



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DOMINACIÓN TOTAL Y HOMOLOGÍA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Andrés Carnero Bravo

DIRECTOR
Dra. Adriana Hansberg Pastor,
Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

MARZO 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	3
Agradecimientos	5
Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Módulos	10
1.2. Gráficas	18
1.3. Topología	22
1.3.1. Construcción de espacios topológicos	23
1.3.2. Homotopía	25
2. Complejos simpliciales y grupos de homología	29
2.1. Complejos simpliciales	29
2.2. Homología simplicial	31
2.2.1. Homología relativa	46
2.2.2. Homología de una gráfica	48
2.2.3. Homotopía de cadenas	51
2.3. Complejos geométricos	53
2.4. Homología singular	56
3. Dominación total y homología	59
3.1. El complejo de independencia	59
3.2. Dominación total y grupos de homología del complejo de independencia de una gráfica	66

3.3. Mejora de la cota para dos casos	67
3.4. Gráficas qK_2 -libres	75
3.4.1. Gráficas $2K_2$ -libres críticas	76
3.4.2. Gráficas qK_2 -libres críticas	81
4. Conclusiones	87
Bibliografía	89

Agradecimientos

Primero que a nadie, quiero agradecer a mi familia, mis padres y mi hermano, que siempre me han apoyado.

A todos lo sinodales por sus observaciones y correcciones, así como por aceptar revisar este trabajo. En particular a el Dr.Javier Bracho y el Dr.Omar Antolín, quienes dispusieron de su tiempo para revisar y discutir los resultados de esta tesis mucho antes de que estuviera terminada.

A mi tutora, la Dra. Adriana Hansberg, por todo el apoyo que me ha brindado durante los 5 años en los que he sido su alumno. Su apoyo ha sido fundamental tanto para esta tesis así como para mi desenvolvimiento académico.

En especial quiero agradecer al Dr.Luis Montejano, quien por cuestiones burocráticas no aparece como co-tutor. Su apoyo y las discusiones sostenidas con él fueron un pilar fundamental para esta tesis. Sin sus aportaciones, esta tesis no sería posible.

Quiero agradecer el apoyo brindado por los Proyectos IA103217 e IN111819 del Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT, así como el apoyo del Proyecto Conacyt CIENCIA BÁSICA-UNAM CB-2013-01 219775.

Introducción

En 1978, Lovász ([21]) demostró la conjetura de Kneser mediante herramientas topológicas. Esta conjetura habla del número cromático de las gráficas de Kneser, las cuales están dadas de la siguiente manera: dado un conjunto de n elementos, la gráfica de Kneser $KG_{n,k}$ tiene como conjunto de vértices los subconjuntos de k elementos y dos vértices son adyacentes si los conjuntos son disjuntos. Un ejemplo de esto es la gráfica de Petersen, que es isomorfa a $KG_{5,2}$. Kneser conjeturó en 1955 ([18]) que el número cromático de $KG_{n,k}$ es $n - 2k + 2$, y esto fue probado hasta 1978 por Lovász. Para esto, Lovász definió un complejo simplicial, llamado el complejo de vecinos, y usando la conectividad topológica de este complejo dió una cota inferior para el número cromático de una gráfica. A partir de ese momento se podría decir que nació la combinatoria topológica, es decir, el área en matemáticas que hace uso de la topología para la resolución de problemas en combinatoria. En este contexto, la idea en muchos casos es, dada una gráfica, asociarle un espacio topológico y, de las propiedades de éste, obtener información de la gráfica. Un ejemplo de esto es el complejo de independencia, que es un complejo simplicial con el mismo conjunto de vértices de la gráfica y donde los simplejos son los conjuntos independientes. Este complejo ha sido muy estudiado [1, 3, 8, 10, 11, 12, 16, 17, 19]. Por poner un ejemplo, Babson y Kozlov [2] utilizaron el tipo de homotopía del complejo de independencia de los ciclos en su demostración de una conjetura de Lovász, la cuál da una cota inferior para el número cromático de una gráfica. Esta cota está dada por la conectividad topológica de un complejo simplicial, el complejo de homomorfismos entre un ciclo y la gráfica.

En esta tesis, se hace uso de los grupos de homología para acotar la dominación total de una gráfica, es decir, la cardinalidad mínima de un conjunto de vértices tal que todos los vértices de la gráfica tienen un vecino en el conjunto. El punto de partida es un artículo de Meshulam [23], en donde se da una cota para el número de dominación total en términos de los grupos de homología reducida del complejo de independencia. La idea es, dada una

gráfica, se toma su complejo de independencia y, si, para alguna q , el q -ésimo grupo de homología reducida no es nulo, se puede dar una cota superior a la dominación total en términos de q . La cota dada en [23] es $2q + 2$, y es igual al número de vértices de un apareamiento con $q + 1$ aristas, que es la única gráfica con ese número de vértices y tal que su complejo de independencia tiene q -ésimo grupo de homología no nulo; hay que mencionar que cualquier gráfica con complejo de independencia con el q -ésimo grupo de homología no nulo tiene que tener por lo menos $2q + 2$ vértices. En esta tesis se da una mejora a esta cota para los casos $q = 1, 2$, tomando, como hipótesis adicional, que el número mínimo de vértices en el soporte de cualquier ciclo no nulo del grupo de homología tenga más de $2q + 2$ vértices.

En el primer capítulo, se da una revisión a los conocimientos de gráficas, módulos y topología necesarios para esta tesis. En el segundo capítulo, se definen los complejos simpliciales y los grupos de homología.

En la primera sección del tercer capítulo se define formalmente el complejo de independencia y se dan algunas de sus propiedades. Uno de los resultados originales de esta tesis está en esta sección, el Lema 3.3.2, que caracteriza las gráficas con $2q + 3$ vértices con el q -ésimo grupo de homología relativa no nulo y tal que todos los vértices están en el soporte de cualquier ciclo no nulo. En la segunda sección, se enuncia y se demuestra la cota de Meshulam. En la tercera sección, se da la mejora para la cota: el Teorema 3.3.3, uno de los resultados originales de esta tesis, y se enuncian dos conjeturas que generalizan este teorema. En la última sección, se define una nueva familia de gráficas, las gráficas qK_2 -libres críticas, para las cuales se dan algunas de sus propiedades, y se enuncia una conjetura sobre la dominación total de estas, la cual, de ser cierta, serviría para probar un resultado del tipo de los de las dos secciones anteriores, una cota de la dominación total de las gráficas $(q - 1)K_2$ -libres con complejo de independencia con q -ésimo grupo de homología no nulo. Esto se muestra en el Teorema 3.4.20.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones que se usarán a lo largo de la tesis. A continuación daremos notación y algunas convenciones que se utilizarán a lo largo de la tesis

- Denotaremos a los enteros no negativos por \mathbb{Z}^+ .
- Para $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$.
- Dado un conjunto X y $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{P}_k(X)$ es el conjunto de todo los subconjuntos de X de cardinalidad k .
- Cuando se considere un anillo A , siempre se considerará que tiene unidad 1_A .
- Dado un conjunto X , 1_X es la función identidad.

En la primera sección daremos los preliminares básicos de algebra necesarios para esta tesis, empezando con la definición de módulo, así como las propiedades básicas necesarias para definir los grupos de homología. Luego se dará la definición del producto tensorial de módulos, necesaria para la fórmula de la homología del join.

En la segunda sección daremos las definiciones y resultados de teoría de gráficas que se utilizarán en la tesis.

En la última sección enunciaremos las definiciones y resultados básicos de topología necesarios para esta tesis.

1.1. Módulos

Dado un anillo A , un A -módulo izquierdo es una pareja (M, \cdot) donde M es un grupo abeliano (su operación la denotaremos con $+$ y a su elemento neutro con 0) y con una operación $\cdot : A \times M \rightarrow M$ tal que para cualesquiera $u, v \in M$ y $a, b \in A$:

1. $\cdot(a, u + v) = \cdot(a, u) + \cdot(a, v)$
2. $\cdot(1_A, u) = u$
3. $\cdot(ab, u) = \cdot(a, \cdot(b, u))$
4. $\cdot(a +_A b, u) = \cdot(a, u) + \cdot(b, u)$

En adelante denotaremos $au = \cdot(a, u)$ y $(a + b)u = \cdot(a +_A b, u)$. A los elementos de A se les llamara *escalares* y a la operación au se le llamara *producto por un escalar*.

Dado M un módulo izquierdo, y $N \subset M$, diremos que N es un *submódulo* de M si:

1. N es subgrupo de M
2. N es un módulo izquierdo con la restricción $\cdot|_N : A \times N \rightarrow N$

De ahora en adelante cuando hablemos de un módulo nos estaremos refiriendo a un módulo izquierdo y omitiremos la referencia al anillo considerando que todos los módulos de los que hablemos como A -módulos para un anillo.

Sean M, N módulos, un *homomorfismo* de módulos es un función $\phi : M \rightarrow N$ tal que

1. $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$ para cualesquiera $u, v \in M$
2. $\phi(au) = a\phi(u)$ para cualesquiera $u \in M$ y $a \in A$

Dado un homomorfismo $f : M \rightarrow N$, definimos el kernel de f como $\ker(f) = f^{-1}(0)$ y la *imagen* de f como $\text{im}(f) = f(M)$. En analogía con los espacios vectoriales se tiene el siguiente lema.

Lema 1.1.1. (Véase [4]) Sean M, N módulos y $f : M \rightarrow N$ un homomorfismo, entonces $\ker(f)$ es submódulo de M e $\text{im}(f)$ es submódulo de N .

Dado M un módulo y N un submódulo, definimos el *módulo cociente* como la partición de M mediante la siguiente relación de equivalencia: $u \sim v$ si $u - v \in N$. Denotaremos a este conjunto como M/N , a la clase de equivalencia de v como $[v]$ y definiremos las siguientes operaciones para $u, v \in M$ y $a \in A$

- $[u] + [v] = [u + v]$
- $a[u] = [au]$

Lema 1.1.2. (Véase [4]) M/N junto con las operaciones anteriores es un A -módulo.

Demostración. Para ver que M/N es un módulo solo hace falta ver que las operaciones definidas arriba no dependen del representante, pues las propiedades del producto por escalares se heredaran del producto escalares en M . Sean $u, u', v, v' \in M$ tales que $[u] = [u']$ y $[v] = [v']$. Entonces

$$u - u', v - v' \in N$$

y

$$u + v - (u' + v') = (u - u') + (v - v') \in N$$

pues M es grupo abeliano y N es subgrupo. Sea $a \in A$, entonces

$$au - au' = a(u - u') \in N$$

pues N es submódulo de M . Por lo tanto las operaciones están bien definidas y M/N es un A -módulo. \square

De esta forma, dado M un módulo y N un submódulo, la función $q : M \rightarrow M/N$ dada por $q(u) = [u]$ es un homomorfismo. Más adelante será de interés que ciertos homomorfismos pasen al cociente, el siguiente lema da condiciones para que esto suceda.

Teorema 1.1.3. (Véase [4]) Sean M_1, M_2 módulos, N_1, N_2 submódulos de M_1 y M_2 respectivamente y sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ un homomorfismo tal que $f(N_1) \subset N_2$. Entonces f pasa al cociente, es decir existe $\bar{f} : M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ q_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\ M_1/N_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2/N_2 \end{array}$$

Demostración. Definimos $\bar{f}[m] = [f(m)]$ \square

Sea $\{M_i\}$ colección de módulos y $\{f_i\}$ una colección de homomorfismos tales que $f_{i+1} :$

$M_{i+1} \longrightarrow M_i$, se dice que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si $\text{im}(f_{i+1}) \subset \text{ker}(f_i)$.

Para M_1, M_2, \dots, M_k módulos, definimos su *suma directa externa* como el módulo $\bigoplus_{i=1}^k M_i = \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_i \in M_i \forall 1 \leq i \leq k\}$ con las operaciones definidas coordenada a coordenada. Para cada i tenemos el homomorfismo inclusión

$$j_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k M_i$$

dado por $j_i(m) = (0, \dots, m, \dots, 0)$, es decir m en la i -ésima entrada y 0 en las demás.

Dos módulos M y N son isomorfos si existe un homomorfismo biyectivo entre ellos, esto se denotará $M \cong N$.

Proposición 1.1.4. (Véase [4]) *La suma directa externa y sus inclusiones están caracterizadas por la siguiente propiedad universal: Si se tienen $f_i : M_i \longrightarrow N$ homomorfismos de módulos, entonces existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{i=1}^k M_i \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k M_i & \xrightarrow{f} & N \\ j_i \uparrow & \nearrow f_i & \\ M_i & & \end{array}$$

Demostración. Sean $f_i : M_i \longrightarrow N$ homomorfismos. Definimos

$$f(m_1, \dots, m_k) = \sum_{i=1}^k f_i(m_i)$$

Entonces $f \circ j_i(m_i) = f(0, \dots, m_i, \dots, 0) = f_i(m_i)$. Como

$$(m_1, m_2, \dots, m_k) = (m_1, 0, \dots, 0) + (0, m_2, 0, \dots) + \cdots + (0, \dots, 0, m_k)$$

para cualquier otro homomorfismo g que haga conmutar el diagrama, como $g \circ j_i = f_i =$

$f \circ j_i =$, se tiene que $g = f$.

Ahora sea M y $q_i : M_i \rightarrow M$ tales que para toda familia de homomorfismos

$$f_i : M_i \rightarrow N$$

existe un único homomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que $f \circ q_i = f_i$. Como ambos módulos cumplen la propiedad universal, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{i=1}^k M_i & \xrightarrow{q} & M & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{i=1}^k M_i \\
 \uparrow j_i & & \nearrow q_i & \nearrow j_i & \\
 M_i & & & &
 \end{array}$$

De este diagrama se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{i=1}^k M_i & \xrightarrow{f \circ q} & \bigoplus_{i=1}^k M_i \\
 \uparrow j_i & & \nearrow j_i \\
 M_i & &
 \end{array}$$

por la unicidad del homomorfismo se tiene que $f \circ q = 1_{\bigoplus_{i=1}^k M_i}$. De forma análoga se puede ver que $q \circ f = 1_M$. Por lo tanto f es un isomorfismo. \square

Corolario 1.1.5. (Véase [4]) Sean M_1, \dots, M_k y N_1, \dots, N_k módulos tales que existen $f_i : M_i \rightarrow N_i$ isomorfismos. Entonces

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i \cong \bigoplus_{i=1}^k N_i$$

Demostración. Como f_i es un isomorfismo para toda i , utilizando la propiedad universal y

el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{i=1}^k M_i & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{i=1}^k N_i & \xrightarrow{f^{-1}} & \bigoplus_{i=1}^k M_i \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i & \xrightarrow{f_i^{-1}} & M_i
 \end{array}$$

se tiene que $f^{-1} \circ f = I_{\bigoplus_{i=1}^k M_i}$ □

Corolario 1.1.6. Sean M_1, \dots, M_k módulos, entonces

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i \right) \oplus M_k \cong \bigoplus_{i=1}^k M_i$$

Lema 1.1.7. (Véase [4]) Sean M_1, M_2, \dots, M_k módulos y N_1, N_2, \dots, N_k submódulos, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i / \bigoplus_{i=1}^k N_i \cong \bigoplus_{i=1}^k M_i / N_i$$

Demostración. Para $1 \leq i \leq k$, definimos

$$\begin{aligned}
 q_i : M_i / N_i &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k M_i / \bigoplus_{i=1}^k N_i \\
 [m_i] &\longmapsto [(0, \dots, m_i, \dots, 0)]
 \end{aligned}$$

Sean $m, n \in M_i$ tales que $[m] = [n]$, entonces $m - n \in N_i$ y

$$(0, \dots, m, \dots, 0) - (0, \dots, n, \dots, 0) \in \bigoplus_{i=1}^k N_i$$

por lo tanto $[(0, \dots, m, \dots, 0)] = [(0, \dots, n, \dots, 0)]$, lo que implica que q_i está bien definida.

Ahora sean $f_i : M_i / N_i \longrightarrow N$ homomorfismos, definimos

$$f[(m_1, \dots, m_k)] = \sum_{i=1}^k f_i([m_i])$$

que está bien definida pues si $(m_1, \dots, m_k) - (m'_1, \dots, m'_k)$ está en $\bigoplus_{i=1}^k M_i/N_i$, entonces $m_i - m'_i$ está en N_i . Claramente $f \circ q_i = f_i$. Como

$$[(m_1, m_2, \dots, m_k)] = [(m_1, 0, \dots, 0)] + [(0, m_2, 0, \dots)] + \dots + [(0, \dots, 0, m_k)]$$

se tiene que f es única. Por la propiedad universal de la suma directa externa, se tiene que

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i / \bigoplus_{i=1}^k N_i \cong \bigoplus_{i=1}^k M_i / N_i$$

□

Dado un módulo y un subconjunto S , el *submódulo generado* por S es el conjunto

$$\langle S \rangle = \left\{ m \in M : \sum_{i=1}^k a_i m_i \text{ con } a_1, \dots, a_k \in A \text{ y } m_1, \dots, m_k \in S \right\}$$

Diremos que S es un conjunto generador si $\langle S \rangle = M$.

Ahora daremos la construcción de un módulo que se utilizará para la definición de los grupos de homología. Sea S un conjunto y A un anillo. Definiremos el *módulo libre generado por S* como

$$A \langle S \rangle = \{ \gamma : S \rightarrow A : \gamma \neq 0 \text{ para un número finito de elementos de } S \}$$

donde para $\gamma, \varphi \in A \langle S \rangle$ y $a \in A$

$$(\gamma + \varphi)(s) = \gamma(s) + \varphi(s) \quad s \in S$$

$$(a\gamma)(s) = a\gamma(s) \quad s \in S$$

Para todo $s \in S$ se puede definir la *función característica de s*

$$s(s') = \begin{cases} 1_A & \text{si } s' = s \\ 0 & \text{si } s' \neq s \end{cases}$$

De esta forma, para toda $\gamma \in A\langle S \rangle$

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^k r_i s_i(s)$$

donde $\{s_1, \dots, s_k\} = S - \gamma^{-1}(0)$ y $r_i = \gamma(s_i)$. En general podemos tomar $r_s = \gamma(s)$ para toda $s \in S$ y escribir

$$\gamma = \sum_{s \in S} r_s s$$

donde $r_s = 0$ para casi todo $s \in S$. De esta forma podemos pensar a $A\langle S \rangle$ como el conjunto de series formales con casi todos los coeficientes igual a cero. De hecho esta forma de escribir a los elementos de $A\langle S \rangle$ es única, pues si algún γ en $A\langle S \rangle$ se pudiera escribir como

$$\gamma = \sum_{s \in S} r_s s$$

y como

$$\gamma = \sum_{s \in S} r'_s s$$

se tendría que

$$\rho = \sum_{s \in S} (r_s - r'_s) s = 0$$

lo que implica que para todo s en S , $\rho(s) \equiv 0$, es decir

$$(r_s - r'_s)s(s) = (r_s - r'_s)1_A = (r_s - r'_s) = 0$$

Lema 1.1.8. *Sea S un conjunto, M un módulo y $f : S \rightarrow M$ una función de conjuntos. Entonces existe un único morfismo $\bar{f} : A\langle S \rangle \rightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & A\langle S \rangle \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & M \end{array}$$

donde $S \rightarrow A\langle S \rangle$ representa la asignación de la función característica a cada elemento de S .

Demostración. Por lo visto arriba, todo elemento γ de $A\langle S \rangle$ se puede escribir de forma

única como

$$\gamma = \sum_{s \in S} r_s s$$

entonces definimos

$$\bar{f}(\gamma) = \sum_{s \in S} r_s f(s)$$

que tiene sentido pues $r_s = 0$ para casi todo $s \in S$. Claramente, con esta definición, el diagrama conmuta.

Si existiera otra función g en $A\langle S \rangle$ que haga conmutar el diagrama, se tendría que para todo s en S ,

$$g(s) = f(s) = \bar{f}(s)$$

lo que implica que para toda γ en $A\langle S \rangle$ las funciones son iguales. \square

Dados M, N, L A -módulos, una función $f : M \times N \rightarrow L$ es *bilineal* si:

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ para todos $x_1, x_2 \in M$ y $y \in N$.
2. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$ para todos $x \in M$ y $y_1, y_2 \in N$.
3. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y)$ para todos $x \in M$, $y \in N$ y $\lambda \in L$.

Por último daremos la definición del producto tensorial de dos módulos, la cuál será necesaria para calcular la homología del join de dos complejos simpliciales. Dados dos A -módulos M, N , el *producto tensorial de M y N* es una pareja (T, f) donde T es un A -módulo y $f : M \times N \rightarrow T$ es una función bilineal tales que si $g : M \times N \rightarrow L$ es una función bilineal existe un único homomorfismo $h : T \rightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & L \end{array}$$

Si el producto tensorial existe, entonces es único. Supongase que (T, f) y (T', f') son productos tensoriales de M y N . Entonces, por la propiedad del producto tensorial, se tiene el

siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{f} & T \\
 & \searrow f' & \downarrow h \\
 & & T' \\
 & \searrow f & \downarrow h' \\
 & & T
 \end{array}$$

Entonces $h' \circ h$ es tal que

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{f} & T \\
 & \searrow f & \downarrow h' \circ h \\
 & & T
 \end{array}$$

conmuta, por la unicidad se tiene que $h' \circ h = 1_T$. De forma análoga se obtiene que $h \circ h' = 1_{T'}$.

Proposición 1.1.9. (Véase [20]) Sean M, N A -módulos, entonces el producto tensorial existe.

Dados M, N A -módulos, denotamos a su producto tensorial por $M \otimes N$.

Proposición 1.1.10. (Véase [20]) Sean M, N A -módulos, donde $N = \bigoplus_{i=1}^k N_i$, entonces

$$M \otimes N \cong \bigoplus_{i=1}^k M \otimes N_i$$

1.2. Gráficas

Una gráfica G es una pareja de conjuntos $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de $V(G)$. Los elementos de $V(G)$ son los *vértices* de la gráfica G y los elementos de $E(G)$ sus *aristas*. Si $E(G) = \emptyset$, se dice que G es *vacía*. La *gráfica complemento* de G , es la gráfica G^c con conjunto de vértices $V(G^c) = V(G)$ y aristas $E(G^c) = \mathcal{P}_2(V(G)) - E(G)$.

Dada una arista $e = \{u, v\}$, se dice que u y v son *adyacentes* y que e *incide* en u y v . Si dos aristas diferentes inciden en un mismo vértice, se dice que son *incidentes*. Dado v en $V(G)$, la *vecindad* de v , $N_G(v)$, es el conjunto de vértices adyacentes a v y todo vértice u

en $N_G(v)$ se llama *vecino* de v . El conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ es la *vecindad cerrada* de v . El *grado* de un vértice v es la cardinalidad de su vecindad y se denota con $d_G(v)$. El *grado mínimo* de G es el menor de los grados de sus vértices y se denota con $\delta(G)$. El *grado máximo* de G es el mayor de los grados de sus vértices y se denota con $\Delta(G)$.

Definimos la *gráfica completa de n vértices* como la gráfica K_n con $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(K_n) = \mathcal{P}_2(V(K_n))$.

Dadas dos gráficas G y H , un *isomorfismo* es una función biyectiva $\gamma : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $\{u, v\}$ es arista de G si y solo si $\{\gamma(u), \gamma(v)\}$ es arista de H . Si existe un isomorfismo se dice que G y H son *isomorfas* y se denota con $G \cong H$.

Dadas dos gráficas G y H , H es *subgráfica* de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Dado $S \subset V(G)$, la *subgráfica inducida por S* es la subgráfica con conjunto de vértices S y con aristas $E(G) \cap \mathcal{P}_2(S)$, y se denota con $G[S]$. Para $v \in V(G)$, $G - v = G[V(G) - \{v\}]$. Dado $F \subset E(G)$, la subgráfica inducida por F es la subgráfica $G[F]$ que tiene por vértices los vértices en los que inciden las aristas de F y $E(G[F]) = F$. Para $e \in E(G)$, $G - e = G[E(G) - \{e\}]$. Un conjunto de vértices S es independiente si $G[S]$ es vacía. Una gráfica G es *H -libre* si para todo subconjunto de vértices $S \in V(G)$ tal que $|S| = |V(H)|$ se tiene que $G[S] \not\cong H$. Decimos que G es (H_1, H_2) -libre si es H_1 -libre y H_2 -libre.

Un *camino* C en G es una sucesión de vértices $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ tal que $\{v_{j-1}, v_j\} \in E(G)$ para $1 \leq j \leq k$. Si $v_0 = v_k$, el camino es *cerrado*; en otro caso, el camino es *abierto*. Un *paseo* es un camino que no repite aristas. Una *trayectoria* es un camino abierto que no repite vértices. Un *ciclo* es un camino cerrado tal que los únicos vértices que se repiten son el primero y el último. Dada una gráfica G con al menos un ciclo, el *cuello* de G es la mínima longitud de sus ciclos, a este número se le denota con $g(G)$. Al ciclo con k vértices se le denotará C_k .

Una *uv -trayectoria* es una trayectoria que tiene por vértice inicial y final a u y v respectivamente. En dicho caso, se dice que la trayectoria *conecta* a u con v . Una gráfica es *conexa* si para todo par de vértices distintos u, v existe una uv -trayectoria. Si G es conexa, $v \in V(G)$ es un *vértice de corte* si $G - v$ no es conexa. Si G es conexa, tiene por lo menos 3 vértices y para todo $v \in V(G)$, $G - v$ es conexa, se dice que G es *2-conexa*.

Dada una gráfica conexa G , la *distancia* entre dos vértices u y v es igual a

$$\min\{|V(T)| : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\} - 1$$

y se denota con $d(u, v)$. Sea v un vértice de G conexa, la *excentricidad* de v es la mayor

de la distancia entre v y todos los vértices de G . El *diámetro* de una gráfica conexa G es igual a la mayor de las distancias entre sus vértices y se denota con $\text{diam}(G)$.

El siguiente lema, que es una extensión de una caracterización de las gráficas eulerianas (véase [5]), servirá para caracterizar el primer grupo de homología de una gráfica.

Lema 1.2.1. *Sea G una gráfica y sea $F \subset E(G)$ tal que todos los vértices de $G[F]$ tienen grado par, entonces existen ciclos C_1, \dots, C_k ajenos por aristas tales que*

$$F = \bigcup_{i=1}^k E(C_i)$$

Demostración. Como todos los vértices de $G[F]$ tienen grado par, existe un ciclo C_1 en $G[F]$. Definimos $c_1 = E(C_1)$ y $F_1 = F - c_1$. Si $F_1 \neq \emptyset$, entonces $G[F_1]$ es tal que todos sus vértices tienen grado par y tiene un ciclo C_2 . Definimos c_2 y F_2 de forma análoga. Como F es finito, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_k = \emptyset$. Por lo tanto

$$F = \bigcup_{i=1}^k c_i$$

□

Dada una gráfica G , diremos que un conjunto de vértices S *domina totalmente* o que es *totalmente dominador* si

$$\bigcup_{v \in S} N_G(v) = V(G)$$

y el número

$$\gamma_t(G) = \min\{|S| : S \text{ domina totalmente}\}$$

es el *número de dominación total*. Hay que observar que esta definición tiene sentido solamente si la gráfica no tiene vértices aislados y que todo conjunto totalmente dominador tiene por lo menos 2 vértices, por lo que $\gamma_t(G) \geq 2$.

Por ejemplo, como Petersen es una gráfica para la cual todos los vértices tienen grado 3 y tiene 10 vértices, no es posible que un conjunto totalmente dominador tenga 3 o menos vértices. Como se puede apreciar en la Figura 1.1, existe un conjunto totalmente dominador con 4 vértices (los vértices de rojo), por lo que el número de dominación total de Petersen es 4.

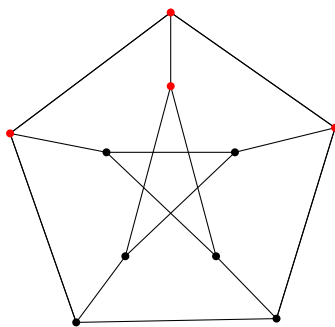


Figura 1.1: Petersen

Dada una gráfica G , S un subconjunto de vértices y v un vértice en S , definimos la S -vecindad abierta privada de v como el conjunto $pn(v, S) = \{u \in V(G) : N_G(u) \cap S = \{v\}\}$, la S -vecindad abierta privada interna de v como el conjunto $ipn(v, S) = pn(v, S) \cap S$ y la S -vecindad abierta privada externa de v como el conjunto $epn(v, S) = pn(v, S) - S$.

Teorema 1.2.2. [7] Sea G una gráfica y sea $S \subseteq V(G)$ un conjunto totalmente dominador. Entonces, S es minimal si y sólo si para todo vértice v en S se tiene que $|epn(v, S)| \geq 1$ o $|ipn(v, S)| \geq 1$.

Demostración. Sea S un conjunto totalmente dominador minimal de G y sea v en S . Veamos que si $|epn(v, S)| = 0$ entonces $|ipn(v, S)| \geq 1$. Supongase que no es cierto, es decir $|epn(v, S)| = 0$ y $|ipn(v, S)| = 0$. Afirmamos que $S - \{v\}$ es un conjunto totalmente dominador. Sea u en $N_G(v) \cap V(G)$, entonces, como $|epn(v, S)| = 0$ y $|ipn(v, S)| = 0$, existe w en $S - \{v\}$ tal que u está en $N_G(w)$. Por lo tanto

$$\bigcup_{w \in S - \{v\}} N_G(w) = V(G)$$

lo que implica que $S - \{v\}$ es un conjunto totalmente dominador, lo que es una contradicción pues S era minimal.

Ahora supóngase que S es un conjunto totalmente dominador y que para todo vértice v en S se tiene que $|epn(v, S)| \geq 1$ o $|ipn(v, S)| \geq 1$. Veamos que S es minimal. Sea S' un subconjunto propio no vacío de S y sea v en $S - S'$. Como $|epn(v, S)| \geq 1$ o $|ipn(v, S)| \geq 1$,

se tiene que

$$\bigcup_{w \in S'} N_G(w) \neq V(G)$$

Por lo tanto S es minimal. □

Corolario 1.2.3. *Sea G una gráfica y sea $S \subseteq V(G)$ un conjunto totalmente dominador minimal. Si S es tal que $\delta(G[S]) \geq 2$, entonces para todo v en S se tiene que $|epn(n, S)| \geq 1$.*

Hay que mencionar que determinar si una gráfica G tiene un conjunto totalmente dominador de cardinalidad a lo más k es NP-completo para una gráfica en general y también para las gráficas bipartitas (véase [14]).

1.3. Topología

Un *espacio topológico* (X, \mathcal{A}) es un conjunto X y una familia de subconjuntos \mathcal{A} , llamada *topología en X* , tal que:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{A}$;
2. Para cualquier subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ se tiene que $\cup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{A}$;
3. Para cualesquiera $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{A}$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\cap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{A}$.

A los elementos de la topología los llamamos *abiertos*. Dado un conjunto $B \subseteq X$, su *interior* es el conjunto dado por la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en B , se denota por B° .

Sea X un espacio topológico con topología \mathcal{A} y sea Y un subconjunto de X , la familia $\mathcal{A}' = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ es una topología en Y , la *topología relativa*. A Y junto con esta topología se le llama *subespacio*. Siempre que hablemos de un subespacio pensaremos que tiene la topología relativa.

A una familia \mathcal{B} de conjuntos abiertos se le llama *base* si todo abierto de X es la unión de elementos de \mathcal{B} . A los elementos de \mathcal{B} los llamamos *básicos*.

Dados dos espacios topológicos X, Y , una función $f : X \rightarrow Y$ es *continua* si para todo abierto U en Y , se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto. Un *homeomorfismo* es una función biyectiva continua $f : X \rightarrow Y$ tal que su inversa también es continua, en caso de existir se dice que X y Y son *homeomorfos*.

1.3.1. Construcción de espacios topológicos

Dada una colección finita de espacios topológicos X_1, \dots, X_k , definimos

$$X_1 \times \cdots \times X_k = \prod_{i=1}^k X_i$$

el *espacio producto*, como el espacio topológico cuyos puntos son elementos del producto cartesiano y los abiertos son de la forma $U_1 \times \cdots \times U_k$, donde $U_i \subset X_i$ es abierto para toda $1 \leq i \leq k$. Para cada X_j , existe una función

$$\pi_j : \prod_{i=1}^k X_i \longrightarrow X_j$$

donde $\pi_j((x_1, \dots, x_k)) = x_j$.

Teorema 1.3.1. (Véase [27]) *Sea una colección finita de espacios topológicos X_1, \dots, X_k y una colección de funciones continuas $f_i : Y \longrightarrow X_i$, existe una única $f : Y \longrightarrow \prod_{i=1}^k X_i$ continua tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^k X_i & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \\ f \uparrow & \nearrow f_j & \\ Y & & \end{array}$$

Demostración. Definimos $f(y) = (f_1(y), \dots, f_k(y))$. Claramente $\pi_j \circ f(y) = f_j(y)$ y cualquier otra función que lo cumpla es igual a f pues serían iguales entrada a entrada. Sea A un abierto de $\prod_{i=1}^k X_i$. Entonces A es de la forma $U_1 \times \cdots \times U_k$, con U_i abierto de X_i para toda i . De esta forma $f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(U_i)$ que es un abierto de Y . \square

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, definimos su *coproducto* como el espacio de su unión ajena donde los abiertos son la unión ajena de abiertos de los espacios de la familia, a este espacio lo denotaremos por

$$\coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

Dado un espacio topológico X , un conjunto Y y una función suprayectiva $f : X \rightarrow Y$, dotamos a Y con una topología de la siguiente manera: $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto. A esta topología se le llama la *topología de identificación inducida por f* y a f se le llama *identificación*.

Teorema 1.3.2. (Véase [27]) *Sea $p : X \rightarrow Y$ continua. Entonces p es una identificación si y sólo cumple la siguiente propiedad:*

Si $f : X \rightarrow Z$ es una función tal que si $p(a) = p(b)$, entonces $f(a) = f(b)$. Entonces existe una única $\bar{f} : Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{f} \circ p = f$ y f es continua si y sólo si \bar{f} es continua.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

Teorema 1.3.3. (Véase [27]) *Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, suprayectiva y tal que para todo abierto A de X se tiene que $f(A)$ es abierto, entonces f es una identificación.*

Dado un espacio topológico X y una relación de equivalencia \sim , X/\sim es un espacio topológico con la topología cociente inducida por $p : X \rightarrow X/\sim$ el mapeo que manda cada punto a su clase de equivalencia. Llamamos a X/\sim *espacio cociente*.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de puntos con x_α en X_α para toda α , definimos la *cuña* como el espacio

$$\bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha / \sim$$

donde $x_\alpha \sim x_\beta$ para todos α, β en Λ .

Ahora podemos definir un espacio topológico que será de utilidad. Dado un espacio topológico X , definimos el *cono* de X

$$C(X) = X \times [0, 1] / \sim$$

donde $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$.

Por último definiremos es *join* de dos espacios X, Y

$$X * Y = X \times [0, 1] \times Y / \sim$$

donde

- $(x, 0, y_1) \sim (x, 0, y_2)$ para todos y_1, y_2 en Y
- $(x_1, 1, y) \sim (x_2, 1, y)$ para todos x_1, x_2 en X

Teorema 1.3.4. (Véase [27]) Sea $f : X \rightarrow Y$ una identificación. Si se toma la relación de equivalencia en X a \sim b si y sólo si $f(a) = f(b)$, entonces f determina un homeomorfismo

$$\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y$$

donde $\hat{f}([x]) = f(x)$.

Demostración. Tomamos $p : X \rightarrow X/\sim$ la función que manda cada punto a su clase de equivalencia. Como p es una identificación, por el Teorema 1.3.2, existe una única función $\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $\hat{f} \circ p = f$. De igual forma, por ser f una identificación, existe una única $\hat{p} : Y \rightarrow X/\sim$ tal que $\hat{p} \circ f = p$. Por lo tanto $1_Y \circ f = f = \hat{f} \circ \hat{p} \circ f$, como f es suprayectiva se tiene que $1_Y = \hat{f} \circ \hat{p}$. De forma análoga se tiene que $1_{X/\sim} = \hat{p} \circ \hat{f}$. \square

1.3.2. Homotopía

Dadas dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$, diremos que son *homotópicas*, denotado $f \simeq g$, si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que:

1. $H(x, 0) = f(x)$ para toda $x \in X$
2. $H(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$

Diremos que dos espacios topológicos X, Y tienen el mismo tipo de homotopía, denotado $X \simeq Y$, si existen $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \simeq 1_X$ y $g \circ f \simeq 1_Y$. Diremos que X es *contraíble* si $X \simeq *$, es decir si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Lema 1.3.5. (Véase [25]) Si X_1, X_2, Y son espacios topológicos tales que $X_1 \simeq X_2$, entonces

$$X_1 * Y \simeq X_2 * Y$$

Demostración. Como $X_1 \simeq X_2$, existen funciones $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $g : X_2 \rightarrow X_1$ tales que $f \circ g \simeq 1_{X_1}$ y $g \circ f \simeq 1_{X_2}$. Sean $H_1 : X_1 \times [0, 1] \rightarrow X_1$ y $H_2 : X_2 \times [0, 1] \rightarrow X_2$ las homotopías.

Ahora, por el Teorema 1.3.1, existen funciones continuas

$$F : X_1 \times [0, 1] \times Y \longrightarrow X_2 * Y$$

y

$$G : X_2 \times [0, 1] \times Y \longrightarrow X_1 * Y$$

tales que $F(x, t, y) = [f(x), t, y]$ y $G(x, t, y) = [g(x), t, y]$. Para los puntos de la forma $(x, 0, y')$, $(x, 0, y'')$, se tiene que $[f(x), 0, y'] = [f(x), 0, y'']$ y para los de la forma $(x', 1, y)$, $(x'', 1, y)$ $[f(x'), 1, y] = [f(x''), 1, y]$, por el Teorema 1.3.2 existe

$$\hat{F} : X_1 * Y \longrightarrow X_2 * Y$$

tal que $\hat{F} \circ p_1 = F$ con $p_1 : X_1 \times [0, 1] \times Y \longrightarrow X_1 * Y$ identificación. Análogamente existe

$$\hat{G} : X_2 * Y \longrightarrow X_1 * Y$$

tal que $\hat{G} \circ p_2 = G$ con $p_2 : X_2 \times [0, 1] \times Y \longrightarrow X_2 * Y$ identificación.

Definimos $\hat{H}_1 : X_1 * Y \times [0, 1] \longrightarrow X_1 * Y$, como $\hat{H}_1([x, s, y], t) = [H_1(x, t), s, y]$. Entonces

$$\hat{H}_1([x, s, y], 0) = [H_1(x, 0), s, y] = [g \circ f(x), s, y] = \hat{G}([f(x), s, y]) = \hat{G}(\hat{F}[x, s, y])$$

y

$$\hat{H}_1([x, s, y], 1) = [H_1(x, 1), s, y] = [x, s, y]$$

Por lo tanto $\hat{G} \circ \hat{F} \simeq 1_{X_1 * Y}$. Análogamente se ve que $\hat{F} \circ \hat{G} \simeq 1_{X_2 * Y}$ □

Lema 1.3.6. (Véase [28]) Sea X un espacio topológico, entonces el cono $C(X)$ es contraíble.

Demostración. Tomamos $k : C(X) \longrightarrow \{[x, 1]\}$, con $[x, 1]$ en $C(X)$, y $c : \{[x, 1]\} \longrightarrow C(X)$ con $c([x, 1]) = [x, 1]$. Definimos

$$H_1 : C(X) \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$$

como $H([x, s], t) = [x, (1-t)s + t]$. De esta forma se tiene que $1_{C(X)} \simeq c \circ k$.

Que $k \circ c \simeq 1_{\{[x, 1]\}}$ es claro. □

Hay que observar que dado un espacio X , $C(X) \cong X * \{*\}$, por lo que

Corolario 1.3.7. Sean X, Y espacios, donde $Y \simeq *$, entonces el join $X * Y$ es contractible.

Demostración. Como $Y \simeq *$, se tiene que $X * Y \simeq X * \{*\} \cong C(X) \simeq *$. □

Capítulo 2

Complejos simpliciales y grupos de homología

En este capítulo se definirá la homología simplicial y se darán los resultados necesarios para esta tesis. Además se definirá la homología singular para espacios topológicos y, sin ahondar mucho, se darán los resultados necesarios para calcular la homología en ciertos casos en los que es más comodo trabajar con la realización geométrica de un complejo.

2.1. Complejos simpliciales

Un *simplejo* σ de dimensión n es un conjunto de $n + 1$ elementos y diremos que σ es un n -simplejo, todo subconjunto propio no vacío de $k + 1$ elemtos es una k -cara de σ . Un *complejo simplicial* K sobre un conjunto de vértices $V(K)$ es una colección de subconjuntos no vacíos de $V(K)$ tal que si $\sigma \in K$ y $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in K$. Dado $\sigma \in K$, su dimensión de σ es igual a $|\sigma| - 1$. La *dimensión* de K es la máxima dimensión de sus simplejos, es decir $\dim K = \max\{\dim \sigma : \sigma \in K\}$. Si $\dim K = n$, diremos que K es un n -complejo. Diremos que K es un n -complejo puro si todo simplejo de K está contenido en un simplejo de dimensión n . Un ejemplo de complejo simplicial no puro es el complejo de la Figura 2.1, donde el complejo tiene dimensión 3 pero tiene aristas y triángulos no contenidos en simplejos de dimensión 3. Denotaremos por $S_q(K)$ al conjunto de todos los q -simplejos de K . Sólo nos interesarán complejos simpliciales sobre conjuntos de vértices finitos, así definiremos $f_q(K) = |S_q(K)|$. Al complejo simplicial con conjunto de vértices $[n]$ y con todos los subconjuntos no vacíos como simplejos lo llamaremos n -simplejo y lo denotaremos Δ^n .

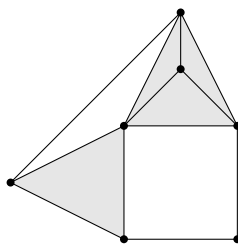


Figura 2.1: Complejo simplicial no puro

Dados K y L complejos simpliciales, diremos que L es *subcomplejo* de K si

1. $V(L) \subset V(K)$
2. Para todo $\sigma \in L$, $\sigma \in K$

en tal caso se escribirá $L \leq K$.

El r -*esqueleto* de K , K^r es el subcomplejo de K que tiene a todos los simplejos de dimensión a lo más r , es decir $K^r = \bigcup_{q=0}^r S_q(K)$

Diremos que K es *conexo* si K^1 es conexo al considerarlo como gráfica.

Dados dos complejos K y L su *unión* $K \cup L$ está definida como el complejo simplicial con conjunto de vértices $V(K) \cup V(L)$ y $\sigma \in K \cup L$ si $\sigma \in K$ o $\sigma \in L$. Si $V(K) \cap V(L) = \emptyset$ definimos el *join* de K y L , $K * L$, como el complejo simplicial con conjunto de vértices $V(K * L) = V(K) \cup V(L)$ y $\sigma \in K * L$ si:

1. $\sigma \in K$
2. $\sigma \in L$
3. $\sigma = \tau_1 \cup \tau_2$, donde $\tau_1 \in K$ y $\tau_2 \in L$

Dado un complejo simplicial K definimos la *suspensión* de K como

$$\Sigma K = K * \{v_1\} \cup K * \{v_2\}$$

con $v_1 \neq v_2$ y $v_1, v_2 \notin V(K)$. El *cono* de K es el complejo simplicial $CK = K * v$ con $v \notin V(K)$.

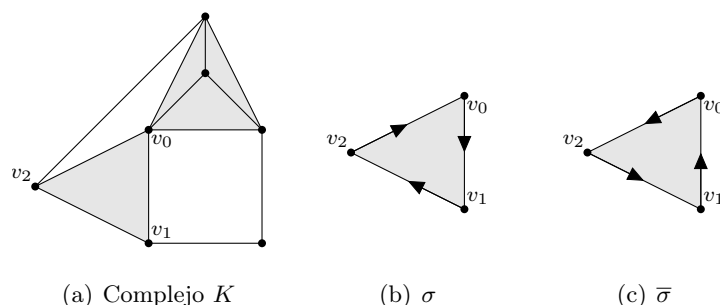


Figura 2.2: Complejo K y un simplejo orientado de dos formas

Dados dos complejos K y L , un morfismo simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ es una función de conjuntos $\varphi : V(K) \rightarrow V(L)$ tal que si $\sigma \in K$ entonces $\varphi(\sigma) \in L$. Si $|\sigma| = |\varphi(\sigma)|$ para toda $\sigma \in K$, diremos que el morfismo es *no degenerado*. Un *isomorfismo* entre complejos es un morfismo biyectivo tal que su inverso también es morfismo.

2.2. Homología simplicial

Dado un complejo K definimos $S_q^\circ(K) = \{[v_0, v_1, \dots, v_q] : \{v_0, v_1, \dots, v_q\} \in S_q(K)\}$ el conjunto de q -simplejos orientados de K . Dados $\sigma, \tau \in S_q^\circ(K)$, tales que $\sigma = [v_0, \dots, v_q]$ y $\tau = [v_{\lambda(0)}, \dots, v_{\lambda(q)}]$ para $\lambda : [q] \rightarrow [q]$ biyección, diremos que σ y τ tienen la misma orientación si $\text{sign}(\lambda) = 1$, si $\text{sign}(\lambda) = -1$ diremos que tienen orientación opuesta, donde $\text{sign}(\lambda)$ es el signo de la permutación λ . Dado $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_q] \in S_q^\circ(K)$, denotaremos $\bar{\sigma} = [v_1, v_0, \dots, v_q]$. En la Figura 2.2(a) se puede ver un complejo K que tiene como simplejo al conjunto $\{v_0, v_1, v_2\}$, en la Figura 2.2(b) puede verse a $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ y en la Figura 2.2(c) a $\bar{\sigma} = [v_1, v_0, v_2]$.

Sea A un anillo conmutativo con unidad, definimos el siguiente A -módulo

$$A \langle S_q^\circ(K) \rangle = \{s : S_q^\circ(K) \rightarrow A : s \neq 0 \text{ para un número finito de elementos de } S_q^\circ(K)\}$$

Dado $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_q] \in S_q^\circ(K)$, le podemos asignar la función $\sigma : S_q^\circ(K) \rightarrow \{0_A, 1_A\}$, donde

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estos elementos son un conjunto generador de $A\langle S_q^\circ(K)\rangle$. Ahora tomamos el siguiente submodulo de $A\langle S_q^\circ(K)\rangle$

$$\Gamma_q(K) = \langle \{\sigma + \tau\} : \sigma, \tau \in S_q^\circ(K) \text{ y tienen orientación opuesta} \rangle$$

Para $q \in \mathbb{Z}$ definimos el *conjunto de q -cadenas* como

$$C_q(K; A) = A\langle S_q^\circ(K)\rangle / \Gamma_q(K)$$

para toda $q \geq 0$ y $C_q(K; A) = 0$ para toda $q < 0$. Un subcomplejo L de K es un *soporte* de la q -cadena

$$c = \sum_{\sigma=[v_0, v_1, \dots, v_q]} a_\sigma [v_0, v_1, \dots, v_q]$$

si $\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ es un simplejo de L para toda σ . Denotaremos por $|c|$ al soporte dado por los simplejos $\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ y sus subsimplejos. Nos referiremos a $|c|$ como el soporte de c .

Definimos el *operador frontera*

$$\partial_q : C_q(K; A) \longrightarrow C_{q-1}(K; A)$$

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]$$

donde $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_q]$ y $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] = [v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_q]$ para $q \geq 1$ y $\partial_q \equiv 0$ para $q \leq 0$.

Para $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_q]$ tomamos $\sigma_i = [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]$ y para $i > j$ tomamos $\sigma_{i,j} = [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]$.

Lema 2.2.1. (Véase [26]) Para toda $q \in \mathbb{Z}$, $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$

Demostración. Para $q \leq -1$ el resultado es trivial. Sea $\sigma \in C_{q+1}(K; A)$ un generador, con $q \geq 0$, es decir $\sigma = [v_0, \dots, v_{q+1}]$ con $\{v_0, \dots, v_{q+1}\} \in K$. Entonces

$$\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \partial_q(\sigma_i)$$

para cada i se tiene que

$$\partial_q(\sigma_i) = \sum_{j < i} (-1)^j \sigma_{i,j} + \sum_{j \geq i} (-1)^j \sigma_{j+1,i}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+1} \left[\sum_{j < i} (-1)^{j+i} \sigma_{i,j} + \sum_{j \geq i} (-1)^{j+i} \sigma_{j+1,i} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} \left[\sum_{j < i} (-1)^{j+i} \sigma_{i,j} + \sum_{j > i} (-1)^{j-1+i} \sigma_{j,i} \right] \end{aligned}$$

Entonces, olvidando el signo por un momento, a los elementos de la suma de $\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma)$ los podemos asociar una pareja $\{k, l\} \subseteq [q+1]$ de números distintos tales que $k > l$. Afirmamos que $\sigma_{k,l}$ aparece en la sumatoria total dos veces con signo distinto por cada pareja $k > l$. Sean $k, l \in [q+1]$ tales que $k > l$, hay que considerar tres casos:

1. Para $i \neq l, k$, $\sigma_{k,l}$ no aparece en $\partial_q(\sigma_i)$.
2. Para $i = l$, $\sigma_{k,l}$ aparece con signo $(-1)^k$ en $\partial(\sigma_l)$ y con signo $(-1)^{l-1+k}$ en la sumatoria total.
3. Para $i = k$, $\sigma_{k,l}$ aparece con signo $(-1)^l$ en $\partial(\sigma_k)$ y con signo $(-1)^{l+k}$ en la sumatoria total.

Por lo tanto $\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) = 0$. □

Por lo anterior se obtiene la siguiente sucesión

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K; A) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K; A) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$$

A esta sucesión se le llama el *complejo de cadenas* de K con coeficientes en A . A los elementos de $Z_q(K; A) = \ker(\partial_q)$ los llamamos q -*ciclos* y a los de $B_q(K; A) = \text{im}(\partial_{q+1})$ las q -*fronteras*. Definimos $H_q(K; A) = Z_q(K; A)/B_q(K; A)$ el q -ésimo grupo de homología de K con coeficientes en A .

Lema 2.2.2. (Véase [26]) Sea K complejo simplicial tal que es la unión disjunta de K_1, K_2, \dots, K_r , entonces $H_q(K; A) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_q(K_i; A)$.

Demostración. Si $r = 1$ no hay nada que probar. Supóngase que $K = K_1 \cup K_2$. Como $S_q^\circ(K) = S_q^\circ(K_1) \cup S_q^\circ(K_2)$, se tiene que

$$A \langle S_q^\circ(K) \rangle \cong A \langle S_q^\circ(K_1) \rangle \bigoplus A \langle S_q^\circ(K_2) \rangle$$

y que

$$\Gamma_q(K) \cong \Gamma_q(K_1) \bigoplus \Gamma_q(K_2)$$

Entonces, por el Lema 1.1.7, se tiene que

$$C_q(K) \cong C_q(K_1) \bigoplus C_q(K_2)$$

Ahora, tomando

$$\partial : C_q(K_1) \bigoplus C_q(K_2) \longrightarrow C_{q-1}(K_1) \bigoplus C_{q-1}(K_2)$$

$\partial(\sigma, \tau) = (\partial(\sigma), \partial(\tau))$ se tiene que

$$Z_q(K; A) \cong Z_q(K_1; A) \bigoplus Z_q(K_2; A)$$

y que

$$B_q(K; A) \cong B_q(K_1; A) \bigoplus B_q(K_2; A)$$

Por el Lema 1.1.7 tenemos que

$$H_q(K; A) \cong H_q(K_1; A) \bigoplus H_q(K_2; A)$$

Supóngase que el lema es cierto para r . Sea K complejo simplicial tal que es la unión disjunta de K_1, \dots, K_r, K_{r+1} complejos. Definimos $L = \bigcup_i^r K_i$. Por hipótesis de inducción

$H_q(L; A) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_q(K_i; A)$. Como $K = L \cup K_{r+1}$, por lo hecho antes, se tiene que

$$H_q(K; A) \cong H_q(L; A) \bigoplus H_q(K_{r+1}; A) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_q(K_i; A) \bigoplus H_q(K_{r+1}; A)$$

Por lo tanto $H_q(K; A) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_q(K_i; A)$. □

Proposición 2.2.3. (Véase [26]) Sea K un complejo simplicial con r componentes conexas, entonces

$$H_0(K; A) \cong A^r$$

Demostración. Primero observemos que $C_0(K; A) = A \langle S_0^{\circ}(K) \rangle$, pues solamente hay una orientación posible para un 0-simplejo.

Supóngase que K es conexo. Se tiene que $Z_0(K; A) = C_0(K; A)$, pues $\partial_0 \equiv 0$. Ahora veamos que

$$B_0(K; A) = \langle \{a[v_1] - a[v_2] : v_1 \neq v_2\} \rangle$$

Sea τ una 2-cadena, entonces

$$\tau = \sum_{\sigma=[u_{\sigma}, v_{\sigma}] \in C_1(K; A)} a_{\sigma} [u_{\sigma}, v_{\sigma}]$$

por lo que

$$\partial_1(\tau) = \sum_{\sigma=[u_{\sigma}, v_{\sigma}] \in C_1(K; A)} a_{\sigma} ([v_{\sigma}] - [u_{\sigma}])$$

y como $u_{\sigma} \neq v_{\sigma}$ para todo σ , se tiene que $\partial_1(\tau)$ es de la forma buscada. Sean v_1 y v_2 vértices diferentes de K . Como K es conexo, existe $w_0, w_1, \dots, w_k \in V(K)$ tales que $\{w_i, w_{i+1}\} \in K$ para $0 \leq i \leq k-1$, $w_0 = v_1$ y $w_k = v_2$. Para cualesquier a en A , tomamos la 2-cadenas

$$\tau = \sum_{i=0}^{k-1} a[w_i, w_{i+1}]$$

de esta forma

$$\partial_1(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} a[w_{i+1}] - a[w_i] = a[v_2] - a[v_1]$$

Entonces,

$$B_0(K; A) = \langle \{a[v_1] - a[v_2] : v_1 \neq v_2\} \rangle$$

y para cualesquiera v_1, v_2 vértices de K , $[v_1] = [v_2]$ en $H_0(K; A)$. Tomando un vértice v_0 de K , se tiene que todo elemento de $H_0(K; A)$ se puede expresar como $a[v_0]$ para algún a en el anillo. Para ver que $H_0(K; A) \cong A$ sólo hace falta ver que si $a[v_0] = 0$, entonces $a = 0$. Si $a[v_0] = 0$, entonces se tendría que

$$a[v_0] = \sum_{\sigma=[u_\sigma, w_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma[w_\sigma] - a_\sigma[u_\sigma]$$

Para ver que $a = 0$, tomamos el siguiente homomorfismo

$$\varepsilon : C_0(K; A) \longrightarrow A$$

dado por

$$\varepsilon \left(\sum_{[v] \in C_0(K; A)} a_v[v] \right) = \sum_{[v] \in C_0(K; A)} a_v$$

Este homomorfismo que está bien definido pues $C_0(K; A) = A \langle S_0^\circ(K) \rangle$. Entonces

$$a = \varepsilon \left(\sum_{\sigma=[u_\sigma, w_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma[w_\sigma] - a_\sigma[u_\sigma] \right) = \sum_{\sigma=[u_\sigma, w_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma - a_\sigma = 0$$

Por lo tanto $H_0(K; A) \cong A$.

Ahora supóngase que K es la unión disjunta de K_1, \dots, K_r complejos conexos, entonces por el Lema 2.2.2 se tiene que

$$H_0(K; A) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_0(K_i; A)$$

y por lo hecho antes, se tiene que $H_0(K_i; A) \cong A$ para toda i . □

Lema 2.2.4. (Véase [26]) Sea K un complejo simplicial, entonces $H_q(CK; A) \cong 0$ para toda $q \geq 1$.

Demostración. Por definición $CK = \{v\} * K$, donde v no es un vértice de K . Entonces, se

tienen los siguientes homomorfismos para $q \geq 1$

$$c_q : C_{q-1}(K; A) \longrightarrow C_q(CK; A)$$

dado por $c_q([u_0, u_1, \dots, u_{q-1}]) = [v, u_0, u_1, \dots, u_{q-1}]$. Para una q -cadena τ , denotamos a $c_{q+1}(\tau)$ por $[v, \tau]$. Sea τ una q -cadena, entonces

$$\tau = \sum_{\sigma=[u_0, u_1, \dots, u_q]} a_\sigma [u_0, u_1, \dots, u_q]$$

para $q \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \circ c_{q+1}(\tau) &= \partial_{q+1}([v, \tau]) = \sum_{\sigma=[u_0, u_1, \dots, u_q]} a_\sigma \partial_{q+1}([v, u_0, u_1, \dots, u_q]) \\ &= \sum_{\sigma=[u_0, u_1, \dots, u_q]} a_\sigma [u_0, u_1, \dots, u_q] - \sum_{\sigma=[u_0, u_1, \dots, u_q]} (-1)^i a_\sigma [v, u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_q] \\ &= \tau - [v, \partial_q(\tau)] \end{aligned}$$

y para $q = 0$ que

$$\partial_1 \circ c_1(\tau) = \sum_{\sigma=[u_\sigma]} a_\sigma \partial_1([v, u_\sigma]) = \sum_{\sigma=[u_\sigma]} a_\sigma [u_\sigma] - \sum_{\sigma=[u_\sigma]} a_\sigma [v] = \tau - \varepsilon(\tau)[v]$$

con ε igual que en la demostración de la Proposición 2.2.3.

Como

$$C_q(CK; A) = C_q(K; A) \cup c_q(C_{q-1}(K; A))$$

toda q -cadena de $C_q(CK; A)$ es de la forma $\tau + [v, \theta]$, donde τ está en $C_q(K; A)$ y θ en $c_q(C_{q-1}(K; A))$. Sea z un q -ciclo en $Z_q(CK; A)$, entonces $z = \tau + [v, \theta]$ y $\partial_q(z) = 0$. Veremos que z es una q frontera, para lo cual consideraremos dos casos:

1. Para $q \geq 2$, se tiene que

$$\partial_q(z) = \partial_q(\tau) + \theta - [v, \partial_{q-1}(\theta)] = 0$$

por lo que

$$\partial_q(\tau) + \theta = [v, \partial_{q-1}(\theta)]$$

que sólo puede pasar si $[v, \partial_{q-1}(\theta)] = 0$, pues v no es vértice de K

2. Para $q = 1$, se tiene que

$$\partial_1(z) = \partial_1(\tau) + \theta - \varepsilon(\theta)[v] = 0$$

por lo que

$$\partial_1(\tau) + \theta = \varepsilon(\theta)[v]$$

que sólo puede pasar si $\varepsilon(\theta)[v] = 0$, pues v no es vértice de K

En cualquier caso se obtiene que $\partial_q(\tau) + \theta = 0$. Tomando $[v, \tau]$, se tiene que

$$\partial_{q+1}([v, \tau]) = \tau - [v, \partial_q(\tau)] = \tau - [v, -\theta] = \tau + [v, \theta] = z$$

Por lo tanto $Z_q(CK; A) = B_q(CK; A)$, lo que implica que $H_q(CK; A) \cong 0$ para toda $q \geq 1$. \square

Corolario 2.2.5. (Véase [26]) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces para toda $q \geq 1$ se tiene que $H_q(\Delta^n; A) \cong 0$.

Demostración. El resultado es claro para $n = 0$ y para toda $n \geq 1$ se tiene que $\Delta^n \cong C\Delta^{n-1}$. \square

Dados dos complejos simpliciales K y L , y un morfismo de complejos $\varphi : K \rightarrow L$, para cada $q \geq 0$ definimos un homomorfismo entre los conjuntos de q -cadenas

$$\varphi_q : C_q(K; A) \rightarrow C_q(L; A)$$

definido por

$$\varphi_q([v_0, \dots, v_q]) = \begin{cases} [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)] & \text{si } \varphi(v_i) \neq \varphi(v_j) \text{ para todos } i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lema 2.2.6. (Véase [26]) Los homomorfismos φ_q arriba definidos hacen conmutar el si-

guiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_q(K; A) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(K; A) & \longrightarrow & & \\ & \downarrow \varphi_q & & \downarrow \varphi_{q-1} & & & \\ \longrightarrow & C_q(L; A) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(L; A) & \longrightarrow & & \end{array}$$

Demostración. Sea $[v_0, \dots, v_q]$ en $C_q(K; A)$. Hay dos posibilidades

1. $|\varphi(\{v_0, \dots, v_q\})| = q$, entonces

$$\varphi_{q-1} \circ \partial_q([v_0, \dots, v_q]) = \varphi_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] \right) =$$

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i [\varphi(v_0), \dots, \varphi(\hat{v}_i), \dots, \varphi(v_q)] = \partial_q([\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)]) = \partial_q \circ \varphi_q([v_0, \dots, v_q])$$

2. $|\varphi(\{v_0, \dots, v_q\})| \leq q-1$, entonces existen $i \neq j$ tales que $\varphi(v_i) = \varphi(v_j)$ y por lo tanto $\varphi_q([v_0, \dots, v_q]) = 0$. Sin pérdida de la generalidad supóngase que $i = 0$ y que $j = 1$.

Ahora

$$\varphi_{q-1} \circ \partial_q([v_0, \dots, v_q]) = \varphi_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] \right) =$$

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i [\varphi(v_0), \dots, \varphi(\hat{v}_i), \dots, \varphi(v_q)] = [\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_q)] - [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)] = 0$$

Por otro lado

$$\partial \circ \varphi_q([v_0, \dots, v_q]) = \partial_q(0) = 0$$

En cualquier caso se tiene que $\varphi_{q-1} \circ \partial_q = \partial_q \circ \varphi_q$ □

Veamos ahora que el morfismo $\varphi : K \rightarrow L$ pasa a los grupos de homología. Sea z en $Z_q(K; A)$, entonces, por el Lema anterior,

$$\partial_q \circ \varphi_q(z) = \varphi_{q-1} \circ \partial_q(z) = \varphi_{q-1}(0) = 0$$

es decir $\varphi_q(z)$ está en $Z_q(L; A)$. Sea τ en $B_q(K; A)$, entonces existe una $q+1$ -cadena τ' tal que $\partial_{q+1}(\tau') = \tau$, por esto y el lema anterior se tiene que

$$\varphi_q(\tau) = \varphi_q \circ \partial_q(\tau') = \partial_{q+1}(\varphi_{q+1}(\tau'))$$

por lo que $\varphi_q(\tau)$ está en $B_q(L; A)$. De lo anterior se tiene que φ_q pasa al cociente, es decir se tiene un homomorfismo

$$\varphi_* : H_q(K; A) \longrightarrow H_q(L; A)$$

Si se tiene $h : K_1 \longrightarrow K_2$ y $g : K_2 \longrightarrow K_3$, entonces $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$. Así si dos complejos K y L son isomorfos, sus grupos de homología serán isomorfos. De esta forma obtenemos el siguiente corolario al Lema 2.2.4

Corolario 2.2.7. *Sean K un complejo y Δ^n , entonces $\Delta^n * K$ es acíclico.*

Demostración. Hay que observar que $\Delta^n * K \cong C(\Delta^{n-1} * K)$ para toda $n \geq 1$. Entonces $H_q(\Delta^n * K; A) = 0$ para toda $q \geq 1$ por el Lema 2.2.4 \square

Teorema 2.2.8. *(Véase [26]) (Sucesión de Mayer-Vietoris) Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 subcomplejos tales que $K = K_1 \cup K_2$, entonces existe*

$$\longrightarrow H_{q+1}(K; A) \longrightarrow H_q(L; A) \longrightarrow H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A) \longrightarrow H_q(K; A) \longrightarrow$$

sucesión exacta, donde $L = K_1 \cap K_2$.

Demostración. La sucesión se obtendrá de la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow C_*(L; A) \longrightarrow C_*(K_1; A) \oplus C_*(K_2; A) \longrightarrow C_*(K; A) \longrightarrow 0$$

donde los homomorfismos son

$$j : C_*(L; A) \longrightarrow C_*(K_1; A) \oplus C_*(K_2; A)$$

$$z \longmapsto (z, -z)$$

y

$$i : C_*(K_1; A) \oplus C_*(K_2; A) \longrightarrow C_*(K; A)$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto z_1 + z_2$$

Para $C_*(K_1; A) \oplus C_*(K_2; A)$ tomamos los morfismos frontera $\partial_* = (\partial_*^1, \partial_*^2)$, es claro que

$$\ker(\partial_q)/\text{im}(\partial_q) \cong H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A)$$

Estos homomorfismos son morfismos de cadenas, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_q(L; A) & \longrightarrow & C_q(K_1; A) \oplus C_q(K_2; A) & \longrightarrow & C_q(K; A) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1}(L; A) & \longrightarrow & C_{q-1}(K_1; A) \oplus C_{q-1}(K_2; A) & \longrightarrow & C_{q-1}(K; A) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Veamos ahora que los renglones son exactos. Claramente $i \circ j \equiv 0$, por lo que sólo hace falta ver que $\ker(i) \subset \text{im}(j)$. Sea z en $\ker(i)$, entonces $z = (z_1, z_2)$ y $i(z) = z_1 + z_2 = 0$ con z_1 en $C_q(K_1; A)$ y z_2 en $C_q(K_2; A)$, como $z_2 = -z_1$ entonces los simplejos para los que z_1 y z_2 no se anulan están en L , por lo que existe \hat{z} en $C_q(L; A)$ tal que $j(\hat{z}) = z$. Ahora, sea c en $C_q(K; A)$, entonces

$$c = \sum_{\sigma \in S_q^0(K)} a_\sigma \sigma$$

como $K = K_1 \cup K_2$, todo simplejo de K está en K_1 o K_2 , por lo que $c = c_1 + c_2$ con c_i en $C_q(K_i; A)$. Por lo que $i(c_1, c_2) = c$. Entonces los renglones son exactos. Por lo tanto i y j pasan a los grupos de homología.

Ahora construiremos un morfismo $\partial_q : H_q(K; A) \rightarrow H_{q-1}(L; A)$. Sea z un q -ciclo en $Z_q(K; A)$, entonces $\partial_q(z) = 0$ y existe (z_1, z_2) en $C_q(K_1; A) \oplus C_q(K_2; A)$ tal que $i(z_1, z_2) = z$, por lo que

$$0 = \partial_q(z) = \partial_q \circ i(z_1, z_2) = i \circ (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2))$$

Por lo que existe \hat{z} en $C_{q-1}(L; A)$ tal que $j(\hat{z}) = (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2))$, como j es un monomorfismo y

$$j \circ \partial_{q-1}(\hat{z}) = \partial_{q-1} \circ j(\hat{z}) = (\partial_{q-1}^1 \circ \partial_q^1(z_1), \partial_{q-1}^2 \circ \partial_q^2(z_2)) = (0, 0)$$

se tiene que \hat{z} es un $q-1$ -ciclo en $Z_{q-1}(L; A)$. Definimos $\partial_q([z]) = [\hat{z}]$.

Veamos que está bien definida. Como j es inyectiva, \hat{z} está determinado por $\partial_q(z_1, z_2)$.

Sea $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ tal que $i(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = i(z_1, z_2)$, entonces $i(\tilde{z}_1 - z_1, \tilde{z}_2 - z_2) = 0$ y por lo tanto existe c en $C_q(L; A)$ tal que $j(c) = (\tilde{z}_1 - z_1, \tilde{z}_2 - z_2)$. Tomamos $\tilde{z} = \hat{z} + \partial_q(c)$, de esta forma

$$j(\tilde{z}) = j(\hat{z}) + j \circ \partial_q(c) = j(\hat{z}) + \partial_q(j(c))$$

por lo que \tilde{z} y \hat{z} tienen la misma clase de homología.

Ahora sea z' tal que $[z] = [z']$, entonces $z' = z + \partial_{q+1}(w)$ y $w = i(w_1, w_2)$, por lo que

$$z' = j(z_1, z_2) + \partial_{q+1} \circ j(w_1, w_2) = j(z_1, z_2) + j \circ \partial_{q+1}(w_1, w_2) = j((z_1, z_2) + \partial_{q+1}(w_1, w_2))$$

de esta forma $\partial_q(z_1, z_2) = \partial_q((z_1, z_2) + \partial_{q+1}(w_1, w_2))$, por lo que \hat{z} no depende del representante que tomemos.

Veamos que ∂ es homomorfismo. Para $[z], [w]$ en $H_q(K; A)$, existen $(z_1, z_2), (w_1, w_2)$ tales que $i(z_1, z_2) = z$ y $i(w_1, w_2) = w$, entonces $i((z_1, z_2) + (w_1, w_2)) = z + w$. Luego existen \hat{z}, \hat{w} tales que $j(\hat{z}) = \partial_q(z_1, z_2)$ y $j(\hat{w}) = \partial_q(w_1, w_2)$, por lo que $j(\hat{z} + \hat{w}) = \partial_q(z_1, z_2) + \partial_q(w_1, w_2)$, por lo que $\partial_q([z] + [w]) = [\hat{z}] + [\hat{w}] = \partial_q([z]) + \partial_q([w])$.

Ahora veamos que la sucesión

$$\longrightarrow H_{q+1}(K; A) \longrightarrow H_q(L; A) \longrightarrow H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A) \longrightarrow H_q(K; A) \longrightarrow$$

es exacta.

1. $\ker(i_*) = \text{im}(j_*)$

Como $i \circ j = 0$, se tiene que $i_* \circ j_* = 0$. Sea $([z_1], [z_2])$ en $H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A)$ tal que $i_*([z_1], [z_2]) = 0$, entonces $[z_1 + z_2] = 0$, por lo que existe \hat{z} en $C_{q+1}(K; A)$ tal que $\partial_{q+1}(\hat{z}) = z_1 + z_2$. Como i es suprayectiva existe (\hat{z}_1, \hat{z}_2) en $C_{q+1}(K_1; A) \oplus C_{q+1}(K_2; A)$ tal que $i(\hat{z}_1, \hat{z}_2) = \hat{z}$. Tomando $z = (z_1, z_2) - \partial_{q+1}(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$, se tiene que

$$i(z) = i(z_1, z_2) - \partial_{q+1}(\hat{z}) = 0$$

por exactitud existe w en $C_q(L; A)$ tal que $j(w) = z$. Entonces

$$j(\partial_q(w)) = \partial_q(i(w)) = \partial_q((z_1, z_2) - \partial_{q+1}(\hat{z}_1, \hat{z}_2)) = \partial_q(z_1, z_2) = 0$$

como j es inyectiva, $\partial_q(w) = 0$. De esta forma

$$j_*([w]) = [(z_1, z_2) - \partial_{q+1}(\hat{z}_1, \hat{z}_2)] = ([z_1], [z_2])$$

2. $\ker(\partial_*) = \text{im}(i_*)$

Sea $([z_1], [z_2])$ en $H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A)$, entonces $\partial_q^i(z_i) = 0$ y

$$i_*([z_1], [z_2]) = [z_1 + z_2]$$

Ahora,

$$\partial_q(z_1 + z_2) = \partial_q(i(z_1, z_2)) = i(\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2)) = i(0, 0) = 0$$

Por exactitud, la inyectividad de j y como está definida ∂_* , se tiene que

$$\partial_q([z_1 + z_2]) = [0]$$

Ahora, sea $[z]$ en $H_q(K; A)$ tal que $\partial_q([z]) = 0$, como $\partial_q([z]) = [\hat{z}]$, donde $z = i(z_1, z_2)$ y $j(\hat{z}) = (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2))$, existe w en $C_q(L; A)$ tal que $\partial_q(w) = \hat{z}$. Tomando $(z_1, z_2) - j(w)$, se tiene que

$$\partial_q((z_1, z_2) - j(w)) = (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2)) - j(\hat{z}) = 0$$

por lo que $(z_1, z_2) - j(w)$ es un q -ciclo. Ahora

$$i((z_1, z_2) - j(w)) = i(z_1, z_2) + i(j(w)) = i(z_1, z_2) = z$$

por lo que $i_*[(z_1, z_2) - j(w)] = [z]$.

3. $im(\partial_*) = ker(j_*)$

Sea $[z]$ en $H_q(K; A)$, entonces $\partial_q([z]) = [\hat{z}]$, donde $j(\hat{z}) = (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2))$, por lo que $j_*(\partial_q([z])) = j_*([\hat{z}]) = ([\partial_q^1(z_1)], [\partial_q^2(z_2)]) = (0, 0)$. Sea $[\hat{z}]$ en $H_{q-1}(L; A)$ tal que $j_*([\hat{z}]) = (0, 0)$, entonces $j(\hat{z}) = (\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2))$ para algún (z_1, z_2) . Ahora

$$\partial_q(z_1 + z_2) = \partial_q(i(z_1, z_2)) = i(\partial_q^1(z_1), \partial_q^2(z_2)) = i(j(\hat{z})) = 0$$

por lo tanto $z_1 + z_2$ es un q -ciclo y $\partial_q([z_1 + z_2]) = [\hat{z}]$.

Por lo tanto la sucesión es exacta. □

La sucesión de Mayer-Vietoris nos permitirá relacionar los grupos de homología de la suspensión de un complejo con los del complejo.

Corolario 2.2.9. $H_{q+1}(\Sigma K; A) \cong H_q(K; A)$ para toda $q \geq 1$.

Demostración. Por Mayer-Vietoris se tiene la siguiente sucesión exacta

$$H_{q+1}(K_1; A) \oplus H_{q+1}(K_2; A) \longrightarrow H_{q+1}(\Sigma K; A) \longrightarrow H_q(K; A) \longrightarrow H_q(K_1; A) \oplus H_q(K_2; A),$$

donde $K_i = \{v_i\} * K$. Como $H_q(K_1; A) \cong H_q(K_2; A) \cong 0$ para toda $q \geq 1$, pues son isomorfos al cono de K , se tiene que $H_{q+1}(\Sigma K; A) \cong H_q(K; A)$ para toda $q \geq 1$. \square

Para $q = 0$, de Mayer-Vietoris se obtiene que

$$0 \longrightarrow H_1(\Sigma K; A) \longrightarrow H_0(K; A)$$

Es decir $\partial_1 : H_1(\Sigma K; A) \longrightarrow H_0(K; A)$ es un monomorfismo de grupos. Este morfismo nunca es un isomorfismo pues si K tiene r componentes conexas, entonces $H_0(K; A) \cong A^r$ pero, como se verá más adelante, $H_1(\Sigma K; A) \cong A^{r-1}$. Antes de poder ver esto, es necesario definir otros grupos asociados a K .

Dado K , la *cadena aumentada* de K es la sucesión

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K; A) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K; A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

donde, al igual que antes,

$$\varepsilon \left(\sum a_i \sigma_i \right) = \sum a_i$$

Sea τ una 1-cadena, entonces

$$\tau = \sum_{\sigma=[u_\sigma, v_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma [u_\sigma, v_\sigma]$$

y

$$\varepsilon \circ \partial_1(\tau) = \varepsilon \left(\sum_{\sigma=[u_\sigma, v_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma [v_\sigma] - a_\sigma [u_\sigma] \right) = \sum_{\sigma=[u_\sigma, v_\sigma] \in C_1(K; A)} a_\sigma - a_\sigma = 0$$

por lo que $im(\partial_1) \subseteq ker(\varepsilon)$. Definimos el q -ésimo grupo de homología reducida como $\tilde{H}_q(K; A) = ker(\partial_q)/im(\partial_{q+1})$ para $q \geq 1$ y $\tilde{H}_0(K; A) = ker(\varepsilon)/im(\partial_1)$.

Proposición 2.2.10. (Véase [26]) Sea K un complejo simplicial. Entonces $H_q(K; A) \cong \tilde{H}_q(K; A)$ para $q \geq 1$ y $H_0(K; A) \cong \tilde{H}_0(K; A) \oplus A$.

Demostración. La primera parte de la proposición es clara de la definición de los grupos de homología y la de los grupos de homología reducida. Como $B_0(K; A) \subset \ker(\varepsilon)$, tenemos que ε induce un mapeo

$$\hat{\varepsilon} : H_0(K; A) \longrightarrow A$$

tal que $\ker(\hat{\varepsilon}) = \tilde{H}_0(K; A)$. Ahora, como se vio en la demostración de la Proposición 2.2.3, para todo vértice v_0 de K , $[v_0] \neq 0$, de lo que se deduce que $\hat{\varepsilon}$ es un epimorfismo y por lo tanto $H_0(K; A) \cong \tilde{H}_0(K; A) \oplus A$. \square

Corolario 2.2.11. *Si K es un complejo simplicial conexo, entonces $\tilde{H}_0(K; A) \cong 0$.*

Al igual que para los grupos de homología, se tiene la versión reducida de la sucesión de Mayer-Vietoris.

Teorema 2.2.12. *(Véase [26]) (Sucesión de Mayer-Vietoris para homología reducida) Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 subcomplejos tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces*

$$\longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(K; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(K_1 \cap K_2; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(K_1; A) \oplus \tilde{H}_q(K_2; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(K; A) \longrightarrow$$

es una sucesión exacta.

Más arriba se vio que $H_{q+1}(\Sigma K; A) \cong H_q(K; A)$ para toda $q \geq 1$, para el caso $q = 0$ se dijo que esto no era cierto, ahora con Mayer-Vietoris y la Proposición 2.2.10 se podrá ver el porque esto es cierto.

Corolario 2.2.13. *(Véase [26]) $H_{q+1}(\Sigma K; A) \cong \tilde{H}_q(K; A)$ para toda $q \geq 0$.*

Demostración. Sólo falta ver el caso $q = 0$. Tomando $K_i = \{v_i\} * K$, por Mayer-Vietoris para homología reducida se tiene la siguiente sucesión exacta

$$H_1(K_1; A) \oplus H_1(K_2; A) \longrightarrow H_1(\Sigma K; A) \longrightarrow \tilde{H}_0(K; A) \longrightarrow \tilde{H}_0(K_1; A) \oplus \tilde{H}_0(K_2; A)$$

Como $\tilde{H}_0(K_1; A) \cong \tilde{H}_0(K_2; A) \cong 0$, pues K_1 y K_2 son conexos, y , por el Lema 2.2.4, $\tilde{H}_1(K_1; A) \cong \tilde{H}_1(K_2; A) \cong 0$, se tiene que

$$H_1(\Sigma K; A) \cong \tilde{H}_0(K; A)$$

\square

Más adelante se necesitará calcular los grupos de homología del join de dos simplejos. El siguiente resultado, originalmente publicado por Milnor para el join de espacios topológicos [24], se puede formular de la siguiente forma para complejos simpliciales

Teorema 2.2.14. *(Véase [15])(Fórmula de Künneth para el join) Para todo campo \mathbb{F} y para cualesquiera complejos K, L , se tiene que*

$$\tilde{H}_q(K * L; \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{i+j=q-1} \tilde{H}_i(K; \mathbb{F}) \otimes \tilde{H}_j(L; \mathbb{F}).$$

2.2.1. Homología relativa

Sea K un complejo simplicial y L un subcomplejo, se tiene que $C_q(L; A) \subset C_q(K; A)$ para toda q y como $\partial_q(C_q(L; A)) \subset C_{q-1}(L; A) \subset C_{q-1}(K; A)$, entonces el operador frontera pasa al cociente y tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow C_q(K; A)/C_q(L; A) \xrightarrow{\hat{\partial}_q} C_{q-1}(K; A)/C_{q-1}(L; A) \longrightarrow \dots$$

Definimos el q -ésimo grupo de homología relativa como

$$H_q(K, L; A) = Z_q(K, L)/B_q(K, L)$$

con $Z_q(K, L) = \ker(\hat{\partial}_q)$ el conjunto de q -ciclos relativos y $B_q(K, L) = \text{im}(\hat{\partial}_q)$ el conjunto de las q -fronteras relativas.

Como todo q -ciclo z de $Z_q(K; A)$ es un q -ciclo relativo de $Z_q(K, L)$, pues $\partial_q(z) = 0$ está en $C_{q-1}(L; A)$, se tiene que la inclusión

$$j : C_q(K; A) \longrightarrow C_q(K, L)$$

pasa a los grupos de homología, donde $C_q(K, L) = C_q(K; A)/C_q(L; A)$.

Ahora construiremos un homomorfismo $\tilde{\partial}_q : H_q(K, L; A) \longrightarrow H_{q-1}(L; A)$. Sea z un q -ciclo relativo en $Z_q(K, L)$ y sea z' en $C_q(K; A)$ tal que es un representante de z , entonces $\partial_q(z')$ está en $C_{q-1}(L; A)$. Definimos $\tilde{\partial}_q([z]) = [\partial_q(z')]$. Veamos que este homomorfismo está bien definido. Si z'' es otro representante de z , entonces $z'' = z' + w$, con w en $C_q(L; A)$, entonces

$$\partial_q(z'') - \partial_q(z') = \partial_q(w)$$

con $\partial_q(w)$ en $C_{q-1}(L; A)$, por lo que $[\partial_q(z')] = [\partial_q(z'')]$. Sea \tilde{z} un q -ciclo relativo tal que tiene la misma clase que z , entonces $\tilde{z} = z + \tilde{w}$ con \tilde{w} una q -frontera relativa, es decir \tilde{w} tiene representantes de la forma $\partial_{q+1}(c_1) + c_2$ donde c_1 es un elemento de $C_{q+1}(K; A)$ y c_2 lo es de $C_q(L; A)$, entonces, si z' es un representante de z , \tilde{z} tiene representante $z' + \partial_{q+1}(c_1) + c_2$ y por lo tanto

$$\tilde{\partial}_q([\tilde{z}]) = [\partial_q(z')] + [\partial_q \circ \partial_{q+1}(c_1)] + [\partial_q(c_2)] = [\partial_q(z')] = \tilde{\partial}_q([z])$$

por lo que este morfismo está bien definido.

Teorema 2.2.15. (Véase [26]) *Sea K un complejo simplicial y sea L un subcomplejo. Entonces existe la siguiente sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_q(L; A) \xrightarrow{i_*} H_q(K; A) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L; A) \xrightarrow{\hat{\partial}_q} H_{q-1}(L; A) \longrightarrow \cdots$$

con i_* el homomorfismo inducido por la inclusión $i : L \hookrightarrow K$, j_* y ∂_q los homomorfismos definidos antes del teorema.

Demostración. Primero veremos que $\ker(j_*) = \text{im}(i_*)$. Observemos que al nivel de las cadenas $j_q \circ i_q \equiv 0$ por lo que sólo hace falta ver que $\ker(j_*) \subseteq \text{im}(i_*)$. Sea z un q -ciclo en $Z_q(K; A)$ tal que $j_*([z]) = 0$, entonces $z = \partial_{q+1}(z') + z''$ con z' en $C_{q+1}(K; A)$ y z'' en $C_q(L; A)$. Entonces $[z] = [z'']$.

Veamos ahora que $\text{im}(j_*) = \ker(\tilde{\partial}_q)$. Sea z en $Z_q(K; A)$, entonces

$$\tilde{\partial}_q \circ j_*([z]) = [\partial_q(z)] = [0] = 0$$

Sea z en $Z_q(K, L; A)$ tal que $\tilde{\partial}_q([z]) = 0$, entonces existe z' en $C_q(K; A)$ tal que es un representante de z en $C_q(K, L; A)$ y $\tilde{\partial}_q([z]) = [\partial_q(z')] = 0$, lo que implica que existe un z'' en $C_q(L; A)$ tal que $\partial_q(z'') = \partial_q(z')$. Tomando $\hat{z} = z' - z''$, se tiene que $\partial_q(\hat{z}) = 0$ y que $j_*([\hat{z}]) = [z]$.

Veamos por último que $\text{im}(\tilde{\partial}_q) = \ker(i_*)$. Sea $[z]$ en $\text{im}(\tilde{\partial}_q)$, entonces $[z] = [\partial_q(z')]$ con z' en $C_q(L; A) \subseteq C_q(K; A)$, por lo que $i_*([z]) = 0$.

Sea $[z]$ en $\ker(i_*)$, entonces existe z' en $C_q(K; A)$ tal que $z = \partial_q(z')$, como z está en $C_{q-1}(L; A)$ se tiene que z' es representante de un q -ciclo en $Z_q(K, L; A)$ por lo que $\hat{\partial}_q([z']) = [z]$. \square

Corolario 2.2.16. *Sea K un complejo simplicial y $r \geq 0$, entonces:*

1. $H_q(K, K^r; A) \cong 0$ para toda $q \leq r$
2. $H_q(K; A) \cong H_q(K^r; A)$ para toda $q < r$
3. Para $q = r$, $i_* : H_q(K^r; A) \longrightarrow H_q(K; A)$ es suprayectiva

Demostración. Para toda $q \leq r$ $C_q(K) = C_q(K^r)$, entonces, como para todo $c \in C_q(K)$ se tiene que $c = \partial_{q+1}(0) + c$, $C_q(K) \subset B_q(K, K^r)$. Ahora, como $\partial_q(C_q(K)) \subset C_{q-1}(K^r)$, entonces $Z_q(K, K^r) = C_q(K)$. Por lo tanto $H_q(K, K^r; A) \cong 0$ para toda $q \leq r$, por lo que se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_q(K^r; A) \xrightarrow{i_*} H_q(K; A) \longrightarrow 0$$

Entonces para toda $q < r$ se tiene que $H_q(K; A) \cong H_q(K^r; A)$.

Para $q = r$, de la sucesión de parejas se tiene

$$H_{r+1}(K, L; A) \longrightarrow H_r(K^r; A) \xrightarrow{i_*} H_r(K; A) \longrightarrow 0$$

□

2.2.2. Homología de una gráfica

Toda gráfica simple G puede pensarse como un complejo simplicial, con conjunto de vértices $V(G)$ y con simplejos $E(G) \cup \mathcal{P}_1(V(G))$. Dada una gráfica G , sus grupos de homología serán los grupos de homología del complejo que acabamos de definir. Ahora, dado un ciclo $c = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ le podemos asignar la siguiente 1-cadena

$$[c] = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + \dots + [v_{k-1}, v_k] + [v_k, v_0]$$

entonces $\partial[c] = 0$, es decir toda 1-cadena proveniente de un ciclo es un 1-ciclo de la homología. Sea

$$C(G) = \langle \{[c] \in Z_1(G; \mathbb{Z}_2) : c \text{ tiene un representante que proviene de un ciclo}\} \rangle$$

el espacio de ciclos de G .

Proposición 2.2.17. (Véase [9]) Sea G una gráfica. Entonces

$$H_1(G; \mathbb{Z}_2) \cong C(G).$$

Más aun, para todo $[c] \in H_1(G; \mathbb{Z}_2)$ existen c_1, \dots, c_k ciclos de G ajenos por aristas tales que

$$[c] = \sum_{i=1}^k [c_k].$$

Demostración. Sea G una gráfica. Sean $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$. Tomamos $A \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir A es la matriz de adyacencia de G . Como el complejo asociado a G no tiene 2-simplejos, se tiene que

$$H_1(G; \mathbb{Z}_2) \cong Z_1(G; \mathbb{Z}_2)$$

pues $C_2(G) = 0$, probaremos que tanto $Z_1(G; \mathbb{Z}_2)$ como $C(G)$ son isomorfos a $\ker(A)$.

Todo 1-ciclo $[c] \in Z(G; \mathbb{Z}_2)$ se puede pensar como un vector \vec{v}_c en \mathbb{Z}_2^m pues $[c]$ es de la forma

$$[c] = \sum_{e \in E(G)} a_e [e]$$

entonces la i -ésima coordenada de \vec{v}_c es igual a a_{e_i} . Esta asociación es una transformación lineal. Tomando $[e] = [u_e, w_e]$, se tiene que

$$0 = \partial[c] = \sum_{e \in E(G)} a_e [u_e] + a_e [w_e] = \sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{v \in e} a_e \right) [v]$$

esto pasa si y sólo si

$$\sum_{v \in e} a_e = 0$$

para todo $v \in V(G)$. Ahora, la i -ésima coordenada de $A\vec{v}_c$ es igual a

$$\sum_{v \in e} a_e$$

por lo tanto $\vec{v}_c \in \ker(A)$.

Sean $[c_1], [c_2] \in Z(G; \mathbb{Z}_2)$ tales que $\vec{v}_{c_1} = \vec{v}_{c_2}$, tomando

$$[c_1] = \sum_{e \in E(G)} a_e [e]$$

y

$$[c_2] = \sum_{e \in E(G)} b_e [e]$$

se tiene que $a_e = b_e$ para toda $e \in E(G)$, por lo que $[c_1] = [c_2]$. Por lo tanto la transformación es un monomorfismo.

Todo $\vec{w} \in \ker(A)$ es imagen de una 1-cadena $[c]_w \in C_1(G)$ donde

$$[c]_w = \sum_{e \in E(G)} a_e [e]$$

donde a_{e_i} es igual a la i -ésima coordenada de \vec{w} . De forma análoga a lo hecho más arriba se puede ver que $\partial[c]_w = 0$, por lo que $[c]_w \in Z(G; \mathbb{Z}_2)$ y la transformación es un epimorfismo. Por lo tanto la transformación es un isomorfismo y $Z_1(G; \mathbb{Z}_2) \cong \ker(A)$.

Ahora probaremos que $C(G) \cong \ker(A)$. Para esto veremos que los vectores de \mathbb{Z}_2^m asociados a los ciclos de G generan el núcleo de A . Sea c un ciclo de G , tomamos \vec{c} el vector con entrada i igual a 1 si e_i está en c y 0 en otro caso, entonces

$$A\vec{c} = \vec{u}$$

la coordenada j de \vec{u} es igual al número de aristas de c que inciden en v_j módulo 2, la cual es 0 si v_j no está en el ciclo y es 2 = 0 si v_j está en el ciclo. Por lo tanto $\vec{c} \in \ker(A)$.

Ahora, sea $\vec{c} \in \ker(A)$ y tomemos $c = \{e_i \in E(G) : \text{la } i\text{-ésima coordenada de } \vec{c} \text{ es } 1\}$, de esta forma la coordenada j de $A\vec{c}$ es igual al número de aristas de c que inciden en v_j módulo 2, como $A\vec{c} = \vec{0}$, se tiene que las aristas de c inciden un número par de veces en todos los vértices de G , por lo tanto existe una partición de c en c_1, \dots, c_k conjuntos ajenos de aristas de ciclos, de esta forma

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^k \vec{c}_i$$

Así se obtiene que $C(G) \cong \ker(A)$ y que para todo $[c] \in H_1(G; \mathbb{Z}_2)$ existen c_1, \dots, c_k ciclos

de G ajenos por aristas tales que

$$[c] = \sum_{i=1}^k [c_k]$$

□

2.2.3. Homotopía de cadenas

Dos complejos no isomorfos pueden tener grupos de homología isomorfos, es decir, los grupos de homología no caracterizan a un complejo. La siguiente definición servirá para poder decir cuándo dos complejos no isomorfos tienen grupos de homología isomorfos. Dados dos morfismos simpliciales $h, g : K \rightarrow L$, si existe una familia de morfismos

$$D_q : C_q(K; A) \rightarrow C_{q+1}(L; A)$$

tales que

$$\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = g_q - h_q,$$

decimos que la familia es una *homotopía de cadenas* entre h y g .

Teorema 2.2.18. (Véase [26]) Sean $h, g : K \rightarrow L$ dos morfismos simpliciales. Si existe una homotopía de cadenas. Entonces $h_* = g_*$

Demostración. Sea z un q -ciclo en $Z_q(K; A)$, entonces

$$g_q(z) - h_q(z) = \partial_{q+1}(D_q(z)) + D_{q-1}(\partial_q(z)) = \partial_{q+1}(D_q(z))$$

entonces $h_*([z]) = [h_q(z)] = [g_q(z)] = g_*([z])$. □

El siguiente teorema es un caso particular del teorema de soportes acíclicos (Véase [26]).

Teorema 2.2.19. Sea K un complejo y sean u, v vértices tales que para todo simplejo σ que tenga a v como vértice se tiene que $\{u\} \cup \sigma$ es un simplejo de K . Entonces existe una homotopía de cadenas entre la identidad y el morfismo

$$\varphi(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \neq v \\ u & \text{si } w = v \end{cases}$$

Demostración. Veremos que $\varphi_* = 1_{K_*}$, construyendo una homotopía de cadenas

$$D_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(K)$$

de forma inductiva, de forma tal que para cada q -simplejo σ el soporte de $D_q(\sigma)$ esté contenido un subcomplejo $K(\sigma)$ acíclico de K que será soporte de σ y $\varphi_q(\sigma)$. El soporte dado por

$$K(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } v \notin \sigma \\ \{u\} \cup \sigma & \text{si } v \in \sigma \end{cases}$$

es el soporte buscado. Este soporte cumple que si $\sigma' \subset \sigma$, entonces $K(\sigma') \subset K(\sigma)$.

Para $q = 0$ definimos

$$D_0(a[w]) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \neq v \\ a[u, v] & \text{si } w = v \end{cases}$$

entonces

$$\partial_1 D_0(a[w]) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \neq v \\ a[u] - a[v] & \text{si } w = v \end{cases}$$

en cualquier caso $\partial_1 D_0(a[w]) = \varphi_0(a[w]) - 1_{K_0}(a[w])$ y el soporte

$$K([w]) = \begin{cases} \{w\} & \text{si } w \neq v \\ \{\{u\}, \{v\}, \{u, v\}\} & \text{si } w = v \end{cases}$$

es acíclico. Supóngase que ya se tiene D_{q-1} . Sea σ un q -simplejo orientado en $C_q(K)$ y definimos

$$c_q = \varphi_q(\sigma) - \sigma - D_{q-1}\partial_q(\sigma)$$

entonces

$$\begin{aligned} \partial_q(c_q) &= (\partial_q\varphi_q - \partial_q 1_{K_q} - \partial_q D_{q-1}\partial_q)(\sigma) \\ &= (\partial_q\varphi_q - \partial_q 1_{K_q} - (\varphi_{q-1}\partial_q - 1_{K_{q-1}}\partial_q - D_{q-1}\partial_{q-1}\partial_q))(\sigma) = 0 \end{aligned}$$

con $K(\sigma)$ un soporte acíclico para $\sigma, \partial_q(\sigma), D_{q-1}\partial_q(\sigma), \varphi_q(\sigma)$, por lo que es un soporte para c_q . Como $H_q(K(\sigma); A) \cong 0$, entonces existe una $q+1$ -cadena $D_q(\sigma)$ tal que $\partial_{q+1}D_q(\sigma) = c_q$. Por lo tanto $\varphi_* = 1_{K_*}$. \square

2.3. Complejos geométricos

Dados v_0, v_1, \dots, v_n puntos de \mathbb{R}^m , diremos que son *afinmente independientes* si el conjunto $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es linealmente independiente. Un *n-simplejo geométrico* es un conjunto

$$\sigma = \left\{ w = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \forall i \right\}$$

donde $\{v_i\}_{i=0}^n$ es afinmente independiente.

Un *complejo simplicial geométrico (finito)* es un conjunto finito Δ de simplejos geométricos en algún \mathbb{R}^m que cumplen:

1. si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in \Delta$
2. si $\sigma, \tau \in \Delta$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ

Dado un complejo simplicial geométrico Δ se le asocia un complejo simplicial $\mathcal{K}(\Delta)$ con vértices $V(\Delta)$ y definido como

$$\mathcal{K}(\Delta) = \{V(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$$

Dado un complejo simplicial K la *realización geométrica de K* , denotada por $|K|$, es un complejo simplicial geométrico Δ tal que $\mathcal{K}(\Delta) \cong K$. De esta forma, diremos que K es contraíble si $|K|$ lo es. Por ejemplo, si tomamos el complejo simplicial

$$\Delta^2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

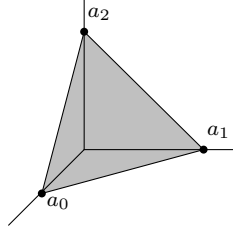
este tiene como realización geométrica al complejo geométrico

$$\sigma = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1), \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \forall i\}$$

que se muestra en la Figura 2.3, el cual es contraíble, por lo que Δ^2 lo es.

Lema 2.3.1. (Véase [25]) Si K, L son complejos simpliciales, entonces $|K * L| \cong |K| * |L|$.

Demostración. Sean K, L complejos simpliciales. Si $V(K) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $V(L) = \{w_1, \dots, w_m\}$, tomamos $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ y $|L| \subseteq \mathbb{R}^m$ mandando cada vértice al elemento de la base canónica con el mismo índice. Para $|K * L| \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mandamos los vértices de K como antes y los de L

Figura 2.3: $|\Delta^2|$

a los elementos de la base canónica recorridos n lugares. Tomamos el mapeo

$$f : |K| \times [0, 1] \times |L| \longrightarrow |K * L|$$

$$f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, t, \sum_{j=1}^m \tau_j e_j \right) = \left((1-t) \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, t \sum_{j=1}^m \tau_j e_{j+n} \right).$$

Afirmamos que f es suprayectiva. Sea (x, y) en $|K * L|$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^m \tau_j e_{j+n},$$

donde

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \tau_j = 1.$$

Tomamos $t = \tau_1 + \dots + \tau_m$. Claramente t está en $[0, 1]$. Si $t = 0$, entonces $f(x, 0, e_j) = (x, y)$ para toda j . Si $t = 1$, entonces $f(e_i, 1, y) = (x, y)$ para toda i . Supóngase que $0 < t < 1$, entonces, tomando

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-t} e_i \quad \text{y} \quad \hat{y} = \sum_{j=1}^m \frac{\tau_j}{t} e_j,$$

se tiene que $f(\hat{x}, t, \hat{y}) = (x, y)$. Por lo tanto f es suprayectiva. En $|K| \times [0, 1] \times |L|$ tomamos la relación de equivalencia $a \sim b$ si y sólo si $f(a) = f(b)$. Afirmamos que

$$|K| \times [0, 1] \times |L| / \sim = |K * L|.$$

Para $t = 0, 1$ es claro que solo identifica lo que debe. Sean $(x_1, t_1), (x_2, t_2, y_2)$ en $|K| \times$

$(0, 1) \times |L|$ tales que $f(x_1, t_1, y_1) = f(x_2, t_2, y_2)$. Entonces, si

$$x_l = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l e_i \quad \text{y} \quad y_l = \sum_{j=1}^m \tau_j^l e_{j+n},$$

se tiene que

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n ((1-t_1)\lambda_i^1 - (1-t_2)\lambda_i^2) e_i + \sum_{j=1}^m (t_1\tau_j^1 - t_2\tau_j^2) e_{j+n},$$

por lo que $(1-t_1)\lambda_i^1 - (1-t_2)\lambda_i^2 = 0$ para toda i y $t_1\tau_j^1 - t_2\tau_j^2 = 0$ para toda j . De aquí se obtiene que

$$\sum_{i=1}^n ((1-t_1)\lambda_i^1 - (1-t_2)\lambda_i^2) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m (t_1\tau_j^1 - t_2\tau_j^2) = 0,$$

y, reordenando,

$$(1-t_1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^1 + (t_2-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0 \quad \text{y} \quad t_1 \sum_{j=1}^m \tau_j^1 - t_2 \sum_{j=1}^m \tau_j^2 = 0.$$

Entonces se obtiene que $t_1 = t_2$ y, por lo tanto, $\lambda_i^1 - \lambda_i^2 = 0$ para toda i y $\tau_j^1 - \tau_j^2 = 0$ para toda j .

Sea $A = B_{\epsilon_1}(x) \cap |K| \times J \times B_{\epsilon_2}(y) \cap |L|$ un abierto de $|K| \times [0, 1] \times |L|$. Entonces

$$f(A) = \bigcup_{t \in J} ((1-t)B_{\epsilon_1}(x) \times tB_{\epsilon_2}(y)) \cap |K * L|,$$

que es un abierto. Como f manda abiertos básicos en abiertos, se tiene que f es abierta y por lo tanto es una identificación. Entonces, por el Teorema 1.3.4, $\hat{f} : |K| * |L| \rightarrow |K * L|$ es un homeomorfismo. \square

2.4. Homología singular

Dado un espacio topológico X , definimos el *grupo de q -cadenas* de X con coeficientes en A como el módulo

$$C_q(X; A) = A \langle \{ \sigma : \Delta^q \longrightarrow X : \sigma \text{ es continua} \} \rangle$$

donde

$$\Delta^q = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{q+1} : \vec{x} = \sum_{i=1}^{q+1} t_i e_i, t_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{q+1} t_i = 1 \right\}.$$

Se define el *operador frontera* como

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]},$$

donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]}$ significa la restricción de σ a los puntos para los cuales $t_{i+1} = 0$. Al igual que para la homología simplicial se tiene que $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$ y se define el *q -ésimo grupo de homología* de X como

$$H_q(X; A) = \ker(\partial_q) / \text{im}(\partial_{q+1}).$$

Al igual que para homología simplicial, se define el morfismo de extensión $\varepsilon : C_0(X; A) \longrightarrow A$ y los grupos de *homología reducida* como los grupos asociados a la sucesión

$$\longrightarrow \overset{\partial}{\longrightarrow} C_q(X; A) \longrightarrow \overset{\partial}{\longrightarrow} C_{q-1}(X; A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \overset{\partial}{\longrightarrow} C_0(X; A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

Teorema 2.4.1. (Véase [13]) Si $X \simeq Y$, entonces para toda q se tiene que $\tilde{H}_q(X; A) \cong \tilde{H}_q(Y; A)$.

Corolario 2.4.2. (Véase [13]) Si $X \simeq *$, entonces $\tilde{H}_q(X; A) \cong 0$ para toda q .

Proposición 2.4.3. (Véase [13]) Para una cuña de circunferencias $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{S}_\alpha^{n_\alpha}$ se tiene que

$$\tilde{H}_q \left(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{S}_\alpha^{n_\alpha}; A \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \tilde{H}_q(\mathbb{S}_\alpha^{n_\alpha}; A).$$

Al igual que para homología simplicial, se tiene para homología singular la sucesión de

Mayer-Vietoris.

Teorema 2.4.4. (Suseción de Mayer-Vietoris)(Véase [13]) Sea X un espacio topológico y sean Y_1, Y_2 subespacios tales que $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ = X$. Entonces

$$\longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(X; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(Y_1 \cap Y_2; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(Y_1; A) \oplus \tilde{H}_q(Y_2; A) \longrightarrow \tilde{H}_q(X; A) \longrightarrow$$

es una sucesión exacta.

Con la sucesión de Mayer-Vietoris podemos calcular los grupos de homología reducida de las esferas.

Teorema 2.4.5. (Véase [13]) Para toda $k \geq 0$, se tiene que

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^k; A) \cong \begin{cases} A, & \text{si } q = k, \\ 0, & \forall q \neq k. \end{cases}$$

Demostración. Para $k = 0$, \mathbb{S}^0 es igual a $\{-1, 1\}$, por lo que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^k; A) \cong A$. Para toda $q \neq 0$, se tiene que $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^0; A) \cong \tilde{H}_q(*; A) \oplus \tilde{H}_q(*; A) \cong 0$. Supóngase que el teorema es cierto para toda $k \leq r$. Ahora, para \mathbb{S}^{r+1} tomamos los conjuntos cerrados B_1 y B_2 dados por

$$B_1 = \{(x_1, \dots, x_{r+2}) \in \mathbb{S}^{r+1} : -0.1 \leq x_{q+2} \leq 1\}$$

$$B_2 = \{(x_1, \dots, x_{r+2}) \in \mathbb{S}^{r+1} : -1 \leq x_{q+2} \leq 0.1\}$$

Entonces $B_1 \cong B_2 \cong \mathbb{D}^{r+1}$, $\mathbb{S}^{r+1} = B_1^\circ \cup B_2^\circ$ y $B_1 \cap B_2 \simeq \mathbb{S}^r$. Como B_1 y B_2 son contraíbles, se tiene que $\tilde{H}_q(B_1; A) \cong 0 \cong \tilde{H}_q(B_2; A)$ para toda q . Por Mayer-Vietoris obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^{r+1}; A) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^r; A) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto se obtiene que $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^{r+1}; A) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^r; A)$ para toda q , con lo que se obtiene el resultado. \square

Teorema 2.4.6. (Véase [13]) Sea K un complejo simplicial y $|K|$ su realización geométrica. Entonces

$$\tilde{H}_q(K; A) \cong \tilde{H}_q(|K|; A).$$

Capítulo 3

Dominación total y homología

En este capítulo, la primera sección está dedicada al complejo de independencia de una gráfica así como a algunas de sus propiedades. En la segunda sección daremos la cota de Meshulam ([23]), la cual nos dice que si el q -ésimo grupo de homología reducida de $I(G)$ es no trivial, entonces la dominación de la gráfica es a lo más $2q + 2$. En la tercera se darán las mejoras a la cota logradas para dos casos, $q = 1, 2$, pidiendo más condiciones a los grupos de homología y daremos dos conjeturas. En la última sección trabajaremos con una familia particular de gráficas y daremos algunas de sus propiedades, las cuales nos llevarán a sugerir otras conjeturas para la dominación total en términos de los grupos de homología.

3.1. El complejo de independencia

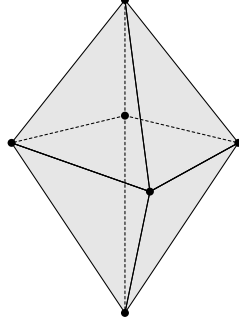
En esta sección definiremos el complejo de independencia de una gráfica y daremos algunas propiedades de este complejo.

Definimos el complejo de independencia de G como:

$$I(G) = \{\sigma \subset V(G) : E(G[\sigma]) = \emptyset \text{ y } \sigma \neq \emptyset\}.$$

Observación. Para $r = 1$, σ es un 1-simplejo de $I(G)^1$ si y solo si σ es arista de G^c , por lo que $I(G)^1 = G^c$ al tomar el complejo asociado a la gráfica complemento. De esta forma,

$$H_0(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong H_0(G^c; \mathbb{Z}_2)$$

Figura 3.1: $I(3K_2)$

y

$$i_* : H_1(G^c; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$$

es suprayectiva por el Corolario 2.2.16. Por la Proposición 2.2.17, todo elemento no nulo de $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$ tiene un representante que puede pensarse como la suma de ciclos ajenos por aristas de G^c .

Para $q \in \mathbb{N}$ definimos qK_2 como la gráfica con vértices $V(qK_2) = \bigcup_{i=1}^q \{a_i, b_i\}$ y conjunto de aristas $E(qK_2) = \{\{a_i, b_i\} : 1 \leq i \leq q\}$. Esta gráfica sirve para dar una cota inferior al número de simplejos de las demás gráficas con $q - 1$ -ésimo grupo de homología no trivial.

Teorema 3.1.1. ([23]) Sea G tal que $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ para $q \geq 1$. Entonces

$$f_j(I(G)) \geq f_j(I((q+1)K_2)) = 2^{j+1} \binom{q+1}{j+1}$$

para toda $0 \leq j$.

Demostración. Para $q = 0$, el resultado es claro. Supóngase que el resultado es cierto para toda $q \leq k$ y sea G tal que $H_{k+1}(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$. Podemos suponer que para todo subconjunto propio no vacío V_0 de $V(G)$ $H_{k+1}(I(G[V_0]); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Como el $k+1$ -ésimo grupo de homología no se anula, se tiene que G debe tener una arista $\{v_1, v_2\}$. Definimos $X_i = I(G - v_i)$, $G_i = G - N_G[v_i]$, $Y_i = v_i * I(G_i)$. Por el Lema 2.2.4, se tiene que $H_{k+1}(Y_i; \mathbb{Z}_2) \cong 0$, como $G - v_i$ es una gráfica inducida por un subconjunto propio de vértices, $H_{k+1}(X_i; \mathbb{Z}_2) \cong$

0. Hay que observar que $I(G) = X_i \cup Y_i$, $X_i \cap Y_i = I(G_i)$. De la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\longrightarrow H_{k+1}(X_i; \mathbb{Z}_2) \oplus H_{k+1}(Y_i; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{k+1}(I(G); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \tilde{H}_k(I(G_i); \mathbb{Z}_2)$$

se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(I(G); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \tilde{H}_k(I(G_i); \mathbb{Z}_2)$$

De donde se obtiene que $\tilde{H}_k(I(G_i); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$. Tomando los siguientes conjuntos

$$S_1 = \{\sigma \in I(G_i) : \dim \sigma = j\}$$

$$T_i = \{\sigma \in Y_i : v_i \in \sigma, \dim \sigma = j\}$$

se tiene, por hipótesis de inducción, que

$$|S_1| = f_j(I(G_i)) \geq 2^{j+1} \binom{k+1}{j+1}$$

$$|T_i| = f_{j-1}(I(G_i)) \geq 2^j \binom{k+1}{j}$$

Los conjuntos S_1, T_1, T_2 son disjuntos pues v_1 y v_2 son vecinos, por lo que $v_1, v_2 \notin V(G_i)$, $v_1 \notin V(Y_2)$ y $v_2 \notin V(Y_1)$. entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f_j(I(G)) &\geq |S_1| + |T_1| + |T_2| \geq 2^{j+1} \binom{k+1}{j+1} + 2^j \binom{k+1}{j} + 2^j \binom{k+1}{j} \\ &= 2^{j+1} \binom{k+1}{j+1} + 2 \cdot 2^j \binom{k+1}{j} = 2^{j+1} \binom{k+2}{j+1} \end{aligned}$$

Con lo que queda probado el teorema. \square

Corolario 3.1.2. *Sea G una gráfica tal que $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ y para cualquier elemento no nulo $[c]$ de $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2)$ se tiene que cualquier representante c es tal que $V(|c|) = V(G)$. Entonces se tiene que:*

1. $\delta(G^c) \geq 2q$.
2. Si $|V(G)| = 2q + 2$, entonces $G \cong (q + 1)K_2$.

Demostración. (1.) Como $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \neq 0$, se tiene que G no tiene vértices aislados. Sea u un vértice de G y defínase $X = I(G - u)$, $G' = G - N_G[u]$ y $Y = \{u\} * I(G')$. Entonces $I(G) = X \cup Y$, $I(G') = X \cap Y$ y $\tilde{H}_q(Y; \mathbb{Z}_2) \cong 0$. De la sucesión de Mayer-Vietoris se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\longrightarrow \tilde{H}_q(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(I(G'); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

Como para todo elemento del grupo de homología el soporte de cualquier representante tiene a todos los vértices, se tiene que el morfismo inducido por la inclusión es el morfismo cero, por lo que se tiene la sucesión

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(I(G'); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

Por lo tanto $\tilde{H}_{q-1}(I(G'); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, por el Teorema 3.1.1, se tiene que $|V(G')| \geq 2q$ y como u es adyacente en G^c a todos los vértices de G' , se tiene que $d_{G^c}(u) \geq 2q$.

(2.) Como $|V(G)| = 2q + 2$ y $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \neq 0$, del inciso anterior se tiene que G^c es $2q$ -regular, por lo tanto G es 1-regular. \square

Lema 3.1.3. ([12]) Si $G = G_1 \sqcup G_2$, entonces $I(G) = I(G_1) * I(G_2)$.

Corolario 3.1.4. Si $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_k$, entonces

$$\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{i_1 + \cdots + i_k = q+1-k} \tilde{H}_{i_1}(I(G_1); \mathbb{Z}_2) \otimes \cdots \otimes \tilde{H}_{i_k}(I(G_k); \mathbb{Z}_2).$$

Demostración. Una consecuencia del Lema 3.1.3, es que $I(G) = I(G_1) * \cdots * I(G_k)$. Por inducción sobre $k \geq 2$ El Teorema 2.2.14 es la base de la inducción. Supóngase que $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_{k+1}$ y defínase $G' = G_2 \sqcup \cdots \sqcup G_{k+1}$, entonces $G = G_1 \sqcup G'$ y utilizando el Teorema 2.2.14, se tiene que

$$\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{i+j=q-1} \tilde{H}_i(I(G_1); \mathbb{Z}_2) \otimes \tilde{H}_j(I(G'); \mathbb{Z}_2).$$

Por hipótesis de inducción

$$\tilde{H}_j(I(G'); \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{i_2 + \cdots + i_{k+1} = j+1-k} \tilde{H}_{i_2}(I(G_2); \mathbb{Z}_2) \otimes \cdots \otimes \tilde{H}_{i_{k+1}}(I(G_{k+1}); \mathbb{Z}_2).$$

Por las propiedades del producto tensorial, se tiene que

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_i(I(G_1); \mathbb{Z}_2) \otimes \bigoplus_{i_2 + \dots + i_{k+1} = j+1-k} \tilde{H}_{i_2}(I(G_2); \mathbb{Z}_2) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_{i_{k+1}}(I(G_{k+1}); \mathbb{Z}_2). \\ & \cong \bigoplus_{i_2 + \dots + i_{k+1} = j+1-k} \tilde{H}_i(I(G_1); \mathbb{F}) \otimes \tilde{H}_{i_2}(I(G_2); \mathbb{Z}_2) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_{i_{k+1}}(I(G_{k+1}); \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Como $i + i_2 + \dots + i_{k+1} = i + j + 1 - k = (q - 1) + 1 - k = q + 1 - (k + 1)$, se obtiene el resultado buscado. \square

Teorema 3.1.5. ([19])

$$|I(C_n)| \simeq \begin{cases} \mathbb{S}^{k-1} \vee \mathbb{S}^{k-1} & \text{si } n = 3k \\ \mathbb{S}^{k-1} & \text{si } n = 3k \pm 1 \end{cases}$$

Lema 3.1.6. Sea G tal que tiene un par de vértices u, v tales que $N_G(u) \subseteq N_G(v)$. Entonces el morfismo

$$\varphi(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \neq v \\ u & \text{si } w = v \end{cases}$$

y la identidad $1_{I(G)}$ inducen el mismo morfismo al pasar a los grupos de homología.

Demostración. Como $N_G(u) \subseteq N_G(v)$ se tiene que si σ es un simplejo de $I(G)$ que contienen a v , entonces $\{u\} \cup \sigma$ es un simplejo de $I(G)$. Por el Teorema 2.2.19 se obtiene el resultado. \square

El Lema anterior es la consecuencia de un resultado más fuerte.

Lema 3.1.7. ([12]) Sea G tal que tiene un par de vértices u, v tales que $N_G(u) \subseteq N_G(v)$. Entonces $|I(G)| \simeq |I(G - v)|$.

Observación. G es C_5 -libre si y sólo si G^c lo es.

Lema 3.1.8. Sea G tal que para alguna $q \geq 1$ se tiene que $|V(G)| = 2q + 3$, $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ y para todo elemento no nulo $[c]$, $f_0([c]) = 2q + 3$ para todo representante. Entonces $G \cong C_5 \sqcup (q - 1)K_2$.

Demostración. Para $q = 1$, todo elemento de $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$ tiene por soporte a un complejo isomorfo a C_5 , por lo que $C_5 \leq G^c$. Ahora G^c no puede tener más aristas, pues si las

tuviera el grupo sería trivial o existirían elementos con soportes con 4 vértices. Por lo tanto $G^c \cong C_5$, lo que implica que $G \cong C_5$.

Supóngase que el teorema es cierto para toda $2 \leq q \leq k$ y sea G tal que $|V(G)| = 2q + 3$, $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ y para todo elemento no nulo $[c]$, $f_0(|c|) = 2q + 3$ para todo representante, con $q = k + 1$. Como $I(G)$ no es acíclico, se tiene que $\Delta(G^c) \leq 2q + 1$ y como todo vértice está en el soporte de todo elemento no nulo del q -ésimo grupo de homología, se tiene que $\delta(G^c) \geq 2q$ por el Corolario 3.1.2.

Si $\Delta(G^c) = 2q$, entonces G es 2-regular, por lo que es un ciclo o la unión disjunta de ciclos.

1. Si $G \cong C_{2q+3}$ se tiene que

$$|I(G)| \simeq \begin{cases} \mathbb{S}^{2k} \vee \mathbb{S}^{2k} & \text{si } q = 3k \\ \mathbb{S}^{2k+1} & \text{si } q = 3k + 1 \\ \mathbb{S}^{2k-1} & \text{si } q = 3k - 1 \end{cases}$$

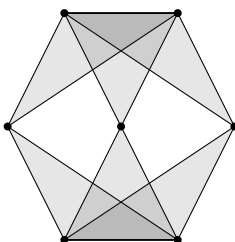
con $k \geq 1$. En cualquier caso se obtiene que la dimensión de las esferas es menor a q , por lo que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, lo que no puede pasar por hipótesis.

2. Si $G \cong C_{i_1} \sqcup \cdots \sqcup C_{i_l}$, entonces se tiene que

$$\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{j_1 + \cdots + j_l = q + 1 - l} \tilde{H}_{j_1}(I(C_{i_1}); \mathbb{Z}_2) \otimes \cdots \otimes \tilde{H}_{j_l}(I(C_{i_l}); \mathbb{Z}_2).$$

Donde $i_1 + \cdots + i_l = 2q + 3$. Como $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, tienen que existir j_1, \dots, j_l números naturales tales que $\tilde{H}_{j_m}(I(C_{i_m}); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ y $j_1 + \cdots + j_l = q + 1 - l$. Para cada m , tómesese $i_m = 3k_m + r_m$ con $-1 \leq r_m \leq 1$. Como $|I(C_{i_m})|$ es homotópico a una esfera de dimensión $k_m - 1$ o a una cuña de dos esferas de dimensión $k_m - 1$, se tiene que $j_m = k_m - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} 2q + 3 &= \sum_{m=1}^l i_m = \sum_{m=1}^l 3k_m + r_m = \sum_{m=1}^l 3(j_m + 1) + r_m = 3 \sum_{m=1}^l j_m + 3l + \sum_{m=1}^l r_m \\ &= 3(q + 1 - l) + 3l + \sum_{m=1}^l r_m = 3q + 3 + \sum_{m=1}^l r_m \end{aligned}$$

Figura 3.2: $I(C_3) * I(C_4)$

por lo tanto

$$q = - \sum_{m=1}^l r_m \leq l$$

Entonces $n \leq 2l + 3$, es decir G tiene dos vértices por cada ciclo más tres vértices extra y es la unión disjunta de l ciclos. Ahora, $l \geq 2$, pero no puede ser mayor a 3 pues cada ciclo debe tener por lo menos 3 vértices, de esta forma sólo puede pasar que:

- Si $l = 2$, entonces $n = 7$ y $q = 2$, por lo que $G \cong C_3 \sqcup C_4$ y $I(G) \cong I(C_3) * I(C_4)$ (véase Figura 3.2). Pero $|I(C_3) * I(C_4)| \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, por lo que $H_2(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, que por hipótesis no puede pasar.
- Si $l = 3$, entonces $n = 9$ y $q = 3$, por lo que $G \cong C_3 \sqcup C_3 \sqcup C_3$. Pero por el Corolario 2.2.14

$$\tilde{H}_3(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{j_1+j_2+j_3=1} \tilde{H}_{j_1}(I(C_3); \mathbb{Z}_2) \otimes \tilde{H}_{j_2}(I(C_3); \mathbb{Z}_2) \otimes \tilde{H}_{j_3}(I(C_3); \mathbb{Z}_2).$$

Por lo tanto, $j_i = 1$ para alguna $1 \leq i \leq 3$. Lo que es una contradicción, pues $\tilde{H}_1(I(C_3); \mathbb{Z}_2) \cong 0$.

Por lo tanto $\Delta(G^c) = 2q + 1$ y de esta forma $\delta(G) = 1$. Sea u un vértice de G tal que $d_G(u) = 1$, si su único vecino v tiene grado mayor o igual a 2, entonces existe un vértice w tal que $N_G(u) \subseteq N_G(w)$, lo que no puede pasar por el Lema 3.1.6 y el hecho que para todo elemento no nulo del grupo de homología, el soporte de cualquier representante debe contener todos los vértices de G . Por lo tanto $d_G(v) = 1$ y $I(G) \cong \Sigma I(G - \{u, v\})$. De esta forma $H_{q-1}(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ y cumple las hipótesis del teorema, entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que $G - \{u, v\} \cong C_5 \sqcup (q - 2)K_2$. \square

3.2. Dominación total y grupos de homología del complejo de independencia de una gráfica

Ahora daremos una cota superior dada por Meshulam ([23]) para la dominación total de G en función de los grupos de homología de $I(G)$.

Teorema 3.2.1. (Meshulam [23]) *Si G es tal que $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, entonces $\gamma_t(G) \leq 2q+2$*

Demostración. Para $q = 0$, hay que observar que $\tilde{H}_0(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ implica que $I(G)$ no es conexo, en particular su 1-esqueleto tampoco es conexo. Como $\{u, v\} \in I(G)$ si y sólo si $\{u, v\} \notin E(G)$ se puede pensar a G^c como el 1-esqueleto de $I(G)$. Sean G_1, G_2 dos componentes conexas de G^c . Entonces, para cualesquiera $v_1 \in V(G_1)$ y $v_2 \in V(G_2)$, $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ y para todo $v \in V(G)$ v es vecino de v_1 o de v_2 . Entonces $\{v_1, v_2\} \subset V(G)$ es tal que $N_G(v_1) \cup N_G(v_2) = V(G)$. Por lo tanto $\gamma_t(G) \leq 2$. Pero como $\gamma_t(G) \geq 2$, se tiene que $\gamma_2(G) = 2$.

Supóngase que el teorema es falso. Sea $q \in \mathbb{N}$ el menor natural para el cual no se cumple el teorema. Por lo visto arriba, $q \geq 1$. Sea G un contraejemplo de para ese valor de q con el mínimo número de aristas. Como $\tilde{H}_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, G no es vacía. Sea $e = \{u, v\} \in E(G)$, tomamos $B = V(G) - N_G(u) \cup N_G(v)$ y definimos $G_0 = G[B]$. Tomando $\bar{e} = \{\{u, v\}, \{u\}, \{v\}\}$, definimos los complejos $K_1 = I(G)$, $K_2 = \bar{e} * I(G_0)$ y $K = K_1 \cup K_2$. Entonces $K_1 \cap K_2 = \Sigma I(G_0)$ y $K = I(G - e)$. Entonces, Por Mayer-Vietoris, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\longrightarrow H_q(\Sigma I(G_0); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \oplus H_q(K_2; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

Ahora, por el Corolario 2.2.7, $H_q(K_2; \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Si $H_q(\Sigma I(G_0); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, entonces

$$\tilde{H}_{q-1}(I(G_0); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$$

y $\gamma_t(G_0) \leq 2q$, pues q era el menor natural para cual el teorema es falso y por lo tanto $\gamma_t(G) \leq 2q + 2$. Pero G es contraejemplo, por lo que $H_q(\Sigma I(G_0); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Ahora, como $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G - e)$ y $G - e$ tiene menos aristas, $H_q(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Entonces se tiene de la sucesión anterior que

$$0 \longrightarrow H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \oplus 0 \longrightarrow 0$$

es exacta, por lo que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, no existe

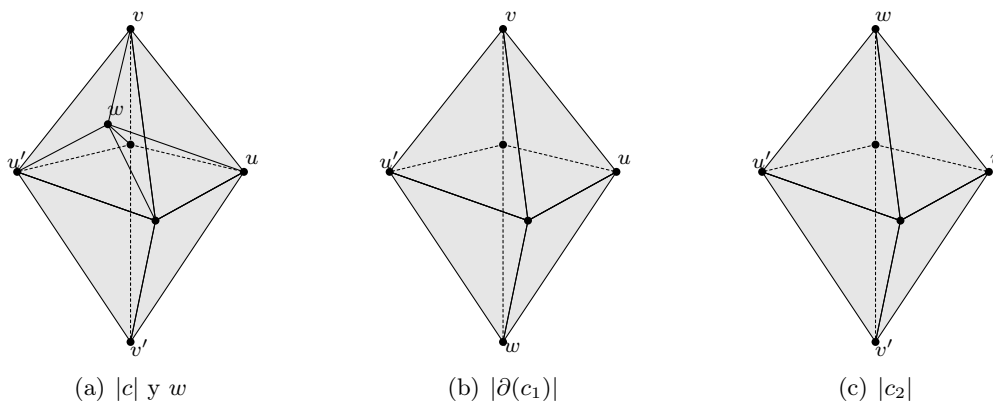


Figura 3.3:

$q \in \mathbb{N}$ para la cual el teorema sea falso. □

3.3. Mejora de la cota para dos casos

Ahora daremos una mejora para la cota del Teorema 3.2.1 para los casos $q = 1, 2$, lo cual motivará dos conjeturas. Pero primero daremos un par de lemas.

Lema 3.3.1. *Sea G tal que:*

- $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, $q \geq 1$.
- Para todo q -ciclo $[c]$ en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$, $|c|$ tiene por lo menos $2q + 3$ vértices para todo representante.
- Existe una arista e tal que $H_q(I(G-e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$ y existe un q -ciclo $[c]$ en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $f_0(c) = 2q + 2$.

Entonces $\gamma_t(G) \leq 2q + 1$.

Demostración. Sea G tal que cumple las hipótesis de (1) y sea $e = \{u, v\}$ la arista tal que $H_q(I(G-e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Sea c una q -cadena $f_0(c) = 2q + 2$ y $[c] \in H_q(I(G-e); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$. Por el segundo inciso del Corolario 3.1.2, se tiene que $|c| \cong I((q+1)K_2)$. Como todo representante de un ciclo no nulo tiene por lo menos $2q + 3$ vértices en $I(G)$, se tiene que $e \in |c|$. Por el Lema 3.3.1, $V(|c|)$ es un conjunto totalmente dominador. Sea $v' \in V(|c|)$ tal que $\{v, v'\} \notin E(G^c)$ y tomemos $V(|c|) = \bigcup \{a_i, b_i\}_{i=1}^q \cup \{v, v'\}$, donde a_i es adyacente a b_i en G para toda i .

Afirmamos que $V(|c|) - \{v'\}$ es un conjunto totalmente dominador. Supóngase que existe un vértice $w \in V(G) - V(|c|)$ tal que $N_G(w) \cap V(|c|) = \{v'\}$ (Figura 3.3(a)). Se puede tomar a c de la siguiente forma

$$c = \sum [v, t_1, \dots, t_q] + \sum [v', t_1, \dots, t_q]$$

donde $t_i \in \{a_i, b_i\}$ con $1 \leq i \leq q$. Como w solamente es adyacente a v' , podemos definir la siguiente $q + 1$ -cadena

$$c_1 = \sum [w, v, t_1, \dots, t_q]$$

y aplicando el operador frontera se obtiene

$$\partial(c_1) = \sum [w, t_1, \dots, t_q] + \sum [v, t_1, \dots, t_q] + \sum [w, v, \hat{t}_1, \dots, t_q] + \dots + \sum [w, v, t_1, \dots, \hat{t}_q]$$

Ahora, para cada i

$$\sum [w, v, t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_q] = \sum [w, v, t_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, t_q] + \sum [w, v, t_1, \dots, \hat{b}_i, \dots, t_q] = 0$$

por lo que

$$\partial(c_1) = \sum [w, t_1, \dots, t_q] + \sum [v, t_1, \dots, t_q]$$

De esta forma $|\partial(c_1)| \cong I((q+1)K_2)$ (Figura 3.3(b)).

Ahora, como w solamente es adyacente a v' , podemos definir la siguiente q -cadena

$$c_2 = \sum [w, t_1, \dots, t_q] + \sum [v', t_1, \dots, t_q]$$

Entonces

$$[c] = [\partial(c_1)] + [c_2] = [c_2]$$

pero $[c_2] \cong I((q+1)K_2)$ (Figura 3.3(c)) y $c_2 \in C_q(I(G); \mathbb{Z}_2)$, por lo tanto $[c_2] = 0$, lo que implica que $[c] = 0$, pero esto no puede pasar. Por lo tanto, $V(|c|) - \{v'\}$ es un conjunto totalmente dominador y $\gamma_t(G) \leq 2q + 1$. \square

Lema 3.3.2. *Sea G tal que para todo 2-ciclo $[c]$ en $H_2(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$, $|c|$ tiene por lo menos 8 vértices para todo representante y existe una arista e tal que:*

- $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$.
- Existe un 2-ciclo $[c]$ en $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $f_0(c) < 8$.

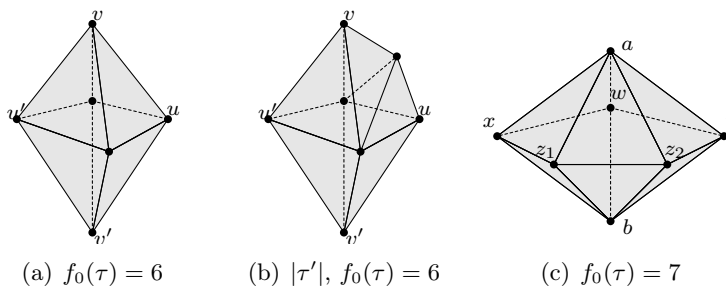


Figura 3.4:

Entonces, $\gamma_t(G) \leq 4$.

Demostración. Sea G tal que cumple las hipótesis y sea $e = \{u, v\}$ la arista tal que $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Sea τ una 2-cadena tal que $f_0(\tau) \leq 7$ y $[\tau] \in H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$. Hay dos posibilidades:

1. Si τ tiene 6 vértices, entonces, por el segundo inciso del Corolario 3.1.2, $|\tau| \cong I(3K_2)$. Como todo representante de un ciclo no nulo tiene por lo menos 8 vértices en $I(G)$, se tiene que $e \in |\tau|$. Sean v', u' los vértices de $|\tau|$ tales que $\{v, v'\}, \{u, u'\}$ son aristas de G . Con la misma argumentación hecha para el Lema 3.3.1, se puede ver que $V(|\tau|) - \{v'\}$ y $V(\tau) - \{u'\}$ son conjuntos totalmente dominadores. Si existiera un vértice w de G tal que $N_G(w) \cap V(\tau) = \{u', v'\}$, tomamos $\tau' = I(G)[V(|\tau|) \cup \{w\}]$, entonces $[\tau] = [\tau']$ en $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2)$. Como τ' tiene 7 vértices, existe una 3-cadena z de $C_3(I(G); \mathbb{Z}_2)$ tal que $\partial_3(z) = \tau'$. Por lo tanto $[\tau] = 0$ en $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2)$, pero estábamos suponiendo que $[\tau] \neq 0$. Por lo tanto, $V(|\tau|) - \{u', v'\}$ es un conjunto totalmente dominador y $\gamma_t(G) \leq 4$.
2. Entonces $f_0(|\tau|) = 7$ vértices. Entonces, por el Lema 3.1.8, $|\tau| \cong C_5 * I(K_2)$. Como todo representante de un ciclo no nulo tiene por lo menos 8 vértices en $I(G)$, se tiene que $e \in |\tau|$. Supóngase que el ciclo es de la forma xz_1z_2yw y sea $\{a, b\}$ la arista (Figura 3.4(c)). Si alguna de las cuerdas del ciclo no es arista de la gráfica, τ se puede descomponer como una 2-cadena con soporte isomorfo a $I(2K_2)$ y una 2-cadena nula en el grupo de homología con soporte isomorfo a la suspensión de un 2-simplejo, con lo que caemos en el caso anterior. Supóngase que todas las cuerdas del ciclo son aristas de G . En general hay dos posibilidades (salvo un cambio de u por v y la elección de los nombres):

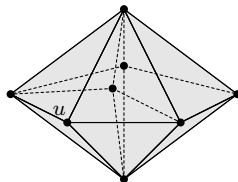


Figura 3.5:

- a) $u = z_1$ y $v = z_2$, es decir u y v están en el C_5 .
 b) $u = z_1$ y v no está en C_5 , es decir $v = a$ o $v = b$.

Supóngase que $u = z_1$, tomamos $S = \{x, z_1, a, b\}$. Si existe un vértice t tal que $N_G(t) \cap S = \emptyset$, entonces τ se puede ver como la suma de dos 2-cadenas, una con soporte isomorfo a $I(2K_2)$ en $I(G - e)$ y otra con soporte isomorfo a $C_5 * I(K_2)$ en $I(G)$ (Figura 3.5). Como el soporte de toda 2-cadena no nula tiene por lo menos 8 vértices en $I(G)$, se tiene que $[\tau]$ tiene un representante con 6 vértices, por lo que caemos al caso anterior. En cualquier caso se tiene que $\gamma_t(G) \leq 4$.

□

Teorema 3.3.3. *Sea $q \in \{1, 2\}$ y sea G tal que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, entonces:*

1. *Si para todo q -ciclo $[c]$ en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$, $|c|$ tiene por lo menos $2q + 3$ vértices para todo representante. Entonces $\gamma_t(G) \leq 2q + 1$.*
2. *Si para todo q -ciclo $[c]$ en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$, $|c|$ tiene por lo menos $2q + 4$ vértices para todo representante. Entonces $\gamma_t(G) \leq 2q$.*

Demostración. Supóngase que $\tilde{H}_0(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$.

Para $q = 1$, sea $[\hat{c}] \in H_1(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$, por la observación al inicio de la última sección del capítulo anterior, existe $[c] \in H_1(G^c; \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $[\hat{c}] = i_*([c])$, como i_* es el morfismo inducido por la inclusión, entonces se tiene que $[\hat{c}] = [i(c)] = [c]$. En $H_1(G^c; \mathbb{Z}_2)$ sólo existe un representante de $[c]$, c mismo. Sea $[c]$ en $H_1(G^c; \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $i_*([c]) \neq 0$ y la cardinalidad de $V(c)$ es mínima. Entonces $c = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ es un ciclo de G^c . Ahora, c cumple las siguientes propiedades:

1. $|V(c)| \geq 5$ por hipótesis.

2. Como $V(c)$ es mínimo, para todo par de vértices no consecutivos del ciclo la cuerda tiene que ser una arista de G . Sino, podría descomponerse a c como la suma de ciclos de menor longitud.

3. $\gamma_i(G) \leq |V(c)|$. Si existe $v' \in V(G) - V(c)$ tal que $v' \notin \bigcup_{v \in V(c)} N_G(v)$, entonces $\{v', v\} \in I(G)$ para todo $v \in V(c)$. Como $[c] = [v_0, v_1] + \dots + [v_{k-1}, v_0]$, para $i \in \{0, \dots, k-2\}$ tomando

$$[d_i] = \sum_{j=0}^{k-1} [v', v_j, v_{j+1}]$$

$[d_i] \in C_2(I(G))$ para toda i y

$$\sum_{i=0}^{k-1} \partial_2(d_i) = [c]$$

por lo que $[\hat{c}] = [c] = 0$ en $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$ que es una contradicción pues $[\hat{c}] \neq 0$. Por lo tanto

$$\bigcup_{v \in V(c)} N_G(v) = V(G)$$

Sea $u \in V(G) - V(c)$. Afirmamos que

$$|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \leq 3,$$

donde sólo puede ser 2 o 3 si los vértices son consecutivos en el ciclo. Como

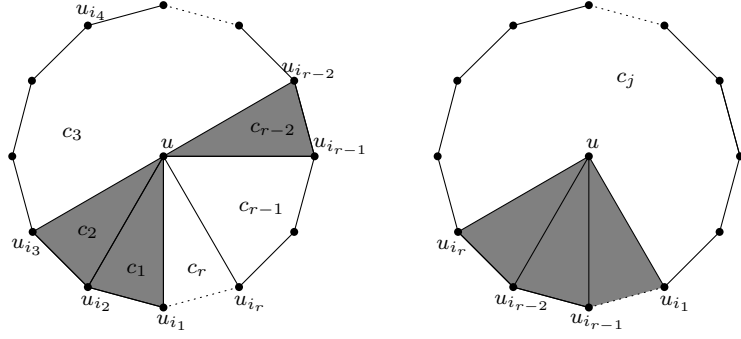
$$\bigcup_{v \in V(c)} N_G(v) = V(G)$$

por lo menos existe un vértice de c que es adyacente con u , es decir

$$|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \leq k - 1$$

Si $|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \geq 4$, sea

$$N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$$

(a) c y u (b) $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ son consecutivos

donde $r < k$ e $i_s \leq i_l$ si $s \leq l$, entonces

$$[c] = \sum_{j=1}^r [c_j]$$

donde $c_j = uv_{i_j}cv_{i_{j+1}}u$ (Figura 3.6(a)). Para toda $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $i_{j+1} = i_j + 1$, $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, u\}$ es un simplejo de $I(G)$, por lo tanto $\partial_2(\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, u\}) = [c_j]$ y por lo tanto $[c_j] = 0$ en $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$. Ahora, para toda $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $i_{j+1} \neq i_j + 1$, $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, u\}$ no es un simplejo de $I(G)$ y c_j es un ciclo de G^c . Entonces

$$[c] = \sum_{\substack{j \\ i_{j+1} \neq i_j + 1}} [c_j]$$

donde $[c_j] \neq 0$ en $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2)$ para alguna j , pues $[c] \neq 0$. Pero esto contradice la minimalidad de c , pues como estamos suponiendo que $r = |N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \geq 4$ y que c tiene $k > 4$ vértices:

1. Si los vértices de $|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}|$ son vértices consecutivos del ciclo c , entonces c_j sería un ciclo con $k - r + 3 \leq k - 1 < k$ vértices (Figura 3.6(b)), cosa que no puede pasar.
2. Si los vértices de $|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}|$ no son consecutivos, la longitud de c_j es menor a $k - r + 3 < k$, cosa que no puede pasar.

Por lo tanto

$$|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \leq 3$$

Hay que observar que si el ciclo c tuviera cuatro vértices, u podría no ser adyacente a tres vértices y el nuevo ciclo sería de longitud 4, es decir tendría el mismo número de vértices que c .

Si los vértices de $|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}|$ no fueran consecutivos, análogamente a lo hecho anteriormente, podríamos partir a c como la suma de 2 o 3 ciclos de longitud menor, pues la longitud de c es por lo menos 5.

Tomamos $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, como para todo $u \in V(G) - V(c)$

$$|N_{G^c}(u) \cap \{v_0, \dots, v_{k-1}\}| \leq 3$$

entonces $u \in N_G(v_i)$ para alguna $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ entonces tenemos que

$$\bigcup_{i=0}^3 N_G(v_i) = V(G)$$

De hecho, como todo vértice fuera de c solo puede no ser adyacente a lo más a tres vértices consecutivos:

1. Si $k = 5$, entonces

$$N_G(v_0) \cup N_G(v_1) \cup N_G(v_3) = V(G)$$

y por lo tanto $\gamma_t(G) \leq 3$

2. Si $k \geq 6$, entonces

$$N_G(v_0) \cup N_G(v_3) = V(G)$$

y por lo tanto $\gamma_t(G) = 2$

Para $q = 2$, supóngase que el teorema no es cierto y sea G un contraejemplo mínimo. Entonces, por el Teorema 3.2.1, $\tilde{H}_0(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$ y $\tilde{H}_1(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$. Sea $e = uv \in E(G)$.

Si G es un contraejemplo de (1) y $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, hay dos casos:

1. $G - e$ cumple las hipótesis del teorema, como $G - e$ tiene menos aristas, entonces $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G - e) \leq 5$.
2. Existe $[c] \in H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $f_0(|c|) = 6$. Por el Lema 3.3.1, se tiene que $\gamma_t(G) \leq 5$.

Si G es un contraejemplo de (2) y $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, hay dos casos:

1. $G - e$ cumple las hipótesis del teorema, como $G - e$ tiene menos aristas, entonces $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G - e) \leq 4$.
2. Existe $[\tau] \in H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ tal que $f_0(|\tau|) < 8$. Por el Lema 3.3.2, se tiene que $\gamma_t(G) \leq 4$.

Como G es contraejemplo, sin importar para que caso sea contraejemplo, se tiene que $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) = 0$. De hecho $H_1(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$ y $\tilde{H}_0(I(G - e); \mathbb{Z}_2) \cong 0$, pues $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G - e)$.

Ahora, sean $V_0 = V(G) - N_G[u] \cup N_G[v]$ y $G_0 = G[V_0]$. Si $\tilde{H}_0(I(G_0); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, entonces $\gamma_t(G_0) = 2$, por lo que $\gamma_t(G) \leq 4$. Por lo tanto $\tilde{H}_0(I(G_0); \mathbb{Z}_2) \cong 0$.

Tomando $L_1 = \{\{u\}, \{v\}, \{u, v\}\} * I(G_0)$, por Mayer-Vietoris, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\longrightarrow H_2(\Sigma I(G_0)) \longrightarrow H_2(L_1) \oplus H_2(I(G)) \longrightarrow H_2(I(G - e)) \longrightarrow$$

Como $H_2(L_1; \mathbb{Z}_2) \cong 0$ por el Corolario 2.2.7 y $H_2(I(G - e); \mathbb{Z}_2) = 0$, se tiene que

$$\longrightarrow H_2(\Sigma I(G_0)) \longrightarrow H_2(I(G)) \longrightarrow 0$$

Entonces para todo $[c] \in H_2(I(G)) - \{0\}$ existe $[c'] \in H_2(\Sigma I(G_0); \mathbb{Z}_2)$ tal que $i_*([c']) = [c]$ y como $H_2(\Sigma I(G_0); \mathbb{Z}_2) \cong H_1(I(G_0); \mathbb{Z}_2)$ existe $[c''] \in H_1(I(G_0); \mathbb{Z}_2)$ tal que $i_* \circ s_*[c''] = [c]$, con $s_*([z_1, z_2, z_3]) = [u, z_1, z_2, z_3] + [v, z_1, z_2, z_3]$. Entonces existe un ciclo sin cuerdas $c' = w_0 w_1 \cdots w_k$ en G^c tal que

$$[c] = \sum_{i=0}^k [u, w_i, w_{i+1}] + \sum_{i=0}^k [v, w_i, w_{i+1}]$$

es un elemento no nulo, mínimo en número de vértices, de $H_2(I(G); \mathbb{Z}_2)$. Ahora,

1. Si G es contraejemplo para (1), tomamos $S = \{u, v, w_0, w_1, w_3\}$. Como el ciclo tiene todas las cuerdas y tiene longitud por lo menos 5, si S no es un conjunto totalmente dominador es porque existe un vértice w que no está en c y no es dominado por S . Entonces c se puede escribir como la suma de dos 2-ciclos, uno con soporte isomorfo a $I(3K_2)$ y otro con menos vértice que c , lo que no puede pasar. Por lo tanto S domina totalmente.

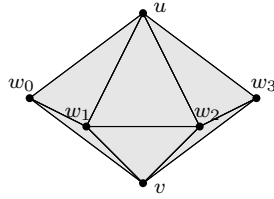


Figura 3.6:

2. Si G es contraejemplo para (2), tomamos $S = \{u, v, w_0, w_3\}$. Al igual que el caso anterior, S no domina totalmente es porque existe un vértice w que no está en c y c podría escribirse como la suma de un 2-ciclo con soporte isomorfo a $C_5 * I(K_2)$ y otro con menos vértices que τ . Por lo tanto S domina totalmente.

En cualquier caso se llega a una contradicción. Por lo tanto no hay contraejemplo al teorema. \square

Una consecuencia del Teorema 3.3.3, es el siguiente corolario para las gráficas $2K_2$ -libres.

Corolario 3.3.4. *Si G es una gráfica $2K_2$ -libre tal que $H_1(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$, entonces $\gamma_t(G) \leq 3$.*

Para terminar esta sección enunciamos dos conjeturas inspiradas por el Teorema 3.3.3.

Conjetura 3.3.5. *Sea G tal que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ para $q \geq 1$ y para todo c en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ cualquier representante tiene por lo menos $2q + 3$ vértices. Entonces $\gamma_t(G) \leq 2q + 1$.*

Conjetura 3.3.6. *Sea G tal que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \not\cong 0$ para $q \geq 1$ y para todo c en $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ cualquier representante tiene por lo menos $2q + 4$ vértices. Entonces $\gamma_t(G) \leq 2q$.*

Hay que notar que, debido a las dimensiones bajas consideradas en el Teorema 3.3.3, los ciclos eran manejables pues eran esferas o ciclos en terminología de gráficas. Para $q \geq 3$ este ya no es el caso, por lo que para tratar las conjeturas es necesaria otra estrategia.

3.4. Gráficas qK_2 -libres

Una forma de lograr resultados del estilo de la Conjetura 3.3.5 es trabajar con gráficas qK_2 -libres. Para esto definimos la familia de las gráficas qK_2 -libres críticas. Para definir esta

familia, recordemos que para $q \in \mathbb{N}$ definimos qK_2 como la gráfica con vértices $V(qK_2) = \bigcup_{i=1}^q \{a_i, b_i\}$ y conjunto de aristas $E(qK_2) = \{\{a_i, b_i\} : 1 \leq i \leq q\}$.

Diremos que una gráfica es qK_2 -libre crítica si:

1. G es qK_2 -libre,
2. Para toda arista e , $G - e$ no es qK_2 -libre.

De la definición se tiene el siguiente lema.

Lema 3.4.1. *G es qK_2 -libre crítica si y solo si G es qK_2 -libre y para toda arista $\{x, y\}$ en $E(G)$, $\{x, y\}$ es arista central de un P_4 en una subgráfica $P_4 \sqcup (q-1)K_2$ inducida (Figura 3.7).*

Una conjetura probablemente más manejable que la Conjetura 3.3.5 y que generaliza el Corolario 3.3.4 es la siguiente.

Conjetura 3.4.2. *Sea G una gráfica $(q+1)K_2$ -libre tal que $H_q(I(G); \mathbb{Z}_2) \cong 0$ para $q \geq 1$, entonces $\gamma_t(G) \leq 2q+1$.*

Hay que notar que, si la Conjetura 3.3.5 fuera cierta, esta última conjetura sería cierta.

3.4.1. Gráficas $2K_2$ -libres críticas

Primero veremos algunas propiedades de las gráficas $2K_2$ -libres críticas. En particular, la Proposición 3.4.13 nos llevará a proponer una conjetura, que de ser cierta sería cierta la Conjetura 3.4.2.

Un ejemplo de una gráfica $2K_2$ -libre es C_5 , pues al quitar cualquier arista queda un P_5 . De hecho, C_5 sirve para definir toda una familia de gráficas $2K_2$ -libre, como se verá más adelante.

Lema 3.4.3. [22] *G es $2K_2$ -libre si y sólo si para todo $S \subseteq V(G)$ $G - S$ tiene a lo más una componente conexa de orden mayor a 1.*

Demostración. Supóngase que G es $2K_2$ -libre y sea $S \subseteq V(G)$. Si $G - S$ tiene dos componentes conexas G_1, G_2 con más de un vértice, entonces para cualesquiera e_1 en $E(G_1)$ y e_2 en $E(G_2)$, se tendría que e_1 y e_2 son un $2K_2$ inducido, lo que no puede pasar.

Ahora, supóngase que para todo $S \subseteq V(G)$ se tiene que $G - S$ tiene a lo más una componente conexa de orden mayor a 1. Sean e_1, e_2 en $E(G)$ y tómesese $S = V(G) - e_1 \cup e_2$.

Entonces e_1 y e_2 son aristas de $G - S$, y tienen que estar en una misma componente conexa, como los vértices de $G - S$ son solamente los vértices de e_1 y e_2 , se tiene que tiene que existir una arista entre e_1 y e_2 . Por lo tanto G es $2K_2$ -libre. \square

Lema 3.4.4. *Sea G gráfica $2K_2$ -libre, entonces:*

1. G es C_k -libre para toda $k \geq 6$.
2. Toda subgráfica inducida de G es $2K_2$ -libre.

Demostración. (1) Como todo C_k inducido con $k \geq 6$ tiene un $2K_2$ inducido, se tiene que G es C_k -libre para toda $k \geq 6$.

(2) Si alguna gráfica inducida tuviera un $2K_2$ inducido, G también lo tendría. \square

Lema 3.4.5. *Sea G gráfica $2K_2$ -libre con $\delta(G) \geq 1$, entonces:*

1. G es conexa.
2. $\text{diam}(G) \leq 3$.
3. Si existen dos vértices x, y tales que $d(x, y) = 3$, entonces $\{u, v\}$ es arista de G para todo u en $N_G(x)$ y para todo v en $N_G(y)$.
4. Si $\delta(G) \geq 2$, entonces G es 2-conexa.

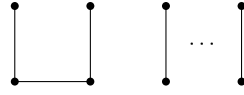
Demostración. (1) Esto es consecuencia del Lema 3.4.3, tomando $S = \emptyset$.

(2) Si $\text{diam}(G) \geq 4$, existiría una trayectoria inducida con 5 o más vértices, lo que no puede pasar pues G es $2K_2$ -libre.

(3) Sean dos vértices u, v tales que $d(u, v) = 3$. Si existieran u' en $N_G(u)$ y v' en $N_G(v)$ tales que $\{u', v'\}$ no es arista de G , como $d(x, y) = 3$, se tiene que $\{u, v'\}$ y $\{v, u'\}$ no son aristas de G , entonces $G[\{u, u', v, v'\}] \cong 2K_2$.

(4) Si existiera un vértice de corte u , como $\delta(G) \geq 2$, en $G - u$ no habría vértices aislados por lo que G tendría a qK_2 como subgráfica inducida con $q \geq 2$ igual al número de componentes conexas de $G - u$. \square

Dada una gráfica G , un vértice u y un conjunto independiente X , construimos una nueva gráfica G' a partir de G borrando a u y poniendo los elementos de X como vértices con vecindad igual a la de u . A esta operación le llamaremos *inflar a G* . Decimos que H es una *inflación* de G si existe una sucesión de gráficas G_0, G_1, \dots, G_k tales que:

Figura 3.7: $P_4 \sqcup (q-1)K_2$

1. $G_0 = G$.
2. $G_k = H$.
3. G_{i+1} se obtuvo de inflar a G_i para toda $0 \leq i \leq k-1$.

Definimos la familia de gráficas \mathcal{C}_5 como el conjunto de inflaciones de C_5 .

Teorema 3.4.6. [6] Sea G una gráfica conexa $(2K_2, K_3)$ -libre con ciclos de longitud impar, entonces G está en \mathcal{C}_5 .

Ahora daremos algunas propiedades básicas de las graficas qK_2 -libres críticas.

Lema 3.4.7. Sea G una gráfica $2K_2$ -libre crítica sin vértices aislados. Entonces:

1. $\delta(G) \geq 2$.
2. $2 \leq \text{diam}(G) \leq 3$.

Demostración. (1) Sea u un vértice de G . Como $\delta(G) \geq 1$, $\{u, v\}$ es la arista central de un P_4 inducido. Por lo tanto, existe un vértice v tal que $e = \{u, v\}$ es arista de G . Como G es $2K_2$ -libre crítica existen dos vértices u', v' tales que $\{u, u'\}$ y $\{v, v'\}$ son aristas de G y $d_G(u) \geq 2$.

(2) Por el inciso 2 el Lema 3.4.5, se tiene que $\text{diam}(G) \leq 3$. Si $\text{diam}(G) = 1$, entonces G es una gráfica completa y no contiene un P_4 inducido, por lo que no podría ser $2K_2$ -libre crítica. \square

Teorema 3.4.8. Sea G una gráfica tal que tiene un par de vértices u, v tales que $N_G(v) = N_G(u)$. Entonces G es $2K_2$ -libre crítica si y sólo si $G - v$ es $2K_2$ -libre crítica.

Demostración. Sea G $2K_2$ -libre crítica. Como G es $2K_2$ -libre, entonces $G - v$ también lo es. Por lo tanto, solo nos hace falta mostrar que $G - v$ es crítica. Sea $\{x, y\} \in E(G - v)$. Como G es $2K_2$ -libre crítica, $\{x, y\}$ es arista central en un P_4 inducido en G , digamos que $P = axyb$. Debido a que $N_G(u) = N_G(v)$, P no puede contener a u y a v . Si $a = v$ o $b = v$,

podemos intercambiar a v por u y obtenemos un P_4 inducido que no contiene a v . Por lo tanto, podemos asumir que P no contiene a v , con lo cual P es un P_4 inducido en $G - v$ que contiene a $\{x, y\}$ como arista central. Por el Lema 3.4.1, $G - v$ es $2K_2$ -libre crítica.

Sea $G - v$ $2K_2$ -libre crítica. Si G tuviera un $2K_2$ inducido, este tendría entonces que contener al vértice v y, como $N_G(u) = N_G(v)$, no contendría a u . Pero entonces podemos intercambiar a v por u y tendríamos un $2K_2$ inducido en $G - v$, lo cual no es posible. Por lo tanto, G es $2K_2$ -libre. Nos falta ahora mostrar la criticalidad. Sea $\{x, y\}$ una arista en G . Si $x, y \neq v$, entonces existe un P_4 inducido en $G - v$, y por lo tanto en G , que contiene a $\{x, y\}$ como arista central. Supongamos entonces que $x = v$. Como $N_G(u) = N_G(v)$, existe la arista $\{u, y\}$ en $G - v$, por lo que ésta está contenida en un P_4 inducido, digamos $P = awyb$, como arista central. Entonces $P' = avyb$ es P_4 inducido en G que contiene a $\{v, y\} = \{x, y\}$ como arista central. Por el Lema 3.4.1, obtenemos que G es $2K_2$ -libre crítica. \square

Corolario 3.4.9. *Sea G una gráfica $2K_2$ -libre crítica. Entonces toda inflación de G es $2K_2$ -libre crítica.*

Recordemos que $g(G)$ es el cuello, es decir la mínima longitud de los ciclos inducidos de G .

Lema 3.4.10. *Si G es una gráfica $2K_2$ -libre crítica, entonces G contiene un C_3 o un C_5 inducido.*

Demostración. Si $g(G) = 3$, no hay nada que probar. Supóngase que $g(G) \geq 4$ y sea u un vértice de G . Sea

$$S_u = \{w \in V(G) : N_G(w) \subseteq N_G(u)\}$$

Por el Lema 3.4.7, $d(u) \geq 2$. Por ser K_3 -libre, se tiene que $G[N_G(x)]$ es vacía para todo vértice x de G . Si existen vértices u_1, u_2 en $N_G(u)$ tales que existen w_1 en $N_G(u_1) - N_G(u_2)$ y w_2 en $N_G(u_2) - N_G(u_1)$ (véase Figura 3.8(a)), como ninguna de $\{u, w_1\}$, $\{u, w_2\}$, $\{u_1, w_2\}$, $\{u_2, w_1\}$ son aristas de G , entonces $\{w_1, w_2\}$ es arista de G , pues G es $2K_2$ -libre. Entonces $uu_1w_1w_2u_2$ es un C_5 inducido.

Ahora veremos que siempre existen dos vértices \tilde{u}, w en $N_G(u)$ tales $N_G(\tilde{u}) - N_G(w) \neq \emptyset$ y $N_G(w) - N_G(\tilde{u}) \neq \emptyset$. Definimos un preorden en $N_G(u)$ de la siguiente manera: $w \leq v$ si $N_G(w) \subseteq N_G(v)$. Sea $\tilde{u} \in N_G(u)$ un elemento minimal, en el sentido de que si $w \leq \tilde{u}$, entonces $N_G(w) = N_G(\tilde{u})$. Como G es $2K_2$ -libre crítica, existen vértices \tilde{w} y w tales que $\{\tilde{u}, \tilde{w}\}$ y $\{u, w\}$ es un $2K_2$ inducido en $G - e$, con $e = \{u, \tilde{u}\}$, por lo que $\{w, \tilde{w}\}$ no es

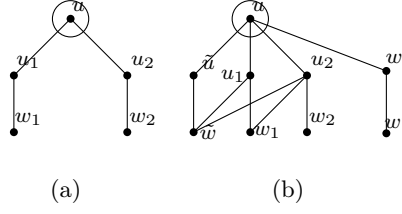


Figura 3.8:

arista de G . En $N_G(w)$ existe un vértice w' que no es vecino de \tilde{u} , pues si no existiera se tendría que $N_G(w) \subsetneq N_G(\tilde{u})$, lo que no puede pasar pues \tilde{u} es un elemento minimal (Véase la Figura 3.8(b)). Por lo visto más arriba se tiene que $\{\tilde{w}, w'\}$ es arista de G , entonces $u\tilde{u}\tilde{w}w'w$ es un ciclo en G , por lo tanto G tiene un C_5 inducido. \square

Teorema 3.4.11. G es una gráfica $2K_2$ -libre crítica sin triángulos si y solo si $G \in \mathcal{C}_5$.

Demostración. Por el Lema 3.4.10, G tiene un C_5 inducido y por el Teorema 3.4.6 se tiene que G está en \mathcal{C}_5 .

Sea $G \in \mathcal{C}_5$, como C_5 es $2K_2$ -libre crítica, por el Corolario 3.4.9, se tiene que G es $2K_2$ -libre crítica. \square

Corolario 3.4.12. Si G una gráfica $2K_2$ -libre crítica sin triángulos, entonces $\gamma_t(G) = 3$.

Proposición 3.4.13. Sea G una gráfica $2K_2$ -libre crítica de diámetro 2 tal que para todo par de vértices u, v no adyacentes se tiene que $N_G(u) \not\subseteq N_G(v)$. Entonces $\gamma_t(G) \leq 3$.

Demostración. Supóngase que G es una gráfica conexa $2K_2$ -libre crítica con $\text{diam}(G) = 2$ contraejemplo de la proposición, es decir $\gamma_t(G) > 3$. Sea u un vértice de G . Como $\gamma_t(G) > 3$, entonces $V(G) - N_G[u] \neq \emptyset$ y podemos partir a $V(G)$ en tres conjuntos no vacíos: $\{u\}, N_G(u), N_2(u) = V(G) - N_G[u]$, los vértices a distancia 0, 1 y 2 de u respectivamente. Como G es $2K_2$ -libre crítica, $d_G(u) \geq 2$ y para todo vértice v en $N_G(u)$ se tiene que $N_G(v) - N_G(u) \neq \emptyset$ pues la arista $\{u, v\}$ es la arista central de un P_4 inducido. Sean v_1, v_2 en $N_G(u)$ tales que $|S|$ es máximo, donde $S = N_G(u) \cup N_G(v_1) \cup N_G(v_2)$. Es decir, estamos tomando a v_1 y v_2 de entre todos los vecinos de v de forma que el número de vértices que dominan junto con u es el máximo posible.

Como $\gamma_t(G) > 3$, $\{u, v_1, v_2\}$ no puede ser un conjunto totalmente dominador, por lo que existe un w en $V(G) - S \subset N_2(u)$. Afirmamos que todo vecino de w en $N_G(u)$ es vecino

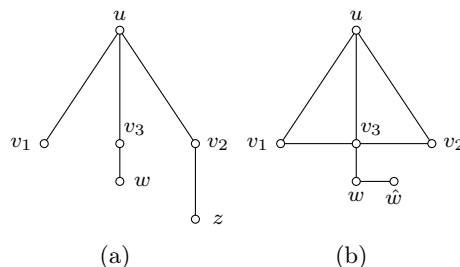


Figura 3.9:

de v_1 y v_2 . Si w tiene un vecino v_3 en $N_G(u)$ que no es vecino de v_2 (Véase Figura 3.9(a)), tomamos z en $N_G(v_2) - N_G(u)$ tal que no es vecino de v_1 . Si este no existiera, se tendría que $N_G(v_2) - N_G(u) \subseteq N_G(v_1)$ y por lo tanto $\{u, v_1, v_3\}$ dominaría más vértices que $\{u, v_1, v_2\}$. Como G es $2K_2$ -libre, $\{z, w\}$ o $\{v_3, z\}$ es arista de G . Si $\{z, w\}$ es arista de G , entonces $\{z, w\}$ y $\{u, v_1\}$ forman un $2K_2$ inducido. Por lo tanto $\{z, w\}$, no es arista de G y $\{v_3, z\}$ sí lo es. Entonces, para todo z en $N_G(v_2) - N_G(u)$ tal que no es vecino de v_1 , se tiene que v_3 es su vecino, por lo que $\{u, v_1, v_3\}$ domina más vértices que $\{u, v_1, v_2\}$, cosa que no puede pasar. Por lo tanto, para todo $v_3 \in N_G(u)$ vecino de w , v_3 es vecino de v_2 . Análogamente se ve que todo $v_3 \in N_G(u)$ vecino de w , v_3 es vecino de v_1 .

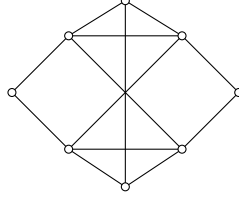
Si w tiene un vecino \hat{w} en $V(G) - N_G(u)$ que no es vecino de v_2 , entonces las aristas $\{w, \hat{w}\}, \{u, v_2\}$ forman un $2K_2$ inducido. Por lo tanto, todo vecino de w en $V(G) - N_G(u)$ es vecino de v_2 . Por esto y lo visto más arriba se tiene que $N_G(w) \subseteq N_G(v_2)$, lo que no puede pasar. Por lo tanto $\gamma_t(G) \leq 3$. \square

La proposición anterior y todos los ejemplos que conocemos nos llevan a la siguiente conjetura.

Conjetura 3.4.14. *Para toda una gráfica G $2K_2$ -libre crítica conexa $\gamma_t(G) \leq 3$*

3.4.2. Gráficas qK_2 -libres críticas

Antes de probar algunas propiedades de las gráficas qK_2 -libres críticas, daremos algunos ejemplos de estas. Para $q = 2$ ya se vio que C_5 y cualquier inflación son gráficas $2K_2$ -libres de diámetro 2, para diámetro 3 se tiene la gráfica de la Figura 3.10. Para $q = 2$, el pedir que la gráfica no tenga vértices aislados es suficiente para garantizar que la gráfica sea conexa, pero para $q \geq 3$, tomando $q - 1$ copias disjuntas de C_5 se puede construir una gráfica

Figura 3.10: Gráfica $2K_2$ -libre crítica de diámetro 3

qK_2 -libre crítica. Ejemplos de gráficas qK_2 -libres críticas conexas son los ciclos C_{3q-1} y cualquier inflación.

Los siguientes lemas nos servirán para determinar el tipo de homotopía del complejo de independencia de las gráficas qK_2 -libres conexas de diámetro $3(q-1)$.

Lema 3.4.15. *Sea T una trayectoria con $3(q-2) - 1$ vértices, donde $q \geq 3$, entonces T tiene un $(q-2)K_2$ inducido.*

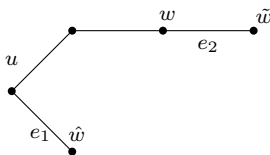
Demostración. Para $q = 3$, sea T una trayectoria con 2 vértices, entonces T es una arista. Supóngase que es cierto para toda $r < q$ y sea T una trayectoria con $3(q-2) - 1$ vértices. Sea $T = v_1v_2 \cdots v_{3(q-3)-1}v_{3(q-3)}v_{3(q-2)-2}v_{3(q-2)-1}$ y tomamos la subgráfica $T' = v_1v_2 \cdots v_{3(q-3)-1}$, por hipótesis de inducción T' tiene un $((q-1) - 2)K_2$ inducido, que junto con $\{v_{3(q-2)-2}, v_{3(q-2)-1}\}$ forman un $(q-2)K_2$ inducido en T . \square

Lema 3.4.16. *Sea G una gráfica qK_2 -libre conexas, con $q \geq 2$. Entonces $\text{diam}(G) \leq 3(q-1)$*

Demostración. Sea G qK_2 -libre conexas, $q \geq 2$. Supongamos que existe una trayectoria inducida T de longitud $3q-2$, con $T = v_1v_2 \cdots v_{3q-1}$. Entonces $\cup_{i=0}^{q-1} \{v_{3i+1}, v_{3i+2}\}$ es un qK_2 inducido, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{diam}(G) \leq 3(q-1)$ \square

Proposición 3.4.17. *Sea G una gráfica qK_2 -libre conexas de diámetro $3(q-1)$, con $q \geq 2$. Entonces $|I(G)| \simeq *$.*

Demostración. Para $q = 2$, sea G una gráfica $2K_2$ -libre conexas de diámetro 3. Sean u, v en $V(G)$ tales que $d(u, v) = 3$, entonces por el Lema 3.4.5, se tiene que para todo $w \in N_G(u)$ $N_G(v) \subseteq N_G(w)$ y por lo tanto $|I(G)| \simeq |I(G-w)|$, de la misma forma para todo $w' \in N_G(u) - \{w\}$ se tiene que $|I(G-w)| \simeq |I(G - \{w, w'\})|$. Se puede continuar este proceso hasta borrar todos los vecinos de u , de donde se obtiene que $|I(G)| \simeq |I(G - N_G(u))|$, como u es un vértice aislado en $G - N_G(u)$, se tiene que $|I(G - N_G(u))| \cong |u * I(G - N_G(u))| \simeq *$.

Figura 3.11: aristas e_1 y e_2

Supóngase que la proposición es cierta para toda $r < q$. Sea G una gráfica qK_2 -libre conexa de diámetro $3(q-1)$ y sea u un vértice de G con excentricidad igual a $3(q-1)$ y sea $N_i(u)$ el conjunto de vértices de G a distancia i de u , de esta forma $N_0(u), N_1(u), \dots, N_{3(q-1)}(u)$ es una partición de $V(G)$.

Sea w en $N_2(u)$ tal que existe un \tilde{w} en $N_G(w) \cap N_3(u)$. Afirmamos que $N_G(u) \subseteq N_G(w)$, supóngase que no y sea \hat{w} un vecino de u tal que no es vecino de w . Tomamos $e_1 = \{u, \hat{w}\}$, $e_2 = \{w, \tilde{w}\}$ (véase Figura 3.11). En $N_5(u), \dots, N_{3(q-1)}(u)$ hay $3(q-2) - 1$ elementos y entre cualquier par de número consecutivos de $\{5, \dots, 3(r-1)\}$ hay una arista entre los dos conjuntos de vértices, por lo tanto, por el Lema 3.4.15, existe un $(q-2)K_2$ inducido, que junto con e_1 y e_2 dan un qK_2 inducido en G , lo que no puede pasar. Por lo tanto $N_G(u) \subseteq N_G(w)$. Sea S el subconjunto de vértices en $N_2(u)$ con algún vecino en $N_3(u)$, entonces $|I(G)| \simeq |I(G-S)|$. Sea $G' = G - S$, como G es qK_2 -libre, todas las componentes conexas de $G - S$ con sus vértices contenidos en $\cup_{i=3}^{3(q-1)} N_i(u)$ son $(q-1)K_2$ -libres, pues de no ser lo el $(q-1)K_2$ mas cualquier arista que incida en u daría un qK_2 inducido. Para toda $i \geq 1$ y todo vértice w en $N_i(u)$ existe un vértice en $N_{i-1}(u)$ adyacente a w , por lo que existe una componente conexa H de $G - S$ con los vértices en $\cup_{i=3}^{3(q-1)} N_i(u)$ de diámetro $3(q-2)$, por hipótesis de inducción $|I(H)| \simeq *$ y se tiene que $G - S$ es la unión ajena de H con otra gráfica H' , por lo tanto $|I(G-S)| \cong |I(H)| * |I(H')| \simeq *$, con lo que queda demostrado el resultado. \square

Corolario 3.4.18. *Sea G una gráfica qK_2 -libre conexa de diámetro $3(q-1)$, con $q \geq 2$. Entonces $\tilde{H}_r(I(G); A) \cong 0$ para toda r y para todo anillo A .*

Una forma de resolver la Conjetura 3.4.2 sería dar una cota para la dominación total de las gráficas $(q+1)K_2$ -libres críticas conexas. La Proposición 3.4.17, limitan lo anterior a ver la dominación total de las gráficas $(q+1)K_2$ -libres críticas conexas con diámetro menor a $3q$. Esto se podría hacer es generalizando la Proposición 3.4.13 a la siguiente conjetura

Conjetura 3.4.19. *Para toda gráfica G $(q+1)K_2$ -libre crítica de diámetro menor a $3q$ tal que para todo par de vértices no adyacentes u, v se tiene que $N_G(u) \not\subseteq N_G(v)$ y $N_G(v) \not\subseteq N_G(u)$, se tiene que $\gamma_t(G) \leq 2q+1$.*

De ser cierta está última conjetura, entonces sería cierta la Conjetura 3.4.2.

Teorema 3.4.20. *Si la Conjetura 3.4.19 es cierta, entonces la Conjetura 3.4.2 es cierta.*

Demostración. Supóngase que se cumple la cota par la dominación total para las gráficas $(q+1)K_2$ -libres críticas de la Conjetura 3.4.19.

Para $q = 1, 2$ es el Teorema 3.3.3. Sea q el primer natural para el cual es falsa la conjetura y sea G un contraejemplo mínimo. Construimos los mismos simplejos que antes y la suceción de Mayer-Vietoris que en la demostración del Teorema 3.2.1.

Ahora $H_{q-1}(I(G_0)) \cong 0$ pues G_0 es qK_2 -libre y $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G_0)$. Como es contraejemplo minimal para todo par de vértices no adyacentes u, v se tiene que $N_G(u) \not\subseteq N_G(v)$ y $N_G(v) \not\subseteq N_G(u)$, por el Lema 3.1.6. Si para toda arista e , $G - e$ no es $(q+1)K_2$ -libre, entonces se tendría que G es $(q+1)K_2$ -libre crítica, por lo que habría dos casos:

1. G es conexa. Como $H_q(I(G)) \not\cong 0$, entonces su diámetro tiene que ser menor a $3q$, por la Proposición 3.4.17 y el Corolario 2.4.2. Por lo anterior se tendría que $\gamma_t(G) \leq 2q+1$.
2. G no es conexa, por lo que $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_k$, entonces G_i es q_iK_2 -libre crítica, donde $q_i \geq 2$ y $\sum_{i=1}^k q_i = q+k$. Como $\tilde{H}_q(I(G)) \not\cong 0$ y $I(G) = I(G_1) * \cdots * I(G_k)$, entonces, por la formula de la homología del join, se tiene que existen naturales r_1, \dots, r_k tales que $\tilde{H}_{r_i}(I(G_i)) \not\cong 0$ para toda i y $\sum_{i=1}^k r_i = q+1-k$. Sabemos que $\gamma_t(G) = \gamma_t(G_1) + \cdots + \gamma_t(G_k)$ y que para toda i $\gamma_t(G_i) \leq 2r_i + 2$, entonces

$$\gamma_t(G) \leq 2k + 2 \sum_{i=1}^k r_i = 2k + 2(q+2-k) = 2q+2$$

que es la cota dada en el Teorema 3.2.1. Si para toda i se tiene que $r_i < q_i - 1$, entonces $r_i \leq q_i - 2$.

$$q+1-k = \sum_{i=1}^k r_i \leq \sum_{i=1}^k (q_i - 2) = q+k-2k = q-k$$

de donde se obtiene que $1 \leq 0$. Por lo tanto $r_i \geq q_i - 1$ para alguna i por lo que $\gamma_t(G_i) \leq 2q_i - 1 \leq 2r_i + 1$ y se tiene que

$$\gamma_t(G) \leq 2k + -1 + 2 \sum_{i=1}^k r_i = 2k - 1 + 2(q + 1 - k) = 2q + 1$$

Entonces existe una arista e tal que $G - e$ es $(q + 1)K_2$ -libre, por lo que $H_q(I(G - e)) \cong 0$, pues $G - e$ tiene menos aristas, por lo que $H_q(I(G)) \cong 0$, que es una contradicción. \square

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis, se estudió la dominación total de una gráfica mediante los grupos de homología reducida de su complejo de independencia. En particular, se obtuvieron los siguientes resultados originales:

1. Mediante la imposición de una hipótesis más fuerte, se dio una mejora para dos casos particulares ($q = 1, 2$) para la cota de la dominación total dada por Meshulam en [23]. Para esto, se requirió desarrollar cierta teoría que se despliega en el Corolario 3.1.2 y los Lemas 3.1.8, 3.3.1 y 3.3.2.
2. Se definió la familia de las gráficas qK_2 -libres críticas. Además, se determinó el tipo de homotopía del complejo de independencia de las gráficas qK_2 -libres de diámetro $3(q-1)$ (Proposición 3.4.17). Todo esto con el fin de estudiar la dominación total de las gráficas qK_2 -libres, mediante el complejo de independencia y los grupos de homología.

De los resultados alcanzados, el Teorema 3.3.3, al tomar como hipótesis el número de vértices en el soporte de un ciclo no nulo, abarca más casos que si se prohíben ciertas subgráficas inducidas. Por ejemplo, las gráficas $2K_2$ -libres con complejo de independencia con 1-grupo de homología no nulo cumplen las hipótesis del primer inciso del Teorema 3.3.3. Pero este teorema no prohíbe a $2K_2$ como subgráfica inducida.

Como trabajo a futuro quedan las conjeturas planteadas en esta tesis, así como el estudio de las gráficas qK_2 -libres críticas.

Bibliografía

- [1] ADAMASZEK, M. Y BARMAK, J.A. On a lower bound for the connectivity of the independence complex of a graph. *Discrete Mathematics* **311**:2566–2569 (2011)
- [2] BABSON, E. Y KOZLOV, D.N. Proof of the Lovász conjecture. *Annals of Mathematics* **165**:965–1007 (2007)
- [3] BARMAK, J.A. Star clusters in independence complexes of graphs. *Advances in Mathematics* **241**:33–57 (2013)
- [4] BLYTH, T. *Module Theory. An approach to Linear Algebra*. Clarendon Press Oxford (1990)
- [5] CHARTRAND, G. Y LESNIAK, L. *Graphs and Digraphs*. Chapman & Hall/CRC (2000)
- [6] CHUNG, F., GYÁRFÁS, A., TUZA, Z., Y TROTTER, W. The maximum number of edges in $2K_2$ -free graphs of bounded degree. *Discrete Mathematics* **81**(2):129–135 (1990)
- [7] COCKAYNE, E.J., DAWES, R.M., Y HEDETNIEMI, S.T. Total Domination in Graphs. *Networks* **10**(3):211–219 (1980)
- [8] DAO, H. Y SCHWEIG, J. Projective dimension, graph domination parameters, and independence complex homology. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **120**:453–469 (2013)
- [9] DIESTEL, R. *Graph Theory*. Springer (2010)
- [10] EHRENBORG, R. Y HETYEI, G. The topology of the independence complex. *European Journal of Combinatorics* **27**:906–923 (2006)

- [11] ENGSTRÖM, A. Independence complexes of claw-free graphs. *European Journal of Combinatorics* **29**:234–241 (2008)
- [12] ENGSTRÖM, A. Complexes of directed trees and independence complexes. *Discrete Mathematics* **309**:3299–3309 (2009)
- [13] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002)
- [14] HENNING, M.A. Y YEO, A. *Total Domination in Graphs*. Springer Monographs in Mathematics. Springer (2010)
- [15] JONSSON, J. *Simplicial Complexes of Graphs, Lecture Notes in Mathematics*, tomo 1928. Springer (2008)
- [16] KAWAMURA, K. Homotopy types of independence complexes of forests. *Contributions to Discrete Mathematics* **5**(2):67–75 (2010)
- [17] KAWAMURA, K. Independence complexes of chordal graphs. *Discrete Mathematics* **310**:2204–2211 (2010)
- [18] KNESER, M. Aufgabe 360. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **58**(2):27 (1955)
- [19] KOZLOV, D. Complexes of Directed Trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **88**:112–122 (1999)
- [20] LLUIS-PUEBLA, E. *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica, Textos*, tomo 5. Sociedad Matemática Mexicana (2005)
- [21] LOVÁSZ, L. Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **25**(3):319–324 (1978)
- [22] MEISTER, D. Two characterisations of minimal triangulations of $2K_2$ -free graphs. *Discrete Mathematics* **306**(24):3327–3333 (2006)
- [23] MESHULAM, R. Domination numbers and homology. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **102**(2):321–330 (2003)
- [24] MILNOR, J. Construction of Universal Bundles, II. *Annals of Mathematics* **63**(3):430–436 (1956)

- [25] MUNKRES, J. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1984)
- [26] PRASOLOV, V. *Elements of Homology Theory, Graduate Studies in Mathematics*, tomo 81. American Mathematical Society (2005)
- [27] PRIETO, C. *Topología básica*. Fondo de Cultura Económica (2013)
- [28] ROTMAN, J.J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer (1998)