



Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Posgrado en Astrofísica

**Impacto de la retroacción radiativa y de los efectos térmicos
en la evolución orbital de embriones planetarios inmersos en
discos**

Tesis
que para optar por el grado de:
Maestra en Ciencias (Astrofísica)

Presenta:
Sonia Cornejo Patiño

Directores de tesis:

Dr. Frédéric S. Masset	Dr. F. Javier Sánchez Salcedo
Instituto de Ciencias Físicas	Instituto de Astronomía

Cuernavaca, Morelos – Julio 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al proyecto PAPIIT IN111118 por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría. También agradezco a la Fundación Marcos Moshinsky que, mediante una cátedra de investigación, permitió la organización del taller *Numerical simulations of planet-disc interactions* donde aprendí conceptos que permitieron plantear y desarrollar este trabajo.

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	3
1.1.1. Objetos estelares jóvenes	3
1.1.2. Crecimiento del material sólido	8
1.2. Objetivos y estructura de la tesis	13
2. Marco teórico	15
2.1. Interacciones gravitacionales	15
2.1.1. Evolución de una órbita circular	18
2.1.2. Evolución de una órbita excéntrica e inclinada	19
2.2. Interacciones térmicas	20
2.2.1. Evolución de una órbita circular	22
2.2.2. Evolución de una órbita excéntrica e inclinada	24
2.2.3. El desvanecimiento de la fuerza térmica	26
3. Metodología	27
3.1. Características de los códigos de N-cuerpos	28
3.2. Diseño de los experimentos	30
3.2.1. Configuración de nuestros experimentos	30
3.2.2. Distribución de los embriones planetarios	31
3.2.3. Introducción de la componente gaseosa del disco como fuerzas externas	32
3.3. Validación de la implementación	33
3.3.1. Interacciones gravitacionales	34
3.3.2. Interacciones térmicas	36

4. Resultados y análisis	43
4.1. La dependencia de la evolución orbital con la luminosidad ℓ	43
4.2. Evolución orbital de embriones fríos	46
4.2.1. Evolución del semieje mayor	46
4.2.2. Evolución de la excentricidad y la inclinación	46
4.3. Evolución orbital de embriones calientes	48
4.3.1. Dirección de la migración	48
4.3.2. Excentricidad de saturación	50
4.3.3. El papel de la inclinación	54
4.4. La importancia de las interacciones en el crecimiento oligárquico	56
5. Conclusiones	65
A. Conceptos de mecánica celeste	69
A.1. Revisión al problema de Kepler	69
A.1.1. Leyes de Kepler	70
A.1.2. Elementos orbitales	73
A.2. Órbitas perturbadas	75
A.2.1. Evolución de la energía y momento angular	76
A.2.2. Evolución de los elementos orbitales	78
A.2.3. Casos de (nuestro) interés	84
B. REBOUND	91
B.1. Módulos en REBOUND	91
Referencias	101

Resumen

Las interacciones a las que se ven sujetos los embriones planetarios, debido a la presencia del disco protoplanetario, moldean sus órbitas e impactan dramáticamente su capacidad para acretar material. Los trabajos clásicos se han enfocado en describir las consecuencias que tiene el potencial gravitacional del protoplaneta sobre el disco protoplanetario y la reacción de ese último sobre la órbita del planeta (Ward, 1986). La presencia del embrión forma ondas de densidad espirales en el disco que ejercen fuerzas de marea sobre el primero. Estas fuerzas hacen que el planeta en formación migre hacia la estrella y que su órbita se vuelva circular y coplanar con el disco protoplanetario. Este mecanismo es rápido y eficiente, por lo cual, la migración hacia regiones internas compromete la supervivencia del material sólido haciendo poco viable la formación planetaria (Tanaka et al., 2002; Tanaka & Ward, 2004). Recientemente se ha observado con simulaciones hidrodinámicas que cuando se toma en cuenta la termodinámica del disco es decir, que al modelo del disco se le agregan características como difusividad térmica finita, en la vecindad del protoplaneta se forman estructuras sobredensas (Lega et al., 2014) o subdensas (Benítez Llambay et al., 2015; Chrenko et al., 2017; Eklund & Masset, 2017) asimétricas que también ejercen fuerzas de marea sobre el planeta. Analíticamente se ha visto que, dependiendo de la luminosidad del embrión, esta interacción es capaz de hacerlo migrar hacia afuera (Masset, 2017) y de excitar su excentricidad e inclinación (Eklund & Masset, 2017; Fromenteau & Masset, 2019; Masset & Velasco Romero, 2017). Así, se espera que el efecto neto de las interacciones gravitacionales y de las térmicas (disco con difusividad térmica) en los modelos de la evolución orbital de embriones pueda cambiar profundamente los escenarios de formación planetaria.

Gran parte de este trabajo consistió en realizar una implementación en un código de N-cuerpos que permitiera realizar simulaciones que reprodujeran la presencia de la componente gaseosa del disco. Esto se hizo añadiendo al código una rutina que simula la presencia del disco protoplanetario con cálculos semianalíticos. Con esta implementación se realizaron dos tipos de experimentos numéricos:

- Por un lado estudiamos el impacto del disco protoplanetario en los elementos orbitales de embriones individuales. Observamos que, a grandes rasgos, la forma en que la componente térmica impacta la evolución del embrión clasifica a los objetos en dos grupos. A los objetos del primer grupo los hemos llamado embriones fríos ($m < 0.27 M_{\oplus}$) ya que en este caso la presencia del embrión forma estructuras frías y sobredensas en su vecindad. Los embriones fríos migran hacia

regiones internas y amortiguan su excentricidad e inclinación más rápidamente, casi en un orden de magnitud, respecto al caso clásico. A los objetos del segundo grupo los nombramos embriones calientes (con $m > 0.27 M_{\oplus}$) ya que dan lugar a estructuras calientes y subdensas. La migración de los embriones calientes depende de la zona del disco en la que se ubiquen, pero tiende a ser hacia afuera. Además observamos que cuando el trabajo de las interacciones gravitacionales cancela el de las térmicas la excentricidad del planeta se vuelve constante. Esta excentricidad, que llamamos excentricidad de saturación e_{sat} , crece con la masa del planeta y disminuye con el semieje mayor. Por último, observamos que las interacciones planeta-disco siempre amortiguan la inclinación de la órbita del planeta.

- Con la intuición física aportada por la caracterización de la evolución orbital, estudiamos cómo la presencia de las interacciones térmicas, en conjunto con las gravitacionales, afecta la capacidad de un enjambre de embriones para acretar material. Observamos que mientras los objetos se comportan como embriones fríos el enjambre de embriones se enfría dinámicamente más rápidamente que en el caso clásico, favoreciendo las fusiones entre ellos y permitiendo que alcancen la masa necesaria para entrar en el régimen de embriones calientes. Por ello, la inclusión de las interacciones térmicas permite formar protoplanetas de $1 M_{\oplus}$ en un tiempo hasta 5 veces menor que cuando sólo se incluyen las gravitacionales. Además, el mecanismo de migración del caso térmico resguarda al material en regiones externas permitiendo la supervivencia del material.

Para este trabajo nos limitamos a estudiar la evolución de los objetos hasta que estos alcanzaran masas del orden de $1 M_{\oplus}$ porque simulaciones hidrodinámicas han mostrado que, para embriones de algunas masas terrestres, los efectos térmicos se desvanecen y el comportamiento clásico vuelve a dominar en la evolución orbital del embrión, efecto que quedó fuera del alcance de este trabajo.

En trabajos futuros buscaremos incorporar lo anterior en nuestras simulaciones. Sin embargo, en esta tesis mostramos que, dinámicamente, las interacciones térmicas son cruciales para la comprensión de la formación planetaria ofreciendo un escenario de evolución claramente distinto al clásico.

1

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Objetos estelares jóvenes

Los sistemas planetarios se forman en los discos de gas y polvo que se observan alrededor de estrellas jóvenes por lo que es crucial estudiar y caracterizar estos objetos para entender las condiciones en que nacen los planetas. Los lugares en los que se forman las estrellas son las regiones más frías (donde el movimiento del gas por su energía cinética es menor) y las más densas (ya que la atracción entre las partículas del medio es relativamente fuerte) del medio interestelar. Estas regiones se conocen como nubes moleculares. Algunas zonas dentro de estos objetos colapsan debido a que la fuerza gravitacional en ellas supera la presión térmica del gas compactando el material dando lugar a núcleos densos (Hartmann, 2009). En estos lugares, con densidades medias de $10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-3}$ y un tamaño típico de 0.1 pc, la energía gravitacional existente por la caída del material se libera como radiación. Cuando la densidad de energía del núcleo es lo suficientemente grande como para hacer ineficiente la liberación de energía por esta vía, la caída de material se detiene debido a la acumulación de presión térmica (Prialnik, 2000).

Como consecuencia de la conservación del momento angular, el material que envuelve al núcleo

comienza a aplanarse formando un disco circunestelar (Li et al., 2014). Este disco de gas y polvo sirve, en etapas tempranas, como medio para que el objeto central acrete material permitiendo la formación de la protoestrella (Shu et al., 1987) y más adelante, provee el material que da lugar a la formación planetaria (Williams & Cieza, 2011). Después de aproximadamente 10 millones de años la componente gaseosa del disco es destruida por flujos bipolares, fotoevaporación o acreción del material en la estrella (Haisch et al., 2001; Lada et al., 2006) y el material sólido sobreviviente a esto permanece en torno a la estrella en forma de un disco de escombros. Este disco está constituido principalmente por polvo, pequeños cuerpos rocosos y los protoplanetas y planetas gigantes ya formados (Habing et al., 2001; Rhee et al., 2007). Se considera que el sistema ha alcanzado su madurez después de que se ha limpiado la región interna del disco de escombros y la mayor parte del material original se encuentra contenida en los planetas.

1.1.1.a. Clasificación observacional

Esta evolución es invisible en el óptico debido al oscurecimiento por extinción del polvo circundante. Por ello, estos procesos se observan en infrarrojo donde existen excesos debidos a la fotósfera estelar y a las emisiones del polvo del disco. Aprovechando la forma de la distribución espectral de energía (SED; por las siglas para *Spectral Energy Distribution*) en el infrarrojo, estos objetos se han clasificado en cuatro grupos que pueden interpretarse teóricamente como una secuencia evolutiva (Adams et al., 1987; André et al., 1993; Lada, 1987) (figura 1.1):

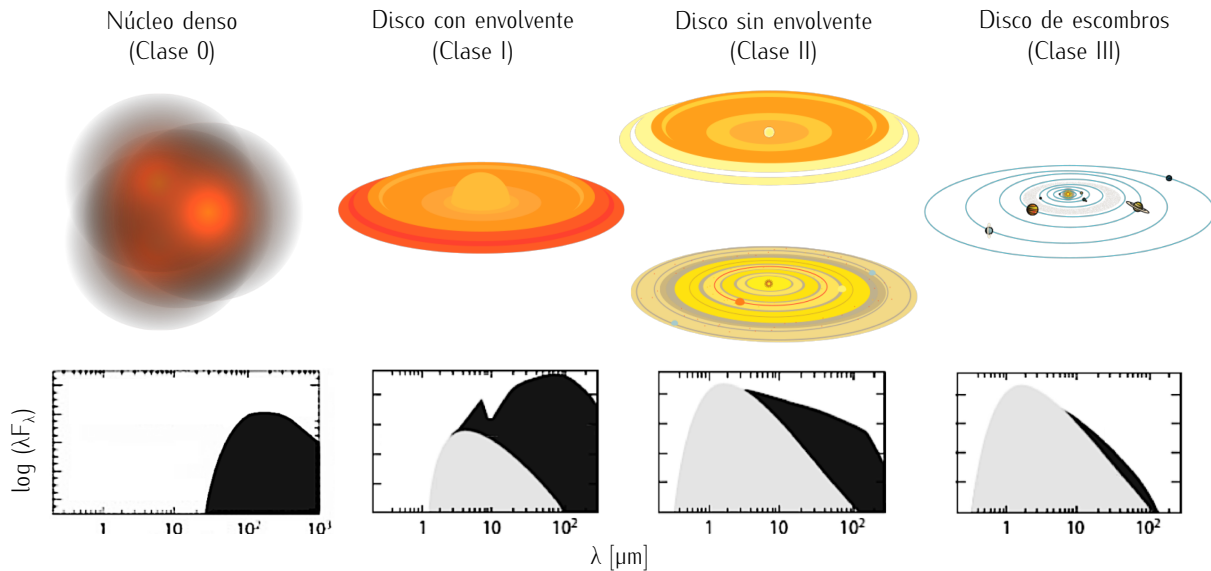


Figura 1.1: Evolución de un objeto estelar joven hasta llegar a ser un sistema planetario con su clase asociada a la cantidad de exceso infrarrojo (en negro). En gris se muestra el perfil de la estrella con un ajuste de cuerpo negro (esquema adaptado de André, 2002).

- **Clase 0.** Sus SEDs poseen máximos en el infrarrojo lejano o en el submilimétrico. Estas fuentes tienen grandes cantidades de gas y polvo a su alrededor, lo cual es indicador del colapso gravitacional de un núcleo denso.
- **Clase I.** En la SED predomina el infrarrojo medio como resultado de la suma de la protoestrella, el disco y la envoltura del sistema que sigue cayendo permitiendo la formación del disco y la acreción de material por parte de la estrella.
- **Clase II.** La SED posee un marcado descenso entre el infrarrojo cercano y el medio consecuencia de la suma de la protoestrella y del disco. La envoltura se ha disipado mientras que el disco de acreción se conserva.
- **Clase III.** En su SED el exceso infrarrojo es inexistente o muy pequeño y la SED corresponde a la emisión de la fotosfera estelar. El ligero exceso infrarrojo se puede deber a un disco de escombros.

1.1.1.b. Modelo del disco

Para estudiar la evolución de la componente gaseosa del disco de acreción y los procesos que en él ocurren, primero debe realizarse un modelo de disco. Para modelar su perfil de densidad se parte de las ecuaciones de Euler las cuales, si despreciamos términos viscosos y suponemos que el flujo es incompresible, permiten escribir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (1.2)$$

Suponiendo que el potencial al que está sujeto el disco es un potencial kepleriano con

$$\phi = -\frac{GM}{R}$$

donde M es la masa del cuerpo central y $R^2 = r^2 + z^2$, podemos escribir las ecuaciones 1.1 y 1.2 en coordenadas cilíndricas como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} - u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\phi^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM}{R^3} r \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = -u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \frac{u_r u_\phi}{r} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{u_r u_z}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM}{R^3} z \quad (1.6)$$

Si ahora suponemos que el disco está en estado estacionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), tiene simetría azimutal ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$), está en equilibrio vertical ($u_z = 0$) y está en balance centrífugo ($u_r = 0$) todos los términos de las expresiones 1.3 y 1.5 se anulan y las ecuaciones 1.4 y 1.5 se reducen a

$$\frac{GM}{R^3} r = \frac{u_\phi^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.7)$$

$$\frac{GM}{R^3} z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.8)$$

que son las expresiones de un gas en equilibrio hidrostrático radial (ecuación 1.7) y vertical (ecuación 1.8). El término u_ϕ^2/r en 1.7 es el que evita la formación de una estructura esférica, es decir, es el que *aplana* al disco.

Para conocer el perfil de densidad del disco trabajaremos con la expresión 1.8. Para ello, necesitamos usar una ecuación de estado. Si suponemos que el disco es isotérmico (es decir, que la temperatura es la misma para el material en un radio determinado) se cumple que

$$p = \rho c_s^2 \quad (1.9)$$

con c_s la velocidad del sonido dada por

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad (1.10)$$

y k_B la constante de Boltzmann, μ el peso molecular medio, m_H la masa del átomo de hidrógeno y T la temperatura. Para modelar la temperatura T suele usarse una ley de potencia

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} \quad (1.11)$$

donde β es una constante positiva del orden de la unidad y con lo que se observa que $c_s = c_s(r)$ (Hayashi, 1981; Weidenschilling, 1977b). Suponer esta forma para el perfil de temperatura es aceptable ya que, como la mayor parte de la masa del disco está cerca de su plano medio, es razonable suponer que el material en un radio determinado comparte una misma temperatura.

Con esto, la expresión para equilibrio hidrostático vertical 1.8 va como

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = -\frac{GM}{c_s^2} \frac{z}{R^3}$$

Recordando que $R^2 = r^2 + z^2$ e integrando se obtiene

$$\rho(r, z) = \rho(r) \exp \left\{ \frac{GM}{c_s^2 r} \left[\frac{1}{(1 + z^2/r^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \right\} \quad (1.12)$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor del primer término entre corchetes

$$\frac{1}{(1 + z^2/r^2)^{\frac{1}{2}}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2$$

se tiene

$$\rho(r, z) = \rho(r) \exp \left[-\frac{z^2}{2c_s^2} \left(\frac{GM}{r^3} \right) \right]$$

usando que la frecuencia angular orbital $\Omega_p^2 = GM/r^3$ (ver ecuación A.15)

$$\rho(r, z) = \rho(r) \exp \left[-\frac{z^2}{2} \left(\frac{\Omega_p}{c_s} \right)^2 \right]$$

En la expresión anterior se observa que la densidad decrece de forma exponencial con el cuadrado de la altura en una escala de altura

$$H \equiv \frac{c_s}{\Omega_p} \quad (1.13)$$

que vincula la velocidad del sonido c_s y Ω_p , la frecuencia orbital local (ver ecuación A.15). A su vez, H suele describirse en función de la relación de aspecto h del disco como

$$h \equiv \frac{H}{r} \quad (1.14)$$

que indica la altura del disco respecto de la distancia al centro. Ya que los discos protoplanetarios son delgados, h varía entre $\sim 0.03 - 0.1$.

Sustituyendo la expresión para H tenemos

$$\rho(r, z) = \rho_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right] \quad (1.15)$$

Finalmente, integrando la ecuación 1.15 sobre z , la densidad en el plano medio del disco ρ_0 queda en

términos de la escala de altura H y la densidad superficial Σ

$$\rho_0 = \frac{\Sigma(r)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} H} \quad (1.16)$$

Como en el caso de la temperatura, suele asumirse una ley de potencia para describir a la densidad superficial Σ

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha} \quad (1.17)$$

donde Σ_0 es el valor de la densidad superficial a un r_0 y α es una constante positiva del orden de la unidad (Hayashi, 1981; Weidenschilling, 1977b).

Tanto para la temperatura como para la densidad superficial, el modelo de la Masa Mínima de la Nebulosa Solar (MMSN; por las siglas para *Minimum Mass Solar Nebula*) propone $\Sigma_0 = 1700 \text{ g / cm}^2$ y $T_0 = 280 \text{ K}$ con $\alpha = 3/2$ y $\beta = 1$ en $r_0 = 1 \text{ ua}$, calculando la masa mínima de gas necesaria para formar los planetas si éstos hubieran estado siempre donde los observamos (Hayashi, 1981).

1.1.2. Crecimiento del material sólido

Una vez que la fase en clase I ha finalizado y la clase II comienza, el disco puede considerarse protoplanetario en lugar de circunestelar ya que en este punto, la protoestrella ya ha acretado la mayor parte de su masa desde el disco y su evolución está dominada por la presencia del material sólido en él (Williams & Cieza, 2011). Las características del material sólido a su vez dependen de la forma en que se de su crecimiento, que usualmente se condensan bajo dos posibles escenarios para la formación planetaria: el modelo de inestabilidad gravitacional (Cameron, 1978; Kuiper, 1951) y el modelo de acreción de núcleos (Bodenheimer & Pollack, 1986; Pollack et al., 1996).

El modelo de inestabilidad gravitacional se usa para explicar la formación de los gigantes gaseosos a partir del colapso de algunas regiones del disco protoplanetario. Este modelo es útil para explicar la existencia de planetas con masas mayores a las de Júpiter en radios orbitales grandes, donde el disco es más probable que sea gravitacionalmente inestable.

Por otro lado, el modelo de acreción de núcleos asume que la formación de planetas inicia con el crecimiento del polvo proveniente de la nube molecular hasta formar objetos de mayor tamaño que dan lugar a los planetas. Este proceso se traduce en un cambio de entre 12 y 14 órdenes de magnitud en la escala espacial (Armitage, 2007) y se puede separar en tres distintos bloques definidos en gran medida según la interacción que tienen los sólidos con el disco protoplanetario (figura 1.2): el gas determina por completo los movimientos del polvo y rocas mediante interacciones aerodinámicas y también perturba los movimientos de los objetos más masivos mediante interacciones de marea. En este trabajo suponemos

que la formación planetaria se da por acreción de núcleos y se concentra en la última etapa de formación es decir, la etapa en la que los objetos tienen la masa suficiente para tener interacciones de marea con la componente gaseosa del disco.

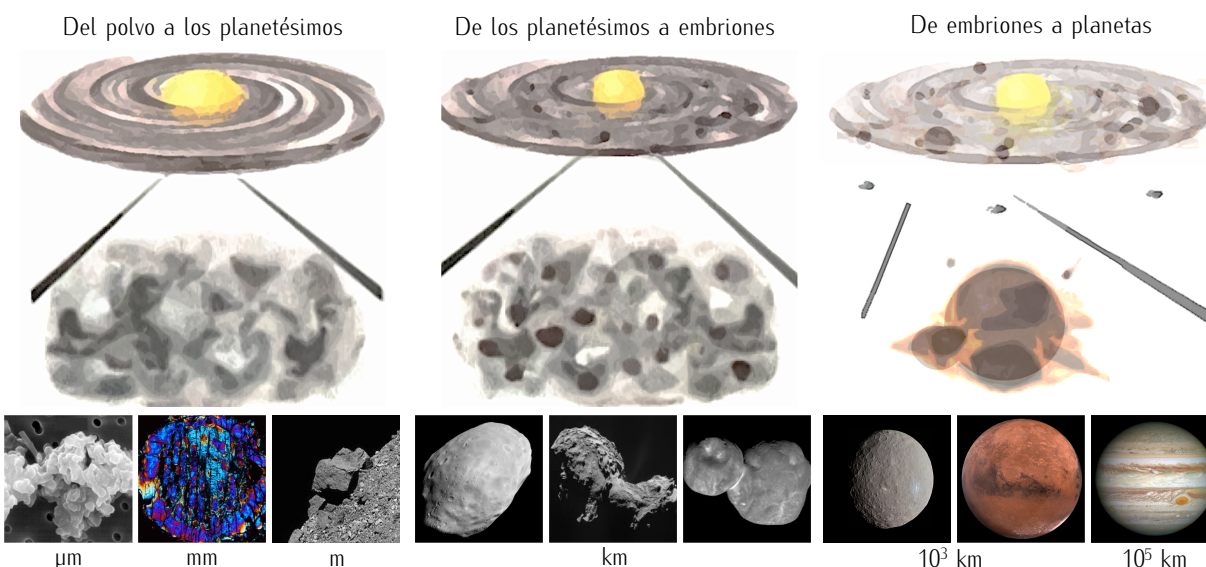


Figura 1.2: Distintos cuerpos del sistema solar representando a los distintos sólidos involucrados en la formación planetaria. De izquierda a derecha: granos de polvo interplanetario, condrulito de la meteorita Allende, bloque sobre el asteroide Bennu, Fobos, cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, 2014 MU₆₉ Ultima Thule, Ceres, Marte y Júpiter. Fotografías de Jessberger et al. (2001), Montoya Pérez (2016), NASA (2019a), NASA (2003), ESA (2014), NASA (2019b), Cowart (2015), USGS (1980) y NASA (2014) respectivamente.

1.1.2.a. Del polvo a planetésimos

La formación planetaria comienza con el polvo original de la nube molecular (con tamaños $\sim \mu\text{m} - \text{cm}$). Inicialmente el crecimiento del material se da por coagulación: ya que las colisiones entre partículas son a bajas velocidades las fuerzas de van der Waals actúan entre sus superficies y pegan las partículas de polvo. Como el tamaño de los granos de polvo es mucho más pequeño que el camino libre medio del gas, del orden de 1 m en el plano medio del disco, el arrastre que siente la partícula está sujeto a la ley de Epstein (Weidenschilling, 1977a). Debido a la existencia de una pequeña diferencia entre las velocidades del gas (que está sujeto a efectos de presión) y del polvo (que rota a velocidad kepleriana) ocurren dos procesos. El primero es la sedimentación del material hacia el plano medio del disco, que se realiza en un tiempo relativamente corto ($\sim 10^5$ años para un grano $\sim 1 \mu\text{m}$ a 1 ua). Esta escala temporal va como el inverso del tamaño del grano, lo que permite que los granos en crecimiento se sedimenten más rápido (Weidenschilling & Cuzzi, 1993) haciendo que fácilmente crezcan en tamaños de ~ 1 m (Dominik et al., 2007). Cuando los objetos crecen a un tamaño comparable al camino libre medio del gas la fuerza de arrastre está dada por la ley de Stokes y se les clasifica como rocas (Weidenschilling, 1977a).

El segundo proceso al que se ve sujeto el material es en una deriva radial hacia las regiones internas del disco. Esta deriva depende en gran medida del tamaño del objeto: para un grano de tamaño $\sim 1 \mu\text{m}$ el desplazamiento es de $\sim 10^{-2}$ ua en $\sim 10^5$ años mientras que para objetos de ~ 1 m ocurre en $\sim 10^2$ años. [Weidenschilling & Cuzzi \(1993\)](#) mencionan que el tiempo de formación de objetos de tamaños $\sim 10 - 100$ km es de $\sim 10^6$ años, mucho mayor al tiempo en que, virtualmente, el material se caería en la estrella haciendo imposible la formación de cuerpos más grandes. Para solucionar este problema se han propuesto varios mecanismos que aceleran el crecimiento del material en la llamada barrera del metro como asumir inestabilidades gravitacionales del disco ([Goldreich & Ward, 1973](#)), captura de material en trampas ([Gonzalez et al., 2017](#); [Klahr & Henning, 1997](#)), entre otros. Sin embargo, aún no se entiende con claridad cómo operan estos procesos y la forma en que los sólidos crecen en este rango de tamaños sigue en discusión. En [Chiang & Youdin \(2010\)](#) se encuentra una profunda revisión a los trabajos que se han hecho en este campo, sus limitantes y los retos actuales: que sí puede estudiar, qué no y las técnicas con las que se aborda la transición entre polvo y los planetésimos.

1.1.2.b. De planetésimos a embriones planetarios

La siguiente etapa de formación inicia cuando en el disco existe una población sustancial de planetésimos (objetos con tamaños $\sim 1 - 10^2$ km). Estos cuerpos se mueven en órbitas keplerianas ya que prácticamente no sienten al gas: su masa es lo suficientemente grande para que las fuerzas de arrastre dejen de ser importantes y sigue siendo pequeña para sentir las fuerzas de marea que llevan a la migración. Esto hace que la gravedad sea la fuerza dominante en esta etapa y que la acreción de material se de por la atracción gravitacional entre pares. Ya que la capacidad del planetésimo para acretar no va a depender únicamente de su tamaño físico sino de la fuerza de gravedad que ejerce en los objetos circundantes, la probabilidad de colisionar con este objeto se vuelve mayor a su sección recta geométrica. Esto se conoce como enfocamiento gravitacional ([Lissauer, 1993](#)). Como consecuencia, la tasa de acreción de material depende como $\frac{dm}{dt} \propto m^{\frac{4}{3}}$ y los planetésimos pasan por un crecimiento desbocado ([Wetherill & Stewart, 1993](#)).

Durante el crecimiento desbocado los cuerpos más grandes crecen más rápido que los más pequeños, lo cual hace que en algún punto los planetésimos más masivos comiencen a dominar gravitacionalmente en su vecindad. Este pequeño grupo de grandes planetésimos consumen la mayor parte de los objetos a su alcance y la acreción entra en un nuevo régimen llamado crecimiento oligárquico ([Kokubo & Ida, 1998](#)). Este nuevo régimen, que es mucho más lento que el crecimiento desbocado, termina cuando la mayoría de los cuerpos pequeños han sido acretados, haciendo que los planetésimos más grandes alcancen la llamada masa de aislamiento convirtiéndose en embriones planetarios. En [Armitage \(2007\)](#) se encuentra un cálculo sencillo donde se encuentra que la masa de aislamiento es decir, la masa a la que la tasa de crecimiento del objeto disminuye ya que ya ha acretado la mayoría del material a su alcance, es de $M_{\text{iso}} \sim 0.07 M_{\oplus}$ a 1 ua.

1.1.2.c. De embriones planetarios a planetas

La última etapa del crecimiento del material comienza una vez que las masas en planetésimos y embriones son comparables. En ésta los embriones planetarios, con masas del orden $\sim 10^{-4} - 10^{-2} M_{\oplus}$, crecen a través de las colisiones entre ellos y la captura de gas del disco para dar lugar tanto a los planetas terrestres como a los gaseosos. La enorme diferencia entre ellos se debe a la capacidad de los embriones para acretar material según la región del disco protoplanetario donde se encuentran.

Se cree que los planetas gaseosos nacen a partir de embriones planetarios cercanos a la línea de hielo, donde la condensación de los materiales volátiles aumentan la capacidad del embrión para acretar material. Cuando los embriones en estas regiones alcanzan masas similares a la masa de Marte son capaces de ligar gravitatoriamente una envoltente gaseosa significativa que aumenta la sección eficaz del embrión. Esto le permite acretar sólidos a una tasa más alta. Dicha envoltente se mantiene en equilibrio hidrostático debido a la energía liberada por los planetésimos que van siendo acretados, la cual se transporta por mecanismos radiativos y convectivos a lo largo de la envoltente permitiendo que ésta no colapse. Cuando la masa de la envoltente alcanza una masa similar a la del núcleo, $\sim 8 - 10 M_{\oplus}$, dichos mecanismos ya no son eficientes y sus capas internas colapsan sobre sí mismas. Esto comprime el gas de la envoltente y dispara la tasa de acreción de gas en el planeta, la cual está limitada por la capacidad que tiene el disco de entregarle gas al planeta en crecimiento. Cuando la acreción de gas termina, el planeta evoluciona en forma aislada y su envoltente continúa contrayéndose y enfriándose constituyendo su atmósfera (Mizuno, 1980; Perri & Cameron, 1974).

Por otro lado, los planetas rocosos terminan de formarse a partir del remanente de planetésimos y embriones. Este proceso ocurre después de que el gas disco ya se ha dispersado y ocurre más lentamente que la etapa de crecimiento oligárquico. Los experimentos numéricos muestran que este crecimiento, llamado crecimiento postoligárquico, forma planetas con masas comparables a la de la Tierra en escalas de tiempo $\sim 10^7 - 10^8$ años (Chambers, 2001; O'Brien et al., 2006; Raymond et al., 2006).

Ya que en este rango de tamaños el material sólido está sujeto a distintas interacciones que cambian de manera sustancial su evolución orbital, los detalles del crecimiento del material aún no se entienden con claridad. Los procesos capaces de modificar la órbita de los protoplanetas son las interacciones entre los protoplanetas mismos (Lin & Ida, 1997; Rasio & Ford, 1996; Weidenschilling & Marzari, 1996), las interacciones con los planetésimos restantes (Duncan et al., 2007; Fernandez & Ip, 1984; Malhotra, 1993) y la interacción con el gas del disco protoplanetario (Goldreich & Tremaine, 1979, 1980). En particular, las interacciones con el gas del disco ocurren ya que la masa de los embriones es suficientemente grande para modificar la distribución del gas en su vecindad formando distintas estructuras. Estas estructuras retroalimentan al protoplaneta intercambiando momento angular y energía con él. Esto modifica de forma dramática la órbita del objeto permitiéndole migrar en el disco además de amortiguar o excitar al resto de sus elementos orbitales. El amortiguamiento o excitación de las excentricidades e inclinaciones del planeta, además del grado y dirección de su migración, dependen tanto de la masa del planeta como

de las propiedades locales del gas (figura 1.3) y se distinguen dos casos límites según la respuesta del disco ante el perturbador:

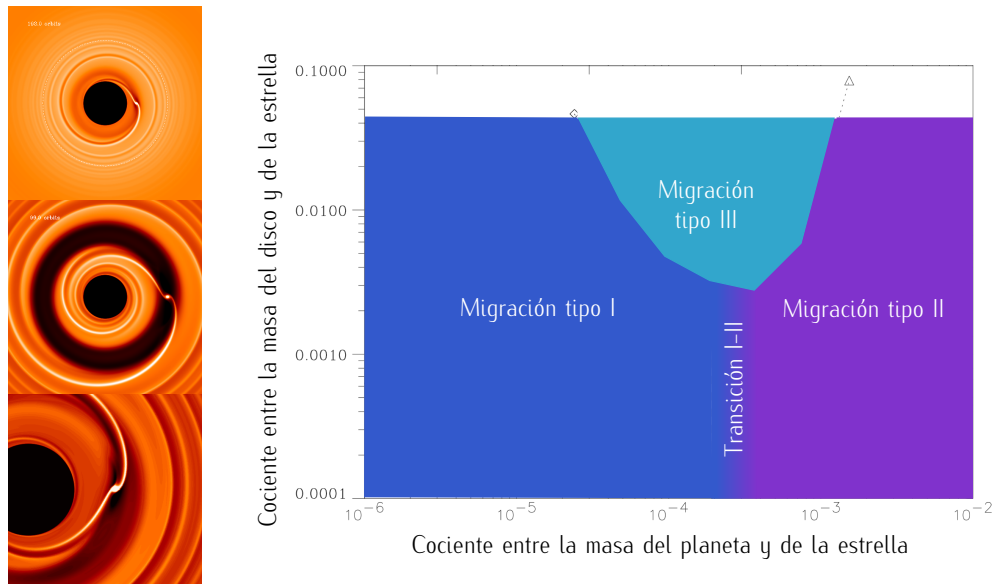


Figura 1.3: Distintos escenarios de migración en función de la masa del planeta y de las propiedades locales del gas. En un costado se muestra la respuesta del disco en cada caso: migración tipo I, II y III respectivamente (adaptado de [Masset, 2008](#)).

- **Migración tipo I.** En este caso las perturbaciones gravitacionales de un planeta de baja masa (del orden de una masa terrestre) en el disco son pequeñas y se puede determinar por medio de teoría lineal. El potencial gravitacional del planeta forma ondas de densidad espirales en el disco que establecen mareas sobre él. La onda interna a la órbita del objeto lo empuja hacia un radio mayor pues le transfiere momento angular, mientras que la externa empuja al planeta hacia la estrella ya que le resta momento angular. En discos protoplanetarios la torca ejercida por las resonancias externas suele ser mayor, por lo que el planeta migra hacia la estrella ([Korycansky & Pollack, 1993](#); [Tanaka et al., 2002](#); [Ward, 1986](#)). Además, las interacciones con el disco amortiguan la excentricidad y la inclinación del planeta, lo cual vuelve las órbitas circulares y contenidas en el plano medio del disco ([Artymowicz, 1993](#); [Tanaka & Ward, 2004](#)).
- **Migración tipo II.** Para planetas más masivos los efectos no lineales comienzan a ser importantes. En este caso la transferencia de momento angular y la fuerza gravitacional entre el planeta y el disco se vuelven más fuertes. Si el momento angular no es transportado por las ondas espirales, el gas dentro de la órbita del planeta pierde momento angular y se aleja de éste. Lo mismo ocurre para el gas fuera de la órbita del planeta, que en este caso gana momento angular, haciendo que el gas en torno al planeta se redistribuya y abra un surco en el disco. Así, una vez que el planeta

ha logrado abrir el surco las torcas mantienen al planeta en el medio del surco por lo cual éste migra a la misma tasa que el gas del disco. Ya que los discos protoplanetarios son discos de acreción el gas deriva hacia el objeto central y la evolución orbital del planeta queda ligada a la evolución viscosa del disco. También, se ha mostrado que las interacciones planeta-disco tienden a excitar la excentricidad (Goldreich & Sari, 2003; Ogilvie & Lubow, 2003) y a amortiguar la inclinación de planetas masivos (Chametla et al., 2017; Xiang-Gruess & Papaloizou, 2013).

En algunos casos se presenta un régimen intermedio entre la migración tipo I y la tipo II conocido como **migración tipo III** o migración acelerada. En este régimen los planetas con masas intermedias (similares a la de Saturno) inmersos en discos masivos abren un surco parcial en el gas que genera una tasa de migración muy alta (Masset & Papaloizou, 2003).

Algo importante en los procesos anteriormente descritos son las escalas de tiempo características sobre las cuales actúan. En el caso de la migración tipo I el mecanismo hace migrar en $\sim 10^5$ años a un planeta con $1 M_{\oplus}$, en la migración tipo II este proceso es del orden de $\sim 3 \times 10^5$ años y en el caso de la migración tipo III es de 10^3 años. En todos los casos los objetos migran hacia dentro en un tiempo que es más corto a la vida del disco protoplanetario comprometiéndolo la supervivencia de los planetas. Así, uno de los mayores retos de los estudios de formación planetaria consiste en hallar mecanismos que sean capaces de disminuir de forma significativa la tasa de migración o bien, revertirla para permitir la formación planetaria.

En este trabajo nos hemos enfocado en la evolución de los protoplanetas durante el régimen lineal. En este régimen, una propuesta para disminuir la tasa de migración ha sido considerar en los modelos los efectos térmicos existentes en la interacción entre los protoplanetas y su disco. Estudios recientes han mostrado que, al añadir difusividad térmica finita al modelo del disco y tomar en cuenta la liberación de calor del embrión por la acreción de material, se forman en torno al planeta estructuras sobre o subdensas que agregan una componente a la interacción comparable en magnitud con la dada por migración tipo I (Benítez Llambay et al., 2015; Lega et al., 2014). Además, analíticamente se ha estudiado que si el embrión supera una luminosidad crítica, la torca térmica puede contrarrestar la torca negativa que lleva a la migración hacia el cuerpo central y revertirla (Masset, 2017) y excitar al resto de los elementos orbitales (Fromenteau & Masset, 2019; Masset & Velasco Romero, 2017; Velasco Romero & Masset, 2019). Por esto, la incorporación de las interacciones térmicas en el estudio de la formación planetaria podría cambiar profundamente el entendimiento de la etapa de crecimiento oligárquico.

1.2. Objetivos y estructura de la tesis

Debido al alto costo computacional asociado a las simulaciones hidrodinámicas, en este trabajo estudiamos la evolución orbital de planetas sujetos a las interacciones con el disco con simulaciones de N-cuerpos. Por ello, el objetivo de este trabajo fue implementar el efecto de la componente gaseosa

del disco sobre la órbita de un embrión planetario como fuerzas externas en el integrador IAS15 de la paquetería de N-cuerpos REBOUND (Rein & Liu, 2012; Rein & Spiegel, 2015). Un código de N-cuerpos reproduce las trayectorias (posiciones y velocidades) de N objetos con masas $m_1, m_2, \dots, m_N$ y vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ resolviendo la siguiente ecuación de movimiento para cada partícula

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

con $i, j = 1, 2, \dots, N$. Así, nuestra implementación consistió en hacer que la ecuación de movimiento que el código resuelve se convierta en

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{F}_{\text{disco}}}{m_i}$$

donde $\mathbf{F}_{\text{disco}}$ contiene las distintas fuerzas que describen a las interacciones planeta-disco.

Con esto estudiamos la evolución orbital de embriones planetarios de distintas masas explorando la forma en que el semieje mayor a , la excentricidad e y la inclinación i evolucionan según las condiciones iniciales de la órbita. Una vez que estudiamos cómo la componente gaseosa del disco protoplanetario moldea las órbitas, estudiamos la evolución de un enjambre de embriones que no sólo se encuentra sujeto a su interacción con el disco protoplanetario: sus órbitas también se ven afectadas por las perturbaciones gravitacionales entre ellos.

En el capítulo 2 de esta tesis presentamos una revisión bibliográfica sobre los estudios analíticos tanto de la evolución orbital ante las interacciones gravitacionales como del impacto de los efectos térmicos y de la retroacción radiativa en la órbita de planetas en formación con la finalidad de poner las simulaciones en contexto. En el capítulo 3 se muestra el proceso que seguimos para implementar las interacciones planeta-disco como fuerzas externas en REBOUND y cómo validamos dicha implementación. En el capítulo 4 nos enfocamos a estudiar la forma en que las interacciones conjuntas modifican la evolución tanto de un planeta individual como de un enjambre de embriones. En el capítulo 5 se resumen las conclusiones y se presenta el trabajo a futuro. Finalmente, en el apéndice A se hace una revisión al problema de Kepler y se estudia la evolución de los elementos orbitales ante fuerzas externas mientras que en el apéndice B se describen de forma somera algunas características de REBOUND.

2

Marco teórico

2.1. Interacciones gravitacionales

En los textos clásicos de [Goldreich & Tremaine \(1979, 1980\)](#) se muestra que el semieje mayor de un planeta inmerso en un disco cambia dramáticamente en tiempos menores que el tiempo de vida del disco, efecto después llamado migración planetaria. A partir de estos trabajos se han dedicado grandes esfuerzos en determinar el efecto que tiene la presencia del planeta sobre el disco en función de la masa del planeta y de distintos parámetros del disco. En dichos trabajos se aprovechaba que en el régimen lineal se puede considerar la respuesta del disco como una pequeña perturbación, lo que permite linealizar las ecuaciones de Euler con respecto al cociente entre la masa del planeta y la estrella m/M (lo que hace que los resultados sean válidos sólo para $m \ll M$). Así, el potencial gravitacional del protoplaneta se representa como series de Fourier de la forma

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r, z) \cos [n(\theta - \Omega_p t) + \varphi_n(r, z)]$$

donde hemos adoptado un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) con t la variable temporal y Ω_p , $\Phi_n(r, z)$ y $\varphi_n(r, z)$ son la frecuencia orbital, la amplitud y la fase de cada componente del potencial. Este enfoque permite la reducción del problema a una sola componente $\Phi_n(r, \theta, z, t)$ del potencial

perturbador que rota uniformemente con el sistema.

Por simplicidad, ahora consideraremos un disco de dos dimensiones con el planeta fijo en una órbita circular con Ω_p su frecuencia orbital. Así, cada componente del potencial ejerce una torca sobre el disco

$$\Gamma_n = - \int_{\text{Disco}} \Sigma \mathbf{r} \times \nabla \Phi_n d^2r$$

modificando la densidad superficial Σ del gas y activando una respuesta $-\Gamma_n$ que intercambia momento angular con el planeta. [Goldreich & Tremaine \(1979\)](#) identificaron que las posiciones donde se produce el intercambio del momento angular son resonancias entre el planeta y un elemento de gas orbitando en el disco. Si $\Omega(r)$ es la frecuencia orbital del gas y $\kappa(r)$ es la frecuencia epicíclica (en un disco kepleriano se cumple que $\kappa = \Omega$), las posiciones de resonancias deben cumplir alguna de estas condiciones:

$$\kappa(r) = \pm n [\Omega_p - \Omega(r)]$$

Esta condición corresponde a las llamadas **resonancias de Lindblad** Γ_n^{RL} , que son las que forman las estelas espirales. En estas resonancias el perturbador tiende a excitar movimientos epicíclicos en el gas, intercambiando momento angular. [Goldreich & Tremaine \(1979\)](#) encontraron que la expresión para la torca en las resonancias de Lindblad es

$$\Gamma_n^L = - \frac{n\pi^2\Sigma}{rD|dr} \left(r \frac{d\Phi_n}{dr} + \frac{2\Omega}{\Omega - \Omega_p} \Phi_n \right)^2 \quad (2.1)$$

donde Γ_n^L es la torca ejercida por el perturbador y $D = \kappa^2(r) - n^2[\Omega_p - \Omega(r)]^2$ representa la distancia a la resonancia. En un disco kepleriano esta condición conduce a

$$\Omega(r_n^{RL}) = \frac{n}{n \pm 1} \Omega_p$$

que muestra que en las resonancias de Lindblad los elementos de fluido están en resonancias de movimiento propio con el planeta: el elemento de fluido completa $n \pm 1$ órbitas alrededor de la estrella mientras el planeta completa n . Al tomar el signo positivo en la condición, se define la familia de resonancias externas de Lindblad (OLR, por las siglas para *Outer Lindblad Resonance*) mientras que el signo negativo da la interna (ILR).

La torca total de Lindblad, conocida como torca diferencial de Lindblad, es la suma de las torcas en todas sus resonancias, esto es, $\Gamma^L = \sum \Gamma_n^{OL} + \sum \Gamma_n^{IL}$. Así, [Tanaka et al. \(2002\)](#) obtuvieron que Γ^L está dada por

$$\Gamma^L = - (2.34 - 0.099\alpha) \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^6 \Omega_p^4}{c_s^2} \quad (2.2)$$

donde α representa el exponente del perfil de la densidad superficial del disco (ecuación 1.17). Esta torca, que impone el sentido de la migración, generalmente es negativa lo cual hace al planeta emigrar hacia regiones internas.

$$\underline{\Omega_p = \Omega(r)}$$

La segunda condición corresponde a la llamada **resonancia de corrotación**. Esta región es de especial interés ya que los procesos físicos en este mecanismo son bastante diferentes a los que ocurren con las resonancias de Lindblad. Una característica importante de la región de corrotación es que, como la relación de dispersión no permite la excitación de ondas en esta región, sólo pueden existir ondas de densidad evanescentes y no se puede transportar momento angular a través de ellas. Goldreich & Tremaine (1979) encontraron que la torca de corrotación Γ_n^{CR} es proporcional al cuadrado del potencial perturbador Φ_n y al gradiente de vortensidad $\frac{d}{dr} \left(\frac{\Sigma}{B} \right)^1$, es decir,

$$\Gamma_n^{CR} = \frac{\pi^2 n}{2} \left[\frac{\Phi_n^2}{d\Omega/dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Sigma}{B} \right) \right] \quad (2.3)$$

donde $B = (1/2r) \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)$ es la segunda constante de Oort. El término entre corchetes se evalúa en el radio coorbital. Para un disco protoplanetario con $\Sigma \propto r^{-\frac{3}{2}}$ (como en la MMSN), $B \propto r^{-\frac{3}{2}}$ por lo que el término Σ/B en 2.3 se vuelve constante. Esto hace que la torca de corrotación se cancele, lo que se le conoce como saturación de la torca. La saturación de la torca de corrotación se puede ver como sigue: cuando la viscosidad del disco es cercana a cero, la vortensidad se conserva a lo largo de una trayectoria del elemento fluido y ésta se redistribuye permitiendo que incluso una cantidad infinitamente pequeña de viscosidad pueda hacerla uniforme.

De esta manera el mecanismo empleado para evitar la saturación de la torca de corrotación es la viscosidad, la cual por medio de torcas inyecta momento angular adicional sobre la región a la vez que sostiene el gradiente de vortensidad. Tanaka et al. (2002) realizaron una estimación de la torca de corrotación no saturada

$$\Gamma^{CR} = (0.976 - 0.64\alpha) \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^6 \Omega_p^4}{c_s^2} \quad (2.4)$$

con α el exponente del perfil de la densidad superficial del disco.

Con un proceso similar al anteriormente descrito, suponiendo que el disco es isotérmico, Tanaka et al. (2002) y Tanaka & Ward (2004) obtuvieron expresiones semianalíticas que describen la tasa de cambio del semieje mayor de planetas y la del resto de los elementos orbitales (figura 2.1).

¹La vortensidad (del inglés *vortensity*) es la componente vertical de la vorticidad dividida entre la densidad superficial.

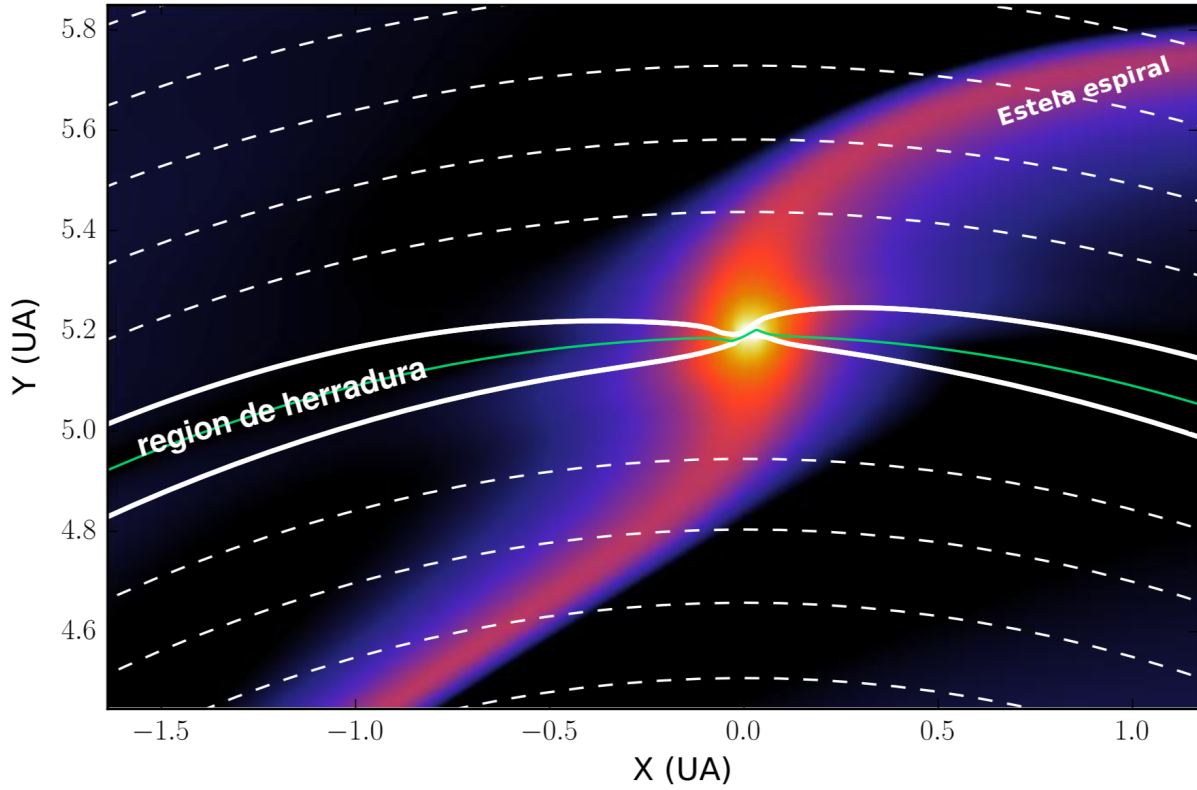


Figura 2.1: Representación cartesiana de la perturbación del campo de densidad en el plano ecuatorial por la presencia del planeta. La estela espiral generada por el planeta es claramente visible (figura de Benítez Llambay, 2015).

2.1.1. Evolución de una órbita circular

Tanaka et al. (2002), asumiendo que las órbitas son circulares y coplanares con el disco protoplanetario, obtuvieron la torca total ejercida sobre el planeta usando que la perturbación neta puede tratarse como una superposición lineal de resonancias individuales. Por ende, tomaron todas las contribuciones de las resonancias de Lindblad y corrotación mediante $\Gamma = \sum \Gamma^L + \sum \Gamma^{CR}$. Así, con 2.2 y 2.4, la expresión para la torca total sobre el planeta es

$$F_{\theta, G, c} = -(1.364 + 0.541\alpha) \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^5 \Omega_p^4}{c_s^2} \quad (2.5)$$

donde α es la pendiente del perfil de la densidad superficial (ecuación 1.17).

La ecuación 2.5 es la responsable del cambio del semieje mayor hacia regiones internas del disco

protoplanetario. Si se define la escala temporal de evolución (ver ecuación A.73) como

$$\tau_{G, c} = -\frac{M^2 c_s^4}{m \Sigma a^6 \Omega_p^5} \left[(1.364 + 0.541 \alpha)^{-1} \left(\frac{a \Omega_p}{c_s} \right)^2 \right] \quad (2.6)$$

usando la ecuación A.75 vemos que el semieje mayor de la órbita evoluciona como

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{\tau_{G, c}} \quad (2.7)$$

lo cual muestra que el planeta migra hacia las regiones internas del disco.

2.1.2. Evolución de una órbita excéntrica e inclinada

Posteriormente, Tanaka & Ward (2004) extendieron su trabajo al caso de $e, i \neq 0$. Suponiendo que la excentricidad y la inclinación de la órbita son más pequeñas que la relación de aspecto del disco, descompusieron la perturbación en tres componentes: las ondas generadas por un planeta en órbita circular y en el plano (como en el caso anterior), las ondas formadas ante la presencia de una excentricidad no nula y las ondas asociadas a la inclinación. Naturalmente, las ondas de excentricidad se originan a partir del movimiento epicíclico del planeta en el plano ecuatorial del disco, mientras que las ondas asociadas a la inclinación se forman por el movimiento del planeta normal al plano ecuatorial. Con esto, encontraron que las componentes de la fuerza a la que se ve sujeto el planeta está dada por

$$\begin{aligned} F_{r, G, ei} &= e \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} (+0.057 \cos f + 0.176 \sin f) \\ F_{\theta, G, ei} &= e \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} (-0.868 \cos f + 0.325 \sin f) \\ F_{z, G, ei} &= i \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} (-1.088 \cos \vartheta - 0.871 \sin \vartheta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde f es la anomalía verdadera y $\vartheta = \omega + f$ es el argumento de la latitud.

Las expresiones mostradas en 2.8 definen una escala temporal de evolución (ver A.74) dada por

$$\tau_{G, ei} = \frac{M^2 c_s^4}{m \Sigma a^6 \Omega_p^5} \quad (2.9)$$

Con $\tau_{G, ei}$ y las expresiones A.76, A.77, A.78 y A.79 se obtiene que la evolución de los elementos orbitales

sigue

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{0.780}{\tau_{G, ei}} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = -\frac{0.544}{\tau_{G, ei}} \quad (2.11)$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = -\frac{0.4355}{\tau_{G, ei}} \quad (2.12)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = +\frac{0.732}{\tau_{G, ei}} \quad (2.13)$$

las cuales muestran que la excentricidad y la inclinación del planeta se amortiguará de forma exponencial mientras que la longitud del nodo ascendente y el argumento del periastro evolucionarán de forma lineal (ψ rota en sentido retrógrado mientras que ω progresa).

2.2. Interacciones térmicas

La suposición de disco isotérmico se relajó cuando se hizo evidente que la termodinámica juega un papel importante en las interacciones planeta-disco. Inicialmente los trabajos que incluían la termodinámica del disco estuvieron enfocados en estudiar los efectos no lineales de las interacciones usando simulaciones numéricas y estuvieron enfocados ya sea en la evolución orbital de planetas gigantes o bien, en los efectos no lineales en la torca de corrotación. En este trabajo nos enfocamos en dos mecanismos que recientemente han sido de interés:

- **Los efectos térmicos.** En estos se añade difusividad térmica finita χ al modelo del disco, lo cual permite la difusión de calor mediante transferencia radiativa entre las parcelas del gas del disco protoplanetario (Pollack et al., 1996).
- **La retroacción radiativa.** En esta se estudia el impacto de la liberación de energía en el disco por planetas que están acretando material. Naturalmente, las estructuras que se forman por la inyección de calor en el disco tienen una retroalimentación en la órbita del planeta.

El primer trabajo que estudió uno de estos mecanismos fue el de Lega et al. (2014). Ellos estudiaron con simulaciones hidrodinámicas el primer caso: al añadir difusividad térmica finita χ , observaron que en la vecindad de un planeta en órbita circular se forman lóbulos fríos, densos y asimétricos. Vieron que la presencia de los lóbulos ejerce mareas sobre el planeta comparables en magnitud a las de las ondas de densidad espirales vistas en el caso clásico. La presencia de los efectos térmicos y la retroacción radiativa en conjunto fue estudiada por primera vez por Benítez Llambay et al. (2015). Ellos supusieron que, ya que los planetas en formación deben ser objetos luminosos como consecuencia del intenso bombardeo

de material al cual se ven sujetos, era natural también tomar en cuenta la inyección de energía térmica al disco y su retroacción sobre la órbita del planeta. Encontraron que, en torno a planetas del orden de masas terrestres en órbita circular, aparecen lóbulos calientes, subdensos y asimétricos similares a los encontrados por [Lega et al. \(2014\)](#) que pueden revertir el escenario de migración mostrado por [Tanaka et al. \(2002\)](#) (es decir, migración tipo I).

Posteriormente, [Eklund & Masset \(2017\)](#) realizaron un estudio de seguimiento de los experimentos hechos por [Benítez Llambay et al. \(2015\)](#) relajando la suposición de órbita circular y vieron que la órbita del planeta se volvía rápidamente excéntrica e inclinada en contraste. Casi simultáneamente [Chrenko et al. \(2017\)](#), con simulaciones hidrodinámicas, observaron que el cambio en la temperatura del gas por la acreción del material crea una estela cometaria caliente y subdensa de gas detrás del planeta que excita su excentricidad.

Como en el caso gravitacional, para atacar de forma analítica este problema se hacen perturbaciones lineales en las ecuaciones de Euler. Las ecuaciones de continuidad y movimiento establecen que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + 2\Omega_p \mathbf{u}_z \times \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla (\Phi_t + \Phi_p) \quad (2.15)$$

con ρ la densidad, p la presión, $\mathbf{V}$ la velocidad del gas, $\Omega_p \mathbf{u}_z$ el vector de rotación, con magnitud Ω_p , del marco de referencia en rotación y Φ_p y Φ_t los potenciales del planeta y de marea donde Φ_t se aproxima como

$$\Phi_t = -q\Omega_p^2 (x - x_p)^2 + \frac{1}{2}\Omega_p^2 z^2$$

con q un número adimensional que cuantifica la cizalla (en discos keplerianos $q = \frac{3}{2}$).

La introducción de las interacciones térmicas se hace en la ecuación de la densidad de energía interna,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{V}) = -p \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{F}_H + S \quad (2.16)$$

S es un término fuente que representa a la inyección de energía en el gas por la luminosidad del planeta mientras que $\mathbf{F}_H$ representa al flujo de calor dado por

$$\mathbf{F}_H = -\rho \chi \nabla \left(\frac{E}{\rho} \right)$$

con χ la difusividad térmica.

Con este planteamiento, [Masset \(2017\)](#), [Fromenteau & Masset \(2019\)](#), [Masset & Velasco Romero](#)

(2017) y Velasco Romero & Masset (2019) obtuvieron expresiones semianálíticas que describen la tasa de cambio del semieje mayor de planetas y la del resto de los elementos orbitales en diferentes regímenes de evolución (figura 2.2).

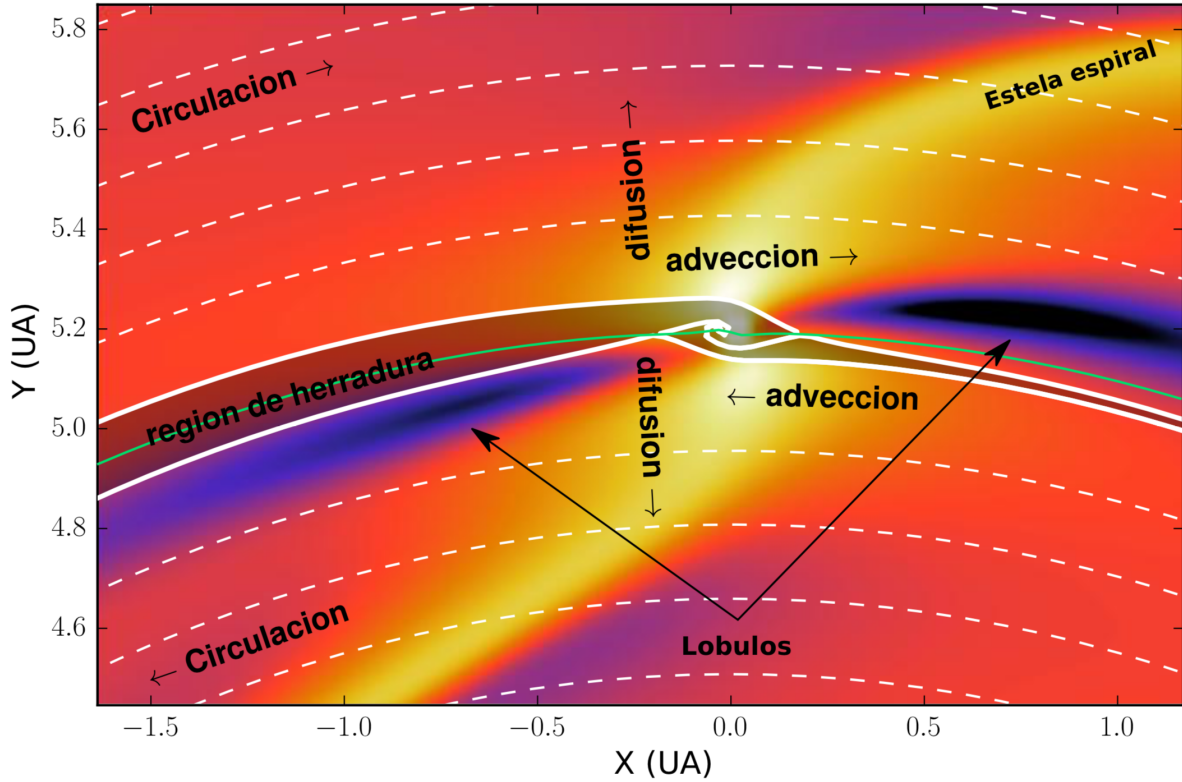


Figura 2.2: Representación cartesiana de la perturbación del campo de densidad en el plano ecuatorial por la presencia del planeta. En esta figura se puede observar la asimetría de los lóbulos, en este caso subdensos, generados por el planeta. De esta asimetría nace la torca térmica (figura de Benítez Llambay, 2015).

2.2.1. Evolución de una órbita circular

Trabajando estas expresiones y suponiendo que $e = i = 0$ Masset (2017) encontró prescripciones analíticas para describir el impacto de los efectos térmicos en la órbita de un protoplaneta. Para hacerlo, separó el problema en dos casos: en el primero el planeta no es luminoso y por ende no inyecta calor en su vecindad mientras que en el segundo se usó que $L \neq 0$. Así, la evolución del semieje mayor del planeta será la suma de ambos escenarios. Cuando el planeta no es luminoso la fuerza a la que se encuentra sujeto el planeta es

$$F_{\theta, T, c} = -\frac{0.322x_p GmL_c (\gamma - 1)}{c_s^2} \left[\left(\frac{y}{x} \right)^3 q\Omega_p \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

donde $x_p = \eta h^2 a$ es la distancia del planeta a su corrotación (el lugar donde el material del disco corrota con el centro guía del planeta), $\eta = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta+3}{6}$, γ el índice adiabático, c_s la velocidad del sonido adiabática y L_c es una cantidad conocida como luminosidad crítica dada por la expresión

$$L_c = \frac{4\pi G m \chi \rho_0}{\gamma} \quad (2.18)$$

En el caso en el que el objeto tiene una luminosidad finita su evolución está sujeta a

$$F_{\theta, \tau, c} = \frac{0.322 x_p G m L (\gamma - 1)}{c_s^2} \left[\left(\frac{\gamma}{\chi} \right)^3 q \Omega_p \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Sumando la contribución de 2.17 y 2.19 y haciendo un poco de álgebra (usando que $c_s^2 = \gamma H^2 \Omega_p^{22}$, $\rho_0 = \Sigma(r) / \sqrt{2\pi} H$ y que la escala de longitud de la región en la que tiene impacto la liberación de calor es $\lambda = (\chi / q \Omega_p \gamma)^{\frac{1}{2}}$) se tiene que

$$F_{\theta, \tau, c} = (\ell - 1) \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} \right] \left[0.644 (2\pi)^{\frac{1}{2}} \gamma (\gamma - 1) \frac{H}{\lambda} \eta h^2 \right] \quad (2.20)$$

donde hemos definido la luminosidad adimensional ℓ como $\ell = \frac{L}{L_c}$.

La expresión 2.20 evidenció que la naturaleza de los lóbulos vistos por Lega et al. (2014) y Benítez Llambay et al. (2015) era la misma y que en ambos casos las torcas generadas por 2.20 introducen el cambio en el semieje mayor del planeta: si el planeta no inyecta energía en el disco, el efecto de la difusión térmica es suavizar el pico de entalpía en la vecindad del planeta resultando en la aparición de los lóbulos fríos y densos reportados por Lega et al. (2014); cuando el planeta es lo suficientemente luminoso, el calor liberado en el disco forma los lóbulos calientes de baja densidad vistos por Benítez Llambay et al. (2015).

Usando la expresión A.73 definimos la escala temporal de evolución del caso circular como

$$\tau_{\tau, c} = \frac{M^2 c_s^4}{m \Sigma a^6 \Omega_p^5} \left[\frac{\lambda}{0.644 (2\pi)^{\frac{1}{2}} \gamma (\gamma - 1) H \eta h^2} \right] \quad (2.21)$$

que conduce a, usando la expresión A.75, la expresión para la evolución del semieje mayor

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{\tau_{\tau, c}} (\ell - 1) \quad (2.22)$$

²Una ligera modificación a la expresión mostrada en 1.13.

2.2.2. Evolución de una órbita excéntrica e inclinada

El estudio analítico de la evolución de los demás elementos orbitales no puede hacerse de forma directa como en el caso gravitacional ya que la estructura de las regiones sobre o subdensas dependen de la órbita del planeta. Para ello, hay que tomar en cuenta que un disco protoplanetario es un disco en rotación diferencial: las parcelas de gas en las regiones internas del disco rotan más rápidamente que las regiones externas. Si nos colocamos en un sistema de referencia que corrote con el planeta, observaremos que en su entorno el perfil de las líneas de velocidad forman una cizalla. La importancia de dicha cizalla dependerá de la velocidad orbital del planeta: cuando el planeta está casi corrotando con el gas del disco la velocidad del flujo del gas en el referencial del planeta está muy cizallado mientras que, si la velocidad del planeta es bastante distinta a la del gas, las pequeñas variaciones de las líneas de corriente son poco relevantes.

Con lo anterior, vemos que a partir de la velocidad del planeta respecto al gas el problema cambia de régimen dinámico. Esto se puede ver a través de escalas de tiempo que definen cada umbral (Masset & Velasco Romero, 2017),

$$\tau_s = \frac{2}{3\Omega_p} \quad (2.23)$$

$$\tau_d = \frac{\chi}{\gamma^2 v'^2} \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{v}'$ es la velocidad del planeta en el referencial del gas, la cual es proporcional a la excentricidad de la órbita. Así, τ_s es la escala temporal de evolución en el caso cizallado y τ_d es la del caso donde el planeta ve al gas como un viento.

2.2.2.a. Régimen dominado por cizalla ($\tau_s < \tau_d$)

Este régimen, que corresponde a planetas con excentricidades muy pequeñas, está asociado a la formación de los lóbulos vistos por Lega et al. (2014) y Benítez Llambay et al. (2015). Analíticamente este caso fue estudiado por Fromenteau & Masset (2019), quienes obtuvieron que la fuerza a la que está sujeto el planeta es

$$\begin{aligned} F_{r, \text{T, ei}, 1} &= e(\ell - 1) \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} \right] \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma(\gamma - 1) \frac{H}{\lambda} \right] (-0.507 \cos f + 1.440 \sin f) \\ F_{\theta, \text{T, ei}, 1} &= e(\ell - 1) \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} \right] \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma(\gamma - 1) \frac{H}{\lambda} \right] (0.737 \cos f + 0.212 \sin f) \\ F_{z, \text{T, ei}, 1} &= i(\ell - 1) \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} \right] \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma(\gamma - 1) \frac{H}{\lambda} \right] (1.160 \cos \vartheta + 0.646 \sin \vartheta) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando A.74 la escala temporal de evolución se define como

$$\tau_{\text{T, ei}} = \frac{M^2 c_s^4}{m \Sigma a^6 \Omega_p^5} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\gamma (\gamma - 1) H} \right] \quad (2.26)$$

lo cual permite obtener que las tasas de cambio de los elementos orbitales son

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = + \frac{1.457}{\tau_{\text{T, ei}}} (\ell - 1) \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = + \frac{0.580}{\tau_{\text{T, ei}}} (\ell - 1) \quad (2.28)$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = + \frac{0.323}{\tau_{\text{T, ei}}} (\ell - 1) \quad (2.29)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = + \frac{0.142}{\tau_{\text{T, ei}}} (\ell - 1) \quad (2.30)$$

que muestran que en este régimen todas estas cantidades crecen si $\ell > 1$ y se disminuyen si $\ell < 1$: la excentricidad y la inclinación lo hacen de forma exponencial y la longitud del nodo ascendente y el argumento del periastro de forma lineal.

2.2.2.b. Régimen dominado por viento ($\tau_s > \tau_d$)

En este régimen el planeta tiene excentricidades grandes por lo que las estructuras características de este caso son los vientos opuestos a la dirección del movimiento orbital del planeta (como los vistos por Chrenko et al., 2017). Este caso fue abordado analíticamente por Masset & Velasco Romero (2017) y Velasco Romero & Masset (2019) y obtuvieron que en este régimen la fuerza es de la forma

$$\mathbf{F}_{\text{T, ei, 2}} = (\ell - 1) \frac{2\pi (\gamma - 1) \rho_0 G^2 m^2}{c_s^2} g(\mathcal{M}) \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|} \quad (2.31)$$

La expresión 2.31 está en términos de la función $g(\mathcal{M})$ que depende del número de Mach $\mathcal{M} = v'/c_s$ del objeto. De forma aproximada, esta función está dada por

$$g(\mathcal{M}) = \begin{cases} 1 + (\xi - 1) \mathcal{M}^2 & \text{si } \mathcal{M} \leq 1 \\ \frac{\xi}{\mathcal{M}^2} & \text{si } \mathcal{M} > 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

donde

$$\xi = \log \left\{ \exp \left[-1.96 - \log \left(\frac{r_{\text{Bondi}} \max(v', c_s)}{4\chi} \right) \right] + 1 \right\} \quad (2.33)$$

En este régimen no existe una solución analítica que describa la evolución de la órbita del proto-planeta, sin embargo, esta fuerza es capaz de modificar la excentricidad e , la inclinación i , la longitud del nodo ascendente ψ y el argumento del periastro ω .

2.2.3. El desvanecimiento de la fuerza térmica

La última característica importante sobre las fuerzas térmicas es que, en simulaciones hidrodinámicas, se ha observado que su impacto comienza a desvanecerse cuando $m > M_c$, donde la masa crítica M_c está dada por

$$M_c = \frac{\chi c_s}{G} \quad (2.34)$$

con G la constante de gravitación universal. Cuando la masa del planeta es mucho más pequeña que M_c se garantiza que la energía liberada por el planeta en su vecindad inmediata llegue al exterior de su esfera de Bondi (cuyo radio es Gm/c_s^2) donde el análisis lineal es válido, como un exceso de energía interna. Sin embargo, esta suposición pierde validez cuando $m \approx M_c$. En primera aproximación, con $m \ll M_c$ pueden introducirse en 2.20, 2.25 y 2.31 definiendo

$$C = \frac{M_c}{m + M_c} \quad (2.35)$$

y las tres fuerzas involucradas en las interacciones térmicas estarán multiplicadas por C .

Los trabajos de [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#) y [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#) han mostrado que en las regiones de formación planetaria en los discos, M_c es del orden de una masa terrestre, aunque este valor puede variar según la posición en el disco y la evolución de éste (por ejemplo, en las simulaciones de [Benítez Llambay et al. \(2015\)](#) $M_c \approx 3 M_\oplus$). La determinación de la masa crítica para un rango amplio de masas no puede realizarse mediante un cálculo con teoría lineal por lo que probablemente requiera de simulaciones hidrodinámicas de alta resolución.

3

Metodología

Los estudios sobre formación planetaria se hacen a partir de trabajo analítico, experimentos numéricos y observaciones: el trabajo teórico ha desarrollado distintos modelos para reproducir las poblaciones y arquitecturas de sistemas planetarios y con ayuda de las observaciones de exoplanetas, discos protoplanetarios y del sistema solar mismo se han restringido sus parámetros. Una parte importante del trabajo teórico son las simulaciones, las cuales suelen ser hidrodinámicas (para estudiar la interacciones con el gas del disco) y de N-cuerpos (para estudiar el crecimiento de los sólidos y sus autointeracciones). Ya que el objetivo principal de este trabajo es estudiar la importancia de los efectos térmicos en la evolución orbital de los protoplanetas, las simulaciones hidrodinámicas serían ideales para atacar este problema. Sin embargo, éstas son computacionalmente costosas ya que requieren alta resolución tanto en la vecindad del planeta como en el disco, además de requerir muchas órbitas para observar las interacciones entre el planeta y el disco. Por ello, en este trabajo aprovechamos que existen los formalismos que vimos en el capítulo 2 los cuales reproducen las interacciones en función de los distintos parámetros del disco (densidad superficial, temperatura, difusividad térmica) y del planeta (masa y luminosidad). Estas fueron implementadas en un integrador de N-cuerpos como fuerzas externas que perturban las órbitas de los embriones planetarios.

En la primera sección de este capítulo presentamos una revisión bibliográfica sobre las características de los códigos de N-cuerpos elaborada a partir de los trabajos de [Aguilar \(1992\)](#) y [Schäfer \(2018\)](#).

En la segunda damos una breve explicación sobre el diseño y especificaciones para hacer nuestras simulaciones. En la tercera mostramos cómo realizamos la validación de la implementación de las interacciones planeta-disco en el código de N-cuerpos empleado (REBOUND).

3.1. Características de los códigos de N-cuerpos

En astrofísica, las simulaciones de N-cuerpos son una herramienta crucial que permite estudiar la evolución dinámica de distintos sistemas que van desde los de pocas partículas como el Tierra-Sol-Luna hasta la evolución de la estructura a gran escala del universo. La meta con estos experimentos numéricos es conocer las posiciones y velocidades a través del tiempo de un sistema de N partículas que interactúan mediante la Ley de Gravitación de Newton. Esto significa que el código de N-cuerpos debe reproducir las trayectorias (posiciones y velocidades) de N objetos con masas $m_1, m_2, \dots, m_N$ y vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ integrando la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (3.1)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, N$. Las dos partes más importantes de un código N-cuerpos son:

Un método que determina las fuerzas

Los métodos pueden ser directos o aproximados. En las simulaciones **directas** las fuerzas entre las N partículas se determinan numéricamente *sin*¹ hacer aproximaciones, lo cual tiene la ventaja de que se toma la forma correcta de las fuerzas. Esto se hace a costa de un costo computacional muy alto: el tiempo de cómputo crece como N^2 .

Para evitar esto pueden emplearse métodos **aproximados** que determinan las fuerzas usando algoritmos cuya ventaja radica en que, ya que el costo computacional es menor, puede manejar un mayor número de partículas a cambio de una baja resolución espacial. Algunos métodos aproximados usados con frecuencia en astrofísica son:

- Código de árbol. Existen dos tipos de códigos de árbol: los octales y los de árbol binario. En los primeros se divide el volumen total en celdas y solo las interacciones entre las partículas de las celdas cercanas se resuelven individualmente: las partículas en las celdas distantes pueden tratarse colectivamente como una sola partícula masiva centrada en el centro de masa de la celda. Los códigos binarios identifican las parejas más cercanas de partículas y son sustituidas por

¹Estos métodos pueden dar lugar a problemas cuando hay encuentros muy cercanos entre las partículas, lo cual genera aceleraciones muy grandes que la mayoría de los algoritmos tienen problemas en tratar. Por esto, este tipo de códigos suelen ser utilizados con una fuerza que introduce un suavizamiento usando un potencial tipo Plummer en lugar de uno de Kepler.

sus centros de masa al pasar al siguiente nivel de la jerarquía del árbol. Este proceso se hace sucesivamente hasta llegar al centro de masa de todo el sistema en la base del árbol. En ambos casos se reduce drásticamente el número de cálculos a efectuar, el cual es del orden $N \log N$.

- Mallas de partículas. En éstas se divide el espacio de simulación en una mallas tridimensional sobre la que se interpola la densidad de masa de las partículas determinando el potencial generado resolviendo la ecuación de Poisson. El tiempo de cómputo de estas simulaciones es del orden $M \log M$ con M el número de nodos en la malla empleada, sin embargo, el tamaño de las mallas puede adaptarse para reducir aún más el número de cálculos.
- P³M o códigos de árbol PM. Estos son códigos híbridos que utilizan la aproximación de malla de partículas para los objetos distantes y algoritmos más exactos, como los códigos de árbol, para las partículas cercanas.

Un integrador que resuelva las ecuaciones de movimiento

Las tres características básicas a elegir en un integrador son

- Si el **paso de integración** será **fijo** o **adaptativo**. La ventaja del último radica en que el código en cada paso en la integración determina el tamaño de paso óptimo para determinar el siguiente conjunto de posiciones y velocidades. Al crear un integrador con paso adaptativo se busca poner un límite a la magnitud de cambio de velocidad en un paso de integración dado. Así, lo que se busca es que el integrador de pasos que escalen como $\Delta t \propto \Delta v/a$ donde a es la aceleración. Sin embargo, esto es algo inestable, por lo que se emplean algoritmos que escalan como $\Delta t \propto a/\dot{a}$ o incluso como $\Delta t \propto \sqrt{a/\ddot{a}}$.
- Si el **esquema de integración** será de **bajo** o **alto orden**, lo cual está asociado al número de cálculos que el código usa para determinar las posiciones y velocidades del siguiente paso temporal. El orden de integración afecta al error de truncamiento que escala $\propto (\Delta t)^n$, con n el orden del integrador. Entre mayor es el orden del integrador, más rápido disminuye el error de truncamiento al disminuir el tamaño del paso. Sin embargo, esto tiene un límite pues al aumentar el orden el número de cálculos para dar un paso aumenta, lo cual hace que aumente el error de redondeo y la elección del orden de integración debe mantener un balance entre ambos.
- Si será **simpléctico** o **no**. En los integradores simplécticos se cumple que cada paso de integración es una transformación canónica. Estos integradores poseen como cantidad conservada un Hamiltoniano ligeramente perturbado respecto al original dando lugar a pequeñas fluctuaciones en la energía. Esta característica permite usar este tipo de integradores para estudiar la evolución de sistemas dinámicos por periodos largos.

La elección entre estos integradores radica en la diferencia entre precisión y exactitud en integraciones numéricas: la exactitud se refiere a la discrepancia entre los resultados verdaderos y aproximados, mientras que la precisión está asociada a la dispersión que obtenemos en los resultados a medida que variamos un parámetro en la integración. Así, un integrador simpléctico es muy exacto aunque sea de bajo orden mientras que un integrador de alto orden es muy preciso.

Como vemos, la elección entre los métodos y los integradores depende en gran medida de la física del sistema en estudio. Por ejemplo, los códigos directos son ideales para estudiar la dinámica de sistemas con pocas partículas en las cuales las interacciones entre los objetos son importantes mientras que los métodos aproximados se usan cuando el número de partículas es lo suficientemente grande para que los encuentros cercanos sean menos importantes cada vez. Así, los métodos directos se suelen usar para estudiar la evolución de sistemas planetarios, cúmulos estelares y galaxias pequeñas y los aproximados para la dinámica estelar y de galaxias además de simulaciones cosmológicas.

3.2. Diseño de los experimentos

El objetivo de este trabajo fue realizar una implementación en un código de N-cuerpos que permitiera realizar simulaciones que reprodujeran la presencia de la componente gaseosa del disco. Esto se hizo añadiendo al código una rutina que simula la presencia del disco protoplanetario con cálculos semianalíticos con la finalidad de estudiar:

1. El impacto del gas del disco protoplanetario en los elementos orbitales de embriones individuales.
2. Cómo las interacciones planeta-disco en conjunto (gravitacionales y térmicas) afectan la capacidad de un enjambre de embriones para formar objetos más grandes.

Para hacer este tipo de estudios (en general para estudiar la formación, evolución y arquitectura de sistemas planetarios) los códigos más usados son SyMBA (Duncan et al., 1998) que es un código directo y simpléctico, MERCURY (Chambers, 1999) que es un código directo y simpléctico y REBOUND (Rein & Liu, 2012), que incluye una amplia gama de integradores simplécticos o no simplécticos y de paso adaptativo o fijo. Debido a su versatilidad, elegimos usar REBOUND para nuestro trabajo (en el apéndice B se encuentra una breve descripción de esta paquetería).

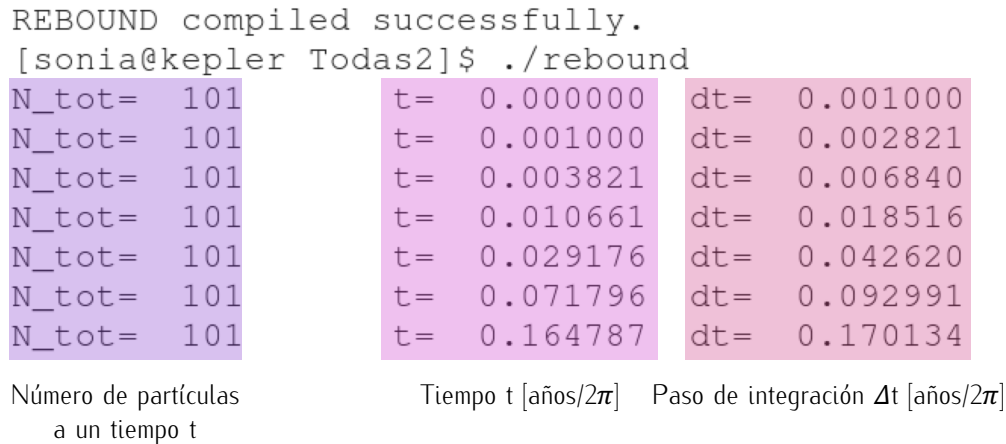
3.2.1. Configuración de nuestros experimentos

Por las características de nuestro problema, la configuración que dimos a REBOUND fue la siguiente:

- Al tratar con pocas partículas (tratamos con 100 partículas en el caso en que incluimos más objetos) podemos invertir el tiempo de cómputo en determinar las fuerzas con precisión usando un método directo (con el módulo `REB_GRAVITY_COMPENSATED`).

- El integrador elegido fue IAS15 por su paso de integración adaptativo y por ser no simpléctico. La primera característica permite al código resolver mejor los encuentros cercanos y por ende, las fusiones entre los cuerpos. La segunda viene de considerar que incluir fuerzas no conservativas en integradores simplécticos hace que esta característica pierda sentido.
- Ya que el paso de integración es adaptativo (permitiendo que Δt se adapte para resolver de forma óptima los encuentros cercanos) elegimos que revisara por colisiones únicamente si hay superposición de partículas en el paso de integración (usando `REB_COLLISION_DIRECT`). Además, escogimos que el producto de las colisiones fueran fusiones, en las que se conserva la masa, el momento lineal y el volumen.
- No incluimos un suavizamiento para resolver la fuerza: el código puede trabajar resolviendo el radio físico de cada partícula.

Adicionalmente configuramos las simulaciones para que el paso de integración inicial fuera de $2\pi \times 10^{-3}$ años ≈ 2.3 días (aunque recordemos que nuestro paso es adaptativo, como se muestra en la figura 3.1) y para que generara un archivo con los datos (masa, posición, velocidad y elementos orbitales de cada objeto) cada 100 años.



REBOUND compiled successfully.		
[sonia@kepler Todas2]\$./rebound		
N_tot= 101	t= 0.000000	dt= 0.001000
N_tot= 101	t= 0.001000	dt= 0.002821
N_tot= 101	t= 0.003821	dt= 0.006840
N_tot= 101	t= 0.010661	dt= 0.018516
N_tot= 101	t= 0.029176	dt= 0.042620
N_tot= 101	t= 0.071796	dt= 0.092991
N_tot= 101	t= 0.164787	dt= 0.170134
Número de partículas a un tiempo t	Tiempo t [años/ 2π]	Paso de integración Δt [años/ 2π]

Figura 3.1: Captura de pantalla de la terminal durante una de nuestras simulaciones. REBOUND puede imprimir en la terminal la información de la simulación a un tiempo dado t . Nuestras salidas en la terminal fueron cada Δt , lo cual nos permitió monitorear el tamaño del paso de integración.

3.2.2. Distribución de los embriones planetarios

Para estudiar el impacto del gas del disco protoplanetario en los elementos orbitales de embriones individuales realizamos varias simulaciones para embriones de distintas masas y con diferentes elementos

orbitales. Las especificaciones de cada uno de los experimentos se describen al presentar los resultados.

Por otro lado, para estudiar el impacto de las interacciones gravitacionales y térmicas en la etapa de crecimiento oligárquico realizamos simulaciones de enjambres de embriones en las que distribuimos $10 M_{\oplus}$ en 100 objetos. Éstos se ubicaron entre 1 y 3 ua (con un semieje mayor que cumple $a \propto r^1$) ya que se estima que en la región interna del disco (con $a \lesssim 2 - 3$ ua) existían unos $10^2 - 10^3$ embriones planetarios al inicio de la etapa de crecimiento oligárquico (de Elía et al., 2013; Ronco & de Elía, 2014). Por otra parte, los modelos de formación planetaria suelen asumir que durante el crecimiento oligárquico las excentricidades de los embriones y planetésimos seguían una distribución de Rayleigh que escalaba como $\sigma_e \propto (m/3 M_{\oplus})^{1/3}$ que para un objeto del orden de $1 M_{\oplus}$ da un valor de $\sigma_e = 0.01$ (Brasser et al., 2016). Además, estos modelos usaban distribuciones de Rayleigh para la inclinación que escalaban como $\sigma_i = \sigma_e/2$ que nos da $\sigma_i = 0.005$ para embriones del orden $1 M_{\oplus}$ (Brasser et al., 2016). Por último, empleamos que $\psi = \omega = f = 0$.

Para dar validez a las simulaciones dejamos evolucionar esta distribución de embriones en un periodo de 1×10^6 años para monitorear cómo se conservaba la energía en un periodo de 1×10^6 años (figura 3.2). Como se observa, el error fraccional de la energía es del orden 10^{-12} y los únicos cambios importantes se presentan cuando hay fusiones entre los objetos ya que en ellas no se conserva la energía.

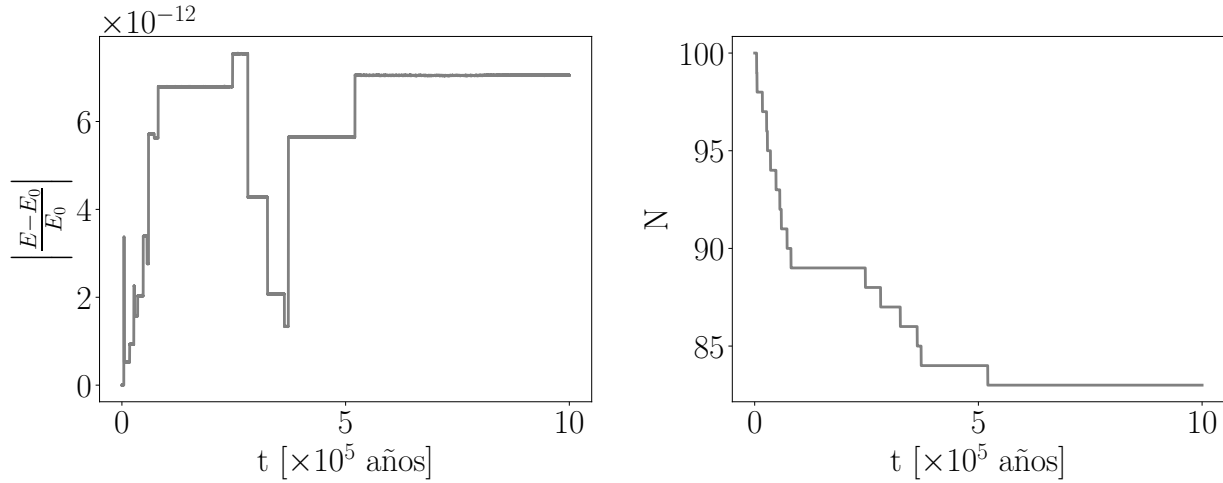


Figura 3.2: Evolución del error fraccional de la energía como función del tiempo.

3.2.3. Introducción de la componente gaseosa del disco como fuerzas externas

Para incorporar las interacciones planeta-disco creamos una función adicional para introducirlas como fuerzas externas usando `additional_forces`. Así, el integrador debía resolver a cada paso la

siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{F}_{\text{disco}}}{m_i} \quad (3.2)$$

con $\mathbf{F}_{\text{disco}}$ una fuerza que incorpora a las interacciones planeta-disco dada por

$$\mathbf{F}_{\text{disco}} = \mathbf{F}_{\text{Grav}} + \mathbf{F}_{\text{Term}} \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{F}_{\text{Grav}} = \mathbf{F}_{\text{G, c}} + \mathbf{F}_{\text{G, ei}}$ serán expresiones estudiadas en 2.1 y $\mathbf{F}_{\text{Term}} = \mathbf{F}_{\text{T, c}} + \mathbf{F}_{\text{T, ei}}$ las mostradas en 2.2. La incorporación de las interacciones en `additional_forces` se hizo en dos bloques: uno contenía las características del disco protoplanetario y en otro concentramos la información sobre las expresiones de las fuerzas.

En el primer bloque, el modelo de disco que usamos es similar al mostrado en 1.1.1.b y los parámetros fueron elegidos para estar en acuerdo con los trabajos encontrados en la literatura (*i.e.*, Benítez Llambay et al., 2015; Eklund & Masset, 2017; Lega et al., 2014), que a su vez son elegidos pensando en los parámetros que se han observado en los discos protoplanetarios. Así, partimos de que el disco protoplanetario se encuentra en torno a una estrella central de masa $M = 1 M_{\odot}$ y su perfil de densidad cumple que

$$\rho(r, z) = \rho_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right]$$

con $\rho_0 = \Sigma(r) / (2\pi)^{\frac{1}{2}} H$. Para estos perfiles empleamos que $H = hr$ con $h = 0.042$ y se supuso que Σ cumple 1.17 con $r_0 = 5.2 \text{ ua}$, $\Sigma_0 = 200 \text{ g/cm}^2 = 2.251 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{ua}^2$ y $\alpha = 1.5$. El valor elegido para la pendiente del perfil de temperatura fue $\beta = 1$. Por último, como asumimos que estamos tratando con un disco radiativo, el valor de la difusividad térmica es $\chi = 4.6 \times 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s} = 1.03 \times 10^{-4} 2\pi \text{ ua}^2/\text{años}$ mientras que la velocidad del sonido cumple que $c_s^2 = \gamma H^2 \Omega_p^2$ con $\gamma = 1.4$.

En el segundo bloque, para garantizar que la introducción de las fuerzas se hizo de forma correcta, usamos en los casos posibles aproximaciones analíticas de la evolución de los elementos orbitales.

3.3. Validación de la implementación

En todo trabajo que involucra simulaciones numéricas una premisa fundamental es mostrar que el código puede realizar las simulaciones correctamente dentro del intervalo de variación de parámetros de interés. Para ello existen distintas técnicas como monitorear cantidades que deben conservarse (como la energía, momento angular, energía de Jacobi, etc.). Ya que en este caso no existen cantidades conservadas

en esta sección realizamos simulaciones en las que apagamos todas las expresiones de las interacciones planeta-disco exceptuando una, la cual comparamos con las predicciones teóricas que se mostraron en el capítulo 2 obtenidas con las expresiones de la subsección A.2.3 del apéndice A. Esto además tiene la ventaja de que nos ayuda a comprender mejor el resultado final.

3.3.1. Interacciones gravitacionales

En la sección 2.1 vimos que la fuerza mostrada en 2.5 conduce a la ecuación 2.7, la cual describe la evolución del semieje mayor del planeta. Haciendo una aproximación a primer orden en t es decir, asumiendo que el término a^4 en $\tau_{G,c}$ permanece constante (lo cual es razonable ya que el cambio en a se nota después de varias órbitas), la evolución del semieje mayor está dada por

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{\tau_{G,c}} \implies a(t) = a_0 \left(1 + \frac{2t}{\tau_{G,c}} \right) \quad (3.4)$$

El resultado de la implementación se muestra en la figura 3.3. En ella se observa que la evolución del semieje mayor sigue fielmente la predicción teórica.

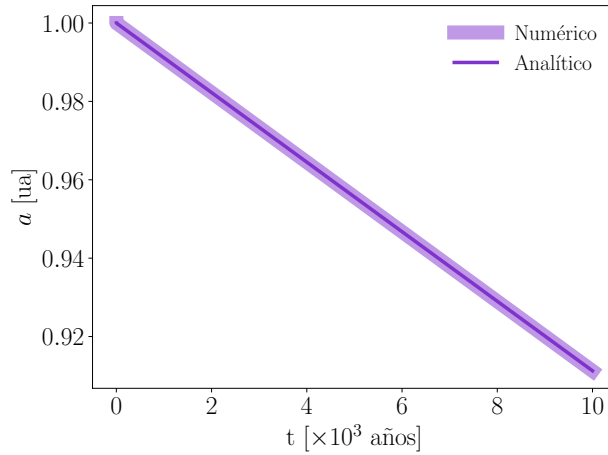


Figura 3.3: Experimento hecho durante 1×10^4 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en Tanaka et al. (2002). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

Por otro lado, la evolución de la órbita por fuerzas como las mostradas en 2.8 siguen el patrón mostrado en 2.10, 2.11, 2.12 y 2.13, es decir,

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{0.780}{\tau_{G,ei}} \implies e(t) = e_0 \exp \left(-\frac{0.780t}{\tau_{G,ei}} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = -\frac{0.544}{\tau_{G,ei}} \implies i(t) = i_0 \exp \left(-\frac{0.544t}{\tau_{G,ei}} \right) \quad (3.6)$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = -\frac{0.4355}{\tau_{G,ei}} \implies \psi(t) = \psi_0 - \frac{0.4355t}{\tau_{G,ei}} \quad (3.7)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = +\frac{0.732}{\tau_{G,ei}} \implies \omega(t) = \omega_0 + \frac{0.732t}{\tau_{G,ei}} \quad (3.8)$$

La implementación de este caso se muestra en la figura 3.4. En este caso la implementación jamás se separa de la predicción teórica.

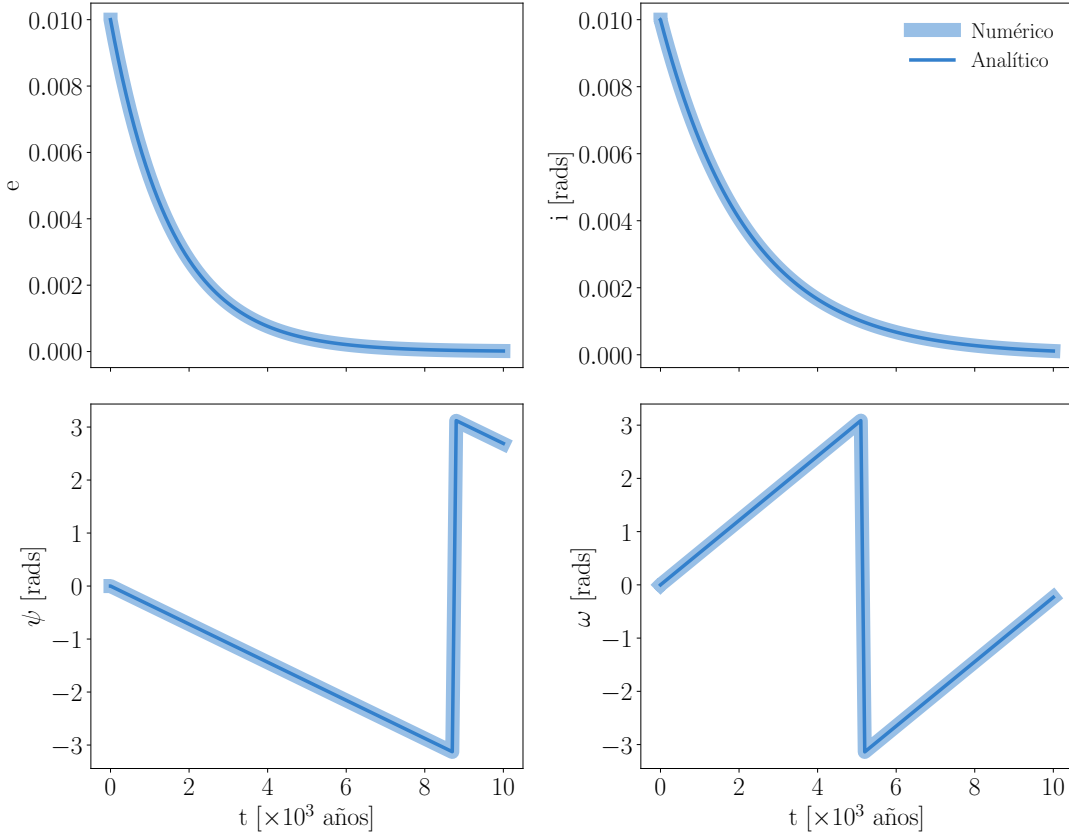


Figura 3.4: Experimento hecho durante 1×10^4 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en Tanaka & Ward (2004). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

La evolución ante la presencia de ambos casos se muestra en la figura 3.5. La predicción teórica mostrada contempla a las ecuaciones 2.7, 2.10, 2.11, 2.12 y 2.13. Como se observa, la evolución del semieje mayor, aún con la presencia de la componente excéntrica e inclinada, sigue el comportamiento del caso circular mientras que la evolución de los demás elementos sigue sólo la del caso excéntrico e inclinado. Las ligeras discrepancias que se observan tanto en la evolución de la longitud del nodo ascendente Ψ y del argumento del periastron ω se deben a errores propios de la integración numérica.

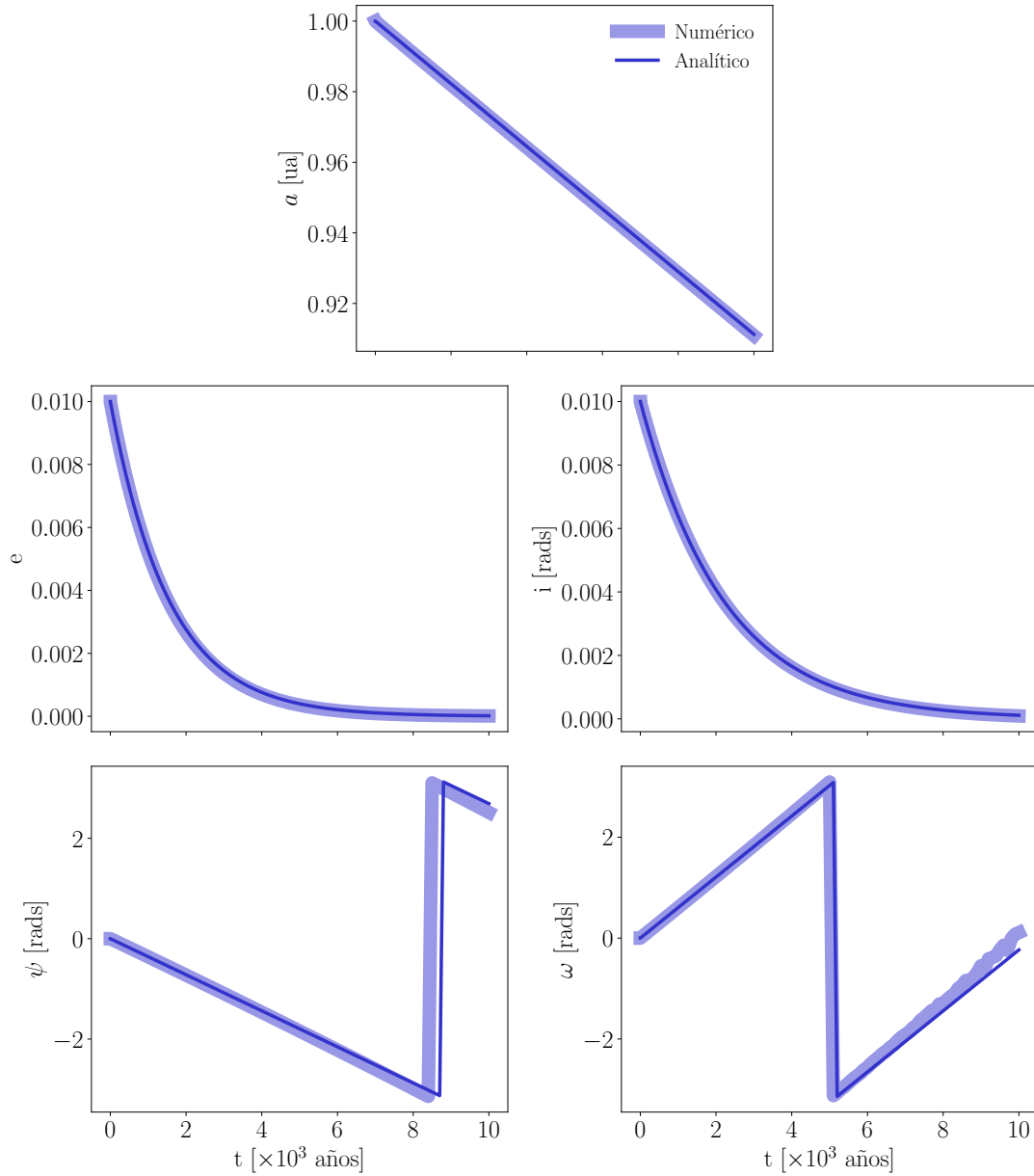


Figura 3.5: Experimento hecho durante 1×10^4 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en Tanaka et al. (2002) y Tanaka & Ward (2004). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

3.3.2. Interacciones térmicas

La implementación del segundo término de 3.3, que representa a las interacciones térmicas, resultó un poco más complicado de implementar debido a la presencia de la luminosidad y la ley de corte para la masa. Por facilidad, en una primera etapa de la implementación consideramos $\ell = 2$ y $C = 1$ y en

la segunda ya incluimos un modelo para ℓ y para C .

Caso con $\ell = 2$ y $C = 1$

La fuerza mostrada en 2.20 conduce a la expresión A.75 que en este caso, haciendo una aproximación a primer orden en t , nos guía a

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{\tau_{T,c}} \implies a(t) = a_0 \left(1 + \frac{2t}{\tau_{T,c}} \right) \quad (3.9)$$

asumiendo que el término de a presente en $\tau_{T,c}$ permanece constante. La implementación se muestra en 3.6. En ella se observa que la evolución del semieje mayor sigue la predicción teórica.

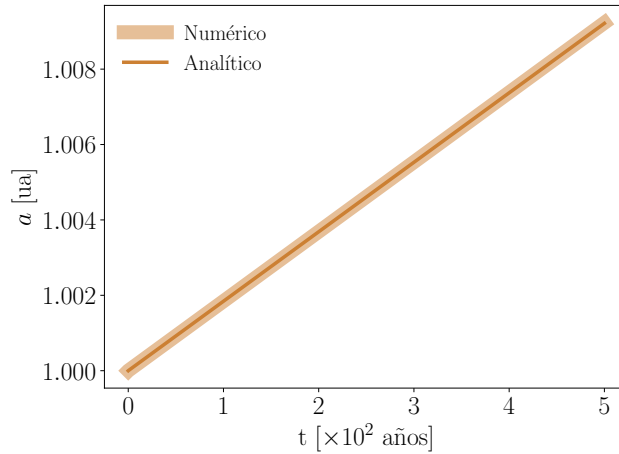


Figura 3.6: Experimento hecho durante 5×10^2 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en [Masset \(2017\)](#). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

Recordemos que para la evolución de la órbita en el caso excéntrico e inclinado tenemos dos fuerzas. De forma individual, la implementación del caso dominado por cizalla mostrado en 2.25 conduce a las expresiones 2.27, 2.28, 2.29 y 2.30

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = + \frac{1.457}{\tau_{T,ei}} \implies e(t) = e_0 \exp \left(+ \frac{1.457t}{\tau_{T,ei}} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = + \frac{0.580}{\tau_{T,ei}} \implies i(t) = i_0 \exp \left(+ \frac{0.580t}{\tau_{T,ei}} \right) \quad (3.11)$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = + \frac{0.323}{\tau_{T,ei}} \implies \psi(t) = \psi_0 + \frac{0.323t}{\tau_{T,ei}} \quad (3.12)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = + \frac{0.142}{\tau_{T,ei}} \implies \omega(t) = \omega_0 + \frac{0.142t}{\tau_{T,ei}} \quad (3.13)$$

La implementación de este caso se muestra en la figura 3.7. Como vemos, ésta no se separa de la predicción teórica.

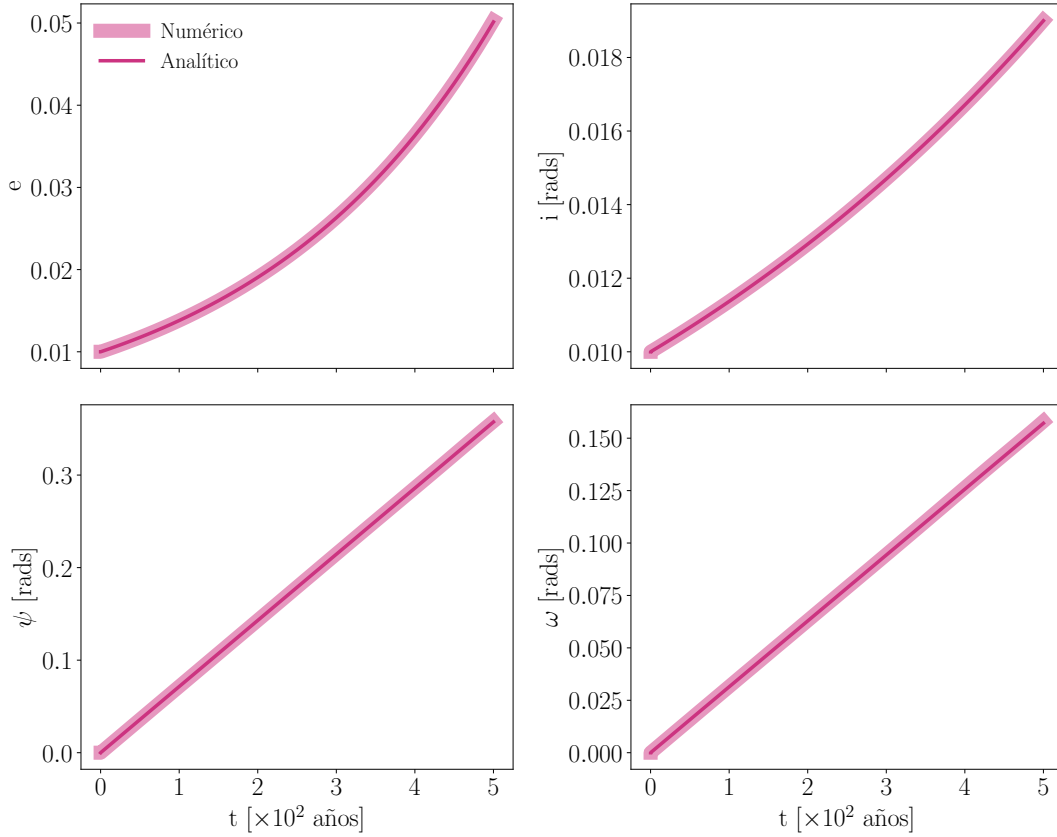


Figura 3.7: Experimento hecho durante 5×10^2 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en [Fromenteau & Masset \(2019\)](#). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

Por la complicada estructura del caso dominado por viento nos fue imposible hacer un modelo analítico para corroborar la evolución del planeta con estas interacciones (mostrada en la figura 3.8). Sin embargo, cuando realizamos la implementación comparamos cuidadosamente con los resultados del trabajo de [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#) y vimos que nuestras simulaciones reproducían los resultados hidrodinámicos.

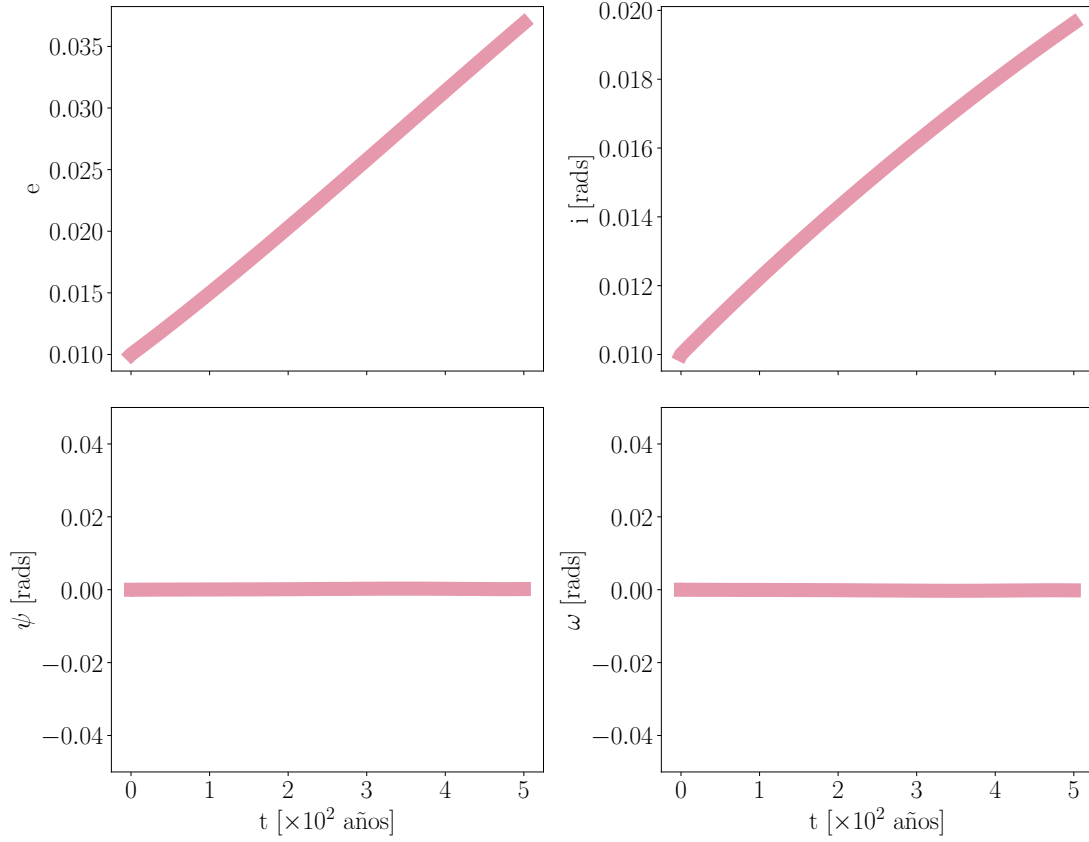


Figura 3.8: Experimento hecho durante 5×10^2 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#) y [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#). En este caso únicamente se muestra el resultado de la simulación hecha con nuestra implementación.

Así, para obtener la contribución del caso excéntrico e inclinado necesitamos saber qué término es relevante en cada paso de integración. Primeramente definimos el parámetro Q a partir de 2.23 y 2.24 como

$$Q = \frac{\tau_s}{\tau_d} = \frac{2\gamma^2 v'^2}{3\Omega_p \chi} \quad (3.14)$$

para determinar la fuerza del caso excéntrico y no inclinado como una suma ponderada

$$F_{T, ei} = \frac{F_{T, ei, 1} + Q F_{T, ei, 2}}{1 + Q} \quad (3.15)$$

de modo que el régimen dominado por la cizalla domina para $Q < 1$ mientras que el dominado por viento lo hará cuando $Q > 1$.

La evolución ante la presencia del caso circular y del excéntrico e inclinado se muestra en la figura 3.9. La predicción teórica mostrada representa las expresiones de [Masset \(2017\)](#) y [Fromenteau & Masset](#)

(2019). Como se observa, la simulación no se adhiere a la solución analítica debido a la presencia de $F_{T, ei, 2}$ que parece excitar un poco más el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación. En el caso de la longitud del nodo ascendente Ψ y del argumento del periastro ω las discrepancias nuevamente son más evidentes debido a errores asociados a la integración y a la presencia de $F_{T, ei, 2}$.

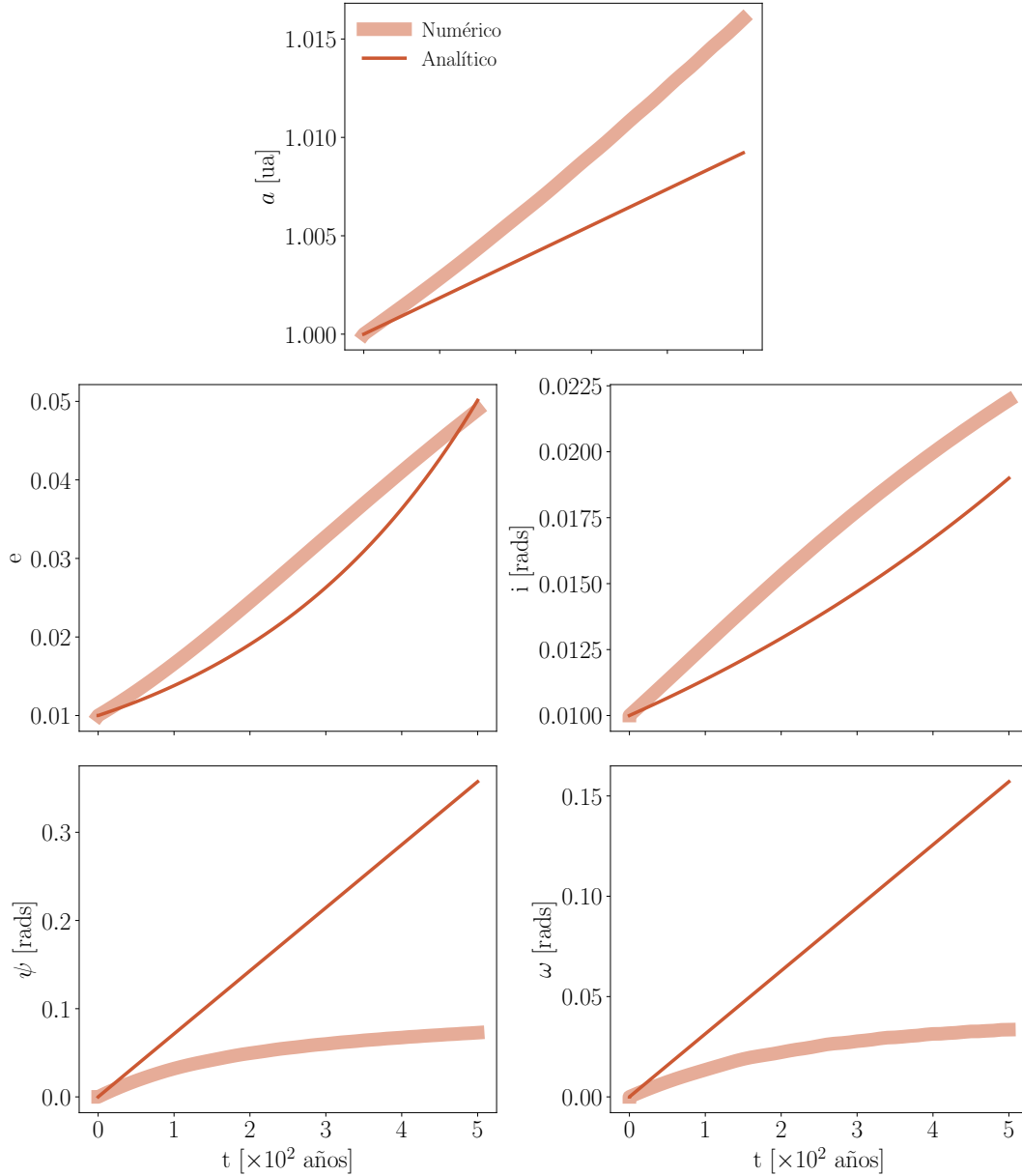


Figura 3.9: Experimento hecho durante 5×10^2 años para un planeta de $1 M_{\oplus}$ para visualizar la implementación de las fuerzas mostradas en [Masset \(2017\)](#), [Fromenteau & Masset \(2019\)](#), [Masset & Velasco Romero \(2017\)](#) y [Velasco Romero & Masset \(2019\)](#). En línea gruesa se muestra el resultado de la simulación y la delgada representa a la predicción teórica.

Caso con un modelo para ℓ y del desvanecimiento de la fuerza térmica

Para incorporar la luminosidad del planeta usamos que la forma de ℓ puede obtenerse, en primera aproximación, asumiendo que si los cuerpos que son acretados son destruidos muy por encima de la superficie del planeta la energía potencial que liberan hace que la luminosidad L del planeta es

$$L = \frac{Gm}{R} \frac{dm}{dt}$$

donde $\frac{dm}{dt}$ es la tasa de acreción y R es el radio del planeta. Si el tiempo de doblamiento de masa es $\tau_m = \frac{m}{\frac{dm}{dt}}$, entonces la luminosidad se reduce a

$$L = \frac{Gm^2}{R\tau_m}$$

A partir de esta expresión, suponiendo que el planeta es esférico y que por ende su radio $R \propto m^{\frac{1}{3}}$, se ve que $L \propto m^{\frac{5}{3}}$. Por otro lado, la luminosidad crítica L_c es

$$L_c = \frac{4\pi Gm\chi\rho_0}{\gamma}$$

Con ello, se puede ver fácilmente que el cociente $\ell = L/L_c$ es

$$\ell = \ell_{\oplus} \left(\frac{m}{1 M_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

donde $\ell_{\oplus}$ es

$$\ell_{\oplus} = \frac{\gamma M_{\oplus}^{\frac{2}{3}} \rho_p^{\frac{1}{3}}}{(4\pi)^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \chi \rho_0 \tau}$$

que con los valores para la acreción empleados en el trabajo de Eklund & Masset (2017) manteniendo τ fija $\sim 10^5$ años permiten llegar a

$$\ell = 2.3778 \left(\frac{m}{1 M_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.16)$$

Para incorporar el desvanecimiento de la fuerza térmica usamos la expresión dada en 2.35

$$C = \frac{M_c}{m + M_c} \quad (3.17)$$

donde $M_c = \chi c_s / G$. Con esto, la implementación de la fuerza térmica queda como

$$F_{k,T} = C(\ell - 1) \left(F_{k,T,c} + \frac{F_{k,T,ei,1} + QF_{k,T,ei,2}}{1 + Q} \right) \quad (3.18)$$

donde $k = x, y, z$.

Para revisar su validez, realizamos un experimento para 50 objetos de diferentes masas abarcando desde $5 \times 10^{-4} M_\oplus$ hasta $10 M_\oplus$ sujetos tanto a las interacciones gravitacionales como a las térmicas. Estos objetos se colocaron uno por uno inicialmente a 5.2ua con $e_0 = i_0 = 10^{-2}$ y se dejaron evolucionar durante 5 órbitas. Después comparamos nuestro resultado, mostrado en la figura 3.10, con la figura 7 del artículo de [Eklund & Masset \(2017\)](#). Al comparar, observamos que nuestra implementación funciona bien para masas inferiores a $\sim 1 M_\oplus$ y que para masas mayores, el modelo sencillo para el desvanecimiento de la componente térmica no funciona correctamente por lo que nos hemos restringido a estudiar objetos de hasta $\sim 1 M_\oplus$.

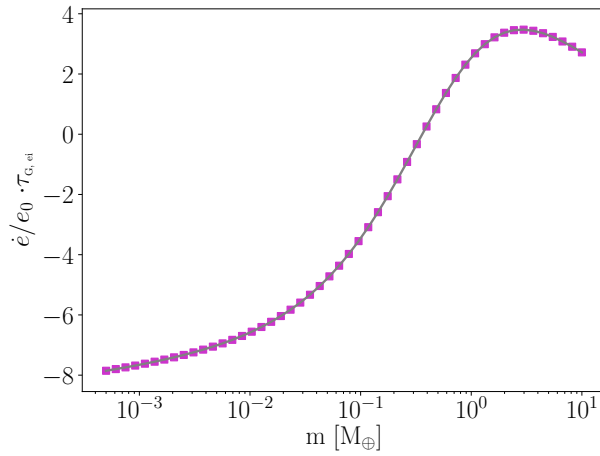


Figura 3.10: La tasa de evolución de la excentricidad en función de la masa del planeta. Experimento hecho durante 5 órbitas para 50 objetos inicialmente ubicados a 5.2 ua con $e_0 = i_0 = 10^{-2}$.

4

Resultados y análisis

Como mencionamos, la meta con este trabajo fue estudiar el impacto del gas del disco protoplanetario en los elementos orbitales de embriones individuales y cómo las interacciones planeta-disco en conjunto (gravitacionales y térmicas) afectan la capacidad de un enjambre de embriones para formar objetos más grandes. En la primer sección de este capítulo nos enfocamos en la caracterización de la órbita de objetos individuales mientras que en la segunda se revisa la capacidad del enjambre para formar planetas más masivos con un modelo sencillo de formación planetaria.

4.1. La dependencia de la evolución orbital con la luminosidad ℓ

En casi todos los casos el fuerte efecto de la componente térmica de la fuerza suele opacar la presencia de la parte gravitacional. Como consecuencia, dada la dependencia de la fuerza térmica con la luminosidad del planeta, se pueden identificar comportamientos distintos en la forma en la que los elementos orbitales evolucionan. Dichos regímenes dependen de la luminosidad del embrión (figura 4.1). Por la forma de ℓ los distintos comportamientos dependen directamente de la masa del planeta. A partir de las ecuaciones 3.16 y 3.18 se observa que para una masa $m \simeq 0.27 M_{\oplus}$ la componente térmica se cancela y que si $m > 0.27 M_{\oplus}$ la parte térmica es positiva y $m < 0.27 M_{\oplus}$ es negativa. De esta forma podemos separar a los objetos en tres regímenes:

- En las regiones donde la fuerza térmica domina y cumplen que $\ell - 1 < 0$ la fuerza térmica es negativa. A los objetos en este régimen los llamamos *embriones fríos* ya que en ellos el impacto de la componente térmica es similar al estudiado por Lega et al. (2014) en los cuales la presencia del embrión forma estructuras frías y sobredensas en su vecindad (figura 4.2).
- Cuando la luminosidad del embrión tiene un valor cercano a L_c (es decir, $\ell \simeq 1$ o bien, $m \simeq 0.27 M_\oplus$) la fuerza térmica se desvanece ya que se cumple que $\ell - 1 \simeq 0$. En este intervalo, al que llamamos región de transición, la evolución del planeta sigue el comportamiento estudiado por Tanaka et al. (2002) y Tanaka & Ward (2004).
- Cuando $\ell - 1 > 0$ la fuerza térmica es positiva. En este caso nombramos a los objetos como *embriones calientes* ya que la fuerza térmica se comporta de forma similar a lo estudiado por Benítez Llambay et al. (2015) y Velasco Romero & Masset (2019) (figura 4.2) dando lugar a estructuras calientes y subdensas en el disco.

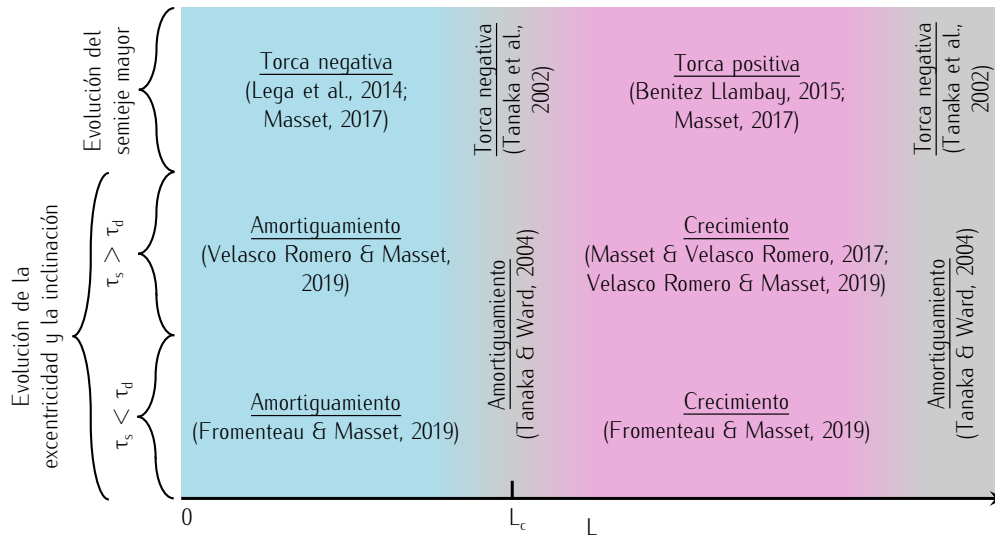


Figura 4.1: Resumen de los regímenes que dominan la evolución orbital de los planetas (esquema adaptado de Fromenteau & Masset, 2019).

Como hemos comentado, las simulaciones de Lega et al. (2014), Benítez Llambay et al. (2015) y Eklund & Masset (2017) parecen indicar que para planetas de algunas masas terrestres los efectos térmicos se desvanecen y las interacciones gravitacionales vuelven a dominar en la evolución orbital del embrión. Sin embargo, este efecto quedó fuera del alcance de este trabajo. En la figura 4.2 mostramos el comportamiento de las órbitas en los intervalos que cubre nuestra implementación. En las siguientes secciones nos enfocaremos a estudiar dos de esos intervalos: el de embriones fríos y el de embriones calientes.

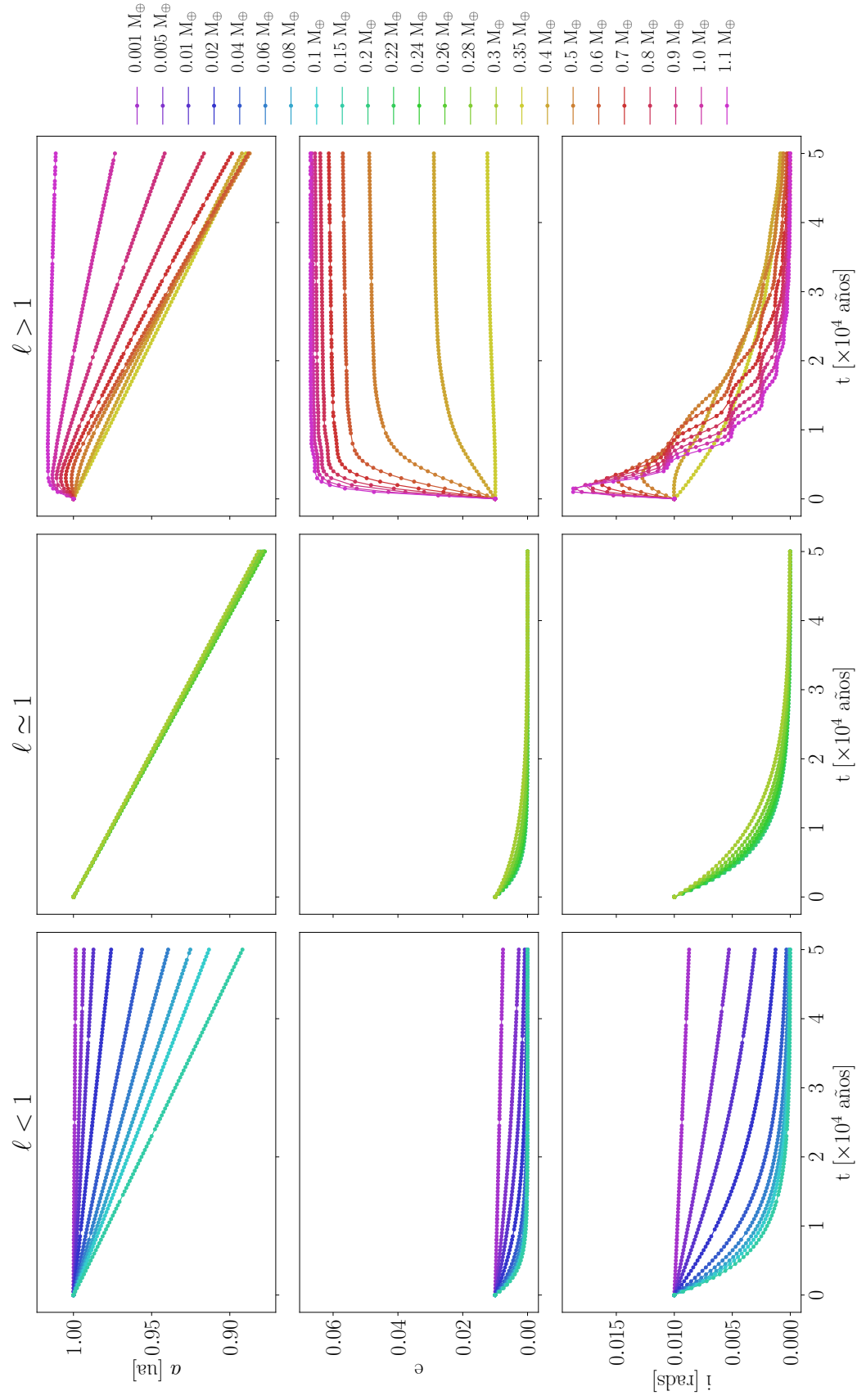


Figura 4.2: Evolución orbital de embriones planetarios de distintas masas durante 5×10^4 años. La columna de la izquierda representa a los objetos en el régimen de embriones fríos, la columna en el centro la de la región de transición y la derecha muestra embriones calientes.

4.2. Evolución orbital de embriones fríos

Cuando la luminosidad del planeta es más pequeña que la luminosidad L_c la fuerza térmica conduce a un amortiguamiento de los elementos orbitales que es más fuerte que el debido a únicamente las interacciones gravitacionales (figura 4.3).

4.2.1. Evolución del semieje mayor

En ambos casos se ve que el planeta migra hacia las regiones internas del sistema. Sin embargo, la forma en que lo hacen en cada caso es distinta. Por un lado vemos que en el caso de las interacciones gravitacionales la velocidad con la cual el semieje mayor decrece es la misma independientemente de su posición inicial lo cual contrasta con el caso conjunto: en este vemos que entre más externo se encuentre inicialmente el planeta más rápido migra hacia la estrella.

Por otro, cuando se consideran las interacciones térmicas el planeta migra más rápidamente hacia la estrella que en el caso puramente gravitacional. Analíticamente esto puede observarse si recuperamos las expresiones 2.6 y 2.21. De ellas se tiene que

$$\tau_{T, c} = \frac{1.364 + 0.541\alpha}{0.644(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda}{\gamma(\gamma - 1)\eta H} \tau_{G, c} \simeq 2.06 \frac{\lambda}{H} \tau_{G, c} = 0.28 \tau_{G, c}$$

usando que en nuestras simulaciones $H/\lambda \simeq 9.055$. Al tomar ambas interacciones en cuenta la proporción cambia ligeramente. A pesar de esto, tomando como referencia a un objeto ubicado inicialmente a 1 ua, vemos que su semieje mayor cambia un 4% de su valor inicial en $\sim 5 \times 10^4$ años mientras que con ambas interacciones cambia en un 8%, porcentaje que aumenta conforme la órbita se hace más externa.

4.2.2. Evolución de la excentricidad y la inclinación

En el caso de la evolución de la excentricidad y la inclinación conviene recordar las expresiones 2.9 y 2.26 las cuales dan los tiempos característicos de evolución en el caso gravitacional y térmico respectivamente. Tomando el cociente de las expresiones vemos que

$$\tau_{T, ei} = \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\gamma(\gamma - 1)H} \right] \tau_{G, ei} \simeq 2.24 \frac{\lambda}{H} \tau_{G, ei} = 0.24 \tau_{G, ei}$$

usando nuevamente que $H/\lambda \simeq 9.055$. Esta relación se observa con claridad en la figura 4.3. En ella podemos ver que el amortiguamiento de la excentricidad y la inclinación de un planeta de baja masa es mucho más fuerte en el caso conjunto que en el únicamente gravitacional: la órbita de un planeta de $0.1 M_{\oplus}$ ubicado inicialmente en $a_0 = 1$ ua se circulariza en $\sim 1 \times 10^4$ años en la presencia de ambas interacciones mientras que bajo sólo la parte gravitacional requiere de $\sim 5 \times 10^4$ años. El mismo efecto

se observa para la inclinación: con las interacciones conjuntas se amortigua en 2×10^4 años y con sólo las gravitacionales en más de 5×10^4 años.

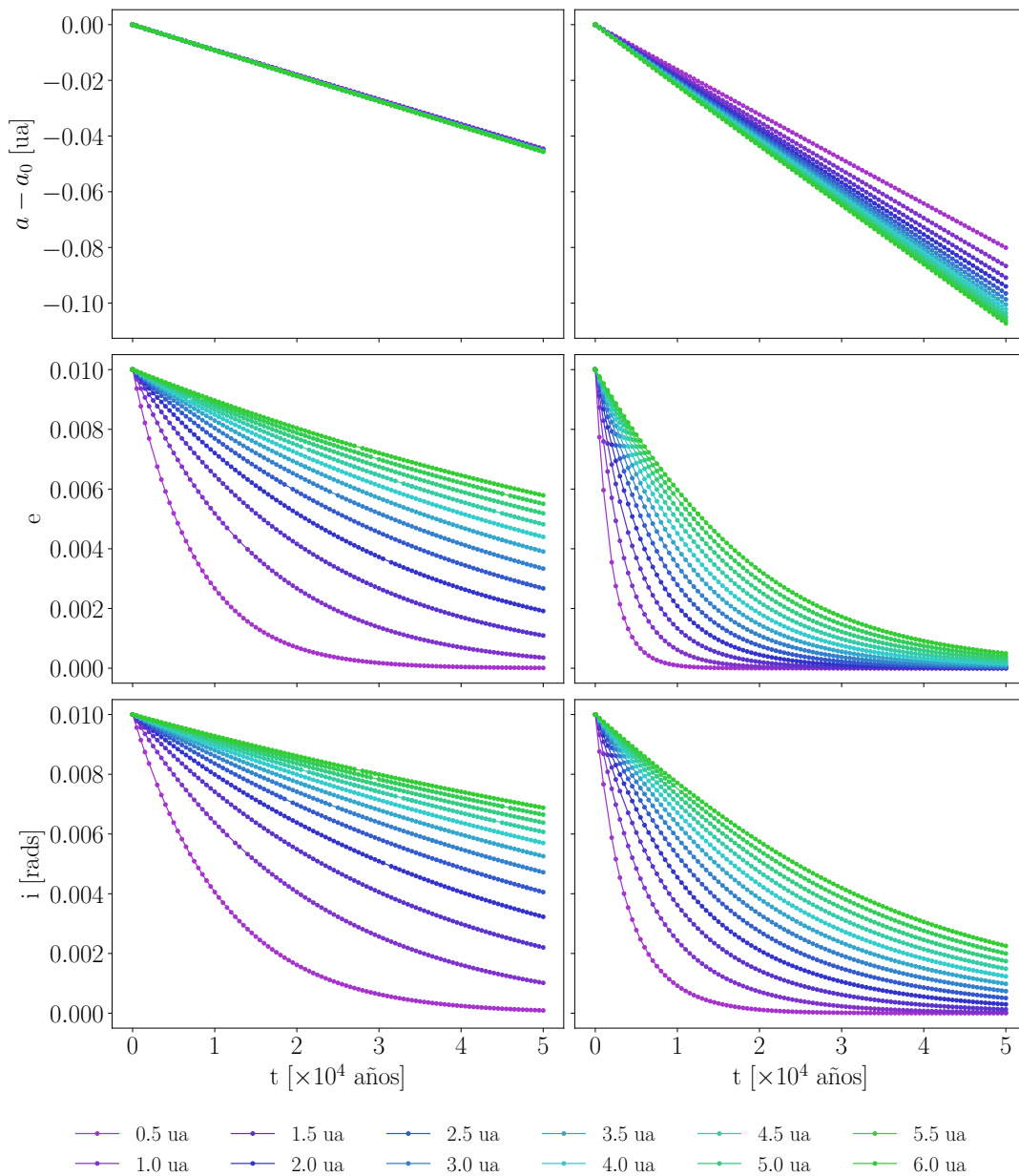


Figura 4.3: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embrión de $0.1 M_{\oplus}$. La columna izquierda muestra la evolución del objeto sujeto únicamente a las fuerzas gravitacionales mientras que la derecha incluye también la parte térmica. Los distintos colores representan un valor diferente de semieje mayor inicial a_0 . Además, consideramos $e_0 = i_0 = 10^{-2}$.

Otro punto importante es que el cambio de la excentricidad y la inclinación es más rápido mientras más cercano a la estrella se encuentre el planeta. Ya que en ambos casos las interacciones amortiguan

estas cantidades, lo anterior implica que en las regiones internas los planetas alcanzan una órbita circular y coplanar al disco más rápidamente que los objetos externos.

4.3. Evolución orbital de embriones calientes

Cuando la luminosidad del planeta es más grande que L_c la fuerza térmica conduce a características más diversas que en el caso de los embriones fríos: permite que en algunos casos los embriones migren hacia regiones externas, que las órbitas se vuelvan excéntricas y que, si la inclinación no es nula, el planeta pase por diferentes inclinaciones hasta finalmente amortiguarse. En los siguientes puntos exploraremos cada uno de estos comportamientos.

4.3.1. Dirección de la migración

Las dependencias de la migración de un planeta en este régimen pueden verse a partir del momento angular de una órbita elíptica (ecuación A.11),

$$J = m [GMa (1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Derivándola se observa que el cambio de la norma del momento angular es

$$\frac{1}{m} \frac{dJ}{dt} = \frac{a\Omega_p (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{da}{dt} - \frac{a^2 e \Omega_p}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt}$$

de donde se puede despejar da/dt para obtener

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{ma\Omega_p (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dJ}{dt} + \frac{2ae}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt} \quad (4.1)$$

La expresión 4.1 nos muestra que el sentido de la migración de los planetas depende en gran medida de dos características: la torca y la masa del planeta de forma conjunta y de la forma en que su excentricidad cambia. Separando el estudio por casos tenemos:

4.3.1.a. Caso con $\frac{2}{ma\Omega_p (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dJ}{dt} \ll \frac{2ae}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt}$

La excentricidad de la órbita tiene un papel muy importante en la migración del planeta y en gran medida su evolución define la dirección de la migración. En la figura 4.4 se muestra la evolución de planetas de $1 M_{\oplus}$ ubicados inicialmente a 1 y 6 ua para distintos valores de excentricidad inicial. Como se observa, el planeta alcanza una excentricidad constante. Mientras alcanza dicho valor, la pendiente del

semieje mayor tiene el mismo signo que la pendiente de la excentricidad: los objetos con una $e_0 > e_{\text{sat}}$ necesitan disminuir su excentricidad en su ruta a e_{sat} haciendo que su semieje mayor también disminuya; en cambio, los planetas con $e_0 < e_{\text{sat}}$ aumentan su excentricidad permitiendo a los planetas migrar hacia afuera mientras alcanzan e_{sat} . Así, es hasta que la excentricidad del planeta se vuelve e_{sat} que la torca define la dirección de la migración. Únicamente cuando la masa del planeta es pequeña, haciendo que el término $1/m$ crezca, el signo de la torca puede tener relevancia antes de alcanzar e_{sat} .

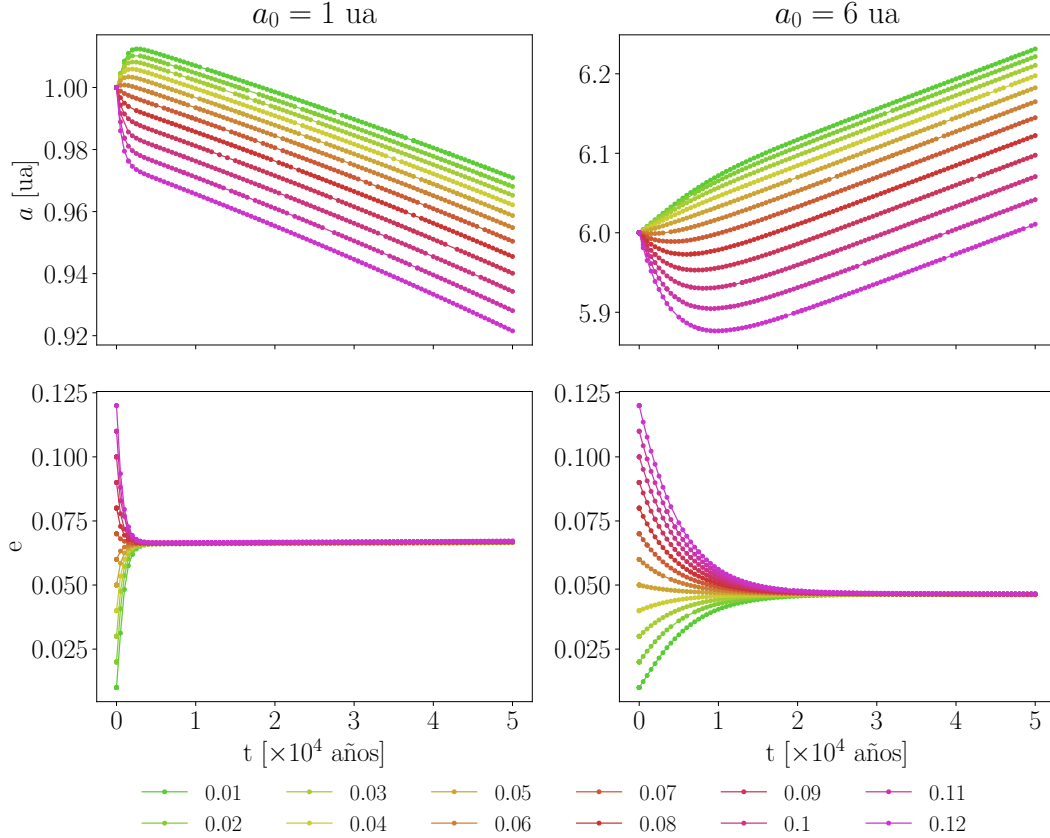


Figura 4.4: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embrión de $1 M_{\oplus}$. Los distintos colores representan un valor diferente de excentricidad inicial e_0 con $i_0 = 0$.

4.3.1.b. Caso con $\frac{de}{dt} \approx 0$

En esta sección hemos supuesto que el cambio en la excentricidad $\frac{de}{dt}$ es despreciable (es decir, $e_0 \approx e_{\text{sat}}$) y nos concentramos únicamente en la evolución del semieje mayor en función de $\frac{1}{m} \frac{dJ}{dt}$. En la figura 4.5 observamos que, como en el caso de los embriones fríos, la rapidez con la que el objeto migra bajo las interacciones gravitacionales es la misma independientemente del semieje mayor inicial de la órbita. En cambio, al incorporar las interacciones térmicas observamos que no sólo la rapidez con la cual el objeto migra es distinta según su ubicación en el disco: también el signo de la migración es

diferente. Aquí es donde la masa del planeta toma relevancia: en función de ella se define un radio que separa las regiones del disco donde la torca es negativa de donde es positiva. Este radio donde inicia la torca positiva se hace más interno conforme la masa del planeta aumenta: en la figura 4.5 se observa que para un planeta de $0.8 M_{\oplus}$ la migración hacia afuera inicia en algún punto entre las 2.0 y 2.5 ua mientras que para uno de $1 M_{\oplus}$ comienza entre 1.0 y 1.5 ua.

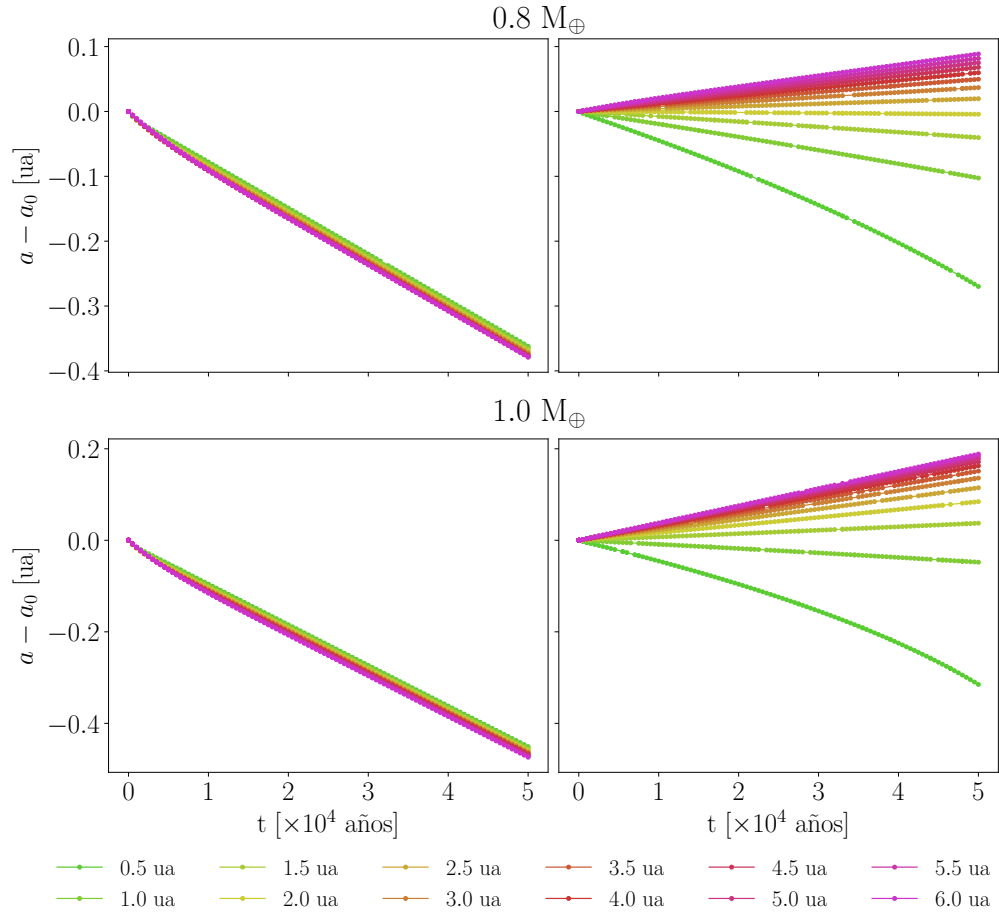


Figura 4.5: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para planetas de 0.8 y $1 M_{\oplus}$. El gráfico de la izquierda muestra la evolución del objeto sujeto únicamente a las fuerzas gravitacionales mientras que el de la derecha incluye también la parte térmica. Los distintos colores representan un valor diferente de semieje mayor inicial a_0 con $e_0 \approx e_{\text{sat}}$.

4.3.2. Excentricidad de saturación

Como vimos, a diferencia de las interacciones gravitacionales que siempre amortiguan la excentricidad del planeta y de las térmicas que la hacen crecer, al tomar ambas interacciones el planeta alcanza una excentricidad *constante* a la que llamamos excentricidad de saturación e_{sat} . Esto se debe a que, sin perder la generalidad, cuando $e < e_{\text{sat}}$ el trabajo de las interacciones térmicas dominan y la excentricidad crece

hasta llegar a e_{sat} . En este punto el trabajo de las interacciones gravitacionales cancela el trabajo de la fuerza térmica permitiendo a e mantenerse constante en el tiempo.

Para conocer la dependencia de e_{sat} con los parámetros del disco y del planeta consideraremos un planeta en órbita excéntrica y no inclinada. Así, la trayectoria que recorre el planeta en un epiciclo es

$$\mathbf{s} = ae [\sin(\Omega_p t), 2 \cos(\Omega_p t)]$$

mientras que su velocidad en el referencial del gas está dada por

$$\mathbf{v}' = ae\Omega_p \left[\cos(\Omega_p t), -\frac{1}{2} \sin(\Omega_p t) \right]$$

Con esto puede verse que el trabajo de la fuerza gravitacional sobre el epiciclo es

$$\begin{aligned} W_G &= e \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^7 \Omega_p^6}{c_s^4} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}' dt \\ &= e^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^8 \Omega_p^7}{c_s^4} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_p}} 0.057 \cos^2(\Omega_p t) + 0.61 \sin(\Omega_p t) \cos(\Omega_p t) - 0.163 \sin^2(\Omega_p t) dt \\ &\simeq e^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^8 \Omega_p^7}{c_s^4} \left(\frac{-0.331}{\Omega_p} \right) \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene que

$$W_G = -0.331 e^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Sigma a^8 \Omega_p^6}{c_s^4}$$

Obtener el trabajo de la fuerza térmica puede ser complicado debido a la presencia de los dos regímenes de evolución (es decir, el régimen dominado por cizalla y el dominado por viento). Sin embargo, podemos obtener fácilmente una cota superior para e_{sat} si suponemos que está en el régimen con $\tau_s > \tau_d$. En éste, el trabajo de la fuerza térmica sobre el epiciclo es

$$\begin{aligned} W_T &= C(\ell - 1) \frac{2\pi(\gamma - 1)\rho_0 G^2 m^2}{c_s^2} g(\mathcal{M}) \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_p}} \frac{\mathbf{v}' \cdot d\mathbf{s}}{|\mathbf{v}'|} \\ &= C(\ell - 1) \frac{2\pi(\gamma - 1)\rho_0 G^2 m^2}{c_s^2} g(\mathcal{M}) ae\Omega_p \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_p}} \frac{dt}{[\cos^2(\Omega_p t) + \frac{1}{4} \sin^2(\Omega_p t)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= C(\ell - 1) \frac{2\pi(\gamma - 1)\rho_0 G^2 m^2}{c_s^2} g(\mathcal{M}) ae\Omega_p \left(\frac{8.626}{\Omega_p} \right) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}$ es el número de Mach. Con esto

$$W_T = 8.626ae \left[C(\ell - 1) \frac{2\pi(\gamma - 1)\rho_0 G^2 m^2}{c_s^2} g(\mathcal{M}) \right]$$

Ya que la excentricidad de saturación se alcanza cuando el trabajo de las interacciones sobre un epiciclo se cancela, se debe cumplir que $W_G + W_T = 0$ lo cual, con un poco de álgebra, conduce a que la excentricidad de saturación esté dada por

$$e_{\text{sat}} = 65.24 (2\pi)^{\frac{1}{2}} C(\ell - 1) (\gamma - 1) g(\mathcal{M}) h \quad (4.2)$$

donde observamos que la excentricidad de saturación escala con la relación de aspecto h del disco. Para observar con claridad las dependencias de e_{sat} con parámetros asociados al planeta recordemos que hemos usado $\gamma = 1.4$ y $h = 0.042$. Esto permite reescribir la expresión 4.2 como

$$e_{\text{sat}} \simeq 1.1 C(\ell - 1) g(\mathcal{M}) \quad (4.3)$$

A la expresión 4.3 la podemos dividir en dos términos: por un lado tenemos el factor $C(\ell - 1)$ el cual va como

$$C(\ell - 1) \simeq \frac{M_c}{m + M_c} \left[2.4 \left(\frac{m}{1 M_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] = \frac{\chi c_s}{mG + \chi c_s} \left[2.4 \left(\frac{m}{1 M_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]$$

donde hemos usado que $M_c = \chi c_s / G$. Por otro, si suponemos que el término

$$g(\mathcal{M}) \propto \xi = \log \left\{ \exp \left[-1.96 - \log \left(\frac{r_{\text{Bondi}} c_s}{4\chi} \right) \right] + 1 \right\}$$

En conjunto esto conduce a que, en primera aproximación, el valor máximo de la excentricidad de saturación sea de la forma

$$e_{\text{sat}} \propto \frac{\chi c_s}{mG + \chi c_s} \left[2.4 \left(\frac{m}{1 M_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \cdot \log \left\{ \exp \left[-1.96 - \log \left(\frac{r_{\text{Bondi}} c_s}{4\chi} \right) \right] + 1 \right\} \quad (4.4)$$

A partir de 4.4 se pueden visualizar las dependencias de e_{sat} . La primera es con el semieje mayor. Esto puede verse a partir del valor de la velocidad del sonido en la expresión 4.4. Recordemos que el valor de c_s es

$$c_s^2 = \gamma H^2 \Omega_p^2 = \gamma H^2 \frac{GM}{a^3} \implies c_s \propto a^{-\frac{3}{2}}$$

De esta manera vemos que cuando a es grande c_s debe ser pequeño, lo cual en la expresión 4.4 se traduce en valores también pequeños de e_{sat} . Por otro lado, cuando a es pequeño c_s es grande y el valor de e_{sat} aumenta. Esto permite que el valor de e_{sat} disminuya conforme el semieje mayor aumenta, tal como se observa en la figura 4.6.

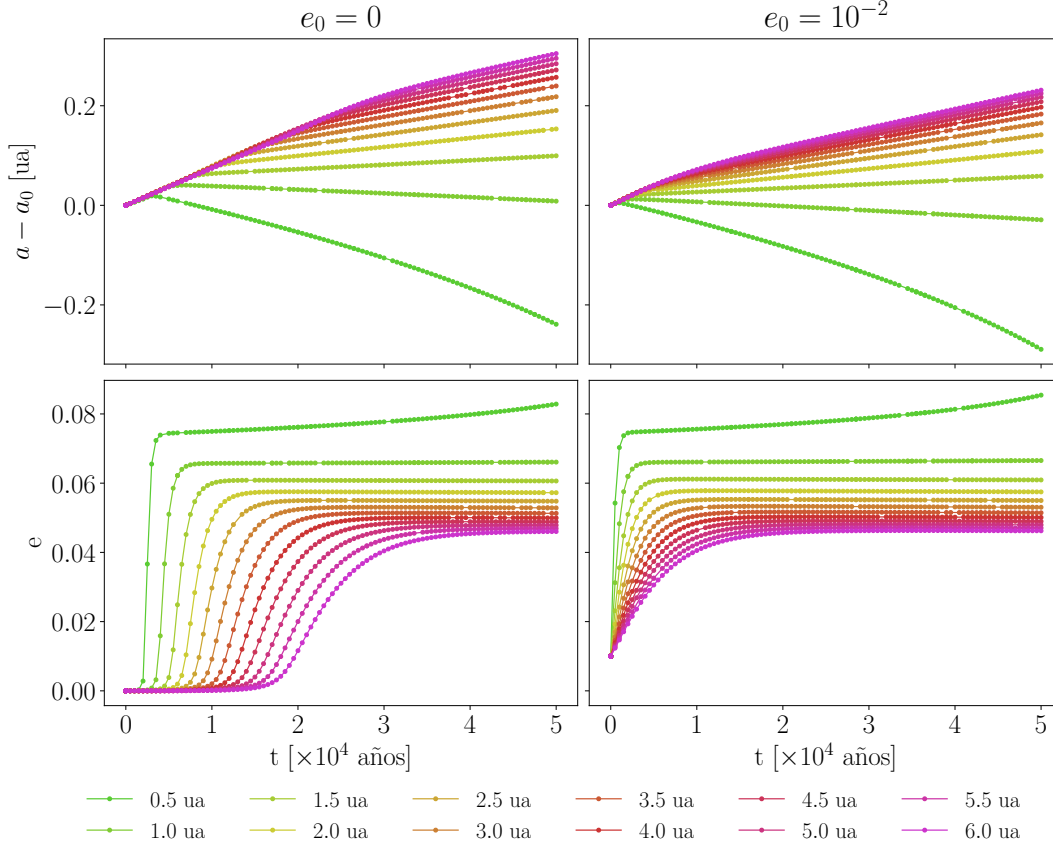


Figura 4.6: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embrión de $1 M_{\oplus}$. Los distintos colores representan un valor diferente de semieje mayor inicial a_0 con $i_0 = 0$.

La segunda dependencia de e_{sat} con la masa del planeta. La parte asociada a ξ incluye un término que escala con la masa si recordamos que $r_{\text{Bondi}} c_s = Gm/c_s$ el cual en conjunto con la parte que involucra a $C(\ell - 1)$ permiten ver que el valor de e_{sat} aumenta con la masa (figura 4.7).

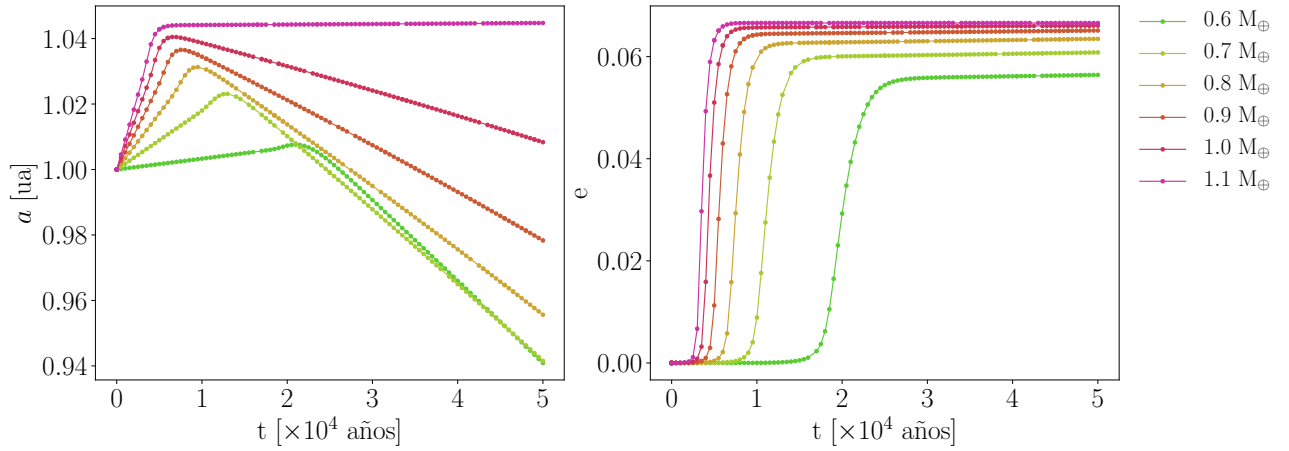


Figura 4.7: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embriones de distintas masas (representadas en distintos colores).

Resumiendo, la excentricidad de saturación es una excentricidad *constante* que se alcanza porque después de un tiempo las interacciones gravitacionales cancelan el trabajo de las térmicas. Esta excentricidad escala con la relación de aspecto h y únicamente depende de la masa (crece con ella) y del semieje mayor (disminuye con él). No es propiamente constante porque el semieje mayor cambia por la migración, pero como la evolución de la excentricidad se nota más rápidamente que la del semieje podemos observar intervalos temporales en los que de/dt es prácticamente cero.

4.3.3. El papel de la inclinación

Ahora consideremos que el planeta además de excéntrico es inclinado. A pesar de que aún está sujeto a la fuerza térmica de magnitud F_T su impacto ahora se separa en una proyección horizontal que perturba la excentricidad y en una vertical que modifica la inclinación. Por ello, el efecto de la fuerza térmica en ambos elementos orbitales es necesariamente más débil que el obtenido al considerar cada uno de forma aislada es decir, cuando el planeta sólo es excéntrico o inclinado (figura 4.8).

La figura 4.8 muestra la evolución de la órbita de planetas a distintos semiejes mayores a los cuales se les ha dado una inclinación inicial $i_0 = 10^{-2}$; en un caso la órbita es inicialmente circular y en el otro $e_0 = 10^{-2}$. En el caso en que la órbita es inicialmente circular, ya que el objeto necesita más tiempo para alcanzar e_{sat} , una mayor parte de F_T se puede invertir en excitar la inclinación haciendo que i pueda alcanzar un valor más alto que en el caso con $e_0 = 10^{-2}$ y prolongando el tiempo para llegar a e_{sat} . En cambio, cuando el planeta tiene una excentricidad importante, la componente vertical de la fuerza es muy pequeña como para impulsar la inclinación. En cualquier caso, la inclinación al final tiende a amortiguarse debido a las interacciones gravitacionales con el disco. Cuando la excentricidad inicial del objeto es mayor que e_{sat} la fuerza térmica la amortigua hasta que e llega al valor de saturación. En

este caso la inclinación de la órbita no puede pasar por una etapa de crecimiento y se ve rápidamente amortiguada (figura 4.9).

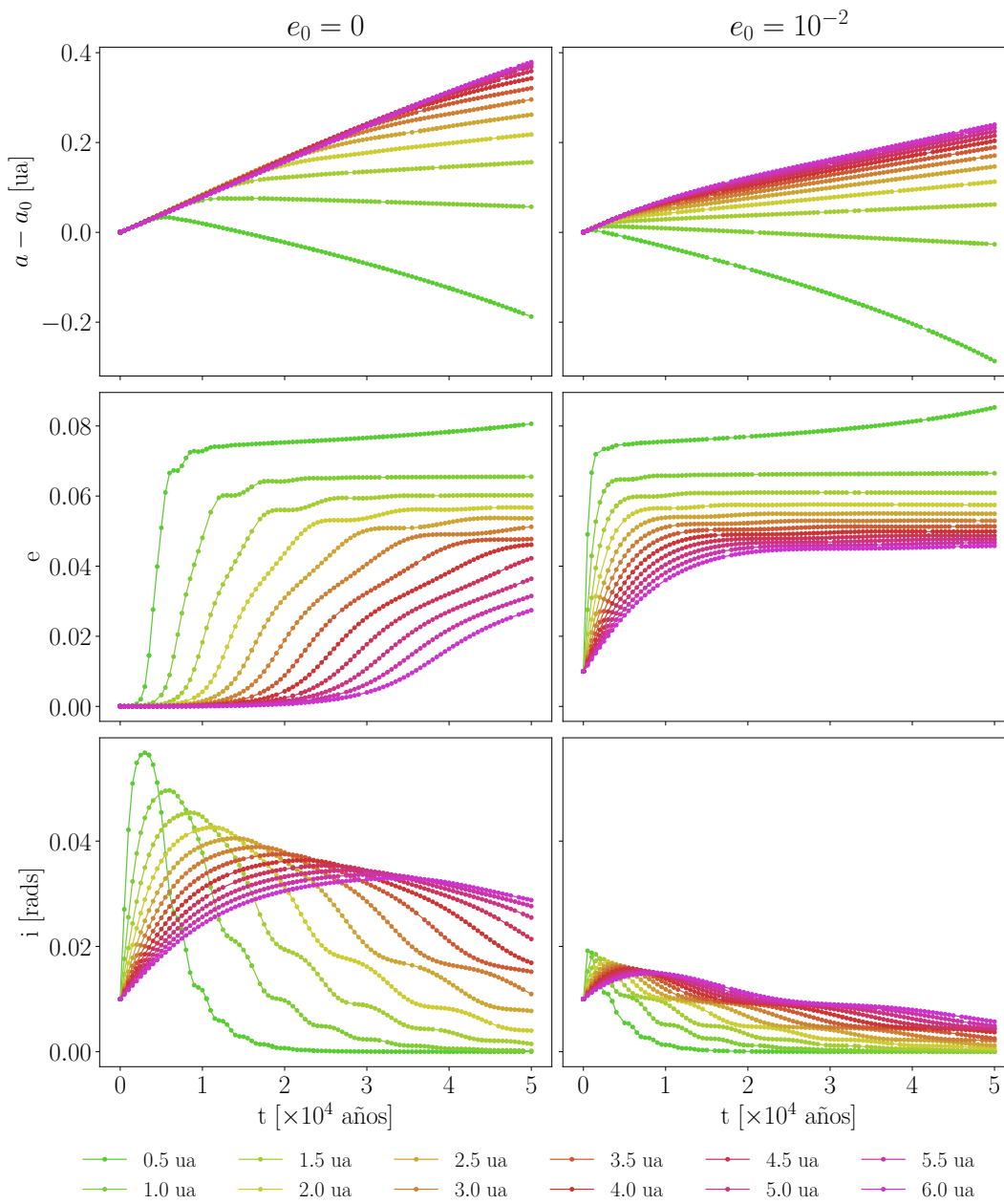


Figura 4.8: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embrión de $1 M_{\oplus}$. Los distintos colores representan un valor diferente de semieje mayor inicial a_0 con $i_0 = 10^{-2}$.

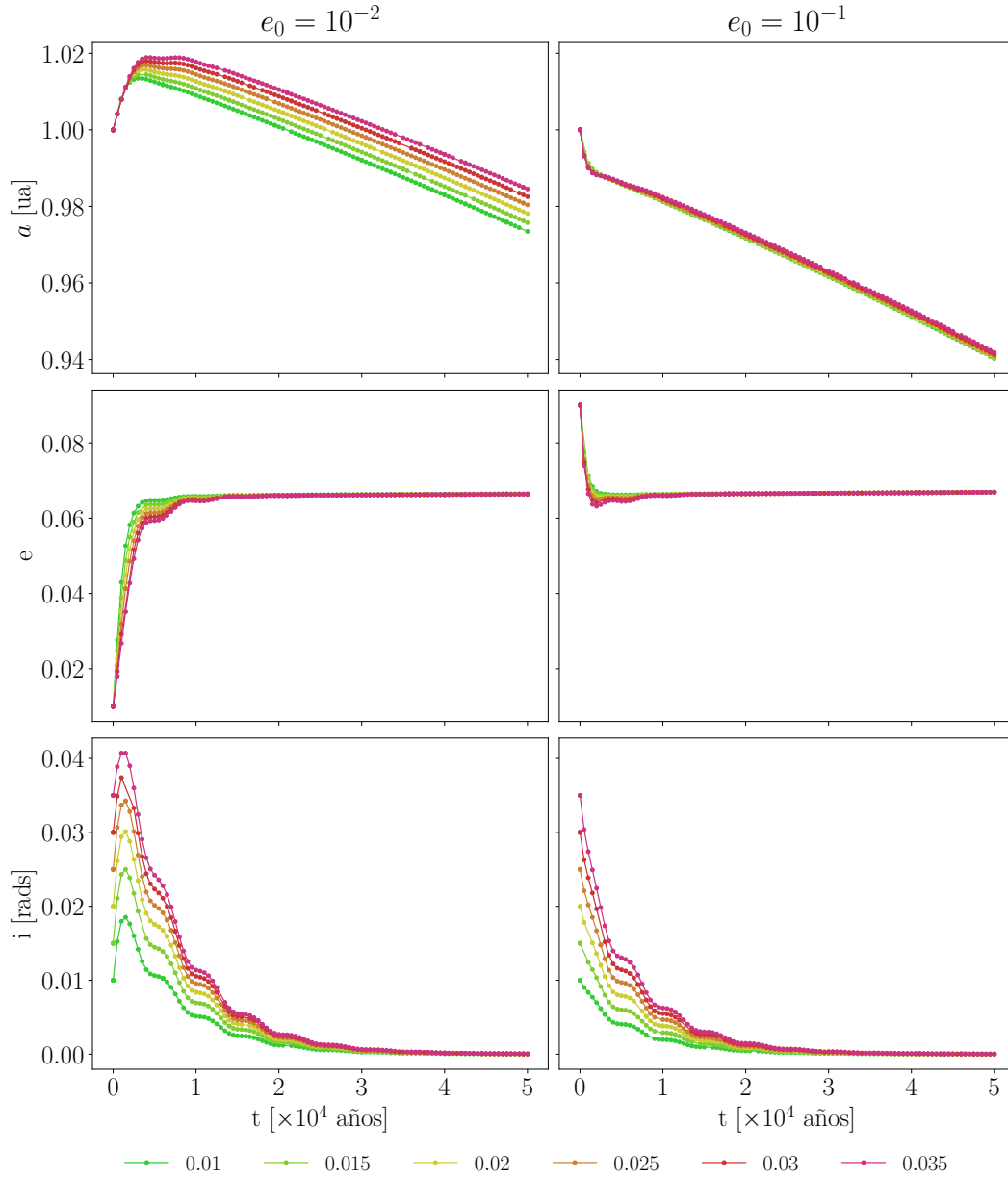


Figura 4.9: Experimentos hechos durante 5×10^4 años para un embrión de $1 M_{\oplus}$. Los distintos colores representan un valor diferente de inclinación i_0 con $a_0 = 1$ ua.

4.4. La importancia de las interacciones en el crecimiento oligárquico

Con la finalidad de observar el impacto de las interacciones conjuntas en esta etapa de formación planetaria realizamos simulaciones de enjambres como el descrito en la subsección 3.2.2. Dejamos evolucionar al enjambre en tres casos: 1) sólo con sus autointeracciones, 2) con sus autointeracciones

y las interacciones gravitacionales y 3) con sus autointeracciones y las interacciones gravitacionales y térmicas de forma conjunta. Realizamos dos grupos de simulaciones de este tipo:

- **Enjambre 1.** Por el tiempo de cómputo en una primera simulación cubrimos un periodo de 1.6×10^5 años con esta simulación. El experimento que contempla tanto a las interacciones gravitacionales como a las térmicas tardó hasta este punto más de tres semanas en el clúster Kepler del Instituto de Ciencias Físicas por lo que realizamos el siguiente conjunto de simulaciones para ver el efecto de la componente térmica más rápidamente.
- **Enjambre 2.** Para observar más rápidamente el impacto de las interacciones decidimos aumentar la densidad superficial del disco a $\Sigma_0 = 5 \times 10^{-4} M_{\odot}/\text{ua}^2$ (un orden de magnitud mayor que en el caso que hemos estado estudiando). Esto nos permitió que el efecto del disco protoplanetario sobre las órbitas se notara más rápidamente (en 4×10^4 años) sin dejar la física de lado. Únicamente hay que tener en cuenta que el proceso es en general más lento que el presentado en esta sección.

Enjambre 1

El resultado de estos experimentos se muestra en las figuras 4.10 y 4.11. En un inicio, ya que las interacciones planeta-disco tardan $\sim 10^4$ años en amortiguar la excentricidad y la inclinación de los planetas, las autointeracciones son las que dominan la evolución del enjambre haciendo que éste se caliente. Esto se refleja en que al inicio de la simulación el número de fusiones que tienen los tres sistemas es muy similar (figura 4.12).

En las figuras 4.10 y 4.11 se observa que casi al llegar a los 40000 años las diferencias entre las simulaciones que incluyen al disco protoplanetario y la que sólo contempla a las autointeracciones aumentan. En el caso que sólo contempla a las interacciones gravitacionales se observa que tanto la excentricidad como la inclinación del planeta se están amortiguando con respecto al caso con sólo autointeracciones. Sin embargo, es importante notar que cuando se añaden las fuerzas térmicas el amortiguamiento es más evidente ya que como todos los planetas están en la etapa de embrión frío, el enfriamiento dinámico del disco se realiza más rápidamente lo cual aumenta la capacidad de los planetas para interactuar con el resto de los objetos.

Al acretar el suficiente material algunos planetas se convierten en embriones calientes y mientras que el proceso de amortiguamiento de la inclinación sigue, los planetas parecen ubicarse en su excentricidad de saturación. En este tiempo la dispersión de velocidades aumenta y las interacciones binarias se vuelven más frecuentes lo cual frena un poco la construcción de cuerpos más masivos. A pesar de esto al final de la simulación el enjambre sujeto a todas las interacciones es el que tiene un mayor número de objetos masivos (figura 4.12). Además, en esta etapa los efectos de la migración comienzan a notarse. En el caso de las interacciones gravitacionales inicia la caída del material hacia la estrella y en el caso con las interacciones conjuntas se ve la migración de los embriones fríos hacia las regiones internas.

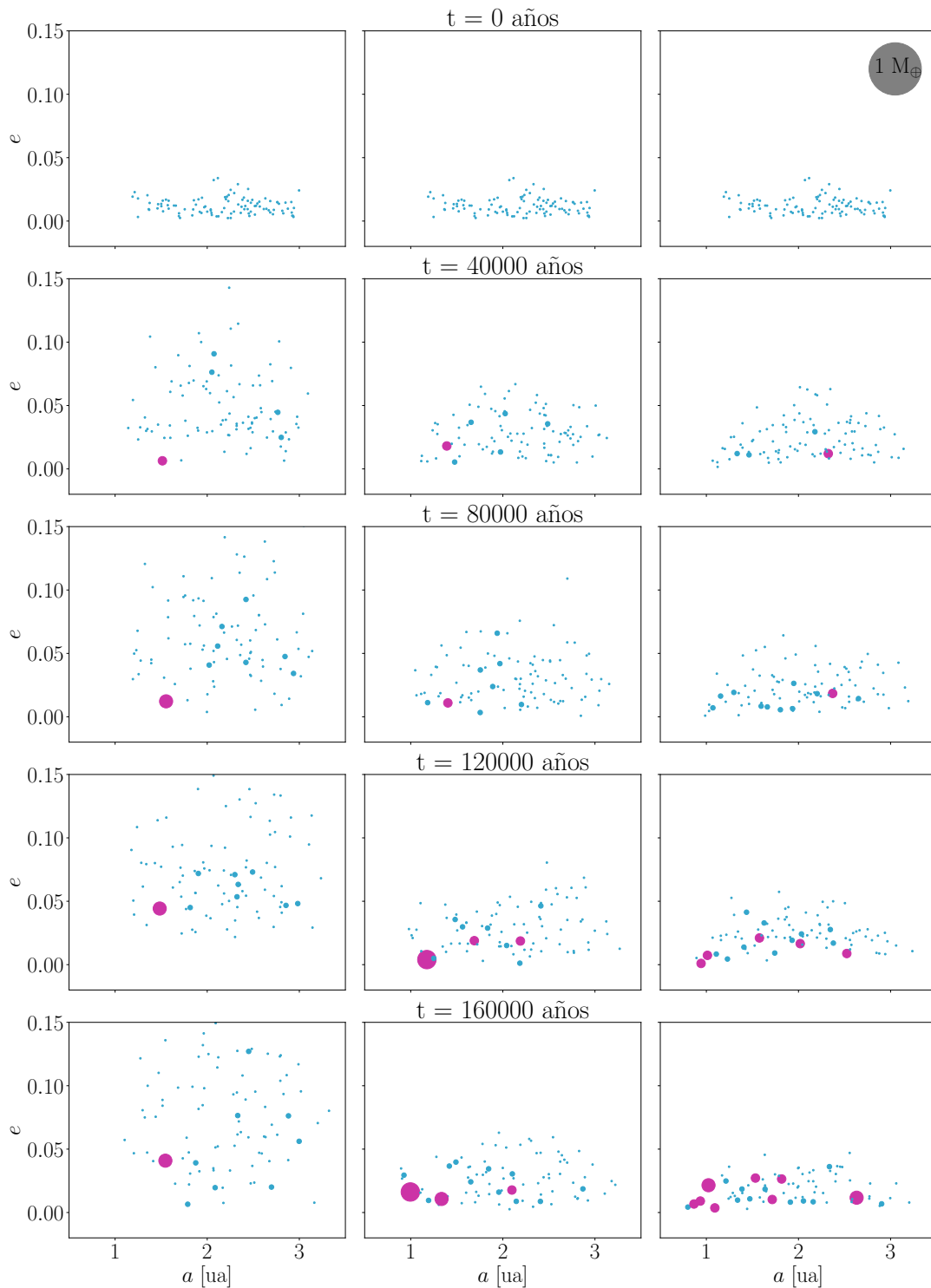


Figura 4.10: Evolución de la excentricidad de los embriones como función de su semieje mayor. La columna izquierda muestra la evolución del enjambre ante las autointeracciones mientras que la central incluye las interacciones gravitacionales y la de la derecha también las térmicas. El color de los planetas señala el régimen en el que se encuentran: si son azules se comportan como embriones fríos y si son rosas como embriones calientes. La versión electrónica de este documento incluye la animación de esta simulación.

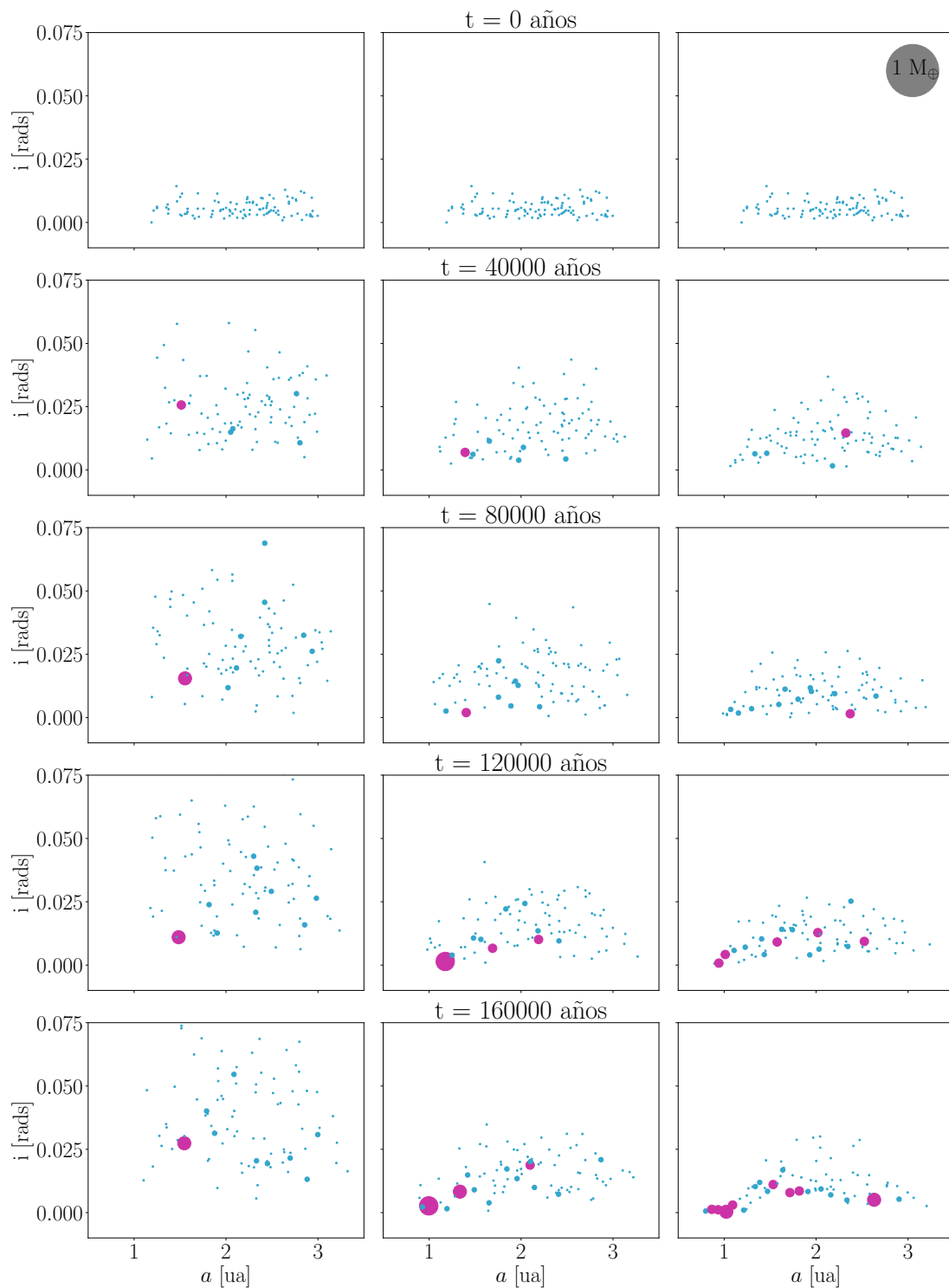


Figura 4.11: Evolución de la inclinación de los embriones como función de su semieje mayor. La columna izquierda muestra la evolución del enjambre ante las autointeracciones mientras que la central incluye las interacciones gravitacionales y la de la derecha también las térmicas. El color de los planetas señala el régimen en el que se encuentran: si son azules se comportan como embriones fríos y si son rosas como embriones calientes. La versión electrónica de este documento incluye la animación de esta simulación.

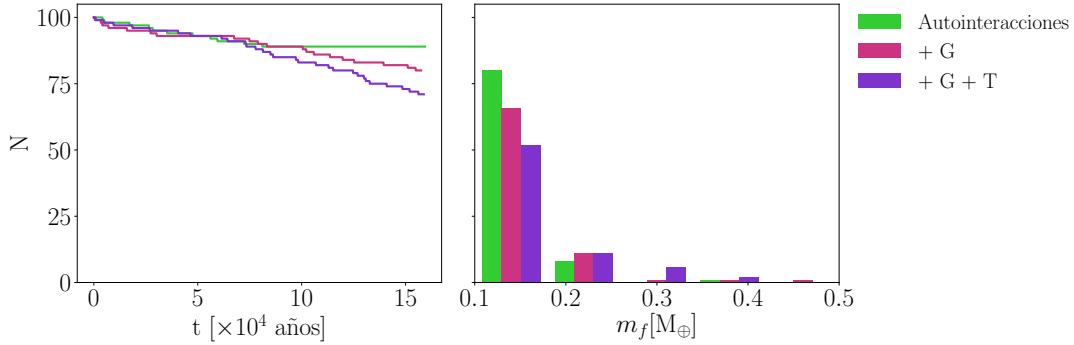


Figura 4.12: El gráfico del lado izquierdo muestra los instantes en que tuvieron lugar las fusiones y el del lado derecho un histograma con la distribución de masa al final de la simulación. En verde se muestra el resultado para el experimento con sólo autointeracciones, en rosa con autointeracciones y las interacciones gravitacionales con el disco y en morado con las interacciones conjuntas.

Enjambre 2

Naturalmente en esta simulación el amortiguamiento del enjambre por las interacciones planeta-disco se realiza en un tiempo menor (antes de los 10000 años). Este rápido amortiguamiento aumenta la capacidad para interactuar de los planetas entre sí permitiendo que crezcan pronto en objetos más masivos: a los 20000 años ya hay un objeto con una masa $m > 0.5 M_\oplus$ ya ubicado en su excentricidad de saturación.

Como el disco es muy masivo en este momento también ya comienza a notarse que los embriones fríos están migrando hacia regiones internas. Recordemos que para evitar la caída del material a la estrella las interacciones térmicas ofrecen dos mecanismos que se observan en las figuras 4.13 y 4.14. Para entender el primero hay que recordar que al término de la etapa de embrión frío el planeta tiene una $e \simeq 0$ y al volverse caliente debe alcanzar e_{sat} . Sabemos que, sin importar la región del disco en la que se encuentre, el proceso para alcanzar la excentricidad de saturación hace que el planeta migre hacia afuera. Al alcanzar e_{sat} el planeta típicamente estará fuera del radio donde la migración es hacia dentro y su torca lo llevará a una zona segura en el disco protoplanetario. Además, ya que al final de la etapa de embrión frío se espera que la inclinación esté bastante amortiguada, la fuerza se concentrará en la evolución del semieje mayor y de la excentricidad. El segundo se entiende recordando que, conforme el objeto se interna en el disco, la rapidez con la cual el semieje mayor cambia disminuye dramáticamente. Esto hace que los planetas puedan evitar su caída en la estrella aún a órbitas con a muy pequeño siempre y cuando acreten material rápidamente. Esto contrasta con el caso gravitacional en el cual el material, a pesar de caer más lentamente, no tiene ningún mecanismo que le permita disminuir la tasa de cambio del semieje mayor.

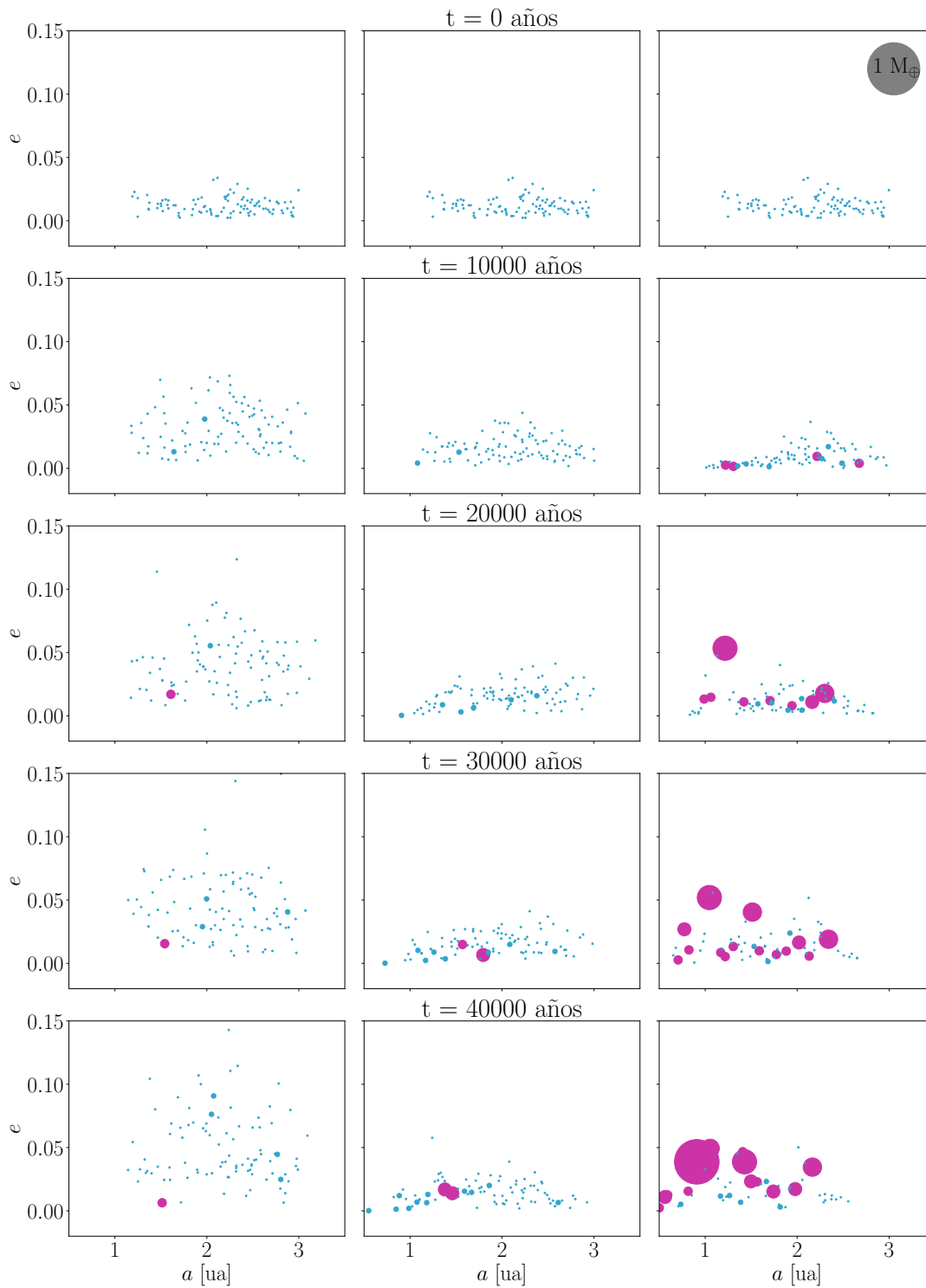


Figura 4.13: Evolución de la excentricidad de los embriones como función de su semieje mayor. La columna izquierda muestra la evolución del enjambre ante las autointeracciones mientras que la central incluye las interacciones gravitacionales y la de la derecha también las térmicas. El color de los planetas señala el régimen en el que se encuentran: si son azules se comportan como embriones fríos y si son rosas como embriones calientes. La versión electrónica de este documento incluye la animación de esta simulación.



Figura 4.14: Evolución de la inclinación de los embriones como función de su semieje mayor. La columna izquierda muestra la evolución del enjambre ante las autointeracciones mientras que la central incluye las interacciones gravitacionales y la de la derecha también las térmicas. El color de los planetas señala el régimen en el que se encuentran: si son azules se comportan como embriones fríos y si son rosas como embriones calientes. La versión electrónica de este documento incluye la animación de esta simulación.

Todo el proceso anterior se refleja en la distribución de masas al término de la simulación (figura 4.15). En el caso con sólo autointeracciones el número de fusiones rápidamente se estanca por lo que la mayor parte de los objetos tienen una masa de $0.1 M_{\oplus}$. Por otro lado, el caso que contempla también a las interacciones gravitacionales muestra objetos con masas que no superan las $0.4 M_{\oplus}$ mientras que al considerar todas las interacciones se logran obtener planetas de casi $1 M_{\oplus}$ en los 40000 años de la simulación. Esto hace evidente que las interacciones térmicas no sólo ayudan a evitar que los objetos caigan en la estrella, también favorecen las fusiones entre ellos.

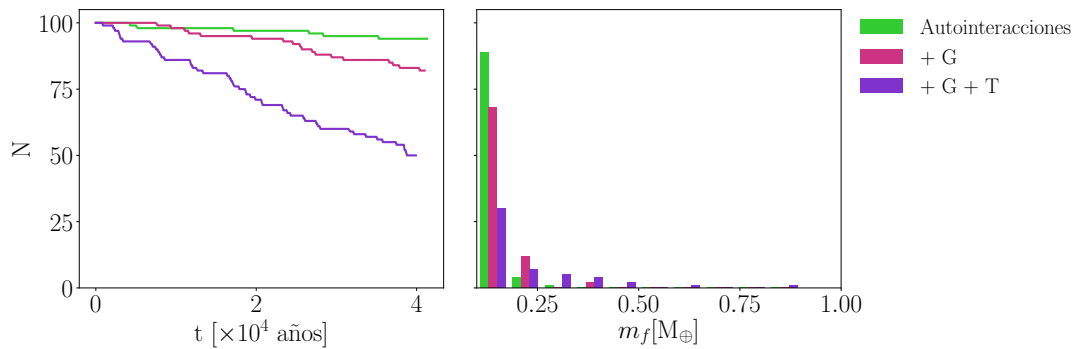


Figura 4.15: El gráfico del lado izquierdo muestra los instantes en que tuvieron lugar las fusiones y el del lado derecho un histograma con la distribución de masa al final de la simulación. En verde se muestra el resultado para el experimento con sólo autointeracciones, en rosa con autointeracciones y las interacciones gravitacionales con el disco y en morado con las interacciones conjuntas.

5

Conclusiones

En este trabajo incorporamos en el código de N-cuerpos REBOUND expresiones semianalíticas que reproducen el efecto de las interacciones entre un planeta y su disco progenitor: las gravitacionales dadas por las resonancias de Lindblad y corrotación y las térmicas, dadas por la presencia de difusividad térmica finita χ en el modelo del disco y por la luminosidad del planeta. Ambos mecanismos ejercen mareas sobre los planetas que modifican su órbita. Esta implementación nos permitió hacer un mayor número de experimentos numéricos en un tiempo menor y gastando menos recursos de cómputo contrastándolo con simulaciones hidrodinámicas: mientras que en nuestro caso estudiar la evolución de un embrión individual por 50000 años toma aproximadamente 15 minutos con 1 CPU, las simulaciones HD de este tipo demoran más de tres meses utilizando 4 GPUs.

Con esta implementación caracterizamos la evolución orbital de los planetas en función de su luminosidad adimensional ℓ . Observamos que, a grandes rasgos, la forma en que la componente térmica impacta la evolución del embrión clasifica a los objetos en dos grupos: planetas con $\ell < 1$ en los que la fuerza térmica es negativa y objetos con $\ell > 1$ en los que la fuerza térmica es positiva.

Los planetas que cumplen con $\ell < 1$ los llamamos embriones fríos y bajo nuestras suposiciones corresponden a objetos con una masa $m < 0.27 M_{\oplus}$. En este caso la presencia del embrión forma estructuras frías y sobredensas en su vecindad. La presencia de estas estructuras se distingue por hacer migrar a los planetas hacia las regiones internas del disco y por amortiguar su excentricidad e inclinación.

Esto ocurre más rápidamente que en el caso gravitacional ya que la escala de evolución del semieje mayor por las fuerzas térmicas es $\tau_{T,c} = 0.28\tau_{G,c}$ mientras que la de la excentricidad y la inclinación es $\tau_{T,ei} = 0.24\tau_{G,ei}$.

Los objetos con $\ell > 1$ fueron nombrados embriones calientes y con el modelo que usamos para ℓ corresponden a masas $m > 0.27 M_{\oplus}$. En este caso la presencia del planeta forma estructuras calientes y subdensas en el gas. En este régimen la evolución orbital se caracteriza por lo siguiente:

- La dirección de la migración puede ser hacia regiones externas o internas del disco. Inicialmente el efecto de las interacciones se concentra en hacer que el planeta alcance una excentricidad de saturación e_{sat} . Mientras que este valor se alcanza el signo de la migración es el mismo que el signo que tiene de/dt (positivo si la excentricidad inicial es menor que e_{sat} , negativo si es mayor). Cuando el planeta alcanza e_{sat} , el sentido de la migración depende del signo de la torca sobre el planeta. La torca es positiva a partir de un radio que depende de la masa del planeta: entre menos masivo sea el objeto, más externo es el radio donde la migración hacia afuera comienza.
- Como dijimos, debido a la presencia de las interacciones el planeta alcanza una excentricidad de saturación e_{sat} . Esto se debe a que el trabajo de las interacciones térmicas dominan hasta que la excentricidad llega a e_{sat} , momento en el que el trabajo de las interacciones gravitacionales cancela el trabajo de la fuerza térmica permitiendo a e mantenerse constante en el tiempo. Analíticamente se obtuvo que el valor de la excentricidad de saturación escala como la relación de aspecto h del disco. Además, observamos que e_{sat} depende de la masa (haciéndose más grande conforme ésta aumenta) y del semieje mayor (volviéndose más pequeña entre más lejano se encuentre el planeta de la estrella).
- Cuando la órbita del planeta tiene una inclinación $i \neq 0$ la fuerza térmica, de magnitud F_T , se separa en una proyección horizontal que perturba la excentricidad y en una vertical que busca amortiguar la inclinación. Esto hace que el efecto neto de la fuerza térmica en cada elemento orbital sea más débil que el que se obtiene al considerar cada uno de forma aislada. En cualquier caso, la inclinación siempre se hace cero.

Cuando concluimos la caracterización de la evolución orbital, estudiamos cómo la presencia de las interacciones térmicas afecta la capacidad de un enjambre de embriones para acretar material. Para ello construimos un enjambre con $10 M_{\oplus}$ distribuidas en 100 objetos. Éstos se colocaron de forma aleatoria con una ley de potencia $\sigma \propto r^1$ entre 1 y 3 ua y con una semilla de excentricidad e inclinación dada por distribuciones de Rayleigh en las que se usó $\sigma_e = 0.01$ y $\sigma_i = 0.005$.

En las etapas tempranas de la simulación, ya que los objetos se comportan como embriones fríos, el enjambre de embriones se enfría dinámicamente más rápidamente que en el caso con sólo interacciones gravitacionales. Cuando el disco se encuentra dinámicamente frío los encuentros cercanos y las fusiones

entre objetos se favorecen, permitiendo que los planetas crezcan. Cuando alguno de ellos alcanza la masa necesaria para entrar en el régimen de embriones calientes, el planeta rápidamente alcanza e_{sat} ayudando al material a migrar hacia afuera y a interactuar con más objetos en el proceso. Esto muestra que la inclusión de las interacciones térmicas favorece la formación de objetos con $1 M_{\oplus}$ en un tiempo hasta 5 veces menor que cuando sólo se incluyen las gravitacionales. Además, el mecanismo de migración del caso térmico resguarda al material en regiones externas permitiendo la supervivencia del material.

En trabajos futuros planeamos enfocarnos en dos aspectos:

- El primero consiste en la realización de simulaciones hidrodinámicas que permitan corroborar las predicciones analíticas existentes sobre los efectos térmicos, delinear su régimen de validez y proponer extensiones y/o modificaciones a dichas predicciones. Particularmente nos interesa entender mejor cómo se da el desvanecimiento de la fuerza térmica.
- En la segunda seguiremos trabajando en mejorar esta implementación. De forma específica deseamos incorporar tanto una mejor expresión para el desvanecimiento de la fuerza térmica como la inyección de energía después de cada fusión asociado al cambio en la energía del sistema y mejorando el modelo empleado para ℓ .

Con lo anterior podremos estudiar los procesos de formación planetaria con modelos con mayor complejidad y realismo.



Conceptos de mecánica celeste

A.1. Revisión al problema de Kepler

El problema de Kepler es un caso especial del problema de dos cuerpos. En éste, dos cuerpos de masas M y m separados una distancia r interactúan por medio de una fuerza central, que está dirigida a lo largo de una recta radial a un centro fijo y cuya magnitud sólo depende de la coordenada radial r , que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Dicha fuerza puede ser atractiva o repulsiva. En el caso del problema de Kepler, la fuerza central está dada por la ley de Gravitación Universal, es decir,

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$$

con G la constante de Gravitación Universal. Como en el problema de Kepler estamos tratando con una fuerza central el momento angular se conservan. Además, la energía también se conserva ya que el potencial de Kepler no depende explícitamente del tiempo. Si suponemos que $m \ll M$ y m podemos definir los términos momento angular específico $\mathbf{j}$ y energía mecánica total específica ε dadas por

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{A.1}$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad (\text{A.2})$$

Sin embargo, es importante recordar que tanto la energía mecánica total como el momento angular son proporcionales a la masa del objeto, es decir, $E = m\varepsilon$ y $\mathbf{J} = m\mathbf{j}$.

A.1.1. Leyes de Kepler

A.1.1.a. Primera ley de Kepler

En el problema de Kepler se busca conocer la posición de los dos cuerpos como función del tiempo, lo cual se consigue a partir de las constantes de movimiento definidas en A.1 y A.2. Suponiendo que la masa del planeta que órbita al cuerpo central cumple que $m \ll M$ esto se reduce al problema de un cuerpo y la ecuación para su trayectoria es

$$r(f) = \frac{\frac{j^2}{GM}}{1 + \frac{B}{GM} \cos f} \quad (\text{A.3})$$

donde f es una cantidad que representa el ángulo entre la posición instantánea de m medido desde su posición más cercana a M (periastro) y se conoce como anomalía verdadera. Al comparar la A.3 con la ecuación polar de una sección cónica,

$$r(f) = \frac{p}{(1 + e \cos f)} \quad (\text{A.4})$$

se observa que la órbita sigue una cónica con excentricidad e y semilado recto p (tabla A.1).

Tabla A.1: Valores de la excentricidad e , semilado recto p , momento angular J y energía E según el tipo de cónica que describe la trayectoria.

Cónica	e	p	J	E
Circunferencia	$e = 0$	r	$m (GMr)^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{GMm}{2a}$
Elipse	$0 < e < 1$	$a(1 - e^2)$	$m [GMa (1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{GMm}{2a}$
Parábola	1	$2r_{\text{mín}}$	$m (2GMr_{\text{mín}})^{\frac{1}{2}}$	0
Hipérbola	$e > 1$	$a(e^2 - 1)$	$m [GMa (e^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{GMm}{2a}$

Reescribiendo, la ecuación de la órbita queda como

$$r(f) = \frac{\frac{j^2}{GM}}{1 + e \cos f} \quad (\text{A.5})$$

y se observa la primera ley de Kepler, la cual establece que la trayectoria del planeta sigue una sección cónica donde el objeto central está ubicado en uno de los focos (figura A.1).

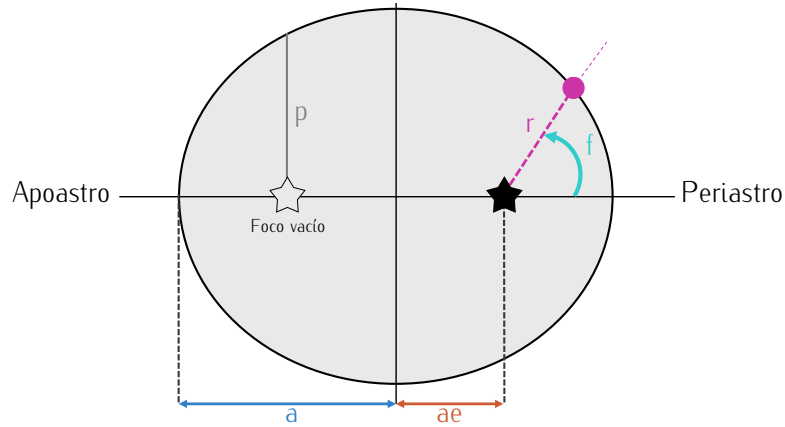


Figura A.1: La geometría de una elipse con semieje mayor a , excentricidad e y semilado recto p . En turquesa se muestra la anomalía verdadera f .

A.1.1.b. Segunda ley de Kepler

Para obtener la segunda ley de Kepler necesitamos conocer la magnitud del momento angular específico j . Suponiendo que el plano orbital es el XY , la posición y la velocidad del planeta pueden escribirse como

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{df}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (\text{A.7})$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ son los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

Sustituyendo A.7 en A.1 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= r^2 \frac{df}{dt} \hat{\mathbf{u}}_z \end{aligned}$$

por lo tanto, la magnitud del momento angular específico está dada por

$$j = r^2 \frac{df}{dt} \quad (\text{A.8})$$

Recordando que el elemento diferencial de área en estas coordenadas es $dA = \frac{1}{2}r^2 df$ obtenemos

que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{j}{2} \quad (\text{A.9})$$

A partir de este resultado se sigue la segunda ley de Kepler: ya que el momento angular es una cantidad constante, las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales. Como se puede observar, esta ecuación sigue siendo válida aún para órbitas descritas para una parábola o una hipérbola.

A.1.1.c. Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler nos da la relación entre el periodo orbital T del planeta y el semieje mayor de su órbita a por lo que sólo es válida para órbitas cerradas. Por esto, de aquí en adelante trataremos con órbitas estrictamente elípticas. En la tabla A.1 vemos que su energía mecánica ε y momento angular j específicos están dados por

$$\varepsilon = -\frac{GM}{2a} \quad (\text{A.10})$$

$$j = [GMa(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.11})$$

Así, usando A.11 y A.5, se observa que la ecuación de una órbita elíptica es

$$r(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo A.11 y A.12 en A.8 se tiene que

$$[GMa(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \right]^2 \frac{df}{dt}$$

es decir

$$\frac{df}{dt} = \left[\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3} \right]^{\frac{1}{2}} (1 + e \cos f)^2 \quad (\text{A.13})$$

Esta expresión se puede reescribir e integrar a lo largo de un periodo orbital T

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{df}{(1 + e \cos f)^2} &= \left[\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^T dt \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} &= \left[\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3} \right]^{\frac{1}{2}} T \end{aligned}$$

de donde se obtiene la tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{2\pi}{GM} a^3 \quad (\text{A.14})$$

A partir de la tercera ley de Kepler es sencillo encontrar la expresión de la frecuencia angular kepleriana Ω_p usando la tercera ley. Esto se obtiene recordando que Ω_p se define como la distancia angular total entre el tiempo que se tarda en recorrerla, es decir, $\Omega_p = 2\pi/T$. Así, frecuencia angular es

$$\Omega_p = \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.15})$$

A.1.2. Elementos orbitales

Como vimos, una órbita puede caracterizarse con la información dada por su energía y momento angular. Sin embargo, si lo que buscamos es dar una descripción completa de la órbita del planeta debemos emplear los elementos orbitales. Estos describen la forma, tamaño y orientación de la órbita en el espacio. Hasta el momento hemos revisado someramente tres de estas seis cantidades: el semieje mayor a , la excentricidad e y la anomalía verdadera f : mientras que tanto el semieje mayor a como la excentricidad e dan una idea inmediata del tamaño y la forma que tiene la órbita, la anomalía verdadera f da el ángulo medido desde el periastro hasta donde está ubicado el planeta en algún momento dado. Así, estas tres cantidades permiten visualizar cómo se comporta la órbita dentro de su plano orbital (figura A.1).

El valor de a , e , y f puede determinarse rápidamente con las expresiones A.2, A.11 y A.12, es decir,

$$a = -\frac{GM}{2} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

$$e = \left(1 - \frac{j^2}{GMa} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$f = \arccos \left[\frac{r - a(1 - e^2)}{er} \right] \quad (\text{A.18})$$

Si deseamos visualizar la órbita en un espacio de tres dimensiones debemos dar otros tres elementos orbitales: la inclinación i , la longitud del nodo ascendente ψ y el argumento del periastro ω . Primero necesitamos orientar la órbita en el espacio a partir de la ubicación de la línea de nodos. Esta línea se define como la intersección entre el plano que contiene la órbita del planeta y el plano de referencia. Esta línea da lugar a dos nodos: el ascendente que es el punto donde el objeto cruza el plano de referencia hacia el norte y el descendente donde lo hace hacia el sur. La inclinación i describe el ángulo

del plano que contiene la órbita del objeto con respecto al plano de referencia. Si $i < 90^\circ$ se dice que la órbita es prógrada, si $i > 90^\circ$ la órbita se llama retrógrada y si $i = 90^\circ$ la órbita se conoce como polar. Así, la longitud del nodo ascendente ψ es el ángulo medido desde una dirección de referencia arbitraria X hacia el nodo ascendente mientras que el argumento del periastro ω es el ángulo medido desde el nodo ascendente hacia el lugar donde el periastro tiene lugar. Por último, a veces se utiliza el ángulo ϑ que se forma entre el nodo ascendente y la posición del planeta $\vartheta = \omega + f$ conocido como argumento de la latitud (figura A.2).

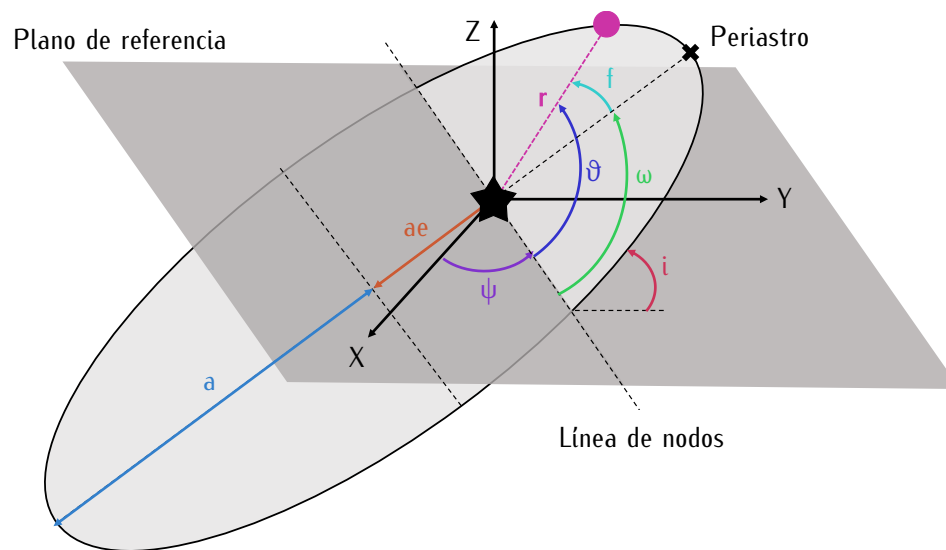


Figura A.2: Elementos orbitales de un planeta que orbita un objeto central en un espacio de tres dimensiones.

Para saber el valor de i , ψ , ϑ y ω se utilizan las componentes del momento angular específico $\mathbf{j}$,

$$j_x = yv_z - zv_y = j \sin i \sin \psi \quad (\text{A.19})$$

$$j_y = zv_x - xv_z = -j \sin i \cos \psi \quad (\text{A.20})$$

$$j_z = xv_y - yv_x = j \cos i \quad (\text{A.21})$$

En el caso de la inclinación i y de la longitud del nodo ascendente ψ se tiene

$$i = \arccos \left(\frac{j_z}{j} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\psi = \arctan \left(-\frac{j_x}{j_y} \right) \quad (\text{A.23})$$

Mientras que el argumento de la latitud ϑ está dado por (Taff, 1985)

$$\vartheta = \frac{(-x \sin \psi + y \cos \psi) \cos i + z \sin i}{x \cos \psi + y \sin \psi}$$

y el argumento del periastro es

$$\omega = \vartheta - f = \frac{(-x \sin \psi + y \cos \psi) \cos i + z \sin i}{x \cos \psi + y \sin \psi} - f \quad (\text{A.24})$$

En conjunto $\{a, e, i, \psi, \omega, f\}$ constituyen los llamados elementos orbitales y dan una descripción completa de la órbita. Es importante notar que en el problema de Kepler todos los elementos orbitales son constantes salvo la anomalía verdadera f . Esta cantidad y la distancia r al cuerpo central son funciones no lineales consecuencia de que el planeta se mueve más rápidamente en su perihelio que en el afelio. Esto se puede ver con las expresiones

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{GM}{a(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} e \sin f \quad (\text{A.25})$$

$$r \frac{df}{dt} = \left[\frac{GM}{a(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} (1 + e \cos f) \quad (\text{A.26})$$

obtenidas a partir de A.3 y A.13.

A.2. Órbitas perturbadas

La variación del resto de los elementos orbitales, consecuencia de una perturbación $d\mathbf{F}$ en la fuerza, fue estudiada por Burns (1976). Él analizó cómo la perturbación conlleva a un cambio en la energía y en el momento angular que hacen evolucionar a los elementos orbitales del planeta. Para reproducir su trabajo obtendremos expresiones para dE/dt y dJ/dt ante una perturbación de dos maneras: la primera, usando las expresiones para la energía y momento angular de una órbita elíptica (ecuaciones A.10 y A.11); la segunda, partiendo de las ecuaciones A.6 y A.7 y asumiendo que la fuerza por unidad de masa asociada a la perturbación está dada por

$$d\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{u}}_r + F_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + F_z \hat{\mathbf{u}}_z \quad (\text{A.27})$$

con F_r y F_θ corresponden a las componentes de la fuerza sobre el plano orbital y F_z es la componente normal a él en un sistema de coordenadas cilíndrico. Una vez hecho esto, estudiaremos cómo evolucionan los elementos orbitales.

A.2.1. Evolución de la energía y momento angular

A.2.1.a. Evolución de la energía

Por un lado, el cambio en la energía está dado por

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{dF} \cdot \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} F_r + r \frac{df}{dt} F_\theta$$

Usando las expresiones A.25 y A.26

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \left[\frac{GM}{a(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} e \sin f F_r + \left[\frac{GM}{a(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} (1 + e \cos f) F_\theta \\ &= \left[\frac{GM}{a^3} \frac{1}{(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} a [e \sin f F_r + (1 + e \cos f) F_\theta] \end{aligned}$$

Usando que $\Omega_p = (GM/a^3)^{\frac{1}{2}}$ se tiene

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{a\Omega_p}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1 + e \cos f) F_\theta] \quad (\text{A.28})$$

Por otro lado, ya que $\varepsilon = -\frac{GM}{2a}$ tenemos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{GM}{2a} \right) = \frac{GM}{a^3} \frac{da}{2dt}$$

Usando nuevamente A.15 tenemos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{a\Omega_p^2}{2} \frac{da}{dt} \quad (\text{A.29})$$

A.2.1.b. Evolución del momento angular

En el caso del momento angular tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \mathbf{r} \times \mathbf{dF} \\ &= r F_\theta \hat{\mathbf{u}}_z - r F_z \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

como F_z es ortogonal al plano de la órbita, la norma del cambio en el momento angular es

$$\frac{dj}{dt} = r F_\theta \quad (\text{A.31})$$

Por otra parte, de la ecuación A.11 tenemos que $j = [GMa(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}$, por lo que

$$\begin{aligned}
 \frac{dj}{dt} &= (GM)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left\{ [a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 &= (GM)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d[a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}}{da} \frac{da}{dt} + \frac{d[a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}}{de} \frac{de}{dt} \right\} \\
 &= (GM)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{[a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}}{2a} \frac{da}{dt} - \frac{ae}{[a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt} \right\} \\
 &= \frac{1}{2a} [GMa(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} \frac{da}{dt} - ae \left[\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{de}{dt} \\
 &= \frac{1}{2} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{GM}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{da}{dt} - \frac{e}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} (GMa)^{\frac{1}{2}} \frac{de}{dt} \\
 &= \frac{a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{da}{dt} - \frac{a^2 e}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{de}{dt}
 \end{aligned}$$

Usando que $\Omega_p = (GM/a^3)^{\frac{1}{2}}$ se ve que el cambio de la norma del momento angular es

$$\frac{dj}{dt} = \frac{a\Omega_p(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{da}{dt} - \frac{a^2 e\Omega_p}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt} \quad (\text{A.32})$$

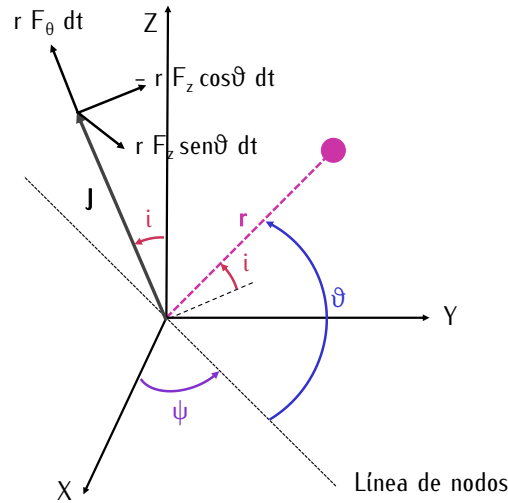


Figura A.3: Cambio del momento angular $\mathbf{J}$ bajo la acción de la perturbación $d\mathbf{F}$ (esquema adaptado de Burns, 1976).

Para estudiar la evolución de los elementos orbitales también es de utilidad conocer cómo evolucionan las componentes del momento angular. Haciendo uso del diagrama A.3 se puede observar que dichas componentes son

$$\frac{dj_{x'}}{dt} = r [F_{\theta} \sin i \sin \psi + F_z (\sin \vartheta \cos \psi + \cos \vartheta \cos i \sin \psi)] \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{dj_{y'}}{dt} = r [-F_{\theta} \sin i \cos \psi + F_z (\sin \vartheta \sin \psi - \cos \vartheta \cos i \cos \psi)] \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{dj_{z'}}{dt} = r (F_{\theta} \cos i - F_z \cos \vartheta \sin i) \quad (\text{A.35})$$

A.2.2. Evolución de los elementos orbitales

A.2.2.a. Evolución del semieje mayor a

Igualando las expresiones del cambio en la energía (ecuaciones A.28 y A.29) se tiene que

$$\frac{a\Omega_p^2}{2} \frac{da}{dt} = \frac{a\Omega_p}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1 + e \cos f) F_{\theta}]$$

con lo cual, la evolución del semieje mayor en el tiempo está dada por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\Omega_p (1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1 + e \cos f) F_{\theta}] \quad (\text{A.36})$$

lo cual implica que únicamente fuerzas en el plano de la órbita pueden modificar el semieje mayor.

A.2.2.b. Evolución de la excentricidad e

Igualando las ecuaciones para el cambio en el momento angular (A.31 y A.32) tenemos

$$rF_{\theta} = \frac{a\Omega_p (1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{da}{dt} - \frac{a^2 e \Omega_p}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{de}{dt}$$

de donde

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 e \Omega_p} \left[\frac{a\Omega_p (1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{da}{dt} - rF_{\theta} \right] = \frac{1-e^2}{2ae} \frac{da}{dt} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 e \Omega_p} rF_{\theta}$$

Sustituyendo la ecuación A.12 se tiene

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{2ae} \frac{da}{dt} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 e \Omega_p} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} F_\theta \\ &= \frac{1-e^2}{ae} \left[\frac{1}{2} \frac{da}{dt} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_p (1+e \cos f)} F_\theta \right]\end{aligned}$$

Usando la expresión para la evolución temporal del semieje mayor (ecuación A.36) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ae} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2}{\Omega_p (1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1+e \cos f) F_\theta] - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_p (1+e \cos f)} F_\theta \right\} \\ &= \frac{1-e^2}{ae \Omega_p} \left\{ \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} e \sin f F_r + \left[\frac{1+e \cos f}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e \cos f} \right] F_\theta \right\} \\ &= \frac{1-e^2}{ae \Omega_p} \left[\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} e \sin f F_r + \frac{(1+e \cos f)^2 - (1-e^2)}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} (1+e \cos f)} F_\theta \right] \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a \Omega_p} \left(\sin f F_r + \frac{e + \cos f + \cos f + e \cos^2 f}{1+e \cos f} F_\theta \right) \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a \Omega_p} \left[\sin f F_r + \frac{e + \cos f + \cos f (1+e \cos f)}{1+e \cos f} F_\theta \right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión para la evolución temporal de la excentricidad queda como

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a \Omega_p} \left[\sin f F_r + \left(\cos f + \frac{e + \cos f}{1+e \cos f} \right) F_\theta \right] \quad (\text{A.37})$$

que muestra que, como en el caso del semieje mayor a , únicamente fuerzas en el plano orbital pueden modificar la excentricidad.

A.2.2.c. Evolución de la inclinación i

Derivando con respecto del tiempo la expresión para la inclinación i en función del momento angular $\mathbf{j}$ mostrada en A.22 tenemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\left[\left(\frac{j}{j_z} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{j} \frac{dj}{dt} - \frac{1}{j_z} \frac{dj_z}{dt} \right)$$

De aquí, usando la expresión de la componente z del momento angular (ecuación A.21) y de la norma y componente z de la torca (ecuaciones A.31 y A.35) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\cos i}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{rF_\theta}{j} - \frac{r}{j \cos i} (F_\theta \cos i - F_z \cos \vartheta \sin i) \right] \\ &= \frac{1}{(\sec^2 i - 1)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{r}{j} (F_\theta - F_\theta + F_z \cos \vartheta \tan i) \right] = \frac{r}{j} \cos \vartheta F_z\end{aligned}$$

En esta expresión puede observarse que el cambio en la inclinación, debido al término $r \cos \vartheta F_z$, está en función de la componente de la torca que rota con el vector del momento angular alrededor de la línea de nodos (ver figura A.3).

El cociente entre la posición r del planeta y su momento angular j se obtiene usando las ecuaciones A.11 y A.12, es decir,

$$\frac{r}{j} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \frac{1}{[GMa(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \left[\frac{a^3}{GM} (1-e^2) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+e \cos f}$$

de donde

$$\frac{r}{j} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a\Omega_p(1+e \cos f)} \quad (\text{A.38})$$

Así, sustituyendo A.38 obtenemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a\Omega_p} \frac{\cos \vartheta}{1+e \cos f} F_z \quad (\text{A.39})$$

donde vemos que sólo fuerzas normales al plano orbital pueden modificar la inclinación.

A.2.2.d. Evolución de la longitud del nodo ascendente ψ

Derivando la expresión A.23 se tiene que

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{j_x^2 + j_y^2} \left(j_x \frac{dj_y}{dt} - j_y \frac{dj_x}{dt} \right)$$

Por el número de términos es más sencillo manejar esta expresión separándola en su numerador y denominador. Usando las componentes x y y del momento angular $\mathbf{j}$ (ecuaciones A.19 y A.20) y de sus derivadas (ecuaciones A.33 y A.34) se tiene que el numerador está dado por

$$\begin{aligned}
j_x \frac{dj_y}{dt} - j_y \frac{dj_x}{dt} &= jr \sin i [\sin \psi (-F_\theta \sin i \cos \psi + F_z \sin \vartheta \sin \psi + F_z \cos \vartheta \cos i \cos \psi) + \\
&\quad \cos \psi (F_\theta \sin i \sin \psi + F_z \sin \vartheta \cos \psi - F_z \cos \vartheta \cos i \sin \psi)] \\
&= jr \sin i [F_\theta (-\sin \psi \sin i \cos \psi + \cos \psi \sin i \sin \psi) + \\
&\quad F_z (\sin \psi \sin \vartheta \sin \psi + \cos \psi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \psi \cos \vartheta \cos i \cos \psi - \cos \psi \cos \vartheta \cos i \sin \psi)] \\
&= jr \sin i \sin \vartheta F_z
\end{aligned}$$

Por otro lado, el denominador queda como

$$j_x^2 + j_y^2 = j^2 \sin^2 i \sin^2 \psi + j^2 \sin^2 i \cos^2 \psi = j^2 \sin^2 i$$

y $d\psi/dt$ es

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{jr \sin i \sin \vartheta F_z}{j^2 \sin^2 i} = \frac{r \sin \vartheta}{j \sin i} F_z$$

Como fue en el caso de la inclinación, podemos identificar algunas componentes en la última expresión: el término $r \sin \vartheta F_z$ está asociado a la torca haciendo precesar el plano de la órbita, mientras que el término $j \sin i$ es la componente del momento angular normal a la línea de nodos en el plano de referencia (ver figura A.3).

Recuperando el resultado para $\frac{r}{j}$ obtenido en A.38 vemos que la variación temporal de la longitud del nodo ascendente ψ es

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{a\Omega_p} \frac{\sin \vartheta}{\sin i (1 + e \cos f)} F_z \quad (\text{A.40})$$

Esto muestra que, como en el caso de la inclinación, la longitud del nodo ascendente ψ sólo se modifican si existen fuerzas normales al plano orbital.

A.2.2.e. Evolución del argumento del periastro ω

De la expresión del cociente r/j obtenida en A.38 tenemos

$$j = \frac{a\Omega_p r}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + e \cos f)$$

Elevando al cuadrado y usando A.15 se tiene

$$j^2 = \frac{r^2}{1 - e^2} \frac{GM}{a} (1 + e \cos f)^2$$

Sustituyendo A.12 únicamente en una r tenemos

$$j^2 = r \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 + e \cos f)^2 = rGM(1 + e \cos f)$$

Usando que, de las expresiones para A.10 y A.17, la excentricidad se puede escribir en función de la energía y momento angular específico como

$$e = \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.41})$$

el cuadrado de la norma del momento angular específico se reescribe como

$$j^2 = rGM \left\{ 1 + \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos f \right\}$$

De la expresión A.24 tenemos que $f = \vartheta - \omega$, de modo que

$$\frac{j^2}{rGM} = 1 + \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\vartheta - \omega) \quad (\text{A.42})$$

Si nos interesa estudiar el cambio en los elementos orbitales debido a la aplicación instantánea de la fuerza externa $\mathbf{dF}$, podemos suponer que r no cambia mientras que ε , j y ϑ sí lo hacen. Así, derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{rGM} j \frac{dj}{dt} &= \cos(\vartheta - \omega) \frac{d}{dt} \left\{ \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} [\cos(\vartheta - \omega)] \\ &= \frac{\cos(\vartheta - \omega)}{(GM)^2} \frac{j \left(j \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon \frac{dj}{dt} \right)}{\left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \left[1 + 2\varepsilon \left(\frac{j}{GM} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sin(\vartheta - \omega) \left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right) \end{aligned}$$

De la ecuación podemos despejar $d\omega/dt$. Usando A.41 y que $f = \vartheta - \omega$, obtenemos

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{j}{eGM \sin f} \left[\frac{2}{r} \frac{dj}{dt} - \frac{\cos f}{eGM} \left(j \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon \frac{dj}{dt} \right) \right] = \frac{d\vartheta}{dt} + \mathfrak{C} \quad (\text{A.43})$$

Recordando que el cambio instantáneo en ϑ se debe únicamente al cambio en la ubicación de la línea de nodos y que la ubicación de esta línea está asociada a la longitud del nodo ascendente ψ se tiene que

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} \cos i \quad (\text{A.44})$$

El segundo término en A.43 lo podemos escribir en función de las componentes de la fuerza usando A.10, A.11, A.12, A.15, A.28 y A.31, es decir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{[GMa(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}}{GMe \sin f} \left\{ \frac{2}{r} r F_{\theta} - \frac{\cos f}{eGM} \left\{ \frac{a\Omega_p [GMa(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1+e \cos f) F_{\theta}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2GMa(1-e^2)}{2a(1+e \cos f)} F_{\theta} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{e \sin f} \left[\frac{a(1-e^2)}{GM} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 2F_{\theta} - \frac{\cos f}{e} \left\{ \Omega_p \left(\frac{a^3}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} [e \sin f F_r + (1+e \cos f) F_{\theta}] - \frac{1-e^2}{1+e \cos f} F_{\theta} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{ae \sin f} \left[\frac{a^3}{GM} (1-e^2) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 2F_{\theta} - \frac{\cos f}{e} \left\{ e \sin f F_r + \frac{F_{\theta}}{1+e \cos f} [(1+e \cos f)^2 - 1 + e^2] \right\} \right\} \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p \sin f} \left\{ 2F_{\theta} - \cos f \left[\sin f F_r + \frac{(e \cos^2 f + 2 \cos f + e)}{1+e \cos f} F_{\theta} \right] \right\} \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p \sin f} \left[-F_r \sin f \cos f + F_{\theta} \frac{2(1+e \cos f) - \cos f (e \cos^2 f + 2 \cos f + e)}{1+e \cos f} \right] \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p \sin f} \left[-F_r \sin f \cos f + F_{\theta} \frac{2(1-\cos^2 f) + e \cos f (1-\cos^2 f)}{1+e \cos f} \right] \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p \sin f} \left[-F_r \sin f \cos f + F_{\theta} \frac{2 \sin^2 f + e \cos f \sin^2 f}{1+e \cos f} \right] \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p \sin f} \left[-F_r \sin f \cos f + F_{\theta} \frac{\sin^2 f (2+e \cos f)}{1+e \cos f} \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\mathfrak{C} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p} \left(-\cos f F_r + \sin f \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} F_{\theta} \right) \quad (\text{A.45})$$

Sustituyendo A.44 y A.45 en A.43 se tiene

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ae\Omega_p} \left(-\cos f F_r + \sin f \frac{2+e\cos f}{1+e\cos f} F_\theta \right) - \cos i \frac{d\psi}{dt} \quad (\text{A.46})$$

Con apoyo de la expresión A.40, observamos que el argumento del periastro es el único de los elementos orbitales que se ve afectado por las tres componentes de la fuerza externa $\mathbf{dF}$.

A.2.2.f. Expresiones finales

Algo importante a notar es que las expresiones A.36, A.37, A.39, A.40 y A.46 se obtuvieron con expresiones de la fuerza, energía y momento angular específicos (recordemos que $\varepsilon = \frac{E}{m}$ y $j = \frac{L}{m}$). Por lo anterior, hace falta introducir la masa m del planeta para considerar la fuerza sobre éste. Así,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{m\Omega_p(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [e \sin f F_r + (1+e \cos f) F_\theta] \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ma\Omega_p} \left[\sin f F_r + \left(\cos f + \frac{e + \cos f}{1+e \cos f} \right) F_\theta \right] \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ma\Omega_p} \frac{\cos \vartheta}{1+e \cos f} F_z \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{ma\Omega_p} \frac{\sin \vartheta}{\sin i (1+e \cos f)} F_z \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{mae\Omega_p} \left(-\cos f F_r + \sin f \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} F_\theta \right) - \cos i \frac{d\psi}{dt} \quad (\text{A.51})$$

A.2.3. Casos de (nuestro) interés

En la mayor parte de las expresiones de las fuerzas que describen las interacciones planeta-disco revisadas en el capítulo anterior, se considera el límite en el que $e, i \ll 1$. Tomando este límite en A.47, A.48, A.49, A.50 y A.51 obtenemos

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{m\Omega_p} F_\theta \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{ma\Omega_p} (F_r \sin f + 2F_\theta \cos f) \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{ma\Omega_p} \cos \vartheta F_z \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{mai\Omega_p} \sin \vartheta F_z \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{ma\Omega_p} \left[\frac{1}{e} (-F_r \cos f + 2F_\theta \sin f) - \frac{1}{i} \sin \vartheta F_z \right] \quad (\text{A.56})$$

las cuales serán las expresiones con las que trabajaremos en esta sección.

A.2.3.a. Órbita circular y en el plano

En los trabajos de Tanaka et al. (2002) y Masset (2017) se obtuvieron expresiones semianalíticas para las interacciones planeta-disco asumiendo que las órbitas eran circulares y en el plano. Así, la expresión que se usa para describir la evolución del semieje mayor conservaremos A.52, es decir

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{m\Omega_p} \mathcal{F}' \quad (\text{A.57})$$

donde se observa que para introducir la evolución del semieje mayor sólo es necesario modificar la componente F_θ (a quien llamamos $\mathcal{F}'$) de la fuerza.

A.2.3.b. Órbita excéntrica e inclinada

Para estudiar analíticamente el impacto de los trabajos de Tanaka & Ward (2004) y Fromenteau & Masset (2019) se usa que las componentes de $\mathbf{dF}$ se pueden escribir como

$$F_r = f_r (A_r^c \cos f + A_r^s \sin f) \quad (\text{A.58})$$

$$F_\theta = f_\theta (A_\theta^c \cos f + A_\theta^s \sin f) \quad (\text{A.59})$$

$$F_z = f_z (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \quad (\text{A.60})$$

donde los coeficientes A_r^c , A_r^s , A_θ^c , A_θ^s , A_z^c y A_z^s son cantidades adimensionales que se determinan numéricamente mientras que f_r , f_θ y f_z son las expresiones de la fuerza en cada componente asociada a la perturbación. La idea detrás de la forma de esta fuerza es que el planeta, que se encuentra describiendo un epiciclo, está sujeto a $\mathbf{dF} = (F_r, F_\theta, F_z)$ que hará que oscile con amplitudes dadas por los coeficientes $A_{r,\theta,z}^{c,s}$ y una frecuencia Ω_p .

Además, en este caso la descripción que se da utiliza la evolución promedio de los elementos orbitales sobre un periodo orbital, la cual se calcula con

$$\left\langle \frac{d\star}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \star(f) df \quad \text{o bien,} \quad \left\langle \frac{d\star}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \star(\vartheta) d\vartheta \quad (\text{A.61})$$

donde $\star$ representa al elemento en cuestión. Para hacer esto se usa que el valor promedio de una función

$g(x)$ en el intervalo (b, c) es $\langle g(x) \rangle = \frac{1}{c-b} \int_b^c g(x) dx$. En esta aproximación el cambio del semieje mayor a es cero y solamente los demás elementos orbitales evolucionan. Así, las tasas de cambio de e , i , ψ y ω son

La evolución de la excentricidad e

Usando la expresión para e mostrada en A.53, las ecuaciones para F_r y F_θ de A.58 y A.59 respectivamente, y A.61 tenemos

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{ma\Omega_p} [f_r (A_r^c \cos f + A_r^s \sin f) \sin f + 2f_\theta (A_\theta^c \cos f + A_\theta^s \sin f) \cos f] df \\
 &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} \left[f_r \int_0^{2\pi} (A_r^c \cos f + A_r^s \sin f) \sin f df + 2f_\theta \int_0^{2\pi} (A_\theta^c \cos f + A_\theta^s \sin f) \cos f df \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} \left[f_r \left(A_r^c \int_0^{2\pi} \cos f \sin f df + A_r^s \int_0^{2\pi} \sin^2 f df \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2f_\theta \left(A_\theta^c \int_0^{2\pi} \cos^2 f df + A_\theta^s \int_0^{2\pi} \sin f \cos f df \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} \{ f_r [A_r^c \cdot 0 + A_r^s \cdot \pi] + 2f_\theta [A_\theta^c \cdot \pi + A_\theta^s \cdot 0] \} \\
 &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} (\pi f_r A_r^s + 2\pi f_\theta A_\theta^c)
 \end{aligned}$$

de donde

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{1}{ma\Omega_p} \left(\frac{A_r^s}{2} f_r + A_\theta^c f_\theta \right) \quad (\text{A.62})$$

La evolución de la inclinación i

Usando la expresión para i mostrada en A.54, la ecuación para F_z de A.60 y A.61 tenemos

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{ma\Omega_p} f_z (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{f_z}{2\pi ma\Omega_p} \int_0^{2\pi} (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{f_z}{2\pi ma\Omega_p} \left(A_z^c \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta + A_z^s \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right) \\
 &= \frac{f_z}{2\pi ma\Omega_p} [A_z^c \cdot \pi + A_z^s \cdot 0]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{ma\Omega_p} \frac{A_z^c}{2} f_z \quad (\text{A.63})$$

La evolución de la longitud del nodo ascendente ψ

Usando la expresión para ψ mostrada en A.55, la ecuación para F_z de A.60 y A.61 tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{mai\Omega_p} f_z (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{f_z}{2\pi mai\Omega_p} \int_0^{2\pi} (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{f_z}{2\pi mai\Omega_p} [A_z^c \cdot 0 + A_z^s \cdot \pi] \end{aligned}$$

de donde

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = \frac{1}{mai\Omega_p} \frac{A_z^s}{2} f_z \quad (\text{A.64})$$

La evolución del argumento del periastro ω

Usando la expresión para ω mostrada en A.56, las ecuaciones para F_r , F_θ y F_z de A.58, A.59 y A.60 respectivamente, y A.61 tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{mae\Omega_p} \left[\int_0^{2\pi} -f_r (A_r^c \cos f + A_r^s \sin f) \cos f + 2f_\theta (A_\theta^c \cos f + A_\theta^s \sin f) \sin f df \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{mai\Omega_p} \int_0^{2\pi} f_z (A_z^c \cos \vartheta + A_z^s \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} \left[\frac{1}{e} \left(-f_r \int_0^{2\pi} A_r^c \cos^2 f + A_r^s \sin f \cos f df \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2f_\theta \int_0^{2\pi} A_\theta^c \cos f \sin f + A_\theta^s \sin^2 f df \right) - \frac{1}{i} \left(f_z \int_0^{2\pi} A_z^c \cos \vartheta \sin \vartheta + A_z^s \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi ma\Omega_p} \left\{ \frac{1}{e} \left[-f_r \left(A_r^c \int_0^{2\pi} \cos^2 f df + A_r^s \int_0^{2\pi} \sin f \cos f df \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2f_\theta \left(A_\theta^c \int_0^{2\pi} \cos f \sin f df + A_\theta^s \int_0^{2\pi} \sin^2 f df \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i} \left[f_z \left(A_z^c \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + A_z^s \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi m a e \Omega_p} \{-f_r [A_r^c \cdot \pi + A_r^s \cdot 0] + 2f_\theta [A_\theta^c \cdot 0 + A_\theta^s \cdot \pi]\} - \frac{1}{2\pi m a i \Omega_p} \{f_z [A_z^c \cdot 0 + A_z^s \cdot \pi]\}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{1}{ma\Omega_p} \left[\frac{1}{e} \left(-\frac{A_r^c}{2} f_r + A_\theta^s f_\theta \right) - \frac{1}{i} \frac{A_z^s}{2} f_z \right] \quad (\text{A.65})$$

Expresiones finales

Además, en Tanaka & Ward (2004) y Fromenteau & Masset (2019) se utiliza que las fuerzas f_r , f_θ y f_z son de la forma

$$f_r = e\mathcal{F} \quad (\text{A.66})$$

$$f_\theta = e\mathcal{F} \quad (\text{A.67})$$

$$f_z = i\mathcal{F} \quad (\text{A.68})$$

donde $\mathcal{F}$ contiene la física de la perturbación, las ecuaciones de la evolución promedio de los elementos orbitales (expresiones A.62, A.63, A.64 y A.65) adquieren la forma

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\mathcal{F}}{ma\Omega_p} \left(\frac{A_r^s}{2} + A_\theta^c \right) \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{\mathcal{F}}{ma\Omega_p} \frac{A_z^c}{2} \quad (\text{A.70})$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = \frac{\mathcal{F}}{ma\Omega_p} \frac{A_z^s}{2} \quad (\text{A.71})$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{\mathcal{F}}{ma\Omega_p} \left(-\frac{A_r^c}{2} + A_\theta^s - \frac{A_z^s}{2} \right) \quad (\text{A.72})$$

A.2.3.c. Escala temporal de evolución

Para el estudio de la evolución temporal de los elementos orbitales es conveniente definir escalas de tiempo que ayuden a ilustrar dicha evolución. Si nombramos

$$\tau_C = \frac{ma\Omega_p}{\mathcal{F}'} \quad (\text{A.73})$$

$$\tau_{EI} = \frac{ma\Omega_p}{\mathcal{F}} \quad (\text{A.74})$$

donde τ_C corresponde a la escala temporal de evolución del caso circular y en el plano mientras τ_{EI} está asociado al caso excéntrico e inclinado, las expresiones A.57, A.69, A.70, A.71 y A.72 se reducen a

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2}{\tau_C} \quad (A.75)$$

$$\frac{1}{e} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{EI}} \left(\frac{A_r^s}{2} + A_\theta^c \right) \quad (A.76)$$

$$\frac{1}{i} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{EI}} \frac{A_z^c}{2} \quad (A.77)$$

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{EI}} \frac{A_z^s}{2} \quad (A.78)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{EI}} \left(-\frac{A_r^c}{2} + A_\theta^s - \frac{A_z^s}{2} \right) \quad (A.79)$$

donde se observa que, bajo estas suposiciones, los elementos orbitales se excitarán o amortiguarán en el tiempo: la excentricidad y la inclinación lo harán de forma exponencial mientras que el semieje mayor, la longitud del nodo ascendente y el argumento del periastro lo harán de forma lineal.



B.1. Módulos en REBOUND

REBOUND es una paquetería de dominio público que contiene varios integradores de N-cuerpos. Puede obtenerse siguiendo las instrucciones que se muestran en <https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>. Está escrita completamente en C, aunque puede usarse desde C o Python. REBOUND es modular: el usuario personaliza sus experimentos numéricos eligiendo entre los distintos módulos de REBOUND y se especifican en un archivo externo que incluye a la paquetería como `rebound.h`. Los módulos disponibles son:

El método para determinar las fuerzas

El método de integración en REBOUND puede ser

- `REB_GRAVITY_NONE`. Para no tomar en cuenta la autogravedad.
- `REB_GRAVITY_BASIC`. Método directo (es decir, $O(N^2)$).
- `REB_GRAVITY_COMPENSATED`. Método de suma directa pero con suma compensada, ligeramente más lento que el anterior pero más preciso.

- **REB_GRAVITY_TREE**. Método aproximado de árbol binario ($O(N \log N)$).

El método por defecto en REBOUND es **REB_GRAVITY_COMPENSATED**. Es importante señalar que en el método directo REBOUND permite considerar a las partículas como partículas de prueba o bien, masas con un radio físico. Así, el código no hace uso de un suavizamiento tipo Plummer para resolver la fuerza sino que resuelve el radio físico de cada objeto. Si el usuario desea además incluir un suavizamiento puede hacerse con el puntero `r->softening`.

El integrador

REBOUND contiene varios integradores (simpléticos, no simpléticos e híbridos) de gran precisión entre los que se encuentran:

- **REB_INTEGRATOR_WHFAST**. WHFast es un integrador Wisdom Holman de segundo orden con correctores simpléticos de orden 11. Este integrador es bueno para simulaciones de sistemas sin encuentros cercanos o colisiones (los detalles del integrador se encuentran en [Rein & Tamayo, 2015](#)).
- **REB_INTEGRATOR_JANUS**. Janus es un integrador simplético, reversible en el tiempo y que satisface exactamente el teorema de Liouville. Su orden es par y se puede ajustar entre 2 y 10 (más detalles en [Rein & Tamayo, 2018](#)).
- **REB_INTEGRATOR_IAS15**. Este integrador es un integrador no simplético de orden 15 con paso adaptativo (IAS15; por las siglas para *Integrator with Adaptive Time-Stepping of 15th order*). Está basado en el algoritmo de [Everhart \(1985\)](#) que utiliza un integrador Runge-Kutta modificado de orden 15) con mejoras que incluyen el uso de la cuadratura de Gauss-Radau. Sus características lo vuelven bastante preciso e ideal para resolver sistemas con fuerzas externas y encuentros cercanos o colisiones (para detalles del algoritmo consultar [Rein & Spiegel, 2015](#)). Este es el integrador por defecto.
- **REB_INTEGRATOR_MERCURIUS**. Es un integrador híbrido muy similar a MERCURY. Permanece utilizando el integrador WHFast para las integraciones a largo plazo, pero cambia a IAS15 cuando se presentan encuentros cercanos.

El manejo de colisiones

REBOUND no busca colisiones entre las partículas si el usuario no se lo especifica (puede especificarlo utilizando **REB_COLLISION_NONE**). Sin embargo, si se sabe que las colisiones serán importantes para el caso de estudio, REBOUND busca por colisiones cuando observa que

$$\Delta t \ll \frac{v}{R_p} \quad (\text{B.1})$$

donde v es la velocidad relativa entre partículas y R_p es la suma de sus radios físicos.

- **REB_COLLISION_NONE**. Especifica que no se desea que se busquen colisiones.
- **REB_COLLISION_DIRECT**. Busca a cada tiempo t si hay *superposiciones* (acercamientos que cumplen el criterio mostrado B.1) entre las partículas .
- **REB_COLLISION_LINE**. Busca superposiciones entre las partículas desde el paso de integración anterior asumiendo que viajaron en rectas.
- **REB_COLLISION_TREE**. Usa el código de árbol separando el espacio en celdas para rastrear las colisiones.

Además de buscar las colisiones, REBOUND permite al usuario elegir entre diferentes resultados de las mismas. Estos pueden ser colisiones inelásticas, elásticas, fusiones (que conservan masa, momento y volumen) o alguna función definida por el usuario.

Las condiciones de frontera

Las condiciones de frontera a elegir en esta paquetería son:

- **REB_BOUNDARY_NONE**. Las partículas no se ven afectadas por condiciones de frontera (esta opción está por defecto).
- **REB_BOUNDARY_OPEN**. Las partículas se eliminan de la simulación si salen de una caja definida por el usuario.
- **REB_BOUNDARY_PERIODIC**. Condiciones de frontera periódicas: las partículas se reinsertan en el otro lado si cruzan los límites de la caja.

El uso de módulos creados por el usuario

REBOUND permite que el usuario incorpore diferentes módulos que se escriben dentro del código como funciones. Estos pueden ser de dos tipos:

- **Para el almacenamiento de datos**. Con el puntero `reb_simulation_heartbeat` se llama a una función que en cada paso de integración permite al usuario extraer datos para el posterior análisis del experimento. Los datos de salida pueden extraerse usando ya sea los punteros que ofrece REBOUND para almacenar la información en un archivo ASCII (con los punteros `reb_output_ascii` para almacenar las posiciones y velocidades o `reb_output_orbits` para los elementos orbitales) o bien, usando alguna función definida por el usuario.

- **Para añadir física adicional.** Esto se hace usando los punteros `additional_forces` o bien, con `[pre|post]_timestep_modifications`. En ambos casos, se debe desarrollar una función que indique las modificaciones por realizarse y al final, actualice la información de la variable a modificar. Por ejemplo, para incorporar fuerzas externas con `additional_forces` la función, después de realizar los cálculos de la física extra, debe indicar la modificación coordinada a coordenada de la aceleración

$$a_{\star} += \frac{F_{\text{ext}, \star}}{m}$$

donde $\star = x, y, z$. Esto hará que la órbita de la partícula se determine tomando en cuenta tanto la parte de N-cuerpos como la fuerza específica correspondiente a $F_{\text{ext}, \star}$.

Referencias

- Adams, F. C., Lada, C. J., & Shu, F. H. (1987). Spectral Evolution of Young Stellar Objects. *The Astrophysical Journal*, 312:788.
- Aguilar, L. A. (1992). El Problema de N-Cuerpos en la Astronomía. *Revista Mexicana de Física*, 38:701–738.
- André, P. (2002). The Initial Conditions for Protostellar Collapse: Observational Constraints. En Bouvier, J. & Zahn, J.-P., editores, *EAS Publications Series*, volumen 3, pp. 1–38.
- Andre, P., Ward-Thompson, D., & Barsony, M. (1993). Submillimeter Continuum Observations of rho Ophiuchi A: The Candidate Protostar VLA 1623 and Prestellar Clumps. *The Astrophysical Journal*, 406:122.
- Armitage, P. J. (2007). Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems. *arXiv e-prints*.
- Artymowicz, P. (1993). On the Wave Excitation and a Generalized Torque Formula for Lindblad Resonances Excited by External Potential. *The Astrophysical Journal*, 419:155.
- Benítez Llambay, P., Masset, F., Koenigsberger, G., & Szulágyi, J. (2015). Planet heating prevents inward migration of planetary cores. *Nature*, 520:63–65.
- Benítez Llambay, P. (2015). *INTERACCIONES PLANETA-DISCO: Desarrollo y utilizacion de un código numérico*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.
- Bodenheimer, P. & Pollack, J. B. (1986). Calculations of the accretion and evolution of giant planets: The effects of solid cores. *Icarus*, 67:391–408.
- Brasser, R., Matsumura, S., Ida, S., Mojzsis, S. J., & Werner, S. C. (2016). Analysis of Terrestrial Planet Formation by the Grand Tack Model: System Architecture and Tack Location. *The Astrophysical Journal*, 821(2):75.

- Burns, J. A. (1976). Elementary derivation of the perturbation equations of celestial mechanics. *American Journal of Physics*, 44:944–949.
- Cameron, A. G. W. (1978). Physics of the Primitive Solar Accretion Disk. *Moon and Planets*, 18:5–40.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304:793–799.
- Chambers, J. E. (2001). Making More Terrestrial Planets. *Icarus*, 152:205–224.
- Chametla, R. O., Sánchez-Salcedo, F. J., Masset, F. S., & Hidalgo-Gómez, A. M. (2017). Gap formation by inclined massive planets in locally isothermal three-dimensional discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468:4610–4624.
- Chiang, E. & Youdin, A. N. (2010). Forming Planetesimals in Solar and Extrasolar Nebulae. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 38:493–522.
- Chrenko, O., Brož, M., & Lambrechts, M. (2017). Eccentricity excitation and merging of planetary embryos heated by pebble accretion. *Astronomy & Astrophysics*, 606:A114.
- Cowart, J. (2015). Approximate true-color image of Ceres. Publicación en línea.
- de Elía, G. C., Guilera, O. M., & Brunini, A. (2013). Terrestrial planets in high-mass disks without gas giants. *Astronomy & Astrophysics*, 557:A42.
- Dominik, C., Blum, J., Cuzzi, J. N., & Wurm, G. (2007). Growth of Dust as the Initial Step Toward Planet Formation. En Reipurth, B., Jewitt, D., & Keil, K., editores, *Protostars and Planets V*, pp. 783.
- Duncan, M. J., Kirsh, D., Capobianco, C., Brasser, R., & Levison, H. F. (2007). Simulations of Planet Migration Driven by Planetesimal Scattering. En *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #39*, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, pp. 60.01.
- Duncan, M. J., Levison, H. F., & Lee, M. H. (1998). A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters. *The Astronomical Journal*, 116:2067–2077.
- Eklund, H. & Masset, F. S. (2017). Evolution of eccentricity and inclination of hot protoplanets embedded in radiative discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 469:206–217.
- ESA (2014). Comet 67P on 19 September 2014. Publicación en línea.
- Everhart, E. (1985). An Efficient Integrator that Uses Gauss-Radau Spacings. En Carusi, A. & Valsecchi, G. B., editores, *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, pp. 185–202, Dordrecht. Springer Netherlands.

- Fernandez, J. A. & Ip, W. H. (1984). Some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune: The exchange of orbital angular momentum with planetesimals. *Icarus*, 58:109–120.
- Fromenteau, S. & Masset, F. S. (2019). Impact of thermal effects on the evolution of eccentricity and inclination of low-mass planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, pp. 695.
- Goldreich, P. & Sari, R. (2003). Eccentricity Evolution for Planets in Gaseous Disks. *The Astrophysical Journal*, 585:1024–1037.
- Goldreich, P. & Tremaine, S. (1979). The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *The Astrophysical Journal*, 233:857–871.
- Goldreich, P. & Tremaine, S. (1980). Disk-satellite interactions. *The Astrophysical Journal*, 241:425–441.
- Goldreich, P. & Ward, W. R. (1973). The Formation of Planetesimals. *The Astrophysical Journal*, 183:1051–1062.
- Gonzalez, J. F., Laibe, G., & Maddison, S. T. (2017). Self-induced dust traps: overcoming planet formation barriers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(2):1984–1996.
- Habing, H. J., Dominik, C., Jourdain de Muizon, M., Laureijs, R. J., Kessler, M. F., Leech, K., Metcalfe, L., Salama, A., Siebenmorgen, R., Trams, N., & Bouchet, P. (2001). Incidence and survival of remnant disks around main-sequence stars. *Astronomy & Astrophysics*, 365:545–561.
- Haisch, Karl E., J., Lada, E. A., & Lada, C. J. (2001). Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters. *The Astrophysical Journal*, 553:L153–L156.
- Hartmann, L. (2009). *Accretion Processes in Star Formation*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Hayashi, C. (1981). Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70:35–53.
- Jessberger, E. K., Stephan, T., Rost, D., Arndt, P., Maetz, M., Stadermann, F. J., Brownlee, D. E., Bradley, J. P., & Kurat, G. (2001). *Properties of Interplanetary Dust: Information from Collected Samples*, pp. 253. Springer, Berlin, Germany.
- Klahr, H. H. & Henning, T. (1997). Particle-Trapping Eddies in Protoplanetary Accretion Disks. *Icarus*, 128:213–229.
- Kokubo, E. & Ida, S. (1998). Oligarchic Growth of Protoplanets. *Icarus*, 131:171–178.

- Korycansky, D. G. & Pollack, J. B. (1993). Numerical Calculations of the Linear Response of a Gaseous Disk to a Protoplanet. *Icarus*, 102:150–165.
- Kuiper, G. P. (1951). On the Origin of the Solar System. *Proceedings of the National Academy of Science*, 37:1–14.
- Lada, C. J. (1987). Star formation: from OB associations to protostars. En Peimbert, M. & Jugaku, J., editores, *Star Forming Regions*, volumen 115 de *IAU Symposium*, pp. 1.
- Lada, C. J., Muench, A. A., Luhman, K. L., Allen, L., Hartmann, L., Megeath, T., Myers, P., Fazio, G., Wood, K., Muzerolle, J., Rieke, G., Siegler, N., & Young, E. (2006). Spitzer Observations of IC 348: The Disk Population at 2–3 Million Years. *The Astrophysical Journal*, 131:1574–1607.
- Lega, E., Crida, A., Bitsch, B., & Morbidelli, A. (2014). Migration of Earth-sized planets in 3D radiative discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440:683–695.
- Li, Z. Y., Banerjee, R., Pudritz, R. E., Jørgensen, J. K., Shang, H., Krasnopolsky, R., & Maury, A. (2014). The Earliest Stages of Star and Planet Formation: Core Collapse, and the Formation of Disks and Outflows. En Beuther, H., Klessen, R. S., Dullemond, C. P., & Henning, T., editores, *Protostars and Planets VI*, pp. 173.
- Lin, D. N. C. & Ida, S. (1997). On the Origin of Massive Eccentric Planets. *The Astrophysical Journal*, 477:781–791.
- Lissauer, J. J. (1993). Planet formation. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 31:129–174.
- Malhotra, R. (1993). The origin of Pluto's peculiar orbit. *Nature*, 365:819–821.
- Masset, F. S. (2008). Planet Disk Interactions. En Goupil, M. J. & Zahn, J. P., editores, *EAS Publications Series*, volumen 29, pp. 165–244.
- Masset, F. S. (2017). Coorbital thermal torques on low-mass protoplanets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472:4204–4219.
- Masset, F. S. & Papaloizou, J. C. B. (2003). Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters. *The Astrophysical Journal*, 588:494–508.
- Masset, F. S. & Velasco Romero, D. A. (2017). Dynamical friction on hot bodies in opaque, gaseous media. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 465:3175–3184.
- Mizuno, H. (1980). Formation of the Giant Planets. *Progress of Theoretical Physics*, 64:544–557.

- Montoya Pérez, M. A. (2016). Caracterización morfológica y mineralógica de condros barrados de olivino presentes en la condrita Allende. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- NASA (2003). A detailed image of Phobos. Publicación en línea.
- NASA (2014). Jupiter and its shrunken Great Red Spot. Publicación en línea.
- NASA (2019a). Bennu in Stereo. Publicación en línea.
- NASA (2019b). Comet 67P on 19 September 2014. Publicación en línea.
- O'Brien, D. P., Morbidelli, A., & Levison, H. F. (2006). Terrestrial planet formation with strong dynamical friction. *Icarus*, 184:39–58.
- Ogilvie, G. I. & Lubow, S. H. (2003). Saturation of the Corotation Resonance in a Gaseous Disk. *The Astrophysical Journal*, 587:398–406.
- Perri, F. & Cameron, A. G. W. (1974). Hydrodynamic Instability of the Solar Nebula in the Presence of a Planetary Core. *Icarus*, 22:416–425.
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. (1996). Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. *Icarus*, 124:62–85.
- Prialnik, D. (2000). *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Rasio, F. A. & Ford, E. B. (1996). Dynamical instabilities and the formation of extrasolar planetary systems. *Science*, 274:954–956.
- Raymond, S. N., Quinn, T., & Lunine, J. I. (2006). High-resolution simulations of the final assembly of Earth-like planets I. Terrestrial accretion and dynamics. *Icarus*, 183:265–282.
- Rein, H. & Liu, S. F. (2012). REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 537:A128.
- Rein, H. & Spiegel, D. S. (2015). IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446:1424–1437.
- Rein, H. & Tamayo, D. (2015). WHFAST: a fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long-term gravitational simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452:376–388.

- Rein, H. & Tamayo, D. (2018). JANUS: a bit-wise reversible integrator for N-body dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473:3351–3357.
- Rhee, J. H., Song, I., Zuckerman, B., & McElwain, M. (2007). Characterization of Dusty Debris Disks: The IRAS and Hipparcos Catalogs. *The Astrophysical Journal*, 660:1556–1571.
- Ronco, M. P. & de Elía, G. C. (2014). Diversity of planetary systems in low-mass disks. Terrestrial-type planet formation and water delivery. *Astronomy & Astrophysics*, 567:A54.
- Schäfer, C. (2018). N-Body modelling. Presentación en Hands-on Numerical Astrophysics School for Exoplanetary Sciences.
- Shu, F. H., Adams, F. C., & Lizano, S. (1987). Star formation in molecular clouds: observation and theory. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 25:23–81.
- Taff, L. G. (1985). *Celestial mechanics: a computational guide for the practitioner*. Wiley, New York, USA.
- Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. (2002). Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *The Astrophysical Journal*, 565:1257–1274.
- Tanaka, H. & Ward, W. R. (2004). Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves. *The Astrophysical Journal*, 602:388–395.
- USGS (1980). Schiaparelli Hemisphere Enhanced. Publicación en línea.
- Velasco Romero, D. A. & Masset, F. S. (2019). Numerical study of dynamical friction with thermal effects – I. Comparison to linear theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483:4383–4396.
- Ward, W. R. (1986). Density waves in the solar nebula: Differential Lindblad torque. *Icarus*, 67:164–180.
- Weidenschilling, S. J. (1977a). Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 180:57–70.
- Weidenschilling, S. J. (1977b). The Distribution of Mass in the Planetary System and Solar Nebula. *Astrophysics and Space Science*, 51(1):153–158.
- Weidenschilling, S. J. & Cuzzi, J. N. (1993). Formation of Planetesimals in the Solar Nebula. En Levy, E. H. & Lunine, J. I., editores, *Protostars and Planets III*, pp. 1031.
- Weidenschilling, S. J. & Marzari, F. (1996). Gravitational scattering as a possible origin for giant planets at small stellar distances. *Nature*, 384:619–621.

- Wetherill, G. W. & Stewart, G. R. (1993). Formation of Planetary Embryos: Effects of Fragmentation, Low Relative Velocity, and Independent Variation of Eccentricity and Inclination. *Icarus*, 106:190–209.
- Williams, J. P. & Cieza, L. A. (2011). Protoplanetary Disks and Their Evolution. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 49:67–117.
- Xiang-Gruess, M. & Papaloizou, J. C. B. (2013). Interaction between massive planets on inclined orbits and circumstellar discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431:1320–1336.