Universidad Nacional Autónoma de México
programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas y de la especialización en estadística aplicada

OPERADORES DE WIENER-HOPF CON SÍMBOLOS MATRICIALES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Francisco Javier Monsiváis González

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Yuri Karlovich Ozolinsh
Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Cuernavaca, Morelos , 15 de marzo de 2019

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

A Dios, por permitirme lograr esta meta, por las oportunidades que me ha dado para llegar hasta donde estoy ahora y por poner en mi vida a excelentes personas que han contribuido enormemente en mi formación como matemático y sobre todo como persona.

Al Dr. Yuri Karlovich Ozolinsh, por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección, por la paciencia, disposición y el apoyo que me brindó durante el desarrollo de este trabajo, por la motivación y los concejos que me dio a lo largo de estos años y por brindarme su amistad y su confianza.

A mis padres, por apoyarme constante e incondicionalmente, por el buen ejemplo y los buenos consejos que me han dado, por escucharme cuando lo necesito y por confiar en mis decisiones. Gracias a ustedes puedo hacer realidad este sueño.

A mi familia y amigos, por acompañarme en esta vida y compartir tantos momentos inolvidables, por el apoyo e impulso que me han ofrecido. Especialmente a Lilia Mariana Barrera Castro por todo el cariño, paciencia y comprensión, a su hermosa familia por el apoyo y las atenciones que han tenido para conmigo; a Mario Guerrero Pérez por sus consejos, su confianza y su valiosa amistad; al Dr. Juan Loreto Hernández y a su esposa Magdalena, gracias por todos las recomendaciones y sugerencias, fueron de mucha ayuda, gracias por su amistad y los buenos momentos.

A mis maestros, por toda la paciencia que me tuvieron durante los cursos, por la dedicación y compromiso en la formación que me brindaron, por atender mis dudas y por darme siempre un poco de su tiempo. Especialmente al los Doctores Carlos Villegas, Marcos López, Carlos Cabrera, por todo el apoyo, gracias por las grandes lecciones y la orientación que me han brindado durante la maestría.

A mis compañeros, por compartir conmigo tantas experiencias y apoyarme cuando lo necesitaba. Especialmente a Eddye Álamo, Magdalena Casas, Oscar Guajardo, Francisco López, Enrique Espinoza, Enrique Chávez y Joel Espinoza, gracias por todo muchachos.

A CONACyT por la beca que me proporcionaron, porque gracias a ello, fue posible mi estancia en la maestría; al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por la oportunidad de seguir adelante en mi formación y por el gran apoyo que me brindaron durante este tiempo. Al personal administrativo, especialmente a Elizabeth Domínguez y Lucía Hernández, por la paciencia y la disposición de ayudar.

A mis sinodales, por sus valiosas sugerencias y acertados aportes durante el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción

En las áreas de ingeniería, física y matemáticas, frecuentemente se encuentran problemas los cuales conducen a ecuaciones del tipo de convolución, ver [1] y [2]. Entonces estudiar la invertibilidad de los operadores del tipo de convolución se convierte en una tarea sumamente interesante, pues mostrando que un operador de convolución es invertible se puede garantizar la existencia de una solución a la ecuación de convolución. Estos operadores en el semieje positivo pueden ser estudiados recurriendo a los métodos y resultados de la teoría de operadores de Wiener-Hopf. Particularmente, los operadores de convolución con núcleos continuos o continuos a trozos sobre intervalos finitos, pueden ser transformados en operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales cuyas entradas son funciones casi periódicas, ver [3] y [4]. La clase de funciones casi periódicas surge de forma natural cuando se considera al álgebra generada por el operador integral singular de Cauchy.

Los problemas sobre la invertibilidad de los operadores de Wiener-Hopf con símbolos continuos o continuos a trozos sobre intervalos finitos están íntimamente relacionados con los problemas fundamentales de factorización de matrices casi periódicas convirtiendo a la teoría de factorización casi periódica en una fuerte herramienta en la solución de problemas donde las ecuaciones del tipo de convolución emergen naturalmente, ver [5] y [6]. Se han obtenido algunos resultados sobre factorizaciones explícitas y teoremas de existencia en [6], [7] y [8].

Entre otras aplicaciones de la factorización casi periódica se incluyen problemas de dispersión de ondas [9] y procesamiento de señales [8].

La tesis está dedicada al estudio de la factorización casi periódica de la función matricial

$$G_f = \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ f & e_{-\lambda} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

donde $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ para $x, \lambda \in \mathbb{R}$ y f es una función casi periódica. Este tipo de funciones están relacionadas con el estudio de la invertibilidad de operadores de convolución finitos $W_\lambda(f)$ en los espacios $L^p(0,\lambda)$, $1 < p < \infty$.

Particularmente, consideraremos la función matricial G_f con f una función casi periódica de la forma

$$f(x) = c_{-1}e_{-\alpha}(x) - c_0 + c_1 e_\beta(x) \tag{2}$$

$$c_{-1}, c_0, c_1 \in \mathbb{C},\ c_{-1}c_0c_1 \neq 0,\ \ \alpha\beta > 0,\ \ \beta/\alpha \notin \mathbb{Q}. \tag{3}$$

Después se construye la teoría de Fredholm (un criterio de Fredholm y una formula de índice) para el operador de Wiener-Hopf $W_\lambda(G_f)$ en el espacio $L_2^p(\mathbb{R}_+)$ donde G_f tiene la forma (1) y f es una función semi casi periódica.

En [10] se han publicado condiciones necesarias y suficientes para que G_f admita factorización casi periódica en el caso en que $\beta+\alpha = \lambda$, se afirma que la factorización casi periódica de (1) en esta situación existe si y solo si

$$|c_{-1}|^\beta\, |c_1|^\alpha \neq |c_0|^\lambda\,. \tag{4}$$

Si se satisface (4), la factorización en cuestión es canónica y por lo tanto una factorización casi periódica de Wiener (APW). En [11] se establecen fórmulas explicitas para esta factorización. Uno de los objetivos de este trabajo es encontrar un criterio similar a (4) para el caso cuando $\lambda = 2\beta + 2\alpha$, así como las fórmulas explicitas de al factorización casi periódica.

La restricción de los exponentes α, β en (3) está justificado por el echo de que, con $\alpha\beta < 0$ o $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}$ en (3), es conocido que la función matricial (1) es factorizable (ver [7, Capítulo 14]). Si f está dada por (2) con $\beta + \alpha > \lambda$ también se tiene que siempre existe una factorización casi periódica (AP) (ver [10, Teorema 6.1], ver también [7, Capítulo 15]). Esta es inclusive canónica y puede ser construida explícitamente en varias formas (ver [12, Sección 5] y [13, Teorema 2.1]).

El estudio de la factorización casi periódica de las funciones matriciales G_f está fuertemente relacionada con el siguiente problema de salto en el espectro.

Dada una función casi periódica de Wiener f, encontrar otra función casi periódica de Wiener g tal que

$$\Omega(g) \subset [-\lambda, 0] \quad \text{mientras que } \Omega(fg) \cap (-\lambda, 0) = \emptyset. \tag{5}$$

Veremos que esta equivalencia se puede utilizar para encontrar una factorización canónica casi periódica.

El contenido de la tesis se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se recuerdan algunas definiciones y conceptos sobre álgebras de Banach, C^*-álgebras y operadores de convolución y se fija la notación que será utilizada posteriormente. Se introduce el concepto de operador de convolución con símbolo matricial y se dan resultados para el operador de convolución sobre un intervalo.

En el Capítulo 2 se introducen los conceptos de valor medio, espectro de Bohr-Fourier, el valor medio de movimiento y el valor medio geométrico para el caso escalar. Se prueba que el espectro de Bohr-Fourier de una función matricial es a lo más numerable y se da una demostración del teorema de Bohr.

En el Capítulo 3 se definen las álgebras AP y APW, se introducen los conceptos de factorizaciones AP y APW derechas e izquierdas. Después se esboza una prueba de la unicidad de estas factorizaciones. Se introduce el concepto de índices AP y se define el concepto de valor medio geométrico para el caso matricial. También se da un ejemplo de una función en $APW_{2\times 2}$ la cual no posee una factorización APW mostrando así que no todas las funciones matriciales en $APW_{N\times N}$ tienen una factorización APW. Además se dan algunos resultados sobre los índices AP y se plantea el problema de Riemann-Hilbert y se da una equivalencia para la existencia de una factorización AP con un problema de tipo espectral.

En el Capítulo 4 se escriben algunos resultados de [14] en los que se obtiene un criterio de manera constructiva para la factorización APW de la función matricial triangular dada por (1) donde $f = c_{-1}e_{-\alpha} - c_0 + c_1 e_\beta$, las constantes c_j son distintas de cero y $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$.

En el Capítulo 5, siguiendo las ideas de [14] usadas en el Capítulo 4, se obtiene una condición necesaria para la existencia de una factorización canónica APW de la función matricial (1) con $f = c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta$, donde $0 < \alpha < \beta < \alpha + 2\beta < \lambda$ y los coeficientes $c_\pm/c_0$ son lo suficientemente pequeños. El resultado obtenido en este capítulo se utilizará en el Capítulo 6 donde el criterio de factorización casi periódica para coeficientes pequeños es un caso particular de este.

En el Capítulo 6, siguiendo un razonamiento análogo a las ideas en el Capítulo 4 y apoyándose de los resultados en el Capítulo 5, se obtiene un criterio de manera constructiva para la factorización APW de la función matricial triangular dada por (1) donde $f = c_{-1}e_{-\alpha} - c_0 + c_1 e_\beta$, las constantes c_j son distintas de cero y $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda = 2\beta + 2\alpha$. Posteriormente se prueba un resultado para el valor medio de la función matricial (1) el cual será de ayuda al momento de aplicar el criterio obtenido para establecer un criterio de Fredholm y una fórmula de índice del operador de Wiener-Hopf con símbolo matricial en el conjunto de funciones semi casi periódicas de Wiener ($SAPW$).

Finalmente, en el Capítulo 7 se da la definición de índice de Cauchy para una matriz semi casi periódica. Se definen los multiplicadores de Fourier en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}_+)$. Se definen las clases de funciones AP_p, $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ y SAP_p. Por último, se enuncian algunos resultados para las funciones en SAP_p [7, Capítulos 17-19] y se establece un criterio de Fredholm y una fórmula de índice para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales triangulares en $SAPW$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Álgebras de Banach y C^*-álgebras

Definición 1.1. Un *Álgebra de Banach* es un espacio de Banach complejo A con una multiplicación asociativa y distributiva que satisface $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ para todo $a, b \in A$. Un álgebra de Banach es llamada *unitaria* si tiene un elemento $e \in A$ tal que $ea = ae = a$ para todo $a \in A$, el cual se llamará elemento unitario.

El elemento unitario también conocido como identidad se denota usualmente por e, 1 o I. Siempre se pedirá que $\|e\| = \|1\| = \|I\| = 1$.

Definición 1.2. Sea A un álgebra de Banach con elemento unitario e. Se dice que un elemento $a \in A$ es *invertible* (en A) si existe un elemento $b \in A$ tal que $ab = ba = e$. La colección de elementos invertibles de A será denotada por GA.

Sea a un elemento de un álgebra de Banach unitaria A con elemento unitario e. Si existe $b \in A$ tal que $ba = ab = e$, se puede mostrar que b está únicamente determinado, de esta forma se pude referir a b como *el inverso de a*. También se puede probar que GA es un subconjunto abierto de A y que GA es un grupo con respecto a la multiplicación de A.

Definición 1.3. El *espectro* de un elemento $a \in A$ es el conjunto

$$\mathrm{sp}_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \notin GA\}.$$

Cuando sea claro el álgebra a la que se hace referencia se escribirá $\mathrm{sp}(a)$ en lugar de $\mathrm{sp}_A(a)$.

Se puede probar que el espectro $\mathrm{sp}(a)$ es siempre un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ el cual está contenido en el disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.

Ejemplo 1.4. Si X es un espacio de Banach, entonces el conjunto $\mathcal{B}(X)$ de todos los operadores lineales acotados en X es un álgebra de Banach unitaria bajo las operaciones algebraicas naturales y la norma de operadores. El elemento unitario es el operador identidad I. Para un operador $A \in \mathcal{B}(X)$, el conjunto $\mathrm{sp}_{\mathcal{B}(X)}(A)$ será llamado el espectro del operador A. □

Ejemplo 1.5. Para $1 \leq p \leq \infty$, se denotará por $L^p(\mathbb{R})$ el espacio de Lebesgue usual en la recta real $\mathbb{R}$. La norma en $L^p(\mathbb{R})$ será denotada por $\|\cdot\|_p$. El espacio $L^\infty(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach unitaria bajo el producto puntual de funciones y la norma $\|\cdot\|_\infty$. A pesar de que los elementos de $L^p(\mathbb{R})$ son clases de funciones, siempre se referirá a ellas como funciones. Una función $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ es invertible en $L^\infty(\mathbb{R})$ si y solo si

$$\operatorname*{essinf}_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| > 0,$$

donde

$$\operatorname{essinf}(f) := \sup\{b \in \mathbb{R}_+ : \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < b\}) = 0\}.$$

El espectro $\mathrm{sp}_{L^\infty(\mathbb{R})}(a)$ de $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ es llamado *rango esencial* de a y es denotado por $\mathcal{R}(a)$. □

Definición 1.6. Un elemento a de un álgebra de Banach unitaria A se dice que es invertible por la izquierda (derecha respectivamente) si existe un $b \in A$ tal que $ba = e$ ($ab = e$ respectivamente).

Un álgebra de Banach A es llamada *conmutativa* si $ab = ba$ para todo $a, b \in A$. Dada un álgebra de Banach conmutativa con unidad e, se denotará por G_0A la componente conexa de GA que contiene a e. Es bien conocido que

$$G_0A = \{\exp(b) : b \in A\} \tag{1.1}$$

donde $\exp(b) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n}$.

Definición 1.7. Sea A un álgebra de Banach. Para un subconjunto $E \subset A$, se denotará por $\mathrm{alg}_A E$ o simplemente $\mathrm{alg}\, E$, a la subálgebra cerrada más pequeña que contiene a E, es decir, la intersección de todas las subálgebras cerradas de A que contienen a E. Equivalentemente,

$$\mathrm{alg}_A E = Clos\left\{\sum_j \gamma_j \prod_k a_{jk} : \gamma_j \in \mathbb{C}, a_{jk} \in E\right\},$$

donde la suma y el producto ordenado son finitos; aquí $Clos$ es la cerradura en A. Dados subconjuntos $E, F, \ldots \subset A$ y elementos $a, b, \ldots \in A$, se pondrá

$$\mathrm{alg}(E, F, \ldots, a, b, \ldots) := \mathrm{alg}(E \cup F \cup \ldots \cup \{a, b, \ldots\}).$$

Definición 1.8. Sean A y B álgebras de Banach. Un operador lineal acotado φ: $A \to B$ es llamado *homomorfismo de álgebras de Banach* si $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in A$. Si además φ resulta ser un operador biyectivo se dirá que φ es un *isomorfismo de álgebras de Banach.*

Definición 1.9. Un mapeo $a \mapsto a^*$ de un álgebra de Banach en si misma es llamado una *involución* si

$$(a^*)^* = a, \ (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \ (a+b)^* = a^* + b^*, \ (ab)^* = b^* a^*$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $a, b \in A$. Un álgebra de Banach A con una involución $a \mapsto a^*$ es llamada C^**-álgebra* si $\|aa^*\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.

Ejemplo 1.10. Si H es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(H)$ es una C^*-álgebra con la involución $T \mapsto T^*$, donde T^* es el operador adjunto de T. El álgebra de Banach $L^\infty(\mathbb{R})$ es una C^*-álgebra bajo la involución $a^*(x) := \overline{a(x)}$, donde la barra denota el complejo conjugado. □

Definición 1.11. Una subálgebra B de un C^*-álgebra con involución $*$ es llamada auto-adjunta si $b^* \in B$ para todo $b \in B$.

Definición 1.12. Sea A un álgebra de Banach con elemento unitario e y sea B una subálgebra cerrada de A que contiene a e. Si $\mathrm{sp}_B(b) = \mathrm{sp}_A(b)$ para todo $b \in B$, entonces B es llamado *inversamente cerrado* en A. El hecho de que B sea inversamente cerrado en A es equivalente a decir que si $b \in B$ es invertible en A entonces b también es invertible en B.

Definición 1.13. Un homomorfismo de álgebras de Banach $\varphi : A \to B$ entre dos C^**-álgebras* A y B es llamado C^**-álgebra homomorfismo* si $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$ para todo $a \in A$. Un C^**-álgebra isomorfismo* es un C^**-álgebra homomorfismo* biyectivo.

Proposición 1.14. *Sean A y B dos C^*-álgebras y sea $\varphi\colon A \to B$ un C^*-álgebra homomorfismo.*

a) *Tenemos que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.*

b) *Si φ es inyectivo, entonces φ es una isometría, esto es, $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ para toda $a \in A$.*

c) *La imagen $\varphi(A)$ es un conjunto cerrado y así una C^*-subálgebra de B.*

d) *Si φ es inyectivo, entonces $\mathrm{sp}_A(a) = \mathrm{sp}_B(\varphi(a))$ para todo $a \in A$.*

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Se denotará por M el conjunto de todos los homomorfismos de álgebras de Banach no nulos $m\colon A \to \mathbb{C}$. Se puede probar que el conjunto M es un espacio compacto Hausdorff en la topología débil estrella del espacio dual A^* y es llamado *espacio de ideales maximales* de A. El mapeo

$$\Gamma\colon A \to C(M), \quad (\Gamma a)(a) := m(a)$$

es un homomorfismo de álgebras de Banach y es llamado el *mapeo de Gelfand.*

Teorema 1.15 (Gelfand). *Sea un álgebra de Banach conmutativa con unidad y sea* $\Gamma\colon A \to C(M)$ *el mapeo de Gelfand. Entonces un elemento* $a \in A$ *es invertible si y solo si* $(\Gamma a)(m) \neq 0$ *para toda* $m \in M$.

Teorema 1.16 (Gelfand-Naimark).

a) *Si* A *es un* C^**-álgebra conmutativa con unidad, entonces el mapeo de Gelfand es un* C^**-álgebra isomorfismo de* A *sobre* $C(M)$.

b) *Si* A *es cualquier* C^**-álgebra , entonces existe un espacio de Hilbert* H *y un* C^**-álgebra homomorfismo inyectivo* $\varphi\colon A \to \mathcal{B}(H)$. *En otras palabras, cada* C^**-álgebra puede ser identificada con una* C^**-subálgebra de* $\mathcal{B}(H)$ *para algún espacio de Hilbert* H.

1.2 Operadores de convolución en la recta

Un operador de convolución está formalmente dado por

$$(Af)(t) = \int k(t-s)f(s)ds.$$

Se hará referencia a la función k como el *kernel o núcleo de convolución* de A.

Consideraremos al operador de convolución sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$:

$$(Af)(t) = \int_{\mathbb{R}} k(t-s)f(s)ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Denotemos por $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ a la transformada de Fourier,

$$(\mathcal{F}f)(x) := \widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

y sea $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la inversa de $\mathcal{F}$,

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}dx,\ t \in \mathbb{R}.$$

El operador (1.2) puede ser escrito formalmente como

$$A = \mathcal{F}^{-1}\widehat{k}\mathcal{F} \tag{1.4}$$

o equivalentemente, $\widehat{(Af)}(x) = \widehat{k}(x)\widehat{f}(x),\ x \in \mathbb{R}$. De esta forma, la transformada de Fourier lleva la convolución por k a la multiplicación por $\widehat{k}$. La función $\widehat{k}$ es llamada el *símbolo* del operador (1.4).

Dada una función a en $L^\infty(\mathbb{R})$, se denotará por aI al operador de multiplicación por a en $L^2(\mathbb{R})$:

$$aI : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ g \mapsto ag.$$

Como $|a(x)| \leq \|a\|_\infty$, $\|aI\| \leq \|a\|_\infty$ y aI es acotado en $L^2(\mathbb{R})$. No es difícil probar que $\|aI\| = \|a\|_\infty$. En caso de que el operador aI esté precompuesto con otro operador, digamos X, se omitirá la I abreviando aIX como aX. Para $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, se define el operador $W^0(a)$ por

$$W^0(a) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ f \mapsto \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F} f.$$

Dado que $\|aI\| = \|a\|_\infty$ y $\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}$ es una isometría de $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $\|W^0(a)\| = \|a\|_\infty$. De (1.2) y (1.4), el operador $W^0(a)$ es llamado el *operador de convolución con símbolo* a.

Proposición 1.17. *El mapeo*

$$W^0 : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})),\ a \mapsto W^0(a)$$

es un homomorfismo isométrico de C^*-álgebras. Además si $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathrm{sp}(W^0(a)) = \mathcal{R}(a),$$

y si $a \in GL^\infty(\mathbb{R})$ entonces el inverso del operador $W^0(a)$ es el operador $W^0(a^{-1})$.

Demostración. Sean $a, b \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego

$$\begin{aligned} W^0(\lambda a + b)(f) &= \mathcal{F}^{-1}(\lambda a + b)\mathcal{F}(f) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\lambda a(\mathcal{F}(f)) + b(\mathcal{F}(f))) \\ &= \lambda \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}^{-1} b(f) \\ &= (\lambda W^0(a) + W^0(b))(f) \end{aligned}$$

por lo que W^0 es lineal.

Por otro lado

$$W^0(ab) = \mathcal{F}^{-1} ab \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} b \mathcal{F}(f) = W^0(a)W^0(b)(f),$$

así, W^0 es homomorfismo, de donde se sigue que $(W^0(a))^{-1} = W^0(a^{-1})$. De la definición de $W^0(a)$ se tiene que $\|W^0(a)\| = \|a\|_\infty$ y por tanto $W^0(a)$ es una isometría.

Además se tiene que si A y B son C^*-álgebras y $\varphi : A \to B$ es un C^*-homomorfismo inyectivo, entonces $\mathrm{sp}_A(a) = \mathrm{sp}_A(\varphi(a))$ para todo $a \in A$, en este caso se tiene que

$$\mathrm{sp}_{L^\infty(\mathbb{R})}(a) = \mathrm{sp}_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}(W^0(a)). \quad \blacksquare$$

Así, el problema de encontrar el espectro del operador de convolución (1.2) es equivalente a encontrar el rango esencial de su símbolo.

Ejemplo 1.18. Si $k \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{k}$ es una función continua que se anula en infinito y tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} k(t-s) f(s) ds = (W^0(\widehat{k})f)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $\gamma \in \mathbb{C}$, entonces $\gamma I = W^0(\gamma)$. Notar que γI puede ser interpretado como la convolución por $\gamma\delta(t)$ donde $\delta(t)$ es la función Delta de Dirac. Entonces el operador A dado por

$$(Af)(t) = \gamma f + \int_{\mathbb{R}} k(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $\gamma \in \mathbb{C}$ y $k \in L^1(\mathbb{R})$ tiene el símbolo $\gamma + \widehat{k}(x)$. Esta es una función continua en $\mathbb{R}$ cuyos limites en $\pm\infty$ existen y son iguales a γ. Consecuentemente, por la Proposición 1.17,

$$\mathrm{sp}(W^0(\gamma + \widehat{k})) = \{\gamma + \widehat{k}(x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\gamma\}. \qquad \square$$

Denotemos por $C(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ y sea $BC(\mathbb{R}) := C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$.

Sean $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $C(\dot{\mathbb{R}})$ el conjunto de las funciones $a \in BC(\mathbb{R})$ para las cuales los límites

$$a(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} a(x), \quad a(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} a(x)$$

existen y coinciden. El valor común de estos dos límites será denotado por $a(\infty)$. Finalmente definimos $C_0(\dot{\mathbb{R}})$ como la colección de todas las funciones $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ para las que $a(\infty) = 0$. Notar que $BC(\mathbb{R})$, $C(\dot{\mathbb{R}})$ y $C_0(\dot{\mathbb{R}})$ son C^*-subálgebras de $L^\infty(\mathbb{R})$.

1.3 Símbolos casi periódicos

Se comenzará estudiando una importante clase de operadores de convolución en $L^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.19. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, se define el operador de *traslación* $U_\lambda \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ por

$$(U_\lambda f)(t) := f(t-\lambda), \ t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\widehat{U_\lambda f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\lambda)e^{itx}dt = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{i(s+t)x}ds = e^{i\lambda x}\widehat{f}(x),$$

se puede ver que $U_\lambda = W^0(e_\lambda)$ con $e_\lambda(x) := e^{i\lambda x}$. Así U_λ es el operador de convolución con símbolo e_λ. Usando la delta de Dirac $\delta(t)$, se tiene que

$$(U_\lambda f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-\lambda-s)f(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

lo que muestra que U_λ es la convolución por el kernel $\delta(t-\lambda)$. De la Proposición 1.17 se deduce que $\mathrm{sp}(U_\lambda) = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ siempre que $\lambda \neq 0$. $\square$

Definición 1.20. La subálgebra cerrada más pequeña de $L^\infty(\mathbb{R})$ que contiene todas las funciones e_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) será denotada por AP y nombrada como el álgebra de *funciones casi periódicas*:

$$AP := \mathrm{alg}_{L^\infty(\mathbb{R})}\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}, \ e_\lambda(x) := e^{i\lambda x}.$$

Una función casi periódica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que puede ser representada como una suma finita de la forma $p = \sum r_j e_{\lambda_j}$, con $r_j \in \mathbb{C}$ y $\lambda_j \in \mathbb{R}$, es llamada *polinomio casi periódico*. La colección de todos los polinomios casi periódicos será denotada por APP. Además, AP es la cerradura de APP en $L^\infty(\mathbb{R})$. Se puede probar que AP es una C^*-subálgebra de $L^\infty(\mathbb{R})$. La subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ la cual contiene los operadores de traslación U_λ puede ser caracterizada como la imagen de AP bajo el mapeo W^0:

$$\mathrm{alg}_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} = W^0(AP).$$

1.4 Propiedades de las funciones casi periódicas

Muchas propiedades de las funciones casi periódicas están eventualmente basadas en el Teorema de Kronecker. A continuación se verá este resultado y algunas consecuencias. No se escribirá la demostración de este teorema ni de algunas de sus implicaciones, sin embargo, pueden ser consultadas en la Sección 1.4 de [7].

Definición 1.21. Una colección de números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se dice *racionalmente dependiente* si existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ tales que $k_1\lambda_1 + \ldots + k_m\lambda_m \in \mathbb{Z}$ y no todos los $k_1, \ldots, k_m$ son iguales a cero.

De otra forma, si $k_1\lambda_1 + \ldots + k_m\lambda_m \in \mathbb{Z}$ con $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ solo es posible para $k_1 = \ldots = k_m = 0$, entonces se dice que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son *racionalmente independientes.*

Teorema 1.22 (Kronecker). *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y considere el mapeo*

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}^m, \ l \mapsto (e^{2\pi i\lambda_1 l}, \ldots, e^{2\pi i\lambda_m l}).$$

Si los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son racionalmente independientes, entonces $\phi(\mathbb{N})$ es un subconjunto denso de $\mathbb{T}^m := \underbrace{\mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{m \text{ veces}}$, donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definición 1.23. Se dice que una colección finita $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de números reales es *linealmente independiente sobre* $\mathbb{Z}$ si la igualdad $k_1\lambda_1 + \ldots + k_m\lambda_m = 0$ con $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ implica que $k_1 = \ldots = k_m = 0$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son racionalmente independientes, entonces son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. La implicación inversa no es cierta: por ejemplo, un solo número λ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Z}$ si y solo si $\lambda \neq 0$, mientras que λ es racionalmente independiente si y solo si λ es irracional. De hecho se puede decir más, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son racionalmente independientes exactamente si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$.

Corolario 1.24. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y sea ψ el mapeo*

$$\psi : (t, \infty) \to \mathbb{T}^m, \ x \mapsto (e^{i\lambda_1 x}, \ldots, e^{i\lambda_m x}).$$

Si los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$, entonces $\psi((t, \infty))$ es un subconjunto denso de $\mathbb{T}^m$.

Lema 1.25. Dada cualquier colección finita $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de números reales, existe una colección finita $\beta_1, \ldots, \beta_m$ con $m \leq n$ de números reales linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$ tales que

$$\lambda_j = k_1^{(j)}\beta_1 + \ldots + k_m^{(j)}\beta_m, \text{ con } k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)} \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 1.26. *Sean $a \in AP$ y $\mu \in \mathcal{R}(a)$. Si $\varepsilon > 0$, entonces cada conjunto (t, ∞) (también $(-\infty, t)$) contiene un punto x tal que $|a(x) - \mu| < \varepsilon$. En particular,*

$$\|a\|_\infty = \limsup_{x\to+\infty} |a(x)| = \limsup_{x\to-\infty} |a(x)|. \tag{1.6}$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|a(x_0) - \mu| < \frac{\varepsilon}{4}$ y escojamos un polinomio casi periódico $p = \sum r_j e_{\lambda_j}$ tal que $\|a - p\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Como

$$\begin{aligned} |a(x) - \mu| &\leq |a(x) - p(x)| + |p(x) - p(x_0)| + |p(x_0) - a(x_0)| + |a(x_0) - \mu| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + |p(x_0) - p(x)| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

es suficiente probar que existe $x \in (t, \infty)$ tal que $|p(x_0) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Por el Lema 1.25, existen $\beta_1, \ldots, \beta_m$ los cuales satisfacen (1.5) y son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Se tiene que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j e^{i\lambda_j x} = \sum_{j=1}^{n} r_j (e^{i\beta_1 x})^{k_1^{(j)}} \ldots (e^{i\beta_m x})^{k_m^{(j)}},$$

y por el Corolario 1.24, cada vecindad abierta de $(e^{i\beta_1 x_0}, \ldots, e^{i\beta_m x_0}) \in \mathbb{T}^m$ contiene un punto $(e^{i\beta_1 x}, \ldots, e^{i\beta_m x})$ con $x \in (t, \infty)$. Entonces se puede encontrar $x \in (t, \infty)$ tal que $|p(x) - p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Remplazando $a(x)$ por $a(-x)$, se obtiene el resultado para $(-\infty, t)$. ∎

Regresando a los operadores de convolución. Considerar la C^*-álgebra

$$\mathrm{alg}_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))}(\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}, \{W^0(\widehat{k}) : k \in L^1(\mathbb{R})\}), \tag{1.7}$$

es decir, la subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ que contiene todos los operadores de traslación U_λ y todos los operadores de convolución $W^0(\widehat{k})$ con núcleo o kernel en $L^1(\mathbb{R})$. Notar que $\gamma I = \gamma U_0$, así que esta álgebra contiene automáticamente a los operadores $W^0(\gamma + \widehat{k})$ con $\gamma \in \mathbb{C}$ y $k \in L^1(\mathbb{R})$

Definición 1.27. Denotemos por $PC := PC(\dot{\mathbb{R}})$ la C^*-álgebra de todas las funciones continuas a trozos acotadas sobre $\dot{\mathbb{R}}$. Por definición, $a \in PC$ si y solo si $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ y los límites

$$a(x_0 - 0) := \lim_{x\to x_0-0} a(x), \; a(x_0 + 0) := \lim_{x\to x_0+0} a(x)$$

existen para cada $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$; por convención,

$$\begin{aligned} a(\infty - 0) := a(+\infty) &:= \lim_{x\to+\infty} a(x), \\ a(\infty + 0) := a(-\infty) &:= \lim_{x\to-\infty} a(x). \end{aligned}$$

Notemos que el conjunto de funciones constantes a trozos que a lo sumo tienen un número finito de saltos es denso en PC. También que una función $a \in PC$ tiene a lo más un conjunto numerable de saltos y que para cada $\delta > 0$ el conjunto

$$\{x \in \dot{\mathbb{R}} : |a(x+0) - a(x-0)| > \delta\}$$

es finito. Finalmente, definiremos $C(\overline{\mathbb{R}}) := C(\mathbb{R}) \cap PC$, $PC_0 := \{a \in PC : a(\pm\infty) = 0\}$. Claramente $C(\overline{\mathbb{R}})$ y PC_0 son C^*-subálgebras de PC.

Definición 1.28. La C^*-álgebra SAP de todas las *funciones semi-casi periódicas* en $\mathbb{R}$ es definida como la subálgebra cerrada más pequeña de $L^\infty(\mathbb{R})$ que contiene a AP y $C(\overline{\mathbb{R}})$.

Teorema 1.29. *Sea $u \in C(\overline{\mathbb{R}})$ alguna función para la cual $u(-\infty) = 0$ y $u(+\infty) = 1$. Si $a \in SAP$, entonces existen $a_l, a_r \in AP$ y $a_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})$ tales que*

$$a = (1-u)a_l + ua_r + a_0. \tag{1.8}$$

Las funciones a_l, a_r son únicamente determinadas por a e independientes de la elección particular de u. Las funciones

$$a \mapsto a_l, \;\; a \mapsto a_r \tag{1.9}$$

son C^*-álgebra homomorfismos de SAP en AP.

Demostración. Si $a \in AP$, entonces $a = (1-u)a + ua$ es una representación de a en la forma (1.8).

Para $f \in C(\overline{\mathbb{R}})$, la función $f_0 = f - (1-u)f(-\infty) - uf(+\infty)$ pertenece a $C_0(\dot{\mathbb{R}})$. Así,

$$f = (1-u)f(-\infty) + uf(+\infty) + f_0$$

es una representación de f en la forma deseada. Sean $a_l, a_r, b_l, b_r \in AP$ y $a_0, b_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})$. Entonces tenemos

$$((1-u)a_l + ua_r + a_0)((1-u)b_l + ub_r + b_0) = (1-u)^2 a_l b_l + u^2 a_r b_r + c_0 \tag{1.10}$$

con algún $c_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})$, y como $(1-u)^2 - (1-u)$ y $u^2 - u$ están en $C_0(\dot{\mathbb{R}})$, se sigue que (1.10) es de la forma

$$(1-u)a_l b_l + ua_r b_r + d_0 \tag{1.11}$$

con $d_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})$. Así, $SAP = \mathrm{alg}(AP, C(\overline{\mathbb{R}}))$ es la cerradura del conjunto

$$\{(1-u)a_l + ua_r + a_0 : a_l, a_r \in AP, \;\; a_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})\}. \tag{1.12}$$

Para $a_l, a_r \in AP$ y $a_0 \in C_0(\dot{\mathbb{R}})$, deducimos de (1.12) que

$$\begin{aligned} \|a_l\|_\infty &= \limsup_{x\to-\infty} |a_l(x)| \\ &= \limsup_{x\to-\infty} |(1-u(x))a_l(x) + u(a)a_r(x) + a_0(x)| \\ &\leq \|(1-u)a_l + ua_r + a_0\|_\infty \end{aligned} \tag{1.13}$$

y análogamente,

$$\|a_r\|_\infty \leq \|(1-u)a_l + ua_r\|_\infty = a_0. \tag{1.14}$$

Consecuentemente, si $\{(1-u)a_l^{(n)} + ua_r^{(n)} + a_0^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy en el conjunto (1.12), entonces $\{a_l^{(n)}\}$ y $\{a_r^{(n)}\}$ son sucesiones de Cauchy en AP y $\{a_0^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy en $C_0(\dot{\mathbb{R}})$. Esto muestra que el conjunto (1.12) es cerrado y además coincide con SAP. En particular, cada función en SAP es de la forma (1.8).

De (1.13) y (1.14) podemos inferir que la representación (1.8) es única. Combinando (1.10), (1.11), (1.13) y (1.14) es fácil ver que el mapeo (1.9) es un C^*-álgebra homomorfismo. ■

Definición 1.30. Para $a \in SAP$, las funciones $a_l \in AP$ y $a_r \in AP$ dadas por (1.8) son llamadas *representaciones casi periódicas de* a en $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Los subíndices l y r indican "izquierda"$(-\infty)$ y "derecha"$(+\infty)$, respectivamente.

1.5 Operadores de convolución sobre la semirrecta

Sea $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ el conjunto de números reales positivos. Extendiendo las funciones en $L^2(\mathbb{R}_+)$ por cero a todo $\mathbb{R}$, se puede considerar a $L^2(\mathbb{R}_+)$ como subespacio de $L^2(\mathbb{R})$. Se denotará por χ_+ a la función característica de $\mathbb{R}_+$ y también a la proyección canónica de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\chi_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+),\ f \mapsto \chi_+ f$$

Definición 1.31. Para $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, la compresión del operador de convolución $W^0(a) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ a $L^2(\mathbb{R}_+)$ es denotado por $W(a)$ y llamado el *operador de Wiener-Hopf con símbolo* a. Así,

$$W(a) : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+),\ f \mapsto \chi_+ W^0(a) f. \tag{1.15}$$

Frecuentemente se escribe

$$W(a) = \chi_+ W^0(a)|Im\chi_+ \text{ o } W(a) = \chi_+ W^0(a)\chi_+|Im\chi_+.$$

Notar que mediante un simple cambio de variable el operador de convolución en una semirrecta arbitraria, puede ser reducido al operador de Wiener-Hopf, es decir, al operador de convolución sobre $\mathbb{R}_+$. El mapeo $W : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)), a \mapsto W(a)$ es lineal y continuo. Se puede mostrar que W es también una isometría, es decir,

$$\|W(a)\| = \|a\|_\infty \text{ para todo } a \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

No obstante, a diferencia del mapeo W^0, la aplicación W no es un homomorfismo de álgebras: por ejemplo, $W(e_1)W(e_{-1})$ es la multiplicación por la función característica de $(1,\infty)$ y por ende diferente a $W(e_1e_{-1}) = I$. La falta de esta propiedad multiplicativa hace a la teoría espectral de operadores de Wiener-Hopf menos trivial pero mucho más interesante que la teoría espectral de operadores de convolución sobre la recta completa.

1.6 Operadores de convolución en intervalos finitos

El propósito de esta sección es mostrar que la teoría de operadores de convolución en intervalos finitos es equivalente a la teoría de operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales de 2×2.

Sea $\lambda \in (0,\infty)$ y sea $\chi_{(0,\lambda)}$ la función característica del intervalo $(0,\lambda)$. Se identificará $L^2(0,\lambda)$ con $\chi_{(0,\lambda)}L^2(\mathbb{R}_+)$ y se considerará $L^2(0,\lambda)$ como subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Definición 1.32. Para $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, el *operador (finito) de convolución* $W_\lambda(a)$ es definido por

$$W_\lambda(a) : L^2(0,\lambda) \to L^2(0,\lambda),\ \ f \mapsto \chi_{(0,\lambda)}W(a)f.$$

Así, $W_\lambda(a)$ es la compresión del operador de Wiener-Hopf $W(a)$ a $L^2(0,\lambda)$. Por supuesto, uno puede pensar también a $W_\lambda(a)$ como la compresión de $W^0(a)$ a $L^2(0,\lambda)$. Si $I \subset \mathbb{R}$ es cualquier intervalo de longitud λ, entonces la compresión de $W^0(a)$ a $L^2(I)$ puede ser transformada mediante un cambio de variable a $W_\lambda(a)$.

Dado un subconjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ se denotará por $L^2_N(E)$ a la suma directa de N copias de $L^2(E)$. Sea $L^\infty_{N\times N}(\mathbb{R})$ el álgebra de todas las funciones matriciales $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ con entradas en $L^\infty(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $L^\infty(\mathbb{R})$, se denotará por $\mathcal{A}_{N\times N}$ o $[\mathcal{A}]_{N\times N}$ a las funciones matriciales $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ cuyas entradas pertenecen a $\mathcal{A}$.

Definición 1.33. Para $a = (a_{jk})_{j,k=1}^N \in L^\infty_{N\times N}(\mathbb{R})$, el operador de multiplicación aI, el operador de convolución $W^0(a)$, el operador de Wiener-Hopf $W(a)$ y el operador de convolución finita $W_\lambda(a)$ son definidos de forma natural por:

$$\begin{aligned}
aI : L^2_N(\mathbb{R}) \to L^2_N(\mathbb{R}), &\quad (f_j)_{j=1}^N \mapsto \left(\textstyle\sum_{k=1}^N a_{jk}f_k\right)_{j=1}^N,\\
W^0(a) : L^2_N(\mathbb{R}) \to L^2_N(\mathbb{R}), &\quad (f_j)_{j=1}^N \mapsto \left(\textstyle\sum_{k=1}^N W^0(a_{jk})f_k\right)_{j=1}^N,\\
W(a) : L^2_N(\mathbb{R}_+) \to L^2_N(\mathbb{R}_+), &\quad (f_j)_{j=1}^N \mapsto \left(\textstyle\sum_{k=1}^N W(a_{jk})f_k\right)_{j=1}^N,\\
W_\lambda(a) : L^2_N(0,\lambda) \to L^2_N(0,\lambda), &\quad (f_j)_{j=1}^N \mapsto \left(\textstyle\sum_{k=1}^N W_\lambda(a_{jk})f_k\right)_{j=1}^N.
\end{aligned}$$

En otras palabras, se pensará $L^2_N(E)$ como un espacio de columnas y el operador como un operador matricial de $N \times N$ actuando en este. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. El *kernel* $Ker\,A$ y la *imagen* $Im\,A$ están definidos por

$$Ker\,A := \{x \in X : Ax = 0\}, \; Im\,A := \{Ax : x \in X\}.$$

El kernel y la imagen son subespacios de X, además $Ker\,A$ siempre es cerrado.

Definición 1.34. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. Se dice que el operador A es *normalmente soluble* si $Im(A)$ es un subespacio cerrado de X. Si A es normalmente soluble el *cokernel* $Coker(A)$ es definido como

$$Coker\,A := X/Im\,A.$$

Para un operador normalmente soluble A, se escribirá

$$n(A) := dim\,Ker\,A, \; d(A) := dim\,Coker\,A. \tag{1.16}$$

Notar que $n(A)$ y $d(A)$ pertenecen a $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. También se puede ver que

$$n(A) = d(A^*), \; d(A) = n(A^*)$$

donde $A^* \in \mathcal{B}(X)$ es el operador adjunto de A.

Definición 1.35. Sean X, Y espacios de Banach. Dos operadores $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ son *fuertemente ϕ-equivalentes* si ninguno de los dos son normalmente solubles o los dos son normalmente solubles y $n(A) = n(B), \; d(A) = d(B)$.

Definición 1.36. Sea X un espacio de Banach y sea $a \in \mathcal{B}(X)$. Supongamos que A es normalmente soluble. Se dice que el operador A es de *Fredholm* si $n(A)$ y $d(A)$ definidos por (1.16) son finitos, en este caso se define el índice de A como

$$\text{Ind } A := n(A) - d(a).$$

Proposición 1.37. *Sean $A, B \in \mathcal{B}(X)$, si B es un operador invertible, entonces el operador A es fuertemente ϕ-equivalente a los operadores AB y BA.*

Demostración. Supongamos que B es un operador invertible, entonces particularmente es suprayectivo, así $Im\,A = Im(AB)$ con lo que A es normalmente soluble si y solo si AB es normalmente soluble. Ahora si A es normalmente soluble por ser B inyectiva se tiene que $n(A) = n(AB)$. Como $Im\,A = Im(AB)$, entonces $d(A) = d(AB)$, con lo que A es *fuertemente ϕ-equivalente* a AB.

Ahora se mostrará que A es *fuertemente ϕ-equivalente* a BA. Para esto notemos que

$$Im\,A = A(X) = B^{-1}(Im(BA)) = B^{-1}(BA(X))$$

e

$$Im(BA) = BA(X) = (B^{-1})^{-1}(A(X)),$$

es decir, $Im\,A$ es la imagen inversa de $Im(BA)$ bajo B, e $Im(BA)$ es la imagen inversa inversa de $Im\,A$ bajo B^{-1}, con lo que A es normalmente soluble si y solo si BA lo es. Supongamos entonces que A es normalmente soluble, como B en biyectiva se tiene que $Ker\,A = Ker(BA)$ y además $dim(Im\,A) = dim(Im(BA))$, con lo que $n(A) = n(BA)$ y $d(A) = d(BA)$, entonces A es *fuertemente ϕ-equivalente* a BA. ■

Teorema 1.38. *Si $a \in L^\infty_{N\times N}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in (0,\infty)$, entonces $W_\lambda(a) \in \mathcal{B}(L^2_N(0,\lambda))$ es fuertemente ϕ-equivalente al operador $W(H_a) \in \mathcal{B}(L^2_{2N}(\mathbb{R}_+))$ donde H_a es la función matricial en $L^\infty_{2N\times 2N}(\mathbb{R})$ dada por*

$$H_a(x) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} I & 0 \\ a(x) & e^{i\lambda x} I \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

donde I es la matriz identidad de $N \times N$.

Demostración. Definamos P_λ en $L^2_N(\mathbb{R}_+)$ por $P_\lambda := \chi_{(0,\lambda)} I$, hagamos $Q_\lambda := I - P_\lambda$, y pongamos $V_\lambda = W(e_\lambda I)$, $V_{-\lambda} = W(e_{-\lambda} I)$. Se puede verificar directamente que $Q_\lambda = V_\lambda V_{-\lambda}$.

Tenemos que el operador $W_\lambda(a) = P_\lambda W(a) P_\lambda|_{Im(P_\lambda)}$ es fuertemente ϕ-equivalente al operador $P_\lambda W(a) P_\lambda + Q_\lambda$. Dado que

$$P_\lambda W(a) P_\lambda + Q_\lambda = (W(a)P_\lambda + Q_\lambda)(I - Q_\lambda W(a) P_\lambda)$$

e $I - Q_\lambda W(a) P_\lambda$ es invertible, con inversa $I = Q_\lambda W(a) P_\lambda$, de la Proposición 1.37 se sigue que $W_\lambda(a)$ es fuertemente ϕ-equivalente a

$$B_\lambda := W(a)P_\lambda + Q_\lambda = W(a) - (W(a) - I)V_\lambda V_{-\lambda}.$$

La Proposición 1.37 y la igualdad

$$\begin{bmatrix} I & C \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A - BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

muestra que $A - BC$ es fuertemente ϕ-equivalente a $\begin{bmatrix} I & C \\ B & A \end{bmatrix}$. Consecuentemente, B_λ es fuertemente ϕ-equivalente a

$$\begin{bmatrix} I & V_{-\lambda} \\ (W(a) - I)V_\lambda & W(a) \end{bmatrix},$$

y como esta última matriz es igual a

$$\begin{bmatrix} V_{-\lambda} & 0 \\ W(a) & V_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\lambda & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = W(H_a) \begin{bmatrix} V_\lambda & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

usando la Proposición 1.37 se llega a la conclusión que $W_\lambda(a)$ es fuertemente ϕ-equivalente a $W(H_a)$. ■

De acuerdo con [15, Lema 2], se tiene la siguiente generalización del Teorema 1.38

Lema 1.39. Si $a \in [SAP]_{N\times N}$ y $\lambda \in (0,\infty)$, entonces $W_\lambda(a) \in \mathcal{B}(L^p_N(0,\lambda))$ es fuertemente ϕ-equivalente al operador de Wiener-Hopf $W(H_a) \in \mathcal{B}(L^p_{2N}(\mathbb{R}_+))$ donde H_a es la función matricial en $SAP_{2N\times 2N}$ dada por (1.17).

Capítulo 2

Valor medio, espectro de Bohr-Fourier y valor medio geométrico

2.1 Valor medio y espectro de Bohr-Fourier

Primero se establecerán dos propiedades básicas de las funciones casi periódicas.

Proposición 2.1. *Sea $A \in (0, \infty)$ un conjunto no acotado y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de intervalos $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ tales que $|I_\alpha| = y_\alpha - x_\alpha \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$. Si $a \in AP$ entonces el límite*

$$M(a) := \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} a(x) dx$$

existe, es finito, e independiente de la elección particular de la familia $\{I_\alpha\}$.

Demostración. Sea $p(x) = \sum_j r_j e^{i\lambda_j x}$ un polinomio casi periódico y supongamos que $\lambda_0 = 0$.

Como

$$\frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} dx = 1, \ \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda y_\alpha} - e^{i\lambda x_\alpha}}{i\lambda(y_\alpha - x_\alpha)} \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } \alpha \to \infty \quad \text{si } (\lambda \neq 0),$$

se sigue que $M(p)$ existe, es igual a r_0 y esto es independiente de la elección de $\{I_\alpha\}$. Además

$$|M(p)| = \left| \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} p(x)\, dx \right| \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} |p(x)|\, dx \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} \|p(x)\|_\infty\, dx = \|p\|_\infty .$$

Esto muestra que $M : APP \to \mathbb{C}$ es un operador lineal acotado. Como APP es denso en AP, el operador M puede ser extendido a un operador lineal acotado $M : AP \to \mathbb{C}$. Esto prueba todas las afirmaciones de la proposición. ∎

Proposición 2.2. *Si $a \in AP$ entonces el conjunto*

$$\Omega(a) := \{\lambda \in \mathbb{R} : M(ae_{-\lambda}) \neq 0\}$$

es a lo más numerable.

Demostración. Si $p(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e_{\lambda_j}$ es un polinomio casi periódico, entonces

$$\begin{aligned}
M(pe_{-\lambda}) &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} p(x) e^{-i\lambda x} dx = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e^{i\lambda_j x} e^{-i\lambda x} dx \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e^{ix(\lambda_j - \lambda)} dx = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \int_{I_\alpha} e^{ix(\lambda_j-\lambda)} dx \\
&= \begin{cases} \gamma_j & \text{si } \lambda = \lambda_j \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}, \end{cases}
\end{aligned}$$

y así $\Omega(p) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ es finito.

Como

$$\Omega(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} : M(ae_{-\lambda}) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda \in \mathbb{R} : |M(ae_{-\lambda})| > 1/n\}$$

y la unión numerable de conjuntos finitos es numerable, para probar que $\Omega(a)$ es a lo más numerable para toda $a \in AP$, es suficiente probar que

$$\Omega_n(a) := \{\lambda \in \mathbb{R} : |M(ae_{-\lambda})| > 1/n\}$$

es a lo más finito para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijemos n y escojamos un polinomio casi periódico p tal que $\|a - p\|_\infty < \frac{1}{2n}$. Puesto que

$$|M(ae_{-\lambda}) - M(pe_{-\lambda})| \leq \|a - p\|_\infty < \frac{1}{2n},$$

resulta que $|M(pe_{-\lambda})| > \frac{1}{2n}$ para todo $\lambda \in \Omega_n(a)$. Pero como $\Omega(p)$ es finito, existen a lo más un número finito de λ's para los cuales $|M(pe_{-\lambda})| > \frac{1}{2n}$. Esto prueba que $\Omega_n(a)$ es a lo más finito. ■

Definición 2.3. Sea $a \in AP$. El número $M(a)$ dado por la Proposición 2.1 es llamado el *valor medio de Bohr* o simplemente el *valor medio* de a. El conjunto $\Omega(a)$ de la Proposición 2.2 es referido como el *espectro de Bohr-Fourier* de a.

2.2 Teorema de Bohr y valor medio de movimiento

Cualquier argumento continuo de una función periódica, continua e invertible es la suma de una función lineal y una función periódica. Los siguientes teoremas muestran que cualquier argumento de una función *casi* periódica invertible puede ser representado como la suma de una función lineal y una función casi periódica.

Teorema 2.4 (Bohr). *Si $a \in GAP$ entonces existe un número real $k(a)$ y una función $b \in AP$ tales que*

$$a(x) = e^{ik(a)x}e^{b(x)} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Demostración. Sea $\delta := \inf_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$ y escojamos un polinomio casi periódico

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j e^{i\lambda_j x} \tag{2.2}$$

tal que $\|a-p\|_\infty < \delta/2$. Entonces $p \in GAP$ y $\|1-a/p\|_\infty < 1$. Entonces, por (1.1), $a/p = e^c$ con algún $c \in AP$. Ahora solo nos falta probar el teorema en el caso en que $a = p$ es el polinomio casi periódico (2.2). Sean $\beta_1, \ldots, \beta_m$ como en el Lema 1.25. Entonces

$$p(x) = \sum_{j+1}^{n} r_j e^{i(k_1^{(j)}\beta_1+\ldots+k_m^{(j)}\beta_m)x}$$

con $k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)} \in \mathbb{Z}$. Definamos $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ por

$$q(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{j=1}^{n} r_j e^{i(k_1^{(j)}x_1+\ldots+k_m^{(j)}x_m)}.$$

Por el Corolario 1.24, cada punto $(e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_m}) \in \mathbb{T}^m$ pertenece a la cerradura del conjunto

$$\{(e^{i\beta_1 x}, \ldots, e^{i\beta_m x}) \in \mathbb{T}^m : x \in \mathbb{R}\}.$$

De esta forma, $q(\mathbb{R}^m)$ es un subconjunto de la cerradura de $p(\mathbb{R})$, lo cual implica que $|q| \geq \frac{\delta}{2}$ sobre $\mathbb{R}^m$. Sea $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ cualquier función continua tal que

$$q(x_1, \ldots, x_m) = |q(x_1, \ldots, x_m)|\, e^{i\phi(x_1,\ldots,x_m)}.$$

Dado que las funciones q y $|q|$ son 2π periódicas en cada variable, existen enteros $l_1, \ldots, l_m$ tales que

$$\phi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 2\pi, x_{j+1}, \ldots, x_m) = \phi(x_1, \ldots, x_m) + 2\pi l_j$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Haciendo

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) := \psi(x_1, \ldots, x_m) - (l_1x_1 + \cdots + l_mx_m)$$

se obtiene que $\psi(x_1+2\pi, \ldots, x_m+2\pi) = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. De esta forma,

$$q(x_1, \ldots, x_m) = e^{\theta(x_1,\ldots,x_m)}e^{i(x_1l_1+\cdots+l_mx_m)},$$

con $\theta = \log|q| + i\psi$, y

$$\theta(x_1 + 2\pi, \ldots, x_m + 2\pi) = \theta(x_1, \ldots, x_m) \tag{2.3}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Ahora para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$p(x) = q(\beta_1 x_1, \ldots, \beta_m x_m) = e^{\theta(\beta_1 x_1, \ldots, \beta_m x_m)} e^{i(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m)x}.$$

En resumen, hemos conseguido la representación (2.1) con

$$k(a) = l_1\beta_1 + \cdots + l_m\beta_m, \text{ y } b(x) = c(x) + \theta(\beta_1 x, \ldots, \beta_m x),$$

solo resta probar que $x \mapsto \theta(\beta_1 x, \ldots, \beta_m x)$ es una función en AP. Dado que la aplicación $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ es continua y satisface (2.3), se puede aproximar θ por un polinomio trigonométrico $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$. Pero si $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ es un polinomio trigonométrico, entonces la aplicación $x \mapsto s(\beta_1 x, \ldots, \beta_m x)$ es un polinomio casi periódico. Esto prueba que $x \mapsto \theta(\beta_1 x, \ldots, \beta_m x)$ es una función en AP. ■

Definición 2.5. Para $a \in GAP$ el número $k(a) \in \mathbb{R}$, cuya existencia es garantizada por el Teorema 2.4, está únicamente determinado. Este es llamado el *valor medio de movimiento* de a.

Por el teorema de Bohr, cualquier argumento continuo $arg\ a$ de $a \in GAP$ es de la forma $(arg\ a)(x) = k(a)x + b(x)$, donde $k(a)$ es la media de movimiento de a y b es una función real valuada en AP. Dado que b es necesariamente acotada, se puede apreciar que los argumentos continuos de funciones en GAP son esencialmente lineales.

Proposición 2.6. *Sea $A \subset (0, \infty)$ un conjunto no acotado y sea $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de intervalos cuyas longitudes $y_\alpha - x_\alpha$ tienden a infinito cuando α tiende a infinito. Si $a \in GAP$ y $arg\ a$ es cualquier argumento continuo de a, entonces*

$$k(a) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{(arg\ a)(y_\alpha) - (arg\ a)(x_\alpha)}{y_\alpha - x_\alpha}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.4, $(arg\ a)(x) = k(a)x + b(x)$ con una función real valuada $b \in AP \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Entones,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{(arg\ a)(y_\alpha) - (arg\ a)(x_\alpha)}{y_\alpha - x_\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{k(a)(y_\alpha - x_\alpha) + b(y_\alpha) - b(x_\alpha)}{y_\alpha - x_\alpha},$$

y como $|b(y_\alpha) - b(x_\alpha)| \leq 2\,\|b\|_\infty$, el límite es $k(a)$. ■

Las elecciones canónicas de los intervalos en las Proposiciones 2.1 y 2.6 son $(-\alpha, \alpha)$, $(0, \alpha)$, $(-\alpha, 0)$. Frecuentemente se piensa α como el extremo de un intervalo de tiempo y se escribe t en lugar de α. Así, la Proposición 2.1 implica que los tres límites

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} a(x)dx, \ \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} a(x)dx, \ \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{-t}^{0} a(x)dx$$

son iguales a $M(a)$, mientras que la Proposición 2.6 muestra que los límites

$$\lim_{t \to \infty} \frac{(arg\ a)(t) - (arg\ a)(-t)}{2t}, \ \lim_{t \to \infty} \frac{(arg\ a)(t) - (arg\ a)(0)}{t}, \ \lim_{t \to \infty} \frac{(arga\ a)(0) - (arg\ a)(-t)}{t}$$

son iguales a $k(a)$.

Definición 2.7. Sea $a \in GAP$, por el Teorema 2.4,

$$a(x) = e^{ik(a)x} e^{\psi(x)} \tag{2.4}$$

con $\psi \in AP$. El número

$$\mathbf{d}(a) := e^{M(\psi)}$$

es llamado la *media geométrica* de la función a. Notar que si ψ_1 y $\psi_2 \in AP$ satisfacen (2.4), entonces $\psi_1 - \psi_2 = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $M(\psi_1) - M(\psi_2) = 2k\pi i$. Esto muestra que $\mathbf{d}(a)$ está bien definido. Si $k(a) = 0$ también se puede escribir

$$\mathbf{d}(a) = e^{M(\log(a))},$$

donde $\log(a) \in AP$ es cualquier función para la cual $a = e^{\log(a)}$ (ver (1.1)).

Capítulo 3

Factorización AP

3.1 Factorización casi periódica

En esta sección se dará la definición de factorización casi periódica.

Definición 3.1. Recordemos que $e_\lambda(x) := e^{i\lambda x}$, se definirá

$$AP^+ := \mathrm{alg}_{L^\infty(\mathbb{R})}\{e_\lambda : \lambda \geq 0\}, \qquad AP^- := \mathrm{alg}_{L^\infty(\mathbb{R})}\{e_\lambda : \lambda \leq 0\}. \tag{3.1}$$

Se puede probar que $AP^- \cap AP^+ = \mathbb{C}$, que $\Omega(a) \subset [0, \infty)$ para $a \in AP^+$ y que $\Omega(a) \subset (-\infty, 0]$ para $a \in AP^-$. Las implicaciones inversas son menos directas y puede consultarse la demostración en [7, Sección 7.2].

Dado un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}$, se denotará por AP_E la cerradura de todos los polinomios casi periódicos $p = \sum_j r_j e_{\lambda_j}$ con $\lambda_j \in E$. En particular, $AP^+ = AP_{[0,\infty)}$ y $AP^- = AP_{(-\infty,0]}$. Además, se puede probar que

$$AP_E = \{a \in AP : \Omega(a) \subset E\}. \tag{3.2}$$

(ver Corolario 7.6 de [7])

Definición 3.2. Se dice que una función matricial $a \in GAP_{N\times N}$ admite una *factorización AP derecha* si esta puede ser representada en la forma

$$a(x) = a_-(x)d(x)a_+(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

con

$$a_- \in GAP^-_{N\times N},\ a_+ \in GAP^+_{N\times N} \tag{3.4}$$

y

$$d(x) = diag(e^{i\lambda_1 x}, \ldots, e^{i\lambda_N x}), x \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Recordar que $AP^\pm$ está definido en (3.1).

Una factorización AP derecha con $d(x) = I$ es llamada *factorización AP canónica derecha.*

Reemplazando (3.3) por

$$a(x) = a_+(x)d(x)a_-(x),\ x \in \mathbb{R},$$

tendremos las definiciones de *factorización AP izquierda* y *factorización AP canónica izquierda.*

Definición 3.3. En virtud de la Proposición 2.2, el espectro de Bohr-Fourier

$$\Omega(a) := \{\lambda \in \mathbb{R} : M(ae_{-\lambda}) \neq 0\}$$

es a lo más numerable para toda $a \in AP$. Entonces a cada $a \in AP$ se le puede asociar la serie

$$\sum_j a_j e^{i\lambda_j} x,\ \lambda_j \in \Omega(a),\ a_j = M(ae_{-\lambda_j}).$$

Se denotará por APW las funciones en AP para las cuales esta serie converge absolutamente. Equivalentemente, $a \in APW$ si y solo si a puede ser representada en la forma

$$a(x) = \sum_j a_j e^{i\lambda_j x},\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ \|a\|_W := \sum_j |a_j| < \infty.$$

Se puede probar que APW es un álgebra de Banach con las operaciones puntuales y la norma $\|\cdot\|_W$. Se denotarán por APW^+ y APW^- a los conjuntos de todas las funciones $a \in APW$ para las cuales $\Omega(a) \subset [0, \infty)$ y $\Omega(a) \subset (-\infty, 0]$, respectivamente. También es posible mostrar que $APW^\pm$ son subálgebras cerradas de APW.

Definición 3.4. Una factorización AP derecha (respectivamente izquierda) o una factorización AP canónica derecha (respectivamente izquierda) de una función matricial $a \in GAP_{N\times N}$ es llamada *factorización APW derecha* (respectivamente *izquierda*) o *factorización APW canónica derecha* (respectivamente *izquierda*) si en lugar de (3.4) se tiene la condición

$$a_- \in GAPW^-,\ a_+ \in GAPW^+. \tag{3.6}$$

Es claro que que si $a \in GAP_{N\times N}$ admite una factorización APW izquierda o derecha, necesariamente $a \in GAPW_{N\times N}$.

3.2 Unicidad de la factorización *AP*

Teorema 3.5. *Sea $a \in GAP_{N\times N}$ y supongamos que*

$$a = a_- d a_+,\ d(x) = diag(e^{i\lambda_j x}),\ \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N,$$

es una factorización AP derecha. Entonces todas las posibles factorizaciones AP derechas son descritas por por $a = b_- f b_+$ donde

$$b_- = a_- d h^{-1} d^{-1} \pi,\ f = \pi^{-1} d \pi,\ b_+ = \pi^{-1} h a_+,$$

π es una matriz de permutación y $h = (h_{jk})_{j,k=1}^N$ es una función matricial en $GAP_{N\times N}$ tal que $\Omega(h_{jk}) \subset [0, \lambda_k - \lambda_j]$ (con la convención de que $h_{jk} = 0$ si $\lambda_k < \lambda_j$).

Demostración. Sea h como en el teorema, de (3.2) tenemos que $h \in AP^+_{N\times N}$. La estructura triangular por bloques de h y la invertibilidad de h implican que $det\ h$ es una constante distinta de cero. Consecuentemente, $h^{-1} \in AP^+_{N\times N}$. La entrada jk de $d(x)h(x)d^{-1}(x)$ es

$$e^{i(\lambda_j-\lambda_k)x}h_{jk}(x) \tag{3.7}$$

y de esta forma, de (3.2) se sigue que $dhd^{-1} \in AP^-_{N\times N}$. Como $det(dhd^{-1}) = det\ h$ es una constante distinta de cero, se sigue que $dh^{-1}d^{-1} \in AP^-_{N\times N}$. Así, para cada función h sujeta a las condiciones del teorema y para cada matriz de permutación π, $a = b_-fb_+$ es también una factorización AP derecha.

Ahora, si suponemos que $a = b_-fb_+,\ f = diag(e_{\nu_j})$ es una factorización AP derecha. Entonces existe una matriz de permutación π tal que

$$\pi f\pi^{-1} = diag(e_{\nu_j}),\ \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_N,$$

y se tiene que $a = (b_-\pi^{-1})(\pi f\pi^{-1})(\pi b_+)$. De acuerdo con [7, Teorema 8.1], tenemos que $\pi f\pi^{-1} = d$, $b_-\pi^{-1} = a_-dh^{-1}d^{-1}$, $\pi b_+ = ha_+$ donde h es una función matricial entera con determinante constante distinto de cero y satisface

$$h_{jk}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_k < \lambda_j, \\ c_{jk} = \text{constante} & \text{si } \lambda_k = \lambda_j. \end{cases} \tag{3.8}$$

Solo nos resta probar que $\Omega(h_{jk}) \subset [0, \lambda_k - \lambda_j]$ siempre que $\lambda_k > \lambda_j$. Pero esto se deduce del hecho que $dhd^{-1} = \pi b_-^{-1}a_-$ pertenece a $AP^-_{N\times N}$ y que la entrada jk de dhd^{-1} está dada por (3.7). ∎

3.3 Índices *AP* y valor medio geométrico

Definición 3.6. El Teorema 3.5 muestra que si $a \in GAP_{N\times N}$ admite una factorización AP derecha $a = a_-da_+,\ d = diag(e_{\lambda_j})$, entonces los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, salvo ordenamiento, son independientes de la elección particular de la factorización. Se hará referencia a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ como *índices AP derechos* de a. Si a admite cualquier factorización AP derecha, entonces, por el Teorema 3.5, existe una factorización AP derecha tal que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N$; El vector de índices AP derechos monótonamente decrecientes será denotado por $k(a)$, es decir,

$$k(a) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_N),\ \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N.$$

Análogamente, si $a \in GAP_{N\times N}$ admite una factorización AP izquierda $a = a_+fa_-$, con $f = diag(e_{\mu_j})$, entonces los números $\mu_1, \ldots, \mu_N$ están únicamente determinados siempre que se pida $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_N$. Se llamará a $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_N$ los *índices AP izquierdos* de a y se pondrá

$$\widetilde{k}(a) := (\mu_1, \ldots, \mu_N),\ \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_N.$$

Si $a \in GAP_{N\times N}$ tiene factorizaciones AP derecha e izquierda, entonces $k(a)$ y $\widetilde{k}(a)$ no necesariamente coinciden. Se puede verificar que las siguientes son equivalencias:

a) a tiene una factorización AP izquierda/derecha con índices AP izquierdos/-derechos $\nu_1, \ldots, \nu_N$;

b) a^*, la adjunta compleja de a, tiene una factorización AP izquierda/derecha con índices AP izquierdos/derechos $-\nu_1, \ldots, -\nu_N$;

c) a^T, la transpuesta de a, tiene factorización AP derecha/izquierda con índices AP derechos/izquierdos $\nu_1, \ldots, \nu_N$;

d) a^{-1} tiene factorización AP derecha/izquierda cuyos índices AP derechos/izquierdos son los números $-\nu_1, \ldots, -\nu_N$;

e) $\tilde{a}$, donde $\tilde{a}(x) := a(-x)$, tiene una factorización AP derecha/izquierda con índices AP derechos/izquierdos $-\nu_1, \ldots, -\nu_N$.

Definición 3.7. Si $a \in GAP_{N\times N}$, se define

$$M(a) := \begin{bmatrix} M(a_{11}) & \cdots & M(a_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M(a_{N1}) & \cdots & M(a_{NN}) \end{bmatrix}$$

Proposición 3.8. *Si $a \in GAP_{N\times N}$ tiene una factorización AP derecha con índices AP derechos iguales,*

$$a = a_- d a_+, \;\; d(x) = diag(e^{i\lambda x}, \ldots, e^{i\lambda x}),$$

entonces la matriz

$$\mathbf{d}(x) := M(a_-)M(a_+) \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

es independiente de la elección particular de la factorización AP derecha.

Demostración. Sea $a = b_- d b_+$ otra factorización AP derecha. Entonces por el Teorema 3.5, $b_- = a_- h^{-1}$ y $b_+ = h a_+$ donde $h \in \mathbb{C}^{N\times N}$ y $det(h) \neq 0$. De esta forma,

$$M(b_-)M(b_+) = M(a_-)h^{-1}hM(a_+) = M(a_-)M(a_+). \qquad \blacksquare$$

Definición 3.9. La matriz $\mathbf{d}(a)$ dada por la Proposición 3.8 para cada función matricial $a \in GAP_{N\times N}$ con factorización AP derecha e índices AP iguales es llamada *valor medio geométrico* de a, o más precisamente, valor medio geométrico *derecho* de a y será denotada por $\mathbf{d}_r(a)$. Análogamente, si $a \in GAP_{N\times N}$ tiene una factorización AP izquierda de la forma

$$a = b_+ f b_-, \;\; f(x) = diag(e^{i\mu x}, \ldots, e^{i\mu x}),$$

se definirá el *valor medio geométrico izquierdo* por $\mathbf{d}_l(a) := M(b_+)M(b_-)$.

En el caso escalar ($N = 1$) tenemos que $\mathbf{d}_r(a) = \mathbf{d}_l(a)$. En la Definición 2.4, se introdujo $\mathbf{d}(a)$ para funciones escalares en GAP mediante $\mathbf{d}(a) = e^{M(\psi)}$ donde $a(x) = e^{ik(a)x}e^{\psi(x)}$ es la factorización garantizada por el teorema de Bohr. Si $a \in GAP$ tiene una factorización AP derecha $a = a_- e_\lambda a_+$ entonces esta definición es consistente con la Definición 2.7.

No todas las funciones $a \in GAPW_{N\times N}$ poseen una factorización APW derecha e izquierda a la vez, incluso polinomios matriciales casi periódicos no necesariamente poseen una factorización AP (por ende, no necesariamente tiene factorización APW). Aquí un contra-ejemplo.

Teorema 3.10. *El polinomio matricial casi periódico*

$$a(x) = \begin{bmatrix} e^{-i(1+\alpha)x} & 0 \\ e^{-i\alpha x} - 1 + e^{ix} & e^{i(1+\alpha)x} \end{bmatrix}, \ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

es invertible pero no admite una factorización AP derecha.

3.4 Problema de Riemann-Hilbert y factorización *APW*

Considere la función matricial

$$G_f = \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ f & e_{-\lambda} \end{bmatrix}, \quad \text{con } f \in APW. \tag{3.9}$$

Para construir una factorización canónica izquierda APW de la función matricial G_f, necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes $\begin{bmatrix} g_\pm \\ \varphi_\pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{g}_\pm \\ \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix} \in APW^\pm$ para el problema de Riemann-Hilbert

$$\begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ f & e_{-\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_- \\ \varphi_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_+ \\ \varphi_+ \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

En efecto, en este caso

$$\begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ f & e_{-\lambda} \end{bmatrix} G_- = G_+ \quad \text{con} \quad G_\pm = \begin{bmatrix} g_\pm & \widetilde{g}_\pm \\ \varphi_\pm & \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Dado que $\det G_- = \det G_+$ donde $\det G_\pm \in APW^\pm$, concluimos que

$$\det G_- = \det G_+ = \text{const} =: c.$$

Esta constante c no es cero porque las soluciones $\begin{bmatrix} g_\pm \\ \varphi_\pm \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \widetilde{g}_\pm \\ \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix}$ son linealmente independientes. Así, las funciones matriciales $G_\pm \in APW^\pm_{2\times 2}$ son invertibles con inversas

$$G_\pm^{-1} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_\pm & -\widetilde{g}_\pm \\ -\varphi_\pm & g_\pm \end{bmatrix} \in APW^\pm_{2\times 2}, \tag{3.12}$$

y por lo tanto, por (3.11), $G_f = G_+ G_-^{-1}$ es una factorización canónica APW izquierda de G_f.

El problema (3.10) puede ser reescrito de la forma

$$\begin{cases} e_\lambda g_- = g_+, \\ f g_- = \varphi_+ - e_{-\lambda}\varphi_-. \end{cases} \tag{3.13}$$

Así, necesitamos encontrar $g_- \in APW_{[-\lambda,0]}$ tal que el espectro de Bohr-Fourier $\Omega(fg_-)$ de fg_- no incluya puntos en $(-\lambda, 0)$. Para encontrar las funciones $\widetilde{g}_\pm$ y $\widetilde{\varphi}_\pm$ necesitamos resolver el sistema análogo

$$\begin{cases} e_\lambda \widetilde{g}_- = \widetilde{g}_+, \\ f \widetilde{g}_- = \widetilde{\varphi}_+ - e_{-\lambda}\widetilde{\varphi}_-. \end{cases} \tag{3.14}$$

Debido a la estructura algebraica de las matrices (3.9), su factorización canónica está estrechamente relacionado con el siguiente problema espectral (gap) (ver, e.g., [14]):

Dado $f \in APW$, encontrar $\chi \in APW$ tal que

$$\Omega(\chi) \subset [-\lambda, 0] \text{ mientras que } \Omega(f\chi) \cap (-\lambda, 0) = \emptyset. \tag{3.15}$$

Teorema 3.11. [14, Teorema 2.1] *La función matricial* (3.9) *con $f \in APW$ admite una factorización canónica AP si y solo si el problema* (3.15) *tiene una solución $\chi = g_-$ tal que $-\lambda \notin \Omega(g_-)$, $0 \in \Omega(fg_-)$ y una solución $\widetilde{g}_-$ tal que $-\lambda \in \Omega(\widetilde{g}_-)$. Estas soluciones, cuando existen, pueden ser sujetas a la condición adicional de que $0 \notin \Omega(f\widetilde{g}_-)$, y están entonces definidas salvo múltiplos constantes distintas de cero. Más aún, su espectro de Bohr-Fourier es tal que*

$$\Omega(g_-) \subset \Sigma_0, \quad \Omega(\widetilde{g}_-) \subset -\lambda + \Sigma_0, \tag{3.16}$$

donde Σ_0 es el subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ generado por $\Omega(f)$.

Note que si $\lambda \notin \Sigma_0$, entonces las condiciones $-\lambda \notin \Omega(g_-)$, $0 \notin \Omega(f\widetilde{g}_-)$ se siguen automáticamente de (3.16).

Notemos que una factorización canónica AP de G_f (si esta existe) se obtiene mediante (3.11)–(3.14) por cualquier par $g_-, \widetilde{g}_-$ de soluciones linealmente independientes de (3.15), sin importar si las condiciones adicionales en sus espectros de Bohr-Fourier son validas. Sin embargo, los requerimientos $-\lambda \notin \Omega(g_-)$, $0 \notin \Omega(f\widetilde{g}_-)$ garantizan que $-\lambda \in \Omega(\widetilde{g}_-)$, $0 \in \Omega(fg_-)$. En efecto, $-\lambda \notin \Omega(g_-)$ implica que $0 \notin \Omega(g_+)$ mientras que $0 \notin \Omega(f\widetilde{g}_-)$ implica que $0 \notin \Omega(\widetilde{\varphi}_+)$. De la invertibilidad de $M(G_+)$ se sigue que $0 \in \Omega(\varphi_+)$, $0 \in \Omega(\widetilde{g}_+)$. Consecuentemente, $0 \in \Omega(fg_-)$ y $-\lambda \in \Omega(\widetilde{g}_-)$.

También se sigue del Teorema 3.11 que para f dada por

$$f = c_{-1}e_{-\alpha} - c_0 + c_1 e_\beta, \quad c_{-1}c_0c_1 \neq 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad 0 < \beta\alpha, \tag{3.17}$$

estas funciones pueden ser buscadas de la forma

$$g_- = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\lceil \frac{j\beta}{\alpha} \rceil \le k \le \lfloor \frac{\lambda+j\beta}{\alpha} \rfloor} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha}, \quad \widetilde{g}_- = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\lceil \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rceil \le k \le \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda}. \tag{3.18}$$

Más aún, si $\lambda \notin \Sigma_0$ entonces necesariamente $0 \in \Omega(g_-)$ y $-\lambda \in \Omega(\widetilde{g}_-)$. En efecto, si $0 \notin \Omega(g_-)$ entonces, de la invertibilidad de G_- se tiene que $0 \in \Omega(\varphi_-)$. Equivalentemente, $-\lambda \in \Omega(fg_-)$, lo cual es imposible ya que $\Omega(fg_-) \subset \Sigma_0$ junto con $\Omega(f)$ y $\Omega(g_-)$. Similarmente, si $-\lambda \notin \Omega(\widetilde{g}_-)$, entonces $0 \notin \Omega(\widetilde{g}_+)$, de donde $0 \in \Omega(\widetilde{\varphi}_+)$ debido a la invertibilidad de G_+. Pero entonces $0 \in \Omega(f\widetilde{g}_-)$, lo que contradice nuevamente (3.16).

Capítulo 4

Trinomios: El caso $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$

Los resultados en este capítulo han sido extraidos de [14]. Estos resultados serán utilizados como guía para los nuevos casos considerados en los capítulos siguientes.

Considerar la función matricial

$$G_f = \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ f & e_{-\lambda} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

donde $f \in APP$ es tal que

$$f = c_{-1}e_{-\alpha} - c_0 + c_1 e_\beta, \quad c_{-1}c_0c_1 \neq 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad 0 < \beta\alpha. \tag{4.2}$$

Debido a la identidad $G_f = JG^*_{\overline{f}}J$, donde $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, existe una relación entre la factorización de G_f y $G_{\overline{f}}$, descrita explícitamente en [7, Proposición 13.2]. Cambiando de f a $\overline{f}$ si es necesario.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} G_f \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix} = G_{cf}, \tag{4.3}$$

podemos escalar la entrada debajo de la diagonal en la matriz (4.1) por cualquier escalar distinto de cero sin cambiar sus propiedades de factorización. De esta forma, sin perdida de generalidad podemos normalizar (4.2) poniendo $c_0 = 1$:

$$f = c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta. \tag{4.4}$$

Esta convención nos ayudará a simplificar un poco los cálculos en las siguientes secciones. Después se restablecerá el resultado en forma general.

4.1 Factorización canónica: $c_{\pm 1}/c_0$ pequeño

Notemos que si en (4.4) $c_1 = c_{-1} = 0$, entonces claramente la respectiva G_f se puede factorizar como $\left[\begin{smallmatrix} 1 & -e_\lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e_{-\lambda} \end{smallmatrix}\right]$. De la estabilidad de la propiedad de factorización canónica, se sigue que G_f sigue admitiendo una factorización canónica casi periódica si en la función (4.4) $c_\pm$ es suficientemente pequeño. El objetivo de esta sección es cuantificar esta afirmación. De acuerdo con [14], se buscará g_- de la forma

$$g_- = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} a_{j,k} e_{j\beta - k\alpha}. \tag{4.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned} fg_- &= c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} c_{-1} a_{j,k} e_{j\beta-(k+1)\alpha} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} c_1 a_{j,k} e_{(j+1)\beta-k\alpha} \\ &= \Bigg(c_{-1}e_{-\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 2}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} c_{-1} a_{j,k-1} e_{j\beta-k\alpha} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} c_1 a_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha} \Bigg) \\ &\quad -1 + c_1 e_\beta + \sum_{j=0}^{\infty} c_{-1} a_{j,\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} e_{j\beta - \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil \alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1 a_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

entonces automáticamente $0 \in \Omega(fg_-)$, mientras $-\lambda \notin \Omega(g_-)$. Para que g_- sea una solución del problema (3.15), necesitamos eliminar los términos en paréntesis.

Para $j = 0$ queda el sistema

$$\begin{cases} a_{0,1} = c_{-1}, \\ a_{0,k} = c_{-1} a_{0,k-1} \quad \left(k = 2, 3, ..., \lceil \frac{\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right) \end{cases} \tag{4.7}$$

lo cual implica que

$$a_{0,k} = c_{-1}^k \quad \left(k = 1, 2, ..., \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right).$$

Para $j \in \mathbb{N}$, de las desigualdades $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$ se sigue que

$$\frac{(j-2)\beta + \lambda}{\alpha} \leq \frac{j\beta}{\alpha} + 1 < \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} < \frac{j\beta + \lambda}{\alpha},$$

y por tanto

$$\left\lceil \frac{(j-2)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \leq \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 \leq \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1. \tag{4.8}$$

De esta forma obtenemos los siguientes sistemas para los coeficientes $a_{j,k}$ donde $j \in \mathbb{N}$ y $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$:

$$\begin{cases} a_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1} = c_1 a_{j-1,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}, \\ a_{j,k} = c_{-1}a_{j,k-1} + c_1 a_{j-1,k} \quad \left(k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, ..., \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \\ a_{j,k} = c_{-1}a_{j,k-1} \quad \left(k = \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil, ..., \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right). \end{cases} \tag{4.9}$$

Lema 4.1. La solución general del sistema (4.7) y (4.9) es

$$a_{j,k} = n_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \quad \left(j \in \mathbb{Z},\ k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right) \tag{4.10}$$

donde $n_{0,k} = 1$ para $k = 1, 2, ..., \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$,

$$n_{1,k} := \begin{cases} k - \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor & si\ k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1, \\ \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 & si\ k = \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil, ..., \left\lceil \frac{\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

y, para cada $j = 2, 3, ...,$

$$n_{j,k} := \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor\right) \prod_{s=1}^{j-1} \left(\left\lceil \frac{(s-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1\right), \\ \prod_{s=1}^{j} \left(\left\lceil \frac{(s-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1\right) \end{cases} \tag{4.12}$$

para

$$k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{(j-1)b+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1, \\ \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil, ..., \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{a} \right\rceil - 1, \end{cases} \tag{4.13}$$

respectivamente.

Demostración. Para $j = 0$ deducimos de (4.7) que

$$a_{0,k} = c_{-1}^k \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \tag{4.14}$$

lo cual es consistente con (4.10) ya que $n_{0,k} = 1$. Para $j = 1$, podemos ver de (4.9) que

$$a_{1,k} = \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1 c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \\ \left(\left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1\right) c_1 c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil, \ldots, \left\lceil \frac{\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1. \end{cases} \tag{4.15}$$

Con $n_{1,k}$ dado por (4.11), deducimos de (4.15) que

$$a_{1,k} = n_{1,k} c_1 c_{-1}^k \quad \text{para todo } k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1.$$

Lo cual es nuevamente consistente con (4.10) en el caso $j = 1$. Más aún, si conocemos los coeficientes $a_{j-1,\lceil \frac{j\beta}{\alpha} \rceil + 1} =: \chi_{j-1}$, entonces, en vista de las primeras dos desigualdades en (4.8), deducimos de (4.9) que

$$a_{j-1,k} = c_{-1}^{k - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor - 1} \chi_{j-1} \qquad \left(k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right).$$

Aplicando estas formulas a (4.9) se deduce que

$$a_{j,k} = \begin{cases} \left(k - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor\right) c_1 c_{-1}^{k - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor - 1} \chi_{j-1}, \\ \left(\left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor - 1 \right) c_1 c_{-1}^{k - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor - 1} \chi_{j-1}, \end{cases} \tag{4.16}$$

si

$$k = \begin{cases} \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{(j-1)b + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1, \\ \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil, ..., \lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \rceil - 1, \end{cases}$$

respectivamente.

En particular, tomando en cuenta (4.8), (4.16) implica que para $j = 1, 2, \dots$,

$$\chi_j := a_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1} = \left(\left\lceil \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right) c_1 c_{-1}^{\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} \chi_{j-1}. \tag{4.17}$$

Como $\chi_0 = a_{0, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1} = c_{-1}^{\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1}$, deducimos de (4.17) que

$$\chi_j = \prod_{s=1}^{j} \left(\left\lceil \frac{(s-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right) c_1^j c_{-1}^{\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1}.$$

Así, de (4.16) se sigue que $a_{j,k}$ para $j = 2, 3, \dots$ y $k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \rceil - 1$ están dados por (4.10) con $n_{j,k}$ como en (4.12). ■

Ahora buscaremos $\tilde{g}_-$ en la forma

$$\tilde{g}_- = e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k = \lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k} e_{j\beta - k\alpha - \lambda}. \tag{4.18}$$

Entonces $-\lambda \in \Omega(\tilde{g}_-)$. También,

$$\begin{aligned}
f\tilde{g}_- &= (c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta)e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_{-1} b_{j,k} e_{j\beta-(k+1)\alpha-\lambda} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1 b_{j,k} e_{(j+1)\beta-k\alpha-\lambda} \\
&= \Bigg(c_{-1} e_{\beta-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +2}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_{-1} b_{j,k-1} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor} c_1 b_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \Bigg) \\
&\quad c_{-1} e_{-\alpha-\lambda} - e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{-1} b_{j,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} e_{j\beta-(\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1)\alpha-\lambda} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor} c_1 b_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

y los términos en paréntesis necesitan ser cancelados para que $\tilde{g}_-$ sea una solución de (3.15).

Como $\lambda - \beta > \alpha$, deducimos que $\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor \leq -2$. Entonces, para $j = 1$ las condiciones de cancelación toman la forma

$$\begin{cases}
b_{1,\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor +1} = 0 \\
c_{-1} b_{1,k-1} - b_{1,k} = 0 \quad \left(k = \lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, -1\right), \\
c_1 + c_{-1} b_{1,-1} - b_{1,0} = 0, \\
c_{-1} b_{1,k-1} - b_{1,k} = 0 \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor\right).
\end{cases} \tag{4.20}$$

Si $j = 2, 3, \ldots$ de las desigualdades $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$ se sigue que

$$\frac{(j-2)\beta}{\alpha} \leq \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} + 1 \leq \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \leq \frac{j\beta}{\alpha},$$

y por tanto

$$\left\lfloor \frac{(j-2)\beta}{\alpha} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor. \tag{4.21}$$

Para estos valores de j las condiciones de cancelación toman la forma

$$\begin{cases}
b_{j,k} = c_1 b_{j-1,k} \quad \left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\
b_{j,k} = c_{-1} b_{j,k-1} + c_1 b_{j-1,k} \quad \left(k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor\right), \\
b_{j,k} = c_{-1} b_{j,k-1} \quad \left(k = \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor\right).
\end{cases} \tag{4.22}$$

Lema 4.2. La solución general de los sistemas (4.20) y (4.22) es

$$b_{j,k} = m_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \qquad \left(j \in \mathbb{N},\ k = \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \right), \tag{4.23}$$

donde $m_{1,k} = 0$ para $k = \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1$ y $m_{1,k} = 1$ para $k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor$,

$$m_{2,k} = \begin{cases} k - \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } k = \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \right\rfloor \end{cases} \tag{4.24}$$

y para $j = 3, 4, \ldots,$

$$m_{j,k} = \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right) \prod_{s=2}^{j-1} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right), \\ \prod_{s=2}^{j} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right) \end{cases} \tag{4.25}$$

si

$$k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \end{cases} \tag{4.26}$$

respectivamente.

Demostración. Si $j = 1$, entonces de (4.20) se sigue que

$$b_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1 \\ c_1 c_{-1}^k & \text{si } k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor, \end{cases} \tag{4.27}$$

lo cual es consistente con (4.23) debido a las fórmulas para $m_{1,k}$.

Para $j = 2$, se puede ver de (4.22) que

$$b_{2,k} = \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1^2 c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor \\ \left(\left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1^2 c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \right\rfloor, \end{cases} \tag{4.28}$$

lo que es nuevamente consistente con (4.23) debido a (4.24).

Poniendo ahora $y_{j-1} := b_{j-1, \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1}$ para todo $j = 2, 3, \ldots$ y tomando en cuenta las primeras dos desigualdades en (4.21), se infiere de (4.22) que

$$b_{j-1,k} = c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_{j-1} \qquad \left(k = \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor \right).$$

Aplicando estas fórmulas, se deduce de (4.22) que

$$b_{j,k} = \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1 c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_{j-1} & \text{si } k = \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{(j-1)b}{\alpha} \right\rceil \\ \left(\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right) c_1 c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_{j-1} & \text{si } k = \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor, ..., \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor. \end{cases} \tag{4.29}$$

Como
$$\left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor \le \left\lfloor\frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor + 1 \le \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor,$$
se infiere de (4.29) que
$$y_j = b_{j,\left\lfloor\frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1} = \left(\left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)^{-1} c_1 c_{-1}^{\left\lfloor\frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor} y_{j-1}. \tag{4.30}$$
Como $y_1 = b_{1,\left\lfloor\frac{2\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}$ y $0 \le \left\lfloor\frac{2\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor + 1 \le \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor$, deducimos de (4.27) que $y_1 = c_1 c_{-1}^{\left\lfloor\frac{2\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}$ y, después, de (4.30), se sigue que que para $j = 2, 3, \ldots$,
$$y_j = \prod_{s=2}^{j}\left(\left\lfloor\frac{(s-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{s\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)^{-1} c_1^j c_{-1}^{\left\lfloor\frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}.$$
Finalmente, aplicando la última fórmula y (4.25), se infiere de (4.29) que $b_{j,k}$, para $j = 3, 4, \ldots$ y $k = \left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor$, está también definida por (4.23). ■

Entonces, si el problema (3.15) admite soluciones de la forma (4.5), (4.18), sus coeficientes de Bohr-Fourier están dados por el Lema 4.1 y 4.2 respectivamente. Sin embargo, aún resta determinar las condiciones sobre $c_\pm$ bajo las cuales las series formales resultantes convergen absolutamente, esto es, que sean efectivamente funciones en APW. Para este fin, las sucesiones
$$\Gamma_j := \left\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil - \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor - 1 \ge 1, \quad G_j := \left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor \ge 1 \tag{4.31}$$
jugarán un rol decisivo.

Dado que el número α/β es irracional, los números $\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}$ y $\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}$ pueden ser enteros para a lo más un valor de j. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ el mínimo valor de $j \in \mathbb{N}$ para el cual $\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}$ y $\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}$ no son enteros. Entonces $\Gamma_j := \left\lfloor\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor$ para todo $j \ge j_0$. Entonces para estos valores de j tenemos
$$\Gamma_j = \frac{\lambda-\beta}{\alpha} - \left\{\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\}, \quad G_j = \frac{\lambda-\beta}{\alpha} - \left\{\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\}$$
donde $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$ es la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{R}$. Así, para $j \ge j_0$,
$$\begin{aligned}\Gamma_j &= \left\lfloor\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor \\ &= \begin{cases}\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \ge 0 \\ \left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor + 1 & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} - 1 < 0\end{cases} \\ &= \begin{cases}\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor & \text{si } 0 < \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} < 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}, \\ \left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor + 1 & \text{si } 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \le \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} < 1,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.32}$$

y por lo tanto $1 \leq \Gamma_j \leq \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Similarmente, para $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} G_j &= \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \geq 0 \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} - 1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } 0 < \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} < 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}, \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \leq \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} < 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.33}$$

y por tanto $1 \leq G_j \leq \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$

Lema 4.3. Si $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$ y el número α/β es irracional, entonces los limites $\varrho_1 := \lim_{m\to\infty}(\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_m)^{1/m}$, $\varrho_2 := \lim_{m\to\infty}(G_1G_2\cdots G_m)^{1/m}$ existen y son ambos iguales a

$$\varrho := p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}, \tag{4.34}$$

donde $p := \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$.

Teorema 4.4. *Sea G dada por* (4.1) *y* (4.4) *donde* $0 < \alpha < \beta < \alpha+\beta < \lambda \leq 2\beta+\alpha$, *el número α/β irracional y $c_{\pm 1} \in \mathbb{C}$. Entonces G admite una factorización canónica APW si*

$$\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1, \tag{4.35}$$

donde ϱ está dado por (4.34).

Demostración. De (4.10)-(4.12), para $j \in \mathbb{N}$ y todo $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$, tenemos que

$$(\Gamma_1\Gamma_2,\cdots\Gamma_{j-1})^{1/j} \leq n_{j,k}^{1/j} \leq (\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_j)^{j-1} \tag{4.36}$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} (\Gamma_1\Gamma_2,\cdots\Gamma_{j-1})^{1/j}\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)/j} &\leq |a_{j,k}|^{1/j} \\ &\leq (\Gamma_1\Gamma_2,\cdots\Gamma_j)^{1/j}\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1\right)/j}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde $\Gamma_1\Gamma_2,\cdots\Gamma_{j-1} := 1$ si $j = 1$. De (4.36) y el Lema 4.3,

$$\lim_{j\to\infty} \max_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\cdots,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1} n_{j,k}^{1/j} = \lim_{j\to\infty}(\Gamma_1\Gamma_2,\cdots\Gamma_j)^{1/j} = \varrho. \tag{4.38}$$

Por otra parte, como

$$\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \leq \left\lceil \frac{j\beta}{\alpha} \right\rceil + \left\lfloor \frac{\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1,$$

inferimos que, para todo $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + r$ con $r = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{k}{j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + r}{j} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{-\left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + r}{j} \right) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Entonces, para cada $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \cdots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$,

$$\lim_{j\to\infty} |c_1|\, |c_{-1}|^{k/j} = |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha}. \tag{4.39}$$

Combinando (4.37), (4.38), (4.39) y (4.35), concluimos que

$$\lim_{j\to\infty} \max_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1,\cdots,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} |a_{j,k}|^{1/j} = \varrho\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1. \tag{4.40}$$

Por lo tanto,

$$\|g_-\|_W = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} |a_{j,k}| < \infty.$$

Similarmente,

$$\lim_{j\to\infty} \max_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1,\cdots,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} |b_{j,k}|^{1/j} = \varrho\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1, \tag{4.41}$$

lo cual implica que,

$$\|\widetilde{g}_-\|_W = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} |b_{j,k}| < \infty.$$

Solo queda invocar la parte de suficiencia del Teorema 3.11. ∎

4.2 Factorización canónica: $c_{\pm 1}/c_0$ grande

En contraste con la situación en el apartado anterior, no hay razones aparentes para esperar factorizaciones AP canónicas para el caso en que $c_{\pm 1}$ en (4.2) son grandes respecto a c_0. En efecto, la respectiva función matricial con $c_0 = 0$ es APP factorizable pero sus índices no son cero, a menos que $\lambda/(\alpha+\beta)$ sea un entero. Por otro lado, una factorización no-canónica es inestable, entonces es plausible que una suma de una constante pequeña a f haga a (4.1) canónicamente AP factorizable. Efectivamente este es el caso

Teorema 4.5. *Sea G dada por* (4.1) *y* (4.4)*, donde* $0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$*, el número α/β es irracional y $c_{\pm 1} \in \mathbb{C}$. Entonces G admite una factorización APW canónica si*

$$\varrho\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} > 1, \tag{4.42}$$

donde ϱ está definido por (4.34)*.*

Prueba. En contraste con (4.5), se busca g_- de la forma

$$g_- = 1 + \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha}. \tag{4.43}$$

Entonces, como vimos anteriormente $-\lambda \notin \Omega(g_-)$ y además

$$\begin{aligned}
fg_- =& c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta + \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} c_{-1} a_{j,k} e_{j\beta-(k+1)\alpha} \\
& - \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha} + \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil} c_1 a_{j,k} e_{(j+1)\beta-k\alpha} \\
=& \Bigg(c_{-1}e_{-\alpha} + \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} c_{-1} a_{j,k-1} e_{j\beta-k\alpha} \\
& - \sum_{-\infty}^{j=0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} a_{j,k} e_{j\beta-k\alpha} + \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} c_1 a_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha} \Bigg) \\
& - 1 + c_1 e_\beta + \sum_{-\infty}^{j=0} c_{-1} a_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil -1} e_{j\beta - \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil \alpha} + \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta}{\alpha} \right\rceil} c_1 a_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Así que $0 \in \Omega(fg_-)$ y, para que g_- sea una solución del problema (3.15), los términos entre paréntesis necesitan ser cancelados. Para $j=1$ las condiciones de cancelación producen

$$a_{0,k} = 0 \ \left(k = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right), \tag{4.45}$$

donde por convención $a_{0,0}=1$. Para $j=0$, de (4.44) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{0,k} = c_{-1}a_{0,k-1} + c_1 a_{-1,k} & \left(k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \\ a_{0,k} = c_{-1}a_{0,k-1} & \left(k = \left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil\right), \dots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1. \end{cases} \tag{4.46}$$

Finalmente, las condiciones de cancelación en (4.44) implica que para cada $j = -1, -2, \dots$ el sistema para determinar los coeficientes $a_{j,k}$, $\left(k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right)$ tiene la misma forma que (4.9), esto es, estos sistemas son de la forma

$$\begin{cases} a_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1} = c_1 a_{j-1,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}, \\ a_{j,k} = c_{-1}a_{j,k-1} + c_1 a_{j-1,k} & \left(k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lceil \frac{(j-1\beta+\lambda)}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \\ a_{j,k} = c_{-1}a_{j,k-1} & \left(k = \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right). \end{cases} \tag{4.47}$$

Por lo tanto, en particular, las formulas (4.16) y (4.17) se cumplen para todo $j = -1, -2, \ldots$. Como $\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1 \leq \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1$ para $\lambda \leq 2\beta + \alpha$, inferimos de (4.45) y el segundo grupo de ecuaciones en (4.46) que

$$a_{0,k} = 0 \quad \text{para todo } k = \left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1. \tag{4.48}$$

El primer grupo de ecuaciones en (4.46), en vista de que $a_{0,0} = 1$, implican que

$$a_{0,k} = c_{-1}^{k} + \sum_{s=1}^{k} c_{-1}^{k-s} c_1 a_{-1,s} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil - 1 \right). \tag{4.49}$$

La desigualdad $\lambda \leq 2\beta + \alpha$ implica que $\lceil \frac{\lambda - 2\beta}{\alpha} \rceil - 1 \leq 1$. Por lo tanto para $j = -1$ se sigue de el tercer grupo de ecuaciones en (4.47) que

$$a_{-1,k} = c_{-1}^{k-1} a_{-1,1} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil - 1 \right).$$

Sustituyendo esto en (4.49) obtenemos

$$a_{0,k} = c_{-1}^{k} + k c_{-1}^{k-1} c_1 a_{-1,1} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil - 1 \right), \tag{4.50}$$

luego por (4.48) se tiene que $a_{0,k} = 0$ para $k = \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1$. Poniendo $\chi_j := a_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1}$ para $j = -1, -2, \ldots$, deducimos de (4.50) que

$$a_{0, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1} = c_{-1}^{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1} + \left(\left\lceil \frac{\lambda - \beta}{\alpha} \right\rceil - 1 \right) c_{-1}^{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 2} c_1 \chi_{-1} = 0.$$

Consecuentemente,

$$\chi_{-1} = -\frac{1}{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1} c_{-1} c_1^{-1}. \tag{4.51}$$

Dado que $a_{-1,1} = \chi_{-1}$, inferimos de (4.50), (4.51) y (4.48) que

$$\begin{cases} a_{0,k} = \dfrac{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - k - 1}{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1} c_{-1}^{k} & \left(k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 2 \right), \\ a_{0,k} = 0 \quad \left(k = \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1, \ldots, \lceil \frac{\lambda}{\alpha} \rceil - 1 \right). \end{cases} \tag{4.52}$$

Entonces, por (4.7), que sigue siendo valido para $j = -1, -2, \ldots$, se tiene que para cada $j = -2, -3, \ldots$,

$$\chi_j = \prod_{s=j}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1} c_1^{j+1} c_{-1}^{\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor} \chi_{-1}.$$

Esto junto con (4.51) implican que para $j = -2, -3, \ldots$,

$$\chi_j = -\frac{1}{\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1} \prod_{s=j}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1} c_1^{j} c_{-1}^{\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1}$$

Como todos los χ_j para $-j \in \mathbb{N}$ son conocidos, inferimos de las formulas (4.16), las cuales siguen siendo validas para valores negativos de j, que para cada $j = -1, -2, \ldots$

$$a_{j,k} = \begin{cases} \left(k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1 c_{-1}^{K - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1} \chi_{j-1}, \\ \left(\left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1\right) c_1 c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1} \chi_{j-1}, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$a_{j,k} = \begin{cases} -\frac{k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1} \prod_{s=j-1}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k, \\ -\frac{1}{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1} \prod_{s=j}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k, \end{cases} \tag{4.53}$$

con la elección de la linea determinada por (4.13). Aquí por convención

$$\prod_{s=-1}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1} = 1$$

Por analogía con (4.40) concluimos de (4.42) y (4.53) que

$$\lim_{j \to -\infty} \left\{ \max_{k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} |a_{j,k}|^{1/|j|} \right\} = \varrho^{-1} |c_1|^{-1} |c_{-1}|^{-\beta/\alpha} < 1.$$

Por lo tanto la serie (4.43) con coeficientes $a_{j,k}$ dados por (4.52) y (4.53) converge.

Ahora buscaremos la segunda solución a el problema (3.15) de la siguiente forma

$$\tilde{g}_- = \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k = \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} b_{j,k} e_{j\beta - k\alpha - \lambda}, \tag{4.54}$$

con $b_{0,0} = 1$. Entonces $-\lambda \in \Omega(\tilde{g}_-)$, mientras que

$$
\begin{aligned}
f\tilde{g}_- =& \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} c_{-1} b_{j,k} e_{j\beta-(k+1)\alpha-\lambda} \\
&- \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} b_{j,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} c_1 b_{j,k} e_{(j+1)\beta-k\alpha-\lambda} \\
=& \left(\sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+2}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor'} c_{-1} b_{j,k-1} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \right. \\
&\left. - \sum_{-\infty}^{j=1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor'} b_{j,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{-\infty}^{j=2} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor} c_1 b_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \right) \\
&+ \sum_{-\infty}^{j=1} c_{-1} b_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} e_{j\beta-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1\right)\alpha-\lambda} + c_{-1} b_{0,-1} e_{-\lambda} - b_{0,0} e_{-\lambda} \\
&+ \sum_{-\infty}^{j=2} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} c_1 b_{j-1,k} e_{j\beta-k\alpha-\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

(el superíndice prima simboliza que el término correspondiente a $(k,j) = (0,0)$ es quitado de la respectiva suma). Como antes, los términos en paréntesis deben ser cancelados para que $\tilde{g}_-$ sea una solución del problema (3.15). Para $j = 2$ la condición de cancelación implica que

$$
b_{1,k} = 0 \quad \left(k = \left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor \right). \tag{4.56}
$$

tomando en cuenta la relación $\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \leq -2$, para $j = 1$ obtenemos el sistema

$$
\begin{cases}
b_{1,\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1} = c_1 b_{0,\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}, \\
b_{1,k} = c_{-1} b_{1,k-1} + c_1 b_{0,k} = 0 \quad \left(k = \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 2, \ldots, 0 \right), \\
b_{1,k} = c_{-1} b_{1,k-1} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor \right).
\end{cases} \tag{4.57}
$$

■

La desigualdad $\lambda \leq 2\beta + \alpha$ implica que $\left\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1 \geq 0$. Consecuentemente, inferimos de (4.56) y (4.57) que

$$
b_{1,k} = 0 \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor. \tag{4.58}
$$

Los coeficientes $b_{0,k}$, para $k = \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1$, están determinados por el siguiente sistema, derivado de las condiciones de cancelación en (4.55):

$$\begin{cases} b_{0,k} = c_1 b_{-1,k} & \left(k = \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1\right), \\ b_{0,k} = c_{-1} b_{0,k-1} + c_1 b_{-1,k} & \left(k = \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 2, \ldots, \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor\right), \\ b_{0,k} = c_{-1} b_{0,k-1} & \left(k = \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1\right). \end{cases} \tag{4.59}$$

Sea $y_0 := b_{0, \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1}$. Como $\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1 \geq \text{máx}\left\{\left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor\right\}$, de (4.59) se sigue que

$$b_{0,k} = c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_0 \qquad \left(k = \left\lfloor \frac{\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1\right). \tag{4.60}$$

Luego, deducimos de (4.57) que

$$b_{1,k} = \sum_{s=1}^{k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} c_1 c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - s} b_{0, \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + s} \qquad \left(k = \left\lfloor \frac{\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, 0\right),$$

donde $b_{1,0} = 0$ debido a (4.58) y $b_{0,0} = 1$. Esto, junto con (4.60) implica que

$$\begin{cases} b_{1,k} = \left(k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1 c_{-1}^{k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_0 & \left(k = \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1\right), \\ b_{1,0} = \left(-1 - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right) c_1 c_{-1}^{-\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1} y_0 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Así

$$y_0 = \frac{1}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} c_{-1}^{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} \tag{4.61}$$

y por lo tanto

$$\begin{cases} b_{1,k} = \frac{k - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} c_1 c_{-1}^{k} & \left(k = \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1\right), \\ b_{1,k} = 1 & \left(k = -, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor\right). \end{cases} \tag{4.62}$$

Como en el caso de g_-, para $j = 0, -1, -2, \ldots$, los sistemas para los coeficientes $b_{j,k}$ $\left(k = \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor\right)$ tienen la misma forma que (4.22). Sea $y_j := b_{j, \left\lfloor \frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1}$ para todo $j = 0, -1, -2, \ldots$. Por (4.30), que sigue siendo valida para $j = -1, -2, \ldots$, obtenemos

$$y_j = \prod_{s=j+1}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^{\left\lfloor \frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} y_0,$$

lo cual, en vista de (4.61), implica que para $j = -2, -3, \ldots$,

$$y_j = -\frac{1}{\left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1} \prod_{s=j+1}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^{\left\lfloor \frac{(j+1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1}. \tag{4.63}$$

Aplicando ahora (4.63) y (4.60), deducimos de (4.29), la cual sigue siendo valida para todo $j = -1, -2, \ldots$, que para $j = 0$ y todo $k = \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor$,

$$b_{0,k} = \begin{cases} \frac{k - \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} \left(\left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lfloor \frac{-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor, \\ \frac{1}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} c_{-1}^k & \text{si } k = \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, -1, \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases} \tag{4.64}$$

Análogamente, para todo $j = -1, -2, \ldots$ y $k = \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor$,

$$b_{j,k} = \begin{cases} \frac{k - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} \prod_{s=j}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k, \\ \frac{1}{\left\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} \prod_{s=j+1}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k, \end{cases} \tag{4.65}$$

con la elección de la linea determinada por (4.26). Dado que $-\lfloor x \rfloor = 1 + \lfloor -x \rfloor$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, podemos reescribir (4.65) en la forma

$$b_{j,k} = \begin{cases} -\frac{k - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor} \prod_{s=j}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k, \\ -\frac{1}{\left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor} \prod_{s=j+1}^{0} \left(\left\lfloor \frac{(s-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1} c_1^j c_{-1}^k. \end{cases} \tag{4.66}$$

La condición (4.64) puede ser reescrita análogamente.

Como fue el caso con (4.41), concluimos de (4.42) y (4.65) que

$$\lim_{j \to -\infty} \left\{ \max_{k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} |b_{j,k}|^{1/|j|} \right\} = \varrho^{-1} |c_1|^{-1} |c_{-1}|^{-\beta/\alpha} < 1.$$

Entonces las series (4.54), con coeficientes $b_{j,k}$, dados por (4.62) y (4.65) con $b_{0,0} = 1$, convergen. Esto completa la prueba del Teorema 4.5.

Lema 4.6. Los coeficientes $a_{j,k}$ en (4.43) están dados por

$$a_{j,k} = \widetilde{n}_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \quad \left(j = 0, -1, -2, \ldots;\ k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, ..., \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right),$$

donde

$$\widetilde{n}_{0,k} := \begin{cases} \frac{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - k - 1}{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1} & \text{si } k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 2 \\ 0 & \text{si } k = \left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1, \end{cases}$$

y, para cada $j = -1, -2, ...$,

$$\widetilde{n}_{j,k} := \begin{cases} -\frac{k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1} \prod_{s=j-1}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)^{-1}, \\ -\frac{1}{\left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1} \prod_{s=j}^{-2} \left(\left\lceil \frac{s\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(s+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor \right)^{-1}. \end{cases}$$

para

$$k=\begin{cases}\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,...,\left\lceil\frac{(j-1)b+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1,\\ \left\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil,...,\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1,\end{cases}$$

respectivamente.

Lema 4.7. Los coeficientes $b_{j,k}$ en (4.54) están dados por

$$b_{j,k}=\widetilde{m}_{j,k}c_1^jc_{-1}^k\qquad\left(j=1,0,-1,\ldots;\ k=\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,...,\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor\right),$$

donde

$$\widetilde{m}_{1,k}:=\begin{cases}-\frac{k-\left\lfloor\frac{\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor+1} & \text{si }\left\lfloor\frac{\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,\ldots,,-1\\ 0 & \text{si }k=0,1,\ldots,\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor,\end{cases}$$

$$\widetilde{m}_{0,k}:=\begin{cases}-\frac{k-\left\lfloor\frac{-\lambda}{\alpha}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)^{-1} & \text{si }k=\left\lfloor\frac{-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,\ldots,\left\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\right\rfloor,\\ -\frac{1}{\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor} & \text{si }k=\left\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\ldots,-1,\\ 1 & \text{si }k=0,\end{cases}\tag{4.67}$$

y, para cada $j=-1,-2,...,$

$$\widetilde{m}_{j,k}:=\begin{cases}-\frac{k-\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor}\prod_{s=j}^{0}\left(\left\lfloor\frac{(s-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{s\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)^{-1} & \text{si }k=\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,...,\left\lfloor\frac{(j-1)b+\lambda}{\alpha}\right\rfloor\\ -\frac{1}{\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor}\prod_{s=j+1}^{0}\left(\left\lfloor\frac{(s-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{s\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)^{-1} & \text{si }k=\left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,...,\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor.\end{cases}$$

4.3 Factorización canónica: Forma explicita

Ajustando las formulas para g, $\widetilde{g}$ para el caso de $c_0\neq 0$ arbitrario con el uso de (4.3), y extrayendo las fórmulas para g_+, $\widetilde{g}_+$, $\varphi_\pm$, $\widetilde{\varphi}_\pm$ de las representaciones (3.13) y (3.14), se llega a las siguientes conclusiones.

Si $\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha}<|c_0|^{1+\beta/\alpha}$, donde $\varrho=p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}$ y $p=\left\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\rfloor$, entonces de la prueba del Teorema 5.6 se sigue que

$$\begin{aligned}
g_+&=e_\lambda+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1}n_{j,k}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda},\\
g_-&=1+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1}n_{j,k}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_+&=-c_0+c_1\,e_\beta+c_0\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=\left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor}n_{j-1,k}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_-&=-c_0\sum_{j=0}^{\infty}n_{j,\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil}e_{j\beta+\lambda-\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil\alpha},
\end{aligned}\tag{4.68}$$

donde los coeficientes $n_{j,k}$ están definidos en el Lema 4.1, y

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= 1 + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}, \\
\widetilde{g}_- &= e_{-\lambda} + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda}, \\
\widetilde{\varphi}_+ &= c_0 \sum\nolimits_{j=2}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda}, \\
\widetilde{\varphi}_- &= c_0 - c_{-1}\, e_{-\alpha} - c_0 \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} m_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1} e_{j\beta-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha},
\end{aligned} \tag{4.69}$$

donde los coeficientes $m_{j,k}$ están dados por el Lema 4.2.

Análogamente, si $\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha} > |c_0|^{1+\beta/\alpha}$, entonces de los resultados de la Sección 4.2 que

$$\begin{aligned}
g_+ &= e_\lambda + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1} \widetilde{n}_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda}, \\
g_- &= 1 + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1} \widetilde{n}_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}, \\
\varphi_+ &= -c_0 + c_1 e_\beta + c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \widetilde{n}_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}, \\
\varphi_- &= -c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \widetilde{n}_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil} e_{j\beta+\lambda-\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil\alpha},
\end{aligned} \tag{4.70}$$

donde los coeficientes $\widetilde{n}_{j,k}$ están dados por el Lema 4.6, y

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \widetilde{m}_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda}, \\
\widetilde{g}_- &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \widetilde{m}_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}, \\
\widetilde{\varphi}_+ &= c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{2} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor} \widetilde{m}_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}, \\
\widetilde{\varphi}_- &= -c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{1} \widetilde{m}_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1} e_{j\beta+\lambda-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha} - c_0\widetilde{m}_{0,-1} + c_0 \\
&= c_0 - c_{-1}e_{-\alpha} - c_0\widetilde{m}_{0,-1} - c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \widetilde{m}_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1} e_{j\beta-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

donde los coeficientes $\widetilde{m}_{j,k}$ están dados por el Lema 4.7. La última transformación en (4.71) hace uso del hecho de que $\widetilde{m}_{1,\left\lfloor \frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor} = 0$ y que $\widetilde{m}_{0,0} = 1$.

Ahora podemos escribir el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Sea G dada por* (4.1) *y* (4.2) *donde* $0 < \alpha < \beta < \alpha+\beta < \lambda \leq 2\beta+\alpha$, *el número α/β es irracional y $c_{-1}c_0c_1 \neq 0$. Entonces G admite una factorización*

AP canónica $G = G_+ G_-^{-1}$ *si y solo si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} \neq |c_0|^{\alpha+\beta}.$$

Si esta condición se cumple, todas las entradas de $G_\pm$ *en* (3.11) *son funciones en APW definidas por* (4.68), (4.69) *con coeficientes* $n_{j,k}$ *y* $m_{j,k}$ *dados por los Lemas* 4.1 *y* 4.4 *si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} < |c_0|^{\alpha+\beta}.$$

o definidas por (4.70) *y* (4.71) *con coeficientes* $\widetilde{n}_{j,k}$ *y* $\widetilde{m}_{j,k}$ *dados por los Lemas* 4.6 *y* 4.7 *si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} > |c_0|^{\alpha+\beta}.$$

Capítulo 5

Trinomios: El caso $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$

Aplicando las ideas de la Sección 5.1 vamos a estudiar el caso de G_f donde f es un trinomio con la propiedad de que $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$.

5.1 Solución de los sistemas (3.13) y (3.14) para $c_{\pm 1}/c_0$ pequeños

Consideremos ahora la función matricial (4.1) con f dada por

$$f = c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta, \tag{5.1}$$

donde

$$0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda, \quad \alpha/\beta \notin \mathbb{Q}, \quad c_{\pm 1} \in \mathbb{C}. \tag{5.2}$$

Por analogía con [14, Sección 3], buscaremos g_- de la forma

$$g_- = 1 + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} a_{j,k}\, e_{j\beta - k\alpha}. \tag{5.3}$$

Entonces inferimos de (5.1)–(5.3) que

$$\begin{aligned}
fg_- &= c_{-1}\, e_{-\alpha} - 1 + c_1\, e_\beta + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} c_{-1}\, a_{j,k}\, e_{j\beta-(k+1)\alpha} \\
&- \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} a_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha} + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} c_1\, a_{j,k}\, e_{(j+1)\beta-k\alpha} \\
&= \Big(c_{-1}\, e_{-\alpha} + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +2}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} c_{-1}\, a_{j,k-1}\, e_{j\beta-k\alpha} \\
&- \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} a_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha} + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha} \Big) \\
&- 1 + c_1\, e_\beta + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} c_{-1}\, a_{j,\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1}\, e_{j\beta-\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil \alpha} \\
&+ \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde, de acuerdo a (3.13), necesitamos eliminar los términos en paréntesis. Cuando hagamos esto, obtendremos

$$\begin{aligned}
g_+ &= e_\lambda + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} a_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha+\lambda}, \\
\varphi_+ &= -1 + c_1\, e_\beta + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha}, \\
\varphi_- &= -\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} c_{-1}\, a_{j,\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1}\, e_{j\beta+\lambda-\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil \alpha}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Eliminando los términos en paréntesis en (5.4), para $j = 0$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{0,1} = c_{-1}, \\ a_{0,k} = c_{-1}\, a_{0,k-1} \ \big(k = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{\lambda}{\alpha} \rceil - 1\big), \end{cases} \tag{5.6}$$

mientras que para $j \in \mathbb{N}$, los correspondientes sistemas son de la forma:

$$\begin{cases} a_{j,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1} = c_1\, a_{j-1,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}, \\ a_{j,k} = c_{-1}\, a_{j,k-1} + c_1\, a_{j-1,k} \ \big(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\big), \\ a_{j,k} = c_{-1} a_{j,k-1} \ \big(k = \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\big). \end{cases} \tag{5.7}$$

Aquí tomamos en cuenta que $\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1 < \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1$ ya que $\lambda > 2\beta + \alpha > \beta + 2\alpha$.

Para todo $j \in \mathbb{N}$, ahora ponemos

$$\eta_j := \left\lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1, \quad s_j := \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor \tag{5.8}$$

y definimos las matrices numéricas $\eta_j \times \eta_{j-1}$ $\Gamma_j = \big(\gamma_{l,s}^{(j)}\big)$ con entradas no negativas

$\gamma_{l,s}^{(j)}$ dadas para $l = 1, 2, \ldots, \eta_j$ por

$$\gamma_{l,s}^{(j)} := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s = 1, 2, \ldots, s_j; \\ 1 & \text{si} \quad s = s_j + 1, s_j + 2, \ldots, \eta_{j-1} \quad \text{y} \quad s - s_j \leq l; \\ 0 & \text{si} \quad s = s_j + 1, s_j + 2, \ldots, \eta_{j-1} \quad \text{y} \quad s - s_j > l. \end{cases} \tag{5.9}$$

Lema 5.1. La solución general de los sistemas (5.6) y (5.7) es de la forma

$$a_{j,k} = n_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \qquad \left(j \in \mathbb{Z}_+, \quad k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right) \tag{5.10}$$

donde $n_{0,k} = 1$ $\big(k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda}{\alpha} \rceil - 1\big)$ y, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} n_{j, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1} \\ \vdots \\ n_{j, \lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \rceil - 1} \end{bmatrix} = \Gamma_j \begin{bmatrix} n_{j-1, \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1} \\ \vdots \\ n_{j-1, \lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \rceil - 1} \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Demostración. Para $j = 0$ y $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] - 1$, deducimos de (5.6) que $a_{0,k} = c_{-1}^k$, lo cual es consistente con (5.10) en el caso $n_{0,k} = 1$. Supongamos que (5.10)–(5.11) se cumple para $j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1$ y verifica el cumplimiento de (5.10) y (5.11) para $j = j_0$. Anteriormente omitimos el índice 0 para j. Como

$$\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 < \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 \leq \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$$

ya que $\lambda > \beta + 2\alpha$, inferimos de (5.7) que

$$a_{j, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1} = c_1 \, a_{j-1, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1} = n_{j-1, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1} \, c_1^j \, c_{-1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}, \tag{5.12}$$

lo que da (5.10) con

$$n_{j, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1} = n_{j-1, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}. \tag{5.13}$$

Además, por inducción con respecto a $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, \ldots, \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= c_{-1} \, a_{j,k-1} + c_1 \, a_{j-1,k} = c_{-1} \, n_{j,k-1} \, c_1^j \, c_{-1}^{k-1} + c_1 \, n_{j-1,k} \, c_1^{j-1} \, c_{-1}^k \\ &= (n_{j,k-1} + n_{j-1,k}) \, c_1^j \, c_{-1}^k, \end{aligned} \tag{5.14}$$

de donde (5.10) se cumple con

$$n_{j,k} = n_{j,k-1} + n_{j-1,k}. \tag{5.15}$$

Por último, para $k = \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$,

$$a_{j,k} = c_{-1} \, a_{j,k-1} = c_{-1} \, n_{j,k-1} \, c_1^j \, c_{-1}^{k-1} = n_{j,k-1} \, c_1^j \, c_{-1}^k, \tag{5.16}$$

y por lo tanto para estas k la relación (5.10) se cumple con

$$n_{j,k} = n_{j,k-1}. \tag{5.17}$$

De (5.13), (5.15) y (5.17) se sigue que

$$n_{j,k} = \begin{cases} \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{k} n_{j-1,s} & \text{si } k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1, \\ \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} n_{j-1,s} & \text{si } k = \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1. \end{cases} \tag{5.18}$$

Consecuentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$, obtenemos (5.11) con

$$\Gamma_j = \left[\gamma_{l,s}^{(j)}\right]_{l=1,2,\ldots,\eta_j;\, s=1,2,\ldots,\eta_{j-1}}, \tag{5.19}$$

donde $\gamma_{l,s}^{(j)}$ y η_j están definidas por (5.9) y (5.8), respectivamente. ■

Dado que todas las normas de las matrices numéricas Γ_j de tamaño $\eta_j \times \eta_{j-1}$ dadas por (5.19) son equivalentes, vamos a tomar la norma

$$\|\Gamma_j\| := \max_{k=1,2,\ldots,\eta_j} \sum_{s=1,2,\ldots,\eta_{j-1}} \left|\gamma_{k,s}^{(j)}\right|, \tag{5.20}$$

la cual en vista de (5.8) y (5.9) es igual a

$$\|\Gamma_j\| = \eta_{j-1} - s_j = \left\lceil \frac{(j-1)\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1. \tag{5.21}$$

Ahora buscamos $\widetilde{g}_- \in APW_{[-\lambda,0)}$ de la forma

$$\widetilde{g}_- = e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta - k\alpha - \lambda}. \tag{5.22}$$

Entonces, similarmente a [14, Sección 3], inferimos de (5.1) y (5.22) que

$$\begin{aligned} f\widetilde{g}_- &= \big(c_{-1}\, e_{-\alpha} - 1 + c_1\, e_\beta\big) e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_{-1}\, b_{j,k}\, e_{j\beta-(k+1)\alpha-\lambda} \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j,k}\, e_{(j+1)\beta-k\alpha-\lambda} \\ &= \Bigg(c_1\, e_{\beta-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_{-1}\, b_{j,k-1}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda} \Bigg) \\ &+ c_{-1}\, e_{-\alpha-\lambda} - e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{-1}\, b_{j,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor}\, e_{j\beta - (\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1)\alpha - \lambda} \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

donde necesitamos eliminar los términos en paréntesis de acuerdo a (3.14). Cuando hagamos esto en (5.23), obtendremos (3.14), donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= 1 + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha},\\
\widetilde{\varphi}_+ &= \sum\nolimits_{j=2}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha-\lambda},\\
\widetilde{\varphi}_- &= 1 - c_{-1}\, e_{-\alpha} - \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} c_{-1}\, b_{j,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor}\, e_{j\beta-(\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1)\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Como $\lambda > \beta + 2\alpha$, deducimos que $\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor \le -3$. Así, si $j = 1$, entonces

$$\begin{cases}
b_{1,\lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor+1} = 0,\\
c_{-1}\, b_{1,k-1} - b_{1,k} = 0 \;\; \big(k = \lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2, \dots, -1\big),\\
c_1 + c_{-1}\, b_{1,-1} - b_{1,0} = 0,\\
c_{-1}\, b_{1,k-1} - b_{1,k} = 0 \;\; \big(k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor\big),
\end{cases}, \tag{5.25}$$

lo cual implica que

$$b_{1,k} = \begin{cases}
0 & \text{si } \; k = \lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1;\\
c_1 c_{-1}^k & \text{si } \; k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor.
\end{cases} \tag{5.26}$$

Para $j = 2, 3, \dots$, obtenemos los siguientes sistemas para (5.23):

$$\begin{cases}
b_{j,k} = c_1\, b_{j-1,k} & \big(k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1\big),\\
b_{j,k} = c_{-1}\, b_{j,k-1} + c_1\, b_{j-1,k} & \big(k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2, \dots, \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor\big),\\
b_{j,k} = c_{-1}\, b_{j,k-1} & \big(k = \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor\big),
\end{cases} \tag{5.27}$$

donde $\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2 \le \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor$ y $\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1 \le \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor$.

Para todo $j \in \mathbb{N}$, introducimos los números

$$\widetilde{\eta}_j := \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor, \quad \widetilde{s}_j := \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor, \tag{5.28}$$

$\widetilde{\eta}_0 := -\lfloor -\frac{\lambda}{\alpha} \rfloor$, y las matrices numéricas G_j de tamaño $\widetilde{\eta}_j \times \widetilde{\eta}_{j-1}$ con entradas $g_{l,s}^{(j)}$ dadas para $l = 1, 2, \dots, \widetilde{\eta}_j$ por

$$g_{l,s}^{(j)} := \begin{cases}
0 & \text{si } \; s = 1, 2, \dots, \widetilde{s}_j;\\
1 & \text{si } \; s = \widetilde{s}_j + 1, \widetilde{s}_j + 2, \dots, \widetilde{\eta}_{j-1} \; \text{ y } \; s - \widetilde{s}_j \le l;\\
0 & \text{si } \; s = \widetilde{s}_j + 1, \widetilde{s}_j + 2, \dots, \widetilde{\eta}_{j-1} \; \text{ y } \; s - \widetilde{s}_j > l.
\end{cases} \tag{5.29}$$

Lema 5.2. La solución general de los sistemas (5.25) y (5.27) es de la forma

$$b_{j,k} = m_{j,k}\, c_1^j\, c_{-1}^k \qquad \left(j \in \mathbb{N}, \quad k = \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \right), \tag{5.30}$$

donde $m_{0,k} = 0$ para $k = \lfloor -\frac{\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1$, $m_{0,0} = 1$ y, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} m_{j,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1} \\ \vdots \\ m_{j,\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} \end{bmatrix} = G_j \begin{bmatrix} m_{j-1,\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1} \\ \vdots \\ m_{j-1,\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor} \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Demostración. Si $j = 1$, entonces para (5.26) se sigue que (5.30) se cumple con

$$m_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = \lfloor \frac{\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1, \\ 1 & \text{si} \quad k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor, \end{cases} \tag{5.32}$$

lo cual es consistente con (5.31) para $j = 1$ debido a (5.29).

Por analogía con el Lema 5.1, aplicando inducción matemática, uno puede probar (5.30)–(5.31) para $j = 2, 3, \dots$. En efecto, supongamos que $b_{j,k} = m_{j,k}\, c_1^j\, c_{-1}^k$ para todo $j = 1, 2, \dots, N$ y todo $k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor$. Entonces, para todo $j \geq N+1$, inferimos de (5.27) que

$$b_{j,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1} = c_1\, b_{j-1,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1} = m_{j-1,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}\, c_1^j\, c_{-1}^{\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}, \tag{5.33}$$

lo que da

$$m_{j,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1} = m_{j-1,\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1}. \tag{5.34}$$

Además, por inducción con respecto a $k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 2, \dots, \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor$, deducimos de (5.27) que

$$\begin{aligned} b_{j,k} &= c_{-1}\, b_{j,k-1} + c_1\, b_{j-1,k} = c_{-1}\, m_{j,k-1}\, c_1^j\, c_{-1}^{k-1} + c_1\, m_{j-1,k}\, c_1^{j-1}\, c_{-1}^k \\ &= (m_{j,k-1} + m_{j-1,k})\, c_1^j\, c_{-1}^k, \end{aligned} \tag{5.35}$$

y por tanto, para éstos k,

$$m_{j,k} = m_{j,k-1} + m_{j-1,k}. \tag{5.36}$$

Finalmente, para $k = \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor$, concluimos de (5.27) que

$$b_{j,k} = c_{-1}\, b_{j,k-1} = c_{-1}\, m_{j,k-1}\, c_1^j\, c_{-1}^{k-1} = m_{j,k-1}\, c_1^j\, c_{-1}^k, \tag{5.37}$$

lo que da

$$m_{j,k} = m_{j,k-1}. \tag{5.38}$$

De (5.34), (5.36) y (5.38) se sigue que

$$m_{j,k} = \begin{cases} \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor+1}^{k} m_{j-1,s} & \text{si } \ k = \lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor, \\ \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor} m_{j-1,s} & \text{si } \ k = \lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor. \end{cases} \tag{5.39}$$

Consecuentemente, para todo $j \in \mathbb{N}$, obtenemos (5.11) con

$$G_j = \left[g_{l,s}^{(j)} \right]_{l=1,2,\dots,\widetilde{\eta}_j;\, s=1,2,\dots,\widetilde{\eta}_{j-1}}, \tag{5.40}$$

donde $g_{l,s}^{(j)}$ y $\widetilde{\eta}_j$ están definidos por (5.28) y (5.29), respectivamente. ■

Análogamente a (5.20), tomando la norma para las matrices numéricas G_j de tamaño $\widetilde{\eta}_j \times \widetilde{\eta}_{j-1}$ dadas por (5.40), tenemos

$$\|G_j\| := \max_{k=1,2,\dots,\widetilde{\eta}_j} \sum_{s=1,2,\dots,\widetilde{\eta}_{j-1}} \left| g_{k,s}^{(j)} \right|, \tag{5.41}$$

inferimos de (5.28) y (5.29) que

$$\|G_j\| = \widetilde{\eta}_{j-1} - \widetilde{s}_j = \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor. \tag{5.42}$$

Calculemos explícitamente los coeficientes $b_{j,k}$ para los primeros valores de $j \in \mathbb{N}$. Para $j = 1$ los coeficientes $b_{j,k}$ están dados por (5.26). Sea $j = 2$. Como $\lambda > 2\beta + \alpha$, concluimos que $\lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1 < 0 < \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor$. Así, para $j = 2$, el sistema (5.27) en vista de (5.26) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} b_{2,k} = 0 & \left(k = \lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1\right), \\ b_{2,k} = c_1\, b_{1,k} & (k = 0), \\ b_{2,k} = c_{-1}\, b_{2,k-1} + c_1\, b_{1,k} & \left(k = 1, \dots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor\right), \\ b_{2,k} = c_{-1}\, b_{2,k-1} & \left(k = \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \rfloor\right), \end{cases} \tag{5.43}$$

lo que implica que

$$b_{2,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ k = \lfloor \frac{2\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1; \\ (k+1) c_1^2 c_{-1}^k & \text{si } \ k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor; \\ \left(\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right) c_1^2 c_{-1}^k & \text{si } \ k = \lfloor \frac{\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \rfloor. \end{cases} \tag{5.44}$$

Ahora tomemos $j = 3$. Si $\lambda > 3\beta + \alpha$, entonces $\lfloor \frac{3\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1 < 0 < \lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \rfloor$. Así, en ese caso, para $j = 3$, el sistema (5.27) en vista de (5.44) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} b_{3,k} = 0 & \left(k = \lfloor \frac{3\beta-\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, -1\right), \\ b_{3,k} = c_1\, b_{2,k} & (k = 0), \\ b_{3,k} = c_{-1}\, b_{3,k-1} + c_1\, b_{2,k} & \left(k = 1, \dots, \lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \rfloor\right), \\ b_{3,k} = c_{-1}\, b_{3,k-1} & \left(k = \lfloor \frac{2\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{3\beta}{\alpha} \rfloor\right), \end{cases} \tag{5.45}$$

lo que implica que

$$b_{3,k}=\begin{cases} 0 & \text{si}\ \ k=\left\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,-1;\\ \frac{(k+1)(k+2)}{2}c_1^3c_{-1}^k & \text{si}\ \ k=0,1,\dots,\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor;\\ \frac{(\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\rfloor+1)(\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\rfloor+2)}{2}c_1^3c_{-1}^k & \text{si}\ \ k=\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor. \end{cases} \tag{5.46}$$

Si $\lambda\le 3\beta+\alpha$, entonces $0\le\left\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1$. En ese caso, el sistema (5.27) en vista de (5.44) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} b_{3,k}=c_1\,b_{2,k} & \left(k=\left\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1\right),\\ b_{3,k}=c_{-1}\,b_{3,k-1}+c_1\,b_{2,k} & \left(k=\left\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+2,\dots,\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor\right),\\ b_{3,k}=c_{-1}\,b_{3,k-1} & \left(k=\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{3\beta}{\alpha}\right\rfloor\right), \end{cases} \tag{5.47}$$

lo cual implica que

$$b_{3,k}=\begin{cases} \frac{(k+\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+3)(k-\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor)}{2}c_1^3c_{-1}^k \qquad \text{si}\ \ k=\left\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor;\\ \Big(\frac{(\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\rfloor+\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+3)(\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\rfloor)-\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor)}{2}+\left(k-\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor\right)\left(\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\Big)c_1^3c_{-1}^k\\ \qquad\qquad \text{si}\ \ k=\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor;\\ \Big(\frac{(\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\rfloor+\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+3)(\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\rfloor)-\lfloor\frac{3\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor)}{2}+\left(\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor\right)\left(\left\lfloor\frac{\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\Big)c_1^3c_{-1}^k\\ \qquad\qquad \text{si}\ \ k=\left\lfloor\frac{2\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{3\beta}{\alpha}\right\rfloor. \end{cases} \tag{5.48}$$

Es claro que siempre podemos tomar el mínimo número $N\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda\le N\beta+\alpha$, lo cual implica que $0\le\left\lfloor\frac{N\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1$. Supongamos que $b_{j,k}=m_{j,k}\,c_1^j\,c_{-1}^k$ para todo $j=1,2,\dots,N$ y $k=\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor$. Entonces, para todo $j\ge N$, inferimos de (5.27) que $m_{j,\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1}\neq 0$.

Luego, de (5.9) y (5.29) se sigue que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|\Gamma_j\|<\infty,\qquad \sup_{j\in\mathbb{N}}\|G_j\|<\infty. \tag{5.49}$$

Así, por (5.49), existen los números

$$\widetilde{\varrho}_1:=\limsup_{m\to\infty}\big\|\Gamma_m\dots\Gamma_2\,\Gamma_1\big\|^{1/m}<\infty \tag{5.50}$$

y

$$\widetilde{\varrho}_2:=\limsup_{m\to\infty}\big\|G_m\dots G_2\,G_1\big\|^{1/m}<\infty. \tag{5.51}$$

Conjetura 1. *Los números $\widetilde{\varrho}_1$ y $\widetilde{\varrho}_2$ coinciden.*

Lema 5.3. Si $j,s\in\mathbb{N}$ y (5.2) se satisfacen, entonces

$$\left|\left(\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor-1\right)-\left(\left\lceil\frac{\lambda}{\alpha}\right\rceil-1\right)\right|\le 1, \tag{5.52}$$

$$\left|\left(\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)-\left\lceil\frac{\lambda}{\alpha}\right\rceil\right|\le 1, \tag{5.53}$$

$$\left|\left(\left\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor-1\right)-\left(\left\lfloor\frac{s\beta}{\alpha}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{s\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor\right)\right|\le 1. \tag{5.54}$$

Demostración. Los números $\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil$ y $\left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil$ no pueden ser enteros simultáneamente porque $\beta/\alpha \notin \mathbb{Q}$ y $j \in \mathbb{N}$. Denotando por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \geq 0$ a la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{R}$ y tomando en cuenta el hecho de que

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}, \\ x + 1 - \{x\} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \end{cases}$$

obtenemos que

$$\left| \left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right) - \left(\left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right) \right| = \left| \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right|$$
$$= \begin{cases} \left| \left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} \right\} - 1 \right| \leq 1 & \text{si} \quad \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \in \mathbb{Z}, \\ \left| 1 - \left\{ \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} \right| \leq 1 & \text{si} \quad \frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{Z}, \\ \left| -\left\{ \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} \right\} \right| \leq 1 & \text{si} \quad \frac{j\beta+\lambda}{\alpha}, \frac{\lambda}{\alpha} \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

lo que da (5.52). Análogamente,

$$\left| \left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right) - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right|$$
$$= \begin{cases} \left| -\left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\} \right| \leq 1 & \text{si} \quad \frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{Z}, \\ \left| -\left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} \right\} - 1 \right| \leq 1 & \text{si} \quad \frac{\lambda}{\alpha} \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

lo cual prueba (5.53).

Además, para $j, s \in \mathbb{N}$, inferimos de (5.52) y (5.53) que

$$\left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right) - \left(\left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right)$$
$$= \left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right) - \left(\left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right) - 1 \leq 1$$

y, análogamente,

$$\left(\left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \right) - \left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \right)$$
$$= \left(\left\lfloor \frac{s\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right) - \left(\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil \right) + 1 \geq -1,$$

lo que da (5.54). ■

Teorema 5.4. *Sea* G *de la forma* (4.1) *y sea* $\widetilde{\varrho} := \text{máx}\{\widetilde{\varrho}_1, \widetilde{\varrho}_2\}$, *donde* f *está dada por* (5.1) *y* (5.2), *y los números* $\widetilde{\varrho}_1$ *y* $\widetilde{\varrho}_2$ *están dados por* (5.50) *y* (5.51), *respectivamente. Si*

$$\widetilde{\varrho}\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1, \tag{5.55}$$

entonces G admite una factorización canónica APW

$$G = \begin{bmatrix} g_+ & \widetilde{g}_+ \\ \varphi_+ & \widetilde{\varphi}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_- & -\widetilde{g}_- \\ -\varphi_- & g_- \end{bmatrix},$$

con $g_\pm, \varphi_\pm$ y $\widetilde{g}_\pm, \widetilde{\varphi}_\pm$ dados por (5.3), (5.5) *y* (5.22), (5.24), *respectivamente.*

Demostración. Para $j \in \mathbb{N}$ y $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$, sea $E_{j,k}$ el vector renglón de longitud $\eta_j = \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1$, donde su $\left(k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor\right)$-ésima entrada es igual a 1 y todas las demás entradas son cero, y sea I_0 el vector columna de longitud $\eta_0 = \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$ con entradas igual a 1. Se sigue de (5.10) y (5.11) que, para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1$,

$$\left|a_{j,k}\right|^{1/j} = n_{j,k}^{1/j} \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{k/j} = \left|E_{j,k}\Gamma_j\Gamma_{j-1}\dots\Gamma_1 I_0\right|^{1/j} \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{k/j}. \tag{5.56}$$

Luego, de acuerdo con (5.52),

$$\eta_j = \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1 \leq \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil,$$

inferimos que, para todo $k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + r$ con $r = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha} \right\rceil$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{k}{j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + r}{j} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\} + r}{j} \right) = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{5.57}$$

Así, inferimos de (5.56), (5.57), (5.50) y (5.55) que

$$\begin{aligned} &\limsup_{j\to\infty} \max \left\{ \left|a_{j,k}\right|^{1/j} : k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 \right\} \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} \left\|\Gamma_j\Gamma_{j-1}\dots\Gamma_1\right\|^{1/j} \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{\beta/\alpha} = \widetilde{\varrho}_1 \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{\beta/\alpha} < 1. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Por lo tanto,

$$\|g_-\|_W = 1 + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} \left|a_{j,k}\right| < \infty. \tag{5.59}$$

Análogamente, de acuerdo a (5.51), obtenemos

$$\begin{aligned} &\limsup_{j\to\infty} \max \left\{ \left|b_{j,k}\right|^{1/j} : k = \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \right\} \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} \left\|G_jG_{j-1}\dots G_1\right\|^{1/j} \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{\beta/\alpha} = \widetilde{\varrho}_2 \left|c_1\right| \left|c_{-1}\right|^{\beta/\alpha} < 1, \end{aligned} \tag{5.60}$$

lo que implica que

$$\|\widetilde{g}_-\|_W = 1 + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} \left|b_{j,k}\right| < \infty. \tag{5.61}$$

Así, $g_\pm, \widetilde{g}_\pm \in APW^\pm$, y por (5.5) y (5.24), también $\varphi_\pm, \widetilde{\varphi}_\pm \in APW^\pm$. Dado que las soluciones $\begin{bmatrix} g_\pm \\ \varphi_\pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{g}_\pm \\ \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix} \in APW^\pm$ del problema de Riemann-Hilbert (3.10) son linealmente independientes, aplicando las fórmulas de la Sección 3.4 para factorizaciones canónicas APW en términos de estas soluciones y tomando en cuenta el hecho de que, por construcción,

$$M(\det G_-) = M(g_-)M(\widetilde{\varphi}_-) - M(\widetilde{g}_-)M(\varphi_-) = M(g_-)M(\widetilde{\varphi}_-) = 1$$

ya que $M(\widetilde{g}_-) = 0$ y $M(g_-) = M(\widetilde{\varphi}_-) = 1$, hemos completado la prueba. ■

5.2 Condiciones suficientes para factorización canónica *APW*

Vamos a estimar de arriba los números $\widetilde{\varrho}_1$ y $\widetilde{\varrho}_2$ dados por (5.50) y (5.51), respectivamente.

Dado que el número α/β es irracional, cada uno de los números $\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}$ y $\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}$ puede ser entero para a lo más un valor de j. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ el mínimo $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}$ y $\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}$ no son enteros. Entonces, para todo $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_j\| &= \left\lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \geq 1, \\ \|G_j\| &= \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor \geq 1. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Entonces, para todo $j \geq j_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_j\| &= \frac{\lambda-\beta}{\alpha} - \left\{ \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta}{\alpha} \right\}, \\ \|G_j\| &= \frac{\lambda-\beta}{\alpha} - \left\{ \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{R}$. Así, por analogía con [14], para $j \geq j_0$, inferimos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_j\| &= \left\lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \geq 0, \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} - 1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } 0 < \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} < 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}, \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \leq \left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\} < 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.63}$$

y por lo tanto $1 \leq \|\Gamma_j\| \leq \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Similarmente, para $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned}
\|G_j\| &= \left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta - \lambda}{\alpha} \right\rfloor \\
&= \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \geq 0, \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } \left\{\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\} - \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} = \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} - 1 < 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si } 0 \leq \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} < 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}, \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si } 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} \leq \left\{\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\right\} < 1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

y por lo tanto $1 \leq \|G_j\| \leq \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$.

Por analogía con [14, Lema 3.3], donde el caso

$$0 < \alpha < \beta < \alpha + \beta < \lambda \leq 2\beta + \alpha$$

fue considerado, establecemos lo siguiente.

Lema 5.5. Si $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$ y el número α/β es irracional, entonces para todo $s \in \mathbb{N}$ los limites

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &:= \lim_{m\to\infty} \big(\|\Gamma_m\| \dots \|\Gamma_2\| \, \|\Gamma_1\|\big)^{1/m}, \\
\varrho_2 &:= \lim_{m\to\infty} \big(\|G_m\| \dots \|G_2\| \, \|G_1\|\big)^{1/m}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

existen y ambos son iguales a

$$\varrho := p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha - p}, \tag{5.66}$$

donde $p := \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$.

Demostración. Ciertamente, para calcular los limites en cuestión, sin perdida de generalidad podemos asumir que $j_0 = 1$. De (5.63) se sigue que $\|\Gamma_j\| = \Gamma\big(\left\{\frac{j\beta}{\alpha}\right\}\big)$ donde

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor & \text{si} \quad x \in \big(0, 1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}\big), \\ \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 & \text{si} \quad x \in \big[1 - \left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}, 1\big) \end{cases}$$

es una función constante a trozos en el intervalo [0,1].

Es bien conocido (ver e.g. [16, Capítulo 7, § 2, Teorema 1] o [17, Ejemplo 2.1]) que la parte fraccionaria de los números irracionales $x_j := \frac{j\beta}{\alpha}$ está uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto [17, Corolario 1.1], para cualquier función Riemann integrable f,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \ln \|\Gamma_j\| = \int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx.$$

Así, en vista de la relación $\left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\} = \frac{\lambda-\beta}{\alpha} - p$, inferimos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx &= \int_0^{1-\left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}} \ln p\, dx + \int_{1-\left\{\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\right\}}^1 \ln(p+1)\, dx \\ &= \big(p+1-(\lambda-\beta)/\alpha\big) \ln p + \big((\lambda-\beta)/\alpha - p\big) \ln(p+1).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \big(\|\Gamma_m\| \dots \|\Gamma_2\|\, \|\Gamma_1\|\big)^{1/m} &= \exp\left(\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx\right) \\ &= p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha} (p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha - p}.\end{aligned}$$

Por [16, Capítulo 7, § 2, Teorema 1], las partes fraccionarias de los números irracionales $t_j := \frac{j\beta-\lambda}{\alpha}$ están también uniformemente distribuidos en $[0,1]$. Así, tomando en cuenta (5.64) y la relación $1 \le \|G_j\| \le \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$, análogamente concluimos que

$$\lim_{m\to\infty} \big(\|G_m\| \dots \|G_2\|\, \|G_1\|\big)^{1/m} = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha} (p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha - p},$$

lo cual completa la prueba. ■

Teorema 5.6. *Sea G_f la función matricial dada por* (4.1) *y* (5.1)*, donde* $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$*, el número* α/β *es irracional, y* $c_{\pm 1} \in \mathbb{C}$*. Entonces* G_f *admite una factorización canónica APW si*

$$\varrho\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1, \tag{5.67}$$

donde $\varrho = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha} (p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha - p}$ *con* $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$.

Demostración. Como

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m \dots \Gamma_2\, \Gamma_1\| &\le \|\Gamma_m\| \dots \|\Gamma_2\|\, \|\Gamma_1\|, \\ \|G_m \dots G_2\, G_1\| &\le \|G_m\| \dots \|G_2\|\, \|G_1\|,\end{aligned}$$

concluimos de (5.50), (5.51), (5.65) y del Lema 5.5 que

$$\widetilde{\varrho}_1 \le \varrho_1 = \varrho, \quad \widetilde{\varrho}_2 \le \varrho_2 = \varrho, \tag{5.68}$$

donde ϱ está dado por (5.66) con $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$. Solo queda aplicar el Teorema 5.4, donde la condición (5.55) se sigue de (5.67) en vista de (5.68). ■

Así, si $\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha} < |c_0|^{1+\beta/\alpha}$, donde $\varrho = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}$ y $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$, entonces de la prueba del Teorema 5.6 se sigue que

$$
\begin{aligned}
g_+ &= e_\lambda + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda},\\
g_- &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_+ &= -c_0 + c_1\, e_\beta + c_0 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} n_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_- &= -c_0 \sum_{j=0}^{\infty} n_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil} e_{j\beta+\lambda-\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil\alpha},
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

donde los coeficientes $n_{j,k}$ están definidos en el Lema 5.1, y

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\widetilde{g}_- &= e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda},\\
\widetilde{\varphi}_+ &= c_0 \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda},\\
\widetilde{\varphi}_- &= c_0 - c_{-1}\, e_{-\alpha} - c_0 \sum_{j=1}^{\infty} m_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1} e_{j\beta-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1\right)\alpha},
\end{aligned}
\tag{5.70}
$$

donde los coeficientes $m_{j,k}$ están dados por el Lema 5.2.

El Teorema 5.6 implica lo siguiente.

Teorema 5.7. *Sea G dada por* (4.1) y (5.1) *donde $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$, el número α/β es irracional, y c_0, $c_{\pm 1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces G admite una factorización canónica izquierda APW $G = G_+ G_-^{-1}$ si*

$$
p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^\alpha\,|c_{-1}|^\beta < |c_0|^{\alpha+\beta}. \tag{5.71}
$$

La función matricial $G_\pm, G_\pm^{-1} \in APW_{2\times 2}^{\pm}$ está dada por

$$
G_\pm = \begin{bmatrix} g_\pm & \widetilde{g}_\pm \\ \varphi_\pm & \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix}, \quad G_\pm^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_\pm & -\widetilde{g}_\pm \\ -\varphi_\pm & g_\pm \end{bmatrix} c_0^{-1}, \tag{5.72}
$$

y sus entradas están definidas por (5.69) *y* (5.70) *con coeficientes $n_{j,k}$ y $m_{j,k}$ dados por el Lema 5.1 y 5.2.*

Capítulo 6

Caso de frontera

Supongamos ahora que $f = c_{-1}e_{-\alpha} - 1 + c_1 e_\beta$, donde

$$0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda = 2\beta + 2\alpha, \quad \alpha/\beta \notin \mathbb{Q}, \tag{6.1}$$

$c_{\pm 1} \in \mathbb{C}$ y $c_{\pm 1} \neq 0$. El caso para coeficientes pequeños está investigado en el Capítulo 5.

6.1 Coeficientes grandes

Considere el caso de valores grandes de $|c_{\pm 1}|$.

Buscamos una solución $g_- \in APW_{(-\lambda,0)}$ del problema (3.13) de la forma

$$g_- = \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} a_{j,k}\, e_{j\beta - k\alpha}. \tag{6.2}$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} fg_- &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} c_{-1}\, a_{j,k}\, e_{j\beta - (k+1)\alpha} \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} a_{j,k}\, e_{j\beta - k\alpha} \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} c_1\, a_{j,k}\, e_{(j+1)\beta - k\alpha} \\ &= \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} c_{-1}\, a_{j,k-1}\, e_{j\beta - k\alpha} \right. \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} a_{j,k}\, e_{j\beta - k\alpha} \\ &\quad \left. + \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta - k\alpha} \right) \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^{-1} c_{-1}\, a_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1}\, e_{j\beta - \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil \alpha} \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta - k\alpha}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Entonces $0 \in \Omega(fg_-)$ y, para que g_- sea una solución de (3.13), los términos en paréntesis en (6.3) deben ser cero. Igualando estos a cero obtenemos

$$
\begin{aligned}
g_+ &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1} a_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha+\lambda}, \\
\varphi_+ &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \sum\nolimits_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor +1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, a_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha}, \\
\varphi_- &= -\sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} c_{-1}\, a_{j,\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil -1}\, e_{j\beta+\lambda-\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil \alpha}.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Para $j = 0$, las condiciones de cancelación producen

$$
a_{-1,k} = 0 \ \left(k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rceil - 1\right). \tag{6.5}
$$

Para $j = -1$, obtenemos de (6.3) el sistema

$$
\begin{cases}
a_{-1,k} = c_1\, a_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\
a_{-1,k} = c_{-1}\, a_{-1,k-1} + c_1\, a_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, 1\right), \\
a_{-1,k} = c_{-1} a_{-1,k-1} & \left(k = 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1\right).
\end{cases}
\tag{6.6}
$$

Así, el sistema (6.6) se transforma en vista de (6.5) en el sistema

$$
a_{-1,k} = \begin{cases}
c_1\, a_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\
c_{-1}\, a_{-1,k-1} + c_1\, a_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, 1\right), \\
0 & \left(k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1\right).
\end{cases}
\tag{6.7}
$$

Las condiciones de cancelación en (6.3) implican que, para cada $j = -2, -3, \ldots$, el sistema para determinar los coeficientes $a_{j,k}$ $\left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right)$ tiene la forma (cf. (5.7)):

$$
\begin{cases}
a_{j,k} = c_1\, a_{j-1,k} & \left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\
a_{j,k} = c_{-1}\, a_{j,k-1} + c_1\, a_{j-1,k} & \left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right), \\
a_{j,k} = c_{-1} a_{j,k-1} & \left(k = \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right).
\end{cases}
\tag{6.8}
$$

Análogamente a (5.10),

$$
a_{j,k} = n_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \ \left(j = -1, -2, \ldots;\ k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \tag{6.9}
$$

podemos reescribir los sistemas (6.7) y (6.8), respectivamente en la forma

$$
n_{-1,k} = \begin{cases}
\sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{k} n_{-2,s} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1 \ldots, 1\right), \\
0 & \left(k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1\right),
\end{cases}
\tag{6.10}
$$

y, para todo $j = -2, -3, \ldots$,

$$n_{j,k} = \begin{cases} \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{k} n_{j-1,s} & \text{si } \left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right), \\ \sum_{s=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} n_{j-1,s} & \text{si } \left(k = \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right). \end{cases} \tag{6.11}$$

Para todo $j = -1, -2, \ldots$, definimos los números dominados

$$x_j := n_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1} \quad \text{y} \quad y_j := n_{j, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1}. \tag{6.12}$$

Si $j = -1$, entonces

$$\left\lceil \frac{-3\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, \quad \left\lceil \frac{-2\beta + \lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{0 \cdot \beta}{\alpha} \right\rfloor + 1. \tag{6.13}$$

Dado que $\lambda = 2\beta + 2\alpha$ y como β/α es un número irracional, deducimos de (6.12) que $x_{-1} = y_{-1} = n_{-1,1}$, mientras que $x_{-2} = n_{-2, \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}$ y $y_{-2} = n_{-2, \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 2}$. Más aún, por (6.10) y (6.11),

$$\begin{cases} n_{-1,k} = y_{-1} & \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{-\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1, \\ n_{-2,k} = y_{-2} & \text{para todo} \quad k = \lceil \frac{-\beta}{\alpha} \rceil + 2, \ldots, \lceil \frac{-2\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1. \end{cases} \tag{6.14}$$

Entonces podemos reescribir los sistemas (6.10) en la forma

$$\begin{cases} n_{-1,k} = x_{-2} + \left(k - \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor - 1\right) y_{-2} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, 0\right), \\ n_{-1,k} = x_{-2} - \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor y_{-2} = 0 & \left(k = 1\right), \\ n_{-1,k} = 0 & \left(k = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1\right). \end{cases} \tag{6.15}$$

Dado que $x_{-1} = y_{-1} = n_{-1,1} = 0$, obtenemos de (6.15) el siguiente sistema para los números dominados x_{-1}, y_{-1} y x_{-2}, y_{-2}:

$$\begin{cases} x_{-1} = 0 = x_{-2} - \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor y_{-2}, \\ y_{-1} = 0 = x_{-2} - \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor y_{-2}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Este sistema se puede resolver y tiene soluciones continuas x_{-2}, y_{-2}. Tomando su solución $x_{-2} = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor$, $y_{-2} = 1$. Entonces deducimos de (6.15) que

$$n_{-1,k} = \begin{cases} k - 1 & \text{si} \quad k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, 0; \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1. \end{cases} \tag{6.17}$$

Por (6.12) , para cada $j = -2, -3, \ldots$, concluimos que

$$x_j := n_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1} \quad \text{y} \quad y_j := n_{j, \lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1} = n_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 2} \tag{6.18}$$

en vista de las igualdades

$$\left\lceil \frac{(j-2)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, \quad \left\lceil \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2. \tag{6.19}$$

Entonces podemos reescribir los sistemas (6.11) para cada $j = -2, -3, \ldots$ en la forma

$$n_{j,k} = \begin{cases} x_{j-1} + \left(k - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor - 1\right) y_{j-1} & \left(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\ x_{j-1} + \left(\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right) y_{j-1} & \left(k = \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1\right). \end{cases} \tag{6.20}$$

En vista de (6.18) esto implica que

$$\begin{cases} x_j = x_{j-1} + \left(\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor\right) y_{j-1}, \\ y_j = x_{j-1} + \left(\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right) y_{j-1}. \end{cases} \tag{6.21}$$

Reescribiendo el sistema (6.21) en la forma

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor \\ 1 & \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{bmatrix}, \tag{6.22}$$

inferimos que

$$\begin{bmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1 & -\left(\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor - \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor\right) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Así, establecimos fórmulas recursivas, que nos permiten calcular x_{j-1} y y_{j-1} para j negativos mediante x_j y y_j, respectivamente. Teniendo estos coeficientes dominados x_{j-1} y y_{j-1} en las manos, tenemos la posibilidad de calcular todos los coeficientes $n_{j,k}$ para todo $j = -2, -3, \ldots$ y todo $k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rceil - 1$ por las fórmulas (6.20), esto es, vamos en la dirección positiva. Por lo tanto, obtenemos $a_{j,k} = n_{j,k} c_1^j c_{-1}^k$ para todos estos j y k.

Por lo tanto, obtenemos lo siguiente.

Lema 6.1. Sea f dada por (5.1), donde (6.1) se cumple, $c_{\pm 1} \in \mathbb{C}$ y $c_{\pm 1} \neq 0$. Entonces la solución general de los sistemas (6.7) para $j = -1$ y (6.8) para $j = -2, -3, \ldots$ es de la forma

$$a_{j,k} = n_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \quad \left(j = -1, -2, \ldots; \ k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1\right), \tag{6.24}$$

donde

$$n_{-1,k} = \begin{cases} k-1 & \text{si} \quad k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, 0, \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rceil - 1, \end{cases}$$

para $j=-2,-3,\ldots$,

$$n_{j,k}=\begin{cases} x_{j-1}+\big(k-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor-1\big)y_{j-1} & \big(k=\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor+1,\ldots,\big\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\big\rfloor+1\big),\\ x_{j-1}+\big(\big\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\big\rfloor-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor+1\big)y_{j-1} & \big(k=\big\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\big\rfloor+2,\ldots,\big\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\big\rceil-1\big),\end{cases}$$

y los números x_{j-1} y y_{j-1} para $j=-2,-3,\ldots$ son calculados recursivamente de x_j y y_j por (6.23), con $x_{-2}=\big\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\big\rfloor$ y $y_{-2}=1$.

Similarmente a la Sección 5.2, la convergencia absoluta de las series (6.2) depende del comportamiento de los productos $B_{j-2}\ldots B_{-3}B_{-2}$ como matrices

$$B_j=\begin{bmatrix}\big\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\big\rfloor-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor+1 & -\big(\big\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\big\rfloor-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor\big)\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad (j=-2,-3,\ldots). \tag{6.25}$$

Por (6.19), las matrices (6.25) pueden ser reescritas en la forma

$$B_j=\begin{bmatrix}\big\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\big\rceil-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor-2 & -\big(\big\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\big\rceil-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor-3\big)\\ -1 & 1\end{bmatrix}\ (j=-2,-3,\ldots), \tag{6.26}$$

y la norma de la matriz $B_j=\big[b_{j,k,l}\big]_{k,l=1}^2$ puede ser calculada por la fórmula $\|B_j\|=$ $\max_{l=1,2}(|b_{j,1,l}|+|b_{j,2,l}|$. En ese caso, para $j=-2,-3,\ldots$, obtenemos

$$\|B_j\|=\left\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\right\rceil-\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor-1, \tag{6.27}$$

lo cual coincide con $\|\Gamma_j\|=\big\lceil\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\big\rceil-\big\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\big\rfloor-1$ para j negativos por (5.21). Así, similarmente al Lema 5.5,

$$\limsup_{n\to\infty}\big(\|B_{-n-2}\|\ldots\|B_{-3}\|\,\|B_{-2}\|\big)^{1/n}=\varrho=p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}, \tag{6.28}$$

donde $p=\big\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\big\rfloor$. Finalmente, obtenemos la estimación

$$\limsup_{j\to-\infty}\ \max_{k=\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1,\ldots,\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rceil-1}|a_{j,k}|^{1/|j|}=\varrho|c_1|^{-1}|c_{-1}|^{-\beta/\alpha}, \tag{6.29}$$

lo cual implica que las series (6.2) convergen absolutamente si

$$\varrho|c_1|^{-1}|c_{-1}|^{-\beta/\alpha}<1\quad\text{o, equivalentemente,}\quad \varrho^{-1}|c_1||c_{-1}|^{\beta/\alpha}>1. \tag{6.30}$$

Ahora pasaremos a resolver el sistema (3.14). Para este fin, buscamos $\widetilde{g}_-\in APW_{[-\lambda,0]}$ en la forma

$$\widetilde{g}_-=1+\sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1}\sum\nolimits_{k=\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rfloor}b_{j,k}\,e_{j\beta-k\alpha}, \tag{6.31}$$

Entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
f\widetilde{g}_- &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} c_{-1}\, b_{j,k}\, e_{j\beta-(k+1)\alpha} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha} \\
&\quad + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j,k}\, e_{(j+1)\beta-k\alpha} \\
&= \Bigg(c_{-1}e_{-\alpha} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+2}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} c_{-1}\, b_{j,k-1}\, e_{j\beta-k\alpha} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha} \\
&\quad + \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha} \Bigg) \\
&\quad - 1 + c_1 e_\beta + \sum_{j=-\infty}^{-1} c_{-1}\, b_{j,\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor}\, e_{j\beta-(\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor+1)\alpha} \\
&\quad + \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha}. \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

Como antes, los términos entre paréntesis deben cancelarse para que $\widetilde{g}_-$ sea una solución de (3.14). Cuando hacemos esto obtenemos $f\widetilde{g}_- = \widetilde{\varphi}_+ - e_{-\lambda}\widetilde{\varphi}_-$, donde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= e_\lambda + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} b_{j,k}\, e_{j\beta-k\alpha+\lambda}, \\
\widetilde{\varphi}_+ &= -1 + c_1 e_\beta + \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor} c_1\, b_{j-1,k}\, e_{j\beta-k\alpha}, \qquad (6.33) \\
\widetilde{\varphi}_- &= -\sum_{j=-\infty}^{-1} c_{-1}\, b_{j,\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor}\, e_{j\beta+\lambda-(\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor+1)\alpha}.
\end{aligned}
$$

Para $j = 0$, la condición de cancelación significa que

$$
b_{-1,1} = -c_{-1}c_1^{-1}, \quad b_{-1,k} = 0 \quad \left(k = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor\right). \qquad (6.34)
$$

Más aún, la condición de cancelación para $j = -1$ conduce al sistema

$$
\begin{cases}
b_{-1,k} = c_1\, b_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1\right), \\
b_{-1,k} = c_{-1}\, b_{-1,k-1} + c_1\, b_{-2,k} & \left(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, 2\right), \\
b_{-1,k} = c_{-1} b_{-1,k-1} & \left(k = 3, \ldots, \lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rfloor\right).
\end{cases} \qquad (6.35)
$$

Así, el sistema (6.35) se transforma en vista de (6.34) en el sistema

$$b_{-1,k} = \begin{cases} c_1\, b_{-2,k} & \big(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1\big), \\ c_{-1}\, b_{-1,k-1} + c_1\, b_{-2,k} & \big(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, 0\big), \\ c_{-1}\, b_{-1,k-1} + c_1\, b_{-2,k} = -c_1^{-1} c_{-1} & \big(k = 1\big), \\ c_{-1}\, b_{-1,k-1} + c_1\, b_{-2,k} = 0 & \big(k = 2\big), \\ 0 & \big(k = 3, \ldots, \lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rfloor\big). \end{cases} \tag{6.36}$$

La condición de cancelación en (6.32) implica que para cada $j = -2, -3, \ldots$ el sistema para determinar los coeficientes $b_{j,k}$ $\big(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor\big)$ tiene la forma

$$\begin{cases} b_{j,k} = c_1\, b_{j-1,k} & \big(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1\big), \\ b_{j,k} = c_{-1}\, b_{j,k-1} + c_1\, b_{j-1,k} & \big(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 2, \ldots, \lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor\big), \\ b_{j,k} = c_{-1} b_{j,k-1} & \big(k = \lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor\big). \end{cases} \tag{6.37}$$

Haciendo

$$b_{j,k} := m_{j,k} c_1^j c_{-1}^k \quad \left(j = -1, -2, \ldots;\ k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{j\beta + \lambda}{\alpha} \right\rfloor\right), \tag{6.38}$$

deducimos de los sistemas (6.36) y (6.37), respectivamente, los sistemas

$$m_{-1,k} = \begin{cases} \sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{k} m_{-2,s} & \big(k = \lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, 0\big), \\ \sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{1} m_{-2,s} = -1 & \big(k = 1\big), \\ \sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{2} m_{-2,s} = 0 & \big(k = 2\big), \\ 0 & \big(k = 3, \ldots, \lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \rfloor\big), \end{cases} \tag{6.39}$$

y, para todo $j = -2, -3, \ldots$,

$$m_{j,k} = \begin{cases} \sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{k} m_{j-1,s} & \big(k = \lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor\big), \\ \sum_{s=\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} m_{j-1,s} & \big(k = \lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor + 1, \ldots, \lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor\big). \end{cases} \tag{6.40}$$

Para todo $j = -1, -2, \ldots$, introducimos los números dominados

$$\widetilde{x}_j := m_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1}, \quad \widetilde{y}_j := m_{j, \lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} \tag{6.41}$$

Dado que $\lambda = 2\beta + 2\alpha$ y como β/α es un número irracional, deducimos de (6.41) y la igualdad $\lfloor \frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor = \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 2$ que

$$\widetilde{x}_j := m_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 1},\ \widetilde{y}_j := m_{j, \lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \rfloor + 2} \quad \text{para todo} \quad j = -1, -2, \ldots. \tag{6.42}$$

Aplicando (6.42) para $j=-1$ y $j=-2$, reescribimos el sistema (6.39) en la forma

$$m_{-1,k}=\begin{cases}\widetilde{x}_{-2}+(k-\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor-1)\widetilde{y}_{-2} & \big(k=\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor+1,\dots,0\big),\\ \widetilde{x}_{-2}-\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor\widetilde{y}_{-2}=-1 & \big(k=1\big),\\ \widetilde{x}_{-2}+(1-\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor)\widetilde{y}_{-2}=0 & \big(k=2\big),\\ 0 & \big(k=3,\dots,\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\rfloor\big).\end{cases} \tag{6.43}$$

Dado que $\widetilde{x}_{-1}=m_{-1,1}=-1$ y $\widetilde{y}_{-1}=m_{-1,2}=0$ de acuerdo con (6.42) y (6.43), obtenemos de (6.43) el sistema

$$\begin{cases}\widetilde{x}_{-2}-\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor\widetilde{y}_{-2}=-1,\\ \widetilde{x}_{-2}+(1-\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor)\widetilde{y}_{-2}=0,\end{cases} \tag{6.44}$$

el cual tiene solución única $\widetilde{x}_{-2}=\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor-1,\ \widetilde{y}_{-2}=1$. Entonces

$$m_{-1,k}=\begin{cases}k-2 & \big(k=\lfloor\frac{-\beta}{\alpha}\rfloor+1,\dots,0,1\big),\\ 0 & \big(k=2,3,\dots,\lfloor\frac{\lambda-\beta}{\alpha}\rfloor\big).\end{cases} \tag{6.45}$$

Para todo $j=-2,-3,\dots$, inferimos de (6.40), (6.42) y la igualdad $\lfloor\frac{(j-1)\beta+\lambda}{\alpha}\rfloor=\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor+2$, que

$$m_{j,k}=\begin{cases}\widetilde{x}_{j-1}+\big(k-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor-1\big)\widetilde{y}_{j-1} & \big(k=\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1,\dots,\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor+1\big),\\ \widetilde{x}_{j-1}+\big(\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1\big)\widetilde{y}_{j-1} & \big(k=\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor+2,\dots,\lfloor\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rfloor\big).\end{cases} \tag{6.46}$$

Así, por (6.42) y (6.46),

$$\begin{cases}\widetilde{x}_j=\widetilde{x}_{j-1}+\big(\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor\big)\widetilde{y}_{j-1},\\ \widetilde{y}_j=\widetilde{x}_{j-1}+\big(\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1\big)\widetilde{y}_{j-1}.\end{cases} \tag{6.47}$$

Luego, similarmente a (6.23), obtenemos

$$\begin{bmatrix}\widetilde{x}_{j-1}\\ \widetilde{y}_{j-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1 & -\big(\lfloor\frac{(j+1)\beta}{\alpha}\rfloor-\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor\big)\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{x}_j\\ \widetilde{y}_j\end{bmatrix}. \tag{6.48}$$

Lema 6.2. Sea f dada por (5.1), donde (6.1) se cumple, $c_{\pm1}\in\mathbb{C}$ y $c_{\pm1}\neq0$. Entonces la solución general de los sistemas (6.36) para $j=-1$ y (6.37) para $j=-2,-3,\dots$ es de la forma

$$b_{j,k}=m_{j,k}c_1^jc_{-1}^k\quad\left(j=-1,-2,\dots;\ \ k=\left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor+1,\dots,\left\lfloor\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\right\rfloor-1\right), \tag{6.49}$$

donde

$$m_{-1,k} = \begin{cases} k-2 & \text{si} \quad k = \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, 0, 1, \\ 0 & \text{si} \quad k = 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor, \end{cases}$$

para $j = -2, -3, \dots,$

$$m_{j,k} = \begin{cases} \widetilde{x}_{j-1} + \left(k - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1\right)\widetilde{y}_{j-1} & \left(k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \dots, \left\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1\right), \\ \widetilde{x}_{j-1} + \left(\left\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1\right)\widetilde{y}_{j-1} & \left(k = \left\lfloor \frac{(j+1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor\right). \end{cases}$$

y los números $\widetilde{x}_{j-1}$ y $\widetilde{y}_{j-1}$ para $j = -2, -3, \dots$ son calculados recursivamente de $\widetilde{x}_j$ y $\widetilde{y}_j$ por (6.48), con $\widetilde{x}_{-2} = \left\lfloor \frac{-\beta}{\alpha} \right\rfloor - 1$ y $\widetilde{y}_{-2} = 1$.

Dado que la matriz en (6.48) coincide con la matriz (6.25), de manera similar a (6.29) deducimos que

$$\limsup_{j\to-\infty} \max_{k=\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \rfloor+1,\dots,\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \rfloor} |b_{j,k}|^{1/|j|} = \varrho |c_1|^{-1} |c_{-1}|^{-\beta/\alpha}, \tag{6.50}$$

donde $\varrho = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}$ y $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$, lo cual implica que las series (6.31) converge absolutamente si (6.30) se cumple.

Teorema 6.3. *Sea G dado por (4.1) con f dada por (5.1) donde $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda = 2\beta + 2\alpha$, el número α/β es irracional, y $c_\pm \in \mathbb{C}$. Si*

$$\varrho\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} < 1, \quad o \quad \varrho^{-1}\, |c_1|\, |c_{-1}|^{\beta/\alpha} > 1, \tag{6.51}$$

donde

$$\varrho = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}$$

y $p := \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$, entonces la función matricial G admite una factorización canónica APW izquierda

$$G = \begin{bmatrix} g_+ & \widetilde{g}_+ \\ \varphi_+ & \widetilde{\varphi}_+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_- & -\widetilde{g}_- \\ -\varphi_- & g_- \end{bmatrix},$$

con $g_\pm, \varphi_\pm, \widetilde{g}_\pm, \widetilde{\varphi}_\pm$ dados por (5.3), (5.5), (5.22), (5.24) y, respectivamente, por (6.2), (6.4), (6.31), (6.33).

6.2 Factorización canónica: Forma explicita

Recolectando los resultados del Capítulo 5 y la Sección 6.1 y aplicando el esquema de la Sección 3.4, podemos obtener condiciones suficientes para el criterio de factorización *APW* y construir explícitamente tal factorización en caso de existir.

Considera ahora la función matricial (4.1) con f dada por (5.1). Tomando en cuenta el coeficiente $c_0 \neq 0$, vamos a modificar las fórmulas para $g_\pm$, $\widetilde{g}_\pm$, $\varphi_\pm$, $\widetilde{\varphi}_\pm$, que se obtuvieron anteriormente bajo las condiciones del Teorema 5.6 y del Teorema 6.3.

Así, si $\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha} < |c_0|^{1+\beta/\alpha}$, donde $\varrho = p^{p+1-(\lambda-\beta)/\alpha}(p+1)^{(\lambda-\beta)/\alpha-p}$ y $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$, entonces de la prueba del Teorema 5.6 se sigue que

$$\begin{aligned}
g_+ &= e_\lambda + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda},\\
g_- &= 1 + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_+ &= -c_0 + c_1\, e_\beta + c_0 \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} n_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_- &= -c_0 \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} n_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil} e_{j\beta+\lambda-\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil\alpha},
\end{aligned} \tag{6.52}$$

donde los coeficientes $n_{j,k}$ están definidos en el Lema 5.1, y

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= 1 + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\widetilde{g}_- &= e_{-\lambda} + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda},\\
\widetilde{\varphi}_+ &= c_0 \sum\nolimits_{j=2}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta-\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda},\\
\widetilde{\varphi}_- &= c_0 - c_{-1}\, e_{-\alpha} - c_0 \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} m_{j,\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1} e_{j\beta-\left(\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1\right)\alpha},
\end{aligned} \tag{6.53}$$

donde los coeficientes $m_{j,k}$ están dados por el Lema 5.2.

Análogamente, si $\varrho\,|c_1|\,|c_{-1}|^{\beta/\alpha} > |c_0|^{1+\beta/\alpha}$, entonces deducimos de la prueba del Teorema 6.3 que

$$\begin{aligned}
g_+ &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda},\\
g_- &= \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_+ &= c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} n_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\varphi_- &= -c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} n_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil} e_{j\beta+\lambda-\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil\alpha},
\end{aligned} \tag{6.54}$$

donde los coeficientes $n_{j,k}$ están dados por el Lema 6.1, y

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_+ &= e_\lambda + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha+\lambda},\\
\widetilde{g}_- &= 1 + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\widetilde{\varphi}_+ &= -c_0 + c_1 e_\beta + c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha},\\
\widetilde{\varphi}_- &= -c_0 \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1} m_{j,\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1} e_{j\beta+\lambda-\left(\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor+1\right)\alpha}
\end{aligned} \tag{6.55}$$

donde los coeficientes $m_{j,k}$ están dados por el Lema 6.2.

El Teorema 5.6 implica lo siguiente.

Teorema 6.4. *Sea G dada por* (4.1) y (5.1) *donde $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda$, el número α/β es irracional, y c_0, $c_{\pm 1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces G admite una factorización canónica izquierda APW $G = G_+ G_-^{-1}$ si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} < |c_0|^{\alpha+\beta}. \tag{6.56}$$

La función matricial $G_\pm, G_\pm^{-1} \in APW^{\pm}_{2\times 2}$ está dada por

$$G_\pm = \begin{bmatrix} g_\pm & \widetilde{g}_\pm \\ \varphi_\pm & \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix}, \quad G_\pm^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_\pm & -\widetilde{g}_\pm \\ -\varphi_\pm & g_\pm \end{bmatrix} c_0^{-1}, \tag{6.57}$$

y sus entradas están definidas por (6.52) *y* (6.53) *con coeficientes $n_{j,k}$ y $m_{j,k}$ dados por el Lema* 5.1 *y* 5.2.

Finalmente, el Teorema 6.3 implica lo siguiente.

Teorema 6.5. *Sea G dada por* (4.1) *y* (5.1) *donde $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda = 2\beta + 2\alpha$, el número α/β es irracional, y c_0, $c_{\pm 1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces G admite una factorización canónica izquierda APW $G = G_+ G_-^{-1}$ si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} < |c_0|^{\alpha+\beta}, \tag{6.58}$$

o bien

$$p^{-(p+1)\alpha+\lambda-\beta}(p+1)^{-\lambda+\beta+p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} > |c_0|^{\alpha+\beta}, \tag{6.59}$$

donde $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$. Las funciones matriciales $G_\pm, G_\pm^{-1} \in APW^{\pm}_{2\times 2}$ están dadas por

$$G_\pm = \begin{bmatrix} g_\pm & \widetilde{g}_\pm \\ \varphi_\pm & \widetilde{\varphi}_\pm \end{bmatrix}, \quad G_\pm^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}_\pm & -\widetilde{g}_\pm \\ -\varphi_\pm & g_\pm \end{bmatrix} c_0^{-1}, \tag{6.60}$$

y sus entradas están definidas por (6.52) *y* (6.53) *con coeficientes $n_{j,k}$ y $m_{j,k}$ dados por los Lemas* 5.1 *y* 5.2 *si* (6.58) *se satisface; y por* (6.54) *y* (6.55) *con coeficientes $n_{j,k}$ y $m_{j,k}$ definidos por los Lemas* 6.1 *y* 6.2 *si se cumple* (6.59).

Del teorema anterior podemos extraer el siguiente resultado, el cual nos será útil más adelante para calcular una fórmula de índice.

Corolario 6.6. *Sea G dada por* (4.1) *y* (5.1) *donde $0 < \alpha < \beta < 2\beta + \alpha < \lambda = 2\beta + 2\alpha$, el número α/β es irracional, y c_0, $c_{\pm 1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $p = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta}{\alpha} \right\rfloor$. Si*

$$p^{(p+1)\alpha-\lambda+\beta}(p+1)^{\lambda-\beta-p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} < |c_0|^{\alpha+\beta}. \tag{6.61}$$

Entonces la matriz $\mathbf{d}(G)$ está dada por

$$\mathbf{d}(G) = \begin{bmatrix} 0 & c_0^{-1} \\ -c_0 & m_{1,-2} c_1^2 c_{-1}^{-2} \end{bmatrix}, \tag{6.62}$$

donde $m_{1,-2}$ *está dado por el Lema* 5.2.

Por otro lado, si

$$p^{-(p+1)\alpha+\lambda-\beta}(p+1)^{-\lambda+\beta+p\alpha}\,|c_1|^{\alpha}\,|c_{-1}|^{\beta} > |c_0|^{\alpha+\beta}. \tag{6.63}$$

Entonces la matriz $\mathbf{d}(G)$ *está dada por*

$$\mathbf{d}(G) = \begin{bmatrix} m_{-2,2}c_1^{-4}c_{-1}^{4} & 0 \\ (-c_0 + c_0 m_{-1,0})(n_{-2,1}c_1^{-2}c_{-1}^{2}) & -n_{-1,0} \end{bmatrix}, \tag{6.64}$$

donde los coeficientes $n_{j,k}$ *y* $m_{j,k}$ *están definidos por los Lemas* 6.1 *y* 6.2.

Demostración. Supongamos (6.61) es valida. Entonces del Teorema 6.5, la función matricial G admite una factorización canónica APW izquierda $G = G_+G_-^{-1}$, donde las funciones matriciales $G_{\pm}$, $G_{\pm}^{-1}$ están dadas por (6.60), las entradas de estas matrices por (6.52) y (6.53) con coeficientes de las dados por los Lemas 5.1 y 5.2.

De esta forma, tenemos que

$$\mathbf{d}(G) = M(G_+)M(G_-^{-1}) = \begin{bmatrix} M(g_+) & M(\widetilde{g}_+) \\ M(\varphi_+) & M(\widetilde{\varphi}_+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(\widetilde{\varphi}_-) & -M(\widetilde{g}_-) \\ -M(\varphi_-) & M(g_-) \end{bmatrix} c_0^{-1}. \tag{6.65}$$

De la Proposición 2.1 se sigue que al calcular el valor medio de una función en AP solo sobreviven aquellos coeficientes que acompañan a los términos con exponentes igual a cero. Entonces, si conocemos los términos constantes de las funciones $g_{\pm}$, $\widetilde{g}_{\pm}$, $\varphi_{\pm}$ y $\widetilde{\varphi}_{\pm}$, podremos calcular $\mathbf{d}(G)$.

Para este caso

$$g_+ = e_{\lambda} + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{j}\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{k} e_{j\beta-k\alpha+\lambda}$$

y los exponentes de la función son $\{2\alpha+2\beta, (j+2)\beta-(k-2)\alpha\}$ donde

$$j = 0, 1, \ldots \text{ y } k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{(j+2)\beta+2\alpha}{\alpha} \right\rceil - 1,$$

como $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, g_+ no tiene términos constantes, por lo que $M(g_+) = 0$.

Tenemos que

$$g_- = 1 + \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor+1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil-1} n_{j,k}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{j}\left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{k} e_{j\beta-k\alpha}$$

los exponentes son $\{0, j\beta-k\alpha\}$ donde

$$j = 0, 1, \ldots \text{ y } k = \left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1, \ldots, \left\lceil \frac{(j+2)\beta+2\alpha}{\alpha} \right\rceil - 1,$$

notemos que $j\beta - k\alpha \neq 0$, entonces $M(g_-) = 1$.

Como

$$\varphi_+ = -c_0 + c_1\, e_\beta + c_0 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor} n_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}$$

los exponentes son $\{0, \beta, j\beta - k\alpha\}$ con

$$j = 1, 2, \ldots \text{ y } k = \left\lfloor\frac{(j-1)\beta}{\alpha}\right\rfloor + 1, \ldots, \left\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\right\rfloor$$

nuevamente $j\beta - k\alpha \neq 0$, entonces $M(\varphi_+) = -c_0$.

Para

$$\varphi_- = -c_0 \sum_{j=0}^{\infty} n_{j,\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rceil-1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rceil} e_{j\beta+\lambda-\lceil\frac{j\beta+\lambda}{\alpha}\rceil\alpha}$$

los exponentes son $\left\{(j+2)\beta - \left(\left\lceil\frac{(j+2)\beta+2\alpha}{\alpha}\right\rceil - 2\right)\alpha\right\}$ donde $j = 0, 1, \ldots$. Entonces φ_- no tiene términos constantes y $M(\varphi_-) = 0$.

Tenemos que

$$\widetilde{g}_+ = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha}$$

cuyos exponentes son $\{0, j\beta - k\alpha\}$ donde $j = 1, 2, \ldots$ y $k = \lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor + 1, \ldots, \lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor$, por lo que 1 es el único termino constante de $\widetilde{g}_+$ y $M(\widetilde{g}_+) = 1$.

Para

$$\widetilde{g}_- = e_{-\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda}$$

los exponentes son $\{-\lambda, (j-2)\beta - (k+2)\alpha\}$ donde $j = 1, 2, \ldots$, por lo que $\widetilde{g}_-$ no tiene términos constantes y $M(\widetilde{g}_-) = 0$.

Tenemos además que

$$\widetilde{\varphi}_+ = c_0 \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=\lfloor\frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta-k\alpha-\lambda}$$

que tiene exponentes $\{(j-2)\beta - (k+2)\alpha\}$ con $j = 1, 2, \ldots$ y $k = \left\lfloor\frac{(j-1)\beta-\lambda}{\alpha}\right\rfloor + 1, \ldots, \lfloor\frac{j\beta-\lambda}{\alpha}\rfloor$. Entonces el termino constante es cuando $j = 2$ y $k = -2$, es decir, $M(\widetilde{\varphi}_+) = c_0 m_{1,-2} c_1^2 c_{-1}^{-2}$

Para

$$\widetilde{\varphi}_- = c_0 - c_{-1}\, e_{-\alpha} - c_0 \sum_{j=1}^{\infty} m_{j,\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1} e_{j\beta-(\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor+1)\alpha}$$

los exponentes son $\left\{0, -\alpha, j\beta - \left(\lfloor\frac{j\beta}{\alpha}\rfloor + 1\right)\alpha\right\}$ con $j = 1, 2, \ldots$. Por tanto $\widetilde{\varphi}_-$ solo tiene un termino constante y $M(\widetilde{\varphi}_-) = c_0$.

Luego

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(G) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & c_0 m_{1,-2} c_1^2 c_{-1}^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} c_0^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c_0^{-1} \\ -c_0 & m_{1,-2} c_1^2 c_{-1}^{-2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por otro lado, si se cumple (6.63). Entonces nuevamente del Teorema 6.5, la función matricial G admite una factorización canónica APW izquierda $G = G_+ G_-^{-1}$, donde las funciones matriciales $G_\pm,\ G_\pm^{-1}$ están dadas por (6.60), las entradas de estas matrices por (6.54) y (6.55) con coeficientes de las dados por los Lemas 6.1 y 6.2.

En este caso tenemos:

$$g_+ = \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha + \lambda},$$

que tiene exponentes $\{(j+2)\beta - (k-2)\alpha\}$, los cuales no se anulan para los rangos de j y k, por lo que $M(g_+) = 0$.

De manera similar, para

$$g_- = \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} n_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha},$$

los exponentes son $\{j\beta - k\alpha\}$ y no se anulan para los rangos de j y k, así $M(g_-) = 0$.

La función

$$\varphi_+ = c_0 \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} n_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha},$$

tiene termino constante cuando $k = j = 0$, de esta forma $M(\varphi_+) = c_0 n_{-1,0}$.

Por otra parte

$$\varphi_- = -c_0 \sum_{j=-\infty}^{-1} n_{j,\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil - 1} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil} e_{j\beta+\lambda - \left\lceil \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rceil \alpha}$$

tiene exponentes de la forma $\left\{(j+2)\beta - \left(\left\lceil \frac{(j+2)\beta+2\alpha}{\alpha} \right\rceil - 2\right)\alpha\right\}$, por lo que el termino constante se obtiene para $j = -2$, de donde $M(\varphi_-) = -c_0 n_{-2,1} c_1^{-2} c_{-1}^2$.

La función

$$\widetilde{g}_+ = e_\lambda + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha + \lambda}$$

tiene exponentes $\{\lambda, (j+2)\beta - (k-2)\alpha\}$ por lo que el termino constante es cuando $j = -2$ y $k = 2$, por lo que $M(\widetilde{g}_+) = m_{-2,2} c_1^{-2} c_{-1}^2$.

El termino constante de

$$\widetilde{g}_- = 1 + \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} m_{j,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha}$$

es el 1, por lo que $M(\widetilde{g}_-) = 1$.

Para

$$\widetilde{\varphi}_+ = -c_0 + c_1 e_\beta + c_0 \sum_{j=-\infty}^{0} \sum_{k=\left\lfloor \frac{(j-1)\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{j\beta}{\alpha} \right\rfloor} m_{j-1,k} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^k e_{j\beta - k\alpha}$$

tenemos que los exponentes son $\{0, \beta, j\beta - k\alpha\}$ y el termino constante se obtiene con $j = 0 = k$. Así $M(\widetilde{\varphi}_+) = -c_0 + c_0 m_{-1,0}$.

Por último, para

$$\widetilde{\varphi}_- = -c_0 \sum_{j=-\infty}^{-1} m_{j,\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^j \left(\frac{c_{-1}}{c_0}\right)^{\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1} e_{j\beta+\lambda - \left(\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor + 1\right)\alpha}$$

los exponentes son de la forma $\left\{(j+2)\beta - \left(\left\lfloor \frac{j\beta+\lambda}{\alpha} \right\rfloor - 1\right)\alpha\right\}$, los cuales no se anulan en el rango de j. Así, $M(\widetilde{\varphi}_-) = 0$.

Por tanto, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(G) &= \begin{bmatrix} 0 & m_{-2,2} c_1^{-2} c_{-1}^2 \\ c_0 n_{-1,0} & -c_0 + c_0 m_{-1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c_0 n_{-2,1} c_1^{-2} c_{-1}^2 & 0 \end{bmatrix} c_0^{-1}. \\
&= \begin{bmatrix} c_0 n_{-2,1} m_{-2,2} c_1^{-4} c_{-1}^4 & 0 \\ (-c_0 + c_0 m_{-1,0})(c_0 n_{-2,1} c_1^{-2} c_{-1}^2) & -c_0 n_{-1,0} \end{bmatrix} c_0^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} n_{-2,1} m_{-2,2} c_1^{-4} c_{-1}^4 & 0 \\ (-c_0 + c_0 m_{-1,0})(n_{-2,1} c_1^{-2} c_{-1}^2) & -n_{-1,0} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 7

Operadores de Wiener-Hopf con símbolos SAP sobre espacios L_p

En este capitulo se enuncia un criterio de Fredholm y una formula de índice para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales en $SAPW$, donde $SAPW$ denota el álgebra de todas las funciones semi casi periódicas cuyos representantes casi periódicos a_l y a_r están en APW.

7.1 Invertibilidad de los representantes casi periódicos y fórmula de índice

Recordemos que si tenemos una función $u \in C(\overline{\mathbb{R}})$ tal que $u(-\infty) = 0$ y $u(\infty) = 1$, podemos representar cada función matricial $a \in SAP_{N\times N}$ en la forma

$$a = (1-u)a_l + ua_r + a_0 \tag{7.1}$$

donde $a_0 \in [C_0(\dot{\mathbb{R}})]_{N\times N}$ y $a_l, a_r \in AP_{N\times N}$ están únicamente determinados. Además, las funciones a_l y a_r son llamadas *representaciones casi periódicas* de a en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente.

Lema 7.1. Si $K \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}))$ y $h_n \longrightarrow +\infty$, entonces $e_{h_n}Ke_{-h_n}I$ converge fuertemente a cero.

Lema 7.2. Si $a_1, \ldots, a_M \in APP_{N\times N}$ es una colección finita de polinomios matriciales casi periódicos, entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$h_n \longrightarrow +\infty \text{ y } \|(a_n)_{h_n} - a_m\|_\infty \longrightarrow 0$$

para cada $m \in \{1, \ldots, M\}$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 7.3. *Los mapeos*

$$\begin{aligned} \mu_r &: \chi_\pm I \mapsto \chi_\pm I,\ W^0(a) \mapsto W^0(a_r) \quad (a \in SAP_{N\times N}), \\ \mu_r &: \chi_\pm I \mapsto \chi_\pm I,\ W^0(a) \mapsto W^0(a_l) \quad (a \in SAP_{N\times N}), \end{aligned}$$

se pueden extender a C^*-álgebra homomorfismos de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{A}$ tales que

$$\|\mu_r(A)\| \leq \|A\|_{ess}, \quad \|\mu_l(A)\| \leq \|A\|_{ess}$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Corolario 7.4. *Si $A \in \mathcal{F}$ es Fredholm, entonces $\mu_r(A)$ y $\mu_r(A)$ son invertibles.*

Corolario 7.5. *Sea $a \in SAP_{N\times N}$. Si $W(a)$ es Fredholm, entonces $W(a_l)$ y $W(a_r)$ son invertibles.*

El siguiente teorema es un resultado que puede ser consultado en los Capítulos 9 y 10 de [7]. Este resultado es muy importante en la teoría de operadores de convolución pues reduce el estudio de la invertibilidad de los operadores de Wiener-Hopf con símbolo en $GAPW_{N\times N}$ a verificar si el símbolo del operador tiene una factorizacion APW. La demostración de este teorema puede ser consultada en la Sección 10.2 de [7].

Corolario 7.6. *Para $a \in GAPW_{N\times N}$ lo siguiente es equivalente:*

a) *$W(a)$ es Fredholm;*

b) *$W(a)$ es invertible;*

c) *a tiene una factorización canónica AP derecha;*

d) *a tiene una factorización canónica APW derecha.*

Sea $GSAP_{0,0}$ el conjunto de todas las funciones invertibles $a \in SAP$ tales que $k(a_l) = k(a_r) = 0$. (ver Definición 2.5). En esta sección estableceremos una Formula de índice para operadores Fredholm de Wiener-Hopf con símbolos en SAP.

Lema 7.7. Sea $A \subset (0,\infty)$ un conjunto no acotado y sea

$$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

una familia de intervalos tales que $x_\alpha > 0$ y $|I_\alpha| := y_\alpha - x_\alpha \to \infty$ cuando $a \to \infty$. Si $a \in GSAP_{0,0}$ y $\arg a$ es cualquier argumento continuo de a, entonces el limite

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{|I_\alpha|} \int_{I_\alpha} \big((\arg a)(x) - (\arg a)(-x)\big)dx \tag{7.2}$$

existe, es finito y es independiente de la elección particular de $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $\arg a$.

Definición 7.8. Para $a \in GASP_{0,0}$, denotamos el limite (7.2) por $\operatorname{ind} a$ y lo llamaremos *el índice de Cauchy* de a.

7.2 Multiplicadores de $\boldsymbol{AP}$ y $\boldsymbol{SAP}$

Una función $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ es llamada multiplicador de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ si la aplicación $f \mapsto F^{-1}aFf$ mapea $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ en si mismo y se puede extender a un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$ (Notar que $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ es denso en $L^p(\mathbb{R})$). Denotaremos por $W^0(a)$ a este mapeo y por M_p al conjunto de todos los multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$. Se puede probar que M_p es un álgebra de Banach bajo la siguiente norma

$$\|a\|_{M_p} := \left\|W^0(a)\right\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))}.$$

Se puede caracterizar el espacio M_p como sigue. Se dice que un operador $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ es invariante ante traslaciones si $U_h A U_h^{-1} = A$ para todo $h \in \mathbb{R}$, donde $(U_h f)(t) := f(t-h)$. El siguiente resultado es bien conocido.

Teorema 7.9 (Hörmander). *Un operador $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ es invariante bajo traslaciones si y solo si $A = W^0(a)$ con $a \in M_p$.*

Notemos también que $M_p = M_q$ $(1/p + 1/q = 1)$ y que si $a \in M_p$ entonces $a \in M_r$ para toda r entre p y q. Además, M_p está continuamente embebido en $M_2 = L^\infty(\mathbb{R})$ para todo $p \in (1,\infty)$. Más aún,

$$\|a\|_\infty \leq \|a\|_{M_p} = \|a\|_{M_q}. \tag{7.3}$$

Denotaremos por $C_p(\dot{\mathbb{R}})$ (respectivamente PC_p) a la cerradura del conjunto de todas las $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ (respectivamente PC) con variación total finita en M_p.

Dado que $W^0(e_\lambda)$ es el operador de traslación U_λ, los polinomios casi periódicos son elementos de M_p. Denotaremos por AP_p a la cerradura del conjunto de todos los polinomios casi periódicos en M_p. Además, denotaremos por AP_p^+ (respectivamente AP_p^-) la cerradura en M_p del conjunto de todos los polinomios casi periódicos $\sum_j a_j e_{\lambda_j}$ con $\lambda_j \geq 0$ (respectivamente $\lambda_j \leq 0$). Claramente,

$$APW \subset AP_p \subset AP, \quad APW^\pm \subset AP_p^\pm \subset AP^\pm.$$

El álgebra $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ está dada por

$$C_p(\overline{\mathbb{R}}) := \{a \in PC_p : a|_{\mathbb{R}} \text{ es continua.}\} \tag{7.4}$$

Definimos SAP_p como la subálgebra cerrada más pequeña de M_p que contiene a $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ y a AP_p. Sea $SAP_pW := SAP_p \cap SAPW$. Notemos que

$$SAP_pW \subset SAP_p \subset SAP.$$

7.3 Teoría de Fredholm y fórmula de índice de operadores de Wiener-Hopf

Proposición 7.10. *Cada función $a \in SAP_p$ puede ser representada de forma única de la forma*

$$a = (1-u)a_l + ua_r + a_0, \tag{7.5}$$

donde $a_l, a_r \in AP_p$, $a_0 \in C_p(\dot{\mathbb{R}})$, $a_0(\infty) = 0$. *Las aplicaciones* $a \mapsto a_l$ *y* $a \mapsto a_r$ *son homomorfismos de álgebras de Banach (continuos) de* SAP_p *sobre* AP_p.

Definición 7.11. Una matriz $a \in AP_p$ tiene una factorización AP_p derecha si esta tiene una representación de la forma $a = a_- \mathrm{diag}(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}) a_+$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ y $a_\pm \in G[AP_p^\pm]_{N\times N}$.

Sean $1 < p < \infty$ y q tal que $1/p + 1/q = 1$. Desde ahora enfocaremos nuestra atención a operadores de Wiener-Hopf sobre el espacio de Lebesgue $L^p_N(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 7.12. *Sea* $a \in [SAP_p]_{N\times N}$ *y suponga que* a_l *y* a_r *tienen una factorización* AP_p *derecha. Entonces* $W(a)$ *es un operador de Fredholm en* $L^p_N(\mathbb{R}_+)$ *si y solo si*

$$a \in GSAP_{N\times N}, \quad k(a_l) = k(a_r) = (0, 0, \ldots, 0) \tag{7.6}$$

y una de las siguientes dos condiciones equivalentes se satisfacen:

(i) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j\big(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)\big) \notin \mathbb{Z}$$

para todos los valores propios $\xi_j = \xi_j(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l))$ *de* $\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)$;

(ii) $$\mathrm{sp}\big(\big(\mathbf{d}^{-1}(a_r)\mathbf{d}(a_l)\big)\big) \cap \Sigma[1/q, 1/q] \neq \emptyset,$$

donde $\Sigma[1/q, 1/q]$ *es el rayo* $\big\{re^{2\pi i/q} : r \geq 0\big\}$. *Si* $W(a)$ *es un operador de Fredholm, entonces*

$$\mathrm{Ind}(W(a)) = -\mathrm{ind}(\det(a)) + \frac{N}{p} - \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\}. \tag{7.7}$$

7.4 Teoría de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales triangulares en $\boldsymbol{SAPW}$

Usando los resultados del Capítulo 6 y el Teorema 7.12 estamos en condiciones de establecer un criterio de Fredholm para operadores de Wiener-Hopf con símbolos matriciales triangulares en $SAPW$.

Sean $1 < p < \infty$, $a \in SAP_p$ y $\lambda \in (0, \infty)$. Consideremos el espacio $L^p(0, \lambda) = \chi_{(0,\lambda)} L^p(\mathbb{R}_+)$ y el operador finito de convolución $W_\lambda(a)$ introducido en la Definición 1.32. Supongamos que

$$a = (1 - u)a_l + ua_r + a_0,$$

con a_l, $a_r \in APW \subset AP_p$, $u(x) = \dfrac{1 + \tanh(x)}{2} \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$ y $a_0(x) \in C_p(\dot{\mathbb{R}})$ con $a_0(\infty) = 0$. Sean

$$a_l = c_{l,-1} e_{\alpha_l} - c_{l,0} + c_{l,1} e_{\beta_l}, \tag{7.8}$$

$$a_r = c_{r,-1} e_{\alpha_r} - c_{r,0} + c_{r,1} e_{\beta_r}, \tag{7.9}$$

donde

$$\begin{cases} c_{l,\pm 1},\ c_{l,0} \in \mathbb{C},\ c_{l,-1}c_{l,0}c_{l,1} \neq 0,\ \beta_l/\alpha_l \notin \mathbb{Q}, \\ 0 < \alpha_l < \beta_l < 2\beta_l + \alpha_l < \lambda_l = 2\beta_l + 2\alpha_l \end{cases} \tag{7.10}$$

y

$$\begin{cases} c_{r,\pm 1},\ c_{r,0} \in \mathbb{C},\ c_{r,-1}c_{r,0}c_{r,1} \neq 0,\ \beta_r/\alpha_r \notin \mathbb{Q}, \\ 0 < \alpha_r < \beta_r < 2\beta_r + \alpha_r < \lambda_r = 2\beta_r + 2\alpha_r. \end{cases} \tag{7.11}$$

Por el Lema 1.39, el operador $W_\lambda(a)$ es un operador de Fredholm en el espacio $L^p(0,\lambda)$ si y solo si, el operador de Wiener-Hopf $W(H_a)$ con

$$H_a := \begin{bmatrix} e_{-\lambda} & 0 \\ a & e_\lambda \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

es un operador de Fredholm en el espacio $L_2^p(\mathbb{R}_+)$.

Denotemos por

$$H_{a_l} := \begin{bmatrix} e_{-\lambda} & 0 \\ a_l & e_\lambda \end{bmatrix}, \quad H_{a_r} := \begin{bmatrix} e_{-\lambda} & 0 \\ a_r & e_\lambda \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

donde a_l y a_r son los representantes casi periódicos de a. Sea

$$G := \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ a & e_{-\lambda} \end{bmatrix} = J H_a^T J, \tag{7.14}$$

donde $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, y H_a^T es la matriz transpuesta de H_a definida en (7.12). Si las matrices H_{a_l} y H_{a_r} admiten factorizaciones canónicas AP_p derechas

$$H_{a_l} = H_{a_l}^- H_{a_l}^+, \quad H_{a_r} = H_{a_r}^- H_{a_r}^+, \tag{7.15}$$

de acuerdo con [7, Proposición 13.1], las funciones matriciales

$$G_{a_l} := \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ a_l & e_{-\lambda} \end{bmatrix}, \quad G_{a_r} := \begin{bmatrix} e_\lambda & 0 \\ a_r & e_{-\lambda} \end{bmatrix}, \tag{7.16}$$

admiten una factorización canónica AP_p izquierda, donde

$$H_{a_l}^+ = J(G_{a_l}^+)^T J, \quad H_{a_r}^+ = J(G_{a_r}^+)^T J$$
$$H_{a_l}^- = J[(G_{a_l}^-)^{-1}]^T J, \quad H_{a_r}^- = J[(G_{a_r}^-)^{-1}]^T J.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{d}(G_{a_l}) = M(G_{a_l}^+)M[(G_{a_l}^-)^{-1}], \quad \mathbf{d}(G_{a_r}) = M(G_{a_r}^+)M[(G_{a_r}^-)^{-1}],$$
$$\mathbf{d}(H_{a_l}) = M(H_{a_l}^-)M(H_{a_l}^+), \quad \mathbf{d}(H_{a_r}) = M(H_{a_r}^-)M(H_{a_r}^+).$$

Así

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(H_{a_l}) &= M\big(J[(G_{a_l}^-)^{-1}]^T J\big) M\big(J(G_{a_l}^+)^T J\big)\\ &= \big(J(M[(G_{a_l}^-)^{-1}]^T J\big)\,\big(JM[(G_{a_l}^+)^T]J\big)\\ &= J\left(M(G_{a_l}^+)M[(G_{a_l}^-)^{-1}]\right)^T J\\ &= J[\mathbf{d}(G_{a_l})]^T J.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\mathbf{d}(H_{a_r}) = J[\mathbf{d}(G_{a_r})]^T J.$$

Entonces podemos escribir el siguiente resultado del Teorema 7.12.

Teorema 7.13. *Sea $H_a \in [SAP_p]_{2\times 2}$ la función matricial definida por* (7.12), *supongamos que a_l y a_r están dadas por* (7.8) *y* (7.9), *y que satisfacen* (7.10) *y* (7.11), *respectivamente. Si*

$$p_l^{(p_l+1)\alpha_l-\lambda+\beta_l}(p_l+1)^{\lambda-\beta_l-p_l\alpha_l}\,|c_{l,1}|^{\alpha_l}\,|c_{l,-1}|^{\beta_l} < |c_{l,0}|^{\alpha_l+\beta_l}, \tag{7.17}$$

donde $p_l = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta_l}{\alpha_l}\right\rfloor$ y

$$p_r^{-(p_r+1)\alpha_r+\lambda-\beta_r}(p_r+1)^{-\lambda+\beta_r+p_r\alpha_r}\,|c_{r,1}|^{\alpha_r}\,|c_{r,-1}|^{\beta_r} > |c_{r,0}|^{\alpha_r+\beta_r}, \tag{7.18}$$

donde $p_r = \left\lfloor \frac{\lambda-\beta_r}{\alpha_r}\right\rfloor$. Entonces $W(H_a)$ es un operador de Fredholm en el espacio $L_2^p(\mathbb{R})$ si y solo si una de las siguientes dos condiciones equivalentes se satisfacen:

(i) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi}\arg\xi_j\big(\mathbf{d}^{-1}(H_{a_r})\mathbf{d}(H_{a_l})\big) \notin \mathbb{Z}$$

para todos los valores propios $\xi_j = \xi_j(\mathbf{d}^{-1}(H_{a_r})\mathbf{d}(H_{a_l})$ de $\mathbf{d}^{-1}(H_{a_r})\mathbf{d}(H_{a_l})$;

(ii) $$\mathrm{sp}(\mathbf{d}^{-1}(H_{a_r})\mathbf{d}(H_{a_l})) \cap \Sigma[1/q,1/q] \neq \emptyset,$$

donde $\Sigma[1/q,1/q]$ es el rayo $\left\{re^{2\pi i/q} : r \geq 0\right\}$. Si $W(H_a)$ es un operador de Fredholm, entonces

$$\mathrm{Ind}(W(a)) = \frac{2}{p} - \sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{2\pi}\arg\xi_j\right\}. \tag{7.19}$$

Bibliografía

[1] I. Gohberg, I. A. Feldman: *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solutions*. Amer. Math, Soc., Providence, R. I. 1974.

[2] I. Gohberg, M. G. Krein: *Systems of integral equations on a half line with kernel depending on the difference of arguments.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) **14** (1960), 217–286.

[3] *M. P. Ganin: On a Fredholm integral equation whose kernel depends on the difference of the arguments.* Izv. Vys. Uchebn. Zaved. Matematika **2/1963** (1963), 31–43 [Ruso].

[4] V. Yu. Novokshenov: *Equations in convolutions on a finite interval and factorization of elliptic matrices.* Math. Notes **27** (1980), 449–455.

[5] Yu. I. Karlovich: *On the Haseman problem.* Demonstratio Mathematica **26** (1993), No. 3–4, 581–595.

[6] Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: *Factorization of almost periodic matrix-valued functions and the Noether theory for certain classes of equations of convolution type.* Math. USSR Izvestiya **34** (1990), No. 2, 281–316.

[7] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Vol. 131 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel and Boston, 2002.

[8] Yu. I. Karlovich, J. Loreto-Hernández and I. M. Spitkovsky: *Factorization of some triangular matrix functions and its applications.* Operators and Matrices (2014).

[9] A. Aktosum, M. Klaus, and C. van der Mee: *Inverse wave scattering with discontinous wavespeed.* J. Math. Phys **36** (1995), 2880–2928.

[10] Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, *Factorization of almost periodic matrix functions*, J. Math. Anal. Appl. 193 (1995) 209–232.

[11] M. A. Bastos, Yu. I. Karlovich, A. F. dos Santos, P. M. Tishin, *The corona theorem and the canonical factorization of triangular AP-matrix functions – Effective criteria and explicit formulas*, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998) 523–550.

[12] M. C. Câmara, A. F. dos Santos, M. C. Martins, *A new approach to factorization of a class of almost-periodic triangular symbols and related Riemann-Hilbert problems*, J. Funct. Anal. 235 (2) (2006) 559–592.

[13] Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, *Almost periodic polynomial factorization of some triangular matrix functions*, in: J. A. Ball, V. Bolotnikov, J. W. Helton, L. Rodman, I. M. Spitkovsky (Eds.), Recent Advances and New Directions in Applied and Pure Operator Theory (Williamsburg, 2008), Vol. 202 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, Basel, 2009, pp. 337–354.

[14] M. C. Câmara, Yu. I. Karlovich, I. Spitkovsky, *Constructive almost periodic factorization of some triangular matrix functions*, J. Math. Anal. Appl. 367 (2010) 416–433.

[15] Yu. I. Karlovich, J. Loreto-Hernández, *Convolution type operators with oscillating symbols on weighted Lebesgue spaces on a union of intervals*, MATHEMATICA, Tome 54 (77), N° Special Number, 2012, pp. 104–119.

[16] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Y. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Vol. 245 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, New York, 1982, translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ.

[17] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974, Pure and Applied Mathematics.