$ y $\langle X, A\rangle$ en $\mathcal{K}(X)$.

Lema 2.4.18. *Sean X un espacio y A un conjunto cero (co-cero). Entonces $\langle A\rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X, A\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos cero (co-cero, respectivamente) de $\mathcal{K}(X)$.*

Demostración. Comenzaremos con los conjuntos co-cero de X. Consideremos $A \subseteq X$ y una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $A = f^{-1}\big((0,1]\big)$. Tomemos $f^* : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}([0,1])$ dada por $f^*(B) = f[B]$. Por la Proposición 2.4.17, f^* es continua. Sean $g_0 : \mathcal{K}([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ y $g_1 : \mathcal{K}([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ definidas como $g_0(C) = \text{mín}\, C$ y $g_1(C) = \text{máx}\, C$. Recordemos que estas funciones también son continuas ([2, Ejemplo 1.4.3, p. 29]). Hacemos dos afirmaciones.

Afirmación (1). $\langle A\rangle_{\mathcal{K}} = (g_0 \circ f^*)^{-1}\big((0,1]\big)$.

Tomemos $B \in \langle A\rangle_{\mathcal{K}}$. Entonces como $B \subseteq A$ y $f[A] \subseteq (0,1]$, sabemos que $f^*(B) = f[B] \subseteq (0,1]$. Por ello, al ser $f^*(B)$ compacto, obtenemos que $\text{mín}\, f[B] > 0$; es decir, $(g_0 \circ f^*)(B) \in (0,1]$.

Ahora, si $B \in (g_0 \circ f^*)^{-1}\big((0,1]\big)$, esto quiere decir que $(g_0 \circ f^*)(B) \in (0,1]$. Como $B \in \mathcal{K}(X)$ y $\text{mín}\, f^*(B) > 0$, ocurreq que $\text{mín}\, f[B] > 0$; consecuentemente, $B \subseteq f^{-1}\big((0,1]\big) = A$. Se sigue que $B \in \langle A\rangle_{\mathcal{K}}$.

Afirmación (2). $\langle X, A\rangle_{\mathcal{K}} = (g_1 \circ f^*)^{-1}\big((0,1]\big)$.

Sea $B \in \langle X, A\rangle_{\mathcal{K}}$. Debido a que $f[A] \subseteq (0,1]$ y $B \cap A$ es compacto y no vacío, $f^*(B) = f[B]$ interseca al intervalo $(0,1]$ en $f[B \cap A]$. Luego, $\text{máx}\, f[B] \geq \text{máx}\, f[B \cap A] > 0$, asegurando que $(g_1 \circ f^*)(B) \in (0,1]$.

Por otro lado, considerando $B \in (g_1 \circ f^*)^{-1}\big((0,1]\big)$, se tendría que $B \in \mathcal{K}(X)$ y que $\text{máx}\, f^*(B) = \text{máx}\, f[B] \in (0,1]$; es decir, $B \cap A = B \cap f^{-1}\big((0,1]\big) \neq \emptyset$, comprobando que $B \in \langle X, A\rangle_{\mathcal{K}}$.

De las afirmaciones (1) y (2), confirmamos que tanto $\langle A\rangle_{\mathcal{K}}$ como $\langle X, A\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos co-cero en $\mathcal{K}(X)$.

Ahora bien, observemos que para cualquier conjunto $A \subseteq X$, se cumplen las igualdades:

$$\mathcal{K}(X) \setminus \langle X \setminus A\rangle_{\mathcal{K}} = \langle X, A\rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}(X) \setminus \langle X, X \setminus A\rangle_{\mathcal{K}} = \langle A\rangle_{\mathcal{K}}.$$

Por otro lado, sabemos que si A es un conjunto co-cero de X, entonces $X \setminus A$ es un conjunto cero de X. Luego, como $\langle A\rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X, A\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos co-cero de $\mathcal{K}(X)$, se sigue que $\langle X, X \setminus A\rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X \setminus A\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos cero de $\mathcal{K}(X)$. Si denotamos $B = X \setminus A$, esto se traduce en que el hecho que B sea un conjunto cero de X implica que $\langle B\rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X, B\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos cero de $\mathcal{K}(X)$. □

Teorema 2.4.19. *Sea X un espacio. Entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$, es decir de Tychonoff si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. En particular, si X es de Tychonoff, entonces $\mathcal{S}_c(X)$ es de Tychonoff.*

Demostración. Si $\mathcal{K}(X)$ es un espacio de Tychonoff, entonces también lo es $F_1(X)$. Por el Corolario 2.4.13, sabemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$. Se sigue que X es un espacio de Tychonoff.

Supongamos ahora que X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Por el Lema 2.3.8, X cuenta con una base $\mathcal{B}$ de conjuntos co-cero de X. El Lema 2.4.18 nos dice que si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces $\langle U\rangle_{\mathcal{K}}$ y

$\langle X, V\rangle_{\mathcal{K}}$ son conjuntos co-cero de $\mathcal{K}(X)$. Además, gracias al Lema 2.4.10, sabemos que los subconjuntos abiertos básicos de $\mathcal{K}(X)$ son intersecciones finitas de vietóricos del tipo $\langle U\rangle_{\mathcal{K}}$ y $\langle X, V\rangle_{\mathcal{K}}$, con $U, V \in \tau_X$. Así, invocando la Proposición 2.3.7, deducimos que los subconjuntos abiertos básicos de $\mathcal{K}(X)$ son conjuntos co-cero. Por lo tanto, usando nuevamente el Lema 2.3.8, concluimos que $\mathcal{K}(X)$ es un espacio de Tychonoff.

□

Es importante mencionar que, aunque se aleja del enfoque de este trabajo, este resultado también se cumple para espacios T_3. Si el lector quisiera consultar esto, se puede referir a [13, Inciso 4.9.10 del Teorema 4.9, p. 163].

Por otra parte, para espacios T_4 no se tiene esta propiedad ([2, Ejercicio 3.12.27 (b), p. 244]).

Definición 2.4.20. Sean X un espacio y $x \in X$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{S}_c(X, x) := \{S \in \mathcal{S}_c(X) : \lim S = x\}.$$

Así, podemos definir al *conjunto de puntos límite de* X como $L_X = \{y \in X : \mathcal{S}_c(X, y) \neq \emptyset\}$. Diremos que X es un espacio con *abundantes sucesiones* si L_X es denso en X. Observemos que cualquier espacio con abundantes sucesiones es denso sí mismo.

Observación 2.4.21. Bajo el concepto de sucesión convergente no trivial que estamos manejando, si en un espacio X se tiene una sucesión $S \in \mathcal{S}_c(X)$ que converge a un punto $x \in X$, entonces para cualquier subconjunto abierto U de X que contenga a x, el conjunto $S \cap U$ es, a su vez, una sucesión convergente no trivial. También, para cualquier subconjunto finito $F \subseteq X$ ocurre que $S \cup F$ es una sucesión convergente no trivial, y, si $x \notin F$, también lo es $S \setminus F$. Finalmente, si $y \in X$ y $\mathcal{T} \in [\mathcal{S}_c(X, y)]^{<\omega}$, entonces $\bigcup \mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{S}_c(X, y)$.

Teorema 2.4.22. *Un espacio X cuenta con abundantes sucesiones si y sólo si $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Supongamos primero que X cuenta con abundantes sucesiones y consideremos, sin pérdida de generalidad, una familia $\mathcal{U} \in [\tau_X \setminus \{\emptyset\}]^{<\omega}$ de manera que $\langle \mathcal{U}\rangle$ sea un abierto básico de $\mathcal{CL}(X)$. Entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, podemos elegir $x_U \in L_X \cap U$. Por ello, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $S_U \in \mathcal{S}_c(X)$ tal que $\lim S_U = x_U \in U$. Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ cualquiera. De la Observación 2.4.21, se sigue que $S_{U_0} \cap U_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ y que $(S_{U_0} \cap U_0) \cup \{x_U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{S}_c(X) \cap \langle \mathcal{U}\rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$.

Ahora, presupongamos que $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$ y tomemos un subconjunto abierto y no vacío $U \subseteq X$. Como $\langle U\rangle$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathcal{CL}(X)$, se tiene que existe $S \in \mathcal{S}_c(X)$ con $S \in \langle U\rangle$. De esta manera, $S \subseteq U$, lo que implica que $\lim S \in U$. Así, $L_X \cap U \neq \emptyset$. □

Lema 2.4.23. *Sea X un espacio y consideremos $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tales que $x \in U$. Si $x \in L_X$ entonces $\langle U\rangle_c \cap \mathcal{S}_c(X, x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $x \in L_X$, existe $Q \in \mathcal{S}_c(X)$ tal que $\lim Q = x$, es decir, $Q \in \mathcal{S}_c(X, x)$. Sea $S = Q \cap U$. Así, $S \subseteq U$ y, por la Observación 2.4.21, ocurre que $S \in \mathcal{S}_c(X, x)$. Por lo tanto, $S \in \langle U\rangle_c \cap \mathcal{S}_c(X, x)$. □

Proposición 2.4.24. *Sea X un conjunto numerable. Entonces $|\mathcal{S}_c(X)| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Observemos primero que $\mathcal{S}_c(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$, así que, como $|X| = |\mathbb{N}|$, se sigue que $|\mathcal{S}_c(X)| \leq |\mathcal{P}(X)| \leq \mathfrak{c}$.

Ahora bien, para mostrar que $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{S}_c(X)|$, consideremos $S \in \mathcal{S}_c(X)$ y una enumeración adecuada $\{x_n : n \leq \omega\}$ para S (Definición 2.3.3). Definimos la función $\varphi : [\mathbb{N}]^\omega \longrightarrow \mathcal{S}_c(X)$ dada por $\varphi(A) = \{x_n : n \in A \cup \{\omega\}\}$. Notemos que si $\varphi(A)$ fuera finito para algún $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, ocurriría que $A \subseteq \big\{1, \ldots, \max\{n : x_n \in \varphi(A) \setminus \{x_\omega\}\}\big\}$, el cual es finito. Como esto es una contradicción, inferimos que para cualquier $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ sucede que $|\varphi(A)| = \omega$. Por otra parte, debido a que $\{x_n : n \leq \omega\}$ es una enumeración adecuada para S, se tiene que $\lim \varphi(A) = x_\omega$ para cualquier $A \in [\mathbb{N}]^\omega$. De esta manera, φ está bien definida.

Veamos que φ además es inyectiva. Sean $A, B \in [\mathbb{N}]^\omega$ distintos. Entonces podemos suponer que existe $m \in A \setminus B$. Luego, como $\{x_n : n \leq \omega\}$ es una enumeración adecuada para S, deducimos que $x_m \in \varphi(A)$ pero $x_m \notin \varphi(B)$. Por lo tanto, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, comprobando que φ es inyectiva. Por ello, $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{S}_c(X)|$. Concluimos que $|\mathcal{S}_c(X)| = \mathfrak{c}$.

□

2.5. Lemas Auxiliares

En esta sección presentaremos dos funciones continuas entre hiperespacios. Más adelante, regresaremos a ellas para facilitar algunas demostraciones.

Lema 2.5.1. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(X))$, entonces $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{K}(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(X))$ y $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de A en X y tomemos $B \in \mathcal{B}$. Entonces B es un subespacio compacto, por lo que, sin pérdida de generalidad, existe una subcolección finita $\{U_{B,1}, \ldots, U_{B,n(B)}\} \subseteq \mathcal{U}$ que cubre a B y cuyos elementos intersecan a B. Así, para cada $B \in \mathcal{B}$, el vietórico $\mathfrak{U}_B = \langle U_{B,1}, \ldots, U_{B,n(B)} \rangle_{\mathcal{K}}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$ que contiene a B. Por lo tanto, $\{\mathfrak{U}_B : B \in \mathcal{B}\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{K}(X)$.

Ahora, como $\mathcal{B}$ es compacto, existe una subcolección finita $\{B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{B}$ de manera que $\{\mathfrak{U}_{B_i} : i \in \{1, \ldots, m\}\}$ es una cubierta de $\mathcal{B}$. Mostraremos que

$$\mathcal{V} = \Big\{ U_{B_i,j} \ : \ \big(i \in \{1, \ldots, m\}\big) \ \wedge \ \big(j \in \{1, \ldots, n(B_i)\}\big) \Big\}$$

es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a A. Sea $b \in A$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B$. Debido a que $\{\mathfrak{U}_{B_i} : i \in \{1, \ldots, m\}\}$ es una cubierta de $\mathcal{B}$, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ de manera que $B \in \mathfrak{U}_{B_i}$. Así, $b \in \bigcup_{j=1}^{n(B_i)} U_{B_i,j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \big(\bigcup_{j=1}^{n(B_i)} U_{B_i,j} \big)$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Concluimos que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{K}(X)$. □

Lema 2.5.2. *Si X es un espacio, la función unión*

$$\sigma : \mathcal{K}(\mathcal{K}(X)) \longrightarrow \mathcal{K}(X) \quad \textit{dada por} \quad \sigma(\mathcal{B}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

es continua.

Demostración. Por el Lema 2.5.1, σ está bien definida. Para la continuidad, gracias al Corolario 2.4.10, basta con mostrar que si $U, V \in \tau_X$, entonces $\sigma^{-1}(\langle U \rangle)$ y $\sigma^{-1}(\langle X, V \rangle)$ son abiertos en $\mathcal{K}(\mathcal{K}(X))$. Tomemos $U \in \tau_X$. Recordemos que bajo la Definición 2.4.2, se tiene la igualdad $\langle U \rangle = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq U\}$, así que podemos denotar $\langle\langle U \rangle\rangle = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(X)) : \mathcal{A} \subseteq \langle U \rangle\}$. Empezaremos probando que:

$$\sigma^{-1}(\langle U \rangle) = \langle\langle U \rangle\rangle. \tag{2.9}$$

Sea $\mathcal{C} \in \sigma^{-1}(\langle U \rangle)$. Entonces $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \sigma(\mathcal{C}) \in \langle U \rangle$. De este modo, si $C' \in \mathcal{C}$ ocurre que $C' \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq U$, es decir, $C' \in \langle U \rangle$. Como C' fue arbitrario, deducimos que $\mathcal{C} \subseteq \langle U \rangle$ y, por lo tanto, $\mathcal{C} \in \langle\langle U \rangle\rangle$. Por otro lado, si tomamos $\mathcal{D} \in \langle\langle U \rangle\rangle$, se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \langle U \rangle$ y, así, $\sigma(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{D} \in \langle U \rangle$. Dicho de otro modo, $\mathcal{D} \in \sigma^{-1}(\langle U \rangle)$.

Ahora, sea $V \in \tau_X$. Denotaremos $\langle \mathcal{K}(X), \langle X, V \rangle \rangle = \{\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(X)) : \mathcal{B} \cap \langle X, V \rangle \neq \emptyset\}$. Argumentaremos que:

$$\sigma^{-1}(\langle X, V \rangle) = \langle \mathcal{K}(X), \langle X, V \rangle \rangle. \tag{2.10}$$

Supongamos que $\mathcal{E} \in \sigma^{-1}(\langle X, V \rangle)$. Así, $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E \in \langle X, V \rangle$, o, en otras palabras, $(\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E) \cap V \neq \emptyset$. Por ello, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \cap V \neq \emptyset$, lo cual implica que $E \in \langle X, V \rangle$ y, por consiguiente, $\mathcal{E} \cap \langle X, V \rangle \neq \emptyset$. Concluimos que $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{K}(X), \langle X, V \rangle \rangle$. Por otra parte, considerando $\mathcal{F} \in \langle \mathcal{K}(X), \langle X, V \rangle \rangle$, se tiene que $\mathcal{F} \cap \langle X, V \rangle \neq \emptyset$, es decir, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $V \cap F$ es no vacío. Luego, $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F} \in \langle X, V \rangle$, garantizando que $\mathcal{F} \in \sigma^{-1}(\langle X, V \rangle)$.

La continuidad de σ se sigue de (2.9) y (2.10).

□

Lema 2.5.3. *Sea X un espacio. La función*

$$\varphi : \bigoplus_{m \in \omega} \mathcal{K}(X)^m \longrightarrow \mathcal{K}(X) \quad \textit{definida por} \quad \varphi(\mathbf{t}) = \bigcup Im(\mathbf{t})$$

es continua.

Demostración. Sea σ la función unión definida en el Lema 2.5.2 y, para cada $m \in \omega$, tomemos la función π_m definida en el Lema 2.4.12.

Observemos que si $\mathbf{t} \in \bigoplus_{m \in \omega} \mathcal{K}(X)^m$, entonces $\mathbf{t} \in \mathcal{K}(X)^m$ para alguna $m \in \omega$. Así, $Im(\mathbf{t}) = \{\mathbf{t}(1), \ldots, \mathbf{t}(m)\} = \pi_m(\mathbf{t})$. Notemos que $\varphi(\mathbf{t}) = (\sigma \circ \pi_m)(\mathbf{t})$; en otras palabras, $\varphi \restriction_{\mathcal{K}(X)^m} = \sigma \circ \pi_m$. Por definición, $\mathcal{K}(X)^m$ es abierto en $\bigoplus_{m \in \omega} \mathcal{K}(X)^m$, y, gracias a que para cualquier conjunto U en $\mathcal{K}(X)$, ocurre que $\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{m \in \omega} (\varphi \restriction_{\mathcal{K}(X)^m})^{-1}(U)$, el resultado se sigue del Lema 2.4.12 y del Lema 2.5.2. □

2.6. El Abanico Secuencial

Para tener un entendimiento mayor de los resultados de este trabajo, usaremos algunos espacios topológicos particulares, habitualmente como ejemplos o contraejemplos. Con ellos, trataremos de resaltar ciertas condiciones o hipótesis esenciales, así como afilar la intuición del lector sobre la naturaleza de las funciones cardinales y los hiperespacios. El espacio que utilizaremos con mayor frecuencia será el abanico secuencial, que expondremos a continuación.

Definición 2.6.1. Sea κ un cardinal infinito. Dotemos a κ con la topología discreta y consideremos al ordinal $\omega + 1$ como un espacio topológico linealmente ordenado.
Definimos el *abanico secuencial de κ espinas*, $S(\kappa)$, como el espacio cociente del producto topológico $(\omega+1)\times\kappa$ que resulta al colapsar el conjunto $\{\omega\}\times\kappa$ en un punto. En símbolos:

$$S(\kappa) = \big((\omega+1)\times\kappa\big)/\big(\{\omega\}\times\kappa\big).$$

Relacionado con esto, si $q : (\omega+1)\times\kappa \longrightarrow S(\kappa)$ es una función cociente, para $\alpha < \kappa$ la *espina α-ésima* de $S(\kappa)$ es el conjunto $q[(\omega+1)\times\{\alpha\}]$.

Observemos que debido a que $\omega+1$ es un espacio linealmente ordenado con elemento máximo, se sigue que también lo es $(\omega+1)\times\{\alpha\}$, para cada $\alpha<\kappa$.

Parte de lo que hará a este espacio tan útil es el hecho de que $S(\kappa)$ tiene un único punto no aislado y que, en ese punto, el espacio no es primero numerable. Presentaremos estas propiedades en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.6.2. *El abanico secuencial de κ espinas tiene un único punto no aislado.*

Demostración. Sean $q : (\omega+1)\times\kappa \longrightarrow S(\kappa)$ una función cociente y $A = \{\omega\}\times\kappa$. Como A es cerrado en $(\omega+1)\times\kappa$, la función $q\restriction_{((\omega+1)\times\kappa)\setminus A} : ((\omega+1)\times\kappa)\setminus A \longrightarrow S(\kappa)\setminus q[A]$ es un homeomorfismo. Por ello, podemos inferir que cada punto en $S(\kappa)\setminus q[A]$ es aislado.

Veamos ahora que $q[A]$ no es un punto aislado. Sea U un subconjunto abierto de $S(\kappa)$ que contiene a $q[A]$. Entonces $q^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $(\omega+1)\times\kappa$ en el que A está contenido. Luego, si fijamos $\alpha<\kappa$, el punto (ω,α) es un elemento de A contenido en $q^{-1}(U)$, así que existe $n\in\omega$ de manera que $(\omega,\alpha)\in(n,\omega]\times\{\alpha\}\subseteq q^{-1}(U)$.

Notemos que $(n+1,\alpha)\in\big((n,\omega]\times\{\alpha\}\big)\setminus\{(\omega,\alpha)\}$. Así, $q[A]\neq q\big((n+1,\alpha)\big)$ y:

$$q\big((n+1,\alpha)\big)\in q\big[(n,\omega]\times\{\alpha\}\big]\subseteq q\big[q^{-1}(U)\big]=U$$

mostrando que, en efecto, $q[A]$ no es un punto aislado de $S(\kappa)$. □

Una consecuencia de esta última proposición es que cualquier sucesión convergente no trivial del abanico secuencial tiene como límite este único punto no aislado del espacio.

Proposición 2.6.3. *Sean κ un número cardinal infinito, $S(\kappa)$ el abanico secuencial de κ espinas y p el único punto no aislado de $S(\kappa)$. Entonces $S(\kappa)$ no es primero numerable en p.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que existe una base local numerable $\{B_i : i\in\omega\}$ para $S(\kappa)$ en p.

Tomemos una función cociente $q : (\omega+1)\times\kappa \longrightarrow S(\kappa)$. Observemos que, para cada $i\in\omega$, ocurre que $q^{-1}(B_i)$ es un subconjunto abierto de $(\omega+1)\times\kappa$ y que, como para cada $\alpha<\kappa$, se tiene que $q(\omega,\alpha)\in B_i$, entonces el punto (ω,α) es un elemento de este subconjunto. Así, para cada $i\in\omega$, existe $n_i\in\omega$ tal que $(n_i,\omega]\times\{i\}\subseteq q^{-1}(B_i)$.

Notemos que, para cada $i\in\omega$, se tiene que $(n_i+1,i)\in(n_i,\omega]\times\{i\}$. Definimos:

$$P=\bigcup_{i\in\omega}\big((n_i+1,\omega]\times\{i\}\big)\cup\bigcup_{\alpha\in\kappa\setminus\omega}\big((\omega+1)\times\{\alpha\}\big),$$

el cual es un subconjunto abierto de $(\omega + 1) \times \kappa$ que cumple que $q^{-1}(q[P]) = P$. Luego, $p \in q[P] \in \tau_{S(\kappa)}$, por lo que existe $j \in \mathbb{N}$ de manera que $B_j \subseteq q[P]$. Consecuentemente, $q^{-1}(B_j) \subseteq P$. Por otra parte, sabemos que $(n_j, \omega] \times \{j\} \subseteq q^{-1}(B_j)$. Sin embargo, esto implica que $(n_j + 1, j) \in q^{-1}(B_j) \subseteq P$, lo que quiere decir que $(n_j + 1, j) \in (n_j + 1, \omega] \times \{j\}$. Esto último es una contradicción, así que $\{B_i : i \in \omega\}$ no puede ser una base local para $S(\kappa)$ en p.

Por lo tanto, $S(\kappa)$ no es primero numerable en p. $\square$

La siguiente proposición resaltará la peculiaridad de las sucesiones convergentes no triviales en el abanico secuencial.

Proposición 2.6.4. *Consideremos un número cardinal infinito κ y $S(\kappa)$ el abanico secuencial de κ espinas. Si $S \in \mathcal{S}_c(S(\kappa))$, entonces S está contenida en una cantidad finita de espinas.*

Demostración. Sean $q : (\omega + 1) \times \kappa \longrightarrow S(\kappa)$ una función cociente, p el único punto no aislado de $S(\kappa)$ y $S \in \mathcal{S}_c(S(\kappa))$. Recordemos que $\lim S = p$.

Supongamos que existe $\{\alpha_i : i \in \omega\} \in [\kappa]^\omega$ de manera que, para cada $i \in \omega$, el conjunto $S \cap q\big(\omega \times \{\alpha_i\}\big)$ es no vacío. Así, para cada $i \in \omega$, podemos tomar $q\big((n_i, \alpha_i)\big) \in S \cap q\big(\omega \times \{\alpha_i\}\big)$. Entonces, denotando $A = \{\alpha_i : i \in \omega\}$, definimos:

$$U = \bigcup_{i \in \omega} \big((n_i + 1, \omega] \times \{\alpha_i\}\big) \cup \bigcup_{\alpha \in \kappa \setminus A} \big((\omega + 1) \times \{\alpha\}\big),$$

que es un subconjunto abierto de $(\omega + 1) \times \kappa$. Luego, $q[U]$ es un subconjunto abierto de $S(\kappa)$ que contiene a p. Sin embargo, $\{q\big((n_i, \alpha_i)\big) : i \in \omega\}$ es un subconjunto de $S \setminus q[U]$ de cardinalidad ω, contradiciendo el hecho de que S sea sucesión convergente no trivial. Por lo tanto, S se queda contenida en una cantidad finita de espinas de $S(\kappa)$. $\square$

Capítulo 3

Propiedades de $\mathcal{S}_c(X)$

3.1. Propiedades Generales

A lo largo de este capítulo, expondremos ciertas características básicas del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales. Concretamente, en esta primera sección, presentaremos resultados análogos a algunos del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$.

Recordemos el concepto de familias celulares $\mathfrak{C}(X)$ establecido en la Definición 2.3.1.

Proposición 3.1.1. *Para un espacio X, el conjunto $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)\}$ es una base para $\mathcal{S}_c(X)$.*

Demostración. Fijemos $\mathcal{V} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $S \in \mathcal{S}_c(X)$ de manera que $S \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$. Presupongamos que $a = \lim S$. Para cada $x \in S$, definimos la familia $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ y el conjunto $V_x = \bigcap \mathcal{V}_x$, el cual es abierto en X. Consideremos al conjunto finito $F = \{a\} \cup (S \setminus V_a)$ y sea $\mathcal{V}^* = \bigcup_{x \in F} \mathcal{V}_x$. Así, si tomamos $W \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^*$, ocurre que:

$$W \cap S \neq \emptyset \quad \text{y} \quad W \cap F = \emptyset.$$

En otras palabras, para cada $W \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^*$, existe $x_W \in W \cap S \cap V_a$. Con esto en mente, podemos considerar el conjunto finito $Y = \{x_W : W \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^*\}$. Observemos que $a \notin Y$. Por otra parte, $(S \setminus V_a) \cap Y = \emptyset$ y, por la Observación 2.4.21, el subespacio $(S \cap V_a) \setminus Y$ es compacto. Notemos que:

$$S = ((S \cap V_a) \setminus Y) \cup (S \setminus V_a) \cup Y. \tag{3.1}$$

De esta manera, hemos logrado separar a S en un subespacio compacto y en un subconjunto finito. Invocando el Corolario 2.4.15, sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos ajenos de X tales que $(S \cap V_a) \setminus Y \subseteq U_1$ y $(S \setminus V_a) \cup Y \subseteq U_2$. Procederemos a construir una familia celular finita $\mathcal{U}$ con la propiedad de que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$, probando así la proposición. Como $(S \setminus V_a) \cup Y$ es finito y X es de Hausdorff, existe una familia de subconjuntos abiertos $\{A_x : x \in (S \setminus V_a) \cup Y\}$ que satisface que $x \in A_x$ y, si $x \neq y$, ocurre que $A_x \cap A_y = \emptyset$, para cada $x, y \in (S \setminus V_a) \cup Y$. Observemos que $(F \cup Y) \setminus \{a\} = (S \setminus V_a) \cup Y$. Para finalizar nuestra construcción, sea $U_a = U_1 \cap V_a$ y, para cada $x \in (S \setminus V_a) \cup Y$, definimos $U_x = A_x \cap V_x \cap U_2$.

Resumiendo, hemos construido una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_x : x \in F \cup Y\}$, que satisface:

1) $(S \cap V_a) \setminus Y \subseteq U_a \subseteq V_a$,

2) si $x \in F \cup Y$ entonces $x \in U_x \subseteq V_x$, y

3) para cualesquiera $x, y \in F \cup Y$ distintos, ocurre que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Debido a la igualdad (3.1), obtenemos que $S \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto, $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$.

Para finalizar, mostraremos que $\langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$. Sea $W \in \mathcal{V}$ arbitrario. Si $W \in \mathcal{V}^*$, entonces $W \in \mathcal{V}_x$ para algún $x \in F$ y, por ello, $U_x \subseteq V_x \subseteq W$. Por otro lado, si $W \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^*$, existe $w \in Y \cap W$ que cumple que $w \in U_w \subseteq V_w$. Luego, $W \in \mathcal{V}_w$, con lo que concluimos que $U_w \subseteq V_w \subseteq W$. Por lo tanto, cada elemento de $\mathcal{V}$ contiene a un elemento de $\mathcal{U}$. Además, observemos que, por el inciso 2), $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Usando el Lema 2.4.11, deducimos que, en efecto, $\langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$.

□

Una peculiaridad de las sucesiones convergentes no triviales es que si un espacio cuenta con una, entonces cuenta con una infinidad de ellas. Aunque pareciera una observación elemental, esto surge del hecho de que el conjunto de puntos límites del hiperespacio $\mathcal{S}_c(X)$ coincide con él mismo. Para probar esto, es recomendable recordar el concepto de enumeración adecuada expuesto en la Definición 2.3.3.

Proposición 3.1.2. *Para un espacio X, $L_{\mathcal{S}_c(X)} = \mathcal{S}_c(X)$. En particular, $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en sí mismo y, cuando $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, $\mathcal{S}_c(X)$ es infinito.*

Demostración. Recordemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c(\mathcal{S}_c(X)) &= \{\mathcal{Q} \in 2^{\mathcal{S}_c(X)} : \mathcal{Q} \text{ es una sucesión convergente no trivial en } \mathcal{S}_c(X)\}, \\ \mathcal{S}_c(\mathcal{S}_c(X), S) &= \{\mathcal{Q} \in \mathcal{S}_c(\mathcal{S}_c(X)) : \lim \mathcal{Q} = S\} \text{ y} \\ L_{\mathcal{S}_c(X)} &= \{S \in \mathcal{S}_c(X) : \mathcal{S}_c(\mathcal{S}_c(X), S) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Se sigue que $L_{\mathcal{S}_c(X)} \subseteq \mathcal{S}_c(X)$. Tomemos $S \in \mathcal{S}_c(X)$ y consideremos una enumeración adecuada $\{x_n : n \leq \omega\}$ de S. Sea $n \in \omega$ y definimos $S_n = S \setminus \{x_n\}$. Veremos que $\lim S_n = S$.

Para ello, sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{S}_c(X)$ de manera que $S \in \mathcal{U}$. Por la Proposición 3.1.1, podemos tomar una familia celular finita $\{U_1, \ldots, U_m\}$ tal que $S \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{U}$. Luego, como $S \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x_\omega \in U_j$. Como U_j es abierto en X y $S \in \mathcal{S}_c(X, x_\omega)$, se tiene que $S \setminus U_j \subseteq \{x_1, \ldots, x_N\}$ para alguna $N < \omega$.

Como para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ ocurre que $S \cap U_i \neq \emptyset$, deducimos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$, la intersección $(S \setminus U_j) \cap U_i$ es no vacía. Observemos que si $n > N$, entonces $S \setminus U_j = S_n \setminus U_j$. De ello, inferimos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$, sucede que $(S_n \setminus U_j) \cap U_i \neq \emptyset$. Asimismo, $x_{n+1} \in S_n \cap U_j$, pues $N < n < n+1$. Concluimos que $S_n \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Por otro lado, la construcción de los conjuntos S_n asegura que $S_n \subseteq S \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$ siempre que $n \leq \omega$. Así, para cada $n > N$, ocurre que $S_n \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle_c \subseteq \mathcal{U}$. En consecuencia, $\lim S_n = S$. Por lo tanto, $S \in L_{\mathcal{S}_c(X)}$ y, por ende, $L_{\mathcal{S}_c(X)} = \mathcal{S}_c(X)$.

Del párrafo anterior notamos que $\mathcal{S}_c(X)$ no tiene puntos aislados (pues todos sus elementos son puntos límite), así que $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en sí mismo. Supongamos ahora que

$\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Entonces por $\mathcal{S}_c(X)$ ser Hausdorff (Teorema 2.4.16) sin puntos aislados, podemos usar la Proposición 2.3.5 para concluir que es infinito.

$\square$

Los próximos dos lemas presentan propiedades similares en $\mathcal{S}_c(X)$ a la que establecimos para $\mathcal{CL}(X)$ en el Lema 2.4.11.

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio y consideremos $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Supongamos que $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in [\tau_X]^{<\omega}$ satisfacen que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$. Si $V \in \mathcal{V}$ es tal que $S \cap V$ es finito, entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $U_0 \subseteq V$. Además, si $S \cap V = \{y\}$, para algún $y \in S$, ocurre que $y \in U_0$.*

Demostración. Tomemos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in [\tau_X]^{<\omega}$ como en la hipótesis y consideremos $V \in \mathcal{V}$ tal que $S \cap V$ es finito. Supongamos lo contrario de lo que afirma el lema, es decir, que para cada $U \in \mathcal{U}$, ocurre que $U \setminus V \neq \emptyset$. Así, podemos tomar, para cada $U \in \mathcal{U}$, un elemento $x_U \in U \setminus V$. Por otro lado, como $S \cap V$ es finito, $S \setminus V \in \mathcal{S}_c(X)$.

Habiendo notado esto, definimos $S_1 = (S \setminus V) \cup \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$, que, por el carácter finito de la familia $\mathcal{U}$, es un elemento de $\mathcal{S}_c(X)$. Luego, por la construcción de S_1 y el hecho que $S_1 \cap V = \emptyset$, llegamos a que $S_1 \in \langle \mathcal{U} \rangle_c \setminus \langle \mathcal{V} \rangle_c$, lo cual contradice que $\langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$. Por lo tanto, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $U_0 \subseteq V$.

Presupongamos ahora que $S \cap V = \{y\}$, para algún $y \in S$. Como $U_0 \subseteq V$, se sigue que $S \cap U_0 \subseteq S \cap V = \{y\}$. Finalmente, gracias a que $y \in S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, se tiene que $y \in U_0$.

$\square$

Lema 3.1.4. *Sean X un espacio y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in [\tau_X]^{<\omega}$. Si $\emptyset \neq \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.*

Demostración. Como $\langle \mathcal{U} \rangle_c \neq \emptyset$, podemos tomar $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Ahora consideremos $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Así, $S \cup \{x\} \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$, y por ello, $x \in \bigcup \mathcal{V}$. $\square$

Para finalizar esta sección, veremos una manera de encajar subconjuntos cerrados de un espacio en su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Lema 3.1.5. *Sean X un espacio, $A \subseteq X$ y $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Si se cumple cualquiera de los siguientes enunciados, entonces A se puede encajar en $\mathcal{S}_c(X)$:*

1. *$A \in \mathcal{CL}(X)$ y $|S \cap A| \leq 1$ o*
2. *$S \subseteq X \setminus A$.*

Demostración. Sean $A \subseteq X$ y $S \in \mathcal{S}_c(X)$, con $|S \cap A| \leq 1$. Comenzamos definiendo la función

$$h : A \longrightarrow \mathcal{S}_c(X) \quad \text{dada por} \quad h(a) = S \cup \{a\}.$$

Como $|S \cap A| \leq 1$ esta función es inyectiva. Además, sea φ definida como en el Lema 2.5.3. Gracias a que, para cada $a \in A$, el conjunto $\{a\}$ es compacto, notamos que $(S, \{a\}) \in \mathcal{K}(X)^2$. Por ello, para cada $a \in A$, ocurre que $h(a) = \varphi(S, \{a\})$, de lo que se sigue que h es continua.

Para cualquiera de los dos enunciados del lema, procederemos probando que h es abierta en $h[A]$. Para ello, fijemos un subconjunto abierto U de A, un conjunto $V \in \tau_X$ tal que $A \cap V = U$ y $a \in U$. Veremos que $h(a) \in int_{h[A]}(h[U])$. Supongamos primero que $A \in \mathcal{CL}(X)$. Tomamos dos casos:

Caso 1: $a \in S$.

Notemos que $\mathcal{V} = \langle V, X \setminus A \rangle_c \cap h[A]$ es un subconjunto abierto de $h[A]$ tal que $h(a) = S \in \mathcal{V}$. Mostraremos que $\mathcal{V} \subseteq h[U]$. Sea $Q \in \mathcal{V}$. Así, $Q = h(y) = S \cup \{y\}$ para algún $y \in A$, por lo que $S \cup \{y\} \subseteq V \cup (X \setminus A)$. Entonces $y \in V \cap A = U$ y, por ende, $Q \in h[U]$.

Caso 2: $a \notin S$.

Como S es compacto, por el Lema 2.4.14, podemos tomar dos subconjuntos abiertos ajenos U_1 y U_2 de X de manera que $a \in U_1 \subseteq V$ y $S \subseteq U_2$. Notemos que $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2 \rangle_c \cap h[A]$ es un subconjunto abierto de $h[A]$ que contiene al elemento $h(a) = S \cup \{a\}$. Tomemos $Q \in \mathcal{U}$, observando que $Q = S \cup \{z\}$ para algún $z \in A$. Así $S \cup \{z\} \in \langle U_1, U_2 \rangle_c$, y, debido a que $S \subseteq U_2 \subseteq X \setminus U_1$, se sigue que $z \in U_1 \cap A \subseteq V \cap A = U$. Por lo tanto $Q \in h[U]$.

De los casos anteriores concluimos que $h(a) \in int_{h[A]}(h[U])$. Deducimos de esto que h es abierta en $h[A]$ y, por ello, un encaje. Por lo tanto, si $A \in \mathcal{CL}(X)$ y $|S \cap A| \leq 1$, es posible encajar A en $\mathcal{S}_c(X)$.

Ahora bien, presupongamos que $S \subseteq X \setminus A$. Se sigue que $a \notin S$. Luego, usando el mismo razonamiento que el expuesto anteriormente en el Caso 2, inferimos que h es un encaje. De esta manera, siempre que ocurra que $S \subseteq X \setminus A$, se tiene que A se puede encajar en $\mathcal{S}_c(X)$. □

3.2. Cofinalidad y Celularidad

Las primeras funciones cardinales que veremos son la de Cofinalidad y la de Celularidad. Aunque no serán el enfoque principal de este trabajo, basaremos algunas propiedades de otras funciones cardinales en ellas.

Definición 3.2.1. Para un espacio X y $S, T \in \mathcal{S}_c(X)$, diremos que S está *casi contenida* en T si $|S \setminus T| < \omega$. Usaremos la notación $S \subseteq^* T$ para referirnos a esto.
Una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_c(X)$ es *cofinal* en $\mathcal{S}_c(X)$ si para cada $S \in \mathcal{S}_c(X)$ existe $T \in \mathcal{C}$ tal que $S \subseteq^* T$. Denotaremos por $cf_c(X)$ a la mínima cardinalidad de un subconjunto cofinal de $\mathcal{S}_c(X)$. Observemos que, por definición, $cf_c(X) \leq |\mathcal{S}_c(X)|$.

Nota 3.2.2. Para este trabajo, limitaremos nuestro enfoque a espacios con cofinalidad al menos numerable.

Proposición 3.2.3. *Consideremos un espacio X de manera que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Sean $S, T \in \mathcal{S}_c(X)$ tales que $S \subseteq^* T$. Entonces* $\lim S = \lim T$.

Demostración. Sea $y = \lim T$. Supongamos que $y \in T \setminus S$. Como T es una sucesión convergente no trivial y $X \setminus S$ es un subconjunto abierto de X, entonces $|T \setminus (X \setminus S)| < \omega$. En otras palabras, $|T \cap S| < \omega$. Por otra parte, como $S \subseteq^* T$, sabemos que $|S \setminus T| < \omega$. Se sigue del Corolario 2.2.11 que:

$$|S| = |(S \cap T) \cup (S \setminus T)| < \omega + \omega = \omega,$$

contradiciendo que S sea una sucesión convergente no trivial de X. Por lo tanto, $y \in S$. Sea $U \in \tau_X$ de manera que $y \in U$. Así:

$$|S \setminus U| = \big|\big((S \cap T) \setminus U\big) \cup \big((S \setminus T) \setminus U\big)\big| \leq |T \setminus U| + |S \setminus T| < \omega,$$

por lo que y es un punto límite de S. Luego, por el Lema 2.3.4, concluimos que $\lim S = y$.

□

Teorema 3.2.4. *Sean κ un número cardinal infinito y $S(\kappa)$ el abanico secuencial de κ espinas. Entonces $cf_c(S(\kappa)) = \kappa$.*

Demostración. Sean $q : (\omega + 1) \times \kappa \longrightarrow S(\kappa)$ una función cociente y p el único punto no aislado de $S(\kappa)$. Presupongamos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}_c(S(\kappa))$ cumple que $|\mathcal{E}| < \kappa$. Para cada $T \in \mathcal{E}$, definimos

$$T^\dagger := \Big\{\alpha < \kappa \ : \ \big(T \setminus \{p\}\big) \cap q\big[(\omega + 1) \times \{\alpha\}\big] \neq \emptyset\Big\}$$

el cual, por la Proposición 2.6.4, es un subconjunto finito de κ. Así, por la elección de $\mathcal{E}$, el Lema 2.2.17 asegura que $\bigcup\{T^\dagger : T \in \mathcal{E}\}$ tiene menos de κ elementos. Por ello, existe $\lambda < \kappa$ de tal manera que p es el único punto en común entre $\bigcup \mathcal{E}$ y $q\big[(\omega + 1) \times \{\lambda\}\big]$. En otras palabras, no existe un elemento de $\mathcal{E}$ que casi contenga a la sucesión $q\big[(\omega + 1) \times \{\lambda\}\big]$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ no es cofinal en $\mathcal{S}_c(S(\kappa))$, mostrando que $\kappa \leq cf_c(S(\kappa))$.

Para evidenciar que $cf_c(S(\kappa)) \leq \kappa$, notemos que, por la Proposición 2.6.4, cualquier sucesión convergente no trivial se queda contenida en una cantidad finita de espinas. De esta manera:

$$\big\{q\big[(\omega + 1) \times F\big] \ : \ F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\big\}$$

es un subconjunto cofinal de $\mathcal{S}_c(S(\kappa))$ cuya cardinalidad es igual a κ. Luego, $cf_c(S(\kappa)) = \kappa$.

□

Ejemplo 3.2.5. Un espacio X para el cual $cf_c(X) < |\mathcal{S}_c(X)|$.

Consideremos el abanico secuencial de ω espinas, $S(\omega)$. Debido al Teorema 3.2.4, sabemos que $cf_c(S(\omega)) = \omega$. Por otra parte, como $S(\omega)$ es numerable, la Proposición 2.4.24 asegura que $|\mathcal{S}_c(S(\omega))| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $cf_c(S(\omega)) < |\mathcal{S}_c(S(\omega))|$.

Proposición 3.2.6. *Para cualquier espacio X, ocurre que $|L_X| \leq cf_c(X)$.*

Demostración. Consideremos un subconjunto cofinal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}_c(X)$ de cardinalidad mínima. Para cada $y \in L_X$, fijemos $S_y \in \mathcal{S}_c(X, y)$ y $T_y \in \mathcal{C}$ tal que $S_y \subseteq^* T_y$. Sea $\varphi : L_X \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $\varphi(y) = T_y$. Por la Proposición 3.2.3, sabemos que $\lim S_y = \lim T_y$. Veamos que φ es inyectiva. Sean $y_1, y_2 \in L_X$ distintos. Se sigue que:

$$\lim \varphi(y_1) = \lim T_{y_1} = y_1 \neq y_2 = \lim T_{y_2} = \lim \varphi(y_2),$$

lo cual implica que $\varphi(y_1) \neq \varphi(y_2)$. Por lo tanto φ es inyectiva, confirmando que $|L_X| \leq cf_c(X)$. □

Definición 3.2.7. Consideremos un espacio X. Definimos la *celularidad* de X, denotada por $c(X)$, como el menor número cardinal κ para el cual cualquier familia celular de X tiene cardinalidad $\leq \kappa$.

Lema 3.2.8. *Sea X un espacio. Si $|X| \geq \omega$, entonces $c(X) \geq \omega$. En particular, si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$ se tiene que $c(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$.*

Demostración. Fijemos $n \in \omega$ y tomemos $F \in [X]^{n+1}$. Como F es finito y X es de Hausdorff, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tal que $|\mathcal{U}| = n+1$, y, para cada $U \in \mathcal{U}$, la intersección $U \cap F$ es no vacía. Como n fue arbitrario, concluimos que $c(X) \geq \omega$.

Ahora presupongamos que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. La Proposición 3.1.2 asegura que $|\mathcal{S}_c(X)| \geq \omega$, así que, aplicando el Teorema 2.4.16 y el razonamiento del párrafo anterior, concluimos que $c(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$. □

Capítulo 4

La Densidad de $\mathcal{S}_c(X)$

La primera función cardinal que trataremos es la de densidad de un espacio. Para el lector que no esté familiarizado con esta noción, la densidad de un espacio es una especie de generalización de la separabilidad. En este capítulo consideraremos las propiedades de un espacio cuando la cardinalidad mínima de un subconjunto denso es mayor que ω.

Definición 4.1.1. Sea X un espacio. Definimos la *densidad* de X, denotada por $d(X)$, como la menor cardinalidad de un subconjunto de X denso en X.

Estableceremos a continuación dos lemas muy sencillos sobre la densidad.

Lema 4.1.2. *Sea X un espacio con $d(X) < \omega$. Entonces X es finito.*

Demostración. Fijemos un subconjunto denso $A \subseteq X$ con $d(X) = |A| < \omega$. Como A es finito, entonces A es cerrado en X. Así $A = \overline{A} = X$. Por lo tanto, X es finito.

□

Lema 4.1.3. *Si X es un espacio tal que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces $d(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$.*

Demostración. Tomemos $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Notemos que, gracias a la Observación 2.4.21, la familia $\big\{S \setminus \{y\} : y \in S \setminus \{\text{lím}\, S\}\big\}$ es un subconjunto de $\mathcal{S}_c(X)$. Por ello, $\mathcal{S}_c(X)$ es infinito. Además, por el Teorema 2.4.16, $\mathcal{S}_c(X)$ es un espacio de Hausdorff. Se sigue, del Lema 4.1.2, que $d(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$. □

Uno de los primeros resultados que podemos obtener es que la densidad de un espacio X acota inferiormente a la densidad del hiperespacio $\mathcal{S}_c(X)$, cuando este es no vacío.

Teorema 4.1.4. *Sea X un espacio no vacío. Entonces $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$ si y sólo si $d(X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Observemos que si $d(X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$, el hecho que $|X| \geq 1$ garantiza que $d(\mathcal{S}_c(X)) \geq 1$. Se sigue que $\mathcal{S}_c(X)$ no es vacío.

Supongamos ahora que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Fijemos un número cardinal κ y un subconjunto denso $D \subseteq \mathcal{S}_c(X)$ de manera que $|D| = \kappa = d(\mathcal{S}_c(X))$. Escribamos a este conjunto como

$D = \{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y recordemos que, para cada $\alpha < \kappa$, se tiene por definición que $|S_\alpha| = \omega$. Definimos $\mathcal{D} = \bigcup D$. Así, se tiene la igualdad:

$$\mathcal{D} = \bigcup D = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha.$$

Luego, usando el Lema 4.1.3, que asevera que κ es infinito, el Corolario 2.2.11 y el Teorema 2.2.12, llegamos a que:

$$|\mathcal{D}| = \left|\bigcup D\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha\right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |S_\alpha| = \sum_{\alpha<\kappa} \omega = \kappa \cdot \omega = \kappa.$$

En otras palabras, $|\mathcal{D}| \leq \kappa$.

Para mostrar que $\mathcal{D}$ es denso en X, consideremos un subconjunto abierto no vacío U de X. Sean $x \in U$ y $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Entonces $S \cup \{x\} \in \langle X, U\rangle_c$. Como $\langle X, U\rangle_c$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{S}_c(X)$ y D es denso en $\mathcal{S}_c(X)$, podemos tomar $S_1 \in D \cap \langle X, U\rangle_c$. Así, $\emptyset \neq S_1 \cap U \subseteq \mathcal{D} \cap U$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es denso en X. Concluimos que $d(X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$. □

Para poder hablar de cuando coinciden la densidad de un espacio y la densidad de su hiperespacio de sucesiones convergente no triviales, necesitamos establecer ciertas relaciones con el conjunto de puntos límites del espacio.

Lema 4.1.5. *Si X es un espacio, entonces $d(L_X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Si $\mathcal{S}_c(X)$ es vacío, entonces también lo es L_X, así que podemos presuponer lo contrario. Luego, si $d(L_X) \leq \omega$, se sigue del Lema 4.1.3 que $d(L_X) \leq \omega \leq d(\mathcal{S}_c(X))$. Así, podemos hacer la suposición de que $d(L_X) > \omega$.

Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_c(X)$ tal que $|\mathcal{T}| < d(L_X)$. Veremos que $\mathcal{T}$ no es denso en $\mathcal{S}_c(X)$. Observemos que si $S \in \mathcal{T}$, ocurre que $|S| = \omega$, así que, usando el Lema 2.2.17 y el Corolario 2.2.11, llegamos a que $|\bigcup \mathcal{T}| < d(L_X)$. Por ello, podemos encontrar un subconjunto abierto no vacío V de L_X para el cual $(\bigcup \mathcal{T}) \cap V = \emptyset$. Tomemos $U \in \tau_X$ tal que $U \cap L_X = V$. Como $U \cap L_X \neq \emptyset$, existe una sucesión $S_U \in \mathcal{S}_c(X)$ para la cual $\lim S_U \in U$. Debido a la Observación 2.4.21, esto implica que $S_U \cap U \in \langle U\rangle_c$.

Por otra parte, si $S \in \mathcal{T}$, se sigue que $\lim S \in (\bigcup \mathcal{T}) \cap L_X$. Notemos que si $S \in \langle U\rangle_c$, se tendría que $S \subseteq U$. Por ello, $\lim S \in U \cap L_X = V$, es decir, $\bigcup \mathcal{T} \cap V \neq \emptyset$. Esto contradice nuestra elección de V. Por lo tanto, inferimos que $S \notin \langle U\rangle_c$. De esta manera, concluimos que $\mathcal{T}$ no es denso en $\mathcal{S}_c(X)$, comprobando que $d(L_X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$.

□

Lema 4.1.6. *Para cualquier espacio X, se tiene que $d(\mathcal{S}_c(X)) \leq d(X)d(L_X)$.*

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Además, como los espacios de Hausdorff de densidad finita son finitos y X es infinito, deducimos que $d(X) \geq \omega$.

Tomemos subconjuntos densos E y P de X y L_X, respectivamente, de manera que $|E| = d(X)$ y $|P| = d(L_X)$. Ahora, para cada $x \in P$, fijamos $S_x \in \mathcal{S}_c(X)$ con $\lim S_x = x$. Consideramos:

$$\mathcal{G} := \{(S_x \setminus F) \cup H \;:\; (x \in P) \;\wedge\; (F \in [S_x \setminus \{x\}]^{<\omega}) \;\wedge\; (H \in [E]^{<\omega})\}.$$

Veamos que $\mathcal{G}$ es denso en $\mathcal{S}_c(X)$. Sea $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$, con $\langle \mathcal{U} \rangle_c \neq \emptyset$. Sea $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ y tomemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $\lim S \in U$. Entonces $U \cap L_X \neq \emptyset$, por lo que podemos elegir $x \in U \cap P$. Como E es denso en X, para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $y_V \in V \cap E$. Definimos $H = \{y_V : V \in \mathcal{U}\}$ y $F = S_x \setminus U$. Notemos que $S_x \setminus F \subseteq U$ y que, para cada $V \in \mathcal{U}$, la intersección $H \cap V$ es no vacía. Así, $(S_x \setminus F) \cup H \in \mathcal{G} \cap \langle \mathcal{U} \rangle_c$, confirmando que $\mathcal{G}$ es denso en $\mathcal{S}_c(X)$.

En cuanto a la cardinalidad de $\mathcal{G}$, basta notar que, si fijamos $x_0 \in P$, por el Lema 2.2.15:

$$|\{S_{x_0} \setminus F : F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}\}| = |\{F : F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}\}| = |[S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}| = \omega,$$

de manera que, si también fijamos $H_0 \in [E]^{<\omega}$:

$$|\{(S_{x_0} \setminus F) \cup H_0 : F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}| = |\{F : F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}\}| = \omega.$$

Así, usando los Lemas 2.2.12 y 2.2.15, el Corolario 2.2.11 y el hecho de que $d(X) \geq \omega$, observamos que:

$$\begin{aligned}
|\{(S_{x_0} \setminus F) \cup H : (F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega}) \wedge (H \in [E]^{<\omega})\}| &= \\
= \left| \bigcup_{H \in [E]^{<\omega}} \{(S_{x_0} \setminus F) \cup H : (F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega})\} \right| &\leq \\
\leq \sum_{H \in [E]^{<\omega}} |\{(S_{x_0} \setminus F) \cup H : (F \in [S_{x_0} \setminus \{x_0\}]^{<\omega})\}| &= \\
= \sum_{H \in [E]^{<\omega}} \omega = |[E]^{<\omega}| \cdot \omega = |E| \cdot \omega &= \\
&= |E|.
\end{aligned}$$

Finalmente, concluimos, por el Lema 2.2.12, que:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}| = |\{(S_x \setminus F) \cup H \ : \ (x \in P) \wedge (F \in [S_x \setminus \{x\}]^{<\omega}) \wedge (H \in [E]^{<\omega})\}| &= \\
= \left| \bigcup_{x \in P} \{(S_x \setminus F) \cup H : (F \in [S_x \setminus \{x\}]^{<\omega}) \wedge (H \in [E]^{<\omega})\} \right| &\leq \\
\leq \sum_{x \in P} |\{(S_x \setminus F) \cup H : (F \in [S_x \setminus \{x\}]^{<\omega}) \wedge (H \in [E]^{<\omega})\}| &\leq \\
\leq \sum_{x \in P} |E| = |E||P|&.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(\mathcal{S}_c(X)) \leq d(X) d(L_X)$. □

Con estos resultados, podemos dar una condición suficiente y necesaria para que la densidad de un espacio sea igual a la de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Corolario 4.1.7. *Sea X un espacio tal que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Entonces $d(X) = d(\mathcal{S}_c(X))$ si y sólo si $d(L_X) \leq d(X)$.*

Demostración. Si ocurriera que $d(X) = d(\mathcal{S}_c(X))$, usando el Lema 4.1.5, tendríamos que $d(L_X) \leq d(\mathcal{S}_c(X)) = d(X)$.

Ahora, si $d(L_X) \leq d(X)$, como $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, el Teorema 4.1.4 arroja la desigualdad $d(X) \leq d(\mathcal{S}_c(X))$. Por otra parte, el Lema 4.1.6 garantiza que $d(\mathcal{S}_c(X)) \leq d(X)d(L_X)$. Como $d(X) \geq \omega$ y, por hipótesis, $d(L_X) \leq d(X)$, concluimos, usando el Corolario 2.2.11, que $d(\mathcal{S}_c(X)) \leq d(X)d(L_X) = d(X)$. En otras palabras, $d(X) = d(\mathcal{S}_c(X))$. □

El Corolario 4.1.7 nos permite dar una clase de espacios para los cuales se tiene la igualdad entre las densidades $d(X)$ y $d(\mathcal{S}_c(X))$.

Recordemos que se dice que un espacio X es *secuencial* si para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ que no sea cerrado, existe una sucesión $S \subseteq A$ tal que $\lim S \in \overline{A} \setminus A$.

Corolario 4.1.8. *Si X es denso en sí mismo y secuencial, entonces $d(X) = d(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Mostraremos primero que el hecho de que X sea denso en sí mismo y secuencial implica que:

$$X = L_X. \tag{4.1}$$

Para ello, basta probar que $X \subseteq L_X$. Tomemos $x \in X$ y consideremos el conjunto $X \setminus \{x\}$. Notemos que $\{x\}$ no es punto aislado de X. Así, $X \setminus \{x\}$ no es cerrado en X, por lo que existe una sucesión $S \subseteq X \setminus \{x\}$ que converge a un punto en $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$; es decir, $\lim S = x$. Por lo tanto, $x \in L_X$.

De lo anterior, deducimos que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Usando (4.1) y el Corolario 4.1.7, se tiene la afirmación. □

Capítulo 5

El Peso de $\mathcal{S}_c(X)$

La siguiente función cardinal significativa de la que hablaremos será la que concierne al peso del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales. Así, como en el capítulo pasado la densidad de un espacio era la generalización de la separabilidad, el peso de un espacio es la generalización de la segunda numerabilidad. En esta ocasión nos preguntaremos sobre las propiedades del espacio cuando la mínima cardinalidad de una base es mayor que ω.

En relación con esta función, hablaremos también del peso neto, i-peso y π-peso. En lo posible, incluiremos ejemplos para resaltar la naturaleza de algunas desigualdades.

5.1. Peso y peso neto

Recordemos que una *red básica* para un espacio X es una familia de subconjuntos $\mathcal{N}$ con la siguiente propiedad: para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto abierto U que contiene a x, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Definición 5.1.1. Sea X un espacio. Definimos el *peso* de X, denotado por $w(X)$, como la menor cardinalidad de una base para X. De manera similar, el *peso neto* de X estará dado por la menor cardinalidad de una red básica para X y se usará el símbolo $nw(X)$ para referirnos a él.
Al trabajar con dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un mismo espacio X, utilizaremos los símbolos $w(X,\tau_1)$ y $w(X,\tau_2)$ para referirnos al peso de X bajo τ_1 y al peso de X bajo τ_2, respectivamente. Similarmente, $nw(X,\tau_1)$ y $nw(X,\tau_2)$, se referirán al peso neto de X bajo τ_1 y al peso neto de X bajo τ_2, respectivamente.

Para la siguiente proposición, es conveniente recordar la noción de la traza de una familia de conjuntos, definida en la Sección 2.3: si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de algún conjunto X y tenemos $Y \subseteq X$, la *traza de $\mathcal{A}$ sobre Y* es $\mathcal{A} \restriction Y := \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 5.1.2. *Sean X un espacio y $Y \subseteq X$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. $nw(X) \leq w(X)$,

2. $nw(Y) \leq nw(X)$ *y*

3. $w(Y) \leq w(X)$.

Demostración. Para el primer inciso, basta notar que cualquier base $\mathcal{B}$ para X es, a su vez una red básica, en particular la de menor cardinalidad.

En cuanto a la segunda afirmación, sea $\mathcal{N}$ una red básica para X de cardinalidad $nw(X)$. Veremos que $\mathcal{N} \restriction Y$ es una red básica para Y. En efecto, sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$, de manera que $y \in U \cap Y$. Como $\mathcal{N}$ es una red básica para X, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $y \in N \subseteq U$. Por ello, $y \in N \cap Y \subseteq U \cap Y$. De esta manera $\mathcal{N} \restriction Y$ es una red básica para Y. Se sigue que $nw(Y) \leq nw(X)$.

Por último, usando una argumentación muy similar a la del párrafo anterior, se puede mostrar que si $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces $\mathcal{B} \restriction Y$ es una base para Y. De ello, deducimos que $w(Y) \leq w(X)$. $\square$

Proposición 5.1.3. *Si X es un espacio entonces sucede que:*

1. *$w(X) < \omega$ si y sólo si X es discreto y finito, y*

2. *$nw(X) < \omega$ si y sólo si X es discreto y finito.*

Demostración. Supongamos primero que X es discreto y finito. Como el conjunto $\{\{x\} : x \in X\}$ es una base para X, ocurre que $w(X) \leq |X| < \omega$. Se sigue de la Proposición 5.1.2 que $nw(X) < \omega$.

Presupongamos ahora que $w(X) = n$ ($nw(X) = n$) para alguna $n \in \omega$, y que X es infinito. Consideremos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq X$. Como X es de Hausdorff, para cada par de elementos distintos $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, existen subconjuntos abiertos ajenos U_{x_i,x_j} y U_{x_j,x_i} de X tales que $x_i \in U_{x_i,x_j}$ y $x_j \in U_{x_j,x_i}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, definimos:

$$U^{x_i} := \bigcap \big\{ U_{x_i,x_j} : j \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i\} \big\}.$$

Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, se tiene que:

a) $x_i \in U^{x_i}$,

b) $U^{x_i} \in \tau_X$ y

c) si $j \neq i$ entonces $U^{x_i} \cap U^{x_j} = \emptyset$.

Por otro lado, como $w(X) = n$ ($nw(X) = n$), podemos tomar una base $\mathcal{B}$ (red básica $\mathcal{N}$) con $|\mathcal{B}| = n$ ($|\mathcal{N}| = n$). Luego usando a) y b), para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, existe $B_i \in \mathcal{B}$ ($N_i \in \mathcal{N}$) con la propiedad de que $x_i \in B_i \subseteq U^{x_i}$ ($x_i \in N_i \subseteq U^{x_i}$). Sin embargo, como los elementos de la familia $\{U^{x_i}\}_{i=1}^{n+1}$ son ajenos dos a dos, la subfamilia $\{B_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \mathcal{B}$ ($\{N_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \mathcal{N}$) tiene al menos $n+1$ elementos. Por ello, $|\mathcal{B}| \geq n+1$ ($|\mathcal{N}| \geq n+1$), lo cual es una contradicción.

Por lo tanto X es finito, lo cual, sumado al hecho de que X es de Hausdorff, implica que X es discreto.

$\square$

Corolario 5.1.4. *Si X es un espacio tal que $|X| \geq \omega$, entonces $nw(X) \geq \omega$. En particular, si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, ocurre que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.1.2 y del segundo inciso de la Proposición 5.1.3. □

Resultados como la Proposición 5.1.3 nos permiten darnos cuenta que las propiedades de las funciones cardinales no resultan muy interesantes cuando los espacios tratados son finitos. Por consiguiente, para el resto de esta sección, tomaremos espacios cuya cardinalidad sea al menos ω.

La función cardinal de densidad está relacionada con el peso neto de un espacio de la siguiente manera:

Lema 5.1.5. *Para cualquier espacio X, se tiene que $d(X) \leq nw(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una red básica para X de cardinalidad mínima. Para cada $N \in \mathcal{N}$, sea $x_N \in N$. Entonces el conjunto $D_{\mathcal{N}} = \{x_N : N \in \mathcal{N}\}$ es un subconjunto denso de X cuya cardinalidad es menor o igual que $nw(X)$. □

Existen ciertas condiciones que podemos poner sobre un espacio para que su peso y su peso neto coincidan. Particularmente, este es el caso para los espacios compactos, los localmente compactos, los linealmente ordenados y los metrizables. Para mostrar esto, introduciremos algunas nociones auxiliares, culminando en dos teoremas importantes.

El siguiente concepto, que nos permitirá determinar el peso de un espacio linealmente ordenado, fue expuesto originalmente por András Hajnal e Istvan Juhász en su artículo de 1969, *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, [6]. Debido al enfoque de este trabajo, presupondremos que el lector tiene cierto conocimiento sobre espacios linealmente ordenados. En caso contrario, puede consultarlos en [2, 1.7.4, p. 56] y [14, Sección 14, p. 95].

Definición 5.1.6. Sea X un espacio linealmente ordenado. Diremos que un par de puntos $x, y \in X$ es una *brecha en* X, denotado por $\langle x, y\rangle$, si el intervalo abierto (x, y) es vacío, es decir, y es el sucesor de x, pero ni x ni y son puntos aislados. Además, acordaremos que x y y son los *puntos extremos de la brecha* $\langle x, y\rangle$.
Definimos $g(X)$ como la cardinalidad del conjunto de todas las brechas en X, es decir, $g(X) = |\{\langle x, y\rangle : x, y \in X\}|$.

Lema 5.1.7. *Si X es un espacio linealmente ordenado entonces $g(X) \leq nw(X)$.*

Demostración. Consideremos una red básica $\mathcal{N}$ para X de cardinalidad mínima, y una brecha $\langle a, b\rangle$ en X. Como el rayo $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a b, existe $N_b \in \mathcal{N}$ tal que $b \in N_b \subseteq (a, \rightarrow)$. Por otro lado, debido a que el intervalo (a, b) es vacío, se sigue que $b = \text{mín}(N_b)$. Por lo tanto, existen al menos tantos elementos distintos en $\mathcal{N}$ como brechas en X, es decir, $g(X) \leq nw(X)$. □

La importancia de las brechas quedará establecida a continuación con un resultado que relaciona el peso de un espacio con su densidad y la cardinalidad del conjunto de brechas.

Lema 5.1.8. *Si X es un espacio linealmente ordenado entonces $w(X) = d(X) + g(X)$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso de X, de cardinalidad mínima, y consideremos H como el conjunto de puntos extremos de todas las brechas de X. Observemos que los puntos aislados de X pertenecen a D. Mostraremos que la colección de los puntos aislados de X en conjunto con los intervalos abiertos (a, b) para los cuales $a, b \in D \cup H$, constituye una base para X.

Sean x un punto no aislado de X y (p, q) un intervalo abierto que contenga a x. Si x no tiene ni predecesor ni sucesor, podemos encontrar $a \in D$ de manera que $a \in (p, x)$ y $b \in D$ tal que $b \in (x, q)$, asegurando que $x \in (a, b) \subseteq (p, q)$. Por el contrario, si x tiene un predecesor, digamos a, entonces debe ocurrir que a sea un punto aislado de X o que $\langle a, x\rangle$ sea una brecha en X. En otras palabras, $a \in D \cup H$. Como x no es un punto aislado y tiene predecesor, se sigue que x no tiene sucesor. Tomemos $b \in D \cap (x, q)$. Luego $x \in (a, b) \subseteq (p, q)$. Ahora bien, para el caso cuando x tiene sucesor, usando un razonamiento análogo al del caso anterior, podemos encontrar dos puntos $a, b \in D \cup H$ de manera que $x \in (a, b) \subseteq (p, q)$.

Por consiguiente, hemos mostrado que, en efecto, la colección de puntos aislados de X, unida al conjunto de intervalos abiertos (a, b) para los cuales $a, b \in D \cup H$, forma una base para X. Así:

$$w(X) \leq |D \cup H| \leq d(X) + g(X). \tag{5.1}$$

Para la desigualdad restante, es decir, que $d(X) + g(X) \leq w(X)$, los Lemas 5.1.5 y 5.1.7 garantizan que $d(X) + g(X) \leq nw(X)$. Por lo tanto, usando la Proposición 5.1.2, concluimos que $d(X) + g(X) \leq w(X)$.

□

Una vez establecida esta igualdad, podemos enfocarnos en mostrar algunos espacios para los cuales coinciden el peso y el peso neto.

Teorema 5.1.9. *Si (X, τ_X) es un espacio compacto, entonces $w(X) = nw(X)$.*

Demostración. Por la Proposición 5.1.2, basta probar que $w(X) \leq nw(X)$. Consideremos una red básica $\mathcal{N}$ para X de cardinalidad mínima, que, por la Proposición 5.1.3, podemos presuponer que es infinita. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{I} := \Big\{(N_1, N_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \,:\, \exists\, U_1, U_2 \in \tau_X \,\big((N_1 \subseteq U_1) \wedge (N_2 \subseteq U_2) \wedge (U_1 \cap U_2 = \emptyset)\big)\Big\}.$$

Usando la Proposición 2.2.10, observamos que $|\mathcal{I}| \leq nw(X)^2 = nw(X)$. Ahora, para cada $i = (N_1, N_2) \in \mathcal{I}$, elegimos $U_1(i)$ y $U_2(i)$ como una pareja de subconjuntos abiertos que cumplen la condición descrita en la definición de $\mathcal{I}$. Sea $\mathcal{T}$ la topología en X generada por la colección $\{U_1(i), U_2(i) : i \in \mathcal{I}\}$.

Observemos que gracias a la Proposición 2.2.10, ocurre que $|\{U_1(i), U_2(i) : i \in \mathcal{I}\}| \leq |\mathcal{I}|^2 = |\mathcal{I}|$. Por otra parte, la base generada por esta colección consiste en intersecciones finitas de elementos de ella; en otras palabras, esta base cuenta con a lo más tantos elementos como la colección de subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$. De esta manera, inferimos, del Lema 2.2.15 que:

$$w(X, \mathcal{T}) \leq [\mathcal{I}]^{<\omega} = |\mathcal{I}| \leq nw(X). \tag{5.2}$$

Afirmación. $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff.

En efecto. Sean $x, y \in X$ distintos. Como (X, τ_X) es de Hausdorff, existen $U, V \in \tau_X$, ajenos, de manera que $x \in U$ y $y \in V$. Como $\mathcal{N}$ es una red básica, podemos tomar $N_x, N_y \in \mathcal{N}$ tales que $x \in N_x \subseteq U$ y $y \in N_y \subseteq V$. Así, asignando $i = (N_x, N_y)$, llegamos que $U_1(i)$ y $U_2(i)$ son abiertos ajenos de $(X, \mathcal{T})$, con $x \in U_1(i)$ y $y \in U_2(i)$.

Por último, como $\mathcal{T} \subseteq \tau_X$, la función identidad $Id : (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua. Además, (X, τ_X) es compacto y $(X, \mathcal{T})$ es de Hausdorff, así que Id resulta ser un homeomorfismo. Por lo tanto, usando (5.2), concluimos que $w(X) \leq nw(X)$.

□

Para un espacio X, usaremos la notación αX para referirnos a la compactación de Alexandroff de X ([2, Sección 3.5, p. 166]). El símbolo Q denotará alos números racionales.

Teorema 5.1.10. *Sea X un espacio localmente compacto, métrico o linealmente ordenado. Entonces ocurre que $w(X) = nw(X)$.*

Demostración. Como estamos presuponiendo que X es infinito, por el Corolario 5.1.4, sabemos que $nw(X) \geq \omega$.

Comencemos suponiendo que X es localmente compacto. Recordemos que, por el Teorema de Compactación de Alexandroff ([2, Teorema 3.5.11, p. 169]), existe un espacio αX compacto y de Hausdorff tal que $X \subseteq \alpha X$ y $\alpha X \setminus X = \{p\}$. Consideremos, una red básica $\mathcal{N}$ para X tal que $|\mathcal{N}| = nw(X) \geq \omega$. Entonces $\mathcal{N} \cup \{p\}$ es una red básica para αX. Se sigue de que $\mathcal{N}$ sea infinita que $nw(\alpha X) = nw(X)$ y, usando la Proposición 5.1.2 y el Teorema 5.1.9, concluimos que:

$$nw(X) = nw(\alpha X) = w(\alpha X) \geq w(X) \geq nw(X).$$

Evaluemos el caso cuando X es métrico. Sea $\mathcal{N}$ una red básica para X con cardinalidad $nw(X)$. Para cada $N \in \mathcal{N} \setminus \{\emptyset\}$, podemos tomar un elemento $x_N \in N$. Consideremos $D = \{x_N : N \in \mathcal{N} \setminus \{\emptyset\}\}$, que, como $\mathcal{N}$ es una red básica para X, es un subconjunto denso de X con a lo más $nw(X)$ elementos. Para $r \in \mathbb{Q}$ y $x \in X$, denotaremos por $B_r(x)$ a la bola de radio r con centro en x. Entonces, por el Corolario 2.2.11:

$$\mathcal{B} = \{B_r(x_N) : (x_N \in D) \wedge (r \in \mathbb{Q})\} \text{ tiene a lo más } nw(X) \text{ elementos.} \tag{5.3}$$

Mostraremos que $\mathcal{B}$ además es una base para X. Consideremos $x \in X$ arbitrario y $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. De esta manera, existe $r \in \mathbb{Q}$ positivo tal que $B_r(x) \subseteq U$. Ahora como D es denso en X, existe $N \in \mathcal{N}$ de manera que $x_N \in D \cap B_{\frac{r}{3}}(x)$. Sea $q \in \mathbb{Q} \cap (\frac{r}{3}, \frac{r}{2})$. Afirmamos que $B_q(x_N) \subseteq B_r(x)$: en efecto, si $y \in B_q(x_N)$, entonces $d(y, x) \leq d(y, x_N) + d(x_N, x) < \frac{5r}{6}$. Así:

$$x \in B_q(x_N) \subseteq B_r(x) \subseteq U \quad \text{y} \quad B_q(x_N) \in \mathcal{B}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para X, así que, por (5.3), se tiene que $w(X) \leq nw(X)$.

Por último, supongamos que X es linealmente ordenado. Por los Lemas 5.1.5 y 5.1.7, sabemos que $nw(X) \geq d(X) + g(X)$. Luego, usando la Proposición 5.1.2 y el Lema 5.1.8, se sigue que:

$$w(X) \geq nw(X) \geq d(X) + g(X) = w(X),$$

asegurando que $nw(X) = w(X)$.

□

El siguiente lema será muy útil a lo largo de esta tesis y será usado varias veces en diferentes resultados. Sin embargo, la demostración del mismo se relaciona poco con el enfoque de este trabajo, por lo que si el lector está interesado en ella puede consultar [2, Teorema 1.1.15, p. 17].

Lema 5.1.11. *Sean X un espacio arbitrario y κ un número cardinal infinito. Si $w(X) \leq \kappa$, entonces para cada base $\mathcal{B}$ de X existe una base $\mathcal{B}_0$ tal que $|\mathcal{B}_0| \leq \kappa$ y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.* $\square$

Generalmente, se piensa a los hiperespacios como objetos "más grandes" que los espacios originales en los que están basados. Aunque esta idea intuitiva es medianamente acertada, como veremos a continuación, no siempre crecen las funciones cardinales cuando hablamos de hiperespacios.

En el siguiente lema, usaremos la notación para vietóricos de $\mathcal{K}(X)$, introducida en la Definición 2.4.2.

Lema 5.1.12. *Si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio X, entonces:*

$$\mathfrak{B} = \{\langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{V} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$$

es una base para $\mathcal{K}(X)$. Más aún, si $\mathcal{B}$ es infinito, entonces $|\mathcal{B}| \leq |\mathfrak{B}|$ y, por ende, $w(\mathcal{K}(X)) = w(X)$.

Demostración. Mostraremos primero que $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathcal{K}(X)$. Para ello, tomemos $A \in \mathcal{K}(X)$ y un subconjunto abierto $\mathcal{W}$ de $\mathcal{K}(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$. Entonces, existe $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ de manera que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{W}$. Así, para cada $U \in \mathcal{U}$, se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es una base para X, para cada $U \in \mathcal{U}$ y para cada $x \in A \cap U$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ con la propiedad de que $x \in B_x \subseteq U$. Luego:

$$\{B_x \ : \ (x \in A \cap U) \ \wedge \ (U \in \mathcal{U})\}$$

es una cubiera abierta de A. Como A es compacto, existe una subcolección finita $\{B_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ que cubre a A.

Ahora, para cada $U \in \mathcal{U}$, fijemos $z \in A \cap U$ y $B_U \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B_U \subseteq U$. Con esto, definimos:

$$\mathcal{V} = \{B_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\} \cup \{B_U : U \in \mathcal{U}\},$$

la cual es una familia finita de subconjuntos abiertos básicos de X. Argumentaremos que $A \in \langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{W}$. Primero, notemos que, por construcción, para cada $i \leq n$ y para cada $U \in \mathcal{U}$, se tiene que $B_i \cap A \neq \emptyset$ y que $B_U \cap A \neq \emptyset$. Además, como $\{B_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ es una cubierta de A, a su vez $\mathcal{V}$ es una cubierta de A. De esta manera $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Se sigue que $A \in \langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}}$.

Por otro lado, por la manera en que se obtuvieron las familias $\{B_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ y $\{B_U : U \in \mathcal{U}\}$, se tiene que $\bigcup \mathcal{V} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. También, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $B_U \in \mathcal{V}$ tal que $B_U \subseteq U$. Usando el Lema 2.4.11, llegamos a que $\langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}} \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{K}}$ y, con esto $\langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{W}$. Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathcal{K}(X)$.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es infinito. Notemos que:

$$|\mathfrak{B}| = |\{\langle \mathcal{V} \rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{V} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}| \leq |[\mathcal{B}]^{<\omega}|,$$

así que, de acuerdo al Lema 2.2.15, ocurre que $|\mathfrak{B}| \leq |\mathcal{B}|$. Por ello $w(\mathcal{K}(X)) \leq w(X)$.

Finalmente, por el Corolario 2.4.13, sabemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$. Usando el hecho que $F_1(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ y la Proposición 5.1.2, deducimos que $w(X) = w(F_1(X)) \leq w(\mathcal{K}(X))$. Concluimos que $w(X) = w(\mathcal{K}(X))$.

□

El primer teorema importante de esta sección nos brindará una condición suficiente y necesaria para que el peso de un espacio coincida con el peso de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 5.1.13. *Sea X un espacio con más de un punto. Entonces $w(X) = w(\mathcal{S}_c(X))$ si y sólo si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$.*

Demostración. Comencemos presuponiendo que $w(X) = w(\mathcal{S}_c(X))$. Como X tiene al menos dos elementos distintos, cualquier base para X debe de tener al menos dos elementos, es decir, $w(\mathcal{S}_c(X)) = w(X) \geq 2$. Por lo tanto $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. Así, X no puede ser finito y, por la Proposición 5.1.2 y el Corolario 5.1.4, se sigue que $w(X) \geq \omega$. Usando el hecho que $\mathcal{S}_c(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ y el Lema 5.1.12, llegamos a que $w(\mathcal{S}_c(X)) \leq w(\mathcal{K}(X)) \leq w(X)$. El resto de la demostración se centrará en mostrar que $w(X) \leq w(\mathcal{S}_c(X))$.

Fijemos un número cardinal κ de manera que $w(\mathcal{S}_c(X)) = \kappa$. Haciendo uso de la Proposición 3.1.1, consideremos la base $\mathcal{B} = \{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)\}$ para $\mathcal{S}_c(X)$. De acuerdo con el Lema 5.1.11, existe una base $\mathcal{B}_0$ para $\mathcal{S}_c(X)$ que cumple que $|\mathcal{B}_0| = \kappa$ y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Por estas dos propiedades, podemos indexar a $\mathcal{B}_0$ con κ; es decir, para cada $\alpha < \kappa$, existe $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{C}(X)$ tal que el conjunto $\mathcal{B}_0 = \{\langle \mathcal{V}_\alpha \rangle_c : \alpha < \kappa\}$ es una base para $\mathcal{S}_c(X)$. Consideremos:

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{V}_\alpha.$$

Por construcción, el Lema 2.2.12 y el Corolario 2.2.11 garantizan que $|\mathfrak{B}| \leq \kappa$, por lo que $\mathfrak{B} \in [\tau_X]^{\leq\kappa}$. Veamos que $\mathfrak{B}$ es una base para X. Para ello, sean $p \in X$ y $W \in \tau_X$, con $p \in W$, y fijemos $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Consideramos dos casos:

Caso 1: $\lim S = p$. Por la Observación 2.4.21, sabemos que $W \cap S \in \langle W \rangle_c$. Así, existe $\alpha < \kappa$ para la cual $S \cap W \in \langle \mathcal{V}_\alpha \rangle_c \subseteq \langle W \rangle_c$. Tomemos $V \in \mathcal{V}_\alpha$ con $p \in V$. Entonces $V \in \mathfrak{B}$ y, debido al Lema 3.1.4, se tiene que $V \subseteq \bigcup \mathcal{V}_\alpha \subseteq \bigcup\{W\}$. Por ello, $p \in V \subseteq W$.

Caso 2: $\lim S \neq p$. Sea $S_1 = S \cup \{p\}$ y, usando el Lema 2.4.14, consideremos U_1 y U_2 abiertos ajenos de X con la propiedad de que $p \in U_1$ y $S_1 \setminus \{p\} \subseteq U_2$. De esta manera, $S_1 \in \langle U_1 \cap W, U_2 \rangle_c$, por lo que existe $\alpha < \kappa$ que cumple que $S_1 \in \langle \mathcal{V}_\alpha \rangle_c \subseteq \langle U_1 \cap W, U_2 \rangle_c$. Luego, usando el Lema 3.1.3, elegimos $V \in \mathcal{V}_\alpha$ tal que $p \in V \subseteq U_1 \cap W \subseteq W$.

Concluimos que $\mathfrak{B}$ es una base para X, lo cual, a su vez, implica que $w(X) \leq w(\mathcal{S}_c(X))$.

□

Aunque no tenemos un resultado para el peso neto tan fuerte como el anterior, sí podemos decir que el peso neto de un espacio X es un cota inferior para el peso neto de su hiperespacio $\mathcal{S}_c(X)$.

Teorema 5.1.14. *Si X es un espacio tal que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces $nw(X) \leq nw(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Afirmamos primero que siempre que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, se puede elegir una sucesión en X cuyo complemento sea infinito: en efecto, si tomamos $S_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ y $\{x_n : n \leq \omega\}$ una enumeración adecuada para S_0, el conjunto $\{x_m : m \text{ es par}\} \cup \{x_\omega\}$ es, a su vez, un elemento de $\mathcal{S}_c(X)$. Más aún, si $S_1 = \{x_m : m \text{ es par}\} \cup \{x_\omega\}$, ocurre que $\{x_m : m \text{ es impar}\} \subseteq X \setminus S_1$. Por lo tanto $|X \setminus S_1| \geq \omega$.

Consideremos $S \in \mathcal{S}_c(X)$ de manera que $|X \setminus S| \geq \omega$. Sea $\mathcal{N}$ una red básica para $X \setminus S$, la cual, por el Corolario 5.1.4, sabemos que es infinita. Definimos:

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \cup \{\{x\} : x \in S\}$$

y observamos que es una red básica para X. Notemos que $|\{\{x\} : x \in S\}| = |S| = \omega$, por lo que $|\mathcal{N}_1| = |\mathcal{N}|$. Debido a que $\mathcal{N}$ fue arbitraria, se sigue que $nw(X) \leq nw(X \setminus S)$.

Por otra parte, el segundo inciso del Lema 3.1.5 nos dice que $X \setminus S$ se encaja en $\mathcal{S}_c(X)$. Usando el segundo inciso de la Proposición 5.1.2, deducimos que $nw(X) \leq nw(X \setminus S) \leq nw(\mathcal{S}_c(X))$. □

Teorema 5.1.15. *Existe un espacio X tal que $nw(X) < nw(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $r > 0$, definimos el conjunto:

$$M_{a,r} = \{(a,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (|x-a| < r) \ \wedge \ (|y| < |x-a|)\}.$$

Ahora, para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, definimos una base local de la siguiente manera: Si $b \neq 0$, entonces (a,b) tendrá la base local usual del plano. Por otra parte, si $b = 0$, tomamos la base local dada por la colección $\{M_{a,r} : r > 0\}$

Sea X el espacio que se obtiene al dotar al plano con la topología resultante. Sean $Z_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $Z_2 = X \setminus Z_1$. Observemos que las topologías inducidas en Z_1 y Z_2 coinciden con las topologías inducidas por la topología usual en el plano. De esta manera, podemos tomar bases numerables $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para Z_1 y Z_2, respectivamente. Luego, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una red básica numerable para X, por lo que:

$$nw(X) = \omega. \tag{5.4}$$

Proseguimos construyendo, para cada $a \in \mathbb{R}$, la sucesión:

$$S_a := \left\{(a,0)\right\} \cup \left\{ \left(a - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) : n \in \omega\right\} \cup \left\{ \left(a + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) : n \in \omega\right\}.$$

Notemos que $\text{lím}_{n\to\infty} \left(a - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) = (a,0) = \text{lím}_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Por ello, gracias a la Observación 2.4.21, concluimos que $S_a \in \mathcal{S}_c(X)$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{G} := \{S_a : a \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmación. $\mathcal{G}$ es discreto.

En efecto, fijemos $a \in \mathbb{R}$ y sea $U = M_{a,\frac{3}{2}}$. Observemos que si $(x, y) \in S_a \setminus \{(a, 0)\}$, entonces $x = a - \frac{1}{2^m}$ o $x = a + \frac{1}{2^m}$ para alguna $m \in \omega$. En cualquier caso, $|x - a| = \frac{1}{2^m} < \frac{3}{2}$ y, además, $|y| = \frac{1}{2^{m+1}} < |x-a|$. Se sigue que $\{S_a\} \subseteq \langle U\rangle_c \cap \mathcal{G}$. Para probar que $\langle U\rangle_c \cap \mathcal{G} \subseteq \{S_a\}$, sea $t \in \mathbb{R}$ de manera que $S_t \in \langle U\rangle_c \cap \mathcal{G}$. Nos percatamos que $t \in (a - \frac{3}{2}, a + \frac{3}{2})$.

Argumentaremos que ni $t < a$, ni $t > a$. Supongamos, por el contrario, que $t < a$. Entonces $t \in \left(a - \frac{3}{2}, a - 1\right] \cup \left(\bigcup_{n\in\omega} \left[a - \frac{1}{2^n}, a - \frac{1}{2^{n+1}}\right]\right)$. Si ocurriera que $t \in \left(a - \frac{3}{2}, a - 1\right]$, tendríamos que $t - a \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right]$. Luego, $t + 1 - a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$, lo cual garantiza que $|t + 1 - a| < \frac{1}{2}$. Sin embargo, esto implicaría que $(t + 1, \frac{1}{2}) \in S_t \setminus U$. Como esto es imposible, se tiene que $t \in \left[a - \frac{1}{2^n}, a - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ para alguna $n \in \omega$. Bajo estas condiciones, se tiene que $t - a \in \left[-\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^{n+1}}\right]$, lo cual nos dice que $t + \frac{1}{2^n} - a \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$. Se sigue que $|t + \frac{1}{2^n} - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ e inferimos de ello que $(t + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}) \in S_t \setminus U$. No obstante, esto contradice la elección de S_t. Por lo tanto, $t \not< a$

De manera análoga, se puede probar que $t \not> a$, lo que nos lleva a que $t = a$. Por ende, $S_t = S_a$, comprobando que $\langle U\rangle_c \cap \mathcal{G} \subseteq \{S_a\}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es discreto.

Habiendo probado la afirmación, como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}_c(X)$, la Proposición 5.1.2 garantiza que $nw(\mathcal{G}) \leq nw(\mathcal{S}_c(X))$. Además, como $\mathcal{G}$ es discreto, se deduce que $nw(\mathcal{G}) \geq \mathfrak{c} > \omega$. Por lo tanto, usando (5.4), concluimos que $nw(X) < nw(\mathcal{G}) \leq nw(\mathcal{S}_c(X))$. □

Para la siguiente proposición, recordemos el concepto de $cf_c(X)$ expuesto en la Definición 3.2.1.

Proposición 5.1.16. *Para un espacio X:*

$$nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq \text{mín}\{nw(X)^\omega, cf_c(X) + nw(X)\}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una red básica para X de cardinalidad $nw(X)$. Para mostrar que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq nw(X)^\omega$, argumentaremos que $\{\langle\mathcal{E}\rangle_c : \mathcal{E} \in [\mathcal{N}]^{\leq\omega}\}$ es una red básica para $\mathcal{S}_c(X)$.

Sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ y $S \in \langle\mathcal{U}\rangle_c$ arbitrarios. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cualquier $x \in S \cap U$, elijamos $E^U_x \in \mathcal{N}$ de manera que $x \in E^U_x \subseteq U$. Sea $\mathcal{E} = \{E^U_x : (U \in \mathcal{U}) \wedge (x \in S \cap U)\}$. Así, $\mathcal{E}$ es un subconjunto numerable de $\mathcal{N}$, para el cual $S \in \langle\mathcal{E}\rangle_c \subseteq \langle\mathcal{U}\rangle_c$. Por esto, la familia $\{\langle\mathcal{E}\rangle_c : \mathcal{E} \in [\mathcal{N}]^{\leq\omega}\}$ es una red básica para $\mathcal{S}_c(X)$.

Ahora bien, observemos que $|\{\langle\mathcal{E}\rangle_c : \mathcal{E} \in [\mathcal{N}]^{\leq\omega}\}| \leq |[\mathcal{N}]^{\leq\omega}|$. Por el Corolario 2.2.16, se tiene que $|[\mathcal{N}]^{\leq\omega}| \leq nw(X)^\omega$. Como $\{\langle\mathcal{E}\rangle_c : \mathcal{E} \in [\mathcal{N}]^{\leq\omega}\}$ es una red básica para $\mathcal{S}_c(X)$, deducimos que

$$nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq nw(X)^\omega. \tag{5.5}$$

Para exhibir que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq cf_c(X) + nw(X)$, supongamos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cofinal de $\mathcal{S}_c(X)$ con cardinalidad $cf_c(X)$. Argumentaremos que:

$$\mathfrak{N} := \{\langle\{T \setminus F\} \cup \mathcal{E}\rangle_c \;:\; T \in \mathcal{C} \;\wedge\; F \in [T]^{<\omega} \;\wedge\; \mathcal{E} \in [\mathcal{N}]^{<\omega}\}$$

es una red básica para $\mathcal{S}_c(X)$.

Gracias a la Proposición 3.1.1, basta con considerar $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ y $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $a = \lim S$. Tomemos $W \in \mathcal{U}$ y $T \in \mathcal{C}$ que cumplan que $a \in W$ y $S \subseteq^* T$. Por la Proposición 3.2.3, sabemos que $\lim T = a$. De esto y la elección de T, inferimos que los conjuntos $T \setminus W$ y $S \setminus (T \cap W)$ son finitos. Sean $F = T \setminus W$ y $H = S \setminus (T \cap W)$. Ahora, para cada $x \in H$, sean $U_x \in \mathcal{U}$ y $N_x \in \mathcal{N}$ tales que $x \in N_x \subseteq U_x$. Entonces el vietórico $\langle \{T \setminus F\} \cup \{N_x : x \in H\} \rangle_c$ es un elemento de $\mathfrak{N}$ que satisface que $S \in \langle \{T \setminus F\} \cup \{N_x : x \in H\} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_c$.

Recordemos que por el Lema 2.2.15, si $T \in \mathcal{C}$, entonces $|[T]^{<\omega}| = |T| = \omega$. Por ello, $|\{T \setminus F : F \in [T]^{<\omega}\}| = \omega$. Esto, en conjunto con el Lema 2.2.12, el Corolario 2.2.11 y el hecho que $cf_c(X)$ es infinito (Nota 3.2.2), implica que:

$$
\begin{aligned}
|\{T \setminus F \,:\, T \in \mathcal{C} \,\wedge\, F \in [T]^{<\omega}\}| &= \left| \bigcup_{T \in \mathcal{C}} \{T \setminus F : F \in [T]^{<\omega}\} \right| \leq \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{C}} |\{T \setminus F : F \in [T]^{<\omega}\}| = \sum_{T \in \mathcal{C}} \omega = cf_c(X) \cdot \omega = \\
&= cf_c(X).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el Lema 2.2.15 nos dice que $|[\mathcal{N}]^{<\omega}| = |\mathcal{N}| = nw(X)$. Así, aseguramos que $|\mathfrak{N}| \leq cf_c(X) + nw(X)$. Como $\mathfrak{N}$ es una red básica para $\mathcal{S}_c(X)$, concluimos que:

$$nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq cf_c(X) + nw(X). \tag{5.6}$$

Por lo tanto, usando (5.5) y (5.6), llegamos a que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq \min\{nw(X)^\omega, cf_c(X) + nw(X)\}$. □

Relacionado a la Proposición 5.1.16, si Z es un espacio segundo numerable (es decir $w(Z) = \omega$) con $|L_Z| > \omega$, (por ejemplo una esfera), el Teorema 5.1.13 y la Proposición 3.2.6 nos dicen que:

$$nw(\mathcal{S}_c(Z)) = \omega < \min\{nw(Z)^\omega, cf_c(Z) + nw(Z)\}.$$

A pesar de no contar con un resultado tan fuerte como el del Teorema 5.1.13 para el peso neto, bajo ciertas condiciones sí podemos saber cuándo coinciden el peso neto del espacio con el del hiperespacio de sucesiones convergentes.

Teorema 5.1.17. *Sea X un espacio compacto, localmente compacto, métrico o linealmente ordenado. Si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces $nw(X) = nw(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Gracias al Teorema 5.1.14, basta mostrar que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq nw(X)$.

Por los Teoremas 5.1.9 y 5.1.10, sabemos que para cualquiera de este tipo de espacios, $w(X) = nw(X)$. Ahora como $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, el Teorema 5.1.13, en conjunto con la Proposición 5.1.2, aseguran que $nw(\mathcal{S}_c(X)) \leq w(\mathcal{S}_c(X)) = w(X) = nw(X)$. □

5.2. i-peso

Únicamente para esta sección, si (X, τ) es un espacio topológico, adoptaremos la notación X_τ para referirnos a él.

Definición 5.2.1. Supongamos que τ y σ son topologías sobre un conjunto X. Entonces utilizaremos el símbolo $(X, \sigma) \leq (X, \tau)$, o simplemente $X_\sigma \leq X_\tau$, siempre que $\sigma \subseteq \tau$.
Con esto en mente, si X_τ es un espacio de Tychonoff, definimos el *i-peso* de X_τ como el menor cardinal de la forma $w(X_\sigma)$, donde X_σ es un espacio de Tychonoff tal que $X_\sigma \leq X_\tau$. Denotaremos esto por $iw(X_\tau)$, es decir:

$$iw(X_\tau) = \text{mín}\{w(X_\sigma) \ : \ (X_\sigma \leq X_\tau) \wedge (X_\sigma \text{ es de Tychonoff})\}.$$

Observemos que, por el Teorema 2.4.19, si X es un espacio de Tychonoff, entonces también lo es $\mathcal{S}_c(X)$.

Para la siguente proposición, es conveniente recordar la noción de traza definida en la Sección 2.3.

Proposición 5.2.2. *Si X_τ es un espacio de Tychonoff, entonces $iw(\mathcal{S}_c(X_\tau)) \leq iw(X_\tau)$.*

Demostración. Cuando $\mathcal{S}_c(X_\tau) = \emptyset$, obtenemos que $iw(\mathcal{S}_c(X_\tau)) = 0$, cumpliendo la desigualdad. Presupongamos que $\mathcal{S}_c(X_\tau) \neq \emptyset$.

Consideremos un espacio de Tychonoff X_σ de manera que $iw(X_\tau) = w(X_\sigma)$ y $X_\sigma \leq X_\tau$. Tomemos $S \in \mathcal{S}_c(X_\tau)$ con $\text{lím}\, S = p$. Si V es un subconjunto abierto de X_σ que contiene a p, como $X_\sigma \leq X_\tau$, se tiene que $|S \setminus V| < \omega$; en otras palabras, $S \in \mathcal{S}_c(X_\sigma)$. Deducimos que $\mathcal{S}_c(X_\tau) \subseteq \mathcal{S}_c(X_\sigma)$. Así, sea E el espacio resultante de dotar a $\mathcal{S}_c(X_\tau)$ con la topología relativa de $\mathcal{S}_c(X_\sigma)$, es decir,

$$E = \Big(\mathcal{S}_c(X_\tau)\ ,\ \tau_{\mathcal{S}_c(X_\sigma)} \restriction \mathcal{S}_c(X_\tau)\Big).$$

Debido a que X_σ es un espacio de Tychonoff, $\mathcal{S}_c(X_\sigma)$ también lo es, lo cual implica que E es de Tychonoff. Ahora, por el Teorema 3.1.1, sabemos que si $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X_\sigma)$, el vietórico $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ es un subconjunto abierto básico de $\mathcal{S}_c(X_\sigma)$. Por ende, $\langle \mathcal{U} \rangle_c \cap E$ es un subconjunto abierto básico de E. Por otra parte, el hecho que $X_\sigma \leq X_\tau$ asegura que $\mathfrak{C}(X_\sigma) \subseteq \mathfrak{C}(X_\tau)$, de manera que $\langle \mathcal{U} \rangle_c \cap E$ es un subconjunto abierto en la topología de Vietoris de $\mathcal{S}_c(X_\tau)$. Por lo tanto, $E \leq \mathcal{S}_c(X_\tau)$.

Del parrafo anterior, deducimos que $iw(\mathcal{S}_c(X_\tau)) \leq w(E)$. Más aún, la Proposición 5.1.2 y el Teorema 5.1.13 garantizan que $w(E) \leq w(\mathcal{S}_c(X_\sigma)) = w(X_\sigma) = iw(X_\tau)$. Concluimos que $iw(\mathcal{S}_c(X_\tau)) \leq iw(X_\tau)$. $\square$

5.3. π-peso

La última función cardinal relacionada con el peso que veremos es la del π-peso. Una de las propiedades más útiles de esta función es que, como veremos en el Teorema 5.3.5, el π-peso del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales está completamente determinado por el espacio original y su conjunto de puntos límites.

Definición 5.3.1. Consideremos una familia de subconjuntos abiertos no vacíos, $\mathcal{P}$, de un espacio X. Diremos que $\mathcal{P}$ es una *π-base para X* si cada subconjunto abierto no vacío de X contiene a un miembro de $\mathcal{P}$. Naturalmente, el *π-peso* de X, $\pi w(X)$, es la menor cardinalidad de una π-base para X.

Para el siguiente lema, el lector quizás quiera revisar la pequeña parte sobre celularidad que incluimos en la Sección 3.2.

Lema 5.3.2. *Sea X un espacio. Si $|X| \geq \omega$, entonces $\pi w(X) \geq \omega$. En particular, si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, ocurre que $\pi w(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$.*

Demostración. Observemos que si $\mathcal{P}$ es una π-base de X, para cualquier familia celular $\mathcal{C}$ de X se tiene que $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{P}|$. Por esto concluimos que $c(X) \leq \pi w(X)$ y, usando el Lema 3.2.8, obtenemos el resultado deseado. $\square$

Para poder obtener una fórmula relacionando el π-peso del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales con el π-peso del espacio original, necesitamos introducir la siguiente noción.

Definición 5.3.3. Dados un espacio X, un subconjunto no vacío $Y \subseteq X$ y una familia $\mathcal{P} \subseteq \tau_X$, diremos que $\mathcal{P}$ es una π-*base para Y módulo X* si:

a) $\emptyset \notin (\mathcal{P} \upharpoonright Y)$ y

b) para cada $U \in \tau_X$ tal que $U \cap Y \neq \emptyset$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq U$.

Denotaremos por $\pi w_X(Y)$ a la menor cardinalidad de una π-base para Y módulo X. Por otra parte, debido a que la traza sobre Y de cualquier π-base para Y módulo X es a su vez una π-base para Y, tenemos en automático que $\pi w(Y) \leq \pi w_X(Y)$.

Ejemplo 5.3.4. Sea X un espacio. Observemos que si $p \in X$, cualquier familia de abiertos que sea una π-base para $\{p\}$ módulo X es, de manera equivalente, una base local para X en p. En particular, si p no es un punto aislado de X, entonces (como veremos en el Lema 6.1.2),

$$\pi w(\{p\}) = 1 < \pi w_X(\{p\}).$$

Habiendo establecido este concepto, tenemos las herramientas suficientes para dar una ecuación que determine el π-peso del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 5.3.5. *Si para un espacio X ocurre que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces*

$$\pi w(\mathcal{S}_c(X)) = \pi w(X) + \pi w_X(L_X).$$

Demostración. Por hipótesis y el Lema 5.3.2, sabemos que los cardinales $\pi w(X)$ y $\pi w(\mathcal{S}_c(X))$ son infinitos. Sea $\kappa = \pi w(\mathcal{S}_c(X))$. Usando la Proposición 3.1.1, escojamos una colección $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathfrak{C}(X)$ de manera que $\{\langle \mathcal{U}_\alpha \rangle_c : \alpha < \kappa\}$ sea una π-base para $\mathcal{S}_c(X)$. Hacemos dos afirmaciones:

Afirmación (1). $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha$ es una π-base para X.

En efecto, sea W un subconjunto abierto no vacío de X. De acuerdo con el Lema 2.4.23, si W interseca a L_X, entonces $\langle W\rangle_c \neq \emptyset$. Por ende, para alguna $\alpha<\kappa$, ocurre que $\langle \mathcal{U}_\alpha\rangle_c \subseteq \langle W\rangle_c$. Así, el Lema 3.1.4 garantiza que $\bigcup \mathcal{U}_\alpha \subseteq W$.

Por otra parte, cuando $W\cap L_X=\emptyset$, podemos fijar $S\in\mathcal{S}_c(X)$ y $z\in W$, observando que $\lim S\neq z$. Sean $U,V\in\tau_X$ ajenos tales que $z\in U$ y $S\setminus\{z\}\subseteq V$. Como, $S\cup\{z\}\in\langle U\cap W, V\rangle_c$, consideremos $\beta<\kappa$ y $T\in\mathcal{S}_c(X)$ de manera que $T\in\langle\mathcal{U}_\beta\rangle_c\subseteq\langle U\cap W,V\rangle_c$. Se sigue que $\lim T\in(U\cap W)\cup V$, pero dado lo presupuesto sobre W, obtenemos que $\lim T\in V$. En particular, $T\cap(U\cap W)$ es finito. Por el Lema 3.1.3, existe $G\in\mathcal{U}_\beta$ con $G\subseteq W\cap U\subseteq W$.

Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha$ es una π-base para X.

Afirmación (2). $\{P\in\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \,:\, P\cap L_X\neq\emptyset\}$ es una π-base para L_X módulo X.

Sea $W\in\tau_X$ tal que la intersección de W con L_X sea no vacía. Entonces $\langle W\rangle_c\neq\emptyset$ (Lema 2.4.23) y, por ello, $\langle\mathcal{U}_\alpha\rangle_c\subseteq\langle W\rangle_c$ para alguna $\alpha<\kappa$. Usando nuevamente el Lema 3.1.4, ocurre que $\bigcup\mathcal{U}_\alpha\subseteq W$. Dado que $\{\langle\mathcal{U}_\alpha\rangle_c : \alpha<\kappa\}$ es una π-base para $\mathcal{S}_c(X)$, se tiene que $\langle\mathcal{U}_\alpha\rangle_c\neq\emptyset$. Por lo tanto, existe $P\in\mathcal{U}_\alpha$ de manera que $P\cap L_X\neq\emptyset$.

Se sigue que $\{P\in\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \,:\, P\cap L_X\neq\emptyset\}$ es una π-base para L_X módulo X.

De acuerdo con el Corolario 2.2.11 y el Teorema 2.2.12, sabemos que $|\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha|\leq\kappa$. Por ello, como $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha$ y $\{P\in\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \,:\, P\cap L_X\neq\emptyset\}$ son una π-base para X y una π-base para L_X módulo X, respectivamente, deducimos que $\pi w(X)\leq\kappa$ y $\pi w_X(L_X)\leq\kappa$. Se sigue del Corolario 2.2.11 que $\pi w(X)+\pi w_X(L_X)\leq\kappa$.

Para la desigualdad restante, argumentaremos que si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son una π-base para X y una π-base para L_X módulo X, respectivamente, entonces:

$$\mathfrak{B}=\{\langle\mathcal{V}\rangle_c \,:\, \mathcal{V}\in[\mathcal{P}\cup\mathcal{P}']^{<\omega} \;\wedge\; \mathcal{V}\cap\mathcal{P}'\neq\emptyset\}$$

es una π-base para $\mathcal{S}_c(X)$. Supongamos que $|\mathcal{P}|=\pi w(X)$ y que $|\mathcal{P}'|=\pi w_X(L_X)$. Observemos que, por construcción, para cada $\langle\mathcal{V}\rangle_c\in\mathfrak{B}$, existe $U\in\mathcal{P}'\cap\mathcal{V}$. Como $\emptyset\notin\mathcal{P}'\restriction L_X$, se sigue que existe $x\in U\cap L_X$. Luego, el Lema 2.4.23 garantiza que $\langle U\rangle_c\cap\mathcal{S}_c(X,x)\neq\emptyset$; es decir, existe $S_0\in\langle U\rangle_c$. Por otra parte, como $\mathcal{P}$ es una π-base para X, sabemos que para cada $V\in\mathcal{P}\cap\mathcal{V}$, existe $x_V\in V$. Así, la Observación 2.4.21 garantiza que $S_0\cup\{x_V : V\in\mathcal{P}\cap\mathcal{V}\}\in\langle\mathcal{V}\rangle_c$. De esta manera, notamos que $\mathfrak{B}$ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{S}_c(X)$.

Sea $\mathcal{W}\in\mathfrak{C}(X)$ tal que $\langle\mathcal{W}\rangle_c\neq\emptyset$. Fijamos $W\in\mathcal{W}$ y $W'\in\mathcal{P}'$ de manera que $W\cap L_X\neq\emptyset$ y $W'\subseteq W$. Además, para cada $V\in\mathcal{W}\setminus\{W\}$, tomemos $V'\in\mathcal{P}$, con $V'\subseteq V$. Entonces si definimos:

$$\mathcal{V}'=\{V' : V\in(\mathcal{W}\setminus\{W\})\}\cup\{W'\},$$

ocurre que $\langle\mathcal{V}'\rangle_c\in\mathfrak{B}$ y, gracias al Lema 2.4.11, $\langle\mathcal{V}'\rangle_c\subseteq\langle\mathcal{W}\rangle_c$. Por lo tanto, $\mathfrak{B}$ es una π-base para $\mathcal{S}_c(X)$. Finalmente, el Lema 2.2.15 nos dice que

$$|\mathfrak{B}|\leq|[\mathcal{P}\cup\mathcal{P}']^{<\omega}|=|\mathcal{P}\cup\mathcal{P}'|\leq|\mathcal{P}|+|\mathcal{P}'|=\pi w(X)+\pi w_X(L_X),$$

con lo que se tiene que $\kappa\leq\pi w(X)+\pi w_X(L_X)$. $\square$

Notemos que si Y es un subespacio denso de un espacio X, cualquier π-base para X es una π-base para Y módulo X y, por ende, $\pi w_X(Y)\leq\pi w(X)$. En particular se tiene el siguiente corolario:

Corolario 5.3.6. *Para cualquier espacio X con abundantes sucesiones, $\pi w(\mathcal{S}_c(X)) = \pi w(X)$.*

Demostración. Por el Lema 5.3.2, $\pi w(X)$ y $\pi w(\mathcal{S}_c(X))$ son infinitos. Luego, como L_X es denso en X, el Teorema 5.3.5 nos dice que $\pi w(\mathcal{S}_c(X)) = \pi w(X) + \pi w_X(L_X) = \pi w(X)$. □

Los siguientes dos ejemplos nos darán un acercamiento a la relación entre el π-peso de un espacio y el π-peso módulo X del conjunto de puntos límites de este. Sería interesante determinar condiciones suficientes y necesarias sobre un espacio X para que las desigualdades $\pi w(X) \leq \pi w_X(L_X)$ y $\pi w(X) \geq \pi w_X(L_X)$ se satisfagan.

Ejemplo 5.3.7. Un espacio en el que $\pi w(X) < \pi w_X(L_X)$.

Sea X el abanico secuencial de ω espinas, $S(\omega)$. Si p es el único punto no aislado de X, entonces $\{\{x\} : x \in X \setminus \{p\}\}$ es una π-base para X, garantizando que $\pi w(X) \leq \omega$.

Por otro lado, en el Ejemplo 5.3.4 argumentamos que las π-bases para $\{p\}$ módulo X coinciden con las bases locales para p en X. Recordando el resultado de la Proposición 2.6.3, concluimos que:

$$\pi w(X) \leq \omega < \pi w_X(\{p\}) = \pi w_X(L_X).$$

Ejemplo 5.3.8. Un espacio para el cual $\pi w(X) > \pi w_X(L_X)$.

Consideremos $\omega+1$ como un espacio topológico linealmente ordenado y $\omega_1 \setminus (\omega+1)$ como un espacio discreto. Definimos $X = (\omega+1) \oplus (\omega_1 \setminus (\omega+1))$. Observemos que, por ser $\omega_1 \setminus (\omega+1)$ discreto, entonces $L_X = \{\omega\}$. Como $\{(\omega+1) \setminus n : n \in \omega\}$ es una base local para ω en $(\omega+1)$, también lo es para X en ω. De esto, deducimos que $\pi w_X(L_X) \leq \omega$. Debido a que $\omega_1 \setminus (\omega+1)$ es discreto, cualquier π-base para X contiene a la colección $\{\{\alpha\} : \alpha \in \omega_1 \setminus (\omega+1)\}$, que tiene cardinalidad mayor que ω. Por ello:

$$\pi w(X) > \omega = \pi w_X(L_X).$$

Capítulo 6

El Carácter de $\mathcal{S}_c(X)$

La última función cardinal que trataremos es la que estudia el carácter del hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales. Para mantener la analogía que hemos presentado en los capítulos pasados, el carácter incluye (de cierta manera) el estudio de la primera numerabilidad, indagando sobre las propiedades del espacio cuando el tamaño de las bases locales es mayor que ω.

Presentaremos también las funciones relacionadas de π-carácter y pseudocarácter. Nuevamente, trataremos de incluir ejemplos para esclarecer algunos resultados.

6.1. Carácter

Definición 6.1.1. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos el carácter de un punto $x \in X$, denotado por $\chi(x, X)$, como la mínima cardinalidad de una base local para x en X. Con esto en mente, definimos el carácter de X de la siguiente manera:

$$\chi(X) := \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Lema 6.1.2. *Sea X un espacio. Si $x \in X$ no es un punto aislado, entonces $\chi(x, X) \geq \omega$.*

Demostración. Presupongamos que x no es un punto aislado, pero que $\chi(x, X) = n$ para algún $n \in \omega$. Sea $\beta = \{B_i\}_{i=1}^n$ una base local para x tal que $|\beta| = n$. Así, $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$, el cual es un subconjunto abierto de X. Como x no es un punto aislado, $\{x\} \neq \bigcap_{i=1}^n B_i$, por lo que existe $B_j \in \beta$ de manera que $x \in B_j \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i$. Por ello $B_j = \bigcap_{i=1}^n B_i$.

Consideremos ahora $y \in B_j \setminus \{x\}$. Como $B_j \setminus \{y\}$ es abierto en X, podemos tomar $B_k \in \beta$ con $x \in B_k \subseteq B_j \setminus \{y\}$. Sin embargo, $B_j = \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq B_k \subseteq B_j \setminus \{y\}$. Esto implica que $y \in B_j \setminus \{y\}$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\chi(x, X) \geq \omega$. $\square$

Veamos que el carácter de un espacio acota superiormente al carácter de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 6.1.3. *Si X es un espacio, entonces $\chi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \chi(X)$.*

Demostración. Si $\mathcal{S}_c(X) = \emptyset$, se sigue que $\chi(\mathcal{S}_c(X)) = 0 \leq \chi(X)$. Supongamos que existe $S \in \mathcal{S}_c(X)$ y sea $\lim S = a$. Para cada $x \in X$, tomemos una base local β_x de manera que

$|\beta_x| = \chi(x, X)$. Definimos la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathcal{B}_S := \Big\{ \big\langle \big\{ B_x : x \in (S \setminus B_a) \cup \{a\} \big\} \big\rangle_c \;:\; B_a \in \beta_a \;\;\wedge\;\; \forall x \in S \setminus B_a \; (B_x \in \beta_x) \Big\}.$$

Para entender esta familia, veamos que si $B \in \mathcal{B}_S$, entonces $B = \langle B_a, B_{x_1}, \ldots, B_{x_n} \rangle_c$, para algún $B_a \in \beta_a$, de manera que $S \setminus B_a = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $B_{x_i} \in \beta_{x_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Con esto aclarado, veamos que $\mathcal{B}_S$ es una base local para S en $\mathcal{S}_c(X)$. Gracias al Lema 3.1.1, podemos considerar $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ que satisfaga que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Como, para cada $y \in S$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$, sean $B_a \in \beta_a$ y $V \in \mathcal{U}$ de manera que $a \in B_a \subseteq V$. Similarmente, para cada $x \in S \setminus B_a$, seleccionemos $B_x \in \beta_x$ con la propiedad de que, para cierto $U \in \mathcal{U}$, suceda que $B_x \subseteq U$. Así, si:

$$B = \big\langle \big\{ B_x : x \in (S \setminus B_a) \cup \{a\} \big\} \big\rangle_c,$$

obtenemos que $S \in B$. Por otra parte, gracias a la construcción de B y el hecho que $\mathcal{U}$ es una familia celular finita, notamos que $\bigcup B \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $B_x \in \{B_x : x \in (S \setminus B_a) \cup \{a\}\}$ tal que $B_x \subseteq U$. Por ello, el Lema 2.4.11 asegura que $B \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Concluimos que $\mathcal{B}_S$ es una base local para S en $\mathcal{S}_c(X)$.

Por otro lado, como a no es un punto aislado, por el Lema 6.1.2 sabemos que $|\beta_a| \geq \omega$. Así, usando el Teorema 2.2.14, notamos que:

$$|\bigcup_{x \in S} \beta_x| \leq \sum_{x \in S} |\beta_x| = \omega \cdot \sup\{|\beta_x| : x \in S\} = \sup\{\chi(x, X) : x \in S\}.$$

Luego, el Lema 2.2.15 garantiza que:

$$|\mathcal{B}_S| \leq \left| \left[\bigcup_{x \in S} \beta_x \right]^{<\omega} \right| \leq \sup\{\chi(x, X) : x \in S\} \leq \chi(X).$$

Por lo tanto, como S fue arbitraria, llegamos a que $\chi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \chi(X)$. □

El siguiente lema es un primer acercamiento a establecer bajo qué condiciones coinciden el carácter de un espacio y el carácter de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Lema 6.1.4. *Sean X un espacio y $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Si $y \in S \setminus \{\lim S\}$ entonces ocurre que $\chi(y, X) \leq \chi(S, \mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Fijemos $\kappa = \chi(S, \mathcal{S}_c(X))$. El hecho que $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)\}$ sea una base para $\mathcal{S}_c(X)$ implica que, para cada $\alpha < \kappa$, existe $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{C}(X)$ de manera que $\{\langle \mathcal{V}_\alpha \rangle_c : \alpha < \kappa\}$ es una base local para S. En particular, para cada $\alpha < \kappa$, existe un único $V_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ tal que $y \in V_\alpha$. Definimos la familia $\mathcal{B} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, la cual, por construcción, tiene cardinalidad menor o igual a κ.

Para mostrar que $\mathcal{B}$ es una base local para y, tomemos $W \in \tau_X$ con $y \in W$. Usando el Lema 2.4.14, sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos ajenos de X con la propiedad de que $y \in U_1$ y $S \setminus \{y\} \subseteq U_2$. Observemos que $S \in \langle U_1 \cap W, U_2 \rangle_c$. Por ello, existe $\beta < \kappa$ tal que:

$$S \in \langle \mathcal{V}_\beta \rangle_c \subseteq \langle U_1 \cap W, U_2 \rangle_c.$$

Luego, como $S \cap (U_1 \cap W) = \{y\}$, el Lema 3.1.3 asegura que existe $V \in \mathcal{V}_\beta$ para el cual $y \in V \subseteq U_1 \cap W$. Por lo tanto, $V = V_\beta$ y, por ello, $\mathcal{B}$ es una base local para y. Concluimos que $\chi(y, X) \leq \kappa = \chi(S, \mathcal{S}_c(X))$. □

Con este resultado en mente, procedemos a dar una condición suficiente para que el carácter de un espacio y el de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales sean iguales.

Teorema 6.1.5. *Si un espacio X tiene al menos una sucesión convergente no trivial, entonces $\chi(X) = \chi(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Por el Teorema 6.1.3, basta probar que $\chi(X) \leq \chi(\mathcal{S}_c(X))$.

Fijemos $\kappa = \chi(\mathcal{S}_c(X))$, $S \in \mathcal{S}_c(X)$ y $z \in X$. Observemos que si $\lim S \neq z$, podemos tomar $S_0 = S \cup \{z\}$, con lo que el Lema 6.1.4 garantiza que $\chi(z, X) \leq \chi(S_0, \mathcal{S}_c(X)) \leq \chi(\mathcal{S}_c(X))$.

Supongamos que $\lim S = z$. Usando la Proposición 3.1.1 y el Lema 5.1.11, para cada $F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}$, consideremos $\mathfrak{U}_F \subseteq \mathfrak{C}(X)$ de manera que $\omega \leq |\mathfrak{U}_F| \leq \kappa$ y $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}_F\}$ sea una base local para $S \setminus F$ en $\mathcal{S}_c(X)$. Definimos la colección:

$$\mathcal{B} := \Big\{ \bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \bigcup \{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\} \Big\}.$$

Notemos que por construcción, cada elemento de $\mathcal{B}$ contiene a z: en efecto, si $\mathcal{U}_0 \in \bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}$, entonces existe $F_0 \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{U}_0 \in \mathfrak{U}_{F_0}$. Como $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}_{F_0}\}$ es una base local para $S \setminus F_0$ en $\mathcal{S}_c(X)$, esto quiere decir que $z \in U_0$ para algún $U_0 \in \mathcal{U}_0$. Por consiguiente, $z \in U_0 \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \in \mathcal{B}$. Dicho de otra manera, $z \in \bigcup \mathcal{U}_0$.

Veamos ahora que $\mathcal{B}$ es una base local para z en X. Sean V un subconjunto abierto de X con $z \in V$ y $F = S \setminus V$, el cual es finito. Con esto, $S \setminus F \in \langle V \rangle_c$, por lo que, por construcción, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_F$ que cumple que $\emptyset \neq \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle V \rangle_c$. Entonces por el Lema 3.1.4, cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en V, mostrando que $\mathcal{B}$ es una base local para z en X.

Ahora examinemos la cardinalidad de $\mathcal{B}$. Por un lado, para cada $F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}$ sabemos que $|\mathfrak{U}_F| \leq \kappa$ que, en conjunto con el Corolario 2.2.11 y los Lemas 2.2.12 y 2.2.15, nos dice:

$$\Big| \bigcup \{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\} \Big| \leq \sum_{F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}} |\mathfrak{U}_F| \leq \sum_{F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}} \kappa = \kappa \cdot \omega = \kappa.$$

De esta manera, podemos indexar $\bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}$ con κ. Así, si $\mathcal{U}_\lambda \in \bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}$ con $\lambda < \kappa$ y $|\mathcal{U}_\lambda| = \omega_\lambda$, el Corolario 2.2.11 y el Lema 2.2.12 garantizan que

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{\lambda < \kappa} |\mathcal{U}_\lambda| \leq \sum_{\lambda < \kappa} \omega_\lambda \leq \omega \cdot \kappa = \kappa. \tag{6.1}$$

Se sigue de (6.1) y el hecho que $\mathcal{B}$ sea una base local para z en X que $\chi(z, X) \leq \chi(\mathcal{S}_c(X))$. Concluimos que $\chi(X) \leq \chi(\mathcal{S}_c(X))$.

□

6.2. π-carácter

Así como introdujimos la noción de una π-base para un espacio en el capítulo pasado, podemos hablar de una π-base local para un espacio en un punto. Naturalmente, esto invita a que tratemos una función cardinal que estudie este tipo de familias.

Definición 6.2.1. Consideremos una familia, $\mathcal{P}$, de subconjuntos abiertos no vacíos de un espacio X. Dado $x \in X$, diremos que $\mathcal{P}$ es una *π-base para x en X* si, cuando ocurra que $x \in U \in \tau_X$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq U$.
Así, el *π-carácter de x*, $\pi\chi(x, X)$, es la menor cardinalidad de una π-base para x en X. Con esto, definimos el *π-carácter de X* como $\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\}$.

Una vez establecida esta definición, enfoquémonos en un resultado muy similar al del Lema 6.1.2.

Lema 6.2.2. *Sea X un espacio. Si $x \in X$ no es un punto aislado, entonces $\pi\chi(x, X) \geq \omega$.*

Demostración. Observemos que si $\mathcal{P} \in [\tau_X \setminus \{\emptyset\}]^{<\omega}$, para cada $P \in \mathcal{P}$ podemos tomar $y_P \in P \setminus \{x\}$, ya que x no es un punto aislado de X. Luego, $X \setminus \{y_P : P \in \mathcal{P}\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x, pero que no contiene ningún elemento de $\mathcal{P}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ no es una π-base para x en X. Se sigue que $\pi\chi(x, X) \geq \omega$. □

Aunque en la sección pasada el carácter de un espacio X acotaba superiormente al de su hiperespacio $\mathcal{S}_c(X)$, para el π-carácter esto no se tiene (ver Ejemplo 6.2.4). Sin embargo, sí se tiene que siempre que el espacio tenga al menos una sucesión convergente no trivial, el π-carácter de X acota inferiormente al de $\mathcal{S}_c(X)$.

Teorema 6.2.3. *Si X es un espacio para el cual $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces $\pi\chi(X) \leq \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Sea $\kappa = \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$, el cual, por la Proposición 3.1.2 y el Lema 6.2.2, sabemos que es infinito. Fijemos $z \in X$. Para mostrar que $\pi\chi(z, X) \leq \kappa$, tomemos $S_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ y asignemos $S = S_0 \cup \{z\}$. Examinamos dos casos:

Caso 1: $\lim S = z$.

Usando la Proposición 3.1.1, el Lema 5.1.11 y el hecho que cualquier base local es a su vez una π-base, para cada $F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}$, existe $\mathfrak{U}_F \in [\mathfrak{C}(X)]^{\leq\kappa}$ de manera que $\{\langle\mathcal{U}\rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}_F\}$ es una π-base para $S \setminus F$ en $\mathcal{S}_c(X)$. Definimos:

$$\mathcal{P} := \Big\{\bigcup\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}\Big\}.$$

Argumentaremos que $\mathcal{P}$ tiene a lo más κ elementos. Por un lado, para cada $F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}$ sabemos que $|\mathfrak{U}_F| \leq \kappa$, que en conjunto con el Corolario 2.2.11 y los Lemas 2.2.12 y 2.2.15, nos dice que:

$$\Big|\bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}\Big| \leq \sum_{F \in [S\setminus\{z\}]^{<\omega}} |\mathfrak{U}_F| \leq \sum_{F \in [S\setminus\{z\}]^{<\omega}} \kappa = \kappa \cdot \omega = \kappa.$$

Por ello, podemos indexar $\bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}$ con κ. Entonces si $\mathcal{U}_\lambda \in \bigcup\{\mathfrak{U}_F : F \in [S \setminus \{z\}]^{<\omega}\}$ con $\lambda < \kappa$ y $|\mathcal{U}_\lambda| = \omega_\lambda$, el Lema 2.2.12 asegura que:

$$|\mathcal{P}| \leq \sum_{\lambda<\kappa} |\mathcal{U}_\lambda| \leq \sum_{\lambda<\kappa} \omega_\lambda \leq \omega \cdot \kappa = \kappa. \tag{6.2}$$

Veamos que $\mathcal{P}$, además, es una π-base para z en X. Tomemos $V \in \tau_X$ tal que $z \in V$ y sea $F = S \setminus V$. Entonces F es finito y $S \setminus F \in \langle V \rangle_c$. Esto garantiza la existencia de $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_F$ con la propiedad de que $\emptyset \neq \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle V \rangle_c$. Bajo estas condiciones, el Lema 3.1.4 nos dice que $\bigcup \mathcal{U} \subseteq V$, mostrando que, efectivamente, $\mathcal{P}$ es una π-base para z en X. Concluimos usando (6.2) que $\pi\chi(z, X) \leq \kappa$.

Caso 2: $\lim S \neq z$

Como en el caso anterior, sea $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{C}(X)$ tal que $|\mathfrak{U}| \leq \kappa$ y $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}\}$ sea una π-base para S en $\mathcal{S}_c(X)$. Usando el Lema 2.4.14, elegimos dos subconjuntos abiertos ajenos de X, W_1 y W_2, para los cuales $z \in W_1$ y $S \setminus \{z\} \subseteq W_2$. Definimos:

$$\mathcal{W} := \left\{ W \cap W_1 \ : \ W \in \bigcup \mathfrak{U} \ \wedge \ W \cap W_1 \neq \emptyset \right\}$$

el cual, por el Lema 2.2.17, tiene cardinalidad $\leq \kappa$. Argumentaremos que $\mathcal{W}$ es una π-base para z en X. Presupongamos que $z \in V \in \tau_X$. Debido a que $S \in \langle V \cap W_1, W_2 \rangle_c$, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ que satisface que $\emptyset \neq \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \langle V \cap W_1, W_2 \rangle_c$. Si $T \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, podemos tomar $W \in \mathcal{U}$ de manera que $T \cap (V \cap W_1) \cap W \neq \emptyset$. Luego, el Lema 3.1.4 asegura que $W \subseteq \bigcup \mathcal{U} \subseteq (V \cap W_1) \cup W_2$, con lo que queda establecido que $W \cap W_1 \subseteq V \cap W_1 \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathcal{W}$ es una π-base para z en X con a lo más κ elementos. Luego, $\pi\chi(z, X) \leq \kappa$.

Como z fue arbitrario, se sigue de ambos casos que $\pi\chi(X) \leq \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$. □

Ejemplo 6.2.4. Un espacio para el cual $\pi\chi(X) < \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$.

Sean X el abanico secuencial de ω espinas y p el único punto de acumulación de este. Argumentaremos que $\pi\chi(X) = \omega < \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$.

Como $\{\{x\} : x \in X \setminus \{p\}\}$ es una π-base para p en X, el Lema 6.2.2 asegura que $\pi\chi(X) = \omega$. Sea $\kappa = \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$. Por la Proposición 3.1.2, sabemos que $\mathcal{S}_c(X)$ es denso en sí mismo, así que el Lema 6.2.2 garantiza que $\kappa \geq \omega$. Probaremos que $\kappa > \omega$.

Fijemos $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Consideremos $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{C}(X)$ tal que $|\mathfrak{U}| \leq \kappa$ y que $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}\}$ sea una base local para $\mathcal{S}_c(X)$ en S. Para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, tomemos $U_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ de manera que $p \in U_{\mathcal{U}}$. Definimos la familia:

$$\mathcal{B} = \left\{ U_{\mathcal{U}} \setminus F \ : \ (\mathcal{U}, F) \in \mathfrak{U} \times [S \setminus \{p\}]^{<\omega} \right\}$$

la cual tiene a lo más $\kappa \cdot |[S \setminus \{p\}]^{<\omega}|$ elementos. Usando el Lema 2.2.15, deducimos que:

$$|\mathcal{B}| \leq \kappa.$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base local para p en X. Supongamos que $p \in V \in \tau_X$ y sea $\mathcal{V} = \{V\} \cup \{\{x\} : x \in S \setminus V\}$. Como $S \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}$ que satisface que $\langle \mathcal{W} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$.

Además, $p \in U_{\mathcal{W}} \setminus (S \setminus V)$, por lo que basta probar que $U_{\mathcal{W}} \setminus (S \setminus V) \subseteq V$ para obtener lo deseado. Consideremos $z \in U_{\mathcal{W}} \setminus (S \setminus V)$ y $T \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$. Entonces $T \cup \{z\} \in \langle \mathcal{W} \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_c$, así que, por la elección de z y de $\mathcal{V}$, esto implica que $z \in V$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base local para p en X.

Por último, la Proposición 2.6.3 asevera que X no es primero numerable en p, de lo que concluimos que $\omega < |\mathcal{B}| \leq \kappa$. $\square$

El siguiente teorema nos brindará un primer acercamiento a poder determinar una clase de espacios cuyo π-carácter coincida con el de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 6.2.5. *Sea X un espacio. Si $L_X \subseteq int(\overline{L_X})$, entonces $\pi\chi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \pi\chi(X)$.*

Demostración. Supongamos $T \in \mathcal{S}_c(X)$ arbitrario. Para cada $x \in T$, sea $\mathcal{P}_x$ una π-base para x en X que satisfaga que $\pi\chi(x, X) = |\mathcal{P}_x|$. Denotemos $\lim T = a$.

Dado $U \in \tau_X$ con $a \in U$, como $a \in U \cap int(\overline{L_X})$, existe $P \in \mathcal{P}_a$ de manera que $P \subseteq U \cap int(\overline{L_X}) \subseteq U$. Por ello, sin pérdida de generalidad, podemos presuponer que cada elemento P de $\mathcal{P}_a$ es un subconjunto de $\overline{L_X}$. Sea $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in T\}$.

Definimos:

$$\mathfrak{P} := \{\langle \mathcal{U} \rangle_c \,:\, \mathcal{U} \in [\mathcal{P}]^{<\omega} \;\wedge\; \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_a \neq \emptyset\}.$$

Mostraremos que $\mathfrak{P}$ es una π-base para T en $\mathcal{S}_c(X)$. Consideremos un subconjunto finito $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}$ y $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_a$. Por lo presupuesto sobre $\mathcal{P}_a$, se tiene que $U \cap L_X \neq \emptyset$. Esto, en conjunción con el Lema 2.4.23, muestra que los miembros de $\mathfrak{P}$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{S}_c(X)$. Ahora, tomemos $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}(X)$ y $W \in \mathcal{V}$ que cumplan que $T \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$ y $a \in W$. Entonces existe $W' \in \mathcal{P}_a$ tal que $W' \subseteq W$. Como $T \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$, para cada $V \in \mathcal{V} \setminus \{W\}$, existe $x_V \in T \cap V$, así que podemos fijar $V' \in \mathcal{P}_{x_V}$ de manera que $V' \subseteq V$. Por lo tanto, si $\mathcal{W} = \{V' : V \in \mathcal{V} \setminus \{W\}\} \cup \{W'\}$, entonces el Lema 2.4.11 garantiza que $\langle \mathcal{W} \rangle_c$ es un miembro de $\mathfrak{P}$ contenido en $\langle \mathcal{V} \rangle_c$. Esto prueba que $\mathfrak{P}$ es una π-base para T en $\mathcal{S}_c(X)$.

Por último, los Lemas 2.2.15 y 6.2.2 aseguran que $\omega \leq |\mathcal{P}| \leq |\mathfrak{P}| \leq \pi\chi(X)$, así que, como T fue arbitraria, concluimos que $\pi\chi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \pi\chi(X)$. $\square$

Como consecuencia de este último Teorema surge un corolario que, de manera similar al Teorema 6.1.5, da una condición suficiente para que el π-carácter de un espacio y el de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales coincidan. La prueba se sigue de los Teoremas 6.2.3 y 6.2.5, observando que para cualquier subconjunto denso Y de un espacio X, se tiene que $int(\overline{Y}) = X$.

Corolario 6.2.6. *Sea X un espacio con abundantes sucesiones. Entonces $\pi\chi(X) = \pi\chi(\mathcal{S}_c(X))$.* $\square$

6.3. Pseudocarácter

La última función relacionada al carácter que trataremos será la de pseudocarácter. Aunque es una noción un poco más rebuscada que la de carácter o π-carácter, conocer el pseudocarácter de un espacio nos puede dar resultados bastante útiles. Por ejemplo, los espacios con pseudocarácter numerable son aquellos donde cada punto es un conjunto G_δ.

Definición 6.3.1. Dados un espacio X y un punto $x \in X$, decimos que una colección $\mathcal{P} \subseteq \tau_X$ es una *pseudobase para x en X* si $\bigcap \mathcal{P} = \{x\}$.
El símbolo $\psi(x, X)$ representará el *pseudocarácter de x*, es decir, la menor cardinalidad de una pseudobase para x en X. De acuerdo a esto, definimos el *pseudocarácter de X* como $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$.

Como en las secciones de carácter y π-carácter, tenemos la siguiente propiedad en puntos que no sean aislados.

Lema 6.3.2. *Sea X un espacio. Si $x \in X$ no es un punto aislado, entonces $\psi(x, X) \geq \omega$. En particular, si $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, ocurre que $\psi(\mathcal{S}_c(X)) \geq \omega$.*

Demostración. Observemos que si una pseudobase $\mathcal{P}$ para x en X fuera finita, entonces $\{x\}$ sería un punto aislado de X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\psi(x, X) \geq \omega$. Finalmente, presupongamos que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$. La Proposición 3.1.2 nos dice que ningún punto de $\mathcal{S}_c(X)$ es aislado, así que el resultado se sigue del párrafo anterior, el Teorema 2.4.16 y la Proposición 2.3.5. $\square$

De manera interesante, no hay que pedir ninguna condición importante sobre un espacio para que su pseudocarácter coincida con el de su hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 6.3.3. *Si X es un espacio tal que $\mathcal{S}_c(X) \neq \emptyset$, entonces $\psi(X) = \psi(\mathcal{S}_c(X))$.*

Demostración. Primero mostraremos que $\psi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \psi(X)$. Fijemos $\kappa = \psi(X)$ y $S \in \mathcal{S}_c(X)$ con $\lim S = a$. Para cada $x \in S$, sea $\mathcal{P}_x$ una pseudobase para x en X con $|\mathcal{P}_x| \leq \kappa$. Notemos que siempre que $x \in S \setminus \{a\}$, podemos presuponer que:

$$X \setminus (S \setminus \{x\}) \in \mathcal{P}_x. \tag{6.3}$$

Definimos $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in S\}$ y $\mathfrak{P} = \{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in [\mathcal{P}]^{<\omega} \ \wedge \ S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c\}$. De acuerdo al Lema 2.2.17, sabemos que:

$$|\mathcal{P}| = |\{\mathcal{P}_x : x \in S\}| \cdot \sup\{|\mathcal{P}_x| : x \in S\} \leq \kappa.$$

Luego, como $\kappa \geq \omega$ (Lema 6.3.2), el Lema 2.2.15 asegura que $|\mathfrak{P}| \leq \kappa$. Por esto, basta con argumentar que $\mathfrak{P}$ es una pseudobase para $\mathcal{S}_c(X)$ en S.

Como $S \in \bigcap \mathfrak{P}$, consideremos $T \in \mathcal{S}_c(X) \setminus \{S\}$ arbitrario. Tomamos dos casos:

Caso 1: Existe $z \in T \setminus S$.

Fijemos $U_a \in \mathcal{P}_a$ de manera que $z \notin U_a$, y, para cada $x \in S \setminus U_a$, escojamos $U_x \in \mathcal{P}_x$ tal que $z \notin U_x$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_x : x \in \{a\} \cup (S \setminus U_a)\}$ es un elemento de $[\mathcal{P}]^{<\omega}$ que satisface que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ y que $T \notin \langle \mathcal{U} \rangle_c$.

Caso 2: $T \subseteq S$.

Notemos que, como $T \subseteq S$, en particular $T \subseteq^\star S$. Por ello, la Proposición 3.2.3 asegura que $a \in T$. Ahora bien, como existe $z \in S \setminus T$, se sigue que $z \neq a$. Por la condición (6.3) existe también $U_z \in \mathcal{P}_z$ tal que $U_z \cap T = \emptyset$. Sea $U_a \in \mathcal{P}_a$ arbitrario y, para cada $x \in S \setminus (U_a \cup \{z\})$, elegimos $U_x \in \mathcal{P}_x$. Entonces $\mathcal{V} = \{U_x : x \in (S \setminus U_a) \cup \{a, z\}\}$ cumple que $\langle \mathcal{V} \rangle_c \in \mathfrak{P}$ y $T \notin \langle \mathcal{V} \rangle_c$.

Por lo tanto, $\bigcap \mathfrak{P} = \{S\}$, es decir, $\mathfrak{P}$ es una pseudobase para S en $\mathcal{S}_c(X)$. Esto muestra que, en efecto, $\psi(\mathcal{S}_c(X)) \leq \psi(X)$.

Para probar que $\psi(X) \leq \psi(\mathcal{S}_c(X))$, supongamos que $\lambda = \psi(\mathcal{S}_c(X))$. Se sigue de la Proposición 3.1.2 y el Lema 6.3.2 que $\lambda \geq \omega$. Estableceremos que si $x \in X$, entonces $\psi(x, X) \leq \lambda$.

Consideremos $S_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ y sea $S = S_0 \cup \{x\}$. Usando la Proposición 3.1.1, el Lema 5.1.11 y el hecho que en un espacio de Hausdorff cualquier base local es a su vez una pseudobase, sea $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{C}(X)$ tal que $|\mathfrak{U}| \leq \lambda$ y $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in \mathfrak{U}\}$ es una pseudobase para S en $\mathcal{S}_c(X)$. Entonces:

$$\mathcal{P} = \left\{U \in \bigcup \mathfrak{U} : x \in U\right\}$$

es una familia de subconjuntos abiertos de X con a lo más λ elementos (Lema 2.2.17). No sólo esto, sino que, además, $x \in \bigcap \mathcal{P}$, por lo que únicamente restaría probar que $\bigcap \mathcal{P} \subseteq \{x\}$. Fijemos $z \in X \setminus \{x\}$. Exploramos dos casos:

Caso 1: $z \notin S$.

Sea $T = S \cup \{z\}$. Como $z \notin S$, usando la Observación 2.4.21, deducimos que $T \in \mathcal{S}_c(X) \setminus \{S\}$. De esta manera, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ para el cual $T \notin \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Dado que S interseca a cada elemento de $\mathcal{U}$, se sigue que $z \notin \bigcup \mathcal{U}$. Así, al tomar $U \in \mathcal{U}$ con la propiedad de que $x \in U$, llegamos a que $U \in \mathcal{P}$ y $z \notin U$.

Caso 2: $z \in S$.

Si $t \in \{x, z\} \setminus \{\lim S\}$, se cumple que $S \setminus \{t\} \in \mathcal{S}_c(X) \setminus \{S\}$. Sea $R = S \setminus \{t\}$. Entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ con $R \notin \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Como $R \subseteq S \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, hay un $W \in \mathcal{U}$ que no interseca a R. Más aún, el hecho de que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ implica que $S \cap W \neq \emptyset$, que, a su vez, nos permite inferir que $W \cap S = \{t\}$. Ahora, si $t = x$, tendríamos que $W \in \mathcal{P}$ y $z \notin W$, obteniendo el resultado deseado. Por otro lado, si $t = z$, consideremos $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V$. Luego, $V \in \mathcal{P}$ y, como $\mathcal{U}$ es celular, concluimos que $\{z\} = W \cap S \subseteq X \setminus V$.

En ambos casos obtenemos que $\bigcap \mathcal{P} \subseteq \{x\}$, probando que $\mathcal{P}$ es una pseudobase para x en X. De esta manera, $\psi(x, X) \leq \lambda$ y, como x fue arbitrario, se tiene que $\psi(X) \leq \lambda = \psi(\mathcal{S}_c(X))$.

$\square$

Bibliografía

[1] J. Camargo, D. Maya y P. Pellicer-Covarrubias *Path connectedness, local path connectedness and contractibility of* $\mathcal{S}_c(X)$, (2018), arXiv: 1802.00725 [math.GN].

[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[3] S. García-Ferrer y Y.F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topology and its Applications 196 (2015), 795-804.

[4] S. García-Ferrer y R. Rojas-Hernández, *Connectedness like properties on the hyperspace of convergent sequences*, Topology and its Applications 230 (2017), 639-647.

[5] S. García-Ferrer, R. Rojas-Hernández y Y.F. Ortiz-Castillo, *Categorical properties on the hyperspace of convergent sequences*, (2016), arXiv: 1611.08289 [math.GN].

[6] A. Hajnal e I. Juhász, *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, Acta Mathematica Hungarica 20 (1969), 25-37.

[7] F.H. Hernández, *Teoría de Conjuntos: una Introducción*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[8] A. Illanes y S. Nadler, *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 216, Dekker, 1999.

[9] I. Juhász, *Cardinal functions in topology: ten years later*, Mathematical Centre tracts, Mathematisch Centrum, 1980.

[10] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences*, Mathematica Slovaca 68 (2018), no. 2, 431-450.

[11] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza *General properties of the hyperspace of convergent sequences*, Topology Proceedings 51 (2018), 143-168.

[12] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *Induced mappings on the hyperspace of convergent sequences*, Topology and its Applications 229 (2017), 152-182.

[13] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Transactions of the American Mathematical Society 71 (1951), no. 1, 152-182.

[14] J.R. Munkres, *Topología*, Pearson Educación, 2002.

[15] M. Polawski, *The Baire category of the hyperspace of nontrivial convergent sequences*, (2018), arXiv: 1801.05633 [math.GN].