



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

***CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES POR
RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA***

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
BECERRA MORALES PABLO

TUTOR
DR. YU TANG XU
FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

ENERO 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

1^{er}. Vocal: Dr. Yu Tang Xu

2^{do}. Vocal: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

3^{er}. Vocal: Dr. Luis A. Alvarez Icaza Longoria

Lugar donde se realizó la tesis:
Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. YU TANG XU

FIRMA

Agradecimientos

A mis padres Pablo y Angélica, les agradezco porque siempre me han apoyado en cada etapa de mi vida, incluso en momentos difíciles, pero sobre todo por todo el amor incondicional y paciencia que me brindan día a día. Sin ustedes no lograría nada, son mi pilar.

A mi hermano Antonio, porque hemos compartido toda nuestra vida juntos, por hacerme reír cuando más lo necesito y también por pelear de vez en cuando.

A mi mejor amiga Argelia, te agradezco por tu apoyo de años y por todos los momentos que pasamos en mi primer semestre: las desveladas, fiestas, comidas y más; hiciste que todo fuera más ameno.

A mi amiga Fernanda, gracias por ser mi asesora en todo el posgrado, ayudarme antes de los exámenes y por las veces que salimos a la Vanidosa.

Al Dr. Yu Tang, por su dedicación como tutor de tesis, por compartir su conocimiento y tiempo en cada reunión, y por la paciencia para explicarme todas las dudas que tuve. También, le agradezco por el apoyo para asistir a la conferencia internacional MICNON.

A la UNAM por brindarme tanto en mi formación académica desde hace ya 11 años. Y por último, al CONACYT por la beca que me otorgó durante mi estancia en el Posgrado.

Resumen

Este trabajo proporciona una metodología, basada en la teoría de contracción, para el diseño modular de controladores de seguimiento de una trayectoria deseada para manipuladores robóticos que usan solamente la retroalimentación de la posición en el espacio de configuración de articulaciones. En primer lugar, se crean por separado un controlador por retroalimentación de estados que converge a las trayectorias deseadas global y exponencialmente y un observador de orden reducido con convergencia semi-global y exponencial. Después, se obtiene el controlador por retroalimentación de posición, combinando los módulos del controlador y observador en una forma de equivalencia cierta sin la necesidad de un rediseño de estos módulos.

Se realizan simulaciones numéricas para ilustrar los resultados teóricos y para verificar el desempeño de los controlador, además, se muestra que este controlador presenta un ajuste de ganancias más simple que los basados en otras metodologías.

Abstract

A modular design of tracking controller for robot manipulators using only position feedback based on contraction analysis is provided. A global exponentially convergent state feedback tracking controller and a semi-global exponentially convergent reduced-order observer are devised separately first. Then the semi-global exponentially convergent position feedback controller is obtained by combining the controller/observer modules in a certainty equivalence fashion without the redesign of these modules. It is showed that this controller presents a simpler gain tuning than those based on Lyapunov or passivity theory.

Numerical simulations are carried out to illustrate the theoretical results and to verify the controller performance.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Lista de Figuras	IX
Lista de Tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Objetivo	3
1.3. Metodología	3
1.4. Estructura del trabajo	3
2. Preliminares	5
2.1. Teoría de contracción	5
2.1.1. Análisis de contracción	5
2.1.2. Convergencia generalizada	7
2.1.3. Contracción parcial y modularidad	7
2.2. Sistemas Lagrangianos	9
2.2.1. Robots manipuladores	9
3. Controlador por retroalimentación de estados	11
3.1. Algoritmo de Slotine - Li	12
3.2. Diseño del controlador por contracción	13
4. Diseño de observadores	15
4.1. Observador de orden reducido	16
4.2. Observador de orden completo	18

- 5. Controlador por retroalimentación de salida** **20**
 - 5.1. Diseño del controlador 21

- 6. Simulaciones y resultados** **25**
 - 6.1. Simulación controlador por retroalimentación de salida 27
 - 6.2. Comparación con otro esquema de control 32
 - 6.3. Robustez contra incertidumbres y perturbaciones externas 34
 - 6.3.1. Simulaciones con incertidumbre paramétrica 34
 - 6.3.2. Simulación con perturbaciones en la entrada de control 38
 - 6.3.3. Simulación con ruido en las señales medidas 41

- 7. Conclusiones y Trabajo a Futuro** **45**

Lista de Figuras

2.1. Dinámica virtual de dos trayectorias vecinas [13].	6
6.1. Perfiles de las posiciones deseadas.	27
6.2. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y seguimiento de velocidad c) v_1 , d) v_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$	28
6.3. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$	28
6.4. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$	29
6.5. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y seguimiento de velocidad c) v_1 , d) v_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	29
6.6. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	30
6.7. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	30
6.8. Comparación. Errores de seguimiento de posición a) primera y b) segunda articulación, errores de seguimiento de velocidad c) primera y d) segunda articulación.	33
6.9. Comparación. Errores de observación para la a) primera y b) segunda articulación, esfuerzo de control para la c) primera y d) segunda articulación.	33
6.10. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y seguimiento de velocidad c) v_1 , d) v_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	35
6.11. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica.	35
6.12. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	36

6.13. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y de velocidad c) v_1 , d) v_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	36
6.14. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	37
6.15. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	37
6.16. Perturbaciones en la entrada de control a) en el primer eslabón, b) en el segundo eslabón.	38
6.17. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y de velocidad c) v_1 , d) v_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	38
6.18. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	39
6.19. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$	39
6.20. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y de velocidad c) v_1 , d) v_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	40
6.21. Errores de seguimiento a) de posición \tilde{x} y b) de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	40
6.22. a) Errores de observación y b) esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$	41
6.23. Magnitud de ruido introducido a las señales medidas.	41
6.24. a) Señal medida, b) señal filtrada con el observador para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones.	42
6.25. Seguimiento de posición a) x_1 , b) x_2 y de velocidad c) v_1 , d) v_2 para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).	43
6.26. Estimación de posición a) \hat{x}_1 , b) \hat{x}_2 y estimación de velocidad c) \hat{v}_1 , d) \hat{v}_2 para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).	43
6.27. a) Error de seguimiento de posición \tilde{x} , b) error de seguimiento de velocidad \tilde{v} , c) error de observación de posición y d) error de observación de velocidad.	44
6.28. Esfuerzo de control τ para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).	44

Lista de Tablas

- 6.1. Parámetros del robot. 26
- 6.2. Parámetros a_i y condiciones iniciales del sistema. 27
- 6.3. Comparación de parámetros ideales y con incertidumbre 34

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas, el uso de robots ha sido de vital importancia en una gran variedad de aplicaciones industriales. Por ejemplo, en la industria automotriz los robots manipuladores se utilizan para soldar y pintar carrocerías en las líneas de ensamble; en electrónica, para manufacturar circuitos impresos y ensamblar circuitos integrados; en la inspección y reparación de estructuras en ambientes nucleares, submarinos y subterráneos; incluso se llegan a emplear para fines lúdicos y en la domótica.

La gran mayoría de robots manipuladores consisten en seis juntas que pueden ser rotacionales o traslaciones, con un efector final para la interacción con las piezas de trabajo. Los efectores finales suelen ser *grippers* (de dos o tres mordazas), pinzas o dispositivos para efectuar tareas específicas como: succionar o soldar [16].

En todas las aplicaciones mencionadas anteriormente se requiere un posicionamiento preciso de los eslabones del robot y del efector final para llevar a cabo su cometido correctamente, realizar al mismo tiempo posibles tareas secundarias y evitar una colisión con otros objetos. Para ello, es necesario un control de posición apropiado.

Actualmente, debido a la constante evolución y creación de nuevas tecnologías, se requiere diseñar algoritmos de control en diversas aplicaciones que permita que los sistemas ejecuten movimientos más rápidos, precisos y energéticamente eficientes.

1.1. Estado del arte

El problema del diseño de controladores para sistemas Lagrangianos, que garantiza el seguimiento de la posición y la velocidad para una trayectoria deseada, se ha estudiado ampliamente. Se han ideado varias soluciones, en especial para los robots manipuladores, donde en la implementación de la ley de control son necesarias las mediciones de posición y velocidad. Algunos ejemplos son el conocido controlador *par calculado* [15] que usa el concepto de linealización por retroalimentación y el controlador Slotine - Li basado en modos deslizantes [26, 19]. Sin embargo, en la práctica las mediciones de velocidad no se utilizan ya que ge-

neralmente están contaminadas por ruido y su uso reduce considerablemente el rendimiento del controlador.

Existen dos maneras que tratan de solucionar este problema. La primera es mediante técnicas de filtrado que buscan compensar el ruido y el sesgo del sensor. Con este método se determina la velocidad por medio de un filtro de primer orden de la posición; no obstante, la aproximación no resulta adecuada para cierto rango de velocidades [2], se pueden producir oscilaciones indeseables y no hay justificación teórica en su uso pues no se establecen condiciones de estabilidad. Por otro lado, el otro enfoque busca estimar la velocidad angular mediante un observador. Se han diseñado varios observadores no lineales de velocidad angular basados en la teoría de Lyapunov por ejemplo, [27, 31, 12]. Otro trabajo basado en Lyapunov es [11], en el cual los autores idean un observador de orden reducido con convergencia global y asintótica. En [1] se plantea un observador con convergencia asintótica y local para sistemas Lagrangianos, su metodología se basa en la contracción de una estructura de Riemannian.

Un observador para sistemas lineales se puede diseñar independientemente del controlador y garantizar estabilidad si ambos subsistemas son estables; sin embargo, ese principio no aplica a los sistemas no lineales. Así, la combinación de un controlador y un observador exponencialmente estables puede generar un sistema inestable debido al problema estructural del modelo no lineal y/o al fenómeno de pico. Por lo tanto, es necesario encontrar las condiciones que garanticen la estabilidad del sistema global o rediseñar el controlador con el observador. Desde el punto de vista práctico, el primer enfoque es más deseable ya que da un diseño modular de controlador - observador.

Varios esquemas que estudian la interacción dinámica entre controlador - observador han sido propuestos. Algunos logran la estabilidad del sistema global de forma sencilla como [5, 17, 4], que emplean versiones modificadas del control por calculado y el PD+.

Otros de ellos necesitan rediseñar todo el esquema para garantizar la estabilidad general. Por ejemplo, en [3] los autores presentan un controlador basado en pasividad con una función de energía que contiene a la del controlador y observador; en [24] con teoría de Lyapunov se propone un control de seguimiento exponencial global para sistemas mecánicos, se logra al combinar un controlador basado en pasividad y un observador de velocidad diseñado por inmersión e invarianza; en [34] se presenta una clase de controladores que logra seguimiento asintótico en el espacio de tareas y usa el cuaternión unitario para describir la orientación del efector final, mediante el diseño de un controlador adaptable con la teoría de Lyapunov se logra desarrollar el controlador por retroalimentación de salida.

En [14] se establece un controlador por retroalimentación de posición con estabilidad global y asintótica, empleando el primer método de Lyapunov. La metodología difiere de las demás porque no es necesario el diseño de un observador debido a que se implementa un filtro utilizando sólo las posiciones.

1.2. Objetivo

El objetivo principal es diseñar por medio de la teoría de contracción, un esquema de control para el seguimiento de posición y velocidad de un robot manipulador modelado en el espacio de articulaciones empleando únicamente la medición de la posición.

Los objetivos secundarios son:

- Diseñar un controlador por retroalimentación de estados y un observador de velocidad, ambos con convergencia exponencial.
- Validar los resultados teóricos mediante simulaciones numéricas.
- Analizar el rendimiento de controlador cuando las mediciones se encuentran contaminadas por ruido blanco o existe incertidumbre paramétrica.

1.3. Metodología

La principal aportación de este trabajo es el desarrollo de una metodología modular, en donde los subsistemas: controlador y observador se diseñan independientemente, que posteriormente al interconectarse operan como un sistema jerárquico y sólo se requiere encontrar las condiciones que garanticen la convergencia del sistema completo a la trayectoria deseada.

Esta metodología se logra empleando como herramienta de análisis y diseño a la teoría de contracción. Por medio de ella se busca obtener un diseño más simple y claro comparado con los basados en la teoría de Lyapunov o pasividad, ya que no es necesario que se rediseñe el sistema (controlador - observador) como en los trabajos anteriormente mencionados [3, 24, 34].

La contracción como cualquier método de análisis de estabilidad, también presenta limitantes. Mientras que en la teoría de Lyapunov es encontrar una función candidata de Lyapunov que cumpla con la condición de negatividad definida de \dot{V} , en contracción se necesita proponer una métrica con la cual el Jacobiano del sistema analizado sea negativo definido. Asimismo, la elección de la métrica puede llevar a resultados de estabilidad local [1].

1.4. Estructura del trabajo

El trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se introduce un breve resumen sobre la teoría de contracción, en especial de los conceptos y teoremas necesarios para el diseño de los controladores y observadores.

También, se define la dinámica del robot manipulador, así como las propiedades principales del sistema.

En el Capítulo 3 se diseña un controlador de seguimiento de posición, que logra que los errores de seguimiento converjan a cero exponencialmente cuando todo el vector de estados está disponible.

Posteriormente, en el Capítulo 4 se desarrollan observadores de orden reducido que estima sólo la velocidad angular y de orden completo, que estima todo el estado del sistema, para verificar el funcionamiento del controlador cuando se considera ruido en las mediciones.

En el Capítulo 5 se combinan los dos diseños obtenidos anteriormente y se encuentran las condiciones que garantizan que los errores de seguimiento y estimación convergen a cero exponencialmente. Por otro lado, se incluye un controlador adaptable, que se obtiene al combinar una ley de adaptación con el controlador por retroalimentación de estados.

Por último, las simulaciones y resultados se presentan en el Capítulo 6. Se incluyen una comparación con otro controlador y simulaciones donde se verifica la robustez del controlador ante incertidumbre paramétrica, ruido en las mediciones y perturbaciones en la entrada de control.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

En seguida se muestra un resumen de las herramientas necesarias para el análisis y diseño de los controladores y observadores presentados en este trabajo.

2.1. Teoría de contracción

La teoría de contracción [13] ha ganado recientemente atención como una herramienta de análisis de estabilidad y diseño de controladores para sistemas dinámicos no lineales. Esta teoría se originó con conceptos básicos de geometría diferencial y mecánica de medio continuo.

A diferencia del análisis de estabilidad por Lyapunov, la contracción considera a la estabilidad desde un punto de vista diferencial e inspirada en mecánica de fluidos, enfocándose así en las propiedades de la trayectoria del sistema en lugar del movimiento nominal cerca de un equilibrio [21, 10, 9]. Concretamente, la contracción estudia la convergencia entre las trayectorias de un sistema y se analiza con el uso de desplazamientos virtuales que miden la “proximidad” entre ellas.

Básicamente, un sistema dinámico se dice *contrayente* si las condiciones iniciales o las perturbaciones temporales se olvidan exponencialmente [13], es decir, si todas sus trayectorias que inician desde diferentes puntos dentro de la región de contracción se reúnen en una sola trayectoria con convergencia exponencial. Para evitar ambigüedad, a esta forma de estabilidad se le conoce solamente como *convergencia*.

2.1.1. Análisis de contracción

Para realizar el análisis, considere el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $t \geq t_0 \geq 0$ es el tiempo y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial. Además, se asume que cualquier solución $x(x_0, t)$ existe y es única.

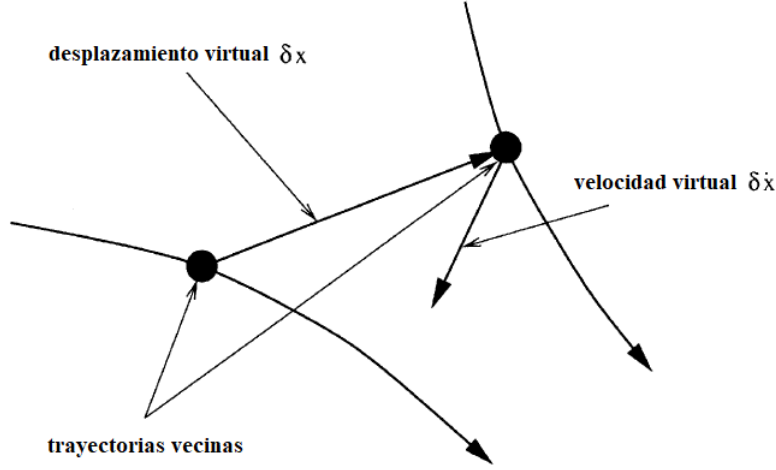


Figura 2.1: Dinámica virtual de dos trayectorias vecinas [13].

Asumiendo que $f(x, t)$ es continuamente diferenciable en x , de (2.1) se obtiene la siguiente diferencial exacta

$$\delta \dot{x} = J(x, t)\delta x, \quad (2.2)$$

donde $J(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ es la matriz Jacobiana y δx es el *desplazamiento virtual*, que representa un desplazamiento infinitesimal en tiempo fijo.

Ahora considere dos trayectorias vecinas del sistema (2.1) y el desplazamiento virtual δx entre ellas Fig. 2.1. La distancia cuadrada entre las trayectorias se puede definir como $\delta x^T \delta x$ y para saber si las trayectorias se aproximan, se evalúa la variación temporal de dicha distancia

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) = 2\delta x^T \delta \dot{x}.$$

Si se sustituye (2.2), la expresión queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) &= 2\delta x^T J(x, t)\delta x, \\ &\leq 2\lambda_{max}(x, t)\delta x^T \delta x, \end{aligned}$$

donde $\lambda_{max}(x, t)$ es el valor característico más grande de la parte simétrica de la matriz Jacobiana. Por lo tanto

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| e^{\int_0^t \lambda_{max}(x, t) dt}. \quad (2.3)$$

Si $\lambda_{max}(x, t)$ es estricta y uniformemente negativa, es decir, $\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \lambda_{max}(x, t) \leq -\beta < 0$, entonces el desplazamiento infinitesimal $\|\delta x\|$ converge exponencialmente a cero. En consecuencia, las trayectorias convergen a una única trayectoria.

2.1.2. Convergencia generalizada

El resultado anterior puede ser extendido al usar una definición más general de longitud infinitesimal. El desplazamiento δx de la Fig. 2.1 también puede ser expresado usando una transformación de coordenadas dada por

$$\delta z = P(x, t)\delta x, \quad (2.4)$$

donde $P(x)$ es una matriz cuadrada uniformemente invertible. Entonces, la distancia al cuadrado está dada por

$$\delta z^T \delta z = \delta x^T M \delta x,$$

donde $M(x, t) = P^T P$ representa una métrica simétrica, uniformemente positiva definida y continuamente diferenciable. Por otro lado, la derivada temporal de (2.4) se calcula como

$$\frac{d}{dt}\delta z = \dot{P}\delta x + P\delta \dot{x},$$

la ecuación en términos de δz queda como

$$\frac{d}{dt}\delta z = \left(\dot{P} + PJ\right) P^{-1}\delta z,$$

Por lo tanto, la tasa de cambio de la distancia al cuadrado se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}(\delta z^T \delta z) = 2\delta z^T J_G \delta z. \quad (2.5)$$

El término $J_G = \left(\dot{P} + PJ\right) P^{-1}$ se conoce como Jacobiano generalizado. De manera similar al resultado anterior, si el Jacobiano generalizado es uniformemente negativo definido, entonces el desplazamiento δz converge a cero y en consecuencia δx también.

Definición 2.1. *Se dice que el sistema (2.1) es contrayente, si existe una constante $\lambda > 0$ tal que la matriz Jacobiana generalizada es uniformemente negativa definida*

$$\frac{1}{2}(J_G + J_G^T) \leq -\lambda I, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \chi \subseteq \mathbb{R}^n$$

donde χ es la región de contracción. Además, si la región de atracción es todo el espacio de estados el resultado de convergencia es global.

2.1.3. Contracción parcial y modularidad

Un concepto particular en esta teoría es el de *contracción parcial* [32]. La clave de la contracción parcial es el diseño de un sistema auxiliar, llamado *sistema virtual*, que tiene como soluciones particulares las trayectorias del sistema real y deseado. La contracción del sistema

virtual implica que las trayectorias del sistema real convergen exponencialmente a las del sistema deseado.

Teorema 2.1. *Contracción parcial [32]. Considere un sistema no lineal de la forma*

$$\dot{x} = f(x, x, t), \quad (2.6)$$

y asuma que el sistema auxiliar

$$\dot{\xi} = f(\xi, x, t), \quad (2.7)$$

es contrayente con respecto a ξ . Si una solución particular del sistema auxiliar (2.7) verifica una propiedad suave específica, entonces todas las trayectorias del sistema original (2.6) verifican la misma propiedad exponencialmente. Se dice que el sistema original es parcialmente contrayente.

Este teorema es de suma importancia porque es la herramienta principal para diseñar los controladores y el observador, la convergencia de propiedades específicas se refiere a convergencia a trayectorias deseadas o entre ciertas variables del sistema. También es vital un correcto diseño del sistema virtual para que tenga como soluciones el sistema real y deseado.

Por último, una de las características principales que ofrece la contracción es la modularidad, es decir, la combinación de sistemas contrayentes produce un sistema general contrayente. Las combinaciones pueden ser sistemas interconectados en paralelo, en retroalimentación o sistemas jerárquicos. Algunos de estos resultados también se cumplen en la teoría de pasividad [23].

Para la conexión en paralelo los sistemas deben ser de la misma dimensión y ser contrayentes bajo la misma métrica. En cuanto a la conexión en retroalimentación basta con que las plantas por sí mismas sean contrayentes, y para la combinación jerárquica se presenta el siguiente lema.

Lema 2.1. [13]. *Considere dos sistemas (posiblemente de distintas dimensiones) de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

cuya dinámica del desplazamiento virtual es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix}.$$

Si F_1 y F_2 son uniformemente negativas definidas y F_{21} es acotada, entonces el sistema 2.8 es contrayente.

2.2. Sistemas Lagrangianos

Los sistemas Lagrangianos son sistemas cuyos modelos matemáticos se obtienen por la formulación de Euler - Lagrange. Las ecuaciones de Euler - Lagrange tienen la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta q} + \frac{\delta D}{\delta \dot{q}} = \tau, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{L} = K - P$ es el Lagrangiano, K es la energía cinética total del sistema, P es la energía potencial total del sistema, D es una función de disipación, q es el vector de coordenadas generalizadas y τ es el vector de fuerzas o pares generalizados.

Bajo las condiciones en que la energía cinemática es una función cuadrática de la velocidad generalizada \dot{q} , la energía potencial es una función la posición generalizada q y la función de disipación una función de \dot{q} , (2.9) puede ser representada como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + g(q) = \tau, \quad (2.10)$$

donde $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponde a la matriz de inercia, $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponde a la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales.

2.2.1. Robots manipuladores

Un robot manipulador, considerado como un cuerpo rígido, requiere de 6 grados de libertad (GDL) o juntas para estar completamente descrito en el espacio: 3 GDL para la *posición* y otros 3 para la *orientación*.

La posición se puede describir en el espacio articular, también llamado espacio de configuración, o en el espacio cartesiano. El espacio articular consiste en especificar valores a las juntas del robot. Para las juntas rotacionales, dicho valor es un ángulo $\theta_i \in [0, 2\pi)$; para las juntas traslacionales, es un desplazamiento $\theta_i \in \mathbb{R}$ [16]. Por otro lado, en el espacio cartesiano se especifican coordenadas para determinar la posición del efector final.

El objetivo de este trabajo es el seguimiento de posición a una trayectoria deseada en el espacio articular.

Se considera el modelo matemático de un sistema robótico de n GDL, descrito por (2.10), que para el diseño del controlador se reescribe como

$$\dot{x} = v \quad (2.11)$$

$$M(x)\dot{v} + C(x, v)v + F(v) + g(x) = \tau, \quad (2.12)$$

donde $x = q, v = \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ son las posiciones y velocidades de las juntas del robot, respectivamente. $M(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(x, v)v \in \mathbb{R}^n$ representa las fuerzas de Coriolis y Centrípeta definida con base en los símbolos de Christoffel, $g(x) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de gravedad, $F(v)$ representa la fricción no lineal que se supone que es continua a tramos en v , y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el torque de control del sistema.

La dinámica del robot tiene las siguientes propiedades:

Propiedad A1. Antisimetría:

$$v^T(\dot{M}(x) - 2C(x, v))v = 0, \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad A2. $C(x, v)$ satisface [3]

$$C(x, v)y = C(x, y)v, \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad A3. Para los robots con juntas rotacionales, la matriz $M(x)$ satisface

$$0 < M_m I \leq M(x) \leq M_M I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

donde M_m y M_M denotan el valor propio más pequeño y más grande de $M(x)$, respectivamente e I es la matriz de identidad con una dimensión adecuada.

Propiedad A4. La matriz $C(x, v)$ satisface para algún $C_M > 0$

$$\|C(x, v)\| \leq C_M \|v\| \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad A5. La fuerza de fricción $F(v)$ satisface

$$\frac{dF(v)}{dv} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad A6. *Parametrización lineal en los parámetros.* El sistema (2.12) puede ser expresada como

$$M(x)\dot{v} + C(x, v)v + F(v) + g(x) = \tau = Y_s(x, v, \dot{v})\theta$$

donde θ es un vector de dimensión r que contiene los parámetros de interés y $Y_s(x, v, \dot{v})$ es una matriz de $n \times r$ llamada regresor que contiene funciones conocidas.

Capítulo 3

Controlador por retroalimentación de estados

El objetivo de control es lograr el seguimiento de la posición angular del robot dada una trayectoria deseada $x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d$, esto se logra cuando los errores de seguimiento $\tilde{x} = x - x_d$ y $\dot{\tilde{x}} = v - \dot{x}_d$ convergen a cero.

El control de posición ha sido estudiado durante mucho tiempo y se han presentado varias soluciones a este problema. En [15] se usa el concepto de linealización por retroalimentación para lograr el objetivo de seguimiento. Por otro lado, la teoría de pasividad ganó mucha atención en el control de manipuladores ya que explota la estructura física del sistema. La idea principal es reestructurar la energía natural del sistema y añadir amortiguamiento por medio de retroalimentación de la velocidad. Algunos trabajos que siguen esta ideología son [30, 20]. Los autores de [30] analizan el problema de regulación de posición en el marco de sistemas Hamiltonianos. En [20] realizan una extensión de dicho controlador para el caso de seguimiento, de modo que el control resultante está compuesto por una retroalimentación lineal tipo PD y una compensación de la dinámica del robot.

En [33] se proponen controladores exponencialmente estables para los casos de regulación y seguimiento, en contraste con los algoritmos anteriores, su análisis se basa en la teoría de Lyapunov. La prueba de estabilidad se logra haciendo uso de funciones candidatas de Lyapunov similares a la energía del sistema en conjunto con un lema útil para abordar los términos de orden superior. El controlador que se emplea en este trabajo es el algoritmo Slotine - Li [26, 19], cuya metodología se basa en la teoría de modos deslizantes ya que el objetivo es que la trayectoria deseada se deslice a lo largo de una superficie en el espacio de estados. La teoría de Lyapunov también es empleada en la prueba de estabilidad.

En este capítulo, se diseña la ley de control suponiendo que todos los estados del sistema, posiciones y velocidades, son medibles.

3.1. Algoritmo de Slotine - Li

Con el fin de hacer una comparación entre las herramientas de diseño basadas en la teoría de Lyapunov y de contracción, se hace un breve resumen del algoritmo de control Slotine - Li para robots. Este método fue empleado en diversos trabajos [26, 28] para eliminar los errores de posición en estado permanente de robots manipuladores. Para ello, se propone restringir dichos errores a la siguiente superficie de deslizamiento

$$\dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q} = 0, \quad (3.1)$$

donde $\tilde{q} = q - q_d$ y Λ es una matriz constante cuyos valores propios se encuentran estrictamente del lado derecho del plano complejo, es decir, $\Lambda > 0$. Se considera por simplicidad como $\Lambda = \lambda I$ con $\lambda > 0$. Para lograr el objetivo, se reemplaza la trayectoria q_d de (3.1) por una variable llamada “trayectoria de referencia”

$$q_r = q_d - \lambda \int_0^t \tilde{q} dt.$$

También \dot{q}_d es reemplazada por la “velocidad de referencia”

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \lambda\tilde{q}.$$

Si se define una variable auxiliar

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r, \quad (3.2)$$

entonces el objetivo se cumple con restringir las trayectorias a la superficie $s = 0$.

De manera formal, sustituyendo \dot{q}_r en (3.2)

$$\begin{aligned} s &= \dot{q} - \dot{q}_d + \lambda\tilde{q}, \\ s &= \dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q}. \end{aligned}$$

Si la cinemática se restringe a la superficie $s = 0$, se tiene que

$$\dot{\tilde{q}} = -\lambda\tilde{q},$$

como $\lambda > 0$, entonces se tiene un sistema lineal, invariante con el tiempo con un punto de equilibrio exponencialmente estable en $\tilde{q} = 0$, es decir, $\tilde{q} \rightarrow 0$ exponencialmente.

Visto desde la representación de una función de transferencia, el error \tilde{q} es la salida de un filtro estable de primer orden cuya entrada es s

$$\tilde{q} = \frac{1}{\sigma + \lambda} s,$$

donde σ es el operador derivada en el dominio de Laplace. De la misma forma, se observa que si $s = 0$, entonces \tilde{q} también tiende a cero.

Para cumplir con el objetivo de control se propone el siguiente controlador que garantiza que $s \rightarrow 0$

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) - Ks,$$

donde $K = K^T > 0$. Como resultado el sistema en lazo cerrado queda de la forma

$$M(q)\dot{s} = -C(q, \dot{q})s - Ks. \quad (3.3)$$

Para demostrar la convergencia se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(s) = \frac{1}{2}s^T Ms,$$

cuya derivada a lo largo de sus trayectorias es

$$\dot{V}(s) = \frac{1}{2}s^T \dot{M}s + s^T M\dot{s},$$

sustituyendo (3.3) y aplicando la propiedad de antisimetría se obtiene

$$\dot{V}(s) = -s^T Ks < 0,$$

debido a que $\dot{V}(s)$ es negativa definida, las trayectorias convergen al punto de equilibrio $s = 0$ global y asintóticamente.

3.2. Diseño del controlador por contracción

Dada una trayectoria deseada x_d que es continuamente diferenciable de clase \mathcal{C}^2 tal que

$$\begin{aligned} \|x_d\| &\leq c_1, \\ \|\dot{x}_d\| &\leq c_2, \\ \|\ddot{x}_d\| &\leq c_3, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^+$. El objetivo de control es llevar al robot a la trayectoria deseada desde cualquier condición inicial, es decir, que $x \rightarrow x_d, v \rightarrow \dot{x}_d$ exponencialmente.

Por simplicidad, se emplea como ley de control el algoritmo de Slotine - Li, dado por

$$M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(v) + g(x) - K_c(v - v_r) = \tau, \quad (3.4)$$

donde las variables v_r y \dot{v}_r están dadas por

$$v_r = \dot{x}_d - \lambda_c(x - x_d), \quad (3.5)$$

$$\dot{v}_r = \ddot{x}_d - \lambda_c(v - \dot{x}_d), \quad (3.6)$$

con ganancias $K_c = K_c^T > 0, \lambda_c > 0$.

Teorema 3.1. *La ley de control definida por (3.4), (3.5) y (3.6), en lazo cerrado con el sistema definido por (2.11) y (2.12) logra que los errores de posición \tilde{q} y velocidad $\dot{\tilde{q}}$ tiendan a cero global y exponencialmente.*

Anteriormente, esta ley de control fue analizada con la teoría de Lyapunov; sin embargo, en este trabajo se hace mediante un análisis de contracción.

Demostración. El sistema virtual se propone como

$$M(x)\dot{\xi} + C(x, v)\xi + F(v) + g(x) - K_c(v - \xi) = \tau. \quad (3.7)$$

Éste tiene dos soluciones particulares $\xi = v$ y $\xi = v_r$, que corresponden a la dinámica del robot (2.11) y (2.12), y al controlador (3.4), respectivamente. La dinámica del desplazamiento infinitesimal es

$$M(x)\delta\dot{\xi} = -C(x, v)\delta\xi - K_c\delta\xi. \quad (3.8)$$

En este caso, no se emplea la matriz identidad I como en (2.5) para obtener la evolución temporal de la distancia al cuadrado, se emplea la matriz de inercias M como métrica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) = \delta\xi^T M(x) \delta\dot{\xi} + \frac{1}{2} \delta\xi^T \dot{M}(x) \delta\xi,$$

si se sustituye (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) &= -\delta\xi^T (C(x, v) + K_c) \delta\xi + \frac{1}{2} \delta\xi^T \dot{M}(x) \delta\xi, \\ &= -\delta\xi^T K_c \delta\xi + \delta\xi^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(x) - C(x, v) \right) \delta\xi, \end{aligned}$$

finalmente, se aplica la **Propiedad A1** y se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) \leq -\lambda_{\min}(K_c) \|\delta\xi\|^2.$$

Por lo tanto, el sistema virtual es globalmente contrayente con razón de contracción igual a $\frac{\lambda_{\min}\{K_c\}}{M_M}$. Esto implica que sus soluciones particulares convergen $v \rightarrow v_r$ exponencialmente. En consecuencia, por construcción $v - v_r = v - \dot{x}_d + \lambda_c(x - x_d)$ también implica que $x - x_d \rightarrow 0$ y $v - \dot{x}_d \rightarrow 0$ exponencialmente. \square

Capítulo 4

Diseño de observadores

Los controladores mencionados en el capítulo anterior necesitan mediciones de posición y velocidad angular. No obstante, las mediciones de velocidad angular son poco confiables y deterioran notablemente el rendimiento del controlador. Además, el uso de sensores implica un mayor costo en la operación del sistema, así como mayor peso y volumen en el robot.

Logros importantes en el diseño de observadores no lineales de velocidad angular basados en la teoría de Lyapunov han sido reportados en la literatura (ver, por ejemplo, [27, 31, 12] y las referencias citadas en esos documentos). Por otra parte, en [1] se plantea un observador con convergencia asintótica y local para sistemas Lagrangianos, su metodología se basa en la contracción con una estructura Riemanniana. La convergencia local se obtiene debido a que el Jacobiano es negativo definido bajo una métrica que depende solamente de un conjunto del espacio de estados. Los autores de [11] idean un observador de orden reducido que converge global y asintóticamente; sin embargo, requiere el uso de una matriz de transformación, que para los sistemas Lagrangianos se obtiene por la factorización Cholesky de la matriz de inercia [8], y en consecuencia se complica el análisis de estabilidad.

Se han propuesto otros resultados que se basan en el concepto de modos deslizantes [6] o en la estrategia de alta ganancia [18]. Ambos trabajos logran estimar localmente todo el vector de estado. El primero lo hace exponencialmente y la localidad puede incrementarse al emplear ganancias más grandes; sin embargo, la sensibilidad al ruido también aumenta. Por el contrario, la convergencia del observador de alta ganancia es asintótica y las altas ganancias atenúan el efecto de las no linealidades del modelo matemático del robot.

En este capítulo se diseña un observador de orden reducido que permite estimar la velocidad angular. Asimismo, se propone un observador de orden completo que estima tanto la velocidad como la posición angular. Ambos observadores no se obtienen de algún trabajo previo, éstos parten de la idea del Observador de Luenberger ya que su estructura se compone de una copia de planta más un término de corrección, que es la diferencia entre un estado de la planta y el estado estimado, multiplicado por una ganancia.

4.1. Observador de orden reducido

Teorema 4.1. *Considere el observador de orden reducido*

$$\dot{\hat{v}} = M(x)^{-1} (\tau - C(x, \hat{v})\hat{v} - F(\hat{v}) - g(x)) - k_o\hat{v}, \quad (4.1)$$

$$\hat{v} = \bar{v} + k_o x, \quad (4.2)$$

donde $k_o > 0$ es la ganancia del observador, \hat{v} es la velocidad estimada y \bar{v} es una variable auxiliar. Sean $\lambda > 0$, $r_{\hat{v}} > 0$ algunas constantes y la región

$$\chi_1 = \{\hat{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{v}\| < r_{\hat{v}}\}. \quad (4.3)$$

Si la ganancia del observador cumple con $k_o > (\lambda + C_{M r_{\hat{v}}})/M_m$, entonces el observador es contrayente con razón de contracción $\frac{\lambda}{M_M}$, para cualquier condición inicial $\hat{v}(t_0) \in \chi_1$, es decir, $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente.

Demostración. En primer lugar, se obtiene la derivada con respecto al tiempo de (4.2)

$$\dot{\hat{v}} = \dot{\bar{v}} + k_o v,$$

y se sustituye en (4.1) dando como resultado:

$$\dot{\hat{v}} = M(x)^{-1} (\tau - C(x, v)\hat{v} - F(\hat{v}) - g(x)) - k_o\hat{v} + k_o v.$$

De esta última ecuación se observa que el observador en su forma implementable (4.1), (4.2) puede ser reescrito como

$$M(x)\dot{\hat{v}} + C(x, \hat{v})\hat{v} + F(\hat{v}) + g(x) + k_o M(x)(\hat{v} - v) = \tau, \quad (4.4)$$

en esta última ecuación se puede notar que el observador consiste en la copia de la planta más el término de corrección. El siguiente paso es sumar y restar el término $C(x, v)\hat{v}$, para que pueda ser eliminado posteriormente con el término $\dot{M}(x)\hat{v}$ debido a la propiedad de antisimetría

$$M(x)\dot{\hat{v}} + C(x, v)\hat{v} + F(\hat{v}) + g(x) + k_o M(x)(\hat{v} - v) + C(x, \hat{v})\hat{v} - C(x, v)\hat{v} = \tau,$$

empleando la **Propiedad A2** en el término $-C(x, v)\hat{v}$, la ecuación resulta en

$$\begin{aligned} M(x)\dot{\hat{v}} + C(x, v)\hat{v} + F(\hat{v}) + g(x) + k_o M(x)(\hat{v} - v) + C(x, \hat{v})\hat{v} - C(x, \hat{v})v &= \tau, \\ M(x)\dot{\hat{v}} + C(x, v)\hat{v} + F(\hat{v}) + g(x) + (k_o M(x) + C(x, \hat{v}))(\hat{v} - v) &= \tau, \end{aligned} \quad (4.5)$$

a (4.5) se le denomina *observador en su forma de análisis*. Por lo tanto, el sistema virtual se propone como

$$M(x)\dot{\xi} + C(x, v)\xi + F(\xi) + g(x) + (k_o M(x) + C(x, \hat{v}))(\xi - v) = \tau, \quad (4.6)$$

que tiene a la velocidad angular del robot v en (2.12) y a su estimado \hat{v} en (4.4) como dos soluciones particulares. La dinámica del desplazamiento infinitesimal de (4.6) está dada por

$$M(x)\delta\dot{\xi} = - \left(C(x, v) + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \delta\xi. \quad (4.7)$$

Y la evolución temporal de la distancia cuadrática bajo la métrica $M(x)$ es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) = \delta\xi^T M(x) \delta\dot{\xi} + \frac{1}{2} \delta\xi^T \dot{M}(x) \delta\xi,$$

Sustituyendo la dinámica infinitesimal (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) &= -\delta\xi^T \left(C(x, v) + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \delta\xi + \frac{1}{2} \delta\xi^T \dot{M}(x) \delta\xi, \\ &= \delta\xi^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(x) - C(x, v) \right) \delta\xi - \delta\xi^T \left(k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \delta\xi, \end{aligned}$$

El primer término es eliminado debido a la **Propiedad A1**

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) = -\delta\xi^T \left(k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \delta\xi,$$

Empleando las **Propiedades A3 - A5**, se deduce que dentro de la región de contracción se satisface que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M(x) \delta\xi) &\leq -(k_o M_m - C_{Mr\hat{v}}) \|\delta\xi\|^2 \\ &\leq -\lambda \|\delta\xi\|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por lo tanto, el sistema virtual es contrayente y todas sus trayectorias que empiezan en la región de contracción χ_1 convergen a una misma. Como consecuencia, $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente. \square

4.2. Observador de orden completo

Comúnmente las señales de posición medidas también se encuentran contaminadas por ruido. Una solución, para descartar en cierta medida este problema, es diseñar un observador de orden completo que estime todo el estado del sistema y sirva como filtro a la señal afectada. En el caso del robot manipulador se estima tanto la velocidad como la posición angular y con ambas estimaciones se calcula el esfuerzo de control.

El observador que se presenta a continuación está formado por las ecuaciones del observador de orden reducido y una ecuación para estimar la posición angular. Ésta consiste en una copia de (2.11) más un término de inyección de salida.

Teorema 4.2. *Considere el observador de orden completo*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}} &= M(x)^{-1} (\tau - C(x, \hat{v})\hat{v} - F(\hat{v}) - g(x)) - k_o\hat{v}, \\ \hat{v} &= \bar{v} + k_o x, \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{v} + k_{o2}(x - \hat{x}),\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde $k_o > 0$, $k_{o2} > 0$ son las ganancias del observador, \hat{v} es la velocidad estimada y \hat{x} es la posición estimada.

Sea la región

$$\chi_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} \hat{v}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\hat{v}\| < r_{\hat{v}} \right\}.\tag{4.10}$$

Nuevamente, si la ganancia del observador cumple con $k_o > (\lambda + C_M r_{\hat{v}})/M_m$, entonces el observador es contrayente con razón de contracción $\min\{\frac{\lambda}{M_M}, k_{o2}\}$, para cualquier condición inicial $X(t_0) \in \chi_2$, es decir, $\hat{v} \rightarrow v$ y $\hat{x} \rightarrow x$ exponencialmente.

Demostración. Se demostró anteriormente que el observador las primeras dos ecuaciones pueden ser reescritas en el observador en su forma de análisis (4.5). Como resultado, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{v} + k_{o2}(x - \hat{x}), \\ M(x)\dot{\hat{v}} &= -C(x, v)\hat{v} - F(\hat{v}) - g(x) - (k_o M(x) + C(x, \hat{v}))(\hat{v} - v) + \tau,\end{aligned}$$

el sistema virtual se propone de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 + k_{o2}(x - \xi_1), \\ M(x)\dot{\xi}_2 &= -C(x, v)\xi_2 - F(\xi_2) - g(x) - (k_o M(x) + C(x, \hat{v}))(\xi_2 - v) + \tau,\end{aligned}$$

el cual posee las siguientes dos soluciones particulares: $\xi = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ que corresponde al sistema

original (2.11), (2.12) y $\xi = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{v} \end{bmatrix}$ para el observador (4.1), (4.2), (4.9). La dinámica del

desplazamiento infinitesimal del sistema virtual está dada por

$$\begin{aligned}\delta\dot{\xi}_1 &= \delta\xi_2 - k_{o2}\delta\xi_1, \\ M(x)\delta\dot{\xi}_2 &= - \left(C(x, v) + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \delta\xi_2.\end{aligned}$$

La derivada temporal de la distancia cuadrática bajo una nueva métrica $\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}$, con I la matriz identidad, es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}(x) \delta\xi) = \delta\xi^T \mu(x) \delta\xi + \frac{1}{2} \delta\xi^T \dot{\mu}(x) \delta\xi,$$

Sustituyendo la dinámica infinitesimal, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}(x) \delta\xi) &= \delta\xi^T \begin{bmatrix} -k_{o2}I & I \\ 0 & - \left(C(x, v) + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \end{bmatrix} \delta\xi + \frac{1}{2} \delta\xi^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{M}(x) \end{bmatrix} \delta\xi, \\ &= \delta\xi^T \begin{bmatrix} -k_{o2}I & I \\ 0 & -k_o M(x) - C(x, \hat{v}) - \frac{dF(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} \delta\xi.\end{aligned}$$

Ya se demostró que la dinámica $\delta\xi_2$ es contrayente si se cumple la condición $k_o > (\lambda + C_{M^r \hat{v}})/M_m$. Por otro lado, la dinámica $\delta\xi_1$ tiene un término cruzado I que es constante (acotado) y el término $-k_{o2}I$ que es negativo definido a causa del diseño de k_{o2} . Por lo tanto, aplicando el **Lema 2.1** el sistema virtual es contrayente, es decir, $\hat{x} \rightarrow x$ y $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente. \square

Capítulo 5

Controlador por retroalimentación de salida

Se sabe que el principio de separación no aplica generalmente en sistemas no lineales, ya que el diseño de un observador que estima asintóticamente los estados de un sistema no lineal, no garantiza la estabilidad del sistema cuando en el controlador se usa el estimado en lugar del estado real. Este problema ha motivado a estudiar el diseño de esquemas combinados controlador - observador que solamente empleen retroalimentación de posición.

Algunos ejemplos que estudian la interacción dinámica entre observador y controlador son [5] donde se propone una versión modificada del controlador par calculado que en conjunto con observador no lineal logra estabilidad local y exponencial. Mientras que en [17] se considera un controlador PD con compensación de gravedad y con el observador en lazo cerrado se obtiene un controlador local y asintóticamente estable. Uno de los primeros trabajos en obtener convergencia global es [4], en el cual proponen una solución sencilla que tiene la ventaja de llevar el problema a uno similar en el caso lineal; sin embargo, solamente se logra para el caso *de un grado de libertad*.

Una metodología distinta se establece en [14] obteniendo un controlador por retroalimentación de salida con estabilidad global y asintótica que emplea el primer método de Lyapunov y no considera fricción en el modelo del sistema. Su contribución más importante es la implementación de un filtro utilizando sólo las posiciones, de modo que, no es necesario considerar un observador.

En cuanto a controladores basados en pasividad, los autores de [3] presentan un control semi-global y exponencialmente convergente para robots que usa sólo mediciones de posición, su metodología se basa en introducir funciones de energía que consisten en la combinación de la energía deseada del controlador y del observador. En [24] se propone un control de seguimiento global, uniforme y exponencial para sistemas mecánicos sin emplear la velocidad, se combina un controlador basado en pasividad por retroalimentación de estados y un observador de velocidad diseñado por inmersión e invarianza. Se presenta en [34] una clase

de controladores que logra seguimiento asintótico de posición, en el espacio de tareas, y orientación del efector final que usa el cuaternión unitario para describir a ésta. Primero, se desarrolla un controlador adaptable por retroalimentación de estados con teoría de Lyapunov y luego se usa para desarrollar un controlador por retroalimentación de salida basado en el modelo. En estas tres referencias mencionadas, el controlador resultante debe rediseñarse para garantizar la estabilidad general.

El rediseño de estos esquemas puede resultar complicado. Sin embargo, la teoría de contracción es una herramienta útil para el diseño por bloques de sistemas de control ya que una de sus características importantes es que se preserva en ciertas combinaciones de sistemas, es decir, la combinación de dos módulos contrayentes (bajo ciertas condiciones) puede generar un sistema contrayente.

Partiendo de este enfoque, en este capítulo se combinan los resultados obtenidos anteriormente para obtener el controlador por retroalimentación de salida y posteriormente se derivan las condiciones para garantizar la estabilidad.

5.1. Diseño del controlador

Según el principio de equivalencia cierta, la ley de control por retroalimentación de posición (salida del sistema) se obtiene al combinar el controlador por retroalimentación de estado (3.4) con el observador de velocidad angular (4.1),(4.2). En consecuencia, el nuevo controlador está dado por

$$M(x)\dot{\hat{v}}_r + C(x, \hat{v})v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) = \tau, \quad (5.1)$$

donde

$$\dot{\hat{v}}_r = \ddot{x}_d - \lambda_c(\hat{v} - \dot{x}_d),$$

que para facilitar su análisis puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_r &= \ddot{x}_d - \lambda_c(\hat{v} - \dot{x}_d) + \lambda_c v - \lambda_c v, \\ &= \ddot{x}_d - \lambda_c(v - \dot{x}_d) - \lambda_c(\hat{v} - v), \\ &= \dot{v}_r - \lambda_c(\hat{v} - v). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Teorema 5.1. *Considere la ley de control definida por (5.1), (3.5), (5.2) con el observador (4.1), (4.2), en lazo cerrado con el sistema (2.11), (2.12).*

Y que las ganancias del controlador y observador son ajustadas tal que

i) *Ganancias del controlador: $\lambda_c > 0$, $K_c > \epsilon I$ para alguna $\epsilon > 0$.*

ii) *Ganancia del observador:* $k_o > (\lambda + C_M r_{\hat{v}})/M_m$, con

$$\begin{aligned} \lambda &> \frac{\lambda_{12}^2}{4\epsilon}, \\ \lambda_{12} &= \lambda_c M_M + \lambda_{\max}(K_c) + C_M \lambda_c r_x + C_M C_1, \\ C_1 &\geq \| \dot{x}_d + \lambda_c x_d \| . \end{aligned}$$

Entonces, el sistema es contrayente con razón de contracción igual a $\min\{\lambda_{\min}(K_c) - \epsilon, \lambda - \lambda_{12}^2/(4\epsilon)\}/M_M$ dentro de la región

$$\chi_3 = \left\{ X_2 = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \| x \| < r_x, \| \hat{v} \| < r_{\hat{v}} \right\}, \quad (5.3)$$

i.e. para cualquier condición inicial $X_2(t_0) \in \chi_3$, $x \rightarrow x_d$, $v \rightarrow \dot{x}_d$ y $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente.

Demostración. Se sustituye (5.2) en (5.1)

$$M(x)\dot{v}_r - \lambda_c M(x)(\hat{v} - v) + C(x, \hat{v})v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) = \tau,$$

de forma similar que en el **Teorema 4.1**, se suma y resta el término $C(x, v)v_r$

$$M(x)\dot{v}_r - \lambda_c M(x)(\hat{v} - v) + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) + C(x, \hat{v})v_r - C(x, v)v_r = \tau,$$

y se aplica la Propiedad 3 a los dos últimos término del lado derecho

$$\begin{aligned} M(x)\dot{v}_r - \lambda_c M(x)(\hat{v} - v) + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) + C(x, v_r)\hat{v} - C(x, v_r)v &= \tau, \\ M(x)\dot{v}_r - \lambda_c M(x)(\hat{v} - v) + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) + C(x, v_r)(\hat{v} - v) &= \tau, \\ M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x))(\hat{v} - v) &= \tau, \end{aligned}$$

por último, también se suma y resta el término $K_c v$ de tal forma que

$$\begin{aligned} M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v_r) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x))(\hat{v} - v) + K_c v - K_c v &= \tau, \\ M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x))(\hat{v} - v) + K_c v_r - K_c v &= \tau, \\ M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(\hat{v} - v) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x))(\hat{v} - v) - K_c(v - v_r) &= \tau, \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ley de control puede ser reescrita como

$$M(x)\dot{v}_r + C(x, v)v_r + F(\hat{v}) + g(x) - K_c(v - v_r) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x) - K_c)(\hat{v} - v) = \tau, \quad (5.4)$$

En este caso el sistema virtual se conforma de dos ecuaciones: una para el controlador con la retroalimentación de salida y otra para el observador, y se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned} M(x)\dot{\xi}_1 + C(x, v)\xi_1 + F(\xi_2) + g(x) - K_c(v - \xi_1) + (C(x, v_r) - \lambda_c M(x) - K_c)(\xi_2 - v) &= \tau, \\ M(x)\dot{\xi}_2 + C(x, v)\xi_2 + F(\xi_2) + g(x) + (k_o M(x) + C(x, \hat{v}))(\xi_2 - v) &= \tau, \end{aligned}$$

El sistema virtual $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ tiene como soluciones particulares a $\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_r \\ \hat{v} \end{bmatrix}$ que corresponden al sistema robótico y al controlador con el observador, respectivamente. La dinámica del desplazamiento infinitesimal del sistema virtual es

$$\begin{aligned} M(x)\delta\dot{\xi}_1 &= \left(\lambda_c M(x) + K_c - C(x, v_r) - \frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} \right) \delta\xi_2 - (C(x, v) + K_c)\delta\xi_1, \\ M(x)\delta\dot{\xi}_2 &= - \left(C(x, v) + \frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) \right) \delta\xi_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La evolución temporal de la distancia cuadrática bajo la métrica $\mathbf{M}_2(x) = \begin{bmatrix} M(x) & 0 \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}_2(x) \delta\xi) &= \delta\xi_1^T M(x) \delta\dot{\xi}_1 + \frac{1}{2} \delta\xi_1^T \dot{M}(x) \delta\xi_1 + \delta\xi_2^T M(x) \delta\dot{\xi}_2 + \frac{1}{2} \delta\xi_2^T \dot{M}(x) \delta\xi_2, \\ &= \delta\xi_1^T \left(\lambda_c M(x) + K_c - C(x, v_r) - \frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} \right) \delta\xi_2 - \delta\xi_1 (C(x, v) + K_c) \delta\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta\xi_1^T \dot{M}(x) \delta\xi_1 - \delta\xi_2^T \left(C(x, v) + \frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) \right) \delta\xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta\xi_2^T \dot{M}(x) \delta\xi_2, \end{aligned}$$

Se aplica la Propiedad 1 y la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}_2(x) \delta\xi) &= -\delta\xi_1 K_c \delta\xi_1 + \delta\xi_1^T \left(\lambda_c M(x) + K_c - C(x, v_r) - \frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} \right) \delta\xi_2 \\ &\quad - \delta\xi_2^T \left(\frac{dF(\xi_2)}{d\xi_2} + k_o M(x) + C(x, \hat{v}) \right) \delta\xi_2, \\ &\leq -K_c \|\delta\xi_1\|^2 + (\lambda_c M(x) + K_c - C(x, v_r)) \|\delta\xi_1\| \|\delta\xi_2\| \\ &\quad - (k_o M(x) + C(x, \hat{v})) \|\delta\xi_2\|^2, \\ &\leq -\lambda_{\min}\{K_c\} \|\delta\xi_1\|^2 + \lambda_{12} \|\delta\xi_1\| \|\delta\xi_2\| - \lambda \|\delta\xi_2\|^2. \end{aligned}$$

Para eliminar el término cruzado se completa un binomio al cuadrado

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}_2(x) \delta\xi) \leq -(\lambda_{\min}\{K_c\} - 1) \|\delta\xi_1\|^2 - \left(\lambda - \frac{\lambda_{12}^2}{4} \right) \|\delta\xi_2\|^2 - \left(\|\delta\xi_1\| - \frac{\lambda_{12}}{2} \|\delta\xi_2\| \right)^2.$$

Para finalizar, se agrega una constante ε que funciona como un grado de libertad en la elección de las ganancias del controlador/observador. De modo que la desigualdad queda expresada como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbf{M}_2(x) \delta\xi) &\leq -(\lambda_{\min}\{K_c\} - \varepsilon) \|\delta\xi_1\|^2 - \left(\lambda - \frac{\lambda_{12}^2}{4\varepsilon} \right) \|\delta\xi_2\|^2 - \varepsilon \left(\|\delta\xi_1\| - \frac{\lambda_{12}}{2\varepsilon} \|\delta\xi_2\| \right)^2, \\ &\leq -(\lambda_{\min}\{K_c\} - \varepsilon) \|\delta\xi_1\|^2 - \left(\lambda - \frac{\lambda_{12}^2}{4\varepsilon} \right) \|\delta\xi_2\|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por lo tanto, si $\lambda_{\min}\{K_c\} - \varepsilon > 0$ y $\lambda - \frac{\lambda_{12}^2}{4\varepsilon} > 0$, entonces el sistema global es contrayente, es decir, $x \rightarrow x_d$, $v \rightarrow \dot{x}_d$ y $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente. \square

Observación 5.1. Con el análisis basado en contracción se obtiene un diseño del controlador y observador más simple y más transparente ya que la combinación de subsistemas facilita el diseño del sistema global al combinar ambos módulos sin el rediseño de todo el sistema. De hecho, la contracción se preserva bajo ciertas condiciones en conexiones de sistemas en paralelo, en retroalimentación y sistemas jerárquicos [25]. En el sistema virtual (5.5) se puede observar que la dinámica del observador $\delta\xi_2$ sólo depende de él mismo $\delta\xi_2$; sin embargo, el observador $\delta\xi_2$ y el controlador $\delta\xi_1$ tienen efecto en la dinámica de éste último $\delta\xi_1$. Dicho de otra manera, si se modifica la constante del observador k_o se afecta a todo el sistema, pero si se varían las constantes del controlador K_c , λ_c el observador no presenta cambios significativos.

Capítulo 6

Simulaciones y resultados

En este capítulo se analiza el funcionamiento y desempeño de los controladores y observadores desarrollados previamente. En primer lugar, se muestran las simulaciones del controlador por retroalimentación de salida donde se analiza el desempeño al cambiar las ganancias del controlador. Posteriormente, se hace una comparación de dicho controlador con un esquema de control basado en teoría de pasividad. Y finalmente, se muestran resultados cuando hay incertidumbre paramétrica, perturbaciones en la entrada de control y ruido en las mediciones.

Se consideran los valores numéricos de un robot manipulador de dos grados de libertad (juntas rotacionales) y con una masa unida al extremo de cada eslabón [11], [29]. La matriz de inercia $M(x)$, la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, obtenida a través de los símbolos de Christoffel, $C(x, v)$ y el vector de gravedad $g(x)$ están dados por

$$M(x) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \cos(x_2) & a_2 \cos(x_2) + a_3 \\ a_2 \cos(x_2) + a_3 & a_3 \end{bmatrix},$$
$$C(x, v) = \begin{bmatrix} -a_2 \sin(x_2) v_2 & -a_2 \sin(x_2) (v_1 + v_2) \\ a_2 \sin(x_2) v_1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$g(x) = \begin{bmatrix} a_4 \cos(x_1) + a_5 \cos(x_1 + x_2) \\ a_5 \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix},$$

donde x_i, v_i son la posición angular y velocidad angular del eslabón i , respectivamente. Los parámetros $a_{1,\dots,5}$ se definen como

$$a_1 = I_1 + I_2 + m_1 L_{c1}^2 + m_2 (L_1^2 + L_{c2}^2),$$
$$a_2 = m_2 L_{c2} L_1,$$
$$a_3 = m_2 L_{c2}^2 + I_2,$$
$$a_4 = (L_{c1} (m_1 + M_1) + L_1 (m_2 + M_2)) g,$$
$$a_5 = L_{c2} (m_2 + M_2) g,$$
$$L_{c1} = \frac{L_1 (\frac{m_1}{2} + M_1)}{m_1 + M_1},$$

$$L_{c2} = \frac{L_2(\frac{m_2}{2} + M_2)}{m_2 + M_2},$$

$$I_1 = \frac{(L_1^2 + L_{w1}^2)(m_1 + M_1)}{12},$$

$$I_2 = \frac{(L_2^2 + L_{w2}^2)(m_2 + M_2)}{12},$$

donde g es la aceleración gravitacional, M_i es la masa unida al eslabón i y m_i , L_i , L_{wi} , L_{ci} y I_i son la masa, longitud, ancho, centro de masa y momento de inercia del eslabón i , respectivamente.

Además, se considera sólo fricción viscosa en las articulaciones, por lo que la matriz tiene la siguiente forma

$$F(v) = \begin{bmatrix} a_6 & 0 \\ & a_7 \end{bmatrix} v.$$

Para los parámetros se seleccionan los valores de la Tabla 6.1.

Parámetro
$m_1 = 1.0 [kg]$
$M_1 = 1.0 [kg]$
$L_1 = 0.6 [m]$
$L_{w1} = 0.07 [m]$
$m_2 = 0.6 [kg]$
$M_2 = 0.8 [kg]$
$L_2 = 0.4 [m]$
$L_{w2} = 0.07 [m]$
$g = 9.81 [m/s^2]$
$a_6 = a_7 = 0.2 [kg m^2/s]$

Tabla 6.1: Parámetros del robot.

En consecuencia, los parámetros $a_{1,\dots,5}$ de las matrices $M(x)$, $C(x, v)$ y el vector $g(x)$ toman los valores mostrados en la Tabla 6.2. Por otro lado, en ésta misma se presentan las condiciones iniciales del sistema.

Las posiciones deseadas mostradas en la Fig. 6.1, se obtuvieron en tres tramos: alcanzar un valor, una parte constante y regresar al valor original. Las partes en donde la posición varía se empleó un perfil polinomial de orden cinco de la forma

$$x_d(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 + p_5t^5. \quad (6.1)$$

Parámetro	Condición inicial
$a_1 = 0.5578 [kg\ m^2]$	$x_{10} = 0 [rad]$
$a_2 = 0.1131 [kg\ m^2]$	$x_{20} = 0 [rad]$
$a_3 = 0.0785 [kg\ m^2]$	$v_{10} = 1.5 [rad/s]$
$a_4 = 17.0694 [N\ m]$	$v_{20} = 1.5 [rad/s]$
$a_5 = 4.3164 [N\ m]$	

Tabla 6.2: Parámetros a_i y condiciones iniciales del sistema.

La trayectoria de la posición deseada del primer eslabón se propone de tal forma que alcance los 120° en dos segundos partiendo del reposo, mantenga ese valor por otros dos segundos y finalmente regrese al valor 0. El segundo eslabón debe llegar a los 30° en un segundo, permanecer en ese valor por cuatro segundos y regresar al valor inicial. El perfil polinomial se reduce a $x_d(t) = p_0$ cuando la posición se mantiene constante.

Las trayectorias de la velocidad y aceleración deseadas se obtienen de la primera y segunda derivada temporal de 6.1.

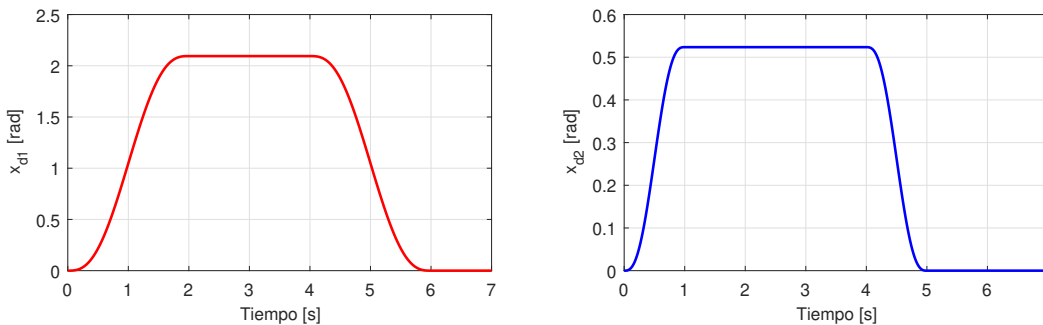


Figura 6.1: Perfiles de las posiciones deseadas.

6.1. Simulación controlador por retroalimentación de salida

En esta sección se analiza la ley de control por retroalimentación de salida presentada en el **Teorema 5.1**. Se emplean dos conjuntos de ganancias distintos para evaluar el comportamiento del sistema.

Primero se usan las ganancias

$$\begin{aligned}
 K_c &= 10I, \\
 \lambda_c &= 2, \\
 k_o &= 20.
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

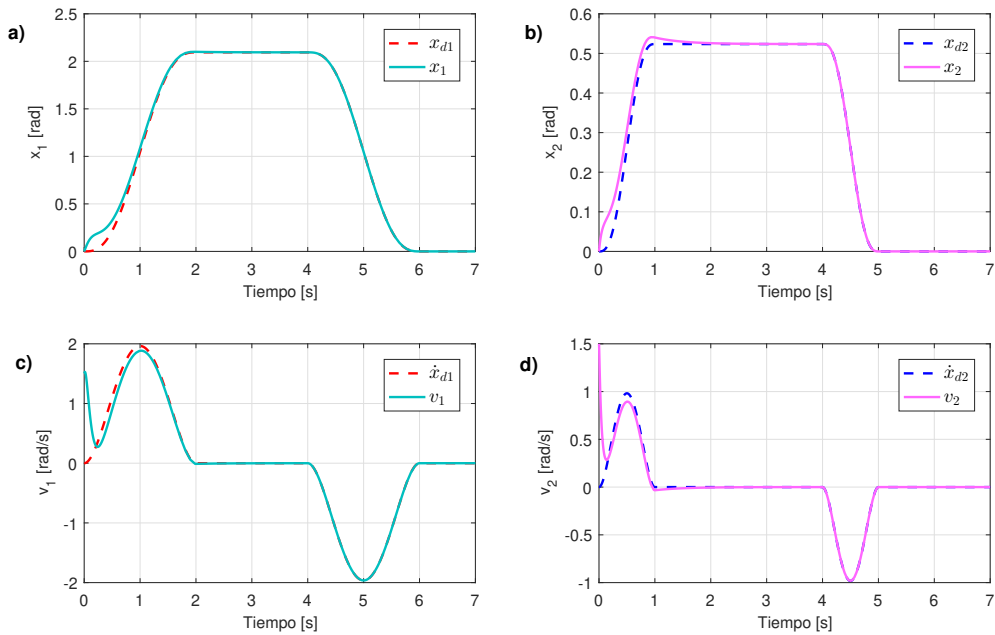


Figura 6.2: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y seguimiento de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$.

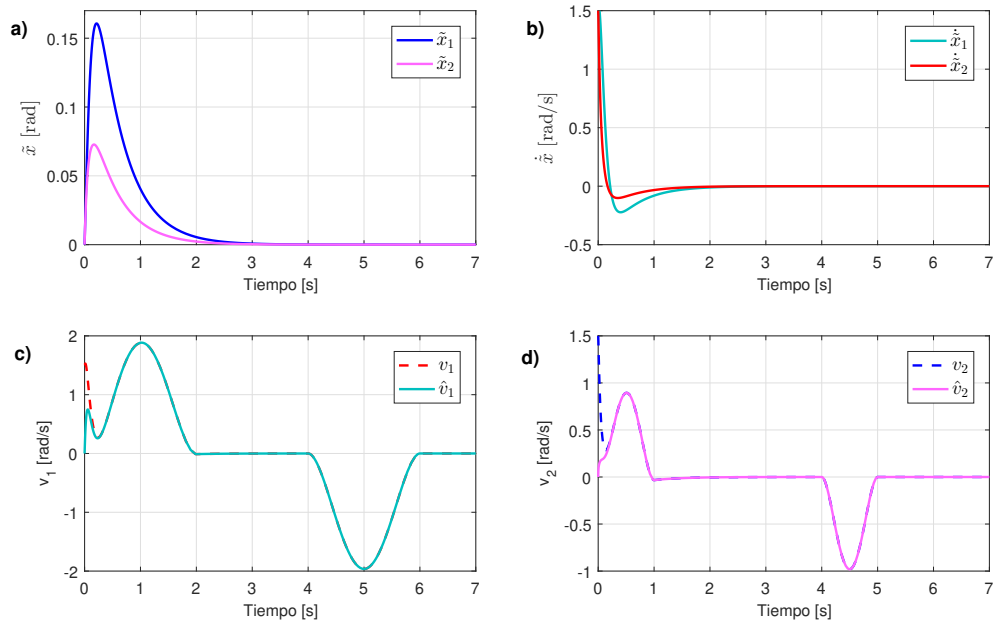


Figura 6.3: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$.

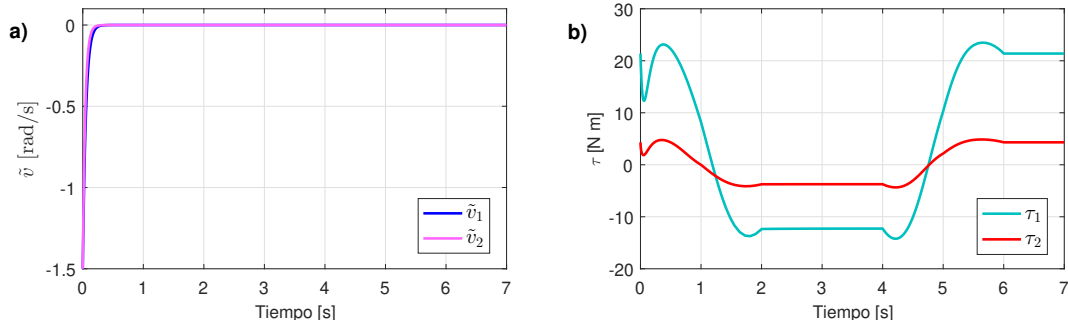


Figura 6.4: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 10I$, $\lambda_c = 2$, $k_o = 20$.

Posteriormente, se emplean las siguientes ganancias

$$\begin{aligned} K_c &= 20I, \\ \lambda_c &= 10, \\ k_o &= 20, \end{aligned} \tag{6.3}$$

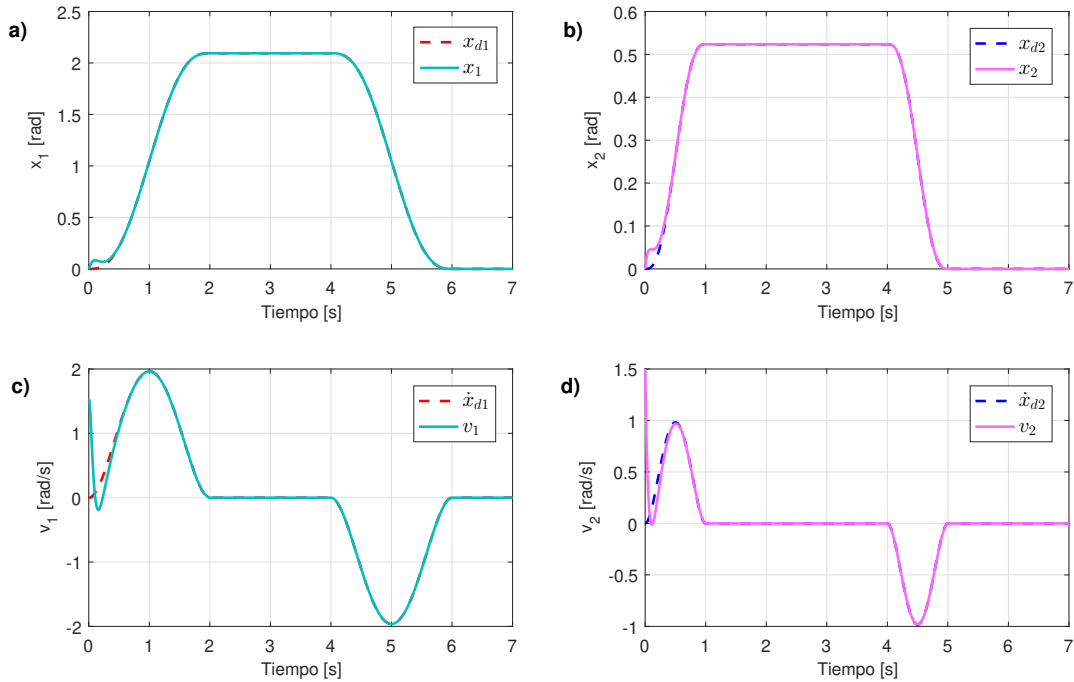


Figura 6.5: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y seguimiento de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

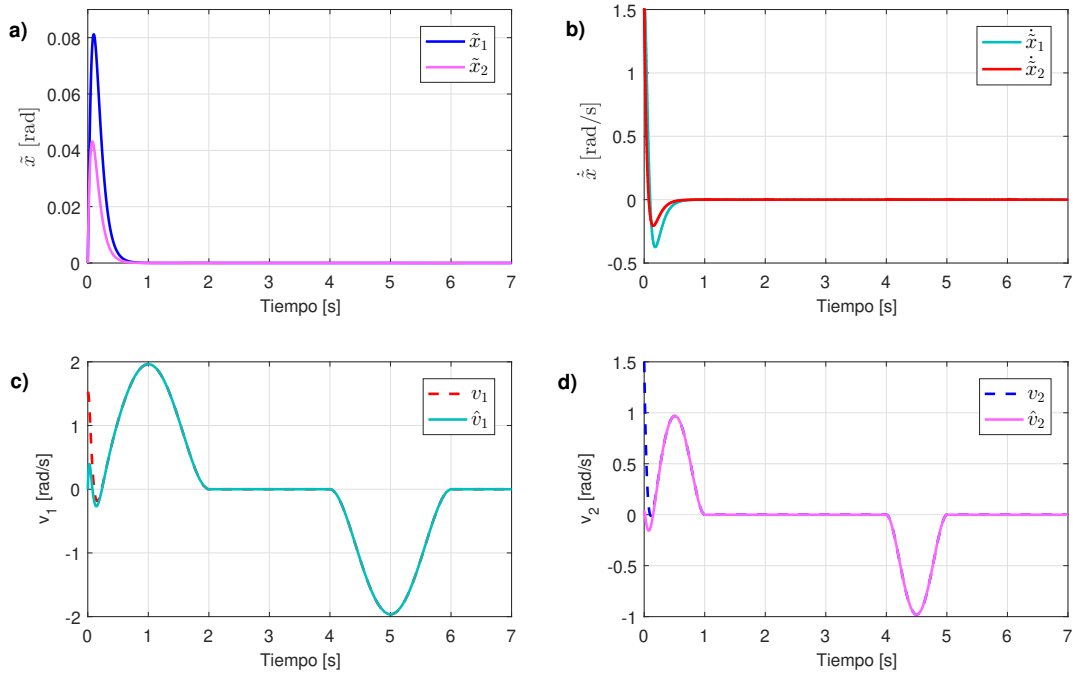


Figura 6.6: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

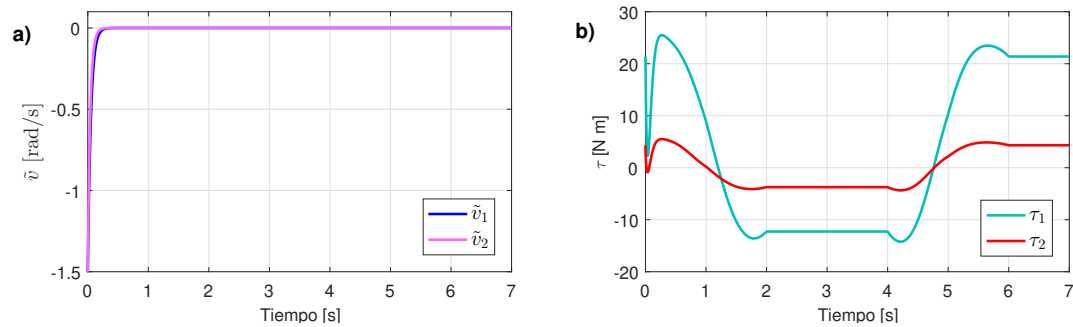


Figura 6.7: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con la ley de control por retroalimentación de salida, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

Los resultados muestran que la ley de control logra que $x \rightarrow x_d$, $v \rightarrow \dot{x}_d$ y $\hat{v} \rightarrow v$ exponencialmente, por lo que se cumple el objetivo de seguimiento.

El seguimiento de posición y velocidad se muestran en las Fig. 6.2 y 6.5, se obtiene un mejor resultado empleando las ganancias (6.3). Tal y como se había mencionado brevemente en la *Observación 5.1*, de los errores de seguimiento de las Fig. 6.3 y 6.6 **a)**, **b)** se obtienen los siguientes comentarios:

- A pesar de que todas las ganancias contribuyen a disminuir la magnitud del error, cuando éstas son incrementadas, la ganancia K_c es la que lo hace en mayor medida. Cuando $K_c = 10I$ el error de posición del primer eslabón alcanza una magnitud de $0.16 [rad]$, en cambio con $K_c = 20I$ el mismo error toma un valor máximo de $0.081 [rad]$.
- Al incrementar la ganancia λ_c el tiempo de convergencia disminuye. Con $\lambda_c = 2$ el error de posición converge a cero en aproximadamente $3.5 [s]$, mientras que el error de velocidad lo hace en $3 [s]$; con el valor de $\lambda_c = 10$ ambos errores convergen en menos de $1 [s]$.

El error de estimación se presenta en las Fig. 6.4 y 6.7 **a)**. Se emplea el mismo valor de la ganancia del observador k_o para que mostrar que su desempeño depende sólo de ella y que el efecto de las ganancias del controlador: K_c y λ_c es prácticamente nulo, obteniendo así resultados en ambas simulaciones extremadamente similares. No obstante, la ganancia del observador sí afecta el desempeño del controlador.

Por último, las gráficas del esfuerzo de control Fig. 6.4, 6.7 **b)** resultan parecidas; sin embargo, para la simulación con las ganancias (6.3) se presenta un cambio brusco al inicio a causa del incremento de las ganancias. Por otro lado, el torque máximo exigido es de $25.5 [Nm]$ y para la simulación con las ganancias (6.2) es de $23.5 [Nm]$.

Observaciones. De una manera similar al trabajo [3], la semi-globalidad del observador es causada por la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis. Aunque se han diseñado observadores con convergencia global, la condición de convergencia local en este trabajo depende solamente de la norma de la velocidad estimada. Se realizaron pruebas sin entrada de control cambiando la condición inicial del observador y se observó que el objetivo se sigue cumpliendo para condiciones como $\hat{v}_{10} = \hat{v}_{20} = 100 [rad/s]$, incluso más grandes y empleando la misma ganancia $k_o = 20$. Con respecto al controlador por retroalimentación de salida, se empleó la misma condición $\hat{v}_0 = 100 [rad/s]$ y se siguen cumpliendo ambos objetivos de seguimiento y observador, pero en mayor tiempo y con un esfuerzo de control más grande.

Por otro lado, la condición de la norma de la posición angular en la retroalimentación de salida se puede relajar si en la implementación se acotan los valores al rango de $[0, 2\pi)$.

6.2. Comparación con otro esquema de control

Con el objetivo de evaluar el rendimiento del controlador propuesto en este trabajo, en esta sección se realiza una comparativa entre el esquema formado por el controlador por retroalimentación de estado (3.4) con el observador de velocidad angular (4.1),(4.2) y el esquema propuesto en [3] que se basa en teoría de pasividad. Éste se constituye por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \tau &= M(x)\ddot{x}_d + C(x, v_o)\dot{x}_d + g(x) + F(\dot{x}_d) - K_d(v_o - v_r), \\
 v_r &= \dot{x}_d - \Lambda_1(x - x_d), \\
 v_o &= \hat{v} - \Lambda_2(x - \hat{x}), \\
 \hat{v} &= z + L_d(x - \hat{x}), \\
 \dot{z} &= \ddot{x}_d + L_{p2}(x - \hat{x}).
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Se trató de encontrar un conjunto de ganancias de modo que el esfuerzo de control fuera similar en ambos esquemas para poder analizar los objetivos de seguimiento y observación. Las ganancias seleccionadas son

$$\begin{aligned}
 K_d &= \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \\
 \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \\
 \Lambda_2 &= 0.1I_2, \\
 I_d &= 150, \\
 L_d &= I_d I_2 + \Lambda_2, \\
 L_{p2} &= I_d I_2.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Los resultados se muestran las Figuras 6.8 y 6.9, para efectos prácticos solamente se analizan los errores de seguimiento y observación omitiendo así las gráficas de la posición, velocidad y velocidad estimada. Las gráficas obtenidas con el controlador (6.4) tienen en la leyenda un subíndice B . En la Figura 6.8 se observan los errores de seguimiento tanto de posición como de velocidad. Para la primera articulación ambos errores convergen a cero aproximadamente en la mitad del tiempo y el pico del error de posición obtenido es menor. En cuanto a la segunda articulación los tiempos de convergencia se asemejan más, así como el error en la posición. Por otro lado, los errores de observación son similares; sin embargo, el error obtenido con el controlador de [3] presenta un sobrepaso.

Por último, los esfuerzos de control de la primera articulación presentan más similitud que los de la segunda. No obstante, al inicio de la simulación se presentan picos negativos de $-22 [Nm]$ y $-5.5 [Nm]$ para la primera y segunda articulación, respectivamente, que se traducen en los tiempos de convergencia menores y pequeños errores comentados con anterioridad. Por esta razón, ambos esquemas de control tienen un rendimiento equivalente para cumplir con ambos objetivos.

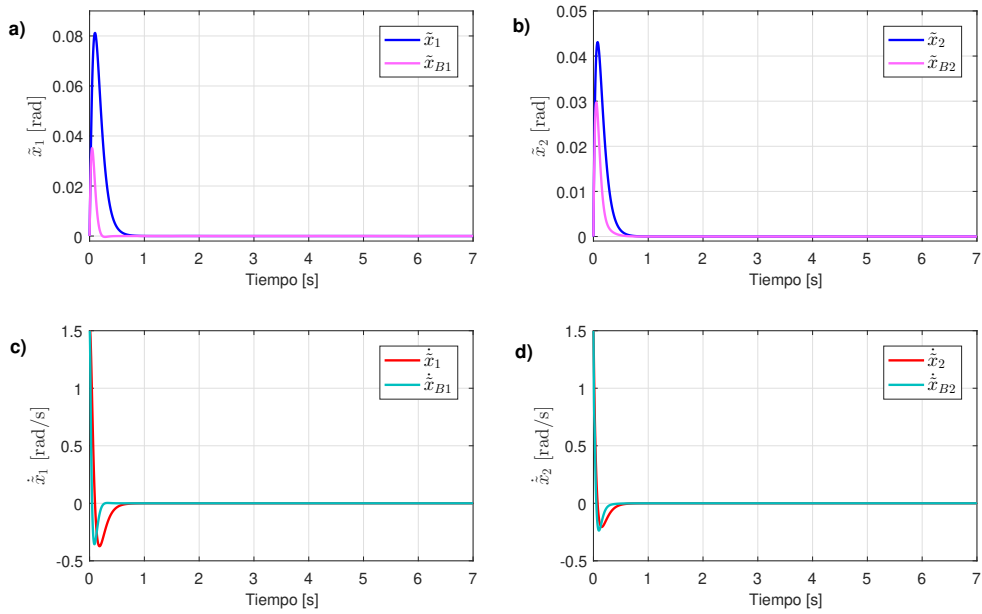


Figura 6.8: Comparación. Errores de seguimiento de posición **a)** primera y **b)** segunda articulación, errores de seguimiento de velocidad **c)** primera y **d)** segunda articulación.

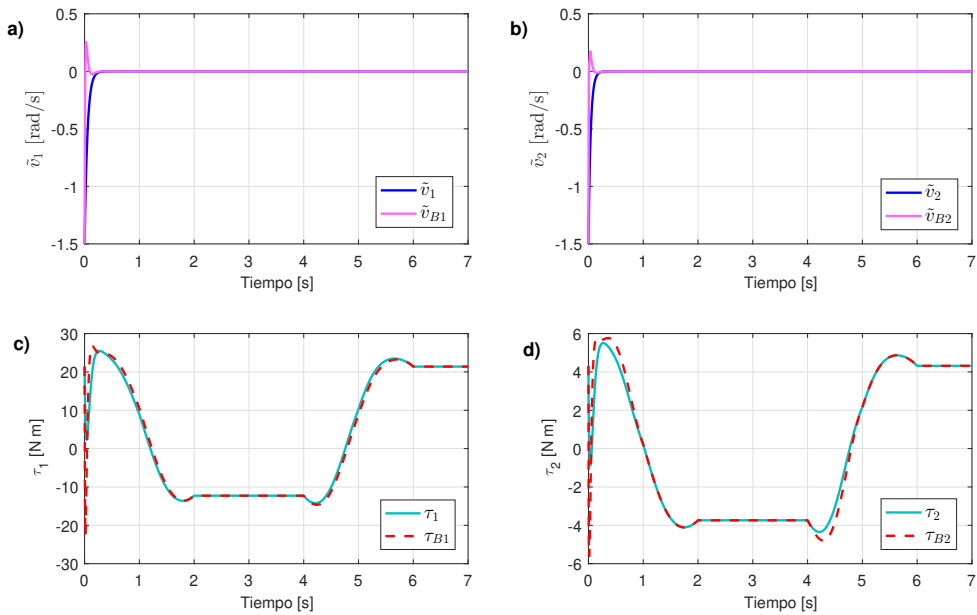


Figura 6.9: Comparación. Errores de observación para la **a)** primera y **b)** segunda articulación, esfuerzo de control para la **c)** primera y **d)** segunda articulación.

6.3. Robustez contra incertidumbres y perturbaciones externas

Aunque no se realizó un análisis de robustez contra incertidumbre y perturbaciones externas, se validó el diseño mediante simulaciones. En esta sección se presentan los resultados en presencia de estas imperfecciones: con incertidumbre paramétrica, perturbaciones o ruido en las mediciones.

6.3.1. Simulaciones con incertidumbre paramétrica

Los parámetros nominales y con incertidumbre paramétrica del sistema se muestran en la Tabla 6.3. Los parámetros con incertidumbre se obtuvieron por medio de la función *random* con una variación máxima de $\pm 10\%$ del valor nominal, excepto la gravedad que se le dio una variación del $\pm 0.5\%$.

Como se puede observar en las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 el desempeño del controlador no es el adecuado con incertidumbre paramétrica al emplear las ganancias (6.3). Por lo tanto, se modifican de la siguiente manera para compensar los errores de observación y seguimiento

$$\begin{aligned} K_c &= 40I, \\ \lambda &= 20, \\ k_o &= 150. \end{aligned} \tag{6.6}$$

En este caso se asigna un valor mucho más grande a la ganancia k_o para disminuir el error de observación, que resultó ser el más afectado, y en consecuencia el error de seguimiento.

Parámetro nominal	Parámetro con incertidumbre
$m_1 = 1.0 [kg]$	$m_1 = 1.0782 [kg]$
$M_1 = 1.0 [kg]$	$M_1 = 1.0919 [kg]$
$L_1 = 0.6 [m]$	$L_1 = 0.6239 [m]$
$L_{w1} = 0.07 [m]$	$L_{w1} = 0.0707 [m]$
$m_2 = 0.6 [kg]$	$m_2 = 0.5579 [kg]$
$M_2 = 0.8 [kg]$	$M_2 = 0.7612 [kg]$
$L_2 = 0.4 [m]$	$L_2 = 0.3711 [m]$
$L_{w2} = 0.07 [m]$	$L_{w2} = 0.0748 [m]$
$g = 9.81 [m/s^2]$	$g = 9.7618 [m/s^2]$

Tabla 6.3: Comparación de parámetros ideales y con incertidumbre

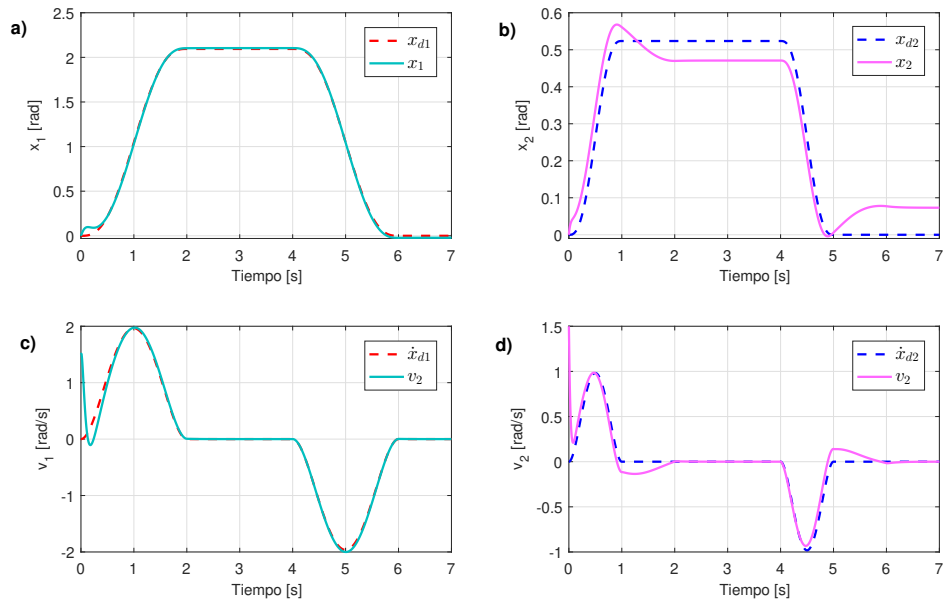


Figura 6.10: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y seguimiento de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

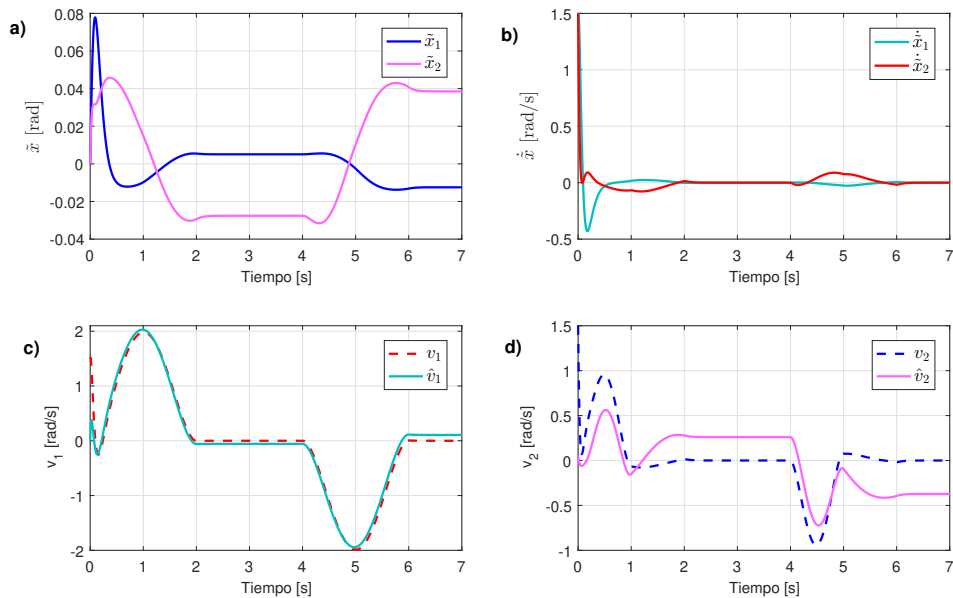


Figura 6.11: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica.

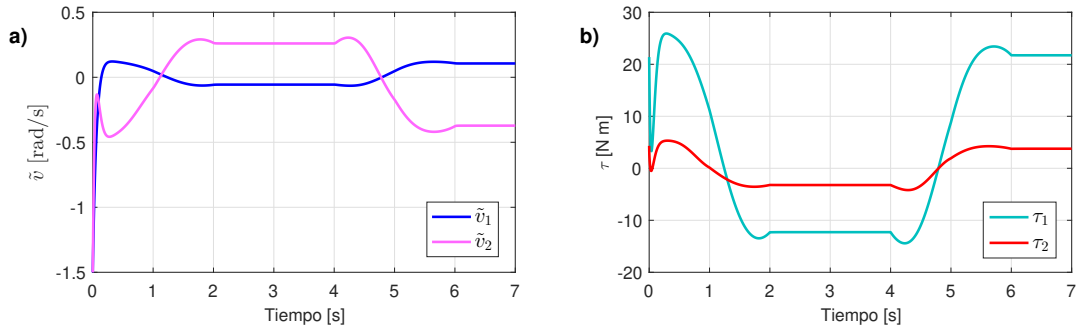


Figura 6.12: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

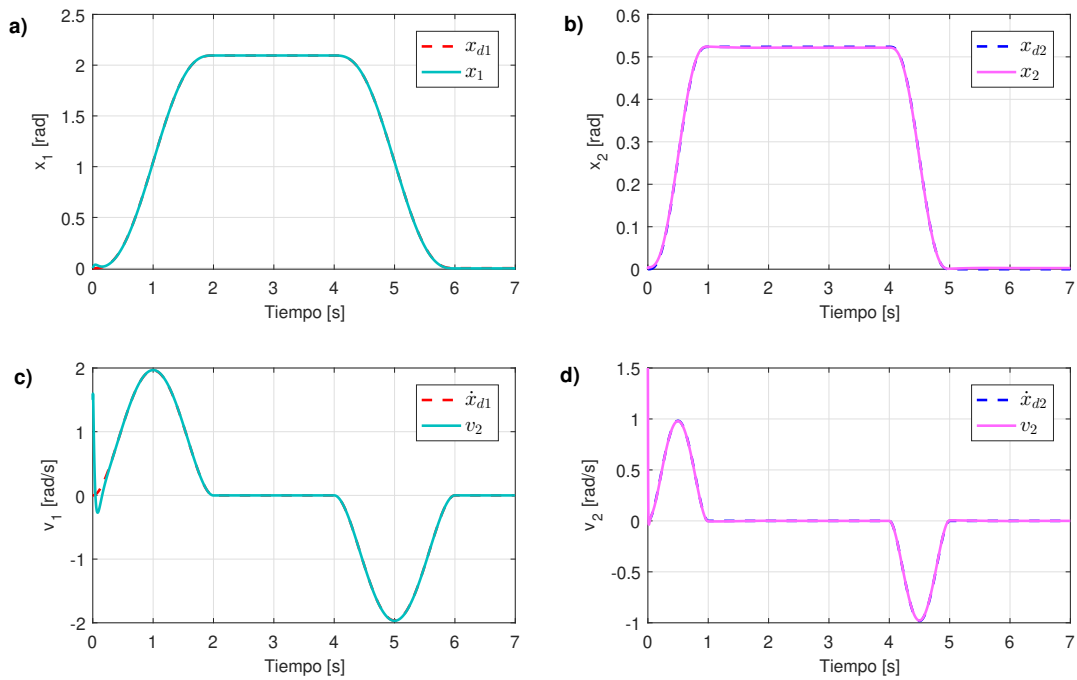


Figura 6.13: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$.

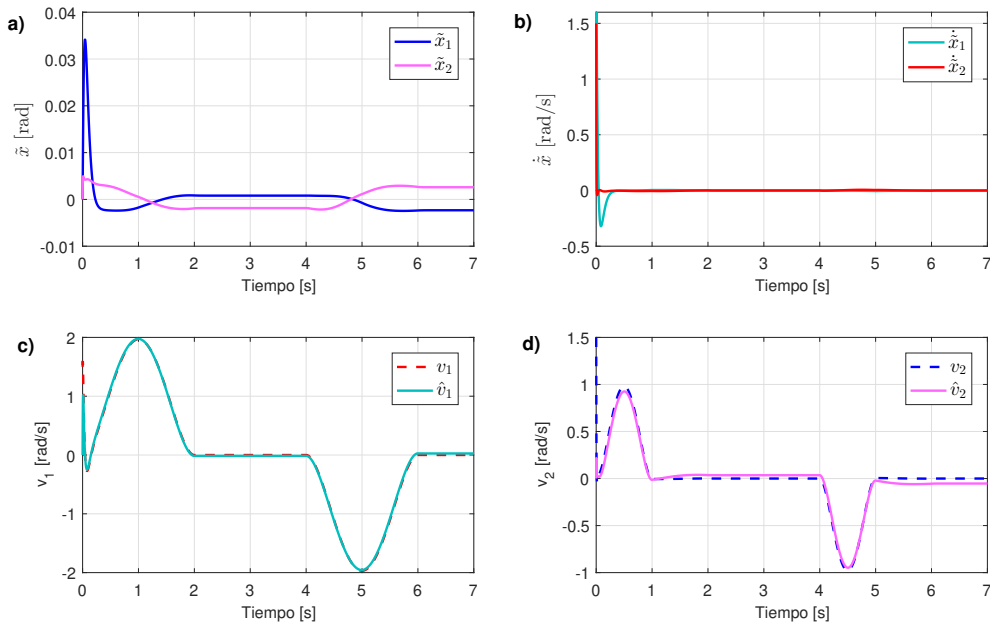


Figura 6.14: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$.

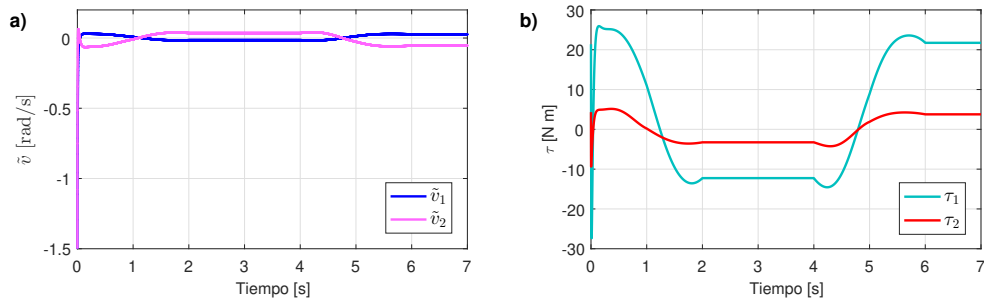


Figura 6.15: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida e incertidumbre paramétrica, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$.

En la Figura 6.13 se puede observar que la posición y velocidad presentan un mejor seguimiento que en el caso pasado. La velocidad estimada y el error de seguimiento se muestra en la Figura 6.14, el error máximo de posición después de 1 [s] es de 0.003 [rad], que equivale a 0.17° y un error máximo de velocidad de 0.005 [rad/s]. El error máximo de observación después de 1 [s] es de 0.05 [rad/s], que se muestra en la Figura 6.15 **a)** y el esfuerzo de control máximo absoluto es de 27 [Nm].

6.3.2. Simulación con perturbaciones en la entrada de control

Se introdujeron dos perturbaciones al sistema, una para cada articulación del robot, que se suman a la entrada del sistema u calculada por el controlador, es decir, son perturbaciones en el par de cada motor. Su magnitud se calculó por medio de la función *random* con un $\pm 10\%$ del torque máximo obtenido en la simulación nominal $P_1 = 2.8090[Nm]$ y $P_2 = 0.5546[Nm]$ y las gráficas se muestran en la Figura 6.16.

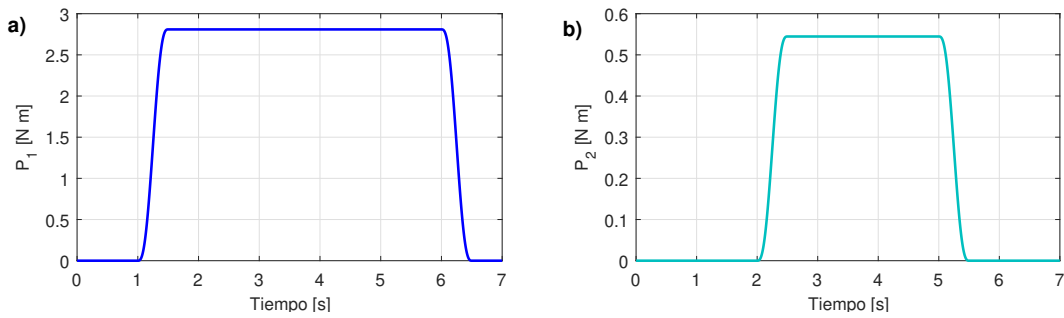


Figura 6.16: Perturbaciones en la entrada de control **a)** en el primer eslabón, **b)** en el segundo eslabón.

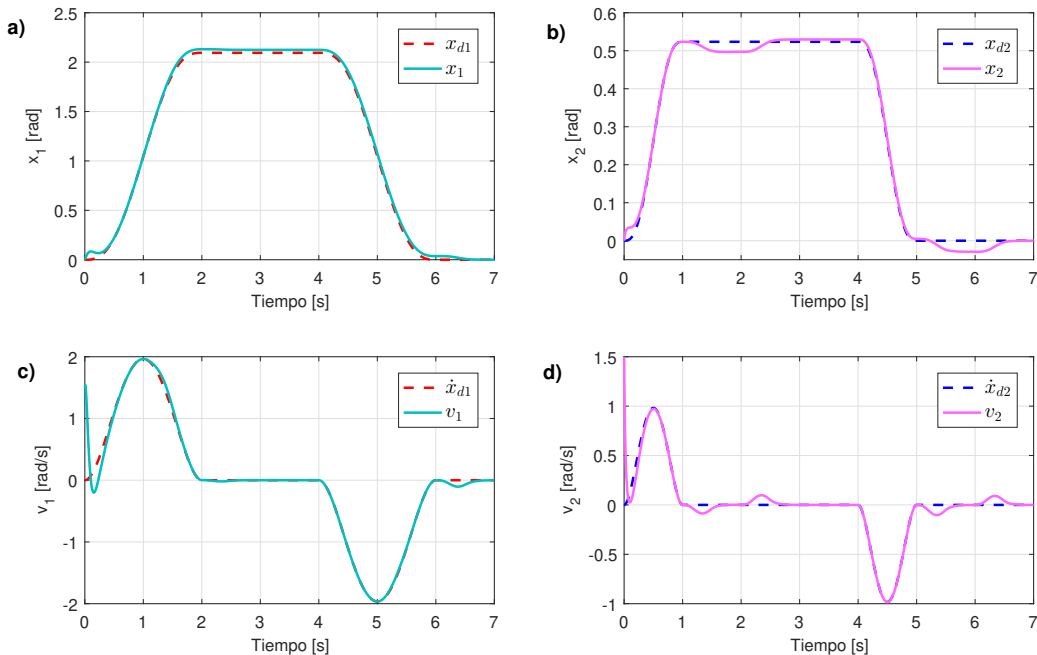


Figura 6.17: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

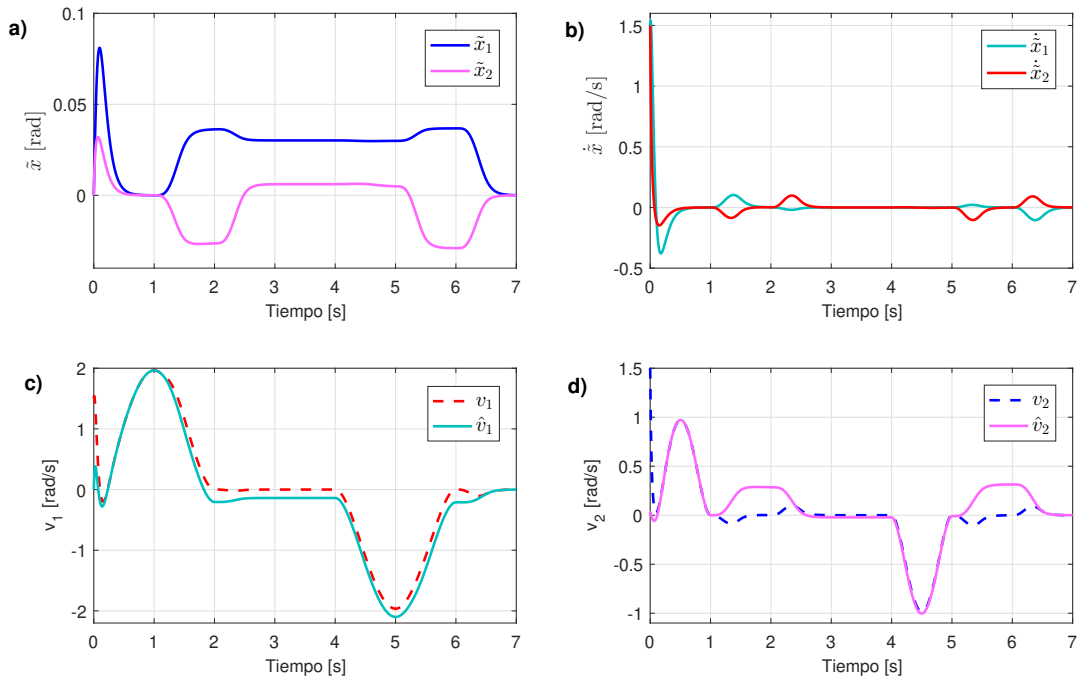


Figura 6.18: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

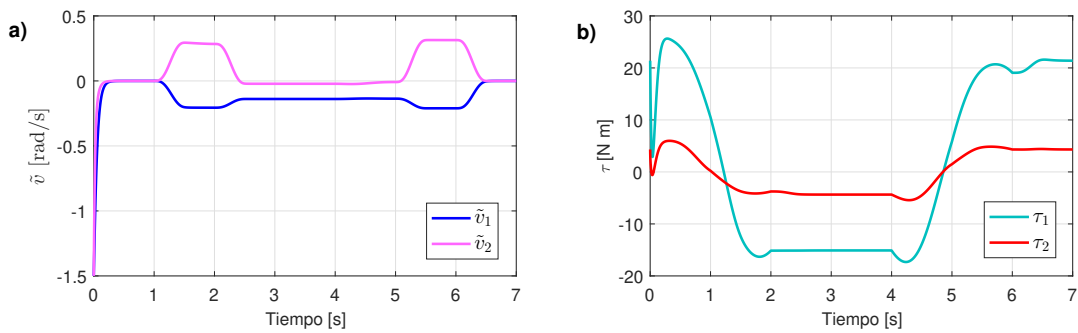


Figura 6.19: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 20I$, $\lambda_c = 10$, $k_o = 20$.

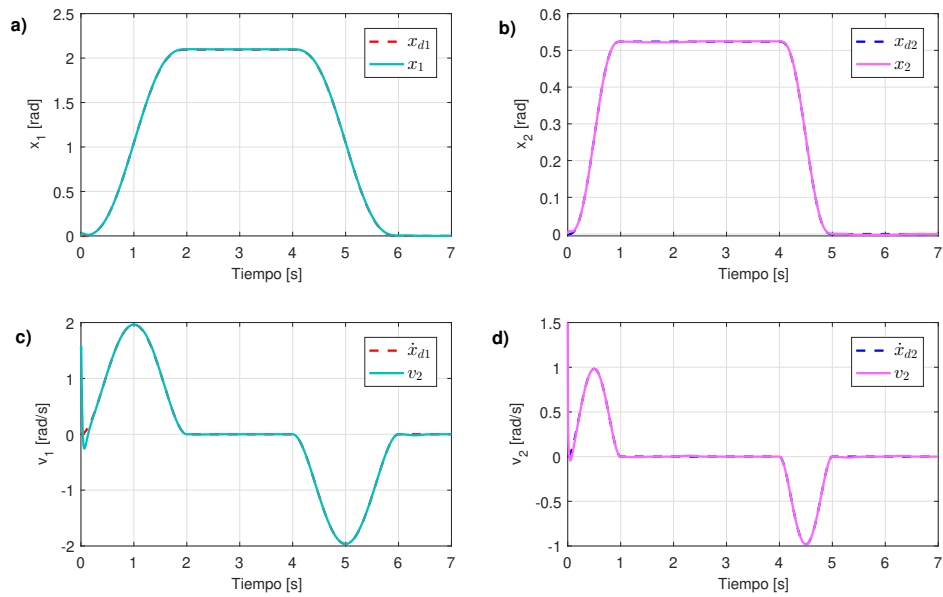


Figura 6.20: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$

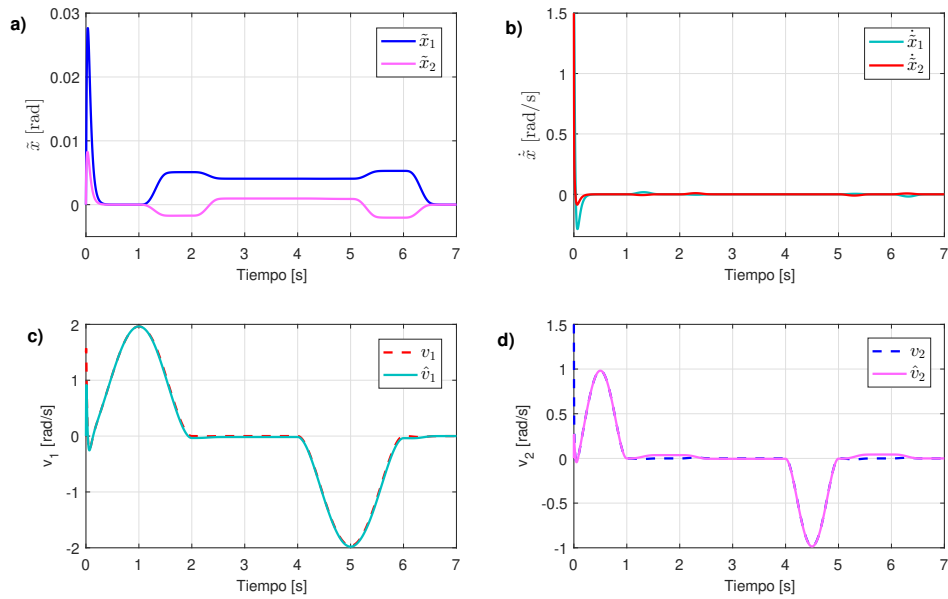


Figura 6.21: Errores de seguimiento **a)** de posición \tilde{x} y **b)** de velocidad \tilde{v} . Velocidad estimada **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$.

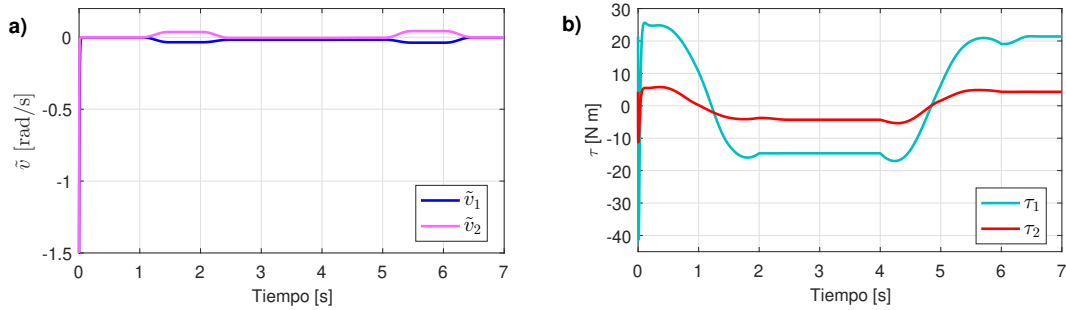


Figura 6.22: **a)** Errores de observación y **b)** esfuerzo de control τ con el controlador por retroalimentación de salida y sistema perturbado, $K_c = 40I$, $\lambda_c = 20$, $k_o = 150$.

Idénticamente que en la simulación con la incertidumbre paramétrica, el desempeño no es el adecuado cuando se presentan perturbaciones (Figuras 6.17, 6.18 y 6.19). Los resultados mejoran considerablemente al emplear las ganancias (6.6) y se muestran en las Figuras 6.20, 6.21 y 6.22. El error máximo de seguimiento de posición después del primer segundo es 0.005 [rad] , de velocidad angular es de 0.018 [rad/s] y el error de observación es 0.04 [rad/s] . Aunque los errores no son tan grandes, el esfuerzo de control máximo absoluto sí aumenta en comparación con la simulación de incertidumbre paramétrica, obteniendo un valor de 41 [Nm] .

6.3.3. Simulación con ruido en las señales medidas

En estas simulaciones el ruido es sumado a la salida del sistema (posición angular), de modo que el controlador recibe la señal contaminada. Para generar el ruido se empleó una distribución Gaussiana con media cero y una varianza adecuada para obtener una alteración en la medición de hasta 2° , dicha señal se muestra en la Figura 6.23. En la Figura 6.24 se muestra la posición angular medida contaminada con ruido.

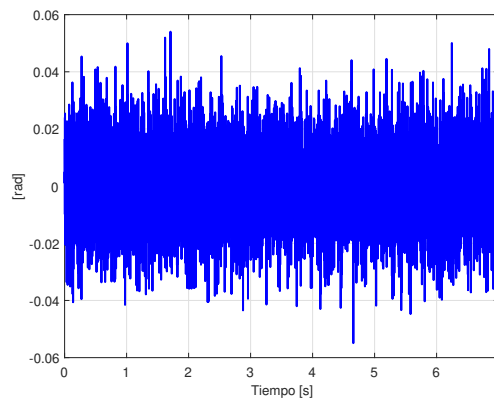


Figura 6.23: Magnitud de ruido introducido a las señales medidas.

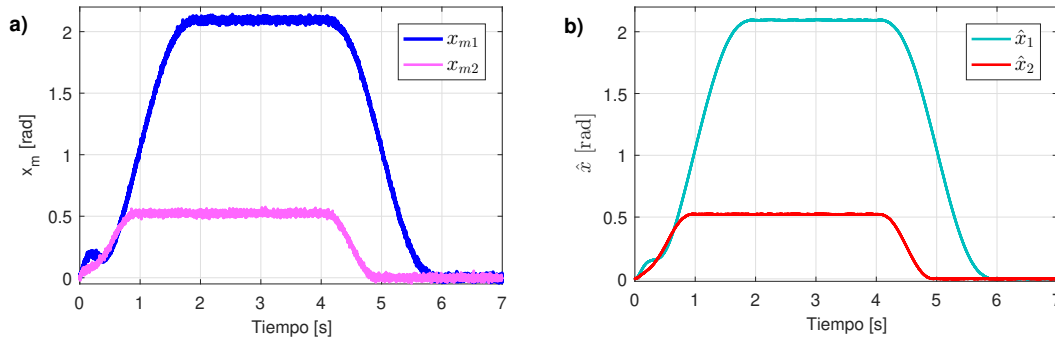


Figura 6.24: **a)** Señal medida, **b)** señal filtrada con el observador para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones.

Se analiza el controlador por retroalimentación de salida con el observador de orden completo presentado en el **Teorema 4.2**. Las ganancias seleccionadas son las siguientes

$$\begin{aligned}
 K_c &= 20I, \\
 \lambda &= 10, \\
 k_o &= 10, \\
 k_{o2} &= 10.
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Se usan las mismas ganancias del controlador que en la simulación nominal (6.3), pero se disminuye la ganancia para estimar la velocidad angular de $k_o = 20$ a $k_o = 10$. En la Figura 6.24 se muestra una comparación de **a)** la posición angular medida contaminada por ruido y **b)** la posición estimada con el observador, que presenta una considerable reducción del ruido. Los resultados de la simulación se presentan en las Figuras 6.25, 6.26, 6.27 y 6.28. El error máximo de seguimiento de posición después del primer segundo es 0.003 [rad] , de velocidad angular es de 0.04 [rad/s] , mientras que el error de observación de posición es de 0.003 [rad] y el de velocidad de 0.02 [rad/s] . Por último, se obtuvo un esfuerzo de control máximo absoluto de 28 [Nm] .

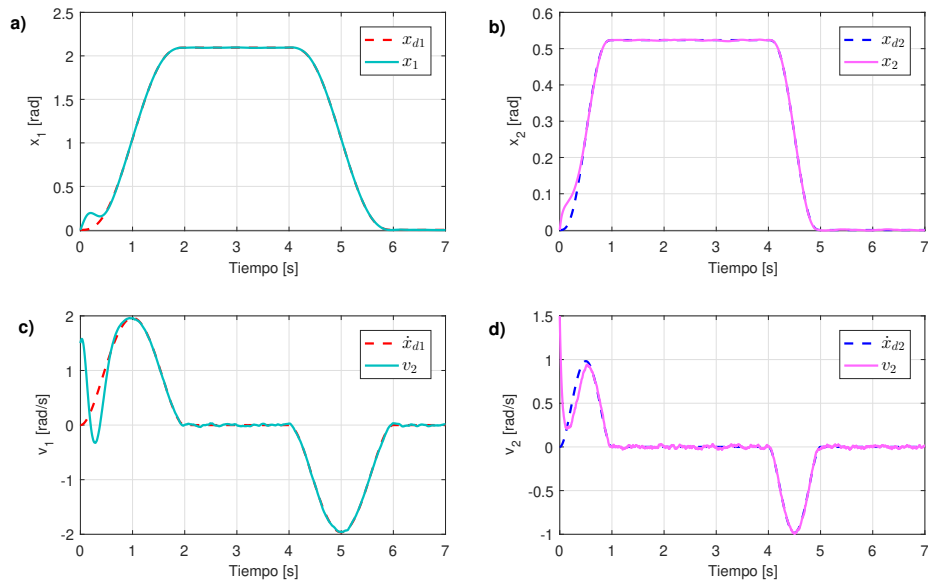


Figura 6.25: Seguimiento de posición **a)** x_1 , **b)** x_2 y de velocidad **c)** v_1 , **d)** v_2 para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).

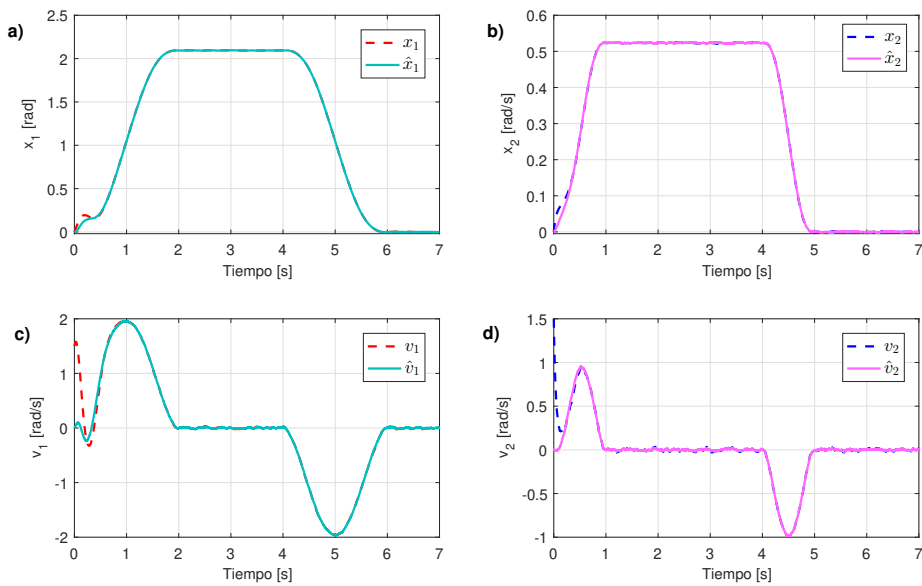


Figura 6.26: Estimación de posición **a)** \hat{x}_1 , **b)** \hat{x}_2 y estimación de velocidad **c)** \hat{v}_1 , **d)** \hat{v}_2 para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).

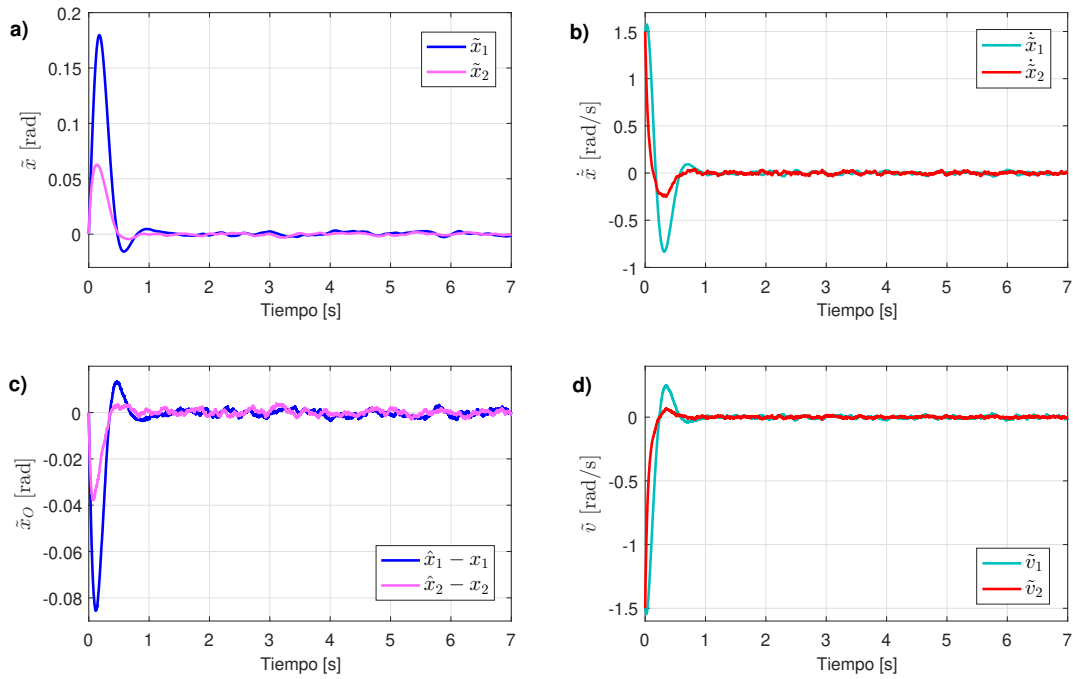


Figura 6.27: **a)** Error de seguimiento de posición \tilde{x} , **b)** error de seguimiento de velocidad \tilde{v} , **c)** error de observación de posición y **d)** error de observación de velocidad.

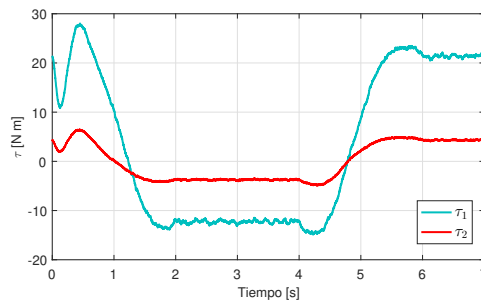


Figura 6.28: Esfuerzo de control τ para la simulación por retroalimentación de salida y ruido en las mediciones, empleando las ganancias (6.7).

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo a Futuro

El problema principal en este trabajo es el control de un robot manipulador para el seguimiento de una trayectoria deseada cuando no es posible medir la velocidad angular. Se emplea una metodología modular ya que el problema se resuelve por bloques, esto se logra empleando la teoría de contracción como herramienta de análisis. Primero, se diseña una ley de control que resuelve el problema de seguimiento considerando que la medición de velocidad está disponible, posteriormente se resuelve el problema de estimación de ésta y por último se combinan ambos módulos.

Con la ley de retroalimentación de estados se logra una convergencia a las trayectorias deseadas de forma global y exponencialmente, debido a que todos los resultados obtenidos por contracción son exponenciales.

Después, se diseña un observador de orden reducido para estimar la velocidad angular y se establecen las condiciones para garantizar la convergencia exponencial, obteniendo un resultado semi-global. Sin embargo, si las condiciones iniciales del observador no son grandes la convergencia del estado estimado al de la planta se garantiza para ganancias del observador pequeñas. Asimismo, se presenta un observador de orden completo que además de estimar la velocidad, también estima la posición angular y filtra dicha señal cuando está contaminada con ruido blanco. La convergencia se logra con la misma condición del observador de orden reducido.

Los diseños presentados individualmente se combinan mediante el principio de equivalencia cierta y se obtiene el controlador por retroalimentación de salida. Las condiciones para garantizar el objetivo de control son más restrictivas porque involucran a la norma de la posición angular; sin embargo, si se consideran valores en el rango de $[0, 2\pi)$ la convergencia se puede lograr con ganancias pequeñas. Se demostró por medio de simulaciones que ambos objetivos de seguimiento y observación se cumplen.

Posteriormente, se presentan simulaciones con incertidumbre paramétrica, perturbaciones en el par de control y ruido blanco en la medición. Algunos trabajos preliminares en esta línea de investigación han sido reportados en [7, 22]. Se obtienen buenos resultados para el caso de ruido en la medición donde se emplea el observador de orden completo, ya que

las ganancias son similares a las de la simulación inicial. Sin embargo, para contrarrestar los efectos de la incertidumbre en los parámetros y las perturbaciones, las ganancias se aumentan considerablemente y se obtienen errores de seguimiento y observación pequeños.

Con los controladores presentados, se observó que la teoría de contracción proporciona una alternativa de diseño de controladores bastante útil, ya que es posible diseñar módulos por separado, demostrar que son estables y después al combinarlos garantizar la estabilidad del sistema global. Estos diseños son mucho más simples que los basados en otras teorías. Además, la contracción permite obtener resultados fuertes de estabilidad porque la convergencia siempre es exponencial.

El trabajo a futuro incluye extender la convergencia semi-global de observador causada por la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas. También, se contempla extender el controlador para eliminar la necesidad de cambiar las ganancias cuando se presenta incertidumbre o perturbaciones y diseñar un controlador adaptable que no requiera la medición de la velocidad angular.

Bibliografía

- [1] Aghannan, N. and Rouchon, P. (2003). An intrinsic observer for a class of lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6):936–945.
- [2] Belanger, P. R. (1992). Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements. In *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, pages 585–592. IEEE.
- [3] Berghuis, H. and Nijmeijer, H. (1993). A passivity approach to controller-observer design for robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):740–754.
- [4] Besançon, G. (2000). Global output feedback tracking control for a class of lagrangian systems. *Automatica*, 36(12):1915–1921.
- [5] de Wit, C. C., Fixot, N., and Astrom, K. (1992). Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear estimated state feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(1):138–144.
- [6] De Wit, C. C. and Slotine, J.-J. (1991). Sliding observers for robot manipulators. *Automatica*, 27(5):859–864.
- [7] Grave, I. and Tang, Y. (2015). A new observer for perspective vision systems under noisy measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2):503–508.
- [8] Jain, A. and Rodriguez, G. (1995). Diagonalized lagrangian robot dynamics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(4):571–584.
- [9] Jouffroy, J. and Fossen, T. I. (2010). A tutorial on incremental stability analysis using contraction theory. *Modeling, Identification and Control*, 31(3):93.
- [10] Jouffroy, J. and Slotine, J.-J. E. (2004). Methodological remarks on contraction theory. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2537–2543.
- [11] Karagiannis, D., Carnevale, D., and Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11):2602–2614.

- [12] Khalil, H. K. and Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice Hall New Jersey.
- [13] Lohmiller, W. and Slotine, J.-J. E. (1998). On contraction analysis for non-linear systems. *Automatica*, 34(6):683–696.
- [14] Loría, A. (2016). Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4):905–920.
- [15] Luh, J., Walker, M., and Paul, R. (1980). Resolved-acceleration control of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):468–474.
- [16] Murray, R. M. (2017). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press.
- [17] Nicosia, S. and Tomei, P. (1990). Robot control by using only joint position measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9):1058–1061.
- [18] Nicosia, S., Tornambe, A., and Valigi, P. (1990). Experimental results in state estimation of industrial robots. In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 360–365. IEEE.
- [19] Ortega, R. and Spong, M. W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888.
- [20] Paden, B. and Panja, R. (1988). Globally asymptotically stable ‘pd+’controller for robot manipulators. *International Journal of Control*, 47(6):1697–1712.
- [21] Pavlov, A., Pogromsky, A., van de Wouw, N., and Nijmeijer, H. (2004). Convergent dynamics, a tribute to boris pavlovich demidovich. *Systems & Control Letters*, 52(3-4):257–261.
- [22] Perez, A., Tang, Y., and Hernandez, J. C. (2017). Adaptive attitude control for spacecraft based on contraction analysis. In *Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE.
- [23] Popov, V. M. and Georgescu, R. (1973). *Hyperstability of control systems*. Springer-Verlag.
- [24] Romero, J. G., Ortega, R., and Sarras, I. (2015). A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(3):818–823.
- [25] Slotine, J.-J. and Lohmiller, W. (2001). Modularity, evolution, and the binding problem: a view from stability theory. *Neural networks*, 14(2):137–145.
- [26] Slotine, J.-J. E. and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(3):49–59.

- [27] Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [28] Slotine, J.-J. E., Wang, W., and El-Rifai, K. (2004). Contraction analysis of synchronization in networks of nonlinearly coupled oscillators. In *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 5–9.
- [29] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2005). *Robot modeling and control*, John Wiley & Sons.
- [30] Takegaki, M. and Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103(2):119–125.
- [31] Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Siam.
- [32] Wang, W. and Slotine, J.-J. E. (2005). On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators. *Biological cybernetics*, 92(1):38–53.
- [33] Wen, J. T. and Bayard, D. S. (1988). New class of control laws for robotic manipulators part 1. non-adaptive case. *International Journal of Control*, 47(5):1361–1385.
- [34] Xian, B., de Queiroz, M. S., Dawson, D., and Walker, I. (2004). Task-space tracking control of robot manipulators via quaternion feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(1):160–167.