



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA  
AVANZADA

LICENCIATURA EN TECNOLOGÍA

LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA Y  
ALGEBRAICA DE LAS ROTACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN TECNOLOGÍA

PRESENTA:

ANDRÉS GARCÍA GARCÍA

ASESOR DE TESIS:

LUIS MONTEJANO PEIMBERT

COASESOR:

VALENTIN JIMÉNEZ DE SANTIAGO



SANTIAGO DE QUERÉTARO, MÉXICO

MAYO, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# La representación geométrica y algebraica de las rotaciones

por

Andrés García García

Tesis presentada para obtener el título de

Licenciado en Tecnología

en el

CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Santiago de Querétaro, México. Mayo, 2019



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA  
 FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES, CUAUTITLÁN  
 LICENCIATURA EN TECNOLOGÍA



Votos Aprobatorios

**COMITÉ ACADÉMICO DE LA  
 LICENCIATURA EN TECNOLOGÍA**

Presente

En cumplimiento del Artículo 26 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la Tesis de título  
La representación geométrica y algebraica de las rotaciones

que realizó el (la) pasante

Andrés García García

con número de cuenta: 414050903, bajo la opción de titulación por Tesis y Examen profesional en la Licenciatura en Tecnología.

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro **VOTO APROBATORIO**.

	NOMBRE	FIRMA
PRESIDENTE	Dr. José Luis Aragón Vera	
VOCAL	Dra. Cristy Leonor Asanza Ricardo	
SECRETARIO	Dra. Amanda Montejano Cantoral	
1er. SUPLENTE	Dr. Saúl Iván Hernández Hernández	
2º SUPLENTE	Dra. Beatriz Millán Malo	

Atentamente  
**"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"**

UNAM, Campus Juriquilla, Oro. a 16 de Mayo de 20 19.

*Al lector  
a quien espero poder contagiar,  
al menos por un “milímetro de segundo”<sup>1</sup>  
(o menos, como cinco)<sup>2</sup>  
de mi gusto, amor y pasión por estos temas.  
<(O.O)>*

---

<sup>1</sup>...Como diría el buen Maduro (Presidente Venezolano) <https://youtu.be/MWydurfZq8>

<sup>2</sup>...Como diría Peña Nieto (Extlatoani Mexicano) <https://youtu.be/CSh09EZd51A>

# Agradecimientos

Realmente es cierto que ninguna persona es una isla, y este trabajo no lo hubiera podido terminar (ni siquiera hubiera pensado en comenzarlo) si no hubiera sido por las circunstancias y las personas particulares que han estado en mi vida. Este agradecimiento está principalmente dirigido a todas esas cosas que tuvieron que acomodarse para que yo el día de hoy pueda estar escribiendo estas palabras, concluyendo este trabajo.

Por otro lado, me es posible identificar a un puñado de personas cuyo apoyo me ha resultado esencial para llegar a este punto. Los más importantes son mis padres que me han mostrado su comprensión y apoyo desde el principio, y me han ayudado a crecer mostrandome que también son humanos que tienen virtudes y defectos, pero que siempre me mostrarán su amor incondicional. Los amo.

También a mi hermanito, quien me inspira a ser mejor cada día y por quien daría cualquier cosa.

A mi familia en general.

A Fernanda Espejo, mi chica loca, quien me ha enseñado a librarme de mis miedos. Quien me tranquiliza en mis tiempos de estrés y me demuestra su cariño y apoyo con un abrazo y un “Tú puedes, confío en tí...:3”.

A mis amigos, en especial a Edgar, quien a pesar de cualquier cosa me demuestra su apoyo siempre. A Azu, con quien el chisme y el cotorreo nunca faltan :P A Bernardo y a Isvi, quienes me echan porras de lejos.

A mis asesores, Luis y Valentín, quienes me introdujeron a estos temas y que me han apoyado a cada paso. Quienes me han permitido experimentar y opinar sin juzgarme o detenerme, y cuyas críticas son siempre constructivas. Sin este apoyo me temo que no hubiera disfrutado o concluído este proceso.

A las personas que han creído en mí y me han abierto las puertas para superarme, como el Dr. Saúl Iván Hernández Hernández, los Doctores Alfredo Varela Echávarri y Carlos Lozano Flores junto con toda la banda del laboratorio A03 del INB, la Dra. Cristy Leonor Azanza Ricardo, el ing. Carlos Sair Flores Bautista y la banda del LAVIS. A la Dra. Maribel Hernández Rosales y el equipo bioinformático. A todos aquellos que han creído en mi y cuyos nombres no puedo recordar. Gracias.

Finalmente, al investigar sobre estos temas, fué invaluable la ayuda de herramientas y páginas como Google.com, Dropbox y GitHub. A su vez, MathOverflow era el sitio a donde caía cuando necesitaba respuestas o encontraba un hueso duro de roer. También, fué invaluable la cantidad de información relevante que encontré gracias a Wikipedia,

Library Genesis, Sci-Hub y ArXiv. Sin esos sitios este trabajo no sería lo mismo, ya que siempre es iluminador tomar en cuenta puntos de vista y perspectivas diversas.

Por último, nadie piensa bien con la barriga vacía, y en este aspecto, Vito's Pizza, los tacos de Don Agus, los tacos de Los Primos y el Yamasan Ramen hicieron buen paro.

Gracias a tí también porque leíste mis agradecimientos :D

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	VIII
0.2. Justificación . . . . .	IX
0.2.1. Teoría de grupos; el lenguaje de la simetría . . . . .	IX
0.2.2. Rotaciones . . . . .	IX
0.3. Objetivos . . . . .	X
0.4. Metodología . . . . .	X
<b>I Marco teórico</b>	<b>2</b>
<b>1. Estructuras algebraicas</b>	<b>3</b>
1.1. Teoría de grupos . . . . .	3
1.1.1. Morfismos entre grupos . . . . .	7
1.2. Espacios vectoriales . . . . .	9
1.3. Álgebra asociativa . . . . .	11
<b>2. Números complejos y cuaterniones</b>	<b>13</b>
2.1. Los números complejos $\mathbb{C}$ . . . . .	13
2.1.1. Los complejos unitarios; el grupo $\mathbb{C}_1$ . . . . .	14
2.2. Los cuaterniones $\mathbb{H}$ . . . . .	16
2.2.1. Los subespacios $\mathbf{1}\mathbb{R}$ e $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ de $\mathbb{H}$ . . . . .	19
2.3. Los cuaterniones unitarios; el grupo $\mathbb{H}_1$ . . . . .	20
2.3.1. La geometría de los cuaterniones unitarios: $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3$ . . . . .	21
2.3.2. $\mathbb{H}_1$ y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ : primer acercamiento . . . . .	21
<b>II La estructura de las rotaciones</b>	<b>23</b>
<b>3. Isometrías y movimientos rígidos</b>	<b>24</b>
3.1. Isometrías; los grupos $\mathbf{O}(n)$ . . . . .	24
3.2. Ortogonalidad . . . . .	26
3.3. Reflexiones, el teorema de Cartan-Dieudonné . . . . .	27
3.4. Recapitulando; transformaciones ortogonales . . . . .	30

<b>4. Rotaciones; los grupos especiales <math>\mathbf{SO}(n)</math></b>	<b>32</b>
4.1. Rotaciones en 2 dimensiones; el grupo $\mathbf{SO}(2)$ . . . . .	33
4.1.1. Los complejos unitarios $\mathbb{C}_1$ y las rotaciones $\mathbf{SO}(2)$ . . . . .	34
4.2. Rotaciones en 3 dimensiones; el grupo $\mathbf{SO}(3)$ . . . . .	36
4.2.1. Los cuaterniones unitarios y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	37
4.3. Recapitulando; rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . . .	44
<b>III El panorama general de las rotaciones</b>	<b>47</b>
<b>5. Más allá de 3 dimensiones; el grupo <math>\mathbf{SO}(4)</math></b>	<b>48</b>
5.1. Los cuaterniones y las rotaciones en $\mathbb{R}^4$ ; $\mathbf{SO}(4) \cong (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\mathbb{Z}_2$ . . . . .	50
5.2. Recapitulando; las rotaciones saliendo de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	53
<b>6. Las rotaciones en <math>\mathbb{R}^n</math>; los grupos <math>\mathbf{Spin}(n)</math></b>	<b>56</b>
6.1. Rotaciones simples como producto de vectores . . . . .	57
6.2. Las álgebras de Clifford y el producto geométrico . . . . .	57
6.2.1. Reflexiones y rotaciones; $\mathbf{Spin}(n)$ . . . . .	60
6.3. Recapitulando; las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	65
6.3.1. El álgebra $\mathbb{GR}^2$ . . . . .	65
6.3.2. El álgebra $\mathbb{GR}^3$ . . . . .	66
6.3.3. El álgebra $\mathbb{GR}^4$ . . . . .	66
6.3.4. Más sobre álgebra geométrica . . . . .	67
<b>7. Conclusiones</b>	<b>68</b>

## 0.1. Introducción

Los grupos de transformaciones surgen en virtualmente cualquier investigación de objetos con simetrías, tales como moléculas en química, partículas en física y en la geometría de los espacios en matemáticas [Tapp, 2016]. De estas, las rotaciones son unas de las transformaciones más sencillas de visualizar y comprender, ya que, al experimentar y observar de forma común rotaciones en 2D y 3D podemos apelar a la intuición para su visualización y entendimiento. A pesar de esto, las rotaciones en dimensiones diferentes a 2D y 3D presentan características peculiares que se alejan de lo habitual e iluminan la estructura de estos espacios, a la vez que abren el panorama para explorar nuevos conceptos y generalizaciones de lo ya conocido.

Comencemos con un ejemplo motivador que nos proporcionará un poco de la forma cualitativa de los conceptos que se explorarán más adelante.

Imaginemos un ser unidimensional, que vive en un universo unidimensional. Claramente, para este ser, el concepto de rotación no tiene significado. Este ser probablemente pensaría “Sólo existe delante y detrás y no más!”. Por lo que, en una hipotética discusión con un ser de Planilandia [2D], éste último probablemente afirmararía “No puedes entender el concepto de rotación porque necesitas al menos de dos dimensiones... tu universo es demasiado pequeño para ver que en una rotación se trazan círculos alrededor de un punto!”. “¿Alrededor de un punto dices?...” preguntaría un humano en el universo 3D. “¡Pamplinas! ¡Al rotar se trazan círculos alrededor de una línea! Vives en un universo demasiado pequeño para observar que tu punto de rotación ¡es sólo la intersección de tu universo plano con el *verdadero* eje de rotación!”

De esta forma, al pasar de un espacio de  $n$  dimensiones a uno de dimensión mayor, no sólo son posibles nuevos tipos de movimientos y transformaciones, sino que también los fenómenos físicos que se conocían parecen regidos por nuevas leyes.

Esta corta historia tiene el propósito de advertirnos que, si hemos de proceder con la siguiente dimensión y estudiamos las rotaciones en 4D, debemos de estar preparados para la verdad, *¡en espacios de más dimensiones no tiene sentido hablar de un eje de rotación!*

ADAPTADO DE MORTARI [2000]

Y si el concepto de *eje de rotación* no tiene validez en más dimensiones, entonces ¿cómo se puede entender esto? ¿Existen entidades de más dimensiones como planos o hiperplanos sobre los que se realiza la rotación? ¿O se debe de entender a las rotaciones de una manera totalmente diferente? En este trabajo veremos más a fondo qué es lo que sucede con las rotaciones en dimensiones arbitrarias.

## 0.2. Justificación

### 0.2.1. Teoría de grupos; el lenguaje de la simetría

Las matemáticas son, y siempre han sido, una herramienta esencial para la descripción y categorización del mundo natural. Un instrumento invaluable para encontrar orden en el aparente caos de los fenómenos naturales, dada la variedad de elementos y transformaciones químicas, el dinamismo de los fenómenos físicos y la complejidad de los seres vivos y sus procesos. Para este fin, la *simetría* juega un papel fundamental, aclarando el camino para dilucidar las estructuras subyacentes gracias al siguiente principio general aludido a Piérre Curie [Castellani y Ismael, 2016]:

“Si las condiciones que determinan un fenómeno poseen ciertas simetrías, entonces el fenómeno resultante exhibirá las mismas simetrías.”

Gracias a este principio, Arquímedes fué capaz de concluir a priori que pesos iguales se equilibran en balanzas con brazos iguales. De igual manera, (y tal vez algo más impresionante) este mismo principio nos permite descifrar la estructura molecular de un cristal a partir de su efecto sobre un haz de radiación en la cristalografía por rayos X [Weyl, 2015].

En su formulación moderna la simetría es descrita en términos de la llamada *teoría de grupos* [Armstrong, 1988]. De esta forma, la simetría no es descrita en términos de números o formas sino operacionalmente en términos de transformaciones: Una transformación que mantiene invariante alguna propiedad del objeto o espacio sobre el que actúa define una simetría del mismo. En otras palabras, una simetría puede describirse como “inmunidad al posible cambio” [Ceulemans, 2017].

Esta idea, en las matemáticas, es de fundamental importancia para el *Erlangen programme* de Felix Klein, donde los invariantes de las transformaciones en el espacio toman fundamental importancia y, en cierto modo *definen* la geometría del espacio de forma que las diferentes geometrías (euclidea, proyectiva, etc.) se clasifican de acuerdo a estos invariantes. Es decir, una geometría se define por las simetrías que admite [Klein, 2008]. Por otro lado, los principios de simetría y la teoría de grupos en particular, se han aplicado con gran éxito a diversas ramas de la física [Weyl, 1950; Mildred S. Dresselhaus, 2010], química [Dunitz, 1996] y más recientemente en biología [Rietman *et al.*, 2011; Derome, 1977], siendo todavía en la actualidad herramientas que permite realizar nuevos hallazgos y encontrar nuevas perspectivas [Schmiedt, 2017; Antoneli y Forger, 2011; Rosen, 2008].

### 0.2.2. Rotaciones

Las rotaciones destacan entre los grupos de transformaciones de simetría por ser familiares y fácilmente visualizables. Pudiendo entenderse como parte de las simetrías de la esfera, el concepto de rotación en 2 y 3 dimensiones es fácilmente visualizable, y podemos dar ejemplos como el movimiento de un trompo, el uso de un compás o el

movimiento de las manecillas de un reloj. Además es familiar el surgimiento de los días a partir de la rotación de la Tierra sobre su eje y el paso de los años por la rotación alrededor del Sol. Es también intuitivo el concepto de eje de rotación y el hecho de que las rotaciones en el espacio 3D están intrínsecamente relacionadas con las rotaciones en el plano.

Por otro lado, los grupos de rotaciones juegan un papel sumamente importante en aplicaciones en física [Weyl, 1950; Ceulemans, 2017], y son un punto de partida importante para la descripción de otros importantes grupos de simetrías (los grupos de Lie clásicos [Savage, 2015]), algunos de los cuales resultan ser generalizaciones de los grupos de rotaciones a espacios diferentes de  $\mathbb{R}^n$  [Stillwell, 2008].

Son de gran importancia las álgebras de división (complejos, cuaterniones) y las álgebras geométricas de Clifford para la descripción de las rotaciones ya que permiten descripciones sencillas tanto conceptualmente como operativamente de las operaciones del grupo y su acción. Además, éstas álgebras permiten expresar las transformaciones en términos de objetos geométricos análogos a los vectores sobre los que éstas operan [Lounesto, 2001].

Es por esto que se propone realizar un estudio amplio pero necesariamente acotado sobre los grupos de rotaciones y sus representaciones algebraicas. Cabe mencionar que, a pesar de que existe una cantidad extensa de información al respecto en la literatura, el enfoque que se toma en este trabajo es poco común y compila información que se encuentra generalmente dispersa en numerosas fuentes o que se encuentra de forma menos accesible.

### 0.3. Objetivos

1. Comprender las características que definen a las rotaciones y su lugar entre los grupos de transformaciones en el espacio.
2. Contrastar y comparar las propiedades y características de las rotaciones en espacios de distintas dimensiones. En especial en los espacios familiares  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ; y en  $\mathbb{R}^4$ , como ejemplo de un espacio no visualizable directamente.
3. Explorar las múltiples representaciones de las rotaciones en términos algebraicos y comparar los distintos acercamientos (matrices, complejos, cuaterniones, álgebras de Clifford).

### 0.4. Metodología

Exploraremos el concepto de rotación en espacios de distintas dimensiones de tal manera que algunos conceptos toman nuevas perspectivas y otros muestran ser meros accidentes, como es el caso del concepto de eje de rotación, que viene a ser puesto en duda

en favor de una visión diferente [Triola, 2009; Mortari, 2000], o el caso de la distinción entre rotaciones e inversiones del espacio [Gallier, 2011].

También se explorarán los distintos marcos algebraicos en que se pueden entender las rotaciones. Es decir, cómo los números complejos representan de forma natural un álgebra para la representación de isometrías del plano [Needham, 1997] y cómo los cuaterniones, con un poco más de trabajo permiten representar las rotaciones en 3 y 4 dimensiones [Hanson, 2006]. Veremos también cómo las álgebras geométricas de Clifford extienden y generalizan naturalmente éste acercamiento algebraico a las rotaciones en dimensiones arbitrarias de forma que se esclarecen muchas de las relaciones encontradas en los casos especiales de los cuaternios y los complejos [Kanatani, 2015], y llegados a este punto, observaremos la importancia de los grupos **Spin**(**n**) que en cierto sentido resultan representar de forma más natural a las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  que los grupos **SO**(**n**) [Lounesto, 2001; Gallier, 2008].

Finalmente, se estudiarán aspectos más geométricos de las rotaciones, como su relación con otro tipo de transformaciones ortogonales [Gallier, 2011] y la relación de los grupos de rotaciones en diferentes espacios  $\mathbb{R}^n$  entre sí [Lounesto, 2001; Triola, 2009], así como las formas (variedades en  $\mathbb{R}^n$ ) que toman los grupos de rotaciones (ejemplo: **SO**(**2**) es isomorfo al círculo y **SO**(**3**) a la esfera en 4 dimensiones) y cómo algunos otros de los grupos de Lie considerados clásicos pueden verse como “rotaciones” en espacios diferentes a  $\mathbb{R}^n$ .

# Parte I

## Marco teórico

# Capítulo 1

## Estructuras algebraicas

### 1.1. Teoría de grupos

A continuación explicamos la idea detrás del concepto de grupo, en particular de un grupo de transformaciones. Se explica primero informalmente para después continuar con el concepto de manera formal.

En lo subsiguiente nos estaremos refiriendo frecuente a los denominados *grupos de transformaciones* [Weyl, 1950]. Estos grupos, como su nombre lo indica, se conforman de transformaciones que operan sobre elementos de algún espacio llamados *puntos*. Cada transformación  $S$  asigna a cada punto  $p$  otro punto  $p' = Sp$  en correspondencia uno a uno.

Debido a que el conjunto de puntos es mapeado al mismo conjunto de puntos, las transformaciones pueden aplicarse en sucesión de tal manera que si  $S : p \mapsto p'$  y  $T : p' \mapsto p''$ , entonces la *composición*, denominada  $TS$  se define por  $TS : p \mapsto p''$ . Por otro lado, existe una transformación especial que asigna a cada punto el mismo punto, es decir, que mantiene a cada punto invariante; esta transformación especial  $I$  se denomina la *identidad*. Finalmente, debido a que las correspondencias son uno a uno, entonces podemos e 3  $S$  existe una transformación  $S^{-1}$  que revierte los cambios inducidos por  $S$  en el conjunto de puntos, es decir, a toda transformación le corresponde una *inversa* que cancela los efectos de la primera.

Ahora que se han explicado las ideas que llevaron al concepto abstracto de grupo, podemos dar la definición formal que usaremos en lo subsecuente:

**Definición 1.1.1.** (*Grupo*)[Geroch, 2015] Un grupo consiste en dos cosas—i) un conjunto  $G$ , y ii) una operación que asigna, dado un par ordenado  $(g, g')$  de elementos de  $G$ , un elemento  $gg'$  de  $G$  denominado el producto de  $g$  y  $g'$ —sujetas a las siguientes condiciones:

1. El producto es asociativo. Para cualesquiera tres elementos  $g, g', g''$  de  $G$ , se cumple que:  $g(g'g'') = (gg')g''$ .

2. *Existe una identidad. Existe un elemento  $e$  de  $G$ , denominado la identidad con la siguiente propiedad: para cualquier elemento  $g$  de  $G$ ,  $eg = ge = g$ .*
3. *Existen las inversas. Dado cualquier  $g \in G$ , existe un elemento  $g^{-1}$  de  $G$  denominado la inversa(o) de  $g$  tal que:  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ .*

**Ejemplo 1.1.1.** *Podemos considerar a las rotaciones en el espacio tridimensional como todos los posibles ángulos desde los que se puede observar un globo terráqueo o, equivalentemente, las posibles posiciones en las que se puede dejar sobre una base como en la figura 1-1<sup>1</sup>. Éstas forman un grupo, el cual se estudiará con detalle más adelante pero podemos auxiliarnos de la experiencia para ir visualizando sus propiedades.*

*En este grupo, el conjunto son las transformaciones que mueven de posición al globo y la operación de grupo es la composición de transformaciones. Se puede ver que efectivamente la composición de rotaciones es otra rotación, que existe una identidad, que es no mover el globo y además, a cada rotación le corresponde la rotación inversa.*



Figura 1-1: Grupo de rotaciones

**Ejemplo 1.1.2.** *Otro ejemplo son las simetrías del triángulo equilátero, es decir, las transformaciones que lo dejan invariante. En la figura 1-2<sup>2</sup> podemos ver que las reflexiones por los ejes marcados como  $l$ ,  $m$  y  $n$  y las rotaciones por  $60^\circ$  y  $120^\circ$  cumplen con esto, ya que estas transformaciones intercambian los lados del triángulo entre sí. En este caso el conjunto está formado por dichas transformaciones y la operación de grupo es la composición de transformaciones.*

---

<sup>1</sup>Imagen tomada de <https://cdn.shopify.com/s/files/1/0953/4528/products/cassini-white.jpg?v=1520014377>

<sup>2</sup>Imagen tomada de <http://www.counton.org/xplusyfiles/images/library/41.jpg>

Si el producto es conmutativo, el grupo se denomina *abeliano*. Las rotaciones en 3 dimensiones no conmutan, pero las rotaciones en el plano si, por lo que forman un grupo abeliano.

En un grupo que sólo tiene un elemento, este elemento es necesariamente la identidad. A este grupo lo denotamos por 1 (por 0 si el grupo es conmutativo), y lo denominamos como el *grupo trivial*.

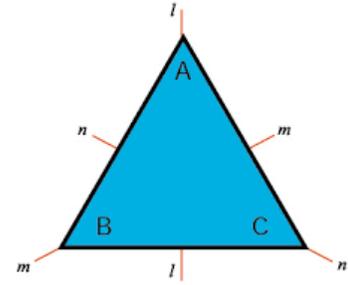


Figura 1-2: Simetrías del triángulo

**Ejemplo 1.1.3.** *El espacio Euclideo de 3 dimensiones  $\mathbb{R}^3$  (tomado como espacio vectorial, definición 1.2.1) es un grupo abeliano, donde los vectores forman el conjunto de elementos y la suma de vectores es la operación de grupo. Se puede ver que la suma de vectores resulta en un vector (la suma es conmutativa y asociativa). Además, existe un elemento identidad (el vector  $\vec{0}$ ), y cada vector  $\vec{v}$  tiene un elemento inverso, el vector  $-\vec{v}$  de tal manera que  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ .*

**Definición 1.1.2.** (Subgrupo)[Garling, 2011] *Dado un grupo  $G$ , un subconjunto no vacío  $H$  de  $G$  es un subgrupo de  $G$  si se cumple que  $H$  es un grupo con el producto heredado. Esto significa que para todo par de elementos  $g$  y  $h$  de  $H$ , el producto  $gh$  se encuentra en  $H$  al igual que sus respectivos elementos inversos.*

**Ejemplo 1.1.4.** *Continuando con el ejemplo 1.1.2, las rotaciones junto con la transformación identidad forman un subgrupo de las simetrías del triángulo, ya que la composición de rotaciones es siempre otra rotación o la identidad. Por otro lado, las reflexiones más la identidad no forman un subgrupo ya que al reflejar por dos ejes distintos se obtiene una rotación, por lo que el producto de dos reflexiones no se encuentra en las reflexiones y entonces no es grupo.*

Para hablar de subgrupos de un grupo más grande a veces es conveniente explorar sus *clases laterales*.

**Definición 1.1.3.** (Clase lateral)[Garling, 2011] *Dado un subgrupo  $H$  de  $G$ , las clases laterales por la izquierda de  $H$  en  $G$  son los subconjuntos de  $G$  de la forma  $gH = \{gh : g \in G, h \in H\}$ . Alternativamente, las clases laterales por la derecha son los subconjuntos de la forma  $Hg = \{hg : g \in G, h \in H\}$ .*

*Las clases laterales (por la derecha o por la izquierda) de algún grupo  $H$  en  $G$  particionan a éste último (en pedazos de tamaño  $H$ ) de tal manera que si  $x \in gH$  y  $x \in g'H$ , entonces  $g = g'$ .*

Cabe notar que  $H$  mismo es la clase lateral  $eH = He$ .

**Ejemplo 1.1.5.** *Continuando con los ejemplos 1.1.2 y 1.1.4, tenemos el subgrupo de las rotaciones en el grupo de las simetrías del triángulo. La única clase lateral de este subgrupo (distinta del subgrupo mismo) es el conjunto de reflexiones (obtenida al componer todas las rotaciones con una reflexión cualquiera). Es decir, las clases laterales de las rotaciones particionan al grupo de las simetrías del triángulo en dos partes iguales.*

**Ejemplo 1.1.6.** *Continuando con el ejemplo 1.1.3, en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , los subgrupos son los subespacios (líneas y planos por el origen) y sus clases laterales constan del desplazamiento de dichos subespacios por algún vector, efectivamente particionando el espacio en planos o líneas paralelas.*

**Definición 1.1.4.** *(Subgrupos normales, grupo cociente) [Armstrong, 1988] Un subgrupo  $H$  de  $G$  es normal en  $G$  si en el conjunto de sus clases laterales se puede formar el producto  $(gH)(g'H) = (gg')H$  de forma que se obtiene un grupo. Este grupo formado por las clases laterales se denomina el grupo cociente de  $H$  en  $G$ , denotado por  $G/H$ .*

Definiciones equivalentes son:  $H$  es normal si y sólo si  $gH = Hg$  para todo  $g \in G$  (lo que significa que todos los subgrupos de grupos abelianos son normales); y  $H$  es normal si y sólo si  $gHg^{-1} = H$ .

La denominación de *grupo cociente* y la notación  $G/H$  es apropiada debido a que efectivamente se “divide el grupo  $G$  en pedazos de tamaño  $H$ , donde estos pedazos tienen un producto y con este producto forman un grupo”.

Notamos que, si  $H$  es normal en  $G$ , entonces el mismo  $H$  es el elemento identidad en  $G/H$ . De esta forma, intuitivamente, el grupo cociente es el grupo resultante de “forzar a los elementos de  $H$  a ser iguales a la identidad y propagar esto, de forma consistente, sobre  $G$ ” [Geroch, 2015].

**Ejemplo 1.1.7.** *Para un grupo  $G$ , podemos definir el grupo de conmutadores  $C$  como el grupo formado por los elementos de la forma  $ghg^{-1}h^{-1}$  para todos los  $g$  y  $h$  en  $G$ . Se puede demostrar que este es un subgrupo normal. Intuitivamente sus elementos son aquellos términos que “impiden que el producto en  $G$  sea conmutativo al no ser iguales a la identidad”. El grupo cociente  $G/C$  que resulta de “forzar estos elementos a ser la identidad” es entonces conmutativo [Geroch, 2015].*

Cabe nombrar un grupo que nos estaremos encontrando constantemente, el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ . Este grupo consta de los elementos  $\{+1, -1\}$  donde la operación de grupo es la multiplicación usual de números.

**Ejemplo 1.1.8.** *Continuando con los ejemplos 1.1.2, 1.1.4 y 1.1.5, las rotaciones forman un subgrupo normal en las simetrías del triángulo, y el grupo cociente consta de las dos clases laterales: rotaciones y reflexiones. Si identificamos a las rotaciones con el entero  $+1$  y a las reflexiones con  $-1$ , el grupo resultante es idéntico al grupo  $\mathbb{Z}_2$  (son isomorfos, como en el ejemplo 1.1.11).*

**Ejemplo 1.1.9.** *Continuando con los ejemplos 1.1.3 y 1.1.6, en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , al ser un grupo abeliano (la suma de vectores es una operación conmutativa), todos los subgrupos son normales (es decir, todas las líneas y planos por el origen son subgrupos normales) por lo que sus clases laterales (copias paralelas) forman un grupo y entonces podemos definir la suma o resta de líneas y planos paralelos.*

**Definición 1.1.5.** (*Producto directo de grupos*)[Garling, 2011] Dados dos grupos  $G$  y  $H$ . Podemos definir un nuevo grupo, el producto directo de  $G$  y  $H$ ,  $G \times H$ , como el conjunto de todos los pares  $(g, h)$  tales que  $g \in G$  y  $h \in H$  con el siguiente producto:

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh').$$

donde  $g, g' \in G$  y  $h, h' \in H$ .

Para comparar grupos y hablar de correspondencia entre elementos de distintos grupos, se tendrá que hablar sobre mapeos entre estos. En particular, mapeos que preserven las características de los grupos.

### 1.1.1. Morfismos entre grupos

**Definición 1.1.6.** (*Homomorfismo de grupos*)[Geroch, 2015] Sean  $G$  y  $H$  grupos. Un homomorfismo (*morfismo de grupos*) de  $G$  a  $H$  es una función  $\varphi$  del conjunto  $G$  al conjunto  $H$  tal que, para cualesquiera dos elementos,  $g$  y  $g'$  de  $G$ ,

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g').$$

En otras palabras, dados dos elementos de  $G$ , se obtiene el mismo elemento de  $H$  si:

1. Se toma primero el producto de estos elementos y se envía el resultado (a través de  $\varphi$ ) a  $H$ , o;
2. Primero se envía estos elementos a  $H$ , por  $\varphi$ , y ahí se toma el producto.

Se sigue de esto que si  $\varphi : G \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos,  $\varphi(e) = e$  (en esta ecuación, la  $e$  a la izquierda es la identidad en  $G$ ; a la derecha es la identidad en  $H$ ) y  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$  para cualquier  $g \in G$ . La estructura de los grupos viene dada en términos de los productos de sus elementos, sus inversas y la identidad; entonces, lo anterior significa que un homomorfismo entre grupos es un mapeo que *preserva, en el sentido más estricto toda la estructura disponible*.

**Definición 1.1.7.** (*Kernel de un homomorfismo*) Dado un homomorfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow H$ , el kernel del homomorfismo  $\ker(\varphi)$  es el conjunto de los elementos en  $G$  que son enviados, por  $\varphi$  al elemento identidad en  $H$ , es decir,

$$\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(e) = \{g \in G : \varphi(g) = e\}.$$

El kernel es un grupo normal en  $G$ , ya que para cualquier  $k$  en el kernel y  $g$  en  $G$ ,

$$\varphi(gkg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(k)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e$$

y ya que  $k$  fué arbitrario, se sigue inmediatamente que  $g\ker(\varphi)g^{-1} = \ker(\varphi)$  por lo que es normal.

**Ejemplo 1.1.10.** Las transformaciones lineales invertibles en  $\mathbb{R}^3$  (aquellas que envían líneas y planos por el origen a líneas y planos por el origen) forman un grupo con la operación de composición, denotado por  $\mathbf{GL}(3)$ . A su vez, los reales distintos de 0 forman un grupo con la operación de multiplicación, denotado por  $\mathbb{R}^\times$ . Existe un homomorfismo característico entre estos dos grupos, el determinante  $\det : \mathbf{GL}(3) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  que mide qué tanto se expande o contrae el volumen de los objetos al aplicar la transformación y, a su vez, detecta si la orientación del espacio cambia como resultado [Rowland]. Es homomorfismo ya que, si  $f$  y  $g$  son transformaciones de  $\mathbf{GL}(3)$ , entonces  $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$  y su kernel consiste en las transformaciones con determinante unitario (preservan el volumen y la orientación). La partición que inducen las clases laterales del kernel sobre  $\mathbf{GL}(3)$  nos será especialmente útil para diferenciar las transformaciones que invierten la orientación (reflexiones) de las que la preservan (rotaciones).

Lo siguiente nos permitirá expresar propiedades importantes de los grupos y los homomorfismos entre ellos por medio de diagramas.

**Definición 1.1.8.** (Secuencia exacta de grupos)[Garling, 2011] Sean  $G_0, G_1, G_2, \dots, G_k$  grupos y sean  $f_j : G_j \rightarrow G_{j+1}$  ( $0 \leq j < k$ ) homomorfismos entre ellos. Entonces el diagrama:

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{k-2}} G_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} G_k$$

es una secuencia exacta si el kernel de cada homomorfismo es la imagen del inmediato anterior:

$$\ker(f_i) = f_{i-1}(G_{i-1})$$

**Ejemplo 1.1.11.** Para comprender esta definición, conviene considerar casos simples donde la secuencia inicia o termina con el grupo trivial (denotado por 1):

1. La secuencia  $1 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$  es exacta, de acuerdo a la definición si y sólo si  $\ker(f) = 1_A$ ; es decir, si y sólo si  $f$  es inyectiva o 1-a-1. En este caso denotamos  $A \xrightarrow{f} B$ .
2. De forma dual, la secuencia  $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\epsilon} 1$  es exacta, de acuerdo a la definición si y sólo si  $\ker(\epsilon) [= \epsilon^{-1}(1) = C] = g(B)$ , es decir que la imagen de  $B$  sobre  $g$  es todo  $C$ , que significa que  $g$  es sobreyectiva. En este caso denotamos  $B \xrightarrow{g} C$ .
3. Por lo anterior, la secuencia  $1 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow 1$  es exacta si y sólo si  $\varphi$  es a la vez inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva. Decimos que  $\varphi$  es un isomorfismo y denotamos  $F \xrightarrow{\varphi} G$  o simplemente  $F \cong G$ .

Son de gran importancia las denominadas *secuencias exactas cortas*, las cuales son de la forma

$$1 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 1$$

Como vimos anteriormente, esto implica que  $f$  es inyectiva y  $g$  es sobreyectiva y la imagen de  $f$  es el kernel de  $g$ . Es de ayuda pensar en  $F$  como un subgrupo de  $G$ , con  $f$  siendo la función de inclusión; y en  $H$  como el correspondiente objeto cociente  $G/F$  induciéndose un isomorfismo

$$H \stackrel{g}{\cong} G/F.$$

Un tipo de secuencia exacta que estaremos observando recurrentemente es la siguiente:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow 1$$

donde  $\mathbb{Z}_2$  es el grupo con dos elementos. Esto implica que existe un isomorfismo

$$H \stackrel{\varphi}{\cong} G/\mathbb{Z}_2,$$

es decir, a cada elemento de  $H$  le corresponde una imagen inversa por  $\varphi$  compuesta por dos elementos, una clase lateral de  $\iota(\mathbb{Z}_2)$  en  $G$ . En otras palabras,  $\varphi$  es una *cubierta doble* de  $G$  sobre  $H$ .

Un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  particiona a  $G$  en clases laterales del kernel de la transformación de tal manera que cada clase lateral se mapea a un elemento distinto de  $H$ , esto se puede ver por lo siguiente. Si  $g \in G$  y  $k \in \ker(\varphi)$ , entonces  $\varphi(kg) = \varphi(k)\varphi(g) = \varphi(g)$ . Esto nos lleva directamente al siguiente resultado fundamental de la teoría de grupos:

**Teorema 1.1.1.** *(Teorema fundamental del isomorfismo para grupos.) [Armstrong, 1988; Geroch, 2015; Stillwell, 2008] Sea  $\varphi : G \rightarrow H$  homomorfismo de grupos, entonces los grupos  $G/\ker(\varphi)$  y  $\varphi(G)$  son isomorfos.*

## 1.2. Espacios vectoriales

**Definición 1.2.1.** *(Espacio vectorial)[Geroch, 2015] Un espacio vectorial real consiste en tres cosas—i) un conjunto  $V$  (cuyos elementos se llaman vectores), ii) una operación (suma de vectores) que asigna, dados vectores  $v$  y  $v'$ , un tercero (representado por  $v + v'$  denominado la suma de  $v$  y  $v'$ ), y iii) una operación (producto por escalar) que asigna, dado un vector  $v$  y un número real  $a$  (denominados escalares), un vector (escrito como  $av$ )—sujetas a las siguientes condiciones:*

Sean  $a$  y  $a'$  números reales y  $v$  un vector,

1. El conjunto  $V$  es un grupo abeliano con la suma. Denotamos a la identidad por  $\mathbf{0}$  (notese que es diferente del número real 0), y denotamos al inverso de  $v$  como  $-v$ .

2. El producto por escalar es distributivo:

$$(a + a')v = av + a'v$$
$$a(v + v') = av + av',$$

3.  $a(av) = (aa')v$ , y

4.  $1v = v$ .

Si se reemplaza “real” en la definición por “complejo”, obtenemos la definición de *espacio vectorial complejo*. (En general se puede reemplazar por cualquier otro “campo escalar”, pero esto será suficiente para este trabajo).

Hemos visto ya en los grupos un ejemplo de mapeos que preservan la estructura. En los espacios vectoriales existe una definición equivalente:

**Definición 1.2.2.** (*Función lineal*) Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales (ambos reales o complejos). Una función  $\phi$  del conjunto  $V$  al conjunto  $W$  es una función lineal si, para cualesquiera vectores  $v$  y  $v'$ , y cualquier número  $a$  se cumple que:

$$\phi(v + av') = \phi(v) + a\phi(v')$$

Notemos que una función lineal  $\phi$  *preserva la estructura* de los espacios en el sentido en que i)  $\phi$  es un homomorfismo de los grupos subyacentes ( $\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$ ) y ii)  $\phi$  preserva la multiplicación por escalar ( $\phi(av) = a\phi(v)$ ); siendo estas dos cosas las que determinan la *estructura* de los espacios vectoriales.

Ejemplos de espacios vectoriales son los espacios  $\mathbb{R}^n$  que además presentan una estructura adicional, la *métrica* que define una nueva operación  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

**Definición 1.2.3.** (*Producto interno*) [Kanatani, 2015] Un producto interno o producto escalar (no sea confundido con el producto por escalar) es una función:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, v') \longmapsto \langle v, v' \rangle$$

con las siguientes propiedades:

Para  $u, v$  y  $w$  vectores y  $a$  un escalar,

1. *Positividad.*  $\langle v, v \rangle \geq 0$  con igualdad si y sólo si  $v = \mathbf{0}$ .

2. *Simetría.*  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .

3. *Linealidad.*  $\langle u, (v + aw) \rangle = \langle u, v \rangle + a \langle u, w \rangle$ .

En base a esta nueva operación se define la *norma* de un vector  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  como la función definida por

$$v \mapsto |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Sea  $e_i$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces si se define

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j, \end{cases}$$

el producto de los vectores  $u = (u_i)$  y  $v = (v_i)$  en  $\mathbb{R}^n$  queda de la siguiente manera:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u^T v.$$

[Kanatani, 2015]

Por otro lado, teniendo una norma, el producto de vectores  $u$  y  $v$  se puede definir unívocamente [Garling, 2011] gracias a

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2 \langle u, v \rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2 \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\langle u, v \rangle = \frac{|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2}{2}. \quad (1-1)$$

Y cabe destacar que aunque ambos argumentos se encuentran presentes en términos no lineales, la expresión resultante es lineal en ambos argumentos.

### 1.3. Álgebra asociativa

**Definición 1.3.1.** (*Álgebra asociativa*) [Geroch, 2015] *Un álgebra asociativa consiste en 2 cosas—i) un espacio vectorial  $V$  y ii) una regla que asigna, dados los vectores  $v$  y  $v'$ , un vector (escrito  $vv'$  y llamado el producto de  $v$  y  $v'$ )—sujetas a las siguientes condiciones:*

*Sean  $u, v$  y  $w$  vectores; sea  $a$  escalar,*

1. *El producto es lineal en cada factor.*

$$(u + av)w = uw + avv$$

*y,*

$$u(v + aw) = uv + auw$$

2. *El producto es asociativo.*

$$(uv)w = u(vw)$$

En lo subsiguiente nos referiremos a las álgebras asociativas simplemente como álgebras, a menos que se especifique lo contrario.

**Definición 1.3.2.** (*Subálgebra*) Dada un álgebra  $A$ , una subálgebra es un subconjunto de elementos de  $A$  que forman a su vez un álgebra con las operaciones de  $A$ .

# Capítulo 2

## Números complejos y cuaterniones

### 2.1. Los números complejos $\mathbb{C}$

Los números complejos pueden definirse de varias maneras: como el álgebra que surge al agregar una raíz cuadrada de  $-1$ , denominada la *unidad imaginaria*  $\mathbf{i}$ , a los números reales, extendiendo las operaciones de suma y producto de forma natural [Lounesto, 2001]; o bien, otra forma, de las más simples, es tomar a los números complejos como el conjunto de elementos de la forma  $a + \mathbf{i}b$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{i}^2 = -1$  con las operaciones definidas apropiadamente [Silverman, 1984]. Una forma, de donde surgen naturalmente las operaciones y sus propiedades consiste en definir las matrices:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Luego, los complejos se definen como el conjunto de matrices  $\{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$ ; nótese que  $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$  y que estas matrices forman una subálgebra de las matrices invertibles de  $2 \times 2$  [Savage, 2015].

En este trabajo optamos por definir a los complejos como un álgebra real sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ , para enfatizar su geometría:

**Definición 2.1.1.** (*Números complejos*) [Jerrold E. Marsden, 1999] Los números complejos, denotados  $\mathbb{C}$ , son el álgebra que surge de tomar el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  junto con la operación de multiplicación definida por:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Para manipulaciones algebraicas es conveniente introducir la notación familiar notando que los elementos  $(x, 0)$  del conjunto  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$  junto con las operaciones de suma y producto se comportan indistinguiblemente de los números reales. Por ello, es posible identificar al par ordenado  $(x, 0)$  con el real  $x$ . Si además introducimos  $\mathbf{i} = (0, 1)$ ,

entonces para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + y(0, 1) = x + y\mathbf{i} \\ &= (x, 0) + (0, 1)y = x + \mathbf{i}y. \end{aligned}$$

De esta forma, cualquier número complejo puede ser representado unívocamente como una suma  $a + \mathbf{i}b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  [Titu Andreescu, 2014]. Introducimos también  $\mathbf{1} = (1, 0)$  para cuando sea conveniente distinguir el real  $x$  del complejo  $x = (x, 0) = \mathbf{1}x$ , esta notación será conveniente también para cuando pasemos a álgebras de más dimensiones.

Con esta notación, y notando que  $\mathbf{i}^2 = -1$ , la (extraña) fórmula del producto de dos complejos es fácil de motivar y recordar:

$$\begin{aligned} (a, b)(c, d) &= (a + \mathbf{i}b)(c + \mathbf{i}d) \\ &= ac + a\mathbf{i}d + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}b\mathbf{i}d \\ &= ac + \mathbf{i}ad + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}^2bd \\ &= (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc). \end{aligned}$$

La norma de un número complejo  $z = (x, y) = x + \mathbf{i}y$  deriva de la norma en  $\mathbb{R}^2$  por lo que  $|z|^2 = x^2 + y^2$ . Notemos que esta norma cumple que  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  para todos los  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Podemos además introducir, dado un complejo  $z = a + \mathbf{i}b$ , su *conjugado*  $\bar{z} = a - \mathbf{i}b$  tal que  $z\bar{z} = \mathbf{1}|z|^2 = |z|^2$ .

### 2.1.1. Los complejos unitarios; el grupo $\mathbb{C}_1$

Los complejos con norma 1 se denominan *unitarios*.

Sea  $u$  un complejo unitario. La ecuación  $|u|^2 = x^2 + y^2 = 1$  implica que existe un  $\theta$  ( $= \tan^{-1}(y/x)$ ) tal que  $x = \cos \theta$  y  $y = \sen \theta$  por lo que

$$u = \cos \theta + \mathbf{i} \sen \theta$$

Lo cual hace evidente el hecho de que  $u$  es un punto en el círculo unitario. Por otro lado, dada la función exponencial  $e^a = \sum_n \frac{a^n}{n!}$  y el hecho de que,  $i^2 = -1$ , entonces por la

expansión en series de Taylor de  $\cos$  y  $\sin$  [Girard, 2007]:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + \mathbf{i} \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\
 &= 1 + \mathbf{i} \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \mathbf{i} \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \mathbf{i} \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots \\
 &= 1 + \frac{(\mathbf{i}\theta)^1}{1!} + \frac{(\mathbf{i}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{i}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{i}\theta)^5}{5!} + \frac{(\mathbf{i}\theta)^6}{6!} \dots \\
 &= e^{\mathbf{i}\theta}.
 \end{aligned}$$

Por esto podemos afirmar que,

**Lema 2.1.1.** *Todo complejo unitario  $u$  se puede expresar como*

$$u = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta = e^{\mathbf{i}\theta}.$$

Además, si  $z$  es un complejo arbitrario, entonces se puede expresar de la siguiente manera:

$$z = |z|(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) = |z|e^{\mathbf{i}\theta}.$$

para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Ya hemos mostrado la primera parte. Para la segunda, tomemos  $u = \frac{z}{|z|}$ . Este  $u$  es unitario, ya que  $|u| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ , por lo que existe  $\theta$  tal que  $u = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta = e^{\mathbf{i}\theta}$ . De esto sigue que:

$$z = |z|u = |z|(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) = |z|e^{\mathbf{i}\theta}.$$

■

Los complejos unitarios, como veremos más adelante, son el ejemplo más sencillo de un álgebra generadora de rotaciones. Como tal, se cumple lo siguiente:

**Lema 2.1.2.** *Los complejos unitarios con el producto forman un grupo.*

*Demostración.* Recordemos que para que sea un grupo, el producto de dos complejos unitarios debe ser también un complejo unitario. Esto se cumple debido a que  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  para todos los  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  y, en particular,  $|uv| = |u| |v| = 1$  si  $u$  y  $v$  son unitarios. Además, existe una identidad para el producto,  $(1, 0) = \mathbf{1} = 1$ , ya que  $1z = z1 = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Finalmente, dado un complejo unitario  $u$ , sabemos que  $u\bar{u} = \bar{u}u = \mathbf{1}|u|^2 = \mathbf{1} = 1$ , por lo que podemos definir una inversa  $u^{-1} = \bar{u}$ . ■

Denotamos el grupo de los complejos unitarios por  $\mathbb{C}_1$ . Cabe notar que, al ser  $\mathbb{C}_1 = \{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\}$ , este grupo es isomorfo al círculo  $\mathbb{S}^1$ . Esto quiere decir que los complejos unitarios le confieren estructura de grupo al círculo unitario (la esfera en 2 dimensiones). Más adelante, con los cuaterniones veremos otro ejemplo de cómo los elementos unitarios de un álgebra le confieren estructura a una esfera unitaria.

## 2.2. Los cuaterniones $\mathbb{H}$

El álgebra de los complejos es una poderosa herramienta para resolver problemas en física, ingeniería, geometría, cálculo y álgebra [Needham, 1997]. Debido a su naturaleza 2 dimensional, se han intentado encontrar formas de generalizar sus propiedades a espacios con más dimensiones. Una de esas generalizaciones son los cuaterniones, descubiertos por Sir William Rowan Hamilton en 1843 buscando una extensión a los vectores del espacio tridimensional de las propiedades geométricas del producto y su relación con las rotaciones [Hanson, 2006]. Como se describe en Dixon [2011], los cuaterniones fueron:

Descubiertos por el matemático Hamilton, quien trató en vano de convencer a un frío e indiferente mundo que su álgebra era más natural que los vectores para expresar la física en el espacio Euclideo en 3 dimensiones. Los cuaterniones nunca perdieron total relevancia, a pesar de la victoria de los vectores [...] ya que su uso en este contexto 3 dimensional es vastamente superior a la alternativa vectorial.

Al igual que con los complejos, los cuaterniones pueden definirse de diferentes maneras que resaltan sus diferentes propiedades. Pero podemos decir, a forma de introducción que los cuaterniones extienden al álgebra de los números complejos agregando dos unidades imaginarias más (además de  $\mathbf{i}$ ):  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , junto con sus reglas de multiplicación [Triola, 2009].

Para resaltar la naturaleza geométrica de los cuaterniones, y para ser consistentes con la forma en que se definieron los complejos, daremos una definición formal de los cuaternios como un álgebra en  $\mathbb{R}^4$ . En preparación, sean

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= (1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{i} &= (0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{j} &= (0, 0, 1, 0), \\ \mathbf{k} &= (0, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

Notamos que éstos elementos forman una base de  $\mathbb{R}^4$ . Ahora, definimos un producto asociativo sobre estos elementos definiendo al elemento  $\mathbf{1}$  como la identidad, es decir:

$$\mathbf{1}\alpha = \alpha\mathbf{1} = \alpha \quad \forall \alpha \in \{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\},$$

y además [Lounesto, 2001]:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}.$$

Finalmente, completamos al producto por distributividad (por ambos lados):

$$\begin{aligned}a(b + \lambda c) &= ab + \lambda ac, \\ (a + \lambda b)c &= ac + \lambda bc \\ \forall a, b, c &\in \{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}; \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Lo anterior define completamente productos arbitrarios de elementos de  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  (por ejemplo,  $\mathbf{ij} = (\mathbf{ij})\mathbf{1} = (\mathbf{ij})(-\mathbf{k}^2) = -(\mathbf{ijk})\mathbf{k} = \mathbf{k}$ ). Ahora que hemos definido el producto para los elementos de la base, podemos aprovechar la distributividad para expandir el producto a los demás elementos de  $\mathbb{R}^4$ , con lo que se obtiene un álgebra [Szekeres, 2004][Gallier, 2008].

**Definición 2.2.1.** (*Cuaterniones*)[Savage, 2015].

Los cuaterniones, denotados  $\mathbb{H}$ , son el álgebra que surge de tomar el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  con el producto que acabamos de definir.

De esta forma, un cuaternión general puede expresarse como  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ;  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  (de forma similar a los números complejos, podemos identificar a los cuaterniones de la forma  $a\mathbf{1}$  con el real  $a$  y omitimos escribir explícitamente el cuaternión base  $\mathbf{1}$ ). De lo anterior sigue que, dados los cuaterniones  $p$  y  $q$ ,

$$\begin{aligned} pq &= (p_0, p_1, p_2, p_3)(q_0, q_1, q_2, q_3) \\ &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ &\quad + (p_0q_1 + q_0p_1 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (p_0q_2 + q_0p_2 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} \\ &\quad + (p_0q_3 + q_0p_3 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ p_0q_1 + q_0p_1 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_0q_2 + q_0p_2 + p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_0q_3 + q_0p_3 + p_1q_2 - p_2q_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para fines prácticos, sea  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  un elemento de  $\mathbb{R}^3$ . Denotamos por  $(v_0, \vec{v})$  al elemento  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{H}$ . Esto relaciona el producto de los cuaterniones  $p = (p_0, \vec{p})$  y  $q = (q_0, \vec{q})$  a los productos familiares en  $\mathbb{R}^3$ ; el producto *escalar* o producto *interno* (no sea confundido con el producto *por* escalar),

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)$$

y el producto *vectorial*, (donde  $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$  y  $\vec{\mathbf{k}}$  son los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ).

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_2q_3 - p_3q_2)\vec{\mathbf{i}} + (p_3q_1 - p_1q_3)\vec{\mathbf{j}} + (p_1q_2 - p_2q_1)\vec{\mathbf{k}}.$$

De esta forma, el producto de cuaterniones queda como sigue [Hanson, 2006]:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0, \vec{p})(q_0, \vec{q}) \\ &= (p_0q_0 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle, p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \end{aligned} \tag{2-1}$$

Al igual que los complejos, los cuaterniones también tienen una representación en

términos de matrices, la cual será conveniente estudiar para nuestros propósitos. En lo subsiguiente, expresamos la unidad imaginaria de los complejos como  $i$ , reservando  $\mathbf{i}$  para referirnos al cuaternión  $(0, 1, 0, 0)$ .

**Lema 2.2.1.** [Savage, 2015] Definimos las siguientes matrices complejas  $2 \times 2$  :

$$\tilde{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

El álgebra de los cuaterniones es isomorfa al álgebra de las matrices:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{H}} &= \{a\tilde{\mathbf{1}} + b\tilde{\mathbf{i}} + c\tilde{\mathbf{j}} + d\tilde{\mathbf{k}} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$  una función lineal tal que

$$\varphi(\mathbf{1}) = \tilde{\mathbf{1}}, \varphi(\mathbf{i}) = \tilde{\mathbf{i}}, \varphi(\mathbf{j}) = \tilde{\mathbf{j}}, \varphi(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{k}}.$$

Este conjunto de matrices es una subálgebra de las matrices complejas invertibles de  $2 \times 2$ . Basta con demostrar que las reglas de multiplicación se cumplen para las imágenes de los elementos de la base  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , y efectivamente se verifica:

1.  $\tilde{\mathbf{1}}$  es la identidad en  $\tilde{\mathbb{H}}$ .

$$\tilde{\mathbf{1}}\alpha = \alpha\tilde{\mathbf{1}} = \alpha \quad \forall \alpha \in \tilde{\mathbb{H}},$$

2. Efectivamente se preserva el producto de los demás elementos de la base:

$$\tilde{\mathbf{i}}^2 = \tilde{\mathbf{j}}^2 = \tilde{\mathbf{k}}^2 = \tilde{\mathbf{i}}\tilde{\mathbf{j}}\tilde{\mathbf{k}} = -\tilde{\mathbf{1}}.$$

Por lo que  $\varphi$  es isomorfismo. ■

Esta representación nos servirá para definir y demostrar algunas propiedades de los cuaterniones. En adelante denotaremos a la imagen de este isomorfismo con una tilde tal que  $\varphi : q \mapsto \tilde{q} = q_0\tilde{\mathbf{1}} + q_1\tilde{\mathbf{i}} + q_2\tilde{\mathbf{j}} + q_3\tilde{\mathbf{k}}$ .

Esta representación matricial extiende la representación matricial de los complejos en el sentido de que  $a\tilde{\mathbf{1}} + b\tilde{\mathbf{i}}$  es idéntica a la representación matricial del complejo  $a + ib$ .

Ahora definimos algunas operaciones en cuaterniones:

**Definición 2.2.2.** (Operaciones en cuaterniones) [Stillwell, 2008] Dado cualquier cuaternión  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ,

1. La norma de  $q$  es el número real positivo  $|q|$  tal que:  $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \det \tilde{q}$ .

Notamos que, para  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $|pq|^2 = \det(\tilde{p}\tilde{q}) = (\det \tilde{p})(\det \tilde{q}) = |p|^2|q|^2$  y entonces  $|pq| = |p||q|$ .

2. El conjugado de  $q$  es el cuaternión  $\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ . En representación matricial, la conjugación equivale a tomar la matriz adjunta  $\bar{q} \cong \tilde{q}^\dagger$ .

De esto se sigue que  $\overline{(pq)} \cong (\tilde{p}\tilde{q})^\dagger = \tilde{q}^\dagger \tilde{p}^\dagger \cong \bar{q}\bar{p}$ .

Se puede notar que  $q\bar{q} = \bar{q}q = \mathbf{1}|q|^2$ , de lo que se sigue que si  $|q| \neq 0$ , podemos definir;

3. La inversa multiplicativa de  $q$  como el cuaternión  $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$  que cumple  $qq^{-1} = q^{-1}q = \mathbf{1}$ .

### 2.2.1. Los subespacios $\mathbf{1}\mathbb{R}$ e $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ de $\mathbb{H}$

Los cuaterniones puros (imaginarios) son aquellos de la forma:

$$p = (0, \vec{p}) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : b, c, d \in \mathbb{R}$$

Estos forman un subespacio vectorial  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  de dimensión 3 con base  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  (isomorfo a  $\mathbb{R}^3$  por  $p \rightarrow \vec{p} = (b, c, d)$ ). El complemento ortogonal a este subespacio es  $\mathbf{1}\mathbb{R}$ , los cuaterniones de la forma  $a\mathbf{1} : a \in \mathbb{R}$  denominados los *cuaterniones reales*.

Al ser un espacio vectorial, es claro que la suma de dos cuaterniones puros es a su vez un cuaternión puro, pero esto no es generalmente cierto para productos. De hecho, si  $p = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$  y  $q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ , entonces:

$$\begin{aligned} pq &= -(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) \\ &\quad + (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} + (p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k} \\ &= (-\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle, \vec{p} \times \vec{q}). \end{aligned} \tag{2-2}$$

Lo que implica que  $pq$  se encuentra en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  si y sólo si  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$ , es decir, si  $\vec{p}$  es ortogonal a  $\vec{q}$ , y en este caso  $pq = -qp$ . Por otro lado, también implica que  $pq$  es (cuaternión) real si y sólo si  $\vec{p} \times \vec{q} = 0$ , esto es, si  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  son colineales, y en este caso  $pq = qp$  [Kanatani, 2015]. En particular, si  $p \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ :

$$p^2 = -|p|^2\mathbf{1} \tag{2-3}$$

y  $\bar{p} = -p$  [Stillwell, 2008].

Por otro lado, si  $p$  y  $q$  son cuaterniones puros, entonces podemos definir el producto interno y el producto vectorial a partir de la simetrización y la antisimetrización del

producto de la siguiente forma:

$$\langle p, q \rangle = -\frac{1}{2}(pq + qp) = \mathbf{1} \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \quad (2-4)$$

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp) = (0, \vec{p} \times \vec{q}). \quad (2-5)$$

Esta similaridad de los cuaterniones puros al espacio  $\mathbb{R}^3$  y a sus operaciones es la razón principal por la cual se consideran de suma utilidad como alternativa al manejo de vectores y sus operaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Ahora conviene explorar este isomorfismo al que ahora denotaremos por

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (0, \vec{p}) &\longmapsto \vec{p} \end{aligned} \quad (2-6)$$

. Gracias a este isomorfismo, dada una transformación  $\Phi$  en  $\mathbb{R}^3$ , existe una transformación inducida  $\Phi^*$  en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  definida por

$$\Phi^* = \Sigma^{-1} \circ \Phi \circ \Sigma : \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$$

y, a su vez, toda transformación  $\Psi$  en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  induce una transformación  $\Psi_*$  en  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\Psi_* = \Sigma \circ \Psi \circ \Sigma^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2-7)$$

[John Baez, 1994].

Esto último nos será de gran utilidad al expresar las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  en términos de operaciones con cuaterniones.

Podemos ver que el producto interno y el producto vectorial entre cuaterniones puros que definimos en las ecuaciones 2-4 y 2-5 equivalen a los respectivos productos entre vectores de  $\mathbb{R}^3$  gracias a este isomorfismo.

## 2.3. Los cuaterniones unitarios; el grupo $\mathbb{H}_1$

A los cuaterniones con norma 1 se denominan *unitarios*. Si  $p$  y  $q$  son unitarios, entonces  $|pq| = |p||q| = 1$ , de donde sigue que el producto de dos cuaterniones unitarios es un cuaternión unitario, pero no sólo se cumple esto, sino que además:

**Lema 2.3.1.** *Los cuaterniones unitarios con el producto forman un grupo.*

*Demostración.* Por definición, el producto de cuaterniones es asociativo y existe una identidad  $\mathbf{1}$ . Sólo se requiere demostrar que:

1. El producto es cerrado. Como ya se vió, si  $p$  y  $q$  son unitarios,  $pq$  lo es también.

2. Contiene los inversos Dado cualquier cuaternión unitario  $q$ , su elemento inverso es también unitario ya que  $q^{-1} = \bar{q}$  y  $|\bar{q}| = |q| = 1$ .

■

Denotaremos de ahora en adelante al grupo de los cuaterniones unitarios como  $\mathbb{H}_1$ .

### 2.3.1. La geometría de los cuaterniones unitarios: $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3$

Como ya vimos, los cuaterniones como espacio vectorial provienen de  $\mathbb{R}^4$ , es decir, como espacio métrico:

$$\mathbb{H} \cong \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4$$

Los cuaterniones unitarios se sitúan dentro de estos, de forma que:

$$\mathbb{H}_1 \cong \{q : q \in \mathbb{R}^4, |q| = 1\} = \mathbb{S}^3$$

Donde  $\mathbb{S}^3$  es la (superficie 3-dimensional de la) esfera unitaria en 4 dimensiones; en otras palabras, los cuaterniones unitarios le dan una estructura de grupo a la esfera unitaria. Como veremos más adelante, este grupo se relaciona también con el grupo de rotaciones en 3 dimensiones.

Podemos adelantar un poco esta relación estudiando la representación de *rotor* de los cuaterniones unitarios.

### 2.3.2. $\mathbb{H}_1$ y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ : primer acercamiento

Sea  $q$  un cuaternión unitario. Entonces:

$$\begin{aligned} q &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \\ &= a + \mathbf{p} \\ &= (a, \vec{\mathbf{p}}) \end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{p} \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  es un cuaternión puro, y  $|\mathbf{p}|^2 = b^2 + c^2 + d^2$ . El hecho de que  $q$  sea unitario implica que  $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + |\mathbf{p}|^2 = 1$ . Esta ecuación implica que existe un  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $a = \cos \theta$  y  $|\mathbf{p}| = \sin \theta$ . Finalmente sea  $\mathbf{u} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ . Por todo lo anterior,  $q$  (por definición, un elemento arbitrario de  $\mathbb{H}_1$ ) se puede representar de la siguiente manera:

$$q = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$$

Donde  $\mathbf{u}$  es un cuaternión unitario puro, es decir, puede representarse en  $\mathbb{R}^3$  como un vector unitario  $\vec{\mathbf{u}}$ . Esta representación es parecida a la de un complejo unitario cualquiera  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , el cual con el producto de números complejos representa una rotación del plano por un ángulo  $\theta$  (sección 4.1.1). De hecho, dada la función exponencial  $e^a =$

$\sum_n \frac{a^n}{n!}$  y el hecho de que, al igual que  $i$ ,  $\mathbf{u}^2 = -1$  (ecuación 2-3), entonces por la expansión en series de sen y cos (de forma idéntica a los complejos unitarios) [Girard, 2007]:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta + \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + \mathbf{u} \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\
 &= 1 + \mathbf{u} \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \mathbf{u} \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \mathbf{u} \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots \\
 &= 1 + \frac{(\mathbf{u}\theta)^1}{1!} + \frac{(\mathbf{u}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{u}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{u}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{u}\theta)^5}{5!} + \frac{(\mathbf{u}\theta)^6}{6!} \dots \\
 &= e^{\mathbf{u}\theta}.
 \end{aligned}$$

Más adelante veremos que esta semejanza va más allá de la mera apariencia, dado que  $e^{\mathbf{u}\theta} = \cos \theta + \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta$  realmente representa una rotación en  $\mathbb{R}^3$  por el eje  $\vec{\mathbf{u}}$ , aunque por un ángulo  $\theta/2$  [Stillwell, 2008]. Pero primero necesitamos definir con mayor precisión los términos que se manejarán. En particular, necesitamos formalizar qué es lo que entendemos como rotación.

## Parte II

# La estructura de las rotaciones

# Capítulo 3

## Isometrías y movimientos rígidos

### 3.1. Isometrías; los grupos $O(n)$

Para el estudio de las rotaciones y su estructura, se requiere proceder al estudio de las transformaciones rígidas del espacio, es decir, las transformaciones que mantienen las distancias entre puntos:

**Definición 3.1.1.** (*Isometría*) [Triola, 2009] Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isometría si, para cualesquiera dos vectores  $v$  y  $v'$ , se cumple

$$|f(v) - f(v')| = |v - v'|.$$

Es decir, si  $f$  preserva la distancia entre puntos en  $\mathbb{R}^n$ .

Nos interesa también, para considerar los movimientos rígidos, definir las transformaciones que mantienen los ángulos entre vectores.

**Definición 3.1.2.** (*Transformación ortogonal*) [Triola, 2009] Una función lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación ortogonal si preserva el producto interno entre vectores:

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Debido a que el ángulo entre los vectores  $u$  y  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  está definido en términos del producto interno por

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}},$$

entonces las transformaciones ortogonales fijan los ángulos entre vectores. Además de esto, las transformaciones ortogonales fijan distancias entre vectores, como se demuestra en el siguiente:

**Lema 3.1.1.** *Toda transformación ortogonal es una isometría que fija el origen y mantiene invariante la norma de los vectores. Además, toda isometría que es también función lineal es transformación ortogonal.*

*Demostración.* Sea  $f$  una transformación ortogonal.

Debido a que la norma de vectores está definida en términos del producto interno ( $|v|^2 = \langle v, v \rangle$ ;  $v \in \mathbb{R}^n$ ), entonces  $f$  fija la norma, y en particular, ya que  $f$  es lineal,  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Además, sean  $u$  y  $v$  vectores, la distancia entre ellos es:

$$|v - u| = |f(v - u)| = |f(v) - f(u)|.$$

Por lo que  $f$  es isometría.

Por el otro lado, sea  $g$  una isometría lineal. Entonces,  $g$  preserva distancias, y entonces, dado que el producto interno puede expresarse en función de la norma por la ecuación 1-1 y que  $g$  a su vez es lineal, entonces  $g$  preserva el producto interno y entonces es ortogonal. ■

Por lo anterior, las transformaciones ortogonales comprenden el mejor acercamiento a los movimientos rígidos que se buscaban. Se puede pensar en movimientos rígidos que involucren mover el origen; estas transformaciones, parte de las llamadas *transformaciones afines*, no se estudiarán en el presente trabajo debido a que no es necesario su tratamiento al estudiar rotaciones sólomente.

Al ser lineales, toda transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^n$  tiene una representación como matriz de  $n \times n$ . Estas matrices son fáciles de identificar gracias al siguiente lema:

**Lema 3.1.2.** *La matriz  $A$  de  $n \times n$  representa una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $AA^T = \mathbf{1}$  y  $\det A = \pm 1$ , donde  $\mathbf{1}$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .*

*Demostración.* Sean  $v$  y  $v'$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Ya que  $v \mapsto Av$  es transformación ortogonal, se cumple en particular que  $\langle Av, Av' \rangle = \langle v, v' \rangle$ . Además, notemos que:

1.  $\langle Av, Av' \rangle = (Av)^T(Av') = v^T A^T Av'$ , y;
2.  $\langle v, v' \rangle = v^T v'$ .

Por lo que

$$\langle Av, Av' \rangle = \langle v, v' \rangle \implies v^T A^T Av' = v^T v'.$$

Que significa que  $A^T A = \mathbf{1}$  y, en particular  $A^T = A^{-1}$ .

Además, debido a que  $\det A^T = \det A$ , entonces

$$1 = \det \mathbf{1} = \det(AA^T) = (\det A)(\det A^T) = (\det A)^2,$$

Por lo que  $\det A = \pm 1$ . ■

Estas matrices que representan transformaciones ortogonales se llaman, poco sorpresivamente, *matrices ortogonales*.

Intuitivamente uno puede ver que estas funciones ortogonales forman un *grupo* de transformaciones, como se describe en la sección 1.1 ya que dos movimientos rígidos

pueden aplicarse uno tras otro y el resultado es también un movimiento rígido. A su vez, un movimiento rígido se puede revertir con otro movimiento rígido. La intuición en este aspecto se ve confirmada por:

**Lema 3.1.3.** *Las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$  forman un grupo con la operación de composición.*

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  dos transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ , y sean  $F$  y  $G$  sus matrices respectivas.

La composición  $f \circ g$  es también transformación ortogonal, dado que, si  $v$  es un vector

$$(f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(Gv) = FGv,$$

por lo que  $FG$  es la representación matricial de  $f \circ g$ . Esta es matriz ortogonal debido a que  $FG(FG)^T = FGG^T F^T = FF^T = \mathbb{1}$  y además  $\det(FG) = \det(F)\det(G) = \pm 1$ .

Por otro lado, la transformación  $\text{id} : v \mapsto v$  representada por la matriz identidad  $\mathbb{1}$  es ortogonal, ya que  $\mathbb{1}\mathbb{1}^T = \mathbb{1}$  y  $\det \mathbb{1} = 1$ . Esta transformación es la identidad del grupo debido a que  $(f \circ \text{id})(v) = (\text{id} \circ f)(v) = f(v)$ .

Finalmente, para una transformación ortogonal definida por la matriz  $A$ , la transformación inversa está definida por la matriz  $A^{-1} = A^T$ . ■

El grupo de las matrices ortogonales en  $\mathbb{R}^n$  se denomina  $\mathbf{O}(n)$ . Se puede ver que este grupo se particiona en dos subgrupos, las matrices ortogonales con determinante  $+1$  y las que tienen determinante  $-1$ . Esto significa, debido a la relación del determinante con la orientación [Rowland], que una parte de estas matrices mantienen la orientación y otra la invierte; como veremos, estas corresponden respectivamente a las rotaciones y reflexiones en el espacio.

## 3.2. Ortogonalidad

Antes de proseguir con el estudio de las transformaciones ortogonales y las rotaciones procederemos a estudiar más a fondo el concepto de ortogonalidad y los conceptos relacionados de complemento ortogonal e hiperplano.

**Definición 3.2.1.** (Ortogonalidad)[Garling, 2011] Sean  $u$  y  $v$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Estos vectores se dicen ortogonales si  $\langle u, v \rangle = 0$  y en ese caso escribimos  $u \perp v$ .

Sea  $A$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . El subespacio ortogonal a  $A$  (o bien complemento ortogonal) se define por

$$A^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp a \forall a \in A\}.$$

Nótese que, debido a la simetría del producto interno, si  $u \perp v$  entonces  $v \perp u$ . Además, cabe notar que, si  $E$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ , entonces se puede escribir  $\mathbb{R}^n = E + E^\perp$  y entonces cualquier vector  $v$  puede descomponerse en  $v = v_E + v_{E^\perp}$  donde

$v_E \in E$  y  $v_{E^\perp} \in E^\perp$ . Por otra parte, sean  $u$  y  $v$  vectores, entonces se puede observar, por la ecuación 1-1, que  $u \perp v$  sí y sólo si

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2. \quad (3-1)$$

Dado un vector  $v$ , escribimos  $v\mathbb{R}$  para referirnos al subespacio generado por  $v$ , es decir el espacio vectorial  $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . En base a esto, definimos:

**Definición 3.2.2.** *Sea  $v \in \mathbb{R}^n$ . El hiperplano ortogonal a  $v$ , denotado por  $v^\perp$ , es el subespacio ortogonal a  $v\mathbb{R}$ . Es decir, es el único subespacio  $v^\perp$  tal que*

$$\mathbb{R}^n = v\mathbb{R} + v^\perp.$$

El concepto de ortogonalidad, como se adivinará por el nombre, tiene una estrecha relación con las transformaciones ortogonales, en el sentido en que éstas *preservan la ortogonalidad entre vectores y espacios* como se muestra en el siguiente:

**Lema 3.2.1.** *Sea  $f$  una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^n$ . Sea además  $E$  un subespacio (de tal manera que  $\mathbb{R}^n = E + E^\perp$ ). Entonces  $f$  es una isometría de  $E \rightarrow f(E)$  y además  $E^\perp \rightarrow f(E)^\perp$ , también isometría.*

*Demostración.* Es inmediato que  $f$  es isometría de  $E$  en  $f(E)$  e isometría de  $E^\perp$  en  $f(E^\perp)$ .

Queda demostrar que  $f(E^\perp) = f(E)^\perp$ . Para esto, sea  $e \in E$  y  $e' \in E^\perp$ , entonces  $f(e') \in f(E)^\perp$  ya que

$$\langle f(e'), f(e) \rangle = \langle e', e \rangle = 0,$$

por lo que  $f(E^\perp) \subseteq f(E)^\perp$ . Por el contrario, sea  $w' \in f(E)^\perp$ , entonces (ya que  $f$  es invertible)  $w' = f(w)$  para algún  $w \in \mathbb{R}^n$  y; si  $v \in E$

$$\langle w, v \rangle = \langle f(w), f(v) \rangle = \langle w', f(v) \rangle = 0,$$

entonces  $w \in E^\perp$  y, ya que  $w'$  fué arbitrario, entonces  $f(E)^\perp \subseteq f(E^\perp)$ . ■

### 3.3. Reflexiones, el teorema de Cartan-Dieudonné

Ahora veremos cómo las reflexiones ocupan un lugar especial entre las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$  en el sentido en que todas las demás pueden expresarse como una composición de éstas.

Para esto, conviene definir formalmente lo que consideraremos una reflexión.

**Definición 3.3.1.** *(Reflexión simple)[Garling, 2011] Sea  $v$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ . Cualquier otro vector  $u$  puede descomponerse en  $u = u_v + u_{v^\perp}$  donde  $u_v \in v\mathbb{R}$  y  $u_{v^\perp} \in v^\perp$ .*

Definimos la reflexión simple en la dirección  $v$  (o bien, reflexión sobre el hiperplano  $v^\perp$ ) como la función en  $\mathbb{R}^n$  definida por

$$\mathbf{m}_v : u_v + u_{v^\perp} \longmapsto -u_v + u_{v^\perp},$$

es decir, a la transformación que invierte los vectores paralelos a  $v$  y mantiene invariantes aquellos ortogonales al mismo.

Nótese que dado que  $u = u_v + u_{v^\perp}$ , entonces podemos expresar

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_v(u) &= -u_v + u_{v^\perp} & (3-2) \\ &= -u_v + (-u_v + u_v) + u_{v^\perp} \\ &= -2u_v + (u_v + u_{v^\perp}) \\ &= u - 2u_v, \end{aligned}$$

ésta expresión alternativa nos será útil más adelante. Por otro lado, dada  $\mathbf{m}_v$ , la reflexión simple en la dirección de  $v$ , podemos ver que

$$\mathbf{m}_v(\mathbf{m}_v(u)) = \mathbf{m}_v(-u_v + u_{v^\perp}) = -(-u_v) + u_{v^\perp} = u,$$

por lo que  $\mathbf{m}_v \circ \mathbf{m}_v = \text{id}$  y entonces concluimos que la inversa de una reflexión simple es ella misma, es decir,

$$(\mathbf{m}_v)^{-1} = \mathbf{m}_v. \quad (3-3)$$

**Lema 3.3.1.** *La reflexión simple en la dirección del vector  $v$ ,  $\mathbf{m}_v$ , es una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  con determinante igual a  $-1$ .*

*Demostración.* Se observa que  $\mathbf{m}_v$  es función lineal inyectiva y además, sea  $u = \lambda v + u_{v^\perp}$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $u_{v^\perp} \in v^\perp$ , entonces:

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}_v(u)|^2 &= |\mathbf{m}_v(\lambda v + u_{v^\perp})|^2 \\ &= |-\lambda v + u_{v^\perp}|^2 \\ &= \langle (-\lambda v + u_{v^\perp}), (-\lambda v + u_{v^\perp}) \rangle \\ &= \lambda^2 \langle v, v \rangle - 2\lambda \langle v, u_{v^\perp} \rangle + \langle u_{v^\perp}, u_{v^\perp} \rangle \\ &= \lambda^2 \langle v, v \rangle + \langle u_{v^\perp}, u_{v^\perp} \rangle \\ &= |\lambda v|^2 + |u_{v^\perp}|^2, \end{aligned}$$

que concuerda con  $|u|^2$  tomando en cuenta el hecho de que  $\lambda v$  y  $u_{v^\perp}$  son ortogonales (ecuación 3-1). Por lo que  $\mathbf{m}_v$  preserva la norma. Y entonces, por el lema 3.1.1, es una transformación ortogonal.

Finalmente si definimos  $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$  y tomamos una base ortonormal de  $v^\perp$ ,  $\{\hat{v}_0^\perp, \hat{v}_1^\perp, \dots\}$ , entonces  $\{\hat{v}, \hat{v}_0^\perp, \hat{v}_1^\perp, \dots\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y en esta base, la reflexión tiene

una representación matricial diagonal con entradas diagonales  $-1, 1, \dots, 1$ , por lo que su determinante es negativo igual a  $-1$ . ■

**Proposición 3.3.1.** Sean  $u$  y  $v$  vectores. La reflexión del vector  $u$  en la dirección del vector  $v$  está dada por la siguiente fórmula explícita:

$$\mathbf{m}_v(u) = u - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} v.$$

*Demostración.*  $u$  puede descomponerse en  $u = u_v + u_{v^\perp}$  donde  $u_v \in v\mathbb{R}$  y  $u_{v^\perp} \in v^\perp$ . Además  $u_v = \lambda v$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (\lambda v + u_{v^\perp}), v \rangle \\ &= \lambda \langle v, v \rangle + \langle u_{v^\perp}, v \rangle \\ &= \lambda \langle v, v \rangle \\ \implies \lambda &= \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} \end{aligned}$$

Por lo que  $u_v = \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} v$ . Y el resultado sigue al sustituir esto en la fórmula de la reflexión en la dirección de  $v$  dada por la ecuación 3-2 ( $\mathbf{m}_v(u) = u - 2u_v$ ). ■

El siguiente hecho es clave para la demostración que toda transformación ortogonal puede expresarse como el producto de reflexiones.

**Lema 3.3.2.** Sean  $u$  y  $v$  dos vectores en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $|u| = |v|$ . Existe una reflexión que mapea  $u$  en  $v$ . Además, ésta reflexión es única si  $u \neq v$ .

*Demostración.* Si  $u = v$ , entonces la reflexión en cualquier dirección ortogonal a  $u$  basta.

Si  $u \neq v$ , entonces consideramos la reflexión en la dirección paralela a la línea que conecta a  $u$  y  $v$ , es decir, la reflexión en la dirección de  $v - u$ . Esta reflexión viene dada, gracias a la ecuación de la proposición 3.3.1, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{v-u}(u) &= u - 2 \frac{\langle u, (v-u) \rangle}{|v-u|^2} (v-u) \\ &= u - 2 \frac{\langle u, v \rangle - \langle u, u \rangle}{|v-u|^2} (v-u) \\ &= u - 2 \frac{\langle u, v \rangle - |u|^2}{|v|^2 + |u|^2 - 2 \langle u, v \rangle} (v-u) \\ &= u - 2 \frac{\langle u, v \rangle - |u|^2}{2|u|^2 - 2 \langle u, v \rangle} (v-u) && \text{(ya que } |u| = |v|) \\ &= u + \frac{2|u|^2 - 2 \langle u, v \rangle}{2|u|^2 - 2 \langle u, v \rangle} (v-u) \\ &= u + (v-u) = v. \end{aligned}$$

Por lo que es efectivamente la reflexión que se buscaba. ■

Finalmente estamos en la posibilidad de demostrar el teorema principal de este capítulo:

**Teorema 3.3.1.** (*Cartan-Dieudonné*)[Gallier, 2011; Stillwell, 2008] *Cualquier transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^n$  que no es la identidad es el producto de a lo más  $n$  reflexiones simples.*

*Demostración.* Haremos una demostración por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  las únicas transformaciones ortogonales son la identidad y el mapeo  $x \mapsto -x$ , que es una reflexión.

Ahora supongamos que el resultado es cierto para  $n = k-1$  y sea  $f$  una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^k$ . Si  $f$  no es la identidad, tomemos un vector  $v$  tal que  $f(v) \neq v$  entonces, por el lema anterior, existe una reflexión única  $\mathbf{m}_{v-f(v)}$  que lleva  $f(v)$  a  $v$  y entonces  $\mathbf{m}_{v-f(v)}(f(v)) = v$ , y por lo tanto  $\mathbf{m}_{v-f(v)} \circ f$  fija a  $v$ . Pero al ser  $\mathbf{m}_{v-f(v)}$  y  $f$  lineales, lo anterior implica que  $\mathbf{m}_{v-f(v)} \circ f$  es la identidad en todo el subespacio  $v\mathbb{R}$ , es decir

$$\mathbf{m}_{v-f(v)} \circ f = \text{id}_{v\mathbb{R}}$$

y entonces, al ser la reflexión  $\mathbf{m}_{v-f(v)}$  invertible, la restricción de  $f$  en  $v\mathbb{R}$ ,  $f_{v\mathbb{R}}$ , queda

$$f_{v\mathbb{R}} = (\mathbf{m}_{v-f(v)})^{-1} \circ \text{id}_{v\mathbb{R}} = \mathbf{m}_{v-f(v)}$$

(ya que la inversa de una reflexión simple es ella misma, ecuación 3-3). Finalmente, al ser  $f$  ortogonal sólo falta para determinarla completamente su restricción  $f_{v^\perp}$  al subespacio  $k-1$  dimensional  $v^\perp$  ortogonal a  $v$ . Por hipótesis de inducción, ésta acción es la composición de a lo más  $k-1$  reflexiones simples y por lo tanto  $f = f_{v\mathbb{R}} \circ f_{v^\perp} = \mathbf{m}_{v-f(v)} \circ f_{v^\perp}$  es el producto de a lo más  $k$  reflexiones simples. ■

### 3.4. Recapitulando; transformaciones ortogonales

Para definir las rotaciones hemos explorado las transformaciones del espacio  $\mathbb{R}^n$  que fijan los ángulos y las distancias entre puntos, las *transformaciones ortogonales*, el grupo  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$ . Al hacer esto hemos notado que éstas se dividen en dos categorías: aquellas con determinante positivo (+1), las cuales como veremos más adelante forman un grupo que denotaremos por  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  y aquellas con determinante negativo (-1). Y, ya que, el determinante restringido a estas transformaciones  $\det_{\mathbf{O}(\mathbf{n})} : \mathbf{O}(\mathbf{n}) \rightarrow \{-1, +1\}$  es un homomorfismo de grupos, y su kernel (los elementos que mapean a +1) es  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ , entonces podemos ver (gracias al teorema del isomorfismo de grupos, 1.1.1) que  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$  consiste en dos copias disjuntas de  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  (donde  $\mathbf{O}(\mathbf{n}) \setminus \mathbf{SO}(\mathbf{n})$  es una clase lateral de  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ ). Esto se resume en la siguiente secuencia exacta (donde el kernel de cada morfismo es la imagen

del anterior, definición 1.1.8):

$$1 \longrightarrow \mathbf{SO}(\mathbf{n}) \xrightarrow{\subseteq} \mathbf{O}(\mathbf{n}) \xrightarrow{\det_{\mathbf{O}(\mathbf{n})}} \{-1, +1\} \longrightarrow 1$$

Por otro lado hemos visto que toda transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^n$  puede descomponerse en un máximo de  $n$  reflexiones sucesivas y, en particular, las rotaciones (con determinante positivo como se verá más adelante) se descomponen entonces en un número par de reflexiones. A continuación exploraremos a detalle las rotaciones en 2D y 3D y observaremos cómo se manifiesta dicha descomposición en estos casos específicos.

# Capítulo 4

## Rotaciones; los grupos especiales $SO(n)$

Ahora es el momento adecuado para introducir formalmente el tópico principal de este trabajo: las rotaciones. Comenzaremos con el concepto formal y luego nos centraremos en las rotaciones en 2 y 3 dimensiones, lo cual nos permitirá repasar los conceptos y relacionarlos con la noción intuitiva. Además, veremos la relación con los números complejos y los cuaterniones. Esto nos preparará para la siguiente parte, donde exploraremos las rotaciones en 4D y en más dimensiones, y donde pondremos a prueba la intuición y exploraremos los aspectos más generales de éstas.

Cuando se piensa en rotaciones, muchos ejemplos pueden venir a la mente como las ruedas en un auto o la Tierra girando mientras orbita alrededor del Sol. Estos son ejemplos de rotaciones en tres dimensiones, que abarcan también a las rotaciones en 2 dimensiones en el sentido de que toda rotación en tres dimensiones puede ser reducida a una en dos dimensiones en la base correcta (como detallaremos más adelante). ¿Pero y en dimensiones más altas? Resulta que el conjunto de rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  está bien definido y este conjunto junto con la operación de composición de esas rotaciones constituyen un grupo, como veremos a continuación.

En preparación, nótese que una de las propiedades fundamentales de las rotaciones es que mantienen las distancias invariantes. Por ejemplo, si se rota un cubo, la forma de éste se mantiene invariante. En específico, se preservan las distancias y ángulos entre puntos cualesquiera fuera o dentro del cubo, lo que convierte a las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  en un subconjunto de las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ . Por otra parte, las relaciones de orientación entre los puntos del cubo se mantienen invariantes. Es esta propiedad de preservar la orientación lo que distingue a las rotaciones entre las demás transformaciones ortogonales. Dicho esto, podemos definir:

**Definición 4.0.1.** *(Rotaciones)[Triola, 2009] Las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ , son las transformaciones  $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que:*

$$\text{Para } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda \in \mathbb{R},$$

1. (Son isometrías)  $|\mathbf{r}(\mathbf{b} - \mathbf{a})| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$
2. (Son lineales)  $\mathbf{r}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) = \mathbf{r}(\mathbf{a}) + \lambda\mathbf{r}(\mathbf{b})$
3. (Preservan la orientación)  $\det \mathbf{r} > 0$ .

Al ser transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$ , pueden ser representadas como matrices de  $n \times n$  y, por lo tanto, el determinante del inciso 3 está bien definido.

Por lo anterior, *las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  pueden representarse como las matrices cuadradas ortogonales de orden  $n$  con determinante igual a 1* ( $\mathbf{r}$  es isometría  $\implies \det \mathbf{r} = \pm 1$ , y  $\det \mathbf{r} > 0 \implies \det \mathbf{r} = 1$ ).

**Lema 4.0.1.** *Las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  forman un grupo.*

*Demostración.* Como ya vimos, las rotaciones son un subconjunto de las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ , que forman a su vez el grupo  $\mathbf{O}(n)$ . Basta con demostrar que las rotaciones forman un subgrupo, para lo cual aprovechamos el hecho de que si  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son rotaciones,  $\det(\mathbf{r}_1) = \det(\mathbf{r}_2) = 1 = (\det \mathbf{r}_1)(\det \mathbf{r}_2)$ , por lo que el producto es rotación. Además, al ser transformación ortogonal, la inversa de una rotación representada por la matriz  $R$  está dada por la matriz  $R^T$ , la cual es rotación también dado que  $\det(R^T) = \det(R) = 1$ . ■

Al ser generadas por reflexiones simples por el teorema 3.3.1, y al tener las reflexiones simples determinante negativo (y al ser el determinante de una composición el producto de los determinantes), podemos ver que *toda rotación se puede descomponer en un número par de reflexiones.*

Como veremos a continuación, la representación matricial no es la única, y muchas veces no es la más conveniente, para expresar las rotaciones a pesar de ser una de las más comunes [Ron Goldman, 2010].

## 4.1. Rotaciones en 2 dimensiones; el grupo $\mathbf{SO}(2)$

Ahora procederemos a estudiar el grupo de rotaciones en 2 dimensiones,  $\mathbf{SO}(2)$ , el cual puede ser visto también como las simetrías del círculo en 2D [Ceulemans, 2017] o las transformaciones rígidas del plano que mantienen un punto fijo [Triola, 2009].

Recordamos que el grupo de las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  consiste en las isometrías lineales que preservan la orientación, por lo que en su representación matricial una rotación es una matriz ortogonal real de orden 2 [Triola, 2009]. Es decir, sea  $\mathbf{r} \in \mathbf{SO}(2)$ , entonces:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$\det \mathbf{r} = ad - bc = 1,$$

$$\mathbf{r}\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{id}.$$

De lo que sigue que  $a = d$  y  $b = -c$ . Además, como  $a^2 + b^2 = 1$ , entonces  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ . Por esto, una matriz de  $\mathbf{SO}(2)$  general tiene la forma

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Podemos ver que aplicada sobre un elemento de  $\mathbb{R}^2$ ,  $z$  resulta en:

$$\mathbf{r}z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = (z_0 \cos \theta - z_1 \sin \theta, z_0 \sin \theta + z_1 \cos \theta)$$

Notamos que esta transformación tiene un parámetro libre, el ángulo  $\theta$ . Denotamos esta dependencia explícita como  $\mathbf{r}(\theta)$

#### 4.1.1. Los complejos unitarios $\mathbb{C}_1$ y las rotaciones $\mathbf{SO}(2)$

Es de notarse que se obtiene el mismo resultado anterior si se calcula el producto de  $z$  con el complejo  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Es decir, para un mismo ángulo  $\theta$ , la rotación por este ángulo tiene dos representaciones equivalentes, la matriz  $\mathbf{r}(\theta)$  y el complejo  $e^{i\theta}$ ; de tal manera que  $\mathbf{r}(\theta)z = e^{i\theta}z$  es el vector resultante de aplicar la rotación sobre  $z$ . Lo que sugiere lo siguiente:

**Lema 4.1.1.** *El grupo de las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$ , representadas por  $\mathbf{SO}(2)$ , es isomorfo al grupo  $\mathbb{C}_1$  de los complejos unitarios.*

*Demostración.* Por lo anterior, las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  tienen un único parámetro libre  $\theta$ , y dado ese parámetro, la definición de la matriz  $\mathbf{r}(\theta)$  y del complejo unitario  $e^{i\theta}$  son únicas y representan la misma rotación, entonces se tiene una biyección de los conjuntos respectivos:

$$\phi : \mathbf{SO}(2) \longrightarrow \mathbb{C}_1; \mathbf{r}(\theta) \longmapsto e^{i\theta}$$

Por otra parte, sean  $\mathbf{r}(\theta_1)$  y  $\mathbf{r}(\theta_2)$  dos elementos de  $\mathbf{SO}(2)$  representando dos rotaciones con ángulos diferentes; la composición de estas rotaciones en términos matriciales  $\mathbf{r}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{r}(\theta_2)\mathbf{r}(\theta_1)$  equivale en términos de elementos de  $\mathbb{C}_1$  al producto de los respectivos complejos unitarios,  $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_2}e^{i\theta_1}$  por lo que esta transformación es un homomorfismo de los grupos involucrados. ■

Para ver la relación que guardan las rotaciones con las reflexiones, y para observar el papel generador de estas últimas, analicemos la representación de las reflexiones en  $\mathbb{R}^2$  por medio de los complejos. Para esto, comenzamos por notar que la conjugación ( $z \mapsto \bar{z}$ ) es una reflexión simple en la dirección del eje imaginario. Ahora, para realizar una reflexión por el eje definido por el complejo  $x$  ( $|x| = 1$ ) podemos aprovechar esto y seguir el siguiente algoritmo para encontrar la expresión de la reflexión:

1. alinear el eje  $x$  con el eje imaginario mediante una rotación (multiplicando por  $ix^{-1}$ );

2. aplicar la operación de conjugación al resultado (reflexión por el nuevo eje imaginario); y finalmente,
3. rotar el eje  $x$  de regreso a su posición original (multiplicando por  $xi^{-1}$ ).

De esta manera, la reflexión por el eje  $x$  vendría dada por la siguiente composición de funciones:

$$z \mapsto ix^{-1}z \mapsto \overline{ix^{-1}z} \mapsto xi^{-1}(\overline{ix^{-1}z}) = -x^2\bar{z}$$

La función resultante de este razonamiento

$$\mathbf{m}_x : z \mapsto -x^2\bar{z}$$

donde  $x$  es un complejo unitario es efectivamente la reflexión simple en la dirección de  $x$  como se demuestra en la siguiente:

**Proposición 4.1.1.** (*Reflexión simple en  $\mathbb{R}^2$* ) [Garling, 2011] *Toda reflexión simple en  $\mathbb{R}^2$  tiene la forma*

$$z \mapsto r\bar{z}$$

donde  $r$  es un complejo unitario.

*Demostración.* Dado un complejo unitario  $x$ , se puede observar que la función

$$\mathbf{m}_x : z \mapsto -x^2\bar{z}$$

es lineal (por la distributividad del producto y de la operación de conjugación) y además:

1. Invierte los vectores paralelos a  $x$  porque  $\mathbf{m}_x(x) = -x^2\bar{x} = -x|x| = -x$ ; y,
2. Mantiene invariantes los vectores ortogonales a  $x$  (generados por  $ix$ ) como se puede ver por:  $\mathbf{m}_x(ix) = -x^2\overline{ix} = -x^2(-i)\bar{x} = ix|x| = ix$ .

Por lo que efectivamente es la reflexión simple en la dirección de  $x$  y vemos que cualquier reflexión simple tiene esta forma. ■

De esta manera, de acuerdo con el teorema 3.3.1 (Cartan-Dieudonné), las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  se puede descomponen en dos reflexiones simples a lo más y, dado que las reflexiones simples tienen determinante -1 y las rotaciones tienen determinante +1, podemos concluir que (en  $\mathbb{R}^2$ ) toda rotación se compone de exactamente dos reflexiones simples.

Sean  $e^{i\theta}$  y  $e^{i\phi}$  dos complejos unitarios que definen direcciones de reflexión para las reflexiones simples  $\mathbf{m}_{e^{i\theta}}$  y  $\mathbf{m}_{e^{i\phi}}$ , entonces, de acuerdo al razonamiento anterior, la composición es una rotación, y como podemos ver al desarrollar esta expresión, que

$$\mathbf{r} = \mathbf{m}_{e^{i\theta}} \circ \mathbf{m}_{e^{i\phi}} : z \mapsto -e^{i2\phi}\bar{z} \mapsto -e^{i2\theta}\overline{(-e^{i2\phi}\bar{z})} = e^{i2(\theta-\phi)}z,$$

la expresión resultante es una rotación por un ángulo  $2(\theta - \phi)$ , es decir, el doble del ángulo entre las direcciones de reflexión. Notemos que esta expresión es asimétrica y si se cambia el orden de las reflexiones se obtiene la rotación inversa (por un ángulo  $2(\phi - \theta)$ ), por lo que

$$\mathbf{m}_{e^{i\theta}} \circ \mathbf{m}_{e^{i\phi}} = (\mathbf{m}_{e^{i\phi}} \circ \mathbf{m}_{e^{i\theta}})^{-1}$$

## 4.2. Rotaciones en 3 dimensiones; el grupo $\mathbf{SO}(3)$

Por experiencia se sabe que las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  dejan un eje fijo y que toda rotación en 3D es similar a una rotación en 2D tomando en cuenta que al rotar en 3D, un punto describe un círculo y, en el plano de ese círculo, el movimiento se puede describir como una rotación en el plano. A continuación veremos el fundamento formal de estas afirmaciones y estudiaremos con más detalle este grupo de transformaciones.

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  vectores unitarios ortogonales en  $\mathbb{R}^3$  (i.e.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ). y sea  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ , entonces  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  es una base ortonormal del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Ahora observamos que la transformación lineal

$$\begin{aligned}\vec{u} &\mapsto \vec{u} \cos \theta + \vec{v} \operatorname{sen} \theta, \\ \vec{v} &\mapsto -\vec{u} \operatorname{sen} \theta + \vec{v} \cos \theta, \\ \vec{w} &\mapsto \vec{w}\end{aligned}$$

tiene la siguiente representación matricial restringida al plano  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La cual es una rotación en el plano, un elemento de  $\mathbf{SO}(2)$ . Además, la transformación completa tiene la siguiente representación matricial en la base  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

que se puede verificar que es ortogonal y  $\det \mathbf{r} = 1$ , por lo que es un elemento de  $\mathbf{SO}(3)$ , es decir, representa una rotación en  $\mathbb{R}^3$ . De esto concluimos que existe una inclusión de los elementos de  $\mathbf{SO}(2)$  en  $\mathbf{SO}(3)$  (de las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  a las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ ). De hecho existen múltiples inclusiones diferentes, cada una asociada a un plano que pasa por el origen debido a que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  fueron definidos como un par de vectores ortonormales arbitrarios, y cada par de estos determina de forma unívoca uno de dichos planos.

La técnica anterior se puede utilizar también para incluir un elemento de  $\mathbf{SO}(2)$  en  $\mathbf{SO}(n)$  para un  $n$  arbitrario, sólo se tiene que definir un plano  $P$  generado por el par ortonormal  $\{a, b\}$  de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Sea además  $\{c, d, e, \dots\}$  una base ortonormal

arbitraria de  $\mathbb{R}^n \setminus P$ , el complemento ortogonal de  $P$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la transformación lineal dada por:

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta, \\ b &\mapsto -a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta, \\ x &\mapsto x; \quad x \in \{c, d, e, \dots\} \end{aligned}$$

Es un elemento de  $\mathbf{SO}(2)$  restringida al plano  $P$  con base  $\{a, b\}$  y es un elemento de  $\mathbf{SO}(n)$  considerando todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  [Aguilera y Pérez-Aguila, 2004].

### 4.2.1. Los cuaterniones unitarios y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$

Cuando estudiamos el grupo  $\mathbb{H}_1$  de los cuaterniones unitarios afirmamos que éste se relacionaba con el grupo de rotaciones en 3 dimensiones  $\mathbf{SO}(3)$ , ahora procederemos a describir esta relación. Adelantamos al lector que esta relación constituye en una correspondencia que asigna a cada cuaternión unitario una rotación, esta correspondencia es dos a uno y además es un homomorfismo de grupos, es decir, mantiene la estructura de los grupos involucrados.

Para describir lo anterior aprovecharemos el isomorfismo entre cuaterniones puros y vectores en  $\mathbb{R}^3$  descrito por la ecuación 2-6 ( $(0, \vec{x}) \mapsto \vec{x}$ ). Recordemos que este isomorfismo nos permite convertir funciones en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  a funciones en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que ahora nos concentraremos en encontrar transformaciones del subespacio de los cuaterniones puros ( $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ ), ya que su similaridad con los complejos nos permitirá expresar rotaciones en términos de productos.

Para encontrar una transformación en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  que induzca (por medio de la ecuación 2-7) una rotación en  $\mathbb{R}^3$  podemos comenzar tomando en cuenta la relación entre los complejos unitarios y las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$ . Recordemos que el complejo unitario  $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  representa, mediante el producto con un elemento de  $\mathbb{R}^2$  la rotación de ese vector por un ángulo  $\theta$ .

Esto sugiere que el cuaternión unitario

$$\cos \theta + u \operatorname{sen} \theta$$

donde  $u$  es unitario puro podría representar, mediante el producto una rotación. Esta hipótesis se ve además apoyada por el hecho de que el producto por un cuaternión unitario preserva distancias (si  $q$  es unitario,  $|q(b-a)| = |q||b-a| = |b-a|$ ), es decir, es isometría y además de que es lineal. Por otro lado, a diferencia de los números complejos, el producto de cuaterniones es no conmutativo; lo cual es importante, ya que la composición de rotaciones en 3 dimensiones o más es no conmutativa también, lo cual abre la posibilidad de expresar la composición de rotaciones como el producto de los cuaterniones respectivos.

Llegados a este punto, encontramos una dificultad para identificar el producto por cuaterniones unitarios como rotaciones del espacio tridimensional al notar que el producto

de un cuaternión unitario por un cuaternión puro no es, en general, un cuaternión puro, sino que si  $R = (\cos \theta, \vec{u} \operatorname{sen} \theta)$  es unitario y  $v = (0, \vec{v})$  es cuaternión puro, entonces

$$Rv = (-\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \operatorname{sen} \theta, \vec{v} \cos \theta + \vec{u} \times \vec{v} \operatorname{sen} \theta)$$

El cual es un cuaternión puro sólo si  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , es decir, si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales. Pero, en este caso especial, efectivamente se cumple lo esperado:

**Lema 4.2.1.** [Vince, 2011] Sea  $R = (\cos \theta, \vec{u} \operatorname{sen} \theta)$  un cuaternión unitario. Para todo  $v = (0, \vec{v})$  tal que  $\vec{v} \in \vec{u}^\perp$ , el producto  $Rv \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  induce una rotación en  $\mathbb{R}^3$  de  $\vec{v}$  por un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $\vec{u}$ . El producto  $vR$  es la rotación inversa.

*Demostración.* Hemos visto ya que  $Rv \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ . La parte cuaterniónica pura de este producto es:

$$\vec{v} \cos \theta + \vec{u} \times \vec{v} \operatorname{sen} \theta$$

Lo cual es efectivamente una rotación del vector  $\vec{v}$  en el plano con base ortonormal  $\left\{ \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \vec{u} \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\}$  por un ángulo  $\theta$ . Y podemos ver que también el producto por la izquierda

$$vR = (0, \vec{v} \cos \theta - \vec{u} \times \vec{v} \operatorname{sen} \theta)$$

es una rotación por el mismo plano pero en sentido inverso. Además

$$\begin{aligned} (Rv)R &= (v \cos \theta + uv \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta + u \operatorname{sen} \theta) \\ &= v(\cos \theta)^2 + vu \cos \theta \operatorname{sen} \theta + uv \cos \theta \operatorname{sen} \theta + uvu(\operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= v(\cos \theta)^2 + uv(\cos \theta \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta) + (-vu)u(\operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= v(\cos \theta)^2 + -v(-1)(\operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= v. \end{aligned}$$

Que nos termina de confirmar que son transformaciones inversas. ■

Esto significa que el producto (por cualquier lado) por un cuaternión unitario es, en casos especiales, una rotación en  $\mathbb{R}^3$ . De hecho, se cumple algo más. El producto por cuaternión unitario es siempre una rotación en  $\mathbb{R}^4$  como se verá a detalle más adelante (capítulo 5). Por ahora, para verlo notamos que el producto por cualquier lado por el elemento 1 es también una rotación, la *identidad*. Ahora, al ser isomorfos a la 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ , los cuaterniones unitarios forman un espacio topológico conexo, el cual se mapea continuamente al espacio de las isometrías lineales de  $\mathbb{H}$  mediante el producto por la izquierda (o por la derecha), y dado que este mapeo es continuo, la imagen es también un espacio conexo. Pero la componente conexa de las isometrías lineales en  $\mathbb{R}^4$ , que incluye la identidad es  $\mathbf{SO}(4)$ , el grupo de todas las rotaciones en  $\mathbb{R}^4$ , por lo que el producto (por cualquier lado) por cuaternión unitario tiene que ser rotación.

Ahora sabemos que los cuaterniones unitarios representan rotaciones en  $\mathbb{R}^4$ . Lo que prosigue es encontrar una forma de restringir estas rotaciones a  $\mathbb{R}^3$ , es decir, encontrar

una forma de restringir esta transformación al subespacio  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ . Para esto notamos lo siguiente:

**Lema 4.2.2.** *Una transformación lineal ortogonal de  $\mathbb{H}$  que mantiene invariante el subespacio  $\mathbf{1}\mathbb{R}$  mantiene invariante  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  también.*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  una transformación lineal ortogonal de  $\mathbb{H}$  tal que  $\varphi(\mathbf{1}\mathbb{R}) \subseteq \mathbf{1}\mathbb{R}$ .

Al ser  $\varphi$  transformación lineal ortogonal, es invertible, y en particular inyectiva, por lo que la restricción sobre  $\mathbf{1}\mathbb{R}$  es inyectiva también y al ser un mapeo lineal de espacios vectoriales de dimensión finita, esta restricción es también sobreyectiva por lo que es un isomorfismo en  $\mathbf{1}\mathbb{R}$ .

Por otro lado, al ser  $\mathbf{1}\mathbb{R}$  e  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  subespacios ortogonales de  $\mathbb{H}$  y  $\varphi$  un mapeo lineal ortogonal, entonces tomando  $\mathbf{b} \in \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  y un elemento cualquiera  $a$  de  $\mathbf{1}\mathbb{R}$ , entonces  $\varphi(\mathbf{b})$  es cuaternión puro porque:

$$\langle \varphi(\mathbf{b}), \varphi(a) \rangle = \langle \mathbf{b}, a \rangle = 0$$

que implica, dado que  $\varphi(a) \in \mathbf{1}\mathbb{R}$  y  $a$  fué arbitrario, que  $\varphi(\mathbf{b})$  se encuentra en el complemento ortogonal de  $\mathbf{1}\mathbb{R}$ , que es  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ , por lo que concluimos que  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  es invariante ante  $\varphi$ . ■

Esto significa que dado un cuaternión unitario  $u$ , si queremos encontrar alguna acción de éste sobre  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  que represente una rotación en  $\mathbb{R}^3$  basta con restringir la búsqueda a las transformaciones que mantienen el subespacio  $\mathbf{1}\mathbb{R}$  invariante, esto nos facilita las cosas, ya que podemos recurrir a una propiedad fundamental de los cuaterniones reales, el producto es conmutativo con cualquier otro cuaternión.

**Lema 4.2.3.** *Si un cuaternión  $r$  tiene la propiedad de que  $rq = qr$  para todo  $q \in \mathbb{H}$ , entonces  $r \in \mathbf{1}\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $Z$  a todos los  $r \in \mathbb{H}$  tales que  $rq = qr$ , o equivalentemente  $rq - qr = 0$ , el problema consiste ahora en listar los elementos de  $Z$ . Para esto, si  $r \in Z$  y  $r = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$  entonces:  $r\mathbf{i} - \mathbf{i}r = 2r_3\mathbf{j} - 2r_2\mathbf{k}$  que implica  $r_2 = r_3 = 0$ ; por otro lado  $r\mathbf{j} - \mathbf{j}r = 2r_1\mathbf{k} - 2r_3\mathbf{i}$  que implica a su vez  $r_1 = 0$ , y entonces  $Z \subseteq \mathbf{1}\mathbb{R}$ . Por otro lado, por definición se cumple que  $\mathbf{1}q = q\mathbf{1} \forall q \in \mathbb{H}$  y entonces se cumple para todo el subespacio  $\mathbf{1}\mathbb{R}$  generado por este elemento, por lo que  $\mathbf{1}\mathbb{R} \subseteq Z$  y entonces  $Z = \mathbf{1}\mathbb{R}$ . ■

Finalmente, esto nos permite mostrar que dado un cuaternión unitario  $u$ , la transformación  $\mathbf{R}_u : v \mapsto uvu^{-1}$  cumple los requisitos para representar rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , ya que si  $r \in \mathbf{1}\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{R}_u(r) = uru^{-1} = uu^{-1}r = r$  y entonces, por el lema 4.2.2, mantiene invariante el subespacio  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ , por lo que estamos en condiciones de formular la siguiente:

**Proposición 4.2.1.** *[Stillwell, 2008] Recordemos que existe un isomorfismo entre los espacios vectoriales  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^3$  (ecuación 2-6) por lo que toda transformación  $\Psi$  en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  induce una transformación asociada  $\Psi_*$  en  $\mathbb{R}^3$  (por la ecuación 2-7).*

Dado un cuaternión unitario  $u$ , la transformación en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  definida por

$$\rho_u : \mathbf{v} \mapsto u\mathbf{v}u^{-1}$$

induce una rotación en  $\mathbb{R}^3$ , dada por el isomorfismo como  $(\rho_u)_*$ .

*Demostración.*  $\rho_u$  es una transformación ortogonal en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  debido a que:

1. Es lineal. Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  vectores en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\rho_u(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) &= u(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})u^{-1} \\ &= u\mathbf{a}u^{-1} + \lambda u\mathbf{b}u^{-1} \\ &= \rho_u(\mathbf{a}) + \lambda\rho_u(\mathbf{b}),\end{aligned}$$

y,

2. Preserva distancias:

$$\begin{aligned}|\rho_u(\mathbf{b} - \mathbf{a})| &= |u(\mathbf{b} - \mathbf{a})u^{-1}| \\ &= |u||\mathbf{b} - \mathbf{a}||u^{-1}| \\ &= |\mathbf{b} - \mathbf{a}|\end{aligned}$$

Por lo que estas propiedades se cumplen también para la transformación asociada en  $\mathbb{R}^3$ ,  $(\rho_u)_*$ .

Además, sabemos que se puede expresar  $u = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$  para algún  $\theta$  y donde  $\mathbf{u}$  es un cuaternión unitario puro, asociado a un vector unitario  $\vec{u}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario ortogonal a  $\vec{u}$  (i.e.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ) y sea  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Entonces  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  es una base ortonormal en  $\mathbb{R}^3$ . Sus respectivas imágenes en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  cumplen lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{v} &= -\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{w} \\ \mathbf{v}\mathbf{w} &= -\mathbf{w}\mathbf{v} = \mathbf{u} \\ \mathbf{w}\mathbf{u} &= -\mathbf{u}\mathbf{w} = \mathbf{v}\end{aligned}$$

Con esto calculamos:

$$\begin{aligned}
u\mathbf{v}u^{-1} &= (\cos \theta + \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta)\mathbf{v}(\cos \theta - \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta) \\
&= (\mathbf{v} \cos \theta + \mathbf{u}\mathbf{v} \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta) \\
&= \mathbf{v}(\cos \theta)^2 + \mathbf{u}\mathbf{v} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \mathbf{v}\mathbf{u} \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}(\operatorname{sen} \theta)^2 \\
&= \mathbf{v}(\cos \theta)^2 + 2\mathbf{u}\mathbf{v} \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \mathbf{u}^2\mathbf{v}(\operatorname{sen} \theta)^2 \\
&= \mathbf{v} \left( (\cos \theta)^2 - (\operatorname{sen} \theta)^2 \right) + 2\mathbf{w} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&= \mathbf{v} \cos 2\theta + \mathbf{w} \operatorname{sen} 2\theta.
\end{aligned}$$

De igual manera,

$$u\mathbf{w}u^{-1} = \mathbf{v} \cos 2\theta - \mathbf{w} \operatorname{sen} 2\theta.$$

Por lo que, en la base  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ , esto es equivalente a transformar por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

y es entonces rotación por un ángulo  $2\theta$ . Esta rotación en  $\mathbb{R}^3$  es en el plano  $(\vec{v}, \vec{w})$  y por cómo se definieron estos, tiene como eje al vector  $\vec{u}$  [Savage, 2015]. ■

Si a lo anterior le añadimos que, de acuerdo al teorema de rotación de Euler, toda rotación en  $\mathbb{R}^3$  tiene un eigenspacio unidimensional (i.e. siempre existe un eje de rotación) [Triola, 2009], entonces podemos ver que una rotación está completamente definida por un par  $(\vec{u}, \theta)$  donde se especifica el eje y el ángulo de rotación [Yvette Kosmann-Schwarzbach, 2010]. Por la proposición anterior, esta rotación se ve realizada mediante la acción de  $\rho_u$ , donde

$$u = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \vec{u} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

y entonces observamos que *todas las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  surgen de este modo*.

Notamos que se ha definido un mapeo del grupo de los cuaterniones unitarios  $\mathbb{H}_1$ , isomorfo a  $\mathbb{S}^3$ , al grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , isomorfo a  $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$ . Este mapeo no es biyectivo debido a que, dado un cuaternión unitario  $u$ ,  $\rho_u$  y  $\rho_{-u}$  representan la misma transformación, pero como veremos ahora, este mapeo preserva la estructura de los grupos involucrados.

**Teorema 4.2.1.** [Savage, 2015] *Existe una correspondencia 2 a 1 entre el grupo multiplicativo de los cuaterniones unitarios y el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Esta correspondencia es además un homomorfismo de grupos y define un isomorfismo  $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbf{SO}(\mathbf{3})$ .*

*Demostración.* Denotamos este homomorfismo por  $\rho$  y afirmamos que  $\rho(u) = \rho_u$  para  $u$  cuaternión unitario. Como ya vimos, dado un cuaternión unitario  $u$ , la rotación generada por  $u$  y  $-u$  es la misma, y no hay más cuaterniones unitarios que la generen; por lo que

el mapeo es 2 a 1 y sobreyectivo como ya vimos antes. Además, por el hecho de que, si  $u$  y  $v$  son unitarios y  $\mathbf{x}$  es cuaternión puro entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{uv}(\mathbf{x}) &= (uv)\mathbf{x}(uv)^{-1} \\
&= uv\mathbf{x}v^{-1}u^{-1} \\
&= u(v\mathbf{x}v^{-1})u^{-1} \\
&= u(\rho_v(\mathbf{x}))u^{-1} \\
&= \rho_u(\rho_v(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

por lo que  $\rho_{uv} = \rho_u \circ \rho_v$  lo que significa que el mapeo es un homomorfismo de grupos. Finalmente, la rotación identidad es generada por los cuaterniones unitarios  $\mathbf{1}$  y  $-\mathbf{1}$  por lo que el kernel del homomorfismo consiste en estos dos elementos y entonces, dado que el grupo de los cuaterniones es isomorfo a  $\mathbb{S}^3$  y por el teorema fundamental de isomorfismo para grupos 1.1.1, esto significa que

$$\mathbb{S}^3/\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} \cong \text{SO}(3)$$

[Savage, 2015]. ■

Finalmente, examinemos el papel generador de las reflexiones simples para este espacio,  $\mathbb{R}^3$ , para lo cual, necesitamos ver cómo se expresan las reflexiones simples en términos de operaciones en cuaterniones puros. Recordemos que, dado un vector  $\vec{v}$  en  $\mathbb{R}^3$ , la reflexión simple en esa dirección está dada por (ecuación 3.3.1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\vec{u} &\longmapsto \vec{u} - 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v}.
\end{aligned}$$

La cual, gracias al isomorfismo con  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$  (ecuación 2-6), induce una transformación en este último de tal manera que una reflexión simple en los cuaterniones puros en la dirección del cuaternión unitario puro  $\hat{v} = (0, \vec{v})/|\vec{v}|$  está dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{v}} : \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \\
u &\longmapsto u - 2 \langle u, \hat{v} \rangle \hat{v}.
\end{aligned}$$

Donde hemos aprovechado que  $|\hat{v}|^2 = 1$  para simplificar la fórmula. Ahora recordemos que el producto interno entre cuaterniones puros equivale al dado por la ecuación 2-4:

$\langle p, q \rangle = -\frac{1}{2}(pq + qp)$ , por lo que si sustituimos en la fórmula para la reflexión queda:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{v}}(u) &= u - 2\langle u, \hat{v} \rangle \hat{v} \\
&= u - 2\left(-\frac{1}{2}(u\hat{v} + \hat{v}u)\right) \hat{v} \\
&= u + (u\hat{v} + \hat{v}u)\hat{v} \\
&= u + u\hat{v}\hat{v} + \hat{v}u\hat{v} \\
&= u + u(-1) + \hat{v}u\hat{v} \\
&= \hat{v}u\hat{v} \\
&= -\hat{v}u\hat{v}^{-1} = -\rho_{\hat{v}}(u)
\end{aligned}$$

Donde  $\rho_{\hat{v}}$  es la dada en la proposición 4.2.1. Nótese que hemos utilizado el hecho de que, al ser cuaternión unitario,  $\hat{v}^{-1} = \bar{\hat{v}}$  y al ser cuaternión puro,  $\bar{\hat{v}} = -\hat{v}$ . Dado esto, sólo queda comprobar la siguiente

**Proposición 4.2.2.** (*Reflexión simple en  $\mathbb{R}^3$* ) [Garling, 2011] *Toda reflexión simple en  $\mathbb{R}^3$  es inducida por una función de la forma*

$$\begin{aligned}
\sigma_v &= -\rho_v : \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \\
u &\longmapsto vuv = -vuv^{-1}
\end{aligned}$$

donde  $v$  es un cuaternión puro en la dirección de la reflexión.

*Demostración.* Como ya se notó en la proposición 4.2.1,  $\rho_v$  es lineal, por lo que  $-\rho_v$  lo es también. Además, notemos que:

1. Invierte los vectores paralelos a  $v$  porque  $\sigma_v(v) = -\rho_v(v) = -vuv^{-1} = -v$ , y;
2. Mantiene invariantes los vectores ortogonales a  $v$ , ya que si  $u$  es un cuaternión puro ortogonal a  $v$ , entonces  $vu = -uv$  y entonces:  $\sigma_v(u) = -\rho_v(u) = -vuv^{-1} = -(-uv)v^{-1} = -(-u)(1) = u$ .

Por lo tanto,  $\sigma_v = -\rho_v$  es la reflexión simple en la dirección de  $v$ . ■

Ahora estamos en condiciones de ver el efecto de aplicar dos reflexiones sucesivas, es decir, de generar una rotación en  $\mathbb{R}^3$  (recordemos que toda rotación en 3D es una composición de un número par de rotaciones, a lo más 3 por el teorema 3.3.1, por lo que todas las rotaciones tienen esta forma). Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  vectores unitarios (que corresponden al par de cuaterniones puros unitarios  $u$  y  $v$ ). Entonces el efecto de combinar las reflexiones

$\sigma_u$  y  $\sigma_v$  en el vector  $\vec{w}$  (asociado al cuaternión puro  $w = (0, \vec{w})$ ) es el siguiente

$$\begin{aligned}
(\sigma_v \circ \sigma_u)(w) &= \sigma_v(\sigma_u(w)) \\
&= \sigma_v(-u w u^{-1}) \\
&= -v(-u w u^{-1})v^{-1} \\
&= (vu)w(vu)^{-1} \\
&= \rho_{vu}(w),
\end{aligned}$$

lo cual observamos que es una rotación definida por el rotor  $vu$ . Éste cuaternión unitario viene dado, gracias a la ecuación 2-2 por

$$\begin{aligned}
vu &= (-\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \vec{v} \times \vec{u}) \\
&= \left( -|\vec{v}||\vec{u}| \cos \theta, \frac{\vec{v} \times \vec{u}}{|\vec{v} \times \vec{u}|} |\vec{v}||\vec{u}| \operatorname{sen} \theta \right) \\
&= \left( -\cos \theta, \frac{\vec{v} \times \vec{u}}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \operatorname{sen} \theta \right) \\
&= \left( -\cos \theta, -\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \operatorname{sen} \theta \right) \\
&= -\left( \cos \theta, \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \operatorname{sen} \theta \right) \sim \left( \cos \theta, \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \operatorname{sen} \theta \right)
\end{aligned}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$  en  $\mathbb{R}^3$  [Kanatani, 2015] y la equivalencia es porque  $vu$  y  $-vu$  generan la misma rotación. De esto podemos ver que la composición de reflexiones por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  genera una rotación por  $2\theta$ , el doble del ángulo entre ellos, y esta rotación tiene como eje  $\vec{u} \times \vec{v}$ , perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , por lo que esta rotación es en el plano generado por ambos y en el sentido de  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ . Observamos que, al igual que en el caso de 2 dimensiones, esta expresión es asimétrica en  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y que si se cambia el orden de estos se obtiene la rotación inversa (por el eje  $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ ) por lo que

$$(\sigma_{\vec{v}} \circ \sigma_{\vec{u}}) = (\sigma_{\vec{u}} \circ \sigma_{\vec{v}})^{-1}$$

### 4.3. Recapitulando; rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En este capítulo hemos visto algunas de las características de las rotaciones en 2D y 3D. En el proceso, observamos que resultó ser de gran utilidad la inclusión de estructuras algebraicas adicionales a la de espacio vectorial y de esta forma, los números complejos y los cuaterniones, con la estructura adicional de álgebras fueron de gran ayuda. Las

relaciones entre estos espacios se pueden resumir en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \\
 \mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \\
 \uparrow \\
 \mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

Notamos en específico, cómo los complejos, definidos como un álgebra sobre  $\mathbb{R}^2$  se incluyen como una subálgebra en los cuaterniones, definidos a su vez como un álgebra sobre  $\mathbb{R}^4$ . Esta inclusión es de la forma  $a + ib \mapsto a + \mathbf{i}b$ .

A su vez, observamos la inclusión de los cuaterniones puros que destacan sobre  $\mathbb{H}$  debido a su relación con el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Esta relación es un isomorfismo de espacios vectoriales  $(0, \vec{v}) \cong \vec{v}$ , el cual nos permitió expresar reflexiones y rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  en términos de transformaciones en  $\mathbf{i}\mathbb{R} + \mathbf{j}\mathbb{R} + \mathbf{k}\mathbb{R}$ .

Recordemos que las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$  forman un grupo,  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$ . Este grupo, formado por las matrices ortogonales con determinante  $\pm 1$  puede descomponerse en las reflexiones, tales que su determinante es  $-1$ , y las rotaciones, con determinante  $+1$  y que además forman un grupo  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ , como las describimos en este capítulo. Por otro lado, la función determinante restringida a  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$  es un homomorfismo  $\mathbf{O}(\mathbf{n}) \rightarrow \{+1, -1\}$  lo que significa que el determinante de la composición de transformaciones es el producto de los determinantes individuales. Además, recordemos que cualquier transformación ortogonal en  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$  puede descomponerse en la composición de a lo más  $n$  reflexiones simples gracias al teorema 3.3.1 (Cartan-Dieudonné). Es esa la base de la afirmación de que *toda rotación es producto de un número par de reflexiones sucesivas*. En este capítulo observamos el caso particular de 2 y 3 dimensiones donde toda rotación puede descomponerse en un par de reflexiones. Esto nos proporciona una explicación de el porqué las rotaciones en 3D son tan similares a las rotaciones en 2D, ya se generan de la misma manera.

Hemos visto también cómo los elementos de  $\mathbf{SO}(2)$  pueden incluirse en  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ , lo cual denominaremos más adelante como rotación simple. También encontramos un isomorfismo entre el grupo de las rotaciones en 2D ( $\mathbf{SO}(2)$ ) y el de los complejos unitarios  $\mathbb{C}_1$ . Finalmente observamos cómo las rotaciones en 3 dimensiones se especifican por medio de un ángulo de rotación y un eje, pero a la vez, por medio de un cuaternión unitario (más específicamente, un par de cuaterniones unitarios antipodales, el rotor) el cual genera la rotación por medio de operaciones en los cuaterniones y esto mismo nos adelantó la relación de los cuaterniones unitarios con rotaciones en 4 dimensiones también. Estas relaciones las podemos resumir en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{SO}(2) \cong \mathbb{C}_1 \cong \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{SO}(3) & \xleftarrow{\rho} & \mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3 \\
& \searrow & & \nearrow L & \nearrow R \\
& & \mathbf{SO}(4) & & \\
& \searrow & & & \\
& & \mathbf{SO}(n) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathbf{O}(n)
\end{array} \tag{4-1}$$

Donde las dos funciones etiquetadas con  $L$  y  $R$  representan el producto por cuaternión unitario por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Las relación  $\mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  entre el grupo de cuaterniones unitarios y el grupo de rotaciones en 3 dimensiones requiere de especial atención, ya que ésta es una cubierta doble, y por lo tanto se puede representar por la siguiente secuencia exacta [Garling, 2011]

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\rho} \mathbf{SO}(3) \longrightarrow 1$$

Hemos visto que esta doble cubierta se relaciona al hecho de que dos cuaterniones unitarios generan la misma rotación, esto porque la rotación se relaciona con ángulos dobles y esto a su vez se relaciona con el hecho de que al aplicar un par de reflexiones, la rotación resultante es por el doble del ángulo entre las direcciones de reflexión. Esto nos hace suponer que veremos más cubiertas dobles en más dimensiones.

Es inevitable tomar en cuenta la relación que tienen los grupos de rotaciones con las esferas unitarias, ya que  $\mathbf{SO}(2)$  es isomorfo al círculo  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^3$  cubre doblemente a  $\mathbf{SO}(3)$ . Entonces, intuitivamente se podría esperar que  $\mathbf{SO}(4)$  se relacione con alguna otra esfera en más dimensiones. Sin embargo, como veremos, existen diferencias importantes en el comportamiento de las rotaciones en  $\mathbb{R}^4$ . Recordemos además, que dijimos informalmente que la multiplicación por cualquier lado por un cuaternión unitario es un elemento de  $\mathbf{SO}(4)$ , pero los cuaterniones unitarios forman  $\mathbb{S}^3$ , entonces tal vez sea conveniente investigar los pares de cuaterniones (para multiplicar por ambos lados) y entonces  $\mathbf{SO}(4)$  se relacionaría con  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ . Como veremos más adelante, ésta afirmación es, de hecho, correcta.

## Parte III

# El panorama general de las rotaciones

# Capítulo 5

## Más allá de 3 dimensiones; el grupo $\text{SO}(4)$

Ahora salimos del espacio tridimensional, en donde las transformaciones son fácilmente visualizables y podemos dejarnos guiar por la intuición, para explorar las rotaciones en más dimensiones. En éste capítulo exploraremos  $\mathbb{R}^4$  como punto de partida para lo que viene.

Consideremos la transformación en  $\mathbb{R}^4$  definida por  $x \mapsto -x$ . Ésta es transformación ortogonal con matriz  $-1$  y determinante  $1 (= (-1)^4)$ , por lo que es una rotación, pero también notemos que esta rotación no deja ningún punto inmóvil más que el origen. Entonces consideremos la pregunta ¿ésta rotación tiene lugar sobre algún eje? Como ya vimos, en el espacio tridimensional todas las rotaciones pueden considerarse como sobre un eje y es parte de nuestra experiencia común que esto sea cierto, ya que es el espacio en el que habitamos. Pero tomemos el caso de las rotaciones en el plano, se puede encontrar un eje si se considera el plano  $\mathbb{R}^2$  embebido en  $\mathbb{R}^3$ , pero intrínsecamente no existen ejes de rotación en este espacio [Triola, 2009].

Como vimos en la introducción, tenemos que estar preparados para abandonar el concepto del eje de rotación como una línea con orientación, la cual define de forma única la dirección del giro, ya que no existe en más dimensiones (ni siquiera en dos dimensiones!). Dicho esto, al abandonar este concepto, ¿existe algún otro sobre el que nos podamos basar para entender las rotaciones? En este punto podemos dar una respuesta afirmativa, aunque existen dos caminos para esto.

Una forma es extender el concepto de eje de rotación y observando que en 2D tenemos un “eje” el cual viene siendo el centro de rotación, un eje 0-dimensional. En 3 dimensiones el eje es una línea 1-dimensional y entonces, si asumimos una relación lineal, en  $n$  dimensiones tendríamos como “eje” un hiperplano  $(n - 2)$ -dimensional. Esto significaría que en 4 dimensiones, por ejemplo, el eje de rotación sería un plano alrededor del cual los puntos transformados trazan círculos (!) [Mortari, 2000]. Como veremos más adelante, esta interpretación es correcta, pero limitada. Por el momento adoptaremos otra interpretación sobre la que ya hemos estado viendo pistas.

Según hemos visto, las rotaciones se generan por un número par de reflexiones, y cada par de éstas es generada por dos vectores que juntos definen un plano. Es en este plano sobre el que se realiza un movimiento en círculos, como vimos en el caso de 2D y 3D, y como veremos esto aplica también para cualquier dimensión. De acuerdo a esto, las rotaciones son esencialmente planares y no hay ejes de rotación, que vienen a ser reemplazados por *planos de rotación* [Triola, 2009]. A continuación describiremos más consecuencias de esta interpretación, la cual adoptaremos por ahora, pero tomando en cuenta que regresaremos a relacionarla con la otra, en términos de ejes generalizados.

En  $\mathbb{R}^3$  existen infinitos planos pero, por serendipia, al seleccionar alguno de ellos como plano de rotación existe un único subespacio unidimensional ortogonal a éste plano, que denominamos el eje de rotación, es por eso que esta descripción en términos de un eje es posible. En  $\mathbb{R}^4$  tenemos todavía más libertad, ya que nos es posible seleccionar dos planos ortogonales entre sí, es decir, la composición de rotaciones por planos diferentes no es necesariamente una rotación simple por algún otro plano como en el caso de  $\mathbb{R}^3$  (Teorema de Euler).

Ahora exploraremos con más cuidado el contenido de algunas de las afirmaciones anteriores, ya que esto nos servirá como guía para posteriormente describir las rotaciones en  $\mathbb{R}^4$  en términos de cuaterniones. Comenzaremos por explorar la descomposición de las rotaciones generales en pares de reflexiones:

**Definición 5.0.1.** (*Rotación simple*) [Garling, 2011] *Definimos una rotación simple como la composición de un par de reflexiones simples.*

Entonces todo elemento de  $\mathbf{SO}(n)$  es el producto de a lo más  $n/2$  rotaciones simples. Consideremos a más detalle estas transformaciones. Sea  $\mathbf{r}$  una rotación simple de  $\mathbb{R}^n$ . Esta rotación puede ser expresada en términos de reflexiones simples en un par de direcciones  $x$  y  $y$  de manera que  $\mathbf{r} = \mathbf{m}_x \circ \mathbf{m}_y$ . Ahora sea  $[xy] = x\mathbb{R} + y\mathbb{R}$  el espacio generado por  $x$  y  $y$ , entonces tenemos una descomposición de  $\mathbb{R}^n$  en  $[xy]$  y  $[xy]^\perp$  de tal manera que  $\mathbf{r}(z) = z$  para todo  $z \in [xy]^\perp$ . Entonces tenemos, por un lado que si  $x$  y  $y$  son colineales, entonces  $\mathbf{m}_x = \mathbf{m}_y$ , las reflexiones son idénticas, que implica que  $\mathbf{r}$  es la identidad. En cambio, si son linealmente independientes entonces  $[xy]$  es un subespacio bidimensional, un plano, y la restricción de  $\mathbf{r}$  a éste plano es una rotación sobre el mismo de forma que efectivamente una rotación simple es un elemento de  $\mathbf{SO}(2)$  embebido en  $\mathbf{SO}(n)$  como se describió en el capítulo 4.2.

Hemos observado ya que las reflexiones no necesariamente conmutan, por lo que esta agrupación en pares es única, dada la descomposición (la cual en sí no es única, véase la demostración del teorema 3.3.1). Por otra parte, las rotaciones simples por planos ortogonales (que sólo se intersectan en el origen, en dimensiones  $n \geq 4$ ) no mueven puntos en común, por lo que conmutan (un caso extraño al ser representadas por matrices que no necesariamente lo hacen) [Mortari, 2000].

## 5.1. Los cuaterniones y las rotaciones en $\mathbb{R}^4$ ; $\mathbf{SO}(4) \cong (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\mathbb{Z}_2$

Para ver cómo los cuaterniones se relacionan con  $\mathbf{SO}(4)$ , nos auxiliaremos del teorema 3.3.1 (Cartan-Dieudonné) y comenzaremos por estudiar cómo se representan las reflexiones en términos de operaciones en cuaterniones. Para ésto será conveniente el siguiente

**Lema 5.1.1.** [Savage, 2015] *Sea  $u$  un cuaternión. Los cuaterniones  $\mathbf{i}u$ ,  $\mathbf{j}u$  y  $\mathbf{k}u$  generan el subespacio ortogonal a  $u$ ,  $u^\perp$ .*

*Demostración.* Primero notemos que si  $u = u_0 + \mathbf{i}u_1 + \mathbf{j}u_2 + \mathbf{k}u_3$ , entonces

$$\langle u, \mathbf{i}u \rangle = \langle (u_0, u_1, u_2, u_3), (-u_1, u_0, -u_3, u_2) \rangle = 0$$

y entonces  $u \perp \mathbf{i}u$ . De forma similar se puede verificar que  $u$  es ortogonal a  $\mathbf{j}u$  y  $\mathbf{k}u$ , por lo que el subespacio generado por  $\mathbf{i}u$ ,  $\mathbf{j}u$  y  $\mathbf{k}u$ , que denotaremos por  $[\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}]u$  está contenido en  $u^\perp$ . Ahora falta demostrar que  $[\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}]u = u^\perp$ , o equivalentemente, que  $u$ ,  $\mathbf{i}u$ ,  $\mathbf{j}u$  y  $\mathbf{k}u$  generan  $\mathbb{H}$ . Pero esto es cierto, ya que para cualquier  $v \in \mathbb{H}$ , se tiene que

$$v = (vu^{-1})u$$

y  $(vu^{-1})$  es una combinación lineal de  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ . ■

Ahora procederemos a describir las reflexiones. Como motivación recordemos que la operación de conjugación en complejos,  $a + ib \mapsto a - ib$  es una reflexión en la dirección del eje imaginario. Por otro lado notemos que la conjugación en cuaterniones

$$(a, b, c, d) \mapsto (a, -b, -c, -d)$$

actúa en forma similar en el sentido en que  $q \mapsto -\bar{q}$  es una reflexión en la dirección real (en la dirección de  $\mathbf{1}$ ). Dado esto, no es difícil concebir que las reflexiones simples en direcciones arbitrarias tengan que ver con la operación de conjugación. Por otra parte, toda reflexión simple se parametriza por una dirección, así que de alguna manera se tiene que involucrar el producto por un cuaternión que determine esta dirección (producto ya que la reflexión es lineal). Ahora introducimos

**Lema 5.1.2.** [Savage, 2015] *Sea  $u$  un cuaternión unitario. La función*

$$\sigma_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; q \mapsto -u\bar{q}u$$

*es la reflexión simple en la dirección de  $u$ ,  $\mathfrak{m}_u$ .*

*Demostración.* Ya hemos notado que  $q \mapsto -\bar{q}$  es reflexión en el eje real. En particular, es una isometría lineal. Además sabemos que el producto por cualquier lado por un

cuaternión unitario es isometría lineal por lo que la composición

$$\sigma_u : q \mapsto -\bar{q} \mapsto -u\bar{q} \mapsto -u\bar{q}u$$

es isometría lineal también. Ahora, para cualquier  $q \in \mathbb{H}$  tenemos que

$$\sigma_u(qu) = -u\bar{q}u = -u\bar{q}u = -|u|^2\bar{q}u = -\bar{q}u$$

y entonces

$$\begin{aligned}\sigma_u(u) &= -u, \\ \sigma_u(\mathbf{i}u) &= \mathbf{i}u, \\ \sigma_u(\mathbf{j}u) &= \mathbf{j}u, \\ \sigma_u(\mathbf{k}u) &= \mathbf{k}u\end{aligned}$$

por lo que  $\sigma_u$  invierte los vectores paralelos a  $u$  y fija aquellos en el espacio generado por  $\mathbf{i}u$ ,  $\mathbf{j}u$ , y  $\mathbf{k}u$ . Pero estos generan el espacio  $u^\perp$ . Por lo tanto,  $\sigma_u = \mathbf{m}_u$ . ■

Ahora que podemos expresar reflexiones sobre ejes arbitrarios procedemos a expresar las rotaciones en  $\mathbb{R}^4$  en términos de éstas.

**Lema 5.1.3.** *Savage [2015] Las rotaciones de  $\mathbb{R}^4$  son las funciones de la forma*

$$\varphi_{(u,v)} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; q \mapsto uqv$$

donde  $u$  y  $v$  son cuaterniones unitarios.

*Demostración.* Por el teorema 3.3.1 sabemos que cualquier rotación en  $\mathbb{R}^4$  es la composición de a lo más 4 reflexiones simples. Entonces la composición

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{u_4} \circ \mathbf{m}_{u_3} \circ \mathbf{m}_{u_2} \circ \mathbf{m}_{u_1} : q &\mapsto -u_1\bar{q}u_1 \\ &\mapsto -u_2(\overline{-u_1\bar{q}u_1})u_2 = u_2\bar{u}_1q\bar{u}_1u_2 \\ &\mapsto -u_3(\overline{u_2\bar{u}_1q\bar{u}_1u_2})u_3 = -u_3\bar{u}_2u_1\bar{q}u_1\bar{u}_2u_3 \\ &\mapsto -u_4(\overline{-u_3\bar{u}_2u_1\bar{q}u_1\bar{u}_2u_3})u_4 = u_4\bar{u}_3u_2\bar{u}_1q\bar{u}_1u_2\bar{u}_3u_4\end{aligned}$$

donde algunos  $u_i$  pueden ser linealmente dependientes representa una rotación. Podemos ver que esta composición es  $\varphi_{(u,v)} : q \mapsto uqv$  donde

$$\begin{aligned}u &= u_4\bar{u}_3u_2\bar{u}_1, \\ v &= \bar{u}_1u_2\bar{u}_3u_4\end{aligned}$$

Por lo que todas las rotaciones son de esta forma.

Queda mostrar que todas las funciones de la forma  $\varphi_{(u,v)} : q \mapsto uqv$  para  $u, v \in \mathbb{H}_1$  son rotaciones de  $\mathbb{R}^4$ . Esto se puede verificar notando que  $\varphi_{(u,v)}$  es transformación ortogonal, y por lo tanto  $\det(\varphi_{(u,v)}) = \pm 1$ . Demostraremos ahora que  $\det(\varphi_{(u,v)}) = +1$  descomponiendo la función en los siguientes términos:  $\varphi_{(u,v)} = L_u \circ R_v$  donde  $L_u : q \mapsto uq$  y  $R_v : q \mapsto qv$  son los productos por la derecha y por la izquierda respectivamente. Analicemos primero la función  $L_u$ . Sabemos que el grupo de cuaterniones unitarios  $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3$  es conexo, y además la función  $u \mapsto \det(L_u)$  es continua en  $\mathbb{H}_1$ ; por lo que  $\det(L_u)$  es constante sobre  $\mathbb{H}_1$ . Como  $\det(L_1) = \det(\text{id}) = +1$ , prosigue que  $\det(L_u) = +1$  para cualquier  $u \in \mathbb{H}_1$  por lo que es una rotación. Un argumento similar demuestra lo mismo para  $R_v$  y, ya que  $\varphi_{(u,v)} = L_u \circ R_v$  y las rotaciones forman un grupo, se sigue que toda función de la forma  $\varphi_{(u,v)} : q \mapsto uqv$  para  $u, v \in \mathbb{H}_1$  es rotación de  $\mathbb{R}^4$  [Garling, 2011]. ■

Dado lo anterior, Sean  $u$  y  $v$  cuaterniones unitarios. Entonces  $(u, v)$  es un elemento de  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$  que, considerado como el producto directo de grupos (como se definió en 1.1.5) implica que la función

$$\phi : (u, v) \mapsto (q \mapsto uqv)$$

lleva elementos del grupo  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$  a  $\mathbf{SO}(4)$ . Pero este no es un homomorfismo, es decir, no preserva la estructura de los grupos involucrados dado que

$$\begin{aligned} \phi((u, v)(u', v'))(q) &= \phi(uu', vv')(q) \\ &= (uu')q(vv') \neq (uu')q(v'v) = (\phi(u, v) \circ \phi(u', v'))(q) \end{aligned}$$

Y entonces surge la pregunta. ¿Cómo hacer que este mapeo de grupos preserve la estructura?

Para esto, inspirados por la función

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1 &\longrightarrow (\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}) \\ u &\longmapsto (q \mapsto uqu^{-1}) \end{aligned}$$

y su estructura que nos ayudó a definir un homomorfismo entre  $\mathbb{H}_1$  y  $\mathbf{SO}(3)$ ; y además, por el hecho de que para todo  $v$  cuaternión unitario,  $v^{-1}$  es también unitario, proponemos que la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1 &\longrightarrow \mathbf{SO}(4); \\ (u, v) &\longmapsto (q \mapsto uqv^{-1}) \end{aligned}$$

tiene la forma necesaria para preservar la estructura de los grupos. Esto lo demostramos en el siguiente

**Teorema 5.1.1.** [Savage, 2015] *Existe un homomorfismo de grupos  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbf{SO}(4)$ . Este homomorfismo es 2 a 1 y define un isomorfismo  $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbf{SO}(4)$ .*

*Demostración.* Demostraremos que la función  $\varphi$  definida arriba es este homomorfismo. Sea  $q \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ , entonces

$$\begin{aligned}\varphi((u, v)(u', v'))(q) &= \varphi(uu', vv')(q) \\ &= (uu')q(vv')^{-1} \\ &= uu'qv'^{-1}v^{-1} \\ &= u(u'qv'^{-1})v^{-1} \\ &= (\varphi(u, v) \circ \varphi(u', v'))(q)\end{aligned}$$

Por lo que

$$\varphi((u, v)(u', v')) = \varphi(u, v) \circ \varphi(u', v')$$

y  $\varphi$  es homomorfismo. Es además sobreyectivo debido a que, como se mostró en el lema 5.1.3, todo elemento de  $\mathbf{SO}(4)$  surge de esta forma.

Para ver que este homomorfismo es 2 a 1 comencemos con el elemento más simple de  $\mathbf{SO}(4)$ , la identidad, y veamos qué elementos de  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$  tienen éste objeto como imagen. En otras palabras, queremos describir el kernel de  $\varphi$ ,  $\ker \varphi$ .

Supongamos que  $(u, v) \in \ker \varphi$ . Entonces  $q \mapsto uqv^{-1}$  es la identidad en  $\mathbb{R}^4$  y, en particular,

$$u\mathbf{1}v^{-1} = \mathbf{1}$$

y por lo tanto  $u = v$ . Esto implica que  $\varphi(u, v)$  es la función  $q \mapsto vqv^{-1}$  que, es la identidad si y sólo si  $qv = vq$  para todo  $q \in \mathbb{H}$ , es decir, si  $v$  es real (por el lema 4.2.3) y dado que  $v$  es unitario,  $v = \pm \mathbf{1}$ .

Lo anterior implica que  $\ker \varphi = \{(1, 1), (-1, -1)\}$  y entonces para toda rotación  $\mathbf{r} \in \mathbf{SO}(4)$ , su imagen inversa es  $\varphi^{-1}(\mathbf{r}) = q \ker \varphi$ , una clase lateral del kernel (comentario previo al teorema 1.1.1), y entonces consta de 2 elementos, es decir, existen 2 elementos de  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$  que mapean a cada elemento de  $\mathbf{SO}(4)$ .

Finalmente, dado que  $\varphi$  es homomorfismo, entonces existe un isomorfismo natural  $\text{dom}(\varphi)/\ker(\varphi) \cong \text{img}(\varphi)$  por el teorema fundamental del isomorfismo para grupos (teorema 1.1.1) y entonces  $(\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1)/\{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbf{SO}(4)$  que implica  $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbf{SO}(4)$  porque  $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3$  y  $\{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbb{Z}_2$ . ■

## 5.2. Recapitulando; las rotaciones saliendo de $\mathbb{R}^3$

En este capítulo hemos notado que toda rotación general en  $\mathbb{R}^n$  puede descomponerse en  $n/2$  rotaciones simples, las cuales son el producto de un par de reflexiones simples y son un movimiento que puede entenderse principalmente como sobre un plano. Estas rotaciones conmutan si son en planos ortogonales, y el emparejamiento de reflexiones es único, aunque la descomposición en sí no lo es.

En 4 dimensiones podemos, por lo anterior, expresar cualquier rotación general en términos de un par de rotaciones simples por planos invariantes. Esto nos permite clasificar

a las rotaciones en 4D como sigue [Wikipedia contributors, 2019; Lounesto, 2001]:

1. *Rotaciones simples*. La rotación se genera sólo por un par de reflexiones. Existe un plano que se mantiene fijo punto a punto.
2. *Heteroclínicas*. Las rotaciones son por ángulos diferentes  $\alpha$  y  $\beta$  con  $0 \leq \alpha < \beta < \pi$ . Cada vector es girado al menos por un ángulo  $\alpha$  y a lo más por un ángulo  $\beta$ .
3. *Isoclínicas*. Las rotaciones por ambos planos son por ángulos iguales. Este caso es interesante ya que cada punto gira sobre un gran círculo en un plano invariante por el origen, en otras palabras ¡todos los puntos se encuentran en el ecuador!

Más adelante regresaremos a detallar esto.

En este capítulo notamos cómo los pares de cuaterniones unitarios cubren las rotaciones en  $\mathbb{R}^4$ . Esta relación es un homomorfismo de grupos y cubierta doble, lo cual se resume en la siguiente secuencia exacta [Garling, 2011]:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{SO}(4) \longrightarrow 1.$$

Por lo que las relaciones entre grupos que hemos encontrado hasta ahorita se pueden expresar de la siguiente manera, completando el diagrama que encontramos al final del capítulo anterior (4-1):

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{SO}(2) \cong \mathbb{C}_1 \cong \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{SO}(3) & \xleftarrow{\quad \rho \quad} & \mathbb{H}_1 \cong \mathbb{S}^3 \\
 & \searrow & & \swarrow L & \downarrow \Delta \\
 & & \mathbf{SO}(4) & \xleftarrow{\quad \varphi \quad} & (\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1) \cong (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \\
 & \searrow & & \swarrow R & \\
 & & \mathbf{SO}(n) & \xrightarrow{\quad \subseteq \quad} & \mathbf{O}(n)
 \end{array}$$

Donde el mapeo etiquetado por  $\Delta$  es el mapeo diagonal  $u \mapsto (u, u)$ . Hacemos notar que esto resulta en tres formas de llegar a  $\mathbf{SO}(4)$  a partir de  $\mathbb{H}_1$  de las cuales ninguna es equivalente ya que

$$\begin{aligned}
 L : u &\mapsto (z \mapsto uz) \\
 R : u &\mapsto (z \mapsto zu) \\
 \varphi \circ \Delta : u &\mapsto (z \mapsto uzu^{-1}).
 \end{aligned}$$

Y notamos que la imagen de éste último es una copia de  $\mathbf{SO}(3)$  embebida en  $\mathbf{SO}(4)$ . Hemos observado que los elementos unitarios de las álgebras  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  se corresponden de

forma natural a las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ . Queda preguntarse si esto es sólo accidental o si se pueden definir otras álgebras cuyos elementos unitarios se hagan corresponder con los  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ . Además, queda dilucidar porqué las correspondencias hacia  $\mathbf{SO}(3)$  y  $\mathbf{SO}(4)$  son cubiertas dobles y cuál es el significado de esto.

Como veremos más adelante, efectivamente, existe una clase especial de álgebras cuyos elementos unitarios generan  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  y observaremos que estas correspondencias resultan ser cubiertas dobles. Estas son las llamadas álgebras de Clifford o *álgebras geométricas*, como su descubridor, William K. Clifford las nombró.

# Capítulo 6

## Las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ ; los grupos $\mathbf{Spin}(n)$

Hemos visto ya cómo las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  son generadas por la acción del grupo  $\mathbb{C}_1$  de los complejos unitarios, las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  por el grupo  $\mathbb{H}_1$  de los cuaterniones unitarios y en  $\mathbb{R}^4$  por los pares de cuaterniones unitarios,  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$ . En cada caso tenemos un álgebra que contiene al espacio  $\mathbb{R}^n$  y a partir de sus elementos unitarios podemos formar un grupo cuya acción en términos del producto en esta álgebra induce las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ . Pero esto fué facilitado en gran parte por las características de los complejos y los cuaterniones, por lo que surge la pregunta ¿Se puede generalizar esto a cualquier dimensión?

En este capítulo veremos que sí, en cualquier  $\mathbb{R}^n$  es posible definir un álgebra  $\mathbb{G}\mathbb{R}^n$  sobre ese espacio en términos de la cual se pueden expresar rotaciones como la acción de un subgrupo  $\mathbf{Spin}(n)$  de elementos del álgebra.

Para tratar de extender esto a más dimensiones podemos ver lo que las álgebras de los complejos  $\mathbb{C}$  y los cuaterniones  $\mathbb{H}$  tienen en común, ambas son *álgebras de división*, álgebras donde cada elemento tiene un inverso multiplicativo. Entonces se podría conjeturar que tomando álgebras de división en más dimensiones podemos encontrar estas álgebras de rotaciones que buscamos. Por otro lado, el hecho de ser álgebra de división le confiere propiedades especiales a un espacio como el que se cumpla la ley de composición para la norma de vectores  $|uv| = |u||v|$  y si ésta álgebra tiene dimensión  $n$ , éste producto aplicado a sus elementos unitarios le confieren estructura de grupo a la esfera  $\mathbb{S}^n$ , lo cual es un avance para representar su grupo de simetrías,  $\mathbf{SO}(n)$ . Pero al tratar de seguir este camino encontramos que la única otra álgebra de división aparte de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  es el álgebra  $\mathbb{O}$  de los octoniones, en 8 dimensiones, que, además resulta no ser asociativa, por lo que no puede representar rotaciones [Voelkel, 2015].

Esto implica que encontrar ésta álgebra no es tan trivial y debemos analizar con más atención qué es lo que se requiere para representar las rotaciones. Para esto recordemos que toda rotación se puede descomponer en pares de reflexiones y, como hemos estado viendo, las álgebras  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  nos permiten computar reflexiones por ejes arbitrarios con facilidad en 2D, 3D y 4D. Esto a su vez es posible gracias a que el producto interno

entre vectores es fácilmente computable en términos del producto en cada álgebra, ya que la ecuación 3.3.1 expresa las reflexiones simples en términos del producto interno de vectores. El álgebra que definiremos para esto tiene esta propiedad también, y es esto fundamentalmente lo que nos permite expresar las reflexiones. Pero antes de pasar a ella y su producto, exploremos otro aspecto fundamental de las rotaciones, el cual se encuentra también expresado en ésta álgebra y nos servirá como motivación adicional para las definiciones que siguen.

## 6.1. Rotaciones simples como producto de vectores

Como ya hemos aclarado, las rotaciones simples son un fenómeno que se da principalmente en un plano, éste es el plano que se genera por las dos direcciones en que ocurre el par de reflexiones. De forma inversa, un par de vectores en  $\mathbb{R}^n$ ,  $(u, v)$ , definen de forma única una rotación simple  $\mathbf{r}_{u,v}$  en el plano generado por ellos. Notemos que éste par de vectores es ordenado, ya que el par  $(v, u)$  genera la rotación inversa,  $\mathbf{r}_{v,u} = (\mathbf{r}_{u,v})^{-1}$ . Notemos que el par  $(v, \alpha v)$ , donde los vectores son colineales, por ser la composición de dos reflexiones idénticas, es la rotación identidad, lo cual expresamos como  $\mathbf{r}_{v,\alpha v} = \mathbb{1}$ .

Esto nos sugiere que existe algún tipo de producto entre vectores que nos provee información acerca del plano de rotación (con orientación). Pero además recordemos que el producto de dos reflexiones es una rotación por el *doble* del ángulo entre las direcciones de reflexión, por lo que este producto también debe codificar la información del ángulo entre los vectores.

## 6.2. Las álgebras de Clifford y el producto geométrico

Ahora es tiempo de definir el álgebra que hemos estado mencionando tal que contiene al espacio  $\mathbb{R}^n$  y define un producto en base al cual se pueden expresar las rotaciones y reflexiones.

Cabe notar que existe una amplia variación en cuanto a las definiciones y notación para cada uno de los conceptos que se darán a continuación. Por lo que, en vez de tratar de abarcar todas optamos por dar definiciones motivadas de forma que surjan de la forma más natural y sean consistentes entre sí sin alejarnos mucho de las definiciones presentes en la literatura.

**Definición 6.2.1.** (*Álgebra de Clifford*) [Aragón-González et al., 2009] El álgebra de Clifford o álgebra geométrica  $\mathbb{G}\mathbb{R}^n$  es el álgebra generada por el espacio  $\mathbb{R}^n$  con base canónica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  y el elemento adicional  $\mathbf{1}$  con el producto asociativo y distributivo

dado por:

$$\mathbf{1}v = v\mathbf{1} = v \quad \forall v \in \mathbb{G}\mathbb{R}^n \quad (\mathbf{1} \text{ es la identidad}) \quad (6-1)$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{1}, \quad (6-2)$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i; \quad i \neq j, \quad (6-3)$$

denominamos también a éste producto como producto geométrico.

Esta álgebra tiene como generadores los elementos  $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Los elementos de la forma  $\alpha\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\mathbf{e}_{i_3} \dots \mathbf{e}_{i_k}$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y  $k$  un entero se denominan  $k$ -vectores (en el caso de  $k=1,2$  y  $3$  son vectores, bivectores y trivectores) siendo  $k$  el *grado* del  $k$ -vector. Las combinaciones lineales de  $k$ -vectores de distintos grados se denominan *multivectores*.

Este producto se denomina geométrico porque tiene propiedades geoméricamente significativas:

**Lema 6.2.1.** (*Propiedades del producto geométrico*) [Aragón-González et al., 2009] Sean  $u$  y  $v$  vectores en  $\mathbb{R}^n$

1.  $u^2 = \mathbf{1}|u|^2$ ;
2. Si  $|u| \neq 0$ , entonces  $u^{-1} = u/u^2 = u/|u|^2$ ;
3. Si  $u$  es paralelo a  $v$ ,  $uv = vu$ ;
4. Si  $u$  es ortogonal a  $v$ , entonces  $uv = -vu$ ;
5.  $uv + vu = 2\langle u, v \rangle \mathbf{1}$ .

*Demostración.* Si  $u = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$

$$\begin{aligned} u^2 &= \left( \sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \left( \sum_j u_j \mathbf{e}_j \right) \\ &= \sum_{i,j} u_i u_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i=j} u_i u_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i + \sum_{i \neq j} u_i u_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_i u_i^2 \mathbf{1} + \sum_{i \neq j} u_i u_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \\ &= \left( \sum_i u_i^2 \right) \mathbf{1} + 0 \\ &= |u|^2 \mathbf{1}, \end{aligned}$$

con lo que demostramos el primer inciso y se sigue el segundo inmediatamente. Por otra parte, si  $u$  y  $v$  son colineales, es decir  $v = \alpha u$  entonces

$$uv = u(\alpha u) = \alpha uu = (\alpha u)u = vu.$$

Después procedemos con el último inciso, de donde hemos comprobado ya el caso  $u = v$ . Ahora, sea  $u \neq v$ , entonces:

$$\begin{aligned}
uv + vu &= \left( \sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \left( \sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) + \left( \sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) \left( \sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \\
&= \left( \sum_{i,j} u_i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) + \left( \sum_{i,j} u_i v_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \right) \\
&= \sum_{i,j} (u_i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + u_i v_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \\
&= \sum_{i,i} 2u_i v_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i + \sum_{i \neq j} u_i v_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \\
&= 2 \sum_{i,i} u_i v_i \mathbf{1} + \sum_{i \neq j} u_i v_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \\
&= 2 \left( \sum_{i,i} u_i v_i \right) \mathbf{1} + 0 \\
&= 2 \langle u, v \rangle \mathbf{1},
\end{aligned}$$

Finalmente, si  $u \perp v$ , entonces  $\langle u, v \rangle = 0$  que implica, por lo anterior que  $2 \langle u, v \rangle \mathbf{1} = uv + vu = 0$  y por lo tanto  $uv = -vu$ . ■

Notemos que estas propiedades son muy similares a las de los cuaterniones puros, con la diferencia de que las fórmulas para la norma y el producto interno cambian de signo. De hecho podemos ver bastantes similitudes a las álgebras de división, principalmente con el hecho de que cada vector es invertible, aunque esto no aplica para todos los elementos del álgebra, ya que existen elementos  $\neq 0$  cuyo producto es 0, como en

$$(1 + \mathbf{e}_1)(1 - \mathbf{e}_1) = 1 - \mathbf{e}_1^2 = 0$$

[Girard, 2007].

**Observación 6.2.1.** [Gallier, 2008] *Es importante notar que el producto geométrico no es conmutativo y que en todo rigor, la unidad del álgebra  $\mathbf{1}$  es distinta a la unidad de los reales 1. Sin embargo, de forma similar a como se hizo con los complejos y los cuaterniones, al tener comportamientos idénticos identificaremos  $\mathbf{1}$  con 1 cuando no exista confusión.*

### 6.2.1. Reflexiones y rotaciones; Spin(n)

Recordemos la fórmula para la reflexión simple en la dirección de un vector  $v$  en  $\mathbb{R}^n$  dada por (ecuación 3.3.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_v : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{|v|^2} v. \end{aligned}$$

Por las propiedades que hemos visto, nos es posible reescribir esta fórmula en términos del producto geométrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_v(x) &= x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{|v|^2} v \\ &= x - (2 \langle x, v \rangle) \left( \frac{v}{|v|^2} \right) \\ &= x - (xv + vx)v^{-1} \\ &= x - xvv^{-1} - v xv^{-1} \\ &= x - x - v xv^{-1} \\ &= -v xv^{-1}. \end{aligned}$$

Notamos que se obtiene la misma reflexión si el vector  $v$  se cambia por cualquier vector colineal  $\alpha v$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , y entonces en adelante trabajaremos con vectores unitarios. Dado esto, para  $v$  unitario  $v^{-1} = v$ , por lo que la fórmula anterior se puede escribir igualmente

$$\mathbf{m}_v(x) = -v xv.$$

**Observación 6.2.2.** Recordemos que  $\mathbb{S}^{n-1}$ , la esfera en  $n$  dimensiones denota a los elementos unitarios de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}.$$

Nota: el exponente es  $n-1$  porque la esfera es una superficie  $(n-1)$ -dimensional embebida en  $\mathbb{R}^n$ .

Por lo anterior, podemos afirmar lo siguiente

**Proposición 6.2.1.** Las reflexiones simples en  $\mathbb{R}^n$  vienen dadas, en términos del producto geométrico por funciones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_v : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto -v xv^{-1}. \end{aligned}$$

Donde  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  es un vector unitario en la dirección de la reflexión.

*Demostración.* La derivación de la fórmula demuestra la proposición, pero es instructivo checar que cumple las propiedades de una reflexión:

1. Invierte los vectores paralelos a  $v$ , ya que

$$\mathbf{m}_v(v) = -vvv^{-1} = -v(vv^{-1}) = -v;$$

2. Es la identidad en todo  $u$  ortogonal a  $v$ , por

$$\mathbf{m}_v(u) = -vuv^{-1} = -(vu)v^{-1} = -(-uv)v^{-1} = u(vv^{-1}) = u.$$

■

Notemos que tanto la fórmula como las demostraciones son casi idénticas al caso de  $\mathbb{R}^3$  con los cuaterniones unitarios (proposición 4.2.2), sólo variando un signo. De igual manera también se puede ver que la composición de reflexiones simples por los vectores unitarios  $u$  y  $v$ , las rotaciones simples en el plano  $[uv]$ , tienen la forma:

$$\mathbf{r}_{u,v}(x) = (\mathbf{m}_v \circ \mathbf{m}_u)(x) = (uv)x(uv)^{-1}.$$

por lo que afirmamos:

**Proposición 6.2.2.** *Las rotaciones simples en  $\mathbb{R}^n$  son las transformaciones de la forma:*

$$\mathbf{r}_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{6-4}$$

$$x \longmapsto BxB^{-1} \tag{6-5}$$

Donde  $B \in \mathbb{G}\mathbb{R}^n$  es el producto de dos vectores de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Demostración.* Por la construcción anterior, es cierto que todas las rotaciones simples tienen esa forma.

Luego, sea  $B = uv$  un elemento de  $\mathbb{G}\mathbb{R}^n$  producto de dos vectores unitarios. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uv}(x) &= (uv)x(uv)^{-1} \\ &= u(vxv^{-1})u^{-1} \\ &= -u(-vxv^{-1})u^{-1} \\ &= \mathbf{m}_u(\mathbf{m}_v(x)) \\ &= (\mathbf{m}_u \circ \mathbf{m}_v)(x). \end{aligned}$$

Por lo que  $\mathbf{r}_B$  es la composición de un par de reflexiones, i.e. una rotación simple. ■

En  $\mathbb{R}^n$  una rotación general se puede descomponer en términos de rotaciones simples,

o en reflexiones simples, por lo que puede expresarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_R(x) &= (\mathfrak{r}_{u_k u_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathfrak{r}_{u_2 u_1})(x) \\ &= (\mathfrak{m}_{u_k} \circ \mathfrak{m}_{u_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathfrak{m}_{u_2} \circ \mathfrak{m}_{u_1})(x) \\ &= RxR^{-1}.\end{aligned}$$

Donde  $R = u_k u_{k-1} \dots u_2 u_1$  es un multivector en  $\mathbb{G}\mathbb{R}^n$  producto de un número par  $k$  de elementos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Y con esto vemos que el producto geométrico de vectores es efectivamente el producto descrito en la sección 6.1, el cual codifica el ángulo y el plano de rotación.

Ahora tenemos las herramientas necesarias para explorar la dimensionalidad del grupo de rotaciones, es decir, el número de parámetros necesarios para generar el grupo completo. Para esto notemos que toda rotación se genera por el producto de a lo más  $n/2$  rotaciones simples, que por la ecuación 6-4 son definidas por un  $B \in \mathbb{G}\mathbb{R}^n$ , producto de un par de vectores unitarios. Pero a su vez, estos vectores se pueden expresar en términos de los elementos  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de la base canónica. En última instancia, esto significa que las rotaciones vienen generadas por los bivectores  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ , productos de elementos diferentes de  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , de los cuales hay un total de  $n!/(2!(n-2)!) = n(n-1)/2$  (elementos diferentes por que  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  no genera ninguna rotación más que la identidad). Por lo que concluimos lo siguiente:

**Proposición 6.2.3.** *El grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  tiene dimensión  $n(n-1)/2$ . Los generadores son las rotaciones  $\mathfrak{r}_{\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}}$  en planos dados por pares de elementos diferentes de la base canónica.*

Esto significa que, por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$ , las rotaciones en general se generan por rotaciones en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ . En contraste, en  $\mathbb{R}^2$  sólo está el plano  $xy$ , que concuerda con el hecho de que  $\mathbf{SO}(\mathbf{2}) \cong \mathbb{S}^1$  que es un espacio unidimensional. Por otra parte,  $\mathbb{R}^4$  tiene 6 planos generadores:  $wx$ ,  $wy$ ,  $wz$ ,  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ . Vemos también cómo  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  se incluye como un subgrupo en  $\mathbf{SO}(\mathbf{n}+1)$ , donde la dimensión extra permite  $n$  planos más de rotación en  $(n+1)$  dimensiones.

Finalmente, sabemos que los productos de elementos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  generan las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, estos elementos actúan sobre los vectores y cubren  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ . Ahora definimos

**Definición 6.2.2.** *El grupo  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  de rotores en  $\mathbb{R}^n$  es el grupo formado por multivectores  $M$ , producto de un número par de vectores unitarios*

$$\mathbf{Spin}(\mathbf{n}) := \{M \in \mathbb{G}\mathbb{R}^n : M = v_1 v_2 \dots v_k, k \text{ es par}, v_i \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Es un grupo ya que el producto está bien definido y cada elemento  $M = v_1 v_2 \dots v_k$  tiene un inverso  $M^{-1} = v_k \dots v_2 v_1$ .

Ya vimos cómo los elementos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  también generan las reflexiones en  $\mathbb{R}^n$  y, ya que toda transformación ortogonal es producto de éstas, entonces tenemos un grupo, similar a como se definió  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  que genera transformaciones ortogonales.

**Definición 6.2.3.** *El grupo  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$  de versores en  $\mathbb{R}^n$  es el grupo formado por multivectores  $M$ , producto de vectores unitarios*

$$\mathbf{Pin}(\mathbf{n}) := \{M \in \mathbb{G}\mathbb{R}^n : M = v_1 v_2 \dots v_k, \quad v_i \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Éste grupo  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$  es a  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$  como el grupo  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  es a  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ . De hecho, se cumple lo siguiente:

**Lema 6.2.2.** *El grupo  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  es cubierta doble de  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  y el grupo  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$  es cubierta doble de  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$ .*

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ . Éstas se pueden descomponer en términos de reflexiones como sigue:

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{m}_{f_n} \circ \mathbf{m}_{f_{n-1}} \circ \dots \circ \mathbf{m}_{f_2} \circ \mathbf{m}_{f_1} \\ g &= \mathbf{m}_{g_n} \circ \mathbf{m}_{g_{n-1}} \circ \dots \circ \mathbf{m}_{g_2} \circ \mathbf{m}_{g_1} \end{aligned}$$

donde los  $f_i$  y  $g_i$  son vectores unitarios en las direcciones de reflexión. Por las definiciones anteriores,  $f$  y  $g$  se traducen a los versores  $F = f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1$  y  $G = g_n g_{n-1} \dots g_2 g_1$  respectivamente, los cuales son elementos de  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$ , y en reversa, los elementos de  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$  corresponden a transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{Pin}(\mathbf{n}) &\longrightarrow \mathbf{O}(\mathbf{n}) \\ M &\longmapsto \left( x \longmapsto (-1)^k M x M^{-1} \right) \end{aligned}$$

Donde  $k$  es el grado del multivector  $M$ , el número de vectores que lo componen.

Esto es homomorfismo, ya que el producto de versores corresponde a la composición de las transformaciones. Por otro lado, el kernel de esta transformación es  $\{+1, -1\}$ , ya que dos versores de signos contrarios mapean a la misma transformación y no hay más versores que mapeen a la misma. Por lo que este homomorfismo es cubierta doble.

El caso de la relación de  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  con  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$  es similar. ■

Incluso se cumple que el grupo  $\mathbf{Pin}(\mathbf{n})$  es particionado en 2 copias de  $\mathbf{Spin}(\mathbf{n})$  por la función determinante, similar al caso de  $\mathbf{O}(\mathbf{n})$  y  $\mathbf{SO}(\mathbf{n})$ .

Finalmente, introduciremos dos operaciones más para terminar de explorar lo que en álgebra geométrica es posible.

Recordemos que la parte simétrica del producto de dos vectores,  $(xy + yx)/2$  resulta en el producto interno. La parte antisimétrica resulta ser de interés también, ya que captura otro aspecto geométrico interesante.

**Definición 6.2.4.** *(Producto externo) [Lounesto, 2001] Definimos el producto externo de dos vectores  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{R}^n$  como la parte antisimétrica del producto geométrico de ambos:*

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(xy - yx).$$

El producto externo de  $n$  vectores es la antisimetrización total del producto geométrico entre ellos.

Este producto tiene muchas propiedades interesantes. Fundamentalmente, y por definición, se cumple siempre que  $x \wedge y = -y \wedge x$ . Esta identidad es importante ya que nos permite expresar subespacios con orientación y con una noción de “área”.

Como ejemplo, sean  $u = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$  y  $v = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$ . Entonces

$$u \wedge v = (ad - bc)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = (|u||v| \sin \theta)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

donde podemos notar que el coeficiente del resultado nos da el área del plano entre ambos vectores (equivalentemente, el determinante de la matriz con columnas  $u$  y  $v$ ). Y este objeto se encuentra multiplicando al bivector unitario  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , el cual puede considerarse como el elemento orientado del plano en  $xy$ , por lo que podemos interpretar el producto externo de dos vectores como el área orientada del paralelogramo con lados  $u$  y  $v$ , lo cual es siempre cierto, véase Kanatani [2015] o Macdonald [2017].

Ahora veamos qué pasa con el producto externo de dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $\vec{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$  y  $\vec{y} = \sum_i y_i \mathbf{e}_i$ , entonces su producto externo queda de la siguiente forma [Kanatani, 2015]:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = (\vec{x} \times \vec{y})^*$$

donde hemos notado que los coeficientes son idénticos a los del producto vectorial  $\vec{x} \times \vec{y}$ , pero en este caso tenemos un plano, ya que está expresado en términos de bivectores. Hemos denotado a esto de la forma  $\vec{x} \wedge \vec{y} = (\vec{x} \times \vec{y})^*$  y decimos que ambos son *duales* uno del otro. Donde el dual de un multivector representa el *complemento ortogonal* del mismo.

**Definición 6.2.5.** [Macdonald, 2017] El dual de un multivector  $M$  está dado por

$$M^* = M\mathbf{I}^{-1}$$

donde  $\mathbf{I}$  es el elemento de volumen  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ .

De esta forma, por ejemplo, en 2D, el dual de un bivector  $B = \alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  viene dado por  $u^* = (\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{I}^{-1} = (\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^{-1} = \alpha$ , lo cual podemos decir que es un punto sin extensión geométrica y en 4D, el dual de un bivector es un plano ortogonal. De esta forma, podemos retomar la discusión del capítulo 5 donde vimos que las rotaciones simples podían entenderse de dos maneras, como movimientos en un plano, o movimientos en círculos alrededor de un “eje” de rotación  $(n - 2)$ -dimensional. Ahora podemos ver que estas dos formas de verlo son equivalentes, al ser *duales*, ya que una vez elegido un plano y un sentido de rotación, se define de forma única su eje  $(n - 2)$  dimensional con una orientación definida.

### 6.3. Recapitulando; las rotaciones en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo hemos terminado de cristalizar algunas ideas sobre las rotaciones que ya venían surgiendo desde el principio, tales como la interpretación de una rotación simple como un producto de vectores. El álgebra geométrica sobre  $\mathbb{R}^n$  nos permitió encontrar éste producto, y a la vez, demostró ser una herramienta poderosa para representar las transformaciones ortogonales en general. De esta manera se generalizaron las propiedades de los complejos y los cuaternios a todos los  $\mathbb{R}^n$ .

En este capítulo vimos que las rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  tienen dimensión  $n(n-1)/2$  y describimos los grupos  $\mathbf{Spin}(n)$  y  $\mathbf{Pin}(n)$  que son cubiertas dobles de  $\mathbf{SO}(n)$  y  $\mathbf{O}(n)$  y cómo la función determinante particiona estos espacios. En este punto podemos resumir estas relaciones con el siguiente diagrama (que resulta ser conmutativo [Buchweitz *et al.*, 2018]) donde cada secuencia vertical u horizontal de morfismos es exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \{+1, -1\} & & \{+1, -1\} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{Spin}(n) & \twoheadrightarrow & \mathbf{Pin}(n) & \xrightarrow{\det} & \{+1, -1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \twoheadrightarrow & \mathbf{O}(n) & \xrightarrow{\det} & \{+1, -1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

También hemos visto la equivalencia de pensar a las rotaciones como planares o como sobre un eje  $(n-2)$  dimensional, ya que surgen de forma dual y vimos el producto externo como una forma de representar planos y volúmenes.

Para ayudar al entendimiento de estas álgebras, y para esclarecer algunas relaciones que se observaron entre las distintas representaciones de las rotaciones en éste trabajo, describiremos brevemente los casos de las álgebras de Clifford  $\mathbb{G}\mathbb{R}^n$  para 2,3 y 4 dimensiones:

#### 6.3.1. El álgebra $\mathbb{G}\mathbb{R}^2$

En  $\mathbb{R}^2$ , todo vector tiene la forma  $x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ . En este espacio, toda rotación es generada por un sólo plano, el plano  $xy$ . Todo producto de un par de vectores unitarios representa una rotación. Sean  $u$  y  $v$  estos vectores, entonces su producto es

$$uv = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

en este punto conviene notar una propiedad importante del bivector  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{I}$ ,  $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{I}^2 = -1$ , por lo que notamos que se comporta igual a la unidad imaginaria de los complejos. Y de hecho,  $ae_1 + be_2 = e_1(a + be_1e_2)$  por lo que los vectores pueden observarse como bivectores disfrazados. Es por esto que los complejos resultan tan naturales para las rotaciones, pues ¡en realidad son bivectores!

### 6.3.2. El álgebra $\mathbb{GR}^3$

En este espacio, las rotaciones simples se siguen representando por bivectores producto de un par de vectores, y podemos ver que, si  $u$  y  $v \in \mathbb{S}^2$

$$uv = a + b\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$$

Ahora, si renombramos  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  ¡nos damos cuenta de que cumplen con las leyes del producto de cuaterniones!

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

Vemos que, al igual que con los complejos, los bivectores en  $\mathbb{GR}^3$  tienen una relación estrecha con los cuaterniones. Explica la utilidad de los cuaterniones para representar rotaciones en 3D, ambos acercamientos son equivalentes ya que son isomorfos los cuaterniones y los rotores en  $\mathbb{GR}^3$ . Esto también nos aclara el parecido de las fórmulas para rotaciones con cuaterniones y con álgebra geométrica que notamos antes. Incluso se puede demostrar que un rotor cualquiera se puede expresar de la siguiente forma

$$R = e^{\theta(\vec{u}\wedge\vec{v})} = \cos\theta + (\vec{u}\wedge\vec{v})\sin\theta$$

donde vemos inmediatamente el plano de rotación (incluso el sentido de rotación) y el ángulo, de forma similar a los cuaterniones [Hanson, 2006], la diferencia es que el producto exterior es válido en dimensiones arbitrarias a diferencia del producto vectorial [Macdonald, 2017].

### 6.3.3. El álgebra $\mathbb{GR}^4$

Generalmente, un rotor en  $\mathbb{R}^4$  puede expresarse de forma única como la suma de dos bivectores simples, que representan dos planos ortogonales. Existe una excepción a esta regla, crucial para el estudio de las rotaciones en 4D: Si los coeficientes de los bivectores tienen cuadrados idénticos, entonces la descomposición no es única. Esto se traduce en el hecho de tal rotor genera rotaciones por ángulos iguales en ambos planos y entonces la rotación es *isoclínica* y como ya vimos (sección 5.2), en tal rotación existen múltiples planos invariantes. Por ejemplo, el rotor  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$  que representa a los planos por los ejes  $wx$  y  $yz$ , puede ser descompuesto alternativamente en la suma de dos bivectores

completamente ortogonales como sigue:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4).$$

### 6.3.4. Más sobre álgebra geométrica

El álgebra geométrica nos ha resultado muy poderosa para representar la acción de las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ , pero esto no es todo, cambiando un poco los axiomas nos es posible expresar una geometría conformal en términos del producto geométrico. De esta forma, se pueden expresar transformaciones más generales como traslaciones y éstas se expresan sin dependencia de las coordenadas, por lo que resulta ser tan sencillo realizar una rotación por el origen como por cualquier punto arbitrario. Además, se pueden representar una mayor cantidad de objetos geométricos con facilidad. Como ejemplo, la línea que pasa por los puntos  $p_1$  y  $p_2$  se representa por  $p_1 \wedge p_2 \wedge \mathbf{e}_\infty$ , donde  $\mathbf{e}_\infty$  es el punto al infinito, y la esfera que pasa por los puntos  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  se representa por  $p \wedge q \wedge r \wedge s$  [Kanatani, 2015]. De hecho, incluso es posible expresar cualquier transformación lineal y grupo matricial en términos de álgebras geométricas [Hestenes, 1991; Sobczyk, 2008], abriendo las puertas a nuevas herramientas e interpretaciones alternativas, como por ejemplo, la reinterpretación de los grupos de Lie en términos de un “álgebra madre” [Doran *et al.*, 1993].

Finalmente, al facilitar la expresión de operaciones fundamentalmente geométricas, en términos de un producto único, las álgebras de Clifford permiten la reformulación de operaciones en física y cálculo vectorial permitiendo nuevas interpretaciones y otorgando mayor flexibilidad (y eficiencia computacional) [Chris Doran, 2003; Lounesto, 2001; Dixon, 2011; Vince, 2011].

# Capítulo 7

## Conclusiones

Hemos visto en este trabajo muchas formas de representar algebraicamente a las rotaciones, en específico mediante números complejos, cuaterniones, matrices y álgebras geométricas. Aunque pueden parecer bastante diferentes, las distintas representaciones comparten características fundamentales que las relacionan, en específico, en todas ellas se observa que la inclusión del producto interno en el álgebra implica la representabilidad de las reflexiones y a su vez, la inclusión de las rotaciones en el marco algebraico; de esta manera, en cada representación terminamos con elementos unitarios del álgebra formando los grupos **Spin**(**n**) que cubren doblemente al grupo de rotaciones **SO**(**n**). Además, observamos aspectos geométricos fundamentales de las rotaciones, como el hecho de que toda rotación se descompone en rotaciones simples y a su vez las rotaciones simples están fundamentalmente relacionadas con el producto de vectores, de donde pudimos ver la dualidad de pensar en las rotaciones como algo planar o en términos de “ejes” de rotación.

En este trabajo se trató de proporcionar un panorama amplio y comprensible, aunque esto implica necesariamente que muchas cosas se hicieron de lado. Entre esas cosas está el panorama general de la teoría de grupos de Lie y cómo se relacionan con los grupos de rotaciones. No sólo en  $\mathbb{R}^n$ , sino que también en  $\mathbb{R}^{p,q}$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$  y otros tipos de espacios [Savage, 2015; Stillwell, 2008]. Otra de las cosas que faltó es explorar la notación gráfica de tensores y cómo ésta permite clasificar fácilmente los subgrupos de rotaciones [Stedman, 1990; Peterson, 2007]. Por otro lado, la teoría de las álgebras de Clifford es muy vasta y es un campo de investigación activo, por lo que la literatura abunda, pero a veces no tan coherente y entonces inevitablemente se omitieron muchos detalles en el tratamiento de este trabajo [Lounesto, 2001; Garling, 2011; Gallier, 2008]. Finalmente, no se exploraron los aspectos computacionales de la implementación de las transformaciones, siendo esto también algo muy vasto [Hanson, 2006; Vince, 2011; Leo Dorst, 2007; Gallier, 2011; Ron Goldman, 2010]

A pesar de esto, el trabajo fué completado cubriendo los objetivos planteados y esperando ser de utilidad para el lector. A pesar de que el hilo conductor fué siempre la elucidación de las propiedades de las rotaciones, esperamos que al haber finalizado, el

lector, al igual que el autor, tenga un nuevo apetito por seguir aprendiendo sobre las posibilidades que abre el álgebra geométrica y su subsecuente relación con transformaciones lineales arbitrarias, lo cual sería un tema apropiado para una continuación del presente trabajo en el futuro no muy distante.

Se agradece al lector su paciencia e interés.

# Bibliografía

- AGUILERA, A. Y PÉREZ-AGUILA, R. General n-dimensional rotations (2004)
- ANTONELI, F. Y FORGER, M. Symmetry breaking in the genetic code: Finite groups. *Mathematical and Computer Modelling* **53**(7):1469 – 1488 (2011). *Mathematical Methods and Modelling of Biophysical Phenomena*
- ARAGÓN-GONZÁLEZ, G., ARAGÓN, J.L., RODRÍGUEZ-ANDRADE, M.A., Y VERDESTAR, L. Reflections, Rotations, and Pythagorean Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras* **19**(1):1–14 (2009)
- ARMSTRONG, M.A. *Groups and symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer (1988)
- BUCHWEITZ, R.O., FABER, E., Y INGALLS, C. The magic square of reflections and rotations. *arXiv e-prints* arXiv:1806.04600 (2018). 1806.04600
- CASTELLANI, E. Y ISMAEL, J. Which Curie's Principle? *Philosophy of Science* **83**(5):1002–1013 (2016)
- CEULEMANS, ARNOUT; THYSSEN, P. *Shattered symmetry: group theory from the eight-fold way to the periodic table*. 1ª edición. Oxford University Press (2017)
- CHRIS DORAN, A.L. *Geometric Algebra for Physicists*. 1ª edición. Cambridge University Press (2003)
- DEROME, J.R. Biological similarity and group theory. *Journal of Theoretical Biology* **65**(2):369 – 378 (1977)
- DIXON, D.G.M. *Division Algebras, Lattices, Physics, Windmill Tilting*. CreateSpace Independent Publishing Platform (2011)
- DORAN, C., HESTENES, D., SOMMEN, F., Y VAN ACKER, N. Lie groups as spin groups. *Journal of Mathematical Physics* **34**(8):3642–3669 (1993). <https://doi.org/10.1063/1.530050>

- DUNITZ, J.D. Symmetry arguments in chemistry. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **93**(25):14260–14266 (1996). <https://www.pnas.org/content/93/25/14260.full.pdf>
- GALLIER, J. Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions. *arXiv e-prints* arXiv:0805.0311 (2008). 0805.0311
- GALLIER, J. *Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Engineering*. Texts in Applied Mathematics 38, 2<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag New York (2011)
- GARLING, D.J.H. *Clifford Algebras: An Introduction*. London Mathematical Society Student Texts 78. Cambridge University Press (2011)
- GEROCH, R. *Mathematical Physics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press (2015)
- GIRARD, P.R. *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. 1<sup>a</sup> edición. Birkhäuser Verlag (2007)
- HANSON, A.J. *Visualizing Quaternions*. The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology, 1<sup>a</sup> edición. Morgan Kaufmann (2006)
- HESTENES, D. The design of linear algebra and geometry. *Acta Applicandae Mathematica* **23**(1):65–93 (1991)
- JERROLD E. MARSDEN, M.J.H. *Basic complex analysis*. 3<sup>a</sup> edición. W.H. Freeman (1999)
- JOHN BAEZ, J.P.M. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. Series on Knots and Everything 4. World Scientific (1994)
- KANATANI, K. *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics*. A K Peters/CRC Press (2015)
- KLEIN, F.C. A comparative review of recent researches in geometry. *arXiv e-prints* arXiv:0807.3161 (2008). 0807.3161
- LEO DORST, DANIEL FONTIJNE, S.M. *Geometric Algebra for Computer Science (Revised Edition): An Object-Oriented Approach to Geometry (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics)*. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, revised edición. Morgan Kaufmann (2007)
- LOUNESTO, P. *Clifford algebras and spinors*. London Mathematical Society lecture note series 286, 2<sup>a</sup> edición. Cambridge University Press (2001)
- MACDONALD, A. A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus. *Advances in Applied Clifford Algebras* **27**:853–891 (2017)

- MILDRED S. DRESSELHAUS, GENE DRESSELHAUS, A.J. *Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter*. 1<sup>a</sup> edición. Springer (2010)
- MORTARI, D. On the Rigid Rotation Concept in n-Dimensional Spaces: Part II (2000)
- NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. illustrated edition edición. Oxford University Press, USA (1997)
- PETERSON, E. A Not-so-Characteristic Equation: the Art of Linear Algebra. *arXiv e-prints* arXiv:0712.2058 (2007). 0712.2058
- RIETMAN, E.A., KARP, R.L., Y TUSZYNSKI, J.A. Review and application of group theory to molecular systems biology. *Theoretical Biology and Medical Modelling* **8**(1):21 (2011)
- RON GOLDMAN, B.B. *Rethinking Quaternions: Theory and Computation*. Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation. Morgan and Claypool Publishers (2010)
- ROSEN, J. *Symmetry Rules: How Science and Nature are founded on Symmetry*. The Frontiers Collection, 1<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008)
- ROWLAND, T. Vector Space Orientation. Parte de MathWorld—A Wolfram Web Resource, por Eric W. Weisstein (????). Visitado el 8 de marzo de 2018
- SAVAGE, A. Introduction to Lie Groups (2015)
- SCHMIEDT, H. *Molecular symmetry, super-rotation, and semiclassical motion : new ideas for solving old problems*. Springer series on atomic optical and plasma physics 97. Springer (2017)
- SILVERMAN, R.A. *Introductory Complex Analysis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications (1984)
- SOBCZYK, G. Geometric matrix algebra. *Linear Algebra and its Applications* **429**(5):1163 – 1173 (2008). Special Issue devoted to selected papers presented at the 13th Conference of the International Linear Algebra Society
- STEDMAN, G.E. *Diagram techniques in group theory*. Cambridge University Press (1990)
- STILLWELL, J. *Naive Lie theory*. Undergraduate texts in mathematics, 1<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag New York (2008)
- SZEKERES, P. *A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert space and differential geometry*. Cambridge University Press (2004)
- TAPP, K. *Matrix Groups for Undergraduates*. Student Mathematical Library 79, 2<sup>a</sup> edición. American Mathematical Society (2016)

- TITU ANDREESCU, D.A. *Complex Numbers from A to ... Z*. 2<sup>a</sup> edición. Birkhäuser Basel (2014)
- TRIOLA, C. *Special Orthogonal Groups and Rotations* (2009). Honors Thesis
- VINCE, J. *Quaternions for computer graphics*. 1<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag London (2011)
- VOELKEL, K. *Division Algebras*. <http://www.konradvoelkel.com/wp-content/uploads/voelkel-2015-01-27-basic-notions-division-algebras.pdf> (2015). Notes for a talk in a "Basic Notions" seminar at Freiburg
- WEYL, H. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications (1950)
- WEYL, H. *Symmetry*. Princeton Science Library. Princeton University Press (2015)
- WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Rotations in 4-dimensional Euclidean space* — Wikipedia, The Free Encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotations\\_in\\_4-dimensional\\_Euclidean\\_space&oldid=883721516](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotations_in_4-dimensional_Euclidean_space&oldid=883721516) (2019). [Online; accessed 21-April-2019]
- YVETTE KOSMANN-SCHWARZBACH, S.F.S. *Groups and Symmetries: From Finite Groups to Lie Groups*. Universitext, 1<sup>a</sup> edición. Springer-Verlag New York (2010)