Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

α-dominación

T E S I S

que para obtener el título de:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

Laura Figueroa Resa

TUTORA:
Dra. Rita Esther Zuazua Vega

Ciudad Universitaria, 2019
Cd. Mx.

1. Datos del alumno
Figueroa
Resa
Laura
55 64 42 97
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413150158

2. Datos del tutuor
Dra
Rita Esther
Zuazua
Vega

3. Datos del sinodal 1
Dra
María del Rocío
Sánchez
López

4. Datos del sinodal 2
Dr
Ilán Abraham
Goldfeder
Ortiz

5. Datos del sinodal 3
Dr
Julián Alberto
Fresán
Figueroa

6. Datos del sinodal 4
M en C
Loiret Alejandría
Dosal
Trujillo

7. Datos del trabajo escrito
α-dominación
76 p
2019

Resumen

Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica simple con n vértices, m aristas y sin vértices aislados. Para alguna α con $0 < \alpha \leq 1$ y un conjunto $S \subseteq V_G$, decimos que S es un conjunto *α-dominante* de G si para todo $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. El mínimo de las cardinalidades de todos los conjuntos S que cumplen con esa propiedad es llamado el *número de α-dominación* de G y se denota por $\gamma_\alpha(G)$.

En esta tesis, desarrollamos a detalle algunas secciones de tres artículos: el primero es el de "α-Domination" de J. E. Dunbar, D. G. Hoffman, R. C. Laskar y L. R. Markus [8] el cual abarca del capítulo 2 al 6, donde introducimos el concepto de *α-dominación*, discutimos cotas para $\gamma_{1/2}(G)$ para la gráfica del Rey y damos cotas para $\gamma_\alpha(G)$ para una α en general, $0 < \alpha \leq 1$; el segundo artículo es el de "Some remarks on α-Domination" de Franz Dahme, Dieter Rautenbach y Lutz Volkmann [4] el cual abarca el capítulo 7, donde realizamos algunas observaciones sobre α-dominación; por último, en el capítulo 8, estudiamos los efectos de la eliminación de un vértice (concepto introducido por Nader Jafari Rad y Lutz Volkmann [17]) en la α-dominación de G.

Dedicación

A mis padres y hermana.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesora de tesis, la Dra. Rita Esther Zuazua Vega por su dedicación, paciencia, enseñanzas, consejos y apoyos brindados; es un honor ser su tesista.

También quiero agradecer a todos los profesores de cada una de las materias que cursé y, particularmente, al Dr. Ernesto Juvenal Barrios Zamudio.

A mi familia. Sin su apoyo no habría llegado a este punto.

Índice general

Capítulo 1

Definiciones básicas

Una **gráfica** G consiste de un conjunto finito no vacío V_G de objetos llamados **vértices** y un conjunto A_G, cuyos objetos se llaman **aristas**, que consiste de subconjuntos de dos elementos del conjunto V_G. Se acostumbra escribir a G como $G = (V_G, A_G)$.

El **orden** de una gráfica G es el número de vértices de G y el **tamaño** de G es el número de aristas de G.

Se acostumbra representar una gráfica con un diagrama, donde cada vértice se representa con un pequeño círculo y cada arista se representa con una línea entre dos vértices.

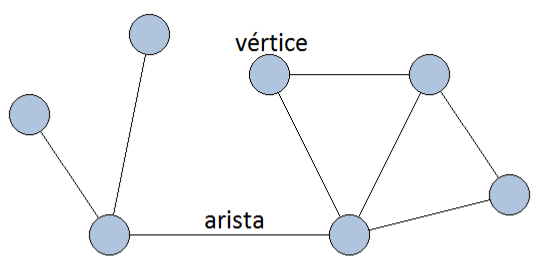


Figura 1.1: Gráfica

Si $\{u, v\} \in A(G)$, escribiremos a la arista $e = \{u, v\}$ como $e = uv$ y diremos que u y v son **adyacentes** o que son **vecinos**.

Si $e = uv$ es una arista de G, decimos que e **incide** en u y en v. También decimos que los **vértices extremos** de e son u y v.

Si dos aristas inciden en el mismo vértice, se dice que las aristas son **adyacentes**.

La **vecindad abierta** $N_G(v)$ de un vértice $v \in V_G$ es el conjunto de vértices que son adyacentes a v, es decir, $N_G(v) = \{u \in V_G \mid uv \in A_G\}$.

La **vecindad cerrada** $N_G[v]$ de V_G es $N_G(v) \cup \{v\}$.

Similarmente, si $S \subseteq V_G$, definimos la **vecindad abierta** de S (respectivamente, **vecindad cerrada**) como $N_G(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ (respectivamente, $N_G[S] = N(S) \cup S$).

Para $v \in V_G$, el **grado de** v, escrito $d(v)$ (o $d_G(v)$ si se necesita identificar a la gráfica G), es el número de vecinos de v en G, $d(v) = |N(v)|$. El **grado mínimo** de G es $\delta(G) = \text{mín}\{d(v) \mid v \in V_G\}$ y el **grado máximo** de G es $\Delta(G) = \text{máx}\{d(v) \mid v \in V_G\}$.

Sea G una gráfica de orden n y $v \in V_G$, entonces:

- Si $d(v) = 0$, v se llama **aislado**.
- Si $d(v) = 1$, v se llama **hoja**.
- Si $d(v) = n - 1$, v se llama **universal**.
- Si $e = uv \in A_G$ y $d(v) = 1$, u se llama **vértice soporte**.
- Sean $\Omega = \{v \mid v \text{ es una hoja de } G\}$ y $u \in V_G$. Si $|N(u) \cap \Omega| = 1$, u se llama **soporte débil**. Si $|N(u) \cap \Omega| > 1$, u se llama **soporte fuerte**.

A continuación, enunciaremos algunas familias de gráficas.

Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica de orden n con $V_G = \{v_1, \ldots, v_n\}$,

- Si $n = 1$, la gráfica se llama **trivial**.
- Si para todo $\{v_i, v_j\} \subseteq V_G$ se tiene que $v_i v_j \in A_G$, la gráfica se llama **completa** y se denota por K_n.

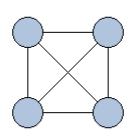


Figura 1.2: K_4

- Si $A_G = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$, la gráfica se llama **trayectoria** de longitud $n-1$ y se denota por $P_n = v_1v_2\cdots v_n$.

- Si $A_G = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$, la gráfica se llama **ciclo** de longitud n y se denota por $C_n = v_1v_2\cdots v_nv_1$.

- Si para todo $v \in V_G$ tenemos que $d(v) = r$, se dice que G es una gráfica r-**regular**.

- Si $A_G = \{v_1v_j \mid 2 \leq j \leq n\}$, G se llama **estrella** con centro en v_1 y se denota por $K_{1,n-1}$.

Sean $G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$ gráficas, decimos que H es una subgráfica de G, $H \leq G$, si $V_H \subseteq V_G$ y $A_H \subseteq A_G$.

Sea $H \leq G$, entonces:

- Si $V_H \neq V_G$ o $A_H \neq A_G$ se dice que H es **subgráfica propia** de G.

- Si $V_H = V_G$, entonces H se llama **subgráfica generadora** de G.

- Sea $S = V_H$ y supongamos que $uv \in A_H$ si y sólo si $uv \in A_G$, se dice que H es la subgráfica de G **inducida** por S y escribimos $H = G[S]$.

Dada una gráfica G, podemos asociarle una nueva gráfica, $\bar{G}$, llamada el **complemento** de G, tal que $V_{\bar{G}} = V_G$ y $uv \in A_{\bar{G}}$ si y sólo si $uv \notin A_G$.

Sean $u, v \in V_G$, una uv-**trayectoria** es una subgráfica $P_k < G$ de la forma $P_k = uv_1v_2\ldots v_{k-2}v$, $k \geq 2$.

Se define la **distancia entre dos vértices** u, v de la gráfica G como:

$$\mathrm{dist}_G(u,v) = \begin{cases} \infty, & \text{si no existen } uv\text{-trayectorias en } G \\ \text{mín}\{\text{número de aristas en } P_k | P_k \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que:

$$\mathrm{dist}_G(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{si } u = v \\ 1, & \text{si } uv \in A_G. \end{cases}$$

Una gráfica G es **conexa** si para todo par de vértices $x, y \in V_G$, existe una xy-trayectoria en G.

Supongamos que G no es conexa. Consideremos una partición de $V_G = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$ tal que $G_i = G[V_i]$, $1 \leq i \leq s$, es una gráfica conexa maximal (es decir, G_i es conexa y no contiene aristas que incidan en los vértices que no pertenezcan a G_i). Entonces escribiremos $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_s$ y decimos que cada una de las subgráficas inducidas G_i, $1 \leq i \leq s$, es una **componente conexa** de G.

Un conjunto de vértices $S \subseteq V_G$ se llama **independiente** si $A_{G[S]} = \emptyset$.

Con estas definiciones podemos recordar otras familias importantes de gráficas:

- Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

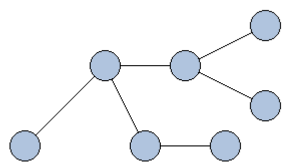


Figura 1.3: Árbol

- Una gráfica **cactus** es una gráfica conexa en donde cualesquiera dos ciclos en la gráfica no tienen aristas en común. Equivalentemente, es una gráfica conexa en donde cualesquiera dos ciclos tienen a lo más un vértice en común.

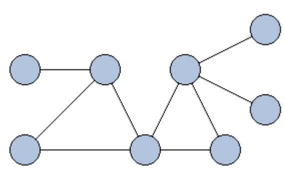


Figura 1.4: Cactus

- Una gráfica G se dice que es **bipartita** si existe una partición de $V_G = \{V_1, V_2\}$ tal que V_1 y V_2 son conjuntos independientes en G.

- Una gráfica bipartita con partición de sus vértices $\{V_1, V_2\}$ tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$ se llama **bipartita completa**, denotada por $K_{r,s}$, si para todo $u \in V_1$ y para todo $v \in V_2$, se tiene que $uv \in A_G$.

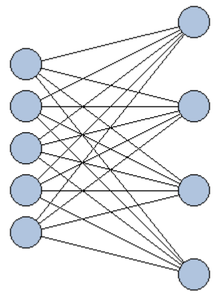


Figura 1.5: $K_{5,4}$

Observe que la gráfica estrella $K_{1,n-1}$, definida previamente, es una gráfica bipartita completa con $|V_1| = 1$ y $|V_2| = n - 1$.

El **número de cubierta por vértices de** G, $\alpha_0(G)$, es el mínimo de las cardinalidades de los conjuntos $S \subseteq V_G$ tales que cada arista de G tiene al menos uno de sus vértices extremos en S.

Un conjunto $S \subseteq V_G$ se dice que **domina** a la gráfica G (o es un **conjunto dominante** de G) si para cada vértice $v \in V_G$ se tiene que $|N[v] \cap S| \geq 1$ (equivalentemente, si para toda $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq 1$).

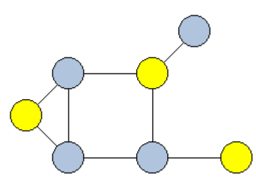


Figura 1.6: Los vértices amarillos forman un conjunto dominante

El **número de dominación** de G, $\gamma(G)$, es el mínimo de las cardinalidades de todos los conjuntos dominantes de G.

Si S es un conjunto de cardinalidad mínima que domina a G, a S lo llamamos un **γ-conjunto** (o $\gamma(G)$-conjunto cuando pueda existir confusión).

Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica de orden n con $\delta(G) \geq 1$. Consideremos $S \subseteq V_G$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha \leq 1$. El conjunto S se llama **α-dominante** si para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$.

El **número de α-dominación** de G, $\gamma_\alpha(G)$, es el mínimo de las cardinalidades de todos los conjuntos α-dominantes de G.

Para cualquier gráfica G y para cualquier α, con $0 < \alpha \leq 1$, si S es un conjunto de cardinalidad mínima que α-domina a G, a S lo llamamos un γ_α-**conjunto** (o $\gamma_\alpha(G)$-conjunto cuando pueda existir confusión).

Una **coloración propia** de una gráfica G es una función que asigna colores a los vértices de G de tal forma que ningún par de vértices adyacentes tengan el mismo color.

El **número cromático** de una gráfica G es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear propiamente a G.

Sean G una gráfica, $v \in V_G$ y $S = V_G - \{v\}$. Denotamos por $G - v$ a la subgráfica de G inducida por S ($G - v := G[S]$). Un vértice $v \in G$ es un **vértice de corte** de G si $G - v$ tiene más componentes conexas que G.

Un **bloque** de una gráfica es una subgráfica conexa maximal sin vértices de corte.

Sean $E \subseteq A_G$ y $V \subseteq V_G$. Se dice que E **satura** los vértices de V si para todo vértice v en V existe alguna arista e en E tal que v es vértice extremo de e.

Un **conjunto independiente de aristas**, también llamado **apareamiento**, en una gráfica G es un subconjunto $M \subseteq A_G$ tal que ningún par de aristas en M inciden en un mismo vértice. Un **apareamiento perfecto** es un apareamiento que satura todos los vértices de la gráfica.

Sea G una gráfica y $P \subseteq V_G$. Decimos que P es un **empaquetamiento de** G si para todo $\{u, v\} \subseteq P$ se cumple que $N[u] \cap N[v] = \emptyset$. Se le conoce como **número de empaquetamiento** al mayor número k tal que existe un empaquetamiento P con $|P| = k$; se denota por $p(G)$.

La operación **subdivisión para una arista** $uv \in A_G$ es eliminar la arista uv de la gráfica G, agregar un nuevo vértice w y agregar dos aristas nuevas uw y wv.

Una **estrella subdividida** se obtiene de una estrella con al menos dos aristas, subdividiendo cada arista exactamente una vez.

La **corona**, $cor(H)$, de una gráfica H es la gráfica obtenida de H al añadir a cada vértice de H una arista y un vértice tal que el grado de este último sea 1 en la gráfica $cor(H)$.

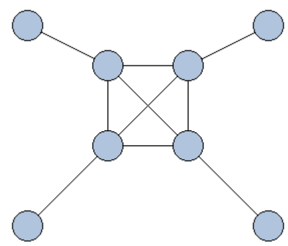


Figura 1.7: Corona de K_4

Para un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto S en una gráfica G y un vértice $x \in S$, si $S - \{x\}$ es un conjunto α-dominante de $G - x$, entonces denotamos $\mathbf{pn}_\alpha(x, S) = \{x\}$.

Una gráfica G es **crítica por vértices en cuanto a dominación** o simplemente **γ-crítica por vértices** si al eliminar cualquier vértice, el número de dominación disminuye.

Decimos que una gráfica G es **crítica por vértices en cuanto a α-dominación** o simplemente **γ_α-crítica por vértices** si al eliminar cualquier vértice, el número de α-dominación disminuye.

El **diámetro** de una gráfica $G = (V_G, A_G)$ se define como $\max\{dist(u, v) \mid u, v \in V_G\}$ y se denota por diám(G).

Capítulo 2

Introducción a la α-dominación

En este capítulo introducimos el concepto de α-dominación, presentamos la motivación del problema y desarrollamos el estudio de α-dominación para trayectorias, ciclos, gráficas completas y bipartitas completas.

2.1. Motivación del problema

En 1995, David Woolbright [8] propuso el siguiente acertijo:

Acomodar guardias y prisioneros en un tablero de 6×6 de tal manera que todas las casillas estén ocupadas y que cada prisionero esté rodeado de al menos el mismo número de guardias que de prisioneros, es decir, que al menos la mitad de sus vecinos sean guardias. La vecindad de una casilla es el conjunto de casillas que se encuentran al movernos vertical, horizontal o diagonalmente una casilla. Mark Liatti [8] mostró que la mínima cardinalidad sobre los conjuntos que cumplen esta propiedad es 14, como observamos en la figura 2.1.

Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica con n vértices, m aristas y sin vértices aislados. Consideremos un tablero de ajedrez de $s \times t$. La *gráfica del Rey* $K[s \times t]$ se forma de la siguiente manera: cada vértice representa una casilla del tablero de ajedrez y dos vértices son adyacentes en la gráfica si y sólo si las casillas representadas por estos vértices son una jugada (un movimiento) del Rey en el tablero de ajedrez. Recordemos que un Rey se puede mover solamente una casilla, ya sea horizontal, vertical o diagonalmente.

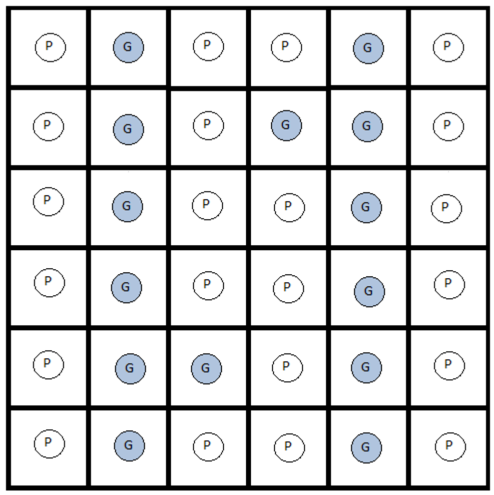


Figura 2.1: Acertijo de Woolbright

En el lenguaje de teoría de gráficas, el acertijo propuesto por Woolbright se puede escribir como:

Sean G una gráfica y $S \subseteq V_G$ tal que para todo $v \in V_G - S$, se tiene que $|N_G(v) \cap S| \geq |N_G(v) \cap (V_G - S)|$. Decimos que S es un **conjunto de Woolbright** de G.

Se define el **número de Woolbright** de G como $w(G) = \text{mín}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto de Woolbright de } G\}$. Resolver el acertijo mencionado equivale a encontrar el número de Woolbright de la gráfica del Rey $K[6 \times 6]$.

Recordemos los siguientes conceptos:

Un conjunto $S \subseteq V_G$ se dice que *domina* a la gráfica G (o es un conjunto dominante de G) si para cada vértice $v \in V_G$ se tiene que $|N[v] \cap S| \geq 1$ (equivalentemente, si para toda $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq 1$). El mínimo de las cardinalidades de los conjuntos dominantes de G es el *número de dominación de* G y se denota por $\gamma(G)$. Un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(G)$ es un $\gamma(G)$-*conjunto*.

Al agregar condiciones al concepto de dominación, se ha dado lugar a un gran número de nuevos parámetros en la teoría de gráficas. Uno de ellos es el de α-dominación que es el corazón de este trabajo.

Definición. Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica de orden n con $\delta(G) \geq 1$. Consideremos $S \subseteq V_G$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha \leq 1$. El conjunto S se llama **α-dominante** si para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. El **número de α-dominación** de G, $\gamma_\alpha(G)$, es el mínimo de las cardinalidades de todos los conjuntos α-dominantes de G. Un conjunto α-dominante de cardinalidad $\gamma_\alpha(G)$ se llama un **γ_α-conjunto**.

Observación *Si $\alpha = \frac{1}{2}$, un conjunto es α-dominante si para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \frac{1}{2}|N(v)|$, es decir, $|N(v) \cap S| \geq |N(v) \cap (V_G - S)|$. Por lo tanto, el número de α-dominación de G es una generalización del número de Woolbright de G.*

Terminamos esta sección mostrando la relación entre $\gamma(G)$ y $\gamma_\alpha(G)$.

Notemos que si $S \subseteq V_G$ es un conjunto α-dominante, entonces para todo vértice $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. Como $0 < \alpha \leq 1$, $|N(v) \cap S|$ está en los enteros positivos y $d(v) \geq 1$, entonces $|N(v) \cap S| \geq 1$. Es decir, todo conjunto α-dominante de G es un conjunto dominante de G, y por lo tanto:

Lema 1 *Para toda gráfica $G = (V_G, A_G)$ y para toda α, con $0 < \alpha \leq 1$, se tiene que $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$.*

Observemos que no todo conjunto dominante es α-dominante. Por ejemplo, sean $G = K_3$ y $\alpha = \frac{2}{3}$. Como se muestra en la figura 2.2, el conjunto $S = \{ \circ \}$ es un conjunto dominante. Sin embargo, S no es $\frac{2}{3}$-dominante para K_3 porque para todo $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| = 1 < \frac{4}{3} = \frac{2}{3}|N(v)|$.

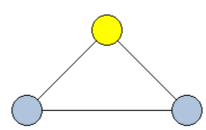


Figura 2.2: K_3

Observación *Para toda gráfica G de orden n sin vértices aislados y $\alpha \in (0, 1]$, se tiene que $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq n - 1 < n$.*

2.2. α-dominación de familias de gráficas

A continuación, enunciaremos resultados para gráficas específicas.

Proposición 2 *Si P_n es una trayectoria con n vértices, entonces*

a)
$$\gamma_\alpha(P_n) = \lceil n/3 \rceil \quad si \;\; 0 < \alpha \leq 1/2,$$

b)
$$\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor \quad si \;\; 1/2 < \alpha \leq 1.$$

Demostración:

Sea $V_G = V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de vértices de P_n. En [16] se muestra que $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, para todo $n \geq 3$. Para todo vértice v en P_n, tenemos dos casos: $d(v) = 1$ o $d(v) = 2$.

(a) Por demostrar que $\gamma_\alpha(P_n) = \lceil n/3 \rceil$ si $0 < \alpha \leq 1/2$. Sea $S \subseteq V_G$ un conjunto dominante de P_n. Esto quiere decir que para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq 1$ que es la misma condición necesaria y suficiente para que S sea un conjunto α-dominante de P_n cuando $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

(b) Por demostrar que $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ si $1/2 < \alpha \leq 1$. Sea $S \subseteq V_G$ un conjunto α-dominante de P_n. Esto quiere decir que para todo $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)|$. Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, entonces $|N(v) \cap S| \geq 1$ si $d(v) = 1$, y $|N(v) \cap S| \geq 2$ si $d(v) = 2$.

Si $n = 2k$ o $n = 2k+1$, $S = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k}\}$ es un conjunto α-dominante con $|S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (figuras 2.3 y 2.4). Veamos que S es mínimo. Supongamos que existe un conjunto, D, α-dominante con $|D| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Si $n = 2k$, $|D| \leq k - 1$ y $|V_G - D| \geq k + 1$, entonces para α-dominar a $V_G - D$ se necesitan al menos $2(k-1)+2$ aristas que salgan de $V_G - D$ hacia D (lo mínimo que puede pasar es que el primer y el último vértice de la trayectoria estén en $V_G - D$, por lo que solamente una arista saldría de cada uno de ellos, y de los demás vértices en $V_G - D$ $(k-1)$ saldrían dos aristas). Pero el número máximo de aristas que pueden salir de D hacia $V_G - D$ es $2(k-1)$ (máximo dos aristas por cada vértice en D). Por lo tanto, D no puede α-dominar a $V_G - D$.
- Si $n = 2k+1$ y $|D| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$, entonces $|D| \leq k-1$ y $|V_G - D| \geq k+2$. Para que D α-domine a $V_G - D$ se necesitan al menos $2k + 2$ aristas que salgan de $V_G - D$ hacia D. Pero el número máximo de aristas que pueden salir de D hacia $V_G - D$ es $2(k-1)$. Por lo tanto, D no puede α-dominar a $V_G - D$.

Así, $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ con $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

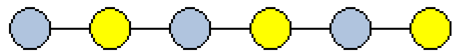


Figura 2.3: P_6

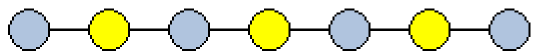


Figura 2.4: P_7

■

Proposición 3 *Si C_n es un ciclo con n vértices, entonces*

a)
$$\gamma_\alpha(C_n) = \lceil n/3 \rceil \quad si \;\; 0 < \alpha \leq 1/2,$$

b)
$$\gamma_\alpha(C_n) = \lceil n/2 \rceil \quad si \;\; 1/2 < \alpha \leq 1.$$

Demostración:

Sea $V_G = V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de vértices de C_n. En [16] se muestra que $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, para todo $n \geq 3$. Para todo vértice v en C_n, tenemos que $d(v) = 2$.

(a) Por demostrar que $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ si $0 < \alpha \leq 1/2$. Sea $S \subseteq V_G$ un conjunto dominante de C_n, esto implica que para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq 1$ que es la misma condición necesaria y suficiente para que S sea un conjunto α-dominante de C_n cuando $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ pues $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)| \geq \alpha \cdot 2$ si y sólo si $|N(v) \cap S| \geq 1$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

(b) Por demostrar que $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ si $1/2 < \alpha \leq 1$. Sea $S \subseteq V_G$ un conjunto α-dominante con $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1/2$, esto implica que para todo $v \in V_G - S$ se tiene que $|N(v) \cap S| \geq 2$.

Es claro que si tomamos $S = \{v_2, v_4, \ldots, v_n\}$ para $n = 2k$ o $S = \{v_2, v_4, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ para $n = 2k+1$, entonces S es un conjunto α-dominante (figuras 2.5 y 2.6). En ambos casos, $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Demostremos que $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \gamma_\alpha(C_n)$. Sea D un conjunto α-dominante de C_n.

- Si $n = 2k$ y $|D| < \lceil \frac{n}{2} \rceil = k$, entonces $|V_G - D| \geq k+1$, lo que implica que para α-dominar a $V_G - D$ se necesitan al menos $2(k+1)$ aristas que salgan de $V_G - D$ hacia D. Pero el número máximo de aristas que pueden salir de D hacia $V_G - D$ es $2(k-1)$. Por lo tanto, D no puede α-dominar a $V_G - D$.

- Si $n = 2k+1$ y $|D| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k+1$, entonces $|D| \leq k$ y $|V_G - D| \geq k+1$. Para que D α-domine a $V_G - D$ se necesitan al menos $2(k+1)$ aristas que salgan de $V_G - D$ hacia D. Pero el número máximo de aristas que pueden salir de D hacia $V_G - D$ es $2k$. Por lo tanto, D no puede α-dominar a $V_G - D$.

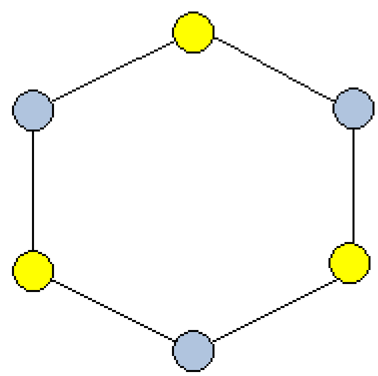


Figura 2.5: C_6

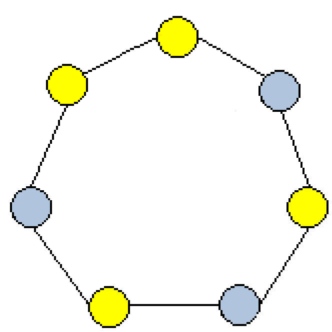


Figura 2.6: C_7

■

Proposición 4 *Si K_n es la gráfica completa con n vértices, entonces*

$$\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil.$$

Demostración:

Para cualquier α, con $0 < \alpha \leq 1$, sea $G = K_n$ y sea $S \subseteq V_G$ un conjunto α-dominante, es decir, para todo vértice $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. Como K_n es completa, entonces para todo vértice $v \in V_G$, $d(v) = n-1$, es decir, $|N(v)| = n-1$. Por lo tanto, para todo vértice $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha(n-1)$ lo que implica que $|S| \geq \alpha(n-1)$. Ahora, sea $D \subseteq V_G$ tal que $|D| = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Si $v \in V_G - D$, entonces $|N(v) \cap D| = \lceil \alpha(n-1) \rceil \geq \alpha(n-1) = \alpha |N(v)|$, por lo que D es un conjunto α-dominante. Así, $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$.

■

Proposición 5 *Si $K_{m,n}$ es una gráfica bipartita completa con $1 \leq m \leq n$, entonces*

$$\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \min\{\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil, m\}.$$

Demostración:

Sea $\{V_1, V_2\}$ la partición de $V(K_{m,n})$ en conjuntos independientes tal que $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$. Para todo vértice $v \in V(K_{m,n})$ tenemos dos casos: $v \in V_1$ o $v \in V_2$. Si $v \in V_1$, entonces $d(v) = n$, es decir, $|N(v)| = n$. Si $v \in V_2$, entonces $d(v) = m$, es decir, $|N(v)| = m$.

Notemos que V_1 es un conjunto α-dominante ya que para todo vértice $v \in V_G - V_1$, es decir, para todo vértice $v \in V_2$ se cumple $m = |N(v) \cap V_1| \geq \alpha |N(v)| = \alpha m$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(K_{m,n}) \leq m$.

Suponiendo que $\gamma_\alpha(K_{m,n}) < m$:

Sea S un γ_α-conjunto de $K_{m,n}$ tal que $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \subseteq V_1$ y $S_2 \subseteq V_2$. Si $v \in V_1$, entonces $|N(v) \cap S_2| \geq \alpha |N(v)|$, pero $N(v) \subseteq V_2$ por lo que $N(v) \cap S_2 = S_2$ y $|N(v)| = n$. Así, $|S_2| = \lceil \alpha n \rceil$. Análogamente, Si $v \in V_2$, entonces $|N(v) \cap S_1| \geq \alpha |N(v)|$, pero $N(v) \subseteq V_1$ por lo que $N(v) \cap S_1 = S_1$ y $|N(v)| = m$. Así, $|S_1| = \lceil \alpha m \rceil$. Como $S = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, entonces $|S| = |S_1| + |S_2| = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$.

Así, $\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \min\{\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil, m\}$.

■

Capítulo 3

Resultados preliminares respecto a $\gamma_\alpha(G)$

Nos interesa estudiar la relación entre el parámetro de α-dominación y otros parámetros relacionados con dominación. Existen más de 80 tipos de dominación y parámetros relacionados con dominación (véase [16]). Por ejemplo, un tipo de dominación introducido por Fink y Jacobson [10] es el de r-dominación, con $r \in \mathbb{N}$. Un conjunto $S \subseteq V_G$ es *r-dominante* si para cada $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq r$. Esto es, cada vértice que no está en el conjunto *r-dominante*, S, tiene al menos r de sus vecinos en S. El mínimo de las cardinalidades de los conjuntos r-dominantes de una gráfica G se llama $\gamma_r(G)$.

Afirmación *Sea G una gráfica k-regular, entonces para $\alpha = r/k$, $\gamma_\alpha(G) = \gamma_r(G)$.*

Demostración:

Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica k-regular. Para $\alpha = r/k$, un conjunto $S \subseteq V_G$ es α-dominante si para todo vértice $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq \frac{r}{k}|N(v)|$. Si G es una gráfica k-regular, entonces para todo vértice $v \in V_G$, $d(v) = k$, es decir, $|N(v)| = k$. Así, $|N(v) \cap S| \geq \frac{r}{k}|N(v)|$ si y sólo si $|N(v) \cap S| \geq \frac{r}{k} \cdot k = r$. Es decir, S es $\frac{r}{k}$-dominante si y sólo si S es r-dominante.

■

Dunbar *et al.* [7] introdujeron el concepto de dominación con signo. Sea G una gráfica. Una función $f : V_G \to \{-1, 1\}$ se llama una *función dominante* *con signo* si para cada vértice $v \in V_G$, $f(N[v]) \geq 1$, donde $f(N[v]) = \sum_{x \in N[v]} f(x)$. El número de dominación con signo $\gamma_S(G)$ es igual a:

$$\gamma_S(G) = \text{mín}\left\{ \sum_{v \in V_G} f(v) | f \text{ es una función dominante con signo de } G \right\}.$$

Notemos que si f es una función dominante con signo en una gráfica G, para cada $u \in V_G$ con $f(u) = -1$, más de la mitad de los vecinos de u deben tener peso 1. Esto es, para cada u tal que $f(u) = -1$, podemos partir a $N[u] = \{U^+, U^-\}$ donde $U^+ = \{y \in N(u) \mid f(y) = 1\}$ y $U^- = \{z \in N[u] \mid f(z) = -1\}$. Así, U^+ es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante en $G[U]$, donde $U = U^+ \cup U^-$, y como se cumple para todo $u \in V_G$ tal que $f(u) = -1$, entonces $\cup U^+$ es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante en G. Por lo tanto, la dominación con signo es similar pero no igual a la $\frac{1}{2}$-dominación.

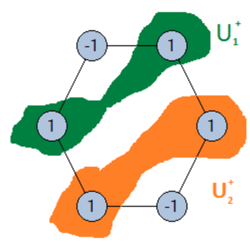


Figura 3.1: Ejemplo de dominación con signo

Hemos visto que el número de dominación es una cota inferior para el número de α-dominación. Ahora enunciaremos dos lemas para demostrar que el número de cubierta por vértices de una gráfica G, $\alpha_0(G)$, es una cota superior de $\gamma_\alpha(G)$.

Lema 6 *Para toda gráfica G se tiene que $\gamma_1(G) = \alpha_0(G)$.*

Demostración:

Sea $D \subseteq V_G$ un $\gamma_1(G)$-conjunto de G. Entonces, por definición, para todo vértice $v \in V_G - D$ se tiene que $|N(v) \cap D| \geq 1|N(v)|$.

Es decir, para cada vértice $v \in V_G - D$, $N(v) \cap D = N(v)$, en otras palabras, cada arista tiene al menos uno de sus extremos en D. Por lo tanto, D es una cubierta por vértices de G, lo que implica que $\gamma_1(G) = |D| \geq \alpha_0(G)$.

Sea S una cubierta por vértices tal que $|S| = \alpha_0(G)$. Entonces, para toda $e = uv \in A_G$ se tiene que $|\{u,v\} \cap S| \geq 1$, lo que implica que para todo $v \in V_G - S$, $|N(v) \cap S| \geq |N(v)|$. Así, S es un γ_1-conjunto y $\alpha_0(G) = |S| \geq \gamma_1(G)$.

Por lo tanto, $\alpha_0(G) = \gamma_1(G)$.

■

Lema 7 *Sea G una gráfica sin vértices aislados. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq \gamma_{\alpha_2}(G)$.*

Demostración:

Si $S \subseteq V_G$ es un γ_{α_2}-conjunto de G, entonces $|N(v) \cap S| \geq \alpha_2|N(v)| \geq \alpha_1|N(v)|$ lo que implica que S es un γ_{α_1}-conjunto de G. Por lo tanto, $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq |S| = \gamma_{\alpha_2}(G)$.

■

Proposición 8 *Para toda gráfica G y para toda $0 < \alpha \leq 1$, $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \alpha_0(G)$.*

Demostración:

Por el lema 1, sabemos que $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$. Como $\alpha \leq 1$, usando el lema 7, obtenemos que $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_1(G)$, y usando el lema 6, tenemos que $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_1(G) = \alpha_0(G)$. Por lo tanto, $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \alpha_0(G)$.

■

Las siguientes dos proposiciones nos dan condiciones suficientes para obtener las igualdades $\gamma(G) = \gamma_\alpha(G)$ y $\gamma_\alpha(G) = \alpha_0(G)$.

Proposición 9 *Si G tiene grado máximo $\Delta(G)$ y $0 < \alpha \leq 1/\Delta(G)$, entonces $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$.*

Demostración:

Por el lema 1, $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$ para toda α. Sólo es necesario demostrar que $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma(G)$ para $0 < \alpha \leq 1/\Delta(G)$. Sea S un γ-conjunto. Si $v \notin S$, como S es un conjunto dominante sabemos que $|N(v) \cap S| \geq 1$ y por definición de $\Delta(G)$, $|N(v)| \leq \Delta(G)$. Esto implica que $\alpha|N(v)| \leq \alpha\Delta(G)$. También notemos que $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$ si y sólo si $\alpha\Delta(G) \leq 1$. Por todo lo anterior, obtenemos lo siguiente:

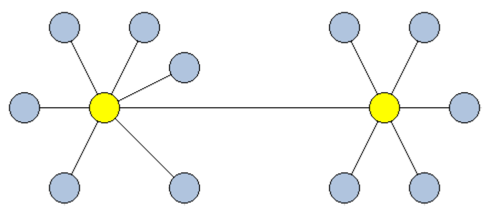
$$\alpha|N(v)| \leq \alpha\Delta(G) \leq 1 \leq |N(v) \cap S|.$$

Por lo tanto, S es un conjunto α-dominante y por consiguiente, $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \gamma(G)$. Es decir, $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma(G)$.

■

El recíproco de la proposición 9 es falso. La gráfica G se llama *doble estrella* si se obtiene al hacer adyacentes los vértices de grado máximo en las dos estrellas $K_{1,r}$ y $K_{1,s}$. Es claro que $\gamma(G) = 2$. Sea $S = \{u, v\}$ donde u y v son los centros de las estrellas $K_{1,r}$ y $K_{1,s}$, respectivamente. S es un conjunto α-dominante pues para todo $x \in V_G - \{u, v\}$ se tiene que $|N(x) \cap S| = 1 \geq \alpha \cdot 1 = \alpha|N(x)|$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) \leq 2$. Además, por el lema 1, sabemos que $\gamma_\alpha(G) \geq \gamma(G) = 2$. Así, $\gamma_\alpha(G) = 2 = \gamma(G)$.

Por ejemplo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r \geq s$. Sea $r = 6$ y $s = 5$. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha = \frac{1}{2} > \frac{1}{7} = \frac{1}{r+1} = \frac{1}{\Delta(G)}$, es decir, $\alpha > \frac{1}{\Delta(G)}$.



Contraejemplo del recíproco de la proposición 9

Proposición 10 *Sea G una gráfica. Si $(\Delta(G)-1)/\Delta(G) < \alpha \leq 1$, entonces $\gamma_\alpha(G) = \alpha_0(G)$.*

Demostración:

Por la proposición 8, $\gamma_\alpha(G) \leq \alpha_0(G)$, para todo G.

Ahora, sólo basta demostrar que $\gamma_\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$. Sea S un γ_α-conjunto de una gráfica G, con $(\Delta(G) - 1)/\Delta(G) < \alpha \leq 1$. Sea v un vértice tal que $v \notin S$. Notemos que $|N(v)| - |N(v) - S| = |N(v) \cap S|$. Si $k = |N(v) - S|$, entonces $|N(v)| - k = |N(v) \cap S|$, lo que implica que $\Delta(G)(|N(v)| - k) = \Delta(G)(|N(v) \cap S|)$. Por otro lado, $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)| > \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}|N(v)|$ si y sólo si $\Delta(G)(|N(v) \cap S|) > (\Delta(G) - 1)|N(v)| = \Delta(G)|N(v)| - |N(v)|$. Lo que implica que:

$$\Delta(G)(|N(v)| - k) \quad > \quad \Delta(G)|N(v)| - |N(v)|$$

$$\begin{aligned} -\Delta(G)k &> -|N(v)| \\ \Delta(G)k &< |N(v)|. \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$, entonces $\Delta(G) < |N(v)|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $k = 0 = |N(v) - S|$, lo que implica que $N(v) \subseteq S$ para todo $v \in V_G - S$, por ende, no hay aristas en $V_G - S$. Por lo tanto, S es una cubierta por vértices de G y así, $\alpha_0(G) \leq |S| = \gamma_\alpha(G)$.

■

Observemos que si G satisface $\gamma(G) = \alpha_0(G)$, entonces $\gamma_\alpha(G) \geq \alpha_0(G)$, y por la proposición 8 se tiene que $\gamma_\alpha(G) = \alpha_0(G)$. Las gráficas G tales que satisfacen esta igualdad, se examinan en [15, 22].

Por las proposiciones 9 y 10, si G satisface $\gamma(G) < \gamma_\alpha(G) < \alpha_0(G)$, entonces $\frac{1}{\Delta(G)} \leq \alpha \leq \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}$.

Por ejemplo, para $G = K_n$ sabemos que $\gamma(K_n) = 1$, $\alpha_0(K_n) = n - 1$ y $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Por lo tanto, $\frac{1}{n-1} \leq \alpha \leq \frac{n-2}{n-1}$.

Sea $G = K_4$. Por lo tanto:

$$\Delta(G) = 3 \Rightarrow \frac{1}{\Delta(G)} = \frac{1}{3}$$

y

$$\frac{\Delta(G) - 1}{\Delta(G)} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Por lo anterior, $\gamma(K_4) = 1$. Si $\alpha = \frac{2}{3}$, entonces, por la proposición 4, $\gamma_{2/3}(K_4) = \lceil \frac{2}{3}(4-1) \rceil = 2$ y es inmediato ver que $\alpha_0(G) = 3$, entonces:

$$\gamma(K_4) < \gamma_{2/3}(K_4) < \alpha_0(K_4).$$

Lo siguiente que nos preguntamos es, ¿si $\gamma(G) = r$, $\alpha_0(G) = t$ y $r < s < t$, siempre existe un valor de α para el cual $\gamma_\alpha(G) = s$? Consideremos un ciclo C_n, para $n \geq 11$. Esta gráfica tiene $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ y $\alpha_0(C_n) = \lceil n/2 \rceil$. Sin embargo, por la proposición 3, $\gamma_\alpha(C_n)$ es igual a $\gamma(C_n)$ o a $\alpha_0(C_n)$ para toda α. Por lo tanto, no siempre existe α tal que $\gamma_\alpha(G)$ sea un valor intermedio entre $\gamma(G)$ y $\alpha_0(G)$.

Capítulo 4

Resultados de tipo Nordhaus-Gaddum

En 1956, Nordhaus y Gaddum [19] dieron cotas justas para la suma del número cromático de una gráfica y el de su complemento. Los resultados similares al anterior para otros parámetros de gráficas son conocidos como resultados de tipo Nordhaus-Gaddum (N-G). En este capítulo estudiamos resultados tipo N-G para el número de α-dominación de una gráfica.

En 1988, Woodall demuestra el siguiente teorema enunciado con anterioridad (1985, pero no probado) por Cowen y Emerson, [23]. Para cualquier gráfica $G = (V_G, A_G)$ y un conjunto $C = \{1, 2, ..., k\}$, definimos una *coloración* de G como una función $f\colon V_G \to C$. A $f(v)$ lo llamamos el color de v. Denotamos por S_i al conjunto de todos los vértices con color i.

Teorema 11 *Sea $G = (V_G, A_G)$ una gráfica, sea $C = \{1, 2, ..., k\}$ y sean $p_1, p_2, ..., p_k$ números reales no-negativos tales que $\sum p_i \geq 1$. Entonces existe una coloración $f\colon V_G \to C$ tal que $|N(v) \cap S_i| \leq p_{f(v)} |N(v)|$ para cada vértice v.*

Utilizaremos el teorema 11 como herramienta para demostrar lo siguiente:

Teorema 12 *Si $0 < \alpha < 1$, entonces para cualquier gráfica G, $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n$.*

Demostración:

Por el teorema 11, sean $k = 2$, $p_1 = \alpha$ y $p_2 = 1 - \alpha$, entonces existe una coloración de G, $f : V_G \to \{1, 2\}$, tal que $|N(v) \cap S_i| \leq p_{f(v)} |N(v)|$ para cada vértice v en G.

Por lo tanto, $|N(v) \cap S_1| \leq p_{f(v)} |N(v)|$ y $|N(v) \cap S_2| \leq p_{f(v)} |N(v)|$.

Como consecuencia, tenemos las siguientes afirmaciones:

a) El conjunto S_1 es un conjunto α-dominante de G. En efecto:

Sea $v \in S_2$, entonces $f(v) = 2$ y

- $|N(v) \cap S_1| \leq p_2 |N(v)| = (1 - \alpha)|N(v)|$.
- $|N(v) \cap S_2| \leq p_2 |N(v)| = (1 - \alpha)|N(v)|$.

Además,
$|N(v) \cap S_1| = |N(v)| - |N(v) \cap S_2| \geq |N(v)| - (1 - \alpha)|N(v)| = \alpha|N(v)|$.

b) El conjunto S_2 es un conjunto $(1 - \alpha)$-dominante de G. En efecto:

Sea $v \in S_1$, entonces $f(v) = 1$ y

- $|N(v) \cap S_1| \leq p_1 |N(v)| = \alpha|N(v)|$.
- $|N(v) \cap S_2| \leq p_1 |N(v)| = \alpha|N(v)|$.

Además,
$|N(v) \cap S_2| = |N(v)| - |N(v) \cap S_1| \geq |N(v)| - \alpha|N(v)| = (1 - \alpha)|N(v)|$.

De (a) y (b), $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq |S_1| + |S_2| = n$.

■

No es posible dar una buena cota inferior para esta expresión. Si G es una estrella $K_{1,n-1}$, entonces $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) = 2$ para todos los valores de α (pues $\gamma_\alpha(K_{1,n-1}) = 1$ para $0 < \alpha < 1$ y para toda $n \geq 3$). Por otro lado, si G es una gráfica completa con n vértices, podemos utilizar la proposición 4 para ver que $n - 1 \leq \gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G)$ para todos los valores de α (con $0 < \alpha < 1$). Esto es, $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) = \lceil \alpha(n - 1) \rceil + \lceil (1 - \alpha)(n - 1) \rceil$. Y como $\alpha(n - 1) \leq \lceil \alpha(n - 1) \rceil$ y $(1 - \alpha)(n - 1) \leq \lceil (1 - \alpha)(n - 1) \rceil$, entonces $\alpha(n-1) + (1-\alpha)(n-1) \leq \gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \Leftrightarrow \alpha n - \alpha + n - 1 - \alpha n + \alpha = n - 1 \leq \gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha(G)}$. Por lo tanto, $n - 1 \leq \gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n$.

Así, la cota superior en el teorema 12 es justa para una gráfica completa K_n cuando $\alpha(n - 1)$ no es un entero.

Los siguientes corolarios son inmediatos.

Corolario 13 *Para cualquier gráfica G, $\gamma_{1/2}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.*

Demostración:

Por el teorema 12, para $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos que $\gamma_{1/2}(G) + \gamma_{1-1/2}(G) = \gamma_{1/2}(G) + \gamma_{1/2}(G) = 2\gamma_{1/2}(G) \leq n \Leftrightarrow \gamma_{1/2}(G) \leq n/2$ y como $\gamma_{1/2}(G)$ es un número entero, entonces $\gamma_{1/2}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. ■

Esta cota es justa, por ejemplo, para toda n, $\gamma_{1/2}(K_n) = \lceil \frac{1}{2}(n-1) \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

El siguiente corolario es un resultado de tipo N-G para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Corolario 14 *Si G y $\bar{G}$ no tienen vértices aislados, entonces*

$$\gamma_{1/2}(G) + \gamma_{1/2}(\bar{G}) \leq n.$$

Demostración:

Por el corolario 13, para toda gráfica G, $\gamma_{1/2}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ y $\gamma_{1/2}(\bar{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Por lo tanto, $\gamma_{1/2}(G) + \gamma_{1/2}(\bar{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor = 2\lfloor n/2 \rfloor \leq n$. ■

Esta cota es justa. Consideremos la gráfica C_4, entonces $\gamma_{\frac{1}{2}}(C_4) = 2 = \gamma_{\frac{1}{2}}(\bar{C}_4)$.

No tenemos un resultado de tipo N-G para α en general. Sin embargo, es posible obtener una generalización del teorema 12 de una manera natural.

Corolario 15 *Sea G una gráfica y sean $k \geq 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \leq 1$, donde $0 < \alpha_i < 1$ para toda i, entonces $\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) + \cdots + \gamma_{\alpha_k}(G) \leq kn/2$.*

Demostración:

Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 2$, tenemos que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. Por el teorema 12 y el lema 7, sabemos que $\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) \leq \gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{1-\alpha_1}(G) \leq n$. Supongamos que $k > 2$ y que el resultado es verdadero para enteros positivos menores que k. Al menos unos de los valores α_i debe de satisfacer que $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha_k \leq \frac{1}{2}$. Entonces, por el corolario 13, sabemos que $\gamma_{\alpha_k}(G) \leq n/2$. Finalmente, usando la hipótesis de inducción, vemos que $[\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) + \cdots + \gamma_{\alpha_{k-1}}(G)] + \gamma_{\alpha_k}(G) \leq (k-1)n/2 + n/2 = kn/2$.

■

El siguiente teorema es lo más cercano que conocemos a un resultado tipo N-G para α-dominación.

Teorema 16 *Si G y $\bar{G}$ no tienen vértices aislados y si $0 < \alpha < 1$, entonces*

$$\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \lfloor (3n/2) \rfloor - 2.$$

Demostración:

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Por el lema 7, $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_{1/2}(G)$, y el corolario 13 implica que $\gamma_\alpha(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Como G no tiene vértices aislados, entonces $\bar{G}$ no tiene ningún vértice universal, lo que implica que existe $\{x, y\} \subseteq V_{\bar{G}}$ tal que $(x, y) \notin A_{\bar{G}}$. Así, $V_{\bar{G}} - \{x, y\}$ forma una cubierta por vértices para $\bar{G}$. Notemos que $|V_{\bar{G}} - \{x, y\}| = n - 2$. Por lo tanto, $\alpha_0(\bar{G}) \leq n - 2$. Por la proposición 8, $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \alpha_0(\bar{G})$. Por lo tanto, tenemos que $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq n - 2$.

Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + n - 2 \leq \lfloor 3n/2 \rfloor - 2$. ■

Veamos que la cota se alcanza si $G = mK_2$ (con $m \in \mathbb{Z}^+$) y $\alpha < 1/(n-2)$, donde mK_2 es la gráfica de m copias de K_2.

$G = mK_2$ lo que implica que $n = 2m$.

Basta con demostrar que $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) = \lfloor 3n/2 \rfloor - 2 = \lfloor 3(2m)/2 \rfloor - 2 = 3m - 2$.

¿Qué valor tiene $\gamma_\alpha(G)$?

Observemos que para todo $v \in V_G$ se tiene que $|N(v)| = 1$ lo que implica que $|N(v) \cap S| \leq 1$. Por lo tanto, $S \subseteq V_G$ es α-dominante si para todo $v \in V_G - S$, $1 \geq |N(v) \cap S| \geq \alpha\,|N(v)| = \alpha$ y como $\alpha \neq 0$ (pues estamos considerando $0 < \alpha < 1$) y $|N(v) \cap S|$ es un entero, entonces $|N(v) \cap S| = 1$ lo que implica que $\gamma_\alpha(G) = m$.

¿Qué valor tiene $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G})$?

Ahora, observemos que para todo $v \in V_{\bar{G}}$ se tiene que $|N(v)| = 2m - 2$, lo que implica que $2m - 2 \geq |N(v) \cap S|$.

Por otro lado, $\alpha < \frac{1}{n-2} \Leftrightarrow -\alpha > -\frac{1}{n-2} \Leftrightarrow 1 - \alpha > 1 - \frac{1}{n-2} = 1 - \frac{1}{2m-2}$.

Así, $S \subseteq V_{\bar{G}}$ es $(1-\alpha)$-dominante si para todo $v \in V_{\bar{G}} - S$, $2m - 2 \geq |N(v) \cap S| \geq (1-\alpha)\,|N(v)| > \left(1 - \frac{1}{2m-2}\right)(2m-2) = \left(\frac{2m-2-1}{2m-2}\right)(2m-2) = 2m - 3$. Es decir, $2m - 2 \geq |N(v) \cap S| > 2m - 3$ y como $|N(v) \cap S|$ es un entero, entonces $|N(v) \cap S| = 2m - 2$, lo que implica que $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) = 2m - 2$.

Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) = m + 2m - 2 = 3m - 2$.

Capítulo 5

Cotas para $\gamma_\alpha(G)$

Proposición 17 *Sean G una gráfica y S un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto. Entonces:*

$$\alpha\delta(G)|V_G - S| \leq \sum_{v \in V_G - S} \alpha d(v) \leq \sum_{v \in S} d(v) \leq \Delta(G)|S|.$$

Demostración:

1. Primero demostraremos que $\alpha\delta(G)|V_G - S| \leq \sum_{v \in V_G - S} \alpha d(v)$.

   Como $\delta(v) \leq d(v)$ para todo $v \in V_G$, entonces $\alpha\delta(v)|V_G - S| \leq \sum_{v \in V_G - S} \alpha d(v)$.

2. Ahora demostraremos que $\sum_{v \in V_G - S} \alpha d(v) \leq \sum_{v \in S} d(v)$.

   Para todo $v \in V_G - S$ tenemos que $|N(v) \cap S| \geq \alpha d(v)$.

   Por lo tanto, $\sum_{v \in V_G - S} \alpha d_G(v) \leq |E(V_G - S, S)| = |E(S, V_G - S)| \leq \sum_{v \in S} d(v)$, donde $E(A, B)$ es el conjunto de aristas que salen del conjunto A hacia el conjunto B.

3. Finalmente demostraremos que $\sum_{v \in S} d(v) \leq \Delta(G)|S|$.

   Es inmediato pues $d(v) \leq \Delta(G)$ para todo $v \in V_G$.

■

Proposición 18 *Para toda gráfica G de orden n y S un γ_α-conjunto, se tiene*

$$\frac{\alpha\delta(G)n}{\Delta(G) + \alpha\delta(G)} \leq \gamma_\alpha(G).$$

Demostración:

Por la proposición 17, $\alpha\delta(G)|V_G - S| = \alpha\delta(G)(n - \gamma_\alpha(G)) \leq \Delta(G)\gamma_\alpha(G)$, lo que implica que $\alpha\delta(G)n \leq \Delta(G)\gamma_\alpha(G) + \alpha\delta(G)\gamma_\alpha(G)$. Por lo tanto, $\frac{\alpha\delta(G)n}{\Delta(G)+\alpha\delta(G)} \leq \gamma_\alpha(G)$.

■

Proposición 19 *Para toda gráfica G,*

$$\gamma_\alpha(G) \leq \frac{\Delta(G)n}{\Delta(G) + (1-\alpha)\delta(G)}.$$

Demostración:

Por el teorema 12, $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n \Leftrightarrow \gamma_\alpha(G) \leq n - \gamma_{1-\alpha}(G)$. Por la proposición 18, $\frac{(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)} \leq \gamma_{1-\alpha}(G) \Leftrightarrow -\gamma_{1-\alpha}(G) \leq -\frac{(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)}$. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) \leq n - \frac{(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)} = \frac{\Delta(G)n+(1-\alpha)\delta(G)n-(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)}$. Es decir, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{\Delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)}$. ■

Corolario 20 *Para todo árbol T y para toda α con $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\frac{\alpha n}{\Delta(T) + \alpha} \leq \gamma_\alpha(T) \leq \frac{\Delta(T)n}{\Delta(T) + 1 - \alpha}.$$

Demostración:

Como T es árbol, entonces $\delta(T) = 1$. Por la proposición 18, $\frac{\alpha n}{\Delta(T)+\alpha} \leq \gamma_\alpha(T)$. Por la proposición 19, $\gamma_\alpha(T) \leq \frac{\Delta(T)n}{\Delta(T)+1-\alpha}$. Por lo tanto, $\frac{\alpha n}{\Delta(T)+\alpha} \leq \gamma_\alpha(T) \leq \frac{\Delta(T)n}{\Delta(T)+1-\alpha}$. ■

Proposición 21 *Para toda gráfica G con m aristas, $\frac{2\alpha m}{(\alpha+1)\Delta(G)} \leq \gamma_\alpha(G)$.*

Demostración:

Sea S un γ_α-conjunto de G. Por la proposición 17:

$$\sum_{v \in V_G - S} \alpha d(v) \leq \Delta(G)|S|.$$

Como $d(v) \leq \Delta(G)$ para todo $v \in V_G$, entonces

$$\sum_{v \in S} \alpha d(v) \leq \alpha\Delta(G)|S|.$$

Por un lado, $\alpha\sum_{v\in V_G} d(v) = \sum_{v\in S}\alpha d(v) + \sum_{v\in V_G - S}\alpha d(v) \leq (\alpha+1)\Delta(G)|S|$ pero por otro lado, $\alpha\sum_{v\in V_G} d(v) = \alpha 2m$. Por lo tanto, $(\alpha+1)\Delta(G)|S| \geq \alpha 2m$, y como $|S| = \gamma_\alpha(G)$, entonces

$$\gamma_\alpha(G) \geq \frac{2\alpha m}{(\alpha+1)\Delta(G)}.$$

■

Proposición 22 *Para cualquier gráfica G con grado máximo $\Delta(G)$ y m aristas, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{(2-\alpha)\Delta(G)n-(2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)}$.*

Demostración:

Por la proposición 21, $\gamma_{1-\alpha}(G) \geq \frac{2(1-\alpha)m}{(1-\alpha+1)\Delta(G)}$. Por el teorema 12, $\gamma_\alpha(G) \leq n - \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n - \frac{2(1-\alpha)m}{(-\alpha+2)\Delta(G)} = \frac{(2-\alpha)\Delta(G)n-(2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)}$. Es decir, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{(2-\alpha)\Delta(G)n-(2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)}$. ■

A continuación, consideraremos cotas para gráficas k-regulares.

Notemos que, si G es k-regular, entonces $\gamma_{1/k}(G) = \gamma(G)$. En efecto, G es k-regular implica que para todo vértice v se tiene que $|N(v)| = k$. Sea S un conjunto $\frac{1}{k}$-dominante, esto es, para todo $v \in V_G - S$, $|N(v)\cap S| \geq \frac{1}{k}|N(v)| = \frac{1}{k}k = 1$. Así, el mínimo sobre las cardinalidades de los conjuntos S que cumplen la propiedad anterior es tanto un γ-conjunto como un $\gamma_{1/k}$-conjunto.

Aplicando las proposiciones 21 y 22 a gráficas k-regulares, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 23 *Para una gráfica k-regular G de orden n y para cualquier α con $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\frac{\alpha n}{1+\alpha} \leq \gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{2-\alpha}.$$

Demostración:

Por ser G k-regular, $\delta(G) = \Delta(G) = k$ y el número de aristas, m, es $\frac{kn}{2}$. Por la proposición 21, $\frac{2\alpha m}{(\alpha+1)\Delta(G)} = \frac{2\alpha\left(\frac{kn}{2}\right)}{(\alpha+1)k} = \frac{\alpha kn}{(\alpha+1)k} = \frac{\alpha n}{\alpha+1} \leq \gamma_\alpha(G)$. Por la proposición 22, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{(2-\alpha)\Delta(G)n-(2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)} = \frac{(2-\alpha)kn-(2-2\alpha)\left(\frac{kn}{2}\right)}{(2-\alpha)k} =$

$\frac{(2-\alpha)kn-(1-\alpha)(kn)}{(2-\alpha)k} = \frac{(2-\alpha)n-(1-\alpha)n}{2-\alpha} = \frac{2n-\alpha n-n+\alpha n}{2-\alpha} = \frac{n}{2-\alpha}$. Por lo tanto, $\frac{\alpha n}{1+\alpha} \leq \gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{2-\alpha}$. ■

Sea $\alpha = \frac{i}{k}$, donde i es un entero con $1 \leq i \leq k$, entonces obtenemos la siguiente cota inferior.

Corolario 24 *Si G es una gráfica k-regular e i es un entero con $1 \leq i \leq k$, entonces*

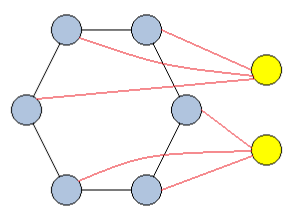
$$\left\lceil \frac{in}{i+k} \right\rceil \leq \gamma_{i/k}(G).$$

Demostración:

Si $\alpha = i/k$, por el corolario 23, $\frac{\frac{i}{k}n}{1+\frac{i}{k}} \leq \gamma_{i/k}(G)$. Como $\frac{\frac{i}{k}n}{1+\frac{i}{k}} = \frac{in}{k+i}$ y como $\gamma_{i/k}(G)$ es un número natural, entonces $\lceil \frac{in}{i+k} \rceil \leq \gamma_{i/k}(G)$.

■

Ejemplo de una gráfica G, 3-regular tal que para $\alpha = \frac{1}{3}$ se alcanza la cota del corolario 24:



Gráfica G. Los vértices amarillos forman un $\gamma_{\frac{1}{3}}$-conjunto para G de cardinalidad $\lceil \frac{in}{i+k} \rceil = \lceil \frac{8}{4} \rceil = 2 = \gamma_{1/3}(G)$.

El corolario 23 también nos da una cota superior.

Corolario 25 *Si G es k-regular, entonces $\gamma_{i/k}(G) \leq \lfloor \frac{kn}{2k-i} \rfloor$.*

Demostración:

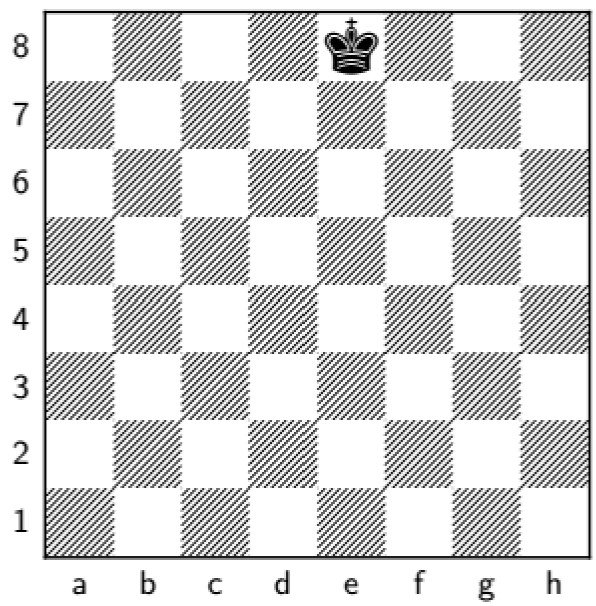
Por el corolario 23, $\gamma_{i/k}(G) \leq \frac{n}{2-\frac{i}{k}} = \frac{n}{\frac{2k-i}{k}} = \frac{kn}{2k-i}$ y como $\gamma_{i/k}(G)$ es un número entero, entonces $\gamma_{i/k}(G) \leq \lfloor \frac{kn}{2k-i} \rfloor$.

■

Capítulo 6

La Gráfica del Rey

Regresamos al problema original de encontrar $\gamma_{1/2}(G)$, donde $G = K[s \times t]$.



Podemos pensar a la gráfica del Rey $K[s \times t]$ teniendo s filas o renglones de vértices y t columnas de vértices. Para cualquier gráfica $K[s \times t]$, si S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto para la gráfica, entonces decimos que una columna está **vacía** con respecto a S si la columna no tiene vértices en S. Similarmente, una columna está **llena** con respecto a S si todos sus vértices están en S. Cuando no haya lugar a confusión con respecto a S, hablaremos sólo de columnas vacías o llenas. Primero, consideremos las gráficas del Rey tales que $s = 2$ y $1 \leq t \leq 4$.

Para los siguientes incisos, sea S un $\gamma_{1/2}$-conjunto para la gráfica del Rey correspondiente en cada uno de ellos.

- Es inmediato ver que $\gamma_{1/2}(K[2 \times 1]) = 1$ (figura 6.1).

- $\gamma_{1/2}(G = K[2 \times 2]) = 2$, esto es porque para todo vértice v en V_G, se tiene que $|N(v)| = 3$, en particular, para $v \in V_G - S$, se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \frac{1}{2} \cdot 3$ implica que $|N(v) \cap S| \geq 2$, lo que implica que $|S| \geq 2$. Notemos que tomando cualesquiera dos vértices, obtenemos un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante mínimo (figura 6.2). Así, $\gamma_{1/2}(K[2 \times 2]) = 2$.

- $\gamma_{1/2}(G = K[2 \times 3]) = 2$, esto es porque para cada vértice v en V_G se tienen dos posibilidades: o $|N(v)| = 3$ o $|N(v)| = 5$. En el primer caso obtenemos que para $v \in V_G - S$, se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \frac{1}{2} \cdot 3$ implica que $|N(v) \cap S| \geq 2$, lo que implica que $|S| \geq 2$; en el segundo caso obtenemos que para $v \in V_G - S$, se tiene que $|N(v) \cap S| \geq \frac{1}{2} \cdot 5$ implica que $|N(v) \cap S| \geq 3$, lo que implica que $|S| \geq 3$. Así, tomando S igual a los vértices centrales de la figura 6.3 excluimos el segundo caso y obtenemos un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante mínimo. Así, $\gamma_{1/2}(K[2 \times 3]) = 2$.

- $\gamma_{1/2}(K[2 \times 4]) = 4$, esto es porque, observando la figura 6.4, tenemos que hay 4 vértices de grado 5 y 4 de grado 3. Si $|S| = 2$, entonces existen al menos dos vértices de grado 5 que no están $\frac{1}{2}$-dominados por S. Si $|S| = 3$, entonces existe al menos un vértice de grado 3 que no está $\frac{1}{2}$-dominado por S (pues en el mejor de los casos tomaríamos S como el conjunto de tres esquinas pero la cuarta esquina no estaría $\frac{1}{2}$-dominada). Por lo tanto, $|S| \geq 4$. Observando la figura 6.4, tenemos que los cuatro vértices centrales forman un $\gamma_{1/2}$-conjunto.

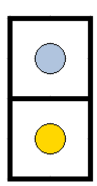


Figura 6.1: $K[2 \times 1]$

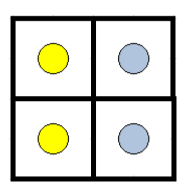


Figura 6.2: $K[2 \times 2]$

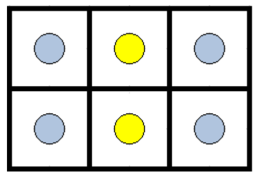


Figura 6.3: $K[2\times 3]$

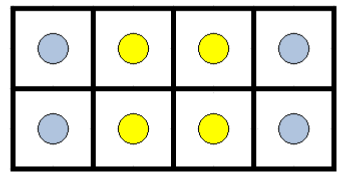


Figura 6.4: $K[2\times 4]$

Buscamos un resultado para valores más grandes de t, para ello, primero veamos el siguiente lema.

Lema 26 *Siempre existe un $\gamma_{1/2}$-conjunto S de $K[2\times t]$ tal que la columna t está vacía.*

Demostración:

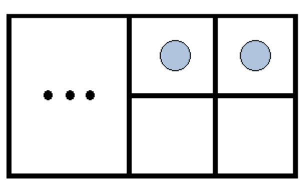
Denotaremos a los vértices de $K[2\times t]$ por:

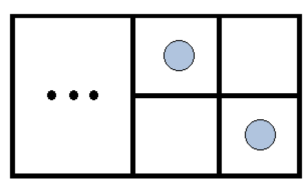
$$V(K[2\times t]) = \{u_1, u_2, \ldots, u_t, v_1, v_2, \ldots, v_t\}$$

donde $C_j = \{u_j, v_j\}$ es la j-ésima columna de $K[2\times t]$ formada por los vértices u_j y v_j, con $1 \leq j \leq t$.

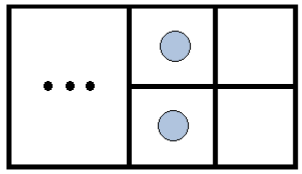
Sea S un $\gamma_{1/2}$-conjunto de $G = K[2\times t]$, el cual será representado por los vértices azules. Si la última columna de G, C_t, no está vacía, entonces tenemos dos casos:

1. $|S\cap C_t| = 1$. Para $\frac{1}{2}$-dominar al vértice restante de C_t se debe tener que $|S\cap C_{t-1}| = 1$ (si fuera 2, S no sería mínimo pues podríamos quitar el vértice de S que está en la última columna y seguiría siendo $\frac{1}{2}$-dominante pero estamos suponiendo que $|S\cap C_t| = 1$). Por lo tanto, tenemos alguna de las siguientes configuraciones:



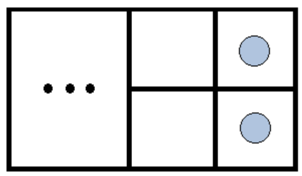


En ambos casos, reacomodamos los vértices de S de la siguiente manera:

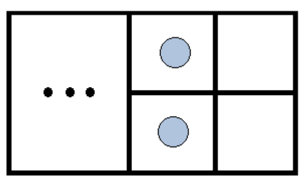


Obteniendo así un nuevo $\gamma_{1/2}$-conjunto S' con $C_t \cap S' = \emptyset$.

2. $|S \cap C_t| = 2$. Por ser S mínimo, $|S \cap C_{t-1}| = 0$, en otro caso, si $S \cap C_{t-1} = \{u_{t-1}\}$, entonces $S' = S - C_t \cup \{v_{t-1}\}$ sería un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para G de cardinalidad menor que $|S|$, lo cual es una contradicción.



Y así, podemos reacomodar los vértices de la siguiente forma:



■

Como preámbulo de la proposición 27, consideremos las siguientes dos observaciones.

Observación 1 *Si S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto de $K[2 \times t]$, no puede haber dos columnas vacías consecutivas.*

Demostración :

Supongamos que $(C_i \cup C_{i+1}) \cap S = \emptyset$. Si $i = 1$, entonces u_1 y v_1 no están dominados por S. Si $i > 1$, entonces $d(u_i) = 5$ y $|N(u_i) \cap S| \geq 3$ por ser S un $\gamma_{1/2}$-conjunto, pero como $C_{i+1} \cap S = \emptyset$, entonces $|N(u_i) \cap S| \leq 2$ lo cual es una contradicción.

■

Observación 2 *Si S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto de $K[2 \times t]$ y C_i es vacía, con $i \neq t$, entonces C_{i+1} o C_{i+2} está llena.*

Demostración :

Si C_i es vacía, entonces C_{i+1} no es vacía. Si C_{i+1} está llena, ya terminamos.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_{i+1} \cap S = \{u_{i+1}\}$. Como $d(v_{i+1}) = 5$ y S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto, entonces $|N(v_{i+1}) \cap S| \geq 3$ lo que implica que $C_{i+2} \cap S = C_{i+2}$.

■

Proposición 27 *Para una gráfica del Rey de tamaño $2 \times t$, $\gamma_{1/2}(K[2 \times t]) = t - 1$, para toda $t \geq 5$.*

Demostración:

Primero demostraremos que $t - 1 \leq \gamma_{1/2}(K[2 \times t])$. Notemos que todo vértice en $K[2 \times t]$ o tiene grado 3 o tiene grado 5. Si S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante, entonces $|S \cap N(v)| \geq \frac{1}{2}(3)$, cuando $d(v) = 3$, lo que implica que $|S| \geq 2$. Si S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante, entonces $|S \cap N(v)| \geq \frac{1}{2}(5)$, cuando $d(v) = 5$, lo que implica que $|S| \geq 3$.

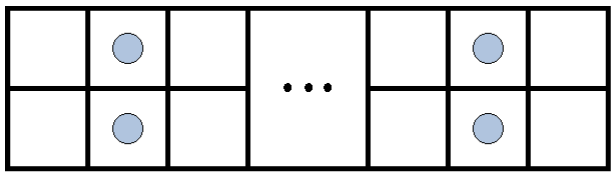
Sea S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto. Sea x el número de columnas en la gráfica con ambos vértices en S. Sea y el número de columnas con exactamente un vértice en S. Sea z el número de columnas en la gráfica que no tienen vértices en S. Así, $t = x + y + z$. Por la observación 2, por cada columna vacía, excepto C_t, existe al menos una columna llena, es decir, $x \geq z - 1$, lo que es equivalente a $z \leq x + 1$. Por otro lado, $|S| = 2x + y$. Por lo tanto, $t = x + y + z \leq x + y + (x + 1) = 2x + y + 1$. Así, $t - 1 \leq 2x + y = |S|$, es decir, $t - 1 \leq |S| = \gamma_{1/2}(K[2 \times t])$.

Ahora demostraremos que $\gamma_{1/2}(K[2 \times t]) = t - 1$ exhibiendo un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante de cardinalidad $t - 1$, para toda $t \geq 5$. Consideremos tres casos, t impar, t par congruente con 0 módulo 4 y t par congruente con 2 módulo 4.

i) $t = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$ mayor o igual que 2.
ii) $t = 2(2p) = 4p$, con $p \in \mathbb{Z}$ mayor o igual 2.
iii) $t = 2q$, con $q \in \mathbb{Z}$ impar y mayor o igual a 3.

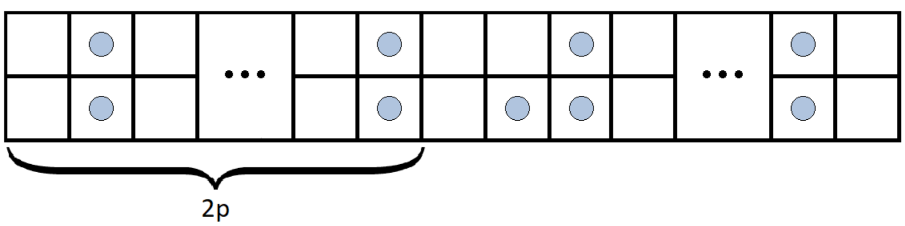
Para el caso (i), consideremos la siguiente configuración:

Todas las columnas impares son vacías y todas las columnas pares están llenas, esto es, sea $S = C_2 \cup C_4 \cup \cdots \cup C_{2k}$. Por lo tanto, tenemos k columnas llenas y $k+1$ columnas vacías. Así, el $\gamma_{1/2}$-conjunto que estamos proponiendo, S, tiene cardinalidad $2k = t-1$.



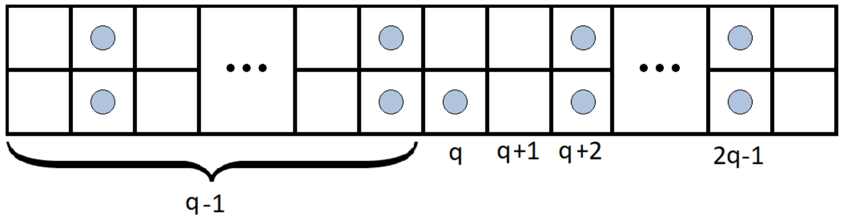
Para el caso (ii), consideremos la siguiente configuración:

Fijémonos en las primeras $2p$ columnas. De ellas, las columnas impares las hacemos vacías y las pares, llenas. Así, tenemos p columnas vacías y p columnas llenas. Ahora, hacemos la columna $2p+1$ vacía y la $2p+2$ con exactamente un vértice en el conjunto $\frac{1}{2}$-dominante. Después, hacemos la columna $2p+3$ llena, la $2p+4$ vacía y así vamos alternando hasta la última columna (que quedará vacía). Así, en esta otra mitad, tenemos $p-1$ columnas llenas, p columnas vacías y una columna con exactamente un vértice. Esto es, sea $S = C_2 \cup C_4 \cup \cdots \cup C_{2p} \cup C_{2p+3} \cup \cdots \cup C_{4p-1} \cup \{v_{2p+2}\}$. Por lo tanto, el $\gamma_{1/2}$-conjunto que estamos proponiendo, S, tiene cardinalidad $2p + 2(p-1) + 1 = 4p - 2 + 1 = 4p - 1 = t - 1$.



Para el caso (iii), consideremos la siguiente configuración:

Fijémonos en las primeras $q-1$ columnas. De ellas, hagamos vacías las impares y llenas las pares. Para la columna q consideremos exactamente un vértice en el conjunto $\frac{1}{2}$-dominante. Después, hagamos la columna $q+1$ vacía, $q+2$ llena, y así vamos alternando hasta terminar. Esto es, sea $S = C_2 \cup C_4 \cup \cdots \cup C_{q-1} \cup \{v_q\} \cup C_{q+2} \cup C_{q+4} \cup \cdots \cup C_{2q-1}$. Notemos que la última columna queda vacía. Así, el $\gamma_{1/2}$-conjunto que estamos proponiendo, S, tiene cardinalidad $2\left(\frac{q-1}{2}\right) + 1 + 2\left(\frac{q-1}{2}\right) = 2(q-1) + 1 = 2q - 2 + 1 = 2q - 1 = t - 1$.



Por lo tanto, en cualquier caso, $\gamma_{1/2}(K[2 \times t]) = t - 1$.

■

Para ver que si $G = K[3 \times t]$, entonces $\gamma_{1/2}(G) = t$, primero haremos las siguientes observaciones.

Observación 3 *Si la columna p, C_p, es vacía, entonces $C_{p+1} \neq \emptyset$.*

Demostración :

Sea S un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[3 \times t]$. Denotaremos a los vértices de $K[3 \times t]$ por $V(K[3 \times t]) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 3$, es decir, i es el número de renglón y $1 \leq j \leq t$ es el número de columna $\}$. Supongamos que existen dos columnas consecutivas vacías C_p y C_{p+1}.

Si C_p es la primera columna o C_{p+1} es la última columna, entonces el vértice $v_{1,1}$ o el véritce $v_{1,p+1}$ (dependiendo el caso) no estarían $\frac{1}{2}$-dominados pues necesitaría que dos de sus tres vecinos estuvieran en S pero ninguno de ellos está pues las columnas son vacías.

Si C_p no es la primera columna ni C_{p+1} es la última columna, entonces el vértice $v_{1,p}$ no estaría $\frac{1}{2}$-dominado pues necesitaría que tres de sus sus cinco vecinos estuvieran en S pero a lo más pueden estar dos porque los otros tres ($v_{2,p}, v_{1,p+1}$ y $v_{2,p+1}$) pertenecen a las columnas vacías.

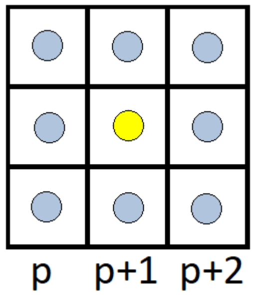
■

Observación 4 *Sea C_p vacía con $p \neq t$. Si $|C_{p+1} \cap S| = 1$, entonces $|C_{p+2} \cap S| = 3$.*

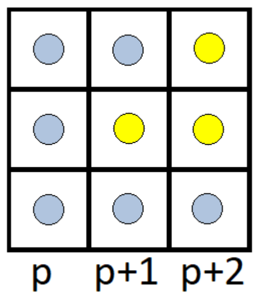
Demostración :

Notemos que C_{p+2} debe existir, de lo contrario, $|C_{p+2} \cap S|$ debería ser distinto de 1 para que S fuera $\frac{1}{2}$-dominante.

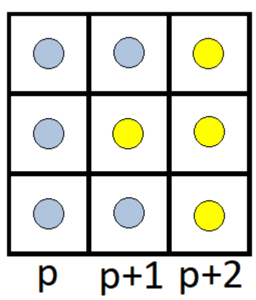
El vértice de C_{p+1} que está en S debe ser $v_{2,p+1}$ ya que si fuera cualquiera de los otros dos ($v_{1,p+1}$ o $v_{3,p+1}$) entonces existiría un vértice en C_p que no estaría $\frac{1}{2}$-dominado.



En este caso, para que el vértice $v_{1,p+1}$ esté $\frac{1}{2}$-dominado, tres de sus vecinos deben de estar en S, por lo que necesitamos incluir a los vértices $v_{1,p+2}$ y $v_{2,p+2}$.



Análogamente, para que el vértice $v_{3,p+1}$ esté $\frac{1}{2}$-dominado, tres de sus vecinos deben de estar en S, por lo que necesitamos incluir al vértice $v_{3,p+2}$.



Así, $|C_{p+2} \cap S| = 3$.

■

Como corolario de las observaciones 3 y 4, enunciamos lo siguiente.

Corolario 28 *Sea C_p vacía con $p \neq t$. Entonces a la derecha de C_p y a lo máximo a dos pasos, existe una columna con 2 o 3 elementos en S.*

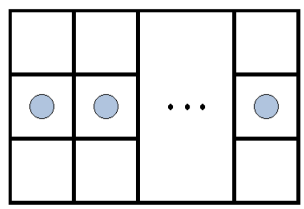
Proposición 29 *Si* $G = K[3 \times t]$, *entonces* $\gamma_{1/2}(G) = t$.

Demostración:

Sea $G = K[3 \times t]$.

i) Primero demostraremos que $\gamma_{1/2}(G) \leq t$.

Un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante se encuentra escogiendo todos los vértices en el segundo renglón de G. Así, si S es un $\gamma_{1/2}$-conjunto para G, sabemos que $|S| \leq t$.



ii) Ahora demostraremos que t es una cota inferior para $\gamma_{1/2}(G)$.

Sea S un $\gamma_{1/2}$-conjunto para G. Sea w el número de columnas de G que tienen los tres vértices en S. Similarmente, sea x (respectivamente, y y z) el número de columnas de G con dos (respectivamente, uno y cero) vértices en S. Entonces, $|S| = 3w + 2x + y$ y $t = w + x + y + z$. Por lo tanto, $|S| - t = 3w + 2x + y - (w + x + y + z) = 2w + x - z$. Si C_t es vacía, entonces $w + x \geq z - 1$ y $w \geq 1$, lo que implica que $|S| - t \geq w + (z-1) - z = w - 1 \geq 0$, es decir, $|S| \geq t$. Si C_t no es vacía, entonces $w + x \geq z$, lo que implica que $|S| - t \geq w + z - z = w \geq 0$, es decir, $|S| \geq t$.

En cualquier caso, $t \leq |S| = \gamma_{1/2}(G)$.

■

Para gráficas más grandes $K[s \times t]$, buscamos cotas para el número de $\frac{1}{2}$-dominación.

La primera cota es obvia por la demostración anterior. Esto es:

Proposición 30 *Sean* $k, t \in \mathbb{Z}^+$. *Entonces*

$$\gamma_{1/2}(K[(2k+1) \times t]) \leq kt.$$

Demostración:

Sea $S = \{v_{i,j} \mid i \text{ es par}, 1 \leq j \leq t\}$.

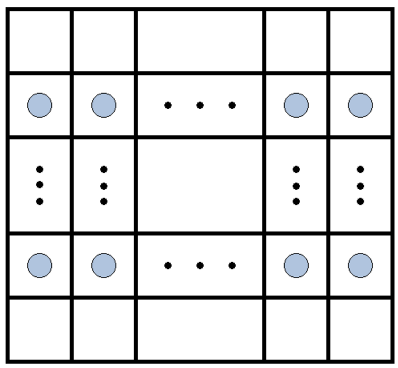
Si $v \notin S$, entonces:

(a) $d(v) = 3$ implica que $|N(v) \cap S| = 2 \geq \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}|N(v)|$.

(b) $d(v) = 5$ implica que $|N(v) \cap S| = 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2}|N(v)|$.

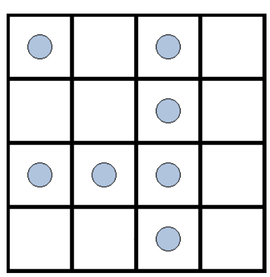
(c) $d(v) = 8$ implica que $|N(v) \cap S| = 6 \geq \frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{1}{2}|N(v)|$.

Por lo tanto, S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante de $K[(2k+1) \times t)]$ con kt vértices y así, $\gamma_{1/2}(K[(2k+1) \times t]) \leq kt$.



■

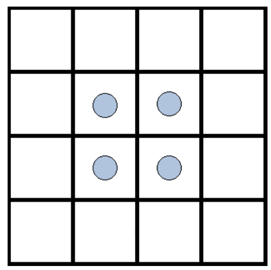
Luego, examinamos gráficas de la forma $K[s \times t]$, con s un entero par y t suficientemente grande. Primero, notemos que $\gamma_{1/2}(K[4 \times 4]) \leq 7$, tomando como conjunto $\frac{1}{2}$-dominante a todos los vértices de la tercera columna, junto con los vértices $v_{1,1}$, $v_{3,1}$, $v_{3,2}$, donde v_{ij} denota el vértice en la fila o renglón i y la columna j.



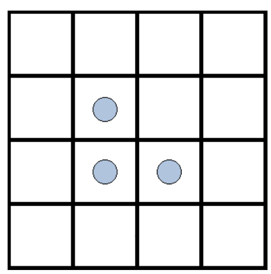
Ahora comprobaremos que $\gamma_{1/2}(K[4 \times 4]) = 7$.

Sea S un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4 \times 4]$.

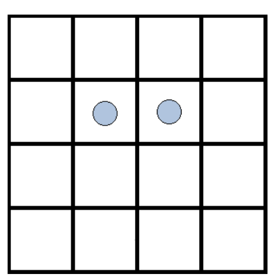
Si $\{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,2}, v_{3,3}\} \subseteq S$, entonces, como las vecindades de las esquinas son ajenas dos a dos, para $\frac{1}{2}$-dominar a las cuatro esquinas hacen falta al menos otros cuatro elementos en S. Por lo tanto, $|S| \geq 8$.



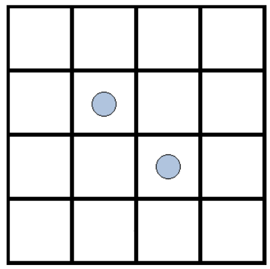
Si $\{v_{2,2}, v_{3,2}, v_{3,3}\} \subseteq S$, entonces, como las vecindades de las esquinas son ajenas dos a dos, para $\frac{1}{2}$-dominar a las cuatro esquinas hacen falta al menos otros cuatro elementos en S (uno por cada esquina). Por lo tanto, $|S| \geq 7$.



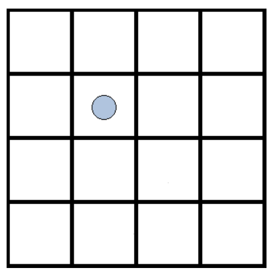
Si $\{v_{2,2}, v_{3,3}\} \subseteq S$, entonces, como las vecindades de las esquinas son ajenas dos a dos, para $\frac{1}{2}$-dominar a las esquinas $v_{1,1}$ y $v_{1,4}$ hacen falta al menos otros dos elementos en S. Además, para $\frac{1}{2}$-dominar a las esquinas $v_{4,1}$ y $v_{4,4}$ se necesitan por lo menos cuatro elementos. Por lo tanto, $|S| \geq 8$.



Si $\{v_{2,2}, v_{2,3}\} \subseteq S$, entonces, para $\frac{1}{2}$-dominar la primer columna se necesitan al menos tres elementos más y similarmente para la cuarta columna. Por lo tanto, $|S| \geq 8$.



Si $v_{2,3} \in S$, para $\frac{1}{2}$-dominar a las esquinas $v_{1,4}$, $v_{4,1}$ y $v_{4,4}$ se necesitan al menos seis elementos más (dos por cada esquina). Por lo tanto, $|S| \geq 7$.



Por lo tanto, en cualquier caso, $\gamma_{1/2}(K[4 \times 4]) \geq 7$ y ya dimos una configuración donde es exactamente 7. Así, $\gamma_{1/2}(K[4 \times 4]) = 7$.

Proposición 31 *Si $G = K[4 \times t]$, entonces $\gamma_{1/2}(G) \leq 2t - 2$ para $t \geq 5$.*

Demostración:

Tenemos dos casos:

i) $t = 2k + 1$ con $k \geq 2$ o
ii) $t = 2k$ con $k \geq 3$.

i) Para $t = 2k+1$ con $k \geq 2$, sea $S = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 4 \text{ y } j \text{ es par}\}$. Es claro de la figura 6.5 que S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4\times(2k+1)]$. Por lo tanto, escogemos $\frac{t-1}{2}$ columnas. Así, $\gamma_{1/2} \leq |S| = 4\left(\frac{t-1}{2}\right) = 2(t-1) = 2t-2$.

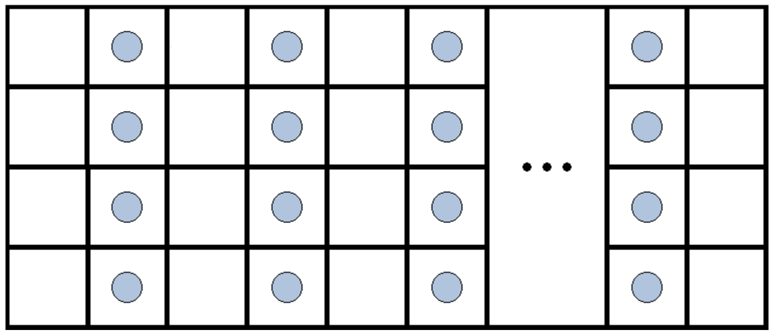


Figura 6.5: Conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4 \times (2k+1)]$

ii) Para $t = 2k$ con $k \geq 3$, como al menos hay 6 columnas, entonces sea $S = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq 4 \text{ y } j \geq 5 \text{ impar}\} \cup C_2 \cup \{v_{3,3}, v_{2,4}\}$. Es claro de la figura 6.6 que S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4 \times (2k)]$. Así, el número de columnas llenas es $2 + \frac{2k-6}{2} = 2 + k - 3 = k - 1$. Por lo tanto, $\gamma_{1/2} \leq |S| = 4(k-1) + 2 = 4k - 4 + 2 = 4k - 2 = 2t - 2$.

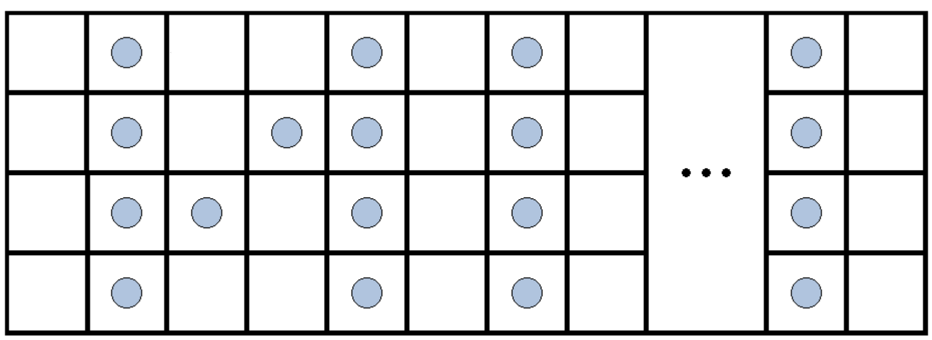


Figura 6.6: Conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4 \times (2k)]$.

Por lo tanto, $\gamma_{1/2}(G) \leq 2t - 2$ para $t \geq 5$.

■

Veamos un ejemplo donde se tiene una desigualdad estricta de la proposición 31.

Existe un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante de cardinalidad 13 para la gráfica $K[4 \times 8]$, como se muestra en la figura 6.7.

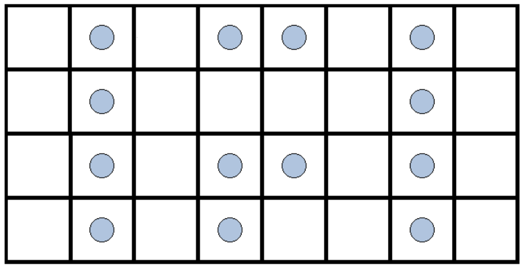
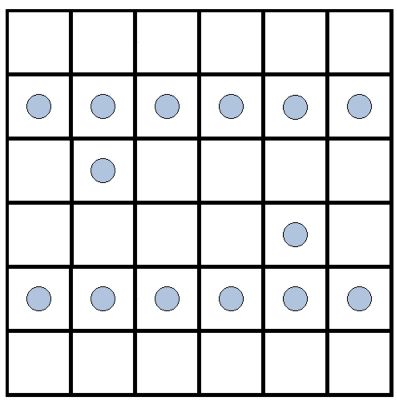


Figura 6.7: conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[4 \times 8]$

Así, para la gráfica $G = K[4 \times 8]$, $\gamma_{1/2}(G) = 13 < 14 = 2(8) - 2$.

Woolbright, en comunicación personal con Dunbar et al. (2000), demostró que $\gamma_{1/2} K[6 \times 6]$ es 14. [8]



Observación *Notemos que $K[s \times t]$ tiene el mismo número de $\frac{1}{2}$-dominación que la gráfica $K[t \times s]$.*

Ahora nuestro objetivo es encontrar una cota superior para $\gamma_{1/2}(K[s \times t])$ para cualquier entero par $s \geq 6$.

Proposición 32 $\gamma_{1/2}(K[6 \times t]) \leq 3t - 3$.

Demostración:

Tenemos dos casos:

i) $t = 2k + 1$ con $k \geq 2$ o
ii) $t = 2k$ con $k \geq 3$.

i) Por la proposición 30 sabemos que $\gamma_{1/2}(K[6 \times (2k+1)]) \leq 6k = 6k+3-3 = 3(2k+1)-3 = 3t-3$.

ii) Sea $S = \{v_{i,j} \mid i = 2,\ i \geq 5 \text{ impar y } 1 \leq j \leq 6\} \cup \{v_{3,2}, v_{4,5}\}$. De la figura 6.8 se puede ver que S es un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[2k \times 6]$. Por lo tanto, $\gamma_{1/2}(K[6 \times 2k]) \leq |S| = 6+1+1+6+\frac{6(2k-6)}{2} = 14+3(2k-6) = 14+6k-18 = 6k-4 = 3t-4 < 3t-3$.

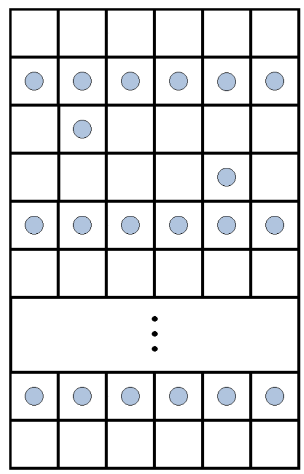


Figura 6.8: Conjunto $\frac{1}{2}$-dominante para $K[2k \times 6]$

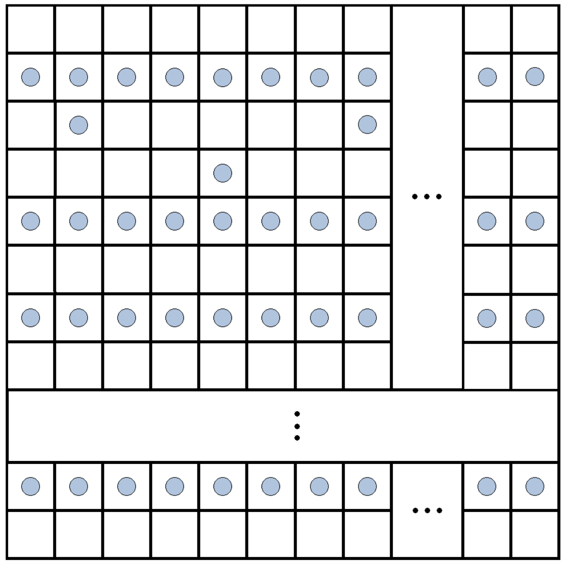
■

Así, estamos listos para entender mejor la configuración que garantiza la siguiente proposición.

Proposición 33 *Para* $k \geq 3, t \geq 5$, $\gamma_{1/2}(K[2k \times t]) \leq kt - 3$.

Demostración:

Sea S un conjunto $\frac{1}{2}$-dominante. Como $k \geq 3$, entonces hay al menos seis renglones. Tomamos todos los vértices de los renglones 2 y 5 más algunos vértices de los renglones 3 y 4 como parte del conjunto S (como se muestra en la figura) de tal manera que en los renglones 3 y 4 tenemos $\lceil \frac{t}{3} \rceil$ elementos en S. A partir del renglón 7, tomamos uno lleno y uno vacío alternadamente hasta el último renglón. Así, $|S| \leq \frac{t(2k-6)}{2} + t + t + \lceil \frac{t}{3} \rceil = t(k-3+2) + \lceil \frac{t}{3} \rceil = tk - t + \lceil \frac{t}{3} \rceil \leq tk - 3$ pues $t \geq 5$.



Por lo tanto, $\gamma_{1/2}(K[2k \times t]) \leq kt - 3$, para $k \geq 3, t \geq 5$.

■

Resumimos los resultados de este capítulo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1/2}(K[2 \times 1]) &= 1 \\
\gamma_{1/2}(K[2 \times 2]) &= 2 \\
\gamma_{1/2}(K[2 \times 3]) &= 2 \\
\gamma_{1/2}(K[2 \times 4]) &= 4 \\
\gamma_{1/2}(K[2 \times t]) &= t - 1, \quad t \geq 5 \\
\gamma_{1/2}(K[3 \times t]) &= t \\
\gamma_{1/2}(K[4 \times 4]) &= 7 \\
\gamma_{1/2}(K[4 \times t]) &\leq 2t - 2, \quad t \geq 5 \\
\gamma_{1/2}(K[6 \times (2k+1)]) &\leq 6k, \quad k \geq 2 \\
\gamma_{1/2}(K[6 \times 2k]) &< 6k - 3, \quad k \geq 3 \\
\gamma_{1/2}(K[(2k+1) \times t]) &\leq kt \\
\gamma_{1/2}(K[2k \times t]) &\leq kt - 3, \quad k \geq 3, t \geq 5
\end{aligned}$$

Notemos que a partir de $s = 4$ y $t \geq 5$, no tenemos una igualdad para $\gamma_{1/2}$ sino solamente cotas.

Capítulo 7

Algunas observaciones sobre la α-dominación

Probaremos una serie de cotas superiores para el número de α-dominación de una gráfica G.

Teorema 34 *Si $\alpha \in (0,1)$ y G es una gráfica de orden n, entonces $\gamma_\alpha(G) \leq \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil}\right) n$.*

Demostración:

Sean $r = \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ una partición de V_G tal que $\sum_{t=1}^{r} \sum_{u \in V_t} |N(u) \cap V_t|$ es mínima.

Demostraremos las siguientes dos afirmaciones:

1. Para toda $v \in V_i$ se tiene que $|N(v) \cap V_i| \leq (1-\alpha)d(v)$.
2. Si $v \in V_i$ y $\sum_{j=1, j\neq i}^{r} |N(v) \cap V_j| \geq \alpha d(v)$ para todo $i = 1, \cdots, r$, entonces $v - V_i$ es α-dominante para todo $i = 1, \cdots, r$.

1. Supongamos por contradicción que $|N(v) \cap V_i| > (1-\alpha)d(v)$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $|N(v) \cap V_j| < (1-\alpha)d(v)$ ya que, de lo contrario, se tendría que para toda $j = 1, \ldots, r$, $|N(v) \cap V_j| \geq (1-\alpha)d(v)$ lo que implicaría que $d(v) = \sum_{p=1}^{r} |N(v) \cap V_p| > r(1-\alpha)d(v) \geq d(v)$ lo cual es una contradicción y esta última desigualdad se cumple pues notemos que $r(1-\alpha) \geq 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in V_1$ y $|N(v) \cap V_2| < (1-\alpha)d(v)$. Definimos una nueva partición de $V_G = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$ donde $W_1 = V_1 - \{v\}, W_2 = V_2 \cup \{v\}$ y $W_l = V_l$ para $3 \leq l \leq r$. Notemos que:

- Como $V_1 = W_1 \cup \{v\}$, entonces

$$\sum_{z\in V_1} |N(z)\cap V_1| = \sum_{z\in W_1} |N(z)\cap V_1| + |N(v)\cap V_1|$$

$$= \sum_{z\in W_1} |N(z)\cap W_1| + \sum_{z\in W_1} |N(z)\cap \{v\}| + |N(v)\cap V_1|.$$

Observemos que $|N(v)\cap V_1| = |N(v)\cap W_1|$.

Por otro lado,

$$x \in N(v)\cap W_1 \Leftrightarrow x \in W_1 \text{ y } x \in N(v) \Leftrightarrow v \in N(x).$$

Por lo tanto, $|N(v)\cap W_1| = \sum_{z\in W_1} |N(z)\cap \{v\}|$.

En conclusión:

$$\sum_{z\in V_1} |N(z)\cap V_1| = \sum_{z\in W_1} |N(z)\cap W_1| + 2|N(v)\cap W_1|.$$

- Como $V_2 = W_2 - \{v\}$, entonces

$$\sum_{z\in V_2} |N(z)\cap V_2| = \sum_{z\in W_2} |N(z)\cap V_2| - |N(v)\cap V_2|$$

$$= \sum_{z\in W_2} |N(z)\cap W_2| - \sum_{z\in W_2} |N(z)\cap \{v\}| - |N(v)\cap V_2|.$$

Observemos que $|N(v)\cap V_2| = |N(v)\cap W_2|$.

Por otro lado,

$$x \in N(v)\cap V_2 \Leftrightarrow x \in V_2 \text{ y } x \in N(v)$$

$$\Leftrightarrow x \in V_2 \text{ y } v \in N(x) \Leftrightarrow x \in W_2 \text{ y } v \in N(x).$$

Por lo tanto, $|N(v)\cap V_2| = \sum_{z\in W_2} |N(z)\cap \{v\}|$.

En conclusión:

$$\sum_{z\in V_2} |N(z)\cap V_2| = \sum_{z\in W_2} |N(z)\cap W_2| - 2|N(v)\cap V_2|.$$

Así,

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{u\in W_t}|N(u)\cap W_t| = \sum_{u\in W_1}|N(u)\cap W_1|+\sum_{u\in W_2}|N(u)\cap W_2|+\sum_{t=3}^{r}\sum_{u\in W_t}|N(u)\cap W_t|$$

$$= \sum_{u\in V_1}|N(u)\cap V_1|-2|N(v)\cap V_1|+\sum_{u\in V_2}|N(u)\cap V_2|+2|N(v)\cap V_2|+\sum_{t=3}^{r}\sum_{u\in W_t}|N(u)\cap W_t|$$

y como $W_t = V_t$ para $3 \leq t \leq r$, entonces:

$$= \sum_{t=1}^{r}\sum_{u\in V_t}|N(u)\cap V_t| - 2|N(v)\cap V_1| + 2|N(v)\cap V_2|$$

$$< \sum_{t=1}^{r}\sum_{u\in V_t}|N(u)\cap V_t|$$

pues $|N(v)\cap V_1| > (1-\alpha)d(v) > |N(v)\cap V_2|$.

Pero esto es una contradicción pues habíamos supuesto que $\sum_{t=1}^{r}\sum_{u\in V_t}|N(u)\cap V_t|$ era mínima. Por lo tanto, para cada $t \in \{1,2,\ldots,r\}$ tenemos que $|N(u)\cap V_t| \leq (1-\alpha)d(u)$ para toda $u \in V_t$.

2. Si $v \in V_t$, entonces

$$d(v) = |N(v)\cap V_t|+\sum_{j\neq t, j=1}^{r}|N(v)\cap V_j| \leq (1-\alpha)d(v)+\sum_{j\neq t, j=1}^{r}|N(v)\cap V_j|$$

lo cual implica que

$$\sum_{j\neq t, j=1}^{r}|N(v)\cap V_j| \geq \alpha d(v).$$

Por lo tanto, $V_G - V_t$ es un conjunto α-dominante de G para todo $t = 1,\cdots,r$.

Observación *Si para toda t se tiene que $|V_t| < \frac{n}{r}$, entonces $|v| = \sum_{t=1}^{r}|V_t| < n$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe V_i tal que $|V_i| \geq \frac{n}{r}$.*

Sea V_s el máximo de los conjuntos que cumplen $|V_i| \geq \frac{n}{r}$. Como $V_G - V_s$ es un conjunto α-dominante de G:

$$\gamma_\alpha(G) \leq |V_G - V_s| \leq n - \frac{n}{r} = n\left(1-\frac{1}{r}\right).$$

■

Corolario 35 *Si* $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ *y* G *es una gráfica de orden* n*, entonces* $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{2}$.

Demostración:

Por el corolario 13, tenemos que $\gamma_{\frac{1}{2}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y, como sabemos que $\alpha_0 \leq \alpha_1$ implica que $\gamma_{\alpha_0}(G) \leq \gamma_{\alpha_1}(G)$ (lema 7), entonces $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_{\frac{1}{2}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ y para cualquier gráfica G.

■

Proposición 36 *Sea* $\alpha \in (0, 1)$.

i) Si G *es una gráfica bipartita de orden* n*, entonces* $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{1}{2}n$.

ii) Si G *es un cactus no-bipartito de orden* n *y* $g_{imp} := \text{mín}\{\ l(C) \mid C$ *es un ciclo impar en* $G\}$*, entonces* $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right) n$.

Demostración:

(i) Sea $V_G = \{V_1, V_2\}$ la partición de los vértices de G en conjuntos independientes. Sea $|V_1| = n_1 \leq n_2 = |V_2|$.

Si $x \in V_2$, entonces $N(x) \subseteq V_1$ y $N(x) \cap V_1 = N(x)$. Como $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\alpha|N(x)| \leq |N(x)| = |N(x) \cap V_1|$. Es decir, para todo $x \in V_2$ se tiene que $|N(x) \cap V_1| \geq \alpha|N(x)|$. Por lo tanto, V_1 es un conjunto α-dominante con $|V_1| \leq \frac{n}{2}$. Así, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{2}$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Sea G un cactus no-bipartito de orden $n \geq 2$. Que el cactus sea no-bipartito implica que al menos contiene un ciclo impar. Denotaremos a la longitud de un ciclo impar de longitud mínima en G como g_{imp}.

Procederemos por inducción sobre el número de bloques, b, de G. Supongamos que $b = 1$, es decir, G es un ciclo impar de longitud g_{imp}. Por la proposición 3, $\gamma_\alpha(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right) n$, pues $g_{imp} = n$. Ahora, sea $b > 1$ y sea $B = (V_B, A_B)$ un bloque terminal de G, es decir, B tiene exactamente un vértice de corte v. Por hipótesis de inducción, existe un conjunto S_B α-dominante para B tal que $|S_B| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right) |V_B|$.

Observación *Si B es un bloque en el cactus no-bipartito con exactamente un vértice de corte, entonces $B = K_2$ o B es un ciclo impar. Por lo tanto, podemos escoger S_B tal que $v \in S_B$.*

Sean $H_1, H_2, \dots, H_l$ las componentes conexas de $G - V_B$. Notemos que H_i es un cactus que tiene menos bloques que G tal que H_i o es bipartita o la longitud del ciclo impar mínimo en H_i es al menos g_{imp} para $1 \leq i \leq l$.

1) Si H_i es bipartita, por i), $\gamma_\alpha(H_i) \leq \frac{|V_{H_i}|}{2} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)|V_{H_i}|$.

2) Si la longitud del ciclo impar mínimo en H_i es mayor o igual a g_{imp}, entonces, por hipótesis de inducción, $\gamma_\alpha(H_i) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)|V_{H_i}|$.

Sea S_i un conjunto α-dominante de H_i para $1 \leq i \leq l$ tal que $|S_i| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)|V_{H_i}|$, entonces $S = S_B \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l$ es un conjunto α-dominante para G tal que $|S| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)(|V_B| + |V_{H_1}| + |V_{H_2}| + \cdots + |V_{H_l}|) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)n$. Así, $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{g_{imp}}\right)n$. ■

En [20] se demuestra que para toda gráfica G de orden n sin vértices aislados, $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. Además, en [9] y [21] se da una caracterización para las gráficas G tales que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$.

Sin embargo, no es posible dar una caracterización similar para el caso de la α-dominación. Uno de los problemas más evidentes es que el número de α-dominación de una gráfica G no es monótono con respecto a subgráficas generadoras, es decir, si $G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$ son gráficas tales que $V_G = V_H$ y $A_H \subseteq A_G$, entonces $\gamma(H) \geq \gamma(G)$ pero no se puede afirmar que $\gamma_\alpha(H) \geq \gamma_\alpha(G)$.

Por ejemplo, consideremos la estrella $K_{1,5}$ de orden 6, la gráfica completa K_6 de orden 6 y el árbol T que se construye al subdividir dos aristas de $K_{1,3}$. Claramente, $K_{1,5}$ y T son dos subgráficas generadoras de K_6 pero $1 = \gamma_{\frac{2}{5}}(K_{1,5}) < 2 = \gamma_{\frac{2}{5}}(K_6) < 3 = \gamma_{\frac{2}{5}}(T)$.

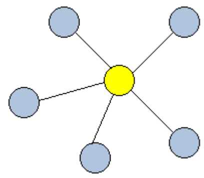


Figura 7.1: $K_{1,5}$

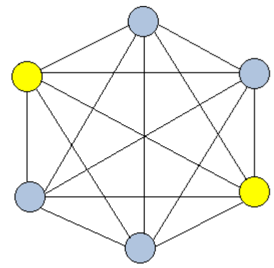


Figura 7.2: K_6

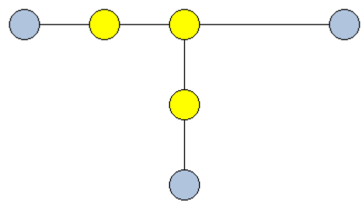


Figura 7.3: $K_{1,3}$ con dos aristas subdivididas

Cerraremos este capítulo con una caracterización para árboles.

Observación *En cualquier gráfica $G \neq P_2$, existe un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto que contiene a todos los vértices soporte de G.* Esto se debe a lo siguiente:

Sea S un γ_α-conjunto, en particular, S es un conjunto dominante. Para que S sea mínimo, sólo es necesario que ocurra exactamente una de las siguientes posibilidades para los vértices de grado 1, $v \in V_G$:

i) $v \in S$ o
ii) $N(v) \in S$.

Notemos que si estamos en el caso (i), podemos eliminar a v de S y agregar su soporte, $N(v)$, a S. Así, nos econtramos ahora en el caso (ii) y la cardinalidad de S no cambia. Por lo tanto, siempre existe un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto que contiene a todos los vértices soporte de G, para cualquier $G \neq P_2$.

Teorema 37 *Si $\alpha \in (0,1)$ y T es un árbol de orden n, entonces $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$ si y sólo si T tiene un apareamiento perfecto M tal que* $\min\{d_T(u), d_T(v)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ *para toda $uv \in M$.*

Demostración:

Para la necesidad, procederemos por inducción sobre el orden n del árbol T. Si $n = 2$, entonces $T = K_2$, por lo tanto, propongo el apareamiento perfecto $M = A_T$ y como $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$, entonces $\gamma_\alpha(T) = \frac{2}{2} = 1$. Sean u y v los dos vértices de T. Notemos que $d_T(u) = d_T(v) = 1$, así, $\min\{d_T(u), d_T(v)\} = 1 < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ para toda $uv \in M$ pues $\alpha \in (0,1) \Leftrightarrow -1 < -\alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{1-\alpha} \leq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$.

Sea T un árbol de orden $n \geq 3$ tal que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$. Sean u una hoja de T y v el soporte de u en T. Tenemos dos casos: v es soporte fuerte o v es soporte débil. Si v es soporte fuerte, entonces sea $w \neq u$ otra hoja de T tal que $vw \in A_T$ y sea $T' = T - \{u\}$. Por la observación previa a este teorema, existe un γ_α-conjunto S' de T' que contiene a v. Por lo tanto, S' también es un conjunto α-dominante de T pues $|N(u) \cap S'| = 1 \geq \alpha|N(u)| = \alpha$, lo cual implica que $\gamma_\alpha(T) \leq \gamma_\alpha(T') \leq \frac{n-1}{2}$ lo cual es una contradicción pues $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$. Por lo tanto, todos los vértices soporte de T son débiles.

Observación $T - \{u, v\}$ *es conexo si y sólo si* $d_T(v) = 2$. *Si* $d_T(v) \geq 3$, *por cada* $x_i \in N(v) - \{u\}$, *se tiene una componente conexa en* $T - \{u, v\}$.

Sean $T_1, T_2, \ldots, T_l$ las componentes conexas de $T - \{u, v\}$ y sea S_i un γ_α-conjunto para cada T_i. Notemos que $\{v\} \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l$ es un conjunto α-dominante de T y así obtenemos lo siguiente

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1 = \gamma_\alpha(T) - 1 \leq \sum_{i=1}^{l} |S_i| = \sum_{i=1}^{l} \gamma_\alpha(T_i) \leq \sum_{i=1}^{l} \frac{|V_{T_i}|}{2} = \frac{n-2}{2}$$

lo que implica que

$$\sum_{i=1}^{l} \gamma_\alpha(T_i) = \sum_{i=1}^{l} \frac{|V_{T_i}|}{2}$$

y como $\gamma_\alpha(T_i) \leq \frac{|V_{T_i}|}{2}$, entonces $\gamma_\alpha(T_i) = \frac{|V_{T_i}|}{2}$.

Por hipótesis de inducción, para toda $i = 1, 2, \ldots, l$, existe M_i un apareamiento perfecto de T_i. Además, $M = \{uv\} \cup M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_l$ es un apareamiento perfecto de T.

Sólo resta demostrar que $\min\{d_T(x), d_T(y)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ para todo $xy \in M$.

Procederemos por contradicción. Sea $xy \in M$ tal que $\min\{d_T(x), d_T(y)\} \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$. Se define $S = \{\ w \in T \mid \text{dist}(w, x) \text{ es impar y } \text{dist}(w, x) < \text{dist}(w, y)\} \cup$

$\{\, w \in T \mid \text{dist}(w, y)$ es impar y $\text{dist}(w, y) < \text{dist}(w, x)\}$. Veamos por ejemplo la figura 7.4.

Afirmamos que S es un conjunto α-dominante de T tal que $x, y \notin S$ y $|\{u, v\} \cap S| = 1$ para toda $uv \in M - \{xy\}$. En efecto:

Si $w \notin S$ y $w \neq x$, $w \neq y$, entonces $|N(w) \cap S| = |N(w)| \geq \alpha|N(w)|$. Además, $|N(x) \cap S| = |N(x)| - 1$ y $|N(y) \cap S| = |N(y)| - 1$. Por lo tanto, se quiere ver que $|N(x)| - 1 \geq \alpha|N(x)|$ y $|N(y)| - 1 \geq \alpha|N(y)|$, lo cual es cierto pues:

$$\text{mín}\{d_T(x), d_T(y)\} \geq \left\lceil \frac{1}{1-\alpha} \right\rceil \Rightarrow |N(x)| \geq \left\lceil \frac{1}{1-\alpha} \right\rceil \Leftrightarrow |N(x)| \geq \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |N(x)|(1-\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow |N(x)| - \alpha|N(x)| \geq 1 \Leftrightarrow |N(x)| - 1 \geq \alpha|N(x)|.$$

Análogamente, $|N(y)| - 1 \geq \alpha|N(y)|$.

Por lo tanto, S es un conjunto α-dominante de T, esto implica que $\gamma_\alpha(T) \leq |S| \leq \frac{n-2}{2}$ lo cual contradice que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$.

Así, $\text{mín}\{d_T(x), d_T(y)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ para todo $xy \in M$.

Para la suficiencia, sea T un árbol que tiene un apareamiento perfecto M tal que $\text{mín}\{d_T(u), d_T(v)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ para toda $uv \in M$. Sea S un γ_α-conjunto de T. Supongamos que existe $uv \in M$ tal que $u, v \notin S$, entonces $d_T(u) - 1 \geq |N(u) \cap S| \geq \alpha d_T(u)$ y análogamente $d_T(v) - 1 \geq |N(v) \cap S| \geq \alpha d_T(v)$, es decir, $d_T(u) \geq \alpha d_T(u) + 1 \Leftrightarrow d_T(u) - \alpha d_T(u) \geq 1 \Leftrightarrow (1-\alpha) d_T(u) \geq 1 \Leftrightarrow d_T(u) \geq \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow d_T(u) \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$. Análogamente, $d_T(v) \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$, lo cual implica que $\text{mín}\{d_T(u), d_T(v)\} \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$, que contradice nuestra suposición. Por lo tanto, para toda $uv \in M$, $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$, es decir, $|\{u, v\} \cap S| \geq 1$, lo que implica que $|M| \leq \sum_{uv \in M} |\{u, v\} \cap S|$.

Por otro lado, como M es un apareamiento perfecto, $|M| = \frac{n}{2}$. Por la proposición 35 (recordemos que los árboles son gráficas bipartitas), $\gamma_\alpha(T)$ $\leq \frac{n}{2}$. Acomodando estos resultados:

$$\frac{n}{2} = |M| \leq \sum_{uv \in M} |\{u, v\} \cap S| = |S| = \gamma_\alpha(T) \leq \frac{n}{2}$$

lo que implica que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$.

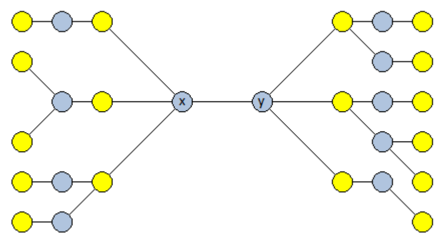


Figura 7.4: Ejemplo de T donde los vértices amarillos conforman al conjunto S, descritos en la demostración del teorema 37.

$\blacksquare$

Aplicando el teorema 37, se tiene que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$ si y sólo si T tiene un apareamiento perfecto M tal que $\min\{d_T(u), d_T(v)\} < 2$ para toda $uv \in M$. Es decir, para todo $uv \in M$, v es una hoja o u es una hoja, y por ser M un apareamiento perfecto, todo soporte de T es un soporte débil.

Capítulo 8

Eliminación de un vértice en la α-dominación

Sea $S(G)$ el conjunto de todos los vértices soporte de G.

Proposición 38 *Sea G una gráfica sin vértices aislados. Para cualquier vértice $v \in V_G - S(G)$ y cualquier $0 < \alpha \leq 1$, se tiene que $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - v) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$ y estas cotas son justas.*

Demostración:

Sea G una gráfica sin vértices aislados y $v \in V_G - S(G)$. Sea D un $\gamma_\alpha(G-v)$-conjunto, esto es, para todo $x \in V(G-v) - D$, $|N_{G-v}(x) \cap D| \geq \alpha|N_{G-v}(x)|$ y $|D| = \gamma_\alpha(G-v)$, lo que implica que $D \cup \{v\}$ es un conjunto α-dominante de G. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) \leq |D| + 1 \Leftrightarrow \gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G-v) + 1 \Leftrightarrow \gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G-v)$.

Para demostrar que $\gamma_\alpha(G-v) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$:

Sea D un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto. Si $v \notin D$, entonces D es un conjunto α-dominante para $G-v$ y por lo tanto $\gamma_\alpha(G-v) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$. Así, podemos suponer que $v \in D$. Entonces $D \cup N_G(v) - \{v\}$ es un conjunto α-dominante para $G-v$ y por lo tanto $\gamma_\alpha(G-v) \leq |D \cup N_G(v) - \{v\}|$, es decir, $\gamma_\alpha(G-v) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$.

■

Para ver que la cota superior es justa, sea x el centro de una estrella $K_{1,k}$ para $k \geq 2$, y $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Sea G la gráfica obtenida de $K_{1,k}$ al subdividir cada arista de $K_{1,k}$ tres veces. Note que G tiene $3k$ vértices de grado dos, k

vértices de grado uno y un vértice de grado k (el vértice x). Ahora, es fácil ver que $\gamma_\alpha(G) = k+1$, y $\gamma_\alpha(G-x) = 2k$. En efecto:

Sea D un conjunto α-dominante, con $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Si $|N(v)| = 1$, entonces $|N(v) \cap D| \geq 1$.
Si $|N(v)| = 2$, entonces $|N(v) \cap D| \geq 1$.
Si $|N(v)| = k$, entonces $|N(v) \cap D| \geq \frac{k}{2}$.

Así, tomando D como el conjunto de vértices amarillos (figura 8.1), cubrimos todas las condiciones para que D sea un conjunto α-dominante, con $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Además, este conjunto es mínimo. Por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) = k+1$. Por otro lado, $\gamma_\alpha(G-x) = 2k$ pues $G-x$ son k copias de P_4 y por la proposición 2, $\gamma_\alpha(P_4) = \lceil \frac{4}{3} \rceil = 2$ para $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

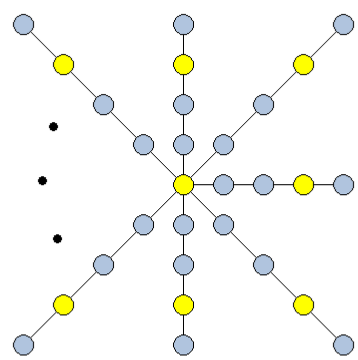


Figura 8.1: $K_{1,k}$

Así, $\gamma_\alpha(G-x) = 2k = (k+1)+k-1 = \gamma_\alpha(G) + d_G(x) - 1$. Para ver que la cota inferior es justa, consideremos el ciclo C_4. Sabemos por la proposición 3 que $\gamma_\alpha(C_4) = 2$ para $0 < \alpha \leq 1$. Para cualquier $v \in V(C_4)$, $\gamma_\alpha(C_4 - v) = \gamma_\alpha(P_3) = 1$. Así, $\gamma_\alpha(C_4) - 1 = \gamma_\alpha(C_4 - v)$.

Ahora, podemos dar una definición de gráfica γ_α-vértice crítica:

Definición. Llamamos a una gráfica G, α-**dominante vértice crítica** o simplemente γ_α-**vértice crítica** si para cualquier $v \in V_G - S(G)$, se tiene que $\gamma_\alpha(G - v) < \gamma_\alpha(G)$ o $S(G) = V_G$.

Observemos que P_2 es γ_α-vértice crítica.

Ahora presentaremos algunos resultados en gráficas γ_α-vértice críticas.

Proposición 39 *Una gráfica G es γ_α-vértice crítica si y sólo si para cualquier vértice x tal que $x \notin S(G)$, existe un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto D que contiene a x tal que $pn_\alpha(x, D) = \{x\}$.*

Demostración:

Para la necesidad, por la proposición 38, $x \notin S(G)$ implica que $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - x)$ y $\gamma_\alpha(G - x) < \gamma_\alpha(G) - 1$, esto es equivalente a $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - x) < \gamma_\alpha(G)$, lo que implica que $\gamma_\alpha(G) - 1 = \gamma_\alpha(G - x)$. Sea D' un $\gamma_\alpha(G - x)$-conjunto, es decir, $|D'| = \gamma_\alpha(G - x)$, entonces $D = D' \cup \{x\}$ es un conjunto α-dominante de G y $pn_\alpha(x, D) = \{x\}$.

Para la suficiencia, sean $x \notin S(G)$ y D un $\gamma_\alpha(G)$-conjunto que contiene a x tal que $pn_\alpha(x, D) = \{x\}$. Entonces $D - \{x\}$ es un conjunto α-dominante para $G - x$, lo cual implica que $\gamma_\alpha(G - x) < \gamma_\alpha(G)$. Por lo tanto, G es γ_α-vértice crítica.

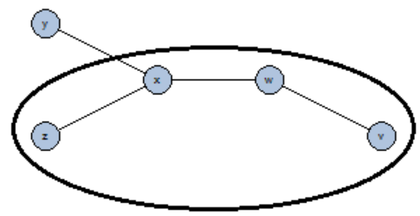
■

Observación *Para $n \geq 2$, $x \notin S(K_{1,n})$ implica que x no es el centro de la estrella. Así, $\gamma_\alpha(G - x) = \gamma_\alpha(G)$. Por lo tanto, $K_{1,n}$ no es γ_α-vértice crítica. Cuando $n = 1$, $K_{1,1}$ es isomorfa a la gráfica P_2 que ya vimos que es γ_α-vértice crítica.*

Proposición 40 *Si G es γ_α-vértice crítica, entonces todo vértice soporte es débil.*

Demostración:

Sea G una gráfica con $n \geq 2$. Supongamos que $x \in S(G)$ es soporte fuerte. Sean $y, z \in N(x)$ tales que y, z son hojas. Como $n > 1$, por la observación anterior, podemos suponer que G no es estrella, lo que implica que x tiene un vecino w de grado mayor o igual que 2. En $G - y$, x sigue siendo soporte de z. Por lo tanto, existe un $\gamma_\alpha(G - y)$-conjunto D que contiene a x, lo cual implica que D es un conjunto α-dominante de G, por lo tanto, $\gamma_\alpha(G) = \gamma_\alpha(G - y)$. Así, G no es γ_α-vértice crítica.



■

Lema 41 *Una estrella subdividida no es γ_α-vértice crítica.*

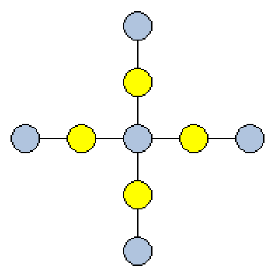


Figura 8.2: Estrella subdividida

Teorema 42 *Sea H una gráfica conexa de orden al menos dos. Entonces $G = cor(H)$ es γ_α-vértice crítica.*

Demostración:

Si $G = cor(H)$, entonces $S(G) = V_H$ es un γ_α-conjunto de G. Sea $z \in V_G - S(G)$, entonces $d(z) = 1$ con $N_G(z) = \{x\}$. Sea $D = S(G) - \{x\}$, entonces D es un γ_α-conjunto de $G - \{z\}$ lo cual implica que $\gamma_\alpha(G - \{z\}) = |D| = |V_H| - 1 < |S(G)| = \gamma_\alpha(G)$. Es decir, G es γ_α-vértice crítica.

■

Sea $\boldsymbol{F}$ la clase de todos los árboles T tal que $T \in \boldsymbol{F}$ si y sólo si:

(1) $T = P_2$ o

(2) diám$(T) \geq 3$, y para cualquier vértice x de T, o x es una hoja o x es un soporte débil.

Observación $\boldsymbol{F}$= { $cor(T)$ | T es un árbol }.

Teorema 43 *Un árbol T es γ_α-vértice crítico para $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(T)}$, si y sólo si $T \in \boldsymbol{F}$.*

Demostración:

Para la necesidad, sea T un árbol γ_α-vértice crítico. Se tienen tres casos respecto al diámetro de T:

i) Si diám$(T) = 1$, entonces $T = P_2$. Por lo tanto, $T \in \boldsymbol{F}$.

ii) Si diám$(T) = 2$, entonces $T = K_{1,n}$ y por la observación previa a la proposición 40, $T = K_{1,1} = P_2$. Por lo tanto, $T \in \boldsymbol{F}$.

iii) Si diám$(T) \geq 3$, supongamos por contradicción que existe $y \in V_T$ tal que y no es soporte y $d(y) > 1$.

Supongamos que para cualquier hoja z, dist$(y, z) = 2$. Como T es γ_α-crítico, por la proposición 39 todo vértice soporte de T es débil, lo que implica que y es el centro de una estrella subdividida y por el lema 41, T no es γ_α-crítico, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, existe al menos una hoja x tal que dist$(x, y) = t \geq 3$.

Sea $P = (x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t = y)$ la trayectoria más corta de x a y.

Observemos que $\alpha\Delta(T) \leq 1$, por lo tanto, D es un γ_α-conjunto de T si y sólo si D es un γ-conjunto de T (dominante clásico).

- Supongamos que $x_2 \notin S(T)$. Por la proposición 39, existe un $\gamma_\alpha(T)$-conjunto D tal que $x_2 \in D$ y $D - x_2$ α-domina a $T - x_2$. Como x es una hoja y x_1 su soporte en $T - x_2$, entonces $D \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$.

  a) Si $x_1 \in D$, definimos $D' = D - \{x_2\}$. Por lo tanto, $|D'| < |D|$ y D' α-domina a T porque x_1 domina a x_2.

  b) Si $x_1 \notin D$, definimos $D' = (D - \{x_1, x_2\}) \cup \{x_1\}$. Por lo tanto, $|D'| < |D|$ y D' α-domina a T.

  En ambos casos, tenemos una contradicción pues $|D'| < |D| = \gamma_\alpha(T)$. Por lo tanto, $x_2 \in S(T)$.

- Sea y_2 una hoja adyacente a x_2 y supongamos que x_3 no es soporte de T. Nuevamente, por la proposición 39, existe D un γ_α-conjunto de T tal que $x_3 \in D$ y $D - x_3$ α-domina a $T - x_3$. Ahora y_2 es una hoja con soporte x_2 en $T - x_3$, por lo tanto, $D \cap \{x_2, y_2\} \neq \emptyset$. Repetimos el proceso anterior y llegamos a una contradicción, por lo tanto, $x_3 \in S(T)$.

Repitiendo los pasos anteriores, tenemos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}\} \in S(T)$.

Aplicando de nuevo la proposición 39 a $x_t = y \notin S(T)$, existe un D γ_α-conjunto de T tal que $y \in D$ y $D - y$ α-domina a $T - y$. Por lo tanto, $\{x_{t-1}, y_{t-1}\} \cap D \neq \emptyset$, donde y_{t-1} es una hoja con soporte x_{t-1} lo cual nos llevaría a que existe un conjunto D' el cual α-domina a T con $y \notin D'$, $x_{t-1} \in D'$ y $|D'| < |D| = \gamma_\alpha(T)$. Por lo tanto, $y \in S(T)$ o $d(y) = 1$.

Para la suficiencia, sea $T \in \boldsymbol{F}$, entonces existe T' tal que $T = cor(T')$ y por el teorema 42, T es γ_α-vértice crítica.

■

Proposición 44 *(1) Para $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la trayectoria P_n es γ_α-vértice crítica si y sólo si $n \in \{2, 4\}$.*

(2) Para $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, la trayectoria P_n es γ_α-vértice crítica si y sólo si $n = 2k$.

Demostración:

(1) Sea $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Para la necesidad, por la proposición 2, $\gamma_\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ y por el teorema 43, $n = \{2, 4\}$.

Para la suficiencia, si $n = \{2, 4\}$, entonces P_n es P_2 o P_4 y ambas gráficas pertenecen a $\boldsymbol{F}$, entonces, por el teorema 43, P_n es γ_α-vértice crítica.

(2) Sea $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha\Delta(P_n) \leq 2$.

Por la proposición 2 (b), $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Para la necesidad, demostraremos la contrapositiva.

Sea n impar y sea x una hoja. Entonces $\gamma_\alpha(P_n) = \gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1})$ pues $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Por lo tanto, P_n no es γ_α-vértice crítica.

Para la suficiencia, sea $n = 2k$ para algún entero $k \geq 1$. Ya vimos que P_2 es γ_α-vértice crítica. $P_4 = cor(P_2)$ y por el teorema 42, P_4 es γ_α-vértice crítica. Por lo tanto, supongamos ahora que $n \geq 6$. Sea x un vértice que no es soporte. Si x es una hoja, por la proposición 2 (b):

$$\gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Por lo tanto, supongamos ahora que x no es una hoja. Sea $G = P_n - x$. Entonces G tiene dos componentes conexas P_{n_1} y P_{n_2}. Como $n-1$ es impar, podemos suponer que n_1 es par y n_2 es impar. Entonces:

$$\gamma_\alpha(G) = \gamma_\alpha(P_{n_1}) + \gamma_\alpha(P_{n_2}) = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2 - 1}{2} = \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$$

$$< \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} = \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma_\alpha(P_n).$$

Por lo tanto, P_n es γ_α-vértice crítica.

■

Usando las Proposiciones 2 y 3, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 45 *(1) Para $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, el ciclo C_n es γ_α-vértice crítico si y sólo si $n \equiv 1 \pmod 3$.*

(2) Para $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, el ciclo C_n siempre es γ_α-vértice crítico.

Demostración:

Sea $x \in V(C_n)$.

(1) Por la proposición 3 (a), sabemos que $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ y $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$. Ahora, $\lceil \frac{n}{3} \rceil \neq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ si y sólo si $n = 3k + 1$, lo cual es equivalente a $n \equiv 1 \pmod 3$.

(2) $\gamma_\alpha(C_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1})$ que por la proposición 2 (b), sabemos que es igual a $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ que es menor estricto que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \gamma_\alpha(C_n)$ por la proposición 3 (b).

■

Proposición 46 *Una gráfica completa K_n de orden $n \geq 2$ es γ_α-vértice crítica si y sólo si $\alpha \geq \frac{\lceil \alpha(n-2) \rceil}{n-1}$.*

Demostración:

Por la proposición 4, sabemos que $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. K_n es γ_α-vértice crítica si y sólo si para todo $v \in V_{K_n}$ se cumple que $\gamma_\alpha(K_n - v) < \gamma_\alpha(K_n)$. Como $\gamma_\alpha(K_n - v) = \gamma_\alpha(K_{n-1}) = \lceil \alpha(n-2) \rceil$, entonces sólo necesitamos saber para cuáles valores de n se tiene que $\lceil \alpha(n-2) \rceil < \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Existen dos casos:

i) Si $\alpha(n-2)$ es un entero, $\lceil \alpha(n-2) \rceil = \alpha(n-2)$.
ii) Si $\alpha(n-2)$ no es un entero, $\lceil \alpha(n-2) \rceil = \lfloor \alpha(n-2) \rfloor + 1$.

En el caso (i):

$$\lceil \alpha(n-2) \rceil = \alpha(n-2) < \alpha(n-1) \leq \lceil \alpha(n-1) \rceil.$$

En el caso (ii):

$\lceil \alpha(n-2) \rceil = \lfloor \alpha(n-2) \rfloor + 1 \leq \alpha(n-2) + 1 < \alpha(n-1) + 1 \leq \lceil \alpha(n-1) \rceil + 1 < \lceil \alpha(n-1) \rceil$.

Por lo tanto, en cualquier caso, $\lceil \alpha(n-2) \rceil < \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Notemos que, en el desarrollo anterior, también obtenemos $\alpha(n-1) \geq \lceil \alpha(n-2) \rceil$ lo cual implica que $\alpha \geq \frac{\lceil \alpha(n-2) \rceil}{n-1}$.

■

Proposición 47 *Si $2 \leq m < n$, entonces $K_{m,n}$ es γ_α-vértice crítica si y sólo si $m \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$, con $\alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1) \rceil}{m}$ y $\alpha > \frac{\lceil \alpha(n-1) \rceil}{n}$.*

Demostración:

Sea $\{X, Y\}$ la partición de $V_G = V(K_{m,n})$ con $|X| = m$ y $|Y| = n$.

Para la necesidad, demostraremos la contrapositiva. Supongamos que $m < \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Por la proposición 5, $\gamma_\alpha(G) = m$. Sea $y \in Y$, la proposición 5 implica

$\gamma_\alpha(G - y) = \gamma_\alpha(K_{m,n-1}) = \text{mín}\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(n-1) \rceil\} \geq \text{mín}\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil - 1\} \geq m$,

y por lo tanto, en este caso, G no es γ_α-vértice crítica.

Para la suficiencia, supongamos que $m \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Esto es, $\gamma_\alpha(G) = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Sean $y \in Y$ y $x \in X$. Se quiere demostrar que $\gamma_\alpha(G - y) < \gamma_\alpha(G)$ y $\gamma_\alpha(G - x) < \gamma_\alpha(G)$. Por la proposición 5:

$$\gamma_\alpha(G - y) = \gamma_\alpha(K_{m,n-1}) = \text{mín}\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(n-1) \rceil\}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\min\{m, \lceil \alpha m\rceil + \lceil \alpha(n-1)\rceil\} < \min\{m, \lceil \alpha m\rceil + \alpha n\} &\Leftrightarrow \alpha n > \lceil \alpha(n-1)\rceil \\
&\Leftrightarrow \alpha > \frac{\lceil \alpha(n-1)\rceil}{n}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\min\{m, \lceil \alpha m\rceil + \alpha n\} \leq \min\{m, \lceil \alpha m\rceil + \lceil \alpha n\rceil\} = \gamma_\alpha(K_{m,n}) = \gamma_\alpha(G).$$

Así, $\gamma_\alpha(G-y) < \gamma_\alpha(G) \Leftrightarrow \alpha > \frac{\lceil \alpha(n-1)\rceil}{n}$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\lceil \alpha(m-1)\rceil + \lceil \alpha n\rceil < \alpha m + \lceil \alpha n\rceil &\Leftrightarrow \alpha m > \lceil \alpha(m-1)\rceil \\
&\Leftrightarrow \alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1)\rceil}{m}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\alpha m + \lceil \alpha n\rceil \leq \lceil \alpha m\rceil + \lceil \alpha n\rceil = \gamma_\alpha(G).$$

Así, $\gamma_\alpha(G-x) < \gamma_\alpha(G) \Leftrightarrow \alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1)\rceil}{m}$.

■

Ejemplo:

$K_{10,13}$ es $\gamma_{\frac{1}{3}}$-vértice crítica pues si $\alpha = \frac{1}{3}$, $m = 10$ y $n = 13$ entonces:

$$\alpha m = \frac{10}{3} > \lceil \alpha(m-1)\rceil = 3.$$

$$\alpha n = \frac{13}{3} > \lceil \alpha(n-1)\rceil = 4.$$

$$10 = m \geq \left\lceil \frac{1}{3}\cdot 10\right\rceil + \left\lceil \frac{1}{3}\cdot 13\right\rceil = 4 + 5 = 9.$$

Proposición 48 *Si $2 \leq m$, entonces $K_{m,m}$ es γ_α-vértice crítica si y sólo si $m \leq 2\lceil \alpha m\rceil$ o si $m > 2\lceil \alpha m\rceil$ y $\alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1)\rceil}{m}$.*

Demostración:

Sea $G = K_{m,m}$. Por la proposición 5, sabemos que $\gamma_\alpha(G) = \text{mín}\{m, 2\lceil \alpha m \rceil\}$.

Para la necesidad, supongamos que $K_{m,m}$ es γ_α-vértice crítica, entonces $\gamma_\alpha(K_{m,m-1}) < \gamma_\alpha(K_{m,m})$, es decir, $\text{mín}\{m-1, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil\} < \text{mín}\{m, 2\lceil \alpha m \rceil\}$. Si $m \leq 2\lceil \alpha m \rceil$, se cumple el teorema. En otro caso, $m > 2\lceil \alpha m \rceil$ por lo que ahora queremos demostrar que $\alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1) \rceil}{m}$. Como $m > 2\lceil \alpha m \rceil$, entonces $\gamma_\alpha(K_{m,m}) = 2\lceil \alpha m \rceil$. Para toda $0 < \alpha \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\alpha m > \alpha(m-1)$ lo que implica que $\lceil \alpha m \rceil \geq \lceil \alpha(m-1) \rceil$. Por hipótesis, $m > 2\lceil \alpha m \rceil \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil$. Por lo tanto,

$$m - 1 \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil$$

$$\Rightarrow \gamma_\alpha(K_{m,m-1}) = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil < 2\lceil \alpha m \rceil$$

$$\Rightarrow \lceil \alpha(m-1) \rceil < \lceil \alpha m \rceil$$

$$\Rightarrow \lceil \alpha(m-1) \rceil < \alpha m$$

$$\Rightarrow \alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1) \rceil}{m}.$$

Para la suficiencia, supongamos que $m \leq 2\lceil \alpha m \rceil$. Por la proposición 5, $\gamma_\alpha(G) = \text{mín}\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha m \rceil\} = \text{mín}\{m, 2\lceil \alpha m \rceil\} = m$. Sea $x \in V_G$. Entonces, la proposición 5 implica que

$$\gamma_\alpha(G - x) = \gamma_\alpha(K_{m-1,m}) = \text{mín}\{m-1, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil\} \leq m - 1 < m$$

y por lo tanto, en este caso, G es γ_α-vértice crítica.

Ahora, supongamos que $m > 2\lceil \alpha m \rceil$ y $\alpha m > \lceil \alpha(m-1) \rceil$. Queremos demostrar que $\gamma_\alpha(K_{m,m-1}) < \gamma_\alpha(K_{m,m})$. Por la proposición 5, $\gamma_\alpha(K_{m,m}) = 2\lceil \alpha m \rceil$ y $\gamma_\alpha(K_{m,m-1}) = \text{mín}\{m-1, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(m-1) \rceil\}$.

$$\lceil \alpha(m-1) \rceil < \alpha m$$

$$\Rightarrow \lceil \alpha(m-1) \rceil < \lceil \alpha m \rceil$$

$$\lceil \alpha(m-1) \rceil + \lceil \alpha m \rceil < 2\lceil \alpha m \rceil < m$$

$$\lceil \alpha(m-1) \rceil + \lceil \alpha m \rceil \leq m - 1$$

$$\Rightarrow \gamma_\alpha(K_{m,m-1}) = \lceil \alpha(m-1) \rceil + \lceil \alpha m \rceil < 2\lceil \alpha m \rceil = \gamma_\alpha(K_{m,m}).$$

Por lo tanto, $K_{m,m}$ es γ_α-vértice crítica.

■

Observemos que para H, una gráfica conexa arbitraria, y $G = cor(H)$, por el teorema 42, G es γ_α-vértice crítica, es decir, para todo $v \in V_G$ se tiene que $\gamma_\alpha(G - v) < \gamma_\alpha(G)$. Por lo tanto, no puede existir una caracterización para gráficas γ_α-vértice críticas en términos de subgráficas inducidas pues H es una subgráfica inducida de G y es arbitraria.

El siguiente teorema se enunciará sin demostrar pero se utilizará para la demostración del teorema 50.

Teorema 49 *[11] Si G es una gráfica γ-vértice crítica de orden $n = (\gamma(G)-1)(\Delta(G)+1)+1$, entonces G es regular.*

Teorema 50 *Si G es una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n, entonces $n \leq (\gamma_\alpha(G)-1)(\Delta(G)+1)+1$. Más aún, si $\delta(G) > 1$ y se da la igualdad, entonces G es regular.*

Demostración:

Sea G una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n y sea S un $\gamma_\alpha(G-v)$-conjunto, donde $v \in V_G - S(G)$, por la proposición 39, $\gamma_\alpha(G-v) = \gamma_\alpha(G)-1$. Cada vértice en S domina a lo más $\Delta(G)+1$ vértices de G, incluyendo él mismo. Por lo tanto, S domina a lo más $(\gamma_\alpha(G)-1)(\Delta(G)+1)$ vértices de G. Notemos que $(\gamma_\alpha(G)-1)(\Delta(G)+1) \geq n-1 = |V_G| - |\{v\}|$ que es equivalente a $n \leq (\gamma_\alpha(G)-1)(\Delta(G)+1)+1$, como se desea.

Ahora, supongamos que $n = (\gamma_\alpha(G)-1)(\Delta(G)+1)+1$. Por lo tanto, cualquier vértice en S domina exactamente $1+\Delta(G)$ vértices de G, por lo que tiene grado $\Delta(G)$ y así para cualquier par de vértices $x, y \in S$, $N[x] \cap N[y] = \emptyset$, es decir, S es un 2-empaquetamiento. Sea $u \in N(v) - S$. Como $\delta(G) > 1$, el vértice $u \notin V_G - S(G)$. Sea D un $\gamma_\alpha(G-u)$-conjunto. Entonces $|D| = \gamma_\alpha(G) - 1$ y, como anteriormente, obtenemos que cada vértice en D tiene grado $\Delta(G)$ y D es un 2-empaquetamiento. Como S es un $\gamma_\alpha(G-v)$-conjunto, u es adyacente a un vértice $x \in S$ y ahora $d_{G-u}(x) < \Delta(G)$, por lo tanto $x \notin D$. Deducimos que $D - S \neq \emptyset$.

Si $v \in D$, entonces $d(v) = \Delta(G)$ pero $u \notin G-u$ lo que implica que $d_{G-u}(v) < \Delta(G)$. Por lo tanto, $v \notin D$. Sea $w \in D - S$. Como S es un $\gamma_\alpha(G-v)$-conjunto, obtenemos que $1 = |N(w) \cap S| \geq \alpha d(w) = \alpha\Delta(G)$ y por lo tanto $\alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$. Por la proposición 9, $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$ y también $\gamma_\alpha(G-x) = \gamma(G-x)$ para cualquier vértice x. Por lo tanto, G es γ-vértice crítica. Por el teorema 49, G es regular. ∎

Teorema 51 *Si G es una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n, entonces para cualquier vértice $v \in V_G - S(G)$,*

$$\gamma_\alpha(G) \geq \left\lceil \frac{\alpha\delta(G-v)n + \Delta(G)}{\alpha\delta(G-v) + \Delta(G)} \right\rceil.$$

Demostración:

Sea G una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n y sea $v \in V_G - S(G)$. Por la proposición 39, existe un γ_α-conjunto D' de G tal que $v \in D'$ y $D = D' - v$ es un γ_α-conjunto de $G - v = H$ lo que implica que $|D| = \gamma_\alpha(G) - 1$. Sea M el conjunto de aristas entre D y $V_H - D$. Contando las aristas de D a $V_H - D$ obtenemos:

$$|M| \leq \sum_{v \in D} d(v) \leq |D|\Delta(G).$$

Por otro lado, como S es un conjunto α-dominante para H, tenemos que para todo $v \in V_H - D$, $|N(v) \cap D| \geq \alpha d(v)$, así:

$$|M| \geq \sum_{v \in V_H - D} \alpha d_H(v) \geq \alpha\delta(H)(|V_H| - |D|).$$

Así obtenemos, $|D|\Delta(G) \geq \alpha\delta(H)(n - 1 - |D|)$ pues $|V_H| = n - 1$.

Como $|D| = \gamma_\alpha(G) - 1$ y $H = G - v$,

$$\begin{aligned}
(\gamma_\alpha(G) - 1)(\Delta(G)) &\geq \alpha\delta(G-v)(n - 1 - (\gamma_\alpha(G) - 1)) \\
\gamma_\alpha(G)\Delta(G) - \Delta(G) &\geq \alpha\delta(G-v)(n - 1 - \gamma_\alpha(G) + 1) \\
\gamma_\alpha(G)\Delta(G) - \Delta(G) &\geq \alpha\delta(G-v)(n - \gamma_\alpha(G)) \\
\gamma_\alpha(G)\Delta(G) - \Delta(G) &\geq \alpha\delta(G-v)n - \alpha\delta(G-v)\gamma_\alpha(G) \\
\alpha\delta(G-v)\gamma_\alpha(G) + \gamma_\alpha(G)\Delta(G) &\geq \alpha\delta(G-v)n + \Delta(G) \\
\gamma_\alpha(G) &\geq \left\lceil \frac{\alpha\delta(G-v)n + \Delta(G)}{\alpha\delta(G-v) + \Delta(G)} \right\rceil.
\end{aligned}$$

■

Teorema 52 *Si G es una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n y tamaño m, entonces*

$$\gamma_\alpha(G) \geq \left\lceil \frac{2\alpha m - \alpha\Delta(G) + \Delta(G)}{\Delta(G)(\alpha + 1)} \right\rceil.$$

Demostración:

Sea G una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n y tamaño m. Sean $v \in V_G - S(G)$ y $H = G - v$. Sea D un $\gamma_\alpha(H)$-conjunto. Entonces, por definición de α-dominante, $\sum_{w\in D} d_H(w) \geq \sum_{z\in V_H - D} \alpha d_H(z)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)|D|\Delta(G) = \alpha|D|\Delta(G) + |D|\Delta(G) &\geq \alpha \sum_{w\in D} d_H(w) + \sum_{w\in D} d_H(w) \\
&\geq \alpha \sum_{w\in D} d_H(w) + \sum_{z\in V_H - D} \alpha d_H(z) \\
&\geq \alpha \sum_{w\in V_H} d_H(w) \\
&= \alpha(2m - 2d_G(v)) \\
&\geq \alpha(2m - 2\Delta(G)).
\end{aligned}$$

Como $|S| = \gamma_\alpha(G) - 1$,

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)(\gamma_\alpha(G) - 1)\Delta(G) &\geq 2\alpha m - 2\alpha\Delta(G) \\
(\alpha+1)(\gamma_\alpha(G)\Delta(G) - \Delta(G)) &\geq 2\alpha m - 2\alpha\Delta(G) \\
(\alpha+1)\gamma_\alpha(G)\Delta(G) - (\alpha+1)\Delta(G) &\geq 2\alpha m - 2\alpha\Delta(G) \\
(\alpha+1)\gamma_\alpha(G)\Delta(G) &\geq 2\alpha m - 2\alpha\Delta(G) + (\alpha+1)\Delta(G) \\
\gamma_\alpha(G) &\geq \frac{2\alpha m - 2\alpha\Delta(G) + \alpha\Delta(G) + \Delta(G)}{(\alpha+1)\Delta(G)} \\
\gamma_\alpha(G) &\geq \frac{2\alpha m - \alpha\Delta(G) + \Delta(G)}{\Delta(G)(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

■

Como resultado inmediato del teorema 12, obtenemos:

Corolario 53 *Sea $0 < \alpha < 1$. Si G es una gráfica γ_α-vértice crítica de orden n y tamaño m, entonces*

$$\gamma_{1-\alpha}(G) \leq \left\lfloor \frac{(1+\alpha)\Delta(G)n + \alpha\Delta(G) - 2\alpha m - \Delta(G)}{\Delta(G)(\alpha+1)} \right\rfloor.$$

Demostración:

Por el teorema 12 sabemos que $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\gamma_{1-\alpha}(G) \leq n - \gamma_\alpha(G) &\leq n + \frac{\alpha\Delta(G) - 2\alpha m - \Delta(G)}{\Delta(G)(\alpha+1)} \\ &= \frac{(1+\alpha)\Delta(G)n + \alpha\Delta(G) - 2\alpha m - \Delta(G)}{\Delta(G)(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

■

Capítulo 9

Conclusiones

Este trabajo consistió básicamente en redactar de forma más robusta los artículos "α-Domination" de J. E. Dunbar, D. G. Hoffman, R. C. Laskar y L. R. Markus [8], "Some remarks on α-Domination" de Franz Dahme, Dieter Rautenbach y Lutz Volkmann [4] y "Vertex-removal in α-domination" de Nader Jafari Rad y Lutz Volkmann [17] . Esto es, desarrollar, profundizar, explicar y demostrar afirmaciones dadas como evidentes, donde nos encontramos con ciertas dificultades ya que, en la teoría de gráficas, es común visualizar el diagrama de la gráfica a tratar para asimilar las afirmaciones, sin embargo, escribir una demostración matemática formal puede resultar no tan clara o tediosa para el lector.

En el capítulo 1 dimos definiciones básicas sobre la teoría de gráficas. En el capítulo 2 se da la motivación para definir la α-dominación y se encuentra el número de α-dominación para familias conocidas de gráficas como trayectorias, ciclos, gráficas completas y bipartitas completas. En el capítulo 3 se compara el número de α-dominación con el de dominación clásica y con el número de cubierta por vértices. En los capítulo 4 y 5 se dan cotas para el número de α-dominación.

El capítulo 6 es un ejemplo particular (gráfica del Rey y $\alpha = \frac{1}{2}$) donde se intenta encontrar el número de $\frac{1}{2}$-dominación para tableros de distintos tamaños, con el objetivo de encontrar el número de $\frac{1}{2}$-dominación para un tablero de tamaño aleatorio, sin embargo, muchas veces lo mejor que podemos encontrar son cotas y estas son diferentes dependiendo de la paridad de los renglones o columnas.

En el capíulo 7 se dan condiciones necesarias y suficientes para conocer el número de α-dominación de un árbol.

En el capítulo 8 se introduce el concepto de gráfica γ_α-vértice crítica y se exhiben condiciones para que familias conocidas de gráficas – estrellas, coronas, árboles, trayectorias, ciclos, gráficas completas y bipartitas completas – cumplan con la propiedad. Finalmente, se dan cotas para el número de α-dominación cuando la gráfica es γ_α-vértice crítica.

A manera de abrir una ventana de oportunidad para próximos proyectos de investigación, proponemos las siguientes ideas:

¿Qué podríamos decir del número de α-dominación para la gráfica del Rey, con $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $0 < \alpha \leq 1$?

¿Qué podríamos decir del número de $\frac{1}{2}$-dominación para otras gráficas? Por ejemplo, la gráfica de la Reina.

¿Qué podríamos decir del número de α-dominación para otras gráficas con $0 < \alpha \leq 1$?

¿Qué pasa con el número de α-dominación al realizar operaciones en gráficas? Por ejemplo, diferentes tipos de producto.

Bibliografía

[1] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton, Vertex domination-critical graphs, Networks 18 (1988), 173-179.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, Graphs and Digraphs, tercera edición, Chapman & Hall, London, 1996.

[3] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, D. J. Miller, Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs, Canad. Math. Bull. 21 (4) (1978) 461-468.

[4] F. Dahme, D. Rautenbach, L. Volkmann, Some remarks on α-domination, Discuss. Math. Graph Theory 24 (2004) 423-430.

[5] F. Dahme, D. Rautenbach, L. Volkmann, α-Domination perfect trees, Discrete Math. 308 (2008), 3187-3198.

[6] G. S. Domke, J. E. Dunbar, L. R. Markus, Gallai-type theorems and domination parameters, Discrete Math. 167/168 (1997) 237-248.

[7] J. E. Dunbar, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning, P. J. Slater, Signed domination in graphs, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.), Graph Theory, Combinatorics and Applications, Wiley, Nueva York, vol. 1, 1995, pp. 311-322.

[8] J. E. Dunbar, D. G. Hoffman, R. C. Laskar, L. R. Markus, α-Domination, Discrete Math. 211 (2000) 11-26.

[9] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, On graphs having domination number half their order, Period. Math. Hungar. 16 (1985) 287-293.

[10] J. Fink, M. S. Jacobson, n-domination in graphs, in: Y. Alavi, G. Chartrand, L. Lesniak, D. Lick, C. Wall (Eds.), Graph Theory with Applica-

tions to Algorithms and Computer Science, Wiley-Interscience, Nueva York, 1985, pp. 283-300.

[11] J. Fulman, D. Hanson, G. MacGillivray, vertex domination-critical graphs, Networks 25 (1995), 41-43.

[12] A. Gagarin, A. Poghosyan, V. Zverovich, Upper bounds for α-domination parameters, Graphs and Combinatorics 25 (2009), 513-520.

[13] T. Gallai, Über extreme Punkt-und Kantenmengen, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math. 2 (1959) 133-138.

[14] M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman, Nueva York, 1979.

[15] B. Hartnell, D. F. Rall, A characterization of graphs in which some minimum dominating set covers all the edges, Czech. Math. J. 45 (1995) 221-230.

[16] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Nueva York, 1998.

[17] N. Jafari Rad, L. Volkmann, Vertex-removal in α-domination, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niŝ, Serbia (2012), 1257-1262.

[18] S. Lipschutz, Schaum's Outline of Set Theory and Related Topics, McGraw-Hill, Estados Unidos, 1991.

[19] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum, On complementary graphs, Amer. Math. Mon. 63 (1956) 175-177.

[20] O. Ore, Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962).

[21] C. Payan, N. H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory 6 (1982) 23-32.

[22] L. Volkman, On graphs with equal domination and covering numbers, Discrete Appl. Math. 51 (1994) 211-217.

[23] Woodall, Douglas Improper colourings of graphs. Graph colourings (Milton Keynes, 1988), 4563, Pitman Res. Notes Math. Ser., 218, Longman Sci. Tech., Harlow, 1990.