UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES UNIDAD LEÓN

TEMA: ANÁLISIS DE MODELO MATEMÁTICO PARA LA DETERMINACIÓN DE PRECIOS DE PRODUCTOS CON VIDA LIMITADA: APLICACIÓN AL PRECIO DE LOS BOLETOS DE AVIÓN

FORMA DE TITULACIÓN: TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMÍA INDUSTRIAL

P R E S E N T A

VICTORIA HERNANDEZ GRANADOS

TUTOR: DR. JUAN MIGUEL RUIZ ZEPEDA

ENESUNAM
UNIDADLEÓN

LEÓN, GUANAJUATO, MÉXICO 2019

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109117.

A mi tutor de tesis, por su tiempo, disposición y conocimientos para desarrollar este trabajo, muchas gracias Dr. Juan Miguel Ruiz Zepeda.

Por sus valiosas aportaciones en la revisión de mi tesis, por su colaboración y tiempo, muchas gracias Dra. Areli Vázquez Juárez.

La universidad me ha permitido formarme, y en ella agradezco mucho por la ayuda de cada uno de mis maestros, compañeros y amigos, y todos los que componen esta gran institución que fueron parte de este proceso integral.

Por su esfuerzo en ayudarme a llegar al punto en el que me encuentro, gracias familia.

Análisis de modelo matemático para la determinación de precios de productos con vida limitada: aplicación al precio de los boletos de avión

Resumen

En el presente trabajo de tesis se llevó a cabo el estudio de un modelo matemático para la determinación dinámica de precios de productos con vida limitada, en particular, para el caso de la venta de boletos de avión. El modelo, basado en técnicas cuantitativas como la teoría de control óptimo y el cálculo de variaciones, determina el precio óptimo diario de un vuelo conforme se acerca la fecha de compra, con el propósito tanto de estimular la demanda como de maximizar el rendimiento. Se llevaron a cabo diferentes simulaciones basadas en este modelo, para una función de demanda, una función de probabilidad de compra, un periodo de venta y una capacidad prescritas. Entre los resultados de las simulaciones, se obtuvieron algunas características del comportamiento cuantitativo del precio de los boletos de avión para optimizar el rendimiento. En particular, se cuantificó la medida en la que un precio fijo no es la mejor opción de precio para un producto con vida limitada.

Palabras clave: Determinación de precios, control óptimo, precios dinámicos, Cálculo de variaciones, administración del rendimiento

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nos encontramos rodeados de productos y servicios que exigen que su consumo sea aprovechado de la mejor forma pues poseen características restrictivas como una vida útil limitada, una capacidad específica o una producción reducida. Entre los productos que cumplen con las características antes mencionadas se encuentran los alimentos, las prendas de vestir de temporada o algún servicio que solo sirve en una fecha determinada como los boletos para conciertos o las habitaciones de hotel. Además, este tipo de productos no se pueden distinguir uno de otro si tienen calidad similar.

Para aprovechar de mejor manera estos productos, evitar su desperdicio, y obtener los mayores rendimientos, se pueden aplicar diferentes técnicas de estudio que proporcionen estimaciones cuantitativas de su demanda y así diseñar estrategias que incentiven su compra dentro del tiempo de vida útil del producto. Por lo que para aprovechar los bienes con vida limitada de la mejor manera y obtener el mejor rendimiento posible es de gran ayuda realizar políticas que identifiquen el comportamiento de la demanda de los consumidores para la creación de modelos matemáticos que optimicen el rendimiento de manera general.

El tipo de productos que se analizaron en la presente tesis son bienes con vida limitada por lo que su valor es dependiente del tiempo. En particular, se revisó el caso de los boletos de avión, en donde al llegar la fecha de salida se pierde el valor del boleto y ya no es recuperable, es por esto que su precio está en relación directa con el tiempo restante hasta el día de salida. Así pues, se realizó el análisis de un modelo matemático para la determinación de precios dinámicos de los boletos de avión. Este modelo es una base para la determinación de precios de otros productos con vida limitada determinada, porque permite agregar otras variables de acuerdo a las características del producto a estudiar.

Una de las características principales de los boletos de avión es que pasada la fecha de salida no se puede recuperar nada del valor de un boleto no vendido. En cambio, otros productos como la ropa de moda pueden tener un valor de desecho que permite obtener un importe recuperable incluso cuando su vida útil haya concluido. Además, los boletos de avión muestran una particularidad en la que el tiempo es un factor importante en la conducta del consumidor, ya que a menos días de la salida del vuelo los consumidores estarán dispuestos a pagar más por obtener el servicio y comprar el boleto.

El cálculo de variaciones es una técnica cuantitativa que desde hace mucho tiempo ha permitido la solución de problemas de optimización, siendo considerada como la forma clásica de resolver este tipo de problemas al buscar valores máximos y mínimos de una función.

Para esta investigación se planteó la siguiente interrogante:

¿Cómo es el comportamiento cuantitativo del precio de un producto de vida limitada, en relación al tiempo que le resta de vida útil, de acuerdo a un modelo de optimización de rendimiento mediante cálculo de variaciones, para una función de demanda, una función de probabilidad de compra, un periodo de venta y una capacidad determinadas, en particular el caso de la venta de boletos de avión?

En este caso de estudio, se emplean estrategias de cambios de precios de los boletos de avión que estimulan a los consumidores para comprar boletos de avión dentro del periodo de vida útil para obtener mayores rendimientos, ya que el precio está determinado por los costos de producción y la cantidad disponible de productos siendo la variable principal que determina el rendimiento obtenido.

Estas estrategias permiten obtener los mejores rendimientos, contrario a establecer un mismo precio fijo durante todo el periodo de compra, pues los consumidores podrían confiar en la disponibilidad de los mismos al tener siempre el mismo precio, sin importar cuándo adquieran el boleto.

Es por ello que el objetivo general de esta investigación es analizar el comportamiento de los precios en relación al tiempo, a través de simulaciones, de un modelo matemático que optimiza el rendimiento en la venta de boletos de avión con una capacidad y periodo de venta dados, mediante la determinación dinámica de precios.

Los objetivos específicos de la investigación son:

- Estudiar un modelo que aplica la teoría de control óptimo para determinar el precio de productos que tienen una vida limitada, como caso particular para determinar el precio de boletos de avión.

- Estudiar el impacto cuantitativo de los parámetros que intervienen en la determinación del precio para la optimización del rendimiento, a saber, capacidad y periodo de venta.

- Llevar a cabo simulaciones para estudiar el comportamiento dinámico de los precios a partir de parámetros iniciales determinados.

Se tuvieron como hipótesis los siguientes

Es difícil determinar el precio de un producto con vida limitada como los boletos de avión, porque perderá su valor llegado un tiempo específico y será inservible. Es conveniente establecer un precio correcto que permita atraer clientes, cubrir los costos y generar rendimientos.

El cambio de precios en el tiempo, de un producto con vida limitada, es necesario para incentivar su compra, así como para optimizar el rendimiento y aumentar los ingresos de quien lo produce.

Al establecer un precio fijo se genera en los consumidores la confianza de realizar la compra hasta que sea seguro su consumo y no se realice de manera anticipada.

La cantidad de boletos de avión que se pueden poner a la venta está sujeta a la capacidad de los aviones, no se pueden vender más si se llega a la capacidad antes de que termine el periodo de ventas.

La demanda de los boletos de avión depende de los consumidores. Una forma práctica de contabilizarla es con el uso de la tecnología, por medio del número de consultas que se generan en la página electrónica de su venta. Es posible construir una función de demanda con esta información.

El cálculo de variaciones es una herramienta que permite encontrar funciones del precio y el tiempo que optimizan el rendimiento.

En la actualidad la dinámica de precio en los boletos de avión es común, ninguno tiene un precio fijo, todos cambian de valor de acuerdo con la cercanía de la fecha de despegue del vuelo.

En el primer capítulo se da una introducción a los bienes de vida limitada y cómo se pueden clasificar de acuerdo a la valuación que se tome con respecto a sus características de determinación de vida útil. En el segundo capítulo se realiza un estudio de varios artículos de investigación precedentes en los cuales se fundamenta el modelo analizado. En el tercer capítulo se analizan los distintos factores que se consideran dentro del modelo para la determinación de precios como lo es el cálculo de variaciones, la teoría de control óptimo, los precios dinámicos, la capacidad restringida y los productos intercambiables; se da además una breve introducción a cada uno de estos conceptos. Así mismo se presenta la definición de las variables utilizadas y se describen los supuestos con los que se desarrolla el modelo. En el cuarto capítulo se describe el algoritmo utilizado en las simulaciones, basado en el modelo, así como los parámetros iniciales empleados. Por último, se exponen los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas con las simulaciones del modelo y las conclusiones a las que se llegaron.

CAPÍTULO 1 BIENES DE VIDA LIMITADA

Vida limitada

En nuestra vida diaria nos encontramos rodeados de distintos bienes con vida limitada, es decir, aquellos que deberán utilizarse en un periodo de tiempo corto antes de que sean inservibles o pierdan su valor. Estudiar sus características específicas y clasificarlos nos permiten aprovecharlos de mejor forma.

Dentro de la economía se utilizan diversas clasificaciones para la identificación de los bienes, entre ellas se clasifican a los bienes como durables o no durables, esta clasificación es de acuerdo a la frecuencia con la que se adquiere el bien, siendo no durables aquellos que se adquieren con mayor frecuencia.

Con el fin de tener una mejor identificación de los bienes y por sus características, clasificamos a los productos de vida limitada en tres tipos: descomposición, temporada y fecha límite.

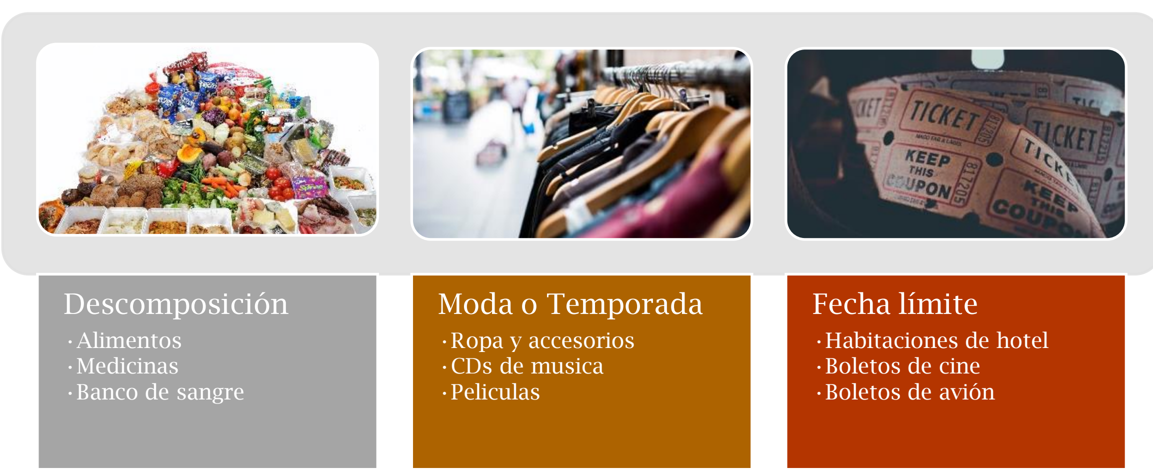


Figura 1 Clasificación de bienes con vida limitada según sus características. Fuente: Elaboración propia.

Descomposición

En esta categoría se tiene a aquel producto que se descompone por factores de temperatura, presión o humedad, como lo son en su mayoría los alimentos. Esto incluye todos aquellos alimentos que provienen de animales, vegetales y frutas que tienen un periodo de vida útil comestible. Por lo que deben conservarse en lugares de almacenamiento especiales que retrasen su descomposición y consumirse antes de que llegue su fecha de caducidad si es que la tienen establecida (Ayuntamiento de Jaén, (OMIC), 2017).

La mayoría de los alimentos sufren un proceso de descomposición. Por lo que para alargar su vida se someten a procesos de conservación que permitan aprovechar sus beneficios por un mayor periodo de tiempo y reducir los desperdicios (Servín , 2013).

Los alimentos provenientes del mar como peces y mariscos necesitan procedimientos diferentes de conservación que permitan el consumo de estos productos sin dañar la salud y aumentando su vida útil comestible (Dávalos, et al., 2005).

Otro ejemplo de bienes con vida limitada que están dentro de esta categoría de descomposición son los medicamentos. Por lo cual, las farmacias deben realizar una adecuada administración de sus inventarios para aprovechar los productos de mejor manera. En el caso de los medicamentos su ingesta pasada la fecha de caducidad establecida puede generar daños a la salud. Esta fecha de caducidad puede identificarse fácilmente en los productos dentro de la categoría de descomposición ya que debe calcularse para su mejor aprovechamiento.

Las personas prefieren un producto que tenga una fecha de caducidad más alejada, pues garantiza durabilidad del producto y frescura al indicar que ha sido elaborado recientemente. Por lo que la demanda no solo depende del precio de venta sino de su frescura relacionada con su fecha de caducidad y de su disponibilidad de inventario (Li y Teng, 2018).

Un ejemplo más relacionado con la salud, es la administración de un banco de sangre, en el que la sangre se debe transfundir antes de que ya no sea provechosa, pues también tiene un periodo límite de utilización (Nahmias, 1982).

Esta categoría puede generar un gasto en el desecho de los productos que pierden su vida útil.

En la actualidad, el desperdicio de alimentos genera pérdidas millonarias de dinero. Cuanto más próxima está la fecha de caducidad, menos se está dispuesto a pagar por el producto. Por lo que es necesario establecer estrategias que permitan obtener los mejores beneficios en las ventas de estos productos antes de que sea demasiado tarde y se pierda por completo su valor.

Temporada

Otra característica para clasificar a un bien de vida limitada es la temporada o que pase de moda el producto. Aunque en esta categoría, pasado este tiempo de vida el producto pierde su valor, no su funcionalidad.

En este caso están la ropa y accesorios, entre otros; que pierden su valor al cambiar de temporadas como lo son primavera-verano a otoño-invierno.

Al terminar la temporada, se tendrá ropa nueva disponible para su venta y la ropa restante de la temporada anterior seguirá siendo útil pues no se descompone. Sin embargo, la ropa restante pierde parte de su valor, pues se tienen productos nuevos y los antiguos pasan de moda. Una de las características importantes dentro de esta categoría de temporada o moda es que no se pierde su funcionalidad, por lo que pueden ser vendidos aún pasada la temporada para recuperar una parte de su costo a un valor de desecho (Gallego y Van Ryzin, 1994).

Este tipo de productos pueden involucrar gastos extras pasada su temporada, ya que al no perder su funcionalidad se tendrán que realizar gastos adicionales de transporte y almacenamiento para su cuidado hasta que sean vendidos.

Fecha límite

También se consideran con vida limitada los productos que pierden totalmente su valor en una fecha determinada. En este caso, están los productos que pasada cierta fecha ya no pueden ser utilizados, lo que determina la tercera categoría como artículos con fecha límite. Como ejemplo están las habitaciones de un hotel, los boletos para el cine o espectáculos y los boletos de avión, entre otros.

Estos productos son no almacenables, no transportables e inmateriales (Henschel, 2005), además de que están limitados a la capacidad del lugar, por lo que su venta depende de la disponibilidad del producto y no puede ampliarse.

En el caso de las habitaciones de hotel, por lo general los hoteles tienen una hora de corte para pagar el día. Para el caso de los boletos de cine, estos tienen fecha y hora determinada para cada función y por más que se acerque la hora de inicio de la función, el precio seguirá siendo el mismo además de que se puede adquirir un boleto aún la función haya iniciado. Su compra dependerá del cliente que esté dispuesto a pagar por el servicio con conocimiento de que será incompleto.

Tomando como ejemplo las habitaciones de hotel, en el que el servicio sigue estando ahí, pero llegada la fecha se pierde su valor de uso, si las habitaciones no son ocupadas no se recibirá un ingreso. En cambio, otros productos como la ropa se pueden vender a un precio menor ya que las personas no están dispuestas a pagar el mismo precio para los nuevos productos, lo que permite recuperar un poco del valor del producto, así como establecer precios más altos a los nuevos productos (Bitran y Mondschein, 1997).

La comercialización de los productos con vida limitada debe ser apoyada por técnicas de marketing que permitan obtener mayores beneficios de los productos pues estos productos no podrán ser almacenados indefinidamente (Casado y Sellers, 2006).

Son muchos los productos que tienen una vida limitada por lo que ha sido un tema de estudio activo, además de los autores que se consideran en este trabajo de investigación, siendo uno de los artículos pioneros el elaborado por Kincaid y Darling en 1963. Freddy Pérez y Fidel Torres realizaron una revisión literaria de 390 artículos de modelos matemáticos sobre las políticas óptimas de inventarios de productos perecederos, de 2001 a 2013 (Pérez Mantilla y Torres, 2014).

Todos estos productos con vida limitada no pueden reservarse su venta por tiempo indefinido hasta que el mercado sea más favorable para su venta pues pierden su valor.

Valuación de bienes de vida limitada

Depreciación

En la descripción del concepto de que un producto pierda su valor como consecuencia de su uso, el paso del tiempo, el desgaste, la desactualización tecnológica u obsolescencia se utiliza: depreciación (Cipra, 2010).

Como ejemplo de la disminución del valor de un bien o artículo ocasionado por el desgaste por su uso, están las herramientas o equipos de trabajo, que se deterioran cada vez que se utilizan para elaborar o transformar un producto. En cambio, otro factor en la pérdida de valor es el paso del tiempo, en donde los productos, aunque no sean expuestos a trabajo fuerte, pueden disminuir su valor. Como es el caso de los libros, que con el paso del tiempo la información que contienen podría perder validez (Zimer, 2015).

La depreciación es un concepto de relevancia dentro de los estados financieros de las empresas en dónde se deprecian los activos adquiridos para la generación de ingresos, y que afecta el pago de impuestos. Por ello, se han desarrollado métodos específicos que permiten evaluar el efecto de la depreciación en la vida de los activos. Para este cálculo se tienen distintas técnicas, entre otras está el método lineal: todos los años se deprecia la misma cantidad; el método del saldo decreciente: de acuerdo al saldo del valor que se tiene se calcula el valor de la depreciación por lo que los cargos disminuyen gradualmente; o el método de saldo progresivo: los cargos anuales van en aumento. Para realizar el cálculo es necesario conocer el costo original del activo, su valor de desecho y el periodo de depreciación o vida útil del activo (Cipra, 2010).

El método más conocido es el de depreciación lineal, por ejemplo, al comprar un auto con valor de \$120,000, se sabe que el valor de desecho será de \$50,000 y se deprecia en 4 años. La fórmula para la depreciación anual se puede representar con una ecuación en función del tiempo *y=mt+b*, en donde *y* es el valor de compra, b es el valor inicial y *m* el valor de depreciación anual. Con esto obtenemos que la depreciación anual será de \$17,500. Y la ecuación para el precio al tiempo *t,* es *y = \$17,500*x *+ \$120,000.*

$$depreciación\ anual = m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

$$depreciación\ anual = \frac{(valor\ de\ compra - valor\ de\ desecho)}{años\ de\ vida\ útil}$$

Demanda y cambios en el valor

La demanda es la cantidad total que los consumidores planean adquirir de un producto a un precio determinado y de acuerdo al modelo del equilibrio de mercado esta demanda se verá influenciada por el precio, el cual permite que junto con la oferta se llegue al equilibrio (Parkin y Loría , 2010).

El comportamiento de la demanda parte de que cuanto menor sea la cantidad de un bien, mayor será el precio que alguien esté dispuesto a pagar por él. Ya que el bien es escaso. Esto es porque al tener escasez en un bien, el precio refleja la dificultad de adquirirlo. O pensando de forma inversa, si el precio es alto, la demanda será poca, porque serán pocos lo que tenga los recursos para obtenerlo.

Las especulaciones del precio influyen en la demanda de un producto al evaluar su costo de oportunidad, ya que crea incertidumbre e incentiva la compra de los consumidores. Por tanto, al temerse que el producto pueda aumentar de valor se incentiva su compra, es así como el precio futuro de un bien influye en su demanda. Si se espera que el precio del producto en un futuro sea mayor al actual se supone que la demanda actual sea mayor y en el futuro esta disminuya. Esto es debido a que el costo de oportunidad de comprarlo en el futuro es mayor.

El aumento real del precio puede ser generado por una burbuja especulativa debido a un aumento esperado del precio. El efecto de ésta es que el precio sube solo porque se esperaba que lo hiciera y además se ve reforzado.

El precio puede cumplir la función de regular la cantidad que se demande, pues si se establecen precios muy bajos en donde se tenga una demanda muy alta, no se tendrá la oferta suficiente para que sea abastecida, por lo que no es sostenible determinar un precio tan bajo, ya que los productores no están dispuestos a ofrecer cantidades altas si sus costos no se cubren.

También el precio permite establecer la cantidad adecuada en el caso de que se tenga una producción programable o bien que pueda cambiarse con facilidad y que no dependa de factores naturales. En cambio, cuando la demanda aumenta, pero no se tienen cambios en la cantidad que se ofrece, porque ésta no puede cambiarse con facilidad ó si depende de otros factores naturales, el precio de equilibrio aumenta para la nueva cantidad demandada, porque al aumentar el precio la demanda baja en relación al nuevo precio.

Las preferencias son también un factor importante dentro de la demanda de un producto, estas preferencias pueden estar influenciadas por la moda, u otros factores como el clima (Parkin y Loría , 2010).

Si bien la demanda cambia los precios de los productos, éstos además tienen características que influyen en su valor, como el diseño y la calidad del producto. Estas características influyen en las preferencias de los consumidores para garantizar su venta, lo que genera que el producto tenga un mayor valor respecto a otros de su mismo tipo.

El valor de un producto podrá estar dado, en gran parte, por las características personales del consumidor y por el contexto en el que se realiza la valoración (Aragón, 2013).

Como ejemplo de este aumento de valor de los productos está el aumento de precio de un terreno. Su aumento de valor será consecuencia de su ubicación y los cambios en las condiciones circundantes, que faciliten su acceso y la disponibilidad de servicios con los que cuente como lo son los servicios públicos.

Caso: boletos de avión

La particularidad de los boletos de avión además de ser productos con vida limitada, son no acumulables y están sujetos a la capacidad de la aeronave razones por las cuales no se puede aumentar la oferta. Debido a esto para su valuación es de gran ayuda conocer la respuesta de los consumidores y su comportamiento de compra para establecer políticas óptimas de precios que estimulen a los clientes y permitan a la empresa obtener los mayores rendimientos de las ventas que se realicen, para cubrir todos los costos, ofrecer un mejor servicio aumentando su calidad, así como la implementación de mejor tecnología.

Asimismo, otra característica importante en el caso de los boletos de avión es que su comportamiento de demanda es diferente, ya que los consumidores están dispuestos a pagar más en cuanto la fecha de salida del vuelo es más cercana (Bitran y Mondschein, 1997). Por lo que los boletos de avión se venden con tiempo de anticipación ofreciendo tarifas bajas con el fin de estimular a los clientes pues la oportunidad de un precio más bajo es poco probable y en el futuro pagarían más.

De acuerdo con la descripción de las características realizada, la importancia del estudio de los productos con vida limitada está en establecer los precios correctos para obtener los mejores rendimientos antes de que se llegue a la fecha límite y se pierda el valor total de los productos. Además, con la ayuda de políticas que estimulen las ventas, se puede reducir el desperdicio de productos.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

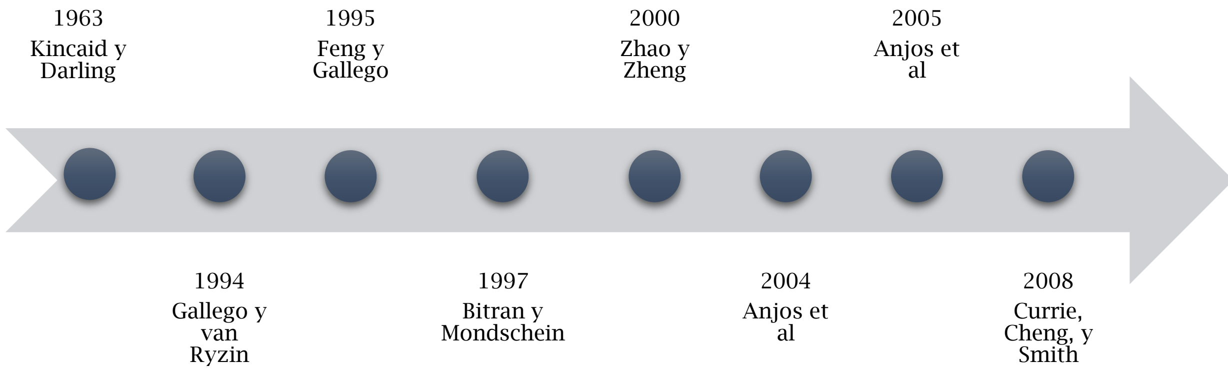


Figura 2. Línea del tiempo de las referencias en las que se basa el artículo estudiado para el modelo que se analiza. Fuente: Elaboración propia.

Uno de los primeros estudios realizados para el problema de establecer un precio para productos con vida limitada es de W. M. Kincaid y D. A. Darling (Kincaid y Darling, 1963). En su trabajo "An Inventory Pricing Problem", plantean el problema que tiene una persona cuando se ve forzada a tomar una decisión antes de una fecha determinada, para establecer el precio a un inventario de productos antes de que termine un plazo específico de tiempo. En este caso se toma a un vendedor de mercancías. El planteamiento toma en cuenta que este problema puede ser resuelto por inventario óptimo o programación dinámica, aunque no lo desarrollan así. El problema que consideran es el de un vendedor que busca maximizar su ganancia, donde se tienen dos casos:

1) El vendedor establece el precio del producto para que el comprador lo conozca.

2) Los compradores hacen ofertas de cuánto están dispuestos a pagar al vendedor.

En ambos casos se establece que cada comprador sólo compra un producto. El primer caso puede ser considerado como más apegado a la realidad, pues los precios son determinados por quienes venden los productos y el comprador elige de acuerdo a este precio en dónde considera le conviene más adquirirlo. Aunque tiene algunas limitantes al ser desarrollado de manera independiente a un problema de inventario óptimo o programación dinámica considerando que no se tiene información previa sobre cómo desarrollarlo. Es por esta razón que se considera como una gran base para el análisis de optimización de precios, pues toma en cuenta una distribución de llegada de los compradores a la tienda y también formula la probabilidad de que paguen por el producto de acuerdo a cómo se establezca el precio.

El problema de establecer un precio para un determinado número de productos es un problema que afecta a varias industrias, como lo son la industria de viajes y ocio, productoras de ropa, artículos de temporada, entre otras; es por eso que Guillermo Gallego y Garrett Van Ryzin (Gallego y Van Ryzin, 1994) desarrollan un estudio titulado "Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons". En este artículo, los autores consideraron un inventario inicial de productos en un horizonte finito de tiempo, con esto se refieren a que los productos tienen una vida útil limitada pues después de un tiempo pierden su valor. En su estudio se preocupan por tener un control del inventario a corto plazo, con esto establecen el supuesto de que durante el periodo de ventas no podrá ser resurtido el inventario. También consideran que es necesario un precio dinámico cuando la demanda es sensible al precio para que permita maximizar los ingresos de la empresa.

Una de sus motivaciones (Gallego y Van Ryzin, 1994), tomando en cuenta la industria de la ropa, en la que se puede tener un valor de desecho aun cuando haya pasado de temporada, es tomar el valor de desecho dentro de las políticas de precio. En cambio, para el caso de estudio de los boletos de vuelos de avión, se pierde totalmente su valor, por lo que las estrategias de venta de boletos de avión deben ser más atractivas para incentivar la compra.

G. Gallego y G. Van Ryzin, (Gallego y Van Ryzin, 1994) introducen también el término de gestión de rendimiento (del inglés yield managment), que se basa en asignar adecuadamente el precio de un producto al consumidor para anticipar e influir en su comportamiento, así como también a la segmentación del mercado por mecanismos de compra todo con el fin de aumentar los ingresos. Además de que se considera que este término nace dentro de la industria aérea, para aumentar la ventaja competitiva y los ingresos (Kimes, 1989).

Un ejemplo en las aerolíneas es el cierre de tarifas. Esto quiere decir que se establece una tarifa, pero dado un tiempo determinado esta se cambia a un precio más alto o bajo y después se regresa.

La gestión del rendimiento captó la atención de la industria de las aerolíneas a fines de los años sesenta y principios de los ochenta cuando se creó un exceso de capacidad temporal después de la desregulación de las aerolíneas. De acuerdo al estudio realizado por Barry C. Smith, John F. Leimkuhler y Ross M. Darrow "Yield Management at American Airlines" en 1992, se estimó que los beneficios obtenidos en la compañía aérea fueron de más de 1.4 mil millones de dólares en los últimos tres años demostrando las grandes retribuciones que se pueden obtener (Smith, Leimkuhler, y Darrow, 1992).

Otra mención importante dentro del estudio de G. Gallego y G. Van Ryzin, (Gallego y Van Ryzin, 1994) es su insistencia en lo sustancial que es establecer las tarifas solo por periodos de tiempo, combinando el precio estático en distintos periodos de tiempo. Establecen que si se conoce la demanda como una función del precio y los precios no están restringidos, una política única de precio fijo es casi óptima. Consideran que un precio fijo podrá tener menores perdidas cuando el cambio de precios incluya otros gastos como es la publicidad, aunque considerando que hoy en día el uso del internet permite ejecutar estos cambios de manera inmediata y con costos muy bajos en comparación con el alcance que pueden tener. La conclusión principal del estudio que desarrollaron es que políticas simples de fijación de precios funcionan también en otros casos como óptimas sin tener que usar políticas dinámicas que implican un mayor número de ajustes de forma continua.

Siguiendo con el problema de establecer un precio óptimo para un inventario determinado de productos en un tiempo finito, Youyi Feng y Guillermo Gallego (Feng y Gallego, 1995) elaboraron un artículo titulado “Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares”, en este trabajo buscaban identificar el momento más conveniente para modificar los precios de un producto que maximiza el ingreso. Demuestran que es óptimo tanto disminuir como aumentar el precio según sea el inventario restante, ya que por lo general no se consideraría favorable disminuir los precios y no generar rendimientos.

Las industrias que se toman en cuenta en el estudio tienen características particulares como un número fijo de productos en venta, como son los asientos en una aerolínea, que además deben ser vendidos antes de que el avión salga a su destino; las habitaciones de hotel, las cuales están disponibles a partir de una hora determinada por el establecimiento; y los artículos y ropa de temporada, los cuales deberán ser vendidos antes de que termine la temporada para la que fueron diseñados.

En este modelo los autores consideran que se conoce la demanda, que tiene como características ser estocástica y sensible al precio. Los precios y descuentos se prescriben por adelantado, es decir son anunciados, es el caso de las aerolíneas donde el problema recae en administrar las ventas de los inventarios y maximizar los ingresos, que depende del precio establecido para su venta.

Además, los autores (Feng y Gallego, 1995) establecen que no se pueden seguir medidas como "cambiar cuando ha transcurrido un cierto tiempo" o "cambiar cuando se ha vendido un cierto número de asientos" o "cambiar cuando quedan un cierto número de asientos"; ya que estas reglas limitan mucho las variables y circunstancias. Por ejemplo, al cambiar el precio cada determinado tiempo no toma en cuenta el inventario disponible al momento del cambio en el precio. Así como también un cambio con base sólo en el inventario de asientos restantes no está tomando en cuenta el tiempo de partida del vuelo.

Por lo tanto, ninguna de las medidas anteriores puede ser óptima si los rendimientos dependen tanto del inventario disponible como del tiempo de salida.

También Youyi Feng y Guillermo Gallego (Feng y Gallego, 1995), proponen que para tener un control dentro de los periodos de tarifas promocionales estos deberán estar limitados a una cantidad, para que después de ser vendida la cantidad establecida se cancele la promoción. Al determinar esto, se puede establecer que el cambio de precio será una variable aleatoria que dependerá del inventario y el tiempo de vencimiento, y que de las ventas dependerá el periodo en el que se mantenga una tarifa promocional. Además, un aspecto importante a considerar dentro de la industria aérea es el comportamiento cíclico del consumidor en el que depende mucho la hora y día de la semana para concluir una compra.

Otros de los autores que se consideraron son Gabriel R. Bitran y Susana V. Mondschein (Bitran y Mondschein, 1997) y su artículo "Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing", en el que desarrollaron un estudio sobre los precios de productos de venta en tiendas al menudeo en cada temporada. En particular, presentaron un modelo con tiempo continuo en donde los clientes llegan de manera estocástica. Además muestran la forma en que las tiendas establecen su política de precios en la que van descontando el precio sucesivamente y al final promueven una venta de liquidación. Estudiaron tambien el efecto de políticas de descuento que se anuncian con anticipación y el efecto que tienen en las ganacias y en los precios.

El ejemplo que toman en cuenta Gabriel R. Bitran y Susana V. Mondschein (Bitran y Mondschein, 1997), es el de la ropa de temporada. Analizaron que para este producto en específico al inicio del periodo de venta los clientes estarán dispuestos a pagar un precio más alto por el hecho de tener primero la prenda. En cambio, al final de la temporada los clientes no están dispuestos a pagar precios altos por las prendas de ropa como en el caso de los boletos de avión en donde al acercarse la fecha límite se está más dipuesto a pagar una cantidad mayor.

Dentro de la industria de la ropa el cambio de temporada es muy notable, por lo que una práctica común es el establecer ofertas en días festivos o por temporadas o bien ejecutar rebajas por periodos e ir aumentado la rebaja.

Los autores (Bitran y Mondschein, 1997), consideran que la ropa tiene una vida limitada y las tiendas intentan liquidar y deshacerse de los productos restantes antes de que comience la nueva temporada. Elaboran un modelo teórico para un distribuidor minorista. Con lo que mostraron diferentes ventajas que tienen tanto una política periodica de precios como una política continua, en donde las reducciones temporales corresponden a una decisión estratégica, en la que se involucra una familia de productos que se promocionan en momentos específicos durante el año. Estudiaron la estrategia de algunos minoristas que ofrecen un patrón de descuento fijo por fechas sin importar el desempeño individual de cada producto.

Dos factores para la determinación de la varianza de distribución de los precios de reserva dentro del modelo (Bitran y Mondschein, 1997) son: 1) qué tan diferentes son los segmentos de mercado y 2) la poca información sobre los gustos y necesidades de los clientes. Esta información es muy importante para aplicar el modelo dentro de prácticas reales. Aunque, en este caso, su modelo no se puede implementar en la práctica pues depende totalmente de los precios y sus cambios durante el periodo. Pero puede ser muy útil siempre y cuando se establezca un límite superior para el rendimiento.

Para Wen Zhao y Yu-Sheng Zheng (Zhao y Zheng, 2000) fue de gran relevancia establecer un modelo de productos perecederos con una demanda no homogénea considerando las restricciones de tiempo e inventario para la maximización de ingresos, además de la sensibilidad de la demanda a los precios, por lo que desarrollaron el artículo "Optimal Dynamic Pricing for Perishable Assets with Nonhomogeneous Demand". Este modelo se fundamentó en varios de los artículos antes mencionados, por lo que al igual que varios de los autores anteriores, tomaron en cuenta la llegada de los clientes como un proceso Poisson no-homogéneo, así como también que se tiene un inventario dado y sin reposición, que la demanda es estocástica y sensible a los precios. Sin embargo, incluye el hecho de que los productos que no se logren vender al final del periodo tendrán un valor de desecho.

Los autores establecen dos propiedades estructurales para el desarrollo de una política óptima en la maximización de los ingresos:

1. La propiedad de monoticidad de inventario, en la que el precio óptimo disminuye según los artículos que quedan.
2. La propiedad de monoticidad de tiempo, el precio disminuye con el tiempo sin importar la cantidad del inventario.

Además, una característica importante dentro de este estudio es que los autores consideran que, en el modelo de demanda, al ser ésta no-homogénea, la distribución de probabilidad del precio permanece igual en todo el horizonte. En cambio, un modelo de demanda homogénea requiere que la intensidad del proceso de llegada del cliente y la distribución de probabilidad del precio sean iguales en todo el horizonte. Al permanecer invariante en el tiempo Bitran y Mondschein muestran de forma independiente que las propiedades 1 y 2 son válidas para el modelo de demanda no-homogénea.

La propiedad 2, de monoticidad de tiempo, para el caso de los boletos de avión no se aplica pues al acercarse la fecha de partida los consumidores están dispuestos a pagar más por el boleto y no menos (Bitran y Mondschein, 1997).

Lo que lograron identificar Wen Zhao y Yu-Sheng Zheng (Zhao y Zheng, 2000) es que al acercarse al final del periodo y del nivel de inventario el precio óptimo comenzara a disminuir, por lo que con esta condición se requiere que los clientes estén dispuestos a pagar una prima, precio de reserva, por el producto para que no aumente de precio.

El objetivo principal de estos autores es encontrar las propiedades que permitan armar políticas óptimas de acuerdo a las condiciones establecidas. Por lo que realizan estudios numéricos que muestran que el uso de la dinámica óptima de las políticas óptimas logra un aumento de los ingresos de entre 2-7 % sobre el uso de un precio fijo. Con esto muestran que la gestión de rendimiento es esencial para las industrias de moda y viajes.

Otro documento importante que muestra una metodología implementada para encontrar los precios óptimos de los boletos de avión de una aerolínea británica restringido a vuelos sencillos donde todos los boletos son iguales, es el de M.F. Anjos, R.C.H. Cheng, y C.S.M. Currie "Maximizing revenue in the airline industry under one-way pricing" (Anjos, Cheng, y Currie, 2004). En este estudio utilizaron modelos de simulación que aproximen lo más preciso el modelo para encontrar rangos de confianza sobre el número de reservaciones que permitan regular las ventas.

Establecen los autores que el precio variará en el tiempo hasta la fecha de salida. Utilizan un modelo analítico y el cálculo de variaciones con multiplicadores de Lagrange para solucionar el problema. Los ajustes que proponen no hacen estimaciones de estacionalidad. Proponen componer un modelo donde se tome en cuenta el nivel de precios de los consumidores como una de las principales estimulaciones para el comportamiento de compra del cliente. Siendo clientes potenciales aquellos que acceden al sitio web de la aerolínea.

Otro artículo que continúa con el estudio del documento antes mencionado y que es un complemento realizado por los mismos autores es "Optimal pricing policies for perishable products" de Miguel F. Anjos, Russell C.H. Cheng y Christine S.M. Currie (Anjos, Cheng, y Currie, 2005). En este nuevo estudio proponen una metodología general para implementar una política de precios la cual se puede actualizar en tiempo real.

Utilizan un grupo de funciones continuas para la fijación de precios. La política de precios que proponen se puede actualizar en tiempo real con respecto a los cambios en los patrones de compra de los clientes. El valor de los artículos no vendidos es cero.

La metodología se adecúa al hecho de que el internet tiene una gran influencia en la compra de productos así que el número de clientes va en aumento por su fácil acceso, lo que ocasiona que los precios se tengan que actualizar. En cambio, al establecer el cambio de precios en la demanda el enfoque es distinto pues depende del tiempo restante para la fecha de salida el precio del boleto (Anjos, Cheng, y Currie, 2005).

Si bien se han realizado varios estudios como los antes mencionados para crear un modelo que determine los precios óptimos, pues lo que se quiere es obtener los mejores rendimientos, por lo que es necesario establecer un precio correcto que permita acercarse a este objetivo, en estos estudios ninguno ha incluido la competencia. La competencia tiene un gran efecto en la decisión de compra de los clientes, lo que afecta de manera directa la demanda.

El artículo “Dynamic pricing of airline tickets with competition” de los autores CSM Currie, RCH Cheng y HK Smith, (Currie, Cheng, y Smith, 2008) toma como variable a la competencia incluyendo en su modelo a un competidor. Basándose en trabajos antes realizados sobre la industria aérea y los boletos de avión. El modelo que establecen determina estrategias de precios que maximizan los ingresos. Establecen también la demanda del cliente.

Todos los modelos estudiados se respaldan unos de otros, todos se relacionan y han tomado de sus antecesores elementos para obtener sus nuevos resultados. Es por eso que se decidió revisarlos, ya que la información obtenida de que cada uno permite realizar un estudio más completo debido a que es distinto el enfoque con el que cada autor realizó su trabajo.

La realización de este estudio fue motivada por la relevancia que tienen las políticas de precios, las cuales son fundamentales para las operaciones de empresas de servicios, alimento y moda. Considerando que el precio es una de las variables que más afecta el rendimiento de una empresa por el efecto que tiene en el consumidor pero que al mismo tiempo puede manipularse.

El avance tecnológico y la obtención de información a través de internet permiten recopilar información en tiempo real y obtener datos estadísticos para implementar las políticas. Con variantes, la facilidad de comprar en línea presiona para que exista este tipo de modelos dinámicos que estimulen a los clientes a comprar, aunque también permite que los cambios sean fáciles, rápidos y sin costos cuantiosos. La industria de las aerolíneas fue una de las pioneras en usar técnicas de administración de ingresos en términos de control de su capacidad y precios dinámicos.

El problema principal, dentro de los estudios antes mencionados y motivaciones para la realización de este análisis, es el establecer precios para un inventario específico de productos con vida limitada, de demanda estocástica, que cambia en el tiempo y es sensible a los precios en un tiempo determinado. Además, se busca que este precio garantice maximizar el ingreso.

En el presente trabajo se utiliza un modelo sencillo, con pocas variables. No se consideran variables que pueden tener también grandes efectos dentro de la industria de las aerolíneas en específico, que pueden ocasionar cambios en los precios pero que ejerzan su influencia a largo plazo. Es decir, no se consideraron factores como el precio del combustible, las distintas temporadas para viajar, la influencia de los periodos vacacionales de las escuelas.

Respecto a los costos de combustible, históricamente en los países de América Latina y el Caribe, el precio de los combustibles se ha mantenido por debajo de los precios internacionales, y además puede depender de si se trata de un país exportador o importador de petróleo. Venezuela y Ecuador son países en los que los derivados del petróleo tienen precios muy bajos (Ríos Roca, Garrón B., y Cisneros G., 2007). Además, el precio de los combustibles depende no sólo de cubrir los costos de producción y la condición del país antes mencionada, sino de factores políticos, conflictos internacionales, el nivel de tributación del país, nivel de producción, metas de distribución, promoción de la industrialización, reformas energéticas y subsidios (Almonte y Rogat, 2004).

CAPÍTULO 3 MODELO DE DETERMINACIÓN DE PRECIOS

Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es un campo de las matemáticas que estudia los problemas, principios y métodos de extremos, mínimos y máximos, para encontrar soluciones óptimas y describir sus propiedades esenciales. Después del cálculo diferencial, el cálculo de variaciones tuvo un gran auge debido a que proporciona una comprensión aún más profunda de temas en matemáticas y física, por lo que su campo de aplicación es muy amplio. Por ejemplo, en mapas armónicos entre variedades, en problemas con restricciones como los problemas de control óptimo (Freguglia y Gianquinta, 2016).

El inicio del Cálculo de Variaciones fue en 1696, con John Bernoulli el cual desafío a los "matemáticos contemporáneos" a resolver el problema de braquistócrona o de descenso de tiempo mínimo. El objetivo es encontrar la trayectoria para que un móvil en virtud de su peso recorra en el menor tiempo un plano vertical y llegue del punto A al punto B. Fue solucionado por el mismo Bernoulli.

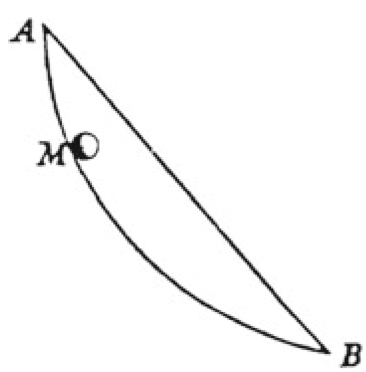


Figura 3. Ilustración del problema brasquistócrona. Fuente: The Early Period of Calculus of Variations, 2016.

Joseph Louis Lagrange introduce el símbolo δ como nueva característica para distinguirlo del diferencial d, lo que permite determinar el valor diferencial de la fórmula ordinal respecto a varias variables (Freguglia y Gianquinta, 2016).

El problema básico del cálculo de variaciones consiste en minimizar una integral de una función, en la que se tienen variables diferentes; tomando en cuenta la variable *(y)*, se asume que la función intermedia *f(t)* es integrable con respecto al tiempo *t*, y que *(y)* es continua y diferenciable con respecto a *t*.

$$Minimizar\ \ V[y] = \int_0^T f[t, y(t), y'(t)]dt \qquad (1)$$

$$sujeto\ a \quad y(0) = y_0 \quad (y_0\ \ dado)$$

$$y(T) = y_t \quad (y_T, T\ dado)$$

La aplicación del cálculo de variaciones al análisis económico inicio en los años veinte. Algunos de los pioneros son G.C. Evans con su trabajo “The dynamics of Monopoly” (Evans, 1924); Frank P. Ramsey con “A Mathematical Theory of Savings” (Ramsey, 1928) y Harold Hotelling con “The Economics of Exhaustible Resources” (Hotelling, 1931).

La aplicación del cálculo de variaciones a la teoría económica en el modelo de Evans, describe el comportamiento de una firma monopolística. En dicho modelo asumen que un monopolio posee una función de costos cuadrática, y la demanda depende linealmente del precio *P (t)* y la tasa de variación del precio *P'(t).* Con la diferencia de ingresos y costos se obtiene la función de beneficios que es lo que se busca maximizar.

$$C(Q) = \alpha Q^2 + \beta q + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

$$Q = \lambda P(t) + \varphi P'(t) + \eta \quad (\lambda, \varphi, \eta > 0)$$

$$\pi = P(t)Q\big(P(t), P'(t)\big) - C(Q\big(P(t), P'(t)\big)) = \pi(P(t), P'(t))$$

$$\begin{aligned} &Minimizar\ \ \pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')dt \\ &sujeto\ a \quad P(0) = P_0 \quad (P_0\ \ dado) \\ &\qquad\qquad\ \ P(T) = P_T \quad (P_T, T\ dado) \end{aligned} \tag{2}$$

Constituye la forma clásica de solucionar los problemas de optimización dinámica. Este tipo de problemas pueden no tener un valor final dado, por lo que es necesario agregar condiciones que permitan encontrar los valores, estas condiciones son conocidas como condiciones de transversalidad. Este tipo de problema constituye el caso más sencillo y es conocido como fundamental.

Es un problema matemático que consistente en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio de funciones. Constituye una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Así también entra la optimización para buscar valores para una o más variables que dentro de una función generan los valores máximos o mínimos.

Teoría de control óptimo

Esta teoría está fundamentada en el cálculo de variaciones. Lo que busca es encontrar no sólo un valor óptimo sino una trayectoria de tiempo completa. La principal condición para su aplicación es la condición de principio máximo del matemático ruso L.S Pontryagin. (Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, y Mishchenko, 1962).

A diferencia del cálculo de variaciones, en el problema de control óptimo se incorporan tres tipos de variables: el tiempo (*t*), la variable de estado (*y*) y la variable de control (*u*). Permite establecer mecanismos para una adecuada optimización de los recursos.

Partimos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x'(t) = f(t, y(t)) \qquad (3)$$

Al introducir una variable de control en la ecuación diferencial, se tiene la ecuación diferencial controlada

$$x'(t) = f\big(t, y(t), u(t)\big), \qquad u(t) \in U \qquad (4)$$

donde *(f, U)* es el sistema de control.

El objetivo del control óptimo es determinar las trayectorias de las variables de control y estado que optimicen una función objetivo:

$$Maximizar\ o\ minimizar\ V[u] = \int_0^T f[t, y(t), u(t)]dt \qquad (5)$$

$$sujeto\ a\quad y'(t) = g(t, y(t), u(t))$$

$$y(0) = y_0 \qquad (y_0\ dado)$$

$$y(T) = y_T \qquad (y_T\ dados)$$

Este problema es muy similar al del cálculo de variaciones. Si asumimos que la ecuación de movimiento es igual a *y'(t)= u (t),* y la reemplazamos en la función objetivo.

La aplicación del control óptimo en la enunciación de problemas económicos fue realizada con los trabajos de Koopmans (Koopmans, 1963) y Cass (Cass, 1965).

Algunos ejemplos económicos de variables de control y estado podrían ser la emisión monetaria y la inflación, o el gasto en publicidad y las ventas de una empresa. En estos casos, la primera variable, la de control, está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización intertemporal, mientras que la segunda variable, la de estado, refleja el resultado de las decisiones tomadas sobre la variable de control.

En la teoría del control óptimo, el empleo del principio del máximo, es una técnica matemática fundamental para resolver problemas de optimización dinámica restringidos.

La trayectoria de la variable de estado se encuentra determinada a través de la ecuación de movimiento o ecuación de estado, en la cual se relaciona la variación de la variable de estado con respecto al tiempo *(y')* con las variables *t*, *y* y *u* a través de la función *g(x).* Una vez seleccionado el valor óptimo de la variable de control en un instante del tiempo, la función *g(x)* determina la dirección de crecimiento de la variable de estado *y*, de este modo, su trayectoria en el tiempo. De esta manera, cuando el agente optimizador selecciona la senda óptima de la variable de control, afecta tanto de manera directa el funcional objetivo mediante la variable u, como de manera indirecta a través de la variable y, que se encuentra definida por la ecuación de movimiento.

Precios dinámicos

El precio es la cantidad que se recibirá por un bien. Se espera que esta cantidad cubra los costos de elaboración del producto, genere un beneficio a quien lo está produciendo y sea atractivo a los compradores (demanda). Es por esto que establecer un precio correcto que permita obtener los mejores beneficios es complejo, en el caso de la venta de boletos de avión la mayoría utilizan el modelo de precios dinámicos, estas estrategias de precios se basan en la gestión de rendimiento y descuentos anticipados (Desiraju y Shugan, 1999).

La dinámica se refiere al tipo de modelo en donde las variables están en función del tiempo. En su análisis donde se busca rastrear y estudiar las trayectorias específicas de las variables que permitan mejores resultados. Al considerar al tiempo como una variable continua es necesario el uso del cálculo integral y diferencial. La manera de estudiar una variable de manera dinámica es conocer cómo evoluciona en el tiempo el comportamiento de esa variable.

Este análisis ha permitido generar grandes beneficios en la industria en donde puede aplicarse tanto en los procesos de producción como en la fijación de precios. De acuerdo con W. E. y P. Keskinocak son tres factores a los que se les atribuye el crecimiento que ha tenido la aplicación de estos métodos. El primero es la disponibilidad de datos, el segundo factor es la facilidad de cambiar de precios con la ayuda de las nuevas tecnologías y el tercero es la disponibilidad de herramientas que permiten analizar los datos tanto de la demanda como de los precios dinámicos para tomar mejores decisiones (Elmaghraby y Keskinocak, 2003).

El análisis de la demanda permite determinar temporadas altas de ventas, en el caso de los boletos de avión por lo general son cíclicas, pues se repiten en los periodos de vacaciones. Por lo que se pueden establecer estrategias con descuentos para los periodos en los que no se tienen ventas altas y así estimularlas.

Otro factor importante dentro de la determinación de precios es el efecto que tendrá la competencia sobre las propias ventas pues se puede responder a los cambios que genera la competencia o permanecer con el mismo precio sin importar lo que otros ofrezcan, aunque para mantener la fidelidad de los clientes es necesario ofrecer algún distintivo que genere la lealtad.

La importancia que ha tenido el estudio de políticas y modelos para la optimización de precios en el servicio aéreo es que al aplicarse se han tenido efectos positivos que han aumentado los ingresos considerablemente. Esto ha permitido mejorar la tecnología, incrementar la calidad de los servicios y bajar los costos de producción y disponibilidad.

Capacidad restringida

La capacidad es la cantidad máxima que un objeto, recipiente o inmueble puede sostener o soportar. En el caso de los boletos de avión su capacidad restringida está determinada por el número de asientos que tiene el avión y este será el número disponible a la venta que se tendrá.

Florian Defregger y Heinrich Kuhn en su artículo “Revenue management for a make-to-order company with limited inventory capacity” (Defregger y Kuhn, 2007), hablan de que en el caso de tener una capacidad limitada que no puede ser aumentada, cómo afecta la producción de una empresa, al decidir qué pedidos rechazará de acuerdo a los beneficios que podría obtener y a la capacidad con la que cuenta en su inventario, clasifican a los clientes de acuerdo a los beneficios que generarán a la empresa y pronostican la demanda.

Productos intercambiables

Esta característica de productos intercambiables, hace referencia a los productos que pueden considerarse también como bienes sustitutos. Aaron A. Levis y Lazaros G. Papageorgiou en "Active demand management for substitute products through price optimization" (Levis y Papageorgiou, 2007), definen el escenario en el que dos compañías, A y B, ofrecen su propio producto, el cual pertenece a la misma clase de producto, aunque está ligeramente diferenciado. Al aumentar las ventas de un producto en alguna de las compañías reducirá la venta de la otra.

Dentro de la industria aérea, los boletos de avión que ofrecen diferentes compañías son un producto que puede remplazarse fácilmente.

Un modelo de determinación dinámica de precios para productos con vida limitada

En adelante estudiaremos el modelo para la determinación dinámica de precios de Maximizing revenue in the airline industry under one-way pricing de M.F. Anjos, R.C.H. Cheng y C.S.M. Currie (Anjos, Cheng, y Currie, 2004).

Las variables a identificar dentro del modelo se describen como:

El periodo en el que estará vigente el boleto de avión se identifica con x, que indicará los días restantes para que pierda su valor el producto.

$$\boldsymbol{x} = \textit{tiempo restante hasta la hora de la salida}$$

El tiempo comprende un periodo que va en decremento y puede variar el día en el que se quiera iniciar por lo que este día se indica con T.

$$T = \textit{es el día de inicio de la venta}$$

Por lo que al iniciar $x = T$, se disminuye hasta $x = 0$ que es el día de partida.

Con esto podemos decir que el periodo de ventas es [0, T]

El precio está dado por y

$$y(x) = \textit{precio de un boleto de avión en el día } x$$

Los clientes que comprarán un boleto con una probabilidad que depende del tiempo restante hasta la salida, la probabilidad está dada por p, depende del tiempo x y del precio y.

$$p(x, y) = \textit{probabilidad de compra de un boleto}$$

Los clientes potenciales son el número de solicitudes de tarifa de un boleto de avión en el sitio web.

En los estudios revisados[1] se asume que la llegada de clientes potenciales sigue una distribución de Poisson no homogénea. Este tipo de distribución permite que el parámetro del proceso, que representa la intensidad por unidad de tiempo con la cual ocurren los eventos, no es constante a lo largo del tiempo, donde la tasa de llegada depende únicamente de la cantidad de días restantes antes de la salida del vuelo.

$N(t), t \geq 0$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda(s),\ s \geq 0$ si

1. $N(0) = 0$,
2. $N(t)$ tiene incrementos independientes,
3. $N(s + t) - N(s)$ tiene distribución de Poisson con media $\int_s^{s+t} \lambda(r)dr$

El número de consultas en un intervalo de tiempo $(x,\ x + dx)$ está dado por la función $f(x)$ que representa la demanda.

$$f(x)dx = número\ \ de\ personas\ que\ \ quieren\ comprar\ un\ boleto\ de\ avión\ (consultas)$$
$$en\ el\ intervalo\ de\ \ tiempo\ (x, x + dx)$$

[1] Los estudios realizados por Anjos et al de 2004 y 2005

Para encontrar una política de precios *y (x)* que maximice el total de ingresos se debe realizar el siguiente cálculo:

$$\max_{y(x)} \int_0^T y(x)\, p\big(x, y(x)\big)\, f(x) dx. \qquad (6)$$

La maximización del ingreso debe estar sujeta a la capacidad de la aeronave, *C*.

$$C = \ Capacidad\ de\ la\ aeronave$$

$$\int_0^T p\big(x, y(x)\big)\, f(x)\, dx \ \leq \mathrm{C} \qquad (7)$$

Es necesario entender cada uno de los supuestos aplicados. Por lo que se enlistan a continuación:

Supuesto 1.

El número de personas dispuestas a comprar un boleto de avión disminuirá si el precio aumenta, para cualquier valor de *x*

$$p\ (x\ , y_1) > p\ (x\ , y_2) \qquad si\ 0\ \leq\ y_1 < y_2\ .$$

Asimismo, si el precio es 0, todos comprarían $p\ (x\ , 0) = 1$.

Supuesto 2

En cuanto más se acerca la fecha de salida, *x* = 0, la proporción de quienes desean comprar en el momento *x*, aumenta para cualquier precio fijo *y*,

$$p\ (x_1\ , y) \geq p\ (\ x_2\ , y)\ \ \text{si}\ \ 0 \leq x_1\ <\ x_2\ .$$

Supuesto 3

Invarianza de escala: establece que la probabilidad de compra, conforme el precio varía, tendrá una forma invariante dada la función π.

$$p\ (x, y) = \pi\ (w\ (x)\ y)$$

donde *w*, la función de escala del grado de urgencia en la actitud del comprador, depende solo del tiempo *x*.

Como consecuencia de este supuesto, la solución óptima dependerá de la forma de π y es esencialmente independiente de *w* y *f(x).*

Sustituyendo $z\ =\ w\ (x)\ y\ (x)$, se tiene que si $\pi\ (z) \geq 0$, entonces es una función decreciente de *z*, con $\pi\ (0) = 1$.

Se puede modelar el "tiempo de desesperación" donde los clientes estarán cada vez más dispuestos a pagar a medida que se acerca el día de partida, al hacer que $w(x)$ sean funciones crecientes.

CAPÍTULO 4 UNA APLICACIÓN DEL MODELO

Como parte del trabajo nuestro objetivo es entender el comportamiento de diferentes variables dinámicas tales como precios, ventas, rendimiento, entre otros. Se llevaron a cabo distintas simulaciones de ventas basados en el modelo desarrollado en la sección anterior. En esta sección se describe el procedimiento utilizado para la realización de las simulaciones.

Para iniciar con la simulación del modelo se tomaron los datos proporcionados por el artículo de CSM Currie, RCH Cheng y HK Smith (Currie, Cheng, y Smith, 2008). Sin embargo, este modelo permite cambiar los parámetros para aplicarse a otra empresa aérea que tenga la información de ventas, demanda y probabilidad de compra.

Se asume que los datos de demanda, que se tienen para la simulación del modelo los proporciona la empresa, y que estos son obtenidos de un periodo establecido de días de recopilación de datos en el periodo de venta que va de t_i, que es el tiempo restante al día de la salida en el i-esimo día de recopilación de datos, a t_{i-1} que es el último día.

La demanda no es constante durante el periodo de venta, por lo que se deberá estimar el número de solicitudes de los boletos de avión en el periodo establecido de días de recopilación de datos $(t_{i-1}\ , t_i)$. Así como también para la simulación los clientes comprarán un boleto con probabilidad de compra $p(\ y(\bar{t})\ w(\bar{t}))$, donde $\bar{t} = (t_{i-1} +\ t_i)/2$.

La función que determina el número de consultas en k = 1, 2, …, n, donde k es el número de vuelos y también de i ≤ n, donde n es el número de días, se representa con: $D_{i-1,i}^{k}$

La función de la demanda se considera como una distribución Poisson de variable aleatoria que deberá tener la misma media N para todos los vuelos

$$demanda\, f(x) = (g_1 + \ g_2 \ x)\, e^{-h\,x}\, dx\,.$$

Al depender la media N del tiempo restante hasta la salida del vuelo, el cálculo se podrá obtener con la siguiente función:

$$\boldsymbol{N} = \int_{\boldsymbol{t-1}}^{\boldsymbol{t}} (g_1 + \ g_2 \ x)\, e^{-h\,x}\, dx \qquad (8)$$

Para comenzar con la simulación de la demanda se usaron los parámetros siguientes de CSM Currie, RCH Cheng y HK Smith (Currie, Cheng, y Smith, 2008):

g_1 = 15.4;

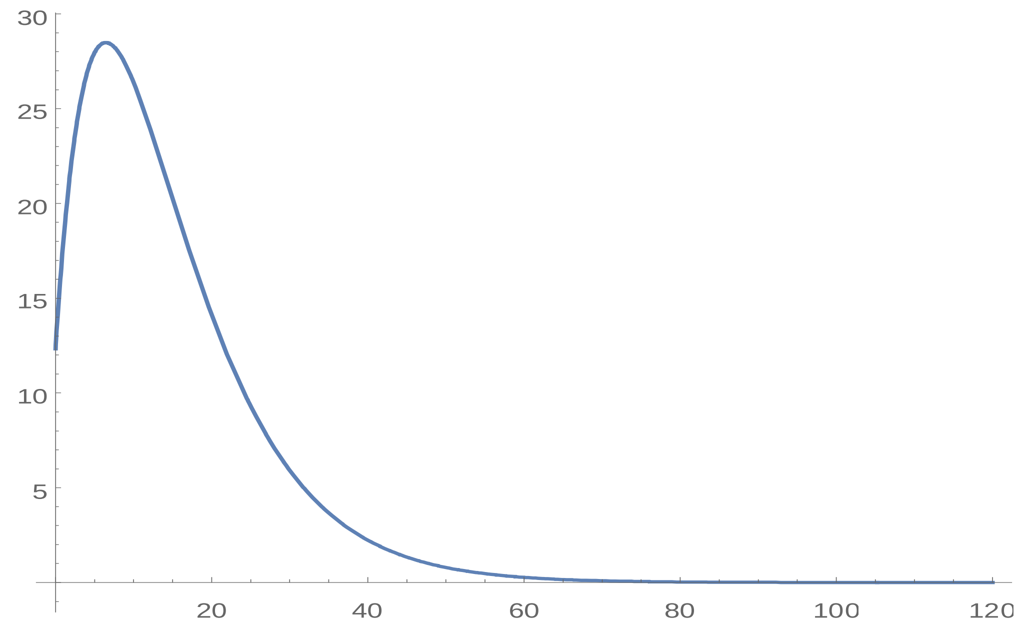
g_2 = 7.49;

h = 0.125;

Sustituyendo los valores, la integral se resuelve con la ayuda del programa Wolfram Mathematica Student Edition, versión 10.1.0.0, el cual se utiliza para la simulación de todas las pruebas realizadas para la elaboración de esta tesis, con el que se obtiene la función

$$N(t) = e^{-0.125\, t}\, (12.3317 + 7.97826\, t)$$

lo que permite obtener la siguiente gráfica del comportamiento de la demanda, tomando un periodo de 120 días.

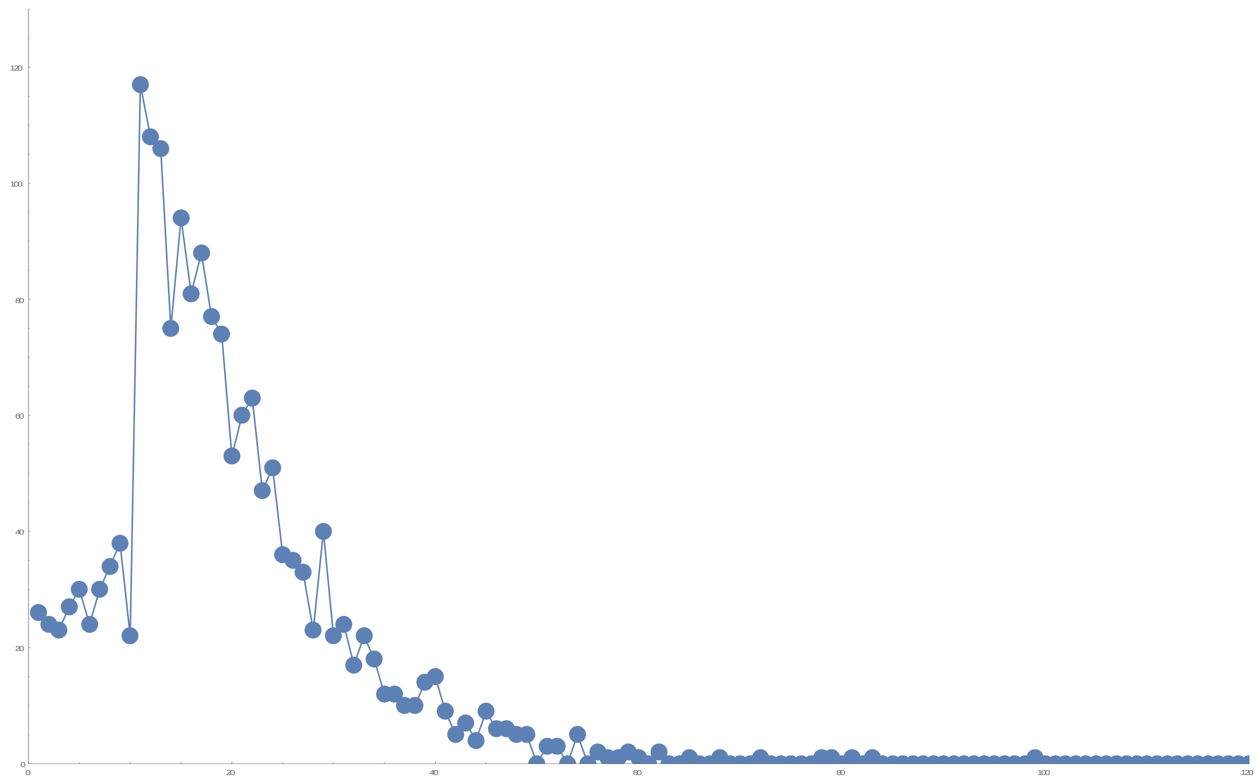


Gráfica 1. Demanda del vuelo. Fuente: Elaboración propia con Wolfram Mathematica.

En la Gráfica 1 se identifica en el eje x el tiempo y en el eje y la demanda. Con esto se observa que la demanda tendrá su máximo dentro de los últimos 10 días antes de partir el vuelo, después vuelve a sufrir un decrecimiento, así mismo se observa que durante un periodo mayor a 60 días la demanda en casi nula.

Para conocer un poco más del comportamiento de la demanda en el proceso Poisson se realizó la simulación de los datos tomando 10 vuelos y 120 días.

La Gráfica 2 muestra el comportamiento de la demanda para un periodo de 120 días, en donde se puede observar que presenta un comportamiento similar al de la función de la demanda.



Gráfica 2. Simulación de la demanda de 10 vuelos. Fuente: Elaboración propia con Wolfram Mathematica

El cálculo de la demanda es necesario para poder realizar el cálculo de las ventas. El número de ventas se obtiene con el número de personas que desean comprar un boleto de avión, la probabilidad de que sea comprado de acuerdo al día *(x)* que se esté realizando la consulta y el precio *(y)* del boleto de avión.

El número de personas que realizan la consulta de los vuelos no es la misma cantidad de personas que comprarán un boleto, por lo que dentro del modelo se realizó una simulación aleatoria para determinar si se realiza la compra por medio de la generación de números aleatorios. Este proceso lo realiza de forma directa el programa. El número que se genera está dentro del rango de 0 a 1, si este número es menor que la probabilidad de compra, el boleto es comprado.

Las funciones tanto de demanda y probabilidad de compra, como se mencionó anteriormente deberán ser proporcionadas por la compañía que aplique el modelo de optimización de precios.

La función de la probabilidad de compra utilizada en el modelo es

$$p\big(\mathrm{x}, y(\mathrm{x})\big) = e^{-y(a+bx)}. \tag{9}$$

Los valores que se utilizaron para las variables son $a = 0.00667$ y $b = 0.00216$. Los valores para estas dos variables se obtuvieron del artículo Maximizing revenue in the airline industry under one-way pricing de M.F. Anjos, R.C.H. Cheng y C.S.M. Currie (Anjos, Cheng, y Currie, 2004).

La función de probabilidad de compra tiene una relación inversa al precio, ya que al tener un precio más alto la probabilidad de compra disminuye. Así como también tiene una relación inversa con el número de días, pues cuanto más se acerca el día de partida del vuelo, que t se acerca a cero, la probabilidad de compra de un boleto aumenta.

En cambio, el comportamiento de la función de demanda alcanzará un máximo antes de la partida, aproximadamente 10 días antes, y después comienza a disminuir hasta el día de partida.

Como se mencionó anteriormente, la demanda *f(t),* solo depende del tiempo, en cambio la probabilidad de compra *p(t)* depende del tiempo *(t)* y del precio de compra (*y*).

En la siguiente función se sustituyen los valores para obtener la función de ventas

$$V(x) = \int_0^x f[t]\, p[t, y(t)]\, dt \tag{10}$$

Al integrarse se obtiene la ecuación en función de x y de λ

$$V(x) = \frac{1750e^{-1-\frac{x}{8}-\frac{\lambda(250+81x)}{37500}}\left(20e^{\left(\frac{1}{8}+\frac{27\lambda}{12500}\right)x}(168125+594\lambda)-54\lambda(220+107x)-3125(1076+107x)\right)}{(3125+54\lambda)^2} \tag{11}$$

Esta función permite conocer las ventas de los boletos de avión ya que se conoce el comportamiento de compra de los clientes. Con esto se inicia el proceso de actualización del precio, en donde se busca que este precio permita obtener los mayores rendimientos, se maximiza el rendimiento R,

$$R = \int_0^T y(x)\, f(x)\, p\big(x, y(x)\big) dx, \tag{12}$$

considerando que la venta de los boletos no exceda la capacidad de la aeronave C,

$$\int_0^T f(x)\, p\big(x, y(x)\big) dx \le C. \tag{13}$$

Con esto, al estar el precio sujeto a la probabilidad de compra, se utiliza el cálculo de variaciones con multiplicadores de Lagrange para maximizar el rendimiento (Anjos, Cheng, y Currie, 2004).

Lo que permite obtener la función del precio

$$y(x) = \frac{1}{a+bx} + \lambda(a, b, d, g, h, C)\,. \tag{14}$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange no negativo que actualiza el precio de acuerdo a la capacidad del vuelo C, los parámetros de demanda y comportamiento de las compras.

Las ventas que se realizan cada día determinan la capacidad restante de la aeronave por lo que es necesario actualizar la variable de la capacidad, la nueva función es

$$\int_0^T f(t')p\left(t', y(t')\right)dt' \leq C - n(x) \tag{15}$$

$$n(x) = \text{ número de asiento vendidos al día } x.$$

Por lo que la función del precio cambia a $y(x) = \frac{1}{a+bt} + \lambda(x)$, en donde para cada x se tendrá un valor diferente de λ.

Al despejarse el valor de λ, se puede conocer el nivel de aumento que se tendrá de precio. Y al cambiar λ se actualiza el precio.

Con esto se obtiene la información del número de boletos que fueron vendidos en el día x, de acuerdo al número de asientos vendidos se calculará el valor de λ para determinar el nuevo precio de acuerdo a la respuesta que se estén teniendo en las ventas y así cumplir con el objetivo del modelo: obtener los precios óptimos que permitan obtener el mayor rendimiento.

Entre más grande sea λ mayor será el precio, además con la propiedad de no negatividad, su valor deberá ser mayor que cero para que tenga un efecto en el precio. Al ser cero, indica que no se tiene respuesta, no se está comprando los boletos de avión por lo que la capacidad no está cambiando. λ está asociada con la restricción de capacidad, por lo que dependerá de ella y con esto de las ventas. Si se tienen ventas altas se podrá aumentar el precio y si no se tienen ventas se disminuye.

La nueva *y(x)*, precio, se utiliza para calcular la nueva compra. Ya que si cambia el precio cambiará la probabilidad, al cambiar la probabilidad, cambia el número de personas que compra.

En las simulaciones realizadas se comienza con un precio inicial para obtener los primeros datos de probabilidad de compra y la nueva capacidad de venta. El proceso es iterativo y termina si se venden todos los boletos de avión o al llegar el día de salida del vuelo.

En la figura 4 se representa el diagrama de flujo del proceso para la determinación de precios del modelo.

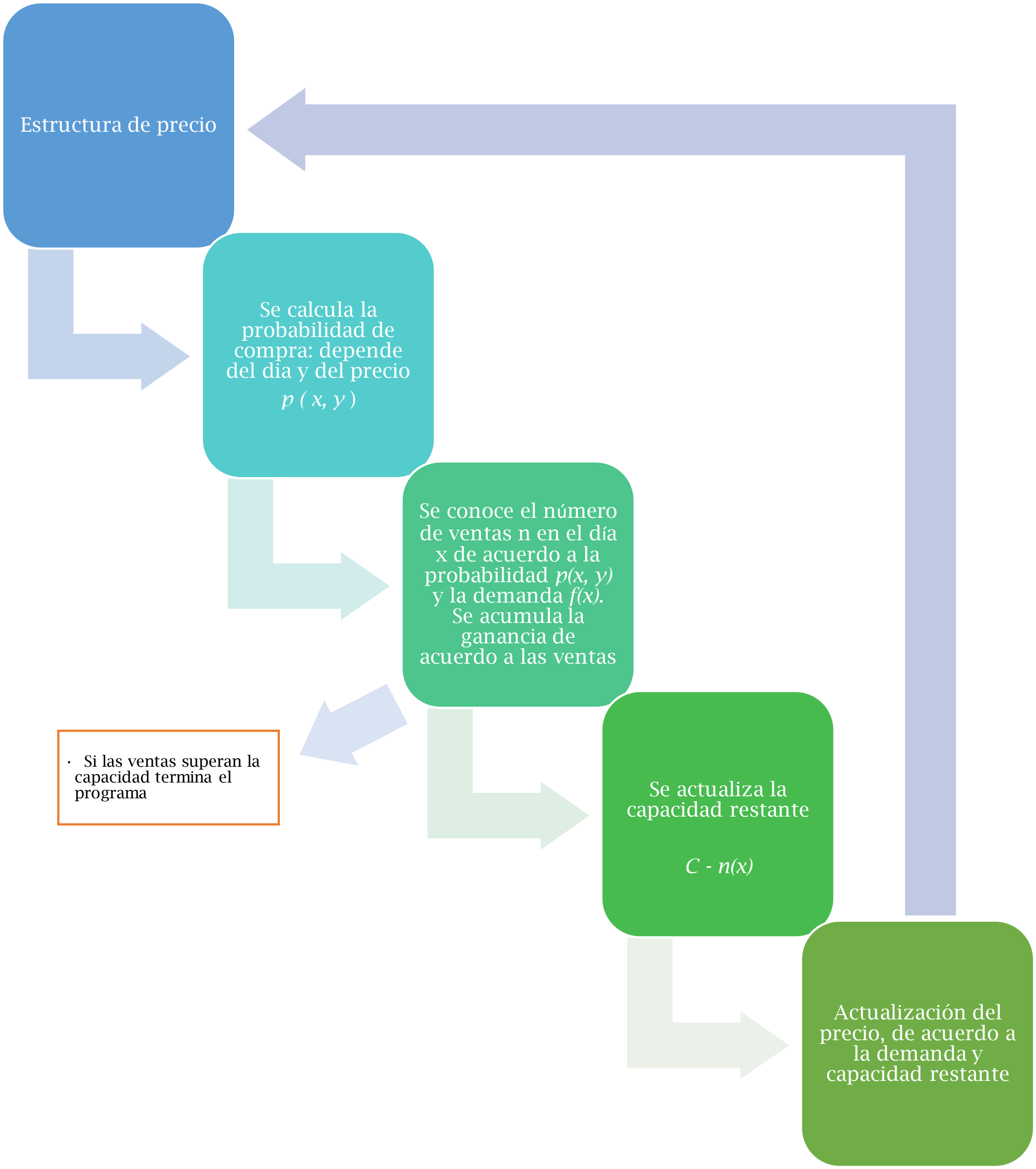


Figura 4 Diagrama de flujo del proceso del modelo de determinación de precios. Fuente: Elaboración propia.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

La implementación del modelo en el programa Wolfram Mathematica 10.1.0.0, permite visualizar el comportamiento del modelo y sus variables, además permite realizar cambios para identificar las variables que tienen mayor efecto en las ventas y en las ganancias.

Caso 1

Esta simulación se partió de un periodo de 34 días, un precio inicial de 100£ (libras esterlinas, moneda utilizada en el modelo) y capacidad de 100 boletos de avión. Dentro de la simulación se consideró importante conocer los promedios de la ganancia total de cada simulación y su desviación estándar, además de los asientos libres en cada simulación y su desviación estándar.

Concepto	**Parámetros**
Precio inicial	100 £
Días	34
Capacidad	100 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	6, 650.38 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	541.593
Promedio de asientos libres	5.182
Desviación estándar de asientos libres	2.82008

Tabla 1. Resultados de la simulación de 1,000 eventos, con los datos originales, capacidad 100, precio inicial 100 £ y 34 días. Fuente: Elaboración propia.

Con estos parámetros se realizó la simulación de 1,000 eventos con lo que se obtuvo la información de la Tabla 1.

El promedio de ganancias obtenidas en las 1,000 simulaciones realizada es de 6, 650.38 £, pero el valor de dispersión de los datos es de 541.593 £. En este caso se tiene un promedio de asientos libres de 5.182 asientos, con una desviación estándar de aproximadamente 3 asientos libres por vuelo, como se puede observar en la Tabla 1.

Lo que se busca con la simulación del modelo es mostrar que el comportamiento de los precios de un producto con vida limitada debe responder a la demanda y las ventas que se realizan para generar mayores ingresos contrario a establecer un precio fijo durante todo el periodo de venta, pues un cambio en los precios estimula las ventas.

Caso 2

Para mostrar que es necesario un precio dinámico, se estableció dentro la simulación que la función lambda, la cual está en relación con el precio, permaneciera fija por lo que no actualiza el precio. Es decir, se supuso que el precio siempre es el mismo. De esta manera, se realizó la simulación del modelo conservando todos los parámetros del caso anterior, con excepción del precio, el cual se establece en 90 £, como precio inicial y que permanecerá fijo todos los días de la venta.

Para este caso la simulación se realizó con 1,000 eventos con lo que se obtienen los resultados presentados en la Tabla 2.

Si bien, establecer un precio fijo de 90 £, podría generar un ingreso mucho mayor al modelo inicial, pues al venderse todos los boletos se tendría un ingreso total de 9,000 £, el comportamiento de la demanda y probabilidad de compra con este precio nos dan como resultado un ingreso menor de la mitad. En promedio solo se tuvieron ingresos de 5, 161.95 £, con una dispersión de 671 £. Este resultado es menor al obtenido con las simulaciones del caso 1.

Además, el número de asientos vendidos es muy bajo, los resultados muestran que con un precio fijo de 90 £, los vuelos están a poco más de la mitad de su capacidad; se obtuvo que en promedio se tienen 42 asientos libres por vuelo con una dispersión de 7 asientos libres.

Concepto	**Parámetros**
Precio inicial fijo	90 £
Días	34
Capacidad	100 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	5, 161.95 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	671.008
Promedio de asientos libres	42.645
Desviación estándar de asientos libres	7.45564

Tabla 2. Resultados de la simulación de 1,000 eventos, con los datos originales, capacidad 100, precio inicial 90£ y 34 días. Fuente: Elaboración propia.

Caso 3

Dentro del modelo no se consideran los gastos que podría implicar el estar cambiando los precios para una compañía real. Por lo que se realiza otra prueba con el fin de que se pueda identificar si un precio fijo es óptimo. El próximo precio fijo se propuso con los resultados obtenidos en el caso 1, que esté dentro del promedio obtenido de las ganancias.

Para la siguiente simulación se conservaron todos los parámetros con excepción del precio, el cual se establece en 65 £, sin cambio para todos los días. Con lo que se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 3.

Una de las restricciones con esta simulación es que la ganancia máxima que se podría obtener es de 6,500 £ al venderse todos los boletos. En este caso se obtuvo una ganancia promedio de 6,046.69 £ y desviación de solo 459.819, las cuales con respecto a la simulación del caso 1 son menores, con este precio fijo en los boletos el número de boletos sin vender aumenta a aproximadamente 7 asientos promedio por avión con una dispersión de 7, la cual es también mayor al caso 1.

Conceptos	**Parámetros**
Precio inicial fijo	**65 £**
Días	34
Capacidad	100 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	6, 046.69 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	459.819
Promedio de asientos libres	6.974
Desviación estándar de asientos libres	7.07413

Tabla 3. Resultados de la simulación de 1,000 eventos, con los datos originales, capacidad 100, precio fijo 65 £ y 34 días. Fuente: Elaboración propia.

Caso 4

Otro de los cambios que se realizaron en los parámetros fue el número de días en los que se ofrece con anticipación el vuelo, esto con el fin de identificar si al tener un periodo mayor garantiza el aumento de las ganancias, se cambió el número de días de 34 a 99 días, se mantienen los demás parámetros con los valores iniciales también se realizaron 1,000 simulaciones. Los resultados se presentan en la Tabla 4.

En la Tabla 4 se puede observar que el cambio no es significativo, sino que las ganancias promedio obtenidas son poco menores al original. Por lo que se puede concluir que aún y se aumente el plazo de compra, el comportamiento de la demanda sigue actuando de la misma forma por lo que no tiene cambios en la probabilidad de venta de los boletos.

En este caso se tomaron los datos iniciales precio y capacidad, cambiando el número de días. Sin embargo, sería útil incluir los gastos que representan la publicidad del producto y mantenerlo anunciado para los clientes durante un periodo mayor el cual no es considerado en este modelo.

Conceptos	**Parámetros**
Precio inicial	100 £
Días	99
Capacidad	100 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	6,269.44 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	684.723
Promedio de asientos libres	13.65
Desviación estándar de asientos libres	5.9465

Tabla 4. Resultados de la simulación de 1,000 eventos, con los datos originales, capacidad 100, precio inicial 100£ y 99 días. Fuente: Elaboración propia.

Caso 5

Otro aspecto considerado es que cuando inicia el periodo de venta las personas no estén adquiriendo el boleto de avión y sea hasta los últimos días cuando se compre el boleto estando a un precio mayor. Se considera como una posible causa de este comportamiento que las personas no tienen el dinero disponible para realizar la compra con mucho tiempo de anticipación y el disponer del dinero puede generarle algún otro tipo de gasto como lo es un pago de intereses por préstamo.

La siguiente simulación se realizó para mostrar que, aunque se disminuya el precio inicial el ingreso total promedio sigue siendo muy parecido a la simulación original.

El precio inicial tomado para esta simulación es de 50 £ y todos los demás parámetros se conservan en el caso 1. En este caso la simulación que se realizó fue de solo 100 eventos, pues al realizarse varias pruebas se observó que no se tienen cambios significativos por lo que no se consideró conveniente realizar una prueba de mayor número. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.

Conceptos	**Parámetros**
Precio inicial	50 £
Días	34
Capacidad	100 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	6, 667.01 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	547.851
Promedio de asientos libres	5.38
Desviación estándar de asientos libres	2.85254

Tabla 5. Resultados de la simulación de 100 eventos, con los datos originales, capacidad 100, precio inicial 50£ y 34 días. Fuente: Elaboración propia.

El promedio de las ganancias solo aumenta en promedio 17 £ y la dispersión de los datos y el número de asientos libres es muy parecida del caso 1.

Con esta simulación aún siendo pequeña, se puede identificar que establecer un precio menor inicial no cambia el promedio de las ganancias obtenidas ya que el modelo equilibra el precio inicial aún cuando este precio sea mayor o menor que el establecido inicialmente de 100 libras esterlinas.

Además, dentro de la simulación por días se pudo observar el comportamiento de los precios y con esto identificar que el modelo alcanza un equilibrio en los precios de acuerdo a la demanda. Aún considerando iniciar con un precio muy bajo, se observó que el modelo cambia el precio al día siguiente y sucede lo mismo en el caso de poner un precio muy alto equilibrándolo de acuerdo a la demanda y las ventas.

Otra característica que se identificó en todas las simulaciones es que tanto el precio final como el inicial tiene un comportamiento muy parecido al tener un equilibrio. Con esto se hace referencia a que el precio inicial tiene un comportamiento límite, ya que en su gran mayoría genera el mismo valor aún cuando se cambia algunos de los parámetros.

La Tabla 6 muestra los datos obtenidos de la simulación por día del modelo con los datos del caso 1, donde el precio inicial es de 100£, se obtiene para un cambio en ese día, día 34, el precio de 36.86 £. En esta simulación se realizaron varios experimentos sin notar cambios significativos, pues en todos los que se realizaron el precio se mantenía igual y solo cambiaba la demanda.

Día 34
Demanda: 6
Probabilidad de compra: 0.000331903
El día 34 se vendieron 0 boletos, a un precio de 100 libras.
Ganancia al día 34: 0 libras.
Quedan 100 asientos
λ = 24.3796
Nuevo precio = 36.86

Tabla 6. Resultados de simulación en el día 34, con un precio inicial de 100£. Fuente: Elaboración propia con Wolfram Mathematica

Al realizar un cambio en el precio inicial a 30 £ se observó que el precio aún se sigue manteniendo en 36.86 £ en el día 34. En la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos de la simulación por día con el cambio en el precio inicial manteniendo los parámetros de capacidad y tiempo igual que el modelo anterior.

Aún realizando un cambio en el precio inicial a una cantidad alta, el doble de la original siendo de 200 £, el precio baja hasta 36.86 £ en el día 34. Los datos se muestran en la Tabla 8.

Día 34
Demanda: 4
Probabilidad de compra: 0.0904281
El día 34 se vendieron 0 boletos, a un precio de 30 libras.
Ganancia al día 34: 0. libras.
Quedan 100 asientos
$\lambda = 24.3796$
Nuevo precio = 36.86

Tabla 7. Resultados de simulación en el día 34, con un precio inicial de 30 £. Fuente: Elaboración propia con Wolfram Mathematica

Día 34
Demanda: 4
Probabilidad de compra: $\mathbf{1.1016 \times 10^{-7}}$
El día 34 se vendieron 0 boletos, a un precio de 200. libras.
Ganancia al día 34: 0. libras.
Quedan 100 asientos
$\lambda = 24.3796$
Nuevo precio = 36.86

Tabla 8. Resultados de simulación en el día 34, con un precio inicial de 200 £. Fuente: Elaboración propia con Wolfram Mathematica

Caso 6

Otro de los experimentos numéricos realizados fue el cambio de la capacidad del avión, esto con la finalidad de conocer el funcionamiento del modelo en aviones con mayor capacidad.

Los parámetros que se consideraron fueron los mismos que el caso 1 en precio y días, solo se cambió el número de asientos disponibles duplicando su capacidad, pasando de 100 a 200 asientos disponibles. Se realizó la simulación de 1,000 eventos.

Los datos obtenidos con la simulación se presentan en la Tabla 9, los cuales muestran que con el modelo que se tiene conforme a la demanda y probabilidad de compra los boletos establecida, el precio promedio de venta de cada boleto será menor, ya que las ganancias obtenidas sólo presentan un aumento en 1,000 £ en comparación con el modelo original. Y el número promedio de asientos libres aumenta, se tienen 3 asientos libres más que el original.

Conceptos	**Parámetros**
Precio inicial	100 £
Días	34
Capacidad	200 asientos
Resultados	
Promedio de ganancias acumuladas	7, 644.58 £
Desviación estándar de ganancias acumuladas	602.715
Promedio de asientos libres	8.469
Desviación estándar de asientos libres	5.35647

Tabla 9. Resultados de la simulación de 1,000 eventos, con los datos originales, capacidad 200, precio inicial 100£ y 34 días. Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

La aplicación de un modelo matemático con cálculo de variaciones para la determinación de precios es una herramienta que permite la maximización de los rendimientos. Sin embargo, para su aplicación es necesario un estudio confiable de las ventas que permita obtener la información necesaria para identificar el comportamiento de los clientes y construir las funciones tanto de demanda como de compra.

Aunque el comportamiento de los clientes puede ser impredecible e influenciado por numerosas variables, en su mayoría se pueden identificar patrones de comportamiento cíclicos. Por tal motivo, es posible que se realicen este tipo de modelos matemáticos dinámicos que actúan de acuerdo a la respuesta que se tiene de los clientes en la venta de algún producto y con esto se puedan maximizar los rendimientos.

El precio inicial es un ejemplo de patrón que se identificó dentro del modelo, el cual realiza un equilibrio al comenzar la simulación sin importar que se establezca un valor inicial muy alto o bajo, el modelo lo pondrá en un nivel de acuerdo a la demanda y probabilidad de compra. Y el precio en los días finales también muestra un comportamiento en el que pareciera tener un límite, aunque en algunos casos lo sobrepasa.

Al analizar este modelo con un producto como los boletos de avión, fue interesante por las características restrictivas que presenta:

- Tiene un inventario fijo de productos,
- Tiene una vida límite determinada y
- Terminado su periodo de vida no tiene un valor recuperable.

El modelo analizado para la determinación de precios de boletos de avión permite identificar con las pruebas realizadas que establecer un precio fijo no garantiza obtener el mayor rendimiento.

Al realizar las distintas pruebas con precio fijo se obtuvo que establecer un precio fijo de 90 £, en donde la venta de todos los boletos garantiza un ingreso total de 9,000 £, no incentiva la compra de boletos de avión en aquellos días donde se tiene menor demanda y probabilidad de compra, dejando los vuelos con un alto número de asientos libres ocasionando que las ganancias estén por debajo de los resultados obtenidos con el modelo que optimiza los precios dinámicos.

Así también, realizando la segunda prueba con un precio fijo considerando los resultados obtenidos con la prueba original para establecer un precio que permitiera obtener un ingreso máximo aproximado al obtenido con precios dinámicos. El precio se fijó en 65 £, que bien limita los rendimientos a 6,500 £ por vuelo. Aun así, estos parámetros obtuvieron un rendimiento que continuó por debajo del original. Además de que el número de asientos libres fue mayor que el original por lo que muestra que no se incentivó la compra.

Por lo que estos dos casos de precio fijo permiten concluir que un precio fijo no es óptimo en este modelo. Aún más, permite cuantificar la diferencia.

Además, con el cambio de otras variables como el número de días se muestra que no se tienen cambios importantes al aumentar el número de días, sin contar que el modelo no considera los costos que implica mantener el producto anunciado por más tiempo.

Este tipo de costos serian una variable importante para considerar en futuras investigaciones, en donde se incluyan los gastos tanto de publicidad como los gastos en cambio de precios que tampoco son incluidos en el modelo estudiado.

Hoy en día la tecnología ha permitido que la aplicación de este tipo de modelos dinámicos sea mejor aprovechado. El uso de un software especializado en generación de datos es de gran ayuda para las empresas, pues facilitan la determinación de estrategias de ventas, además de que con softwares de simulación es posible realizar pruebas que generen resultados con cierto grado de confiabilidad antes de realizar cambios reales dentro de las empresas y así tomar decisiones que tendrán un mayor impacto. Así como también la simulación permite identificar patrones.

El internet y los algoritmos permiten desarrollar mecanismos automáticos que actúan de manera inteligente de acuerdo a la demanda de los clientes. Así como también permiten obtener información en tiempo real que beneficia el análisis del comportamiento de los consumidores.

Otra de las trascendencias de la tecnología está en la publicidad en la que ha disminuido los costos publicitarios y de propaganda comparado con su alcance. Esto genera que el mercado se vuelva más competitivo, por lo que es otra variable a estudiar no considerada dentro del modelo, se debe incluir en futuras investigaciones el efecto que tienen otros proveedores dentro del comportamiento de venta y las probabilidades de compra de los clientes de acuerdo a los cambios que realice la competencia.

Referencias

Almonte, H., y Rogat, J. (2004). *Políticas de precios de combustible en América del Sur y México: implicancias económicas y ambientales.* Santiago Chile: CEPAL.

Anjos, M. F., Cheng, R. C., y Currie, C. S. (2005). Optimal pricing policies for perishable products. *European Journal of Operational Research 166*, 246–254.

Anjos, M., Cheng, R., y Currie, C. (2004). Maximizing revenue in the airline industry under one-way pricing. *Journal of the Operational Research Society (2004) 55, 535–541*, 535–541.

Aragón, C. G. (2013). *Las dimensiones del valor percibido en productos con atributos sociales y medioambientales: una aplicación al caso del café orgánico y de comercio justo.* Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Ayuntamiento de Jaén, (OMIC). (22 de Marzo de 2017). *Ayuntamiento de Jaén*. (O. M. Consumidor, Editor) Recuperado el 30 de Marzo de 2018, de Alimentos perecederos y no perecederos: http://www.aytojaen.es/portal/p_20_contenedor1.jsp?seccion=s_fdes_d1_v1.jsp&contenido=31467&tipo=6&nivel=1400&layout=p_20_contenedor1.jsp&codResi=1&language=es&codMenu=206&codMenuPN=4&codMenuSN=100&codMenuTN=197

Bitran, G. R., y Mondschein, S. V. (1997). Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing. *MANAGEMENT SCIENCE/Vol. 43, No 1, January 1997*, 64-79.

Bitran, G., y Caldentey, R. (2003). An Overview of Pricing Models for Revenue Management. *Manufacturing & Service Operations Management © INFORMS Vol. 5, No. 3, Summer 2003,*, pp. 203–229.

Casado , A. D., y Sellers, R. R. (2006). *Dirección de Marketing.* España: Editorial Club Universitario.

Cass, D. (Jul. de 1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation'. *The Review of Economic Studies, 32*, 233-240.

Cipra, T. (2010). Depreciation. En T. Cipra, *Financial and Insurance Formulas* (págs. 51-53). Physica, Heidelberg.

Currie, C., Cheng, R., y Smith, H. (2008). Dynamic pricing of airline tickets with competition. *Journal of the Operational Research Society, 59*, 1026-1037.

Dávalos, S. M., Zamora, D. P., Natividad, B. I., Tercero, J. J., Vázquez, C. S., y Quiñones, E. I. (2005). ALIMENTOS MARINOS: TIPIFICACIÓN Y PROCESO DE ALMACENAMIENTO. *Revista Digital Universitaria* .

Defregger, F., y Kuhn, H. (Ene. de 2007). Revenue management for a make-to-order company with limited inventory capacity. *OR Spectrum, 29*(1), 137-156.

Desiraju , R., y Shugan, S. (1999). Strategic service pricing and yield management. *J. Market 63*, 44-56.

Díaz Mata, A., y Aguilera Gómez, V. M. (2008). *Matemáticas financieras.* México: McGraw Hill.

Elmaghraby, W., y Keskinocak, P. (October de 2003). Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research Overview, Current Practices, and Future Directions. *Management Science, 49*(10), 1287-1309.

Evans, G. (frbrero de 1924). The Dynamics of Monopoly. *The American Mathematical Monthly, 31*(2), 77-83.

Feng, Y., y Gallego, G. (1995). Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares. *Management Science/VoI. 41, No. 8, August 1995*, 1371-1391.

Freguglia, P., y Gianquinta, M. (2016). *The Early Period of the Calculus of Variations.* Italy: Birkhäuser.

Gallego, G., y Van Ryzin, G. (August de 1994). Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science/VoI. 40, No. 8, August 1994, Vol.40*, 999-1020.

Henschel. (2005). Hotelmanagement. *Stefan Gewald (eds) 2. Ed., Oldenbourg, Munich.*

Hotelling, H. (Abril de 1931). The Economics of Exhaustible Resources. *Journal of Political Economy, 39*(2), 137-175.

Kimes, S. E. (1989). The Basics of Yield Management . *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly*, 14-19.

Kincaid, W. M., y Darling, D. A. (1963). An Inventory Pricing Problem. *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 7*, 183-208.

Koopmans, T. C. (1963). On the Concept of Optimal Economic Growth. *Cowles Foundation Discussion Papers*, paper no.163.

Levis, A. A., y Papageorgiou, L. G. (Oct. de 2007). Active demand management for substitute products through price optimisation. *OR Spectrum, 29*(4), 551-577.

Li, R., y Teng, J.-T. (2018). Pricing and lot-sizing decisions for perishable goods when demand depends on selling price, reference price, product freshnes, and displayed stocks. *European journal of Operational Research*, 1099-1108.

Nahmias, S. (1982). Perishable Inventory Theory: A Review. *Operations Research Society of America*, 680-708.

Parkin, M., y Loría , E. (2010). *Microeconomía. Versión para Latinoamérica* (Novena Edición ed.). México: Pearson Educación.

Pérez Mantilla , F. A., y Torres, F. (2014). Modelos de inventarios con productos perecederos: Revisión de literatura. *INGENIERÍA, 19*, 9-40.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., y Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Control Process.* Nueva York: Traducido Interscience Publishers.

Ramsey, F. P. (diciembre de 1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal, 38*, 543-559.

Ríos Roca, A., Garrón B., M., y Cisneros G., P. (2007). Focalización de los subsidios a los combustibles en América Latina y el Caribe: Análisis y propuesta. *Organización Latinoamericana de Energía*, 2-29.

Servín , M. R. (2013). *Nutrición básica y aplicada* (2a ed.). México: UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

Smith, B. C., Leimkuhler, J. F., y Darrow, R. M. (1992). Yield Management at American Airlines. *Interfaces* , 8-31.

Zhao, W., y Zheng, Y.-S. (March de 2000). Optimal Dynamic Pricing for Perishable Assets with Nonhomogeneous Deman. (46, Ed.) *Management Science* , 375-388.

Zimer, S. M. (2015). Depreciation (accountancy). *Salem Press Encyclopedia*, 2p.

Índice de contenidos

Figuras

Gráficas

Tablas