



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE SINGULARIDADES DESNUDAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

MOISÉS EDUARDO JIMÉNEZ HIDALGO

TUTOR

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*a Ponciano Hidalgo...*



# Agradecimientos

Razones sobran para agradecer a mi madre y a mi padre. Por ahora sólo diré: gracias por todo el amor y el apoyo incondicional que siempre me han brindado. A Manuel por ser mi primer ejemplo de pensamiento crítico. A David por ser siempre mi más puro ejemplo de la bondad y la nobleza. A Néstor por ser un ejemplo de madurez en mi vida. Espero seguir aprendiendo de los 5.

Muy especialmente agradezco al Dr. Hernando por su invaluable ayuda en la realización de este trabajo, así como por sus muy útiles consejos. Toda su paciencia y amistad me hacen quedar gustosamente en deuda con él.

Muchas gracias a mis sinodales por el tiempo que dedicaron platicando conmigo sobre este trabajo en busca de mejorar mi entendimiento del tema. Y agradezco a la UNAM, al ICN y a la gente que ahí trabaja por brindarme de sus recursos y por permitirme desarrollarme aprendiendo de ellos.

Gracias a Isa por ser ella, conmigo. Por todo el apoyo y amor que me brinda. También quiero mencionar a modo de agradecimiento (y para eso de la memoria) a algunos de mis amigos y compañeros. Muy, muy especialmente a Karen, Santiago, Brandon y Martín. A Hodek, Toño, Edrick, el Roger, Jonatan, Erik, y Johas. Al Caimanex, el Mijangos, Sk, Carlos, Mike y el cuadros. Agradezco a Leil.

Gracias a mi tía Mary y mi tío Raúl, a Edwin. Gracias a mis abuelitos Lencho y mamá Anita. A mamá Liquita.

Finalmente quiero agradecer al hombre que hace 60 años, en medio de la sierra hidalguense, jaló, picó, empujó, cortó, arreó, vendió, sudó, ayunó, acarreó y, a pesar de sus grandes deseos por hacerlo, no estudió; todo para que sus hijos e hijas tuvieran el lugar en el mundo moderno que él no alcanzó. Los esfuerzos de ese hombre han llegado hasta mí, 60 años después. Gracias al rey del carnaval, cuyo nombre ya mencioné.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El espaciotiempo</b>	<b>5</b>
1.1. Singularidades . . . . .	5
1.2. Espaciotiempo de Schwarzschild . . . . .	6
1.3. Espaciotiempo de Reissner-Nordström . . . . .	10
<b>2. Hipersuperficies</b>	<b>17</b>
2.1. Definición de hipersuperficies y su vector normal. . . . .	17
2.2. Métrica Inducida . . . . .	18
2.3. Geometría intrínseca y extrínseca. . . . .	19
<b>3. Condiciones de juntura</b>	<b>23</b>
3.1. Sistemas de coordenadas . . . . .	23
3.2. Primera condición de juntura . . . . .	24
3.3. Segunda condición de juntura. . . . .	25
3.4. Tensor de energía momento superficial. . . . .	26
<b>4. Cascarón</b>	<b>31</b>
4.1. Planteamiento físico del cascarón . . . . .	31
4.2. Exterior del cascarón . . . . .	32
4.3. Interior del Cascarón . . . . .	35
4.4. Ecuación de Movimiento . . . . .	35
<b>5. Cascarón desnudo</b>	<b>39</b>
5.1. Criterio de asintoticidad . . . . .	39
5.2. Criterio de hipersuperficie nula . . . . .	41
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Cálculo de la curvatura extrínseca</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>



# Introducción

En el marco de la teoría de la relatividad general, el colapso gravitacional de un cuerpo cuya densidad está por encima de un valor crítico da origen a una singularidad de curvatura[26] en el espaciotiempo que puede o no estar cubierta por una hipersuperficie llamada horizonte de eventos. Cuando se presenta un horizonte de eventos el sistema se conoce como agujero negro; cuando la singularidad no está cubierta por un horizonte de eventos se le conoce como singularidad desnuda. En general, un agujero negro como estado final inmediato de un colapso es un sistema sumamente energético, y su dinámica depende de muchos parámetros. En consecuencia la descripción del espaciotiempo generado por estos objetos es una tarea sumamente complicada. Sin embargo, durante la formación de un agujero negro se radía energía en forma de ondas gravitacionales, de modo que si se deja pasar suficiente tiempo un agujero negro aislado perderá energía hasta convertirse en un sistema estacionario. Por otro lado, aún siendo estacionario, la física de un agujero negro podría depender, por ejemplo, del tipo de materia que compone al sistema. Esta posibilidad queda anulada según la *conjetura de no pelo*, la cual, en esencia, establece que para caracterizar un agujero negro estacionario en presencia de un campo electromagnético es necesario conocer únicamente tres parámetros: masa, carga eléctrica y momento angular (agujero negro de Kerr-Newmann); mientras que un agujero negro estacionario en vacío depende sólo de dos parámetros: masa y momento angular <sup>1</sup>. La métrica asociada a este último espaciotiempo es la de Kerr[14], la cual representa el espaciotiempo exterior a un cuerpo de masa  $M$  rotando con momento angular específico  $a = J/M$ . En caso de existir, el horizonte de eventos de Kerr se encuentra en un radio  $r_h = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  por lo que si los parámetros del sistema cumplen  $a > M$ , no puede existir horizonte de eventos y se obtiene una singularidad desnuda.

El tema de las singularidades desnudas ha sido un tanto polémico debido a que atenta contra la predictibilidad del espaciotiempo pues en este caso la singularidad (un objeto no descriptible con la relatividad general) puede afectar causalmente las regiones del espaciotiempo que se pretenden describir con la relatividad general. Para evitar este conflicto, la *conjetura de la censura cósmica*, formulada por R. Penrose en 1969 [21], establece que un colapso gravitacional no

---

<sup>1</sup>Si bien existen ejemplos en los que se demuestra la invalidez de esta conjetura, en [18] se propone una versión más “modesta” que es válida aún en los ejemplos donde la primera no lo es.

puede tener como estado final una singularidad desnuda, al menos bajo ciertas condiciones físicamente razonables. Si bien no se ha logrado una demostración formal de la censura cósmica (con el rigor de los teoremas de singularidades de Hawking[10]), se han realizado estudios que parecen corroborar su validez. Por ejemplo, se ha demostrado [6, 2, 24] que en sistemas astrofísicos comunes, rodeados por discos de acreción, una singularidad desnuda de Kerr es un sistema altamente inestable que decae rápidamente a un agujero negro de Kerr. También se ha mostrado que bajo ciertas condiciones un colapso gravitacional no puede conducir a una singularidad desnuda, si no a un agujero negro. Todo esto indica que al menos las singularidades desnudas (de Kerr) no son objetos muy comunes en la naturaleza y que las singularidades quedan ocultas por un horizonte de eventos, es decir, invisibles para un observador en infinito.

Por otro lado, se han realizado estudios [12] sobre el colapso gravitacional físicamente razonable de una distribución inhomogénea de materia (lo cual es de hecho más realista que asumir una distribución perfectamente homogénea). Se ha encontrado que existe un valor crítico de inhomogeneidad, por debajo del cual se forma un agujero negro. Pero si el grado de inhomogeneidad rebasa ese valor, el colapso da origen a una singularidad desnuda. Además, la formación de una singularidad desnuda se ve favorecida a medida que el colapso ocurre más rápidamente y sin simetría esférica. En [13] se muestra que dentro de la familia de soluciones de Tolman-Bondi existe un subgrupo de soluciones que derivan en una singularidad desnuda. Estos hechos abren la posibilidad de que las singularidades desnudas realmente existan en la naturaleza<sup>2</sup>.

Por todo esto es necesario continuar la discusión sobre la posibilidad de la existencia de singularidades desnudas. Ese es el objetivo de este trabajo. Para ello analizaremos uno de los modelos más sencillos del colapso gravitacional, el cual consiste en una distribución de materia infinitamente delgada idealmente concentrada en un cascarón.

A pesar de que se trata de un modelo muy simple, vale la pena explorarlo pues se aplica de manera exacta todo el formalismo de cascarones desarrollado por W. Israel [11]. Este formalismo devuelve las condiciones necesarias para que el espaciotiempo admita un cascarón que lo divide en dos subvariedades métricas  $(M_1, g_1)$  y  $(M_2, g_2)$ . Cuando el cascarón es imaginario y sólo tiene sentido como frontera entre las dos regiones, la geometría de cada subvariedad se escoge arbitrariamente y mediante las condiciones de juntura de Darmois, es decir, continuidad de la primera y la segunda forma fundamental inducida, se fijan las condiciones necesarias para encajar los dos espaciotiempos, las cuales pueden o no tener sentido físico. Sin embargo, cuando el cascarón no es únicamente la frontera entre dos regiones espaciotemporales y tiene sentido físico por sí mismo, es decir, cuando está compuesto de materia, la segunda condición de juntura

---

<sup>2</sup>En [19] incluso se propone un método para discriminar observacionalmente entre la formación de una singularidad desnuda y un agujero negro usando el corrimiento al rojo de fotones que atraviesan el centro de una nube inhomogénea de polvo que colapsa. En [20] se generaliza el tratamiento a fotones con momento angular, lo cual produce una especie de sombra cuyas propiedades dependen también del resultado final del colapso (presencia o ausencia de un horizonte de eventos).

falla y entonces se asocia el tensor de energía momento propio del cascarón con la discontinuidad en la segunda forma fundamental inducida desde el interior y el exterior del cascarón. De este modo se obtienen las condiciones necesarias para encajar dos espaciotiempos en la superficie de un cascarón.

En este trabajo el cascarón está constituido por polvo (sin presión) cargado eléctricamente, por lo que el exterior está dado por el espaciotiempo de Reissner-Nordström, mientras que el interior se fija como el espaciotiempo plano de Minkowski. En las condiciones que se obtienen se involucra el radio y su derivada respecto al tiempo propio del cascarón, así como los parámetros que caracterizan los espaciotiempos, la masa y la carga. Estas condiciones toman la forma de la ecuación de movimiento del cascarón mismo.

Debido a la dinámica (no necesariamente estacionaria) del cascarón, no es posible utilizar vectores y horizontes de Killing para encontrar el horizonte de eventos de la manera habitual. En su lugar, usamos la norma de la 3-velocidad de una partícula de prueba que se mueve a lo largo del cascarón. Buscamos el radio en el que es cero e interpretamos eso como el punto en el que el cascarón coincide con una hipersuperficie nula, es decir, el horizonte de eventos. Esta asociación se debe a que una partícula dentro de una hipersuperficie nula debe moverse a la velocidad de la luz. Bajo ciertas condiciones, encontramos una expresión analítica para el radio del horizonte, y de ahí la condición para que no exista. El colapso de un cascarón que obedezca esta condición dará lugar a una singularidad desnuda.

Para presentar los resultados obtenidos dividimos el trabajo en las siguientes partes:

En el capítulo 1 se hace un breve recuento de las singularidades de curvatura en la relatividad general así como de las características globales del espaciotiempo de Reissner-Nordström usando diagramas de Penrose.

En el capítulo 2 se introducen los conceptos de la primera forma fundamental (o la métrica inducida) y de la segunda forma fundamental (o curvatura extrínseca). A lo largo del capítulo se muestra que toda la información geométrica de una hipersuperficie (encajada) en un espaciotiempo está codificada en las dos formas fundamentales inducidas.

En el capítulo 3 desarrollamos las condiciones de juntura de Darmois siguiendo el razonamiento de W. Israel y E. Poisson.

En el capítulo 4 se aplican las condiciones de juntura para obtener la ecuación de movimiento de un cascarón infinitamente delgado constituido por polvo sin presión cargado eléctricamente. Además graficamos el colapso del cascarón para unos valores determinados de masa y carga eléctrica, sujetos además a la condición inicial de que el cascarón parte del reposo.

En el capítulo 5 desarrollamos dos criterios para obtener el radio del horizonte de eventos. En un primer intento se obtiene una expresión analítica, pero posteriormente se discute por qué no es útil y de hecho repetitiva. Finalmente aplicamos el criterio discutido en esta introducción para obtener el radio del horizonte, asumiendo además un valor conveniente para una constante. Buscando las condiciones para que el radio sea imaginario se obtiene una relación relativamente simple entre los parámetros de masa y carga sujetos a la misma

condición inicial del capítulo 4 y se obtiene una gráfica donde se observa que, bajo tales condiciones, la formación de una singularidad desnuda derivada del cascarón es posible.

En la sección de conclusiones se hace una reflexión respecto a los resultados obtenidos.

# Capítulo 1

## El espaciotiempo

Uno de los grandes logros de la teoría de la relatividad general de Einstein es el acertado cambio de paradigma respecto a la teoría de Newton. En su artículo de 1914[7], Einstein inicia con argumentos machianos para contrariar la idea del espacio absoluto de Newton. Si bien su teoría no incorpora el principio de Mach debido a la existencia de soluciones en vacío donde los objetos giran y sienten fuerzas inerciales [23] (como en el espaciotiempo de Kerr), sí le sirvió como guía para desechar el concepto de sistemas de referencia preferentes, fuertemente ligado a la geometría que casi inconscientemente se asignaba al espaciotiempo. La geometría del espaciotiempo de la mecánica de Galileo y Newton se asumía de manera axiomática y en general incuestionada; consta de una estructura euclídeana tres-dimensional para cada instante de tiempo [16], donde el tiempo es una coordenada absoluta en el sentido de que transcurre a un mismo ritmo en todo punto del espacio e independientemente del estado de movimiento del reloj. El cambio de paradigma fue ya no asumir esta geometría y permitir que sea una variable de la física. En este capítulo se estudiarán dos geometrías posibles del espaciotiempo según la relatividad general, en las cuales se presentan dos fenómenos sin precedentes en la física clásica: una singularidad en el espaciotiempo mismo y un horizonte de eventos. El estudio de estas patologías se aborda mediante diagramas de Penrose en el espaciotiempo de Reissner-Nordström.

### 1.1. Singularidades

El resultado de incorporar el principio de equivalencia, el principio de covariancia y otras consideraciones de geometría Riemanniana tales como compatibilidad de la métrica con la derivada covariante (lo cual unifica la estructura afín y la estructura métrica del espaciotiempo) son las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales ligan la geometría del espaciotiempo con la distribución de

materia que hay en él:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Poco tiempo después de encontrar las primeras soluciones a las ecuaciones de Einstein, se descubrió que algunas de estas presentan singularidades en el espaciotiempo, entendiendo el término de singularidad como un comportamiento divergente en la magnitud física de interés: la curvatura. Tras décadas de estudio, el problema de las singularidades en relatividad general se ha vuelto más sutil de lo que empezó, pues las divergencias en el tensor de curvatura no son las únicas patologías que puede presentar un espaciotiempo [26]. Y aún más, la noción de singularidad como un lugar del espaciotiempo no tiene sentido, pues este se define como una variedad pseudo riemanniana ("bien comportada") en todos sus puntos, y evidentemente una singularidad no tiene un comportamiento suave en el espaciotiempo. Este tipo de razonamientos han llevado a los físicos teóricos a elevar la discusión de singularidades a un nivel mucho más complejo. Intentando dar una definición apropiada de singularidad se han desarrollado conceptos como "g-boundary" y "b-boundary", los cuales pretenden devolver la noción de singularidad como un lugar mediante la implementación (independiente de coordenadas) de una frontera que separa los puntos regulares del espaciotiempo de los singulares, sin embargo hay ejemplos en los que estas fronteras tienen comportamientos patológicos [26]. También se ha atacado el problema de las singularidades mediante la noción de incompletéz geodésica: un espaciotiempo tiene una singularidad si existe al menos una geodésica inextensible de longitud finita; este concepto de singularidad es el que se utiliza en los teoremas de singularidades [10].

A pesar de no ser la más rigurosa (y en buena medida debido a eso), la noción de singularidad como la divergencia de los escalares derivados del tensor de curvatura es la más usada. Una de las razones por las que esta noción falla es que un espaciotiempo cuya curvatura "explota" en infinito no es candidato a ser llamado singular. Sin embargo, en este trabajo lidiaremos sólo con dos espaciotiempos muy particulares y para los que esta definición de singularidad es suficiente.

## 1.2. Espaciotiempo de Schwarzschild

Sólo unos meses después de la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein, el físico Karl Schwarzschild, entonces enlistado en el frente ruso de la primera guerra mundial, derivó la primera solución exacta a las ecuaciones en vacío que describe un sistema estático con simetría esférica. A esta solución se le conoce como el espaciotiempo de Schwarzschild y está descrito por la métrica (a partir de este punto se escribirán todas las expresiones en unidades naturales  $c = 1 = G$ )

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{Sin}^2(\theta)d\varphi^2; \quad (1.2)$$

véase la referencia [26] para una deducción formal. El parámetro  $M$  se puede identificar con la masa del sistema tomando el límite de campo débil y comparando con gravedad newtoniana. Un importante resultado en torno a esta solución es que es el único espaciotiempo posible con simetría esférica en vacío; la condición de estaticidad es innecesaria para derivar esta solución (véase el apéndice B de [10] para una demostración). Este resultado conocido como "Teorema de Birkhoff" será puesto en uso en el capítulo 4.

En estas mismas coordenadas consideremos el vector  $r^a = (\partial/\partial r)^a$  y el vector  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  cuyas normas están dadas por

$$\begin{aligned} r^a r_a &= g_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta = g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\ t^a t_a &= g_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r}. \end{aligned}$$

De acuerdo al signo del cuadrado de las normas podemos afirmar que para valores de  $r > 2M$  estos vectores son tipo espacio y tipo tiempo respectivamente, sin embargo, para valores de  $r < 2M$  la naturaleza de estos vectores se invierte: el vector que era tipo espacio es ahora tipo tiempo y viceversa. Recordando el carácter unidireccional en la dimensión temporal de las partículas, esto ya nos está diciendo que dentro del radio de Schwarzschild,  $r_s = 2M$ , una partícula se verá forzada a ir en la dirección en la que  $r$  decrece. Esta patología va más allá de un simple fallo en el sistema de coordenadas que estamos usando debido a que la norma de la cuadrivelocidad es independiente de las coordenadas que usemos.

Un primer paso para analizar si este fenómeno realmente refleja una propiedad intrínseca de la geometría del espaciotiempo es observar el comportamiento de los conos de luz pues estos determinan la causalidad del espaciotiempo. Para esto consideremos ahora una partícula tipo luz ( $ds^2 = 0$ ) que se mueve radialmente ( $\theta = cte$ ,  $\varphi = cte$ ); de la métrica (1.2) se sigue que para esta partícula se cumple

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Integrando obtenemos que

$$t = \pm r^* + cte, \quad (1.4)$$

donde  $r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ . Hacemos énfasis en que estas son las trayectorias que siguen los rayos de luz geodésicos radiales en las coordenadas  $(r, t)$ . Dicho esto, definimos las coordenadas adaptadas a las geodésicas nulas

$$\begin{aligned} v &= t + r^*, \\ u &= t - r^*. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Estas coordenadas son adaptadas en el sentido de que cada uno de sus valores constantes determina una geodésica. La expresión (1.3) representa la pendiente de los conos de luz. Evidentemente, conforme  $r \rightarrow 2M$  la inclinación de los conos

se va haciendo mayor,  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$ , permitiendo cada vez un menor movimiento radial (en el exterior) para intervalos fijos de  $t$ . Dado que las partículas que conocemos se deben mover dentro del cono de luz en cada punto del espaciotiempo, esto nos dice que un observador externo estático jamás verá que una partícula en caída radial cruce la superficie  $r = 2M$ ; para el observador, dicha partícula se acercará asintóticamente a este radio pero jamás lo cruzará. Es importante mencionar que si bien el observador externo jamás verá que la partícula cruce el horizonte, esta partícula sí atravesará tal superficie en un intervalo finito de su tiempo propio [26]. En la figura 1.1 se observa la unidireccionalidad espacial de las partículas en la región  $r < 2M$  así como la pendiente de los conos de luz cerca de  $r = 2M$ .

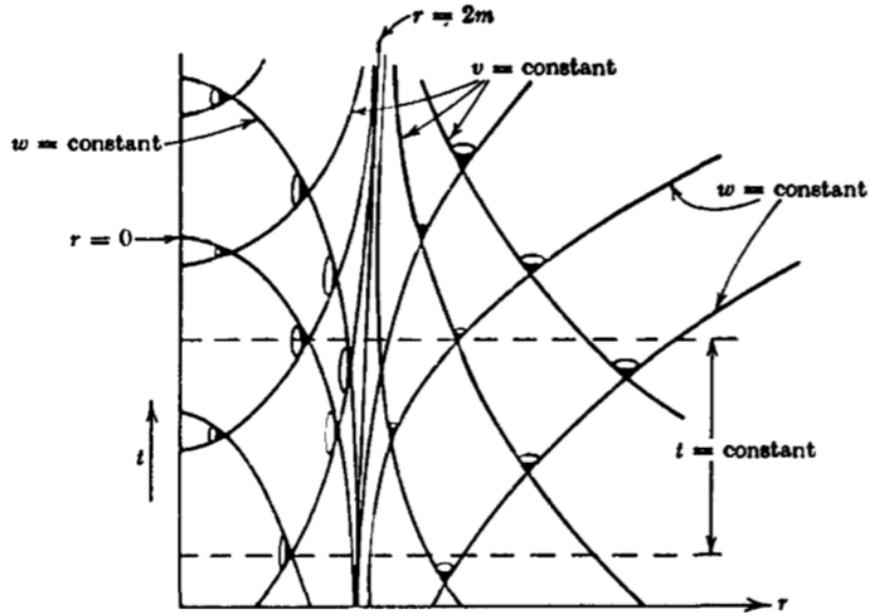


Figura 1.1: Imagen recuperada y editada de [10]. El eje horizontal representa la coordenada  $r$  y el eje vertical la coordenada  $t$ . Los conos de luz se forman de la intersección de las curvas etiquetadas con  $w$  y  $v$  constantes.

Es importante mencionar que para los objetos astronómicos más comunes como estrellas o planetas, esta discusión no tiene relevancia pues el valor de  $r = 2M$  es demasiado pequeño en comparación al radio de la superficie del cuerpo (por ejemplo el radio de la superficie del sol es aproximadamente  $r = 10^6 M$ , muy por encima del llamado radio de Schwarzschild  $r_s = 2M$ ) y como este espaciotiempo es solución a las ecuaciones de Einstein en vacío, dentro del cuerpo astrofísico ya no es válido todo lo que se pueda derivar de esta discusión. Se necesitan objetos extremadamente densos para que se descubran estos fenómenos. Sin embargo,

mediante un análisis de las soluciones estáticas con simetría esférica de un fluido perfecto (modelando el interior de una estrella), se fija un límite para la masa en función del radio,  $M_{max} = \frac{4}{9}R$ ; la teoría no permite situaciones estáticas en sistemas con una masa mayor a esa, por lo que colapsará descubriendo eventualmente la superficie  $r = 2M$ . Aunque esto es válido para sistemas idealmente esféricos, el problema del colapso ha sido estudiado de manera más detallada concluyendo lo siguiente: Es bien sabido que el combustible nuclear de las estrellas como el sol se termina en determinado momento, por lo que las fuerzas de reacciones nucleares, que sostenían la superficie del astro contra su propia gravedad, se acaban, dando lugar a cuerpos astrofísicos muy abundantes en el universo llamados enanas blancas. Estos objetos fueron estudiados por el físico S. Chandrasekhar [5], quien además calculó el valor de la masa máxima que una enana blanca estable puede tener considerando la presión de degeneración de Pauli como contrapeso a la gravedad; un objeto con una masa mayor a esta colapsará uniendo electrones con protones en un proceso de decaimiento beta inverso formando una estrella de neutrones, cuya masa está acotada por el límite de Oppenheimer-Volkoff; si una estrella de neutrones sobrepasa esta masa, colapsará sin tener ya ningún retén descubriendo así la superficie del radio de Schwarzschild.

Notemos que que si insertamos un parámetro  $M < 0$  en la métrica de Schwarzschild, los vectores tipo tiempo y tipo espacio no intercambiarán su naturaleza y nada especial ocurrirá con los conos de luz en  $r = 2M$ , sin embargo un parámetro así no tiene sentido físico pues  $M$  está asociado con la masa del sistema, y es nada claro el significado de una masa negativa.

De acuerdo a la previa discusión sobre singularidades, el punto etiquetado por  $r = 0$  presenta una singularidad en el espaciotiempo de Schwarzschild. Para ver esto basta con calcular el escalar de Kretschmann [4]

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6},$$

el cual claramente diverge en  $r = 0$ .

Con lo que se ha discutido hasta ahora, la imagen que podemos tener de el espaciotiempo generado por un objeto esféricamente simétrico que ha colapsado a un punto matemático es uno con un agujero en  $r = 0$  y con una envoltura especial en  $r = 2M$  sobre la que se invierte la naturaleza de los vectores tipo espacio y tipo tiempo y la cual, para un observador externo estático, no puede ser cruzada hacia dentro ni hacia fuera por una partícula; a este sistema se le llama agujero negro. La designación de *agujero* proviene de la ruptura del espaciotiempo (la curvatura es infinita en  $r = 0$ ) y el adjetivo *negro* se debe al hecho de que una vez que una partícula (incluso un fotón) cruza la superficie  $r = 2M$ , a la que ahora llamaremos *horizonte de eventos*, esta no puede volver al exterior, condición que impide dramáticamente obtener cualquier tipo de información del interior del horizonte de eventos; no se puede ver hacia dentro.

Todos estos hechos ya nos invitan a analizar más a detalle qué de especial tiene la hipersuperficie  $r = 2M$ , cuya coordenada radial es la raíz de la ecuación  $g_{tt} = 0$ . La manera más elegante de hacer este análisis es usando los diagramas

de Penrose, y en este mismo análisis se ve reflejado el carácter singular del punto  $r = 0$ . Sin embargo dejaremos ese estudio para el caso más relevante de este trabajo: la métrica de Reissner-Nordström.

### 1.3. Espaciotiempo de Reissner-Nordström

En 1916 y 1918, el ingeniero Hans Reissner y el físico Gunnar Nordström derivaron de manera independiente una generalización a la solución de Schwarzschild. Esta generalización describe un sistema esféricamente simétrico y estático pero ya no en vacío, el tensor de energía momento asociado es el del electromagnetismo. Esta solución está dada por:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.6)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ . En esta solución, además del parámetro de masa  $M$ , aparece el parámetro  $Q$  asociado a la carga eléctrica de la fuente, el cual puede tomar cualquier valor dado que viene de la teoría de Maxwell en la que no hay cotas sobre este parámetro. Para el estudio de este spaciotiempo notemos primero que, análogamente al caso de Schwarzschild, la norma de los vectores  $r^a = (\partial/\partial r)^a$  y  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  está dada por

$$\begin{aligned} r^a r_a &= \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1}, \\ t^a t_a &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Así mismo, en estas coordenadas las geodésicas radiales nulas estarán gobernadas por la ecuación

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Ya de estos dos hechos resulta muy útil conocer las raíces de la ecuación

$$\Delta(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \quad (1.9)$$

pues en los valores donde se anula esa función ocurren los mismos fenómenos descritos en la sección anterior. Las raíces de  $\Delta(r)$  están dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (1.10)$$

Como ya se mencionó, ninguna cota existe a priori sobre el valor del parámetro  $Q$  respecto al de  $M$ , por lo que la situación ahora se divide en tres casos:  $Q < M$ ,  $Q = M$  y  $Q > M$ . La curva asociada a  $\Delta(r)$  se muestra para los tres casos en la figura 1.2.

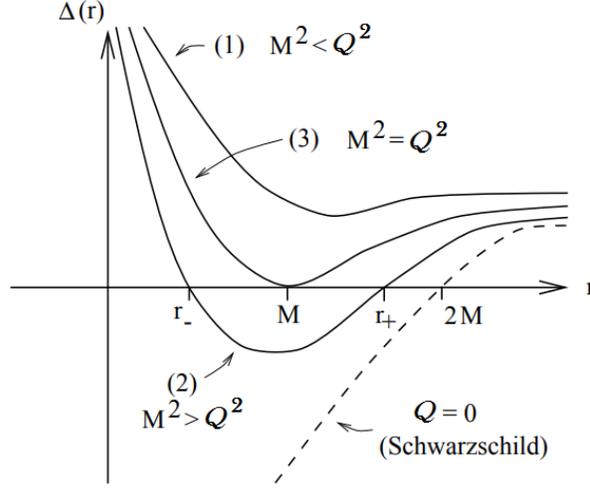


Figura 1.2: Imagen editada y recuperada de [3]. Gráfica cualitativa de  $\Delta(r)$  para las tres relaciones posibles entre  $M$  y  $Q$ .

Antes de analizar las diferentes situaciones, notemos que en cualquier caso, el espaciotiempo tiene una singularidad en  $r = 0$  dada por la divergencia del escalar de Kretschmann [17]:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6} \left( 1 - \frac{2Q^2}{Mr} + \frac{7Q^4}{6M^2r^2} \right). \quad (1.11)$$

Esto significa que independientemente de los valores relativos de  $M$  y  $Q$  existe una singularidad en  $r = 0$ . Como veremos a continuación, esta singularidad puede estar cubierta por un horizonte de eventos o puede estar al descubierto, desnuda.

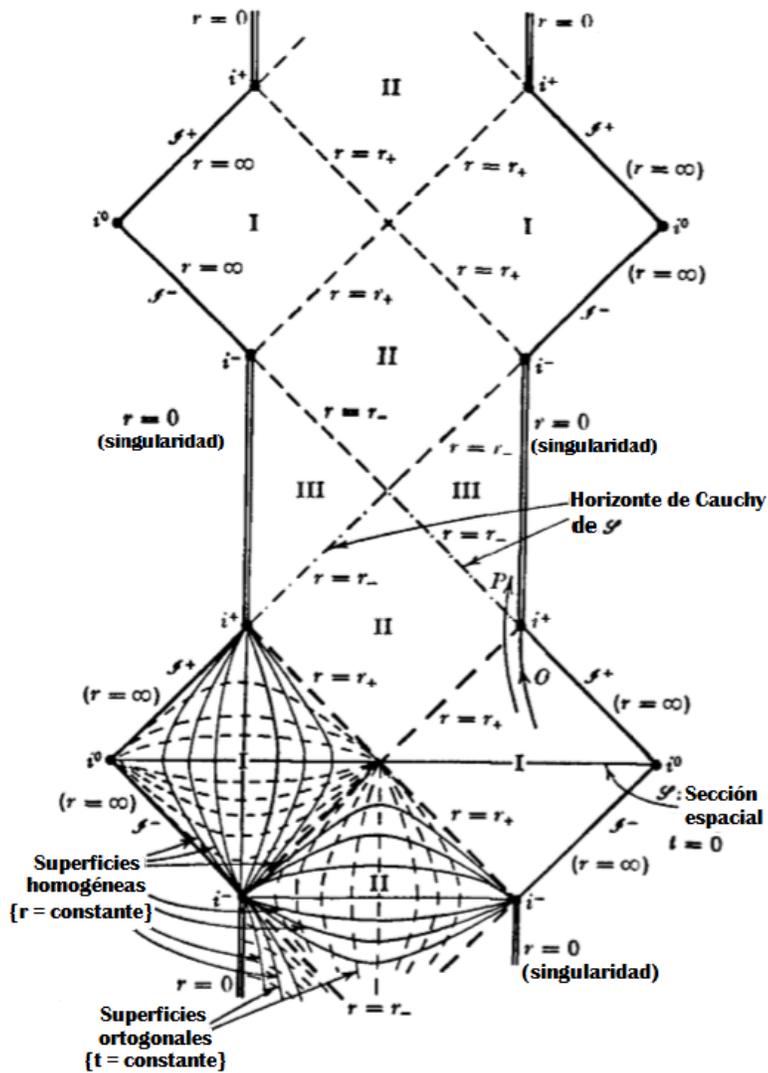
### 1.3.1. $Q < M (Q < \epsilon_0 GM)$

En este caso las dos raíces de la ec. (1.9) dadas por la ecuación (1.10) son reales. De la figura 1.2 y la ec. (1.7) es claro que en la región  $r > r_+$  el vector  $r^a$  es espacialoide mientras que en la zona  $r_- < r < r_+$  es temporaloide, por lo que en esta región se presenta la unidireccionalidad en la coordenada radial de una partícula y los conos de luz se deforman del mismo modo que en el horizonte de eventos del espaciotiempo de Schwarzschild, por lo tanto este sistema presenta un horizonte de eventos idéntico al del agujero negro de Schwarzschild; este es un agujero negro cargado eléctricamente.

En la región  $r < r_-$  el vector  $r^a$  recupera su carácter espacialoide y las partículas en esta región recobran la posibilidad de escoger en qué dirección radial moverse, sin embargo, debido a que la superficie  $r = r_-$  es nula, una partícula que ha llegado a esta última zona jamás podrá cruzar esta misma

superficie para retornar al universo del que partió. Por su parte, la singularidad es tipo tiempo ya que, a diferencia del agujero negro de Schwarzschild, en la región interna del agujero negro las superficies  $r = cte$  recuperan el carácter temporal que tienen en el exterior. La partícula se queda atrapada en la región  $r < r_-$  donde se encuentra la singularidad.

Sin embargo, como se muestra en la figura 1.3, en la extensión maximal de este espaciotiempo ese no es el final de la historia. Una partícula P que parte de la región I ( $r > r_+$ ) cayendo al agujero negro atraviesa la superficie  $r = r_+$  y llega a la región II ( $r_- < r < r_+$ ), donde las superficies  $r = cte$  son espacialoides y son atravesadas por P hasta llegar al radio  $r = r_-$  llegando así a la región III ( $r < r_-$ ), la cual, por un lado, está acotada por la singularidad  $r = 0$ , y por otro lado está acotada por una copia de la superficie  $r = r_-$  recién atravesada. Esta copia de la superficie  $r = r_-$  sí puede ser atravesada por P. Una partícula que ha llegado a esta región III puede cruzar una copia de la superficie por la cual llegó para entonces encontrarse en una copia de la región II pero esta vez la unidireccionalidad en la coordenada radial apunta hacia una copia de la región I, hacia fuera del agujero negro. Así, nuestra partícula emergerá desde un *agujero blanco* a una copia del universo del que partió. Esta copia, como tal, cuenta con un agujero negro idéntico al primero al cual puede entrar para repetir el proceso y continuar viajando así entre copias del espaciotiempo de Reissner-Nordström; este es un ejemplo de un agujero de gusano.

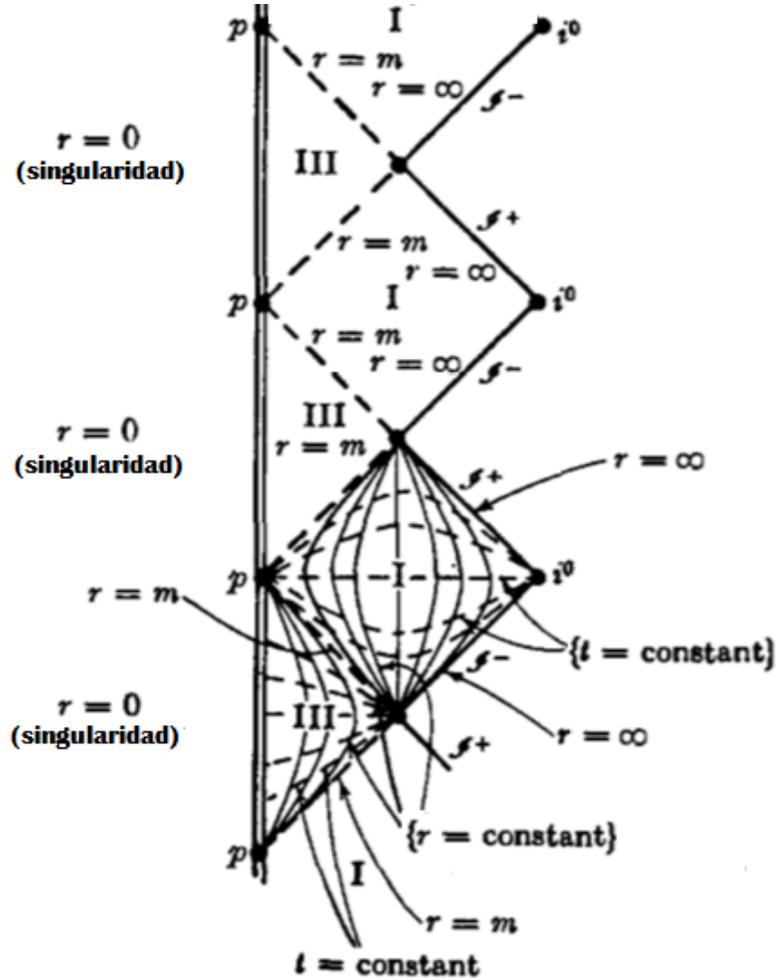


[h]

Figura 1.3: Imagen tomada y editada de [10]. Diagrama de Penrose de la extensión maximal del espaciotiempo de Reissner-Nordström. Se muestra un pequeño fragmento de la trayectoria de una partícula  $P$  que entra a este agujero negro. La superficie  $r = r_-$  es el horizonte de Cauchy de la sección espacial  $t = 0$ .

### 1.3.2. $Q = M(Q = \epsilon_0 GM)$

En este caso la ecuación (1.9) sólo tiene la raíz  $r = M$ . Además, nuevamente observando la figura 1.2 y teniendo en cuenta la ecuación (1.7) podemos concluir que el carácter temporal o espacial de los vectores no se ve alterado al ir de la región  $r > M$  a la región  $r < M$  y que la singularidad en  $r = 0$  es temporal y por lo tanto eludible. El diagrama de Penrose de la extensión maximal de este espaciotiempo nuevamente muestra estas características y añade las copias de las regiones I y III (en este caso no hay región II) análogamente al caso anterior. Similarmente, una partícula podrá visitar diferentes copias de nuestro universo.



[h]

Figura 1.4: Imagen obtenida y editada de [10]. Se muestra el diagrama de Penrose del espaciotiempo de Reissner-Nordström con  $Q = M$ .

### 1.3.3. $Q > M$ ( $Q > \epsilon_0 GM$ )

En este caso los radios  $r_{\pm}$  de la ecuación (1.10) son imaginarios. Por lo tanto, como se ve en la figura 1.2, la función  $\Delta(r)$  nunca se anula, lo que significa que todas las patologías en los conos de luz y en la naturaleza de los vectores de las que hemos venido hablando, propias de un horizonte de eventos, no se presentarán en este espaciotiempo. Un sistema que cumpla con esta característica inducirá un espaciotiempo con una singularidad en  $r = 0$  sin un horizonte de eventos que la oculte del resto del universo; se genera una singularidad desnuda con la condición  $Q > M$ .

Usando el vector de Killing temporal de este espaciotiempo es sencillo obtener el potencial efectivo al que una partícula geodésica estará sujeta, y a partir de este se obtiene que la partícula siempre se acerca a la singularidad hasta un punto mínimo  $r_{min}$  que depende de su energía y después se aleja nuevamente; la interacción gravitacional se interpreta como repulsiva en ese punto.

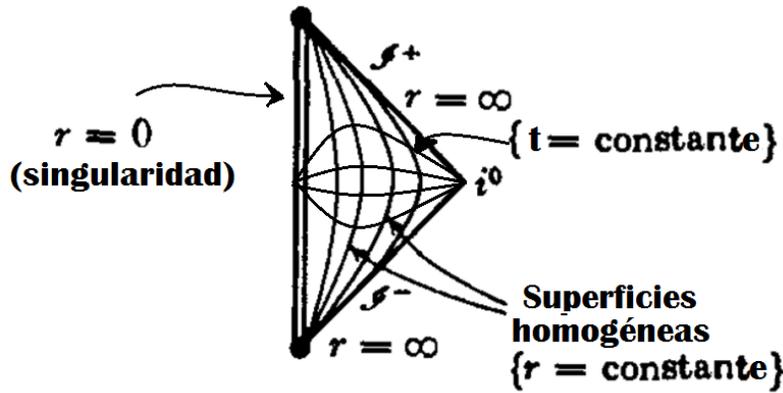


Figura 1.5: Imagen obtenida y editada de [10]. Diagrama de Penrose de la extensión maximal del espaciotiempo de Reissner-Nordström con  $Q > M$ . La singularidad de curvatura en  $r = 0$  no está cubierta por una superficie nula (horizonte de eventos) que impida la salida de señales luminosas, es decir, la observación. Se trata de una singularidad desnuda.

Si bien el diagrama de Penrose de este espaciotiempo es el más sencillo, codifica una estructura espaciotemporal muy polémica debido a la controversia respecto a la *Conjetura de la censura cósmica*, la cual afirma que cualquier singularidad generada por el colapso gravitacional de un cuerpo que satisfaga ciertas condiciones de energía, quedará cubierta por un horizonte de eventos que impedirá su observación desde cualquier punto del universo externo al sistema que genera la singularidad. En el resto del trabajo intentaremos producir una singularidad desnuda a partir del colapso gravitacional de un cascarón de polvo cargado eléctricamente. Pero antes desarrollaremos dos conceptos fundamentales

para este propósito: Hiperuperficies y condiciones de juntura.

## Capítulo 2

# Hipersuperficies

Una hipersuperficie es una generalización de una superficie 2-dimensional (como un plano, una esfera o un toro) encajada en un espacio 3-dimensional; se trata de una subvariedad de  $n$  dimensiones encajada en una variedad de dimensión mayor. Este concepto tiene una amplia gama de aplicaciones en relatividad general, donde las hipersuperficies son subvariedades 3 dimensionales de la variedad 4-dimensional llamada espaciotiempo. Por ejemplo, al estudiar condiciones iniciales se requiere de superficies de Cauchy; la causalidad está asociada al concepto de horizonte de Cauchy (el cual también es una hipersuperficie); los horizontes de eventos generalmente se identifican con los horizontes de Killing (nuevamente hipersuperficies). En nuestro trabajo usaremos hipersuperficies para modelar el colapso gravitacional de un cuerpo astrofísico. En este capítulo se introducirán los conceptos de la primera forma fundamental (o métrica inducida) y la segunda forma fundamental (o curvatura extrínseca), y se mostrará que la información geométrica intrínseca de la hipersuperficie está codificada en la primera forma fundamental, mientras que la segunda forma fundamental está íntimamente asociada a la forma en que está encajada la hipersuperficie, es decir, la información geométrica extrínseca. En conjunto, estas dos cantidades caracterizan la hipersuperficie en cuestión como una subvariedad encajada en una variedad. Esto se hace evidente en la última ecuación del capítulo, la ecuación de Gauss-Weingarten.

### 2.1. Definición de hipersuperficies y su vector normal.

Consideremos la variedad del espaciotiempo 4 dimensional. Una hipersuperficie 3 dimensional es una subvariedad del espaciotiempo en cuestión que puede ser definida mediante una relación entre las coordenadas de la variedad, es decir, mediante una función  $\Phi$  tal que

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \tag{2.1}$$

o bien considerando las coordenadas del espaciotiempo como dependientes de tres parámetros  $y^a$  ( $a=1, 2, 3$ ), los cuales etiquetan cada punto de la hipersuperficie por lo que se les conoce como coordenadas de la hipersuperficie, es decir, si  $y^a$  son las coordenadas de la hipersuperficie,

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a). \quad (2.2)$$

Esto es análogo al caso de superficies 2 dimensionales encajadas en espacios 3 dimensionales, donde, por ejemplo, se puede definir la 2 esfera mediante la función de las coordenadas

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

o bien mediante las relaciones

$$x = R \sin(\theta) \cos(\phi), \quad y = R \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = R \cos(\theta).$$

Una hipersuperficie  $\Sigma$  puede ser espacial, temporal, o bien nula; las hipersuperficies con las que trataremos serán temporales, por lo tanto desde ahora nos enfocaremos en el caso de  $\Sigma$  temporal.

Notemos ahora que la derivada direccional de la función  $\Phi$ ,  $\Phi_{,\alpha}$ , es un vector ortogonal a la hipersuperficie que define debido a que dicha función sólo varía en las direcciones que conducen fuera de la hipersuperficie. Imponiendo normalización, tenemos que el vector normal está dado por

$$n_\alpha = \frac{\Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}}, \quad (2.3)$$

de modo que

$$n^\alpha n_\alpha = 1, \quad (2.4)$$

como es de esperarse de un vector tipo espacio.

## 2.2. Métrica Inducida

Buscamos ahora la métrica inducida a  $\Sigma$  por medio de las ecuaciones paramétricas  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ . Para esto simplemente hay que aplicar el *pull-back* a la métrica del espaciotiempo en cuestión:

$$h_{ab} := g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.5)$$

donde

$$e_a^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad (2.6)$$

es el jacobiano del encajamiento de  $\Sigma$  en el espaciotiempo y  $h_{ab}$  es la métrica inducida o primera forma fundamental. Es importante tener en cuenta que aunque  $h_{ab}$  se comporta como tensor bajo transformaciones  $y^a \rightarrow y^{a'}$  de las

coordenadas de  $\Sigma$ , se comporta como un escalar bajo transformaciones de las coordenadas del espaciotiempo  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ .

Notemos que  $dx^\alpha = e_a^\alpha dy^a$ , es decir, los entes  $e_a^\alpha$  son las componentes de la base de 1-formas tangentes a  $\Sigma$  (se comportan como un vector bajo transformaciones del tipo  $y^a \rightarrow y^{a'}$ , y de hecho los vectores  $\{e_a^\alpha\}_{a=1,2,3}$  son tangentes a  $\Sigma$  pues inducen desplazamientos a lo largo de cada uno sus tres parámetros). De modo que se deben cumplir las relaciones de ortogonalidad  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$ .

El intervalo restringido a  $\Sigma$  toma la forma

$$ds_\Sigma^2 = h_{ab} dy^a dy^b. \quad (2.7)$$

Por otro lado, sabemos que el push-forward de  $h^{ab}$  (la inversa de la métrica inducida), el cual está dado por

$$h^{\alpha\beta} = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.8)$$

es un tensor tangente a  $\Sigma$ , lo cual implica que no contiene información de la geometría en las direcciones perpendiculares a  $\Sigma$ . Dicho esto, resulta evidente que si queremos expresar a la métrica completa  $g^{\alpha\beta}$  como una combinación de  $h^{\alpha\beta}$  y otro término,

$$g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta},$$

el término  $f^{\alpha\beta}$  deberá contener la información de las direcciones perpendiculares a  $\Sigma$ . Evidentemente el mejor candidato es el vector normal a la hipersuperficie multiplicado por algún factor que dependa de los puntos  $p$  del espaciotiempo:

$$f^{\alpha\beta} = f(p) n^\alpha n^\beta.$$

Sin embargo, dado que

$$n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta = (h^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta}) n_\beta = h^{\alpha\beta} n_\beta + f^{\alpha\beta} n_\beta = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta n_\beta + f(p) n^\alpha n^\beta n_\beta,$$

y usando la ortogonalidad entre los vectores tangentes y normales a  $\Sigma$  así como la ec(2.4), tenemos que  $f(p) = 1$ . Finalmente, se obtiene la relación

$$g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta. \quad (2.9)$$

## 2.3. Geometría intrínseca y extrínseca.

Una hipersuperficie  $\Sigma$ , en su calidad de variedad, tiene su propio espacio tangente; analizaremos cómo se relaciona este espacio tangente con el del espaciotiempo.

El push forward de un tensor  $A^{ab\dots}$  del espacio tangente de  $\Sigma$  al del espaciotiempo está dado por

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots \quad (2.10)$$

Dado que  $n_\alpha A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots n_\alpha = 0$  (pues  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$ ), tenemos que  $A^{\alpha\beta\dots}$  es un tensor tangente a  $\Sigma$ . Así mismo, si contamos con un tensor  $B_{\alpha\beta\dots}$  en el espaciotiempo, no necesariamente tangente a  $\Sigma$ , podemos aplicarle genéricamente el pull back para obtener el tensor asociado en el espacio tangente a  $\Sigma$ ,  $B_{ab\dots}$ :

$$B_{ab\dots} = B_{\alpha\beta\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots \quad (2.11)$$

Al igual que la métrica inducida,  $B_{ab\dots}$  y  $A^{ab\dots}$  se comportan como tensores bajo transformaciones  $y^a \rightarrow y^{a'}$ , pero como escalares bajo transformaciones  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ .

Es muy importante tener en cuenta que al aplicar el pull-back a un tensor  $B_{\alpha\beta\dots}$  no tangencial a  $\Sigma$ , se está perdiendo su información en la dirección de  $n_\alpha$  pues  $B_{ab\dots}$  es puramente tangencial a la hipersuperficie. Por lo tanto, el push-forward del dual a  $B_{ab\dots}$ ,  $B^{ab\dots} = B_{mn\dots} h^{am} h^{bn} \dots$ , es decir,  $B'^{\alpha\beta} = B^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots$ , no necesariamente es el dual a el tensor original  $B_{\alpha\beta\dots}$  pues la información perdida en la dirección ortogonal a  $\Sigma$  no se recuperó.

Por otro lado, si  $A_{\alpha\beta\dots}$  es tangente a  $\Sigma$ , entonces se cumple simultáneamente que

$$A^{ab\dots} = A_{mn\dots} h^{am} h^{bn} \dots \quad A^{\alpha\beta\dots} = A_{\mu\nu\dots} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \dots \quad (2.12)$$

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots \quad A_{ab\dots} = A_{\alpha\beta\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots \quad (2.13)$$

lo cual reafirma el papel de  $h^{ab}$  como la métrica de  $\Sigma$  pues "sube" y "baja" índices.

Consideremos ahora un vector  $A^\alpha$  que satisface todo lo anterior (y por lo tanto es tangente a  $\Sigma$ ). Usando las ecuaciones 2.9, 2.8, la ortogonalidad entre  $A^\mu$  y  $n_\mu$ , y la ecuación 2.10, la derivada covariante de este vector a lo largo de  $e_b^\beta$  es

$$\begin{aligned} A^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta &= g^{\alpha\mu} A_{\mu;\beta} e_b^\beta \\ &= (h^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu) A_{\mu;\beta} e_b^\beta \\ &= (h^{am} e_a^\alpha e_m^\mu + n^\alpha n^\mu) A_{\mu;\beta} e_b^\beta \\ &= h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha + (n^\mu A_{\mu;\beta} e_b^\beta) n^\alpha \\ &= h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha + (-n_{\mu;\beta} A^\mu e_b^\beta) n^\alpha \\ &= h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha - A^\alpha (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha. \end{aligned}$$

En este punto introducimos dos términos sumamente importantes: para cualquier vector tangente a  $\Sigma$ ,  $A_\mu$ , y su vector normal,  $n_\mu$ , definimos

$$A_{a|b} := A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (2.14)$$

y

$$K_{ab} := n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.14 y 2.15 en la derivada covariante de  $A^\alpha$  tenemos que

$$A^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta = (h^{am} A_{m|b}) e_a^\alpha - A^a K_{ab} n^\alpha.$$

Sin embargo, como veremos enseguida, la ecuación 2.14 define una derivada covariante intrínseca a  $\Sigma$  que es compatible con  $h^{ab}$ , es decir que  $h^{am}{}_{|b} = 0$ . Utilizando esto, finalmente obtenemos una expresión para la derivada covariante de un vector tangente a  $\Sigma$  que separa la parte tangencial (primer término) de la parte normal (segundo término):

$$A^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta = A^a{}_{|b} e_a^\alpha - A^a K_{ab} n^\alpha. \quad (2.16)$$

Desarrollemos la ecuación 2.14. Utilizando el producto de Leibniz para derivadas, las ecuaciones 2.11 y 2.10, el hecho de que  $A_a$  se comporta como escalar en el espaciotiempo completo y la regla de la cadena, se sigue que

$$\begin{aligned} A_{a|b} &= A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \\ &= (A_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - A_\alpha e_a^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta \\ &= A_{\alpha;\beta} e_b^\beta - A^d e_{d\alpha} e_a^\alpha{}_{;\beta} e_b^\beta \\ &= \frac{A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - h^{cd} e_{a;\beta} e_{d\alpha} e_b^\beta A_c \\ &= A_{a,b} - h^{cd} e_{a;\beta} e_{d\alpha} e_b^\beta A_c. \end{aligned}$$

Definimos ahora los coeficientes de la derivada intrínseca:

$$\Gamma_{ab}^c = h^{cd} e_{a;\beta} e_{d\alpha} e_b^\beta. \quad (2.17)$$

Tenemos así la expresión para la derivada covariante intrínseca

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (2.18)$$

Para demostrar que esta derivada inducida en efecto es compatible con la métrica inducida, basta ver que

$$\begin{aligned} h_{ab|c} &= h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= (g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma - (n_{\alpha;\gamma} n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + n_{\beta;\gamma} n_\alpha e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se explica por la compatibilidad de la métrica con la derivada del espaciotiempo y el hecho de que  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$ . Siguiendo el procedimiento usual para expresar los símbolos de Christoffel en términos de la métrica, se tiene que

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (h_{ad,b} + h_{bd,a} - h_{ab,d}). \quad (2.19)$$

Con lo desarrollado hasta aquí, podemos entender el primer término del lado derecho en la ecuación 2.16 como la parte tangencial e intrínseca a  $\Sigma$  de la derivada covariante de un vector tangente a la hipersuperficie en cuestión. ¿Qué hay acerca del segundo término?.

El término  $K_{ab} := n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$  en la ecuación 2.16 es conocido como curvatura extrínseca o segunda forma fundamental (hay que tener cuidado de no confundir este segundo nombre con el de las p-formas de una variedad). La curvatura extrínseca resulta ser simétrica en sus dos índices siempre que los vectores de la base tengan derivada de Lie nula cuando se transportan entre ellos ( $e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = e_b^\beta e_{a;\beta}^\alpha$ )

$$n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = -n_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = -n_\alpha e_b^\beta e_{a;\beta}^\alpha = n_{\alpha;\beta} e_b^\beta e_a^\alpha.$$

Es decir,

$$K_{ab} = K_{ba}. \quad (2.20)$$

De lo anterior se sigue que en la definición de la curvatura extrínseca únicamente sobrevive la parte simétrica de la derivada del vector normal,  $n_{(\alpha;\beta)}$ , pero esta es precisamente la derivada de Lie de la métrica en la dirección normal a  $\Sigma$ :

$$K_{ab} = \frac{1}{2} (\mathbb{L}_n g_{\alpha\beta}) e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (2.21)$$

Con esto en mente es evidente que la curvatura extrínseca está muy relacionada con la forma en la que está encajada la hipersuperficie dentro del espaciotiempo, pues depende de cómo cambia la métrica en la dirección normal a la superficie.

La traza de la curvatura extrínseca está dada por

$$K := h^{ab} K_{ab} = n_{;\alpha}^\alpha. \quad (2.22)$$

Hemos dado una interpretación a los dos términos que aparecen del lado derecho de la ecuación 2.16. Para concluir esta parte del capítulo, sustituiremos en dicha ecuación el vector  $A^\alpha = e_a^\alpha (A^c = \delta_a^c)$ :

$$e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - K_{ab} n^\alpha. \quad (2.23)$$

La expresión 2.23 es conocida como la ecuación de Gauss-Weingarten y hace explícito el hecho de que la forma en que está encajada la hipersuperficie (curvatura extrínseca) hace que falle el definir una geometría intrínseca de la hipersuperficie puramente en términos de cantidades inducidas con pull-back o push-forward.

Toda la geometría del espaciotiempo, según la relatividad general, está codificada en la métrica debido a que la conexión es compatible con la derivada covariante, lo cual unifica la estructura métrica y la estructura afín. En este capítulo se desarrolló una derivada covariante que es compatible con la métrica inducida en una hipersuperficie. Sin embargo, de acuerdo a lo que se menciona en el parrafo anterior, la métrica  $h_{ab}$  de la hipersuperficie, en su calidad de cantidad inducida, no define completamente la geometría de la hipersuperficie dentro del espaciotiempo; hace falta considerar la curvatura extrínseca  $K_{ab}$ . En conjunto,  $h_{ab}$  y  $K_{ab}$  definen la geometría de la hipersuperficie.

## Capítulo 3

# Condiciones de juntura

Consideremos una hipersuperficie que parte el espaciotiempo en dos regiones,  $V^+$  y  $V^-$ . ¿Es físicamente posible, en el marco de la teoría de la relatividad general, tener una geometría en  $V^-$  y una geometría totalmente diferente en  $V^+$ ? En el intento por dar respuesta a esta cuestión han surgido las llamadas condiciones de juntura formuladas por G. Darmois en 1927, las cuales a pesar de no ser las únicas son las más útiles debido a su formulación covariante y relativamente sencilla. Es de notar la confusión existente en torno a la equivalencia entre las diferentes condiciones de juntura que se han formulado [15]. En este capítulo desarrollaremos las condiciones de juntura de Darmois y veremos que la discontinuidad en la segunda forma fundamental está asociada con la presencia de materia en el cascarón.

### 3.1. Sistemas de coordenadas

Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie que divide al espaciotiempo en las dos regiones  $V^+$  y  $V^-$ . En  $V^+$  la geometría está descrita por la métrica  $g_{\alpha\beta}^+$  y se puede instalar el sistema de coordenadas  $\{x_+^\alpha\}$ , en  $V^-$  la geometría está descrita por la métrica  $g_{\alpha\beta}^-$  y se puede instalar el sistema de coordenadas  $\{x_-^\alpha\}$ . Los sistemas de coordenadas  $\{x_\pm^\alpha\}$  pueden diferir entre ellos, sin embargo supondremos que existe un tercer sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  que traslapa en  $V^+$  con  $\{x_+^\alpha\}$  y en  $V^-$  con  $\{x_-^\alpha\}$ . Además se asume la existencia de un único sistema de coordenadas  $\{y^a\}$  a ambos lados de la hipersuperficie. Tanto  $x^\alpha$  como  $y^a$  se suponen continuas al pasar de  $V^-$  a  $V^+$ . Por convención,  $n_\alpha$  apunta de  $V^-$  hacia  $V^+$ .

Supongamos ahora que la hipersuperficie es atravesada perpendicularmente por una congruencia de geodésicas espaciales parametrizadas por la distancia propia  $l$ , y ajustamos la parametrización de modo que  $l = 0$  sobre  $\Sigma$ ,  $l < 0$  en  $V^-$  y  $l > 0$  en  $V^+$ . Adaptamos ahora el sistema de coordenadas a la superficie tomando las coordenadas  $x^\alpha = (l, x^a)$ , donde  $l$  es la distancia propia de las geodésicas y  $x^a$  son las coordenadas en las direcciones perpendiculares a

la geodésica. Evidentemente, en este sistema de coordenadas el vector normal estará dado por

$$n_\alpha = \partial_\alpha l. \quad (3.1)$$

Se define la discontinuidad en el tensor A al atravesar  $\Sigma$  como

$$[A] := A(V^+)|_\Sigma - A(V^-)|_\Sigma.$$

Dado que las coordenadas  $x^\alpha$  y  $y^a$  son continuas al pasar de  $V^-$  a  $V^+$ , se sigue directamente que

$$\begin{aligned} [n_\alpha] &= 0 \\ [e_a^\alpha] &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para nuestro desarrollo de las condiciones de juntura de Darmois, se vuelve necesario introducir la función de distribución de Heaviside  $\Theta(l)$  y tres de sus principales propiedades:

$$\Theta(l) = \begin{cases} 1, & l > 0 \\ 0, & l < 0 \\ \text{indeterminado}, & l = 0 \end{cases}$$

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0, \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l), \quad (3.3)$$

donde  $\delta(l)$  es la distribución de Dirac.

### 3.2. Primera condición de juntura

Con ayuda de la distribución de Heaviside podemos expresar la métrica de todo el espaciotiempo en las coordenadas  $x^\alpha$  como[22]

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^-. \quad (3.4)$$

De lo aprendido en relatividad general, al buscar situaciones físicamente posibles resulta razonable pedir en primera instancia una transición suave en la curvatura del espaciotiempo al pasar de  $V^-$  a  $V^+$ . Para calcular la curvatura debemos empezar por derivar la métrica:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \Theta_{,\gamma}(l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta_{,\gamma}(-l)g_{\alpha\beta}^- \\ &= \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \Theta_{,l}(l)(\partial_\gamma l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta_{,l}(-l)(-\partial_\gamma l)g_{\alpha\beta}^- \\ &= \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \delta(l)n_\gamma g_{\alpha\beta}^+ - \delta(l)n_\gamma g_{\alpha\beta}^-. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es decir,

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \delta(l)n_\gamma [g_{\alpha\beta}]. \quad (3.6)$$

El último término en la primer derivada de la métrica produce una divergencia al evaluarla en  $\Sigma$  (debido a la delta de Dirac), lo cual impide un comportamiento

suave del tensor de Riemann (recordemos que este depende de las primeras y segundas derivadas de la métrica). Para eliminar esta divergencia en la curvatura se impone

$$[g_{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.7)$$

Aunque esta no es una expresión covariante pues sólo es válida en las coordenadas  $x^\alpha$ , notemos que es equivalente a

$$g_{\alpha\beta}^+ = g_{\alpha\beta}^-. \quad (3.8)$$

De la ecuación 3.2,  $e_a^{+\alpha} = e_a^{-\alpha} := e_a^\alpha$ , de donde se sigue que la expresión 3.8 es equivalente a

$$g_{\alpha\beta}^+ e_a^\alpha e_b^\beta = g_{\alpha\beta}^- e_a^\alpha e_b^\beta,$$

pero esta última ya es una expresión covariante pues involucra únicamente a la métrica inducida a ambos lados de  $\Sigma$ , la cual es un escalar en el espaciotiempo completo. La primera condición de juntura es entonces:

$$[h_{ab}] = 0. \quad (3.9)$$

### 3.3. Segunda condición de juntura.

De acuerdo con la primera condición de juntura los símbolos Christoffel están dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \{g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\Theta(l)g_+^{\gamma\mu} + \Theta(-l)g_-^{\gamma\mu}\} \{(\Theta(l)g_{\alpha\mu,\beta}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\mu,\beta}^-) + (\Theta(l)g_{\mu\beta,\alpha}^+ \\ &\quad + \Theta(-l)g_{\mu\beta,\alpha}^-) - (\Theta(l)g_{\alpha\beta,\mu}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\mu}^-)\}. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de la distribución de Heaviside descritas en la ecuación (3.3), los términos cruzados se anulan y se obtiene la expresión

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \{\Theta(l)g_+^{\gamma\mu} (g_{\alpha\mu,\beta}^+ + g_{\mu\beta,\alpha}^+ - g_{\alpha\beta,\mu}^+) + \Theta(-l)g_-^{\gamma\mu} (g_{\alpha\mu,\beta}^- + g_{\mu\beta,\alpha}^- - g_{\alpha\beta,\mu}^-)\},$$

lo cual es simplemente

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Theta(l)\Gamma_{\alpha\beta}^{+\gamma} + \Theta(-l)\Gamma_{\alpha\beta}^{-\gamma}. \quad (3.10)$$

Hasta este punto la primera condición de juntura garantiza que no haya divergencias en la curvatura, sin embargo, un cálculo idéntico al de la ec. (3.5), muestra que

$$\Gamma_{\alpha\beta,\delta}^\gamma = \Theta(l)\Gamma_{\alpha\beta,\delta}^{+\gamma} + \Theta(-l)\Gamma_{\alpha\beta,\delta}^{-\gamma} + \delta(l)[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]n_\delta. \quad (3.11)$$

Nuevamente aparece una divergencia en el último término del lado derecho; para eliminarla basta imponer

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}] = 0. \quad (3.12)$$

Pero esta vuelve a ser una expresión válida únicamente en el sistema de coordenadas  $x^{\alpha}$ ; transformarla en una expresión covariante es un poco más sutil.

Notemos primero que  $n_{\alpha,\beta} = \partial_{\beta}\partial_{\alpha}l = 0$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} [n_{\alpha;\beta}] &= [-\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}n_{\gamma}] \\ &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}]n_{\gamma} \end{aligned}$$

La curvatura extrínseca está dada entonces por

$$\begin{aligned} [K_{ab}] &= [n_{\alpha;\beta}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}] \\ &= [n_{\alpha;\beta}]e_a^{\alpha}e_b^{\beta} \\ &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}]n_{\gamma}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}. \end{aligned}$$

La línea de razonamiento es la siguiente:  $[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}] = 0 \iff \Gamma_{\alpha\beta}^{+\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{-\gamma} \iff \Gamma_{\alpha\beta}^{+\gamma}n_{\gamma}e_a^{\alpha}e_b^{\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{-\gamma}n_{\gamma}e_a^{\alpha}e_b^{\beta} \iff [\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}]n_{\gamma}e_a^{\alpha}e_b^{\beta} = 0 \iff [K_{ab}] = 0$ .

La segunda condición de juntura (que garantiza una transición suave en la curvatura al pasar de  $V^{-}$  a  $V^{+}$ ) es

$$[K_{ab}] = 0. \quad (3.13)$$

### 3.4. Tensor de energía momento superficial.

Las dos condiciones de juntura de Darmois,

$$[h_{ab}] = 0 \quad y \quad [K_{ab}] = 0,$$

garantizan una transición suave en el tensor de Riemann al pasar de  $V^{-}$  a  $V^{+}$ . Sin embargo, si la segunda condición falla, la misma teoría de la relatividad general nos permite dar una interpretación física muy natural a la divergencia de la curvatura: La divergencia es causada por una distribución de materia o energía.

Para hacer menos grandes las cuentas, se define

$$\kappa_{\alpha\beta} := [g_{\alpha\beta,\gamma}n^{\gamma}] = [g_{\alpha\beta,\gamma}]n^{\gamma}, \quad (3.14)$$

de donde al multiplicar por  $n_{\gamma}$  se tiene

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = \kappa_{\alpha\beta}n_{\gamma}. \quad (3.15)$$

Reescribimos los símbolos de Christoffel en términos de  $\kappa_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] &= \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}\{g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}\} \\ &= \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}[g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}] \\ &= \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}([g_{\alpha\mu,\beta}] + [g_{\beta\mu,\alpha}] - [g_{\alpha\beta,\mu}]) \\ &= \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}(\kappa_{\alpha\mu}n_\beta + \kappa_{\beta\mu}n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta}n_\mu). \end{aligned}$$

Contrayendo índices, esto se reduce a

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\beta}^\gamma n_\beta + \kappa_{\beta\alpha}^\gamma n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta} n^\gamma). \quad (3.16)$$

Supongamos que la segunda condición falla (la primera condición se mantiene), entonces la derivada de los símbolos de Christoffel está dada por la ecuación (3.11). Insertando esto en el cálculo del tensor de Riemann se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\varepsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon \\ &= (\Theta(l)\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{-\alpha} + \delta(l)[\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]n_\gamma) - (\Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{-\alpha} + \delta(l)[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta) \\ &\quad + (\Theta(l)\Gamma_{\varepsilon\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\varepsilon\gamma}^{-\alpha})(\Theta(l)\Gamma_{\beta\delta}^{+\varepsilon} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\delta}^{-\varepsilon}) \\ &\quad - (\Theta(l)\Gamma_{\varepsilon\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\varepsilon\delta}^{-\alpha})(\Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma}^{+\varepsilon} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma}^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Nuevamente, en virtud de las propiedades de  $\Theta(l)$ , se anulan los términos cruzados. Factorizando las funciones  $\Theta$  y  $\delta$  se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \Theta(l)(\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{+\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{+\alpha} + \Gamma_{\varepsilon\gamma}^{+\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{+\varepsilon} - \Gamma_{\varepsilon\delta}^{+\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{+\varepsilon}) \\ &\quad + \Theta(-l)(\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{-\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{-\alpha} + \Gamma_{\varepsilon\gamma}^{-\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{-\varepsilon} - \Gamma_{\varepsilon\delta}^{-\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{-\varepsilon}) + \delta(l)([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta). \end{aligned}$$

Definiendo  $R_{\beta\gamma\delta}^{\pm\alpha}$  en  $V^\pm$  como de costumbre, tenemos que

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Theta(l)R_{\beta\gamma\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)R_{\beta\gamma\delta}^{-\alpha} + \delta(l)A_{\beta\gamma\delta}^\alpha, \quad (3.17)$$

donde hemos definido el término singular en el tensor de Riemann como

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = [\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta. \quad (3.18)$$

Se contraen índices en (3.17) para obtener el tensor y el escalar de Ricci, y a su vez el tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ . Sustituyendo esto en las ecuaciones de campo de la relatividad general,

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

y siguiendo la línea de razonamiento de este capítulo, es fácil ver que

$$\Theta(l)G_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)G_{\alpha\beta}^- + \delta(l)(A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta}) = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

donde  $A_{\alpha\beta} = A^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$ ,  $A = A^\alpha_\alpha$ . De modo que al separar el tensor de energía-momento en lo que corresponde a la región  $V^+$ ,  $T_{\alpha\beta}^+$ , y lo que corresponde a la región  $V^-$ ,  $T_{\alpha\beta}^-$ , también se debe añadir un término proporcional a  $\delta(l)$ , es decir

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(l)T_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)T_{\alpha\beta}^- + \delta(l)S_{\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

De la ec. (3.19), se asocia a

$$8\pi S_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta} \quad (3.20)$$

con el tensor de energía-momento superficial de  $\Sigma$ . Es decir que el fallo de la segunda condición de juntura se asocia a una distribución de materia superficial que impide que la curvatura extrínseca sea la misma a ambos lados de la hipersuperficie.

Sustituyendo (3.16) en (3.18), se tiene que el término  $\delta$  en el tensor de Riemann es

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{1}{2}(\kappa_\delta^\alpha n_\beta n_\gamma - \kappa_\gamma^\alpha n_\beta n_\delta - \kappa_{\beta\delta} n^\alpha n_\gamma + \kappa_{\beta\gamma} n^\alpha n_\delta). \quad (3.21)$$

Para obtener el término singular en el tensor de Ricci simplemente se contraen índices ( $\alpha = \gamma$ ):

$$A_{\alpha\beta} := A^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2}(\kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \kappa_{\alpha\beta}), \quad (3.22)$$

donde  $\kappa := \kappa_\alpha^\alpha$ . Una contracción más nos devuelve el término divergente en el escalar de curvatura:

$$A := A^\alpha_\alpha = \kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \kappa. \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.22) y (3.23) en (3.20) podemos escribir

$$16\pi S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \kappa_{\alpha\beta} - (\kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \kappa)g_{\alpha\beta}, \quad (3.24)$$

Ahora estamos en condiciones de hacer fácilmente el producto entre  $S_{\alpha\beta}$  y  $n^\alpha$ :

$$S_{\alpha\beta} n^\alpha = \frac{1}{16\pi}(\kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta n^\alpha + \kappa_{\mu\beta} n^\mu - \kappa n_\beta - \kappa_{\alpha\beta} n^\alpha - \kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu n_\beta + \kappa n_\beta) = 0.$$

Por lo tanto  $S_{\alpha\beta}$  es un tensor tangente a  $\Sigma$  y en consecuencia satisface las ecs (2.12) y (2.13) (véase comentario previo a dichas ecuaciones). Calculemos el tensor asociado en el espacio tangente a  $\Sigma$  usando la ec. (3.24):

$$\begin{aligned} S_{ab} &\equiv S_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = \frac{1}{16\pi}(-\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \kappa)h_{ab}) \\ &= \frac{1}{16\pi}(-\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - (k_{\mu\nu}(g^{\mu\nu} - h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) - \kappa)h_{ab}) \\ &= \frac{1}{16\pi}(-\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - (\kappa - h^{mn} \kappa_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu - \kappa)h_{ab}) \\ &= \frac{1}{16\pi}(-\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta + h^{mn} \kappa_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu h_{ab}) \end{aligned}$$

Para simplificar esta relación, notemos que al multiplicar (3.16) por  $n_\gamma$  se obtiene

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]n_\gamma &= \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\gamma}n_\beta + \kappa_{\beta\gamma}n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta}n_\gamma)n^\gamma \\ &= \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\gamma}n_\beta n^\gamma + \kappa_{\beta\gamma}n_\alpha n^\gamma - \kappa_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

y ya se obtuvo que  $[K_{ab}] = [n_{\alpha;\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = -[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]n_\gamma e_a^\alpha e_b^\beta$ , por lo tanto

$$[K_{ab}] = \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.25)$$

La ec. (3.25) nos permite reescribir de manera elegante el tensor de energía momento como

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi}([K_{ab}] - [K]h_{ab}). \quad (3.26)$$

Es más clara ahora la interpretación de el salto en la curvatura extrínseca al atravesar  $\Sigma$  como la manifestación de una capa delgada de materia sobre  $\Sigma$  que induce un tensor de energía momento.

En conclusión, las condiciones de Juntura de Darmois e Israel,

$$[h_{ab}] = 0 = [K_{ab}],$$

garantizan una transición suave en la geometría del espaciotiempo entre las dos regiones del espaciotiempo,  $V^-$  y  $V^+$ , separadas por una hipersuperficie  $\Sigma$ . Si la curvatura extrínseca no es la misma a ambos lados, se revela la existencia de una capa (infinitesimalmente) delgada de materia distribuida sobre  $\Sigma$ , la cual a su vez explica la singularidad en la transición entre las dos regiones del espaciotiempo.



# Capítulo 4

## Cascarón

El colapso gravitacional de una estrella cargada puede ser sumamente complicado de describir. Sin embargo, el formalismo recién desarrollado nos permite abordar el colapso gravitacional de un cascarón constituido de la misma materia de la que estaría compuesta la estrella pero en cuyo interior no hay materia. La situación física de una estrella es evidentemente diferente a la de un cascarón debido, entre otras cosas, a que la estrella presenta una presión en su interior, mientras que el cascarón sólo padece una presión superficial. Si consideramos un polvo sin presión esta diferencia pareciera desaparecer y suena muy plausible obtener, con el formalismo aplicado a cascarones, resultados semejantes a los que se obtendrían para la situación más realista de una estrella rellena de materia. Veamos qué resultados arroja este formalismo en comparación a lo que se espera de lo visto en la sección de singularidades.

### 4.1. Planteamiento físico del cascarón

Un cascarón es una hipersuperficie física hecha de una distribución de materia cuya proyección en el espacio es una esfera, es decir, para cualquier valor fijo de la coordenada temporal, el intervalo cuadrado corresponde al de la 2 esfera;  $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ . El cascarón que analizaremos está hecho de polvo cargado eléctricamente, sin presión y es homogéneo e isotrópico. Bajo estas condiciones el cascarón tendrá la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) con constante de curvatura positiva, la cual, en las coordenadas  $y^a = (\tau, \theta, \varphi)$ , toma la forma:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) = -d\tau^2 + a^2(\tau)d\Omega^2; \quad (4.1)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es el elemento de ángulo sólido y  $\tau$  el tiempo propio del cascarón. Así, la métrica del cascarón tiene componentes

$$h_{\tau\tau} = -1, \quad h_{\theta\theta} = a^2(\tau), \quad h_{\varphi\varphi} = a^2(\tau)\sin^2(\theta). \quad (4.2)$$

Por otro lado, el tensor de energía momento sobre el cascarón está dado por

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b, \quad (4.3)$$

donde  $\sigma$  es la densidad de materia y  $u^a$  la cuadrivelocidad del cascarón.

Al estar compuesto de materia, el cascarón sufrirá un colapso gravitacional, sin embargo asumiremos también que la simetría esférica se mantiene durante todo el colapso.

## 4.2. Exterior del cascarón

Dada la simetría esférica y la carga eléctrica, el exterior del cascarón estará determinado por la métrica de Reissner-Nordstrom, es decir que en coordenadas  $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} ds_+^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &\equiv -f_+(r) dt^2 + f_+^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde se ha definido

$$f_+(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

Dicho de otra forma, las componentes no nulas de la métrica (y su inversa) son

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -f_+, & g_{rr} &= f_+^{-1}, & g_{\theta\theta} &= r^2, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\theta \\ g^{tt} &= -f_+^{-1}, & g^{rr} &= f_+, & g^{\theta\theta} &= r^{-2}, & g^{\varphi\varphi} &= r^{-2} \sin^{-2}\theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Debido al colapso, las coordenadas  $t$  y  $r$  del cascarón se vuelven dependientes del tiempo propio  $\tau$ , es decir,  $t|_\Sigma = t|_\Sigma(\tau)$  y  $r|_\Sigma = r|_\Sigma(\tau)$ ; es conveniente entonces definir:

$$t|_\Sigma(\tau) \equiv T(\tau), \quad r|_\Sigma(\tau) \equiv R(\tau); \quad (4.6)$$

por otro lado, las coordenadas angulares son constantes debido a la simetría del colapso:

$$\theta|_\Sigma = \theta, \quad \varphi|_\Sigma = \varphi.$$

Así pues, los vectores base de la hipersuperficie  $e_a^\alpha$  no nulos son

$$e_\tau^t = \dot{T}(\tau) \quad e_\tau^r = \dot{R} \quad (4.7)$$

$$e_\theta^\theta = 1 \quad e_\varphi^\varphi = 1, \quad (4.8)$$

donde el punto representa la derivada respecto a  $\tau$ . A partir de esto podemos calcular las componentes distintas de cero de la métrica inducida en el cascarón desde el exterior,  $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ ,

$$h_{\tau\tau} = g_{tt} e_\tau^t{}^2 + g_{rr} e_\tau^r{}^2, \quad h_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} e_\theta^\theta{}^2, \quad h_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi} e_\varphi^\varphi{}^2,$$

donde se sobreentiende la evaluación de la métrica sobre  $\Sigma$ . Haciendo las respectivas sustituciones y definiendo  $f_+|_\Sigma = F_+$  obtenemos las componentes

$$h_{\tau\tau} = -F_+\dot{T}^2 + F_+^{-1}\dot{R}^2, \quad h_{\theta\theta} = R^2, \quad h_{\varphi\varphi} = R^2 \text{Sin}^2(\theta), \quad (4.9)$$

por lo tanto la métrica inducida sobre el cascarón desde el exterior es

$$ds_+^2|_\Sigma = -(F_+\dot{T}^2 - F_+^{-1}\dot{R}^2)d\tau^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (4.10)$$

Comparando (4.10) y (4.2) se obtiene la primera condición de juntura (en la siguiente sección igualaremos esto mismo a las componentes inducidas desde el interior)

$$F_+\dot{T}^2 - F_+^{-1}\dot{R}^2 = 1; \quad R(\tau) = a(\tau) \quad (4.11)$$

o equivalentemente, multiplicando por  $F_+$ ,

$$F_+\dot{T} = \sqrt{\dot{R}^2 + F_+} \equiv \beta_+(R, \dot{R}). \quad (4.12)$$

Por otro lado, de la ec. (4.7) y las relaciones de ortogonalidad  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$  se demuestra que

$$n_\theta = 0, \quad n_\varphi = 0 \quad y \quad n_t\dot{T} + n_r\dot{R} = 0 \quad (\Rightarrow n_t = -n_r\dot{R}/\dot{T}). \quad (4.13)$$

Por lo tanto la condición de normalización,  $g^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = 1$ , es

$$\begin{aligned} 1 &= g^{tt}n_t^2 + g^{rr}n_r^2 \\ &= -F_+^{-1}n_t^2 + F_+ \left( \frac{n_t\dot{T}}{\dot{R}} \right)^2, \end{aligned}$$

donde además se usaron las componentes de la métrica descritas en (4.5). Multiplicando por  $F_+$  y despejando  $n_t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} n_t &= - \left( \frac{F_+}{(F_+\dot{T})^2/\dot{R}^2 - 1} \right)^{1/2} \\ &= - \left( \frac{F_+\dot{R}^2}{(F_+\dot{T})^2 - \dot{R}^2} \right)^{1/2} \\ &= - \left( \frac{F_+\dot{R}^2}{\dot{R} + F_+ - \dot{R}^2} \right)^{1/2} \\ &= -\dot{R}, \end{aligned}$$

donde se usó la ec. (4.12) en la penúltima igualdad y se escogió el signo menos para que el vector normal apunte en la dirección positiva de la coordenada temporal (pues siendo un colapso,  $\dot{R} < 0$ ). Por lo tanto  $n_t = -\dot{R}$  y con esto obtenemos que

$$n_\alpha = (-\dot{R}, \dot{T}, 0, 0). \quad (4.14)$$

Teniendo las componentes del vector normal estamos en condiciones de calcular la segunda forma fundamental del cascarón inducida desde el exterior. Notemos que, debido a las relaciones de ortogonalidad,  $0 = (n_\alpha e_\tau^\alpha)_{;\beta} = n_{\alpha;\beta} e_\tau^\alpha + n_\alpha e_{\tau;\beta}^\alpha$ , es decir,  $n_{\alpha;\beta} e_\tau^\alpha = -n_\alpha e_{\tau;\beta}^\alpha$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau} &= -n_\alpha e_{\tau;\beta}^\alpha e_\tau^\beta \\ &= -n_t e_{\tau;\beta}^t e_\tau^\beta - n_r e_{\tau;\beta}^r e_\tau^\beta. \end{aligned}$$

Usando los símbolos de Christoffel no nulos para Schwarzschild [9] (las componentes no nulas son las mismas que las de Reissner-Nordström) se encuentra una expresión para la primer derivada:

$$\begin{aligned} -n_t e_{\tau;\beta}^t e_\tau^\beta &= \dot{R} \left( e_{\tau,\beta}^t e_\tau^\beta + \Gamma^t_{\beta\alpha} e_\tau^\alpha e_\tau^\beta \right) \\ &= \dot{R} \left( \dot{T}_{,\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} + F^{-1} F' \dot{T} \dot{R} \right) \\ &= \dot{R} \left( \dot{T}_{,\tau} + F^{-1} F' \dot{T} \dot{R} \right) \\ &= \dot{R} \left( \ddot{T} + F^{-1} F' \dot{T} \dot{R} \right), \end{aligned}$$

donde la prima sobre F representa la derivada respecto a r. La segunda derivada es

$$\begin{aligned} -n_r e_{\tau;\beta}^r e_\tau^\beta &= -\dot{T} \left( e_{\tau,\beta}^r e_\tau^\beta + \Gamma^r_{\beta\alpha} e_\tau^\alpha e_\tau^\beta \right) \\ &= -\dot{T} \left( \ddot{R} + \frac{1}{2} F F' \dot{T}^2 + \frac{1}{2} F (F^{-1})' \dot{R}^2 \right) \end{aligned}$$

Insertando estos dos términos en  $K_{\tau\tau}$ , se obtiene

$$K_{\tau\tau} = \dot{R} \ddot{T} + F^{-1} F' \dot{T} \dot{R}^2 - \dot{T} \ddot{R} - \frac{1}{2} F F' \dot{T}^3 - \frac{1}{2} F (F^{-1})' \dot{R}^2 \dot{T}. \quad (4.15)$$

Después un poco de álgebra usando la primera condición de juntura (ver Apéndice A), se obtiene

$$K_{\tau\tau} = -\frac{\dot{\beta}_\perp}{\dot{R}}. \quad (4.16)$$

Por otro lado,

$$K_{\theta\theta} = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = n_{\theta;\theta} = -\Gamma^\alpha_{\theta\theta} n_\alpha = -\Gamma^r_{\theta\theta} n_r = F R \dot{T}, \quad (4.17)$$

y

$$K_{\varphi\varphi} = n_{\varphi;\varphi} = -\Gamma^r_{\varphi\varphi} n_r = F R S e n^2(\theta) \dot{T}. \quad (4.18)$$

Usando la métrica (4.2) para subir un índice a las expresiones (4.16), (4.17) y (4.18), se encuentran las componentes de la curvatura extrínseca en su forma más simple:

$$K_{+\tau}^\tau = \frac{\dot{\beta}_\perp}{\dot{R}}, \quad K_{+\theta}^\theta = \frac{\beta_\perp}{R}, \quad K_{+\varphi}^\varphi = \frac{\beta_\perp}{R}. \quad (4.19)$$

### 4.3. Interior del Cascarón

El interior del cascarón, dada la simetría esférica y el vacío en el que se encuentra, está determinado por la métrica de Minkoski, la cual tiene la forma

$$ds_-^2 = -f_-(r)dt^2 + f_-^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

donde convenientemente hemos definido  $f_-(r) = 1$  pues de esta forma podemos hacer una calca de los cálculos en el exterior del cascarón, es decir

$$\dot{T}^2 - \dot{R}^2 = 1, \quad (4.20)$$

y por lo tanto, la primera condición de juntura desde el interior es

$$\dot{T} = \sqrt{1 + \dot{R}^2} \equiv \beta_-(\dot{R}). \quad (4.21)$$

El vector normal tendrá la misma forma y las componentes de la curvatura extrínseca serán

$$K_{-\tau}^\tau = \frac{\dot{\beta}_-}{\dot{R}}, \quad K_{-\theta}^\theta = \frac{\beta_-}{R}, \quad K_{-\varphi}^\varphi = \frac{\beta_-}{R}. \quad (4.22)$$

Tenemos todo lo necesario para deducir la dinámica del cascarón.

### 4.4. Ecuación de Movimiento

Insertando las ecuaciones (4.19) y (4.22) en la ec. (3.26), se encuentra que

$$\begin{aligned} S^\tau_\tau &= -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} - \left( \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} + 2\frac{\beta_+}{R} - 2\frac{\beta_-}{R} \right) \right). \\ S^\theta_\theta &= S^\varphi_\varphi = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\beta_+ - \beta_-}{R} - \left( \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} + 2\frac{\beta_+}{R} - 2\frac{\beta_-}{R} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Simplificando estas expresiones,

$$S^\tau_\tau = \frac{\beta_+ - \beta_-}{4\pi R} \quad y \quad S^\theta_\theta = S^\varphi_\varphi = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} + \frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \right). \quad (4.24)$$

Pero el cascarón está hecho de polvo sin presión por lo que su tensor de energía momento está dado por la expresión (4.3) donde la cuadrivelocidad es

$$u^a = \frac{\partial y^a}{\partial \tau} = (1, 0, 0)$$

y nuevamente usamos la métrica (4.2) para bajar índices.

Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$-\sigma = \frac{\beta_+ - \beta_-}{4\pi R} \quad y \quad 0 = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} + \frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \right). \quad (4.25)$$

De la segunda ecuación se sigue que

$$\frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} = -\frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \Rightarrow \int \frac{-dR}{R} = \int \frac{d(\beta_+ - \beta_-)}{\beta_+ - \beta_-}$$

Al integrar esta expresión tenemos que

$$(\beta_+ - \beta_-)R = cte \equiv -m, \quad (4.26)$$

lo cual no tiene una interpretación directa, sin embargo, al sustituir en la primera ecuación de (4.25), resulta (y justifica la sugerente definición de la constante) que

$$4\pi R^2 \sigma = m (= cte), \quad (4.27)$$

es decir que la cantidad  $4\pi R^2 \sigma$  permanece constante a lo largo del colapso, y dado que es el producto del área del cascarón con su densidad de materia, nos invita a pensar en la masa en reposo del sistema a la cual le llamamos  $m$ .

Volviendo a la ecuación (4.26), sustituyendo las definiciones (4.12) y (4.21) obtenemos que

$$\sqrt{1 + \dot{R}^2} - \sqrt{F_+ + \dot{R}^2} = \frac{m}{R}$$

Entonces,

$$\sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{m}{R} = \sqrt{F_+ + \dot{R}^2},$$

elevando al cuadrado y sustituyendo la definición de  $F_+ = 1 - 2M/R + Q^2/R^2$  se obtiene

$$1 + \dot{R}^2 + \frac{m^2}{R^2} - \frac{2m}{R} \sqrt{1 + \dot{R}^2} = 1 + \dot{R}^2 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}.$$

Multiplicando por  $R/2$ , se obtiene la ecuación de movimiento:

$$M = m \sqrt{1 + \dot{R}^2} + \frac{Q^2 - m^2}{2R}. \quad (4.28)$$

La ecuación (4.28) da pie a la interpretación de  $M$  como la energía total del sistema pues se expresa como la suma de la energía total relativista (primer término del lado derecho) y la potencial eléctrica y gravitacional (segundo término). En esta expresión se involucran todas las constantes que caracterizan el sistema: la masa gravitacional  $M$ , la carga eléctrica total del cascarón  $Q$  y la masa en reposo del cascarón  $m = 4\pi R^2 \sigma$ ; así como las cantidades dinámicas de interés:  $R$  y  $\dot{R}$ .

La solución general de la ecuación (4.28) está dada por

$$\int \frac{mR}{\sqrt{(M^2 - m^2)R^2 + M(m^2 - Q^2)R + \frac{1}{4}(m^2 - Q^2)^2}} dR = -\tau + cte, \quad (4.29)$$

donde el signo menos del lado derecho corresponde al hecho de que se trata de un colapso. Usando las condiciones iniciales se puede expresar el valor de

$m$  en términos de  $M$  y  $Q$ . Por ejemplo, si imponemos que el cascarón parta del reposo ( $\dot{R} = 0$ ) en el radio inicial (digamos  $R_0 = 100$ ), se cumple que  $M = m + \frac{Q^2 - m^2}{200}$ , es decir  $m = 100 \pm \sqrt{10000 - 200M + Q^2}$ . La gráfica para estas condiciones iniciales se muestra en las figuras 4.1 y 4.2<sup>1</sup>, donde se observa que el cascarón colapsa a un punto (pues  $R = 0$  para un tiempo propio finito) independientemente de si se cumple  $Q > M$  o  $Q < M$ ; esto significa que el espaciotiempo que resulta del colapso tiene una singularidad en el origen.

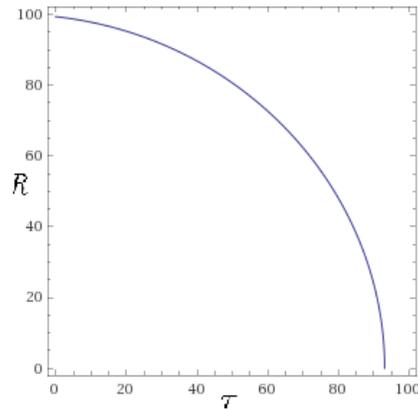


Figura 4.1: Radio del cascarón en función de su tiempo propio según la ecuación de movimiento (4.28) para los valores de  $Q = 10$  y  $M = 15$ .

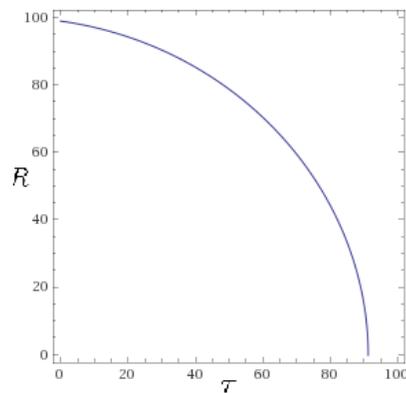


Figura 4.2: Radio del cascarón en función de su tiempo propio según la ecuación de movimiento (4.28) para los valores de  $Q = 30$  y  $M = 20$ .

<sup>1</sup>Insertando unidades, la figura 4.1 es para los valores  $\sqrt{G/c^4\epsilon_0}Q = 10m$  y  $GM/c^2 = 15m$  mientras 4.2 es para  $\sqrt{G/c^4\epsilon_0}Q = 30m$  y  $GM/c^2 = 20m$ .

En el siguiente capítulo se buscarán las condiciones bajo las cuales esta singularidad es producida sin que en el proceso se obtenga un horizonte, es decir, las condiciones suficientes para producir una singularidad desnuda.

# Capítulo 5

## Cascarón desnudo

Como ya se mencionó en el primer capítulo, la hipótesis de la censura cósmica propuesta por Roger Penrose en 1969 [21], en su formulación débil, afirma que toda singularidad, salvo el Big-Bang, debe estar cubierta por un horizonte de eventos; en otras palabras, las singularidades desnudas no se pueden presentar en la naturaleza. Una motivación para esta conjetura surge de reflexionar lo siguiente: Dado que las singularidades son entes no comprensibles con la relatividad general, la teoría con la que se pretende explicar el espaciotiempo externo a una singularidad, ninguna región causalmente conectada con un observador físico puede ser afectada por la singularidad, pues de no ser así se pierde el carácter determinista de la teoría. Sin embargo existen ejemplos de espaciotiempos en los que se produce una singularidad desnuda. En este último capítulo mostraremos, usando la ecuación de movimiento y una partícula de prueba, (y tras un primer intento infructuoso en el que se usa otro criterio) que un cascarón cargado eléctricamente también puede dar origen a una singularidad desnuda.

### 5.1. Criterio de asintoticidad

En el primer capítulo se mostró que, para un observador externo en infinito, una partícula cayendo a un agujero negro se acerca asintóticamente al horizonte de eventos pero jamás lo cruza. La expresión analítica de este hecho toma la forma

$$\frac{dt}{dr} \xrightarrow{r \rightarrow r_h} \infty, \quad (5.1)$$

donde  $r_h$  es el radio al cual se encuentra el horizonte de eventos, cuyo valor se encontró calculando las raíces de la ecuación  $g_{tt} = 0$ . Dado que identificamos una singularidad desnuda con la ausencia de un horizonte de eventos, se propone buscar una expresión para el radio al cual se presenta este fenómeno usando las ecuaciones de el cascarón para, de acuerdo a tal expresión, establecer las condiciones bajo las cuales no es posible formar un horizonte de eventos y obtener así una singularidad desnuda.

En particular, el comportamiento asintótico al horizonte será observado en las partículas mismas que componen al cascarón que colapsa. La cuadrivelocidad de una de estas partículas está dada por

$$F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1. \quad (5.2)$$

Por otro lado, despejando  $\dot{R}^2$  de la ecuación (4.25) se tiene que

$$\dot{R}^2 = \left( \frac{M}{m} - \frac{Q^2 - m^2}{2mR} \right)^2 - 1. \quad (5.3)$$

Ahora se divide la ecuación de la cuadrivelocidad entre  $\dot{R}^2$  y se sustituye la ecuación 5.3, obteniendo que

$$F \left( \frac{\dot{T}}{\dot{R}} \right)^2 - F^{-1} = \left( \left( \frac{M}{m} - \frac{Q^2 - m^2}{2mR} \right)^2 - 1 \right)^{-1}. \quad (5.4)$$

Identificamos ahora  $\frac{\dot{T}}{\dot{R}} = \frac{dT}{dR}$ . Tras un poco de álgebra, la relación anterior se convierte en

$$\left( \frac{dT}{dR} \right)^2 = \frac{F + \left( \frac{M}{m} - \frac{Q^2 - m^2}{2mR} \right)^2 - 1}{F^2 \left( \left( \frac{M}{m} - \frac{Q^2 - m^2}{2mR} \right)^2 - 1 \right)}. \quad (5.5)$$

Este resultado ya es alentador: el radio en el que  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty$ , se obtiene igualando el denominador a cero, cuya primer solución es  $F = 0$ , pero  $F = -g_{tt}$ , es decir, una solución usando este criterio para encontrar un horizonte de eventos coincide con lo obtenido en el primer capítulo. Por otro lado, el resultado de igualar a cero el término entre paréntesis del denominador es

$$R_h = \frac{Q^2 - m^2}{2(M - m)}. \quad (5.6)$$

En primera instancia este resultado parece interesante pues se obtiene una expresión sencilla, en términos de los parámetros  $M$  y  $Q$ , para localizar un horizonte de eventos. Desde esta perspectiva, esta expresión es semejante a la de la ecuación (1.10) e invita a pensar en la posibilidad de que un cascarón produce un horizonte de eventos no identificado en el análisis del capítulo 1. Siguiendo esta línea de razonamiento, este resultado nos permite indentificar una singularidad desnuda derivada del cascarón con las condiciones  $Q < m < M$  o con  $Q > m > M$  pues en este caso la solución de la ecuación (5.6) es un radio negativo, es decir, no existe en la naturaleza. Para darle sustento a este razonamiento sería necesario mostrar que estas condiciones son físicamente posibles según la ecuación (4.25). Sin embargo, sólo comparando con esa misma ecuación, se observa que la ecuación (5.6) refiere al radio inicial que se obtiene de la ecuación (4.25) cuando el cascarón parte del reposo ( $\dot{R} = 0$ ), lo cual tiene mucho sentido pues si parte del reposo, también se cumple  $\frac{dR}{dT} = 0$ , es decir,  $\frac{dT}{dR} = \infty$ . Esto indica que este desarrollo en realidad no aporta un método útil para identificar la formación de una singularidad desnuda.

## 5.2. Criterio de hipersuperficie nula

Una transformación conforme se caracteriza por preservar ángulos. Por lo tanto en un diagrama de Penrose, siendo este el resultado de una transformación conforme de un espaciotiempo, aquellas curvas y superficies que tengan carácter nulo (es decir, una inclinación de  $45^\circ$ ) representan curvas que en el espaciotiempo original también son nulas. Teniendo esto en cuenta, se sigue de las figuras 1.3 y 1.4 que la hipersuperficie del horizonte de eventos del espaciotiempo de Reissner-Nordström (cuando existe) es nula. Usaremos ahora este criterio para identificar el radio al que se puede descubrir un horizonte de eventos alrededor de la singularidad producida por el colapso del cascarón.

Consideremos una partícula sobre el cascarón moviéndose tangencialmente. Una partícula sobre una superficie nula sólo puede moverse a la velocidad de la luz, es decir que su cuadrivelocidad es  $u^2 = 0$ . De modo que cuando la hipersuperficie del cascarón coincida con un horizonte de eventos, la partícula necesariamente deberá moverse a la velocidad de la luz y la norma de su cuadrivelocidad será nula.

La cuadrivelocidad de esta partícula, en las coordenadas del cascarón, está dada por

$$v^a = \frac{d}{d\lambda} (\tau, \theta, \phi) = (v^\tau, v^\theta, v^\varphi), \quad (5.7)$$

donde  $\lambda$  es el tiempo propio de la partícula, el cual no necesariamente es el mismo que el del cascarón ( $\tau$ ). Por simplicidad, supongamos que la partícula se mueve sobre el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  a velocidad constante, cumpliéndose entonces  $v^\varphi = c_\varphi = cte$  y  $v^\theta = 0$ . En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} v^2 &= h_{ab}v^av^b = h_{\tau\tau} \left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + h_{\varphi\varphi}c_\varphi^2 \\ &= - \left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + R^2c_\varphi^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde se usaron las componentes de la métrica en las coordenadas del cascarón. Supongamos que existe un radio  $R_h$  tal que en ese punto  $v^2 = 0$ , entonces se cumple

$$\left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = R_h^2c_\varphi^2 \equiv C_R^2. \quad (5.9)$$

Por lo tanto se puede escribir que

$$v^2 = -C_R^2 + R^2C_\varphi^2 \quad (5.10)$$

Usando ahora la primera condición de juntura desde el exterior, es decir, usando que  $F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1$ , tenemos que

$$v^2 = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)C_R^2 + R^2C_\varphi^2 \quad (5.11)$$

Por lo tanto, la condición  $v^2 = 0$  puede ser escrita como

$$-F\dot{T}^2C_R^2 + F^{-1}\dot{R}^2C_R^2 + C_\varphi^2R^2 = 0. \quad (5.12)$$

Buscamos ahora soluciones de la forma

$$\begin{aligned} F\dot{T}^2 &= C_1 \\ F^{-1}\dot{R}^2 &= C_2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que satisfacen  $-C_R^2 C_1 + C_R^2 C_2 + C_R^2 = 0$ .

De las ecuaciones (5.13) se sigue directamente que

$$F\dot{T}^2 = \frac{C_1}{C_2} F^{-1}\dot{R}^2. \quad (5.14)$$

Sustituyendo esto último en la relación  $F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1$  se obtiene que

$$\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) F^{-1}\dot{R}^2 = 1, \quad (5.15)$$

es decir

$$\dot{R}^2 = \frac{C_2}{C_1 - C_2} F \equiv CF. \quad (5.16)$$

Comparando esto con la ecuación de movimiento (5.3), y sustituyendo la definición de  $F$ , se tiene que

$$C \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right) = \left(\frac{M}{m} - \frac{Q^2 - m^2}{2mR}\right)^2 - 1. \quad (5.17)$$

Las raíces de la ecuación (5.17) tienen una expresión muy larga por lo que este es un buen punto para dar valores a algunas de las constantes que hasta aquí han aparecido. La expresión para las raíces se simplifica considerablemente si tomamos

$$C = -1/2. \quad (5.18)$$

Antes de escribir las raíces dadas por esta elección, veamos qué implicaciones tiene. El escoger  $C = -1/2$  es, por definición,

$$\frac{C_2}{C_1 - C_2} = -\frac{1}{2}, \quad (5.19)$$

lo cual implica  $C_1 = -C_2$ . Pero estas constantes deben satisfacer la ecuación  $-C_1 C_R^2 + C_2 C_R^2 + C_R^2 = 0$ . Entonces se tiene que  $C_R^2(2C_2 + 1) = 0$ , es decir que  $C_2 = -1/2$  y por lo tanto  $C_1 = 1/2$ . En principio no hay nada que impida tomar estos valores para las constantes que aparecen en la ecuación (5.13).

Bajo estas suposiciones, el radio en el que la partícula de prueba se mueve a la velocidad de la luz (raíces de la ec. (5.17)), es decir, el punto en el que el cascarón coincide con un horizonte de eventos, es

$$R_h = \frac{MQ^2 \pm \sqrt{M^2 Q^4 - (M^2 - \frac{m^2}{2})(Q^4 + m^4)}}{2M^2 - m^2}. \quad (5.20)$$

Tenemos ahora la expresión que nos permite buscar las condiciones bajo las cuales el colapso del cascarón da origen a una singularidad desnuda. Estas condiciones surgen de forzar el radio de la ecuación (5.20) a ser imaginario, es decir, el término dentro de la raíz debe ser negativo (análogamente al término dentro de la raíz de la ecuación (1.10)). Esto, tras un poco de álgebra conduce a

$$Q^4 < m^2 (2M^2 - m^2). \quad (5.21)$$

La región del plano  $M - Q$  que satisface esta desigualdad se muestra sombreada en la figura 5.1.

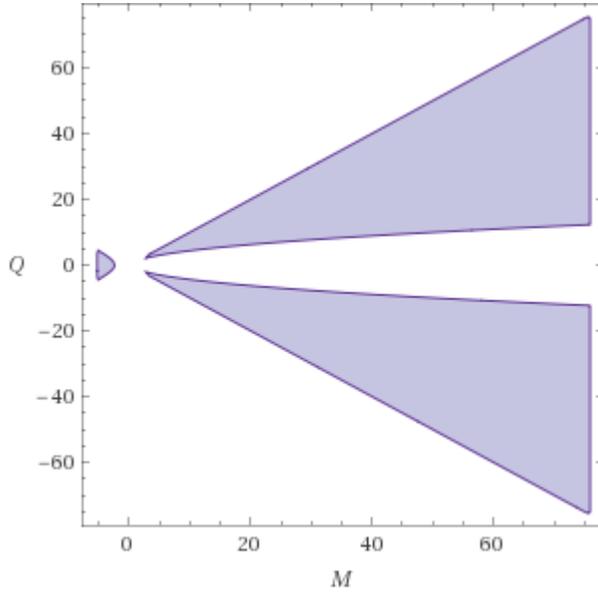


Figura 5.1: Regiones en las que se satisface la desigualdad (5.21); condicionado a que  $C = -1/2$ , un cascarón cuyos parámetros  $M$  y  $Q$  están en la zona sombreada darán origen a una singularidad desnuda.

Se observa que la condición es simétrica respecto al signo de la carga eléctrica (como es de esperarse) y que la formación de una singularidad desnuda derivada del cascarón, bajo los criterios señalados, es plausible debido a la amplia región del plano que satisface la desigualdad 5.21 (zona sombreada). Además, al graficar la ecuación de movimiento (4.29) con algunos valores de  $M$  y  $Q$  que estén dentro de la región sombreada, digamos  $Q = 30$  y  $M = 50$  (y fijando la constante de integración,  $cte = 40$  en este caso), se observa que en efecto el cascarón colapsa hasta  $R = 0$  en un tiempo propio finito  $\tau \approx 123$ , formándose así una singularidad (véase figura 5.2). Esto indica que, bajo los criterios señalados en este trabajo, el colapso gravitacional de un cascarón de polvo sin presión cargado eléctricamente puede formar una singularidad desnuda.

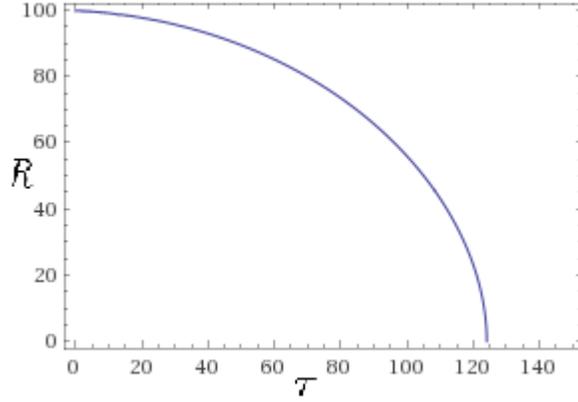


Figura 5.2: Radio de un cascarón con  $Q = 30$  y  $M = 50$  en función de su tiempo propio. El sistema parte del reposo en  $R = 100$ . Bajo estas condiciones, aplicando los criterios desarrollados en este trabajo, no se produce un horizonte de eventos. Dado que el cascarón colapsa a  $R = 0$  en un tiempo propio finito, este proceso daría origen a una singularidad desnuda.

Es muy importante, sin embargo, también tener en cuenta que estas condiciones son derivadas de imponer  $C = -1/2$ , lo cual se hizo por mera conveniencia algebraica, sin tener en cuenta justificación física alguna. Es posible entonces que la desigualdad (5.21) no sea válida en un sistema real; y en su lugar habría que buscar unas condiciones que obedezcan un valor físicamente sustentado de  $C$ .

# Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo era estudiar la posibilidad de que el colapso gravitacional de un cascarón culmine en una singularidad desnuda.

Siguiendo el formalismo de cascarones desarrollado por W. Israel en su artículo de 1969, donde aplica las condiciones de juntura primeramente formuladas por Darmois, se demostró que esto es posible en el caso de un cascarón infinitamente delgado constituido por un polvo homogéneo sin presión y cargado eléctricamente en cuyo interior el espaciotiempo es plano y está descrito por la métrica de Minkowski, y cuyo exterior se encuentra en electrovacío dando lugar a la métrica de Reissner-Nordström. Además el cascarón parte del reposo.

Nuestro método para detectar el horizonte de un agujero negro derivado del cascarón, o “cascarón negro”, consiste en analizar la norma de la 3-velocidad de una partícula de prueba que se mueve a lo largo del cascarón durante el proceso de colapso. Cuando la partícula se mueve en el plano ecuatorial a velocidad azimutal constante, encontramos el radio al cual la partícula se mueve a la velocidad de la luz y asociamos este fenómeno al momento en el que el cascarón coincide con una hipersuperficie nula, es decir, con el horizonte de eventos. Una vez que se tiene la expresión analítica para el radio del horizonte, con el fin de simplificar las cuentas se hace una elección de una constante, lo cual es crucial para el resultado final. Las condiciones para que el radio del horizonte sea imaginario son las condiciones para que se forme una singularidad desnuda a partir del cascarón, o un “cascarón desnudo”. Esta condición se expresa por medio de la desigualdad (5.21). Las regiones del plano  $M - Q$  que satisfacen este criterio se muestran en la figura 5.1.

En la figura 5.2 se muestra el colapso de un cascarón cuya carga y masa satisfacen la desigualdad (5.21). Se observa que el cascarón colapsa hasta  $R = 0$ , lo que significa que, bajo los criterios aquí señalados y tomando  $C = -1/2$ , el proceso del colapso de un cascarón de polvo sin presión cargado eléctricamente puede dar origen a una singularidad desnuda.

Ya existe una variedad de trabajos donde se dan ejemplos de singularidades sin horizonte de eventos [13, 1, 25], (aunque no se había utilizado el modelo de un cascarón para tales fines). La aportación de este trabajo es que aún con el modelo más sencillo de un colapso gravitacional (cascarones) es posible producir una singularidad desnuda. La posibilidad de que las singularidades desnudas ocurran de manera natural en el universo, para cuya detección se han derivado ya algunos métodos que consisten en utilizar lentes gravitacionales o corrimiento

al rojo  $[20, 8]$ , queda abierta.

La elección muy particular de  $C = -1/2$  no tiene a priori ningún argumento de por qué es físicamente razonable o por qué no, y es muy importante tener en cuenta que el resultado obtenido se basó en esta elección por lo que un siguiente paso puede ser buscar un valor de  $C$  físicamente sustentado.

## Apéndice A

# Cálculo de la curvatura extrínseca

Partimos de la expresión (4.15):

$$K_{\tau\tau} = \dot{R}\ddot{T} + F^{-1}F'\dot{T}\dot{R}^2 - \dot{T}\ddot{R} - \frac{1}{2}FF'\dot{T}^3 - \frac{1}{2}F(F^{-1})'\dot{R}^2\dot{T}.$$

Notemos primero que como  $F^{-1}F = 1$ , entonces  $(F^{-1}F)' = 0$  y por lo tanto  $F(F^{-1})' = -F^{-1}F'$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau} &= \dot{R}\ddot{T} - \dot{T}\ddot{R} - \frac{1}{2}FF'\dot{T}^3 + \frac{3}{2}F^{-1}F'\dot{T}\dot{R}^2 \\ &= \frac{1}{\dot{R}} \left( \dot{R}^2\ddot{T} - \dot{R}\dot{T}\ddot{R} - \frac{1}{2}F\dot{T}^3 + \frac{3}{2}F^{-1}\dot{T}\dot{R}^2 \right). \end{aligned}$$

Recordemos ahora que  $F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1$ , es decir  $F\dot{T}^2 = 1 + F^{-1}\dot{R}^2$ . Sustituyendo esto obtenemos que

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau} &= \frac{1}{\dot{R}} \left( \dot{R}^2\ddot{T} - \dot{R}\dot{T} - \frac{1}{2}\dot{T}\dot{R} \left( 1 + F^{-1}\dot{R}^2 \right) + \frac{3}{2}F^{-1}\dot{T}\dot{R}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\dot{R}} \left( \dot{R}^2\ddot{T} - \dot{R}\dot{T}\ddot{R} - \frac{1}{2}\dot{T}\dot{R} + F^{-1}\dot{T}\dot{R}^2 \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, por definición  $\beta(R, \dot{R}) = F\dot{T} = \sqrt{\dot{R}^2 + F}$ . Derivando en cada término se tiene que

$$\dot{\beta} = \dot{T}\dot{R} + F\ddot{T} = \frac{2\dot{R}\ddot{R} + \dot{F}}{2\beta}.$$

Manipulando los dos últimos términos, es fácil ver que  $\beta \left( \dot{T}\dot{R} + F\ddot{T} \right) - \frac{\dot{F}}{2} = \dot{R}\ddot{R}$ . Sustituyendo ahora esto en la última expresión de la curvatura extrínseca se

tiene que

$$\begin{aligned}
 K_{\tau\tau} &= \frac{1}{\dot{R}} \left( \dot{R}^2 \ddot{T} - F \dot{F} \dot{T}^3 - F^2 \dot{T}^2 \ddot{T} + \frac{1}{2} \dot{F} \dot{T} - \frac{1}{2} \dot{F} \dot{T} + F^{-1} \dot{F} \dot{T} \dot{R}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\dot{R}} \left( \ddot{T} (\dot{R}^2 - F^2 \dot{T}^2) + \dot{F} \dot{T} (F^{-1} \dot{R}^2 - F \dot{T}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{\dot{R}} \left( F \ddot{T} (F^{-1} \dot{R}^2 - F \dot{T}^2) - \dot{F} \dot{T} \right) \\
 &= \frac{-1}{\dot{R}} (F \ddot{T} + \dot{F} \dot{T}) \\
 &= -\frac{\dot{\beta}}{\dot{R}}.
 \end{aligned}$$

De modo que

$$K_{\tau\tau} = -\frac{\dot{\beta}}{\dot{R}}.$$

# Bibliografía

- [1] F. Ahmed, F. Rahaman, and S. Sarkar. Black holes/naked singularities in four-dimensional non-static space-time and energy-momentum distributions. 2018.
- [2] M. Calvani and L. Nobili. *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B*, 51:247, 1979.
- [3] S. M. Carroll. Lecture notes on general relativity.
- [4] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, 2004.
- [5] S. Chandrasekhar. The highly condensed configurations of a stellar mass. 1931.
- [6] F. de Felice. *Nature(London)*, 273:429, 1978.
- [7] A. Einstein. The Formal Foundation of the General Theory of Relativity. 1914.
- [8] G. N. Gyulchev and S. S. Yazadjiev. Gravitational Lensing by Rotating Naked Singularities. *Phys. Rev.*, D78:083004, 2008.
- [9] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [10] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [11] W. Israel. Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity. *Il Nuovo Cimento*, 44(1):1–14, 1966.
- [12] P. S. Joshi. *Gravitational collapse and spacetime singularities*. Cambridge University Press, 2007.
- [13] P. S. Joshi and I. H. Dwivedi. Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous tolmán-bondi dust cloud collapse. *Phys. Rev. D*, 47:5357–5369, Jun 1993.
- [14] R. P. Kerr. *Phys. Rev. Lett*, 11:237, 1963.

- [15] K. Lake. Revisiting the darmois and lichnerowicz junction conditions.
- [16] T. Maudlin. *Philosophy of Physics: Space and Time*. Princeton University Press, 2012.
- [17] H. A. C. Montero. Un estudio sobre los agujeros negros estacionarios. 2014.
- [18] D. Nunez, H. Quevedo, and D. Sudarsky. How short can the hair of a black hole be? 1995.
- [19] N. Ortiz, O. Sarbach, and T. Zannias. Observational distinction between black holes and naked singularities: the role of the redshift function. *Classical and Quantum gravity*, 32(24), November 2015.
- [20] N. Ortiz, O. Sarbach, and T. Zannias. Shadow of a naked singularity. *Phys. Rev. D*, 92:044035, Aug 2015.
- [21] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cimento*, 1:252–276, 1969.
- [22] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [23] D. J. Raine. Mach's Principle in General Relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 171:507–528, 1975.
- [24] W. Rudnicki. *Acta Phys. B*, 29:981, 1998.
- [25] J. M. M. Senovilla and R. Vera. Cylindrically symmetric dust space-time. *Class. Quant. Grav.*, 17:2843, 2000.
- [26] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.