



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelado de una turbina  
Pelton**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Leonardo Esparza Arellano

**DIRECTOR(A) DE TESIS**

Yahvé Abdul Ledezma Rubio



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a Michael Faraday, James Clerk Maxwell, Isaac Newton, Leonard Euler, Daniel Bernoulli, Pierre-Simon Laplace, Joseph-Louis Lagrange. Gigantes sobre cuyos hombros hago posible este trabajo*

*A mis amigos, sin los cuales no hubiera podido sobrevivir el campo de batalla al que los estudiantes llamamos "semestre"*

*A mi familia, de quien recibí un constante apoyo tan grande e incondicionado.*

*A mi entrenador, quien siempre me recordó que para cumplir nuestros objetivos es indispensable trabajar duro todos los días*

## Contenido

Nomenclatura .....	5
1 Introducción.....	7
1.1. Antecedentes .....	7
1.1.1 Historia de las turbinas hidráulicas.....	7
1.1.2 Demanda de energía eléctrica en el mundo.....	9
1.1.3 Energía eléctrica en México. Historia, producción, distribución y demanda .....	10
1.2. Hipótesis.....	16
1.3. Objetivos .....	16
1.4. Vanguardia tecnológica.....	17
2 Marco teórico.....	19
2.1. Mecánica de Fluidos .....	19
2.1.1 La ecuación de Bernoulli.....	19
2.1.2 Teoría de la obstrucción de Bernoulli. Toberas.....	20
2.1.3 Turbomáquinas.....	21
2.2. Mecánica de Materiales .....	25
2.2.1 Esfuerzos en el rango elástico .....	25
2.3. Control .....	27
2.3.1 Sistemas de primer orden.....	27
2.4. Mecánica Lagrangiana.....	29
2.4.1 Ecuación de Euler Lagrange .....	29
2.5. Inducción Electromagnética.....	31
3 Modelado .....	34
3.1 Mecánica de Fluidos .....	36
3.2 Control .....	39
3.3 Mecánica de Sólidos .....	42
3.4 Mecánica Lagrangiana.....	43
3.4.1 Par constante .....	44
3.4.2 Par dependiente del tiempo.....	45
3.5 Inducción electromagnética.....	48
4 Experimentación y Resultados .....	49
5 Conclusiones .....	55

6	Apéndices .....	57
6.1	Cálculo de valores óptimos de la turbina .....	57
	Bibliografía.....	60

## Nomenclatura

<b>Símbolo</b>	<b>Unidades</b>	<b>Definición</b>
$m$	$kg$	Masa
$t$	$s$	Tiempo
$V$	$\frac{m}{s}$	Velocidad
$a$	$\frac{m}{s^2}$	Aceleración
$x$	$m$	Posición
$Q$	$m^3$	Caudal
$\dot{m}$	$\frac{kg}{s}$	Flujo másico
$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	Densidad
$A$	$m^2$	Área
$A^*$	$m^2$	Área final
$\forall$	$m^3$	Volumen
$h_f$	$m$	Pérdida de carga
$P$	$Pa$	Presión
$\epsilon$	$mm$	Rugosidad
$f$	-	Coefficiente de fricción
$c_d$	-	Coefficiente de descarga
$\beta$	$^\circ$	Ángulo de salida
$V_j$	$\frac{m}{s}$	Velocidad de chorro
$u$	$\frac{m}{s}$	Velocidad de paleta
$\tau_0$	$N\ m$	Par
$\tau^*$	$N\ m$	Par ideal
$\omega$	$\frac{rad}{s}$	Velocidad angular
$P_\omega$	$W$	Potencia
$\eta$	-	Eficiencia
$H$	$m$	Carga
$\phi_p$	-	Factor de velocidad periférico
$N_{sp}$	-	Velocidad específica de turbinas
$C_p$	-	Coefficiente de potencia
$C_H$	-	Coefficiente manométrico
$n$	$rev/s$	Velocidad de la turbina
$\gamma$	$rad$	Ángulo de deformación
$\tau_y$	$Pa$	Esfuerzo a la fluencia
$G$	$Pa$	Módulo de corte

$J$	$kg\ m^2$	Momento polar de inercia
$U$	$J$	Energía potencial
$K$	$J$	Energía cinética
$D$	$\frac{N\ m}{s}$	Energía disipativa
$\theta$	$rad$	Ángulo
$\tau$	$N\ m$	Par
$k$	$N/rad$	Constante elástica
$\varepsilon$	$V$	Fuerza electromotriz (fem)
$B$	$T$	Campo magnético
$\Phi_B$	$Wb$	Flujo magnético
$\omega_n$	$\frac{rad}{s}$	Frecuencia natural
$\beta_d$	-	Relación de diámetros
$D_t$	$m$	Diámetro de la turbina
$L_{turb}$	$m$	Espesor de la turbina
$L_{flecha}$	$m$	Longitud de la flecha de la turbina
$D_{flecha}$	$m$	Diámetro de la flecha
$\mu$	$kg / m\ s$	Viscosidad cinemática

# Modelado de una turbina Pelton

## 1 Introducción

### 1.1. Antecedentes

#### 1.1.1 Historia de las turbinas hidráulicas

Las turbinas hidráulicas que hoy conocemos parecen tener como primer ancestro una máquina cuyo objetivo era el de irrigar el agua en las cosechas. Una de estas máquinas se conoce como Rueda persa o *saqia*, la cual es una rueda grande montada en una rueda horizontal con cucharas en su periferia. Aún se pueden ver estas ruedas trabajando en regiones de Egipto, acopladas a engranes y movidas por algún animal de carga, como un búfalo, burro o camello.

Alguien debió darse cuenta que, si se desenganchaba al animal del mecanismo, la corriente haría que el mecanismo girara en sentido contrario, y así se podría aprovechar la energía que tiene el fluido para producir movimiento. Las primeras aplicaciones de este mecanismo fueron en molinos para moler el grano del maíz

La primera alusión literaria de una turbina hidráulica, hecha por *Antipater de Tesalónica*, en los años 80 a.C. *“Dejad vuestra labor vosotras doncellas que trabajáis en el molino... Porque Ceres ha ordenado a las ninfas del agua que hagan vuestra tarea”*.

Los romanos ya utilizaban ruedas hidráulicas; se cree que el muro Adriano levantado entre los años 122-132 para defender el territorio britano de las tribus de los Pictos se tenían unas cuantas ruedas hidráulicas para mover molinos de trigo. Quizá los romanos no explotaron la idea de extraer la energía de un fluido debido a que tenían suficientes esclavos para generar este movimiento; los molinos de trigo solían moverse a mano, los cuales aún pueden encontrarse en lo que fueron colonias romanas en la actual isla de Inglaterra.

En aquella época el trabajo de un constructor de molinos era el de viajar por todo el país y construir molinos nuevos o reparar los ya construidos. Se registran más de 5000 molinos en el censo de 1086 (Córdoba).

Las primeras ruedas hidráulicas fueron construidas posiblemente en Asia, China y la India, hace unos 2200 años. De Asia pasaron a Egipto, y desde allí a Europa y América.



Leonardo da Vinci, Galileo y Descartes realizaron estudios matemáticos sobre las ruedas hidráulicas, y el francés Parent (1666-1716) realizó por primera vez un estudio del funcionamiento de las ruedas hidráulicas, prediciendo una relación entre la velocidad de la rueda y la velocidad de la corriente del agua.

Leonard Euler en 1754 publica en su memoria de Berlín sobre maquinaria hidráulica: *“Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la reaction de l’eau”*. En estas memorias, se desarrolla por primera vez la ecuación fundamental de las turbomáquinas.

Claude Burdin (1790 – 1873) escribe en su memoria de la academia de ciencias la teoría: *“des turbines hydrauliques ou machines rotatoire á grande vitesse”* usa por primera vez la palabra *“turbina”* al vocabulario técnico. Turbina viene del latín *turbo-inem* que significa rotación o giro.

Burdin tuvo un discípulo, Fourneyron (1802-1867) quien en 1827 construyó la primera turbina hidráulica experimental. Esta turbina fue exitosa, pues era capaz de explotar saltos mayores que los explotables con las antiguas ruedas hidráulicas, era radial centrífuga, de inyección total y escape libre.

Después de la turbina de Fourneyron, se crearon otros diseños como el de Henschel, Jonval, Fontaine, Girard, entre otras. Sin embargo, estas turbinas han dejado de construirse debido a que sus eficiencias son menores al 70% en plena carga y tienen velocidades de giro muy reducidas, lo que genera una potencia baja.

En general, se puede resumir la historia de las turbinas de la siguiente manera:

- Siglo XVIII: gestación de las turbinas hidráulicas
- Siglo XIX: nacimiento (en este siglo nacen las turbinas Pelton y Francis, las cuales son dos de las turbinas hidráulicas más utilizadas en todo el mundo)
- Siglo XX: desarrollo

A principios del siglo XX se crean las turbinas hidráulicas de gran velocidad:

- 1905: en USA existen turbinas hidráulicas de 7360 kW girando a 250 rpm (turbinas Francis gemelas)
- 1915: Creación de la turbina Kaplan
- 1918: Creación de la turbina Banki
- 1919: Creación de la turbina Turgo
- 1950: Creación de la turbina Deriaz
- 1970: Creación de la turbina Bulbo

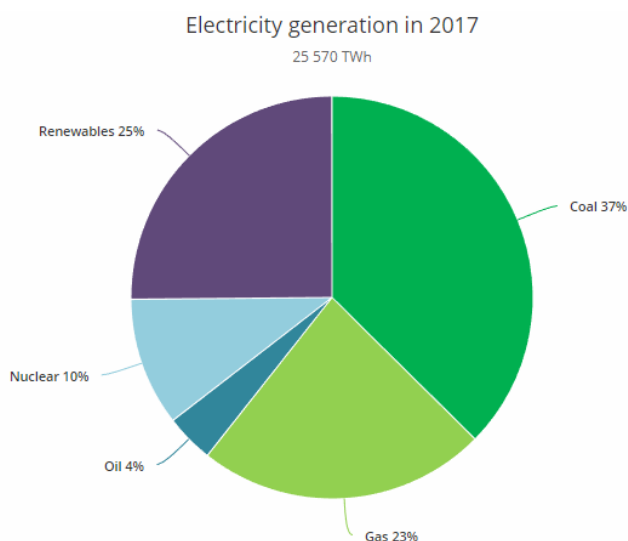
Con el paso de los años las turbinas hidráulicas han modificado su diseño y sus condiciones de operación para lograr una mayor eficiencia y una mayor generación de potencia para satisfacer la demanda energética en aumento de la población. Sin embargo, todas conservan el mismo principio: transformar la energía cinética de un fluido en energía de rotación de una flecha para generar trabajo mecánico.

### 1.1.2 Demanda de energía eléctrica en el mundo

Vivimos en una era donde la energía eléctrica se ha vuelto algo indispensable para realizar nuestras actividades diarias. La usamos en los medios de comunicación, transporte, abastecimiento de alimentos, trabajo, hospitales, alumbrado público, entre otros elementos de una lista innumerable. Llegamos a un punto en la historia donde no podríamos realizar muchas de nuestras actividades diarias sin energía eléctrica.

La Agencia internacional de Energía (IEA por sus siglas en inglés) es una autoridad energética global fundada en 1974 creada para ayudar a los países a coordinar la demanda energética de la población y administrar los recursos que se necesitan para la producción de energía, como gases, petróleo, carbono, entre otros.

En 2017, se calcula que se tuvo un consumo de energía eléctrica de  $25\,570\ TWh$ , (Agency, s.f.) siendo este un incremento del 3.1% ( $780\ TWh$ ) del consumo de 2016, con China y la India como los dos países con una mayor aportación a este incremento.



*Figura 1. Consumo energético mundial en el año 2017. De los 25 570 TWh que se consumieron en este año, se calcula que el 37% se produjo con fuentes de carbón, 23% con la combustión de gases, 4% con la combustión de petróleo, 10% con generación de energía nuclear y 25% con energías renovables, en las que se incluye la energía generada por plantas hidroeléctricas. (Secretaría de Energía)*

Entre la generación de energía eléctrica con energías renovables, encontramos la energía solar fotovoltaica, energía eólica, hidroeléctrica y otras. La energía hidrodinámica es la energía que se produce en plantas hidráulicas.

### 1.1.3 Energía eléctrica en México. Historia, producción, distribución y demanda

En el periodo de 1897 a 1911 en México se tenían más de cien empresas eléctricas encargadas de la generación de la energía eléctrica en el país, de las cuales la mayoría eran plantas aisladas para industrias, alumbrado público y algunos servicios domésticos. Se tenía una capacidad de 31 039 *kW*.

En 1925 se tuvo un incremento en la demanda de 31 a 390 *MW*. Es por esto que el 14 de agosto de 1937 se creó la Comisión Federal de Electricidad (CFE), con la finalidad de una planeación, explotación y ubicación de recursos destinados a la generación de energía eléctrica.

Para el año de 1943 México contaba con una capacidad de 680 *MW*, y así siguió un constante crecimiento: los 720 *MW* en 1945 y a los 1400 *MW* en 1951. Para el año de 1960 el gobierno mexicano adquirió prácticamente la totalidad de los bienes eléctricos en todo el país.

En 1960 se tenían 41 plantas hidroeléctricas relativamente pequeñas, y se iniciaron proyectos para la creación de plantas hidroeléctricas en locaciones con caudales de agua mayores y caídas menores.

El primero de estos proyectos hidroeléctricos fue el denominado *Infiernillo*, ubicado en el río Balsas, el cual entró en servicio en 1965. Fue necesario un aumento en la transmisión del voltaje, pasando de 230 *kV* a un valor de 400 *kV*.

En esta misma época hubo un periodo en el mundo donde el petróleo era abundante y barato, por lo que las plantas termoeléctricas tendrían un periodo de auge, dejando en segundo plano a las plantas hidráulicas.

En la actualidad las fuentes de generación de energía eléctrica están interconectadas mediante una red de líneas de transmisión de alta tensión a lo largo de todo el territorio nacional.

México es miembro de la IEA desde 2018, y tiene un registro de consumo de energía eléctrica de 280.62 *TWh* en el año 2016 (International Energy Agency México, s.f.)

Por planeación, el sistema eléctrico nacional se divide en nueve regiones que son el Sistema Interconectado Nacional (SIN), y los sistemas aislados de Baja California y Baja California Sur.



Figura 2 Mapa del sistema eléctrico nacional (Secretaría de Energía)

En el año 2016, alrededor del 98.5% de la población contaba con el servicio de energía eléctrica, divididos en: Residencial (88.6%), Comercial (9.8%), Industrial (0.8%), Servicios (0.5%) y Agrícola (0.3%).

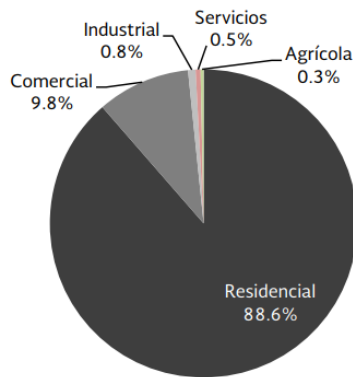


Figura 3. Participación de usuarios por sector. 2016 (Secretaría de Energía)

El crecimiento en el consumo de las 9 regiones en el periodo comprendido entre 2006 y 2016 puede verse en la Figura 4.

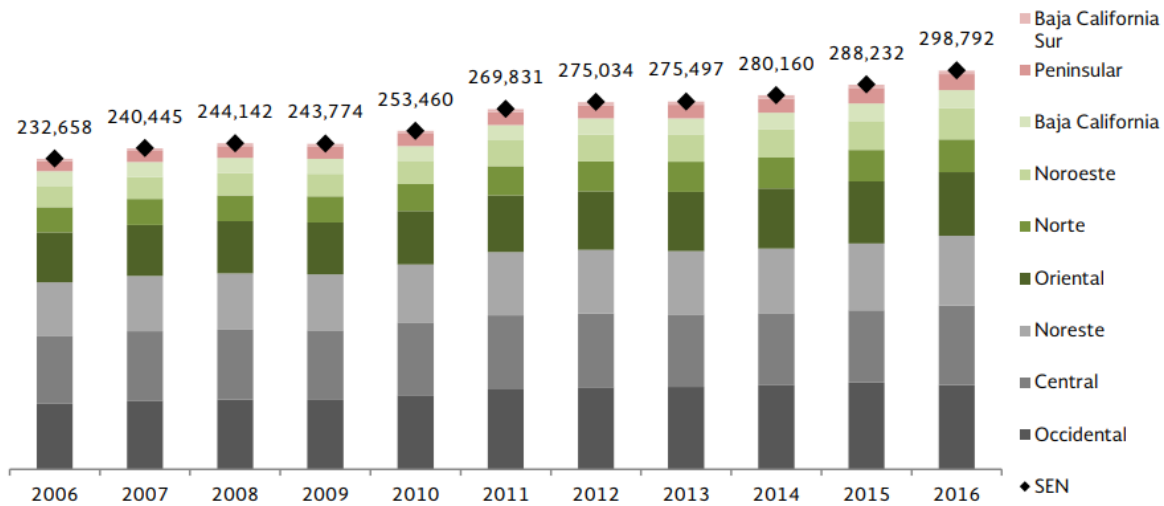


Figura 4. Consumo de energía eléctrica por región (GWh) (Secretaría de Energía)

Al cierre del año 2016, se reportó un consumo total de 298,791.7 GWh. Los porcentajes de este consumo por región se pueden ver en la Figura 5.

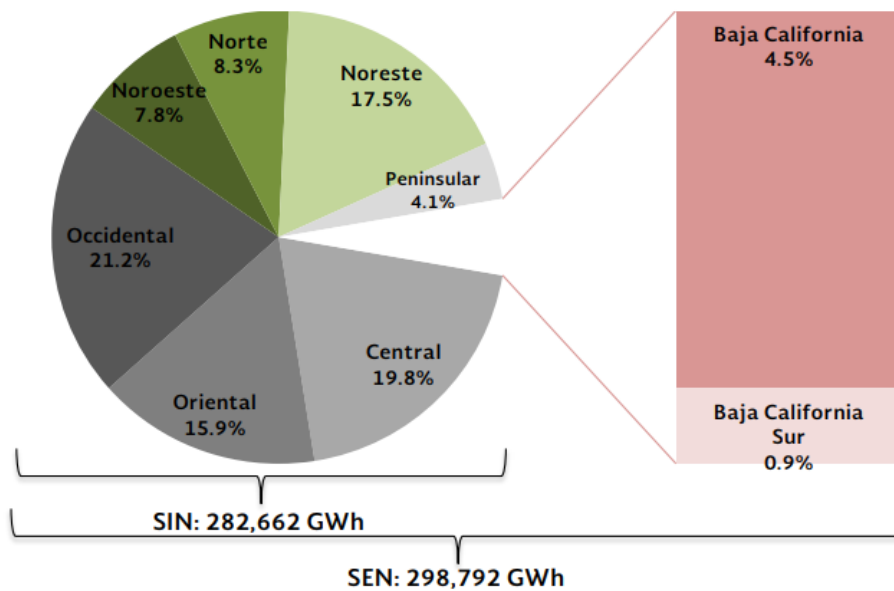


Figura 5. Porcentaje de consumo de energía eléctrica por región (Secretaría de Energía)

Por otro lado, la demanda de energía eléctrica involucra factores como la evolución de las ventas en las distintas zonas, pérdidas eléctricas, comportamiento histórico, escenarios de consumo sectorial, entre otros. La demanda máxima (carga horaria durante un año medida en  $MWh/h$ ) de cada región puede verse en la Figura 6.

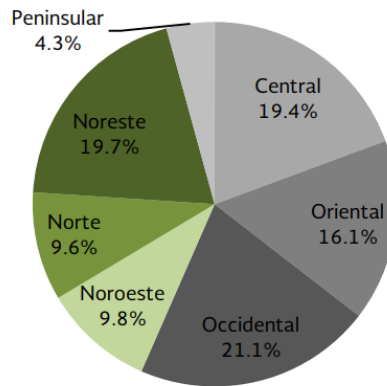


Figura 6. Demanda máxima integrada por región (MWh/h) (Secretaría de Energía)

Del total de 73 510 MW generados en el año 2016, 71.2% corresponde a centrales de tecnologías convencionales, y el 28.8% restante a centrales con tecnologías limpias. De esas tecnologías convencionales se encuentra en primer lugar el ciclo combinado con 37.1% (27,724 MW), seguido por la termoeléctrica convencional e hidroeléctrica, ambas con 17.1% (Figura 7).

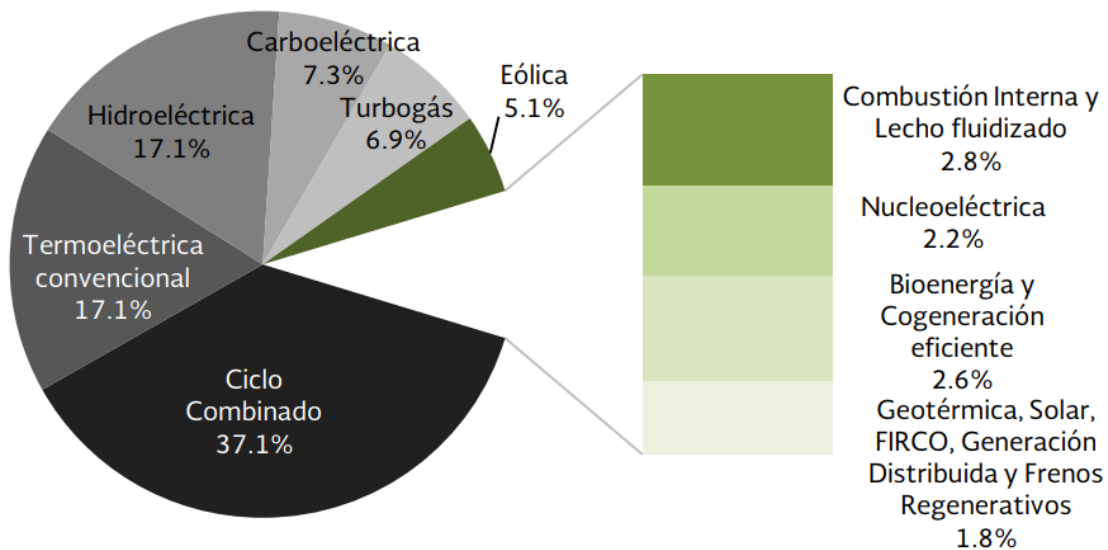


Figura 7. Porcentaje de energía generada por tipo de tecnología en 2016 (Secretaría de Energía)

En la Figura 8 se puede ver el crecimiento de la demanda energética en el periodo de 2006-2016 dividido en tipos de tecnología.

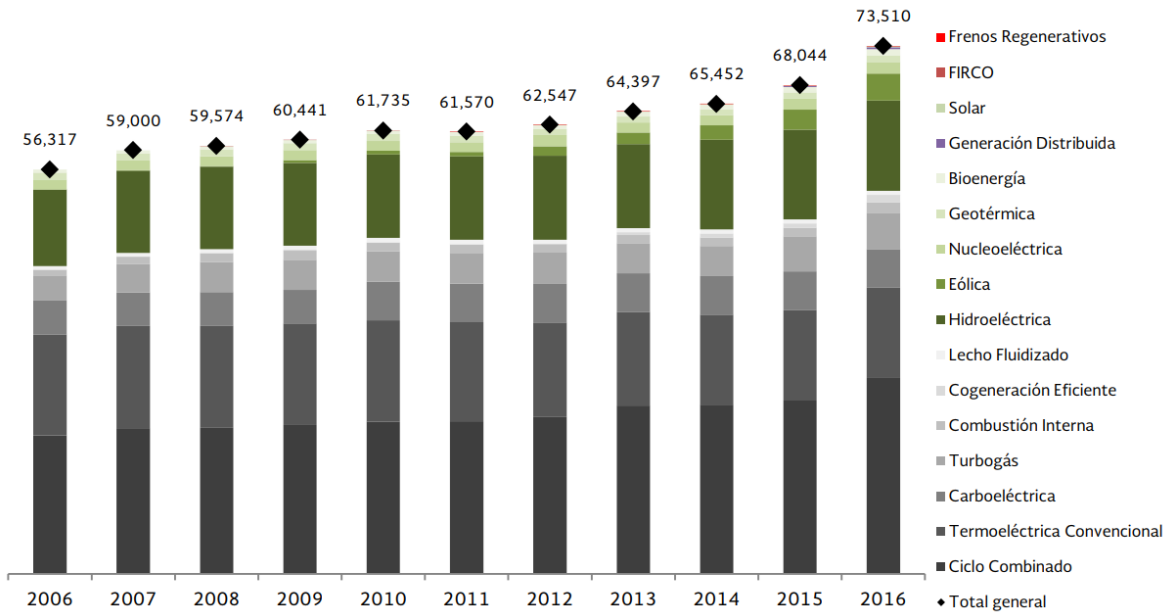


Figura 8. Evolución de generación de energía eléctrica por tipo de tecnología. (Secretaría de Energía)

La transmisión y distribución de la energía eléctrica se lleva a cabo por la Red Nacional de Transmisión (RNT), la cual es un sistema integrado por un conjunto de redes eléctricas agrupadas en 53 regiones de transmisión: 45 interconectadas y 8 pertenecientes a los sistemas aislados de la península de baja california (Figura 9).

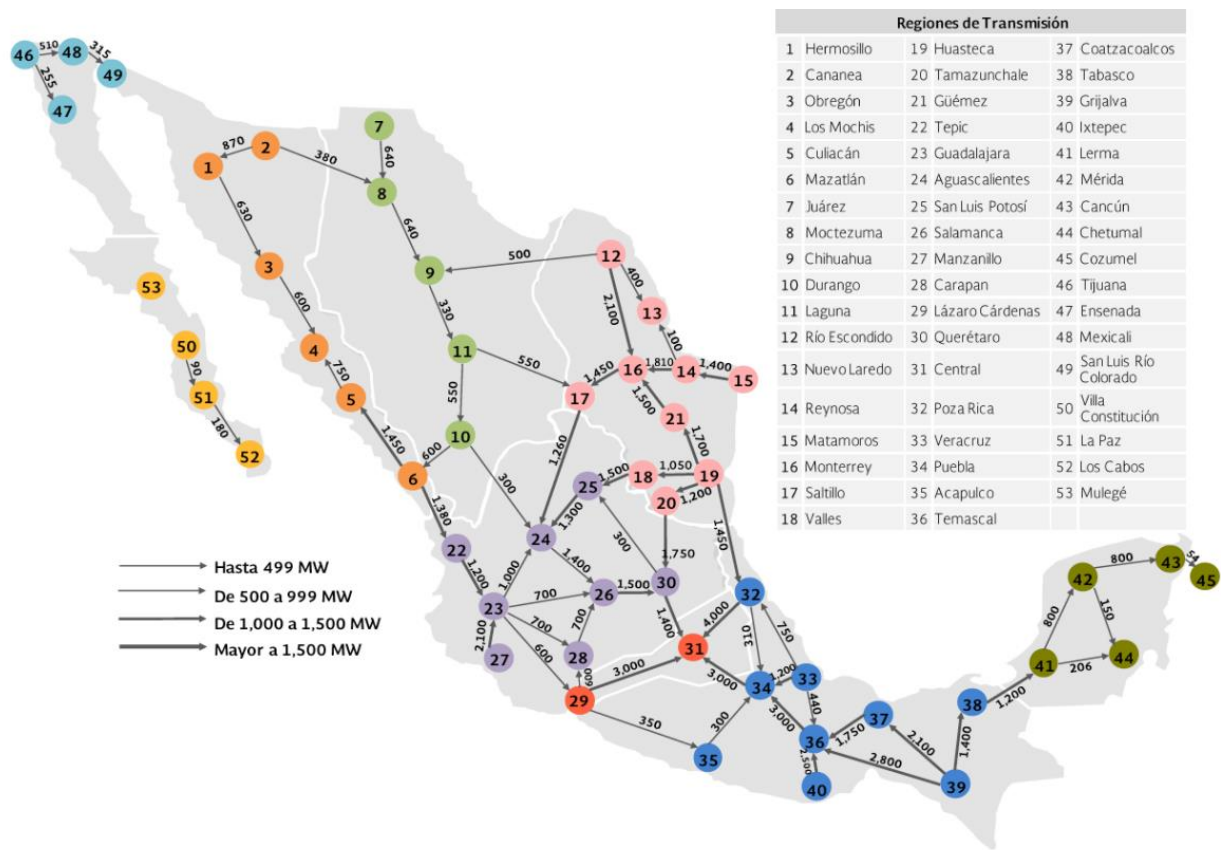


Figura 9. Enlaces entre las 53 regiones de transmisión en 2016. (Secretaría de Energía)

Las líneas de transmisión de 161 a 400 kV representan el 50% del total de 104,133 km, y las líneas de 69 a 138 kV representan el 48.3%. El 1.7% restante corresponde a otras líneas con niveles de tensión de 400 y 230 kV (Figura 10)

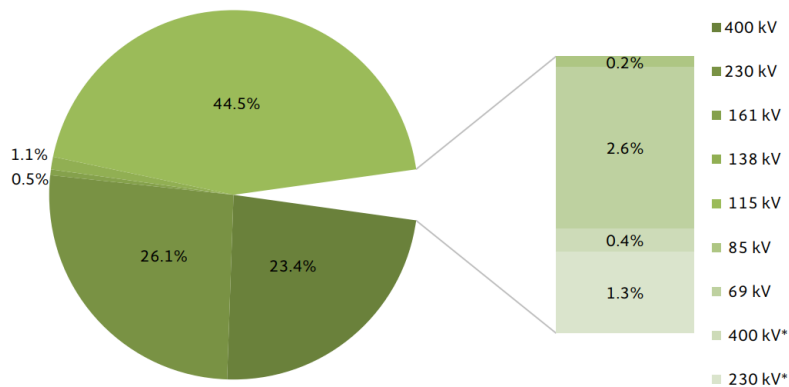


Figura 10. Porcentaje de líneas de transmisión divididas en tensión transmitida en kV. (Secretaría de Energía)



## 1.2. Hipótesis

Es posible modelar matemáticamente una turbina Pelton para calcular sus modos de operación y así modificar sus parámetros de diseño antes de construirla, en vez de obtener los valores de forma empírica, así como para evitar factores que pueden poner en peligro el proceso de operación y la integridad de los componentes, como el golpe de ariete y la cavitación, y reducir el tiempo en el que la turbina entra en operación.

## 1.3. Objetivos

Realizar el modelado matemático de una turbina Pelton con el uso de mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, mecánica lagrangiana, teoría electromagnética y teoría de control, con el fin de calcular variables de diseño como velocidad de chorro, diámetro ideal de tobera, carga ideal, velocidad de la turbina y fuerza electromotriz generada, para conocer la respuesta de un caudal de entrada considerado como un sistema de primer orden con un estado transitorio y un estado permanente. Con esta información y el modelo matemático se sustituyen los valores de diseño reales de una turbina Pelton, y se comparan con los valores finales reales como potencia, velocidad angular y par, y se sugiere una mejora en el diseño de los puntos identificados.

## 1.4. Vanguardia tecnológica

El desarrollo de la mecánica de fluidos y su implementación a la teoría de las turbinas ha tenido como objetivo incrementar su eficiencia. La continua mejora en el diseño de las toberas y los álabes de las turbinas Pelton ha incrementado su eficiencia en alrededor de un 90% (Zhang, 2016)

A pesar de las mejoras de los diseños en los últimos años, aún no es bien comprendido el funcionamiento del proceso del fluido en una turbina Pelton, a diferencia de otras turbomáquinas como las bombas o las turbinas Francis, por lo tanto, al diseñar una turbina Pelton ha sido necesaria la experiencia práctica de su funcionamiento. Por ejemplo, el número de álabes que tiene una turbina Pelton aún se calcula por experiencia o modelos de prueba.

La investigación experimental se ha concentrado en el estudio de las mediciones de los chorros de agua a alta velocidad y el flujo de agua en los álabes de la turbina Pelton, por ejemplo, la implementación de tubos de Pitot y visualizaciones de flujo como las hechas por (Berntsen, 2001) y (Brekke, 2005). Las fotografías del chorro de alta velocidad han sido útiles para comprobar su estabilidad y expansión (Staubli, 2004). Técnicas más avanzadas como la medición con anemometría Doppler laser (LDA por sus siglas en inglés) han sido utilizadas por (Zhang Z. B., 2003) que permiten una medición óptica precisa del chorro.

Debido a la dificultad de medición del fluido en los álabes de la turbina, los estudios de esta zona se han limitado a visualización de flujo, no existen medidas experimentales, por lo tanto, se asume que la velocidad del fluido relativa a la de los álabes es igual. A principios de este siglo, se han hecho medidas de la distribución de presiones del fluido en las superficies de los álabes en rotación (Angehrn, 2000) (Kvicinsky, 2002) (Perrig, 2006)

Las medidas realizadas en laboratorios han sido realizadas con modelos de las turbinas Pelton, sin embargo, las eficiencias finales siempre difieren del modelo real, esto es debido a una diferencia significativa de los números de Reynolds obtenidos. Por lo tanto, las eficiencias de las turbinas reales han sido calculadas utilizando las eficiencias de los modelos prototipo (Grein, 1986) (Zhang Z. , 2006).

Ha sido posible optimizar el número de álabes de las turbinas Pelton con una función que relaciona el radio del diámetro de la rueda Pelton con el diámetro del chorro de agua (Taygun, 1946).

Debido a los altos costos de los modelos prototipo, se ha aumentado el estudio de las turbinas Pelton por medio de mecánica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés), este estudio comenzó en los años 90. Estudios relevantes hechos por (Kubota, 1998), (Parkinson, 2005), (Muggli, 2000) , (Mack, 2002) han tenido como objetivo la interacción entre el chorro y los álabes rotando, así como en la velocidad relativa del fluido en la superficie de los álabes.

El desarrollo de métodos de análisis ha tenido una gran importancia en el aumento de la eficiencia de las turbinas Pelton. Básicamente se utilizan los métodos Euleriano y Lagrangiano para analizar el movimiento relativo de las partículas del chorro en la superficie de los álabes, y como estas interactúan con fuerzas como la centrífuga, la fuerza generada por el efecto Coriolis y fuerzas inerciales. Las ecuaciones de movimiento que han sido obtenidas no han sido de gran utilidad para generar conclusiones. (Kishioka, 1972)

son del pequeño grupo de investigadores que se han dedicado a obtener las ecuaciones que describen el flujo en un álabe en rotación, y determinar las pérdidas de flujo, sin embargo, debido a la complejidad del estudio analítico, no se realizaron más avances.

(Zhang Z. &, 2007) realizaron estudios del denominado *jet layer method*, en el cual hacen un análisis entre la fricción viscosa entre una capa de agua y la superficie del álabe, la cual representa una de las principales causas de las pérdidas de la eficiencia en una turbina Pelton. La fricción viscosa entre el flujo y el álabe ha sido denominada como el teorema de fricción de flujo (*flow friction theorem*), el cual ha demostrado que para incrementar la eficiencia es necesario hacer la superficie de los álabes tan lisa como sea posible.

## 2 Marco teórico

### 2.1. Mecánica de Fluidos

#### 2.1.1 La ecuación de Bernoulli

La siguiente ecuación se conoce como la *ecuación de Bernoulli para flujo estacionario sin fricción a lo largo de una línea de corriente* (White, 2004)

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + g z_2 = cte$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.1.1)

La interpretación de esta ecuación es que, si no consideramos los efectos de la fricción, el fluido sigue una trayectoria por una tubería en la que conserva su energía. El término  $\frac{p}{\rho}$  se refiere al trabajo realizado por el campo de presiones, mientras que los términos  $\frac{1}{2}V^2 + g z$  se refieren a la energía cinética y potencial del fluido respectivamente. Debido a que no existen pérdidas de fricción, la suma de estos tres términos en cada punto de la trayectoria del fluido será un valor constante.

Aunque la ecuación de Bernoulli es una interpretación matemáticamente correcta de un fluido, se debe tener cuidado al usarla, ya que en los problemas reales nos encontramos con la fricción entre el fluido y las paredes de la tubería, compresibilidad y pérdidas de carga o intercambio de energía con los alrededores. Para poder usar la ecuación de Bernoulli, debemos tener en cuenta que el fluido cumple con los siguientes puntos:

- 1- Flujo estacionario
- 2- Flujo incompresible
- 3- Flujo sin fricción
- 4- Flujo a lo largo de una línea de corriente
- 5- Sin trabajo motor entre los puntos 1 y 2
- 6- Sin transferencia de calor entre los puntos 1 y 2

Estos 6 puntos siempre existirán en un problema real, pero si se considera que su aportación al problema no es considerable, se puede usar la ecuación de Bernoulli para describir el comportamiento del flujo.



## 2.1.2 Teoría de la obstrucción de Bernoulli. Toberas

Una tobera es un dispositivo que obliga a un fluido a pasar por una sección más pequeña, incrementando su velocidad. Existen dos tipos de toberas; las de radio grande (o curvatura suave) y las de radio pequeño denominadas toberas ISA 1932. (White, 2004) Una tobera de radio grande se muestra en la figura 11.

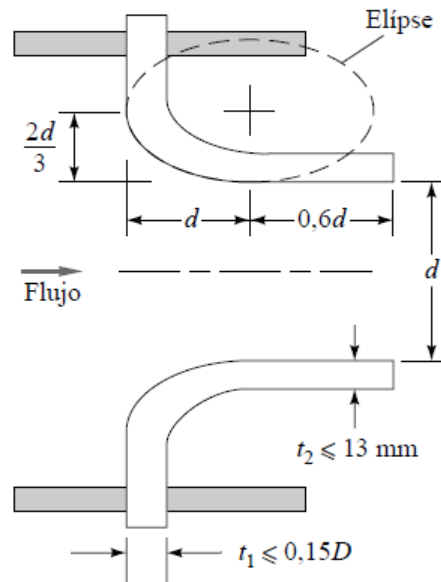


Figura 11. Representación de la salida de una tobera de radio grande (White, 2004)

El flujo viene de una sección con un diámetro  $D$ , y es obligada a pasar por una sección disminuida de diámetro  $d$ . Podemos definir el coeficiente  $\beta_d$  como la relación entre ambos diámetros

$$\beta_d = \frac{d}{D}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.2.1)

En una tobera de curvatura suave se recomienda utilizar la siguiente expresión para el coeficiente de descarga (White, 2004):

$$C_d \sim 0.9965 - 0.00653 \beta_d^{\frac{1}{2}} \left( \frac{10^6}{Re_D} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.2.2)

Para toberas de radio pequeño (ISA 1932) se recomienda la siguiente expresión (White, 2004)

$$C_d \sim 0.9900 - 0.2262\beta_d^{4.1} (0.000215 - 0.001125\beta + 0.00249\beta_d^{4.7}) \left( \frac{10^6}{Re_D} \right)^{1.15}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.2.3)

Las toberas suelen tener valores de  $\beta$  entre 0.2 y 0.8. Los coeficientes de descarga suelen tener valores entre 0.6 y 1. Un coeficiente de descarga igual a 1 significa que no hay pérdidas en la tobera, por lo tanto, al diseñar una tobera se desea un coeficiente lo más cercano posible a 1.

### 2.1.3 Turbomáquinas

Una turbomáquina es una máquina que se encarga de transformar la energía de un fluido con un mecanismo de rotación. Si la turbomáquina extrae energía del fluido, se denomina Turbina, y si aumenta la energía del fluido, se denomina Bomba.

Las turbinas se dividen en dos clases: aquellas que llenan por completo los canales entre álabes y el cambio de carga o caída de presión tiene lugar en el rotor (reacción), y aquellas que convierten la carga en un chorro de alta velocidad con una tobera para luego impulsar la turbina (impulso).

Una turbina de impulso trabaja con cargas grandes y potencias relativamente bajas, además de trabajar con velocidades demasiado altas debido a la implementación de una tobera. (White, 2004).

Las turbinas Pelton (nombradas así en honor a Lester A. Pelton (1829-1908) quien realizó el primer diseño eficiente) pertenecen al grupo de turbinas de impulso. Existen dos tipos básicos de turbinas Pelton: horizontales y verticales, esto se refiere a la posición del eje acoplado a la turbina (figura 12).

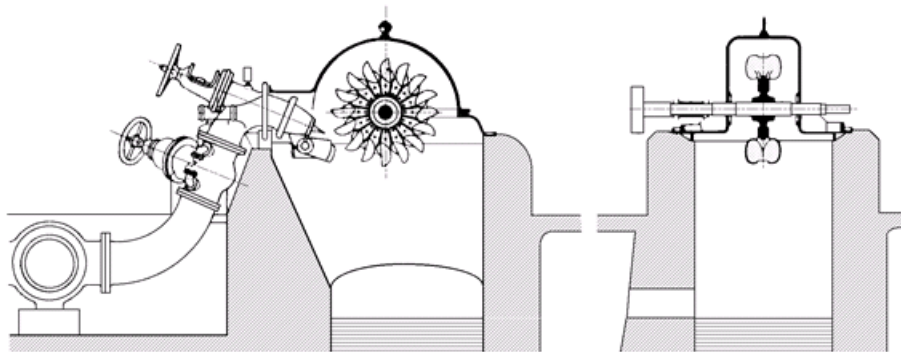


Figura 11. Turbinas Pelton Vertical (izquierda) y horizontal (derecha). (Zhang, 2016)

Las turbinas Pelton pueden tener una o más toberas, esto incrementa el par aplicado en la turbina. En este trabajo modelaremos las turbinas Pelton de una sola tobera.

En la figura 13 (a) se tiene una representación de una turbina de impulso; una tobera y una válvula de aguja reducen el área de sección transversal de la tobera a un valor  $A_j$ , lo cual incrementan la velocidad  $V_j$  del chorro de agua que golpea las cazoletas de una turbina que tienen una velocidad  $u$ , ubicadas a una distancia  $r$  del centro de giro, produciendo una velocidad angular  $\omega$  de la rueda.

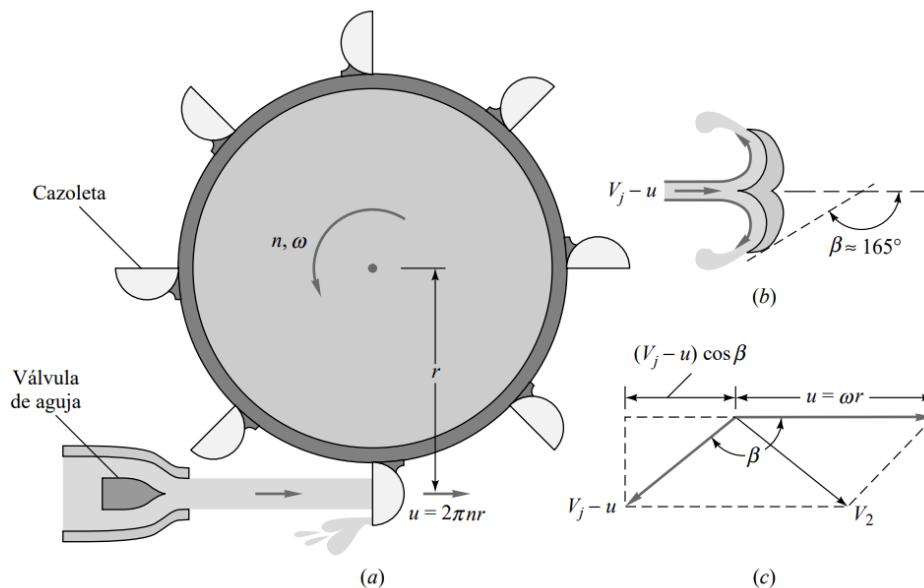


Figura 13. Representación de una turbina de impulso (a) ángulo de salida del chorro de agua (b) y suma de los vectores de velocidad del chorro de agua (c) (White, 2004)

La ecuación que define la potencia neta de la turbina es la siguiente (White, 2004):

$$P_w = \tau_0 \omega = \rho Q u (V_j - u) (1 - \cos \beta)$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.3.1)

Si se quiere obtener la eficiencia de la turbina, se debe dividir este valor de potencia entre la potencia disponible

$$\eta = \frac{P_f}{\rho g Q H} = \frac{\rho Q u (V_j - u) (1 - \cos \beta)}{\rho g Q H}$$

(Error!  
Reference  
source



not  
found.3.2)

La variable  $\phi_p$  se conoce como el *factor de velocidad periférico*, y se define como la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad ideal del chorro de agua

$$\phi_p = \frac{u}{(2gH)^{1/2}}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.3.2)

Si se sustituye este valor en la eficiencia de la turbina, se sustituye el valor de la velocidad real del chorro  $V_j = C_v(2gH)^{1/2}$  y se factoriza, se llega a la siguiente expresión

$$\eta = 2(1 - \cos \beta)\phi_p(C_v - \phi)$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.3.3)

Esta es la expresión de la eficiencia de una turbina en términos de la velocidad periférica. Se tiene un máximo cuando  $\phi = \frac{1}{2}$  y  $C_v \sim 0.47$ . En la figura 14 se muestran las gráficas de las eficiencias de una turbina ideal, con valores de  $\beta = 180^\circ$ ,  $C_v = 1$ , para las condiciones típicas de trabajo ( $\beta = 160^\circ$ ,  $C_v = 0.94$ ) y los datos reales de una turbina Pelton de 2 ft de diámetro. Los datos de las condiciones típicas de trabajo tienen una  $\eta_{max} = 85$  cuando  $\phi_p = 0.47$ , sin embargo, los datos de la turbina Pelton real dan una eficiencia menor, esto es debido a las holguras, la fricción mecánica, el chapoteo y el flujo no uniforme en los álaves. Las eficiencias reales de las turbinas de impulso suelen encontrarse alrededor del 80 por ciento, las cuales son menores a turbinas como las Francis.

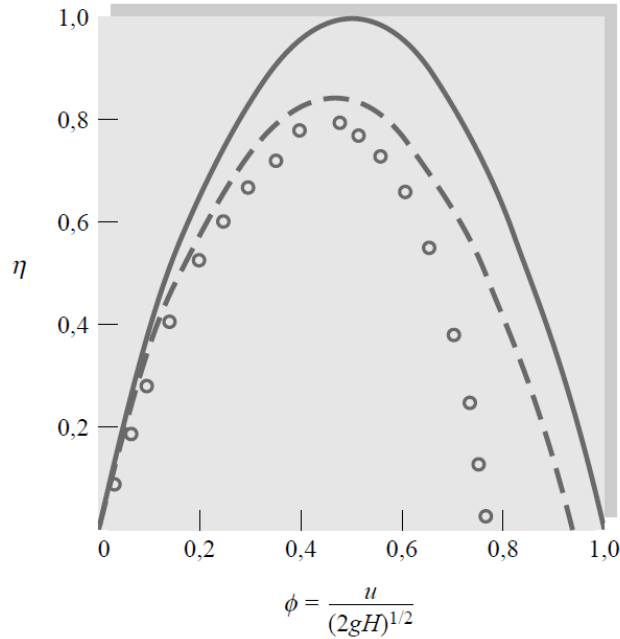


Figura 14. Gráfica que muestra las eficiencias con datos ideales (línea continua), de trabajo típicas (línea discontinua) y de una turbina Pelton real de 2 ft de diámetro (línea punteada). (White, 2004)

Otro parámetro importante es la *velocidad específica de turbinas*  $N_{sp}$ , el cual relaciona la potencia de salida con la altura neta, y se obtiene de la siguiente forma

$$N'_{sp} = \frac{C_p^{*1/2}}{C_H^{*5/4}} = \frac{n(P_f)^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.3.4)

Donde  $C_p^* = \frac{P_f}{\rho n^3 D^5}$  se conoce como el coeficiente de potencia,  $C_H^* = \frac{gH}{n^2 D^2}$  se conoce como el coeficiente manométrico, y  $n$  son las revoluciones por segundo de la turbina. Esta es una forma rigurosa de calcular la velocidad específica. En la práctica, suele calcularse de la siguiente manera

$$N_{sp} = \frac{(rpm)(P_f)^{1/2}}{[H(ft)]^{5/4}}$$

(Error!  
Reference  
source  
not  
found.3.5)

De esta forma se pueden clasificar las turbinas de acuerdo a sus velocidades específicas y al coeficiente manométrico (figura 15)

Tipo de turbina	Margen de $N_{sp}$	Margen de $C_H$
Impulso	1-10	15-50
Francis	10-110	5-25
Hélice:		
Agua	100-250	1-4
Gas, vapor	25-300	10-80

Figura 15. Clasificación de los tipos de turbina según su velocidad específica y su coeficiente manométrico (White, 2004)

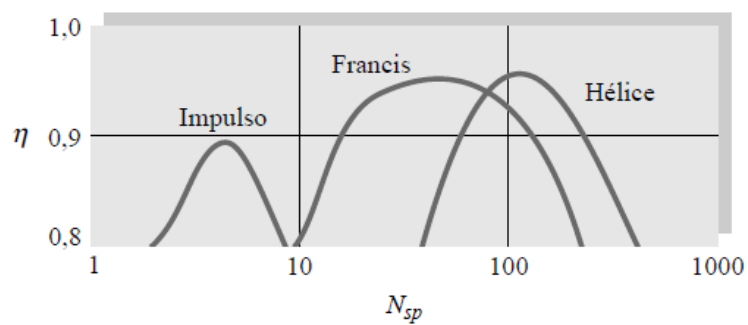


Figura 16. Eficiencias de los tipos de turbina (White, 2004)

En la figura 16 se pueden comparar las curvas de eficiencias de los 3 tipos de turbinas. Como puede verse, las turbinas de impulso se encuentran entre las de menor eficiencia, sin embargo, son las únicas que pueden trabajar con un rango de velocidad específica relativamente bajo, es decir, grandes cargas y potencias relativamente bajas.

## 2.2. Mecánica de Materiales

### 2.2.1 Esfuerzos en el rango elástico

Consideremos en este capítulo que el par de torsión  $\tau$  aplicado al eje es tal que todos los esfuerzos cortantes en el eje se encuentran debajo de la resistencia a la cedencia  $\tau_y$ , lo cual significa que se puede aplicar la ley de Hooke  $\tau = G\gamma$  (donde  $G$  es el módulo de corte del material) y no habrá deformación permanente.

Si se sustituye la ley de Hooke en  $\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$  (Beer, 2010):

$$G\gamma = \frac{\rho}{c}G\gamma_{max}$$
$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max} \quad (2.2.1.1)$$

Esta ecuación muestra que mientras se tenga un esfuerzo cortante por debajo del esfuerzo a la cedencia  $\tau_y$ , el esfuerzo cortante en la flecha varía linealmente con la distancia  $\rho$  desde el eje de la flecha. (Beer, 2010). Este resultado se puede ver en la figura 17, donde el esfuerzo cortante es nulo en el centro del eje, y es máximo en  $\rho = c$ .

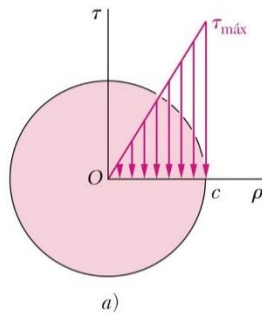


Figura 17. Diagrama que muestra la distribución de los esfuerzos cortantes en el interior de una flecha sólida. El esfuerzo cortante es máximo en el radio  $c$  de la sección circular, y es cero en el centro. (Beer, 2010)

Si sustituimos  $\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}$  en la ecuación de la distribución del esfuerzo cortante en cada una de las caras del eje (Beer, 2010)

$$T = \int \rho T dA = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \quad (2.2.1.2)$$

Donde el término  $\int \rho^2 dA$  es la definición el momento polar de inercia  $J$  de la sección transversal con respecto a su centro O. Entonces se tiene que

$$T = \frac{\tau_{max} J}{c} \quad (2.2.1.3)$$

Despejando para  $\tau_{max}$

$$\tau_{max} = \frac{TJ}{c} \quad (2.2.1.4)$$

Este resultado se conoce como la fórmula de torsión elástica.

**Nota:** Para una sección circular de radio  $c$ , el momento de inercia se calcula como  $J = \frac{1}{2} \pi c^4$

## 2.3. Control

### 2.3.1 Sistemas de primer orden

La forma general de la función de transferencia de un sistema de primer orden invariante en el tiempo tiene la forma

$$G(s) = \frac{T(s)}{R(s)} = \frac{a}{s + b} \quad (2.3.1.1)$$

Si se conoce la función de transferencia  $G(s)$  de un sistema, puede aplicarse una entrada  $R(s)$  y conocer cuál será su respuesta en el dominio de la frecuencia, para luego usar la transformada inversa de Laplace y conocer la respuesta en el dominio del tiempo  $T(t)$ .

La función de transferencia se indeterminará si  $s = -b$ , por lo que al valor de  $p = -b$  se le conoce como *polo del sistema*.

Si se aplica una entrada de escalón unitario al sistema, es decir,  $R(s) = u_s(s) = \frac{1}{s}$ , podemos conocer el valor de  $T(s)$

$$T(s) = G(s) \cdot R(s) = \frac{a}{s + b} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{a}{s(s + b)} = \frac{\frac{a}{b}}{s} - \frac{\frac{a}{b}}{s + b}$$

Usando la transformada inversa de Laplace, se tiene el siguiente resultado

$$T(t) = \left( \frac{a}{b} - \frac{a}{b} e^{-bt} \right) u_s(t) \quad (2.3.1.2)$$

Si se hace el límite cuando el valor de  $t$  tienda a infinito, se puede obtener el valor final de la salida

$$T(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{b} - \frac{a}{b} e^{-bt} \right) = \frac{a}{b} \quad (2.3.1.3)$$

El cociente  $\frac{a}{b}$  es el valor al que la salida tiende en un tiempo infinito. Por supuesto, la función nunca alcanza este valor, por lo que se introduce la definición de la constante de tiempo  $\tau$ , la cual se obtiene al sustituir  $t = \frac{1}{|b|}$  en la salida del sistema

$$T\left(\frac{1}{|b|}\right) = \left( \frac{a}{b} - \frac{a}{b} e^{-b\left(\frac{1}{|b|}\right)} \right) = \frac{a}{b} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0.632 \frac{a}{b} \quad (2.3.1.4)$$

Lo cual significa que en el tiempo  $t = \tau = \frac{1}{|b|}$ , la salida ha alcanzado el 63.2% de su valor final

Una variable conocida como el tiempo de asentamiento  $t_s$  se usa para considerar que la respuesta ha alcanzado el régimen permanente, es decir, las variaciones entre el valor de la salida evaluado en un tiempo infinito y el valor de la salida evaluado en un  $t_s$  difieren en un porcentaje según la siguiente tabla

$t_s = 5\tau$	Criterio de 1%
$t_s = 4\tau$	Criterio de 2%
$t_s = 3\tau$	Criterio de 3%

Se pueden identificar estos valores en la figura 18.

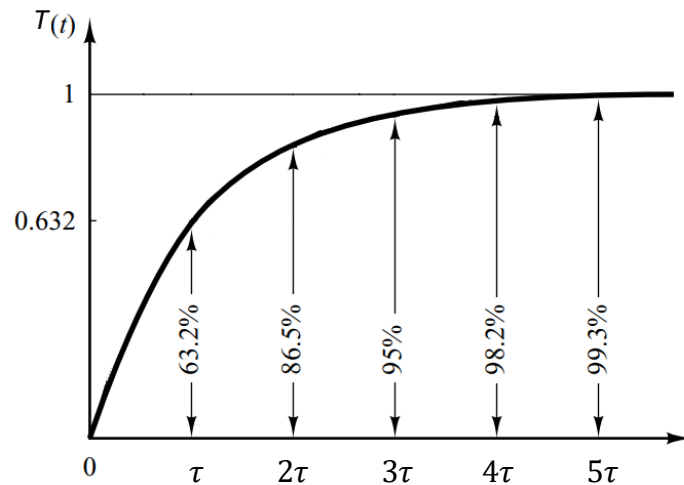


Figura 18. Visualización del porcentaje alcanzado por las constantes de tiempo. (Ogata, 2010)

## 2.4. Mecánica Lagrangiana

La mecánica lagrangiana es una reformulación de la mecánica clásica de Newton. Fue formulada por Joseph-Louis de Lagrange en 1788. Tiene como fundamento el cálculo variacional, el cual se encarga del estudio de las variaciones de las funciones. Leonard Euler postuló en 1744 el principio de mínima acción, cuya solución describe el camino más corto de llegar de un punto a otro. Aplicado a mecánica analítica, es posible calcular la energía o trabajo mínimo que se requiere para llegar de un estado a otro.

### 2.4.1 Ecuación de Euler Lagrange

La ventaja de la mecánica lagrangiana es que no es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre, solo se necesita calcular una propiedad llamada *lagrangiano* (Fowless, 2005)

$$L = K - U \quad (2.4.1.1)$$

El cual se define como la diferencia entre las energías cinéticas y potenciales de un cuerpo o sistema.

Es importante mencionar que el lagrangiano depende de dos variables independientes: posición  $x$  y velocidad  $\dot{x}$ .

Si se aplica la ecuación de Euler Lagrange (Fowless, 2005) al lagrangiano, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.4.1.2)$$

Aunque con esta ecuación podemos describir el comportamiento de un cuerpo o sistema conociendo sus energías cinéticas y potenciales, no podemos involucrar las pérdidas que tiene el sistema por fuerzas disipativas ni las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo/sistema.

Una modificación a la ecuación de Euler-Lagrange (Goldstein, 2002) permite involucrar estos términos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{Q_j \cdot \delta s_j}{\delta x} + \frac{\tau_j \cdot \delta s_j}{\delta \dot{x}} \quad (2.4.1.3)$$

El término  $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$  se refiere a las fuerzas de elementos disipativos en el cuerpo/sistema, donde D es el coeficiente de disipación viscosa. Una fuerza disipativa es aquella donde hay pérdidas de energías, es decir, un proceso irreversible.

Los términos  $\frac{Q_j \cdot \delta s_j}{\delta x}$ ,  $\frac{\tau_j \cdot \delta s_j}{\delta \dot{x}}$  se refieren a las fuerzas y momentos generalizados que actúan sobre el sistema.



En la ecuación de Euler Lagrange construida hasta ahora, solo hemos considerado una dirección en la cual tanto el lagrangiano como las fuerzas, momentos generalizados y fuerzas de disipación viscosa pueden variar, sin embargo, el caso más general es que pueden variar en un sistema coordenado arbitrario.

Por ejemplo, la energía cinética y potencial elástica de una barra delgada que gira respecto a un eje Z son las siguientes

$$K = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 \quad (2.4.1.4)$$

$$U = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (2.4.1.5)$$

En estas expresiones,  $J_z$  es el momento polar de inercia, el cual para una barra delgada de radio  $r$  y de masa  $m$  se calcula como

$$J_z = \frac{1}{2} m r^2 \quad (2.4.1.6)$$

En la energía potencial elástica aparece el término  $k$ , la cual para una barra circular sometida a torsión se calcula como

$$k = \frac{GJ}{L} \quad (2.4.1.7)$$

La energía cinética de la barra depende de la velocidad angular  $\dot{\theta}$ , mientras que la energía potencial elástica de la barra depende de la posición angular  $\theta$ .

La energía cinética de un disco circular grande se calcula exactamente igual que la energía cinética de la barra circular, sin embargo, el valor de  $J_x$  cambiará debido a que cambia el radio y la masa.

## 2.5. Inducción Electromagnética

A inicios del siglo XIX los científicos tenían la idea de que la electricidad y el magnetismo eran dos fenómenos distintos, y fue gracias a las ideas de Michael Faraday y las matemáticas de James Clerk Maxwell que demostraron que ambos son manifestaciones de un mismo fenómeno; el electromagnetismo.

Entre los ingeniosos experimentos que realizó Faraday para buscar la relación entre la electricidad y el magnetismo, consiguió generar una corriente eléctrica a través del trabajo realizado por un objeto ferromagnético en un campo magnético. En la actualidad este principio es el que ilumina nuestro mundo y hace funcionar todos los aparatos eléctricos.

Faraday llegó a la conclusión de que una Fuerza Electromotriz (fem) inducida es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético  $\Phi_B$  a través de una espira con respecto al tiempo. Simbólicamente, esto se representa de la siguiente manera (Young, 2009)

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2.5.1)$$

Donde  $\phi$  es el ángulo que forman los vectores de campo magnético  $\mathbf{B}$  y el vector normal a la sección de área  $\mathbf{A}$ . Si en vez de una espira cerrada se tiene una bobina con  $N$  espiras idénticas y si el flujo varía a la misma tasa a través de cada espira, la ley de Faraday tiene la siguiente modificación para la fem inducida (Young, 2009)

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2.5.2)$$

Esta ecuación tiene dos sentidos; si la fem es la encargada de producir el movimiento, hablamos de un motor eléctrico, y si el movimiento es el que produce la fem, hablamos de un generador eléctrico.

Por ejemplo, la figura 19 muestra una versión sencilla de un generador eléctrico. Una espira cerrada se hace girar con una rapidez angular constante  $\omega$  alrededor de un eje. La espira se encuentra en un campo magnético  $\mathbf{B}$  uniforme y constante. Los anillos colectores y las escobillas son el mecanismo encargado de mantener la continuidad del circuito eléctrico aun cuando la espira se encuentra en rotación

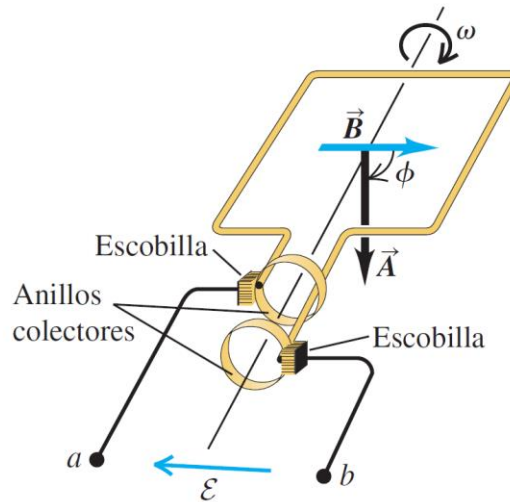


Figura 19. Representación de un generador eléctrico. Una espira que forma un área  $A$  gira alrededor de un eje con una velocidad angular  $\omega$ . A través de la sección existe un campo magnético  $B$ . La espira está conectada a las terminales  $ab$  por unas escobillas y unos anillos colectores, los cuales mantienen la continuidad entre las terminales y la espira aún cuando la espira se encuentra en rotación. A través de las terminales  $ab$  se crea una fuerza electromotriz  $\varepsilon$ . (Young, 2009)

Debido a que el campo magnético  $B$  es constante, el cambio temporal del flujo magnético depende únicamente del cambio de la sección de área  $A$  de la espira, debido a la rotación que esta tiene respecto al campo magnético. El ángulo  $\phi$  entre el campo magnético y la sección de área se puede calcular en función de la velocidad angular y el instante de tiempo  $\phi = \omega t$ . Cuando el vector normal a la sección de área  $A$  es paralelo al campo magnético, se tiene un valor de flujo magnético máximo, y cuando son perpendiculares, se tiene un valor igual a cero. Esto se repetirá cada media vuelta de la espira, es decir, cada  $\phi = 180^\circ$ , (figura 20) por lo que se puede calcular el flujo magnético con una función cosenoidal

$$\Phi_B = BA \cos \phi = BA \cos \omega t \quad (2.5.3)$$

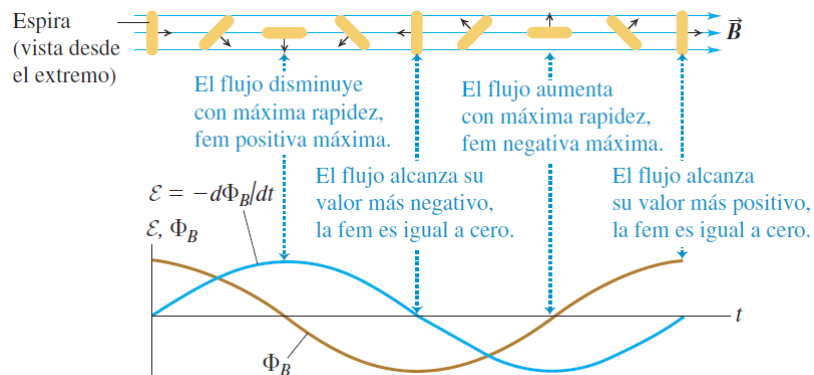


Figura 20. Gráfica de la fuerza electromotriz y el flujo magnético respecto al tiempo. (Young, 2009)

Y según la ley de Faraday, la fem inducida es

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \omega BA \sin \omega t \quad (2.5.4)$$

Como la fem varía en forma sinusoidal, la corriente en el circuito es *alterna*. Es por esto que los generadores eléctricos reciben el nombre de generador de corriente alterna (CA). Si en vez de una sola espira se tienen N espiras todas de una misma área A, entonces la fem inducida será proporcional al número de espiras (Young, 2009)

$$\varepsilon = -N \omega BA \sin \omega t \quad (2.5.5)$$

El principio del generador eléctrico es válido si es la espira la que se encuentra en rotación respecto al campo magnético fijo o si la espira se encuentra fija respecto a un campo magnético en rotación. El problema de un generador eléctrico es entonces buscar una fuente de energía que pueda generar la rotación de la espira, para así transformar la energía rotacional en energía eléctrica.

### 3 Modelado

Con el fin de tener una secuencia ordenada y estructurada, se ha realizado el siguiente diagrama, el cual explica las variables obtenidas en cada uno de los temas del modelado:

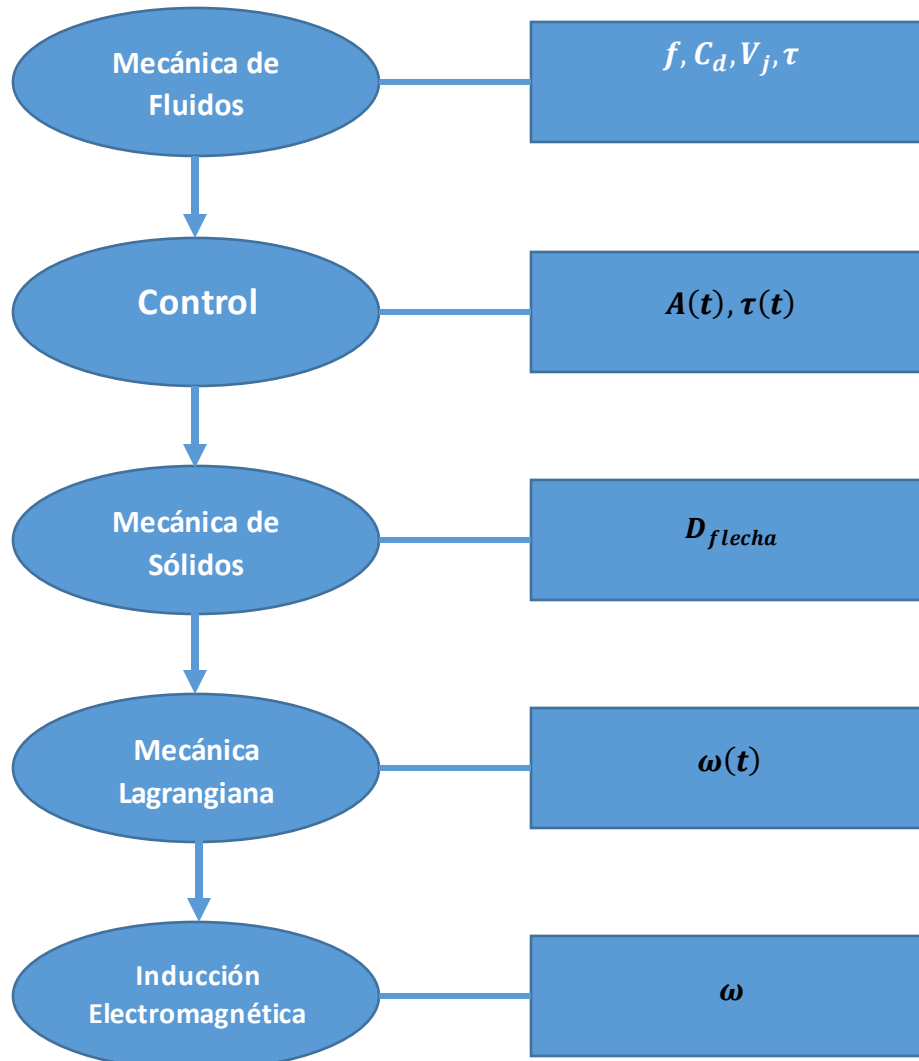


Diagrama 1. Metodología utilizada de cada uno de los temas

En el capítulo de mecánica de fluidos, se obtendrá el coeficiente de fricción, el coeficiente de descarga, la velocidad a la salida de la tobera o velocidad de chorro, y el par aplicado en la turbina. En el capítulo de control se genera la sección de área y el par dependientes del tiempo con los resultados obtenidos en el capítulo previo de mecánica de fluidos. En el capítulo de mecánica de sólidos se genera una ecuación que

describe el diámetro mínimo necesario de la flecha. En el capítulo de mecánica lagrangiana se obtiene la velocidad angular de la flecha dependiente del tiempo, y en el capítulo de inducción electromagnética se obtiene la ecuación de la fuerza electromotriz inducida dependiente de la velocidad angular.

La figura 21 representa una versión simplificada de la turbina; el fluido en reposo de la presa hidráulica convierte su energía potencial en energía cinética al pasar por una tubería, entonces transfiere su momento lineal y genera un par en la turbina y la flecha, los cuales comenzarán a rotar, y en un generador eléctrico se producirá una fuerza electromotriz inducida.

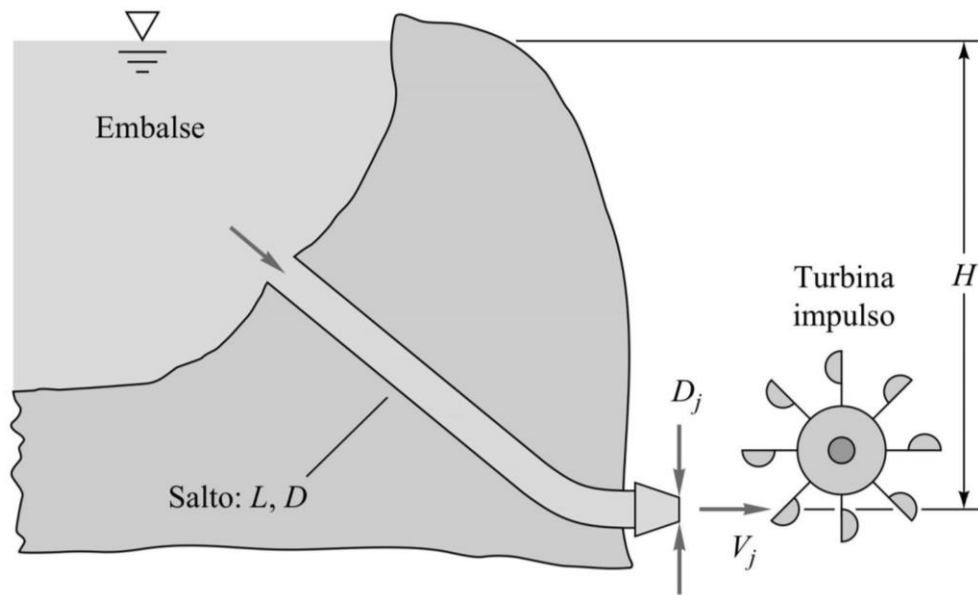


Figura 21. Representación simplificada del modelo de la turbina (White, 2004)

### 3.1 Mecánica de Fluidos

Asumiendo que se tiene un flujo incompresible en toda la trayectoria del fluido y que en las paredes de la tubería no hay efectos viscosos, podemos aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 de la carrera del fluido, donde el punto 1 corresponde a la superficie libre con un área de sección transversal  $A_1$ , y el punto 2 a la salida de la tobera, con una velocidad  $V_2$  y un área de sección transversal  $A_2$ . Las presiones en ambos puntos son iguales a la presión atmosférica, por lo tanto, sustituyendo esto en la ecuación de Bernoulli se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g h_1 &= P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h_2 \\ \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 &= \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h_2 \\ V_2^2 - V_1^2 &= 2g(h_2 - h_1)\end{aligned}$$

De la conservación de la masa (White, 2004) se sabe que

$$\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal}$$

Sin embargo, como se tiene un flujo incompresible, la densidad del fluido no cambia en la entrada y la salida, por lo que la ecuación de la conservación de la masa se reduce a:

$$\begin{aligned}Q_{ent} &= Q_{sal} \\ A_1 V_1 &= A_2 V_2 \\ V_1 &= \frac{A_2}{A_1} V_2\end{aligned}$$

Si se sustituye este valor en el resultado obtenido con la ecuación de Bernoulli, y se revuelve para  $V_2$  se tiene la siguiente expresión

$$V_2^2 = \frac{2g(h_2 - h_1)}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}$$

Debido a que el área de la superficie libre es mucho mayor que el área a la salida de la tobera, el cociente  $\frac{A_2}{A_1}$  es prácticamente cero, por lo que se puede hacer la aproximación siguiente:

$$V_2^2 \sim 2g(h_2 - h_1)$$

Este resultado nos dice que, según Bernoulli, la velocidad a la salida de la tobera depende únicamente de la diferencia de alturas, como si una partícula cayera libremente. En otras palabras, la energía potencial de la superficie libre se convierte en energía cinética. En la salida de una tobera existen ciertas condiciones del

fluido y de la misma geometría de la tobera que alteran la velocidad de salida, por esto se agrega el *coeficiente de descarga*  $c_d$  adimensional:

$$V_2 = c_d [\sqrt{2g(h_2 - h_1)}]$$

Al término  $h_2 - h_1$  se le denomina altura o carga de la turbina, y se representa con una  $H$

$$V_2 = c_d [\sqrt{2gH}]$$

Esta sería la velocidad a la salida de la tobera si se considera que no existen pérdidas en la tubería. Si se desea conocer la velocidad del chorro de agua a la salida de la tobera considerando las pérdidas por fricción en la tubería, se debe hacer una modificación utilizando la ecuación de Bernoulli incluyendo el término  $h_f$  y la ecuación de continuidad (White, 2004):

$$\left( \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 = \left( \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2 + h_f$$

$$V_j D_j^2 = V D^2$$

De igual manera, el punto 1 corresponde a la superficie libre, y el punto 2 a la salida de la tobera. Debido a que las presiones en ambos puntos son iguales, se eliminan y se resuelven ambas ecuaciones para la velocidad de chorro  $V_j = V_2$

$$V_j = \sqrt{\frac{2gH}{f \frac{L}{d} \left( \frac{D_j}{D} \right)^4 + 1}}$$

Este término es similar al obtenido antes de considerar las pérdidas por fricción. Podemos incluir el coeficiente de descarga para obtener la expresión final de la velocidad de chorro

$$V_j = C_d \sqrt{\frac{2gH}{f \frac{L}{d} \left( \frac{D_j}{D} \right)^4 + 1}} \quad (3.1.1)$$

El valor del coeficiente de descarga dependerá de la geometría de la tobera. El factor  $f$  dependerá del número de Reynolds y la rugosidad de la tubería.



La salida a la tobera es un chorro de agua a alta velocidad  $V_j$ , el cual empujará las aspas de la turbina. En este trabajo las aspas de la turbina se consideran como cuerpos rígidos. En el capítulo de turbomáquinas introdujo la ecuación de la potencia neta de una turbina (2.1.3.1)

$$P_w = \rho Q u (V_j - u) (1 - \cos \beta)$$

$V_j$  es la velocidad del chorro a la salida de la tobera,  $Q$  es el caudal de agua que sale de la tobera,  $\rho$  es la densidad del fluido de operación,  $\beta$  es el ángulo de diseño de las paletas a las que sale el chorro de agua, y  $u$  es la velocidad del álabe de la turbina.

En el apéndice 6.1 de valores óptimos se demuestra que la velocidad óptima de la turbina ocurre cuando  $u = \frac{1}{2}V_j$ , es decir, la velocidad del álabe es dos veces mayor que la velocidad de salida del chorro de agua. Si se sustituye este valor en la expresión de la potencia generada, se obtiene lo siguiente

$$P_w = \frac{1}{4} \rho Q V_j^2 (1 - \cos \beta)$$

La potencia generada por la turbina es igual al par generado por el chorro de agua multiplicado por la velocidad angular de la turbina, y la velocidad angular de la turbina es igual a la velocidad del álabe entre el radio de la turbina:

$$P^* = \tau^* \omega^*$$

$$\omega^* = \frac{u}{r} = \frac{\frac{1}{2}V_j}{\frac{1}{2}D_t} = \frac{V_j}{D_t}$$

Sustituyendo estos valores y resolviendo para el par ideal generado, se tiene lo siguiente

$$\tau^* = \frac{1}{4} D_t \rho V_j^2 A_j (1 - \cos \beta)$$

Si se sustituye el valor de  $V_j$  se tiene una expresión del valor óptimo del par de la turbina

$$\tau_o^* = \frac{1}{4} D_t \rho A_j C_d^2 \left( \frac{2gH}{f \frac{L}{D} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 + 1} \right) (1 - \cos \beta) \quad (3.1.2)$$

Este es el valor final del par óptimo de una turbina de impulso con una velocidad constante  $V_j$ . En el capítulo siguiente se modificará esta expresión para que el diámetro  $D$  sea una función del tiempo.

### 3.2 Control

Supongamos que se tiene la turbina en reposo, y en un instante se libera el caudal  $Q = V_j A$  final deseado con el valor de  $V_j$  calculado en el capítulo anterior, entonces se tendría un par instantáneo. Esto tiene consecuencias, ya que la generación instantánea de un gran par podría ocasionar que los álabes de la turbina generen fracturas, y se puede generar cavitación o golpe de ariete en la tubería (figura 22). Es por esto que el caudal debe incrementarse de forma gradual, es decir, en la ecuación del par óptimo es necesario introducir un término que dependa del tiempo.

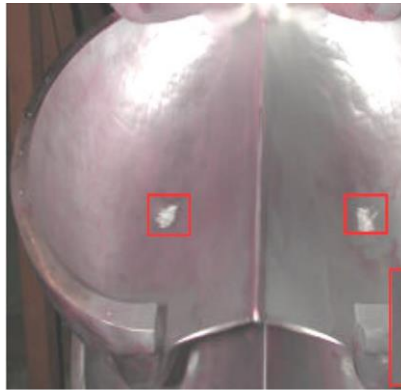


Figura 22. Daño por cavitación en los álabes de una turbina Pelton (Best Practice Catalog Pelton Turbine).

Al inicio de la tubería se tienen grandes válvulas de mariposa o esféricas como las de la figura 23, las cuales permiten el paso de una cierta cantidad de agua deseada. En la práctica suelen abrirse de una forma gradual para restringir el paso del agua, esto ocasiona que el término del área dependa del tiempo

$$A = A(t)$$

Para lograr esto, se hará uso de la solución de una ecuación de primer orden con una constante de tiempo  $\tau$  de 30 minutos, es decir, en 30 minutos el valor de  $A$  pasará de un valor inicial cero a un valor final.



Figura 23. Válvula de bola (izquierda) y de mariposa (derecha) (Válvula de Bola) (Válvula de Mariposa)

Se puede sustituir el tiempo de asentamiento  $t = 5\tau = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}$  en la solución de un sistema de primer orden

$$A(t) = K(1 - e^{-bt}) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde  $K$  es una constante arbitraria, y  $b$  es el polo del sistema de primer orden. Nótese que se ha elegido el criterio de  $t = 5\tau$ . Sustituyendo las condiciones de  $t = 5\tau = 1800 \text{ s}$  y  $A(1800) = A^*$  donde  $A^*$  es el valor final del área, se obtienen la solución particular de la ecuación del sistema de primer orden

$$\tau = \frac{1800}{5} = 360 \text{ s}$$

$$A(1800 \text{ s}) = K\left(1 - e^{-\frac{1800}{360}}\right) = A^*$$

$$K = \frac{A^*}{(1 - e^{-5})}$$

$$A(t) = \frac{A^*}{1 - e^{-5}} \left(1 - e^{-\frac{1}{360}t}\right)$$

Esta es una ecuación exponencial, la cual comienza a crecer desde  $A(0) = 0$  y en  $t = 1800 \text{ s}$  ha llegado al 63.2% del valor final de área deseada  $A^*$ . En la figura 24 se puede ver la curva que describe cómo el área converge a su valor final respecto al tiempo.

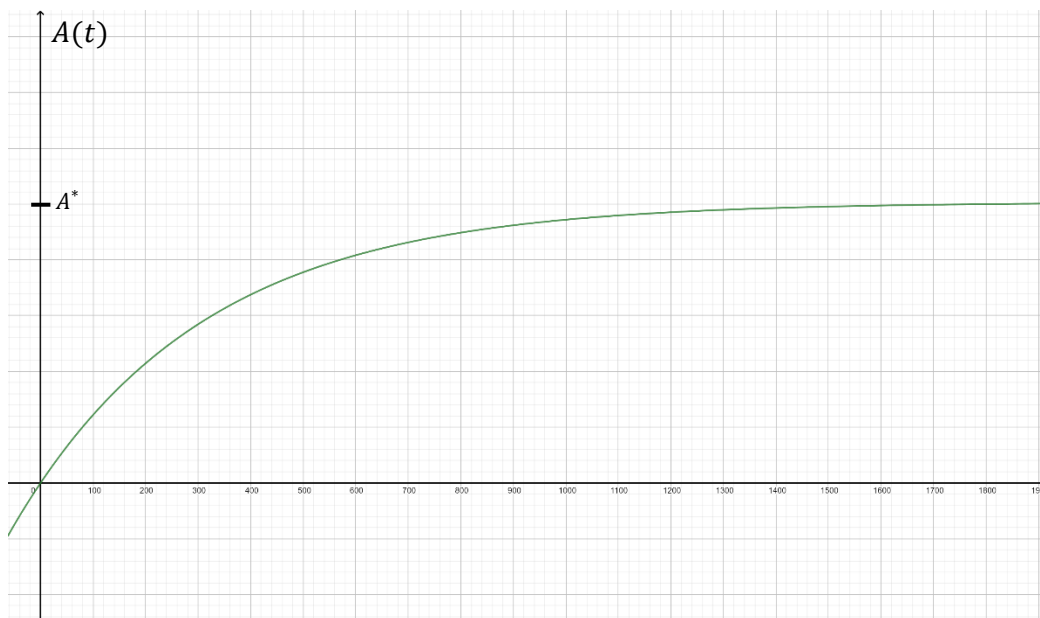


Figura 24. Crecimiento del área respecto al tiempo. En  $t = 1800 \text{ s}$  el valor del área converge a  $A^*$

Sustituyendo este resultado en el par ideal generado obtenido en el capítulo anterior y el valor del área final  $A^* = \frac{\pi}{4} D^2$  se tiene lo siguiente

$$\tau(t) = \frac{1}{4} D_t \rho C_d^2 \left( \frac{2gH}{f \frac{L}{D} \left( \frac{D_j}{D} \right)^4 + 1} \right) (1 - \cos \beta) \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{1 - e^{-5}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) = \tau_0^* \frac{1}{1 - \frac{1}{e^5}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right)$$

$$\tau(t) = \tau_0^* \frac{1}{1 - \frac{1}{e^5}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) \quad (3.2.1)$$

Debido a la dependencia del área respecto al tiempo, la velocidad a la salida de la tobera también dependerá del tiempo, y por lo tanto, el par ideal.

Hasta este punto solo hemos considerado las pérdidas en la tobera con el coeficiente de descarga. Debido a que consideramos la turbina como un cuerpo rígido, no tenemos deformaciones, y el par es completamente transferido a la flecha. En la práctica el par transferido también dependerá del número de álabes que tiene la turbina, y el ángulo de diseño  $\beta$  no es un valor constante debido a la rotación de la turbina, sin embargo, a altas velocidades angulares de la turbina  $\omega$  el chorro de agua golpea tan rápido los álabes que se puede ignorar el número de álabes, y se puede tomar el valor de  $\beta$  como una constante.

Según las dimensiones de la flecha se pueden tener distintos cojinetes para evitar la frecuencia natural. En las turbinas suelen usarse dos tipos de cojinetes: hidrostáticos e hidrodinámicos. Los cojinetes hidrostáticos son aquellos que utilizan materiales con bajos coeficientes de fricción, y suelen tener un elemento lubricante como aceite, y los cojinetes hidrodinámicos son aquellos en los que no existe un contacto físico entre los elementos, sino que son separados por una delgada película de lubricante. Los cojinetes hidrodinámicos tienen ventajas debido a que pueden transmitir grandes cantidades de potencia sin tantas pérdidas.

### 3.3 Mecánica de Sólidos

La flecha debe diseñarse de tal manera que pueda transmitir la potencia de la turbina sin tener esfuerzos cortantes cercanos al límite de cedencia  $\tau_{max}$ . La potencia de rotación de la flecha viene dada por la expresión

$$P = \tau\omega$$

Donde  $\tau$  es la potencia aplicada por el chorro a la turbina, y  $\omega$  la velocidad angular de la flecha. Si se sustituye la ecuación de la torsión elástica se tiene lo siguiente:

$$\frac{J}{c} = \frac{\tau}{\tau_{max}}$$

Donde  $J$  es el momento de área, y  $c$  el radio de la flecha. Si se sustituye el valor del par óptimo obtenido y se despeja el radio  $c$ , y el valor del momento de área de un cilindro  $J = \frac{1}{2}\pi c^3$  se tiene la siguiente expresión

$$c = \sqrt[3]{\frac{D_t \rho A_j C_d^2 V_j^2 (1 - \cos \beta)}{2\pi \tau_{max}}} \quad (3.3.1)$$

De esta forma se puede saber el valor mínimo del radio de la flecha para evitar deformaciones en la zona plástica.

### 3.4 Mecánica Lagrangiana

La turbina y la flecha constituyen la masa del sistema que se desea modelar, por lo que el material del que están hechas y sus dimensiones determinarán el momento de inercia  $J$  total.

$$J = J_{turbina} + J_{flecha}$$

Se puede considerar que la turbina es una rueda grande, y la flecha es un cilindro, entonces ambos momentos inercia se calculan de la siguiente manera:

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

Se puede calcular la masa de ambos elementos multiplicando la densidad del material por el volumen total. Sustituyendo esta expresión en los dos resultados anteriores se tiene lo siguiente:

$$J = \frac{1}{2}\rho_{turbina}\mathcal{V}_{turbina}\left(\frac{D_{turbina}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{flecha}\mathcal{V}_{flecha}\left(\frac{D_{flecha}}{2}\right)^2 \quad (3.4.1)$$

Lo siguiente es calcular el lagrangiano del sistema. Despreciaremos la energía potencial de la turbina y la flecha, por lo que el lagrangiano será igual a la energía cinética. Sabemos que la energía cinética de la turbina y la flecha se calcula de la siguiente manera:

$$L = K = \frac{1}{2}J_{turbina}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{flecha}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de Euler-Lagrange (2.4.1.3) Se tiene lo siguiente

$$J\ddot{\theta} = \tau$$

Para comprobar qué pasaría si se considera un par constante y uno dependiente del tiempo, se harán dos análisis; uno donde el par  $\tau$  se considera constante y luego como un par con dependencia del tiempo.

### 3.4.1 Par constante

Si se sustituye el valor  $\ddot{\theta}$  por su equivalente  $\dot{\omega}$  y el par constante  $\tau$  de la ecuación 2.1.14.4 se tiene una ecuación diferencial de primer orden

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} D_t \rho A_j (V_j - u) (1 - \cos \beta)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, se puede factorizar el valor de  $V_j$  del segundo miembro, por lo que se tiene:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{D_t V_j A_j \rho}{2} (1 - \cos \beta) V_j \left(1 - \frac{u}{V_j}\right)$$

El valor de  $u$  es la velocidad periférica de la turbina, es decir,  $u = \omega \left(\frac{D_t}{2}\right) = 2\pi n$ . Si se sustituye esta definición tanto en el valor de  $u$  como en el valor de  $\omega$  se tiene lo siguiente

$$2\pi J \frac{dn}{dt} = \frac{D_t V_j A_j \rho}{2} (1 - \cos \beta) V_j \left(1 - \frac{\pi D_t n}{V_j}\right)$$

Ordenando los términos se tiene una ecuación diferencial de primer orden, la cual puede resolverse separando los términos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left(1 - \frac{\pi D_t n}{V_j}\right) \\ \frac{dn}{\left(1 - \frac{\pi D_t n}{V_j}\right)} &= \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j dt \\ \int_0^n \frac{dn}{\left(1 - \frac{\pi D_t n}{V_j}\right)} &= \int_0^t \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j dt \\ -\ln\left(1 - \frac{\pi D_t n}{V_j}\right) &= \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j t \\ n &= \frac{V_j}{\pi D_t} \left(1 - e^{-\frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j t}\right) \end{aligned}$$

Esta es la solución de la frecuencia de la turbina desde el tiempo cero hasta un tiempo  $t$ . Si se multiplica el resultado por  $2\pi$  se tiene la ecuación exponencial de la velocidad angular

$$\omega = \frac{2V_j}{D_t} \left(1 - e^{-\frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j t}\right) \quad (3.4.1.1)$$

### 3.4.2 Par dependiente del tiempo

La solución de la ecuación diferencial con el par dependiente del tiempo es muy similar a la del par constante. La ecuación diferencial por resolver es la siguiente

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{D_t V_j A_j \rho}{2} (1 - \cos \beta) (V_j - u) \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right)$$

Sustituyendo en ambos miembros los valores de  $u = 2\pi n = \omega \left( \frac{D_t}{2} \right)$  y ordenando los términos se tiene lo siguiente

$$\frac{dn}{\left( 1 - \frac{\pi D_t n}{V_j} \right)} = \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) dt$$

$$\int_0^n \frac{dn}{\left( 1 - \frac{\pi D_t n}{V_j} \right)} = \int_0^t \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) dt$$

Es en este paso donde se tiene una diferencia con el par constante, ya que aquí el segundo miembro depende del tiempo, por lo que la solución de la integral es distinta

$$-\ln \left( 1 - \frac{\pi D_t n}{V_j} \right) = \frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 360 \left( e^{-\frac{1}{360}t} - 1 \right) + x \right) t$$

$$n = \frac{V_j}{D_t \pi} \left( 1 - e^{-\frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 360 \left( e^{-\frac{1}{360}t} - 1 \right) + x \right) t} \right)$$

$$\omega = \frac{2V_j}{D_t} \left( 1 - e^{-\frac{D_t V_j A_j \rho}{4\pi J} (1 - \cos \beta) V_j \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \right) \left( 360 \left( e^{-\frac{1}{360}t} - 1 \right) + x \right) t} \right) \quad (3.4.2.1)$$

De igual manera, esta es una ecuación exponencial con un valor máximo  $\frac{2V_j}{D_t}$ . La diferencia entre las soluciones de ambos análisis es que se tienen distintos tiempos de asentamiento

La razón por la que no se ha incluido el término de disipación viscosa en la ecuación de Euler-Lagrange es porque los cojinetes hidrodinámicos tienen el siguiente comportamiento: durante el arranque resulta bastante complicado vencer la fuerza de inercia del fluido en los rodamientos (fricción viscosa sólida), sin embargo, una vez que la flecha se encuentra en rotación la fricción en el fluido de los cojinetes disminuye. Una vez que se ha vencido la inercia de los elementos y el valor de la constante de disipación alcanzó su valor mínimo, es necesario incrementar la velocidad angular, por lo que la energía rotacional de los elementos debe seguir creciendo, y de nuevo la constante de disipación aumenta (figura 25). Este



comportamiento de los cojinetes genera una constante de disipación dependiente del tiempo  $C(t)$ , y la ecuación diferencial resultante hubiera sido no lineal, es por esto que se ha omitido el valor de dicha constante en la ecuación de Euler-Lagrange.

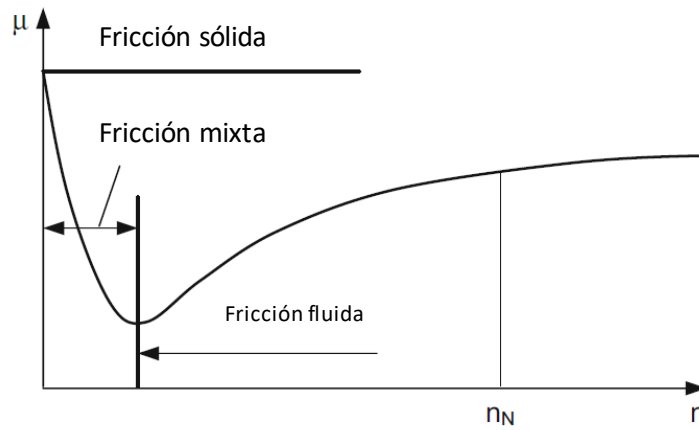


Figura 25. Comportamiento de los rodamientos respecto a la velocidad angular de la flecha. (Zhang, 2016)

Se puede calcular la frecuencia natural de la turbina y la flecha de la siguiente manera. Puede considerarse que la turbina y la flecha están sujetas a dos cojinetes como lo muestra la figura 26:

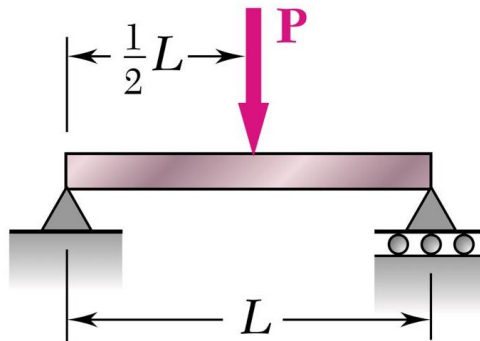


Figura 26. Sistema simplemente empotrado en ambos extremos. (Beer, 2010)

Debido a que es un sistema simplemente apoyado en dos extremos, el sistema se deformará en su centro una distancia  $\delta$ . Esta deformación viene dada por la ley de Hooke (Beer, 2010)

$$F = k\delta \tag{3.4.2}$$

La constante de rigidez  $k$  puede calcularse para un sistema doblemente apoyado con un disco en el centro como (Beer, 2010)

$$k = \frac{48EI}{L^3} \quad (3.4.3)$$

Donde  $E$  es el módulo de Young del material, y la constante  $I$  es el momento de área de la flecha, la cual se calcula

$$I = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_{flecha}}{2} \right)^4 \quad (3.4.4)$$

Por último, la frecuencia natural del sistema viene dada por la ecuación

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.4.5)$$

Donde la masa es la masa del disco (turbina) y la masa de la flecha

$$m = m_{flecha} + m_{turbina} = \rho_{flecha} V_{flecha} + \rho_{turbina} V_{turbina} \quad (3.4.6)$$

### 3.5 Inducción electromagnética

De la ley de Faraday se sabe que

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = N\omega BA \sin(\omega t)$$

También se sabe que la corriente alterna en México se transmite a una frecuencia  $f = 60$  Hz, por lo que

$$\omega = 2\pi f = 120\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Entonces se tiene la condición de que la velocidad angular de la flecha en el alternador debe ser de  $120\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  o  $3600 \text{ rpm}$ . La velocidad angular a la salida de la flecha corresponde a la coordenada  $\dot{\theta}$ , por lo que se tiene la condición de que  $\dot{\theta} = 120\pi$  en el régimen permanente, es decir, cuando el caudal saliente de la tobera haya llegado a su estado permanente, el par aplicado a la flecha deja de depender del tiempo, por lo que ya no existe un ángulo de deformación, y la flecha en el generador debe girar a una velocidad angular  $\omega = 3600 \text{ rpm}$ . En las turbinas hidráulicas de reacción se tienen velocidades angulares muy bajas, menores a  $36000 \text{ rpm}$ , por lo que es necesario una caja de cambios de velocidades para poder acoplar una flecha en el generador eléctrico que pueda producir dicha velocidad angular.

La flecha en el generador eléctrico es de un material ferromagnético y proporciona el valor de la variable de campo magnético  $B$ , mientras que la jaula del generador es el estator de un generador eléctrico, el área  $A$  dependerá de la forma de cada una de las  $N$  espiras que se tengan. Con estos valores y la velocidad angular de la flecha se tiene el valor de la fuerza electromotriz generada:

$$\varepsilon = -N \omega BA \sin \omega t \quad (3.5.1)$$

## 4 Experimentación y Resultados

La siguiente tabla muestra los datos utilizados en el modelado de este trabajo. Estos son valores reales de una turbina Pelton obtenidos de distintas referencias (White, 2004), (Zhang, 2016) (USAID Hydropower Investment Promotion Project)

Variable	Descripción	Valor
$H$	Carga	450 m
$L$	Longitud tubería	5000 km
$D$	Diámetro tubería	1.2 m
$D_j$	Diámetro salida tobera	0.2 m
$\varepsilon$	Rugosidad tubería	2 mm
$D_t$	Diámetro turbina	3.2 m
$L_{turb}$	Espesor Turbina	0.524 m
$D_{flecha}$	Diámetro flecha	0.396 m
$L_{flecha}$	Longitud Flecha	2.28 m
$\beta$	Ángulo de salida	165°
$\rho_{agua}$	Densidad agua	1000 kg/m <sup>3</sup>
$\mu_{agua}$	Viscosidad cinemática agua	0.001 kg/m s
$\rho_{acero}$	Densidad acero	7850 kg/m <sup>3</sup>

Se considera que la flecha y la turbina están hechas ambas de acero, y el material de la tubería está hecho de hormigón, con un valor promedio de rugosidad de 2 mm (White, 2004)

El valor de la velocidad final a la salida de la tobera viene dado por la ecuación (3.1.1)

$$V_j = C_d \sqrt{\frac{2gH}{f \frac{L}{d} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 + 1}}$$

Es necesario calcular los valores del coeficiente de descarga  $C_d$  (2.1.2.2) y el valor del coeficiente de fricción  $f$  (White, 2004)

$$C_d \sim 0.9965 - 0.00653 \beta_d^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10^6}{Re_D}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} + \left( \frac{2.51}{Re_d f^{1/2}} \right) \right)$$

Para calcular el coeficiente de fricción  $f$  (White, 2004), se divide la rugosidad entre el diámetro de la tubería

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.002 \text{ m}}{1.2 \text{ m}} = 0.00166$$

El número de Reynolds viene dado por

$$Re = \frac{\rho V_j D}{\mu}$$

Sin embargo, el valor de  $V_j$  es el objetivo de este cálculo, por lo que es necesario hacer iteraciones para llegar al resultado de los valores de  $Re$ ,  $f$  y  $V_j$ .

Los resultados finales de la iteración generan los siguientes valores

$$Re = 3 \times 10^6$$

$$f = 0.0189$$

$$C_d = 0.96$$

$$V_j = 91.23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Este último es el valor de la velocidad del chorro de agua a la salida de la tobera. Lo siguiente es calcular la inercia de la turbina y la flecha (ecuación 3.4.1)

$$J = \frac{1}{2} \rho_{turbina} \forall_{turbina} \left( \frac{D_{turbina}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_{flecha} \forall_{flecha} \left( \frac{D_{flecha}}{2} \right)^2$$

Donde el volumen de cada elemento se calcula de la siguiente manera

$$\forall = \frac{\pi}{4} D^2$$

Sustituyendo los valores se llega al siguiente resultado

$$J_{turbina} = 42'344.86 \text{ kg m}^2$$

$$J_{flecha} = 43.21 \text{ kg m}^2$$

Estos resultados pueden sustituirse en las ecuaciones (3.4.1.1) y (3.4.2.1) para obtener las soluciones de las velocidades angulares. Para un par constante (3.1.2) se tiene:

$$\tau^* = \frac{1}{4} A_j D_t \rho C_d^2 \left( \frac{2gH}{f \frac{L}{D} \left( \frac{D_j}{D} \right)^4 + 1} \right) (1 - \cos \beta) = 379 \text{ KN}$$

$$\omega(t) = 54.739 (1 - e^{-1.4819t}) \text{ rad/s}$$

Y para el par dependiente del tiempo (ecuación 3.2.1)

$$\tau(t) = \frac{1}{4} D_t \rho C_d^2 \left( \frac{2gH}{f \frac{L}{D} \left( \frac{D_j}{D} \right)^4 + 1} \right) (1 - \cos \beta) \frac{\pi}{4} D^2 \left( \frac{1}{1 - e^{-5}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) \right) = 381.57 \left( 1 - e^{-\frac{1}{360}t} \right) KN$$

$$\omega_2(t) = 54.739 \left( 1 - e^{-(1.492) \left( t + 360 \left( e^{-\left( \frac{1}{360}t \right) - 1} \right)} \right)} \right) rad/s$$

Las curvas de las velocidades angulares  $\omega(t)$  y  $\omega_2(t)$  se ilustran en la figura 27. Ambas soluciones tienen un valor final de  $54 rad/s$ , sin embargo, la solución de  $\omega(t)$  tiene un valor instantáneo, es decir, crece rápidamente en el tiempo hasta el valor final. La solución  $\omega_2(t)$  crece de forma suave debido al par dependiente del tiempo.



Figura 27. Gráfica que muestra la solución de las velocidades angulares para cada uno de los pares. La curva azul presenta la solución para un par constante, y la curva verde presenta la solución para un par dependiente del tiempo.

En la figura 28 se ilustran los pares. El par sin dependencia del tiempo es una línea recta en todo el tiempo, es decir, desde el momento en el que se abre la tobera se deja que todo el caudal de agua golpee las aspas de la turbina, por lo que se generan fuerzas de reacción bastante grandes. Esto es peligroso, ya que puede poner en riesgo los materiales como los álabes o la flecha de la turbina debido a la deformación. Para evitar

esto se ha introducido el par dependiente del tiempo, el cual crece de forma gradual desde el tiempo cero hasta un tiempo de asentamiento de 30 minutos, esto gracias a la apertura gradual del caudal de agua al inicio de la tubería.

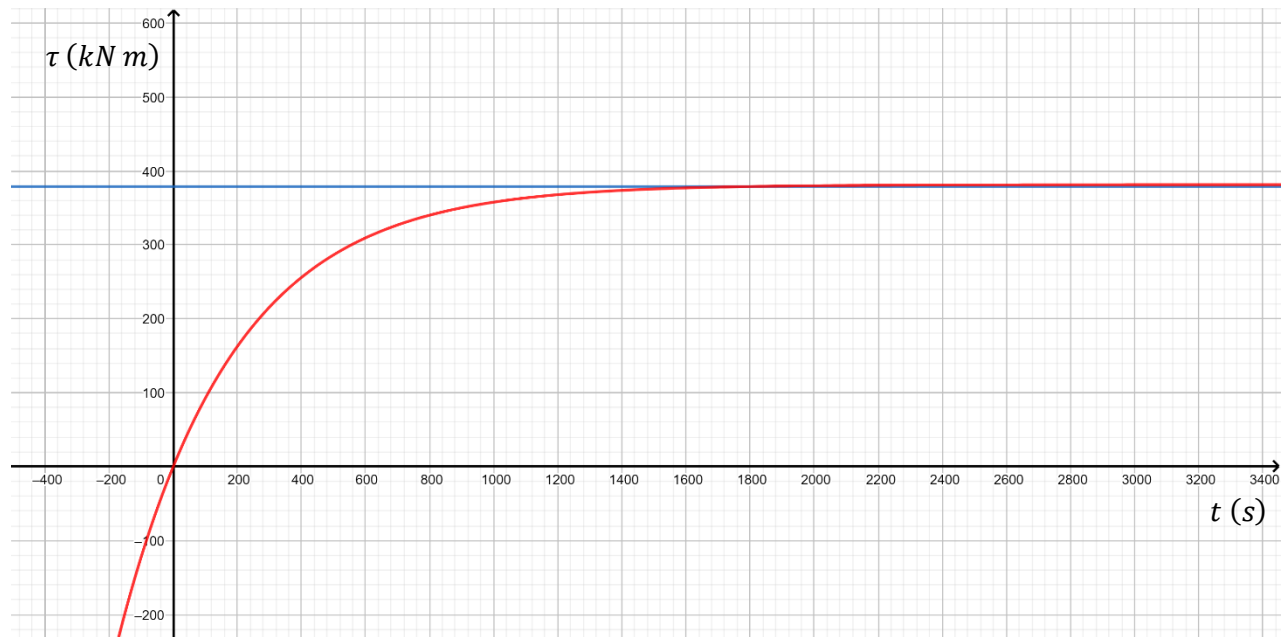


Figura 28. Gráfica que muestra el par de entrada constante (curva azul) y un par con una entrada que depende del tiempo (curva roja)

En la figura 29 se muestra la potencia de la turbina. Estas gráficas son generadas multiplicando los valores del par por su respectiva solución de velocidad angular  $P = \tau\omega$  y  $P_2 = \tau(t)\omega_2(t)$ . Como se esperaba, la primera potencia es una potencia instantánea, lo cual pone en riesgo los elementos de la turbina. La segunda potencia es una que crece de forma suave, desde un valor de cero hasta un valor final de aproximadamente 20 MW. Este valor de potencia es ideal, debido a que hemos usado los valores ideales en cada elemento (carga, tubería, tobera, turbina y flecha) sin embargo, en la realidad se tienen pérdidas en cada uno de estos elementos, es por eso que la potencia real generada será siempre menor (figura 30).

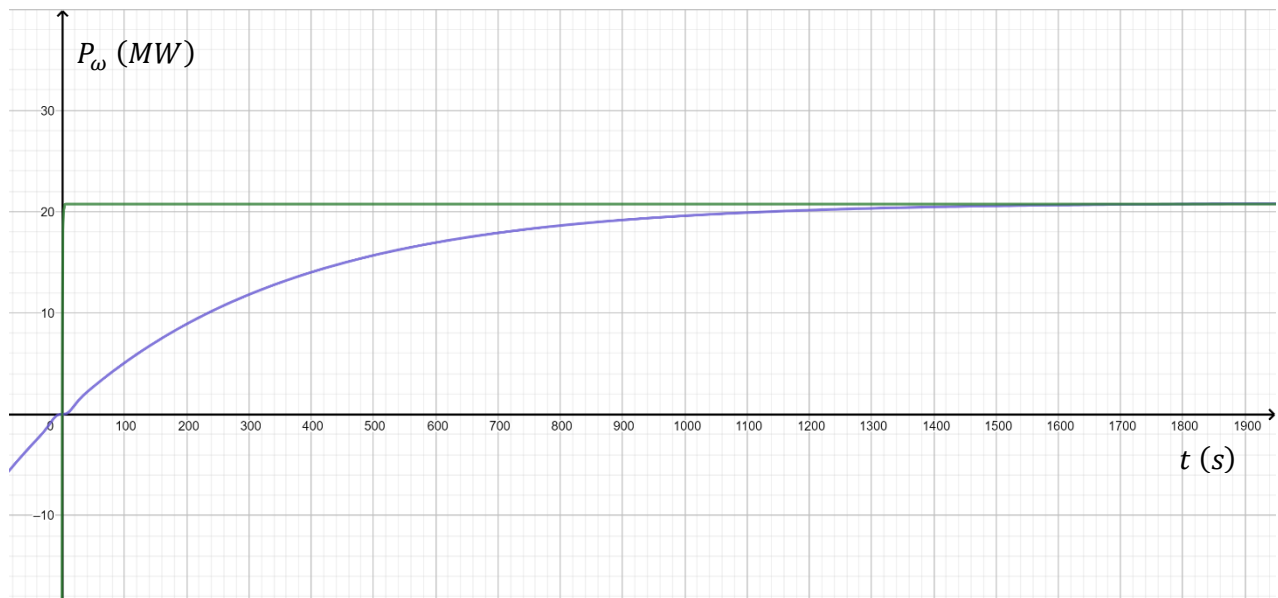


Figura 29. Gráfica que muestra la potencia de la turbina para un par constante (curva verde) y un par dependiente del tiempo (curva azul).

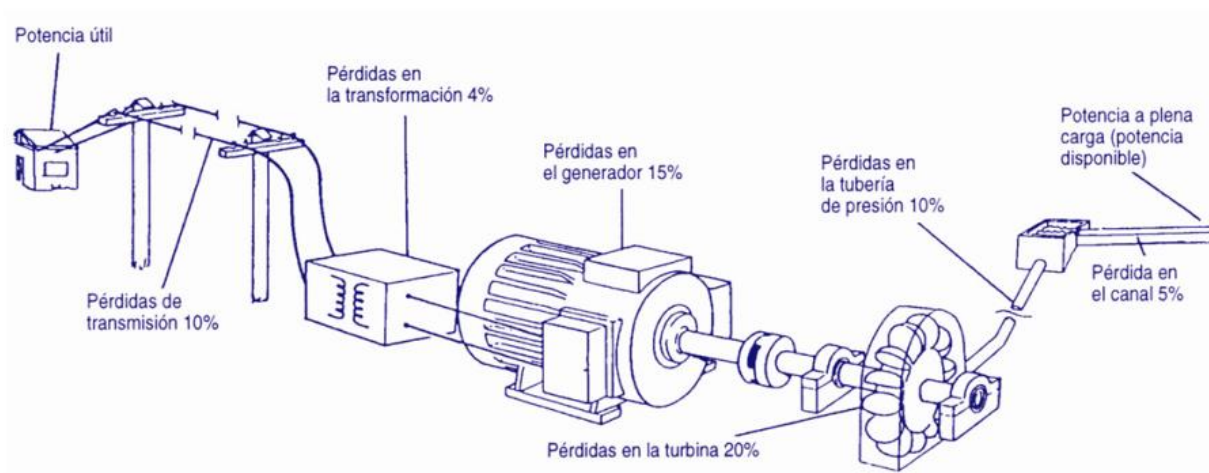


Figura 30. Representación de las pérdidas en la conversión de energía (Diseño y construcción de una turbina Pelton)



Ahora se puede calcular si el diámetro de la flecha es suficientemente grande según lo permitido por el criterio de límite de fluencia. En la ecuación 3.3.1 se sustituyen los valores del par generado y el esfuerzo a la fluencia del acero  $\tau_{max} = 60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

$$c = \sqrt[3]{\frac{(2)(379 \times 10^3 \text{ N m})}{\pi (60 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}} = 0.159 \text{ m}$$

Es decir, el radio debe ser igual o mayor a  $0.159 \text{ m}$ , o en términos del diámetro, igual o mayor a  $0.318 \text{ m}$ . El diámetro utilizado para este modelado fue de  $0.396 \text{ m}$ , por lo que se cumple con el criterio de límite de fluencia.

La frecuencia natural del sistema viene dada por la ecuación (3.4.5)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La constante de rigidez equivalente del sistema viene dada por la ecuación (3.4.3) y (3.4.4) (El módulo de Young para el acero es de  $210 \text{ GPa}$ )

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(210 \times 10^9 \text{ Pa}) \left( \frac{\pi}{4} (0.396 \text{ m})^4 \right)}{(2.28 \text{ m} + 0.524 \text{ m})^3} = 551'921'289.52 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{551'921'289.52 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\frac{\pi}{4} * 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * ((3.2 \text{ m})^2 * 0.524 \text{ m} + (0.396 \text{ m})^2 * 2028 \text{ m})}} = 401.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Este resultado es unas siete veces mayor a la velocidad angular máxima que se tiene en la turbina y la flecha, por lo que no se tendrán problemas de resonancia causada por la frecuencia natural.

La deflexión en la turbina viene dada por la ecuación (3.4.2), donde la fuerza  $F$  es igual a la ejercida por el peso de la flecha y la turbina:

$$\delta = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \frac{\pi}{4} * 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * ((3.2 \text{ m})^2 * 0.524 \text{ m} + (0.396 \text{ m})^2 * 2028 \text{ m})}{551'921'289.52 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$\delta = 6.271 \times 10^{-4} \text{ m}$$

La deflexión es menor a un milímetro, por lo que no se tendrán problemas de giros no baricéntricos.

## 5 Conclusiones

Las turbinas hidráulicas son una de las formas principales de generación de energía eléctrica en México y en el mundo, por lo que necesario entender su funcionamiento para una correcta operación. Durante el día se tiene una demanda baja de energía eléctrica, la cual puede satisfacerse con la energía generada con turbinas hidráulicas, y en la noche se tienen picos de alta demanda debido a la iluminación, por lo que se encienden turbinas de gas para compensar este incremento de demanda.

Las turbinas hidráulicas tienen una gran cantidad de masa, y en operación esto genera una gran cantidad de inercia, la cual toma bastante tiempo en reducirse. Cuando se planea el mantenimiento o la reparación de una turbina hidráulica deben anticiparse días o incluso semanas para apagarla, realizar las operaciones necesarias y volver a arrancar. Así como se toma un tiempo en esperar a que la turbina deje de rotar, al volver a arrancar debe hacerse de forma gradual, o se pone en riesgo la integridad de los componentes, desde la misma presa hidráulica, la tubería, tobera, así como los álabes de la turbina y la flecha. Este arranque gradual se logra con la obstrucción del flujo en la tubería, la cual se libera conforme la turbina gana inercia.

Los resultados en este trabajo muestran que una apertura súbita del caudal genera aceleraciones angulares instantáneas, lo cual generará esfuerzos en los álabes y deformaciones en la turbina, lo cual podría llevar a la fractura de dichos componentes. Con la liberación gradual del caudal se tiene un par que cambia con el tiempo  $\tau(t)$ , lo cual genera curvas de velocidad angular y potencia suaves. Además, se evitan los fenómenos de cavitación y golpe de ariete, que podrían provocar el desgaste de la tubería y los álabes por corrosión y/o cavitación.

El diámetro de  $0.3156\text{ m}$  es el diámetro al que la flecha comenzaría a experimentar esfuerzos cortantes que están en la zona plástica, sin embargo, en este trabajo se ha utilizado un valor del diámetro de la flecha de  $0.396\text{ m}$ , con el cual se asegura que no se excede el criterio de fluencia.

La frecuencia natural calculada es de  $401\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , 7 veces mayor a la velocidad angular máxima de operación de la turbina de  $54\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Esto significa que la resonancia no será un problema de diseño, Sin embargo, un rediseño de la turbina cambiará la frecuencia natural, por ejemplo, aumentando la longitud de la flecha o disminuyendo la constante de rigidez, por lo que debe prestarse atención en un rediseño para evitar tener una frecuencia natural cercana a la velocidad angular de operación de la turbina, lo cual causará resonancia, y pondrá en riesgo la operación de la turbina y sus componentes.

La generación de  $20\text{ MW}$  es un valor de potencia elevado comparado con un valor de  $10\text{ MW}$  de una turbina real de las mismas dimensiones, sin embargo, en este trabajo solo se consideraron las pérdidas por fricción en la tubería con el coeficiente de fricción  $f$  y las pérdidas a la salida de la tobera con el coeficiente de descarga  $C_d$ , es por eso que la potencia calculada en este trabajo es mayor al valor real de la potencia de una turbina Pelton, sin embargo, es una buena aproximación de los modelos que se tendrán en condiciones de operación reales. En los antecedentes se ha hablado de cómo se trabaja en mejorar las eficiencias de cada uno de los componentes necesarios para la generación de energía eléctrica con una turbina hidráulica; presa hidráulica, tubería, tobera, turbina y álabes y la flecha. El desarrollo tecnológico

en el diseño y desempeño de estos componentes ha dado lugar a una generación y distribución más eficiente de energía, desde la potencial gravitatoria del fluido hasta la energía eléctrica.

Se cumplieron los objetivos principales de este trabajo, los cuales eran modelar matemáticamente los parámetros de diseño de la turbina Pelton como la velocidad de chorro, el diámetro de la tobera, la carga, la velocidad de la rueda de la turbina y la fuerza electromotriz generada con el uso de la mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, mecánica lagrangiana, teoría electromagnética y teoría de control. Se obtuvo una ecuación diferencial considerando las pérdidas de carga en tubería y pérdidas en la tobera, y la solución de esta ecuación diferencial generó una ecuación con la que se puede predecir la potencia de la turbina en el estado transitorio y permanente.

Este trabajo puede servir como futura referencia a aquellas personas que busquen mejorar el diseño de cada uno de los elementos mencionados, como el material de las tuberías, el diseño de la tobera, las dimensiones y material de la rueda de la turbina y la flecha, y con esto disminuir las pérdidas de carga para mejorar la eficiencia de las futuras turbinas Pelton.

## 6 Apéndices

### 6.1 Cálculo de valores óptimos de la turbina

En el capítulo de turbomáquinas, se introdujo la ecuación que determina la potencia neta de la turbina

$$P_w = \rho Q u (V_j - u) (1 - \cos \beta)$$

Si derivamos respecto a la velocidad  $u$  e igualamos a cero, obtendremos el valor máximo de la potencia

$$\frac{dP_w}{du} = 0 = V_j - 2u$$

De este resultado podemos concluir que la potencia de la turbina tiene un valor máximo cuando la velocidad de la cazoleta es igual a la mitad de la velocidad del chorro de agua que sale de la tobera

$$\frac{1}{2} V_j = u$$

Si se sustituye este valor en la ecuación de la potencia de la turbina, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} P_w &= \rho Q u (V_j - u) (1 - \cos \beta) = \rho Q \left( \frac{1}{2} V_j \right) \left( V_j - \frac{1}{2} V_j \right) (1 - \cos \beta) \\ &= \rho A_j (V_j^3) \left( \frac{1 - \cos \beta}{4} \right) \end{aligned}$$

La carga en una tubería circular está relacionada con la pérdida debido a la fricción (White, 2004)

$$H = f \frac{L V^2}{D 2g} + \frac{V_j^2}{2g}$$

En esta ecuación, hemos incluido el término de  $\frac{V_j^2}{2g}$  que es el término de la energía cinética en la ecuación de Bernoulli, el término  $f \frac{L V^2}{D 2g}$  es el término de pérdida de carga por fricción  $h_f$  y el término  $V^2$  se refiere a la velocidad del fluido en el interior de la tubería, el cual es diferente de la velocidad a la salida de la tobera, y puede ser calculado usando la ecuación de continuidad (conservación de la masa)

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 V = A_2 V_j$$

$$\frac{\pi}{4} D^2 V = \frac{\pi}{4} D_j^2 V_j$$

$$V = \left( \frac{D_j}{D} \right)^2 V_j$$

Si en la ecuación de la carga se despeja  $V_j$  y se sustituye el valor de la velocidad en la tubería previamente obtenido, se obtiene lo siguiente

$$V_j^2 = 2gH - f \frac{L}{D} V^2$$

$$V_j^2 = 2gH - f \frac{L}{D} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 V_j^2$$

$$V_j^2 = 2gH - 2gh_f$$

Si se despeja  $V_j^2$  y se sustituye en la potencia máxima obtenida previamente

$$P_w = \rho A_j (V_j^3) \left(\frac{1 - \cos \beta}{4}\right) = \rho A_j \left(\frac{1 - \cos \beta}{4}\right) \left[2gHV_j - f \frac{L}{D} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 V_j^3\right]$$

Derivando respecto a  $V_j$  e igualando a cero para volver la potencia máxima se tiene el siguiente resultado

$$\frac{dP_w}{dV_j} = 0 = 2gH - 3f \frac{L}{D} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 V_j^2$$

$$2gH = 3f \frac{L}{D} \left(\frac{D_j}{D}\right)^4 V_j^2 = 3f \frac{L}{D} \left(\frac{V^2}{V_j^2}\right) V_j^2$$

$$2gH = 3f \frac{L}{D} V^2$$

$$H = 3h_f$$

$$h_f^* = \frac{H}{3}$$

Este resultado nos dice que se tiene una potencia máxima cuando el valor de la pérdida por fricción  $h_f$  es tres veces mayor que el valor de la carga.

Si sustituimos  $h_f = \frac{H}{3}$  en  $V_j^2 = 2gH - 2gh_f$  y se despeja  $V_j$  se tiene que

$$V_j^* = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

Con esta ecuación podemos conocer el valor ideal de la velocidad de salida del chorro de agua de la tobera.

Si ahora sustituimos el valor de la pérdida de fricción ideal  $h_f^* = \frac{H}{3}$  en la definición de la pérdida de fricción  $h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$  podemos obtener la velocidad ideal por la que el fluido pasa por la tubería

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{3f \frac{L}{D}}}$$

Conociendo este valor de velocidad podemos sustituirla en la relación de velocidades de la tubería y la salida de la tobera, para obtener

$$V^2 = \left(\frac{D_j}{D}\right)^2 V_j^2 = \frac{2gH}{3f\frac{L}{D}}$$

$$D_j^* = \left(\frac{D^5}{2fL}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Este es el valor ideal del diámetro de salida de la tobera, el cual depende de las condiciones de la tubería ( $D, L, f$ )

## Bibliografía

- Agency, I. E. (s.f.). *International Energy Agency. Global Energy & CO2 Status Report*. Obtenido de <https://www.iea.org/geco/electricity/>
- Angehrn, R. (2000). *Safety engineering for the 423 MW-Pelton-runners at Bieudron*. Charlotte, NC.
- Beer, F. P. (2010). *Mecánica de materiales*. México, D.F.: McGraw-Hill.
- Berntsen, G. B. (2001). *Analysis of the free surface non-stationary flow in a Pelton turbine*. Riva del Garda.
- Best Practice Catalog Pelton Turbine. (s.f.). Obtenido de [https://hydropower.ornl.gov/docs/HAP/MechPeltonTurbineBestPracticeRev2\\_1.pdf](https://hydropower.ornl.gov/docs/HAP/MechPeltonTurbineBestPracticeRev2_1.pdf)
- Brekke, H. (2005). *State of the art of small hydro turbines versus large turbines*. Villach, Austria.
- Córdova, R. (s.f.). *Breve historia de las turbinas hidráulicas*. Obtenido de <http://www.uca.edu.sv/deptos/ccnn/dlc/pdf/turbinas.pdf>
- Diseño y construcción de una turbina Pelton. (s.f.). Obtenido de <http://kimerius.com/app/download/5780662673/Dise%C3%B1o+y+construcci%C3%B3n+de+una+turbina+Pelton.pdf>
- Fowless, C. (2005). *Analytical Mechanics*. USA: Addison-Wesley.
- Goldstein, H. (2002). *Classical Mechanics*. USA: Addison-Wesley.
- Grein, H. M. (1986). *Efficiency scale effects in Pelton turbines*. Montreal, Canada.
- International Energy Agency México. (s.f.). Obtenido de <https://www.iea.org/countries/Mexico/>
- Kishioka, E. &. (1972). *Investigation into the problem of losses of the Pelton wheel*. Tokyo, Japan.
- Kubota, T. X. (1998). *Numerical analysis of free water sheet flow on Pelton buckets*. Singapore.
- Kvicinsky, S. K. (2002). *Experimental and numerical analysis of free surface flows in a rotating bucket*. Lausanne, Switzerland.
- Mack, R. &. (2002). *Numerical investigations of the flow in a Pelton turbine*. Lausanne, Switzerland.
- Muggli, F. Z. (2000). *Numerical and experimental analysis of Pelton turbine flow, Part 2: The free surface jet flow*. Charlotte, NC.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Pearson.
- Parkinson, E. N. (2005). *Unsteady analysis of a Pelton runner with flow and mechanical simulations*. Villach, Austria.
- Perrig, A. A. (2006). *Flow in a Pelton turbine bucket: Numerical and experimental investigations*.

- Secretaría de Energía. (s.f.). *Prospectiva del sector eléctrico 2017-2031*. Obtenido de [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/284345/Prospectiva\\_del\\_Sector\\_El\\_ctrico\\_2017.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/284345/Prospectiva_del_Sector_El_ctrico_2017.pdf)
- Staubli, T. &. (2004). *Flow visualization – a diagnosis tool for Pelton turbines*. Lucerne, Switzerland.
- Taygun, F. (1946). *Untersuchungen über den Einfluss der Schaufelzahl auf die Wirkungsweise eines Freistrahlrades*.
- USAID Hydropower Investment Promotion Project. (s.f.). Obtenido de <http://www.energy.gov.ge/projects/pdf/pages/Tskhenistskali%201%20Hesi%20Natsili%202%20766%20geo.pdf>
- Válvula de Bola. (s.f.). Obtenido de [http://www.vortexhydradams.com/en/water-control-equipment/custom-made-valves/spherical-valves\\_36c16.html](http://www.vortexhydradams.com/en/water-control-equipment/custom-made-valves/spherical-valves_36c16.html)
- Válvula de Mariposa. (s.f.). Obtenido de <http://www.imi-critical.com/products/Pages/Product-Turbo-Expander-Butterfly-Valve.aspx>
- White, F. (2004). *Mecánica de Fluidos*. Madrid: McGraw-Hill.
- Young, H. D. (2009). *Física universitaria, con física moderna volumen 2*. México: Pearson Educación.
- Zhang, Z. &. (2007). *Efficiency and runaway characteristics of a Pelton turbine*. Granada, Spain.
- Zhang, Z. (2006). *Improvement of scale-up method for efficiency conversion of Pelton turbines*. Vienna, Austria.
- Zhang, Z. (2016). *Pelton Turbines*. Zurich: Springer.
- Zhang, Z. B. (2003). *LDA-Anwendung zu Freistrahlmessungen bei*. Deutschland.
- Zill, D. G. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1 Ecuaciones Diferenciales*. México DF: McGraw-Hill.