



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

**ESTUDIO DEL DESARROLLO SOBRE EL USO DE
LA GEOMETRÍA COMO PARTE DE LA
MATEMATIZACIÓN EN EDUCACIÓN
PREESCOLAR.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A:

JANETTE SANTIAGO ABASOLO

DIRECTOR DE TESIS:

MTRO. JAVIER ALATORRE RICO

REVISORA: MARÍA EUGENIA MARTÍNEZ COMPEÁN

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2019.



® Facultad
de Psicología



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO

MTRA. MARÍA EUGENIA MARTÍNEZ COMPEÁN

MTRA. CECILIA MORALES GARDUÑO

MTRO. JAVIER ALATORRE RICO

LIC. JOSÉ ABRAHAM CASTRO ROMERO

MTRO. EDMUNDO ANTONIO LÓPEZ BANDA



AGRADECIMIENTOS ACADÉMICOS

Gracias a Dios por haber puesto en mi camino profesional a las personas indicadas para poder lograr este éxito.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Psicología por haberme formado ética y profesionalmente.

Al Mtro. Javier Alatorre Rico, gracias por tu tiempo, por tus palabras, por tu apoyo, por confiar en mí y sobre todo por tu paciencia. Gracias por haberme impulsado a desarrollar habilidades que hoy en día me permiten desempeñarme eficientemente en el ámbito laboral como psicóloga educativa y por compartir conmigo tus conocimientos y considerarme parte de este gran grupo de investigación.

A la Mtra. María Eugenia Martínez quien con tu pasión para enseñar me contagiaste y has sido un gran ejemplo a seguir lo cual, me motivo para que yo me formara en el área de psicología educativa. Gracias por tu acompañamiento como revisora en esta tesis, por tus sugerencias y aportaciones que me permitieron mejorar.

A mis sinodales Mtra., Cecilia Morales, Lic. José Abraham Castro y Mtro. Edmundo Antonio López por su tiempo y disposición para compartir conmigo sus sugerencias que enriquecieron mi tesis mejorando la redacción, la ortografía y elementos teóricos. Gracias por aceptar formar parte de este proceso tan importante.

A las maestras y niños del CENDI por su disposición y apoyo para esta investigación.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

Gracias a Dios por darme a los mejores padres a quienes dedico este trabajo tan importante, porque gracias a su apoyo yo he logrado este grande éxito.

A mi padre Eusebio Luis Santiago García, gracias por tu amor y apoyo que me diste hasta donde el tiempo te permitió. Aunque hoy no estés físicamente sé que estarías muy orgulloso de mí por haber logrado una de mis metas. Siempre estarás en mi corazón y en cada logro que obtenga, porque eres la fuerza motora que me impulsa a seguir adelante.

A mi madre Juliana Abasolo López, por tu amor, tu apoyo en todo momento, por tu dedicación y acompañamiento durante toda mi formación profesional. Gracias por tus consejos que me permiten ser mejor persona cada día, por desvelarte conmigo y ser siempre mi confidente.

A mis hermanos, Elizabeth y Javier, por estar presentes en este proceso directa o indirectamente.

A Moisés Rivera Millán, por tu cariño, compañía y consejos para seguir adelante. Gracias por todo tu apoyo.

A mis familiares y a amigos quienes estuvieron presentes en este proceso apoyándome y dándome consejos que me motivaban a seguir adelante, en especial a la Fam. García Abasolo y a Luis Antonio Rosales.

A dos excelentes psicólogas Karel Rivera e Ileana Marín por su amistad, apoyo y por compartir conmigo sugerencias que me ayudaron a mejorar la calidad de este trabajo.

ÍNDICE

Resumen.....	13
Introducción.....	15
1. La Geometría como Parte de la Actividad Humana.....	21
1.1 El porqué de las matemáticas.....	22
1.2 Las Matemáticas a través del Tiempo como Actividad Humana.....	24
1.3 La Geometría a través del Tiempo como Actividad Humana.....	27
1.4 La Geometría en sí misma como un Sistema Semiótico.	31
2. Situación Actual del Aprendizaje de las Matemáticas en México.....	35
2.1 Aprendizaje de Conocimientos y Habilidades Curriculares en Matemáticas.....	36
2.2 Dominio de Conocimientos Matemáticos en Contextos Formales de Aprendizaje	38
2.3 Dominio de los Aprendizajes Clave del Currículum.....	42
2.4 Uso de los Conocimientos para Razonar Matemáticamente.....	44
2.5 Una Propuesta Curricular: Implicaciones de la Reforma Integral de Educación Básica.....	48
2.5.1 El Preescolar en la Actualidad.....	50
2.5.2 Fomento de Competencias Matemáticas en el Programa de Educación Preescolar 2011.....	54
2.5.3 Perfil de Egreso: Basado en Competencias.....	57
2.6 La Matematización como Objetivo de Aprendizaje.....	60
3. La Actividad y el Desarrollo del Razonamiento Geométrico de los Niños Preescolares.....	66
3.1 La Influencia de la Actividad en el Surgimiento de las Capacidades Cognitivas Complejas.....	67
3.2 El Aprendizaje de la Geometría como Construcción Socialmente Mediada.....	91
4. El Aprendizaje de la Geometría: Comprensión y Dominio del Sistema de Conocimiento en Niños de Educación Básica.....	97
4.1 Factores que Favorecen el Desarrollo del Razonamiento Geométrico.....	101

4.1.1	La Diversidad Cultural y las Formas de Pensar Geométricamente.....	101
4.1.2	El Docente como Intermediario Social.....	104
4.2	Conocimientos y Capacidades Cognitivas del Razonamiento Geométrico en los Niños de Educación Básica.....	107
4.2.1	Representaciones Planas de Cuerpos 3D.....	107
4.2.2	Clasificación de Objetos Geométricos a partir de sus Propiedades Geométricas como Constitutivos del Discurso.....	111
4.2.3	Uso de Propiedades Geométricas en Representaciones de 2D.....	117
4.2.4	Comprensión y Uso de Representaciones Externas Simbólicas Geométricas a partir de la instrucción.....	119
4.3	El Pensamiento Reflexivo: Proceso de Matemización Geométrica.....	123
4.3.1	Uso de las Matemáticas de manera Significativa en la Solución de Problemas Contextualizados.....	123
5.	Desarrollo del Razonamiento Geométrico en Entornos de Aprendizaje Complejos en Educación Preescolar.....	130
6.	Metodología.....	132
6.1	Perspectiva Metodológica.....	132
6.2	Procedimiento General.....	136
6.3	Diseño de investigación.....	137
6.3.1	Componente Cuantitativo.....	138
6.3.2	Componente Cualitativo.....	151
7.	Análisis y Resultados.....	156
7.1	Cambio en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico.....	156
7.1.1	Progreso General del Razonamiento Matemático en Niños de Preescolar.....	157
7.1.2	Progreso del Razonamiento Geométrico en Niños de Preescolar.....	158
7.1.3	Niveles de Razonamiento Geométrico de los Niños Preescolares.....	160
7.2	Procesos Implicados en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico.....	164

7.2.1	La Actividad Geométrica Social como Espacio Dinámico que Promueve el Desarrollo de las Capacidades Cognitivas Geométricas.....	168
7.2.2	Matematización Geométrica y la Interpretación de la Realidad.....	217
	Discusión y Conclusiones	255
	Referencias	265
	Anexos	273

RESUMEN

Dada la problemática educativa que existe actualmente en el país en relación al desempeño del aprendizaje de las matemáticas, especialmente en geometría, la cual se ve reflejada en los resultados de las pruebas tanto nacionales como internacionales; el presente estudio, tuvo como propósito favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico en niños preescolares, siendo este aspecto la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Así mismo se contribuyó con el análisis y comprensión de dicho proceso y los principales factores que intervienen en él, al haber expuesto a niños preescolares a actividades donde usaron el sistema geométrico dentro de entornos complejos de aprendizaje los cuales descansan en la perspectiva constructivista socio-cultural.

El estudio tiene un diseño mixto, con un componente cuantitativo y uno cualitativo. El componente cuantitativo tiene un diseño exploratorio el cual consta de una condición, el grupo de intervención dividido en tres fases: la evaluación inicial, la intervención y la evaluación final para conocer el nivel de desarrollo del razonamiento geométrico de los alumnos al inicio y al final del ciclo escolar. En el componente cualitativo se utilizó la observación etnográfica y la solución de problemas basado en grupo, como estrategias de investigación. Participaron un total de 44 niños con edades entre 3 y 7 años aproximadamente, pertenecientes a un Centro de Desarrollo Infantil público del Distrito Federal.

Palabras clave: Entornos complejos de aprendizaje, razonamiento geométrico, geometría, nivel preescolar, teoría sociocultural, teoría de la actividad.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas educativos que atraviesa actualmente México es el bajo nivel de aprendizaje que alcanzan los alumnos en las Matemáticas, ya que la mayoría de los estudiantes no cuenta con las competencias o capacidades necesarias que les permitan el dominio de sus conocimientos y habilidades para aplicarlos en problemas que se les presenten en la vida cotidiana.

Pero no basta con solo conocer estos problemas de aprendizaje en matemáticas, sino que, resulta importante considerar también la Propuesta Curricular y Pedagógica en la Reforma Integral de Educación Básica (RIEB, 2009) como respuesta institucional ante el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas con el fin de saber cómo se está tratando en México este tema para mejorar la cobertura, la calidad de la educación y las prácticas de enseñanza, y lograr que los niños alcancen el Perfil de Egreso establecido en Educación Básica.

En este sentido, y debido a que las matemáticas son necesarias, se han convertido en uno de los principales objetivos de enseñanza en la educación básica en México. Uno de los propósitos fundamentales es que los alumnos construyan nociones matemáticas a partir de situaciones didácticas que demanden el uso de sus conocimientos y capacidades para establecer relaciones de correspondencia, cantidad y ubicación, es decir, que razonen matemáticamente (SEP, 2011).

En la construcción de dichas nociones, los docentes juegan un papel importante para que los alumnos logren establecer relaciones más significativas entre los conocimientos previos que tienen y los conocimientos nuevos de las matemáticas. Por ello, es necesario que los profesores cambien sus concepciones tradicionales en las que se conciben como transmisores de información y ven a sus alumnos como receptores. Respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría deben considerar un cambio en

sus prácticas de enseñanza con el fin de que sus alumnos desarrollen habilidades propias del razonamiento geométrico y que sus aprendizajes sean significativos.

Debido a ello, el presente trabajo de investigación se centra en el estudio del Desarrollo del uso del Sistema Geométrico (Razonamiento Geométrico) como parte del Poseso de la Matemización, en niños de Preescolar. Se eligió dicha área de conocimiento porque suele ser un aspecto de las matemáticas con mayor dificultad y complejidad tanto en sus contenidos como en la forma en la que es enseñada, lo cual se debe, entre otros factores, a la escasa difusión de propuestas para su enseñanza, a pesar de que se considera a la Geometría como una herramienta para favorecer el pensamiento Matemático.

En el desarrollo de la propuesta que aquí se presenta se ha considerado incluir a los alumnos dentro de actividades socialmente significativas, en las que se hace uso del sistema geométrico y de sus herramientas, para que los niños adquieran los conocimientos geométricos y alcancen un nivel de dominio que les permita hacer uso de los mismos en actividades sociales y, a través de esto, poder contribuir con una solución desde la psicología a esta problemática, indagando en dónde surgen y se desarrollan estas Capacidades Psicológicas Complejas, así como los procesos de desarrollo que muestren cómo estas Capacidades cambian hasta lograr ser habilidades de razonamiento geométrico, ilustrando también los factores que se encuentran presentes en la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en el Capítulo 1, se da a conocer la importancia de la geometría como parte de la actividad humana y sociocultural, se aborda la importancia de este dominio partiendo desde sus antecedentes históricos para conocer por qué y cómo surgieron las matemáticas y la geometría, y cómo han ido cambiando a lo largo del tiempo a partir de las necesidades que se le han presentado al hombre en su actuar en la vida cotidiana. Posteriormente también se aborda de manera

específica el aspecto de la geometría como un sistema semiótico y la mirada que se tiene de este dominio de conocimiento en la actualidad.

En el capítulo 2, se presentan las evidencias de la magnitud del problema educativo por el cual atraviesa actualmente nuestro país, con respecto al aprendizaje de las matemáticas, mostrando que la mayoría de los alumnos se encuentran en los niveles bajos de aprendizaje en las pruebas tanto nacionales como internacionales. Así mismo, dar a conocer las implicaciones que ha tenido la Reforma Integral de Educación Básica para dar solución a esta problemática, y las propuestas curriculares orientadas a lograr un perfil de egreso basado en el desarrollo de competencias, considerando también el proceso de la Matematización como un objetivo de aprendizaje con el fin de tener un marco de referencia del cual partir para intervenir y mejorar las prácticas de enseñanza que nos permitan favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico.

En el capítulo 3 se exponen en primera instancia los principios fundamentales de la perspectiva sociocultural, desde tres líneas principales: la actividad, la mediación semiótica y la interacción, las cuales sustentan el proyecto, para explicar y entender el desarrollo de las capacidades cognitivas complejas. Tomando en cuenta el papel de la actividad como determinante de las interacciones y el uso de los sistemas simbólicos, a partir de la estructura de la misma actividad, lo cual nos permite entender el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales (razonamiento) dentro de ambientes complejos de aprendizaje, así como las condiciones bajo las cuales se van expresando dichas capacidades en los estudiantes para poder participar en actividades sociales de la vida pública, laboral y académica. Así mismo, se aborda el aprendizaje de la geometría como construcción socialmente mediada, considerando las matemáticas en general y la geometría en particular como un dominio de conocimiento específico.

En el capítulo 4 se presentan diversas investigaciones que abordan el tema del razonamiento geométrico, mostrando la importancia que tiene la enseñanza y

aprendizaje de este dominio de conocimiento, con la finalidad de indagar y conocer qué se ha encontrado con respecto al desarrollo del razonamiento geométrico a temprana edad y cuáles son los conocimientos y capacidades cognitivas con las que cuentan los alumnos en educación básica, así como los factores y procesos implicados en el desarrollo de este razonamiento y pensamiento reflexivo en términos de la Matemización Geométrica.

En el capítulo 5 se da a conocer el propósito principal del presente estudio, el cual se ha planteado como respuesta a la problemática existente en el desarrollo del razonamiento Geométrico. Se muestran los objetivos específicos que se siguieron para comprender e indagar los procesos que participan en la construcción del razonamiento geométrico dentro de ambientes complejos de aprendizaje que fomenten la participación de los alumnos en la solución de problemas al estar inmersos en actividades socialmente significativas.

En el capítulo 6 se describen de forma detallada los aspectos que se tomaron en cuenta para el desarrollo del programa de intervención psicológica “Entornos para el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar”. Se explica la metodología del presente estudio, la cual cuenta con dos componentes: uno cuantitativo y otro cualitativo; y se exponen los procedimientos que se llevaron a cabo para realizar la recolección y el análisis de los datos respectivamente.

Completando los capítulos anteriores, se agrega una sección de análisis de los resultados conseguidos en la intervención, capítulo 7. Los resultados obtenidos en la intervención se presentan considerando en primer lugar el componente cuantitativo los cuales ilustran el cambio que se logró con la intervención en el desarrollo del razonamiento matemático en general y del razonamiento geométrico en particular, definiendo lo que pueden hacer los niños de preescolar en cada uno de los cuatro niveles de razonamiento geométrico que se consideraron, y posteriormente el cualitativo, que

muestra los momentos de cambio de los procesos implicados en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico, como lo fue la actividad geométrica como espacio dinámico para promover el desarrollo de estas capacidades específicas, y la Matemización geométrica en la interpretación de la realidad en el que se muestran las acciones geométricas que los niños de preescolar realizaron haciendo uso del sistema propio de la geometría para solucionar un problema de la vida cotidiana.

Por último, se incluye un capítulo de discusión y conclusiones en el cual se desarrollan las implicaciones de la presente intervención retomando cada aspecto de los resultados encontrados.

1. LA GEOMETRÍA COMO PARTE DE LA ACTIVIDAD HUMANA

“La filosofía está escrita en este grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer las características con las que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra, sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.”

Galileo Galilei

En el mundo actual, la geometría es de gran utilidad para resolver situaciones de la vida cotidiana en términos de funciones sociales, por lo que es posible considerarla como una *actividad social humana* más que aquella que solo se práctica dentro de un ambiente escolar; esta idea resulta válida, ya que las matemáticas son y fueron creadas a través de actividades humanas y la geometría forma parte de este dominio de conocimiento. Al igual que otras ciencias, a lo largo de la historia las matemáticas han ayudado al hombre a resolver problemas prácticos de la cultura, por lo que esta disciplina en tanto saber cultural y social se construye en interacción con otros (González y Weinstein, 2001).

Las matemáticas en general y la geometría en particular, como actividades humanas reconocidas y creadas social y culturalmente, son de gran utilidad como sistemas de conocimiento para adaptarse a los objetivos y propósitos de las comunidades en las que deseen resolver problemas, son una construcción social en el contexto de una comunidad donde se negocia el significado y se acuerdan convenciones. En la actualidad es una ciencia muy importante que debe ser enseñada y aprendida formalmente, aunque también suele ser una de las menos comprendidas (Bishop, 1999; Millroy, 1992).

Por ello, es importante considerar este dominio partiendo desde sus antecedentes históricos para conocer por qué y cómo surgieron las matemáticas y la geometría, y cómo

han ido cambiando a lo largo del tiempo a partir de las necesidades que se le han presentado al hombre en su actuar en la vida cotidiana, y de manera específica el aspecto de la geometría como un sistema semiótico y la mirada que se tiene de este dominio de conocimiento en la actualidad.

1.1 El porqué de las Matemáticas.

Es peculiar escuchar que los alumnos alguna vez en clase se han preguntado, ¿Esto para qué sirve?, ¿Dónde están las matemáticas en la vida cotidiana? La respuesta a ello es sencilla, ya que basta únicamente con usar un teléfono celular o una computadora para estar cerca de las matemáticas.

Las matemáticas son una ciencia peculiar, usan un lenguaje especial al que es necesario acostumbrarse. Este lenguaje, como cualquier otro, requiere ser aprendido; para que no represente una barrera de entendimiento que impida acercarse, disfrutar y comprender el contenido. Al ser un fenómeno cultural, las matemáticas se pueden conocer al *actuar sobre el mundo usando la cultura*.

La actividad humana, la naturaleza y las propias matemáticas corresponden a las tres principales fuentes de motivación para la creación matemática. Sin embargo, es conveniente aclarar que hay una fuente de creación matemática que antecede a las otras y sin la cual serían estériles: la irresistible atracción del ser humano por los retos de todo tipo, en especial, los intelectuales. Esta atracción no se limita a un grupo especial o selecto de personas, como los matemáticos, sino que se pueden reconocer en cualquier persona, por ejemplo cuando en un café se resuelve como entretenimiento uno de los sudokus impresos a diario en los periódicos, y lo único que se obtiene es la satisfacción de haberlo resuelto, de lograr algo con la mente. Así mismo, las matemáticas se usan para resolver problemas de la vida cotidiana como en la música, en la arqueología e incluso para medir la profundidad de un pozo. Toda la **actividad matemática**, independientemente de donde se inicie, se realiza apoyada en la irrefrenable *curiosidad*

del hombre. El placer de superar retos es, probablemente, lo que más ha contribuido al desarrollo de las matemáticas y a lo que las matemáticas deben su dinamismo y vitalidad.

De igual manera en la naturaleza existen fenómenos muy diversos y complejos, los cuales el ser humano ha desentrañado y expresado con fórmulas matemáticas sencillas. Tal es el caso de Galileo Galilei, un científico italiano del siglo XVI, quien descubrió, entre otras cosas, el tipo de trayectoria que sigue una piedra al ser lanzada al aire. Él describe y desarrolla ideas sobre cómo puede entenderse la naturaleza y el universo, mencionando que para ello primero se debe entender la lengua y las características con las que está escrito; en este caso, el universo está escrito en lenguaje matemático y sus características son los triángulos, círculos y otras figuras geométricas, ya que sin ellos es como girar en un oscuro laberinto (ver epígrafe; Siglo XXI, 2010). Es importante señalar que en aquel entonces, la filosofía abarcaba a todos los conocimientos, esto es, representaba lo que hoy llamamos ciencia. Entonces, para comprender el Universo son necesarias las matemáticas.

Por otro lado, el hecho de trabajar en problemas que surgen de las propias matemáticas, es decir, pensar en ellos, tratar de resolverlos o clarificar las interrogantes asociadas que surgen a su alrededor, ha sido uno de los grandes generadores del conocimiento matemático. Hoy en día, este proceso ocurre cotidianamente en la investigación y es probablemente el motor más prolífico de desarrollo que tienen las matemáticas. Es por eso que otra de las fuentes de inspiración más fértiles para la creación de las matemáticas suelen ser ellas mismas, aunque por su naturaleza **abstracta** parecería que este ensimismamiento las conduce a una espiral que se aleja irremediabilmente de la realidad, pero no es así. Los matemáticos creen que como método de trabajo, esto sucede así porque hay **naturalidad** en las matemáticas y que éstas se descubren; que están **ahí** como la realidad lo está para las otras ciencias, pues da la sensación de que su **naturalidad** es algo cercano a la naturaleza (Siglo XXI, 2010).

Es así que podemos considerar a las matemáticas como un *mosaico*, ya que ésta consta de piezas que se ensamblan en un todo y como un *caleidoscopio* en el que se repite y repite la misma imagen reflejada en tres espejos, en los que la imagen resulta ser la creación matemática y los espejos en los que se refleja esta imagen son: la actividad humana, la naturaleza y la matemática misma. Es decir, ante todo las matemáticas son una actividad creativa, que surgen de considerar problemas de diversa índole cuyas soluciones van armando, como si fueran piezas en un rompecabezas, una estructura de conocimiento de una consistencia y solidez sorprendente. Esta contundencia reside en que (Siglo XXI, 2010):

- Se crean o recrean dentro de cada mente humana que se acerca a ellas.
- Se basan en el razonamiento a tal grado que trascienden culturas y épocas históricas.
- Siendo tan abstractas, resultan estar ligadas a la realidad de maneras insólitas y fundamentales.

1.2 Las Matemáticas a través del Tiempo como Actividad Humana

Gran parte de los cambios tecnológicos de los que está llena nuestra vida moderna se basa en desarrollos matemáticos. Las matemáticas están escondidas en aparatos electrónicos, por ello es difícil percatarse de la importancia que tienen para el funcionamiento de éstos. Aunque las matemáticas tienen su origen en la vida diaria, no es fácil encontrarlas en forma cotidiana, pero *nos permiten entender mejor nuestra cultura y, por tanto, ser partícipes de ella.*

Las matemáticas, al ser una ciencia, poseen reglas particulares y usos sociales, y por su uso se conceptualiza como una actividad humana culturalmente reconocida. Cabe mencionar que han evolucionado con el paso del tiempo a partir de las necesidades que

le han surgido al hombre en su actuar con la realidad; los sistemas numéricos se han hecho cada vez más complejos: infinitamente grandes, pequeños y divisibles, nuevos números como vectores y matrices, operaciones con todos ellos, con análisis de todos los sistemas numéricos y algebraicos posibles. Localizar nos ha dado gran parte de nuestra geometría: líneas, ángulos, ejes, coordenadas cartesianas y esféricas, gráficas, teoría de grafos, entre otros. Así tendríamos una lista muy grande de las actividades que se han ido desarrollando a lo largo de los años (Bishop, 1999).

Aunque para muchos resulta difícil comprender qué son las matemáticas debido a que no han tenido éxito al utilizarlas, consideran que son importantes pero también aluden a la aversión que tienen con respecto a esta disciplina, siendo peculiar escuchar: “no es para mí”, “las matemáticas me hace pensar”, “es difícil”, “sin sentido” y “aburridas” entre otras frases relacionadas con las experiencias personales que han tenido con dicho sistema (Bishop, 1999). Se tiende a apreciar las matemáticas como una disciplina dinámica, cambiante e importante que, a menudo resulta útil para las necesidades del humano (OCDE, 2003), ya que el entorno ha ido planteando nuevos problemas, y a su vez estos han generado nuevas respuestas, distintas formas de resolución, diferentes habilidades y otras necesidades, en definitiva, nuevos conocimientos resultantes de las actividades de observación, experimentación y comprobación. Las matemáticas, como parte de este proceso no permanecen estáticas, están orientadas a la resolución de problemas que le surgen al hombre, en su accionar sobre el medio (González y Weinstein, 2001). Duhalde y González (1997) consideran importante destacar que las matemáticas:

...son una ciencia en si misma totalmente abstracta; por lo tanto pueden desarrollarse a partir de razonamientos lógicos y, por consiguiente, independientemente de la realidad que le dio origen. Es por este motivo que más que ninguna otra ciencia, su enseñanza debe ser contextualizada. (p.36)

Las matemáticas tienen una enorme solidez basada en su posible comunicación de una generación a otra sin alteraciones, aunque su materia de trabajo sean ideas abstractas. Lo que nuestros antepasados entendieron por “*dos*” independientemente del vocablo que hayan usado para referirse a esta idea, es lo mismo que entendemos ahora. Y cuando dieron nombre al “*cuatro*”, la idea que se usa hoy como estereotipo de lo obvio y fácil “*dos más dos son cuatro*”, les ayudó a entender y formular el concepto “*más*”. Los niños de cada generación reviven este proceso de entender significados y acceder a nuevos niveles de comprensión que compartimos todos. Esa propiedad de las matemáticas de *reconstrucción en la mente* de cada ser humano se debe a que se arman con una lógica implacable y están basadas en el **razonamiento**. Lo que aquí se menciona como “**entender**” ese momento de iluminación o respiro en el que todas las piezas caen en su lugar, ese “¡ah, sí!” que hemos experimentado todos, es lo que solidifica y nos permite compartir, más allá de tiempos y culturas, ese mundo etéreo de las matemáticas y a su vez está relacionado con dudar y cuestionar (Siglo XXI, 2010).

El hombre accede a los conocimientos matemáticos en un largo proceso de construcción continuo, ya que éstas no se aprenden de una vez y para siempre, sino que abarca toda la vida de la persona. De ahí que la enseñanza temprana de las matemáticas sea muy importante, por su utilidad para resolver situaciones de la vida cotidiana, caracterizándose así por ser una actividad humana específica (González y Weinstein, 2001; Onrubia, Rochera y Barberá, 1990). Pero hay que considerar que el saber es construido colectivamente por el grupo, los niños van aprendiendo y también, progresivamente, van tomando conciencia de aquello que aprenden, no es que aprendan sin darse cuenta, van entrando en el desafío del juego matemático (Cabrera y Sosa, 2006). Por lo tanto, podemos destacar los siguientes aspectos por los cuales las matemáticas son importantes para el hombre de acuerdo con González y Weinstein (2001, p.13):

- *Valor Instrumental*: porque sirve para resolver problemas que presenta el entorno.

- *Valor Formativo:* porque contribuye al desarrollo del pensamiento lógico.
- *Valor Social:* porque el lenguaje matemático es parte de la comunicación entre los hombres.
- *Valor Cultural:* porque forma parte del patrimonio de la humanidad.

De esta manera, podemos entender las matemáticas como un destilado de la actividad intelectual; aquello que aunque provenga de problemas concretos resulta ser una verdad general necesaria y absoluta que trasciende los casos particulares que motivaron su descubrimiento. Las matemáticas son un producto de la observación, la reflexión y el trabajo humanos, pero sus verdades tienen tal fuerza que parecen ser parte de un mundo absoluto, cerrado y perfecto que existiera independientemente del hombre. Que a través del tiempo se han ido complejizando a partir de experiencias que enfrenta el hombre al ser partícipe dentro de actividades socialmente establecidas, es por ello que han sido y siguen siendo muy importantes para la solución de problemas. Dentro de las matemáticas resulta relevante resaltar la importancia de la geometría porque es un área cuya enseñanza se ha descuidado por estar inmersos en un mundo numérico; por lo que a continuación se abordan específicamente los antecedentes históricos del surgimiento de la geometría como parte de las matemáticas, y por ende, como una Actividad Social y Humana.

1.3 La Geometría a través del Tiempo como Actividad Humana

La geometría surge como una actividad humana en Egipto como respuesta a las necesidades sociales que había en ese momento de realizar mediciones de las parcelas, por las constantes inundaciones del río Nilo al desbordarse y dañar las parcelas aledañas, por lo que el Faraón las hacía medir con frecuencia para así poder cobrar los impuestos correspondientes, para lo cual utilizaban la relación pitagórica realizando ángulos rectos a partir de triángulos rectángulos (cabe mencionar que en ese entonces Pitágoras aún no había demostrado su teorema). Es por ello que podemos decir que la Geometría nace así de manera intuitiva; posteriormente los griegos, y particularmente Euclides, le dio una

estructura de ciencia y un método propio denominado Método axiomático (método que usa la matemática para constituirse como ciencia), esta geometría recibe el nombre de Geometría Euclidiana. Posteriormente surgieron otras geometrías tales como: la geometría Proyectiva y las geometrías Topológicas y No euclidianas. Pero para intentar dar una imagen más unificada de la geometría se recurrió al *estudio de la geometría a través de las transformaciones*; ya que se pensaba que este modelo favorecería un aprendizaje más informal e intuitivo de la geometría por lo que resultaría más accesible a los niños, que el propuesto por teoremas, demostraciones y razonamientos (Duhalde y González, 1997; González y Weinstein, 2001).

Castro (2004) menciona los diferentes momentos históricos en los que surgieron estos tres tipos de espacios geométricos descritos a continuación:

- **Geometría Euclidiana:** También conocida como espacio Euclidiano. Partiendo de que la historia de la evolución y desarrollo de la Geometría nos remonta a la época de los griegos y a su afán de establecer un sistema de demostración y razonamiento fundamentado en la «deducción» y en la «formalidad» del pensamiento, buscando determinar la verdad de nuevos conceptos, deducidos de otros anteriores, que han sido aceptados como conceptos e ideas abstractas absolutamente ciertas. Este sistema de razonamiento encontró su mejor expresión en la Geometría, y en Euclides su mayor exponente.

Estas nociones del espacio de carácter Euclidiano, además de ser un método de razonamiento deductivo nos proporciona todo un sistema de representación formal de los cuerpos y figuras geométricas que dibujan la realidad.

Las figuras comunes de la geometría, lo mismo que las relaciones simples, como la perpendicularidad, el paralelismo, la congruencia y la semejanza provienen de la experiencia ordinaria. Los árboles crecen perpendicularmente al suelo, y las paredes de una casa se construyen verticales a propósito, para que tengan estabilidad máxima. Las orillas de un río son paralelas. El constructor que erige

una serie de casas conforme a un mismo plano desea que todas ellas tengan el mismo tamaño y la misma forma, es decir quiere que sean congruentes... semejantes al objeto representado. (Kline, 1997, p.129)

Geometría Projectiva: También conocida como espacio proyectivo. La necesidad de hacer representaciones cada vez más realistas, alejadas de los prototipos que inundaban el mundo místico religioso, hizo que los pintores del renacimiento, y sus etapas posteriores, hicieran uso de las líneas, puntos y figuras geométricas para plasmar en sus cuadros el espacio y la profundidad. Así, la potencialidad de los principios y leyes de las matemáticas y de la geometría, se incorporan al mundo del arte; «la perspectiva» favoreció la proyección del realismo natural en los lienzos de este importante periodo de la historia. La idea básica es que un cuadro representa mejor la realidad si se le concibe como una **ventana** (a través de la cual se ve el paisaje) en la que se plasma lo que el pintor ve. **Geoméricamente**, lo anterior equivale a *proyectar* al plano del lienzo lo visible (representado con su color) desde un punto fijo: el ojo del pintor que será posteriormente el del observador. Entonces resulta que las escalas de las cosas se hacen más chicas conforme están más lejos, y que líneas rectas que en la realidad son paralelas deben dibujarse como líneas que concurren a un punto llamado su *punto de fuga*. Es decir, al pintor solo le interesa lo que está al frente pero, **matemáticamente**, se considera todo: lo que está atrás del pintor se *proyecta* del otro lado de la línea al infinito (Siglo XXI, 2010).

Las preguntas que se hicieron los pintores mientras trabajaban en las matemáticas de la perspectiva ocasionaron que ellos mismos y, más tarde, los matemáticos profesionales, desarrollaran la materia conocida como Geometría Projectiva. Esta rama, la creación más original del siglo XVII es ahora una de las principales de las matemáticas. (Kline, 1997, p. 237)

Se considera a Girard Desargues (1591-1661) el padre de la **geometría proyectiva**, pues sentó las bases y demostró los primeros teoremas. Esta geometría también se puede trabajar de forma analítica, es decir, con coordenadas.

- **Geometría Topológica:** También conocida como espacio Topológico. Las experiencias expresadas mediante el reconocimiento y representación gráfica de acercamientos, separación, orden, entorno y continuidad representan experiencias de carácter «Topológico» (Castro, 2004). A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, ya se tenía claro que había una geometría más libre, donde los espacios se pudieran deformar sin romper su “continuidad” y con la topología se sentaron las bases para hacerlo. La noción básica de esta área de las matemáticas es dejar de lado la idea rígida de distancia, pero mantener la de vecindad de los puntos, cambiar la cercanía estricta y rígida por una más laxa y flexible. La topología es algo más elemental o general, pero llegar a ella es, técnicamente, más complicado. Por ejemplo, un cuadrado y un disco en el plano donde es fácil concebir una deformación gradual de uno en el otro; aunque geoméricamente sean distintos, topológicamente son equivalentes (Siglo XXI, 2010).

Con lo anterior podemos concluir que a lo largo de muchos siglos, el hombre ha intentado modelar y comprender su entorno apoyándose para ello en las matemáticas y concibiéndolas como el **lenguaje** adecuado para explicar las propiedades y el comportamiento del mundo que le rodea. Es así que la geometría proviene del esfuerzo de muchas generaciones para adquirir un modelo teórico que represente fielmente el espacio en que vivimos y sus propiedades. Pero las nociones geométricas elementales residen en algo más primordial que el intelecto humano, pues los animales también las poseen. Con ellos compartimos el espacio físico, así como las dificultades que surgen al moverse en él. De esta manera, la contundencia del espacio que habitamos por medio de las reglas elementales e implacables que lo rigen es la fuente de nuestra intuición

geométrica. Sin embargo, precisar las reglas fue una tarea difícil y ésta requirió del intelecto humano.

1.4 La Geometría en sí misma como un Sistema Semiótico

Etimológicamente la geometría significa: “*medición de la tierra*”, la cual surge como una ciencia empírica al servicio del control de las relaciones de los hombres con su espacio circundante para resolver problemas geométricos que se les presentaban; es la rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. Vinculándose así la geometría con el medio (Broitman y Itzcovich, 2003; González y Weinstein 2001):

- Los niños comienzan a estructurar el espacio espontáneamente desde que nacen, por lo que los conocimientos espaciales anteceden a los conocimientos geométricos los cuales deben ser enseñados sistemáticamente.
- Mientras que los problemas espaciales se relacionan con la resolución de situaciones de la vida cotidiana, los problemas geométricos se refieren a un espacio representado mediante figuras-dibujos (esquemas y planos).

Por lo que, al considerar el espacio desde un punto de vista geométrico se alude al estudio de las relaciones espaciales y de las propiedades espaciales abstraídas del mundo concreto en el que se encuentran los objetos físicos (González y Weinstein, 2001). Vista así, la geometría, como una herramienta para: comprender, describir e interactuar con el medio; es quizás la parte más intuitiva, concreta y ligada a la realidad de las matemáticas, ya que las personas construyen de manera intuitiva algunas relaciones y conceptos geométricos como producto de su interacción con el espacio.

De acuerdo con García y López (2008), la geometría resulta importante por los siguientes aspectos:

- *Es aplicable a la realidad:* para desenvolverse en la vida cotidiana, la arquitectura, la pintura, la escultura, la astronomía, los deportes, la carpintería, etcétera.
- *Por su uso en el lenguaje cotidiano:* tinacos cilíndricos, escaleras en espiral.
- *Su uso en el estudio de otros temas de las matemáticas:* áreas de las figuras geométricas.
- *Se encuentra en la naturaleza:* en cuerpos que son geométricos por sus características simétricas.

Hacia finales del siglo XIX, Félix Klein trató de resumir **la definición de geometría** mencionando que es el estudio de las invariantes de un espacio bajo un grupo escogido de sus transformaciones. De acuerdo con el tipo de transformaciones que se realicen, nos podemos centrar en una geometría o en otra.

En la geometría existen tres tipos de transformaciones y representaciones geométricas que explican las relaciones espaciales las cuales se describen a continuación (Castro, 2004; González y Weinstein, 2001):

- **Geometría Euclidiana:** también conocida como «Métrica», trata del estudio y representación de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes como propiedades que permanecen constantes, cuando las figuras representadas son sometidas a transformaciones «rígidas»; movimientos en el plano horizontal o verticalmente, giros sobre alguno de sus ejes, es decir, se refiere a las transformaciones que solo cambian la posición del objeto y por lo tanto se conserva su tamaño, las distancias y las direcciones, es decir, los aspectos relacionados con la medida y con las propiedades geométricas.

Se trata de representaciones de carácter euclidiano, que requieren del conocimiento y manejo de sistemas de representación formales; es decir, de sistemas convencionales de representación, que incluyen además de la aceptación de conceptos primitivos como «punto, recta, plano, figura geométrica»,

el uso de instrumentos cognoscitivos de un alto grado de abstracción (lenguaje, símbolos, relaciones, clasificaciones).

- **Geometría Proyectiva:** es la geometría de las sombras, ocupada de las propiedades espaciales que se conservan al proyectar un objeto, al observarlo o representarlo desde distintas posiciones (González y Weinstein, 2001). El espacio proyectivo, dentro de esta geometría, comprende la representación de transformaciones proyectivas en las que los puntos siguen siendo puntos; las líneas siguen siendo líneas; los ángulos siguen siendo ángulos; sin embargo, las longitudes de las líneas y la magnitud de los ángulos cambian en función de la perspectiva o de la posición relativa del objeto representado y la fuente que lo plasma. Mientras que otras propiedades, como la proporcionalidad entre líneas y áreas permanecen invariables por lo cual es posible, a pesar de ellas, reconocer las estructuras geométricas que definen al objeto representado (Castro. 2004). Buscando que dicho objeto representado sea lo más parecido posible al objeto real; no obstante, su proyección es relativa debido a que depende de varios factores: de la distancia de observación y del ángulo visual; aspectos que se convierten en importantes referentes a la hora de observar y comprender varias representaciones de una misma escena u objeto.

Geometría Topológica: en este tipo de geometría al realizar alguna representación o transformación geométrica, las figuras originales son sometidas a transformaciones tan profundas y violentas que alteran y pierden todas sus propiedades métricas y proyectivas como: los ángulos, las longitudes, las rectas, las áreas, los volúmenes, los puntos, las proporciones; no obstante, a pesar de ello algunas relaciones o propiedades geométricas permanecen invariables como: la Proximidad o acercamiento; la Separación o alejamiento entre puntos y/o regiones; el Orden o sucesión espacial; la condición de cierre de un contorno, la secuencia, continuidad o discontinuidad de líneas, superficies o volúmenes

constituyen propiedades geométricas que se conservan en una transformación de carácter Topológico. La única condición es que no se produzcan cortes a la figura geométrica original (González y Weinstein, 2001; Castro, 2004).

De acuerdo a lo anterior, en este estudio se considera que la geometría es una actividad compleja, social, que está construida culturalmente en donde se refleja la totalidad y autenticidad del uso del lenguaje propio de la geometría, para lo cual se dispone de un sistema de representación particular con reglas, que una vez apropiadas harán posible el uso de este lenguaje para interactuar con otros permitiendo así la comunicación y el intercambio de información en un contexto determinado. Así mismo, podemos decir que la geometría es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las transformaciones del espacio mediante figuras, esquemas y planos que sean congruentes con el espacio real representado.

Sin duda alguna, la mayoría de las actividades humanas exigen el uso de uno o de varios sistemas simbólicos, como la escritura o las matemáticas para poder llegar al logro de metas sociales, económicas, culturales y/o personales. Hoy en día, con los cambios tecnológicos que han surgido en la sociedad, las matemáticas resultan cada vez más necesarias en la vida cotidiana, pero a pesar de ser tan importantes, en nuestro país existe una gran problemática en este dominio de conocimiento dentro del ámbito escolar.

2. SITUACIÓN ACTUAL DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN MÉXICO

Nunca deberíamos pensar en las Matemáticas que puede aprender un niño, sino en aquellas con cuyo aprendizaje se contribuya al desarrollo de su dignidad humana: en educación lo importante no son las asignaturas – en nuestro caso, las Matemáticas- sino los alumnos y las alumnas, y el sistema escolar debe procurar que crezcan ganando día a día en autoconfianza y autoestima.

(Freudenthal)

Es importante considerar la situación en la que actualmente se encuentra México con respecto a la enseñanza y aprendizaje de uno de los pilares de la educación básica como lo son las matemáticas, conocer las implicaciones que ha tenido la reforma en educación básica para fomentar el aprendizaje de las matemáticas a fin de tener un marco de referencia del cual partir para intervenir y mejorar las prácticas de enseñanza, favoreciendo que los alumnos preescolares desde edades tempranas desarrollen conocimientos, capacidades y habilidades que les permitan razonar geométricamente y tomar decisiones en situaciones en las que se enfrentan a solucionar problemas de la vida cotidiana.

Los resultados de las evaluaciones realizadas tanto por la Secretaría de Educación Pública (SEP) como por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), han mostrado que si bien hay avances en la calidad de los aprendizajes en Matemáticas, la distancia que separa los resultados obtenidos con los esperados es muy grande a pesar de que desde la reforma curricular de 1993 se introdujo en los planes y programas de estudio de las Matemáticas el enfoque de resolución de problemas y se profundizó en la reforma de secundaria en 2006, planteando que el aprendizaje de las Matemáticas debe favorecer en los alumnos el desarrollo de una forma de pensamiento que les permita resolver problemas que se presentan en diversos contextos. Las evaluaciones ponen de

manifiesto el procedimiento de una enseñanza memorística, en la que la aplicación mecánica de fórmulas o algoritmos parece un fin en sí mismo (INEE, 2008).

Para conocer las evidencias que proporcionan información sobre lo que los estudiantes mexicanos aprenden del currículo nacional, en las últimas décadas se han realizado diversas pruebas de evaluación, tanto nacionales como internacionales, entre las que destacan: ENLACE, EXCALE, PISA y, recientemente, PLANEA. Los resultados se presentan en los siguientes apartados mostrando los niveles que logran obtener los alumnos en el campo de las matemáticas: aprendizaje de conocimientos y habilidades curriculares en matemáticas; dominio de conocimientos matemáticos en contextos formales de aprendizaje; dominio de los aprendizajes clave de los alumnos; y el uso del conocimiento para Razonar Matemáticamente.

2.1 Aprendizaje de Conocimientos y Habilidades Curriculares en Matemáticas

La Secretaría de Educación Pública, desde el 2006, puso en marcha la aplicación anual de la prueba ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares) en Educación Básica, la cual tiene como propósito principal evaluar el rendimiento académico en las asignaturas básicas conforme al currículo nacional: español, matemáticas, y una asignatura más de postura rotativa como historia, ciencias naturales, geografía entre otras, valorando el aprovechamiento escolar de los estudiantes; en los niveles de Primaria y Secundaria.

Los últimos resultados obtenidos en el 2013, muestran que los alumnos mexicanos presentan un importante índice de carencias curriculares en la asignatura de Matemáticas, mostrando que en nivel primara existe una gran problemática, ya que más del 50% de la población se encuentra en un *nivel de logro que va de insuficiente a elemental*, es decir, necesitan adquirir y fortalecer la mayoría de los conocimientos y desarrollar las habilidades de dicha asignatura. En el aspecto de **número** los alumnos

solo son capaces de resolver problemas directos que indican el uso de operaciones aritméticas y algebraicas básicas y combinadas, establecen relaciones entre variables y comprenden conceptos simples de probabilidad y estadística; y en **geometría** son capaces de representar y transformar mentalmente objetos. Solo un poco más del 45% de los alumnos se encuentran en el *nivel entre bueno y excelente*, es decir muestran un nivel de dominio adecuado y alto de los conocimientos y posee las habilidades de esta asignatura, lo cual implica que los alumnos son capaces de combinar operaciones aritméticas, algebraicas y geométricas para resolver problemas que involucran más de un procedimiento (incluyendo las habilidades anteriores) y algunos de estos alumnos también pueden solucionar problemas complejos que requieren de conocimiento especializado de cada área de las matemáticas (SEP, 2013).

Con respecto a la educación secundaria, los resultados ilustran una mayor problemática, ya que solo el 20% de los alumnos que la cursan logran alcanzar un nivel de logro entre *bueno y excelente*, lo cual quiere decir que son capaces de combinar operaciones aritméticas, algebraicas y geométricas para resolver problemas que involucran más de un procedimiento y solamente algunos de estos estudiantes son capaces de solucionar problemas complejos que requieren de conocimiento especializado de cada área de las matemáticas más todas las habilidades de los niveles bajos. El 80% de los alumnos se encuentran en los *niveles insuficiente y elemental*, lo cual indica que solo son capaces de resolver problemas directos que indican el uso de operaciones aritméticas y algebraicas básicas, representar y transformar mentalmente objetos geométricos y solo algunos de ellos también son capaces de realizar y resolver operaciones aritméticas combinadas, establecer relaciones entre variables, comprendiendo conceptos simples de probabilidad y estadística (SEP, 2013).

Como se puede ver, a medida que aumenta el grado escolar, el nivel de logro académico de los estudiantes decrece considerablemente, es decir, se observa que los alumnos no logran adquirir los contenidos curriculares, y la mayor parte de la información

que adquieren solo implican procesos de identificación y habilidades matemáticas básicas.

2.2 Dominio de Conocimientos Matemáticos en Contextos Formales de Aprendizaje

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) participa desde el 2005 en el diseño y aplicación de la prueba nacional EXCALE (Examen de la Calidad y el Logro Educativo) la cual mide el dominio de aprendizajes alcanzados por los alumnos de educación básica al exponerse a experiencias de aprendizaje que se formalizan en el currículo en educación preescolar (EXCALE-00), primaria (EXCALE-06) y secundaria (EXCALE-09), evaluando distintas asignaturas y grados, para conocer qué tanto saben y pueden hacer los escolares.

En educación preescolar los resultados del 2011 en matemáticas fueron similares a los obtenidos en 2007, ya que solo el 9% de los alumnos se ubicaron en el *nivel por debajo del básico*, lo que significa que alrededor de 190 000 alumnos presentaron carencias importantes en el logro de las competencias señaladas en el PEP 2004; lo cual indica que en el aspecto de **número** solo son capaces de decir la serie numérica del 1 al 30, enumerar de manera oral objetos desde el 1 al 20 siguiendo el orden de la serie numérica, de escribir números que se les dictan e identificar su uso en situaciones cotidianas, sin embargo, no logran usarlos para designar la cantidad de una colección; mientras que en el aspecto de **geometría** únicamente son capaces de reconocer un objeto que se les presenta gráficamente desde distintos puntos espaciales, identificar de manera perceptual propiedades medibles contrastantes de los objetos (lleno-vacío, alto-bajo, largo-corto). La mitad de los alumnos (50%) se ubicaron en el *nivel de logro Básico*, por lo que en el aspecto de **número** son capaces de utilizar números para representar cantidades menores de siete, contar colecciones de objetos hasta 30, comparar colecciones de objetos y establecer relaciones de igualdad y desigualdad, registrar la

cantidad de elementos en tablas y gráficas, con ayudas como categorías establecidas y ejemplos; identificar en tablas o gráficas la colección en la que hay más o hay menos elementos, identificar la colección faltante en una serie de colecciones con patrón de crecimiento $n + 1$ y construir la colección que sigue; mientras que en **geometría** solamente son capaces de reconocer semejanzas entre un cuerpo geométrico y un objeto del entorno, identificar posiciones de objetos respecto a otros objetos en una representación gráfica; comparar de manera perceptual la longitud de objetos: más corto que..., más largo que...; resolver problemas que impliquen estimar longitudes y distinguir el instrumento apropiado para medir el peso. En tanto que el 27% de los alumnos se encuentra en el *nivel medio* el cual indica que en **número** son capaces de utilizar números para representar cantidades menores de 13, identificar y representar numerales hasta 30, emplear los números para identificar hasta la cuarta posición de un elemento en una serie ordenada; resolver problemas que implican combinar el valor de monedas de cincuenta centavos, uno y cinco pesos; identificar patrones diseñados en función de un criterio de repetición de dos o tres elementos; y resolver problemas que implican agregar, igualar, comparar, quitar o repartir cantidades de una o más colecciones de hasta nueve objetos con o sin el apoyo de la representación gráfica; en **geometría** son capaces de reconocer figuras geométricas que comparten atributos, identificar figuras semejantes a una de muestra, identificar los cambios que ocurren en una figura geométrica al combinarla con otras, resolver problemas que implican medir longitudes tomando en cuenta una unidad de medida no convencional, identificar el orden de puntos de referencia espacial en un trayecto representado gráficamente y establecer e identificar la secuencia de imágenes que representan las relaciones temporales (antes-después-al final). Y solamente el 14% logra alcanzar el *nivel avanzado* en el que pueden utilizar números para representar cantidades hasta 20, escribir los números que sabe en orden ascendente, sin equivocarse empezando desde uno y llegando a un rango entre 31 y 89 en el aspecto del **número**, y en **geometría** son capaces de trazar trayectos a partir de puntos de referencia espaciales que incluyen direccionalidad (desde, hacia, hasta) y

ubicar los días de la semana a partir de las actividades que realizan, incluidas todas las actividades de los niveles anteriores (INEE, 2014).

Respecto a los alumnos de sexto de primaria en el año 2013, a nivel nacional, los resultados indican que el 38% se encuentran ubicados en el *nivel por debajo del básico*, lo cual significa que únicamente son capaces, en **número**, de identificar la relación entre los datos de una tabla de variación proporcional, ordenar números naturales para el algoritmo convencional de la suma, resuelven problemas que implican calcular la media, ordenan números naturales de cuatro cifras; y en **geometría** identifican características de longitud de centímetros a metros e identifican las características geométricas de cuerpos tales como el desarrollo del plano convencional y el número de caras; mientras que el 36% de los alumnos se encuentran en el *nivel básico*, realizando todo lo descrito anteriormente y además en **número** identifican la probabilidad de eventos en los que interviene el azar, interpretan la información presentada en gráficas de barras, logran identificar la representación de una fracción en una figura, ubican fracciones en la recta numérica; en **geometría** ubican puntos en un croquis, identifican la unidad de medida más apropiada para superficies grandes (kilómetros cuadrados), identifican características geométricas de figuras como la medición de sus ángulos y ejes de simetría. Mientras que en el *nivel medio* se espera que los estudiantes de sexto de primaria sean capaces de realizar todo lo mencionado anteriormente y a su vez puedan identificar en **geometría** posibles desarrollos de un cubo, calcular el volumen de un prisma rectangular mediante el conteo de unidades cúbicas, clasificar figuras de acuerdo con el número de ejes de simetría, y en **número** resolver problemas de conversión de toneladas a kilogramos y problemas que impliquen una resta de fracciones con diferente denominador, pero solo el 18% lo puede hacer; y solamente el 8% logra alcanzar el *nivel avanzado* realizando todo lo anterior e identifican e imaginan caras laterales de figuras no convencionales, calculan el volumen de un cubo mediante la fórmula, resuelven problemas de conversión de metros a kilómetros, ordenan fracciones menores a la

unidad, suman dos fracciones con diferente denominador y, predicen el comportamiento de tablas con variación constante (INEE, 2015).

En cuanto al dominio de los conocimientos adquiridos por los alumnos de 3^o de secundaria, los resultados del 2012 muestran que el 34% se encuentran en el *nivel por debajo del básico* y son capaces de resolver problemas que implican usar la fracción como razón, resuelven problemas que implican más de una operación de adición y sustracción, calculan e interpretan frecuencias absolutas y relativas, realizan sumas con transformación a partir de sumandos que se han dado de manera desordenada, y en **geometría** identifican una de las alturas de un triángulo, identifican rectas que son paralelas entre sí y el radio de un círculo e imaginan el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros; por otro lado en el *nivel básico* el 41% de los estudiantes pueden hacer todo lo anterior y además conocen el significado de la raíz cuadrada, resuelven problemas que los conducen al uso de ecuaciones de primer grado con una incógnita, identifican la tabla de valores que corresponden con una función, resuelven problemas que implican comparar probabilidades y en **geometría** determinan las secciones planas que se forman al cortar un cono. Y solamente el 22% se encuentra en el *nivel medio* en el que son capaz de hacer todo lo descrito anteriormente y además puede resolver problemas que impliquen identificar y restar términos semejantes, identifica el significado de una fracción como parte de un todo, identifica la solución de un sistema de ecuaciones en una representación gráfica, identifica las medidas de una figura que fue sujeta a una escala multiplica binomios en contexto del modelo de áreas, conoce el algoritmo de la raíz cuadrada, resuelve problemas de proporcionalidad directa, y que impliquen identificar y sumar términos semejantes. Pero solo el 3% de la población realiza todo lo demás y también son capaz de resolver problemas que impliquen sumar dos fracciones con distinto denominador, no múltiplos el uno del otro, identifica el procedimiento para calcular el área de un círculo a partir de su diámetro, identifica fracciones equivalentes, usa la jerarquía de operaciones y los paréntesis para determinar el valor numérico de un polinomio, es decir logran alcanzar el *nivel de logro avanzado* (INEE, 2012).

De los porcentajes anteriores podemos inferir que más de la mitad de los estudiantes de secundaria no dominan los conocimientos necesarios para emplearlos en situaciones formales donde se requieran, demostrando de manera global con estos datos, desde preescolar hasta secundaria, que a medida que aumenta el grado educativo el déficit a superar es mayor. Es decir, a medida que los alumnos concluyen con su educación no están cumpliendo con las intenciones planteadas en el currículo nacional, lo que indica también que el nivel de logro educativo y de dominio de aprendizajes alcanzados por los alumnos es muy deficiente. Por ende, los alumnos no logran tener un dominio adecuado de los conocimientos para aplicarlos en situaciones formales.

2.3 Dominio de los Aprendizajes Clave del Currículum

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) participa desde el 2015 en el diseño y aplicación del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). Dicho Plan evalúa el dominio de los aprendizajes clave de los alumnos de educación básica y media superior en las asignaturas de Lenguaje y comunicación y Matemáticas, los cuales son fundamentales para la adquisición de nuevos aprendizajes y relevantes para el dominio del campo curricular porque prevalecen en el tiempo a pesar de los cambios curriculares.

Los resultados en PLANEA 2017 de los alumnos de 6º de primaria, se observa que el 59% se encuentran ubicados en el *Nivel I (dominio insuficiente)* en el cual únicamente son capaces de resolver operaciones básicas, como suma, resta, multiplicación y división, con números naturales, además de interpretar graficas de barras y en **geometría** calcular perímetros en figuras regulares; un 18% de los alumnos se encuentran ubicados en el *Nivel II* en el que muestran un *dominio básico*, resolviendo problemas que requieren operaciones básicas con números naturales, resolver operaciones básicas de números decimales con naturales, calcular porcentajes y calcular perímetros en figuras irregulares;

pero un 15% logra alcanzar el *Nivel III*, es decir, el nivel de *dominio satisfactorio*, en el que son capaces de resolver problemas que requieren operaciones básicas con números decimales, además pueden multiplicar una fracción con un número natural, identificar la moda a partir de un conjunto de datos y en **geometría** reconocer situaciones en que se requiere calcular el perímetro o el área; mientras que únicamente el 8% de los alumnos logran colocarse en el *Nivel IV*, mostrando un *dominio sobresaliente*, ya que resuelven problemas que requieren operaciones básicas con números naturales, decimales y fraccionarios, que implican conversiones, además calcular la media y la mediana a partir de un conjunto de datos y resolver problemas en que se requiere calcular el perímetro o el área de figuras regulares e irregulares (INEE, 2018).

En el caso de los alumnos de 3° de secundaria, los resultados de PLANEA muestran que solo el 5%, se encuentran ubicados en el *Nivel IV de logro educativo*, en el cual son capaces de resolver problemas que implican combinar números fraccionarios y decimales y, emplear ecuaciones para encontrar valores desconocidos en problemas verbales; en **geometría**, logran resolver problemas de transformación de figuras, propiedades de los ángulos de polígonos, mediatrices, bisectrices y razones trigonométricas, calculan el área de sectores circulares y coronas, así como el volumen de cilindros y conos. Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un *dominio sobresaliente* de los aprendizajes clave del currículum. Mientras que cerca del 9% de los alumnos se encuentran en el *Nivel III*, en el cual son capaces de resolver problemas con fracciones, números enteros o potencias de números naturales y describir en lenguaje coloquial una expresión algebraica; en **geometría**, logran resolver problemas que implican el teorema de Pitágoras, propiedades de los ángulos en círculos o triángulos y relaciones de semejanza de triángulos, también utilizan la imaginación espacial para reconocer el desarrollo plano de conos y la generación de sólidos de revolución y calculan el área de figuras compuestas. Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un *dominio satisfactorio* de los aprendizajes clave del currículum. Así mismo, poco más del 20% de los alumnos se encuentra en el *Nivel II*, logrando resolver problemas que implican

sumar, restar, multiplicar y dividir con números decimales y, expresar con letras una relación numérica sencilla que implica un valor desconocido; en **geometría** reconocen las relaciones de los ángulos que se forman entre paralelas cortadas por una transversal, el desarrollo plano de cilindros y las secciones que se generan al cortar un cono, calculan el volumen de prismas rectos; es decir, los estudiantes tienen un *dominio básico* de los aprendizajes clave del currículum. En tanto que, más del 50% de los alumnos se encuentran en el *Nivel I*, en el que únicamente son capaces de resolver problemas que implican comparar o realizar cálculos con números naturales; en **geometría**, solo resuelven problemas que implican comparar el volumen de cilindros de manera visual; lo cual indica que los estudiantes cuentan con un *dominio insuficiente* de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales que dificultarán el aprendizaje futuro.

Es importante mencionar que los resultados observados anteriormente en las pruebas nacionales e internacionales para evaluar los aprendizajes de los alumnos, a lo largo de los años no muestran un incremento considerable, ya que se sigue observando que menos del 10% de los alumnos logran alcanzar el nivel de dominio satisfactorio de los aprendizajes curriculares que se espera adquieran al concluir la educación secundaria.

2.4 Uso de los Conocimientos para Razonar Matemáticamente

Desde 1997 México participa, como miembro de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), en la aplicación de la prueba PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes) la cual es de aplicación trianual a jóvenes de 15 años en más de 60 países del mundo. PISA evalúa competencias, es decir, el conjunto de habilidades y conocimientos de los estudiantes para analizar y resolver problemas, manejar información y enfrentar situaciones que se pueden presentar en la vida con respecto a las matemáticas, la lectura y las ciencias, independientemente

de si fueron adquiridas o no en el trayecto escolar. Brinda con sus resultados un perfil de dichas competencias que son claves para los aprendizajes en los sistemas educativos y proporciona información relevante para favorecer mejores políticas en el campo de la educación.

Los resultados obtenidos en el año 2015 muestran, de manera general, que los estudiantes mexicanos obtienen en promedio 408 puntos, por debajo del promedio OCDE de 490 puntos en cuanto al uso de los conocimientos para razonar matemáticamente. Cabe señalar que en promedio, el rendimiento de México en matemáticas ha aumentado 5 puntos cada tres años entre el 2003 y el 2015 y, el promedio del 2015, está por debajo al obtenido el 2009 el cual fue de 419 puntos (INEE, 2017).

Los resultados obtenidos en el año 2015 muestran que, en cuanto al uso de los conocimientos para razonar matemáticamente, el 57% de la población estudiantil se encuentra ocupando los **niveles inferiores de desempeño** (-1 y 1), solo pueden responder preguntas relacionadas con contextos familiares, en las que está presente toda la información relevante y están claramente definidas; son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas y, pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. Cabe mencionar que una parte de estos estudiantes probablemente tendrá serias dificultades para usar la competencia y el razonamiento matemático como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida.

El 40% de los estudiantes se encuentran en los **niveles intermedios de desempeño** (2 y 3) logran interpretar y reconocen situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa, saben extraer información relevante de una sola fuente y hacen uso de un único modelo sencillo de representación, usan algoritmos, fórmulas o procedimientos convencionales elementales para resolver problemas que involucren

números enteros y, son capaces de lograr interpretaciones literales de los resultados presentados. Algunos son capaces de realizar procedimientos descritos con claridad incluyendo los que requieren decisiones secuenciales; sus interpretaciones son suficientemente sólidas para construir un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias sencillas de solución de problemas, pueden también interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, y razonar directamente a partir de ellas; muestran cierta habilidad para el manejo de porcentajes, fracciones, números decimales y proporcione; las soluciones a las que llegan reflejan un nivel básico de interpretación y razonamiento.

Solo el 4% de los estudiantes son capaces de trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden involucrar restricciones o demandar la formulación de supuestos, así mismo, logran seleccionar e integrar diferentes representaciones incluyendo las simbólicas, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real, usando una limitada gama de habilidades, razonando con una idea en contextos sencillos; pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, evidencias y acciones; algunos empiezan a reflexionar sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos. Este porcentaje solamente corresponde a los **niveles de desempeño alto** 4 (3%) y 5 (1%), ya que ningún porcentaje de la población logró alcanzar el **nivel más alto de desempeño** (nivel 6) en el cual se espera que los estudiantes posean un razonamiento matemático avanzado, puedan aplicar su conocimiento y comprensión, además de dominar operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias, y abordar situaciones novedosas y, además formular y comunicar con claridad sus acciones y reflexiones respecto a sus hallazgos, argumentos e interpretaciones, explicando por qué son aplicables a una nueva situación (INEE, 2017).

De esta manera podemos constatar que los estudiantes de nuestro país no cuentan con las competencias necesarias para la vida, y por ende, no pueden hacer uso de ellas en situaciones de problema, no solo en el entorno escolar, sino en situaciones de la vida real, lo cual demuestra la importancia de promover acciones para fomentar el desarrollo de capacidades que puedan aplicarse en el futuro.

Dado lo anterior, es evidente que los resultados obtenidos a partir de estas evaluaciones no han sido satisfactorios, ya que la mayor parte de la población mexicana en educación básica se ubica en los niveles de dominio y logro más bajos o elementales, lo cual indica en primera instancia que, no cuenta con los conocimientos matemáticos establecidos en el currículo y por consecuencia no tienen dominio de éstos para poder aplicarlos en situaciones formales, y al estar frente a un problema que se les presente en contextos reales tienen grandes dificultades para utilizar sus capacidades que les permitan razonar matemáticamente para encontrar una solución apropiada. Dando como resultado el incrementar la calidad de la educación.

El panorama anterior nos lleva a confirmar la importancia de la enseñanza temprana de la geometría. Es por ello que se pretende continuar con la implementación de situaciones de aprendizaje propuestas en el proyecto “Entornos para el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar”, el cual está interesado en la investigación de tres Campos Formativos principales: Lenguaje y Comunicación, Razonamiento Matemático y Razonamiento Científico; para el desarrollo de formas de pensar complejas. En cuanto al campo que nos compete, el Razonamiento Matemático, se pretende desarrollar las capacidades que permitan el Razonamiento Geométrico. Para lo cual, en esta investigación se continuará con el diseño y aplicación de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en el Programa de Educación Preescolar 2011, en el Centro de Desarrollo Infantil y, a la par, se intentará analizar cómo es que se lleva a cabo esta adquisición y desarrollo de capacidades a través de la observación etnográfica y un análisis microgenético de las situaciones que se lleven a cabo dentro y fuera del aula.

2.5 Una Propuesta Curricular: Implicaciones de la Reforma Integral de Educación Básica

Como respuesta a la situación actual de México y con el propósito de coadyuvar a la mejor comprensión de una educación de calidad, la Secretaría de Educación Pública puso en marcha una nueva propuesta curricular y pedagógica, en la Reforma Integral de Educación Básica (RIEB), para mejorar la cobertura, la calidad de la educación, y las prácticas de enseñanza, por lo cual, en el año 2004 realizó su primera acción renovadora con la implementación del nuevo currículo en educación preescolar volviéndolo obligatorio, modificado en el 2011, y por ende, afectando en las prácticas tradicionales, es decir, en las concepciones y creencias que tenían tanto los padres de familia como los docentes y autoridades educativas con respecto a este nivel educativo. En el 2006 se modificaron los planes y programas de estudio de la educación secundaria y a partir del ciclo escolar 2009-2010 el de la educación primaria.

Dicho programa de renovación centra su atención en la adopción de un modelo educativo basado en competencias, el cual busca la articulación entre los niveles que integran la educación básica (Preescolar, Primaria, Secundaria) mediante la modificación de los planes y programas de estudio del Sistema Educativo Nacional para que las generaciones posteriores de estudiantes cuenten con los conocimientos, habilidades y valores que les permitan responder a las necesidades y retos sociales del futuro, haciendo un énfasis en la formación integral para la vida y el trabajo, la cual requiere proyectos innovadores que respondan a las nuevas necesidades de formación de los alumnos logrando el perfil de egreso único para la educación básica. Esta propuesta curricular implica definir con claridad los aprendizajes esperados y privilegiar el uso de estrategias didácticas que posibiliten a los estudiantes el asumir un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje.

Cabe mencionar que en estas acciones, los maestros se consideran como los agentes fundamentales en la intervención educativa, ya que son los verdaderos gestores de la puesta en marcha de este currículo; por lo que deben desarrollar diferentes habilidades para atender y promover permanentemente la evaluación, autoevaluación y coevaluación del proceso educativo, lo cual les permitirá: reflexionar en su práctica educativa, ser un mediador creativo, flexible y participante experto que oriente al alumno para fomentar su autonomía. Así mismo, les corresponde desarrollar una planeación de situaciones didácticas que permitan la adquisición y desarrollo de saberes, de la forma de aplicarlos, y de valorar el resultado de su uso (SEP, 2009).

De igual manera, la RIEB considera la necesidad de utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como una herramienta que contribuya a generar dinámicas de trabajo creativas e innovadoras para ayudar a los estudiantes a mejorar sus aprendizajes, siempre y cuando su aportación sea significativa para el mismo; organizando las asignaturas en cuatro campos formativos para la educación básica: lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y comprensión del mundo natural y social y desarrollo personal para la convivencia.

Con respecto al campo formativo de las Matemáticas, se pretende que los alumnos resuelvan problemas con tres ejes temáticos: sentido numérico; pensamiento algebraico, forma, espacio y medida; y además, el manejo de la información; para lo cual se utilizarán los procedimientos propios del enfoque de resolución de problemas en el desarrollo de las competencias matemáticas y no en el tratamiento específico de los temas.

2.5.1 El Preescolar en la Actualidad

A partir de toda la renovación curricular que se realizó al implementar la RIEB y al declarar la obligatoriedad del nivel preescolar, se crea el Programa de Educación Preescolar 2004, el cual después de aplicarse fue modificado en el 2011 (PEP, 2011) debido a que implicó grandes desafíos para las educadoras y el personal directivo de preescolar en la consolidación del mismo en el que tienen que reconocer a los niños como sujetos que son capaces de pensar y razonar; aprender a trabajar de manera diferente cambiando sus concepciones, por mencionar algunas. Ambos programas parten de reconocer los rasgos positivos de la educación y asumen como desafío la superación de aquellos que contribuyen escasamente al desarrollo de las potencialidades de los niños. El propósito esencial de la educación en preescolar para mejorar la calidad educativa en México, es favorecer el desarrollo de competencias que permitan alcanzar el perfil de egreso de Educación Básica (SEP, 2011).

La renovación escolar establece de manera precisa los propósitos fundamentales del nivel educativo en términos de competencias que los alumnos deben desarrollar a partir de lo que ya saben o son capaces de hacer, para contribuir a una mejor atención de la diversidad en el aula; dichos propósitos corresponden a la orientación general de la educación básica. De igual manera, con esta renovación curricular se busca fortalecer el papel de las maestras en el proceso educativo, para que seleccionen o diseñen las formas de trabajo más apropiadas de acuerdo con las características particulares del grupo y contexto en el que laboren (SEP, 2011).

Existen algunos fundamentos de la educación preescolar, como la relación que hay entre el aprendizaje y la importancia de la educación preescolar; pues los primeros años de vida ejercen una influencia muy importante en el desenvolvimiento personal y social de todos los niños, porque es en ese periodo donde desarrollan su identidad

personal, adquieren capacidades fundamentales y aprenden las pautas básicas para integrarse a la vida social (SEP, 2011).

Esos primeros años constituyen un periodo de intenso aprendizaje y desarrollo en el que las experiencias sociales desempeñan un papel clave, ya que de éstas y de la interacción con otras personas, sean adultos o pares, dependen muchos aprendizajes fundamentales para su vida futura: la percepción de su propia persona; las pautas de la relación con los demás, y el desarrollo de sus capacidades para conocer el mundo, pensar y aprender permanentemente. Por ello la educación preescolar interviene en este periodo de aprendizaje fundamental; permitiendo a los niños el tránsito del ambiente familiar a un ambiente social con mayores exigencias y diversidades. Representando así, la educación preescolar, una oportunidad única para desarrollar las capacidades del pensamiento que constituyen la base del aprendizaje permanente y de la acción creativa y eficaz en diversas situaciones sociales (SEP, 2011).

De igual manera, la educación preescolar cumple así una función democratizadora, como espacio educativo, en el que todos los niños y niñas, independientemente de su origen y condición sociocultural, tienen oportunidades de aprendizaje que les permiten desarrollar su potencial y fortalecer las capacidades que poseen. Un imperativo de toda la educación básica es, preparar a los niños para que puedan afrontar los desafíos del futuro, teniendo como propósitos educativos el desarrollo de las capacidades intelectuales, la capacidad de aprender permanentemente (SEP, 2011). Dicho programa es de carácter nacional por lo que tiene que ser tomado en cuenta en todos los planteles y modalidades en que se imparte educación preescolar en el país (público o privado); y para poder lograr su propósito debe garantizar a los niños su participación en experiencias educativas que les permitan desarrollar sus competencias afectivas, sociales y cognitivas.

El PEP, a diferencia de un programa que establece temas generales con contenidos educativos en torno a los cuales se organiza la enseñanza y se acotan los conocimientos que los alumnos han de adquirir, se encuentra organizado a partir de competencias. El foco en las competencias tiene la finalidad de propiciar que la escuela se constituya en un espacio que contribuya al desarrollo integral de los niños, mediante oportunidades que les permitan integrar sus aprendizajes y utilizarlos en su actuar cotidiano. Siendo así, la función de la educación preescolar, promover el desarrollo y fortalecimiento de competencias que cada niño posee, mediante las situaciones didácticas, las cuales pueden ser proyectos, talleres y unidades didácticas interesantes para los niños; propiciando con ello que pongan en el uso sus conocimientos para ampliarlos o construir otros nuevos (SEP, 2011).

Con la finalidad de identificar, atender y dar seguimiento a los distintos procesos del desarrollo y aprendizaje infantil, contribuyendo con el trabajo docente, el PEP agrupa las competencias a fomentar en los niños en seis Campos formativos:

- Desarrollo Personal y Social
- Lenguaje y Comunicación
- Pensamiento Matemático
- Exploración y Conocimiento del Mundo
- Expresión y Apreciación Artística
- Desarrollo Físico y Salud

Cada uno de estos campos se organizan en dos o más aspectos, en los que se especifican las competencias a promover en los niños y niñas de preescolar, las cuales también cuentan con sus respectivos indicadores para que la docente conozca las formas en las que puede aparecer cada competencia dentro del aula.

En la Figura 1, se muestran de manera breve, las características principales con las que cuenta el PEP, para tener un panorama general de los puntos importantes que maneja esta renovación curricular y que hay que tener presentes al implementar esta propuesta.

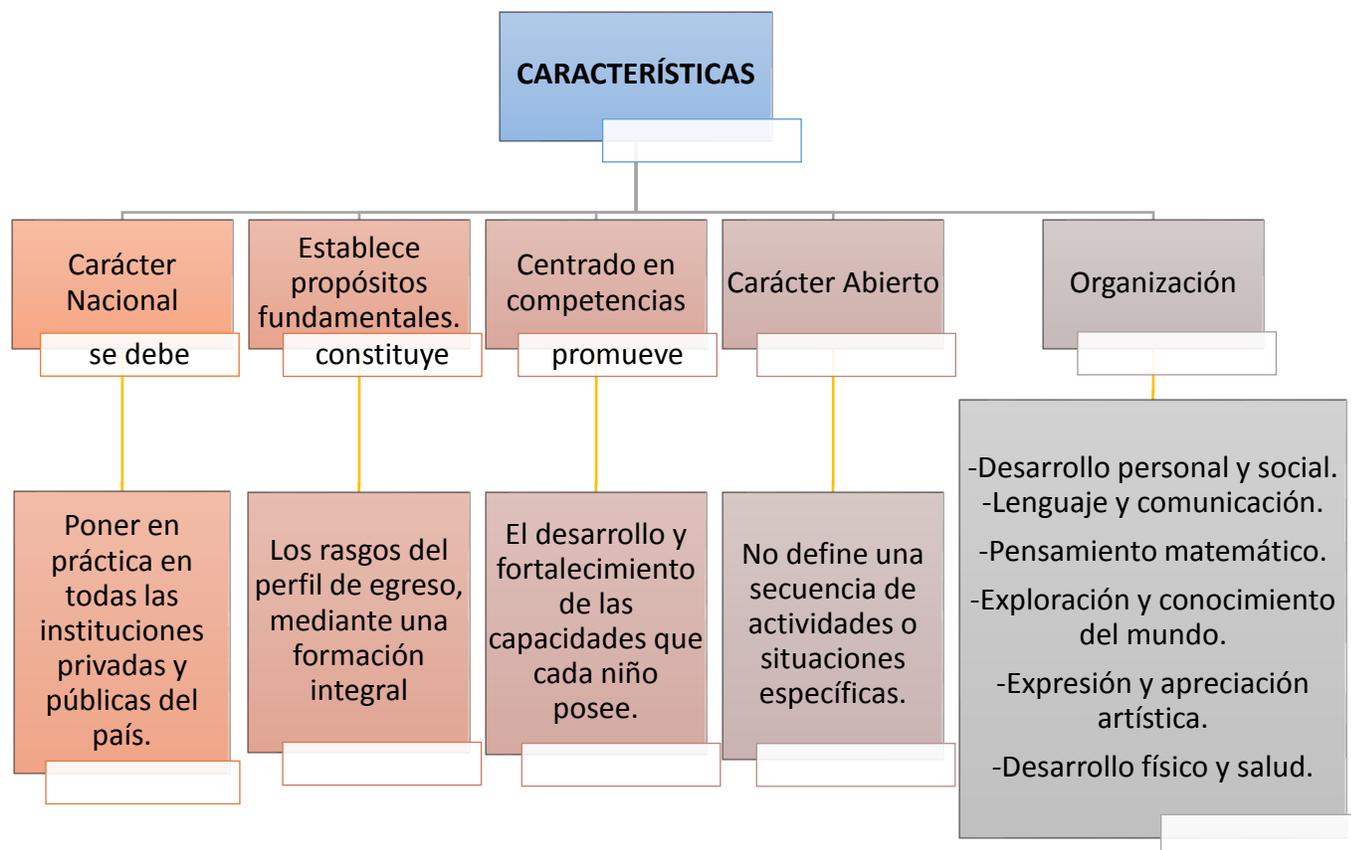


Figura 1. Características de los Programas de Educación Preescolar (2004, 2011).

En resumen, se puede concluir que el PEP 2011 reconoce la importancia del preescolar como un espacio propicio para que los pequeños tengan la oportunidad de participar en experiencias que les permitan desarrollar sus capacidades del pensamiento, que constituyen la base del aprendizaje permanente. Considerando la acción de la educadora como un factor clave para que los niños alcancen los propósitos educativos, pues es ella quien establece el ambiente, plantea las situaciones didácticas y busca motivos diversos para despertar el interés de los alumnos e involucrarlos en actividades que les permitan avanzar en el desarrollo de sus competencias. A continuación se detalla cómo se han fomentado las competencias en el campo del Pensamiento Matemático.

2.5.2 Fomento de Competencias Matemáticas en el Programa de Educación Preescolar 2011

Uno de los campos formativos considerado en el PEP 2011, y en el cual nos centraremos, es el Pensamiento Matemático, específicamente en el aspecto geométrico, el cual es importante mencionar porque las matemáticas son una materia básica que debe ser enseñada y a la vez una de las menos comprendidas; es considerada uno de los pilares de la educación.

Los fundamentos del pensamiento matemático están presentes en los niños desde edades muy tempranas. El ambiente natural, cultural y social en el que viven los provee de experiencias que de manera espontánea los llevan a realizar actividades de conteo, las cuales son una herramienta básica del pensamiento matemático, y útiles para resolver problemas en donde tenga sentido contar usando los principios del conteo: la correspondencia uno a uno; el orden estable; cardinalidad; la abstracción y la irrelevancia del orden.

Las actividades didácticas y la resolución de problemas contribuyen al uso de los principios del conteo y de las técnicas para contar, de modo que los niños logren construir,

de manera gradual, el concepto y significado de número; y mediante las experiencias tempranas de exploración puedan llegar a la construcción de nociones de espacio, forma y medida (SEP, 2011). De igual manera, durante las experiencias en este campo formativo es importante favorecer el uso de vocabulario apropiado, a partir de las situaciones que den significado a las palabras “nuevas” que los niños pueden aprender como parte del lenguaje matemático (SEP, 2011).

El sustentar el trabajo de este campo en la resolución de problemas, los cuales deben de permitir la oportunidad a la manipulación de objetos como apoyo al razonamiento, genera en los niños un reto intelectual que moviliza sus capacidades de razonamiento y expresión, y que logren sentimientos de confianza y seguridad (SEP, 2011); por ende, que desarrollen el pensamiento matemático. El desarrollo de las capacidades de razonamiento en los niños de preescolar se propicia cuando se despliegan sus capacidades para: comprender, reflexionar, estimar, buscar, comparar, expresar ideas, explicaciones y confrontarlas.

Este campo formativo está organizado en dos aspectos relacionados con la construcción de nociones matemáticas básicas: Número y Forma, Espacio y Medida; cada uno de estos aspectos establece las competencias que se espera que los niños desarrollen. A continuación, se presenta la tabla 1 donde se muestran las competencias que corresponden específicamente al aspecto de Forma Espacio y Medida, el cual se aborda en esta investigación.

**Tabla 1. Competencias Correspondientes al Campo Formativo:
Pensamiento Matemático**

Forma, espacio y medida
<ul style="list-style-type: none">• Construye sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial.• Construye objetos y figuras geométricas tomando en cuenta sus características.

Con respecto al conocimiento del espacio, Fuenlabrada (2005) menciona que éste se obtiene de manera natural, simple y sencillamente por vivir y desplazarse en un espacio tridimensional, por lo que se persigue que los niños amplíen su conocimiento sobre el espacio mediante situaciones de comunicación que ya conocen: ubicar objetos y desplazarse.

El desarrollo del sentido del espacio, usando la geometría, es una herramienta esencial para el pensamiento matemático, haciendo uso de la imaginación visual y de las habilidades espaciales que mejoran con la práctica (Del Grande, 1990; Yackel y Wheatley, 1986). En este sentido, la geometría es una modelización del espacio, mediante figuras y dibujos, ya que una cosa es que el niño se pueda desplazar y otra que uno le dé una consigna de desplazamiento y que la pueda ejecutar con precisión; se trata de que verbalice la consigna para que otro la ejecute y que sepa representar gráficamente esa consigna, resultando necesario experimentar y jugar con las formas. La geometría es una herramienta para el entendimiento, tal vez la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad (Fuenlabrada, 2005).

El propósito entonces es que el alumno reconozca y nombre características de objetos, figuras y cuerpos geométricos, pero lo importante es saber cómo es que llega a reconocerlas, ya que el aprender las figuras geométricas no significa solo que sepan su nombre, porque ello no representa ningún reto intelectual. Lo importante es que logre tomar decisiones a partir del problema que tenga que solucionar y que se vea en la necesidad de recurrir tanto al sistema geométrico como al uso del lenguaje geométrico para poder comunicarse con sus compañeros con respecto a sus soluciones (Fuenlabrada, 2005).

Con base en lo anterior y en las competencias señaladas se elaboraron situaciones de aprendizaje con la intención de desarrollar las capacidades en los niños y las niñas para que puedan interactuar en sociedad a través del uso y del significado que

adquieran del lenguaje de la geometría. Así mismo, con el programa “Entornos para el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar” pretendemos, al igual que el PEP 2011, coadyuvar con la formación docente para que lleve a cabo la aplicación de este programa fomentando el aprendizaje en los niños, y que éstos puedan mejorar y ampliar sus capacidades intelectuales para ser capaces de enfrentar y resolver situaciones reales que viven día con día.

2.5.3 Perfil de Egreso: Basado en Competencias

Asumiendo que la Educación Básica sienta las bases del aprendizaje y tomando en cuenta que la RIEB reconoce, como punto de partida, una proyección de lo que es el país hacia lo que queremos que sea mediante el esfuerzo educativo buscando la articulación entre los tres niveles de la Educación Básica; y considerando los propósitos que se han planteado en los Programas de Educación Preescolar; es importante destacar la relación que tienen con el desarrollo de competencias que permitan el logro del Perfil de Egreso en la Educación Básica el cual se ha definido como un conjunto de rasgos que los estudiantes deben mostrar al concluir su educación básica, y que implica la movilización de conocimientos y habilidades para enfrentar con éxito diversas tareas cotidianas (SEP, 2011).

Debido a que el Perfil de Egreso está basado en términos de competencias en donde cada nivel educativo desde el preescolar, contribuye al desarrollo de esas competencias en las nuevas generaciones (SEP, 2011), se hace necesario comprender y caracterizar qué son las competencias para poder fomentarlas de manera adecuada.

Por lo anterior resulta importante reconocer la diversidad social, lingüística y cultural que caracteriza a nuestro país, así como las características individuales de los niños, durante su tránsito por la educación preescolar en cualquier modalidad, para que vivan experiencias que contribuyan a sus procesos de desarrollo y aprendizaje, y que

gradualmente, en matemáticas **usen** el razonamiento matemático en situaciones que demanden establecer relaciones de correspondencia, cantidad y ubicación entre objetos al contar, estimar, reconocer atributos, comparar y medir; comprendan las relaciones entre los datos de un problema y usen estrategias o procedimientos propios para resolverlos (SEP, 2011).

Desde el marco conceptual de PISA (INEE, 2017) se define esta Área de conocimiento, como la que se ocupa de la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de un modo efectivo al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones; se destaca que una competencia se demuestra cuando se aplican los conocimientos adquiridos a las tareas y retos cotidianos y a los entornos extraescolares con previa valoración. En otras palabras, es la capacidad de extrapolar lo que se ha aprendido a lo largo de la vida y su aplicación en el mundo real, considerando el contenido o temática, los procesos que se utilizan para solucionar la tarea, y la situación o contexto, es decir, el área de la vida real; definiendo una competencia matemática como:

La capacidad del individuo para plantear, formular e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia le ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, a emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (INEE, 2008, p. 30)

De igual manera, James Gee (1998, citado en OCDE, 2003) menciona que una competencia también se refiere a la utilización que hacen las personas del *lenguaje*, ya que la capacidad de leer, escribir, escuchar y hablar una lengua constituye la herramienta más importante de entre las que median la actividad social humana. Pero el hecho de que una persona sea competente en una lengua implica que debe conocer los recursos

de diseño de la lengua y saber utilizarlos en variadas funciones sociales. De manera análoga, el considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los estudiantes deben aprender los elementos característicos del *discurso matemático* (términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas) y también aprender a utilizar tales ideas para resolver problemas no rutinarios en una variedad de situaciones definidas en términos de funciones sociales.

Por otro lado la RIEB (2009) establece que: “Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con un saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes)” (p. 15). Las cuales se manifiestan en la acción de manera integrada, para el logro de propósitos en contextos y situaciones diversas. Estas competencias pueden ser observadas dentro del aula a través de los logros que van mostrando los alumnos día con día, considerando que se enriquecen y desarrollan durante toda la vida, pensándolas como objetivos de aprendizaje que deben desarrollarse en todas las asignaturas desde el preescolar, primaria y secundaria, para así contribuir en el logro del Perfil de Egreso de la Educación Básica, siendo éste el conjunto de rasgos que los estudiantes deberán mostrar al concluir su formación y que implican la movilización de sus conocimientos y habilidades al enfrentarse a tareas cotidianas (SEP, 2011; RIEB, 2009; OCDE, 2010).

Con lo anterior, se puede apreciar el cambio en la concepción sobre el desarrollo del individuo y la transformación necesaria de las prácticas psicopedagógicas de institución en las que ya no se considera al alumno como un receptor de información pasivo y al docente como transmisor del conocimiento, ni se limita la enseñanza de ciertos conocimientos considerando la edad adecuada de los alumnos para aprenderlos. Ahora el enfoque es socioconstructivista, en el que la mirada está puesta en el alumno como ser social que construye su propio conocimiento en interacciones sociales al estar inmerso en un contexto social, obligando ya no solo a que se trabaje para lograr que los alumnos adquieran los conocimientos y habilidades establecidos en el currículo, sino que

además los comprendan y aprendan a utilizarlos al participar en la solución de problemas que se les presenten en la realidad, consiguiendo con ello las metas educativas y aprendizajes duraderos.

2.6 La Matemización como Objetivo de Aprendizaje

Las matemáticas no se ven como algo que la gente use en realidad, se reconocen únicamente como un requisito académico, y por lo tanto como una experiencia poco favorable, ocasionando la deserción escolar. Aunado a ello existe una creencia de que solamente una cierta parte de la población tiene acceso a las matemáticas, los matemáticos, y que este conocimiento es formal y un conjunto de verdades universales, que únicamente se puede comprobar mediante fórmulas y teoremas, que existen independientemente de las personas, los cuales son descubiertos por los matemáticos a través de un proceso de razonamiento formal. Dejando de lado, las concepciones informales de los estudiantes y el conocimiento generado en contextos fuera del aula académica, ya que tal conocimiento no puede ajustarse a los principios matemáticos “formales”; convirtiendo a los docentes en matemáticos inactivos (Millroy, 1992).

Por ello y partiendo de las propuestas planteadas por la Secretaría de Educación Pública, en el PEP 2011, con el que se pretenden desarrollar las competencias en los niños de educación Preescolar, el interés de este proyecto es coadyuvar con el fomento de éstas entendiéndolas, en términos teóricos, como las capacidades cognitivas complejas que los niños deben desarrollar a partir de su participación en ambientes complejos de aprendizaje, asumiendo que estas capacidades cognitivas no son naturales, ya que descansan en el uso de sistemas simbólicos (la geometría) y aparecen cuando se internalizan dichos sistemas, es decir, cuando ya se es capaz de utilizar el lenguaje propio de la geométrica para encontrar una solución apropiada a determinado problema, comunicar sus decisiones y realizar deducciones lógicas. Al tratar con un dominio de conocimiento específico, como lo es la geometría, es viable resignificar las

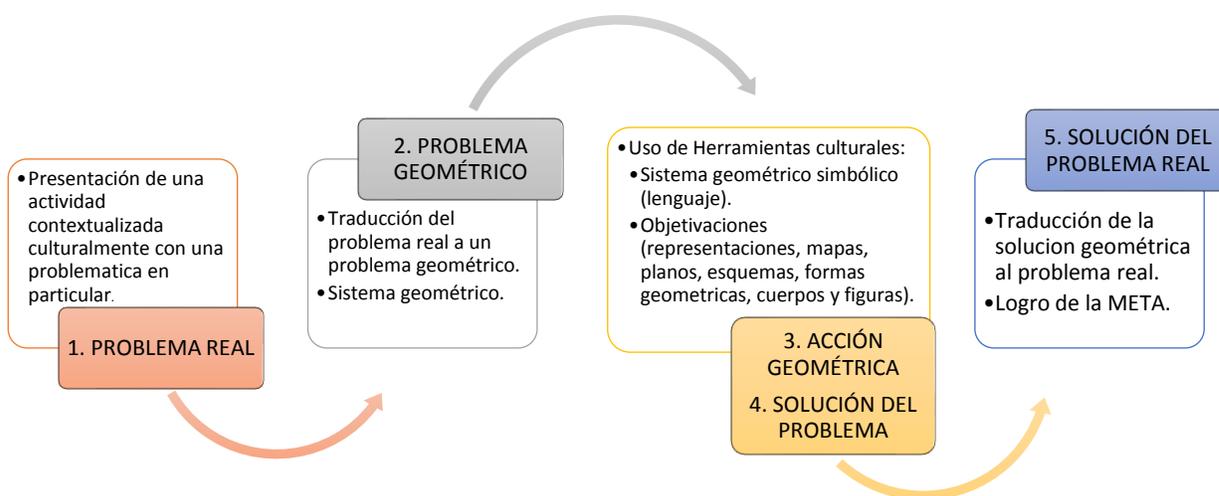
competencias, en términos de **razonamiento** y formas de pensar complejas, en este caso el razonamiento geométrico; ya que, es el razonamiento el que responde a las características de este dominio particular.

Por su parte, la teoría constructivista proporciona un marco epistemológico en torno al término con el cual podrían comenzar a tener sentido la existencia de las diferentes representaciones matemáticas (Cobb, 1985, 1986b; Confrey, 1985, 1987, 1991; Kaput, 1985; Steffe, 1986, 1988; von Glasersfeld, 1982, 1984; como se citó en Millroy, 1992). El constructivismo utiliza el término “problemático” enfatizando que no tiene carácter independiente, sino para referirse al “obstáculo” al que se enfrenta una persona. Millroy, (1992), considera que la única forma de referirnos a este fenómeno humano multifacético es a través de la “matemática”, sustantivo que parece referirse a un cuerpo estático del conocimiento que ya existe en el mundo. Para expresar el concepto de un proceso activo de creación y usar las ideas o herramientas matemáticas, es necesario utilizar el término “**matematización**” que encarna la acción y se refiere a la experiencia de la creación y utilización de las ideas matemáticas, bien puede ser una actividad creativa del hombre, como el lenguaje o la música, de la originalidad primaria, cuyas decisiones históricas desafían la racionalización objetiva completa.

Por lo anterior, es importante considerar y definir la *matematización* como un objetivo de aprendizaje, siendo una estrategia utilizada por los matemáticos para la resolución de problemas, para “hacer matemáticas”, en la cual se ve reflejado el razonamiento matemático. Dicha actividad de matematizar se refiere a la capacidad de realizar acciones simbólicas basadas en el sistema geométrico y se puede describir a partir de cinco aspectos que la componen, como se puede observar en la figura 2 (Millroy, 1992; OCDE, 2012):

- 1) Problema enmarcado en la realidad.
- 2) Sistematizar el problema según conceptos matemáticos: interpretación / representación en términos del sistema geométrico.
- 3) Reducir o transformar el problema real en un problema meramente matemático, mediante la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización (modelamiento matemático).
- 4) Resolver el problema matemático (operación).
- 5) Dar sentido a la solución matemática en términos de la situación real, identificar las limitaciones de la solución (representación en la situación real)

Figura 2. El ciclo de la Matemización (Millroy, 1992; OCDE, 2012).



Con estos procedimientos se puede constatar cómo es que los matemáticos “hacen matemáticas”, cómo la gente utiliza las matemáticas en gran número de tareas reales y potenciales y cómo los ciudadanos bien informados y reflexivos utilizan las matemáticas para participar en el mundo real de manera total y competente. Por ello, aprender a *matematizar* debería constituir uno de los objetivos educativos más importantes para todos los alumnos. Es decir, aprender a razonar matemáticamente ya que para resolver problemas de la vida real los alumnos se ven obligados a movilizar las

capacidades que han adquirido a lo largo de su escolarización y sus experiencias vitales empleando los procesos de Matemización.

Así mismo es relevante considerar la importancia de las capacidades matemáticas como dominio específico, porque forman parte de los objetivos de aprendizaje del currículo actual, por lo que en términos de la Matemización, se debe buscar que los niños adquieran los conocimientos sobre el sistema y además fomentar la alfabetización matemática en ellos, es decir, que sean capaces de utilizar el sistema matemático en actividades auténticas y razonar a partir del mismo para dar solución a los problemas reales que se les presenten, considerando aspectos como el numérico, la medición, la ubicación espacial y el geométrico.

La **alfabetización matemática** también implica que hagan uso de herramientas culturales como la báscula, la cinta métrica, el termómetro, la regla, el compás y el transportador, solo por mencionar algunas. Así mismo, elaborar y utilizar registros (en los cuales deben reunir información), representaciones gráficas y geométricas (siendo capaces de interpretarlas) y esquemas (con diferente perspectiva espacial). También, que sean capaces de utilizar los números poniendo en juego los principios del conteo, planteando y resolviendo problemas que impliquen agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos. Procurando siempre el uso del lenguaje matemático, ya que les permite comunicar sus decisiones y dar argumentos válidos; todo ello según la problemática que se tenga que resolver, ya que es a partir de ella, que los niños deben poder sistematizar la información que se les proporciona para transformar el problema real a un problema meramente matemático dándole solución dentro del sistema utilizando los conocimientos pertinentes, ya sea numérico, geométrico, de medición, o de ubicación espacial, para posteriormente darle sentido a esa solución regresando al problema real.

Específicamente en el aspecto de la geometría, considerando la Matemización como objetivo de aprendizaje, éste implica razonamiento geométrico; pero las diferentes

clases de razonamiento y explicaciones, emergen de la necesidad de actuar geoméricamente (para matematizar) en "diferentes campos de experiencia", y de la misma manera se irán enriqueciendo en la medida en que se participe en actividades que movilicen los conocimientos geométricos y promuevan el uso de herramientas culturales para solucionar algún problema de tipo geométrico.

En preescolar el niño tiene que desarrollar su percepción y su razonamiento geométrico, lo cual implica, ver cosas que no están y dejar de ver cosas que están, es decir, que puedan solucionar problemas socialmente significativos utilizando las representaciones mentales que han construido a partir de sus experiencias con el sistema geométrico, siendo conscientes del cambio que hay de "lo que ven" a "cómo lo ven" de acuerdo con el cambio de posición de ellos mismos como observadores, describiendo el mundo a través de un ***crystal matemático*** (Fuenlabrada, 2005; Duhalde y González, 1997).

Es así que el presente estudio tuvo especial interés en favorecer en los niños de preescolar el desarrollo de capacidades cognitivas para actuar usando los conocimientos geométricos como lo son: la observación y abstracción de características y propiedades geométricas de un problema siendo capaz de proponer soluciones, seleccionar la más apropiada y dar argumentos sobre sus decisiones para dar resolver un problema; haciendo uso de diversas representaciones abstractas (esquemas y planos) con diferente perspectiva, al realizar alguna construcción; la capacidad de utilizar el lenguaje geométrico para interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea de forma oral, escrita o gráfica usando símbolos o vocabulario propios de la geometría en actividades que implican el uso de cuerpos y figuras geométricas y; la capacidad de realizar deducciones lógicas e identificar cuando un razonamiento no es lógico, cuando se dé cuenta de algún error que cometió uno de sus compañeros y pueda ayudarlo a resolverlo para poder solucionar de manera adecuada el problema geométrico que se les presenta a través de conjeturas justificando o demostrando su falsedad a través de

contraejemplos; además de las establecidas por el PEP, 2011. Es decir, que **razonen geoméricamente**.

Así mismo, en este estudio es importante reconocer y entender bajo qué condiciones los alumnos de preescolar puede desarrollar dichas capacidades, por ello en el siguiente apartado se describe a partir de la perspectiva histórico cultural, la cual permite indagar en este proceso de aprendizaje y en las formas de pensar de los individuos al participar dentro de una sociedad.

3. LA ACTIVIDAD Y EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE LOS NIÑOS PREESCOLARES

“Mi trabajo será fiel a la realidad, o en todo caso a mi recuerdo personal de la realidad, lo cual es lo mismo.”

José Luis Borges (1975)

Las capacidades cognitivas complejas han sido objeto de múltiples análisis. Actualmente con los cambios curriculares en el mundo, se ha puesto especial interés en entender las condiciones bajo las cuales los estudiantes pueden desarrollarlas, así como la expresión de las mismas, para después lograr participar en actividades sociales de la vida pública, laboral y académica.

La perspectiva histórico-cultural, que tiene sus raíces en la teoría Vigotskyana, ofrece las herramientas para indagar y ulteriormente influir en el desarrollo de las capacidades y formas de pensar que los individuos necesitan para enfrentar los retos de la sociedad la cual está cada vez más industrializada e implica el uso de la tecnología. En este sentido, el origen y desarrollo de las capacidades cognitivas complejas se puede entender a partir de las premisas socioculturales, las cuales, en los últimos años, han sido trabajadas por autores neovigotskianos como lo son Wertsch, (1997); Roth, (2010); Mercer, (2008); Ernest, (2006); Cole, (2007); Leontiev, (1975), por mencionar algunos, poniendo énfasis en alguno de los tres diferentes aspectos siguientes: lo semiótico, la interacción y la actividad.

El interés de este apartado es entender el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales, tomando en cuenta el papel fundamental que tiene la actividad en el desarrollo intelectual durante los años escolares, en tanto que esta determina las interacciones y el uso de los sistemas simbólicos. Esto es, desde el constructivismo histórico cultural, se parte de la idea de que el origen y desarrollo de estas capacidades,

como el razonamiento, se propicia a partir de la incorporación del individuo en actividades socialmente construidas, dentro de las cuales se usan sistemas y herramientas culturales con la asistencia que brinda una persona más experimentada, para lograr alcanzar metas socialmente establecidas por la comunidad.

La premisa básica de la teoría sociocultural, acerca de los procesos cognitivos complejos como resultado de la internalización de las relaciones sociales y sistemas culturales, se aborda en los siguientes apartados, en donde se parte de los elementos interdependientes que incluyen: la actividad como condición determinante de las interacciones sociales y el uso de herramientas culturales.

A partir de lo anterior, en esta sección se muestran en un primer momento, las premisas teóricas de las que parte este estudio, en donde se presentan las características de la actividad, su estructura, el uso de los sistemas y herramientas culturales como medios para pensar; y los procesos de interacción que surgen dentro de ésta.

3.1 La Influencia de la Actividad en el Surgimiento de las Capacidades Cognitivas Complejas

El contexto en el que el ser humano se desarrolla, involucra una serie de relaciones en las que se entretajan los actos de las personas y el mundo social. Estas relaciones se hayan establecidas en los diversos escenarios de actividad social práctica en los que se organiza dicho contexto, los cuales van a tener un impacto psicológico en el desarrollo del pensamiento del individuo (Kirshner y Whitson, 1997; Daniels, 2003).

En este sentido, resulta importante reconocer que cualquier ser humano se desenvuelve, en organizaciones complejas, en sistemas de acción e interacción con reglas e instrumentos culturales particulares que van más allá de las relaciones uno a uno (Tharp, 1988). De ahí que, el desarrollo y surgimiento de procesos estrictamente

humanos ocurra dentro de un contexto estructurado en escenarios de actividad social mediada culturalmente por los sistemas y herramientas, que son parte constitutiva de esa actividad, la cual posee una estructura particular de acciones que tienen el propósito de conseguir metas socialmente establecidas (Roth y Thom, 2009).

Desde la perspectiva sociocultural, el desarrollo individual se vislumbra desde el vínculo con lo social y cultural de la vida del ser humano. De esta forma, es imposible pensar en una separación entre el individuo y su entorno sociocultural, pues la naturaleza de la interrelación que forman el individuo y el mundo social es algo más que el poder pensar en dichos elementos de manera independiente (Wertsch, 1988). Por lo que ésta consideración tiene una consecuencia al querer entender el desarrollo individual y específicamente el surgimiento de capacidades intelectuales en el ser humano, ya que surge la necesidad de plantearse una unidad que preserve la unión del individuo con lo social, y que permita mantener la esencia de los acontecimientos más que en la división de los mismos en elementos aislados que funcionan distinto a como lo hacen en su totalidad (Wertsch, 1988; Del Río y Álvarez, 1997).

Por lo tanto, resulta oportuno recurrir a la noción de *actividad* ante la necesidad de entender las relaciones del individuo, sociedad y cultura, concretamente la influencia cultural y social sobre el desarrollo psicológico del ser humano, el cual surge y se establece en dichos sistemas organizados de acciones sobre los objetos culturales (Daniels, 2003 y Wertsch, 1988).

La actividad entonces, se ha constituido como la *unidad* que permite analizar el desarrollo de la conciencia dentro de la actividad social práctica, por lo que es necesario considerarla, junto con las condiciones sociales y sistemas que son producidos dentro y a través de ella, para entender el papel fundamental que tiene en el surgimiento de las Capacidades Cognitivas Complejas (Daniels, 2008); ya que es en ella en donde se muestran, las formas activas y dinámicas de los individuos, así como de las herramientas

culturales, tradiciones históricas y las transformaciones que estos han tenido, reformulando así la relación entre el individuo y el entorno social-cultural, en la cual cada aspecto se encuentra implicado en la definición del otro (Wertsch, 1997). De aquí se desprende que los individuos se vean en la necesidad de conocer los artefactos, escenarios, reglas y acciones pertenecientes a la actividad; los cuales son productos culturales, construidos por los humanos y que han adquirido algún significado en particular con el paso del tiempo (Valsiner, 1984). De tal forma, que si cada actividad humana específica involucra un tipo particular de acciones, relaciones, sistemas simbólicos y herramientas culturales, entonces las formas de pensar del individuo dependerán de la actividad a la que se esté sujeto; guardando la estructura de la actividad particular de la cual se es partícipe (figura 3).

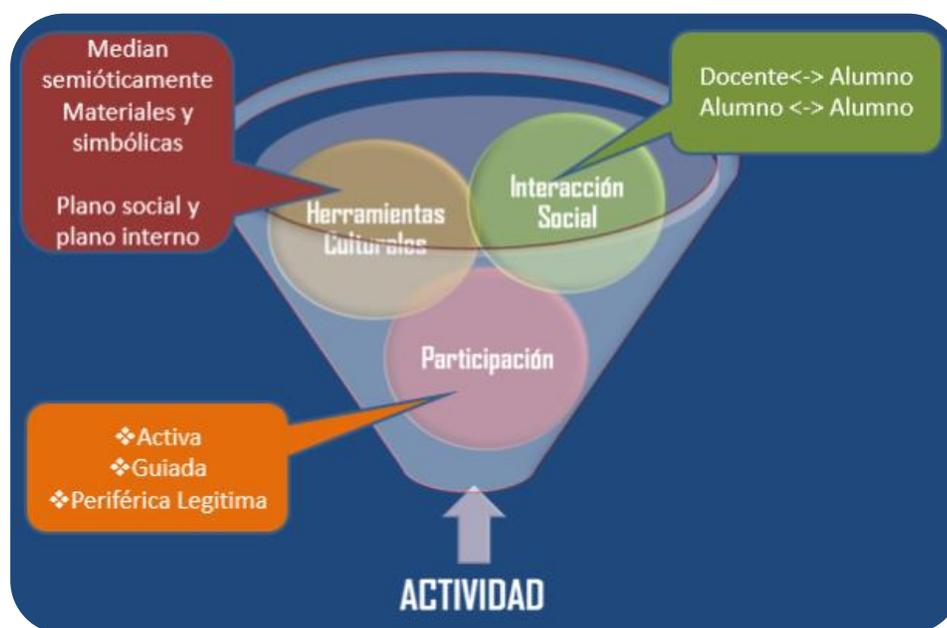


Figura 3. Teoría de la actividad.

Considerando lo anterior, el individuo al involucrarse en la actividad, progresivamente entenderá las herramientas culturales, así como las acciones que permitirán lograr la meta que se establece en ésta; permitiendo así su participación en ella, es bajo estas condiciones que el individuo lleva a cabo un proceso de aprendizaje

(Rogoff, 1997), y por lo tanto, donde tiene lugar el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales (Wertsch, 1988).

En este sentido la actividad, influirá sobre este desarrollo en dos sentidos, el primero de forma directa, porque ésta es la que establece el motivo que tendrá el individuo así como las acciones que tendrá que llevar a cabo para la consecución de la meta y las condiciones bajo las cuales se realizarán estas acciones, de igual manera determina las relaciones y las formas de actuación entre sus participantes; el segundo sentido, de manera indirecta, ya que la actividad da lugar a mecanismos como los procesos de interacción social y el papel del uso de las herramientas culturales, los cuales terminarán afectando el desarrollo de dichas capacidades intelectuales.

La Estructura de la Actividad y la Naturaleza de las Capacidades Cognitivas Complejas

Al reconocer el sentido que guarda la actividad en el origen y desarrollo de las capacidades cognitivas complejas, es importante también reconocer aquellas características que guarda como unidad que trasciende al individuo, pero que será internalizada por el mismo al ser partícipe de ella.

Un punto relevante es *el carácter histórico e institucional* que posee la actividad, ya que constituye el medio en donde ocurre la influencia de los procesos institucionales en la formación de capacidades. Los *factores institucionales sociales definen la actividad*, pues ésta tiene lugar en lo colectivo; y es ahí donde se crea y tiene funcionamiento, en tanto que, constituye un contexto situacional en el cual, el sujeto se relaciona con el mundo social y los objetos del mismo. De esta manera, la actividad tiene existencia únicamente en las relaciones sociales humanas, la cual está determinada por las formas y medios de interacción social y material (Leontiev, 1975). Es la sociedad quien crea y establece dichos fines de acuerdo a un contexto situacional e histórico determinado.

Las formas rutinarias de la interacción, de la acción sobre los objetos, del uso de herramientas específicas en una actividad llegan a institucionalizarse como reglas aceptadas, por lo cual trasciende al propio funcionamiento del humano como unidad individual y descansa en la actividad. Así, la estructura de los intercambios humanos posee fundamentos establecidos en las actividades a lo largo del tiempo y que han permitido generar el carácter institucional de las mismas, al establecerse interpretaciones realizadas por el ser humano (Rogoff, 1993).

El carácter histórico de las actividades recae en que éstas se encuentran en un proceso de cambio histórico constante. Es importante tomar en cuenta que los individuos que entran en una actividad institucionalizada, no necesariamente fueron sus creadores, de tal manera, que los individuos han heredado una institución establecida por sus antepasados (Rogoff, 1993). Consecuentemente dichas actividades institucionalizadas guardan una *estructura intencional*, sin embargo, quienes ponen en práctica estas formas institucionales no necesariamente conocen las razones de esta estructura, pues muchas veces para ellos simplemente es como una forma de hacer las cosas.

Lo que brinda este carácter histórico dentro de la actividad, es la justificación de que la institución sea de una forma y no de otra, pues precisamente guarda sus raíces en el momento que fue creada así como en el paso del tiempo (Rogoff, 1993 y Wertsch, 1988). Esto es, las instituciones implican al individuo en la actividad de forma tal, que lo que se ha hecho con ella en lo colectivo y en el pasado, obliga a avanzar en una determinada dirección en el futuro.

Por otra parte, más allá del carácter histórico e institucional, la actividad está organizada bajo ciertas características que determinan la forma que guarda, éstas permiten reconocer por un lado su organización estructural y por otro su organización funcional como comunidad de práctica cultural. Resultando importante comprender la

naturaleza de la actividad y su influencia en el desarrollo de las capacidades cognitivas complejas, ya que en los rasgos de la actividad descansa la influencia de los medios simbólicos y la interacción. La forma primordial de actividad humana es aquella que es externa, es decir, una actividad práctica y que cuenta con una dimensión interna o psicológica de la actividad, está conformado por aquellas acciones mentales, formadas mediante el proceso de internalización (Wertsch, 1988 y Vigotsky, 1979).

En la estructura y organización de la actividad humana en el plano externo se identifican los siguientes componentes así como los correspondientes niveles que la integran: a) *el motivo*, esto es lo que impulsa a la *actividad*, es hacia donde el objetivo se dirige. b) *la meta*, o la representación del resultado de una *acción* y c) *las condiciones o circunstancias* bajo las cuales las acciones en la actividad se llevan a cabo, es decir las *operaciones* (Daniels 2003; Wertsch, 1997; 1988). Desde el punto de vista de la Teoría de la Actividad se pueden distinguir tres tipos de unidades, las cuales son: la actividad, la acción y la operación; que son los que constituyen los niveles de estructura de la actividad de acuerdo con Leontiev (Wertsch, 1988; Leontiev, 1979, citado en Jaworski y Potari, 2009)) la cual es el todo; es un sistema dinámico (figura 4).

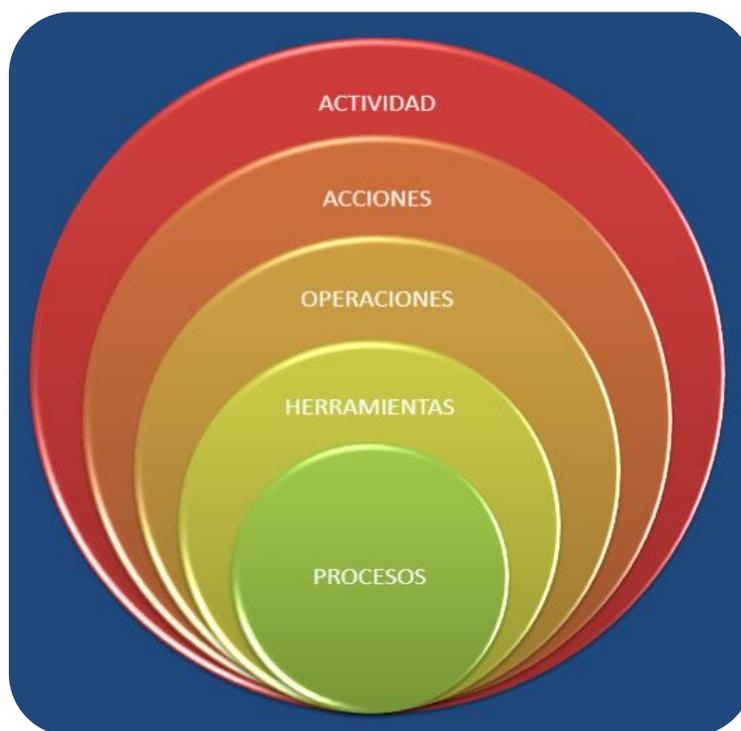


Figura 4. Estructura de la actividad.

Actividad. Se refiere a actividades específicas reales, particulares, en oposición con la actividad humana general. La actividad, socioculturalmente construida, tiene un propósito particular con un fin último que ha de convertirse en el motivo del individuo que la lleva a cabo, tiene una estructura propia que permite que se encadenen una serie de acciones que tienen un sentido para lograr ese fin particular. Dicha actividad específica del ser humano ha sido construida por el mismo y tiene una lógica interna particular, la cual siempre descansa en un sistema simbólico específico (Wertsch, 1988); permitirá también definir el grupo de individuos que ha de participar en ella, así como la división de responsabilidades en un grupo social para aumentar la eficacia en su realización (Daniels, 2003; 2008). Su estructura no es determinada por el contexto físico o perceptivo en que se desenvuelven los seres humanos, sino más bien es una interpretación o creación sociocultural impuesta por los individuos que participan en dicho contexto (Wertsch, 1988). Dicha interpretación es la que se construye en el individuo al momento de participar en una actividad particular, brindando el motivo que da a sus acciones.

Acciones. Las cuales son mediadas por sistemas simbólicos, permiten establecer el grupo de metas u objetivos que han de cumplirse con el propósito de alcanzar la finalidad que demanda la actividad en general (Daniels, 2003). Por lo tanto, una acción brinda al individuo un objetivo particular que ha de ser logrado para llevar a cabo el motivo de la actividad. Las acciones ayudan al individuo a encontrar todas las relaciones específicas entre medios y fines que se hallan implícitos en la actividad. Permite descomponer de manera particular una serie de acciones que se tienen que realizar, así como el sistema que va anclado a estas (Wertsch, 1988).

Operaciones. Son las condiciones concretas bajo las cuales se llevan a cabo las acciones (Wertsch, 1988; Zinchenko y Gordon, 1997; Daniels, 2003; 2008). Es decir la operación es la materialización de una acción pues ésta es orientada a un contexto espaciotemporal real en la actividad concreta que se está llevando a cabo. En concreto, la operación es la composición técnica de la acción, la cual puede ser externalizada y formalizada por la interpretación que vaya guardando a lo largo del tiempo (Zinchenko y Gordon, 1997). Las operaciones se constituyen entonces como los medios que permiten que una acción se lleve a cabo; un objetivo se puede mantener constante pero las condiciones bajo las que se da cambian.

A pesar de que cada componente pueda ser descrito de manera independiente, cada uno de ellos representa un sistema interconectado con el nivel anterior (Daniels, 2003 y Leontiev, 1975). Es decir, no es una estructura congelada ni jerárquica, más bien existe una transformación continua entre los tres elementos. Sin embargo, es importante mencionar la relativa independencia de las acciones, esto es, una acción puede variar independientemente de la actividad (Wertsch, 1988; 1997). Una misma acción puede contribuir materialmente a la realización de diferentes actividades. Puede ser transferida desde una actividad a otra, revelando de esta forma, su relativa independencia (Wertsch, 1988).

Considerando, que el contexto donde se desenvuelve toda persona está constituido de actividades sociales, creadas por la misma sociedad y cultura en la que éste se encuentra, en donde según su sociedad, se precisa el **motivo** de una actividad particular, se determina el **sistema acciones** el conjunto de **operaciones** bajo las cuales éstas serán llevadas a cabo; necesariamente se hace indispensable que cualquier individuo tenga un entendimiento general, incluso específico de todos y cada uno de los elementos de la misma.

Se ha mencionado ya de manera muy específica la parte estructural que guarda la actividad, sin embargo, es importante también profundizar en un aspecto de carácter mucho más social de la actividad, esto es cómo es que se construye dentro de un sistema cultural en el cual adquiere funcionalidad y proporciona conocimiento y uso del conocimiento al individuo.

La actividad funciona como un contexto en donde la interactividad, las formas de interpretación común, la participación y la asistencia ocurren (Tharp, 1991). Son contextos situacionales de actividades socialmente construidas las cuales son organizadas alrededor de objetos comunes, involucra cierto dominio de conocimientos, y determinadas tecnologías incluyendo un sistema simbólico o base de conocimiento que brinda significado al sistema integrado de, repetidas e interrelacionadas acciones que van dirigidas a una meta (Scribner 1997 y Rogoff, 1993).

En dichas prácticas culturales se han institucionalizado reglas, valores, distribución de tareas que inciden en la forma en que se plantean los problemas que han de resolverse en ellas, aportando tecnologías e instrumentos para su solución y reconociendo ésta a través de patrones específicos de cada lugar en donde se ha construido la actividad conjunta (Rogoff, 1993).

Los aspectos sociales de la actividad proporcionan roles, métodos para la resolución de problemas, interpretaciones de eventos y maneras de valorar o no esos eventos. La actividad da sentido y significado a las personas que se encuentran presentes en ella. Se refiere a las cosas que se hacen, la secuencia de acciones, formas de trabajo ideas o rutinas que guían dichas actividades, así como los tiempos y espacios de las mismas. De forma importante, la actividad brinda las motivaciones de los individuos, los significados de las acciones, de los participantes y los objetivos que en ella se plantean (Tharp, Estrada, Stoll y Yamauchi, 2000 y Tharp, 1988).

El estar en una actividad socioculturalmente construida, implica el uso de códigos y géneros lingüísticos como el idioma que los individuos hablen, incluye también los de las disciplinas como las matemáticas, la ciencia, la literatura así como los códigos informales (Tharp, et. al, 2000). De igual manera, involucra el uso de instrumentos culturales y herramientas propios de la actividad (Rogoff, 1993 y Daniels, 2008). De esta forma, las personas que son parte de la actividad comparten las metas de la misma, conocen el sistema de acción así como el sistema simbólico y los artefactos que dan función a esta actividad, entienden las reglas, valores y supuestos que en ella residen.

Retomando que la estructura de la actividad es una interpretación o creación sociocultural impuesta por los individuos que participan en dicho contexto (Wertsch, 1988). Esta interpretación es la que se construye en el individuo al momento de participar en una actividad particular, la cual guía la selección de sus acciones, la composición operacional de las mismas y determina el significado funcional que han de tener éstas (Daniels, 2003). Así, es aquí, dentro de este marco de estructura de actividad institucional social, en donde surgen y tienen lugar los procesos psicológicos de los seres humanos, los cuales tomarán la forma de la estructura externa de la actividad (Daniels, 1996) y de acuerdo con Wertsch (1988), es en estos contextos socioculturalmente definidos en donde se da lugar al funcionamiento intelectual humano.

De esta manera, cuando el individuo comprende e internaliza el contexto complejo de actividad, es decir, que lo entiende y lo significa, identificando tanto las herramientas culturales que se requieren usar dentro de ésta, así como el motivo y acciones que la conforman; entonces la *interpretación* y *actuación* a posteriori que tendrá el individuo sobre su realidad, se transformará y complejizará, haciendo que esté en función de esta nueva estructura de actividad que ahora forma parte de su razonamiento, la cual seguramente utilizará como la misma forma de análisis sobre otra actividad similar o diferente. La realidad es construida por la actividad, socialmente; ya existe a fuera del sujeto, ya está construida y la naturaleza esta domesticada por la realidad; es por ello que el acceso del sujeto a la realidad se da por la actividad.

En este sentido, el desarrollo y complejidad del pensamiento de un individuo dependerá de la complejidad de las actividades; si se retoma la idea de que en ellas descansa el uso de sistemas simbólicos y herramientas culturales, entonces es posible pensar que una mayor complejidad en las actividades implicará una mayor complejidad en el tipo de herramientas culturales y por ende del sistema simbólico entrelazado en la actividad, lo que tendrá como consecuencia una mayor exigencia cognitiva para el individuo en el uso de herramientas simbólicas en el plano público (interpsicológico), las cuales serán reconstruidas en el plano interno (intrapsicológico). Es bajo esta idea que la calidad y complejidad del pensamiento de los individuos estará determinado por el tipo y complejidad de las actividades en las que participe.

Por lo anterior, podemos decir que la estructura de la actividad llega a ser la estructura de la mente, ya que la actividad en cualquier humano estructura y le da sentido a sus acciones, porque lo organiza; le dice cuándo, cómo, para qué y con qué actuar y participar. De igual manera esa estructura echa a andar un entramado de mecanismos, que hacen que surjan las capacidades cognitivas complejas las cuales son de origen social. La mente se crea en la internalización de la actividad, que es la que define todo lo

demás, es a saber, la interacción, la internalización y el uso de las herramientas culturales tanto simbólicas como objetivadas.

La Influencia de la Actividad en el Funcionamiento de las Herramientas Culturales como Medios para Pensar

Una de las ideas centrales que ha sido desarrollada desde la perspectiva sociocultural es la *noción de mediación*, la cual representa un punto central para explicar el desarrollo psicológico. Dentro de las premisas principales de la teoría Vigotskyana resalta el hecho de que la mente humana es de carácter simbólico, esto es, tiene lugar y funcionamiento a partir de la incorporación y dominio de los sistemas culturales (Daniels, 1996 y Wertsch, 1988).

En tal sentido, resulta importante explicar cómo la apropiación de los sistemas simbólicos y herramientas culturales (materiales) pueden fungir como objetos de cambio cognitivo, que favorecen la actuación del individuo en el mundo social, para ello se hará explícito el carácter que guarda la actividad en relación con estos sistemas que dan pie a la formación de la mente humana. La concepción de la actividad descansa en los medios semióticos y todas las acciones que se realizan dentro de ésta están sostenidas por los medios semióticos, ya que en cada acción se usan diferentes herramientas para poder lograr la meta establecida.

En un primer momento, es oportuno aclarar una distinción en la función de los medios semióticos, la cual va en dos sentidos uno como herramientas técnicas y otro como herramientas psicológicas. De esta forma, el carácter más esencial en donde radica la diferencia es que una herramienta técnica es aquella que es independiente del individuo, su uso descansa en la actividad, sirve como herramienta para transformar los objetos dentro de ésta; por otro lado una herramienta psicológica es aquella que media el pensamiento del individuo con la realidad externa (Daniels, 1996 y Wertsch, 1988).

Con respecto al primer sentido en tanto herramientas técnicas, Martí (2003) menciona que en la gran mayoría de las culturas, las actividades humanas se apoyan en diferentes sistemas simbólicos que existen no solo como objetos físicos sino representativos, a los cuales llama Sistemas Externos de Representación (*SER*). De acuerdo con esto, una cantidad importante de sistemas simbólicos y artefactos, corresponden a aquellos que requieren que su aprendizaje sea de manera institucionalizada como es el caso del sistema escrito, el sistema numérico y geométrico o el sistema científico. Pero es relevante clarificar: Qué tienen en común estos sistemas simbólicos y cuáles son sus características.

Sistema simbólico. También llamado **sistema de signos**, y puede ser definido como: “Un conjunto de símbolos distintos, organizados y estructurados de acuerdo a ciertas reglas y principios que los relacionan con un dominio específico y en donde cada uno tiene su propia y única interpretación” (Jhonson-Laird, 1990, p. 33).

Por su parte, Martí y Pozo (2000; Martí 2003) retomando la idea de que las realidades están organizadas en torno a determinadas propiedades formales (adjudica el término de “sistema”) y de la idea de que constituyen objetos ostensivos observables (propone el término “externo”) expone que los sistemas externos de representación tienen como característica decisiva su *propiedad dual* porque son objetos físicos, manipulables, pero también son objetos de conocimiento y representativos que remiten a otra realidad.

Los sistemas simbólicos son un tipo particular de representaciones que comparten ciertas características como: ser representaciones que existen como objetos independientes al sujeto que las produce; poseen cierta permanencia; son representaciones desplegadas en el espacio y son sistemas organizados y estructurados.

Sin embargo, estas mismas representaciones también se diferencian entre ellas por las siguientes características:

- Lo que representan (lenguaje, cantidad, relaciones espaciales, música).
- Por la naturaleza de sus componentes (marcas arbitrarias, marcas analógicas, combinación de ambas).
- Por las reglas internas que rigen sus relaciones (organización lineal, valor de posición, segmentación de las unidades).

A razón de esto, la serie de particularidades que los diferencian entre sí, hace que se constituyan como un sistema de signos representativo de un *dominio específico*. Tal como lo menciona Martí (2003; Martí y Pozo, 2000) al describir los sistemas externos de representación, los más comunes dentro de las actividades de nuestra cultura son la escritura, notación numérica, las imágenes o las tic's (tecnologías de la información y de la comunicación). Estos sistemas simbólicos son resultado de las necesidades humanas dentro de las actividades sociales, que evolucionan y se transforman día a día. En donde cada sistema tiene funciones y características correspondientes a un dominio específico de conocimiento.

El lenguaje (o habla) es uno de los sistemas simbólicos más estudiado y destacado por su función primaria como instrumento de comunicación que posibilita el contacto social. Este es un sistema formado por un código de signos lingüísticos objetivado en palabras, y que varía sin límites precisos en los distintos grupos sociales ya que es una herencia puramente histórica del grupo humano y producto de un hábito socialmente mantenido durante largo tiempo. El lenguaje tiene una estructura determinada en términos gramáticos, sintácticos, semánticos y léxicos (Yule, 2007). Tomando como ejemplo esta última descripción, se puede decir que estos sistemas de representación son respectivamente objetivaciones culturales que han sido creadas y transformadas con

el paso del tiempo, y a razón de las necesidades del medio en el que se desarrollan (Eco, 2007).

Artefactos. Así como se han desarrollado distintos sistemas simbólicos de representación producto de las actividades culturales y sociales, también a lo largo de nuestra historia y con el objetivo de facilitar la resolución de alguna tarea, se han creado distintas herramientas específicas que constituyen objetivaciones de los sistemas simbólicos. Éstas son referidas por Eco (2007) como concreciones que reflejan el uso de los sistemas simbólicos, por ejemplo, un reloj (instrumento que sirve para medir el tiempo) en donde descansa el uso del sistema numérico.

Refiriendo entonces a las objetivaciones como formas de mediación de las acciones humanas muchos psicólogos han utilizado la palabra “*herramienta*” para referirse a la función indirecta de un objeto cualquiera, como medio para realizar una actividad (Vigotsky, 1979). Así mismo, en gran parte de la literatura se ha utilizado el término “*instrumento*”, como aquella herramienta creada y utilizada para un fin específico dentro de una actividad. No obstante, el término de instrumento es considerado por Cole (en Daniels, 2008; 2003) como una subcategoría de “*artefacto*” el cual es definido como *algo que adquiere significado y valor mediante su existencia en un campo de actividad humana*.

Siguiendo la reflexión de Cole, en el presente estudio se considera el concepto de **artefacto** para referirnos a cualquier *instrumento, herramienta u objeto que pueda adquirir un significado y uso dentro de cualquier actividad sociocultural*. De esta manera, cabe mencionar que los sistemas simbólicos junto con los artefactos son concretamente producciones culturales que no tienen un valor intrínseco; su valor emana del uso que se les da para realizar determinadas acciones (Radford, 2004). Entonces, será este significado el más importante para lograr su internalización la del sistema simbólico que permite al hombre formar parte de una sociedad porque facilita su comunicación,

interpretación e incorporación del mundo en el que se encuentra. Es a partir de aquí donde cobra importancia un elemento que resulta relevante para poner en funcionamiento el plano mental y dentro del cual éste también se origina; si se considera que la mente es simbólica entonces es en la actividad humana en donde adquirirá este carácter y donde los actos que se realicen tengan cabida también, es en este contexto donde lo simbólico cobrará función convirtiéndose en un mediador.

En la actividad el individuo le da uso y sentido a los sistemas simbólicos como el lenguaje, las matemáticas o la ciencia, ya que establece el para qué, cómo y cuándo se han de utilizar estos así como las herramientas culturales (Daniels, 2003 y Wertsch, 1988). El sistema simbólico se encuentra entretejido en la actividad, la cual se encuentra estructurada en acciones, el sistema simbólico constituye el componente simbólico de cada acción (Daniels, 1996). Es a partir de las acciones que el sistema simbólico se hace disponible a todos los sujetos, es decir, se materializa; es cuando un individuo participa en una actividad que tiene acceso al sistema, que bajo esta estructura se hace presente en un plano público social.

Lo anterior cobra sentido, puesto que la actividad obliga a utilizar instrumentos simbólicos y materiales particulares, en interacción con otros, estos instrumentos ayudan a transformar los objetos y las herramientas simbólicas permiten actuar, comunicarse y reflexionar sobre la actividad. Además al tomar en cuenta que la actividad se realiza con otros, el uso compartido del sistema permite un entendimiento conjunto sobre sus metas así como del uso de las herramientas necesarias para su realización (Mercer y Littleton, 2007).

A partir de lo anterior, inicialmente el uso del sistema es compartido, la actividad ayuda a que el individuo vaya progresivamente teniendo una transferencia de control sobre su uso, es así que se irá teniendo una mayor comprensión del sistema, el cual servirá como herramienta para pensar una vez que puede ser utilizado de manera

independiente en el plano público de la actividad. Por lo que, para lograr el desarrollo del pensamiento es necesario internalizar el sistema semiótico, es decir, no puede surgir la mente si no hay un sistema semiótico de por medio de acuerdo con Vigotsky, Wertsch y Coll. El análisis del proceso que implica la reconstrucción del sistema simbólico, se desarrolla de manera más específica en el siguiente apartado.

La Asistencia de Alguien más Experimentado Sostiene las Acciones con Instrumentos

Una vez desarrollada la idea del papel de los medios semióticos en la actividad, es importante aclarar el proceso que permite que un individuo menos experimentado, logre participar y reconstruir, en el plano interno, las actividades sociales en las que se involucra.

Es así, como la entrada de un nuevo individuo a este sistema de acciones, implica el uso de sistemas e instrumentos particulares, así como formas de actuar en relación con otros. El individuo novato debe apropiarse de dichos códigos y artefactos, así como del propósito de la actividad específica de la cual está siendo participe, debe de familiarizarse con sus métodos y temas, además de adquirir la habilidad necesaria para llevarla a cabo (Wertsch, 1997).

En este sentido la participación, interacción y uso del sistema serán fundamentales para que el novato pueda modificar sus formas de pensar, adentrándose por primera vez en una actividad, ya que mediante este proceso tendrá la oportunidad de conocer y entender, por un lado la actividad, y por otro el sistema que le da estructura y función a ésta (Rogoff, 1997). La participación juega un rol importante como una primera oportunidad de adentrarse en una actividad distinta, ya sea desde la pura observación hasta la implicación efectiva en una actividad. El simple hecho de participar en una actividad brinda al individuo la posibilidad de comenzar a relacionarse con el entorno

social y cultural en la cual lo humano del individuo se desarrolla (Rogoff, 1993). De esta forma permite que el novato vaya construyendo formas de pensar particulares de la actividad de la que es parte y, de acuerdo con Daniels (2008), que al implicarse dentro de una actividad se vaya transformando, habiendo un proceso de apropiación en el que es capaz de manejar una situación posterior.

Sin embargo, no es suficiente con adentrarse en la actividad y tener una participación indiscriminada en la misma, se requiere de la interacción y asistencia de una persona más experimentada, que guíe y sostenga la incorporación del novato; que por un lado favorezca el entendimiento de la actividad y por el otro, sostenga el uso de las herramientas, dentro de ellas las simbólicas como el lenguaje, el cual siempre está presente en formas como el discurso y los esquemas, por ejemplo (Mercer, 2001). Por lo tanto, las interacciones, sostenidas por la actividad, en particular entre una persona más experimentada y el novato, será el proceso que permitirá reconstruir el sistema de actividad y por ende el sistema simbólico que la sostiene (Wertsch, 1988). Es necesario tomar en cuenta que dicha guía es una dirección ofrecida tanto por la cultura y los valores sociales, como por los otros miembros del grupo social (Rogoff, 1997).

Es así como el experto no solo da al novato las oportunidades de participar en actividades, sino también le ofrece intencionalmente conocimiento y guía en las maneras de comportarse y llevar a cabo las acciones, que la misma actividad sociocultural establece; el experto, negocia con el novato los significados de las metas que dirigen las acciones para que estos lleguen a ser compartidos; además de negociar el uso los instrumentos y herramientas de la actividad particular, ayudando a interpretar el sistema que descansa en ella. Esto tiene sentido, si se considera que la estructura de la meta no se encuentra en la cabeza del experto ni en la del novato, es la actividad quien la establece y por tanto es necesario negociarla en la propia interacción. Así, en la medida en que los individuos generan los medios coherentes para lograr los objetivos

socialmente negociados, crean para sí mismos un sistema de representación que refleja los logros que se han generado en nuestra cultura e historia social (Tharp, 1988).

Dentro de esta negociación, el experto brinda apoyos más específicos que intentan crear planos de interpretación conjunta con el novato, en relación con las acciones y herramientas culturales dentro de la actividad. Este proceso no debe ser concebido como un proceso de transmisión unidireccional, pues el novato puede tener un papel activo al pedir ayuda, obteniendo información y transformándola en una nueva comprensión (Daniels, 2008). De tal forma, que el apoyo se presenta como un sistema interactivo de desarrollo intelectual o región dinámica de acuerdo con Cole (1991) donde surge un momento de interacción, relación, intercambio y cooperación especial. Una Zona de Desarrollo Proximal donde se observa lo que el individuo logra hacer sin ayuda y como alcanza las metas de la actividad con la ayuda del más experimentado (Mercer, 2001; Tharp y Gallimore, 1988). Esta Zona es un sistema interactivo de desarrollo intelectual o región dinámica donde surge un momento de interacción, relación, intercambio y cooperación especial (Wertsch, 1988; Baquero, 2004).

El tipo de asistencia, que puede presentar el experto, para ayudar a la inmersión del individuo novato en la actividad, implica en su mayoría al discurso, el cual surge en la actividad y ayuda a generar y mejorar la comprensión de la situación del novato por medio de la discusión, de esta forma el experto ofrece una orientación mediante el dialogo, según Mercer (2001); a través de **los cuestionamientos, la instrucción, o la estructuración cognitiva** que se constituyen como medios de asistencia discursiva, importantes en la asistencia de los actos propios y en las respuestas que provocan. Cabe señalar, que existe una interdependencia entre los medios de asistencia, porque estos medios no son estrictamente normativos, son infinitamente variables en su selección, esto se debe a las exigencias del momento y del novato, dentro de la zona en donde necesita del otro para completar la actividad (Tharp y Gallimore, 1988).

Resumiendo lo anterior, es el experto (docente), quien asiste al novato (alumno) con la intención de crear planos de interpretación conjunta sobre el sistema y su uso dentro de la actividad, así como la estructura y reglas con las que opera. De tal manera, que el desarrollo del principiante puede ser concebido a partir de tomar en cuenta los acuerdos intersubjetivos de significados, que se plantean entre él y el experto en las actividades sociales. Estos planos de intersubjetividad se refieren, a los momentos por los que el novato transita en la intención de lograr una internalización de la actividad, es decir; el dominio autónomo de la misma. Así los planos de interpretación conjunta, a través de los cuales se puede dar la transición del funcionamiento interpsicológico al funcionamiento intrapsicológico (Wertsch, 1988), se refieren a lo siguiente:

Primer nivel de intersubjetividad.

Se caracteriza porque la definición de la situación del alumno es muy diferente de la del docente. Aquí la comprensión del alumno acerca de los objetos y la acción es tan limitada, que éste puede no entender de modo apropiado las producciones verbales del más experimentado.

Segundo nivel de intersubjetividad.

En este nivel, el alumno empieza a participar con éxito en la actividad, pero aún no la comprende en su totalidad, y a menudo no realiza las deducciones necesarias para interpretar las otras producciones reguladoras del docente experto.

Tercer nivel de intersubjetividad.

Este nivel se caracteriza porque el alumno puede responder haciendo las inferencias necesarias para interpretar las producciones directivas del docente, incluso cuando éstas no son explícitas y dependen de la definición de la situación según el modelo experto. Ya no es necesario que éste especifique todos los pasos a seguir para interpretar una directiva, puesto que el alumno puede llevarlos a cabo basándose en una definición de la situación bastante completa.

Cuarto nivel de intersubjetividad.

Dentro de este nivel, el novato toma la responsabilidad de llevar a cabo la tarea. En este punto hay una intersubjetividad completa entre el alumno y el docente en cuanto a la definición de la actividad, lo que hace que sean innecesarias otras producciones reguladoras. Es en este último nivel, en donde son “automatizadas” las acciones cognitivas que se llevan a cabo dentro de una actividad, donde la asistencia de la persona experta ya no es necesaria, y se presenta el proceso de internalización con el que culmina la reconstrucción del plano externo en el plano interno del individuo. Este proceso es individual y constructivo, más que un reflejo automático de copia de la realidad externa en un plano interior ya existente; es más, es un proceso en cuyo seno se desarrolla un plano interno de la conciencia (Wertsch, 1988).

Es hasta este punto que parece quedar resuelto el desarrollo de capacidades complejas, sin embargo aún queda responder qué es lo que se internaliza, es decir, qué es lo que reconstruye el individuo en el plano mental una vez que ha entendido la actividad, para ello es importante tomar en consideración *el pensamiento humano entendido como acción mediada por instrumentos*.

Una vez que se ha alcanzado el proceso de internalización, la representación mental que surge de él, puede considerarse como una reconstrucción interna de la actividad. Esto considerando que el contexto social, está organizado en actividades, entonces, retomando la premisa sociocultural de que aquello que se encuentra en el plano público, se reconstruye en el plano interno, tiene lugar la argumentación que la estructura de los procesos cognitivos son un reflejo de la estructura de la actividad externa y sus operaciones, en este sentido las capacidades cognitivas complejas, no son otra cosa más que la organización y medio de la actividad social que ha sido, tomada por el individuo e internalizada (Minick, 2005).

Retomando la idea de que la creación y desarrollo de la mente está en función de la cantidad de herramientas psicológicas que posee el individuo, en donde el adquirir nuevos sistemas simbólicos llevará a la creación de la reconstrucción simbólica de ésta, resulta clara la noción de actividad, pues es ahí, en donde los sistemas simbólicos cobran función y en donde el ser humano tiene acceso a ellos. Por lo que, para llevar a cabo la acción en una actividad se requiere del empleo de herramientas psicológicas, de instrumentos de mediación. Las cuales son caracterizadas por ser producto cultural y tienen la capacidad de transformar el funcionamiento mental. (Martí, 2005 y Wertsch, 1997; 1988).

Por lo tanto, la acción...

...que se ha llevado a cabo en ausencia de instrumentos de mediación o con instrumentos mediacionales distintos, se transforma con la incorporación de una nueva herramienta psicológica. En el acto instrumental ni el individuo ni el instrumento de mediación funcionan aisladamente pues ninguno puede proporcionar una base adecuada para la acción realizada. Por el contrario el análisis debe basarse directamente en la irreductible tensión que existe entre los instrumentos de mediación y el individuo que los usa. (Wertsch, 1997, p. 54)

En consecuencia, la acción siempre será mediatizada por el uso de sistemas simbólicos y retomando el argumento al inicio del apartado, sobre la unidad que implicara una tensión irreductible entre los instrumentos mediacionales y el individuo o individuos que los emplean, se plantea a la acción mediada por instrumentos (Wertsch 1997; Zinchenko y Gordon, 1997) como la unidad que permite entender a los momentos de funcionamiento mental y la situación sociocultural como momentos que actúan de manera dialéctica en la acción humana.

De igual manera al encontrarse lo semiótico incluido en los procesos de actuación humana dentro de una actividad, la herramienta psicológica alterará por completo el flujo

y la estructura de un nuevo acto instrumental o acción mediada. (Wertsch, 1997; 1988; Zinchenko y Gordon, 1997). Además de moldear dicha acción.

Desde tal perspectiva, la introducción de una herramienta psicológica como en el flujo de la acción lleva a una transformación importante o incluso a una redefinición de esa acción (Wertsch, 1997). Esto contrasta con una perspectiva en la que la incorporación de instrumentos mediacionales se limitaría a facilitar una acción ya existente, pero dejándola cualitativamente intacta.

La acción al irse entrelazando con un sistema de signos sufre transformaciones, de esta manera una vez que la mediación semiótica se ha incorporado a la acción práctica sufre una transformación cualitativa (Wertsch, 1988) Es aquí, en esta transformación, en donde los sistemas simbólicos se convierten en herramientas psicológicas pues se han incorporado a la acción del individuo, dichas herramientas psicológicas originan la mente humana y su desarrollo se verá afectado en tanto se incorporen nuevos sistemas que permitan la actuación del individuo en diversas actividades. Dentro de la noción de acción mediada por instrumentos se puede estudiar la conciencia humana (Wertsch, 1988), pues es capaz de reflejar las complejas relaciones interfuncionales que caracterizan la conciencia humana. Refleja las interrelaciones que se establecen entre lo individual y lo social.

A manera de conclusión, se puede decir que la acción mediada por instrumentos, proporciona una unidad que reconstruye el individuo y que incorpora el criterio definidor de la noción que Vigotsky proponía sobre la conciencia y su desarrollo, como una organización dinámica, que se evidencia en relaciones interfuncionales de lo individual y social. Al considerar una acción dirigida hacia un objetivo y mediada por instrumentos, se puede ver que distintos procesos que han sido reducidos para su estudio como la percepción, la memoria, la solución de problemas y la atención se hallan implicados y coordinados en esta unidad de verdadera vida psicológica (Wertsch, 1988). Una unidad que trasciende los procesos mencionados anteriormente, la cual muestra el origen y

desarrollo del pensamiento humano además, de hacer evidente su complejidad que se ve reflejada en su participación como parte de una actividad de la cual forma parte y a la cual ha de tener acceso el individuo. Por lo que no se puede pensar en actividad sin el uso de herramientas culturales, ni viceversa ya que, es dentro de la actividad en la que las herramientas adquieren significado y sentido.

Buena parte de los objetos con los que interactúan las personas no son tan solo objetos físicos. Son objetos que podríamos denominar, como lo menciona Martí (2003), semióticos o representativos. En la gran mayoría de las culturas, las actividades humanas se apoyan en diferentes sistemas externos de representación como la escritura, las representaciones figurativas (basadas en la imagen), la notación numérica o el sistema vehiculado por las tecnologías de la información y la comunicación. Dichas representaciones son a la vez objetos físicos compuestos por una serie de marcas visibles organizadas en un espacio bidimensional, y a la vez son objetos que remiten a otra realidad y que la significan de modo peculiar. De ahí que se les pueda denominar "*representaciones externas*".

Todos estos sistemas de representación sirven como mediadores semióticos de la actividad humana. El niño habrá de tomar estos sistemas de representación como objeto de conocimiento, habrá de desentrañar su significado y entender las principales reglas que los configuran. Es innegable que para ello cuenta con la ayuda y el soporte de los adultos competentes Martí, (2003).

Desde esta perspectiva, a continuación se describen los elementos socio-culturales mencionados anteriormente, específicamente en el ámbito de las matemáticas en general, reconociendo que la geometría forma parte de este sistema, para conocer cómo se da la construcción social de este dominio de conocimiento desde el punto de vista teórico.

3.2 El Aprendizaje de la Geometría como Construcción Socialmente Mediada

El aprendizaje escolar, y en particular el aprendizaje de los contenidos matemáticos, de los cuales forma parte la geometría, es un proceso de construcción socialmente mediada. Los alumnos aprenden a través de un proceso activo de elaboración de significados y de atribución de sentidos; proceso que se lleva a cabo mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas en contextos particulares culturalmente definidos, y en el que determinados artefactos e instrumentos culturales juegan también un papel decisivo. La construcción del conocimiento matemático es progresiva y negociada (Onrubia, Rochera, y Barberá, 1990).

Existen diversos factores que deben tomarse en cuenta dentro del entorno escolar para acercar a los niños a desarrollar bases sólidas matemáticas, en los que se encuentra el comprender el desarrollo intelectual, social y emocional de los niños. El que los niños tengan la oportunidad de participar en situaciones auténticas de aprendizaje donde puedan interactuar con su medio ambiente, construir, modificar e integrar ideas, les permite resolver problemas de maneras significativas, aprender a trabajar en equipo, utilizar variedad de materiales culturales y manipulables, recibir orientación por parte del docente a través de una serie de preguntas que movilicen sus conocimientos y su razonamiento, lo cual se aprecia en su discurso y pensamiento, por lo que los niños pueden verse a sí mismos como “hacedores” de matemática: matemáticos. Lo importante es que los niños puedan establecer por sí mismos conexiones entre sus experiencias previas y los conceptos matemáticos que se enseñan en el aula, reestructurando algo que ya saben, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para reinvertirlo en una nueva situación (Cabrera y Sosa, 2006).

Otra herramienta importante es la verbalización de los conocimientos mediante la cual los alumnos son capaces de exponer sus ideas y organizarlas con la experiencia de

sus compañeros, lo cual posibilita adueñarse, solidificar ideas, conceptos y procesos como base para el futuro, pues en el mundo real la resolución de problemas exige el pensar, no se basa en un proceso memorístico sino más bien se utilizan y se ponen en práctica los conocimientos previamente adquiridos. A diferencia de los métodos tradicionalistas de resolución de problemas donde se hace énfasis en “enseñar” algoritmos, datos y reglas, en vez de permitir que los niños construyan su propia comprensión, limitándolos a enfrentarse a nuevas situaciones de la vida cotidiana.

Actualmente, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han convertido en uno de los dominios específicos más estudiados por la investigación psicoeducativa. Para abordar su enseñanza en la Educación Inicial, se ha considerado plantear la exigencia de presentar los conocimientos como una herramienta para resolver problemas, orientándola en dotar a los alumnos de conocimientos y habilidades para que aprendan a valorar las matemáticas, se sientan seguros con las habilidades con las que cuentan para crear las matemáticas, aprendan a resolver problemas matemáticos, a comunicarse matemáticamente y, a su vez aprendan a razonar matemáticamente. Sin embargo, a menudo es confundida como una forma estática orientada hacia las respuestas (Rowan y Bourne, 1999; Cabrera y Sosa, 2006; Onrubia, Roquera, y Barberá, 1990).

En las experiencias escolares la mayoría de las veces los alumnos son llevados a encontrar y a aprender unas matemáticas que solamente tiene sentido para el que la enseña, impidiéndoles construir su conocimiento matemático por el gusto de poseerlo, es decir, duradero y estable, sino para el uso escolar solamente, de esta forma el aprendizaje se revela superficial y momentáneo, es decir, inútil (Cabrera y Sosa, 2006). El rol del profesor es esencial para el encause de la temática que se está trabajando, ya que será éste quien acerque a los alumnos a construir su comprensión, y por ende, que no se aparten de los objetivos. A la vez el docente estará encausado a procurar y desarrollar situaciones significativas de aprendizaje que favorezcan que los conceptos

sean interiorizados por los alumnos. Por lo que será necesario exponer a los alumnos a situaciones problema que los lleven a crear sus propias ideas y comprensiones del sistema a través de la experiencia, construir bases sólidas para afrontar problemas más complejos. De igual manera, los maestros antes de implementar el programa en acción deben entender el significado del conocimiento de la matemática, es decir, manejar con fluidez y habilidad los conceptos esenciales de esta disciplina. Esto no significa que el docente deba ser un experto matemático sino más bien debe reconocer la disciplina como una *actividad dinámica* en la cual las personas sean capaces de comprender formas, dimensiones y patrones de un modo personal (Rowan y Bourne, 1999).

Una de las grandes limitantes de la enseñanza actual de las matemáticas es el gran énfasis que ponen en querer que todos los alumnos de un mismo grado trabajen hacia el mismo objetivo, al mismo tiempo y de la misma manera, generando un mismo producto: una respuesta correcta; habiendo niños que son capaces de entender los conceptos que se les enseñan pero que son incapaces de darles sentido a los procedimientos específicos cuando se les pide que los usen, en este sentido se ha observado, que los niños son más capaces de aprender cuando sus maestros les proporcionan la oportunidad de construir sus propios conocimientos.

Una forma de revolucionar el sistema tradicionalista de la enseñanza de la matemática es el orientarla hacia encuentros con situaciones de la vida real que inspiren en los niños el poner en práctica sus propios conocimientos y a su vez proponer soluciones creativas a los problemas, es decir, desde un enfoque más constructivista en el que se le da a cada alumno la oportunidad de construir sus propias comprensiones de los procesos matemáticos, propiciando un ambiente de aprendizaje favorable para que puedan compartir ideas, poniendo mayor énfasis en el proceso que los lleva a ésta construcción y transferencia de conocimientos a otras situaciones extraescolares, lo cual permitirá que los niños encuentren las soluciones a los problemas con los que se

encuentran en sus vidas diarias (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson, 1999, citados en Forman y Ansell, 2002).

El objetivo de un enfoque sociocultural es explicar, por un lado, las relaciones entre las acciones humanas, y por el otro, la situación cultural, institucional, e histórico en el que se produce esta acción (Wertsch, del Río y Álvarez, 1995, p. 11).

Desde este mismo enfoque Van Oers (2001, p. 71; citado en Jaworski y Potari, 2009), siguiendo la Teoría de la actividad de Leontiev, menciona que el concepto de *la actividad* se refiere a "cualquier motivación orientada a objetos de la empresa humana, que tiene sus raíces en la historia de la cultura, y en función de su incidencia real sobre las acciones específicas orientadas a objetivos". Específicamente, se refiere a la **actividad matemática** como "una manera abstracta de referirse a las formas de actuar que los seres humanos han desarrollado para hacer frente a las relaciones cuantitativas y espaciales del entorno físico y cultural". Por su parte Daniels (2001), menciona que dicha actividad tiene una función de desarrollo, es decir, se caracteriza por la transformación y el cambio constante, se guía por un motivo y es una formación colectiva y sistémica que tiene una estructura compleja mediacional. En dicha **actividad matemática** se requiere del uso de signos o herramientas culturales los cuales por si mismos parecen muertos, pero en **uso toman vida y sentido** (Wittgenstein, 1958; citado en Roth, 2005). La ciencia sin inscripciones, tal como lo conocemos hoy en día, no podría existir, porque las **inscripciones matemáticas**, incluyendo gráficos, ecuaciones, estadísticas y tablas, son un aspecto central y constitutivo de la ciencia, por lo que su uso es esencial para el estudio de la alfabetización matemática (Roth, 2005).

Los sistemas culturales, como lo son las matemáticas, adquieren sentido dentro de actividades que van dirigidas a una meta y las habilidades cognitivas matemáticas se ven favorecidas cuando las personas se integran a actividades sociales. En este sentido, Saxe (2002) pone un énfasis especial en decir que los artefactos o herramientas culturales se transforman en los medios para lograr una meta y dicha transformación se

da dentro de una actividad propositiva, en la cual el artefacto no es inherentemente matemática. Duval (1999 y 2006, citado en Trigueros, M. y Martínez-Planell, R., 2010), argumenta que los procesos de pensamiento de las matemáticas requieren no solo el uso de los sistemas de representación como herramientas culturales, sino también de su coordinación cognitiva. Es decir, la *comprensión* y el *aprendizaje* de las *matemáticas* requieren la comparación de las *representaciones semióticas similares*; considerando dos diferentes tipos de **transformaciones** de representaciones semióticas: tratamientos, que son transformaciones de representaciones que suceden dentro de la misma representación de registro, y las **conversiones**, que consisten en cambios de registro de representación sin cambiar el objeto que se está denotado. Así mismo, sostiene que estas transformaciones son la fuente de muchas dificultades en el aprendizaje de matemáticas, y que considerándolas ayuda a superar esas dificultades.

Un **ambiente de aprendizaje** apoyado en el **uso** de los gráficos y otras inscripciones matemáticas, como herramientas culturales, no solo son familiares por que se viven, también permiten la articulación de uso y, por lo tanto, producen la **reflexión** y promueve la **comprensión** (Noss y Hoyles, 1996, citado en Roth, 2005). La **familiaridad** que viene con el uso diario constituye la comprensión de quienes los utilizan. Los gráficos y otras inscripciones matemáticas son significativos debido a que son una parte integral del uso, siempre situado. De igual manera los gráficos proporcionan oportunidades para hacer prácticas de trabajo visible, reflexionar sobre él, y por lo tanto aumentar la comprensión del mundo vivido relacionado con el trabajo (Roth, 2005). La función de los detalles contextuales que relacionan los gráficos y otras inscripciones matemáticas con el mundo con el que los usuarios están íntimamente familiarizados saben y entienden, es de por sí significativo. Ser capaz de utilizar una herramienta y poder describir estructuralmente su uso, son considerados como diferentes tipos de conocimiento (Bourdieu, 1990, citado en Roth, 2005).

Las **acciones de los matemáticos** están motivadas por la representación matemática y ella está en sintonía con la producción de una mayor representación y conocimiento matemático, que se "consume" en la comunidad de los matemáticos; por lo que los niños necesitan crear estos mundos sociales y materiales en los que **son parte integral** (Roth, 2005).

A partir de lo anterior, en el surgimiento del aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría como parte de este sistema, está dado a partir de la participación de los niños en actividades matemáticas (geométricas) significativas que implican que realicen acciones matemáticas que requieren el uso de sistemas semióticos tanto simbólicos como materiales, los cuales adquieren sentido dentro de dicha actividad, siendo estos el lenguaje matemático y los esquemas o gráficas en los que están inscritas las características del mundo real representado, para solucionar problemas del entorno físico. En este proceso de construcción de significados matemáticos es relevante resaltar que el rol de la docente que implica el acercamiento de este sistema de conocimiento a los alumnos para favorecer su comprensión de las matemáticas y la geométrica así como la construcción de bases sólidas matemáticas a partir de la negociación y la interacción social; dicha comprensión funciona como una herramienta para pensar matemáticamente. El pensamiento matemático y geométrico no puede surgir si no hay un sistema semiótico de por medio.

Así mismo, resulta importante considerar a continuación diversas investigaciones que indagan sobre el proceso de aprendizaje de la geometría, que es uno de los aspectos de este pilar de la educación, el cual se ha descuidado en gran manera por la complejidad del mismo.

4. EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA: COMPRENSIÓN Y DOMINIO DEL SISTEMA DE CONOCIMIENTO EN NIÑOS DE EDUCACIÓN BÁSICA

“...cuanto más ayudemos a los niños a tener sus ideas brillantes y a sentir satisfacción por ello, más posible será que algún día tengan ellos algunas que a nadie se les ocurrió jamás.”

(Eleanor Duckworth)

La riqueza de la geometría en nuestros **entornos físicos** ofrece oportunidades productivas para que las personas desarrollen el conocimiento geométrico complejo, que no se parece nada a la geometría formal que se enseña y es aprendida en el ámbito escolar. Millroy (1992), considera que la comprensión de conceptos geométricos se puede expresar de diferentes maneras, a través de una apreciación de la estética en el diseño y en la creación de un sentido de equilibrio, por ejemplo, el diseño, el arte, la arquitectura o los muebles; así mismo, la conceptualización y expresión de la misma no está limitada por procedimientos y cálculos como en la aritmética.

Al hablar de geometría es importante señalar que para los niños pequeños el *espacio* es, en principio, desestructurado, un espacio subjetivo, ligado a sus vivencias; a sus acciones. Las experiencias tempranas de *exploración del entorno* les permiten situarse mediante sus sentidos y movimientos; conforme crecen aprenden a desplazarse a cierta velocidad esquivando eficazmente los obstáculos y, paulatinamente, se van formando una *representación mental* más organizada y objetiva del espacio en que se desenvuelven (Sperry, 2000).

Dado que el niño *construye el espacio reconociendo los objetos* a través de todos los sentidos; al principio reconoce los objetos tridimensionales: pelotas, cubos, muñecos, para luego identificar las figuras bidimensionales: las formas geométricas planas. Esto

manifiesta el significativo recorrido que va desde lo espacial al plano (Duhalde y González, 1997).

La construcción de nociones de espacio y forma en la educación preescolar está íntimamente ligada a las experiencias que propician la *manipulación y comparación* de materiales de diversos tipos, formas y dimensiones, la *representación y reproducción* de cuerpos, objetos, figuras, y el reconocimiento de sus propiedades. Para estas experiencias el dibujo y las construcciones plásticas tridimensionales constituyen un recurso fundamental. Los niños utilizan el espacio y construyen conocimientos prácticos que les permiten dominar sus desplazamientos y construir sistemas de referencias, en el *uso real* del espacio. Por tanto, *la geometría representa para los niños identificar, conocer y entender el espacio en el que se desenvuelven, así como, comprender qué cosas son capaces de asimilar de ese mundo que los rodea* (Broitman y Itzcovich, 2003).

De igual manera, el *pensamiento geométrico y espacial* se manifiesta en las capacidades de razonamiento que los niños utilizan para establecer relaciones con los objetos y entre los objetos, relaciones que dan lugar al reconocimiento de atributos y a la comparación, con base en los conceptos de espacio y forma, desarrollando la capacidad, por ejemplo, de estimar distancias que pueden recorrer, así como reconocer y nombrar los objetos de su mundo inmediato y sus propiedades o cualidades geométricas (figura, forma, tamaño), lo cual les permite utilizar referentes para la ubicación en el espacio (SEP, 2011).

De acuerdo con la *teoría sociocultural*, cuando el niño entra al preescolar ya es capaz de utilizar la geometría (por ejemplo, para separar una de las demás partes del espacio), permitiéndole establecer las primeras operaciones o transformaciones geométricas, al mismo tiempo que puede observar las propiedades de las figuras geométricas. Con las nociones básicas relacionadas con la orientación del espacio, las propiedades de las figuras y cuerpos, el niño es capaz de *tomar conciencia* de la relativa

posición de los objetos respecto a sí mismo como punto de referencia, y con respecto a otros objetos, además de tener un correcto conocimiento de su propio esquema corporal. También es capaz representar un espacio tridimensional en uno bidimensional, así como identificar las formas de transformaciones de figuras y cuerpos geométricos (Mira, 1998).

Como vemos, el niño de edad preescolar ya es capaz de entender muchas de las nociones relacionadas con la geometría; por ello, la institución educativa debe considerar todas éstas nociones que los niños ya traen y que además ya utilizan en sus **actividades diarias**, siendo importante recalcar que la tarea que le queda a la docente es introducirlos a la reflexión acerca de aquello que ya hacen y utilizan, es decir, *hacerlos conscientes* de que aquello sobre lo que ya tienen un conocimiento práctico es parte de “*algo*” llamado *geometría*, formalizando así sus conocimientos; lo que hará la diferencia entre el aprender y el repetir (Mira, 1998). Es así como la geometría ayuda al niño a entender el mundo en el que vive, de ahí la importancia de abordarla de manera significativa en el preescolar, enseñándola en situaciones que tengan sentido para los niños permitiéndoles construir su propio conocimiento geométrico.

Algunos autores en sus investigaciones retoman las ideas de van Hiele quien menciona que el aprendizaje de la geometría se da por niveles de razonamiento geométrico, en donde cada nivel se caracteriza por habilidades de razonamiento específicas e importantes, por lo que un alumno no podrá avanzar de un nivel a otro sin poseer esas habilidades, ya que en un determinado nivel se explicitan y toman como objeto de estudio los conceptos, relaciones y vocabulario usados en el nivel anterior, incrementándose así la comprensión de los mismos. Además, según van Hiele, *el que un alumno llegue a un nivel de razonamiento en un contenido geométrico no asegura que, frente a otro contenido nuevo para él, pueda funcionar con el mismo nivel. Es probable que tenga que recurrir a formas de razonamiento de los niveles anteriores según un orden de complejidad creciente.* En la teoría de van Hiele se afirma que para conocer en qué nivel de razonamiento se encuentra un alumno, es necesario atender tanto a sus

estrategias de resolución de problemas como a su forma de expresarse y al significado que le da al vocabulario que escucha, lee o utiliza para expresar sus conocimientos (Bressan, 2000).

Bajo esta misma línea, otras investigaciones consideran como una característica muy importante el que cada nivel tenga su propio idioma, conjunto de símbolos y red de relaciones, que permitan que lo que en un nivel está implícito, se convierta en explícito en el siguiente, de manera que el material que esté por encima de su nivel deberá estar sujeto a un ajuste para reducir su “complejidad” para garantizar el progreso de un nivel a otro (Fuys, Geddes y Tischler, 1998).

Sin embargo, hay otros estudios que contrastan con los anteriores, que concluyen que no puede ser viable que un nivel este puramente seguido de otro. En su lugar, sugieren que los diferentes *tipos de razonamiento* que caracterizan a los diferentes niveles, pueden coexistir en un individuo y desarrollarse al mismo tiempo, pero a ritmos diferentes y por caminos diferentes. Esta visión implica una concepción diferente de los niveles de pensamiento geométrico y del desarrollo de los estudiantes de estos niveles (Clements, Battista y Sarama, 2001).

Considerando la importancia de cómo surge el aprendizaje de la geometría, en los siguientes apartados se muestran diversas investigaciones con el objetivo de proporcionar datos empíricos que puntualizan la influencia de algunos factores que favorecen el desarrollo del razonamiento como son la diversidad **cultural**, la habilidad de dibujo que afecta de alguna manera la capacidad de Representación 3D; mostrando también la influencia de las diferencias individuales y de género que según diversas investigaciones influye en el aprendizaje de la geometría, al igual que los **intermediarios sociales** como la interacción del docente con el alumno. De igual manera, estas investigaciones realizadas con niños en edades tempranas proveen evidencias de cómo es el pensamiento de los niños con respecto a la geometría, qué es lo que saben de este

sistema y qué hacen a partir de lo que ya conocen, al estar involucrados en situaciones de aprendizaje en las que ponen en juego sus conocimientos, es decir, los conocimientos y capacidades cognitivas que poseen, así como las formas de razonamiento geométrico que emplean sobre algunos problemas. Otras fundamentan la capacidad que tiene el niño, en edades iniciales, de desarrollar ciertas formas de pensar geoméricamente, así como de aprender nociones geométricas para entender e interpretar el mundo que lo rodea (proceso de Matematización).

4.1 Factores que Favorecen el Desarrollo del Razonamiento Geométrico

Es importante considerar y reflexionar sobre la influencia que tienen, diversos factores en el surgimiento y desarrollo del razonamiento geométrico, y la construcción de formas de pensar complejas en los alumnos, mostrados en investigaciones empíricas como son: la cultural en la cual están inmersos los niños y que influyen en sus formas de pensar, la habilidad de dibujo con la que cuentan los niños al momento de realizar representaciones planas de cuerpos 3D, las diferencias individuales y de género, así como también los intermediarios sociales.

4.1.1 La Diversidad Cultural y las Formas de Pensar Geométricamente.

En el mundo existen diversas culturas, las cuales tienen un sistema en particular al que tienen acceso los individuos que participan en ellas y que influye en su forma de pensar. Es decir, las personas piensan sobre un sistema semiótico el cual utilizan y les permite la realización y el logro de una actividad social en particular.

En estudios realizados en América, África y Asia se ha observado que en la geometría hay una fuerte influencia del entorno y de las tradiciones culturales en la forma de realizar representaciones planas. En pueblos aislados de la India, Mukhopadhyay (1987, citado en Hershkowitz, 1990) encontró, en niños de 8 y 12 años de edad con muy

poca o ninguna escolaridad, grandes diferencias al realizar las representaciones de un cilindro y una pirámide, debido a la diversidad cultural y a las actividades sociales que se realizaban en cada una de ellas como tejer, alfarería, granjeros (ver Figura 5), concluyendo que estas diferencias se deben a la existencia de convenios de origen tradicional sobre la forma de interpretar determinados símbolos o dibujos. Naturalmente, cuando se analizan las representaciones basadas en unos convenios desde la perspectiva de otros convenios, se encuentran “errores” y se producen valoraciones cualitativamente más bajas.

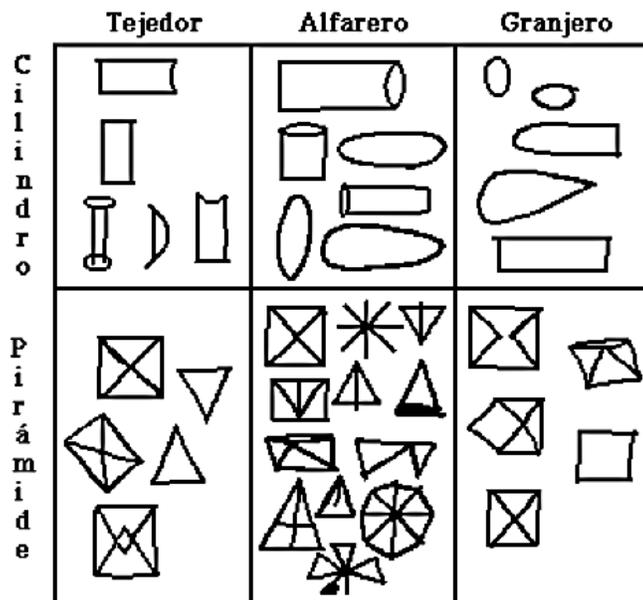


Figura 5. Representaciones de los mismos sólidos por niños de diferentes ocupaciones.

Gutiérrez, (1998) señala que el reconocer la existencia e influencia de este factor puede ser de gran importancia en la planificación y diseño de actividades curriculares, pues utilizar ideas o métodos de enseñanza de éxito en otros países culturalmente diferentes puede dar lugar a la incomprensión de los estudiantes por el choque entre sus concepciones culturales y las subyacentes en los libros de texto.

Con respecto a las representaciones que realizan los niños, también se ha encontrado que la habilidad para dibujar que posee un niño es un factor que afecta parcialmente en la capacidad de representar de manera bidimensional un cuerpo de tres dimensiones. Un estudio realizado con niños de 6º grado de primaria muestra que una niña al realizar la representación plana de un sólido se da cuenta de que al dibujarlo ha cometido varios errores cuando lo compara con el real y realiza las correcciones borrando las líneas de su representación, volviendo a trazar el sólido lo más parecido al real. Esto, según Gutiérrez (1998), muestra que el problema está parcialmente en la poca habilidad de coordinación que tienen los niños, considerando que la habilidad para dibujar es un factor que afecta realmente a la capacidad de hacer representaciones de sólidos, y por tanto los educadores deberían tomar en cuenta que esta habilidad se da de manera espontánea, sino con la práctica constante.

La evidencia anterior muestra que las concepciones que tienen los niños no son naturales, surgen por estar inmersos en una comunidad social con una cultura específica, en la que realizan actividades particulares y en las que se ven en la necesidad de solucionar problemas para los que crean un sistema geométrico de representación con el cual puedan interpretar símbolos y dibujos. Dicho sistema les permite desarrollar formas de pensar particulares sobre la geometría. Así mismo, es importante mencionar que la habilidad de representación puede ser un factor que afecte la representación gráfica de los cuerpos tridimensionales a un plano bidimensional, pero hay que resaltar que si hablamos de una habilidad motriz esta se va desarrollando con la práctica, pero la representación mental que el niño puede hacer al momento de interpretar la representación gráfica no tendría que verse afectada porque la concepción del símbolo geométrico está en la mente del individuo.

4.1.2 El Docente como Intermediario Social

Otro de los factores que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se refiere a los intermediarios sociales, los cuales por su naturaleza social intervienen en la interacción con los individuos, como por ejemplo, el docente y/o compañeros que participan como expertos con el fin de negociar con el inexperto, para que éste comprenda las metas de los problemas y los medios coherentes para alcanzar esas metas. De igual manera, mencionan que para desarrollar el sentido de términos estadísticos, los alumnos deben ser partícipes en los procesos matemáticos como definir, ejemplificar, construir, estimar, calcular y matematizar, de tal modo que sean los estudiantes los que analicen críticamente y reflexionen sobre lo que hacen. Así mismo, consideran que en la interacción el *desafío* que se les presente a los alumnos debe ser apropiado para el pensamiento y las necesidades de cada uno involucrándolos en tareas creativas que los motiven para que puedan comprender el objetivo de la actividad.

En un estudio realizado por Jaworski y Potari (2009) en una escuela secundaria en la zona Rural de Inglaterra, consideran la *enseñanza* como una *actividad compleja* y parten de la dicotomía entre la *resistencia* y la *productividad* de los alumnos al realizar las actividades matemáticas (estadística). En tal estudio, respetaron las tradiciones británicas en las que se agrupaban por logro académico a los alumnos del grupo en dos equipos, el de los “superiores” y el de los “inferiores”, porque consideraban que esto les permitía dar un mayor apoyo a los alumnos con habilidades inferiores. De estos grupos se seleccionaron a 14 estudiantes de 15 años de edad, pertenecientes al grupo inferior académicamente, para analizar los episodios de las clases. La actividad consistió en 3 episodios; la tarea oral en la que los niños debían hacer la búsqueda de términos matemáticos en el diccionario y discusión en el aula (promedio, media, mediana, moda); tarea de cartas en la que relacionaban los términos matemáticos con ejercicios y problemas escritos en tarjetas; y el desafío, en el que los alumnos debían crear sus propios ejemplos y problemáticas que se relacionaran con los términos matemáticos que

estaban empleando. De la misma manera, se favoreció el trabajo en grupo y en parejas, teniendo como objetivo principal que los alumnos comprendieran y participaran haciendo matemáticas, desarrollando con ello habilidades matemáticas.

Jaworski y Potari (2009), mencionan que a pesar de que la tarea era fácil, desde el punto de vista cognitivo, los alumnos mostraron cierta resistencia para elaborar dicha tarea debido a factores sociales, culturales y emocionales que desempeñaron un papel importante en su trabajo, reflejando una profunda “sensibilidad social” en la apreciación de lo que es posible para los alumnos o la cantidad de ayuda que pudieran necesitar para alcanzar los objetivos docentes. Por otro lado, los estudiantes mencionaron que participar en tareas creativas, como juegos, es agradable y muy bueno en la enseñanza; que la motivación que les proporciona el docente cuando tienen un problema los ayuda resolverlos. En el caso de los niños que en un inicio se mostraron renuentes y expresaban que “no podían hacer matemáticas”, y que, además no participaron del todo dentro de la actividad, al final realizaron las actividades debido a la mediación, al ajuste de las ayudas y cuestionamientos proporcionados por el profesor.

Es importante señalar que en estas actividades el designar a los alumnos académicamente bajos en un grupo y a los altos en otro grupo no es lo más apropiado, sino que, por el contrario, colocar a los alumnos bajos con los más altos favorece el desarrollo de capacidades superiores debido a la interacción que existe entre pares o se genere dentro de dicha actividad. Es importante señalar que la búsqueda de términos matemáticos no es como tal una actividad significativa para los alumnos, ni favorece el desarrollo de habilidades de reflexión, porque el juego de cartas termina por ser una actividad descontextualizada en la que únicamente tienen que realizar relaciones entre conceptos y sus definiciones en un problema. Es decir, es indispensable considerar que la motivación viene de la misma actividad en la que participa el individuo.

En otro estudio realizado por Goss (2004), sobre el efecto que tiene el papel docente en el aprendizaje, en una escuela secundaria de Queensland, Australia, cuyo objetivo fue examinar el papel del maestro para la creación de una cultura de investigación en la clase de matemáticas, en 14 estudiantes de edades entre 16 y 17 años, se encontró que el docente realiza diferentes acciones entre las cuales destacan que: 1) modela el pensamiento matemático mediante un diálogo formal para impulsar la participación de los alumnos; 2) invita a los estudiantes a tomar conciencia de los contenidos, proporcionándoles los pasos intermedios o finales en las soluciones o los argumentos; 3) considera y usa el juicio de sugerencias de los estudiantes al tiempo que motiva los comentarios o críticas por parte de otros estudiantes. Ante esto, los estudiantes comienzan a ofrecer conjeturas y justificaciones sin que el maestro pregunte, y durante la clase de discusión exponen sus argumentos entre ellos mismos, logrando usar estrategias que los ayudan a entrar a la cultura de las matemáticas.

En conclusión, el intermediario social influye directamente en la forma de pensar de los estudiantes, modelando el pensamiento matemático de cada alumno mediante un dialogo formal. Al ser el docente el intermediario social, el tipo de interacción que se establece, es sin duda un elemento central dentro de los contextos educativos, ya que fundamentalmente es la figura experta más cercana que interviene entre las relaciones del mundo físico, social y personal que tengan los alumnos. En este sentido, el docente se convierte en una persona que puede mediar la relación de los alumnos con su realidad, para que paulatinamente cada individuo logre incorporarse a su sociedad, manejando y dominando los diversos tipos de interacciones interpersonales, además de aquellos saberes simbólicos, culturales que forjan el mundo que lo rodea.

4.2 Conocimientos y Capacidades Cognitivas del Razonamiento Geométrico en los Niños de Educación Básica.

En el presente apartado se considera relevante indagar sobre los conocimientos y capacidades geométricas que poseen los niños en educación básica, en términos de razonamiento geométrico, que nos permita conocer cómo ha sido abordado el desarrollo de dicho razonamiento en investigaciones empíricas que apoyan este aspecto de las matemáticas, encontrando las diferentes formas en las cuales los niños realizan representaciones planas de cuerpos tridimensionales (3D); la clasificación de objetos geométricos a partir de la consideración de sus propiedades geométricas, como constitutivas del discurso; el uso de propiedades geométricas en la realización de representaciones bidimensionales (2D); así como la comprensión y el uso de representaciones externas simbólicas geométricas a partir de la instrucción.

4.2.1 Representaciones Planas de Cuerpos 3D

En diversos estudios realizados en primaria y secundaria se han encontrado que existen diversas formas de representaciones planas de cuerpos tridimensionales utilizados frecuentemente en geometría espacial (cubos, prismas, pirámides, cilindros, etc.) y el “módulo multicubo” el cual es un sólido formado por varios cubos iguales pegados de manera que sus caras se superponen (figura 6).

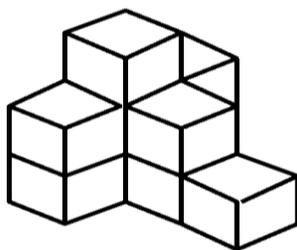


Figura 6. Módulo multicubo

Gaulin y Puchalska (1987, citados en Gutiérrez, 1998) mencionan que entre las representaciones más frecuentes en el contexto de la geometría se encuentran: *la representación por niveles*, la cual consiste en hacer al sólido diversos cortes paralelos, por puntos significativos (en el caso del módulo multicubo, por cada plano de cubos); y *las proyecciones en perspectiva*, que representa nuestra visión real de los cubos, en la que las aristas más distantes se ven más pequeñas y las líneas paralelas que se alejan se ven convergentes; *la paralela* (caballera), que es análoga a la perspectiva excepto en que las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, pero independientemente de su dirección, distorsionando la visión real de los sólidos; *la isométrica*, la cual es un caso particular de paralela, en la que los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de determinado vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120° ; *la proyección ortogonal y ortogonal codificada*, la primera está formada por tres proyecciones de los sólidos sobre tres planos ortogonales (como el rincón de una habitación) y la segunda, únicamente añade algún tipo de código que aporta información adicional en este caso, la cantidad de cubos de cada fila (ver figura 7).

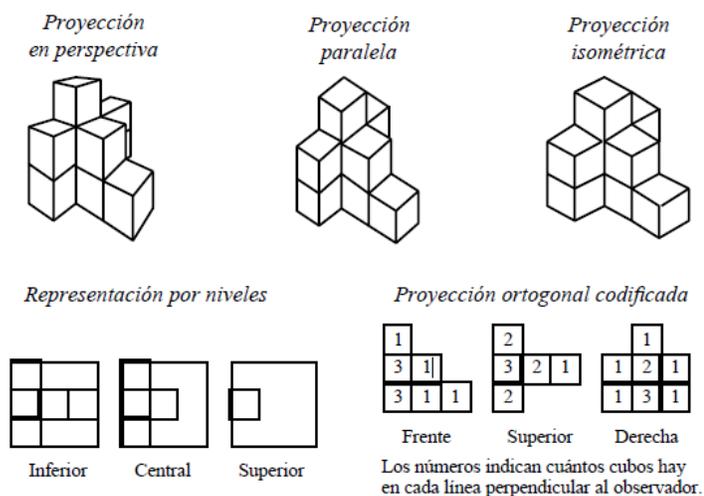


Figura 7. Representaciones planas de un módulo multicubo

Por su parte, Mitchelmore (1976, 1980), intenta describir el desarrollo y evolución de la habilidad de representación en perspectiva, proponiendo la existencia de cuatro etapas (de tipo *piagetiano*) las cuales se describen a continuación (Figura 8):

- **Etapa 1: Esquemática plana:** Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente.
- **Etapa 2: Esquemática espacial.** Las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente y, a veces, incluyendo caras ocultas. Pero estas representaciones siguen sin dar sensación de profundidad.
- **Etapa 3: Pre-realista.** Los dibujos muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad, aunque sin conseguirlo plenamente. Esta etapa está dividida en dos sub-etapas, cuya diferencia está en la perfección de los dibujos en cuanto a su tridimensionalidad.
- **Etapa 4: Realista.** Los dibujos son bastante correctos y siguen, aunque sea aproximadamente, las reglas del dibujo en perspectiva, en particular las referentes a las líneas que convergen en un punto del infinito.

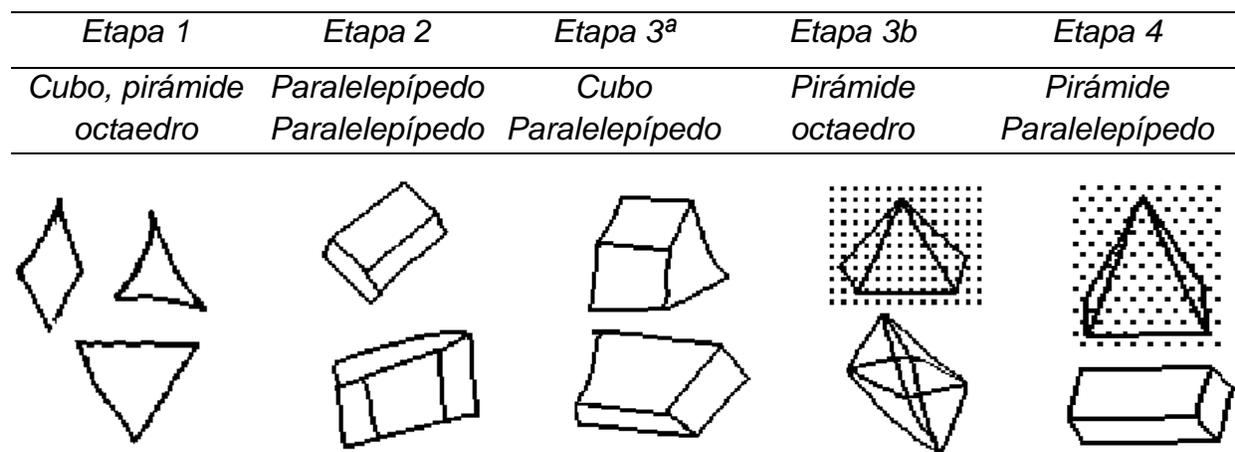


Figura 8. Etapas del desarrollo y evolución de la habilidad de representación en perspectiva

Gutiérrez (1998), señala que en investigaciones realizadas con niños de primaria ha encontrado que las representaciones por niveles son las más fáciles tanto para dibujar

como para construir, encontrando que niños de 2º de primaria de 7 y 8 años de edad que trabajan con el módulo multicubo, pueden llegar a dibujar representaciones por niveles y a construir los sólidos representados correctamente, aunque en un principio no entienden el marco de referencia porque no relacionan unos niveles con otros, dejando ver su incapacidad para coordinar las diferentes partes de su representación aun cuando se les proporcionen diferentes plantillas con cuadrícula para colocar cruces en los cuadros apropiados y lo hagan correctamente, no lo realizaban en las hojas en blanco. Al darles representaciones de distintas proyecciones ortogonales se ha encontrado que a partir de 4º de primaria los estudiantes empiezan a ser capaces de coordinar estas proyecciones en casos sencillos o con ayuda del profesor, y que en 8º curso la mayoría de los estudiantes son ya capaces de construir por sí mismos los sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales aunque aún se presentan ciertas dificultades en los casos más difíciles. En los cursos superiores las dificultades desaparecen al poco tiempo de iniciada la enseñanza sistemática de estas formas de representación.

También encontraron que el diálogo es una herramienta fundamental al momento de realizar algún tipo de representación, al observar a una estudiante de 6º grado de primaria que mantiene un diálogo cuando intenta dibujar el módulo multicubo que está apoyado en la mesa delante de ella con números correspondientes a cada cubo. A lo largo del diálogo queda patente que la estudiante analiza correctamente el módulo pero no es capaz de dibujar las caras de los cubos en la posición correcta. Tras varios intentos, la estudiante no sabe cómo empezar el dibujo, por lo que el profesor le dibuja el cubo nº 1 y le pide que asocie las caras, aristas y vértices del dibujo con las correspondientes del cubo real, cosa que hace correctamente sin dificultad. Después de algunas explicaciones, la estudiante ya comprende que las caras de los cubos deben dibujarse siempre como rombos con los vértices en los puntos de la trama.

Por otro lado, se muestra que el dibujo de *representaciones isométricas* está fuera de la capacidad de los niños de los primeros grados de primaria. Solo en 5º o 6º grado la

mayoría de los alumnos empieza a poder dibujar estas representaciones requiriendo poca ayuda, y es a partir del 8º grado (secundaria) cuando la mayoría de ellos puede comprender y aprender en poco tiempo el uso correcto de esta forma de representación.

A manera de resumen, es importante señalar que la actividad de representación es descontextualizada y únicamente se realizan las representaciones sin tener una meta en particular o para un uso específico. Aunque deja ver claramente algunos de los posibles niveles de representación que logran los niños al dibujar un cuerpo tridimensional y resalta la importancia del diálogo en la representación para aclarar el análisis que está teniendo el niño que representa. Dichos niveles no pueden suponerse como secuenciales uno tras otro, éstos pueden aparecer en el curso del desarrollo de manera indeterminada.

4.2.2 Clasificación de Objetos Geométricos a partir de sus Propiedades Geométricas como Constitutivos del Discurso.

Existen diversas investigaciones interesadas en el desarrollo del razonamiento geométrico, que mencionaron que aunque los planes curriculares consideran el estudio de la geometría, dejan de lado la cuestión de cómo debe trabajar el docente en el salón de clases para que realmente sea una clase de geometría. Han encontrado que la división de trabajo colectivo entre docentes-alumnos favorece la reproducción del trabajo geométrico en niños de primaria, produciendo así un conjunto particular de prácticas geométricas como clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con sus propiedades geométricas. Dicha clasificación surge como un logro colectivo entre el docente y el alumno ya que el despliegue del cuestionamiento o *discurso ordenado* del docente permite que los estudiantes logren realizar colecciones de objetos y justificar el significado de las mismas en términos geométricos, es decir, usando un *discurso geométrico*; una lección completamente geométrica se logra cuando se usa la forma geométrica de los objetos (predicados geométricos) en lugar de otras propiedades geométricas.

En un estudio realizado por Roth y Thom, (2009) para comprender mejor las dimensiones internas y sociales de la aparición y el desarrollo del pensamiento geométrico, y cómo influyen la participación y las experiencias corporales en una tarea colectiva para que surja la clasificación geométrica, se analizaron 15 actividades sociales de la vida cotidiana diseñadas por el docente y los investigadores para ayudar a 23 niños (14 niños y 9 niñas) de 2º grado de primaria, que aún no podían clasificar objetos regulares haciendo uso de las *propiedades geométricas (predicados)*, en el aprendizaje de materiales e ideas pertenecientes a la geometría tridimensional. Las lecciones consistían en que los niños realizaran clasificaciones geométricas apropiadas y que aprendieran a diferenciar las características o predicados que constituyen los objetos de una colección a partir de la observación de acciones propias y de otros compañeros, realizando un trabajo colectivo. Este estudio siguió el enfoque de Cobb (1999; citado en Roth y Thom, 2009) quien está interesado en la elaboración de una *matemática reflexiva*, sabiendo que constitucionalmente los individuos se relacionan de forma colectiva. Se encontró que los niños aprenden sobre los objetos geométricos 3D a través de exploraciones en pequeños grupos y eventos de toda la clase.

La primera actividad implicaba clasificar objetos misteriosos de una bolsa en hojas blancas de las cuales algunas ya contenían un objeto y otras en las que podían crear nuevas colecciones emergentes, la única condición para clasificar era que podían poner etiquetas geométricas a las colecciones (cubo, cuadrado, tubos...) pero no podían utilizar palabras no geométricas como el color y el tamaño de los objetos. Se observó que los niños realizan observaciones para clasificar los objetos y al mismo tiempo usan el lenguaje al describir y analizar los diferentes objetos de 3D para explicar los motivos de sus selecciones, es decir, tenían que “hacer su propio pensamiento” sin recibir la ayuda de ningún compañero; usan también gestos, los cuales pueden indicar formas alternativas y más avanzadas de razonamiento matemático y la disposición para el desarrollo de expresiones lingüísticas a un nuevo nivel. Así mismo, en la clasificación los

niños generan categorías que sirven para clasificar más formas en términos de la estructura; es decir, realizan clasificaciones perceptuales de objetos materiales y dicha clasificación se puede expresar en términos de la *declaración predicativa*. Por otro lado encontrar las similitudes basadas en las propiedades de cada figura geométrica resulta problemática porque cuando se trata de contar (código) no saben por dónde empezar. Y a pesar de la aparente familiaridad que hay con la noción de propiedad ésta resulta ser tan tenue como la noción de semejanza según Quine (1987, citado en Roth y Thom, 2009).

Al clasificar encontraron que los niños también realizan *comparaciones físicas* entre objetos geométricos para encontrar diferencias, pero no logran explicar su pensamiento, que es guiado por el maestro, y decir realmente los motivos de cómo es que llegaron a una decisión, debido a que su clasificación es en perspectiva, considerando únicamente características no geométricas como el color y el tamaño de las formas. El docente propicia que los niños den una explicación geométrica al realizar cuestionamientos para saber si lo que hicieron puede hacerse de otra manera. En algunos casos los niños tienen preferencia por la *auto-reparación*, esto es, que reparan la elección (acción) y no la explicación (Schegloff, 1997, citado en Roth y Thom, 2009). Así mismo, durante la lección, las instrucciones y reglas de forma repetida son un recurso para la comprensión de que la clasificación tiene que repetirse, y cuando estos reajustes no se producen, la acción de clasificación puede considerarse como apropiada y compatible con las reglas; y al seguir participando los niños también logran *auto-corregir* sus acciones al observar la actuación de otro compañero. Según esta investigación, en esta línea de análisis la *reparación* podría ser uno de los aspectos más importantes en la producción de resultados de aprendizaje previstos, siguiendo la secuencia IREC (Inicio de la acción, Respuesta del niño sobre su acción, Evaluación por el docente siguiendo las reglas y la Corrección de las acciones que son incorrectas). En la medida que avanzan los cuestionamientos los niños logran mencionar la forma de las caras que conforman el cuerpo geométrico, por ejemplo, cuadrados haciendo referencia a los cubos. Una parte

central en el aprendizaje de la clasificación geométrica es la denominación de los objetos (predicados); Roth (2009) considera que los estudiantes participan sin saber, no tienen una intención para realizar sus acciones y poder compararlas en términos geométricos; para ellos, la lección se convierte en un recurso para encontrar la geometría con sus propias acciones al examinar objetos materiales en términos geométricos básicos.

Cabe aclarar que estas investigaciones únicamente consideran una actividad geométrica simple y descontextualizada, como es la clasificación de objetos misteriosos, en las que la división de trabajo es importante para lograr el reconocimiento de las propiedades geométricas, en las cuales la ayuda por parte de otro compañero no es permitida ya que ésta es importante para que construyan juntos sus pensamientos, y no de manera individual solo con cuestionamientos del docente hasta que el niño logre lo correcto y el docente quede satisfecho y sean compatibles con las reglas. Tal vez la regla de que los niños no clasifiquen por color y tamaño, en vez de ser una prohibición, podría ser una ayuda durante la enseñanza del juego.

Por su parte algunos investigadores como Piaget, Inhelder y Szeminska (1948; citados en Roth y Thom, 2009) muestran que en lo que refiere a las formas y conceptos geométricos simples, los niños de 4 a 5 años realizan colecciones pequeñas utilizando la base de las formas, hacen colecciones de figuras de las misma forma y cuando están más grandes logran hacer montoncitos de formas similares.

Es importante mencionar que el modelo que sigue Piaget se encarga únicamente de evaluar al individuo en desarrollo en términos de lo que no puede hacer en relación con el adulto racional experto, es un modelo de la deficiencia de la mente humana en desarrollo. Pero si bien es cierto, que los niños son tan racionales como lo adultos, ambos tienen diferentes recursos disponibles (perceptualmente) en su mundo y razonamiento. Es decir, mientras un niño realiza clasificaciones por color (*perspectiva perceptual*) un adulto logra realizar una clasificación desde una *perspectiva geométrica*

utilizando la forma de la figura; y esto no quiere decir que el niño sea irracional y deficiente (Roth y Thom, 2009).

Así mismo, existe otro modelo que se ha empleado para el estudio del desarrollo del pensamiento geométrico, el cual fue diseñado por van Hiele quien establece que dicho pensamiento tiene lugar en cinco niveles, sugiere también que en cada uno de los niveles los niños desarrollan un lenguaje específico para la tarea, haciendo hincapié en los procesos de aprendizaje que son específicos de determinados periodos históricos al considerar que el alumno se mueve a través de estos niveles de reconocimiento cada vez más sofisticados, los cuales son secuenciales, y para alcanzar un nivel superior los niños deben haber superado los niveles inferiores. Así mismo, describen que la mayoría de los niños de preescolar y kindergarten generalmente se encuentran ubicados en el primer nivel de **visualización** y **reconocimiento**, en el cual son capaces únicamente de reconocer figuras solamente por su apariencia física y realizar **clasificaciones** mediante la comparación de las formas con un prototipo; en este nivel los niños no atienden a los atributos que describen las formas geométricas (propiedades) como los lados y vértices, y consideran que es hasta el 3º y 4º grado de educación primaria cuando comienzan a definir una forma geométrica en función de sus propiedades, alcanzando el segundo nivel de análisis y descripción (Aslan y Aktas, 2007). Por lo tanto, si la clasificación, la identificación y la descripción de las formas son parte del primer nivel, y la clasificación de objetos usando las propiedades geométricas constituye el segundo nivel, los niños de 2º grado de primaria no pueden ser capaces de beneficiarse de instrumentos de clasificación con propiedades porque se dice que están en el primer nivel (van Hiele, 1986, 1999; citado en Aslan y Aktas, 2007 y en Roth y Thom, 2009).

Sin embargo, Clements, Battista y Sarama (2001) han encontrado que estos dos niveles, que van Hiele señala como dos cosas separadas, están fusionados y ocurren a la par en los niños. En sus investigaciones realizadas con 100 niños de preescolar de entre 3 y 6 años de edad, en la que tenían que reconocer formas geométricas básicas y

dar un argumento de las decisiones que tomaban, las actividades consistían en mostrarles laminas con figuras geométricas de triángulo, cuadrado, círculo y rectángulo, con ejemplos atípicos similares (poco familiares) a cada una de estas respectivamente, que únicamente diferían en la orientación, relación de aspecto, la asimetría y tamaño. Encontraron que la tarea de clasificación del círculo fue la más fácil seguida de la del cuadrado, el rectángulo, siendo el triángulo la figura más difícil. Considerando estos resultados afirman que el éxito de los niños en la clasificación de una forma geométrica disminuye a medida que aumenta el número de atributos no definitorios (no geométricos, solo de orientación, tamaño y aspecto); pero tienen mayor éxito en el reconocimiento de ejemplos típicos a dichas formas geométricas que a ejemplos atípicos. Algunos niños tuvieron dificultades en distinguir un triángulo por la orientación, mencionando que éste no era triángulo porque estaba mal colocado. Por otro, lado los niños fueron capaces de distinguir las formas que no pertenecían al grupo de una forma, tuvieron éxito en distinguir los distractores palpables (triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo, etc.,) que hacían que alguna forma no pertenecerá a ese grupo. Sin embargo, enfrentaron problemas para distinguir los distractores impalpables (lados curvos). En la tarea de triángulo, solo el 8% de los niños indicó el distractor poco palpable (cara cóncava) que hacia diferente a esa forma, y al cuestionarlos daban respuestas visuales: "es un cuadrado porque parece cuadrado". Fuys, Geddes, Tischler, (1988) en sus investigaciones han encontrado que aunque los estudiantes demuestren avances con respecto a la identificación de formas familiares, pueden tener dificultades con formas no familiares.

Es importante señalar que estas observaciones únicamente están considerando actividades simples de clasificación las cuales solamente abordan la identificación de propiedades no geométricas o como ellos las llaman poco palpables o atípicas para reconocer las figuras geométricas típicas. Además de que consideran el desarrollo del pensamiento geométrico en niveles, empleando habilidades específicas que ocurren, según su teoría, en un momento o nivel de desarrollo del niño y que estos son secuenciales ocurriendo de manera jerárquica, lo cual no necesariamente es así. Los

estudiantes pueden funcionar a múltiples niveles simultáneamente dependiendo de los detalles de la tarea, y pueden ir y venir entre los diferentes niveles y desplegarlos en función de la tarea (Roth y Thom, 2009).

4.2.3 Uso de Propiedades Geométricas en Representaciones de 2D

En diversas investigaciones realizadas se ha encontrado que los niños de preescolar interpretan la realidad utilizando la disposición geométrica espacial como una herramienta de referencia para localizar objetos, la cual aumenta con la edad, y cómo al momento de usar objetos reales como sistemas de referencia los niños no hacen uso de las propiedades geométricas porque refieren al nombre o a la cualidad de dicho objeto real (pino, nube azul). Mientras que cuando las referencias son abstractas, es decir, todas con la misma forma geométrica en particular, dan pie al uso de las propiedades geométricas ya que estos puntos de referencia están dispuestos en la forma de un triángulo aunque no aparezcan los lados del mismo, salvo en algunas ocasiones, resultando más eficiente cuando las propiedades (lados) geométricas están presentes de manera explícita, pero no cuando los niños son quienes las tienen que construir representándolas internamente porque están implícitas.

En el estudio realizado por Gibson, Leichtman, Costa y Bemis (2008) en el que observaron cómo los niños de 4 a 10 años de edad representan y utilizan la información geométrica, y cómo las propiedades geométricas pueden servir como marco de referencia en matrices de 2 dimensiones (2D) con objetos discretos inconexos (figuras geométricas sin contornos). Las sesiones tenían una duración de 20 minutos aproximadamente y cada niño era asignado de forma individual con un investigador que dirigía y otro más que registraba las observaciones; en algunos casos entraba un tercer investigador para registrar las respuestas. La actividad consistía en que los participantes observaran cómo un dibujo se escondía detrás de uno de los tres puntos de referencia que estaban dispuestos en las esquinas de un triángulo en la pantalla de la computadora,

en dos condiciones: la peculiar (características, aspecto), en la que el investigador no hacían uso de las etiquetas verbales para identificar los puntos de referencia (nube) y los participantes únicamente podían utilizar las características peculiares de los puntos de referencia que se encontraban en las esquinas de un triángulo equilátero cada uno con una forma única y color, para localizar el personaje oculto; y la condición geométrica en la que los puntos de referencia eran idénticos entre sí, y los participantes dependían de las propiedades geométricas de la forma del triángulo isósceles para localizar el personaje oculto. Dentro de esta condición se agregaron las líneas que unían los puntos de referencia idénticos para delinear y hacer hincapié en las propiedades geométricas. Se observó que en la primera condición, la búsqueda fue favorable en los niños de todas las edades independientemente de la ubicación del dibujo escondido, utilizando con eficacia las señales peculiares en la tarea de búsqueda de 2D. Mientras que en la segunda condición (geométrica) con y sin líneas que unieran los puntos de referencia, hubo un aumento nítido del rendimiento en relación a la edad; los niños de 9 a 10 años tuvieron mejor rendimiento y precisión de búsqueda, mientras que los niños de 4 años de edad tuvieron poca precisión de búsqueda cuando no contaban con las líneas, mejorando con la aparición de las líneas que conectaban los puntos de referencia. En general, los niños en edad **preescolar** tuvieron un uso pobre de información con sentido geométrico (ángulos y lados) para guiar su búsqueda. El rendimiento va mejorado durante los primeros años de primaria y en los años elementales más tarde, de 9-10 años. Por el contrario, los niños de 6 años de edad a veces eran capaz de utilizar una gran variedad de puntos de referencia discretos para localizar un objeto oculto. Mientras que los de 7 a 8 años eran tan competentes como los de 9 y 10 años en el uso de señales geométricas durante la condición de la geometría más líneas. Solamente los niños de 9 y 10 años de edad fueron capaces de utilizar y discriminar las señales geométricas proporcionadas por una serie de puntos de referencia discretos mostrando un alto nivel de competencia, consistentemente con la observada durante la condición peculiar. Por lo tanto, el uso de las propiedades geométricas de los estímulos de 2D parece estar dominado por la infancia tardía y aumentando con la edad y al mismo tiempo, sugiriendo que la capacidad

de utilizar señales geométricas implícitas en tareas similares emerge lentamente a través de la primera infancia. En las tareas de aprendizaje en 2D que requieren que los niños usen información espacial, como trabajar con programas de una computadora o mapas de lectura, los niños pueden participar con mayor facilidad una vez que han llegado a los primeros años de primaria. Los niños pequeños pueden beneficiarse especialmente de la información adicional que apoya la relevancia de la geometría correspondiente, como las líneas que unen los puntos de referencia.

Es importante señalar que el hecho espacial no necesariamente depende de la edad, sino de la representación mental que se tenga del triángulo, en este caso, para que puedan interpretar la realidad geoméricamente. Además de que la actividad de búsqueda de objetos era totalmente descontextualizada y no permitía la interacción social con otros compañeros.

4.2.4 Comprensión y Uso de Representaciones Externas Simbólicas Geométricas a partir de la Instrucción

En la mayoría de las culturas, las actividades humanas se apoyan en diferentes sistemas externos de representación como la escritura, las representaciones figurativas (basadas en la imagen) o la notación numérica, y sirven como mediadores semióticos de la actividad humana; nuestra mente sería muy diferente sin la incorporación de estos sistemas externos de representación. Pero llegar a comprender la naturaleza representacional de los objetos simbólicos constituye un verdadero desafío cognitivo para los niños pequeños, quienes toman los sistemas de representación como objeto de conocimiento, para después desentrañar su significado y entender las principales reglas que los configuran, re-construyendo su significado para poderlos distinguir, entender y usar para operar. Dichos sistemas no son la traducción directa de una realidad sino que son modelos de esa realidad según determinadas restricciones (Martí, 2003).

Maita y Peralta (2010) mencionan que este proceso se ve afectado por diversos factores que actúan en conjunto: la edad; la cantidad y calidad de experiencias simbólicas experimentadas; las características del medio simbólico, como su nivel de similitud con el referente y su naturaleza bidimensional o tridimensional; y la instrucción que los niños reciben del adulto sobre la relación símbolo-referente. Los niños logran comprender algunas relaciones mapa-espacio real a una edad muy temprana, la instrucción es un mecanismo central en la adquisición de muchas habilidades.

En diversas investigaciones se ha encontrado que el proceso de comprensión de la función representacional de un objeto simbólico no solo depende de factores madurativos ligados a la edad sino que la enseñanza que proporciona el adulto opera en algunos puntos del desarrollo desencadenando un insight representacional. Como lo señala el estudio realizado por Maita y Peralta (2010), con niños de 2 años 6 meses, 3 años, 3 años 6 meses y 3 años 10 meses, quienes encontraron que la comprensión temprana de un mapa como objeto simbólico ocurre de manera espontánea a diferentes edades, en la mayoría de los niños se produce a los 3 años 10 meses de edad y solo algunos niños de 3 años 6 meses logran la comprensión representacional y otros no, mientras que los niños de 3 años de edad no logran comprender que el mapa representa un lugar específico de la realidad (habitación) y por lo tanto no lo usan para solucionar un problema particular como encontrar un objeto escondido. Así mismo encontraron que la **similitud entre el símbolo y su referente** es un factor facilitador de gran peso en el logro de la comprensión representacional a edades tempranas; ya que los niños presentan más dificultad para comprender espontáneamente mapas, y con mayor facilidad fotografías y maquetas de escala similar (aunque oscurece su función simbólica al ser tridimensional) la cual ocurre a los 3 años de edad. Por lo que argumentan que el alto nivel de similitud física de las maquetas escala similar y de las fotografías contribuye a su **accesibilidad simbólica**, mientras que el nivel de abstracción del mapa aquí empleado (bidimensional) dificultó su comprensión.

De igual manera muestran que la **función simbólica** de los mapas es susceptible de ser enseñada a los niños pequeños, en qué momento del desarrollo y cómo utilizarlos como fuente de información para solucionar un problema. En la **instrucción explícita**, el docente proporcionó información sobre la función del mapa en la tarea, explicó varias veces su correspondencia en el plano representado, sumado a la demostración de cómo utilizarlo, contribuyeron a que los niños de 3 años comprendieran en su totalidad la relación simbólica entre la maqueta y su representación en el mapa.

Las diferencias encontradas entre la ejecución independiente (sin instrucción) y la ejecución asistida (con instrucción explícita o enseñanza) indican que a los 3 años los niños se encontrarían atravesando un proceso de cambio en cuanto a la comprensión simbólica del objeto, momento evolutivo en el cual son especialmente sensibles a la enseñanza del adulto. Se encontró también que los niños de 2 años y medio no logran comprender la naturaleza simbólica del mapa, aun con instrucción o enseñanza recibida, debido a que a esa edad los niños no poseen **la flexibilidad cognitiva** necesaria para ser sensibles a la enseñanza de un adulto y así alcanzar la comprensión representacional. Sino que la adquieren seis meses más tarde con apoyo del adulto o de manera espontánea a los 3 años con 10 meses de edad.

Por lo cual argumentan que para comprender un objeto simbólico es preciso cierto nivel de flexibilidad cognitiva que permita a los niños mantener dos representaciones mentales activas al mismo tiempo y establecer relaciones entre una y otra (DeLoache, 1987, 1995; Sigel, 1978; citados en Maita y Peralta, 2010). En este sentido, las dificultades que presentaron los niños de 30 meses en la comprensión de mapas podrían relacionarse con una ausencia de flexibilidad cognitiva.

En general, esta investigación aporta evidencia de que es posible intervenir en el proceso evolutivo de comprensión de una relación símbolo-referente facilitando a los niños su detección y comprensión. También permiten afirmar que existen períodos en el

desarrollo simbólico en los cuales los niños son especialmente sensibles a la enseñanza que proporciona el adulto en interacción social, enseñanza que, al despertar procesos cognitivos pone de manifiesto el sutil interjuego entre aprendizaje y desarrollo dentro de lo que Vigotsky (1978) denominara zona de desarrollo potencial.

En este sentido, otros autores han encontrado que la habilidad y comprensión geométrica de mapeo comienza a desarrollarse en edad preescolar, pero ésta no logra consolidarse del todo. Las tareas de mapeo descansan en el entendimiento geométrico. Como lo muestra el estudio realizado por Liben y Yekel (1996) quienes encontraron en 20 niños (14 Euro-Americanos, 3 Asiático-Americanos, y 3 europeos) de preescolar entre 4 y 5 años de edad presentan dificultades para interpretar mapas oblicuos y planos, y sugieren que dicha dificultad no corresponde a que ellos no entiendan o no vean lo que está representado en el espacio real, es decir, afuera en el plano real; sino que, corresponde a la dificultad que tienen para comprender e interpretar el espacio simbolizado en el mapa, asumiendo que los mapas son las representaciones simbólicas de la realidad y no una réplica de la misma. En este sentido, muestran que la simbolización del espacio, es más eficiente cuando los niños hacen uso de los mapas oblicuos (tridimensionales) que al utilizar los mapas planos (bidimensionales). Esto es, debido a que los mapas oblicuos cuentan con mayor **iconicidad** y más rasgos **canónicos**, es decir, la representación está más apegada a la realidad y es más representativa como una regla establecida social y culturalmente; a diferencia de los mapas planos, que cuentan con rasgos mucho más abstractos. Por lo tanto la iconicidad es importante en la comprensión y entendimiento de mapas de diferente perspectiva en los niños de preescolar; y el usar primero los mapas oblicuos facilita la comprensión y uso de los mapas planos, por la correspondencia representacional que hay entre ambos mapas y la representación real y geométrica de los mismos, ya que el espacio representado no es obvio para los niños pequeños.

A manera de conclusión, en el proceso de adquisición de los sistemas externos de representación, la actuación de un interpretante es casi siempre necesaria, pero no es suficiente. El sujeto también deberá re-construirlos a su manera planteándose teorías sobre las representaciones que usan. Esta construcción individual se verá íntimamente ligada, sobre todo a partir de cierto nivel de adquisición, a determinados procesos de enseñanza y aprendizaje que guiarán a los niños a su adquisición (Martí, 2003).

4.3 El Pensamiento Reflexivo: Proceso de Matemización Geométrica

En los apartados anteriores se dieron a conocer diversas investigaciones, las cuales muestran tanto los factores como los conocimientos y habilidades que participan en el desarrollo del razonamiento geométrico. Pero es importante considerar también cómo es que los niños de educación preescolar utilizan esos conocimientos y herramientas geométricas (inscripciones matemáticas) y de qué manera éstos influyen en su pensamiento reflexivo, desde el punto de vista del proceso de la matemización geométrica.

4.3.1 Uso de las Matemáticas de manera Significativa en la Solución de Problemas Contextualizados.

En el estudio de caso etnográfico realizado por Jurow (2015), se encontró que los proyectos que simulan el mundo real pueden apoyar el aprendizaje de los alumnos, ayudándoles a identificar metas emergentes dentro de un contexto real. Desde un enfoque situado del aprendizaje; el contexto, la actividad y la motivación están muy relacionados entre sí, y por lo tanto los problemas significativos están determinados por la relación de una y otra actividad (Lave, 1988; Lave y Wenger, 1991; citado en Jurow, 2015).

En dicho estudio se comparó el desarrollo y la organización de prácticas matemáticas a través de la configuración de la escuela y el trabajo en *diseño* que era la actividad principal; realizado en el norte de California, con un grupo de 4 estudiantes de secundaria, quienes participaron en un Proyecto de diseño arquitectónico llamado Proyecto Antártida durante 7 semanas, en el que la unidad temática eran las matemáticas y los temas eran la Antártida y la arquitectura, para conocer cómo los estudiantes se interesan en los objetivos del proyecto y cómo es que utilizan las matemáticas de manera significativa para solucionar problemas contextualizados. Dichos problemas pueden apoyar en la toma de las conexiones entre lo que aprenden en la escuela y sus experiencias fuera de la escuela (Boaler, 1998; Blumenfeld et al., 1991; Brown, Collins, y Duguid, 1989; citados en Jurow, 2015). Así mismo, la profesora del grupo fue capacitada antes y durante el desarrollo del proyecto.

Las actividades, al proporcionar un contexto significativo, permitían que los estudiantes utilizaran métodos y conceptos matemáticos para crear planos (inscripciones) y usar temas como proporción, relación entre variables y diseño de edificios. Se utiliza el concepto de **mundo figurado** considerando que es un concepto útil para entender cómo los estudiantes se comprometen en simulaciones, proyectos del mundo real, ya que proporciona una manera de entender cómo asumen las orientaciones necesarias para participar en situaciones colectivamente imaginadas. En ese mundo figurado se simplifican los marcos interpretativos que describen las características de cómo se inspiran en un conjunto particular de problemas para participar en una narración de ocupaciones significativas. De igual manera consideran los personajes de ese mundo, sus actividades generales y sus artefactos. Estos últimos (**Artefactos**) juegan un papel importante en el mundo figurado porque pueden servir como pivotes (ejes) (Vigotsky, 1978), que cambian el marco de una actividad y evocan o “Abren mundos imaginados” (Holland 1998; citado en Jurow 2015).

En este estudio se consideraron dos tipos de mundos figurados: el del aula tradicional, que resulta más familiar para los estudiantes y sus preocupaciones por completar tareas y obtener buenas calificaciones; y el mundo figurado elaborado deliberadamente de la construcción del diseño del proyecto Antártida (el contextualizado), en el que los alumnos se involucran asumiendo diferentes roles y solo están interesados en solucionar los problemas de la situación (dónde, cómo y cuánto costara construir un baño) y no necesariamente la comprensión del algoritmo o el problema como tal.

El proyecto también tenía como objetivo involucrar a los estudiantes en las actividades que se asemejan a la obra de los **arquitectos**, incluyendo el diseño iterativo de un plano de planta para una estación de investigación. De esta manera, el Proyecto Antártida proporcionaba oportunidades para que los estudiantes se involucren en prácticas que son valoradas por la reforma de educación matemática actual, tales como la solución de problemas del mundo real y el uso de inscripciones matemáticas para comunicarse (NCTM, 2000; citado en Jurow, 2015) .

Encontraron que tanto la investigación del diseño de la estación como las conversaciones con los arquitectos profesionales, median la relación de los estudiantes con el cada vez más elaborado mundo figurado de la Antártida. La actividad pretendía proporcionar una oportunidad a los estudiantes para llevar a cabo los análisis de cómo los cambios en un aspecto de sus diseños de estaciones de investigación (por ejemplo, los niveles de aislamiento del techo) afectará a otros aspectos de su diseño (por ejemplo, la construcción de los costes), para investigar estas relaciones funcionales se usaron tablas y gráficos, para explicar el significado de estas relaciones.

Así mismo, encontraron que la organización y la exposición pública permitieron que participaran en múltiples interpretaciones del mundo figurado. En dicho contexto de la presentación habían por lo menos tres capas de laminación co-construidas por los estudiantes: los mundos figurados de la Antártida, el aula y las matemáticas. Los cuales

fueron realizados y utilizados para participar haciendo uso del **discurso** encarnado en la actividad y las representaciones físicas en las interacciones. Algunos alumnos lograban construir interpretaciones como un diálogo con un cliente, dentro del contexto inmediato de su discurso. Los estudiantes frecuentemente no asumen roles en relación con las actividades curriculares de manera total o sin problemas; se observó que los estudiantes tomaron roles gradualmente y se movieron entre las funciones y las inquietudes propuestas por el mundo imaginario del Proyecto de la Antártida y los de la clase. Aunque la participación de los estudiantes en el mundo figurado de la Antártida fue desigual, los roles, artefactos, actividades y preocupaciones propuestos por este mundo les ayudó a utilizar las matemáticas en un contexto significativo.

La participación de los estudiantes, la construcción de inscripciones y la revisión entre pares y expertos apoyaron el aprendizaje de los estudiantes en el proyecto. Los participantes que inicialmente estuvieron involucrados en la creación, uso, y explicación de inscripciones proporcionó una manera para que entraran en, explorar, y asumir roles y las preocupaciones relacionadas con el mundo figurado de la Antártida. Específicamente, las tareas y actividades curriculares de clase animaron a los estudiantes a dibujar sus experiencias, conocer cómo la imaginación apoya la participación significativa en el proyecto de diseño. En los **recursos imaginativos** en calidad de arquitectos y la **visualización** de caminar a través de una estación de investigación basada en el surgimiento del conocimiento de los estudiantes en la arquitectura y sus experiencias de las casas que habitan y otros edificios. Esto ayudó a los estudiantes a comenzar a preocuparse por los problemas planteados desde dentro de este mundo figurado, que median el uso de las matemáticas.

Las presentaciones en clase, con sus compañeros, maestro y arquitectos profesionales, permitieron que los alumnos comprendieran y usaran sus conocimientos para actuar como arquitectos, haciendo uso de gráficas para explicar sus diseños.

Este análisis consideró cómo se formaron las actividades de un grupo de estudiantes a través de la interacción con los múltiples mundos figurados del aula, el diseño de edificios de la Antártida, y las matemáticas. La noción de mundos figurados siempre es un lente a través del cual se estudia como los estudiantes fueron "atraídos, para reclutar y formar estos mundos, y [se convirtió] en activo y apasionado para ellos" (Holland 1998; citado en Jurow, 2015). Examinar cómo los mundos figurados están mediados a través del lenguaje, las herramientas y las interacciones en el aula pueden ayudarnos a apreciar cómo los estudiantes navegan a través y desarrollan la comprensión de sí mismos como agentes concedores en estos mundos (Boaler y Greeno, 2000; citado en Jurow, 2015).

Así mismo, en un estudio etnográfico, realizado por Millroy (1992) durante 6 meses con un grupo de carpinteros aprendices en Ciudad del Cabo, Sudáfrica, tenía la finalidad de documentar las ideas matemáticas válidas que se incrustan en las actividades de cada día de trabajo en una carpintería. Un objetivo secundario fue examinar y dar un relato en primera instancia de la enseñanza y el aprendizaje de las ideas matemáticas en el contexto del aprendizaje del investigador. Por último, el estudio ofrece técnicas metodológicas para la identificación de las matemáticas en el pensamiento y la acción, y para la diferenciación de las matemáticas desde aplicaciones de rutina de los procedimientos.

Los resultados mostraron que muchos **conceptos matemáticos convencionales** están incrustados en las prácticas de los carpinteros. Ellos hicieron un amplio uso de conceptos tales como la congruencia, simetría, proporción, líneas rectas y paralelas en su trabajo diario. Por otra parte, la resolución de problemas de los carpinteros se ve reforzada por sus estrategias en la **visualización espacial**. Sus explicaciones, en forma de argumentos convincentes, mostraron la secuencia del razonamiento lógico que se relaciona con la necesidad de las matemáticas para la prueba y sustanciación.

Los resultados también mostraron que las matemáticas de los carpinteros tiene varias **características únicas**: no había conocimiento matemático tácito (implícito) en sus acciones, y la reflexión sobre las acciones que llevó a articular su conocimiento tácito; preguntas descontextualizadas planteadas fueron revisadas en problemáticas contextualizadas concretas; y sus ideas se enmarcan en el contexto de las herramientas de taller de carpintería. Comparación, utilizando los sentidos del tacto y de la vista, se prefiere a la medición y por lo general como resultado soluciones óptimas. Para resolver un problema como "¿Cuántas patas de mesa se pueden cortar con su tablón?" Se utilizaron **prácticas de visualización espacial** para construir unidades funcionales, produciendo un resultado óptimo que no se podría obtener con los procedimientos formales. Los resultados se presentan como una serie narrativas de 20 episodios, seguido de un análisis. Se discuten las implicaciones epistemológicas, educativas y metodológicas de estos resultados.

De acuerdo con Goetz y LeCompte (1984, citado en Millroy, 1992), el establecimiento de la **unidad de análisis** es una de las principales tareas que se requiere en el procesamiento de datos etnográficos. Eisenhart (1988; citado en Millroy, 1992) refiere la definición de unidades significativas en el material (significativo para el investigador o para los participantes) como una importante categoría inicial en el proceso de análisis etnográfico. En el presente estudio se considera como unidad de análisis a los "episodios". Los episodios son definidos en primera instancia como aquellos casos en que los carpinteros (de manera grupal o individual) que participan en un ciclo de acción y reflexión sobre una problemática en un esfuerzo por resolverla y dar una explicación convincente (Erickson, 1982; citado en Millroy, 1992).

En dicho estudio, se analizaron dos episodios para identificar el uso de conceptos matemáticos convencionales que pudieron estar de manera implícita en las acciones o en el discurso de los carpinteros o que pudieron haber sido usados explícitamente en su

trabajo. Como era de esperarse, hay muy poca discusión matemática por sí misma en el taller, pero esto no significa que las matemáticas no se usen; simplemente significa que los conceptos matemáticos convencionales a menudo se ocultan detrás de las actividades físicas, gestos, actos silenciosos de visualización y la terminología propia de los carpinteros. Los conceptos son los siguientes: recta, líneas paralelas, líneas paralelas cortadas transversalmente y ejes de simetría.

En resumen, Millroy (1992), encontró varios ejemplos de ideas matemáticas convencionales en las explicaciones, acciones y procedimientos descritos y demostrados por los carpinteros. Se pudo observar que los carpinteros se favorecen de la imaginaria geométrica como una manera para actuar sobre problemáticas evitando encuentros con cálculos algebraicos. Se eligieron y se utilizaron en acción para llegar a una solución métodos geométricos, los cálculos se usaron solo como una opción secundaria a la solución visual.

5. DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN ENTORNOS DE APRENDIZAJE COMPLEJOS EN EDUCACIÓN PREESCOLAR

La enseñanza constructiva, como ya hemos señalado, no es nada fácil. Pero no hay caminos fáciles. Para disfrutar la vista desde lo alto de una montaña es preciso escalarla. En Matemáticas no hay teleféricos. Los cables se rompen en la mente de los jóvenes.

(Morris Kline)

Como ya se mencionó, el presente estudio se sitúa frente a la problemática que existe a nivel nacional, reflejada en las pruebas nacionales e internacionales, las cuales muestran el bajo desempeño de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, ya que los alumnos no logran apropiarse de los conocimientos matemáticos curriculares, ni razonar matemáticamente; y específicamente en el aspecto de la geometría, tema que si se llega a tomar en serio, se desarrolla como un área donde se pueden aplicar técnicas aritméticas y algebraicas (Bishop, 1999), o que por su complejidad se deja de lado como objetivo de aprendizaje en los programas de enseñanza en México, por centrarse en el aspecto numérico, sin considerar la importancia que la geometría tiene en la vida social de los individuos. A demás, la falta de éxito que caracteriza las experiencias en geometría de tantos alumnos incita a los profesores a considerar esta parte de las matemáticas como de menor importancia. Por ello, se presenta un cambio en la reforma (RIEB) la cual busca que los alumnos logren un perfil de egreso basado en competencias desde el preescolar hasta finalizar la Educación Básica.

En respuesta a la reforma hecha a la educación básica, este estudio apoya el cambio educativo considerando la perspectiva Histórico cultural, y retomando además, la actividad como papel fundamental para propiciar la participación, la interacción así como el uso de las herramientas culturales como medios, creando así ambientes complejos de aprendizaje que favorecieran el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales como el razonamiento.

Es así que en este estudio se recrearon las condiciones bajo las cuales pueden surgir formas de pensar complejas, con el fin de entender los procesos sociogenéticos del desarrollo del razonamiento geométrico y, en la medida que se entiendan estos procesos, se podrán brindar herramientas para generar ambientes que ofrezcan experiencias adecuadas en donde los niños y niñas puedan participar y adquirir bases sólidas de razonamiento para impulsar su continuo desarrollo en los siguientes niveles educativos y, progresivamente se alcancen los estándares esperados por el currículum al final de la educación básica en el aspecto geométrico.

A partir de lo mencionado anteriormente se planteó el propósito principal de este estudio el cual es el siguiente:

Comprender e indagar los procesos que participan en la construcción del razonamiento geométrico dentro de ambientes complejos de aprendizaje que fomentan la participación de los alumnos en la solución de problemas al estar inmersos en actividades socialmente significativas, en donde utilizan herramientas culturales (sistema geométrico y sus instrumentos), además de generarse la interacción entre compañeros y guía docente alrededor de las acciones que permitan alcanzar la meta de la actividad.

Así mismo, para poder lograr y cumplir el propósito anterior se plantearon varios objetivos específicos importantes para crear las condiciones del estudio:

- Ψ Diseño de una prueba de evaluación del razonamiento geométrico.
- Ψ Evaluación del nivel de razonamiento que los niños poseen en torno al aspecto geométrico.
- Ψ Diseño e implementación de situaciones de aprendizaje contextualizadas que propicien el razonamiento geométrico.

- Ψ Asesoramiento y apoyo docente en la implementación de situaciones de aprendizaje que favorecen el razonamiento geométrico.
- Ψ Entender e indagar los *procesos que subyacen* al desarrollo del razonamiento geométrico.

6. METODOLOGÍA

En este apartado se presenta el desarrollo metodológico con el cual se llevó a cabo el estudio, para ello en un principio se describe la perspectiva metodológica desde la cual fue abordado, y posteriormente se muestran las acciones que se siguieron para llevar a cabo el estudio y una síntesis del diseño de la investigación que se realizó, para cumplir con los objetivos planteados.

6.1 Perspectiva Metodológica

De acuerdo con los objetivos establecidos en esta investigación, se optó por considerar ciertas decisiones metodológicas para la observación, las cuales delimitan y organizan el planteamiento de la investigación y el análisis de datos, con la intención de entender la aparición y desarrollo del razonamiento geométrico en los niños preescolares. La característica principal de la metodología de éste estudio, es que se crearon las condiciones necesarias para propiciar el surgimiento y desarrollo de las capacidades intelectuales. Las decisiones metodológicas tomadas en este proyecto se mencionan a continuación:

Método genético-experimental.

Se tomó como marco de referencia el método experimental-evolutivo planteado por Vigotsky con el fin de observar los procesos genéticos de la evolución intelectual del ser humano, los cuales solamente pueden ser entendidos en el curso del desarrollo; dicho método, implica la creación y producción artificial de un proceso de desarrollo psicológico, es decir, el surgimiento y desarrollo de las capacidades intelectuales, en donde el

experimentador interviene para observar cómo varía dicho proceso (Wertsch, 1988). Es por ello que no partimos de observaciones naturales, sino de situaciones que fueron diseñadas, organizadas y estructuradas, creando así ambientes complejos de aprendizaje para reproducir el origen y desarrollo de capacidades intelectuales, en este caso el desarrollo del razonamiento geométrico, en alumnos de educación preescolar; haciendo especial énfasis en el proceso mismo mediante el que se construyen las Capacidades Psicológicas Superiores. Con la finalidad de recrear un proceso evolutivo del razonamiento geométrico, que permita la identificación, la reconstrucción y el entendimiento de cada uno de los cambios de dicho proceso y cómo las capacidades intelectuales pasan de lo social al interior del individuo, cómo surge la mente.

Aproximación Microgenética.

Se tomó esta perspectiva de análisis, retomada de la tradición Vigotskyana para poder examinar el origen y desarrollo del razonamiento geométrico, de tal manera que se tiene la intención de dar cuenta de los cambios cualitativos que ilustren la evolución de dicha capacidad intelectual; por lo que se considera como la unidad básica de análisis a la actividad con carácter sociofuncional, y que está organizada en un conjunto de acciones de enseñanza aprendizaje con condiciones específicas para logra una meta socialmente establecida mediante el uso de herramientas culturales (Wertsch, 1988), y que dicha actividad tomada como segmento u episodio abre las posibilidades para que se despliegue el razonamiento. En el espacio escolar estas actividades equivalen a las situaciones de aprendizaje socio-funcionales, las cuales se diseñaron con una duración variable; en ellas se precisan los objetivos y contenidos, la dinámica de enseñanza, de evaluación, además del material, la organización del espacio y el tiempo; así mismo pretendiendo propiciar el aprendizaje de estrategias, conocimientos y habilidades matemáticas dentro de contextos similares en los cuales el conocimiento será usado en la vida real (Collins, 1988, citado en Alatorre, 2008).

Por lo que, se observaron diversas situaciones de aprendizaje, como unidad básica de análisis, durante toda su dimensión temporal, es decir, durante todo el ciclo escolar y en los tres grados del centro educativo, con el fin de poder identificar y explicar cómo se van originando y transformando las capacidades intelectuales.

Análisis de los procesos socioculturales en el aula.

Se toma en cuenta que los principios ontológicos del objeto de estudio (de naturaleza social) delimitan la manera en cómo éste puede ser estudiado (Ratner, 1997), optando por observar los patrones de interacción y el contexto sociocultural donde ocurre el fenómeno social, en este caso el aprendizaje (LeCompte, Preissle y Tesch, 1993), porque es en este espacio de actividad conjunta donde surgen y se desarrollan las capacidades intelectuales (razonamiento geométrico), las cuales de acuerdo con la perspectiva sociocultural tienen un origen social, (Leontiev, 1975; Rogoff, 1997 y Mercer, 2001) pasando de un plano interpsicológico a uno intrapsicológico, afirmando que estas capacidades surgen gracias a la internalización de la cultura, entendida ésta no únicamente como los sistemas simbólicos (Wertsch, 1988), sino además como la estructura de las actividades socioculturales, pues es ahí donde se encuentra sostenida; en la actividad práctica que se organiza en un sistema social particular y concreto (Leontiev, 1975, Rogoff, 1997, Daniels, 2008, Ratner, 1997). De ahí el interés por explorar la naturaleza de dicho fenómeno a través de la interpretación explícita de los significados y funciones de las acciones humanas, cuyo producto toma principalmente la forma de descripciones y explicaciones verbales (Flick, 2004).

Partiendo de que nuestro objeto de estudio es de naturaleza social, nos permitirá observar las relaciones y acciones humanas de los individuos, para así poder reconstruir el surgimiento de las capacidades intelectuales, y además, realizar descripciones analíticas de escenas de grupos escolares para ilustrar los aspectos que participan en este fenómeno social, el razonamiento geométrico.

Consistencia de los datos.

El análisis tuvo un muestreo intencional de situaciones de aprendizaje contemplando la dimensión temporal de las mismas, esto es, se seleccionaron secuencias al inicio, en medio y al final del curso escolar, para lo cual se realizaron observaciones de un equipo de entre 4 y 5 niños fuera del aula (observación externa) y otra observación de los mismos niños dentro del aula (técnica de solución de problemas basado en grupo). Otro de los aspectos que se tomó en consideración fue el del grado, es decir, se seleccionaron situaciones correspondientes a los grados de primero, segundo y tercero de preescolar (observación etnográfica grupal). Tomando en cuenta, para este aspecto geométrico, situaciones que implicaban el uso del lenguaje geométrico y sus herramientas materiales durante alguna construcción en actividades laborales, juego, públicas y cotidianas. El muestreo de situaciones permitió recoger las diferentes expresiones del razonamiento a lo largo del tiempo y ante diferentes situaciones, lo que permitió entender el proceso de su evolución dentro de los ambientes de aprendizaje (Flick, 2004).

Cabe mencionar que se optó por estos tipos de observación porque cada uno ofrece lineamientos para reconstruir la línea evolutiva de la adquisición y desarrollo de las capacidades intelectuales, la observación grupal nos permitió observar la influencia de diversos factores como lo son: los medios semióticos, la interacción docente-alumno y entre pares en los procesos de construcción de conocimiento y que tienen que ver con dinámica que exista con la maestra, la incorporación de los niños a la actividad y la participación de niños con necesidades educativas especiales; la observación de grupos pequeños al interior del aula (técnica de solución de problemas basado en grupo), porque nos permitió detectar la influencia que tienen todas las acciones del entorno hacia este desarrollo y finalmente; la técnica de observación externa nos permitió capturar la interacción cercana y específica entre cada niño, con el docente, el objeto y las herramientas de la actividad para potenciar el desarrollo de estas capacidades.

6.2 Procedimiento General

Las acciones que se siguieron para llevar a cabo esta investigación fueron:

- *Diseño de ambientes de aprendizaje:* Se diseñaron los ambientes complejos de aprendizaje en los que los niños participaron y estuvieron expuestos a diferentes situaciones de aprendizaje, las cuales se eligieron, de forma que pudieran favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico, poniendo en juego elementos que subyacen a la aparición y desarrollo de estas capacidades intelectuales en los niños; dichas situaciones fueron organizadas sistemáticamente en un cronograma con duración de 9 meses y antes de ser presentadas al grupo se analizaron, discutieron y se corrigieron para cubrir tanto los planteamientos didácticos de las docentes, como las necesidades educativas de los alumnos para lograr un buen funcionamiento de estos ambientes artificiales de aprendizaje.
- *Evaluación.* Se realizó una evaluación inicial y final para conocer las capacidades intelectuales que poseen los alumnos preescolares al inicio y final de su participación en las situaciones de aprendizaje y así poder dar cuenta del cambio que existe en el desarrollo del razonamiento geométrico.
- *Observación de los procesos.* Una vez que las situaciones se implementaron se realizaron observaciones y filmaciones dentro del ambiente de aprendizaje durante un periodo de 6 meses. Posteriormente dichas filmaciones fueron analizadas detalladamente para poder estudiar, entender y delimitar el desarrollo de los procesos de construcción del razonamiento geométrico.

6.3 Diseño de investigación

El presente estudio tuvo un diseño mixto conformado por 2 componentes; uno cuantitativo y uno cualitativo. El componente cuantitativo tiene la intención de evaluar el impacto de la intervención y constatar e ilustrar que efectivamente surgió un cambio en el razonamiento geométrico en los niños y en sus formas de pensar. Por ello con el segundo componente de la investigación, de corte cualitativo, se intentará validar, explicar y reinterpretar el componente cuantitativo mediante la reconstrucción de los procesos de desarrollo del razonamiento geométrico, ilustrando de manera interpretativa dicho proceso a partir de las filmaciones realizadas (Flick, 2004 y Ratner, 1997).

A continuación se muestra una tabla que ilustra el diseño que siguió la investigación. La fase de intervención correspondiente a ambos componentes fue de una duración de 9 meses durante en la fase de investigación, llevados a cabo en la Ciudad de México con la participación de un Centro de Desarrollo Infantil ubicado en la Delegación Miguel Hidalgo.

Tabla 2. Diseño de Investigación: MIXTO

Componente cuantitativo	Componente cualitativo
<p>Diseño: Transversal (1 x 3)</p> <p>Objetivo Conocer el impacto que de la intervención para determinar si hubo o no cambio.</p> <p>Población Intervención: 44 niños (as)</p> <p>Procedimiento</p> <ul style="list-style-type: none"> • Evaluación inicial • Intervención <ul style="list-style-type: none"> ○ Diseño e implementación de las situaciones de aprendizaje. ○ Formación docente. • Evaluación final 	<p>Diseño: Etnográfico</p> <p>Objetivo Indagar los procesos de construcción del razonamiento geométrico.</p> <p>Población Intervención: 44 niños</p> <p>Técnicas de recolección de datos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Evaluación inicial <ul style="list-style-type: none"> ○ Tarea experimental que se construyó especialmente para este estudio la cual consiste en la aplicación de una situación didáctica. • Observación etnográfica <ul style="list-style-type: none"> Grupal <ul style="list-style-type: none"> ○ Equipo dentro del aula • Solución de problemas basado en grupo. <ul style="list-style-type: none"> ○ Equipo de entre 4 y 5 niños de cada grado. • Evaluación final <ul style="list-style-type: none"> ○ Misma tarea experimental de la evaluación inicial.

6.3.1 Componente Cuantitativo

Este componente tiene un diseño exploratorio, con tres fases: evaluación inicial, intervención y evaluación final, para obtener el impacto en la adquisición del razonamiento geométrico. De igual manera este componente tiene la intención de constatar y evaluar la eficacia del programa de entornos complejos de aprendizaje, dando a conocer el impacto de las situaciones derivadas del mismo en el desarrollo del

razonamiento geométrico en los niños de preescolar. En la siguiente tabla se ilustra el diseño de este componente:

Tabla 3. Diseño exploratorio del componente cuantitativo del estudio

		Fases		
		<i>Evaluación inicial</i>	<i>Intervención</i>	<i>Evaluación final</i>
Condición	Intervención	○	×	○

Población participante

Participaron un total de 44 niños y niñas, con una edad aproximada de entre 3 a 7 años al inicio del curso escolar, pertenecientes a un Centro de Desarrollo Infantil público del Distrito Federal.

El Centro de Intervención fue el CENDI de Delegación el cual cuenta con 44 alumnos en total, distribuyéndose en los 3 grados de la siguiente manera: 12 alumnos en primer grado; 13 en segundo y 10 alumnos en un grupo de tercero y 9 en otro; en donde también se encontraban niños integrados (con síndrome de Down y algunos con problemas en desarrollo motor y cognitivo). En el grupo de primero y en el de segundo se encuentra un niño con Síndrome de Down y uno con Retraso mental respectivamente (Ver tabla 4).

A partir de la aplicación de un cuestionario Sociodemográfico se obtuvo información para tener una visión general de las características de la población con respecto a las edades, sexo, grado, asistencia y años en guardería como se muestra en la tabla 4. Se puede observar que la proporción de niñas en comparación con los niños es mayor. Con respecto a las edades, se observa que al inicio del ciclo escolar la mayor parte de los alumnos tenía de 3 a 5 años; y únicamente una minoría de la población

presenta 2 años de edad. Este cuestionario fue aplicado a los padres de familia por la psicóloga, la directora del Centro y psicólogas de la intervención.

Por otro lado, al referirnos a la distribución de la población según el grado escolar podemos identificar que el porcentaje de niños en tercer grado es mayor (44.7%) que en primer y segundo grado. Así mismo, es importante resaltar que más del 70% de la población no asistió a guardería, y del porcentaje que sí asistió se muestra que la mayoría han cursado de 1 a 2 años de guardería.

Tabla 4. Características Generales de la Población

		%
Sexo	Niños	47.4
	Niñas	52.6
Edades al inicio del ciclo	2	10.5
	3	26.3
	4	50.0
	5	13.2
Grado	1	28.9
	2	26.4
	3	44.7
Guardería	Si	26.3
	No	73.7
Años en guardería	1	10.5
	2	13.2
	3	2.6

Así mismo el cuestionario sociodemográfico permitió conocer datos generales de los niños, escolaridad de los padres, ingresos económicos, familiares y de vivienda. Es decir, las condiciones bajo las cuales se desarrolla la población, ya que consideramos

que estas variables forman parte importante en el desempeño y calidad educativa de los niños.

En la tabla 5, se presentan las características de la estructura familiar correspondiente a la población participante, el lugar que ocupa entre los hermanos y el cuidador principal. Donde se observa que la mayoría de los niños, poco más el 40%, vive en familias nucleares, es decir, con mamá y papá, mientras una cuarta parte de la población vive con ambos padres además de tíos, abuelos, sobrinos y otros familiares (familia extensa) y un 10% al menos vive con uno de los padres (monoparental). Mientras que cerca el 20% de la población de los niños vive dentro de una familia monoparental extensa de tres generaciones, es decir, viven solo con alguno de los padres, ya sea mamá o papa, y otros familiares como tíos y abuelos; o únicamente con otros familiares que no son ni papá, ni mamá.

De igual manera se puede observar que el 50% de la población estudiada ocupa el primer lugar entre sus hermanos, debido a que son hijos de padres muy jóvenes. Por otro lado, con respecto a la persona que se encarga del cuidado de los niños se tiene que casi el 70% es cuidado por mamá y en ningún caso el padre es el cuidador exclusivamente; mientras que poco más del 10%, el cuidado es compartido entre ambos padres, hermanos y otros parientes; es importante resaltar que alrededor del 20% aproximadamente, es cuidado principalmente por los abuelos o los tíos.

Por otro lado, es importante señalar, que la mitad de los niños ocupan el primer lugar de los hijos dentro de su familia; mientras que poco más del 30% ocupa el segundo lugar y una minoría ocupa el tercer lugar. En lo que refiere al cuidado de los niños podemos observar que la mayoría del tiempo la cuidadora es la madre, y que el padres, los tíos, y hermanos son quienes meno se ocupan de su cuidado; así también es importante resaltar que un 15% de los niños recibe cuidado por parte de los abuelos.

Tabla 5. Características de la estructura familiar de la población estudiada

Intervención	(%)
Estructura familiar	
Nuclear	44.7
Extensa	26.3
Monoparental	10.5
Monoparental extensa	13.2
Otros familiares sin papás	5.3
Lugar que ocupa en la familia	
1º	50.0
2º	34.2
3º	15.8
Cuidador	
Mamá	65.8
Papá	-
Ambos	2.6
Cuidadores Múltiples	10.5
Abuelos	15.8
Tíos	5.3

En la tabla 6, se pueden observar las características de los padres de la población en relación a la ocupación y trabajo remunerado que realizan. Se puede observar, casi el 90%, que ambos padres contribuyen económicamente a su hogar, posiblemente para tener mayores ingresos; esto resulta evidente cuando observamos que la ocupación de las madres es muy variada, además de ser amas de casa, alrededor del 40% son empleadas y únicamente el 16% son profesionistas quedando una cuarta parte (el 25%) como comerciantes y únicamente el 10% de las madres se dedican solo al hogar. Así mismo, se muestra que las ocupaciones que predominan en los papás, poco más del 60% son los oficios y comerciantes; mientras que alrededor del 15% son profesionistas empleados o de manera independiente.

Tabla 6. Características Socioeconómicas de la Población

	(%)
Trabajo remunerado	
Mamá	10.5
Papá	10.5
Ambos	78.9
Ocupación Mamá	
Hogar	7.9
Oficio	-
Comerciante	21.1
Empleado	36.8
Profesionista empleado	13.2
Profesionista independiente	7.9
Otro	10.5
No aplicable (no se conoce dato)	2.6
Ocupación Papá	
Oficio	10.5
Chofer de transporte público	10.5
Comerciante	13.2
Empleado	28.9
Profesionista empleado	15.8
Profesionista independiente	2.6
Otro	7.9
No aplicable (no se conoce dato)	10.5

Así mismo, para calcular el nivel socioeconómico de las familias de la población se realizó un análisis que combinó la información sobre la escolaridad de los padres, el nivel de hacinamiento en que vive el niño y si la vivienda era propia, rentada prestada. En la Tabla 7, se observa que alrededor de un 40% de la población estudiada, se encuentra en un alto nivel de hacinamiento, es decir, de 2 hasta 7 personas comparten una habitación; mientras que casi el 20% se encuentra en un nivel de hacinamiento bajo, lo que corresponde a una o dos personas por habitación.

Tabla 7. Nivel Socioeconómico de la Población

	%
Nivel Hacinamiento	
Alto (muy hacinados)	39.5
Medio	42.1
Bajo	18.4
Escolaridad de la madre	
Primaria incompleta o menos	-
Primaria completa o Secundaria incompleta	15.8
Secundaria completa o bachillerato incompleto	47.4
Bachillerato completo o licenciatura incompleta	36.8
Licenciatura completa o posgrado incompleto	-
Escolaridad del padre	
Primaria incompleta o menos	10.5
Primaria completa o Secundaria incompleta	10.5
Secundaria completa o bachillerato incompleto	42.1
Bachillerato completo o licenciatura incompleta	21.1
Licenciatura completa o posgrado incompleto	15.8
Vivienda	
Prestada	21.1
Rentada	52.6
Propia	26.3
Nivel Socioeconómico	
Bajo	28.9
Medio	65.8
Alto	5.3

Por otro lado, en relación a la escolaridad máxima predominante de ambos padres, se puede observar en general que la mayor parte se encuentran en un nivel de escolaridad intermedio; una cuarta parte de ellos en general tiene baja escolaridad; y únicamente alrededor del 15% tiene más allá de la licenciatura. En el caso de las madres,

alrededor del 80% cuentan con escolaridad intermedia lo que corresponde a secundaria y bachillerato. Mientras que casi el 20% de los papás cuentan con un nivel de escolaridad intermedia y únicamente el 15 % logra un nivel escolar alto, es decir licenciatura completa o posgrado.

En relación a la vivienda, podemos decir que alrededor de una cuarta parte cuenta con vivienda propia y poco más del 20% no tienen y/o no les alcanza para una vivienda propia o rentada.

Por lo anterior y de manera general se observa que la mayor parte de la población estudiada (65%) posee un nivel socioeconómico medio; mientras que poco más de una cuarta parte, corresponde a un nivel bajo y un 5% tiene un nivel socioeconómico alto. Es decir, en una cuarta parte de la población se presentan restricciones económicas; aunque se observa que la mayoría (más de dos terceras partes de la población) se encuentra en una situación media en la cual cuentan con una escolaridad entre secundaria y bachillerato; y en el caso de la vivienda, por lo menos retan o tienen casa propia con un nivel de hacinamiento medio. Por lo que, podemos decir, que la situación socioeconómica de la población estudiada es medio baja, es decir, cuenta con recursos, acceso a empleos y escolaridad, pero estos no son lo suficientemente altos porque tienen ciertas restricciones económicas debido a la escolaridad y el empleo con el que cuentan los padres. Lo cual indica que las posibilidades de que la población tenga oportunidad de experiencias educativas sean menor o poco ajustables a sus necesidades como alumnos.

Escenario

El centro de intervención (CENDI) se encuentra ubicado en la delegación Miguel Hidalgo, cuenta con todos los servicios básicos como: agua, luz, drenaje, gas, además de contar con una computadora, servicio de internet, videocasetera, televisión, teléfono y radio estéreo.

Es un centro que brinda servicio desde maternal hasta tercer grado de preescolar. Cuenta con 5 aulas, una que corresponde a maternal, una a 1er. grado, una a 2do. grado y dos a 3er. grado; cada grupo está a cargo de una maestra, a excepción del grupo de 2do. en el cual también se encuentra una asistente de apoyo para el niño integrado de ese grupo, y otra asistente para maternal. Además, el CENDI también cuenta con una pequeña biblioteca ubicada cerca de la puerta principal, área de comedor, una cocina, una pequeña bodega en donde se almacena principalmente material escolar, un consultorio médico, un patio de tamaño medio con zona de juego, dos áreas de sanitarios infantiles una al interior y una en el patio, un sanitario para maestras, y una dirección que está dividida en dos oficinas: una para la directora y otra para la psicóloga; y muy recientemente se cuenta con un mariposario y un área de hidroponía.

En lo que se refiere al personal de este centro hay una directora, una psicóloga, cinco maestras y dos asistentes con edades que van desde los 24 a 50 años; también cuenta con dos cocineras y ocasionalmente se presenta una doctora, una enfermera (que asiste cada tercer día), un maestro de música (asiste cada lunes), una maestra de inglés (asiste todos los días), un maestro de lenguaje y una señora de intendencia a la cual se cambia aproximadamente cada dos meses.

Instrumentos

Durante la intervención se utilizaron, una prueba para medir el nivel de razonamiento matemático que tienen los niños de preescolar al inicio del curso escolar para el diseño de situaciones didácticas, y de igual manera mostrar el impacto del programa de intervención para la promoción del razonamiento matemático y en particular del geométrico al final del ciclo escolar; y un cuestionario sociodemográfico para conocer las características sociales y económicas de la población.

Prueba de Evaluación del Razonamiento Matemático en preescolar. Se aplicó una prueba que consta de 74 reactivos que cumplen con las capacidades de matemáticas que los niños deben desarrollar en el preescolar cubriendo los aspectos de Forma, Espacio y Medida. Estos reactivos se califican con 2 si el niño pudo responder de manera correcta sin requerir ningún tipo de ayuda, se le califica con 1 si necesitó de ayuda para responder de manera correcta o se califica con 0 cuando no responden o lo hace de manera incorrecta.

Esta prueba es de ejecución de forma individual y tiene una duración aproximada de 45 minutos, se realizó en un cuarto cerrado, con la luz adecuada, sin distracciones, donde los niños se encontraban frente al evaluador con el fin de que éste no pudiera observar los materiales hasta un determinado momento. Dicha prueba es, además, situada o contextualizada porque gira en torno a la construcción de una ciudad.

Los reactivos de la prueba son de ejecución en los que los niños deben de utilizar el contenido matemático para resolver la problemática planteada en la prueba. La tabla 8 muestra el número total de los reactivos por aspecto matemático, ya sea Número, Forma, Espacio o Medida.

Tabla 8. Reactivos por aspecto matemático

Aspecto matemático	Total de Reactivos
Número	28
Forma	13
Espacio	23
Medida	10
Total	74

Cuestionario sociodemográfico. Se realizó también la aplicación de un cuestionario sociodemográfico con el fin de identificar las condiciones bajo las cuales se

desarrolla nuestra población, ya que consideramos que estas variables forman parte importante en el desempeño y calidad educativa de los niños; obteniendo datos generales de la población, escolaridad de los padres, ingresos económicos, estructura familiar, vivienda, entre otros. Dicho cuestionario fue aplicado a los padres de familia por la psicóloga del CENDI y recuperados el análisis correspondiente.

Procedimiento

En este apartado se describen con detalle las tres fases que conforman este componente: evaluación inicial, intervención y evaluación final.

Evaluación inicial. La primera fase del estudio consistió en la aplicación del instrumento de evaluación del razonamiento matemático para conocer el nivel de competencias matemáticas en preescolar, la cual se aplicó de forma individual a cada niño, sin distracciones, en un lugar adecuado pero dentro de las instalaciones del mismo CENDI. Esta evaluación se realizó durante las primeras semanas del ciclo escolar de los niños.

Intervención. Esta fase de intervención se llevó a cabo dentro del programa “Entornos para el Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Preescolar”. Basándose en este programa se realizaron dos aspectos importantes. Por una parte el diseño e implementación de situaciones didácticas y por otra la capacitación y formación docente.

Esta fase tuvo una duración de 9 meses, dentro de los cuales se implementaron 57 situaciones de aprendizaje: 19 para primero; 19 en segundo; y 19 situaciones en tercero; con una duración de un día o dos de 40 a 50 minutos por sesión bajo distintas modalidades: rutinas; talleres y proyectos (periódicamente) que llegan a tener una duración de 5 días y; juegos. Todo con el fin de contribuir al desarrollo de las capacidades geométricas que propone el PEP, 2011 para lograr el razonamiento geométrico en los niños de preescolar (ver Anexo 1).

Diseño, Modificación e Implementación de Situaciones de Aprendizaje.

Este estudio tuvo como propósito diseñar, implementar y evaluar situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos de preescolar construir, usar y razonar los conocimientos matemáticos a través de su participación en actividades reales socialmente significativas con el fin de desarrollar las competencias matemáticas y construir sus conocimientos matemáticos (Alatorre, 2008).

Las situaciones de aprendizaje mostraron un enfoque sociocultural, las cuales condujeron las docentes y son actividades contextualizadas que recrean situaciones cotidianas, públicas y laborales en las que se hace uso de diferentes recursos semióticos o simbólicos (planos, esquemas, croquis, lenguaje geométrico), y de herramientas culturales (compás, figuras y cuerpos geométricos); cada situación tenía una meta socialmente reconocida en la que se propició la relación niño(a) - niño(a) y docente-niño alrededor de la actividad, por su parte la docente ofreció diversos recursos para facilitar que los niños(as) participara en actividades que están fuera de su desarrollo real. Así mismo, cada una de estas situaciones nos permitieron constatar acciones tanto de la docente como de los alumnos, las cuales estuvieron dirigidas paso a paso y organizadas coherentemente para que se implementaran y así cumplir la meta por la cual estaban definidas.

Se trabajó en las siguientes modalidades, cuya duración varia en torno a cada una de estas:

- ⌘ Rutinas: Son actividades breves que se realizan de la misma manera todos los días, por ejemplo, graficar la asistencia y el registro de la hora.
- ⌘ Taller de cocina: son actividades que se realizan cada tercera semana del mes en donde los niños elaboran diversas recetas sencillas.

- ⌘ Taller de construcción: son actividades que se realizan una vez al mes con duración de 2 a 5 días considerando sus características socialmente reconocidas en las que los niños realizan construcciones geométricas.
- ⌘ Proyectos: son actividades o eventos únicos con un inicio y un final determinados temporalmente, que requieren de la colaboración del equipo para obtener un resultado o elaborar un producto en concreto.
- ⌘ Juegos: Se llevan a cabo de acuerdo a sus características socialmente reconocidas incluyendo también tablas de registro de números y graficas de barras.

Al realizar el diseño e implementar ambientes (situaciones didácticas) que facilitaran el aprendizaje de la geometría en los niños de preescolar, se guió y acompañó con identidad profesional como psicóloga de la educación a las docentes para conducir las actividades didácticas, con el fin de que se comprendieran los objetivos, motores cognitivos y acciones de dichas situaciones, así como la preparación de los materiales de la situación.

Evaluación final. De la misma manera que en la evaluación inicial, en esta fase se llevó a cabo la aplicación del instrumento de evaluación del razonamiento matemático bajo las mismas condiciones en el último mes del ciclo escolar. Con la finalidad de realizar la comparación entre los resultados del inicio con los del final (pretest-postest), para conocer el cambio e impacto que tuvo la intervención en el desarrollo del razonamiento matemático.

6.3.2 Componente Cualitativo

De acuerdo con Saada-Robert (1995) se pretende describir los procesos de desarrollo del uso de la geometría como parte de la Matemización a partir de un estudio microgenético; así mismo se considera la metodología de la *Grounded Theory* propuesta por Strauss y Corbin (citado en Vasilachis comps. 2006), la cual nos permite recoger, codificar y analizar datos de manera simultánea con el propósito de descubrir categorías, propiedades, y para sugerir las posibles interrelaciones que genere una teoría. Se decidió por una metodología etnográfica debido a que el objeto de investigación (razonamiento geométrico) es de naturaleza social.

Este componente, se encuentra basado en la estrategia de triangulación de datos para la investigación cualitativa (Flick, 2004), siendo de corte observacional, con lo cual se pretenderá dar mayor validez y confiabilidad al análisis de los datos que se obtuvieron; los cuales se recabaron realizando una observación naturalista de manera general de las situaciones de aprendizaje dirigidas por la docente dentro del aula registrándose a través de filmaciones con una duración de 9 meses. A continuación se describen las técnicas de recolección de datos que se seleccionaron.

Técnicas de recolección de datos

Prueba de Evaluación del Razonamiento Geométrico en preescolar. Se diseñó y aplicó una tarea experimental que se construyó especialmente para este estudio, la cual consiste en la aplicación de una situación didáctica que implica que los niños pongan en juego el razonamiento geométrico, siendo capaces de argumentar, discutir y justificar sus decisiones en torno a la prueba. Esta situación de aprendizaje consiste en que los niños dentro de un taller de construcción elaboren una maqueta de un parque a partir del uso de planos y esquemas con diferentes perspectivas del parque y de cada uno de los objetos que lo conforman, lo cual implica que hagan uso del lenguaje geométrico para

comunicar sus decisiones; utilizando también para la construcción del parque materiales que tienen diferentes formas de figuras y cuerpos geométricos. Se evalúa el tipo y la cantidad de ayudas que el niño requiere para elaborar la construcción preestablecida.

Este instrumento de evaluación del razonamiento geométrico por trabajo colaborativo se aplicó en equipos de 4 a 5 niños, con una duración de entre 45 y 50 minutos en un espacio aislado del salón pero dentro de las instalaciones del centro, al inicio y al final del ciclo escolar, para conocer cómo se desarrolla el razonamiento geométrico en los niños de preescolar.

Población participante

Participaron un total de 12 niños, con edades aproximadas entre 3 y 6 años del centro de intervención.

Procedimiento

De los 44 niños que se encontraban en el centro de intervención se seleccionaron a 12 niños de acuerdo a su ejecución en la prueba cuantitativa (inicial), tomando en cuenta dos rangos, el percentil 25 y el percentil 75, y se eligieron a 2 niños que se encontraban por debajo del percentil 25 (bajo rendimiento) y 2 de alto rendimiento (arriba del percentil 75) en cada uno de los grados (1°, 2° y 3°). A estos niños se les observó y filmó durante la aplicación de la prueba que evalúa el razonamiento geométrico al inicio y al final de la intervención, y posteriormente se analizaron las interacciones y diálogos que surgieron en este contexto.

Observación etnográfica. Debido a que nuestro objeto de estudio es de naturaleza social, se optó por esta técnica con el objetivo de comprender y explicar el desarrollo del razonamiento geométrico, ya que permite identificar de manera profunda los momentos

precisos en los cuales se generan interacciones que permiten observar este desarrollo en el contexto real en el que ocurre el fenómeno educativo de aprendizaje.

Se utilizó el método etnográfico con la intención de analizar un fenómeno social particular más que la determinación de examinar una hipótesis sobre ésta, y por su tendencia a trabajar primariamente con datos que no se han codificado en el punto de su recogida desde las perspectiva de un conjunto cerrado de categorías analíticas, es decir, datos no estructurados; y, además, permite investigar a detalle un pequeño número de casos (Flick, 2004).

Por lo tanto, por medio de este método etnográfico se tuvo la intención de revelar los significados que sustentan las acciones e interacciones que constituyen la realidad social del grupo estudiado, así como de describir y comprender las realidades como formas “totales” estructuradas y complejas, como fenómenos interconectados que se integran y adquieren sentido por sus relaciones e influencia recíproca.

Por otro lado, para la recolección de los datos cualitativos también se recurrió a la observación participante ya que:

El etnógrafo participa al descubierto o encubiertamente, en la vida diaria de las personas durante un amplio periodo de tiempo, mirando lo que sucede, escuchando lo que se dice, haciendo preguntas; recogiendo en realidad cualquier dato del que se disponga para arrojar luz sobre los problemas por los que está preocupado (Flick, 2004, p.162).

Los etnógrafos están interesados en proporcionar descripciones adecuadas de las actividades concertadas y sus contextos (McDermott, 1978; citado en Roth y Thom, 2009, p. 92).

Dicha observación participante se realizó en diferentes momentos con apoyo de una videograbadora, en dos sentidos: por un lado, dentro del aula de manera grupal y de

un equipo específico en donde la docente fue quien condujo diversas actividades de aprendizaje frente a todo el grupo para poder detectar los procesos de construcción de conocimiento, las interacciones de la docente tanto en la actividad total como con cada uno de los niños y la interacción entre pares; y por otro, fuera del aula donde la actividad fue conducida por el investigador para obtener un dato más claro, limpio y transparente, además de que permite explorar, describir, interpretar y explicar los datos para obtener los mecanismos que participan en la construcción del conocimiento geométrico. Cabe mencionar que dichos aspectos varían en diferentes momentos y circunstancias.

Población participante

Participaron los 12 niños que fueron seleccionados anteriormente para la aplicación de la prueba de razonamiento geométrico. Esta selección de niños se utilizó tanto en la observación de estudios de caso como en la solución de problemas basado en grupo.

Procedimiento

Se filmaron un total de 27 situaciones completas tratando de capturar todos los momentos específicos de la misma: las interacciones entre pares y maestro, los apoyos o ayudas que la docente ajusta de acuerdo a las necesidades de cada niño al realizar los motores cognitivos, así como el uso de las herramientas semióticas. Dichas situaciones fueron distribuidas en los 3 grados; quedando dentro del plan de filmaciones 9 situaciones de primero, 9 de segundo y 9 de tercer grado. Se observó y filmó a estos niños seleccionados dentro del aula en todas las situaciones contextualizadas de aprendizaje geométrico junto con el resto del grupo, cuando la maestra se encontraba realizando la situación de aprendizaje y posteriormente se analizaron las interacciones y diálogos que surgían en este contexto.

Solución de problemas basado en grupos. En esta técnica participaron los mismos niños seleccionados para la aplicación de la prueba de evaluación del razonamiento geométrico. Se llevó a cabo la filmación de la aplicación de 4 situaciones de aprendizaje a estos grupos seleccionados, por grado, pero con la condición de que fueran externas, es decir, fuera del salón de clases antes de que se presentaran dentro del salón con todo el grupo, siendo distribuidas a lo largo del ciclo escolar con el objetivo de capturar todos los momentos específicos para observar el desarrollo del razonamiento geométrico en estos niños. Dichas observaciones consistieron en introducir al grupo de niños seleccionados anteriormente en una situación de aprendizaje contextualizada similar a las situaciones que realizarían durante todo el curso, la cual fue conducida por el experimentador, con el fin de analizar la calidad del discurso y las interacciones que se presentaron entre ellos. En la siguiente tabla (9), se muestran las situaciones de aprendizaje que se consideraron, a lo largo del ciclo escolar.

Tabla 9. Situación aplicada en la solución de problemas basada en grupo

Situación. Didáctica	No. de sesiones
Construyendo mi edificio	1
Descubriendo mi tangram	1
Elaboración de casita vertical	1
Laberinto	1

7. ANÁLISIS Y RESULTADOS

“El encuentro entre dos personas es como el contacto entre dos sustancias químicas: si produce una reacción, las dos se transforman”

(Carl Gustavo Jung)

En este apartado, se presentan los resultados obtenidos en la intervención, considerando en primer lugar el componente cuantitativo y posteriormente el cualitativo, los cuales, se abordan en los siguientes apartados respectivamente: Cambio en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico, donde se describe el impacto del programa en el razonamiento geométrico que se logró en la intervención; y Procesos Implicados en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico, para ilustrar cómo fue el cambio y que factores socio-culturales estuvieron implicados.

7.1 Cambio en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico

El análisis de datos para este componente se realizó con el programa estadístico SPSS en español v19, en donde se elaboró un análisis con la prueba Wilcoxon para muestras relacionadas. Esta prueba se empleó debido a que el estudio tiene un diseño exploratorio y la muestra que se analiza al inicio se compara consigo misma al final de la intervención. Los resultados se organizan de la siguiente manera: en el primer apartado, se describe el impacto que tuvo la intervención en el desarrollo del razonamiento matemático de manera general; en el segundo apartado se describe el impacto que tuvo la intervención específicamente en el desarrollo del razonamiento geométrico y; en el tercer apartado se ilustra el cambio en la naturaleza del razonamiento geométrico, en relación al porcentaje de la población que se encuentra ubicado en cada uno de los niveles de razonamiento, del inicio al final del ciclo escolar, describiéndose las características que implica cada uno de los niveles.

7.1.1 Progreso General del Razonamiento Matemático en Niños de Preescolar

Como resultado de la intervención, se observó un incremento en el desarrollo del razonamiento matemático en general de los niños de preescolar. A continuación, en el gráfico 1, se presenta el puntaje de las evaluaciones inicial y final que obtuvieron cada uno de los grados (1º, 2º, 3º) del centro participante.

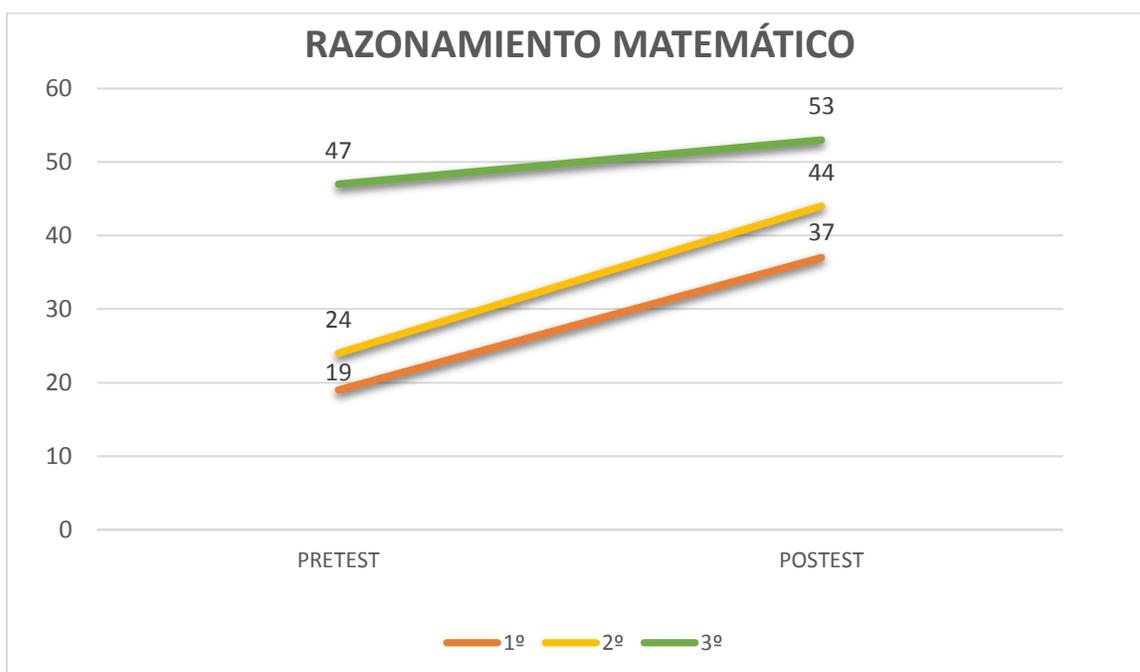


Gráfico 1. Impacto de la intervención en el desarrollo del razonamiento matemático, por grado.

En el gráfico anterior, se muestra que los niños de *primer grado de preescolar*, en la evaluación inicial cuentan con un nivel de desarrollo mínimo de razonamiento matemático (19) y al finalizar el ciclo escolar, se observa que dicho nivel incrementó considerablemente (37), obteniendo a partir de la prueba estadística de Wilcoxon una diferencia significativa ($Z = -2.805$; $p < .005$); así mismo, se observa que en *segundo grado* cuentan con un nivel de desarrollo de razonamiento matemático mayor al de primer grado (24) al inicio del ciclo escolar pero menor en contraste con el final de primer grado, logrando incrementar su nivel, el cual se observa al finalizar el ciclo escolar (44), cuya diferencia es significativa ($Z = -2.936$; $p < .003$); mientras que la pendiente del grupo de

tercer grado se encuentra por arriba de los grados anteriores al iniciar el ciclo escolar, es decir, cuando entran a tercero de preescolar cuentan con un mayor nivel de razonamiento matemático (47) y logrando incrementar dicho nivel en el transcurso de ese ciclo finalizando con un nivel de razonamiento matemático más complejo (53), siendo este cambio significativo ($Z = -3.063$; $p < .002$).

De manera general, se observa que el cambio fue progresivo y consistente en los tres grados de preescolar, ya que todos cambiaron de manera significativa. Cabe resaltar, que al comparar el promedio inicial correspondiente al grupo de primer grado (20) con el puntaje de tercer grado (53) al finalizar el ciclo escolar, se observa que a lo largo de su estancia de 3 años en preescolar los niños podrían lograr un cambio óptimo en el desarrollo del razonamiento matemático.

7.1.2 Progreso del Razonamiento Geométrico en Niños de Preescolar

En este apartado se presentan los resultados que se obtuvieron de las evaluaciones inicial y final respectivo de cada grado (1^o, 2^o, 3^o) en el razonamiento geométrico, el cual es el enfoque de análisis de este estudio, mostrando así el impacto de la intervención en este aspecto de las matemáticas.

En el gráfico 2 se muestra que al inicio del ciclo escolar los niños de *primer grado de preescolar* obtienen un nivel bajo de razonamiento geométrico (7) logrando incrementar dicho nivel en el transcurso del ciclo, finalizando con una media de 13, siendo esta diferencia significativa ($Z = -2.673$; $p < .008$); en el caso de *segundo grado*, se observa que cuentan con un nivel de razonamiento geométrico correspondiente a una media de 11 al inicio del ciclo escolar, similar al final de primer grado, pero a partir de su incorporación y participación en actividades geométricas logran incrementar su nivel, concluyendo el ciclo escolar con una media de 19, siendo dicho incremento significativo ($Z = -2.941$; $p < .003$); mientras que la pendiente del grupo de *tercer grado* se encuentra por arriba de los grados anteriores al iniciar el ciclo escolar, es decir, contaban con un

nivel de razonamiento geométrico mayor (22), y comparados consigo mismos se observa que durante el transcurso del ciclo escolar al ser partícipes diversas experiencias geométricas también logran incrementar su nivel de razonamiento (25) y dicho incremento es significativo ($Z = -2.949$; $p < .003$).

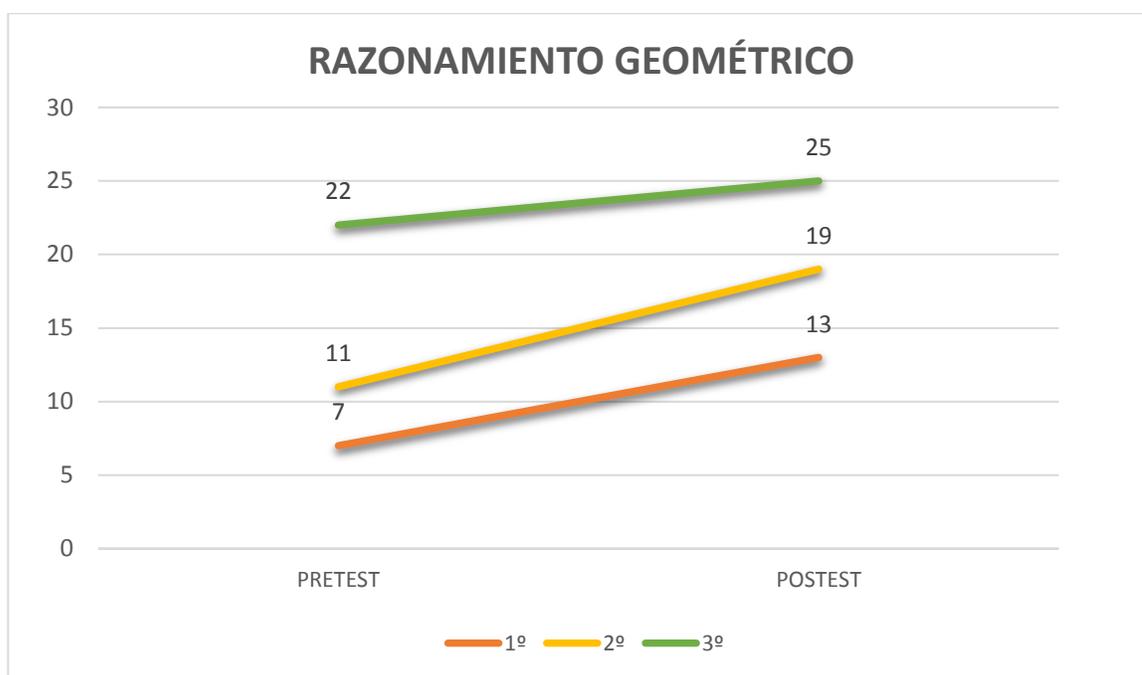


Gráfico 2. Impacto de la intervención en el desarrollo del razonamiento geométrico, por grado.

Es importante señalar que dichos resultados reflejan que los conocimientos geométricos previos con los que ingresan los niños al preescolar son muy pobres (7), y que en la medida en que avanzan, en el transcurso de 3 años del preescolar, los niños van mejorando y desarrollando su razonamiento geométrico obteniendo mejores resultados al concluir el preescolar (25). Así mismo, se observa que el cambio fue progresivo y consistente en los tres grados de preescolar, ya que todos cambiaron y mejoraron su nivel de razonamiento geométrico de manera significativa.

7.1.3 Niveles de Razonamiento Geométrico de los Niños de Preescolar

En este apartado se presentan los niveles de razonamiento geométrico en donde se ubicaron los niños preescolares al inicio y al final del ciclo escolar, lo cual permite, mostrar cómo los niños fueron modificando su forma de pensar sobre el *uso* de la geometría, partiendo de lo más concreto a lo más abstracto con respecto al razonamiento geométrico.

Para la obtención de estos niveles, se hizo uso del puntaje máximo (número total de respuestas correctas) que se puede obtener en la prueba de evaluación, dividido en cuatro partes iguales, para obtener los 4 rangos de respuesta, correspondientes para cada nivel, logrando así tener una determinada cantidad de respuestas correctas que delimitan cada nivel de razonamiento geométrico. En la tabla 10, se describen de manera específica los indicadores que definen cada uno de los niveles de razonamiento geométrico, para un mejor entendimiento de lo que hacen los niños en cada uno de ellos.

Tabla 10. Descripción de los Niveles de Razonamiento Geométrico.

Niveles	Características
Uso del sistema geométrico (Nivel IV)	Los niños que se ubican en este nivel, son capaces de solucionar problemas geométricos, comprendiendo las características, funciones e intenciones de sistemas de referencia y de sistemas de representación geométrica (planos, croquis o un modelo representativo); haciendo uso también del lenguaje geométrico convencional para comunicar información, ya sea de manera oral, gráfica o escrita, en relación a las propiedades geométricas internas que conforman una figura (lados, ángulos, vértices perímetro y área) o un cuerpo geométrico (caras, ángulos, vértices, aristas). Así mismo, logran abstraer propiedades geométricas de cuerpos que han sufrido alguna transformación topológica (plantilla de cuerpos geométricos).
Reconocimiento de características del sistema (Nivel III)	Se ubican, aquellos niños que además de realizar todo lo mencionado en los niveles anteriores, logran reconocer la función e intención de los sistemas culturales de ubicación espacial. Además de realizar la colocación espacial de objetos de forma horizontal y vertical (geometría proyectiva). Abstraen el contenido geométrico de algunas transformaciones geométricas planas (geometría topológica).
Identificación de características geométricas (Nivel II)	Se ubican los niños que utilizan sistemas de ubicación espacial elementales e identifican algunos sistemas de referencia y sus características como, la rosa de los vientos. Diferenciando también algunas figuras (cuadrado, triángulo) con algunas de sus características como, que son planas, tienen perímetro y área; y cuerpos geométricos familiares (cubo y prismas) y que estos tienen volumen (geometría euclidiana).
Conocimientos geométricos elementales (Nivel I)	Se ubican aquellos niños que únicamente identifican algunas figuras geométricas sencillas, como el cuadrado, realizando clasificaciones considerando características no geométricas (tamaño y color); y reconociendo algunos sistemas de referencia y ubicación espacial, como lo son: arriba, debajo, adentro, afuera, atrás, enfrente.

Posteriormente, en el siguiente gráfico 3 se ilustra la distribución de los niños en cada uno de los niveles de razonamiento geométrico al inicio y final del ciclo escolar.

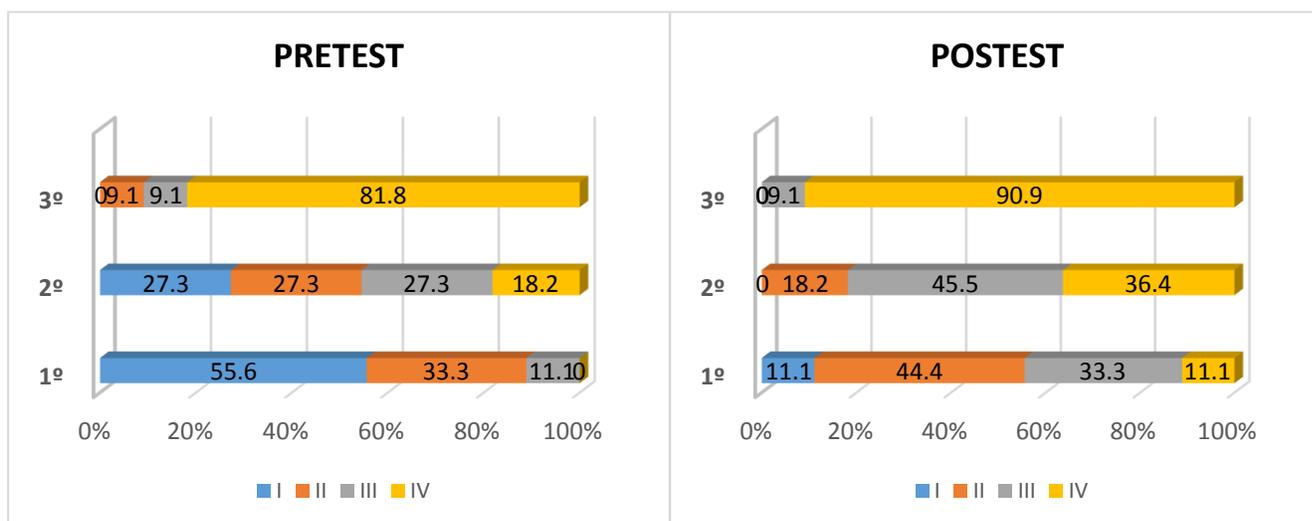


Gráfico 3. Porcentaje de la Población por grado, ubicada en los niveles de Razonamiento Geométrico.

Se observa que, al inicio de la intervención, más del 80% de los niños de primer grado se encuentran ocupando el nivel I y II de razonamiento geométrico, es decir, solamente cuentan con conocimientos elementales e identificación de características geométricas y, poco más del 10% de la población logra reconocer características del sistema geométrico (nivel III); pero se observa, que al finalizar el ciclo escolar alrededor del 50% se encuentran ubicados en los niveles más bajos de razonamiento (nivel I y II) y poco más del 30% reconocen características del sistema geométrico (nivel III) y un 10% ya logra ubicarse en el nivel superior (nivel IV), en el que hacen uso del sistema y abstraen geoméricamente.

En el caso de segundo grado se observa que en el pretest más del 50% de la población se encuentra ubicada en los niveles más bajos de razonamiento (nivel I y II), lo cual indica que solamente tiene conocimientos elementales e identifican algunas características geométricas; un 25% de la población ya reconoce características del sistema geométrico (nivel III); mientras que un 15% se ubica en el nivel superior (nivel IV). Al finalizar el ciclo escolar, se observa que el nivel más elemental (nivel I) desaparece por completo, y ahora solamente alrededor del 15% de la población identifica algunas

características geométricas (nivel II); y el resto de la población (80%) ocupan los niveles superiores de los cuales, el 45% reconoce características del sistema (nivel III) y el 35% es capaz de hacer uso del sistema y abstraer geoméricamente.

Mientras que en tercer grado de preescolar, al inicio del ciclo escolar, no hay ningún porcentaje de la población en el nivel I; solamente el 20% aproximadamente, se encuentra en los dos niveles posteriores (nivel II y III) y; el 80% de la población ya se encuentran, desde un inicio, en el nivel de razonamiento geométrico más alto (nivel IV), en el que son capaces de solucionar problemas haciendo uso del sistema y de la abstracción geométricas. Pero a pesar de que la mayoría de los niños de tercer grado ya cuentan con un nivel mayor, se logra observar que al finalizar el ciclo escolar, el nivel II también desaparece, y ahora solamente un 10% de la población, reconoce características del sistema geométrico; mientras que el resto de la población (90%) ya son capaces de solucionar problemas geométricos haciendo uso de los sistemas correspondientes y siendo capaces de abstraer el contenido geométrico (nivel IV).

En general podemos concluir que con la intervención se logró un cambio progresivo y notorio en el razonamiento geométrico de los niños de preescolar, ya que en todos los grados un porcentaje de la población logro alcanzar el nivel IV en el razonamiento geométrico logrando hacer uso del sistema geométrico de manera compleja.

7.2 Procesos Implicados en el Desarrollo del Razonamiento Geométrico

Al finalizar la recolección de filmaciones, se analizaron mediante el programa para el análisis de datos cualitativos ATLAS ti, versión 7.0, haciendo uso de los criterios por la Grounded Theory (Strauss y Corbin, 2002); considerando la *actividad geométrica*, como *unidad de análisis*. Se seleccionaron aquellas situaciones de aprendizaje que muestran los procesos que participan en el desarrollo del razonamiento geométrico.

De igual manera, se consideraron dos tipos de constructos para obtener los datos que nos permitieran conocer el desarrollo del razonamiento geométrico: *los constructos teóricos*, ya existentes, que corresponden a categorías preestablecidas como, las competencias propuestas por el PEP, la estructura de la actividad y los mecanismos socio-culturales que participan en la construcción del conocimiento; y por otro lado *los constructos emergentes*, que corresponden a nuevos constructos, que se fueron descubriendo a lo largo del análisis comparativo.

Una vez mencionado lo anterior, para comenzar el análisis, primeramente se tomaron decisiones estratégicas y se definieron las unidades de significado para su categorización, a partir de las cuales se reconstruyeron los procesos que participan en el *desarrollo del uso de la geometría dentro de la matemización*. Éstas se describen a continuación:

Ψ La actividad y la descomposición de la misma: Estructura. Se realizaron observaciones de las actuaciones de los participantes a través del tiempo en cada una de las situaciones de aprendizaje socialmente significativas las cuales adoptamos como unidad fundamental de análisis, considerando la estructura que guardan: la meta establecida culturalmente, las diversas acciones que se establecen para poder lograr la meta, y las operaciones o condiciones bajo las cuales se realizan cada una de las acciones, al igual que las herramientas culturales tanto materiales, como simbólicas, definidas por la actividad.

Así mismo, de la unidad fundamental de análisis, se deriva una unidad elemental que, de acuerdo con Strauss y Corbin (2002) se denomina “*unidad mínima de significados*” la cual es definida como un fragmento de acción, con objetos y sobre objetos culturales, que permiten alcanzar un determinado objetivo que contribuirá al cumplimiento de la meta de la actividad. Resulta importante reconocer, que dicha acción tiene un sentido funcional dentro de la actividad, la cual provee una estructura y organización dentro de la misma. Para reconocer cuándo, cómo y qué origino el cambio en el razonamiento geométrico.

Ψ **Razonamiento geométrico a lo largo de la actividad.** Partiendo de que este estudio tiene un análisis microgenético, se considera cada una de las capacidades geométricas para conocer cómo es que van apareciendo y desarrollándose de manera interna en los niños de preescolar, en cada actividad. Nos sitúa en un primer nivel de análisis, para entender los cambios que sufrieron las capacidades geométricas y el progreso que tuvieron a lo largo del tiempo. Dichas capacidades geométricas son: observación, abstracción de características y propiedades geométricas; aportación y selección de soluciones adecuadas; argumentación, uso de diversas representaciones abstractas (sistemas de referencia, esquemas y planos) con diferente perspectiva; uso del lenguaje geométrico para interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea de forma oral, escrita o gráfica usando símbolos y; la elaboración de deducciones lógicas e identificación de cuándo un razonamiento no es lógico.

Ψ **Mecanismos socio-culturales.** Debido al interés particular que se tiene en este estudio, por identificar los procesos de construcción de conocimiento y desarrollo del razonamiento geométrico, es importante considerar los *mecanismos socio-culturales* en las categorías, debido a que, son los elementos que están anclados al proceso de desarrollo del razonamiento geométrico, es decir, nos permiten dar cuenta de, qué hace que cambien las capacidades geométricas a lo largo del

tiempo y en los momentos particulares de cada una de las actividades. Teniendo en cuenta que, dichos procesos de construcción, surgen a partir de la incorporación en actividades reconocidas socialmente en un plano colectivo, en el que existe una negociación para compartir significados y atribuir sentido, al igual que intervienen elementos estructurales de la actividad como lo son: la mediación semiótica (instrumentos y signos) la interacción, la participación, la asistencia docente.

Ψ Integración de las diferentes categorías. Constatar, cómo cada una de las decisiones anteriores: la estructura de la actividad, las competencias y los mecanismos socio-culturales, están relacionados entre sí para el logro del desarrollo del razonamiento geométrico.

Ψ Dimensión temporal. Se consideran, los cambios que se dan en una situación didáctica en los diferentes grados y a lo largo del preescolar: microgenético (sesión), a corto plazo (ciclo escolar) y mediano plazo (todo el preescolar).

A partir del análisis de las filmaciones, tomadas de la prueba de evaluación del razonamiento geométrico, las situaciones de aprendizaje dentro del grupo y las situaciones externas, se muestra cómo va surgiendo el razonamiento geométrico en niños de educación preescolar. Con lo cual se describen también los mecanismos psicológicos que permitieron la aparición y surgimiento del razonamiento geométrico, tomando en cuenta la actividad geométrica, su estructura y herramientas correspondientes al sistema geométrico, al igual que los niveles y tipos de ayuda que requirieron los niños para poder realizar las actividades, así como, las interacciones que se dieron en las diferentes actividades.

Debido a lo anterior, en los siguientes apartados se organizan los datos analizados considerando 2 dimensiones: la primera corresponde a *la actividad geométrica social como espacio dinámico que promueve el desarrollo de las capacidades cognitivas*

geométricas, en el cual, se consideran los cambios en relación a características sociales como lo es la actividad, la participación en dicha actividad y la comprensión de la misma; la segunda, a *la Matemización geométrica y la interpretación de la realidad*, es decir, *el razonamiento geométrico*, en la que se muestra cómo van surgiendo y desarrollándose las capacidades cognitivas geométricas en los niños de preescolar.

Es importante mencionar que ambas categorías, la comprensión de *la actividad geométrica social como espacio dinámico* y *la matemización geométrica*, ocurren de manera simultánea. Es decir, el razonamiento geométrico surge a partir de la incorporación de las personas en una actividad socialmente reconocida, en la cual se hace uso de un sistema particular, la geometría, y su entendimiento es cada vez más complejo en interacción con otras personas en un plano externo en el que se pone a disposición de todos los que participan una serie de recursos que les permitan desempeñarse en la actividad geométrica particular y posteriormente comprenderla (Roth y Thom, 2009).

En la figura 9, se esquematiza de manera general la comprensión de la actividad geométrica social, que va de lo concreto e incipiente a lo complejo e integrado, es decir, en un inicio no se puede hablar de razonamiento geométrico ya que, la actividad, sus contenidos y herramientas, aparecen de manera aislada pero mediante el apoyo docente y el uso del sistema geométrico con sus objetivaciones, se integra en el transcurso de la participación de los niños dentro de una actividad, logrando que dicho sistema, llegue a ser complejo y abstracto, permitiendo que los niños lo utilicen para solucionar problemas que impliquen la interpretación de la realidad, realizando acciones geométricas, es decir, que matematicen geoméricamente, y es aquí en donde podemos hablar de razonamiento geométrico.

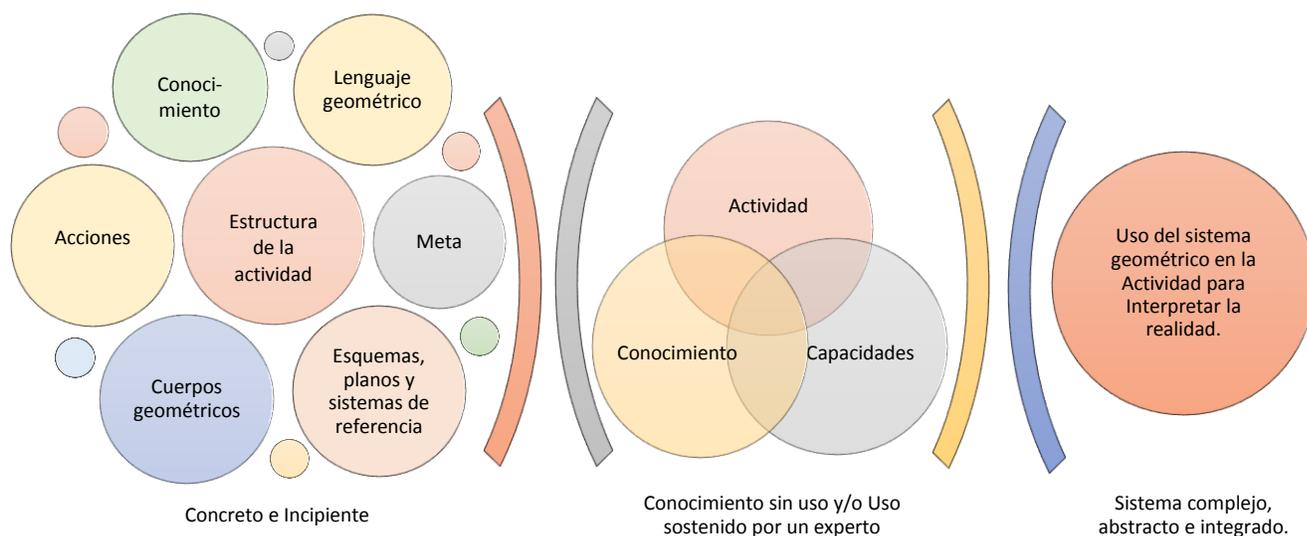


Figura 9. Comprensión de la actividad geométrica.

7.2.1 La Actividad Geométrica Social como Espacio Dinámico que Promueve el Desarrollo de las Capacidades Cognitivas Geométricas.

En este apartado se describe el cambio en la comprensión de la actividad geométrica que tienen los niños de preescolar, consideradas como un espacio dinámico complejo. Dicha comprensión está asociada a la forma en la que *participan* en interacción con los demás y descansa en la asistencia docente, ya que es el intermediario social que propicia la participación del niño (sujeto) con otros favoreciendo que al participar vaya comprendiendo la actividad.

A continuación se describen los elementos que dan lugar a los procesos de construcción de conocimiento y desarrollo del razonamiento geométrico: la participación e interacción social dentro de actividades geométricas, que cambia, logrando un traspaso del control de la actividad, sostenida en un inicio por la docente, a un momento en el que el niño participa autónomamente dentro de la actividad; la comprensión de la actividad

geométrica; el establecimiento de las condiciones de la actividad (organización) y; el funcionamiento de las Herramientas Geométricas simbólicas y objetivaciones.

a. La participación e interacción social en la actividad geométrica.

Un aspecto importante que se observa y se destaca en las actividades geométricas, como condición necesaria para interactuar, es la forma en la que participan los niños dentro de éstas. Esta participación comprende diferentes tipos y se observa que juega un papel importante para la comprensión de la actividad, ya que en la medida en que los niños son participes dentro de las actividades contextualizadas se van apropiando tanto de la estructura, como de las acciones que la conforman. En la figura 10, se consideran los momentos de cambio para comprender cómo se va desarrollando y transformando la participación de los niños a lo largo del ciclo escolar y cómo va siendo cada vez más autónoma y precisa. Cabe mencionar, que la participación implica “*hacer*” y “*usar*”, es decir, está ligada a las acciones con el sistema de conocimiento geométrico, por lo que el niño debe conocer dicho sistema.

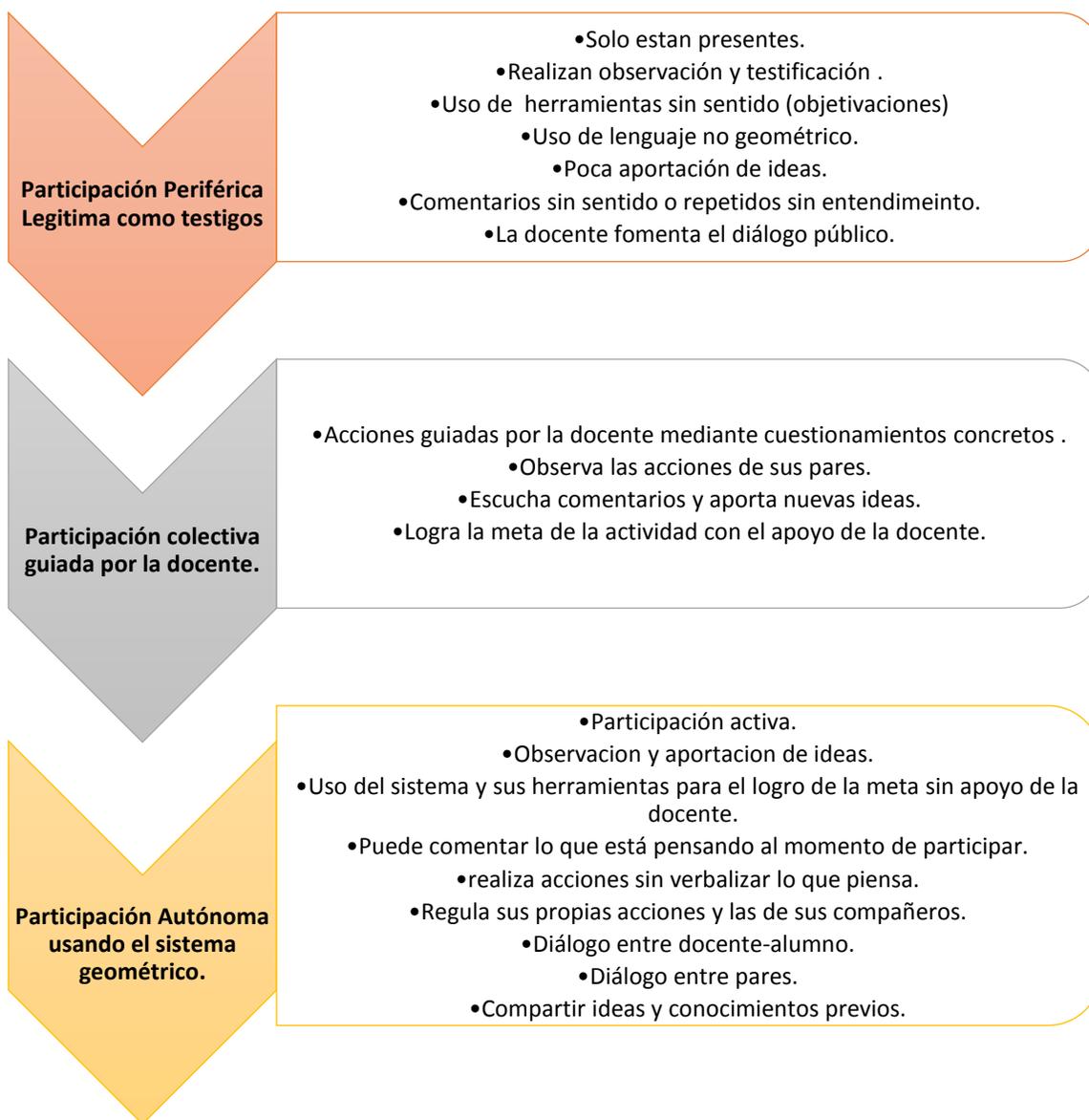


Figura 10. Desarrollo de la participación e interpretación social dentro de la actividad geométrica.

Primer momento: Participación periférica legítima como testigo.

En este primer momento se observa que la docente es quien se encarga de guiar a los niños a lo largo de la actividad a partir del uso de diferentes estrategias o recursos para ir transformando su pensamiento y autonomía dentro de la misma. Se observa que los niños van aprendiendo legítimamente por el hecho de encontrarse presentes en la realización de una actividad observando las acciones de otros compañeros pero sin

aportar ningún comentario ni realizar la manipulación de los materiales y herramientas culturales que se encuentran presentes, únicamente siendo testigos de las acciones que se realizan alrededor de ellos. Como se puede observar en la figura 11, en donde participan cuatro niños en su primera prueba de evaluación correspondiente a una situación externa “construyendo la maqueta de un parque”, en la cual la maestra presenta la rosa de los vientos como sistema de referencia que los niños debían utilizar para lograr la meta de dicha actividad, construir la maqueta de un parque, pero únicamente el niño señalado (flecha) es el que intentan dar argumentos sobre los conocimientos previos que tienen sobre ese sistema de referencia, mientras que en el caso de Salvador (1) e Isaac (2), ellos solo están presenciando y observando lo que los otros dos compañeros comparten pero distrayéndose con frecuencia y la herramienta aún no logra tener un sentido para ellos aunque la llegan a manipular en algún momento, no logran saber qué es y qué funcionalidad tiene dentro de la actividad, por lo que la docente retoma los argumentos de los demás y atraer la atención de Salvador e Isaac. En el caso de Valentina (3), ella aunque no da ninguna aportación, observa y escucha con atención las aportaciones de su compañero que participa.



figura 11. Niños de primer grado de preescolar en la 1ra. Evaluación de la situación externa: “Construyendo la maqueta de un Parque”.

En el siguiente extracto 1 se observa de forma más detallada como la participación de los niños (1, 2 y 3) es únicamente periférica, porque no comparten ningún comentario y solamente están presenciando las aportaciones de su compañero Ángel, quien aunque cuenta con cierto conocimiento de las características de la rosa de los vientos, tampoco reconoce la herramienta con su nombre correspondiente, pero participa de forma más activa dentro de la actividad; en este momento es la docente quien proporciona el nombre de la rosa de los vientos (herramienta cultural) y retoma y re-significa la aportación que realiza Ángel sobre los puntos de referencia que indica la rosa de los vientos: “norte, sur, este y oeste” (líneas 1-14).

Momento de la actividad: Presentación de las herramientas de ubicación espacial: la rosa de los vientos y el plano tridimensional de diferentes perspectivas).

1. **M:** *ahora les voy a mostrar esto, ¿saben qué es?* (muestra la rosa de los vientos)
 2. **Ángel:** *sí*
 3. **M:** *¿Qué es?*
 4. **Ángel:** *el sur*
 5. **M:** *si, nos muestra el sur pero, ¿Cómo se llama?* (se dirige a Isaac y a Salvador)
 6. **Isaac: (solo observa y no comenta nada)**
 7. **Salvador: (no atiende a la indicación porque se distrae y no comenta nada)**
 8. **M:** *Salvador, Isaac...*
 9. **Ángel:** *si, el norte, el sur, el oeste y oeste* (señalando respectivamente los puntos cardinales en la rosa de los vientos).
 10. **Valentina: (solo observa y escucha las aportaciones de Ángel)**
 11. **M:** *ok, esto se llama la rosa de los vientos, verdad Salvador* (llama la atención de salvador que estaba distraído).
 12. **M:** *y ¿Qué nos indica la rosa de los vientos Ángel?*
 13. **Ángel:** *norte, sur, oeste y oeste...*
 14. **M:** *nos indica el norte, el sur, el este y el oeste* (señalando los puntos cardinales correspondientes)
 15. **Valentina: (durante el análisis de la herramienta no proporciona ningún comentario solo observa con atención...)**
 16. **M:** *bueno, con ayuda de nuestra rosa de los vientos vamos a analizar el plano de nuestro parque* (muestra el plano tridimensional con perspectiva aérea). *Podrían decirme ¿Qué hay al norte de nuestro parque?* (coloca la rosa de los vientos al lado del plano tridimensional frente a los niños)
 17. **Ángel:** *uno triángulo y uno triángulo...*
 18. **(los demás solo observan ambas herramientas)**
 19. **M:** *a ver Valentina ¿qué hay al norte de nuestro parque?*
 20. **Valentina: (no contesta, solo observa)**
 21. **M:** *a ver, ¿Dónde está el norte?*
-

-
22. **Ángel:** *aquí*, (señala el norte en la rosa de los vientos)
23. **M:** *este es el norte* (señala la rosa de los vientos) *y en nuestro parque ¿Dónde está el norte?*
24. **Ángel y Valentina:** *aquí* (señalan la parte superior del plano del parque, el norte)
25. **Valentina:** *las escaleras.*
26. **M:** *las escaleras de una resbaladilla, ¿Qué más?*
27. **Ángel:** *cubos*
28. **M:** *ok, y ¿al sur de nuestro parque qué hay Isaac?*
29. **Isaac:** (no contesta nada pero señala en la rosa de los vientos el sur)
30. **M:** *Bien, ese es el sur y, ¿en nuestro parque Isaac?*
31. **Ángel:** *este* (señala en el plan tridimensional el lugar que corresponde al sur)
32. **Salvador:** (solo imita las acciones de Ángel y señala cualquier lugar del plano).
33. **Isaac:** *sí* (señala el mismo lugar que Ángel en el plano tridimensional)
34. **M:** *y, ¿Qué hay al sur de nuestro parque?*
35. **Ángel:** *triángulos* (señala la entrada del parque en forma de rectángulo)
-
- Extracto 1.** 1ra. Evaluación de la situación externa: "Construyendo la maqueta de un Parque". Primero de Preescolar

De igual manera, en el extracto anterior podemos observar que el hecho de que en este primer momento algunos niños solo están presentes dentro de la actividad geométrica, testificando las acciones de sus pares, permite que en momentos posteriores logren realizar el uso de la herramienta, debido a que todas las acciones geométricas se están dando a su alrededor, siendo la docente quien favorece su participación y comprensión, como lo fue el caso de Valentina (3) quien participaba periféricamente porque desde el inicio de la actividad no aportaba ideas sobre la rosa de los vientos pero posteriormente al transcurrir la actividad logra usar la herramienta para identificar los objetos que se encuentran al norte del plano tridimensional, es decir comienza a tener una participación dentro de la actividad (línea 23-25). Así mismo en el caso de Isaac (2) quién aunque no verbalizaba sus acciones, logra reconocer señalando en la rosa de los vientos y en el plano donde se ubicaba el sur del parque, aunque esta acción sea solo por imitación (línea 28-33).

Por lo anterior, es importante que los niños estén presentes en la actividad aunque su participación en un primer momento sea periférica porque en algunos casos solo son testigos de las acciones que ocurren en el transcurso de la actividad y no logran realizar

acciones con el sistema geométrico para el logro de la meta, las herramientas aun no tienen sentido para ellos y es la docente quien en este momento guía la participación de los niños para el reconocimiento y uso de las herramientas a partir de apoyos y cuestionamientos concretos, logrando que algunos niños se comiencen a incorporar en la actividad e intenten identificar la herramienta observando las características que la conforma mientras que otros únicamente repiten los cuestionamientos que escuchan pero sin entendimiento de éstos ya que aún no están familiarizados con la actividad.

Segundo momento: Participación colectiva y guiada por la docente.

Es un tipo de participación en la que la docente va sosteniendo las acciones y participaciones de los niños a lo largo de la actividad, guiando las aportaciones que van surgiendo a partir de *cuestionamientos concretos*, apoyándolos también con el uso de diferentes planos y esquemas con perspectivas distintas (objetivaciones) generando que los niños reflexionen sobre los comentarios realizados y puedan constatar si están en lo correcto o no, logrando con ello la meta establecida al igual que el uso de los conocimientos geométricos (sistema geométrico) que están en juego para la realización de dichas acciones.

En este momento, se pudo observar que cuando la docente realiza un cuestionamiento y alguno de los niños responde incorrectamente, ella interviene promoviendo que otros niños que saben la respuesta correcta participen comentando y corrigiendo a sus compañeros lo cual genera que el niño que está equivocado modifique su interpretación conforme avanza la actividad. Los niños de primer grado de preescolar en su segunda Evaluación: “construcción de la maqueta de un parque” en el momento del *proceso* de la actividad en el cual los niños debían construir juegos que se pueden encontrar en un parque haciendo uso de objetos con diferentes formas geométricas como círculos, octágonos y rectángulos, cuerpos geométricos (pirámide triangular, cubos, cilindros) y estructuras geométricas (de la pirámide triangular y de un cubo) además de hacer uso de esquemas de diferente perspectiva, ya sea bidimensional o tridimensional

(fotos reales y esquemas), para poder seleccionar el material correspondiente y poder construir una resbaladilla; tal fue el caso de Ángel (1) y de Nahomy (2) quienes participan en la actividad observando el esquema tanto bidimensional como tridimensional (foto aérea de la maqueta del parque) para poder construir su resbaladilla correctamente modificando sus decisiones de forma colectiva guiados por la docente (Figura 12).



Figura 12. Niños de primer grado de preescolar en la 2da. Evaluación de la situación externa: “Construyendo la maqueta de un Parque”.

En el siguiente extracto se puede observar como la docente propicia que los niños (1 y 2) al participar en la actividad compartan su pensamiento para realizar la acción requerida (seleccionar el material y colocarlo correctamente) para lograr la meta de la actividad (hacer la maqueta de un parque); Ángel inicia seleccionando la estructura de un cubo y también un cubo, pero tiene dificultades para poder realizar su construcción correctamente porque no estaba empleando el esquema tridimensional sino únicamente el plano de vista aérea en el cual no logra visualizar adecuadamente la forma en la que debe colocar cada uno de los materiales que ha seleccionado considerando que el cubo sólido iba dentro de la estructura en forma de cubo, por lo que Nahomi al verlo decide participar ayudándole pero ella tampoco logra realizar la construcción porque también se

confunde por un momento al observar el plano de vista aérea; por lo que la docente interviene guiando las acciones que realizan y haciendo énfasis en que observen el esquema tridimensional que ellos tenían con otra perspectiva (de frente), con la cual ambos niños logran reconocer y rectificar el error que estaban cometiendo apoyándose y corrigiéndose uno al otro (líneas 2-17, extracto 2).

Momento de la actividad: Construcción de cada uno de los juegos del parque usando sus esquemas y planos preestablecidos.

1. **M:** (reparte los esquemas tridimensionales en blanco y negro correspondientes a cada pareja de niños, y agrega). *Ahora solo tomen el material que necesitan para construir el juego que les toco.*
 2. **Ángel:** *yo el cubo* (toma la estructura de un cubo).
 3. **M:** *¿Por qué tú el cubo Ángel?*
 4. **Ángel:** ***porque, porque... (Toma un cubo e intenta meterlo dentro de la estructura en forma de cubo, y agrega). Maestra es que no entra el cubo.***
 5. **Naomi:** ***¡hay!, porque no tiene el... (Dirigiéndose a Ángel y tomando los dos objetos que él tiene y observa los materiales y coloca el cubo sobre la mesa y encima la estructura del cubo, la cual era más pequeña).***
 6. **Ángel:** ***es que no entra el cubo (preocupado)***
 7. **M:** *¿no entra el cubo? Y ¿tiene que entrar?*
 8. **Ángel:** (mueve la cabeza indicando que, no).
 9. **Naomi:** ***Sí, (intentando meter el cubo en la estructura de forma de cubo, y agrega), sí porque...(toma el plano tridimensional a color con perspectiva aérea y dice) porque mira aquí está (señalando el cubo en el plano aéreo)***
 10. **M:** *y aquí en este esquema, ¿cómo está?* (les señala el esquema tridimensional con perspectiva de enfrente, que tienen sobre la mesa).
 11. **Naomi y Ángel:** (observan el esquema tridimensional)
 12. **Naomi:** *sacar el cubo...*
 13. **Ángel:** (observa a Naomi).
 14. **M:** *¿entonces dónde lo podemos colocar?*
 15. **Ángel:** (observa rápidamente el esquema, y dice) ***abajo... (Toma los objetos geométricos que tenía Naomi en las manos y coloca el cubo debajo de la estructura en forma de cubo).***
 16. **M:** *¿Por qué?*
 17. **Ángel:** ***porque aquí está (señalando el esquema tridimensional de la perspectiva de enfrente).***
 18. **Naomi:** *y la escalera va aquí...(toma la escalera y la coloca)*
 19. **Ángel:** *este yo* (toma una pirámide cuadrangular y la coloca sobre la estructura en forma de cubo, de acuerdo a su esquema).
 20. **Naomi:** (toma el material en forma de rectángulo y lo coloca en su construcción, de acuerdo al esquema)... (También toma 8 cubitos muy pequeños).
 21. **Ángel:** (observa lo que tomo Naomi y le dice)... *no estos son para chava* (se refiere a Salvador y le entrega los cubitos).
 22. **M:** *¿Quién necesita ese material, tú los necesitas Salvador?*
 23. **Salvador:** *Sí*
-

24. **M:** *¿En dónde?*
25. **Salvador:** *aquí* (señala el esquema tridimensional en blanco y negro que representa el columpio y en el cual no usara cubos)
26. **M:** *¿aquí los necesitan Christopher?*
27. **Christopher:** ... (no contesta)
28. **Naomi:** (toma nuevamente el cubo grande y la estructura en forma de cubo e intenta colocar la estructura abajo y el cubo arriba de la estructura)
29. **Ángel:** *no, (dirigiéndose a Naomi y corrigiendo la construcción)...maestra no se puede* (intentando terminar la construcción de su resbaladilla)
30. **M:** *¿Por qué no se puede?*
31. **Ángel:** *porque este está chiquito* (la construcción se caía cuando colocaba la pirámide cuadrangular sobre la estructura)... (Lo intenta y lo logra).
32. **Ángel:** *¡Ya! Listo*
33. **Naomi:** *listo.*
34. **(Entre los dos Ángel y Naomi logran construir su resbaladilla).**
-

Extracto 2. 2da. Evaluación de la situación externa: "Construyendo la maqueta de un Parque". Primero de Preescolar

Con el extracto anterior, podemos resumir que los niños en este momento comienzan a participar de manera colectiva sin que la maestra se los solicite, pero sus acciones aún requieren de la guía de la docente quien les reitera y muestra las diferentes herramientas culturales que deben observar generando con ello que modifiquen no solo sus propias acciones sino también las acciones de otros compañeros logrando así la meta de la actividad.

Tercer momento: Participación autónoma usando el sistema geométrico.

Se observa este tipo de participación como el nivel más complejo y óptimo que logran alcanzar los niños de preescolar, ya que es el momento en el que participan únicamente utilizando los recursos culturales que ya conocen para lograr la meta de una actividad en particular, sin requerir la ayuda de la docente. Los niños entienden la actividad y el uso de las herramientas y por ende pueden participar autónomamente después de los cuestionamientos de la docente o de algún comentario de sus compañeros, sin que la docente les signifique las acciones que van a realizar porque ahora la función de la docente es únicamente de organizar y supervisar que el trabajo se realice de forma ordenada.

Tal fue el caso de los niños de tercer grado de preescolar que participan de forma autónoma dentro de la actividad “Jugando a ser Arquitectos” después de que la docente los ha organizado por equipos para poder construir una casa haciendo uso de diferentes cuerpos geométricos así como de fotos de diferentes perspectivas de una construcción preestablecida. Podemos ver como las docentes no está presente directamente con los equipos de niños, en el recuadro 1 se observa que la mayoría del equipo inicia realizando acciones y aportaciones para seleccionar el material a partir de la observación de la foto correspondiente, pero en el caso de Ariel (→) se observa como únicamente está observando la foto de la construcción, siendo testigo de las aportaciones de sus compañeros aunque sin dar comentarios; posteriormente en el recuadro 2 podemos ver como Ariel escucha las aportaciones de sus compañeros y observa las acciones que realiza su compañero Miltón solicitando apoyo de la maestra; en el recuadro 3 podemos ver a Ariel de pie observando cómo iba quedando la construcción que estaban realizando sus compañeros porque ella aunque formaba parte del equipo no co-opera con ellos ni realiza la manipulación de los materiales; ya en el recuadro 4 podemos observar que después de ser testigo de todas las acciones de sus compañeros logra seleccionar de manera autónoma el material que requerían, sin que ellos se lo hayan solicitado porque aunque no participaba manipulando los materiales directamente ni verbalizaba lo que estaba pensando con el sistema geométrico, mismo que si verbalizaban sus compañeros, logra realizar acciones geométricas para contribuir en el logro de la meta (figura 13).



Figura 13. Niños de tercero de preescolar jugando a ser arquitectos.

En el extracto 3 podemos ver que Adriel guía las acciones geométricas de sus compañeros dentro de la actividad para poder seleccionar el material correcto, cuando Johan les comenta que necesitan un cono que ha observado en la foto real con perspectiva de frente de la casa que deben construir, lo cual es correcto, pero al momento de seleccionar el material Johan toma una pirámide cuadrangular, por lo que Adriel usa ese mismo objeto geométrico para modelar la forma correcta que debe tener un cono, pero se observa que Johan intenta justificar su decisión haciendo uso de la foto de su construcción, por lo que Miltón interfiere y apoya el argumento de Adriel realizando una representación enactiva para que su compañero Johan reconozca la forma circular que debería tener la base de esa pirámide cuadrangular para poder ser un cono, posteriormente Alexia les indica que no tienen esa forma geométrica y solicitan a la

docente les cambien las pirámides cuadrangulares por los conos que necesitaban, pero es Ariel quien al haber observado y escuchado las aportaciones de sus compañeros logra seleccionar el objeto correcto que necesitaban (línea 5-14).

Momento de la actividad: Selección de material usando fotos reales preestablecidas

1. **M:** *seleccionen el material que necesitan para construir su casa* (entrega las fotos reales)
2. **Adriel, Miltón, Alexia, Johan y Ariel:** (observan la foto real para seleccionar los cuerpos geométricos correspondientes).
3. **M:** *lo voy a poner aquí para que todos lo vean.* (coloca la foto en un lugar visible para todos).
4. **Adriel:** *hay que hacerla juntos (refiriéndose a Alexia y a Miltón).*
5. **Johan:** (observa la foto) *un cono, un cono* (toma una pirámide cuadrangular y la muestra a sus compañeros)
6. **Adriel:** *no, tiene que ser así... (le modela la forma de cono, con un prisma triangular porque es el que tenía en las manos)*
7. **Johan:** *sí, porque mira...* (señala el cuerpo geométrico representado en la foto al cual hacía referencia, un cono).
8. **Miltón:** *así no es un cono. Tienen que ser así... (toma la pirámide cuadrangular, y señala la base, haciendo un círculo).*
9. **Alexia:** *no tenemos*
10. **Johan:** *si la pedimos,* (al no encontrar un cono entre sus materiales, se dirige a la maestra) *maestra, necesitamos un cono* (y señala la base de la pirámide cuadrangular, dibujando un círculo)
11. **M:** *cámbialo*
12. **Miltón:** *(toma dos pirámides cuadrangulares y las cambia por conos).*
13. **Adriel:** *también un de estos* (señala un prisma hexagonal)
14. **Ariel:** *(observa y escucha lo que están solicitando sus compañeros y sin decir nada, trae un cono y el prisma hexagonal que necesita su equipo).*
15. **Adriel:** *ya no Miltón, ya me los dio.*
16. **Miltón:** (toma 2 conos y los trae).
17. **Johan:** *sí*
18. **Adriel:** *estamos bien, no nos estamos equivocando* (coloca el cono y el prisma hexagonal en el lugar correcto)
19. **Alexia:** *pero necesitamos dos, uno aquí y uno acá* (señala la foto).
20. **Johan:** *este a dónde va* (tomo un prisma cuadrangular e intentaba ver en la foto en dónde lo colocaría)
21. **Adriel:** *aquí* (señala de lejos la foto y lo coloca)
22. **Johan y Adriel:** *sí, terminamos.*
23. **Adriel:** *acomódalo bien, esta todo chueco.*
24. **M:** *como van niños, qué les hace falta.*
25. **Alexia:** *cubos* (observa la foto con perspectiva aérea)
26. ...

Extracto 3. Situación didáctica "Jugando a ser Arquitectos". Tercer grado de preescolar.

Es importante mencionar que cuando la participación de los niños es autónoma les permite guiar y regular no solo sus propias acciones sino también, las de otros compañeros. De igual manera, para que se logre este momento en la participación de los niños de preescolar, es imprescindible la asistencia de la docente quién a lo largo de diferentes experiencias de aprendizaje es quien sostiene en todo momento la participación de los niños, ya que es quien operacionaliza las acciones alrededor de la actividad geométrica siendo ésta la que propicia que los niños participen realizando diferentes acciones que permitan el cumplimiento de la meta establecida.

Autonomía y transformación del pensamiento. A manera de conclusión, se destaca que la participación que desempeñan los niños dentro de la actividad geométrica es fundamental, ya que ésta les permite desarrollar sus capacidades intelectuales relacionadas con el conocimiento geométrico. El cambio en este sentido consiste en que a partir de la incorporación a la actividad geométrica, comienzan participando de forma periférica, es decir, únicamente estando presentes en la actividad sin manipular ninguno de los materiales y sin hacer ningún tipo de comentario aunque en algunos momentos sus argumentos son a partir de la repetición del lenguaje que da la docente o de las aportaciones de los demás compañeros, pero es legítimo que aprendan porque son testigos de las acciones que realizan sus compañeros frente a ellos, siendo la docente quien se encarga por completo de guiar con cuestionamientos y apoyar realizando acciones geométricas frente a los niños a lo largo de la actividad.

Posteriormente la participación pasa a ser colectiva aunque las acciones de los niños aún son guiadas por la docente a partir de los cuestionamientos concretos reiterándoles y mostrándoles diferentes herramientas culturales y objetivaciones (cuerpos geométricos) que les permiten modificar no solo sus propias acciones sino también dar argumentos y corregir las acciones de otros compañeros y reconsiderar sus decisiones para lograr la meta de la actividad.

En un momento más complejo se observa que la participación de los niños es autónoma, es decir, únicamente es necesario que la docente inicie el discurso con un cuestionamiento general, el cual les sirve de pauta a los niños para comenzar a dar sus aportaciones sin necesidad de que la docente los esté cuestionando de manera concreta. Los niños se muestran con autonomía, pensando con el sistema geométrico y teniendo una comprensión clara de la estructura de la actividad en la que participan, logrando reflexionar, razonar y participar regulando sus propias acciones y las de sus demás compañeros, sin requerir del apoyo directo de la docente porque son ellos quienes dirigen la actividad y la docente únicamente los observa y supervisa. Es importante señalar que en este último momento, se observó un tipo de participación periférica legítima pero en un nivel de pensamiento complejo, es decir, algunos niños dejan de verbalizar sus pensamientos, pero a pesar de ello se observa que están pensando con el sistema geométrico porque realizan las acciones correctamente logrando contribuir para el logro de la meta socialmente establecida.

b. Surgimiento de la Comprensión Progresiva de la Actividad Geométrica.

Un aspecto que se observa en el desarrollo del razonamiento geométrico, son los cambios que sufre la comprensión de la actividad geométrica, en los niños de preescolar desde sus primeras experiencias hasta el final del preescolar cuando ya fueron expuestos a diversas actividades geométricas. Dicha comprensión, implica que conozcan la meta y la estructura organizacional de la actividad la cual los guía para el logro de la meta establecida; se observaron cuatro momentos de cambio, los cuales se ilustran y describen a continuación (figura 14):

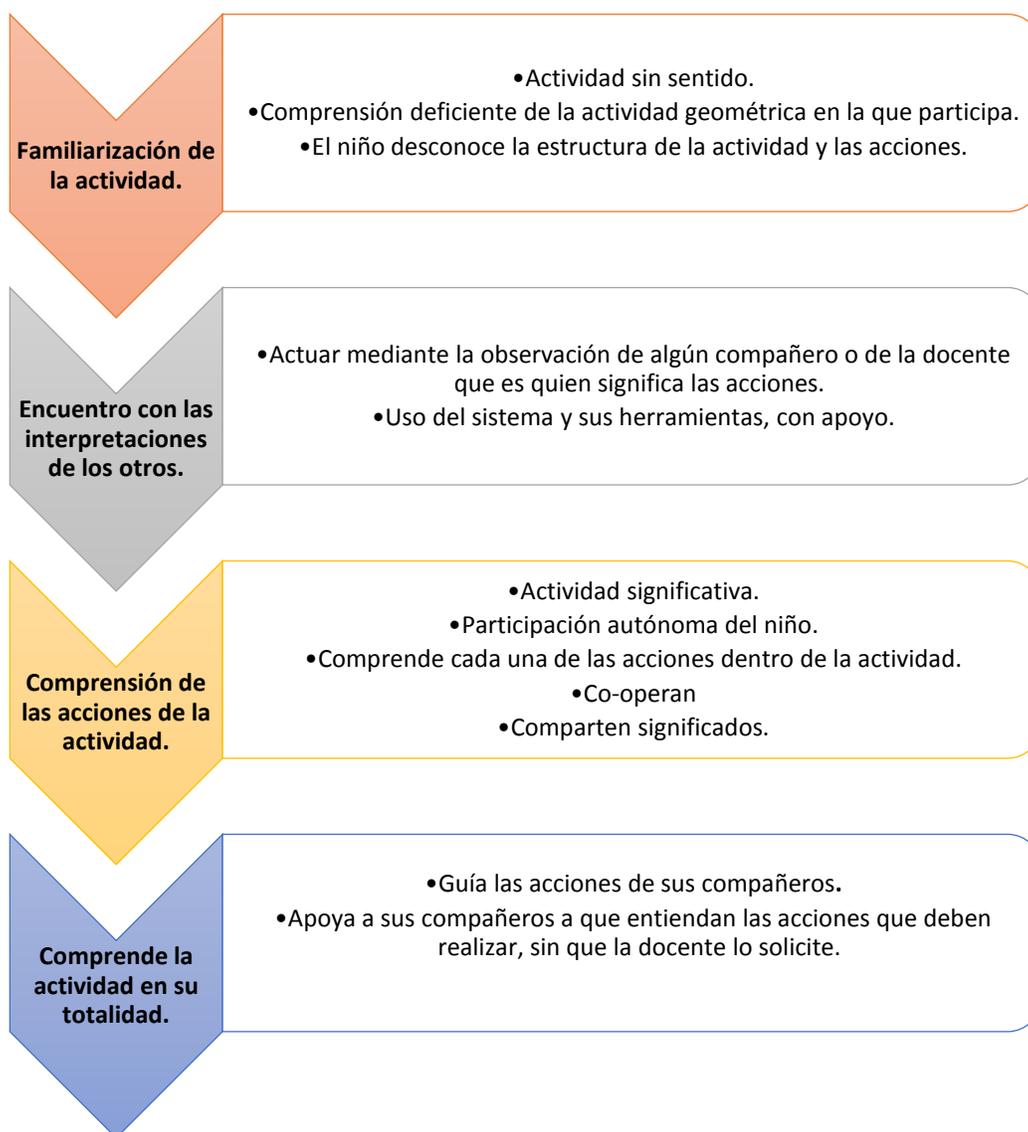


Figura 14. Desarrollo de la comprensión de la actividad geométrica.

Primer momento: Familiarización de la actividad.

Se pudo observar que al inicio, los niños de primer grado, en su primer encuentro con estas actividades, como la “construcción de una casa”, no comprenden que la meta es construir una casa; que una de las acciones que deben realizar es seleccionar materiales, en este caso, cuerpos geométricos (cubos, pirámides y prismas), haciendo uso de representaciones externas, fotos reales de las casas. Por lo que, es la docente quien sostiene un diálogo constante para guiar el entendimiento de los niños en la selección de

cuerpos geométricos, que de manera estratégica fueron elaborados del mismo color (blanco y café) y tamaño, para favorecer el uso específico de las propiedades geométricas; promoviendo que todos los niños comprendieran la actividad en la que participaban (figura 15).



Figura 15. Niños de primer grado de preescolar dentro de la actividad geométrica “Jugando a ser Arquitectos”.

A continuación, en el siguiente extracto se muestra, que los niños de primer grado de preescolar, en la acción: “selección del material, usando fotos reales de cada uno de los lados de la casa que construirían”; no comprenden el significado funcional de la acción que deben realizar para lograr esa sub-meta de la actividad. Se observa que, a pesar de que la docente, en el momento de la contextualización de la actividad, indagó sobre el uso de las fotos, como una herramienta importante que les serviría para construir su casa, como lo hacen los arquitectos, los niños no utilizan la foto real para observar e identificar los cuerpos geométricos que deben seleccionar, van directo a los cuerpos geométricos, como es el caso de Christopher (figura 14, →), siendo la maestra quien lo apoya mostrándole la foto real de la construcción (ver línea 1 y 2, extracto 4).

Momento de la actividad: Selección del material usando fotos reales preestablecidas.

1. **Cristopher:** (se acerca a tomar cuerpos geométricos, sin ver el plano).
2. **M:** *ven Christopher, primero necesito que me digan qué necesitamos (muestra el plano tridimensional).*
3. **Valentina:** *un cuadrado* (señala un cubo).
4. **M:** *¿esto es un cuadrado?*
5. **Cristopher:** *un cubo*
6. **Valentina:** *un cubo, un cubo (selecciona un cubo).*
7. **Valentina:** *también necesitamos un deste* (señala un paralelepípedo).
8. **Cristopher:** (trae un paralelepípedo).
9. **M:** *¿Cómo se llama?*
10. **Isaac:** *prisma*
11. **M:** *se llama paralelepípedo, ¿cuántos necesitamos Isaac? Cuéntalos.*
12. ...

Extracto 4. Situación “Jugando a ser Arquitectos”. Primero de Preescolar.

También podemos observar en el extracto anterior, que los niños mencionan el nombre equivocado del cuerpo geométrico al que hacen referencia y que, aun confunden un cuerpo geométrico, con una figura, porque únicamente consideran una de las características del cuerpo geométrico representado, como Valentina, quien para referirse a un cubo que está observando en la foto real, dice que necesita un cuadrado, haciendo referencia solo a la forma de una de las caras de dicho cuerpo (línea 3, extracto 4); para aclarar su argumento, la maestra *realiza cuestionamientos* que permiten que los demás niños, como Christopher, rectifiquen el nombre del cuerpo mencionado por Valentina, y que en ese momento comprendan la acción que deben realizar (observar, seleccionar y comunicar información geométrica), como se muestra en las líneas 4, 5 y 6 (extracto 4).

De la misma manera, la docente *emplea el lenguaje geométrico* correspondiente, promoviendo así que los niños lo utilicen de manera adecuada para comunicarse con sus compañeros y que la acción sea cada vez más clara para todos los participantes, cuando hacen referencia a un material, como el caso de Valentina, quien al referirse al paralelepípedo únicamente lo señala diciendo: “*un deste*”, porque aún no conoce dicho cuerpo geométrico (línea 7, extracto 4); propiciando que otro compañero reconozca el cuerpo geométrico, al que ella refiere, y lo seleccione, tal fue el caso de Christopher (línea 8, extracto 4) que aunque no conoce el nombre del cuerpo geométrico, que señala

Valentina, logra seleccionarlo (un paralelepípedo), observándose en la línea 9 (extracto 4), que la docente, por medio de un *cuestionamiento general* para todos los niños, pregunta: *¿Cómo se llama?*, promoviendo que, si otro niño conoce el nombre, lo proporcione y, en caso de que los niños no logren usar el lenguaje correcto para comunicarse con sus compañeros, la maestra les *proporciona el nombre* (línea 10 y 11, extracto 4) para que las acciones de la actividad continúen.

Segundo momento: Encuentro con las interpretaciones de los otros.

Así mismo, se observó un momento en el que la maestra es quien ayuda a que los niños comprendan la actividad, significando las acciones. Los niños van reconociendo cual es la meta y las acciones que se requieren. Aunque, esa comprensión es parcial, debido a que ésta les permite realizar solo algunas acciones como identificar y seleccionar objetos geométricos pero sin hacer uso de las representaciones externas porque aún no reconocen la función que tienen dichas herramientas culturales (fotos y esquemas) que tienen presentes; con algunos niños, la maestra realiza *acciones concretas* para guiarlos, debido a que únicamente observan y no aportan ideas para responder a sus cuestionamientos (figura 16).



Figura 16. Niños de primer grado de preescolar dentro de la actividad geométrica: “Jugando a ser Arquitectos”.

Tal es el caso de Isaac (Figura 16, →), en donde las estrategias que la maestra utiliza, para favorecer la comprensión de las acciones indicadas en la sub-meta de la actividad de, “seleccionar material”, son *tomarlo de la mano directamente*, para ayudarlo a seguir la indicación que le había dado, “contar los paralelepípedos” (ver líneas 11-13, extracto 4), posteriormente al haber contado los paralelepípedos que necesitaban, les da la siguiente indicación, seleccionar los cuerpos geométricos correspondientes, pero Isaac únicamente seleccionaba al azar los cuerpos geométricos sin considerar las características, en este caso la docente, recurre a la *comparación concreta* del cuerpo geométrico que necesitan (paralelepípedo) y el cuerpo geométrico seleccionado por Isaac (cubo), propiciando que los observe y reconozca sus propiedades, para determinar cuál necesitaba; así mismo se observa, cómo Isaac recurre a la observación de las acciones que están realizando sus compañeros a su alrededor, para lograr realizar la acción solicitada en la actividad (línea 14-20, extracto 4).

Momento de la actividad: Selección del material usando fotos reales preestablecidas.

11. ...

12. **M: se llama paralelepípedo, ¿cuántos necesitamos Isaac? Cuéntalos.**

13. **Isaac: ... (no cuenta)**

14. **M: uno, dos, tres, cuatro... (Cuenta con Isaac tomándole la mano).**

15. **M: si ya tenemos uno cuántos nos faltan.**

16. **Valentina: cuatro.**

17. **Isaac:** (trae un cubo, mientras Valentina y Christopher traen más paralelepípedos).

18. **M: ¿ese es como este Isaac? (muestra ambos cuerpos geométricos el paralelepípedo y el cubo de Isaac).**

19. **Isaac:** no (observa el de sus compañeros).

20. **Isaac: (busca y trae un paralelepípedo).**

21. **M: bien Isaac, tres y cuatro paralelepípedos.**

Extracto 4. Situación “Jugando a ser Arquitectos”. Primero de Preescolar.

Al recurrir a la observación de las acciones geométricas de la docente o de alguno de sus compañeros, los niños pueden entender la acción que deben desempeñar, dentro del desafío en el que se encuentran. En la medida en la que van utilizando las herramientas culturales y el sistema geométrico, van teniendo mayor claridad de éstas y de la meta que se pretende lograr con la actividad, lo cual, les permite ser más

autónomos, trabajar guiando a los demás compañeros, sosteniendo sus propias acciones y las de los demás, reconstruyendo nuevos conocimientos y significados.

Tercer momento: Comprensión de las acciones de la actividad.

En este momento, la comprensión de la actividad da lugar a, la participación, la observación, el uso de representaciones externas, interacciones entre docente-alumno y a la regulación entre pares. Es decir, los niños participan de forma autónoma para poder lograr una meta socialmente establecida, trabajando de forma conjunta con sus demás compañeros, haciendo uso de sus conocimientos de forma precisa en diferentes momentos de la actividad. Así mismo, se apropian de conocimientos que están disponibles y que pueden utilizar en otros contextos de actividad. Tal es el caso de los niños de tercer grado de preescolar, en los que se observa que cuentan con un nivel más complejo en relación a su comprensión de las acciones que tienen que realizar dentro de la actividad geométrica, debido a que, la docente ya no dirige por completo la actividad, sino que son los niños quienes dirigen cada una de sus acciones, en los diferentes momentos de actividad, haciendo uso de las herramientas correspondientes: tanto las objetivaciones (planos y esquemas tridimensionales abstractos) del sistema geométrico, para seleccionar las cajas de medicina con la forma geométrica correspondiente a la representada en el esquema que necesitan; así como las simbólicas (lenguaje), para compartir y argumentar sus decisiones con los demás compañeros (figura 17).



Figura 17. Niños de tercer grado de preescolar en la actividad geométrica “elaboración de casita vertical”.

En el siguiente extracto (5), se muestra el discurso que ocurrió durante el taller de construcción: “elaboración de casita vertical” en torno a la comprensión de la actividad con la que cuentan los niños de tercer grado de preescolar, la cual les permite compartir los significados y realizar las acciones geométricas con el sentido que tienen en el contexto de esa actividad; realizan aportaciones de forma autónoma, para poder lograr la meta de la actividad, construir los muebles que conforman cuatro espacios de una casa (sala, cocina, recamara, baño y comedor), a partir del uso de cajas de medicina de diferentes formas y tamaños haciendo uso de un esquema bidimensional. Se puede observar que la docente muestra el esquema y les pregunta qué es y para qué sirve, siendo los niños los que reconocen que es un plano y que sin él no sabrían construir. Las docentes entregan las fotos correspondientes y das la instrucción a cada grupo de niños: “*construyan su sala*”, y supervisan el trabajo de los niños (línea 1 y 18, extracto 5). Los niños de tercer grado ya han comprendido la actividad en la que participan y son capaces de regular sus propias acciones y también las de sus compañeros, tal fue el caso de Adriel quien inmediatamente comienza a usar el plano bidimensional y en momentos lo utiliza para explicarle a sus demás compañeros que es lo que está construyendo, siendo capaz también de corregir sus acciones cuando se da cuenta que no lo está haciendo bien y vuelve a empezar (línea 20-28, extracto 5).

Momento de la actividad: Selección de material usando planos bidimensional

1. **M1:** *Fíjense bien, ¿Qué tengo yo aquí? (muestra el esquema bidimensional de la casita vertical)*
 2. **Todos:** *un esquema*
 3. **M1:** *¿para qué me sirve el esquema?*
 4. **Alison:** *para fijarnos como debemos armar...como en donde se calienta...*
 5. **M1:** *donde se calienta es la cocina...ustedes podrían armar su recamara, su sala, su comedor sin el esquema.*
 6. **Todos:** *no*
 7. **M1:** *¿Por qué no Alexia?*
 8. **Alexia:** *Porque no sabríamos cómo*
 9. **M1:** *entonces es necesario nuestro esquema y nuestro plano.*
 10. **Johan:** *sí, porque sin el plano no podríamos y tendríamos que pensar cómo.*
 11. **M1:** *entonces con qué sería más fácil.*
 12. **Algunos niños en plenaria:** *con el plano.*
-

-
13. **M1 y M2:** (reparten los planos y organizan los equipos para que todos construyan un espacio de la casa: sala, cocina, recama, baño y comedor).
 14. **M2:** *A ver Adriel y Ariel a ustedes qué les toco construir.*
 15. **Adriel:** *La sala*
 16. **M2:** *En dónde creen que esta la sala en nuestro plano.*
 17. **Ariel:** *señala la sala en el plano.*
 18. **M2:** *construyan su sala.*
 19. **Ariel:** *toma materiales sin apoyar a Adriel para construir su sala.*
 20. **Adriel:** *toma materiales (cajas de medicina, vacías)...mira lo que nos tocó a nosotros y a ustedes esto (toma el plano y se lo muestra a Alexia) y continua construyendo.*
 21. **Alexia:** *sí esa es la recamara... (observa el esquema) necesitamos uno más pequeño (toma un paralelepípedo).*
 22. **Adriel:** **(continua construyendo observando el esquema y sin ayuda de Ariel)...**
 23. **Adriel:** **(observa detenida mente el esquema)...ya me fije... (destruye su construcción), aquí está la sala y para comer.**
 24. **Alexia:** *necesitamos muchos cuadrados.*
 25. **Adriel:** *necesitamos cajas de medicina (señala el prisma cuadrangular que tenía Joshua)*
 26. **Ariel:** *(le pasa una caja de medicina en forma de paralelepípedo)*
 27. **Joshua:** *hay que intercambiarlo (cambian sus primas porque eran de diferente tamaño y Joshua necesitaba el más grande que era el que tenía Adriel).*
 28. **Adriel:** *ya acabamos...*
-

Extracto 5. Situación Didáctica "Elaboración de casita vertical". Tercer grado de preescolar

De igual manera, podemos observar que, en este momento, algunos niños ya no verbalizan lo que están pensando, únicamente realizan las acciones de selección, observación y construcción del objeto que les corresponde, y piden ayuda de sus compañeros cuando requieren un material que no tienen, siendo capaces de colaborar para el logro de la meta (ver línea 25-28, extracto 5). Es decir los niños, comparten la interpretación y co-operan dentro de la actividad.

Es importante resaltar, que la comprensión de la actividad no ocurrió de manera espontánea en cada uno de los niños de preescolar, sino que estuvo sostenida en todo momento por un *agente social*, la docente, quien era la que asistía y guiaba a los niños en cada uno de los diferentes momentos de la actividad, para el logro de la meta, apoyándose en diferentes cuestionamientos que guiaban el pensamiento de los niños, y hacía uso de *agentes culturales* como lo son, las representaciones externas (fotos y

planos de construcciones tridimensionales y bidimensionales de diferentes perspectivas) que presentaba a los niños, en el momento apropiado, para que sirviera de mediación en la comprensión de los niños.

Cuarto momento: Comprende la actividad en su totalidad.

Así mismo, se observó que, cuando los niños han adquirido una comprensión de las actividades geométricas y de las acciones que éstas requieren, son capaces de guiar a todos sus compañeros a lo largo de las actividades y que a partir de su inmersión en la actividad logran concentrarse en ella hasta que ésta finalice, como lo fue el caso de Ailtón, un niño de tercer grado de preescolar, quien al estar participando en un taller de construcción en el cual la actividad requería que, con sus compañeros de equipo, Dominic, Valeria y Nancy, crearan una construcción, haciendo uso de cuerpos geométricos de diferentes formas, a nivel del piso; pero, que debido a un problema de salud, tuvo que ser retirado del lugar de trabajo, aunque no afuera del salón, no podía continuar manipulando el material (figura 18).



Figura 18. Niños de tercer grado de preescolar dentro de la actividad.

La actividad continuaba, Ailtón era asistido por una de las tres docentes que se encontraban colaborando en el grupo, mientras que la docente a cargo, continuaba realizando *cuestionamientos* tanto de manera general y por equipos para propiciar que los niños dieran argumentos y explicaciones, sobre el tipo de material que utilizaron para la elaboración de su construcción, la cual era una casa con cuatro paredes, como se muestra en el siguiente extracto de la situación: “Jugando a ser arquitectos”, de tercer grado de preescolar.

Momento de la actividad: Análisis de su propia construcción, sin esquemas.

1. **Ailtón:** (es alejado del lugar de trabajo por cuestiones de salud -le comienza a salir sangre de la nariz-)
2. **M:** *a ver el equipo de Vale. Bien, muy grandota su casa* (observando la casa que construyeron). *Cuéntenme qué cuerpos geométricos utilizaron para construir su casa.*
3. **Valeria:** *cubos.*
4. **M:** *cubos...muy bien, qué más ocuparon Dominic.*
5. **Dominic:** *....*
6. **M:** *a ver apóyalo Valeria que ocuparon*
7. **Valeria:** *paralelepípedos*
8. **M:** *¿Cuáles son los paralelepípedos, Valeria?*
9. **Valeria:** (se levanta y señala el paralelepípedo)
10. **M:** *Muy bien Valeria. ¿Qué otros cuerpos geométricos utilizaron?, Nancy.*
11. **Nancy:** *cubos*
12. **M:** *muy bien qué más... ¿Cómo se llama éste?* (señala el prisma hexagonal).
13. **Valeria:** *prisma cuadrangular*
14. **M:** *¿prisma cuadrangular?...a ver chicos (se dirige a todo el grupo)...dime Joshua como se llama este* (señala el prisma hexagonal).
15. **Ailtón:** (antes de que conteste Joshua) *¡prisma hexagonal!*
16. **M:** *muy bien Ailtón...un prisma hexagonal.*

Extracto 6. Situación “Jugando a ser Arquitectos”. Tercer grado de preescolar.

En el extracto anterior, es importante resaltar que, aunque las condiciones en las que se encontraba Ailtón no eran favorables, estando alejado del lugar de trabajo, sin manipular el material; siempre permaneció atento y centrado en la actividad en la que se encontraba participando con su equipo, por ello atendió al cuestionamiento de la docente (línea 14 y 15) en el momento preciso, porque sabía de qué estaban hablando y reconocía ese cuerpo geométrico (prisma hexagonal). Permittiéndonos ejemplificar la importancia de que los niños comprendan las actividades y que éstas tengan un significado y un

sentido, manipulando también herramientas geométricas que pueden reconocer a partir de sus propiedades que las conforman, aunque sean complejas.

Comprensión de la actividad. A manera de conclusión, partiendo de los datos obtenidos y mencionados anteriormente, se describe que la comprensión de las actividades geométricas consiste, en que los niños pasen de un momento inicial, en el cual la actividad no tiene ningún sentido para ellos y únicamente realizan acciones sin un entendimiento significativo de la importancia de las herramientas que están utilizando, ni de la meta por la cual están trabajando, siendo la docente quien sostiene totalmente las acciones de los niños, recurriendo a diferentes estrategias y recursos como: el cuestionamiento concreto, uso del lenguaje geométrico, proporcionar el nombre geométrico, hacer énfasis en la herramienta que van a utilizar (fotos y planos tridimensionales), tomar de la mano directamente a los niños para ayudar a contar o hacer la acción solicitada y realizar la comparación concreta entre diferentes cuerpos geométricos; logrando pasar a un momento, en el que requieren comprender el porqué de sus acciones, recurren a la observación de las acciones de alguien más experto, lo cual en un inicio es sin sentido, aunque realice las acciones; posteriormente, los apoyos y la observación permiten, que comprendan significados e interpretaciones en relación a la meta y las herramientas que deben utilizar para el logro de la misma, tomando decisiones geométricas, sin necesidad de verbalizar lo que están pensando; y en un punto máximo, comprenden las acciones de la actividad, y por ende, pueden usar sus conocimientos en momentos posteriores y en contextos diferentes, sin apoyo de la docente, compartiendo su comprensión guiando a sus demás compañeros que muestran un nivel más elemental.

Así mismo, es la docente quien a lo largo de la actividad, al hacer uso del lenguaje geométrico correspondiente, pone a disposición de todos, en el plano público, el conocimiento geométrico en sus primeras experiencias. Siendo en el plano colectivo y social, en el que surge la comprensión de la actividad en la que se participa, allí se dan

los diferentes planos de intersubjetividad, para que los niños construyan y reconstruyan sus conocimientos geométricos, es decir, que interpreten la realidad.

c. Establecimiento de las Condiciones de la Actividad.

Dentro de la actividad geométrica, así como es importante comprender las acciones de la actividad, también es relevante un entendimiento de las reglas y condiciones que permiten que todos los niños co-operen y colaboren para alcanzar la meta correspondiente; se observa que en un principio éstas condiciones son establecidas por la maestra, especialmente en el momento de inducción y contextualización de la actividad; negociando con los niños para que comprendan las reglas, tanto de cada una de las acciones, como de roles y turnos que tenían que desempeñar dentro de la actividad geométrica en la que participan. En la figura 19, a partir del análisis realizado, se muestran los momentos de cambio que conllevan a la comprensión de las reglas y condiciones de la actividad, los cuales se describen a continuación:

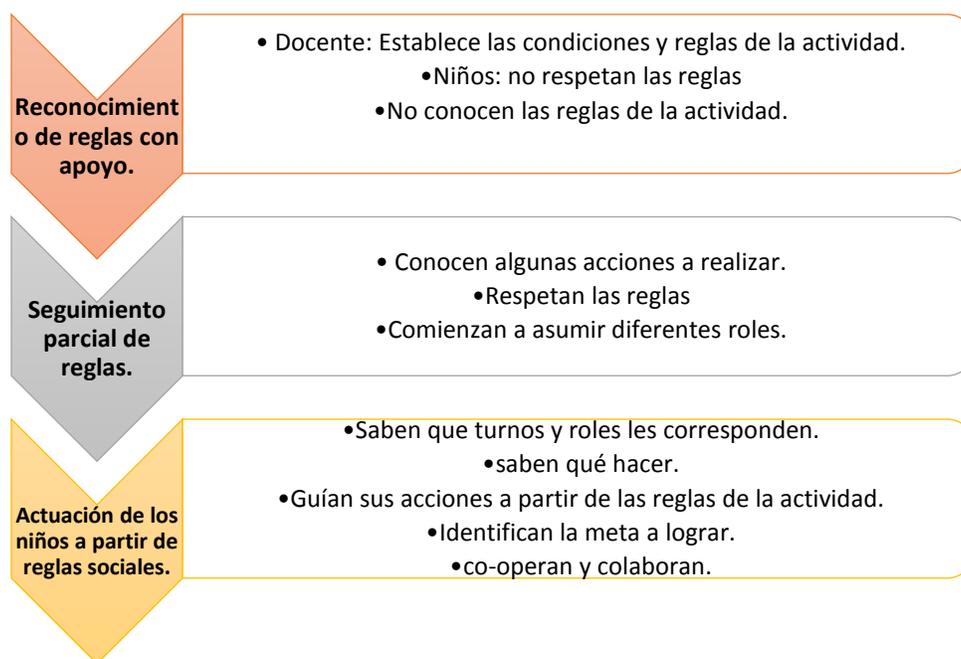


Figura 19. Desarrollo de la comprensión de las reglas y condiciones de la actividad.

Primer momento: Reconocimiento de reglas con apoyo.

En este primer momento, se observó que los niños comienzan a reconocer la forma de organizarse y las reglas que deben seguir en la actividad realizando algunas acciones, pero éstas aun no tienen sentido para ellos, ya que únicamente imitan y repiten lo que hacen sus demás compañeros, guiados por la docente, es decir, la docente mediante cuestionamientos, establece los roles y la organización del trabajo de los niños para que puedan distribuirse las funciones en la actividad y lograr la meta. Tal es el caso de algunos niños de primer grado de preescolar a quienes les tiene que especificar a detalle cada acción que tienen que realizar, desde cómo organizarse, hasta indicarles mediante cuestionamientos qué tienen que ir haciendo, señalar, observar, mencionar, reconocer, seleccionar materiales y armar (figura 20).



Figura 20. Niños de primer grado de preescolar reconociendo las reglas y organización para construir la maqueta de un parque.

En el siguiente extracto 7, se describe a detalle el discurso de los niños, en el cual podemos observar, la maestra va guiando, a Valentina, Ángel, Isaac y especialmente a Salvador, mediante la *repetición de cuestionamientos específicos e instrucciones directas*, en la actividad de Evaluación: “construyendo la maqueta de un parque”, durante

el momento de la organización, el cual requería del uso de la representación externa (foto aérea de la maqueta) y del reconocimiento de sus características empleando puntos de referencia y ubicación espacial (derecha e izquierda).

Momento de la actividad: organización con la representación externa (foto aérea de la maqueta del parque).

1. **M:** *para empezar a construir nuestra maqueta de un parque nos vamos a dividir por parejas, Salvador con Valentina y Ángel con Isaac (muestra la foto con perspectiva aérea del parque). Agrega: a Salvador y a Valentina les toca construir la parte izquierda del parque, ¿Cuál es la parte izquierda del parque?*
2. **Salvador:** *mmm...*(únicamente observa la foto, pero no responde nada)
3. **M:** *¿Cuál es la parte izquierda?*
4. **Valentina:** *esta* (señala el lado izquierdo de la foto del parque)
5. **Salvador:** (señala el lado izquierdo)
6. **M:** *y ¿Qué hay en la parte izquierda de nuestro parque?*
7. **Salvador:** *un columpio*
8. **Ángel:** *un sube y baja* (éste se encontraba del lado derecho)
9. **M:** *el sube y baja ¿está del lado izquierdo?*
10. **Valentina:** (mueve la cabeza indicando que no)
11. **M:** *a ver, ¿Cuál es la parte izquierda?*
12. **Salvador:** *esta*, (señala el lado derecho del parque, recostándose sobre la mesa)
13. **M:** *¿esta es la parte izquierda?* (señalando la parte derecha)
14. **Salvador:** *si, si, si*, (señalando cualquier punto en la foto)
15. **Valentina:** *no, esta*, (señala el lado izquierdo)
16. **M:** *Muy bien Valentina. Dijimos que hay un columpio* (señala el columpio) *y ¿Qué más hay a la izquierda de nuestro parque?*
17. **Valentina:** (mueve la mano de la maestra porque no alcanzaba a ver) *esta* (señala la mesita)
18. **Salvador:** (solo observa)
19. **M:** *esta, verdad, es una mesa y Ángel e Isaac van a construir el lado derecho de nuestro parque, ¿Qué hay del lado derecho?*
20. **Isaac:** *una resbaladilla* (señala)
21. **M:** *¿Qué más hay?*
22. **Ángel:** *este y este* (señalando el sube y baja y el columpio)
23. **M:** *no, pero del lado derecho, ¿qué hay?*
24. **Ángel:** *este, este* (solo señala el lado derecho)
25. **M:** *pero, ¿Qué hay?*
26. **Salvador:** (solo observa y señala al azar imitando a Ángel)
27. **Valentina:** *una resbaladilla y un sube y baja*
28. **M:** *entonces a Ángel y a Isaac les toca hacer el sube y baja y la resbaladilla y a Valentina y a Salvador, el columpio y la mesita.*

Extracto 7. Situación de Evaluación "construyendo la maqueta de un parque", primero de preescolar.

En el extracto anterior, podemos observar que es la maestra quien organiza la actividad y asigna los roles que realizarán por parejas de trabajo (línea 1, extracto 7), posteriormente, realiza cuestionamientos en torno al sistema de representación que deben usar para saber que juegos les toca construir por lo que deben identificar en primera instancia el lado izquierdo o derecho. En el caso de Salvador, se observa que aún no reconoce que una regla de la actividad es utilizar la herramienta (foto o esquema) para lograr realizar la acción de identificación del lado izquierdo de la foto para saber que juegos le corresponde construir, por lo que la docente repite la indicación de manera general para todos los niños, propiciando con ello que Valentina señale el lado correspondiente (izquierdo) y con ello Salvador repite la acción de Valentina aunque esta acción no tenga sentido para él (líneas 2-5, extracto 7). Posteriormente, al solicitarles que identifiquen los juegos que deberán construir de acuerdo al lado indicado, Salvador identifica solo uno, mientras que Ángel menciona uno de los juegos que corresponden al lado derecho, lo cual propicia que la docente vuelva a solicitar que identifiquen el lado izquierdo, y Salvador ahora señala el lado derecho mencionando que ese es el izquierdo, aunque ya había identificado correctamente el izquierdo (línea, 11-15), lo cual indica que las acciones de Salvador únicamente son por repetición sin entendimiento de que el uso de la herramienta es importante para poder seleccionar los materiales necesarios.

Por lo que, podemos observar como la docente en un primer momento va guiando a los niños para que identifiquen en la foto qué juegos construirán de acuerdo a la organización, como una regla necesaria que deben respetar para poder realizar sus construcciones. Así mismo, los niños aún no han comprendido las reglas de la estructura de la actividad y aunque en algunos casos logran realizarlas solo por imitación, no tienen sentido para ellos, y por lo tanto no pueden respetarlas en momentos posteriores.

Segundo momento: Aceptación y Seguimiento parcial de reglas.

En este momento se observó que los niños comienzan a aceptar y seguir las reglas de la actividad en la que participan, para poder lograr la meta, a partir de acciones y

cuestionamientos específicos que realiza la docente para que respeten las reglas, lo cual aún no ocurre en su totalidad, ya que requieren de apoyo docente constante, y en algunos casos únicamente repiten las acciones o comentarios que dan otros compañeros o la docente, tal es el caso de los niños de segundo grado que al participar en la actividad, jugando a ser arquitectos, en el momento del reconocimiento de la herramienta que necesitan usar para la selección del material, van reconociendo cada una de las instrucciones que deben seguir para poder construir su casa, como *observar la herramienta, identificar los cuerpos geométricos representados en ésta, contar y posteriormente seleccionar el material concreto* (figura 21).



Figura 21. Niños de segundo grado de preescolar en la situación didáctica “Jugando a ser Arquitectos.”

En el extracto 8 se ejemplifica el discurso del momento de la actividad, reconocimiento de la herramienta cultural (fotos reales), en el que podemos observar que con los niños de segundo grado de preescolar, la docente es la que organiza y

proporciona las reglas que deben respetar para lograr la meta de la actividad, así mismo es va indicando el uso constante de la herramienta cultural (fotos reales de la casa) y a partir de *cuestionamientos específicos* como: “¿saben que es esto?”, guía el discurso de los niños propiciando que en el caso de Julieta intente reconocer la herramienta y que esta le servirá para poder construir, mientras que Thalía y Alexa aun no reconocen la importancia que tiene el uso de la herramienta y únicamente confirman los comentarios que escuchan que aporta Julieta pero sin comprender (líneas 1-14, extracto 8).

Momento de la actividad: Reconocimiento de la herramienta (fotos reales preestablecidas).

1. **M:** *saben qué son estos (muestra las fotos preestablecidas)*
2. **Julieta:** *Esquemas*
3. **M:** *¿son esquemas?*
4. **Julieta:** *planos*
5. **M:** *¿Por qué dicen que son planos?*
6. **Ximena:** *porque tiene figuras.*
7. **Julieta:** *porque tiene figuras en el aeroplano*
8. **Ximena:** *no son aeroplanos*
9. **M:** *¿están de acuerdo que son planos?*
10. **Thalía:** *sí*
11. **M:** *¿para qué sirven los planos?*
12. **Julieta:** *para construir.*
13. **M:** *¿si estás de acuerdo Alexa?*
14. **Alexa:** *sí.*
15. **M:** *¿Por qué?*
16. **Alexa:** *(no responde).*
17. **M:** *ahora vamos a trabajar por equipos, hagamos un pequeño círculo Alexa, Nicole, Rodrigo, Ximena e Iker.*
18. **M:** *les voy a dar los planos que la maestra Hortensia les mostro hace un momento (entrega todas las fotos de todas las perspectivas de la casa) con ellos nos vamos a guiar para construir nuestra casa, vamos a ocupar el material que tenemos en las dos cajas. ¿Qué vamos a hacer Iker?*
19. **Iker:** *.... (no contesta)*
20. **M:** *Rodrigo ¿Qué vamos a hacer?*
21. **Rodrigo:** *una casa*
22. **M:** *¿con qué la vamos a hacer?*
23. **Iker:** *con cuerpos geométricos*
24. **M:** *¿de dónde vamos a obtener los cuerpos geométricos?*
25. **Alexa:** *de las dos cajas (señala las cajas que contienen los cuerpos geométricos).*
26. **M:** *¿Qué más vamos a necesitar para saber cómo construir nuestra casa?*
27. **Nicole:** *planos.*

Extracto 8: de la situación “Jugando a ser Arquitectos”. Segundo grado de preescolar.

Así mismo, en el extracto anterior también se observa como la docente continua organizando y guiando la actividad, en el caso de Rodrigo, Alexa e Iker, la docente les da las reglas de lo que deben hacer para poder construir su casa, y posteriormente los cuestiona para conocer si las han comprendido (líneas 17-25, extracto 8).

El extracto anterior puede ejemplificar, cómo en este momento, para que los niños conozcan las reglas de la actividad, la docente debe realizar *acciones y cuestionamientos precisos* que permitan que los niños reconozcan que para poder construir una casa es importante emplear los planos que representan los materiales que seleccionaran, favoreciendo que sigan y comprendan las reglas, aunque en algunos casos no comprender del todo la función de la herramienta que están utilizando en ese momento.

Tercer momento: Actuación de los niños a partir de reglas sociales.

En un momento máximo, se puede observar que los niños al comprender la actividad en la que participan y las reglas sociales, solicitan algún material que consideran necesario para lograr la meta de la actividad en un determinado momento como una regla que no pueden dejar pasar. Es decir, comprenden la actividad y al conocer claramente su estructura, que es la que los guía, les permite regular sus propias acciones mostrando así un desempeño más autónomo dentro de la actividad en la que participan, como se observa en la Figura 22, en donde niños de tercer grado de preescolar se ven expuestos a realizar una construcción pero sin hacer uso de representaciones externas (planos tridimensionales) los cuales en un momento anterior aprendieron a utilizar, como una condición necesaria para poder realizar una construcción previamente establecida, pero que, por la dinámica de la actividad en este momento no debían usar, ya que ahora debían realiza el diseño de una casa, construida por ellos mismos, y posteriormente elaborar su representación externa (plano) bidimensional de su casa construida de forma tridimensional con diferentes cuerpos geométricos.



Figura 22. Niños de tercer grado de preescolar realizando una construcción sin una representación externa previa en la situación didáctica: “Jugando a ser arquitectos.”

Dicho ejemplo se describe más detalladamente en el siguiente extracto, en el cual podemos observar, como Johan (Figura 22, →), al inicio de la actividad escucha las indicaciones de lo que tiene que realizar y solicita un plano para poder construir una casa (línea 2, extracto 9), por su experiencia en una actividad anterior en la que usó planos preestablecidos para poder realizar la construcción de una casa, le resulta complejo poder asumir que ahora es el momento de realizar la construcción sin usar ningún plano, pero a pesar de ello realiza la acción de construir con todos sus compañeros y al finalizar, comprende que pudo realizar su construcción sin hacer uso de una representación externa que es esencial para el logro de una actividad, pero que también se puede realizar de manera inversa, respetando ahora otro tipo organización en el que las reglas cambian y ahora los momentos en los cuales se usan las herramientas de representación externa no aparecen en primera instancia para el logro de la meta (línea 3-6, extracto 9).

Momento de la actividad: Retomando la actividad y realización de su propia construcción.

28. M: El día de hoy continuaremos trabajando en nuestro taller de construcción. Hoy vamos a construir nuestras casas pero no les voy a dar planos, ustedes tienen que construirla como ustedes quieran...

29. Johan: ¡¡Pero necesitamos los planos porque si no, no sabremos cómo construir!! (sorprendido)

30. M: Si. Pero en esta ocasión será sin planos para que ustedes puedan hacer sus propias construcciones...

....construcción...(pasado el tiempo establecido la docente continuo aplicando motores cognitivos)

31. M: ¡Muy bien niños! Cada quien con su equipo. Ok vamos a ver las casas que construyeron nuestros equipos. A ver el equipo de Sarahí ¿qué cuerpos geométricos utilizaron para construir su casa?

32. Sarahí: cubos, pirámides...

33. (mientras la docente cuestionaba a los integrantes de otros equipos, ocurría un diálogo entre Johan y Adriel)

34. Johan:(observa su casa construida) Nos quedó bien bonita nuestra casa, ¿verdad?

35. Adriel: Sí (asienta con la cabeza)

36. Johan: ¡yyyy! (muy contento) Y lo más importante... sin nuestro plaa... nooo!!... siii!!!

37. Adriel: (Sonríe).

Extracto 9. Situación Didáctica "Jugando a ser Arquitectos". Tercer grado de preescolar

El extracto anterior muestra cómo es que los niños van conociendo la estructura que tiene la actividad en la que participan y que es esta estructura la que guía sus acciones como el caso de Johan quien después de haber tenido experiencias en el uso de los planos y conocer la importancia que tiene el utilizarlos, como herramientas que permiten la elaboración de una construcción, solicita un plano para poder trabajar y queda sorprendido de que en esta ocasión no tendrá que usar un plano. Al finalizar las construcciones él se da cuenta de que realiza una construcción muy bonita, pero lo más importante para él, fue que lo hizo sin utilizar un plano, es importante mencionar que en dicha actividad estaba planteado que los niños elaboraran sus propios planos después de sus construcciones. Dicha comprensión es posible, debido que en todo momento estuvo sostenida por la estructura de la actividad, las reglas y roles, que se tenían que desempeñar para un fin en particular.

Conocimiento de la estructura de la actividad que lo guía. El cambio consiste en cómo los niños van aceptando tanto las reglas así como también las condiciones de la actividad en la medida en que van comprendiendo dicha actividad. Es decir, cómo pasan de un momento en el que no respetan las reglas, porque no comprenden la función de éstas, y aunque en ciertos casos los niños logran realizar acciones respetándolas, guiados por cuestionamientos concretos de la docente, éstas son por imitación porque aun la estructura de la actividad no tiene ningún sentido para ellos y por lo tanto en momentos posteriores siguen sin respetarlas.

Es importante mencionar que en la medida en que la docente va proporcionando las reglas y guiando la comprensión de los niños a partir de acciones y cuestionamientos concretos para que logren realizar las acciones establecidas en la estructura de la actividad, los niños van entendiendo que dicha estructura les permitirá lograr la meta de la actividad, en este caso construir una casa a partir de la observación de planos y fotos reales preestablecidas; logrando un momento más complejo en el que al ser expuestos a una actividad similar pero en la que se cambia una de las reglas de la estructura de la actividad, los niños consideran necesario respetar las reglas que ellos ya conocían para poder realizar sus acciones, pero ahora se enfrentan a una nueva estructura que los guía para el logro de la meta, la cual asumen y pueden reconocer que también es válida, para lograr una meta similar, construir una casa pero empezando por la construcción directa sin la utilización de planos o fotos que indiquen como construir la casa.

d. Funcionamiento de las Herramientas Geométricas simbólicas y objetivaciones.

En este apartado, se considera importante describir cómo funcionan las herramientas geométricas tanto simbólicas, como lo es el lenguaje geométrico, como las materiales las cuales tienen implícito el sistema geométrico, es decir, son las objetivaciones del sistema y son de dos tipos de: ubicación espacial y geométrica (planos

y esquemas); que fungen como representaciones externas que los niños pueden emplear dentro de una actividad para realizar acciones geométricas.

Así mismo, el uso de estas herramientas está determinado por la actividad, ya que es ahí donde adquieren sentido y median semióticamente en el contexto de la actividad, en primera instancia en un contexto social y posteriormente al ser comprendidas median en un plano interno. Es decir, las herramientas se convierten en herramientas cuando están en uso dentro de la actividad geométrica social y son los niños los que deben lograr definir cómo se usa, cuándo se usa y para qué se usa (figura 23).

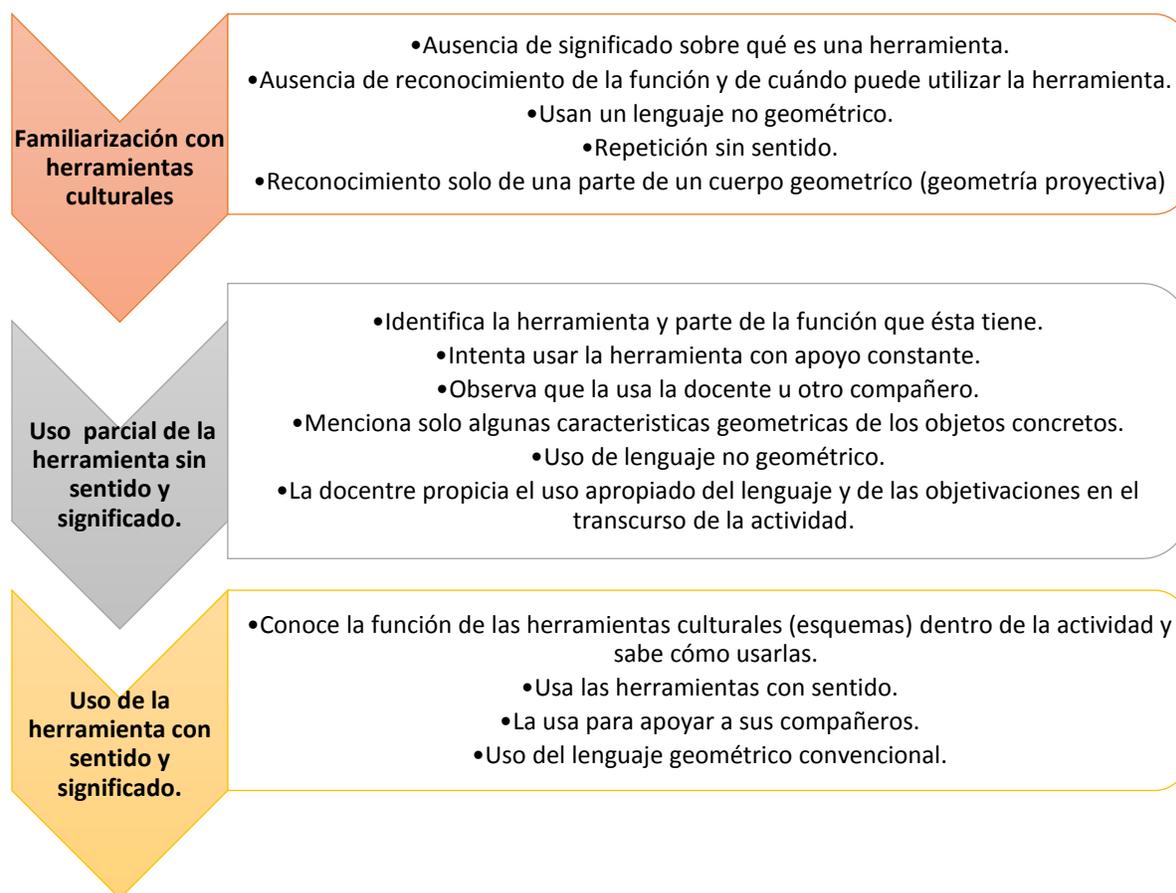


Figura 23. Desarrollo del sentido y significado compartido de las herramientas culturales (lenguaje y objetivaciones del sistema geométricos).

En los siguientes apartados se describe cómo las herramientas culturales (lenguaje y objetivaciones) adquieren sentido y significado al entrar en funcionamiento dentro de la actividad social; así mismo, cómo este significado se va compartiendo entre todos los niños, tanto en el plano social como en el plano interno al momento en el que las utilizan para comunicarse y realizar acciones geométricas para el logro de la meta establecida de la actividad en la que son partícipes.

Primer momento: Familiarización con las herramientas culturales.

En un primer momento, los niños comienzan a familiarizarse con las herramientas culturales, simbólicas y objetivaciones, que no conocen y que se ven en la necesidad de utilizar porque son partícipes de una actividad geométrica particular. Se observó que los niños usan un lenguaje no geométrico al momento de contestar a cuestionamientos de la docente para compartir y comunicar información, mencionando el nombre concreto del objeto o material real que usaron. Así mismo, al no contar con el lenguaje geométrico ni reconocimiento de herramientas externas, los niños recurren a la repetición sin sentido del lenguaje que la docente les proporciona a partir de *cuestionamientos concretos*, aunque en este momento es la docente quien hace uso del lenguaje geométrico para ponerlo en el plano social a disposición de los niños (Figura 24).



Figura 24. Niños de primer grado de preescolar en el momento de contextualización y reconocimiento de un plano en la situación didáctica: “Jugando a ser arquitectos.”

Con respecto al uso y reconocimiento del lenguaje geométrico (herramienta simbólica), en el siguiente extracto 10 se observa el discurso que la docente realiza en el momento de la actividad correspondiente a la contextualización para que los niños logren identificar las propiedades geométricas que tienen los objetos concretos que han utilizado para realizar una construcción. Tal es el caso Nashla, quien al momento de responder a los *cuestionamientos concretos*: ¿Qué han construido? y ¿Qué utilizaron?, emplea los nombres concretos de los objetos que utilizó para construir un castillo, mencionando que utilizo cajas, arena, cubetas e indica los pasos que siguió para realizarlo, sin considerar ninguna forma geométrica de dichos objetos (línea 3, 5, 10 y 11). Por lo que la docente *ejemplifica* con una de las construcciones que realizaron anteriormente, la cual fue construir muebles con cajitas de medicina, para que todos los niños dieran sus argumentos con respecto a esa actividad, observándose que es ella quien va guiando el discurso de los niños con preguntas cada vez más concretas e incluso señalando los objetos específicos que utilizaron, en el caso de Daniela ella únicamente menciona que son materiales, por lo que la docente les pregunta ¿con qué materiales?, y en esta ocasión, Sofía responde que son cajas de medicina, aún sin mencionar las formas geométricas de esas cajas de medicina, sino hasta el momento en el que la docente les pregunta si esas cajas de medicina tienen la forma de un cuerpo geométrico, siendo Valentina quien intenta reconocer la forma geométrica del refrigerador, mencionando que era un paralelepípedo, lo cual era incorrecto, pero rectifica su respuesta menciona que es un paralelogramo, mientras que Sofía menciona que es un cilindro, por lo que la docente recurre a *mostrar* el refrigerador que utilizaron y al observarlo Nashla menciona que es un cuadrado, ya que únicamente considera una de las partes de ese cuerpo geométrico, y es la docente quien les menciona parte del nombre geométrico (un prisma...) para que lo identifiquen logrando que Nahomi, Nashla, Valentina, Christopher, Sofía, Ángel completen correctamente el nombre (cuadrangular) y es la maestra quien *verbaliza* el nombre completo, prisma cuadrangular (línea 12-30).

Momento de la actividad: Contextualización

1. **M:** *Vamos a trabajar matemáticas, ¿Ustedes han construido algo?*
 2. **Christopher:** sí
 3. **M:** *¿Qué han construido?*
 4. **Daniela:** *una casa...*
 5. **Nashla:** *un castillo...*
 6. **Salvador:** *yo un robot...*
 7. **M:** *¿una casa?, ¿Cómo?*
 8. **Daniela:** *una casa, con ladrillos*
 9. **Nahomi:** *un castillo, con arena.*
 10. **M:** *A ver Nashla*
 11. **Nashla:** *yo hice un castillo de arena, agarre una cubeta, la llene con arena y luego la puse así (moviendo sus manos) al revés.*
 12. **M:** *pero aquí, ¿recuerdan que han construido?...hace poco construimos unos muebles. ¿recuerdan?*
 13. **Todos:** *sí (señalan los muebles que construyeron) para nuestra casa.*
 14. **M:** *¿Con qué lo hicimos?*
 15. **Daniela:** *Con materiales.*
 16. **M:** *con materiales, ¿con qué materiales?*
 17. **Sofía:** *con cajitas de medicina.*
 18. **M:** *ok, construimos muebles con cajitas de medicina, pero esas cajitas ¿tenían algún cuerpo geométrico?*
 19. **Nahomi:** *sí, el refrigerador.*
 20. **M:** *¿pero, qué forma tenía el refrigerador, que cuerpo geométrico tenía?*
 21. **Valentina:** *paralelepípedo...*
 22. **M:** *No, no es un paralelepípedo*
 23. **Valentina:** *paralelogramo.*
 24. **M:** *No.*
 25. **Sofía:** *cilindro.*
 26. **M:** *se los voy a enseñar. (muestra el refrigerador en forma de prisma cuadrangular) ¿Qué era?*
 27. **Niños:** (observan).
 28. **Nashla:** *cuadrado.*
 29. **M:** *no, un prisma ¿Qué?*
 30. **Nahomi, Nashla, Valentina, Christopher, Sofía, Ángel:** *cuadrangular (completaron la frase de la maestra).*
 31. **M:** *un prisma cuadrangular, muy bien, entonces si usamos cuerpos geométricos, verdad. Ok, toda esta semana vamos a jugar a que somos arquitectos, ¿Saben que es un arquitectos?*
 32. **Daniela:** *no*
 33. **Valentina:** *es uno que construye cosas*
 34. **M:** *¿qué construirá?*
 35. **Valentina:** *construye un enorme castillo*
 36. **M:** *¿estás de acuerdo Nahomi?*
 37. **Nahomi:** (no contesta)
 38. **Daniela:** *no, una casa*
 39. **M:** *pero a ver un arquitecto va y construye una casa o cómo le hará...*
 40. **Nashla:** *con ladrillos*
-

-
41. **Daniela:** *con materiales*
42. **M:** *pero antes de construir la casa qué creen que necesite...*
43. **Valentina:** *las instrucciones*
44. **M:** *pero si no tiene nada que leer, cómo le hace...*
45. **Nashla:** *pues lo tiene que ver bien en su esquema.*
46. **M:** *¿Cómo le llamamos a su esquema? ¿Qué es un esquema Nahomi?*
47. **Nahomi:** *es donde seguimos las instrucciones para construir algo.*
48. **M:** *yo les voy a enseñar un esquema pero es un plano, ¿se acuerdan que es un plano?*
49. **Sofía:** *una hoja*
50. **M:** *¿Qué tiene esa hoja Sofía?*
51. **Sofía:** *los materiales que necesitamos*
52. **Nashla:** *una imagen*
53. **M:** *los materiales, una imagen. Les voy a enseñar los planos de la casa que después vamos a construir. obsérvenlos, ¿Qué tienen?*
54. **Todos:** *observan*
55. **Nashla:** *un cono, un rectángulo...*
-

Extracto 10. Situación Didáctica "Jugando a ser Arquitectos". 1ro. de preescolar.

Así mismo, en relación a los planos (objetivación del sistema), se observa que los niños reconocen parcialmente esta herramienta de representación ya que en este momento no saben el nombre, únicamente mencionan algunas de las funciones y características que éste tiene. Como fue el caso de Sofía quien menciona que, un plano es una hoja que tiene los materiales que necesitarán (para construir su casa), y seguido de esto Nashla menciona que esa hoja tiene una imagen. Por lo tanto la maestra después de haber *guiado* los argumentos de los niños *muestra los planos* y permite que los niños observen los cuerpos geométricos que están representados en él, propiciando que reconozcan la funcionalidad de esta herramienta que ya habían utilizado en actividades anteriores (líneas 42-55, extracto 10).

En resumen, podemos observar como la docente va guiando el discurso de los niños para favorecer que hagan uso tanto del lenguaje como de las herramientas externas en las que se representan los cuerpos geométricos, propiciando que pasen del lenguaje no geométrico, a un lenguaje geométrico convencional, aunque en este momento sea la docente quien verbaliza de manera precisa los argumentos de los niños y hace uso del lenguaje correcto.

Segundo momento: Uso parcial e interpretación de la herramienta.

En un segundo momento, cuando los niños ya han sido participes de diferentes actividades en las cuales han utilizado el lenguaje geométrico como herramienta simbólica, al igual que han usado representaciones externas, son capaces de reconocerlos y utilizarlos de forma parcial, ya que aunque conocen la función aún lo confunden con otro tipo de herramienta. Tal es el caso de los niños de segundo grado de preescolar, quienes para poder reconocer los esquemas requieren de muchos apoyos concretos de la docente para poder diferenciarlos de otro tipo de herramienta como lo es un instructivo, y para que lo utilicen correctamente la docente debe indicarles constantemente que “observen el esquema”. Con respecto al lenguaje geométrico su uso aún es muy general mencionando solo algunos términos geométricos y en el caso de Iker (1) no logra usar el lenguaje geométrico, únicamente señala y mueve la cabeza para comunicarse por lo que la docente va generando a partir de cuestionamientos concretos el uso adecuado del lenguaje (Figura 25).



Figura 25. Niños de segundo grado de preescolar en el momento de contextualización, presentación de la herramienta y selección de material en la situación didáctica: “Robot.”

El extracto 11 muestra el discurso que realiza la docente para guiar las acciones de los niños de segundo grado de preescolar, en este caso al momento de cuestionarlos sobre si han construido algo, los niños aun recurren al uso del lenguaje no geométrico. Tal fue el caso de Thalía e Iker quienes responden que construyeron un árbol y unas escaleras pero no explican cómo lo construyeron, mientras que Julieta reconoce de manera general que al construir una casa ella ha utilizado cuerpos geométricos, y no hace mención del nombre de los cuerpos geométricos que ha utilizado. Por lo que la docente recurre a *señalar* un material que en algún momento han usado para construir, a lo que Nicole responde indicando el nombre del material concreto diciendo: “bloques” por lo que la docente pregunta ¿Qué forma tienen los bloques?, pero los niños aun no son capaces de abstraer en su totalidad las características geométricas de los materiales concretos (línea 1-17).

Momento de la actividad: contextualización y presentación de la herramienta

1. **M:** *Hoy en matemáticas vamos a trabajar en nuestro taller de construcción. ¿ustedes han construido algo?*
 2. **Thalía:** *un árbol*
 3. **M:** *y tu Alexa e Iker, ¿han construido algo?*
 4. **Iker:** *unas escaleras*
 5. **M:** *y, ¿cómo construiste tu escalera?*
 6. **Iker:** *lo veo en mi tele*
 7. **Julieta:** *yo una casita*
 8. **M:** *y cómo has construido tu casita*
 9. **Julieta:** *con cuerpos geométricos*
 10. **M:** *¿con cuerpos geométricos?*
 11. **Julieta:** *sí...*
 12. **M:** *A ver, cuando estamos aquí y usamos ese material (señala cuerpos geométricos de plástico)*
 13. **Thalía:** *yo construí un árbol, y una casita con figuras geométricas*
 14. **M:** *Nicole, tú has construido algo, con qué material...*
 15. **Nicole:** *sí, con bloques*
 16. **M:** *y, ¿qué forma tienen los bloques?*
 17. **Nicole:** *no me acuerdo.*
 18. **M:** *Bueno, nosotros vamos a empezar a construir nuestro robot, les voy a dar un esquema, ¿para qué nos sirve el esquema?*
 19. **Thalía:** *para ver...*
 20. **Alexa:** *para ver...*
 21. **M:** *¿para ver, qué?, Nicole, ¿para qué nos sirve un esquema?*
 22. **Nicole:** *para ver los pasos que siguen.*
 23. **M:** *para ver los pasos que siguen...es como un instruc...*
-

24. **Alexa y Nicole: instructivo...**
25. **Thalía: *pero no estamos hablando de un instructivo***
26. **M: *estamos hablando de un esquema. A cada uno le voy a dar sus esquemas por equipos para que pasen a escoger sus cuerpos o figuras geométricas que necesitan. Aquí tenemos el esquema, obsérvenlo.***
27. **M: si ya observaste tu esquema escoge tu material Nicole.**
28. **Nicole: (pasa y escoge dos cilindros)**
29. **M: *¿Qué son?***
30. **Nicole: *cilindros***
31. **M: y qué parte del robot son...**
32. **Nicole: *sus manos, (sobrepone los cuerpos geométricos sobre el esquema)***
33. **M: *ahora pasa Alexa y Julieta***
34. **Alexa y Julieta: (escogen un paralelepípedo grande)**
35. **Julieta: *este es para el cuerpo***
36. **M: Ahora pasa Alan e Iker.**
37. **Alan: (toma dos cilindros como los de Nicole aunque ya observo el esquema)**
38. **Iker: (toma un paralelepípedo como el de Julieta aunque ya observo el esquema)**
39. **M: a ver Iker que parte tomaste del robot.**
40. **Iker: (solo hace señas indicado que es la boca del robot, señalando su boca y la del robot)**
41. **M: *todos tomen el material que necesiten y revisen que este completo...a ver ¿qué tenemos de aquí?***
42. **Julieta: *con este vamos a hacer el cuerpo (señala el cuerpo geométrico en forma de paralelepípedo que ella tomo)***
43. **Iker: *observa.***
44. **M: y tú *¿Qué parte del robot tomaste?***
45. **Iker: (señala el cuerpo del robot en el esquema, sin hablar)**
46. **M: el robot tiene dos cuerpos**
47. **Iker: (moviendo la cabeza indica que no)**
48. **M: *entonces dejemos solo uno.***
49. **Julieta: (selecciona más material) *este plato y ¿este cómo va? (cilindros)***
50. **M: fíjate en el esquema**
51. **Julieta: (intenta seleccionar más material sin usar el esquema)**
52. **M: *trae el esquema, a ver obsérvalo, que más falta***
53. **Julieta y Jazmín: identificar las figuras geométricas que deben usar para la cara de su robot)**
54. **Jazmín: (toma un rectángulo grande para la boca)**
55. **M: A ver mídelo, *¿si le queda? Observa el esquema***
56. **Jazmín: (toma un rectángulo pequeño para la boca)**
57. **M: *Miren el esquema este material va así, es su cabeza ¿si le queda?***
58. **Jazmín: *sí***
59. **M: *¿Ya tienen todo el material?***
60. **Todos: *sí***
-

Extracto 11. Situación Didáctica "Taller de construcción de un robot". 2do. de preescolar.

Así mismo, en el extracto anterior podemos observar como los niños en este

momento al presentárseles el esquema (tridimensional de la construcción), únicamente responde que es para ver, tal fue el caso de Thalía y Alexa, quienes no dan más que esa respuesta a pesar de que la docente les pregunta: ¿para ver qué?, mientras que Nicole lo relaciona con la función de otro tipo de herramienta mencionando que es para ver los pasos que siguen, siendo la maestra quien proporciona el nombre de esa herramienta a la que Nicole está haciendo referencia: “como un instructivo”, pero Talía logra reconocer que en la actividad no están hablando de un instructivo (líneas 18-25, extracto 11). Así mismo, al realizar el uso e interpretación del esquema para poder construir un robot, los niños en algunos casos como el de Julieta, mencionan el nombre de los objetos reales concretos (platos) o se refieren a un objeto diciendo, “este” en lugar del nombre correspondiente a la forma geométrica que tiene el material que están usando, o en el caso de Iker quien hace uso del esquema observándolo para poder seleccionar el material correspondiente pero no logra expresar con palabras a que parte del robot corresponderá ese cuerpo geométrico que ha seleccionado ni menciona ninguno de los cuerpos geométricos que observa dentro de la representación y aunque la docente lo cuestiona diciéndole ¿Qué parte del robot es?, Iker solamente realiza señalamientos para indicar que ha tomado la parte que corresponde a la boca del robot, señala su propia boca y la boca del robot representado en el esquema. Por lo que en este momento la docente constantemente debe reiterar que deben observar el esquema para saber que materiales seleccionaran y a que parte del robot corresponde cada pieza, al igual que con Julieta quien se pregunta en dónde va uno de los materiales que selecciono o Jazmín que no logra seleccionar la figura geométrica correspondiente a la boca del robot (líneas 38-49, extracto 11).

Resumiendo, podemos mencionar que en este segundo momento la comprensión de los niños con respecto al uso de las herramientas es parcial, debido a que únicamente reconocen una de las características geométricas de los objetos, es decir, solo diferencian que hay cuerpos geométricos y figuras geométricas pero no reconocen el nombre específico de cada una de éstas recurriendo al señalamiento de las mismas para

dar a conocer a que figura se refieren, de igual manera intentan identificar la herramienta a partir de su función pero la confunden con otra herramienta, por lo que aun la docente debe proporcionar estos conocimientos al mismo tiempo en el que van haciendo uso de éstas. La participación y guía de la docente es muy constante aún debido a que *sostienen* en cada momento las acciones que deben realizar los niños, *señalando, haciendo comparaciones y cuestionamientos específicos* para favorecer el uso del esquema así como del uso del lenguaje geométrico convencional para comunicar lo que observan en el esquema.

Tercer momento: Uso de la herramienta con sentido y significado para comunicarse.

En un tercer momento, los niños muestran mayor comprensión sobre el uso y la función que tienen las herramientas, como el lenguaje geométrico el cual está relacionado con el nivel de representación geométrica que los niños tienen de dicho sistema, es decir, los niños son capaces de abstraer el contenido geométrico que ya conocen de un objeto en particular aunque éste no esté presente de forma concreta de tal manera que pueda visualizarlo, y para poder compartir lo que están pensando, recurren a la representación enactiva (se abordará en el siguiente apartado), para que sus compañeros puedan conocer el objeto al que se está haciendo referencia. Lo cual indica que los niños *usan el lenguaje geométrico convencional para comunicar información de las propiedades geométricas de algún objeto concreto* permitiéndonos conocer su pensamiento.

Así mismo, podemos observar cómo en este momento complejo, cuando los niños ya han internalizado la funcionalidad de las herramientas, y éstas tienen un sentido significativo para ellos dentro de una actividad en particular, da lugar a otras capacidades de razonamiento más complejas como la argumentación, la justificación, corrección o rectificación de diversas acciones, promoviendo así la toma de *decisiones en los niños*. Tal es el caso de Julieta (señalada con flecha) que es la única niña que realiza la

selección de los materiales haciendo uso de sus esquemas, mientras que los demás niños (Denisse, Andrés y Thalía) solamente seleccionan el material al azar (figura 26).



Figura 26. Selección de material utilizando sus esquemas

Así mismo, cuando las herramientas tienen sentido y significado para los niños favorece la regulación entre pares, la cual se puede observar en el extracto 12 de la 1er. Prueba de Evaluación “Construyendo la Maqueta de un Parque” de Segundo grado de Preescolar en el momento de la organización y construcción de su maqueta; en la que Julieta regula las acciones inmediatas que están realizando sus demás compañeros Andrés y Thalía quienes toman materiales al azar mientras que ella sabe que necesitan los esquemas para saber cómo van a realizar su construcción y les comparte ese conocimiento indicándoles que deben esperar a que la maestra les de los esquemas, justificando su respuesta con apoyo de la docente quien le pregunta el para qué necesitan el esquema, por lo que Julieta responde: “para fijarnos cómo va” (líneas 2-8). De igual manera, se observa que el esquema le permite a los niños seleccionar el material correcto y usar el mismo esquema como herramienta para justifica sus decisiones a partir de la observación del mismo lo cual favorece el diálogo con sus compañeros, como se observa en las líneas 15-21 cuando Julieta toma la mayor cantidad de cubos para su construcción

y Thalía no está de acuerdo porque ella no hace uso de su esquema y no ha identificado que Julieta los necesita por lo tanto Julieta le explica que sí los necesita porque lo indica el esquema.

Momento de la actividad: organización y construcción.

1. **M:** *ok, vamos a comenzar a construir nuestro parque, pero para eso nos vamos a organizar en parejas y ver que les toca.*
2. **M:** *aquí está el material que van a ocupar para construir.* (Les acerca el material didáctico después de que les mostro el plano del parque con perspectiva aérea para que observaran las características que tenían que considerar).
3. **Andrés y Thalía:** (toman los materiales al azar, inmediatamente después de que la maestra termina la instrucción anterior)
4. **Julieta:** ***vamos a poner esto del centro (observando y señalando el plano de la perspectiva aérea que les mostro la Maestra)***
5. **M:** *al final lo vamos a poner...les voy a dar unos esquemas de lo que tienen que construir* (le entrega los esquemas primero a Julieta)
6. **Julieta:** ***(observando a Andrés y a Thalía) No...espérense, espérense, primero que nos dé los esquemas.***
7. **M:** *¿Por qué Julieta, para qué necesitamos los esquemas?*
8. **Julieta:** ***Para fijarnos cómo van.***
9. **M:** *¿Por qué estas tomando estos materiales Andrés?*
10. **Andrés:** *¿Eh?*
11. **M:** *¿Los vas a utilizar?*
12. **Andrés:** *Sí.*
13. **M:** *¿En dónde?*
14. **Andrés:** (observa el esquema que le proporciono la maestra pero no logra dar una justificación)
15. **Julieta:** ***(cuenta ocho cubos que necesita observando su esquema y los toma)***
16. **M:** *Aquí están los esquemas* (Toma el esquema y lo pone en un lugar más visible para Andrés)
17. **Julieta:** *Maestra, no necesitamos esto...(un arbolito)*
18. **M:** *¿No los necesitan, por qué no los necesitan?*
19. **Julieta:** *sí mejor sí*
20. **Thalía:** ***¡¡Tienen muchos cubos!! (Le dice a Julieta).***
21. **Julieta:** ***si, porque nos indica aquí (señala el esquema y cuenta) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.***

Extracto 12. 1er. Prueba de Evaluación "Construyendo la maqueta de un parque". 2do. de preescolar.

A manera de resumen podemos decir que en este momento, la herramienta adquiere sentido de modo que permite realizar diversas acciones, como la regulación, la toma de decisiones y la argumentación y justificación de esas decisiones, dentro de una

actividad geométrica social. Es importante resaltar que la comprensión y significado que los niños van teniendo sobre las herramientas culturales, como lo son las representaciones externas, esta sostenido principalmente por la asistencia que proporciona la docente, ya que es ella quien propicia que los niños recurran al uso de las herramientas a partir de los diferentes cuestionamiento que realiza dentro del diálogo con los niños, para que puedan argumentar él por qué de sus decisiones.

Sentido y significado compartido de las herramientas. El cambio consiste en que las herramientas culturales van adquiriendo sentido y significado para los niños en la medida en que las requieran para la realización de alguna actividad, utilizando a la par el lenguaje geométrico para comunicar la información geométrica representada en el esquema. Dicho cambio pasa de un momento en el que la herramienta no significa nada para los niños y es aquí donde la acción de la docente es importante y más precisa , ya que es ella quien utiliza la herramienta para mediar las acciones de los niños dentro de una actividad geométrica y es quién le significa la herramienta en un primer momento a los niños para que puedan apropiarse del uso correcto, posteriormente en un segundo momento los niños van comprendiendo el uso de estas herramientas aunque aún requieren de apoyos para considerar durante todo el momento de la actividad el uso de las herramientas culturales y que en situaciones posteriores puedan solicitarla y emplearla de manera autónoma para tomar decisiones. Logrando así establecer un significado compartido de la herramienta entre la docente y sus alumnos.

Resumiendo este apartado podemos mencionar que la actividad geométrica social promueve el desarrollo de las capacidades cognitivas geométricas, siendo una condición necesaria que los niños participen dentro de ella, ya que la participación crea la posibilidad de que surjan los procesos de pensamiento en los niños y aunado a ello permite que paulatinamente comprendan la actividad geométrica social y las reglas que debe seguir para realizar las acciones geométricas correspondientes y el uso de las herramientas para el logro de la meta que este establecida; todo sucede colocado dentro de la actividad.

7.2.2 La Matemización geométrica y la Interpretación de la Realidad.

En el apartado anterior, se describió la importancia de la participación que posibilita la comprensión de la actividad geométrica socialmente reconocida como espacio dinámico y su estructura, así como también la comprensión de las herramientas culturales cuyo uso está dado por dicha actividad, lo cual corresponde únicamente a las condiciones que propician el surgimiento de las expresiones del razonamiento geométrico en niños de preescolar, *capacidades simbólicas*, que al integrarse dan lugar al desarrollo del razonamiento geométrico el cual implica la realización de *acciones simbólicas* para interpretar el mundo haciendo uso del sistema geométrico, es decir, el pensamiento se va anclando a la actividad geométrica social.

Por lo que en el presente apartado se describe cómo es que surgen y se desarrollan las *capacidades simbólicas geométricas* en los niños de educación preescolar, mostrando los momentos de cambio de las expresiones del razonamiento geométrico considerando el proceso de matemización usando el sistema propio de la geometría. Dicho proceso de matemización geométrica inicia con el reconocimiento de un problema enmarcado en la realidad, el cual el niño debe sistematizar e interpretar en términos del sistema geométrico, es decir, debe ser capaz de traducir el problema real a un problema meramente geométrico para dar una solución usando las herramientas materiales y simbólicas correspondientes a este dominio de conocimiento, y finaliza con la traducción de esa solución geométrica ahora en términos de la situación real para el logro de la meta establecida en la actividad (ver figura 27).

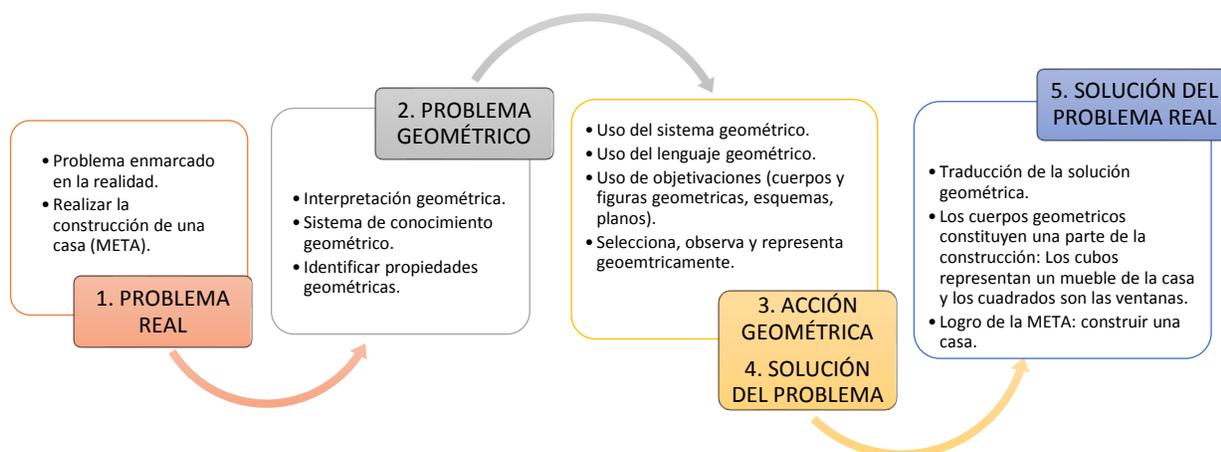


Figura 27. El ciclo de la Matemización en la actividad geométrica.

Por ello, se mostraran las evidencias del desarrollo del razonamiento geométrico el cual implican el uso de la geometría como parte del proceso de la matemización, dichas categorías se describen en los siguientes apartados: el desarrollo de la **alfabetización geométrica** (lenguaje geométrico); la capacidad de **elaboración** de representaciones externas, enactiva y gráficas; la **capacidad de interpretación y uso** de representaciones externas preestablecidas (fotos y esquemas) y representaciones elaboradas dentro de la actividad.

a. La Alfabetización Geométrica dentro de la Actividad.

En este apartado se describirá el desarrollo de la alfabetización geométrica, es decir el uso del lenguaje propio de la geometría como sistema simbólico. A lo largo del ciclo escolar se observó que los niños de preescolar intentan emplear el lenguaje geométrico para comunicar lo que están pensando o para referirse a algún objeto con forma geométrica en el transcurso de las actividades haciendo uso de la señalización del objeto concreto al que refieren. Así mismo, se observó que el uso del lenguaje geométrico favorece la comunicación entre la docente y los niños que participan dentro de la actividad geométrica porque su uso no ocurre por sí solo, sino que está *sostenido* por las acciones

de la docente quien lo utiliza, poniendo en el plano social dicho lenguaje propio de la geometría para que los niños tengan acceso a éste, lo reconozcan y utilicen. Para ello, la docente utiliza diferentes estrategias facilitando que los niños logren usar el lenguaje apropiado en los diferentes momentos en los que se comunican con sus compañeros: el primer recurso que utiliza la docente en una situación didáctica, es el *cuestionamiento* o aplicación de motores cognitivos para conocer los conocimientos previos con los que cuentan los niños respecto a la temática y los términos geométricos que se emplearan en las actividades, como lo es el nombre de algún cuerpo o figura geométrica en particular, promoviendo la participación de los niños. Posteriormente utiliza el *señalamiento* de propiedades geométricas para que los niños identifiquen las propiedades, después realiza el *conteo* de las mismas y si los niños no logran reconocer las propiedades internas de la figura la maestra realiza la *comparación* entre cuerpos y/o figuras geométricas; en los casos en los que a los niños aun con todas las ayudas anteriores se les dificulta reconocer y emplear el lenguaje geométrico correspondiente al nombre de una figura, la maestra les *proporciona* dicho nombre.

A partir del análisis realizado se encontró que el uso del lenguaje geométrico pasa por diferentes momentos de desarrollo en la medida en la que los niños participan en actividades que implican el uso del mismo; los cuales se agruparon por nivel de complejidad: en un primer momento se considera el lenguaje no geométrico; en el segundo el lenguaje parcial para intentar diferenciar entre una figura y un cuerpo geométrico; en el tercer momento el uso del lenguaje a partir de la observación y conteo de las propiedades de figuras y cuerpos geométricos familiares; y, un cuarto momento en el que los niños usan de manera convencional el lenguaje geométrico. Dichos momentos se describen a continuación (figura 28).

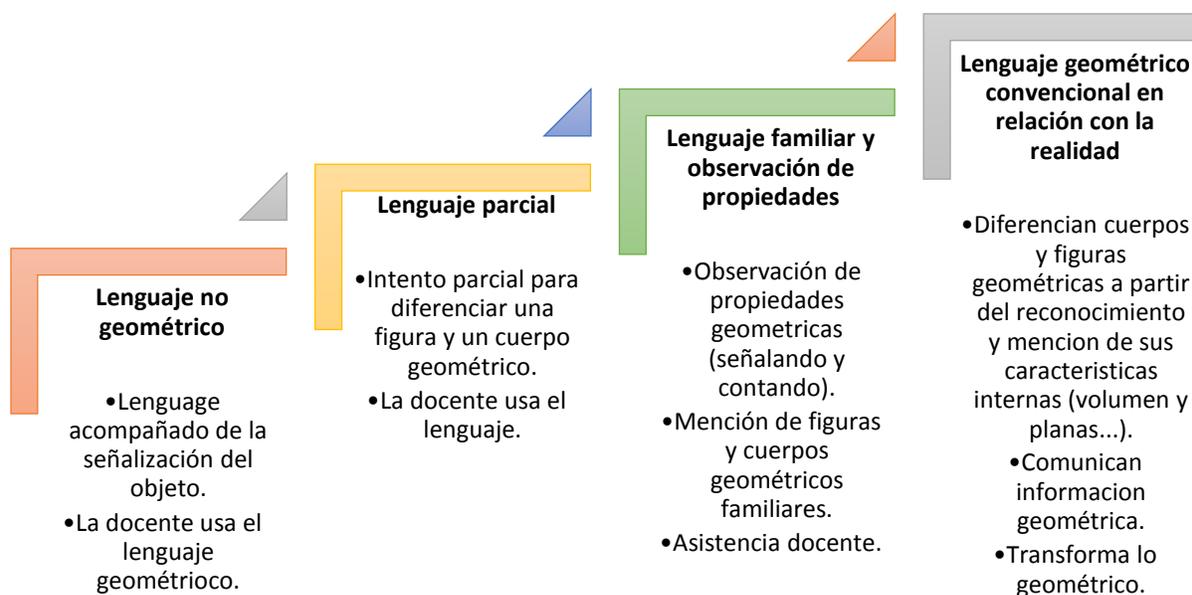


Figura 28. Desarrollo del uso del lenguaje geométrico en la actividad.

Primer momento: Lenguaje no geométrico.

Este primer momento se observó que los niños al ser partícipes en sus primeras actividades geométricas emplean un lenguaje en el que no emplean los términos propios de la geometría por lo que lo complementan haciendo el señalamiento del objeto concreto al que se refieren.

En el siguiente ejemplo se ilustra el momento en el que los niños de primero de preescolar participan en la actividad jugando a ser arquitectos, durante el momento **adidáctico** [el cual, según Brousseau (1986), hace referencia a un momento de aprendizaje en el que el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en lo concerniente al saber que se pone en juego]. En este momento de actividad la instrucción de la docente únicamente es que exploren diferentes materiales (cuerpos geométricos), los cuales eran de color blanco y café para que los niños pudieran observar y referir especialmente a las propiedades geométricas del

cuerpo y no a propiedades no geométricas como el color. Se observa que los niños exploran el material y lo toman sin mencionar el nombre geométrico de cada uno de éstos y porque desconocen los nombres geométricos de los objetos que están manipulando y por ende no reconocen las características particulares que los conforman, por lo que únicamente mencionan: "este y este" o "como está allí" señalando directamente el cuerpo o la figura geométrica a la que están haciendo referencia, aunque en algunos casos pueden identificar que existen diferentes cuerpos geométricos a los que les corresponde un nombre en particular. Cabe mencionar que este momento de actividad solo duraba 5 minutos en los que la docente supervisaba las acciones de los niños sin intervenir (ver figura 29).



Figura 29. Niños de primer grado de preescolar en la situación "jugando a ser Arquitectos"

En el siguiente extracto se observa el discurso de los niños durante este momento de actividad, en el que la maestra pone a disposición de los niños los materiales en forma de diferentes cuerpos geométricos, sin mencionarles qué son, pero solicitando que observen cómo son. En el caso Christopher (1), el selecciona un material y solo señala la base en forma de hexágono del cuerpo geométrico (prisma hexagonal) y dice "mira"; de la misma manera se observa que Ángel (2) solo refiere a los cuerpos geométrico como

materiales y ambos no usan el lenguaje geométrico para describir el objeto que están explorando (línea 1-5, extracto 13).

Momento de la actividad: Momento a-didáctico.

1. **M:** *Aquí tenemos un material que vamos a utilizar* (la maestra pone a disposición de los niños diversos cuerpos geométricos de cartón), *explórenlo, véanlo, fíjense que son, cómo son...*
2. (todos los niños toman material de forma indiscriminada)
3. **Salvador:** *Mira este, mira este (al tomar un cubo).*
4. **Christopher:** *maestra mira* (toma un prisma hexagonal y señala la base sin mencionar cómo se llama).
5. **Ángel:** *encontré un material* (toma un prisma hexagonal y únicamente lo muestra y sigue tomando material)
6. **Salvador:** *mira ya encontré otra, aquí hay otra (toma más cubos y se los muestra a Brandon).*
7. **Daniela:** *mira, ten este* (toma una pirámide cuadrangular y se la da a Ángel)
8. **Ángel:** (toma una pirámide triangular y observa su base)...*mejor este* (prefiere tomar la pirámide cuadrangular de Daniela)
9. **Salvador:** *mira ya encontré otra (le enseña un paralelepípedo a Brandon)...mira, encontré otra (toma una pirámide triangular).*
10. **Brandon:** (no menciona nada, solo toma cuerpos geométricos al azar).

Extracto 13. Situación “Jugando a ser Arquitectos”. Primer grado de preescolar.

Así mismo, se observa el caso de Salvador (3), quien para poder comunicarse con Brandon (4) nombra a todos los cuerpos geométricos con el término “este”, “otra”, aunque tengan diferente forma geométrica, porque aún no cuenta con el lenguaje geométrico convencional ni considera las propiedades geométricas de los diferentes cuerpos para diferenciar uno de otro, definiendo de la misma manera un cubo, un paralelepípedo o una pirámide cuadrangular (línea 3, 6, 9 y 10, extracto 13).

Segundo momento: Lenguaje parcial para diferenciar entre figuras y cuerpos geométricos.

Este momento observado implica la alusión de un cuerpo geométrico mencionando que tiene diferentes formas y al intentar describirlo nombran muchas figuras geométricas. Tal es el caso de los niños de primer grado quienes mencionan que cuando realizaron una construcción usaron “cubos de formas” pero al momento en el que la docente los

cuestiona para conocer a que formas se refieren, mencionan que “de formas de cuadrado, de triangulo” (ver figura 30).



Figura 30. Niños de primer grado de preescolar en la 1er Prueba de Evaluación. “Construyendo la Maqueta de un Parque”.

En el siguiente extracto 14, se observa el discurso de Valentina (1) y Ángel (2), quienes participan en la primera prueba de evaluación “Construyendo la maqueta de un Parque”, en el momento de la contextualización en el que Valentina intenta comunicar que ha construido un castillo con cubos de formas y refiere que los cubos tienen formas de cuadrado, de triángulos, por lo que la docente pregunta de manera general si los cubos tienen forma de triángulo, a lo que Ángel asienta que sí moviendo la cabeza.

Momento de la actividad: Contextualización

1. **M:** *El día de hoy en nuestra clase de matemáticas vamos a trabajar en nuestro taller de construcción, pero antes díganme, ¿ustedes han construido algo?*
 2. **Ángel y Valentina:** *sí (mueven la cabeza indicando que sí)*
 3. **M:** *¿tú qué has construido Valentina?*
 4. **Valentina:** *yo no tengo cubos*
 5. **M:** *no tienes cubos, pero ¿has construido algo?*
 6. **Valentina:** *un castillo*
 7. **M:** *y ¿Cómo lo has construido?*
 8. **Valentina:** *con una bandera y con una puerta*
 9. **M:** *¿Qué utilizaste para hacer tu castillo?*
-

-
10. Valentina: *cubos de formas*
11. M: *¿cubos de formas, de qué formas?*
12. Valentina: *de cuadrado, de triángulos de...*
13. M: *¿hay cubos de formas de triángulos?*
14. Ángel: (mueve la cabeza indicando que sí hay cubos de forma de triángulos).
15. M: *¿Cómo se llama la figura?*
16. Ángel: *triángulos y otro cubos*
17. M: unos son cubos y otros son triángulos.
18. ...
-

Extracto 14. Situación “Jugando a ser Arquitectos”. Primer grado de preescolar.

Podemos observar que en este momento los niños aún no tienen presentes las propiedades geométricas internas que caracterizan a los cuerpos geométricos y que los diferencian de las figuras geométricas, por lo que recurren a la mención de figuras que conocen de forma indefinida.

Tercer momento: Lenguaje geométrico familiar y observación de propiedades.

Este momento de desarrollo del uso del lenguaje geométrico muestra que los niños comienzan a tener noción de las propiedades geométricas que conforman los objetos concretos, logrando utilizar términos geométricos familiares, para ello recurren al conteo y a la señalización de dichas características. En este momento aun la asistencia docente es indispensable para el uso del lenguaje.

Se observó que en este momento los niños únicamente mencionan figuras geométricas familiares, las cuales identifican en los materiales concretos que están manipulando a partir del reconocimiento de las propiedades geométricas internas que conforman cada cuerpo o figura geométrica para poder diferenciarlos de los demás aunque no reconozcan el nombre convencional en el caso de figuras y cuerpos geométricos poco usuales. Se observó que recurren al señalamiento de las propiedades geométricas, señalan los vértices y los lados en el caso de las figuras geométricas y las caras, los vértices, las aristas y bases en el caso de los cuerpos geométricos; posteriormente los niños realizan el conteo de las propiedades geométricas, lo cual es en

un inicio con apoyo y guía de la docente para que puedan contar las propiedades correctamente, y que en otros momentos pueda reconocerlas de forma autónoma sin errores. Tal fue el caso de los niños de segundo grado de preescolar cuando en la actividad deben explicar cómo realizaron alguna construcción mencionando que utilizaron triángulos, círculos, cuadrados y cubos que son figuras y cuerpos geométricos con los cuales ya están familiarizados. Pero al momento de presentarles un material con una forma poco familiar para los niños, como el octágono, se les dificulta reconocerlo e identificarlo por su nombre geométrico y por lo que la *docente* les ofrece apoyos para que en primera instancia observen las propiedades geométricas internas que conforman ese objeto y que a partir de ello logren reconocer el nombre geométrico de esa figura (ver figura 31).



Figura 31. Niños de segundo grado de preescolar en la 1er Prueba de Evaluación. “Construyendo la Maqueta de un Parque” identificando el octágono a partir de sus características.

En el siguiente extracto se observa el discurso de los niños cuando participan en el momento de análisis del material de la primera prueba de evaluación “construyendo la maqueta de un parque”; en donde Thalía (2) no reconoce la figura geométrica en forma de *octágono* que está observando y Julieta (1) la confunde con *un rombo, un círculo o un cilindro* ya que es una *figura poco familiar para ella*; mientras que Andrés (3) intenta justificar porque no puede ser un círculo recurriendo a las *propiedades geométricas* internas de dicha figura aunque únicamente contando los vértices sin mencionar cómo

se llaman (línea 14, extracto 15) por lo que la maestra realiza un *cuestionamiento general* siendo Julieta quien responde que lo que señala Andrés son “vértices” y la maestra lo puntualiza haciendo un conteo general de vértices al mismo tiempo que los va señalando uno a uno, mencionando que si tienen vértices no puede ser un círculo, pero Julieta (1) lo confunde aun con un cilindro por lo que la docente realiza una *comparación física* entre un cilindro y el octágono para que puedan observar las diferencias y posteriormente les proporciona el nombre correcto de esa figura (octágono), puntualizando que si tienen 8 vértices se llama octágono (líneas 7-32, extracto 15).

Momento de la actividad: Análisis del material

1. **M:** *Vamos a analizar el material que exploraron. A ver ¿Quién utilizo este material?* (toma el octágono)
 2. **Thalía:** *yo, yo lo utilice...lo puse aquí* (señala el círculo en donde lo colocó)
 3. **M:** *¿Qué es aquí donde lo pusiste?*
 4. **Thalía:** *Aquí*
 5. **M:** *¿Cómo se llama?*
 6. **Julieta:** *Un círculo* (mueve su mano dibujando en la mesa un círculo).
 7. **M:** *en el círculo. Y esto ¿Qué es? (muestra el octágono nuevamente).*
 8. **Julieta:** *un rombo.*
 9. **M:** *¿es un rombo?*
 10. **Julieta:** *es un círculo.*
 11. **M:** *¿es un círculo?*
 12. **Andrés:** *no*
 13. **M:** *¿Por qué no es un círculo, Andrés?*
 14. **Andrés:** *porque no tienen...uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* (señala los vértices).
 15. **M:** *¿Cómo se llaman los que señalo Andrés?...Andrés señalo estos* (señala los vértices del octágono).
 16. **Julieta:** *vértices*
 17. **M:** *vértices, verdad y por eso no puede ser un círculo. A ver vamos a contar cuántos vértices tiene.*
 18. **Todos:** *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* (cuentan mientras la maestra va señalando cada uno de los vértices).
 19. **M:** *sí tienen ocho vértices, ¿Cómo se llama?*
 20. **Julieta:** *cilindro*
 21. **M:** *entonces este ¿Cómo se llama?* (muestra un cilindro).
 22. **Julieta:** *círculo.*
 23. **M:** *¿este es un círculo?* (muestra el cilindro).
 24. **Julieta:** *a no es un cilindro.*
 25. **M:** *y, ¿son iguales?*
 26. **Julieta:** *no*
 27. **M:** *¿entonces cuál es el cilindro?*
-

-
28. **Julieta:** *este* (señala el cilindro).
29. **M:** *entonces quedamos que este tiene ocho ¿qué?* (muestra el octágono).
30. **Andrés:** *vértices*.
31. **M:** *y si tiene ocho vértices se llama octágono*.
32. **Todos:** *octágono*.
33. **M:** *y para qué lo utilizaste Thalía*.
34. **Thalía:** *para hacer una alberca*.
35. **M:** *y quién ocupó estos* (muestra los cubos pequeños).
36. **Todos:** *Yo*
37. **M:** *y como se llaman*
38. **Julieta y Andrés:** *cubos*
39. **M:** *cubos, verdad. Muy bien*.
-

Extracto 15. Situación "Jugando a ser Arquitectos". Primer grado de preescolar.

Se puede observar cómo los niños aunque recurren a la observación y conteo de las propiedades geométricas, no logran reconocer una figura geométrica que es poco usual, por lo que la docente debe ir puntualizando cada una de las propiedades y dar el nombre para que en momentos posteriores los niños puedan utilizarlo, a diferencia de los cuadrados, triángulo, círculos, cubos y cilindros, los cuales identifican inmediatamente sin ser necesario que cuenten las propiedades geométricas que los conforman.

Cuarto momento: Lenguaje geométrico convencional en relación con la realidad.

Este momento es el nivel más complejo logrado en preescolar después de haber participado en diferentes actividades geométricas en las que han utilizado el lenguaje geométrico, logrando comprender las diferencias que hay entre cuerpos y figuras geométricas, considerando sus propiedades geométricas y haciendo uso del lenguaje propio de la geometría; aunado a esto, los niños van *dejando de ver lo que está geométrica mente para ver lo que no está*, es decir, logran transformar lo geométrico de los cuerpos y figuras geométricas a objetos de la realidad. Algunas de las propiedades geométricas que los niños distinguen son que el cuerpo geométrico tiene volumen, caras, vértices, aristas y una base y que las figuras geométricas tienen lados, vértices y son planas

El siguiente ejemplo muestra el caso de los niños de tercer grado de preescolar quienes al participar en el momento a-didáctico de la situación “Jugando a ser arquitectos” conforme van explorando el material, con diferentes formas geométricas, van mencionando el *objeto real* como una puerta, una casa o un sillón, en ocasiones haciendo mención de la forma geométrica o como lo hizo Adriel (1), contando los vértices del cuerpo geométrico junto con Johan (2) (ver figura 32).



Figura 32. Niños de tercer grado de preescolar en la Situación Didáctica “Jugando a ser Arquitectos” haciendo uso del lenguaje geométrico.

En extracto se observa el discurso de los niños en dos momentos de la actividad, en el momento a-didáctico y en análisis del material explorado. En el cual podemos observar que los niños al explorar el material mencionan objetos reales que pueden ser en una construcción, por ejemplo Adriel (1) al tomar 2 paralelepípedos los observa y

menciona que le pueden servir para hacer las puertas de un elevador, Joshua (3) al seleccionar un cubo y un paralelepípedo y colocarlos uno sobre otro observa un sillón, mientras que Ailtón (5) selecciona dos paralelepípedos y los coloca de tal manera que queda como lo que para él es un sillón compartiendo con Joshua la mejor forma de formar un sillón con esos cuerpos geométricos; por otro lado Ángel (4) considera que un paralelepípedo puede servir como una puerta y Ailtón forma lo que sería el techo de una casa. En este momento los niños no mencionan las propiedades de los cuerpos pero los utilizan pensando en objetos reales que pueden representarse con los mismos (ver líneas 1-8, extracto 16).

Momento de la actividad: Momento a-didáctico.

1. **M:** *Nosotros vamos a ser arquitectos, les voy a dar el material para que lo exploren* (la maestra coloca al centro del salón todos los cuerpos geométricos).
2. **Adriel:** *esto puede ser un elevador* (toma dos paralelepípedos y los junta para formar las puertas de un elevador)...*pero vamos a construir una casa, entonces esta es la puerta* (solo se queda con un paralelepípedo).
3. **Joshua:** *este es un sillón* (toma un cubo y un paralelepípedo)
4. **Ailtón:** *no, así no se hacen los sillones* (toma dos paralelepípedos y forma un sillón)
5. **Ángel:** *este es una puerta* (muestra un paralelepípedo)
6. **M:** *una puerta*
7. **Ángel:** *pero le falta la desta* (señala que le falta la manija para abrir la puerta).
8. **Ailtón:** *este es un cono* (toma un cono) *o podemos hacer el techo de una casa, con este y este* (toma un paralelepípedo y coloca sobre el una pirámide triangular)
9. **Adriel:** (toma una pirámide triangular y cuenta sus vértices y lados con Johan)...*uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.*
10. **M:** *ustedes que hicieron Naid*
11. **Naid:** *una casa.*

Momento de la actividad: Análisis del material.

12. **M:** *De todo lo que vieron, dime Johan tú, ¿que viste?*
 13. **Johan:** *yo vi un cubo.*
 14. **M:** *cuál es el cubo*
 15. **Johan:** *este* (toma el cubo)
 16. **M:** *¿porque es un cubo?*
 17. **Johan:** ***porque está en volumen***
 18. **M:** *que más.*
 19. **Johan:** ***porque tienen cuatro lados***
 20. **Valeria:** *son caras*
 21. **M:** *¿Cuántas tiene?*
 22. **Valeria:** *cuatro*
 23. **M:** *a ver cuéntalas*
 24. **Johan:** ***uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis***
-

-
25. M: *¿cuántas son?*
26. Johan: *seis caras.*
27. M: *que más vieron, Ailtón.*
28. Ailtón: **un rectángulo (toma un paralelepípedo)**
29. M: *¿si es un rectángulo este que tiene Ailtón?*
30. Ailtón: **paralelepípedo**
31. M: **y ¿Por qué es un paralelepípedo?**
32. Ailtón: *porque tiene cuatro caras (cuenta las caras del paralelepípedo)...uno, dos, tres, cuatro.*
33. Naid: *este es un prisma cuadrangular (toma un prisma cuadrangular)*
34. M: **¿Por qué es un prisma cuadrangular**
35. Naid: *porque está en volumen y tiene caras*
36. M: **¿Cuántas caras?**
37. Naid: *una, dos, tres, cuatro, cinco, seis.*
38. M: **a ver Joshua tu qué viste cuerpos o figuras**
39. Joshua: **figuras**
40. M: **¿que figura viste?**
41. Joshua: *un triángulo.*
42. M: *dice Joshua que hay triángulos, ¿si hay triángulos aquí?*
43. Joshua: **(toma una pirámide triangular)**
44. M: **eso es un triángulo**
45. Valeria, Naid, Ailtón, Alison: **pirámide cuadrangular.**
46.
-

Extracto 16. Situación "Jugando a ser Arquitectos". Tercer grado de preescolar.

Posteriormente en el momento del análisis del material, los niños son capaces de reconocer las propiedades geométricas de los cuerpos y las figuras geométricas y al momento de ser cuestionados por la docente recurren al conteo de las propiedades a las que hacen referencia, como en el caso de Johan (2) quien menciona que un cubo es un cubo porque está en volumen y tiene caras las cuales debe contar para saber cuántas son exactamente y de la misma manera Naid (6), menciona que un prisma cuadrangular es un prisma porque tiene volumen y caras las cuales también cuenta (línea 12-37, extracto 16).

Es importante mencionar que, cuando los niños pueden usar el lenguaje geométrico por completo les *permite* diferentes tipos de *comunicación*, la oral, escrita y gráfica, las cuales les permiten compartir sus ideas y pensamientos con sus demás compañeros y dialogar con ellos compartiendo el conocimiento. Dando lugar con ello a la *abstracción geométrica*.

Estos momentos están *sostenidos* por el cuestionamiento que realiza la docente durante el transcurso de la actividad, principalmente en los primeros tres momentos en los cuales la docente utiliza el *cuestionamiento* para que los niños reconozcan los cuerpos geométricos y sus propiedades geométricas internas, posteriormente, ya que los niños han logrado reconocer los cuerpos y figuras geométricas, la docente los asiste para lograr un plano de intersubjetividad más complejo en el cual realiza cuestionamientos que promueven la relación entre los objetos geométricos que tienen presentes y los objetos reales que tienen esas formas geométricas; favoreciendo que los niños en momentos posteriores mencionen solo objetos reales al observar la forma de un objeto geométrico. Logrando también que los niños sean capaces de describir qué materiales han observado mencionando el nombre del objeto real y las características geométricas de dicho objeto, de manera autónoma, atendiendo al cuestionamiento general de la docente: ¿Qué observaron? Es importante mencionar que esta capacidad de alfabetización *permite* el uso de la *comunicación entre pares y entre Docente-Alumno, la observación, la argumentación.*

Apropiación y uso del lenguaje geométrico para comunicarse. A manera de conclusión se observó que el lenguaje geométrico requiere de las capacidades de observación de propiedades geométricas y de abstracción de las mismas. Dichas capacidades se relacionan debido a que si los niños no cuentan con el nombre geométrico de alguna figura o cuerpo geométrico, recurren a la mención de las propiedades geométricas para que ellos observen y conozcan que es lo que hace que un cubo sea un cubo y que en situaciones posteriores puedan usar el lenguaje (cubo) y justificar por qué lo es (porque tiene 6 caras, 8 vértices, etc....) y reconozcan esas propiedades cuando en la actividad deban explicar cómo era el material que utilizaron para una construcción teniendo o no presente el cuerpo geométrico.

Así mismo, podemos constatar que en un primer nivel de razonamiento geométrico los niños son capaces únicamente de reconocer los cuerpos geométricos que tienen a la vista sin relacionarlos con algún objeto real en particular de la misma forma, posteriormente van reconociendo y utilizando el lenguaje propio de la geometría para poder describir los cuerpos y las figuras geométricas, pasando de la señalización de las propiedades u objetos geométricos empleado un lenguaje no geométrico a un lenguaje convencional; logrando posteriormente ver un objeto real que no está presente físicamente sino solamente en la mente del niño que lo observa un determinado objeto con forma geométrica representada de forma abstracta; es decir realizan una relación entre el sistema representado que están observando (cuerpo geométrico) pero sin mención de la forma geométrica de dicho sistema, sino que ahora realizan una *relación mental* de la forma que tiene el cuerpo geométrico con un objeto real.

b. Representaciones Externas Geométricas Elaboradas en la Actividad.

Dentro de la actividad las representaciones externas son herramientas simbólicas que permiten que los alumnos visualicen las propiedades geométricas de cuerpos y figuras geométricas representadas en plano, por lo que en este apartado se describen los tipos de representaciones geométricas que son elaboradas por los alumnos en el transcurso de la actividad, las cuales se organizan en dos categorías: la representación **enactiva**, que implican la realización de una forma geométrica a partir de movimientos al aire para poder comunicar información geométrica; y las **gráficas**, que corresponden a los esquemas y planos realizados por los niños. Dichas categorías nos permiten dar a conocer la capacidad con la que cuentan los niños de preescolar para representar la realidad geométrica y nos da a conocer el desarrollo de la interpretación geométrica interna y las formas de interpretar la realidad.

1. *Enactiva.*

Con respecto a la representación enactiva, se observaron dos niveles de representación las cuales implican la reacción inmediata de los niños, indicando con el movimiento de su cuerpo alguna forma geométrica que se le está cuestionando, los cuales son: *la repetición sin sentido de la representación enactiva a partir de observar la acción de alguien más* y *la representación enactiva autónoma* que se describen a continuación (figura 33).

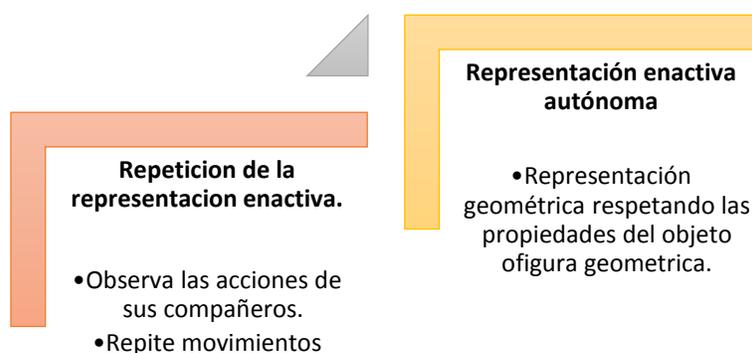


Figura 33. Desarrollo de la representación geométrica enactiva.

Primer nivel. *Repetición sin sentido de la representación enactiva a partir de observar a alguien más.*

En este nivel de representación se observó cómo es que los niños logran realizar una representación geométrica a partir de la imitación de las acciones de alguien más. Es decir después de que un niño da una explicación sobre la forma geométrica de algún objeto que conoce y representa la forma geométrica realizando movimientos de la mano, otro compañero únicamente realiza los mismos movimientos, aunque no tenga internalizada la representación de la figura de la que se está hablando. En la figura 34 se observa como Ángel (1) realiza la representación enactiva de una rueda en forma de

círculo y el niño que se encuentra a su lado izquierdo, Isaac (2), únicamente lo observa y repite los mismos movimientos que Ángel (1).



Figura 34. Niños de primer grado de preescolar realizando representaciones enactiva por observación en la 1er Prueba de Evaluación. “Construyendo la Maqueta de un Parque”.

En el extracto siguiente podemos observar como los niños de primer grado de preescolar intentar describir cómo es que han realizado una construcción pero al no saber el nombre geométrico de los objetos que han utilizado, recurren a la mención de los nombres en concreto de los objetos que usaron, como en el caso de Ángel (1) quien menciona únicamente que uso una llanta, un espejo para construir un coche pero no logra hacer mención de las formas geométricas de esos objetos (líneas 4-7, extracto 17).

Momento de la actividad: Momento de contextualización

1. **M:** *¿Isaac tú has construido algo?*
 2. **Isaac:** (no responde)
 3. **Ángel:** *uno coche*
 4. **M:** *y ¿Cómo construyeron su coche?*
 5. **Ángel:** *con una llanta y con un espejo...*
 6. **M:** *y, ¿Qué más?*
 7. **Ángel:** *otro espejo...*
 8. **M:** *y tu Isaac, ¿Qué has construido?...*
 9. **Isaac:** *no sabo* (mueve la cabeza diciendo que no ha construido nada)
-

-
10. **M:** *nada Isaac, no sabes que has construido, una casa, un barco, edificios...*
11. **Ángel:** *yo si se cómo hice un barco solo...*
12. **M:** *y cómo hiciste el barco, a ver cuéntales a los demás cómo se hace un barco.*
13. **Ángel:** *así (mueve su mano en forma circular intentando dibujar en el aire la forma del barco).*
14. **M:** *pero, ¿Qué utilizas para construir un barco?*
15. **Ángel:** *pegas...*
16. **M:** *¿pegas? Y tu Isaac, ¿Cómo construirías un barco?*
17. **Isaac:** *así (mueve su mano en el aire intentando dibujar un barco)*
18. **M:** *¿Qué materiales utilizarías?*
19. **Ángel:** *así (vuelve a mover su mano en el aire en forma circular)*
20. **Isaac:** *(repite la acción de Ángel sin dar ninguna respuesta).*

...

Extracto 17. 1er. Prueba de Evaluación "Construyendo la maqueta de un parque". 1ro. de preescolar.

Por otro lado, para poder apoyar a su compañero Isaac (2), Ángel (1) recurre a la representación enactiva para mostrar la forma que tiene el barco al que hace referencia dibujando un círculo en el aire y cuando Isaac es cuestionado por la docente para que explique cómo construiría un barco, él únicamente repite la acción de su compañero ángel sin mencionar nada. Por lo que se observa como lo que para ángel tiene un sentido para Isaac no representa ningún significado porque su repetición únicamente es por imitación (líneas 11-20, extracto 17).

Segundo Nivel. Representación enactiva autónoma.

Este momento de representación implica una representación interna clara de la figura geométrica que se quiere representar y aunque el niño no recuerde el nombre de esa figura puede representarla mediante movimientos de la mano para darle a conocer a los demás lo que él está pensando de manera autónoma. Sin que la docente haya tenido que intervenir para propiciar dicha acción del niño. Tal fue el caso de Valentina quien al participar en la Primera evaluación "construyendo la maqueta de un parque" realiza movimientos en el aire de cada uno de los lados de un rectángulo representando la forma rectangular de la puerta que utilizo para su construcción sin mencionar el nombre de

dicha forma geométrica. En la siguiente figura (35) se señala del 1 al 5 el orden en el que fue realizando dicha representación enactiva.



Figura 35. Niños de primer grado de preescolar realizando representaciones enactiva en la 1er Prueba de Evaluación. “Construyendo la Maqueta de un Parque”.

En el siguiente extracto se puede observar como Valentina al no recordar el nombre de la forma geométrica que tiene una puerta, recurre a la representación enactiva, lo cual le es posible dado que conoce y tiene una representación simbólica o mental de la forma que tiene dicho objeto, y realiza los movimientos indicándole a la maestra, cada uno de los lados que conforman un rectángulo, dándole forma en el aire y diciendo “uno así, y así, así y así” (líneas 32-36, extracto 17).

Momento de la actividad: Momento de contextualización

21. ...continuación

22. **M:** *Hoy vamos a construir un parque, ¿Cómo podemos construir un parque? ¿Qué hay en los parques?*

23. **Valentina:** *con resbaladillas.*

24. **Salvador:** *y columpios.*

25. **Ángel:** *y casas.*

26. **M:** *¿Qué material podemos usar para construir una maqueta del parque?*

27. **Salvador:** *una casa*

28. **M:** *y con una casa ¿Cómo podríamos construir un parque?*

29. **Ángel:** *así, la pegamos.*

30. **M:** *¿la pegamos?, ¿y qué más podríamos utilizar?*

31. **Ángel:** *una puerta*

32. **M:** *¿Qué material podría servir para hacer una puerta?*

33. **Ángel:** *uno cubo*

34. **Valentina:** *uno así y uno así y así (mueve la mano en el aire haciendo la forma de rectángulo).*

35. **M:** *unos cubos, verdad.*

36. **Valentina:** *(se levanta de su lugar) así es la puerta (moviendo su mano en el aire en forma de rectángulo).*

37. **M:** *¿y qué forma es esa?*

38. **Valentina:** *(voltea a ver el cartel de figuras geométricas pegado en la pared)*

39. **M:** *¿alguien sabe qué forma tienen las puertas?*

40. **Ángel:** *(mueve la cabeza indicando que no)*

41. **M:** ***bueno la forma de las puertas pueden ser rectángulos.***

Extracto 17. 1er. Prueba de Evaluación “Construyendo la maqueta de un parque”. 1ro. de preescolar.

Es importante mencionar, que la docente propicia a partir de *motores cognitivos*, que los niños recuerden el nombre de la forma geométrica que tiene el objeto que están representando, y aunque en este caso la representación enactiva que realiza Valentina guarda iconicidad con el objeto representado, siendo un medio para comunicar

información geométrica aún no reconoce el nombre correspondiente por lo cual la docente usa el nombre de dicha forma geométrica (línea 37-41, extracto 17).

2. Gráficas

Mediante el análisis realizado se pudieron observar seis momentos de representación plana de cuerpos geométricos tridimensionales, las cuales fueron elaboradas por los niños en el transcurso de la actividad “Jugando a ser Arquitecto” en la que una de las acciones geométricas a realizar, consistía en que los niños construyeran el modelo de una casa haciendo uso de cuerpos geométricos de diferente forma sin apoyarse en ningún plano preestablecido, para que después ellos mismos realizaran el plano de su construcción (figura 36).

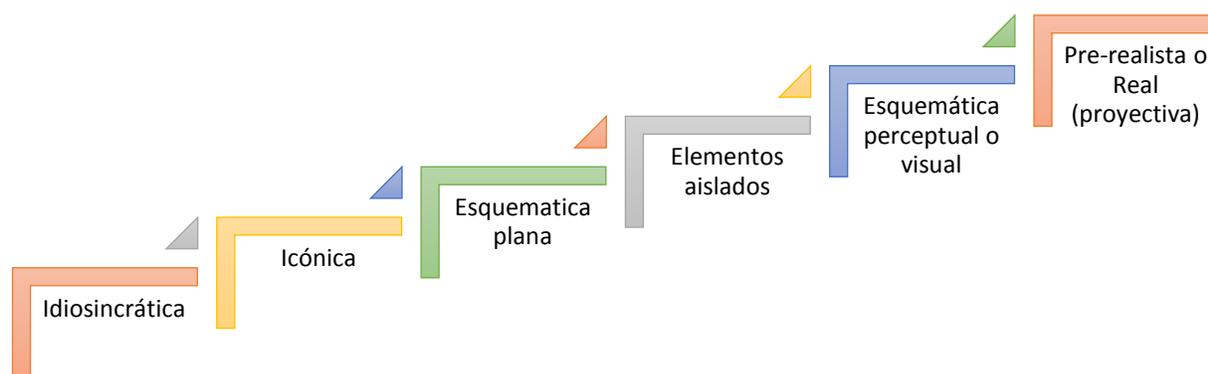


Figura 36. Desarrollo de la representación gráfica.

Se observó que estos niveles de representación no ocurren de manera secuencial uno tras otro, o de acuerdo a la edad cronológica de los niños, es decir, los niños van desarrollando esta capacidad de representación, en la medida en que son participes dentro de actividades que requieran la elaboración gráfica de cuerpos geométricos. A continuación se describen cada uno de los niveles de representación (tabla 11).

I. Representación idiosincrática. Este es el momento más elemental de representación, ya que los niños únicamente hacen un intento por representar en un plano bidimensional los cuerpos geométricos reales que observan. Tal fue el caso de un niño de segundo grado de preescolar quien en este caso debía representar un cubo, pero lo hace mediante rayones dispersos en la hoja; por lo que requiere de la asistencia de la docente quien le señala cada objeto que deben representar y les menciona las características que tienen. Es decir, los niños aun no cuentan con el sistema simbólico geométrico y por lo tanto no pueden abstraer lo geométrico para representar un cuerpo tridimensional sólido en un plano bidimensional.

II. Representación icónica. En esta momento los niños usan un código para representar cierta cantidad de objetos geométricos que tiene presente; en la cual aunque todavía no representan cuerpos y figuras geométricas de forma convencional, ya consideran la característica de cantidad de objetos y sabe que debe dibujar cierta cantidad, por ejemplo, el caso de un niño de primer grado quien para representar un cubos y paralelepípedos, que son cuerpos tridimensionales, asigna rayas y bolitas a cada uno y dibuja tantas como sean necesarias para representar gráficamente su construcción.

III. Esquemática plana. En este momento de representación los niños logran observar cada uno de los cuerpos geométricos tridimensionales que tienen que representar pero no logran ver todas las propiedades que conforman dicho cuerpo geométrico. En el caso de una niña de segundo grado de preescolar observamos que únicamente realiza la representación correspondiente a una de las caras que observa de la pirámide triangular, la cual tiene forma triangular, sin considerar las demás caras que están en la parte de atrás. Aunque la cantidad de objetos representados corresponde a los utilizados en la construcción las representaciones gráficas de objetos tridimensionales parecen ser solo figuras geométricas.

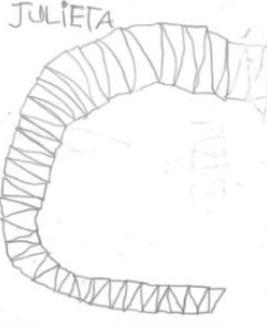
IV. Representación de elementos aislados. En este nivel de representación los niños son capaces de realizar representaciones de cuerpos geométricos considerando más de una de las propiedades geométricas que conforman dicho objeto, pero los representan de

manera aislada. Es decir, en el caso de un niño de tercero de preescolar al momento de representar cubos, conos, prismas triangulares y hexagonales, lo hace dibujando todas las caras de cada cuerpo geométrico pero las representa por separado de tal manera que cada una de las caras quedan dispersas en la hoja y en algunas figuras como dando una apariencia de ser una plantilla irregular.

V. Esquemática perceptual o visual. En este momento los niños observan las propiedades que conforman el cuerpo geométrico que tienen que representar pero únicamente toman en cuenta las que alcanzan a observar de acuerdo a la dirección en la que se encuentren sentados. Tal fue el caso de una niña de segundo grado de preescolar, quien para representar cubos, paralelepípedos, pirámides y prismas representa solo las propiedades que alcanza a ver, pero respeta el orden de organización de acuerdo a su construcción, lo cual deja ver un mayor similitud con el objeto representado.

VI. Pre-realista o Real (proyectiva). En este momento se observa que los niños realizan representaciones muy parecidas a la real que están observando, siendo el más complejo de representación. Tal fue el caso de un niño de tercero de preescolar quien después de realizar su construcción utilizando prismas triangulares, cubos y paralelepípedos, logra realizar una representación gráfica muy parecida a los objetos reales debido a que considera todas las propiedades geométricas de cada cuerpo tridimensional, incluido el volumen, y la cantidad exacta de objetos que tienen que representar, es decir, sus representaciones guardan mayor iconicidad con el objeto real representado.

Tabla 11. Niveles de Representación gráfica

I. Idiosincrático	II. Icónica	III. Esquemática plana	IV. Elementos aislados	V. Esquemática perceptual o visual	VI. Pre-realista o Real (proyectiva)
					
					
<p>Niño de 2°</p>	<p>Niño de 1°</p>	<p>Niña de 2°</p>	<p>Niño de 3°</p>	<p>Niña de 2°</p>	<p>Niño de 3°</p>

En la tabla 11 se pueden observar cada uno de los niveles de representación, y como niños de segundo grado ya cuentan con niveles de representación simbólica más complejos y apegados a la realidad mientras que otros del mismo grado aún se encuentran en los niveles de representación más elementales, lo cual muestra que no todos los niños pasan por estos niveles de manera secuencial, sino que va cambiando en la medida en que participen en diversas actividades que requieran el uso de símbolos geométricos y de la conceptualización que van teniendo del mismo, la cual es cada vez más clara.

Es importante resaltar, que tanto las representaciones gráficas, como las representaciones enactiva, están sostenidas en todo momento por los cuestionamientos de la docente. En las representaciones gráficas, la docente es quien asiste la elaboración de las representaciones de cada uno de los niños señalando el cuerpo geométrico que debe ser representado, o señalando cada una de las características de manera particular del cuerpo geométrico o figura geométrica. Mientras que en la representación enactiva, la docente promueve dicha representación a partir del cuestionamiento que realiza para considerar los conocimientos previos de los niños antes de una nueva construcción.

Representación interna del sistema. A manera de conclusión de los apartados anteriores se observa cómo los niños desarrollan la capacidad de representación del sistema geométrico. En el caso de las representaciones gráficas en sus diferentes niveles funcionan como medios para representar cómo visualizan los cuerpos o figuras geométricas reales para alcanzar un nivel de complejidad en el que realizan una representación plana de un objeto tridimensional respetando las propiedades geométricas que los conforman, como lo es el volumen, aunque esté en plano. En el caso de las representaciones enactiva, podemos ver que el nivel de abstracción y apropiación del sistema geométrico es más complejo, tienen un nivel de representación abstracto de la forma y buscan un recurso para comunicar la forma que tiene el cuerpo o figura geométrica a la que están haciendo referencia, para que compartirlo en el plano social,

esto aunque el niño no recuerde el nombre de la figura. Es importante mencionar que dichos niveles de representación no necesariamente ocurren de forma secuencial en cada uno de los niños, es decir que un nivel anteceda al otro, sino que los niveles corresponden al nivel de razonamiento con el cual cuenta cada niño de forma individual.

c. Capacidad de Interpretación geométrica haciendo uso de representaciones externas preestablecidas.

En este apartado se describe la importancia que tiene el uso de las *inscripciones geométricas* como lo son las representaciones geométricas externas preestablecidas (planos, fotos y esquemas de diferente perspectiva) y su influencia en el razonamiento de los niños para poder interpretar la realidad que está inscrita en la misma herramienta cultural, las cuales adquieren sentido dentro de la actividad geométrica social. Dichas representaciones fueron de dos tipos: *las geométricas*, correspondientes a planos, esquemas y fotos; y *las de ubicación espacial*, como la rosa de los vientos, y su uso estuvo determinado por la actividad.

Dentro de las actividades geométricas es importante considerar que los niños usen representaciones geométricas externas para favorecer la abstracción del contenido geométrico el cual le permitirá realizar las acciones correspondientes iniciando por la identificación y reconocimiento de la función de cada herramienta. Se observaron tres momentos de desarrollo que nos permite desglosar como es que va cambiando el pensamiento de los niños con respecto al uso de las representaciones externas que están elaboradas previamente (figura 37).

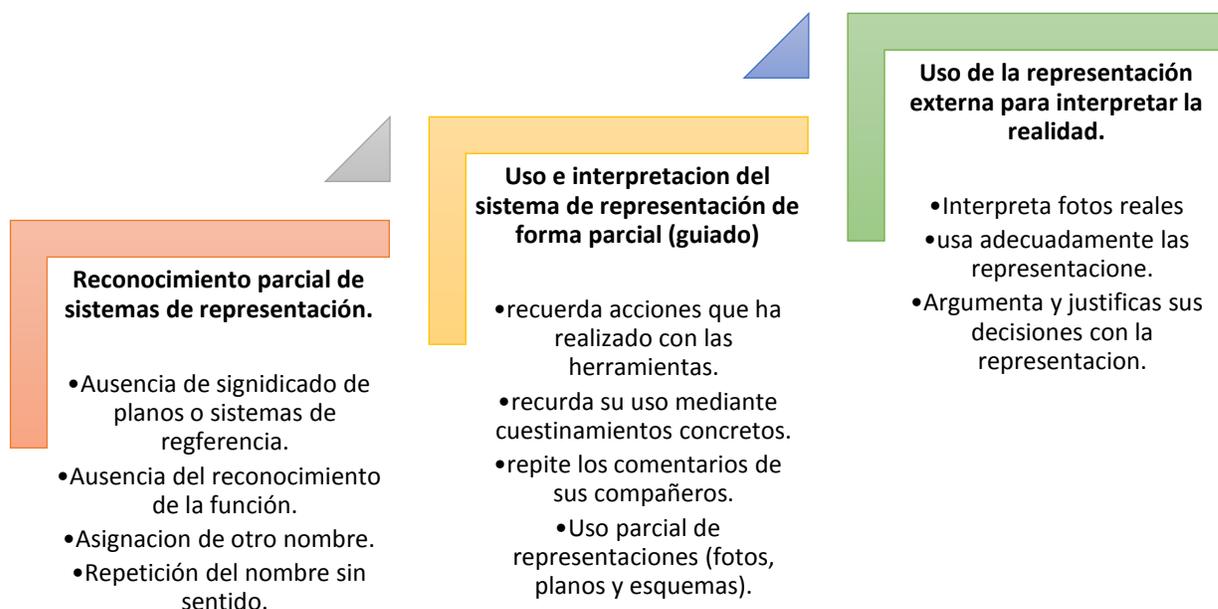


Figura 37. Desarrollo de la interpretación geométrica de la realidad usando representaciones externas.

Primer momento: reconocimiento parcial del sistema de representación

En este momento podemos observar que los niños en un inicio cuando se encuentran participando en una actividad que requiere el uso de una representación externa, como lo es la rosa de los vientos como un sistema de referencia para la identificación de objetos geométricos ubicados en un plano tridimensional, tienen dificultades para reconocer no solo el nombre de dicha representación sino también la función social que tiene dentro de la actividad, es decir, la herramienta aún no tienen sentido para los niños por lo que la docente debe de guiar el reconocimiento a partir de cuestionamientos concretos. Tal fue el caso de los niños de segundo grado de preescolar, quienes en su primer prueba de evaluación correspondiente a la construcción de la maqueta de un parque, en el momento de la actividad en el que se les muestra la rosa de los vientos como sistema de representación externa de ubicación espacial, no logran reconocer qué es y para qué sirve y únicamente recurren a la repetición y asignación de otro nombre al sistema de

referencia y en algunos caso logran repetir el nombre correcto, pero sin sentido (figura 38).



Figura 38. Niños de segundo grado de preescolar reconociendo parcialmente el sistema de representación.

En el extracto 18 se observa el discurso que la docente va realizando cuando les muestra la rosa de los vientos, guiando en todo momento las aportaciones de los niños, quienes en general mencionan que no saben qué es, por lo que la docente les *proporciona* el nombre correcto del sistema de referencia. Así mismo, cuando les pregunta sobre la función de esta herramienta, los niños mencionan que no saben y en el caso de Julieta al intentar mencionar el nombre de la herramienta, lo menciona de forma incorrecta llamándolo “rosa de los tiempos”, a lo que la docente corrige inmediatamente y Julieta responde en forma interrogativa (líneas 1-11, extracto 18).

Momento de la actividad: presentación de herramientas culturales (rosa de los vientos)

1. **M:** *Muy bien niños, ahora les voy a mostrar esto (muestra la lámina que tiene dibujada la rosa de los vientos)... ¿Saben qué es?*
 2. **Todos:** *Nooo (Julieta, Thalía, Andrés y Denisse).*
 3. **M:** *¿Nadie sabe cómo se llama?*
 4. **Todos:** *Nooo (Julieta, Thalía, Andrés y Denisse).*
 5. **M:** *está se llama la rosa de los vientos... ¿saben para qué sirve?*
 6. **Todos:** *Nooo (Julieta, Thalía, Andrés y Denisse)*
-

-
7. **M:** *¿para qué nos sirve la rosa de los vientos, Thalía?*
 8. **Thalía:** *paraaa...(se queda pensando)*
 9. **Julieta:** *¿la rosa de los tiempos?*
 10. **M:** *¡de los vientos!*
 11. **Julieta:** *¿de los vientos?*
 12. **M:** *¿Para qué nos sirve la rosa de los vientos?*
 13. **Julieta:** *paraaa...ver...donde está el Oeste*
 14. **M:** *¿Nada más el oeste?*
 15. **Julieta:** *El este*
 16. **M:** *¿Cuál otro?*
 17. **Thalía:** *otro*
 18. **M:** *Pero cuál otro.*
 19. **Julieta:** *y el oeste*
 20. **M:** *¿El oeste?*
 21. **Julieta:** *Pues ahí abajo dice (señala el punto cardinal sur)*
 22. **M:** *En dónde dice (le acerca la lámina)*
 23. **Julieta:** *Aquí (señala la palabra sur)*
 24. **M:** *miren, esta es la rosa de los vientos y esta flecha nos indica el norte, esta flecha nos indica el sur, esta flecha nos indica el este y esta nos indica el oeste (señalando uno por uno los puntos cardinales). Y nos va a servir para ubicar que vamos a construir en la maqueta de nuestro parque.*
-

Extracto 18. 1er. Prueba de Evaluación "Construyendo la maqueta de un parque". 2do. de preescolar.

En la medida en la que los niños van siendo participes de diferentes actividades en las que se vio implicado el uso de sistemas de referencia logran identificar dicha representación externa por su nombre correcto y reconoce la función que tiene. Los niños van cambiando las concepciones que tienen sobre dicha representación por una más real, además de que son capaces de utilizarla para solucionar problemas.

Segundo momento: Uso e interpretación de la representación externa de forma parcial.

En este momento podemos observar que los niños de segundo grado de preescolar al observar e interpretar un esquema tridimensional del comedor que deben construir recurren únicamente a la mención de los objetos reales concretos y no mencionan ninguno de los cuerpos geométricos que observan dentro de la representación externa. Es un nivel de abstracción complejo porque logran abstraer el contenido real que representa el esquema, pero aún no logran abstraer el contenido geométrico

representado y requieren de la asistencia de la docente, como lo fue el caso de los niños de segundo grado de preescolar (figura 39).



Figura 39. Niños de segundo grado de preescolar en el momento de presentación de la herramienta y selección de material en la situación didáctica: “Fabricando muebles.”

El siguiente extracto 19, muestra el discurso que lleva a cabo la docente con un grupo de niños al participar dentro de la actividad: “Fabricando muebles”. Se puede observar como en el momento de la actividad en el que la maestra muestra la herramienta, en este caso un esquema tridimensional de los muebles de un comedor, y pregunta a los niños ¿Qué es?, Alexa (1) menciona que ve un comedor, por lo que la docente ahora señala algunos de los objetos representados como el cubo que forma las sillas, el paralelepípedo que forma la mesa y el cubo que representa la televisión, tanto Alexa (1), como Jazmín (2) y Thalía (3) mencionan el objeto real y no hacen mención de ninguna de las formas o características geométricas que tienen esos objetos (líneas 1-17).

Momento de la actividad: presentación de la herramienta y exploración del material

1. **M:** *Les voy a mostrar este esquema del comedor (muestra el esquema tridimensional), ¿qué observamos?*
 2. **Julieta:** *sillas, mesas, una escalera* (señalando los objetos en el esquema)
 3. **M:** *¿tú crees que esta es una escalera?*
 4. **Andrés:** *un sillón*
-

5. **M:** *¿un sillón?*
 6. **Jazmín:** *no*
 7. **M:** *¿pero que tenemos aquí?*
 8. **Alexa:** *un comedor*
 9. **M:** *sí, pero que es esto (señala la mesa)*
 10. **Alexa:** *la mesa*
 11. **M:** *y esto qué será (señala las sillas)*
 12. **Alexa:** *las bancas para sentarse*
 13. **M:** *y esto que tenemos aquí qué será (señala la tele)*
 14. **Jazmín:** *la mesa*
 15. **M:** *aquí tenemos la mesa (señala), tú crees que esto sea otra mesa...*
 16. **Jazmín:** *No*
 17. **Tahalí:** *una tele*
 18. **M:** *y esto que será (señala los cuerpos geométricos que representan una vitrina).*
 19. **Nadie responde...**
 20. **M:** *bueno, ahora vamos a tomar nuestro material usando el esquema. Les voy a dar el material para que lo exploren. ¿Qué material observaste?*
 21. **Julieta:** *unos cuadra... (corrige) cubos y paralelepípedos (toma un paralelepípedo).*
 22. **M:** *¿Cuál sería el paralelepípedo?*
 23. **Julieta:** *este (toma una caja en forma de paralelepípedo)*
 24. **M:** *¿Por qué dices que es un paralelepípedo?*
 25. **Julieta:** ***porque tiene rectángulos (señalando las caras del cuerpo geométrico)***
 26. **Nicole:** *este es como ese (compara su caja en forma de paralelepípedo con la de Julieta)*
 27. **M:** ***¿Pero qué cuerpo es este?***
 28. **Nicole:** *(no responde)*
 29. **M:** ***Un qué...lo acaba de decir Julieta un parale...***
 30. **Nicole:** ***...lelepípedo.***
 31. **M:** ***¿Qué material observaste Andrés? ¿Qué cuerpo geométrico es este? (señala un cilindro)***
 32. **Andrés:** *un triángulo*
 33. **M:** *A ver, le pueden ayudar a Andrés para saber qué cuerpo geométrico tenemos aquí.*
 34. **Nicole:** ***un cilindro***
 35. **M:** *A ver Alan tu qué cuerpo geométrico observaste*
 36. **Alan:** *(no responde)*
 37. **M:** ***¿Qué cuerpo es este? (le muestra un cubo)***
 38. **Alan:** ***un cubo***
 39. **M:** ***¿Por qué es un cubo?***
 40. **Alan:** ***no lo sé***
 41. **M:** ***Nicole, ayúdale a tu compañero, ¿Por qué es un cubo?***
 42. **Nicole:** ***porque sus caras son un cuadrado***
 43. **M:** ***y ¿tiene muchas caras?***
 44. **Nicole:** ***uno, dos, tres, cuatro...***
 45. **M:** ***A ver vamos a contarlas (toma el cubo y señala las caras conforme van contando)***
 46. **Nicole:** ***Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis***
 47. **Alan:** ***(observa)***
-

48. M: *¿Cuántas caras tiene?*

49. Nicole: *seis*

Extracto 19. Situación Didáctica "Fabricando muebles". 2do. de preescolar

Con el extracto anterior podemos observar que la docente va guiando el uso de la herramienta y a partir de cuestionamientos concretos va promoviendo que los niños expresen el nombre de la forma geométrica de los objetos que están observando y seleccionando con ayuda del esquema, así mismo genera que los niños justifiquen porque creen que sea ese cuerpo geométrico. Tal fue el caso de Julieta quien menciona que observo un paralelepípedo y es paralelepípedo porque tiene rectángulos señalando las caras del mismo (línea 20-25). Es importante mencionar que hay casos de niños que únicamente identifican el nombre del cuerpo geométrico (cubo) pero no pueden justificar porque es un cubo (línea 35-42, extracto 19).

Tercer momento: Uso con sentido de la representación geométrica para interpretar la realidad.

En este momento el uso de la representación externa es convencional y con sentido comunicarse y los utilizan para tomar sus decisiones. Los niños son capaces de seleccionar materiales a partir de la observación de las representaciones externas; y en logran reconocer la función concreta que tienen y realizan un uso adecuado de las mismas, como lo es el caso de los niños de tercero de preescolar que hacen usos de las representaciones externas preestablecidas, como son los planos de una casa, en diferentes momentos de la actividad para que puedan seleccionar los cuerpos geométricos correspondientes para lograr la construcción correcta de una casa que es la meta de la activada. Así mismo hacen uso de dichas representaciones para comunicarse con sus demás compañeros al momento en el que alguno de ellos solicita un material y otro de ellos tiene que seleccionarlo, por lo que usan el lenguaje geométrico para comunicar el nombre correcto del cuerpo geométrico para que sea el correcto (figura 40).



Figura 40. Niños de tercer grado de preescolar observando y usando representaciones externas preestablecidas en la situación didáctica: “Jugando a ser arquitectos.”

Es importante mencionar que el cambio que ocurre en la comprensión de las representaciones externas no ocurre por sí solo, este cambio está *sostenido* principalmente por la mediación docente y por las acciones que ella realiza para significarles y resignificar las representaciones externas geométricas preestablecidas; dichas acciones van desde realizar cuestionamientos con respecto al por qué y el para qué, y que los niños comenten lo que piensan sobre la herramienta y la docente pueda darles el significado; que de indicaciones específicas como: “observa el plano”, para indicarle al niño que tiene que usar el plano para poder realizar una acción. En los casos en los que los niños no puedan lograr una acción la maestra utiliza el modelamiento para demostrar el uso correcto de los planos y esquemas; señala las características que conforman las representaciones externas específicamente para propiciar que los niños las observen; y en momentos más complejos cuando la perspectiva de la representación no deja ver claramente otros elementos de la construcción u objeto que elaboran, la docente apoya con otra representación externa para permitir que los niños puedan ser conscientes de lo que hay detrás de lo que observaba en otra perspectiva.

El que los niños tengan a su disposición las representaciones externas y puedan

usarlas en el momento en el que las necesiten como herramientas permite su comprensión y al momento en que esta capacidad se ha instalado en su totalidad y que los niños ya son capaces de usarlas para solucionar problemas dan lugar a la: Argumentación, Justificación, rectificación de acciones y aportaciones (revisar como es la rectificación para saber si es auto-corrección o es propiciada por la docente o por otro niño), toma de decisiones, regulación entre pares.

Comprensión de la herramienta para su uso. Consiste en que en un primer momento la herramienta (esquema) no es significativa para los niños por lo que no la utilizan y es la docente quien se encarga de guiar las acciones de los niños con diversas estrategias como: cuestionamientos que obliguen, de alguna manera, a los niños a explicar las decisiones que están tomando; indicaciones precisas para que los niños observen el esquema; e incluso que la docente modele frente al niño el uso adecuado de las herramientas. Todo ello con el fin de impulsar a que sean los niños quienes observen y usen la herramienta de forma adecuada, reconociendo su función y utilizándolas.

Es importante mencionar que se observó que la comprensión y uso de las representaciones externas de ubicación espacial esta *sostenida* por diversas acciones que realiza la docente como estrategias para significarles el uso y el reconocimiento de las representaciones externas y lograr que los niños cambien sus concepciones.

Entre las acciones que realiza la docente se observaron las siguiente: el *cuestionamiento continuo* para que los niños expresen las ideas iniciales que tienen los niños sobre los sistemas de referencia que se estén utilizando, si los niños no logran reconocer el sistema, ni dar una respuesta correcta la docente les *proporciona el nombre* para que ellos lo conozcan y que en situaciones posteriores puedan tenerlo presente; de igual manera *señala las principales características* que conforman el sistema de referencia, en el caso de la rosa de los vientos, señala los cuatro puntos cardinales mencionando que es lo que significa cada uno; y para promover su uso la docente recurre al *modelamiento*

frente a los niños para que ellos observen como se usa ese sistema de referencia. Es importante mencionar que durante toda la actividad se pudo observar que la docente *usa el nombre adecuado* para referirse al sistema de referencia para que los niños vayan siendo conscientes de cuál es el sistema que están usando en ese momento determinado de la actividad.

Cuando la capacidad de comprensión de las representaciones externas de ubicación espacial está consolidada por completo, es decir los niños la utilizan para resolver problemas, *promueve* la observación precisa de los elementos que conforman dicho sistema de representación, lo cual a su vez favorecerá la toma de decisiones de cada uno de los niños al momento de usar la representación para seleccionar algún materia ubicado en algunos de los puntos de referencia y poder colocarlo en el lugar correcto. De la misma manera se observa como los niños al momento de estar identificando la ubicación de algún objeto construido se establece una comunicación entre sus mismos compañeros ya que se apoyan para que logren realizar las acciones correspondientes.

d. Interpretación de representaciones externas elaboradas en la actividad.

Se observó un momento en el que los niños logran hacer la interpretación de representaciones externas elaboradas por sus propios compañeros dentro de la actividad, comunicando información geométrica de manera gráfica.

A partir del análisis, se pudo observar como todos los niños son capaces de realizar una representación gráfica, pero como se explicó anteriormente las formas de representar la realidad son diferentes en cada uno de ellos, y se observa que en los grados de segundo y tercero de preescolar aparecen los primeros niveles de representación idiosincrática, icónica y esquemática plana, las cuales implican una

interpretación más compleja como se observa en la siguiente figura 32, en la cual se puede observar a Valentina (1) intentando interpretar la representación gráfica de Salvador (2) quien en ese momento se encuentra en el nivel II de representación: icónica, la cual le resulta difícil a Valentina porque ella tiene un nivel de interpretación más apegado a la realidad y no logra reconocer ningún cuerpo geométrico en el esquema y se ve en la necesidad de recurrir en varias ocasiones a Salvador para que le indique que representa una rayita que dibujo, y que él le signifique lo que ha representado gráficamente, un cubo, que él menciona como un cuadrado, porque aún no considera todas las propiedades del cuerpo geométrico real.



Figura 41. Interpretación de representaciones externas elaboradas por los niños de Primer Grado de Preescolar.

Mientras que en el caso de los niños de tercer grado de preescolar son capaces de interpretar de forma más eficiente las representaciones de sus compañeros, sin tener que recurrir al compañero que elaboro la correspondiente representación, debido a que la mayoría de ellos cuentan con una comprensión y nivel de representación más apegada a la realidad; . Como se observa en la Figura 33 en la que 2 niñas de tercer grado, logran realizar la interpretación correcta de las representaciones elaboradas por otro compañero sin tener que recurrir al niño que la elaboro, ya que en ambos casos las representaciones corresponden al nivel VI: pre-realista o real (proyectiva).



Figura 42. Interpretación de representaciones externas elaboradas por los niños de Tercer Grado de Preescolar.

Esto está sostenido por la docente y la misma representación como herramienta cultural del sistema geométrico, favoreciendo con ello el uso correcto del lenguaje geométrico para poder comunicarse con alguien más.

Cuando esta capacidad de representación se consolida en cada uno de los niños permite la comunicación entre ellos, porque es un medio para compartir información geométrica, permitiendo el diálogo al momento de tener que aclarar que es lo que están representando, en caso de que otro niño no comprenda lo representado, porque la representación aún no guarda ninguna relación con la realidad representada o por el nivel de interpretación con el que cuenta el niño que observa y usa el esquema elaborado.

Interpretación y comprensión de las representaciones externas. Esta capacidad se va desarrollando a partir de la participación que tienen los niños de preescolar dentro de actividades socialmente significativas e implican la elaboración de una representación plana de cuerpos geométricos tridimensionales y requiere de la capacidad con la que cuentan los niños para interpretar la realidad en la que participan para poder comunicar información geométrica de forma real, ya sea gráficamente o verbalmente al momento de justificar el significado de cada grafía elaborada en su representación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A partir de los análisis realizados, en el presente capítulo abordaremos las conclusiones a las que hemos llegado en este estudio, en el cual puntualizaremos que en las actividades socialmente reconocidas es dónde surge el razonamiento geométrico, al igual que hablaremos de cómo es que surge este razonamiento en los niños de preescolar y la importancia de la asistencia docente, como intermediario social, en este desarrollo ya que es la docente quien propicia que surja esta forma de pensar a partir de sus las acciones que realiza haciendo uso del sistema geométrico el cual pone a disposición de los niños en plano social y **cómo** es que los niños logran **usar** este sistema de conocimiento geométrico y por lo tanto qué sucede y cómo va cambiando su comprensión, lo cual se describe a continuación:

- **Condiciones en dónde surge el razonamiento geométrico.** La geometría ha sido de gran utilidad para resolver situaciones de la vida cotidiana en términos de funciones sociales, y siendo esta disciplina una actividad social humana se construye en interacción con otros (González y Weinstein, 2001), por lo tanto el pensamiento geométrico tiene un origen social porque surge a partir de la incorporación en *actividades sociales*, es decir, en actividades socialmente organizadas donde se negocia el significado y se acuerdan convenciones que requiere el *uso* de los conocimientos geométricos y sus herramientas culturales correspondientes las cuales adquieren sentido en uso dentro de la actividad. En este caso, el haber incorporado a los niños de preescolar en ambientes complejos de aprendizaje (situaciones didácticas) favoreció el surgimiento de las capacidades de pensamiento geométrico.
- **Surgimiento del razonamiento geométrico y los factores que lo propician.** A partir de la incorporación de los niños en actividades geométricas los niños comienzan a participar familiarizarse con este sistema debido a que cada actividad

implica hacer uso de las herramientas culturales (simbólicas y objetivaciones), es decir es allí cuando los niños comienzan a usar la geometría para realizar acciones que son parte de la misma actividad societal, reconociendo, al mismo tiempo, las reglas y la forma en que está organizada la actividad en la que participa, para poder solucionar un problema real y lograr la meta social establecida en la misma. Se ha considerado que cuando los niños comienza la educación preescolar no cuentan con un pensamiento geométrico porque desconoce la actividad geométrica así como el sistema geométrico; pero en la medida en que va siendo participe en diversas actividades geométricas comienza a razonar geoméricamente, es decir logra matematizar con el sistema, por lo que podríamos referirnos a esta acción como **proceso de geometrización** al hablar específicamente de acciones geométricas, que el niño realiza al reconocer la problemática que está enmarcada en la realidad y transformándola a un problema específicamente geométrico en el que debe hacer uso de la geometría para solucionarlo y posteriormente usar ese conocimiento para solucionar el problema real.

- *El rol de la docente en el surgimiento del razonamiento geométrico.* El uso del conocimiento geométrico que realiza el niño por primera vez es propiciado por la asistencia docente, ya que es ella quien realiza **geometriza** para el niño, es decir, es quien realiza **acciones geométricas usando las herramientas** (simbólicas y objetivaciones) para que el niño pueda usarlas por primera vez y lo vaya perfeccionando. La docente es quien lo guía para realizar las **acciones** con el sistema geométrico siempre bajo la estructura de la actividad geométrica contextualizada que es la que los guía y determina estas acciones.

- *Como se da el uso del conocimiento geométrico por parte de los niños.*
La actividad tiene una estructura la cual corresponde al proceso de la geometrización, en estas **acciones** la docente ayuda a entender el orden de este

proceso **guiando** al niño usando el lenguaje geométrico para emplear los conceptos propios de la geometría así como las objetivaciones de dichos conocimientos.

- En primer lugar en esta transición dinámica la docente guía en todo momento el discurso de los niños utilizando de manera más explícita las herramientas geométricas, usa el lenguaje geométrico para ponerlo a disposición de todos los niños en un plano social. Es decir, para que el niño logre reconocer en primera instancia un esquema o un cuerpo geométrico, la docente realiza cuestionamientos muy específicos, como preguntar si conocen ese material, cómo se llama, para qué sirve y al no tener una respuesta en términos geométricos la docente, proporciona el nombre, la función social específica de la herramienta (esquema, plano, croquis, foto) y lo utilizan frente a ellos realizando el modelamiento de la acción concreta que deben realizar dando indicaciones precisas para que lo observen y realiza señalamientos específicos sobre la herramienta. Así mismo al momento en el que se requiere el uso del lenguaje geométrico para identificar los cuerpos y las figuras geométricas la docente propicia el nombre completo o en algunos casos parte del nombre (prima...) para que lo completen (...cuadrangular), y si requiere que los niños reconozcan las propiedades internas de los cuerpos y figuras, recurre al conteo incluso tomando la mano de un niño y contando con todos los niños que están siendo testigos en la actividad al momento en el que un niño participa; la docente hace uso del lenguaje convencional de la geometría.
- En segundo lugar conforme va avanzando el ciclo escolar y el niño es expuesto a diversas actividades geométricas, estos apoyos que ofrece la docente se vuelven más breves ahora únicamente la docente, propiciando el uso adecuado del lenguaje y de las objetivaciones. Muestra la herramienta usando cuestionamientos más generales como, si recuerdan que es,

propiciando que los niños respondan en algunos casos que es un esquema, un plano o en otros únicamente reconocen la herramienta por la función que tiene por lo que es la docente quien proporciona el nombre nuevamente. En este momento la docente también recurre a los niños más avanzados para que guíen las acciones de sus compañeros al momento de justificar porque necesitan un material y no otro cuando usan un esquema o plano para seleccionar material concreto (cuerpos geométricos), pidiéndoles que expliquen el porqué de su decisión, generando que el niño use el esquema para dar su justificación, es decir, la docente propicia el apoyo entre pares.

- Finalmente, cuando el niño ha comprendido tanto la estructura de la actividad así como las acciones geométricas que debe realizar y conoce el uso de las herramientas de dicho sistema, lo utiliza de manera autónoma siendo aquí en donde la función de la docente disminuye en términos de los apoyos que ofrecía en un primer momento, pasa de ser guía y apoyo a únicamente supervisar el trabajo de los niños y a mantener el orden del aula. La docente ahora solo da la indicación de lo que trabajaran y si en algún caso ella no proporciona la herramienta antes de iniciar la actividad los niños son capaces de solicitar la herramienta porque reconocen que es necesaria en la actividad, pero si ese cambio está dado por la estructura de la actividad son capaces de ajustarse a esas condiciones y justificar que también es posible solucionar el problema cambiando el orden de algunas de las acciones geométricas, es decir, poder diseñar y elaborar una construcción sin hacer uso de un esquema preestablecido propiciando que posteriormente ellos puedan realizar una representación gráfica de dicha construcción; realizar la reproducción de un plano convencional.
- *Transformación de la comprensión de los niños al usar el conocimiento geométrico dentro de actividades geométricas societales.* El traspaso de control entre el niño

y la docente sucede porque en primera instancia el niño participa como testigo, porque le falta familiaridad con la actividad, todavía nada tienen significado y poco a poco comienza a realizar acciones con ayuda y comienza a tener significados, ciertos conocimientos, a reconocer las herramientas y comienza a integrarlas. En el primer momento, la maestra realiza las acciones geométricas haciendo uso del sistema para el niño; después, la docente le ayuda al niño a realizar las acciones geométricas con ella o recurriendo al apoyo de algún compañero, para que finalmente, el papel de la docente ahora sea de supervisar las acciones geométricas que realiza el niño de manera autónoma, sin requerir más apoyos concretos. Es decir, el niño pasa de testificar acciones con el sistema a realizarlas de manera autónoma siempre usando el sistema.

Por lo anterior y como consecuencia de la dinámica que se va dando entre la docente y el niño a lo largo de cada actividad societal. El niño en primera instancia va comprendiendo la estructura de la actividad, como está organizada y cuáles son las acciones geométricas que debe realizar y los roles que se debe asumir, al mismo tiempo va haciendo uso de las herramientas culturales de las cuales no solo reconoce el nombre y lo diferencia de otras herramientas si no que conoce su funcionalidad. Así mismo, es capaz de interactuar y participar con sus compañeros para argumentar y justificar la toma de sus decisiones. A la par, el niño es capaz de realizar las acciones simbólicas que forman parte de la actividad, es decir, logra geometrizar. Construye el significado de los conocimientos geométricos, procesos y herramientas.

La significación proviene de la actividad, no está en el sistema por lo que es la actividad la que sostiene la significación del conocimiento, las acciones, y es aquí donde el conocimiento adquieren significado.

➤ *Capacidades cognitivas geométricas en los niños de preescolar.*

En educación preescolar los niños desarrollan diferentes capacidades cognitivas que van cambiando y modificándose en la medida en que los niños van siendo expuestos a actividades socialmente significativas que implican el uso del sistema

geométrico, como parte del proceso de lo que aquí llamamos, proceso de geometrización. Los niños son capaces de comunicar información geométrica haciendo uso del lenguaje propio de este sistema de conocimiento específico. Así mismo, los niños pudieron desarrollar la capacidad de **elaborar** representaciones externas, enactiva y gráficas, para poder representar cuerpos tridimensionales en un plano bidimensional: y ligado a esta capacidad logran desarrollar la capacidad de **interpretación** de representaciones externas que ellos mismo han elaborado. Encontrando que existen 6 niveles de representación gráfica que los niños de preescolar pueden alcanzar, incluido el nivel en el que la representación es muy apegada a la realidad, contrastando con Gutiérrez (1998) quien señala que es hasta el 2º de primaria (7 y 8 años de edad) que los niños pueden llegar a dibujar representaciones por niveles y a construir sólidos representados correctamente, porque no entienden el marco de referencia y no relacionan unos niveles con otros, mencionando que es hasta nivel secundaria cuando los niños logran realizar sus representaciones correctamente.

Así mismo, en este estudio se observó que los niños de preescolar logran desarrollar la capacidad de abstracción geométrica al elaborar construcciones tridimensionales con objetos concretos a partir de la observación de las propiedades geométricas representadas en planos y esquemas con diferente perspectiva preestablecidas. Para que los niños logren comprender y visualizar correctamente las representaciones externas o sistemas de representación geométrica requieren de la comparación de diferentes representaciones semióticas similares, es decir cambiar la perspectiva de las representaciones externas sin cambiar el objeto geométrico que se está denotando o mostrando.

Es decir, en contraste con Liben y Yekel (1996) los niños en preescolar logran interpretar planos en un principio con dificultades pero en niños de 3º de preescolar se observa que no muestran dificultad ni para comprender lo que ven representado en el espacio real, es decir, afuera en el plano real, ni muestran dificultad para comprender e interpretar el espacio simbolizado en el mapa, asumiendo que los

mapas son las representaciones simbólicas de la realidad y no una réplica de la misma. Aunque en un principio si se observa que la simbolización del espacio, es más eficiente cuando los niños hacen uso de los mapas oblicuos (tridimensionales) que al utilizar los mapas planos (bidimensionales) porque guardan mayor iconicidad o parecido con el objeto representado, lo cual cambia en la medida en que son participes en actividades que requerían del uso de esquemas, planos y fotos con diferente perspectiva, tanto bidimensionales como tridimensionales.

Por lo tanto la iconicidad es importante en la comprensión y entendimiento de mapas de diferente perspectiva en los niños de preescolar; y el usar primero mapas, planos y esquemas oblicuos facilita la comprensión y uso de las representaciones bidimensionales (planas), por la correspondencia representacional que hay entre ambos mapas y la representación real y geométrica de los mismos.

Es importante señalar que aunque se consideraron las competencias específicas PEP, 2011, los niños lograron desarrollar la capacidad de observación y abstracción de propiedades geométricas (lado, ángulo, arista, vértice y simetría, prisma cuadrangular, cubo, conos, prisma hexagonal, etc.); la capacidad elaboración e interpretación de representaciones abstractas (esquemas y planos) con diferente perspectiva; la capacidad de comunicación de forma oral o gráfica haciendo uso del lenguaje geométrico; la capacidad de argumentación y justificación de la toma de sus decisiones: y realiza deducciones lógicas e identifica cuando un razonamiento. Cabe señalar que estas capacidades son específicamente geométricas y se desarrollaron siempre y cuando se creen las condiciones de aprendizaje adecuadas dentro del aula, es decir, implementación de actividades contextualizadas geométricamente para hacer uso de este sistema.

De tal manera que, la forma de pensar del niño es de acuerdo a la forma de geometrizar. De acuerdo a la forma de lo de afuera será la forma interna de la mente

humana del niño, en este caso razonamiento geométrico porque está trabajando con el sistema geométrico. Es importante tener en cuenta que no hay una forma universal de pensar humana, en cada sistema hay una forma de pensar, y en el niño va a depender de la actividad societal en la que participa y del sistema que utilice dentro de la misma.

Implicaciones del estudio para la práctica educativa.

Uno de los problemas educativos que atraviesa actualmente México es el bajo nivel de aprendizaje que alcanzan los alumnos en las Matemáticas, y en particular en el aprendizaje y enseñanza de la geometría que aunque es uno de los aspectos de las matemática se deja de lado por estar centrados en el desarrollo de nociones numéricas o por la falta de estrategias para poder ser impartida. Aunque la Poresta Curricular y Pedagógica en la Reforma Integral de Educación Básica (RIEB, 2009) ha intentado dar solución al bajo rendimiento que muestran los estudiantes en el dominio de las matemáticas para mejorar la cobertura, la calidad de la educación y las prácticas de enseñanza, y lograr que los niños alcancen el Perfil de Egreso establecido en Educación Básica, aún sigue siendo deficiente.

Desde la perspectiva socio-cultural que aquí se utiliza, se sugiere la creación de espacios de aprendizaje que propicien la participación de los niños de preescolar en actividades geométricas auténticas enmarcadas en la realidad que es la que le dio origen, considerando el uso del sistema geométrico en su totalidad, haciendo uso de los diferentes tipos de geometría, y de las herramientas simbólicas y materiales las cuales van adquiriendo sentido en uso dentro de la actividad, para pasar de momentos de identificación de elementos geométricos en clase descontextualizadas, es decir, pasar de la clase del cuadrado y del triángulo a momentos de actividad que implique interpretar la realidad geoméricamente.

Teniendo en cuenta la geometrización como un objetivo de aprendizaje para generar experiencias adecuadas en donde los niños y niñas puedan participar y adquirir bases sólidas de razonamiento para impulsar su continuo desarrollo en los siguientes niveles educativos y, progresivamente se alcancen los estándares esperados por el currículum al final de la educación básica en el aspecto geométrico. Dicha actividad de geometrizar se refiere a la capacidad de realizar acciones simbólicas basadas en el sistema geométrico (Millroy, 1992; OCDE, 2012)

Siendo así, la función de la educación preescolar, promover el desarrollo y fortalecimiento de competencias geométricas en los niños, mediante las situaciones didácticas, las cuales pueden ser proyectos, talleres de construcción, diseño de planos o esquemas tridimensionales propiciando con ello que pongan en el uso sus conocimientos para ampliarlos o construir otros nuevos.

Limitaciones

En el transcurso de la investigación surgieron principalmente limitaciones en términos operativos, como el hecho de no lograr contar con un Centro de comparación debido a que en las diferentes instituciones, que se seleccionaron, solo se nos permitió la entrada para aplicar en uno de los momentos de evaluación, inicio o final, pero no se logró contar con ambos momentos de evaluación que permitieran conocer el desarrollo del razonamiento geométrico en niños que asisten a escuelas con espacios educativos distintos al del grupo de intervención.

Dentro del centro de intervención, las limitantes estuvieron en relacionados a inasistencias de niños en alguno de los momentos de evaluación o cuando debían ser observados porque conformaban los grupos de evaluaciones externas, lo cual ocasionaba un ajuste en el cronograma y algunos de estos casos fueron invalidados de los datos de análisis de la presente investigación.

REFERENCIAS

- Abraján, I. (2009) El uso del Tangram interactivo para el desarrollo de la imaginación espacial.
- Aslan, D. y Aktas, Y. (2007) Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education*. Vol. 15, No. 1, pp. 83–104
- Alatorre, J. (2008) *Entornos para el aprendizaje de las matemáticas en preescolar*. Programa de Prácticas Integrales. División de Estudios Profesionales, Coordinación de Formación en la Práctica. UNAM. México, D.F.
- Baquero, R. (2004) *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires. Argentina:AIQUE
- Bishop, A. (1999) *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Botha, M., Maree, J. G. y Witt W. (2005) Developing and piloting the planning for facilitating mathematical process and strategies for preschool learners. *Early Child Development and Care*.
- Bressan, A. Bogisic, B. y Crego, K. (2000) *Razones para Enseñar la Geometría en la Educación Básica*, Buenos Aires: Novedades Educativas.
- Broitman, C. y Itzcovich, H. (2003). Geometría en los primeros años de la E.G.B: Problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Analisis y propuestas*. Mabel Panizza (compiladora). Buenos Aires: Paidós. Pp. 59-71.
- Brousseau, G. (1986) *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, n° 19, 1993.
- Bruner, J. (1991) *Actos de Significado*. Madrid: Alianza.
- Cabrera, G. y Sosa, A. (2006) *Matemática con sentido: una propuesta que replantea el modo de enseñar la matemática en nivel inicial y EGB1*. Córdoba: Comunic-arte.
- Castro, J. (2004) El desarrollo de la noción del espacio en el niño de Educación Inicial. *Universidad de los Andes Táchira. Acción Pedagógica*. Vol. 13 (2)....

- Clements, D; Battista, M. y Sarama J. (2001) Logo and Geometry. Source: Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 10. Pp.: 1-177.
- Cole, M. (1985) The zone of proximal development where culture and cognition create each other. En culture communication and cognition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Daniels, H. (2001). Vygotsky and Pedagogy. London: Routledge Falmer.
- Daniels, H. (2003) *Vigotsky y la Pedagogía*. Traducción en castellano. Barcelona: Paidós.
- Daniels, H. (2008) *Activity Theory and Interventionist research*. London: Routledge.
- Del Grande, J. (1990) Spatial sense. En *Arithmetic Teacher*. Vol. 37 (6).
- Duhalde, M. y González, M. (1997) Encuentros Cercanos con las Matemáticas. Buenos Aires. Argentina: AIQUE.
- Eco, U. (2009) *Cultura y semiótica*. Círculo de Bellas Artes. Madrid.
- Flick, U. (2004) *Introducción a la investigación cualitativa*. España: Morata.
- Forman y Ansell (2002) Orchestrating the Multiple Voices and Inscriptions of a Mathematics Classroom. *Journal of the Learning Sciences*. 11:2-3, 251-274,
- Fuenlabrada, I. (2005) El Programa de Educación Preescolar 2004. Una Nueva Visión sobre las Matemáticas en el Jardín de niños. *Cero en Conducta*, 20 (51).
- Fujita, T. y Jones, K. (2013) Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*. V.64 Pp. 81-91.
- Fuys, D; Geddes, D. y Tischler R. (1988) The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Source: Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 3. Pp.:1-196.
- Gagatsis, A. y Ptronis, T. (1990) Using Geometrical Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 21: 29-54.
- García, P. y López, E. (2008) *La enseñanza de la Geometría: materiales para apoyar la práctica educativa*. México: INEE.

- Gibson, B.; Leichtman, D. Y Bemis, R. (2008) The use of Geometric properties of 2D Arrays across development. *Learning and Motivation*. 40: 95-108.
- González, A. y Weinstein, E. (2001) *¿Cómo enseñar Matemática en el Jardín?* Buenos Aires, Argentina: Colihue.
- Goss, M. (2004) Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (4), 258-291. Tarim, 2009.
- Gutiérrez, A. (1998) Las representaciones planas de cuerpos 3-Dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3 (3), 193-220. Valencia, España.
- Hershkowitz, R. (1990) Psychological Aspects of Learning Geometry. En P, Neshier y J, Kilpatrick. *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: University Press. Pp. 70-95.
- INEE (2008) *Pisa en el Aula: Matemáticas*, México: INEE.
- INEE (2014) *El aprendizaje en preescolar en México. Informe de resultados EXCALE 00 aplicación 2011*. Lenguaje y comunicación y Pensamiento matemático. México: INEE.
- INEE (2017) *México en PISA 2015*. México: INEE.
- INEE (2018) *Planea. Resultados nacionales 2018. 6º de primaria. Lenguaje y comunicación, matemáticas*. Mexico: INEE.
- Jaworski, B. y Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educ Stud Math* 72:219–236 completar el nombre de la revista
- Johanson-Laird, P. N. (1990) *El ordenador de la mente: introducción a la ciencia cognitiva*; traducción de Alfonso Medina. Barcelona: Paidós.
- Jurow A. (2005) Shifting Engagements in Figured Worlds: Middle School Mathematics Students' Participation in an Architectural Design Project. En *The Journal of the Learning Sciences*. Vol. 14 (1), 35-67.
- Kirshner, D. y Whitson, J. (1997) *Social, Semiotic and Psychological Perspectives Situated Cognition*. Lawrence Erlbaum, Associates: London Kozulin.
- Kline, M. (1992) *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. México: Consejo

Nacional de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica.

- LeCompte, M; Preissle, J. y Tesch, R. (1993) *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. USA: Academic Press.
- Leontiev, A.N. (1975) *Actividad, conciencia y personalidad*. Cuba: Editorial pueblo y Educación.
- Liben, L. S. y Yekel, C. A. (1996) Preschoolers' Understanding of Plan and Oblique Maps: The Role of Geometric and Representational Correspondence. En *Child Development*. Vol. 67 Pp. 2780-2796
- Maita y Peralta (2010) El impacto de la instrucción en la comprensión temprana de un mapa como objeto simbólico. *Infancia y aprendizaje*. Vol. 33 (1), pp. 47-62.
- Martí, E. (2003) *Representar el mundo externamente*. La construcción infantil de los sistemas externos de representación. Madrid: Aprendizaje.
- Martí, E. (2005) *Desarrollo, cultura y educación*. Buenos Aires: Amorrortu, Colección Agenda Educativa.
- Martí, E. y Pozo I. (2000) Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*. (90), 11-30.
- Mercer, N. y Littleton, K. (2007) *Dialogue and the Development of Children's Thinking. A sociocultural Approach*. USA y Canada: Routledge.
- Mercer, N. (2001) *Palabras y Mentes, como usamos el lenguaje para pensar juntos*. España: Paidós.
- Mitchelmore, M. C. (1976) Cross-cultural research on concepts of space and geometry. En J.L. Martín y D.A. Bradbard (Eds), *Space and geometry*. ERIC: Columbus, USA, p.p. 143-184.
- Mitchelmore, M. C. (1980) Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics*. 3 (3), pp. 2-7.
- Minick, N. (2005) The development of Vygotsky's thought: an introduction to thinking and speech. En H. Daniels. *An introduction to Vygotsky*. London y New York: Routledge.
- Millroy, W. L. (1992) An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of

Carpenters. En *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, Vol. 5, pp. i-210. Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/749904>.

Mira, M. (1998) *Matemática nueva en el parvulario*. Madrid. España.

OCDE (2003) *Marcos Teóricos de PISA*. España: Inecse.

OCDE (2010) *Pisa 2009, Results. Executive Summary*.

Onrubia, J; Rochera, J. y Barberá, E. (1990) La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll y (comp.) A. Marchesi y J. Palacios. *Desarrollo Psicológico y Educación*. Vol. 2.

Panizza, M. (2003) *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. En enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Analisis y propuestas. Mabel Panizza (compiladora). Buenos Aires: Paidós. Pp. 59-71.

Radford, L. (2004) *Semiótica, cultura y cognición*. École des sciences de l'éducation Université Laurentienne. Este artículo proviene de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities. Research Council of Canada (SSHRC/CRSH). Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México.

Ratner, C. (1997) *Cultural Psychology and Qualitative Methodology, Theoretical and Empirical Considerations*. New York y London: Plenum Press.

Rogoff, B. (1993) *Aprendices del pensamiento, el desarrollo cognitivo en el contexto social*. España: Paidós.

Rogoff, B. (1997) Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En J. Wertsch; P. Del Río. y A. Álvarez, *La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas*. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Roth, W-M. (2005) Mathematical Inscriptions and the Reflexive Elaboration of Understanding: An Ethnography of Graphing and Numeracy IN A Fish Hatchery. En *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 75-110.

Roth, W-M y Thom, J (2009) The Emergence of 3D Geometry Form Children's (Teacher-Guided) Classification Taks. En *The Journal of de Learning Sciences*.Vol. 18: 45-99.

- Rowan, T. y Bourne, B. (1999) *Pensando como matemáticos*. Buenos Aires. Argentina: manantial.
- Saada-Robert, M. (1995) Análisis microgenético en la interacción adulto-niño en una situación de escritura en la escuela. *Infancia y Aprendizaje*, 72, 95-113.
- Saxe, G. (2002) Children's Developing Mathematics in Collective Practices: A Framework for Analysis. En *The Journal of the Learning Sciences*, 11 (2-3), 275-300.
- Scribner, S. (1997) *Mind in Action: A functional approach to thinking*. En M. Cole; Y. Engeström y O. Vazquez; *Mind, Culture and Activity: Seminal Papers from the Laboratory of Comparative Human Cognition*. USA: Cambridge University Press.
- Secretaría de Educación Pública, (2009) *Reforma Integral de la Educación Básica*, México: SEP. Recuperado en: <http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/RIEB.pdf>
- Secretaría de Educación Pública (2009) *Reforma Integral de la educación básica 2009*. México: Santillana.
- Secretaría de Educación Pública, (2004) *Curso de Formación y Actualización Profesional para el Personal Docente de Educación Preescolar. Vol. 1*. México, SEP.
- Secretaría de Educación Pública, (2011) *Programa de educación Preescolar 2011*. México, SEP.
- Secretaría de Educación Pública, (2013) *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. Recuperado el 10 de septiembre de 2013 de: <http://www.ilce.edu.mx/dev/media/?p=evaluacion>
- Secretaría de Educación Pública, (2017) *Aprendizajes clave para la educación integral*. Educación preescolar. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. México: SEP.
- Siglo XXI. (2010) *Enciclopedia de conocimientos fundamentales*. UNAM-Siglo XXI. Matemáticas. México: vol. 5.
- Sperry, S. (2000) *Space and Shape*. Early Childhood Mathematics.2.

- Strauss y Corbin, (2002) Bases de la Investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Editorial Universidad de Antioquia.
- Tharp, R. y Gallimore R. (1988) *Rousing minds to life: teaching, learning, and schooling in social context*. USA: Cambridge.
- Tharp, R. (1991) *Rousing Minds to Life: Teaching, learning, and schooling in social context*. Cambridge University.
- Tharp, R; Estrada, P; Stoll S. y Yamauchi L. A. (2000) *Transformar la enseñanza: excelencia, equidad, inclusión y armonía en las aulas y las escuelas*. Temas de Educación. España: Paidós.
- Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010) Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educ Stud Math* 73:3–19
- Valsiner, (1984) En B. Rogoff y J. Wertsch, Eds. *Children's learning in the zone of proximal development* (New directions of child Development, 23) Jossey Bass: San Francisco.
- Vasilachis, I. (2006) Estrategias de Investigación cualitativa. Barcelona: Gedisa.
- Vigotsky, L. (1978) *Mind in Society*. USA: Library of congress cataloging in publication data.
- Vygotsky, L. S. (1979) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Edit. Por Michael Cole; traducción castellana de Silvia Furio. Barcelona: Critica.
- Wertsch, J. (1988) *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.
- Wertsch, J. (1997) La necesidad de la acción en la investigación Sociocultural, En J. Wertsch; P. Del Río y A. Álvarez, *La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas*. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.
- Wertsch, J., del Rio, P., y Álvarez, A. (1995). Sociocultural studies: History, action and mediation. In J. V. Wertsch, P. del Rio, y A. Alvarez (Eds.), *Sociocultural studies of the mind* (pp. 1–34). Cambridge: Cambridge University Press.
- Yackel, E. y Wheatley, G. (1986) Promoting visual imagery in young people. En *Arithmetic Teacher*. Vol. 37 (6).
- Yule G. (2007) El lenguaje. Traducción de Nuria Bel Rafecas; nueva edición española a cargo de Antonio Benítez Burraco. Barcelona: Akal.

Zinchenko, V. (1997) La psicología sociocultural y la teoría psicológica de la actividad: revisión y proyección hacia el futuro. En J, Wertsch., P, Del Río., y A, Álvarez. La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

ANEXOS

Anexo 1. Organización de las situaciones didácticas distribuidas en el ciclo escolar por grado.

PRIMER GRADO			SEGUNDO GRADO			TERCER GRADO		
No.	Situación didáctica	Fecha	No.	Situación didáctica	Fecha	No.	Situación didáctica	Fecha
1	T.C. Medios de Transporte	8.NOV.2011	1	T.C. Medios de Transporte	8.NOV.2011	1	T.C. Medios de Transporte	8.NOV.2011
2	Rehilete	22-23 NOV.2011	2	Animales de Tangram	22-23 NOV.2011	2	Animales de Tangram	22-23 NOV.2011
3	Villa Navideña	28.NOV.2011 a 2.DIC.2011	3	Villa Navideña	28.NOV.2011 a 2.DIC.2011	3	Villa Navideña	28.NOV.2011 a 2.DIC.2011
4	Papalote	11-12 ENE.2012	4	Papalote	11-12 ENE.2012	4	Papalote	11-12 ENE.2012
5	Conociendo ecosistemas	25.ENE.2012	5	Conociendo ecosistemas	25.ENE.2012	5	Conociendo ecosistemas	25.ENE.2012
6	Teselaciones	31.ENE.2012	6	Rehilete	31.ENE.2012	6	Rehilete	31.ENE.2012
7	T.C. Robot	2-3 FEB.2012	7	Teselaciones	2-3 FEB.2012	7	Teselaciones	2-3 FEB.2012
8	Así es mi escuela	9-10 FEB.2012	8	Así es mi escuela	9-10 FEB.2012	8	Así es mi escuela	9-10 FEB.2012
9	Fabricando Muebles	20-21 FEB.2012	9	Fabricando Muebles	20-21 FEB.2012	9	Fabricando Muebles	20-21 FEB.2012
10	En busca del tesoro	27-28 FEB.2012	10	En busca del tesoro	27-28 FEB.2012	10	En busca del tesoro	27-28 FEB.2012
11	Descubriendo mi Tangram	29.FEB-1.MAR.2012	11	Descubriendo mi Tangram	29.FEB-1.MAR.2012	11	Descubriendo mi Tangram	29.FEB-1.MAR.2012

Estudio del Desarrollo sobre el Uso de la Geometría como Parte de la Matemización en Educación Preescolar

12	Como es mi patio	11.MAR.2012	12	Como es mi patio	11.MAR.2012	12	Como es mi patio	11.MAR.2012
13	Animales de Tangram	22-23 MAR.2012	13	T.C. Robot	22-23 MAR.2012	13	T.C. Robot	22-23 MAR.2012
14	Construyendo mi edificio	26-27-28 MAR.2012	14	Construyendo mi edificio	26-27-28 MAR.2012	14	Construyendo mi edificio	26-27-28 MAR.2012
15	Regalo para mamá	3-4 MAY.2012	15	Regalo para mamá	3-4 MAY.2012	15	Regalo para mamá	3-4 MAY.2012
16	Batalla naval	7.MAY.2012	16	Batalla naval	7.MAY.2012	16	Batalla naval	7.MAY.2012
17	Elaboración de casita vertical	8-9 MAY.2012	17	Elaboración de casita vertical	8-9 MAY.2012	17	Elaboración de casita vertical	8-9 MAY.2012
18	Jugando a ser arquitectos	28.MAY.2012 a 1.JUN.2012	18	Jugando a ser arquitectos	28.MAY.2012 a 1.JUN.2012	18	Jugando a ser arquitectos	28.MAY.2012 a 1.JUN.2012
19	Laberinto	4-5-6 JUN.2012	19	Laberinto	4-5-6 JUN.2012	19	Laberinto	4-5-6 JUN.2012