UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

El Teorema de Estratificación de Mumford

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
IVÁN ANTONIO HERNÁNDEZ LIZÁRRAGA

DIRECTOR
Dr. JOSÉ PABLO PELÁEZ MENALDO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MÉXICO AGOSTO 2019

EL TEOREMA DE ESTRATIFICACIÓN DE MUMFORD

IVÁN ANTONIO HERNÁNDEZ-LIZÁRRAGA

Índice

Date: 22 de agosto de 2019.
Key words and phrases. Gavilla, Esquema, $\mathcal{O}_X$-módulo, Módulo casi-coherente, Módulo coherente, Estratificación.

Notación.

Todos los anillos y álgebras son conmutativos con uno. La categoría de anillos conmutativos unitarios se denota por **CRing**. Para R un anillo conmutativo unitario se denota por **R-Alg** a la categoría de R-álgebras conmutativas y por **R-Mod** a la categoría de R-módulos. La categoría de grupos abelianos se denota por **Ab**. La categoría de funtores entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se denota por $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Si X es un espacio topológico y el conjunto $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X, esto se denotará por $\{U_i \to X\}_{i\in I}$ o de manera más simple $\{U_i \to X\}$ cuando el índice no juega un papel relevante.

Problemas de representabilidad.

1. Ideas básicas de esquemas.

Definición 1. Un **esquema** X consiste de:

1. Un espacio topológico X.
2. Una gavilla de anillos conmutativos unitarios $\mathcal{O}_X$ tal que para todo $t \in X$,
$$\mathcal{O}_{X,t} := \operatorname*{colím}_{t\in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$
es un anillo local.
3. Existe una cubierta abierta $\{U_i \to X\}$ tal que para todo i, $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong \operatorname{Spec} A_i$ para A_i un anillo conmutativo unitario.

Se recuerda que en la definición anterior para una gavilla $\mathcal{F}$ en X y $U \subseteq X$ un abierto, $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$.

Definición 2. Para R un anillo conmutativo unitario se define $\operatorname{Spec} R$ de la siguiente forma:

1. Como conjunto $\operatorname{Spec} R = \{\mathfrak{p} \trianglelefteq R \mid \mathfrak{p} \text{ es primo}\}$.
2. Para $I \trianglelefteq R$, $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Entonces la familia $\{V(I)\}_{I \trianglelefteq R}$ satisface los axiomas de cerrados de un espacio topológico y a la única topología en $\operatorname{Spec} R$ que tiene como cerrados a dicha familia se le conoce como la topología de Zariski.
3. Para $f \in R$ los conjuntos $X_f = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ forman una base de la topología. Además, se define $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = R_f$. Así, para $V \subseteq X$ abierto $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = \varprojlim_{X_f \subseteq V} \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = \varprojlim_{X_f \subseteq V} R_f$.

La siguiente observación es un resultado conocido, para los detalles puede consultarse por ejemplo la Proposición 2 de [M, pp 10].

Observación 1. $\operatorname{Spec} R$ es un esquema.

En todo lo que sigue $\operatorname{Spec} R$ tiene la topología de Zariski cuando se considera como espacio topológico. Ahora se recuerda lo siguiente:

Definición 3. Sea $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ un subconjunto cerrado irreducible. Un punto $z \in Z$ es un **punto genérico** de Z si $\overline{\{z\}} = Z$.

Uno de los primeros resultados que se puede probar se encuentra a continuación. La prueba puede consultarse en [M, pp 94–95].

Proposición 1. *Existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de* $\operatorname{Spec} R$ *y sus subconjuntos cerrados irreducibles.*

Respecto a resultados de dimensión se puede probar el siguiente.

Proposición 2. *Sea X un esquema, tal que para todo $t \in X$, $\mathcal{O}_{X,t}$ es un anillo noetheriano. Entonces,* $\dim(\mathcal{O}_{X,t}) = \operatorname{codim}(\overline{\{t\}})$.

Sea X un esquema. A $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ se le puede asociar una función $U \to \amalg_{t\in U} k(t)$, donde $k(t) := \mathcal{O}_{X,t}/\mathfrak{M}_t$ es el campo de residuos en el punto t, como sigue:

Dado $t' \in U$, se tiene el morfismo
$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,t'} \xrightarrow{\pi} k(t')$$
donde la primera flecha es el morfismo canónico hacia el colímite y la segunda la proyección. Este morfismo manda a $f \mapsto \overline{f}$, que es un elemento de la unión ajena.

Al identificar el elemento $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ con la función que le corresponde se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *con* $U \cong \operatorname{Spec} R$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1. *Para todo* $t \in U$, $f(t) = 0$.
2. *Para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $f \in \mathfrak{p}$.
3. f *es nilpotente.*

Demostración. Ver [M, pp 97–98]. □

Definición 4. Sean X, Y esquemas. $f : X \to Y$ es un **morfismo de esquemas** si:
1. f es una función continua.
2. Existe $f' : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ morfismo de gavillas.
3. Para todo $t \in X$,
$$f'_{f(t)} : \mathcal{O}_{Y,f(t)} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)_{f(t)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,t}$$
es un morfismo de anillos locales.

La categoría de esquemas se denota por **Sch**.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas con $Y = \operatorname{Spec} R$. Así, este induce $f' : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ morfismo de gavillas, que al evaluar en $\operatorname{Spec} R$ da un morfismo de anillos $f'_Y : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y, f_*(\mathcal{O}_X))$. Como $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \cong R$ y $\Gamma(Y, f_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, esto dice que se tiene un morfismo de anillos $\hat{f} : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Dado que se tienen los funtores secciones globales $\Gamma : \mathbf{Sch}^{op} \to \mathbf{CRing}$ y $\operatorname{Spec} : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Sch}^{op}$, lo observado anteriormente motiva el siguiente resultado:

Teorema 1. $\operatorname{Spec} \dashv \Gamma$*, i.e.* Spec *es adjunto izquierdo del funtor secciones globales* Γ*. Por lo tanto para todo* X *esquema,*
$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{Sch}}(X, \operatorname{Spec} R) \cong \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{CRing}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Corolario 1. $\operatorname{Spec} : \boldsymbol{CRing} \to \boldsymbol{Sch}^{op}$ *induce una equivalencia de categorías hacia los esquemas afines, la que se denota por* ***Af-Sch****.*

Ejemplo 1. Sea k campo y $f : X \to \operatorname{Spec} k$. Entonces f es morfismo si y sólo si $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tiene estructura de k-álgebra.

Nota 1. Supóngase que se tiene $\varphi : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morfismo de anillos. Por la equivalencia este induce un morfismo $f_\varphi : X \to \operatorname{Spec} R$. Ahora, la pregunta que se puede formular es si se puede decir de manera explícita la regla de correspondencia de f_φ. La respuesta es afirmativa y para ver como se hace esto sea $t \in X$. Se considera entonces el siguiente morfismo de anillos que se denotará por φ_t donde ι es el morfismo canónico hacia el colímite:
$$R \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_{X,t}$$

Si $\mathfrak{M}_t$ es el único ideal máximo del anillo local $\mathcal{O}_{X,t}$, entonces $\varphi_t^{-1}(\mathfrak{M}_t) \in \operatorname{Spec}(R)$, por lo que $f_\varphi(t) = \varphi_t^{-1}(\mathfrak{M}_t)$.

Definición 5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Decimos que f es de **tipo finito** si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisfacen
1. Existe $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i \to Y\}_{Zar}$ tal que para todo i existe $\{V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij} \to f^{-1}(U_i)\}_{Zar}$ finita con B_{ij} una A_i-álgebra finitamente generada.
2. Para todo $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ abierto, existe $\{\operatorname{Spec} B_j \to f^{-1}(U)\}$ finita tal que B_j es una A-álgebra finitamente generada.

La prueba de la equivalencia en la definición anterior puede encontrarse en [M, pp 122–123].

Definición 6. Sea X un esquema.
1. X es **reducido** si para todo $U \subseteq X$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es un anillo reducido.
2. X es **irreducible** si es un espacio topológico irreducible, es decir, si siempre que $X = F_1 \cup F_2$ con F_1, F_2 cerrados, entonces $F_1 = X$ ó $F_2 = X$.
3. X es una **variedad** si es reducido e irreducible.

2. Algunas notas sobre el problema de representación de funtores.

Sea $S \in \mathbf{Sch}$. Se define el **encaje de Yoneda** $h : \mathbf{Sch}/S \to \mathbf{Fun}((\mathbf{Sch}/S)^{op}, \mathbf{Set})$ como $X/S \mapsto h_X$, donde $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y, X)$.

El primer resultado importante respecto a h es que este es de hecho un encaje en el sentido categórico.

Teorema 2. *h es un funtor fiel y pleno.*

Nota 2. h_X se conoce como el **funtor de puntos** asociados a X. A los elementos de $h_X(Y)$ se les conoce como los Y-puntos de X.

Definición 7. Un funtor $F : (\mathbf{Sch}/S)^{op} \to \mathbf{Set}$ es **representable** si existe $X \in \mathbf{Sch}/S$ tal que $F \cong h_X$.

Considérese $(h_X)|_{\mathbf{Af\text{-}Sch}} : (\mathbf{Af\text{-}Sch}/\operatorname{Spec} R)^{op} \to \mathbf{Set}$ y denótese a este funtor por h^0_X. Nótese que de hecho este funtor puede pensarse como un funtor entre las categorías $\mathbf{CRing}$ y $\mathbf{Set}$ donde $h^0_X(R) = h_X(\operatorname{Spec} R)$.

El lema de Yoneda implica que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}}(h_X, h_Y)$. Más aún, se tiene el siguiente resultado

Teorema 3. *Para cualesquiera X, Y esquemas,* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fun}}(h_X, h_Y) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fun}}(h^0_X, h^0_Y)$.

Demostración. La parte sencilla de la prueba es ver que $f : X \to Y$ induce por el lema de Yoneda $\overline{f} : h_X \to h_Y$, que induce a su vez $f^0 : h^0_X \to h^0_Y$.

Por otro lado sea $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}}(h^0_X, h^0_Y)$. Por el lema de Yoneda basta ver que F induce un morfismo de X a Y y para esto sea $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i \to X\}_{Zar}$ una cubierta abierta y denótese por ι_i a cada una de las inclusiones.

Dado que $F(U_i) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} A_i, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} A_i, Y)$, sea $f_i := F(U_i)(\iota_i)$. Para ver que la familia f_i induce $f : X \to Y$ se tiene que ver que estas funciones son compatibles en las intersecciones, pero esto se deduce combinando la naturalidad de F con el hecho de que todo abierto admite una cubierta abierta afín. Así, la función que se quería existe. $\square$

Corolario 2. *X esquema está determinado por h^0_X.*

Lo que dicen el corolario anterior es que el problema de representación de funtores contravariantes de la categoría $\mathbf{Sch}/\operatorname{Spec} R$ a $\mathbf{Set}$ se puede reducir al caso de esquemas afines.

Problema: Dado $F : \mathbf{R\text{-}Alg}^{op} \to \mathbf{Set}$ dar condiciones sobre F para que sea de la forma $h^0_X \cong F$, con X esquema sobre $\operatorname{Spec} R$.

Como un primer ejemplo de este problema considérese el siguiente diagrama en la categoría de esquemas.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "q_2"] \\ X \arrow[r, "q_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

Se define el funtor $F^{q_1,q_2} : \mathbf{Sch}/Z \to \mathbf{Set}$ que a nivel de objetos es $F^{q_1,q_2}(W) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 : W \to X, r_2 : W \to Y, q_1 \circ r_1 = q_2 \circ r_2\}$.

Uno podría preguntarse si existe $T \in \mathbf{Sch}/Z$ tal que $F^{q_1,q_2} = h_T$. Así, el candidato para T está dado por el producto fibrado $X \times_Z Y$. Lo que sucede entonces es que el problema de representación se lleva a un problema de existencia de productos fibrados.

Proposición 4. *Para X, Y, Z esquemas afines el producto fibrado $X \times_Z Y$ existe.*

Demostración. Si $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R'$ y $Z = \operatorname{Spec} S$ entonces $X \times_Z Y = \operatorname{Spec}(R \otimes_S R')$. $\square$

Lo que dice la proposición anterior es que al menos para el caso afín se puede resolver el problema de representación dado. Ademá puede probarse que el producto fibrado de dos esquemas a lo largo de un tercero siempre existe.

Un ejemplo de relevancia se obtiene al considerar X un esquema de tipo finito sobre k un campo y $K = \overline{k}$. Se considera entonces el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X_K := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Proposición 5. *Los siguientes conjuntos están en biyección canónica.*

1. *Puntos geométricos de X.*
2. $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$.
3. $\{x \in X \mid k(x) \hookrightarrow K\}$.
4. $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K, X_K)$.
5. $\{x \in X \mid x$ *es un punto cerrado*$\}$.

Demostración. Los conjuntos de 1 y 2 son iguales por definición. Los conjuntos de 2 y 4 son biyectables por la propiedad universal del producto fibrado pues si por ejemplo $x \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$, entonces como por definición el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[rr, "x"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

La propiedad universal del producto fibrado implica que existe un único $\overline{x} : \operatorname{Spec} K \to X_K$ tal que los triángulos en el siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[dr, dashed, "\overline{x}"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr, "id_{\operatorname{Spec} K}"'] & & \\ & X_K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del triángulo inferior dice que $\overline{x} \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K, X_K)$.

Por otro lado dado $y \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K, X_K)$, este define claramente un morfismo de $\operatorname{Spec} K \to X$ al componerlo con el morfismo de $X_K \to X$. Además este morfismo es claramente un elemento de $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$ por ser X_K un producto fibrado, y es claro que las construcciones son una la inversa de la otra.

Para ver que 2 y 3 son biyectables sea $x \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} K, X)$, donde $x(*) := x$. Por definición de morfismo de esquemas, x debe inducir un morfismo de anillos locales $x' : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K,*} \cong K$. Esto implica que $x'(\mathfrak{M}_x) = 0$, por lo que existe un único morfismo $\overline{x'} : k(x) \to K$ tal que $\overline{x'} \circ \pi = x'$, con $\pi : \mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$ la proyección canónica. Además, por ser el dominio de este morfismo un campo este es inyectivo.

Por otro lado dado si $x \in X$ es tal que existe $k(x) \hookrightarrow K$, consideramos $\operatorname{Spec} R = U \subseteq X$ abierto con $x \in U$. Se puede definir un morfismo:

$$R = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k(x) \hookrightarrow K$$

Usando la adjunción entre Spec y Γ, tenemos un morfismo $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$, y componiendo con la inclusión $\operatorname{Spec} R \subset X$, obtenemos el morfismo $\operatorname{Spec} K \to X$ buscado.

Finalmente 4 si y sólo si 5 es consecuencia inmediata del teorema de los ceros de Hilbert. □

Una segunda aplicación de la existencia de productos fibrados es la construcción de **fibras** para un morfismo. Para esto sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas y $y \in Y$. Lo que se quiere definir es la fibra de y, $f^{-1}(y)$, como esquema. Para esto se considera el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) := X_{k(y)} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k(y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

donde en dicho diagrama el morfismo $\operatorname{Spec} k(y) \to Y$ es el que manda al único punto de $\operatorname{Spec} k(y)$ en y.

Una tercera y muy importante aplicación de los productos fibrados es la existencia del **morfismo diagonal** en un esquema. Para esto se considera el siguiente diagrama donde el cuadrado es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "\Delta"] \arrow[drr, "id_X"] \arrow[ddr, "id_X"'] & & \\ & X \times X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Mediante el morfismo diagonal se da una de las definiciones de una de las familias de esquemas más importantes.

Definición 8. X esquema es **separado** si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface:

1. $\Delta(X) \subseteq X \times X$ es cerrada.
2. Para cualesquiera $f_1, f_2 : Y \to X$ morfismos de esquemas, $\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\}$ es cerrado.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.) Nótese que $\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\} = (f_1, f_2)^{-1}\Delta(X)$. Como f_1 y f_2 son continuas entonces $(f_1, f_2) : Y \to X \times X$ es continua y así la imagen inversa de cualquier cerrado es un cerrado.

2. $\Rightarrow$ 1.) Sea $f_i : X \times X \to X$ la proyección en la i-ésima coordenada. Entonces $\Delta(X) = p \in X \times X \mid f_1(p) = f_2(p)\}$. □

3. Definición de $\operatorname{Proj}(R)$.

Sea $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ un anillo graduado. Se recuerda lo siguiente:

Definición 9. $I \trianglelefteq R$ es un **ideal homogéneo** si siempre que $f = f_0 + ... + f_g$ con f_i polinomios homogéneos y $f \in I$, entonces para todo i, $f_i \in I$.

Definición 10. Se define $\operatorname{Proj}(R)$ como sigue:

1. Como conjunto consta de los $\mathfrak{p} \trianglelefteq \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ primos homogéneos tales que $\mathfrak{p} \not\supseteq \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$.
2. La topología es aquella que tiene como base de abiertos a los conjuntos $X_f = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$, donde $f \in R_n$ para $n > 0$.
3. Como gavilla $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)}$ es tal que $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)}) = R_f^0$, con R_f^0 la parte homogénea de grado cero en R_f. Se recuerda que $deg(\frac{m}{f^n}) = \deg(m) - n\deg(f)$.

Proposición 6. $\operatorname{Proj}(R)$ *es un esquema separado.*

Demostración. Ver [Ha, pp 160–161]. □

Notación 1. $\mathbb{P}^n := \operatorname{Proj}(\mathbb{Z}[t_0, t_1, ..., t_n])$.

Se recuerda que

Definición 11. Una gavilla $\mathcal{F}$ es de $\mathcal{O}_X$-módulos si para todo $U \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo.

Definición 12. Sea φ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se dice que φ es una gavilla invertible si existe $\{U_i \to X\}_{Zar}$ tal que $\varphi|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, donde este isomorfismo se da como gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Sean X un espacio topológico, $\{U_i \to X\}_{i\in\Lambda}$ y $\mathcal{O}_X$ una gavilla de anillos conmutativos unitarios en X. Considérese $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Mod}(\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}, \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j})$ y nótese que $h(1) \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$. Además se tiene que h es invertible si y sólo si $h(1)$ es invertible en el anillo $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$. Esto induce un isomorfismo

$$Iso_{\mathcal{O}_X-Mod}(\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}, \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}) \cong \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$$

Luego, se puede definir una 1-cocadena $g : \Lambda\times\Lambda \to \Gamma(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ mediante $(i,j) \mapsto g_{ij}$, donde se identifica $g_{ij} : \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}$ con el elemento invertible que le corresponde en el isomorfismo anterior. Se tiene además el siguiente diagrama, el cual es conmutativo precisamente cuando los g_{ij} corresponden a los isomorfismos de transición determinados por una gavilla invertible φ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \arrow[rr, "g_{ij}"] \arrow[dr, "g_{ik}"'] & & \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \arrow[dl, "g_{jk}"] \\
& \mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j\cap U_k} &
\end{tikzcd}$$

De lo que se deduce que

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$$

Es decir,

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Así, la condición anterior dice que la diferencial de Cech: $d^1(\{g_{ij}\}) = \{g_{ij}g_{jk}g_{ki}\} = 0$. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

Proposición 7. *La asignación $U_i \mapsto g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ define una gavilla invertible si y sólo si $\{g_{ij}\}$ son un 1-cociclo de Čech con coeficientes en $\mathcal{O}_X^*$.*

4. Cohomología de Čech.

Dada una cubierta $\{V_i \to X\}$ se tiene asociado un objeto cosimplicial para una pregavilla $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos donde:

0-simplejos son

$$\bigoplus_i \mathcal{F}(V_i).$$

1-simplejos son

$$\bigoplus_{i,j} \mathcal{F}(V_i \cap V_j).$$

2-simplejos son

$$\bigoplus_{i,j,k} \mathcal{F}(V_i \cap V_j \cap V_k).$$

Y en general un n-simplejo tiene la forma

$$\bigoplus_{|I|=n+1} \mathcal{F}(V_I),$$

donde $I = (i_1, ..., i_{n+1})$ y $V_I = V_{i_1} \cap ... \cap V_{i_{n+1}}$.

La construcción de los operadores cofrontera $\partial^j : \bigoplus_{|I|=n} \mathcal{F}(V_I) \to \bigoplus_{|I'|=n+1} \mathcal{F}(V_{I'})$, está dada como sigue:

$$\oplus_{|I|=n}\mathcal{F}(V_I) \xrightarrow{p_j} \mathcal{F}(V_{I'\setminus j}) \xrightarrow{res} \mathcal{F}(V_{I'}) \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{|I'|=n+1} \mathcal{F}(V_{I'}) \ .$$

donde $I'\setminus j$ es el conjunto I' con el elemento j omitido, p_j es la proyección en el sumando correspondiente, ι es la inclusión en la suma directa y res es la restricción a nivel de gavillas.

De manera clásica se puede considerar el complejo de cocadenas asociado a este conjunto abeliano cosimplicial, en donde las diferenciales están dadas como $d^n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\partial^j$. Así, se puede definir la cohomología de X asociada a la cubierta $\{V_i \to X\}$, en términos de la cohomología de éste complejo, la cual se denota por $\check{H}^n_{\{V_i\to X\}}(X,\mathcal{F})$.

Definición 13. Se define la **n-cohomología de Čech** con coeficientes en $\mathcal{F}$ como

$$\check{H}^n(X,\mathcal{F}) = \operatorname{colím} \check{H}^n_{\{V_i\to X\}}(X,\mathcal{F}).$$

Nótese que como la familia de cubiertas de un espacio es filtrada entonces el colímite anterior es filtrado.

Ahora se tiene que si $h \in \check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$, entonces existe $\{V_i \to X\}_{\mathrm{Zar}}$ tal que $h \in \check{H}^1_{\{V_i\to X\}}(X,\mathcal{O}_X^*)$. Para cada pareja de intersecciones de la cubierta se tiene una función que $V_i \cap V_j \mapsto h_{ij} \in \Gamma(V_i\cap V_j,\mathcal{O}_X^*)$ y con la propiedad de que $d^1(h_{ij}) = 0$, es decir, $h_{ij}h_{jk}h_{ki} = 1$. De esta condición y por la proposición 7 se deduce que h define una gavilla invertible.

Por otro lado si $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible, por definición existe $\{V_i \to X\}$ tal que para todo i, $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \mathcal{O}_X^*|_{V_i}$ y denótese a estos isomorfismos por λ_i. Entonces se tiene que,

$$\mathcal{O}_X^*|_{V_i\cap V_j} \xrightarrow{\lambda_j^{-1}|_{V_i}} \mathcal{F}|_{V_j\cap V_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}|_{V_i\cap V_j} \xrightarrow{\lambda_i|_{V_j}} \mathcal{O}_X^*|_{V_i\cap V_j}$$

Así, se define $h_{ij} = \lambda_i\lambda_j^{-1}$ que satisface claramente que $h_{ij} \in \Gamma(V_i\cap V_j,\mathcal{O}_X^*)$ es un 1-cociclo de Cech.

Con un poco de trabajo adicional se deduce el siguiente resultado.

Proposición 8. *Hay una correspondencia biyectiva entre $\check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$ y el conjunto de gavillas invertibles en X módulo isomorfismo.*

5. El grupo de Picard.

Dado X un esquema, sea $\mathrm{Pic}(X)$ el conjunto de gavillas invertibles en X módulo isomorfismo. Este conjunto resulta tener estructura de grupo abeliano y en la literatura se le conoce como el grupo de Picard de X. Hay dos formas, que en el fondo son la misma, de darle estructura de grupo a $\mathrm{Pic}(X)$.

Para la primera de ellas sean φ_1, φ_2 gavillas invertibles en X. Si $\{t_{ij}\}$ y $\{s_{ij}\}$ son los cociclos asociados a φ_1 y φ_2 respectivamente, que nótese pueden tomarse sobre la misma cubierta, entonces el producto de dichas gavillas queda dado por la gavilla invertible que se le asocia al cociclo $\{t_{ij}s_{ij}\}$.

Puede verse que en dicha asociación a dicho cociclo le corresponde el producto tensorial de las gavillas dadas $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, que sería la segunda forma de definir el producto.

Además, el grupo de Picard es funtorial, es decir, permite definir un funtor $\mathrm{Pic} : \mathbf{Sch}^{op} \to \mathbf{Ab}$ y la asociación a nivel de morfismos está definida como sigue:

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Si φ es una gavilla invertible sobre Y, entonces por definición existe $\{V_i \to Y\}_{Zar}$ tal que $\varphi|_{V_i} \cong \mathcal{O}_Y|_{V_i}$. Luego, al considerar $f^*(\varphi) = f^{-1}\varphi \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, esta gavilla es invertible pues por continuidad $\{f^{-1}(V_i) \to X\}_{Zar}$ y además $f^*(\varphi)|_{f^{-1}(V_i)} \cong \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(V_i)}$.

Lo anterior muestra que $f^*(\varphi)$ es una gavilla invertible en X, entonces $\mathrm{Pic}(f) : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ tiene por regla de correspondencia $\mathrm{Pic}(f)[\varphi] = [f^*(\varphi)]$.

Ahora sea φ una gavilla invertible sobre X y $s \in \Gamma(X,\varphi)$. La pregunta que se plantea es si dado $x \in X$, $s(x) \in k(x)$ está bien definido, es decir, si no depende del abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$. Para responder esto sean $U, V \subseteq X$ abiertos que trivializan a φ tales que $x \in U\cap V$. Entonces, módulo isomorfismo $s_V|_{U\cap V}$ y $s_U|_{U\cap V}$ pueden considerarse como elementos de $\Gamma(V\cap U,\mathcal{O}_X)$. Además $g_{VU}(s_V|_{U\cap V}) = s_U|_{U\cap V}$ con $g_{VU} \in \Gamma(V\cap U,\mathcal{O}_X^*)$, por lo cual se concluye que el valor de $s(x)$ está definido salvo unidades.

Esto dice que tiene sentido considerar los conjuntos $\{x \in X \mid s(x) = 0\}$ y $X_s = \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}$ donde de hecho los conjuntos X_s son abiertos y en la familia de todos ellos se encuentran los abiertos básicos para la topología de $\operatorname{Spec} R$ y $\operatorname{Proj}(R)$.

6. Un problema de representación para $\operatorname{Proj}(R)$.

Sea $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ un anillo graduado tal que R_n está generado por $R_1^{\otimes n}$ como R_0-módulo.

Se tiene lo siguiente:

Observación 2. Si $X = \operatorname{Proj}(R)$ entonces $X = \bigcup_{f \in R_1} X_f$.

Demostración. Supóngase que existe $\mathfrak{p} \in X \setminus (\bigcup_{f\in R_1} X_f)$. Entonces para todo $f \in R_1$, $f \in \mathfrak{p}$. Así, $R_1 \subseteq \mathfrak{p}$ y entonces $\bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n \subseteq \mathfrak{p}$, lo que contradice la definición de $\operatorname{Proj}(R)$. □

Observación 3. En $\Gamma(X_f \cap X_g, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)})$, $\frac{f}{g}$ es unidad.

Demostración. Basta observar que $\Gamma(X_f \cap X_g, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)}) \cong (R_g^0)_{\frac{f}{g}}$. Por lo tanto $\frac{f}{g}, \frac{g}{f} \in \Gamma(X_f \cap X_g, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(R)})$, y esto implica el resultado. □

Las dos observaciones hechas tienen como consecuencia el siguiente resultado.

Proposición 9. *La cubierta $\{X_f\}_{f\in R_1}$ y las unidades $\frac{f}{g}$ definen un 1-cociclo de Čech en $\operatorname{Proj}(R)$:*

$$\{X_f \cap X_g \mapsto \frac{f}{g} \in \Gamma(X_f \cap X_g, \mathcal{O}_X^*)\}.$$

Notación 2. La gavilla invertible asociada al 1-cociclo de Čech de la proposición anterior se le denota por $\mathcal{O}(1)$. Si $n \geq 1$ entonces $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

Observación 4. Existe un isomorfismo $\varphi_n : R_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}(n))$ definido como sigue: Sea $h \in R_n$. Como $\mathcal{O}(n)|_{X_f} \cong \mathcal{O}_X|_{X_f} \cong R_f^0$, entonces consideramos $\varphi_n(h)|_{X_f} = \frac{h}{f^n}$. Dado que en el 1-cociclo $\{X_f \cap X_g \to \frac{f^n}{g^n}\}$, $\frac{f^n}{g^n}\frac{h}{f^n} = \frac{h}{g^n}$, entonces la condición de pegado se cumple en $\mathcal{O}(n)$ y esta induce el elemento $\varphi_n(h)$.

Con estas observaciones se puede decir algo respecto a un problema de representabilidad, pues al considerar $S \in \mathbf{Sch}$ y dado $f \in h_{\operatorname{Proj}(R)}(S)$ se tiene el siguente cuadrado pullback:

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1) \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"'] & \operatorname{Proj}(R) \end{tikzcd}$$

Esto induce una transformación natural

$$h_{Proj(R)} \xrightarrow{\theta} \operatorname{Pic},$$

mediante el cual es posible resolver un problema de representabilidad como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 10. *La transformación natural θ induce un isomorfismo para todo $S \in$ **Sch** entre*

$$h_{\mathbb{P}^n}(S)$$

y

$$\{(\mathcal{L}, s_0, ..., s_n) \mid \mathcal{L} \textit{ es gavilla invertible en } S, s_i \in \Gamma(S, \mathcal{L}) \textit{ tales que } \forall x \in X, \exists i \textit{ tal que } s_i(x) \neq 0\}/\textit{isomorfismo}.$$

Demostración. Definimos el inverso. Para ello observamos que $\mathbb{P}^n$ admite la cubierta afín $\{A_0, \ldots, A_n\}$ con $A_i = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{t_0}{t_i}, \ldots, \frac{t_n}{t_i}]$. Consideramos el abierto $S_{s_i} \subset S$, y observamos que $\frac{s_j}{s_i} \in \Gamma(S_{s_i}, \mathcal{O}_{S_{s_i}})$, $i \neq j$, ya que s_i trivializa a $\mathcal{L}|_{S_{s_i}}$.

Los morfismos de anillos:

$$\mathbb{Z}[\tfrac{t_0}{t_i}, \ldots, \tfrac{t_n}{t_i}] \to \Gamma(S_{s_i}, \mathcal{O}S_{s_i}); \tfrac{t_j}{t_i} \mapsto \tfrac{s_j}{s_i}$$

definen via la adjunción entre Spec y Γ, morfismos de esquemas $\psi_i : S_{s_i} \to A_i \subset \mathbb{P}^n$, y por construcción $\psi_i|S_{s_i} \cap S_{s_j} = \psi_j|S_{s_i} \cap S_{s_j}$. Por lo tanto, podemos pegar para obtener $\psi : S \to \mathbb{P}^n$. □

Corolario 3. *Si R es un anillo local entonces hay un isomorfismo entre $h_{\mathbb{P}^n}(\operatorname{Spec} R)$ y $\{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \mid \alpha_i \in R$ no todos cero$\}/\sim$, donde $(\alpha_0, ..., \alpha_n) \sim (\lambda\alpha_0, ..., \lambda\alpha_n)$ para todo $\lambda \in R^\times$.*

Demostración. Primero se observa que el ideal máximo de R, $\mathfrak{M}$, satisface que $\mathfrak{M} \in \operatorname{Spec} R$. Además, $\mathfrak{M} \in X_f$ para $f \in R$ si y sólo si $f \in R^\times$, por lo que esto pasa si y sólo si $X_f = X$. Así, para todo $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ abierto tal que $\mathfrak{M} \in U$, $U = \operatorname{Spec} R$.

Esto dice que $\operatorname{Pic}(R)$ es el grupo trivial, es decir, consta de la clase de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$. Luego, las secciones $s \in \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ se identifican con elementos de R y de la proposición anterior se deduce el resultado. □

7. El funtor de Grassmann.

Definición 14. Un **haz vectorial** de rango n es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos, ξ, tal que existe $\{U_\alpha \to X\}_{Zar}$ con la propiedad de que $\xi|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_X^n|_{U_\alpha}$.

Observación 5. Los haces vectoriales de rango 1 son precisamente las gavillas invertibles.

Ahora se va a definir un funtor que a nivel de objetos, dado $S \in \mathbf{Sch}$, se le asocia la familia:

$$\{\xi \mid \xi \text{ es un haz de rango } r \text{ equipado con } (n+1)-\text{secciones } s_0, ..., s_n \in \Gamma(S, \xi) \text{ tales que para todo } x \in S, \xi_x = \textstyle\sum_{i=0}^n \mathcal{O}_{S,x} \cdot s_i\}/\text{isomorfismo.}$$

Además, por la proposición 10 esta familia tiene una coordenada en el proyectivo $\mathbb{P}_S^N$ dada por:

$$(\xi, s_0, ..., s_n) \mapsto (\bigwedge^r \xi, ..., s_{i_1} \wedge s_{i_2} ... \wedge s_{i_r}, ...)$$

donde se ponen todas las relaciones con cuña tales que $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$.

El problema de representación de este funtor exhibe una técnica muy recurrente en este tipo de problemas que consiste en:

1. Caracterizar la imagen.
2. Probar que la transformación natural es inyectiva.

Se introduce como notación $\mathcal{L} = \bigwedge^r \xi$ y para $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$, $p_{i_1,...,i_r} = s_{i_1} \wedge ... \wedge s_{i_r}$. También se aprovecha para escribir las relaciones:

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1} (-1)^\lambda p_{i_1,...,i_{r_1},j_\lambda} \otimes p_{j_1,...,\hat{j_\lambda},...,j_{r+1}} = 0 \tag{1}$$

para todas las sucesiones $i_1, ..., i_{r-1}$ y $j_1, ..., j_{r+1}$ que cumplen la condición con la que se definieron las $p_{i_1,...,i_r}$.

Teorema 4. $\theta : (\xi, s_0, ..., s_n) \mapsto (\bigwedge^r \xi, ..., s_{i_1} \wedge s_{i_2} ... \wedge s_{i_r}, ...)$ *es inyectiva y con imagen el locus de ceros dado por las ecuaciones (1).*

Demostración. Una clase $(\xi, s_0, ..., s_n)$ puede ser identificado con un morfismo suprayectivo $\varphi : \mathcal{O}_S^{n+1} \to \xi \to 0$. Si $\mathcal{K}$ denota el núcleo de este morfismo, entonces se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_S^{n+1} \longrightarrow \xi \longrightarrow 0$$

Además se observa que $\mathcal{K}$ es un $\mathcal{O}_S$-módulo localmente libre de rango $n+1-r$. Así, la prueba se reduce a determinar $\mathcal{K}$, y además para conocer esta información basta con hacer un tratamiento local.

Así, lo que se busca probar es que para todo S-punto del proyectivo $\mathbb{P}_S^n$ que satisface la relación (1), existe una cubierta abierta de S tal que sobre cada abierto de la cubierta este corresponde a una única clase $(\xi, s_0, ..., s_n)$ en dicho abierto.

Se considera entonces un abierto tal que $p_{i_1,\ldots,i_r} \neq 0$. En este caso se tiene que las relaciones planteadas en la ecuación (1) permiten ver que:

$$p_{j_1,\ldots,j_r} = \frac{F(\cdots, p_{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_r,j}, \cdots)}{p^{N-1}_{i_1,\ldots,i_r}},$$

donde al menos dos de los $j_1, ..., j_r$ no son elementos del conjunto $\{i_1, ..., i_r\}$ y además F es un polinomio homogéneo en $r(n+1-r)$ variables $p_{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_r,j}$.

Por otro lado, $\varphi : \mathcal{O}_S^{n+1} \to \xi \to 0$ define un punto en el proyectivo tal que $p_{i_1,\ldots,i_r} \neq 0$ si y sólo si $\varphi(e_{i_1}), ..., \varphi(e_{i_r})$ es una base de ξ, donde $\{e_{i_1}, ..., e_{i_r}\}$ denota un subconjunto de la base canónica $\{e_0, ..., e_n\}$ de $\mathcal{O}_S^{n+1}$. Entonces el núcleo de φ tiene una única base de la forma:

$$e_j - \sum_{k=1}^{r} a_{jk} e_{i_k},$$

para $j \in \{0, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_r\}$. En terminos de los coeficientes esto se ve como

$$a_{jk} = (-1)^{r-n} \frac{p_{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots i_r,j}}{p_{i_1,\ldots,i_r}}$$

Por lo tanto, hay una y sólo una elección para $a_{jk} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ para las coordenas $p_{i_1,\ldots i_r}$ dadas. ☐

Definición 15. $G_{n,r}$ es el cerrado definido en el teorema anterior y $h_{G_{n,r}}$ es el funtor de Grassmann.

Corolario 4. $Gr_{n,1} = \mathbb{P}^n$.

Corolario 5. $(G_{n,r})_{p_{i_1,\ldots,i_r}} \cong \mathbb{A}^{r(n+1-r)}$.

Corolario 6. *La Grasmmanianna está representada por*

$$G_{n,r} = Proj(\mathbb{Z}[..., p_{i_1,\ldots,i_r}, ...])/\textit{relaciones cuadráticas 1.}$$

Para concluir con esta sección se va a analizar una situación más, pero antes de continuar se darán las siguientes definiciones.

8. La construcción tilde.

Sea $X = \operatorname{Spec} R$. Dado $M \in$ **R-Mod** a este se le puede asociar un $\mathcal{O}_X$-módulo que se denota por $\tilde{M}$, tal que en los abiertos básicos X_f para $f \in R$, $\Gamma(X_f, \tilde{M}) = M_f$. Así, si $U \subseteq X$ es un abierto cualquiera y dado que $U = \bigcup X_f$, entonces $\Gamma(U, \tilde{M}) = \varprojlim_{X_f \subseteq U} M_f$.

Proposición 11. *La construcción "tilde" es un funtor fiel y pleno, es decir, para cualesquiera $M, N \in$ **R-Mod**,*

$$\operatorname{Hom}_{\textbf{\textit{R-Mod}}}(M, N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}-\mathbf{mod}}(\tilde{M}, \tilde{N}).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}-\mathbf{mod}}(\tilde{M}, \tilde{N})$. Entonces $\Gamma(X, \varphi) : \Gamma(X, \tilde{M}) \to \Gamma(X, \tilde{N})$ y dado que $X = X_1$, entonces $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$ y $\Gamma(X, \tilde{N}) = N$. Así, $\Gamma(X, \varphi) \in \operatorname{Hom}_{\textbf{R-Mod}}(M, N)$.

Ahora se busca construir la inversa de $\Gamma(X, -)$. Así, nótese que dados $\psi \in \operatorname{Hom}_{\textbf{R-Mod}}(M, N)$ y $f \in R$, el morfismo induce un morfismo de R-módulos $\psi_f : M_f \to N_f$ dado por $\psi_f(\frac{m}{f^n}) = \frac{\psi(m)}{f^n}$. Por la definición de la construcción tilde se tiene que $\Gamma(X_f, \tilde{M}) = M_f$, luego al ser los abiertos básicos $\{X_f\}_{f \in R}$ un sistema inverso, para cada $V \subseteq X$ abierto existe un morfismo $\varprojlim_{X_f \subseteq V} \psi_i : \Gamma(V, \tilde{M}) \to \Gamma(V, \tilde{N})$. Esto define la asignación en la otra dirección y denótese a esta por α.

Es claro que las funciones $\Gamma(X, -)$ y α son inversas una de la otra. ☐

Proposición 12. *La sucesión en **R-Mod**, $M \to N \to P$ es exacta si y sólo si la sucesión $\tilde{M} \to \tilde{N} \to \tilde{P}$ es exacta en $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. La sucesión $\tilde{M} \to \tilde{N} \to \tilde{P}$ es exacta en $\mathcal{O}_X$-módulos si y sólo si para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ la sucesión $M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}} \to P_{\mathfrak{p}}$ es exacta en $N_{\mathfrak{p}}$, pero esto es equivalente a la exactitud de $M \to N \to P$ en **R-Mod**. □

El resultado anterior tiene como consecuencia que la construcción "tilde" preserva cocientes, núcleos, conúcleos, imagenes y coimagenes, es decir, si $\varphi : \tilde{M} \to \tilde{N}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\operatorname{Ker} \varphi \cong \tilde{K}$ para algún $K \in$ **R-Mod**, y lo análogo para los objetos restantes.

Definición 16. Sea $X = \operatorname{Spec} R$ y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se dice que $\mathcal{F}$ es **casi-coherente** si existe $M \in$ **R-Mod** tal que $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

Ya con la definición de gavillas coherentes y casi-coherentes se puede dar el siguiente ejemplo

Supóngase que $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ con R_0 una S-álgebra y sea $X = \operatorname{Spec} S$, la cual da una gavilla casi-coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos $\tilde{R} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{R_n}$ sobre $X = \operatorname{Spec} S$.

Ahora, sea X un esquema separado y $\mathcal{R} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n$ un álgebra graduada de $\mathcal{O}_X$-módulos. Al considerar una cubierta afín $\{\operatorname{Spec} R_\alpha = U_\alpha \to X\}_{Zar}$, se tiene que en cada abierto de la cubierta

$$\Gamma(U_\alpha, \mathcal{R}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(U_\alpha, \mathcal{R}_n),$$

es un álgebra graduada sobre $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$. Más aún se tienen morfismos de esquemas $P_\alpha = Proj(\Gamma(U_\alpha, \mathcal{R})) \to \operatorname{Spec} R_\alpha = U_\alpha$ tales que

$$\begin{tikzcd} P_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & P_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \arrow[dl] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

donde $U_\alpha \cap U_\beta$ es afín (esquema separado). Así, por la propiedad de pegado se tiene un esquema $Proj(\mathcal{R})$ junto con un morfismo

$$\begin{tikzcd} Proj(\mathcal{R}) \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2. Sea ξ un haz de rango r en X, $\mathcal{R}_n = Sym^n(\xi)$ es la n-ésima potencia simétrica de ξ como $\mathcal{O}_X$-módulo, y $Sym^\bullet \xi = \oplus_n Sym^n(\xi)$. Si $\xi = \mathcal{O}_X^r$ entonces $Proj(Sym^\bullet \mathcal{O}_X^r) = \mathbb{P}^{r-1} \times X$ y así

$$\begin{tikzcd} Proj(Sym^\bullet \mathcal{O}_X^r) \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

es la proyección en la segunda coordenada.

Gavillas casi-coherentes, coherentes y planas.

9. Gavillas casi-coherentes.

Teorema 5. *Sea $X = \operatorname{Spec} R$ y $\mathcal{F}$ una gavilla casi-coherente. Entonces,*

1. *$\mathcal{F}$ está generada por sus secciones globales, es decir,*

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

2. *Para todo $p \geq 1$, $H^p(X,\mathcal{F}) = 0$.*

Demostración. Para la primera afirmación nótese que si $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ para $M \in \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod}$, entonces $\Gamma(X,\mathcal{F}) = M$. Además, al ser X un esquema afín la afirmación que se quiere probar puede verse a nivel de abiertos básicos, por lo que sea $h \in R$. Así, se quiere ver que el morfismo

$$(M \otimes \mathcal{O}_X)(U_h) \longrightarrow \tilde{M}(U_h)$$

es suprayectivo. Pero $(M \otimes \mathcal{O}_X)(U_h) = M \otimes R_h$ y $\tilde{M}(U_h) = M_h$. Al definir la asignación $M \otimes R_h \to M_h$ dada por $x \otimes \frac{a}{h} \mapsto \frac{ax}{h}$, esta está bien definida, es inducida por el morfismo R-bilineal $(x, \frac{a}{h}) \mapsto \frac{ax}{h}$ y es claramente suprayectiva. Así, esto prueba que $\mathcal{F}$ es generado por sus secciones globales.

Respecto a la segunda afirmación se observa que como X es afín, entonces $\{X_{f_i} \to X\}_{i=1,\dots n}$ es cubierta abierta si y solo si $(f_1, ..., f_n) = R$. Como antes supóngase que $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ y al denotar por $M_{f_{\alpha_1}\cdots f_{\alpha_k}} := \Gamma(X_{f_{\alpha_1}\cdots f_{\alpha_k}}, \mathcal{F})$, el complejo de Čech $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$, con $\mathcal{U} = \{X_{f_i} \to X\}_{i=1,\dots,n}$, puede ser identificado con el complejo

$$\prod\nolimits_{\alpha_0} M_{f_{\alpha_0}} \to \prod\nolimits_{\alpha_0\alpha_1} M_{f_{\alpha_0}f_{\alpha_1}} \to \prod\nolimits_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} M_{f_{\alpha_0}f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}} \to \dots$$

Entonces se afirma que el siguiente complejo de Cech es acíclico

$$0 \to M \to \prod\nolimits_{\alpha_0} M_{f_{\alpha_0}} \to \prod\nolimits_{\alpha_0\alpha_1} M_{f_{\alpha_0}f_{\alpha_1}} \to \prod\nolimits_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} M_{f_{\alpha_0}f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}} \to \dots$$

Pero de hecho por ser la exactitud una propiedad local basta con ver que se tiene exactitud al localizar en todo primo. Sin embargo, lo que se va a probar realmente es que el complejo anterior es homotópico a cero al pasar a la localización en cualquier primo.

En efecto, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Por ser $\mathfrak{p}$ un ideal propio existe un índice α tal que $f_\alpha \notin \mathfrak{p}$. Entonces considérese ese índice como fijo y denótese a este por β. Nótese que entonces $M_{f_\beta,\mathfrak{p}} \cong M_\mathfrak{p}$ y de hecho de manera similar para la localización en un producto $f_{\alpha_0}\dots f_{\alpha_p}$ y $\mathfrak{p}$ se puede considerar cualquier f_{α_j} para el cual $\alpha_j = \beta$. Se define así la homotopía $h : \prod_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}} M_{f_{\alpha_0}\cdots f_{\alpha_{p+1}},\mathfrak{p}} \to \prod_{\alpha_0\dots\alpha_p} M_{f_{\alpha_0}\cdots f_{\alpha_p},\mathfrak{p}}$ mediante la regla de correspondencia $h(s)_{\alpha_0\dots\alpha_p} = (-1)^\beta s_{\beta\alpha_0\dots\alpha_p}$. Nótese que de hecho $h : \prod_{\alpha_0} M_{f_{\alpha_0},\mathfrak{p}} \to M_\mathfrak{p}$ es la proyección en $M_{f_\beta,\mathfrak{p}} = M_\mathfrak{p}$ y en general h es la proyección en los factores $M_{f_\beta f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_{p+1}},\mathfrak{p}} = M_{f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_{p+1}},\mathfrak{p}}$.

Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
(dh+hd)(s)_{\alpha_0\dots\alpha_p} &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j h(s_{\alpha'_0\dots\hat{\alpha'_j}\dots\alpha'_{p+1}}) + d((-1)^\beta s_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_\beta}\alpha_p}) \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{j<\beta}(-1)^{j+\beta+1} s_{\alpha'_0\dots\hat{\alpha'_j}\hat{\alpha'_\beta}\dots\alpha'_{p+1}} + s_{\alpha_0\dots\alpha_p} + \sum\nolimits_{j=\beta+1}^{p+1}(-1)^{j+\beta} s_{\alpha'_0\dots\hat{\alpha'_\beta}\hat{\alpha'_j}\dots\alpha'_{p+1}} \\
&\quad \sum\nolimits_{j=0}^{j<\beta}(-1)^{j+\beta} s_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_j}\hat{\alpha_\beta}\dots\alpha_p} + \sum\nolimits_{j=\beta+1}^{p}(-1)^{j+\beta+1} s_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_\beta}\hat{\alpha_j}\dots\alpha_p} \\
&= s_{\alpha_0\dots\alpha_p}
\end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación.

Con esto se concluye que $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$. Más aún, por tratarse de $\mathcal{U}$ una cubierta formada por una base de la topología y ser esta arbitraria, esto implica que $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = 0$. Luego, al considerar la sucesión espectral de Čech hacia cohomología de Zariski:

$$\check{H}^r(X, \mathcal{H}^s_{\text{Zar}}(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p=r+s}(X, \mathcal{F}).$$

Concluimos por lo anterior que $\check{H}^r(X, \mathcal{H}^s_{\text{Zar}}(\mathcal{F})) = 0$ para $r > 0$. Por lo tanto, para $p > 0$, $H^p(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^0(X, \mathcal{H}^p_{\text{Zar}}(\mathcal{F}))$, y éste último grupo se anula ya que $\mathcal{H}^s_{\text{Zar}}(\mathcal{F}) = 0$, $s > 0$. □

Definición 17. Sea X un esquema y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se dice que $\mathcal{F}$ es **casi-coherente** si alguna, y por lo tanto ambas, de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. Existe $\{U_i \to X\}_{\text{Zar}}$ con $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ tal que para todo i, $\mathcal{F}|_{U_i}$ es casi-coherente.
2. Para todo abierto afín $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$, $\mathcal{F}|_U$ es casi-coherente.

Demostración. La prueba de $2 \Rightarrow 1$ es clara. Respecto a $1 \Rightarrow 2$ primero se observa que si $U \subseteq X$ es un abierto afín tal que $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ para algún $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-módulo, entonces para todo $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{F}|_{U_f} \cong \tilde{M}_f$. Así, asumiendo 1, nótese que todo abierto puede ser cubierto con elementos que satisfacen la hipótesis, más aún, cada uno de esos abiertos puede cubrirse por abiertos de la forma U_g con $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) := R$. Como $U_g = (U_i)_g$, $\mathcal{F}|_{U_g} \cong \tilde{M}_i$, esto dice que para U existe una cubierta afín finita con elementos de la forma U_{g_i} con $\mathcal{F}|_{U_{g_i}} \cong \tilde{N}_i$ y N_i es un R_{g_i}-módulo. Ahora, para $V \subseteq U$ abierto y de la definición de gavilla via igualadores se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \prod_i \Gamma(V \cap U_{g_i}, \mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{i,j} \Gamma(V \cap U_{g_i} \cap U_{g_j}, \mathcal{F}).$$

Se definen entonces las subgavillas $\mathcal{F}^*_i$ y $\mathcal{F}^*_{i,j}$ que a nivel de secciones satisfacen que $\Gamma(V, \mathcal{F}^*_i) = \Gamma(V \cap U_{g_i}, \mathcal{F})$ y $\Gamma(V, \mathcal{F}^*_{i,j}) = \Gamma(V \cap U_{g_i} \cap U_{g_j}, \mathcal{F})$. Esto implica que se tiene la siguiente sucesión exacta de gavillas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}^*_i \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}^*_{i,j}$$

Así, para probar el resultado basta ver que las gavillas $\mathcal{F}^*_i$ y $\mathcal{F}^*_{i,j}$ lo satisfacen. Además, para ambas gavillas los argumentos son análogos, así que lo que se va a hacer es trabajar con el caso de $\mathcal{F}^*_i$. Si M^0_i es M visto como R-módulo, entonces nótese que para un abierto distinguido U_g se tiene que:

$$\Gamma(U_g, \mathcal{F}^*_i) = \Gamma(U_g \cap U_{g_i}, \mathcal{F}) = \Gamma((U_{g_i})_g, \mathcal{F}|_{U_{g_i}}) = (M_i)_g = \Gamma(U_g, \tilde{M^0_i})$$

Esto muestra que $\mathcal{F}^*_i \cong \tilde{M^0_i}$ y por lo dicho antes concluye la prueba. □

Proposición 13. *Sean $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas casiseparado tal que para todo $U \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(U)$ es casicompacto y $\mathcal{F}$ una gavilla casi-coherente en X. Entonces, $R^i f_*\mathcal{F}$ es casi-coherente en Y. Aquí $R^i f_*\mathcal{F}$ es la gavilla asociada de $U \subseteq Y \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$.*

Demostración. Es suficiente probar que $f_*\mathcal{F}$ es casi-coherente en Y. En efecto, combinando el isomorfismo natural:

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X-mod}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

con la existencia de suficientes inyectivos en la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos, concluimos que $R^i f_*\mathcal{F}$ puede calcularse como la i-cohomología de un complejo de $\mathcal{O}_Y$-módulos: $f_*(I^\bullet)$, en donde $\mathcal{F} \to I^\bullet$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Para ver que $f_*\mathcal{F}$ es casi-coherente en Y, basta considerar el caso en donde $Y = \operatorname{Spec} S$. Por hipótesis $f^{-1}(Y) = X = V_0 \cup \cdots \cup V_r$, con $V_i = \operatorname{Spec} R_i$. Sea $j_i : V_i \to X$ (resp. $j_{ik} : V_i \cap V_k \to X$) el encaje abierto evidente y $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{V_i}$ (resp. $\mathcal{F}_{ik} = F|_{V_i \cap V_k}$) la cual es cuasi-coherente en V_i (resp. $V_i \cap V_k$). Consideramos la siguiente sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \oplus (j_i)_*\mathcal{F}_i \to \oplus (j_{ik})_*\mathcal{F}_{ik}$ y aplicando f_* obtenemos otra sucesión exacta $0 \to f_*\mathcal{F} \to \oplus f_*(j_i)_*\mathcal{F}_i \to \oplus f_*(j_{ik})_*\mathcal{F}_{ik}$. Como la categoría de $\mathcal{O}_Y$-módulos casi-coherentes es cerrada bajo núcleos y las sumas directas son finitas (condición necesaria ya que la construcción tilde al ser un adjunto izquierdo, conmuta con sumas directas pero no con productos directos infinitos), basta probar que $f_*(j_i)_*\mathcal{F}_i$, $f_*(j_{ik})_*\mathcal{F}_{ik}$ son casi-coherentes. Pero $f \circ j_i$, $f \circ j_{ik}$ son morfismos afines, y en este caso es claro que el pushforward preserva gavillas casi-coherentes. □

Definición 18. Un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ es **afín** si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. Existe $\{U_i \to Y\}_{\mathrm{Zar}}$ con $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ tal que para todo i, $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} S_i$.
2. Para todo $V \subseteq Y$ abierto con $V = \operatorname{Spec} R$, $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} S$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Sea $V \subseteq Y$ un abierto con $V = \operatorname{Spec} R$. Se denota por $S = \Gamma(V, f_*(\mathcal{O}_X))$. Se afirma que $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} S$ y para probar esto nótese que el morfismo de anillos $S = \Gamma(V, f_*(\mathcal{O}_X)) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ define por la adjunción un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & \operatorname{Spec} S \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

Observamos que η es natural para abiertos afines de $\operatorname{Spec} R$ al ser la unidad de la adjunción entre Spec y Γ. Entonces, la hipótesis implica que η es localmente un isomorfismo, y por lo tanto concluimos que η es un isomorfismo.

$2 \Rightarrow 1$) Es claro que si la propiedad vale para todos los abiertos de Y, entonces en particular vale para los elementos de una cubierta abierta. $\square$

Nota 3. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas con $X = \operatorname{Spec} R$ y $Y = \operatorname{Spec} S$.

1. Si $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ con $M \in$ **R-Mod**, entonces $f_*\mathcal{F} \cong \widetilde{M_S}$.
2. Si $\mathcal{F} \cong \tilde{N}$ con $N \in$ **S-Mod**, entonces $f^*\mathcal{F} \cong \widetilde{R \otimes_S N}$.

Corolario 7. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos casi-coherente y $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas afín. Entonces,*

1. *$f^* f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es suprayectiva.*
2. *Para todo $i > 0$, $R^i f_* \mathcal{F} = 0$.*

Demostración. Respecto a la primera afirmación lo primero que se observa es que se puede hacer una reducción pues por el resultado anterior si $\{U_\alpha \to Y\}_{\mathrm{Zar}}$ es una cubierta afín de Y, entonces por ser f un morfismo afín se tiene que $\{f^{-1}(U_\alpha) \to X\}_{\mathrm{Zar}}$ es una cubierta afín de X. Luego se puede trabajar para cada α con el morfismo $f_\alpha = f|_{f^{-1}(U_\alpha)} : f^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ que es un morfismo entre esquemas afines y con la gavilla $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U_\alpha)}$, lo que dice que se puede suponer que f es un morfismo entre esquemas afines y entonces sean $X = \operatorname{Spec} R$ y $Y = \operatorname{Spec} S$. Si $\mathcal{F} = \tilde{M}$ con $M \in$ **R-Mod**, entonces $f_*\mathcal{F} = \tilde{M_S}$ y luego $f^* f_* \mathcal{F} = \widetilde{R \otimes_S M_S}$. Del teorema 5 se deduce la suprayectividad del morfismo dado.

Para la segunda afirmación se recuerda que $R^i f_* \mathcal{F}$ es la gavilla asociada a la pregavilla en Y tal que $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$. Al trabajar con abiertos afines y ser f un morfismo afín, $f^{-1}(U)$ es afín en X y luego por la segunda afirmación del teorema 5 se tiene que para todo $i > 0$, $H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = 0$ y así $R^i f_* \mathcal{F} = 0$. $\square$

Proposición 14. *Considérese el siguiente producto fibrado de esquemas*

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

1. *Si f es afín, entonces f' es afín.*
2. *Si f es afín y $\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos casi-coherente entonces $g^* f_* \mathcal{F} \cong f'_* g'^* \mathcal{F}$.*

Demostración. Para la primera afirmación dado que f es afín existe $\{Y_\alpha \to Y\}_{\mathrm{Zar}}$ una cubierta afín tal que $\{f^{-1}(Y_\alpha) \to X\}_{\mathrm{Zar}}$ es una cubierta afín, y donde para fijar notación $Y_\alpha = \operatorname{Spec} R_\alpha$ y $f^{-1}(Y_\alpha) = \operatorname{Spec} S_\alpha$.

Nótese que como por continuidad $\{g^{-1}(Y_\alpha) \to Y'\}_{\text{Zar}}$ es una cubierta abierta, dicha cubierta se puede refinar a una cubierta afín $\{Y'_{\alpha,\beta} \to Y'\}_{\text{Zar}}$ tal que para todo α, $g^{-1}(Y_\alpha) = \bigcup_\beta Y'_{\alpha,\beta}$. Lo primero que se observa es que por construcción el morfismo $g|_{Y'_{\alpha\beta}} : Y'_{\alpha\beta} \to Y_\alpha$ factoriza a través de $g^{-1}(Y_\alpha)$, lo que implica que $g|^{-1}_{Y'_{\alpha,\beta}}(Y_\alpha) = g^{-1}(Y_\alpha) \cap Y'_{\alpha,\beta} = Y'_{\alpha,\beta}$ Así, la conmutatividad del diagrama implica que $f'^{-1}(Y'_{\alpha,\beta}) = f'^{-1}g^{-1}(Y_\alpha) = g'^{-1}f^{-1}(Y_\alpha) = f^{-1}(Y_\alpha) \times_{Y_\alpha} Y'_{\alpha,\beta}$. Si $Y'_{\alpha,\beta} = \operatorname{Spec} R'_{\alpha,\beta}$, entonces $f^{-1}(Y_\alpha) \times_{Y_\alpha} Y'_{\alpha,\beta} = \operatorname{Spec}(S_\alpha \otimes_{R_\alpha} R'_{\alpha,\beta})$, lo que prueba que $f'^{-1}(Y'_{\alpha,\beta})$ es afín y concluye la prueba de la primera afirmación.

Respecto a la segunda afirmación y conservando la notación de antes si $\mathcal{F} = \tilde{M}$, entonces se tiene que:

$$f_*\mathcal{F} = \widetilde{M_{R_\alpha}}$$

y así,

$$g^* f_* \mathcal{F} = R'_{\alpha,\beta} \widetilde{\otimes_{R_\alpha}} M_{R_\alpha}. \tag{2}$$

Por otro lado:

$$g'^*\mathcal{F} = S_\alpha \otimes_{R_\alpha} \widetilde{R'_{\alpha,\beta}} \otimes_{S_\alpha} M$$

y así,

$$f'_* g'^* \mathcal{F} = (S_\alpha \otimes_{R_\alpha} \widetilde{R'_{\alpha,\beta} \otimes_{S_\alpha}} M)_{R'_{\alpha,\beta}} \tag{3}$$

Así, como se tiene un isomorfismo entre 2 y 3 pues $S_\alpha \otimes_{S_\alpha} M \cong M$, entonces se sigue la segunda afirmación. □

10. Gavillas coherentes.

Definición 19. Un esquema X es **noetheriano** si lo es como espacio topológico, es decir, cualquier cadena descendente de cerrados se estaciona.

Nota 4. Un esquema X es noetheriano si y sólo si para todo abierto afín $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$, R es noetheriano. La prueba de este hecho puede consultarse en [M, pp 205–206].

Definición 20. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos casi-coherente. Se dice que $\mathcal{F}$ es **coherente** si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. Existe $\{U_i \to X\}_{\text{Zar}}$ con $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ tal que $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ es un $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado.
2. Para todo $U \subseteq X$ abierto con $U = \operatorname{Spec} R$, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es un $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado.

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$ Como $\mathcal{F}$ es casi-coherente, observamos que para todo $g \in R_i$, $\Gamma((U_i)_g, \mathcal{F}) \cong \Gamma(U_i, \mathcal{F})_g$ es un $\Gamma((U_i)_g, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado. Por lo tanto, el resultado vale para una base de abiertos afines de X.

Sea U un abierto afín. Por ser U casicompacto existen $U_1, ..., U_n$ abiertos tales que $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ tal que el resultado vale para todo U_i. Como $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ es un $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado y en particular un $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado, consideramos la siguiente sucesión exacta: $0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus \Gamma(U_i, \mathcal{F})$. Como la suma directa es finita, concluimos que $\Gamma(U, \mathcal{F})$ está contenido en un $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-módulo finitamente generado, lo cual implica que $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es finitamente generado ya que $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es un anillo noetheriano.

$2 \Rightarrow 1)$ Esto es claro pues si la propiedad vale para todos los abiertos afines, en particular vale para los elementos de una cubierta afín. □

Definición 21. Sea $f : X \to Y$ un morfismo afín de esquemas con Y noetheriano. Se dice que f es **finito** si alguna, y por lo tanto todas, de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. $f_*\mathcal{O}_X$ es coherente en Y.
2. f es de tipo finito y para toda gavilla $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente, $f_*\mathcal{F}$ es coherente en Y.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Como f es afín, f_* preserva epimorfismos ($R^i f_* = 0$, $i > 0$). Ahora, $\mathcal{F}$ es coherente, por lo cual existe un epimorfismo $\oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to 0$, el cual induce $\oplus_{i=1}^n f_*\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{F} \to 0$. Como la suma es finita, $f_*\mathcal{O}_X$ es coherente y Y es noetheriano, concluimos que $\mathcal{F}$ es coherente.

$2 \Rightarrow 1$) Es claro pues $\mathcal{O}_X$ es una gavilla coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos. □

Proposición 15. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas finito, entonces f es **casi-finito**, es decir, para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es finito.*

Demostración. Considérese el anillo $S = f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$. Nótese que como $f_*(\mathcal{O}_X)$ es una gavilla coherente, entonces S es una $k(y)$-álgebra la cual es finitamente generada como módulo. Por lo tanto, se tiene que $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec} S$ es finito. □

Definición 22. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente con X noetheriano. El conjunto de **puntos asociados** de $\mathcal{F}$ se define como $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \exists U \subseteq X$ abierto con $x \in U$ y $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tales que $s_y \neq 0 \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}\ \}$.

Proposición 16. $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ *es finito.*

Demostración. □

11. Gavillas planas.

Definición 23. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se dice que $\mathcal{F}$ es **plana** sobre Y si para todo $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-módulo plano.

Observación 6. Como la propiedad de ser plano es local, una gavilla casi-coherente $\mathcal{F}$ es plana si y sólo si para cualesquiera abiertos afines $V \subseteq Y$ y $U \subseteq f^{-1}(V)$, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es un $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$-módulo plano.

El siguiente resultado da una forma de obtener una gavilla plana de otra dada usando un producto fibrado.

Proposición 17. *Considérese el siguiente producto fibrado de esquemas*

$$\begin{tikzcd} Y' \times_Y X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos plana sobre Y, entonces $g'^*\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{X\times_Y Y'}$-módulos plana sobre Y'.

Demostración. La afirmación puede llevarse a probar simplemente el caso local. Así, supóngase que $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$ y $Y' = \operatorname{Spec} R'$, lo que implica que $Y' \times_Y X = \operatorname{Spec}(R' \otimes_S R)$. Si $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ para $M \in$ **R-Mod**, entonces de la hipótesis M es un módulo plano sobre S. Dado que $g'^*\mathcal{F} \cong \widetilde{R' \otimes_S R} \otimes_R M \cong \widetilde{R' \otimes_S M}$ y como $R' \otimes_S M$ es plano sobre R' por la propiedad de la planitud respecto al cambio de base de álgebra conmutativa, se concluye que $g'^*\mathcal{F}$ es plano sobre Y'. □

Proposición 18. *Sean X, Y esquemas noetherianos, $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente que es plana sobre Y y $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Entonces $f(x) \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_Y)$.*

Demostración. El argumento es por contrapositiva. Para reducir notación sea $y = f(x)$ y supóngase que $y \notin \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_Y)$. Esto implica que $\mathfrak{M}_y \notin \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{Y,y})$, es decir, $\operatorname{depth}(\mathcal{O}_{Y,y}) \neq 0$. Así, existe $a \in \mathcal{O}_{Y,y}$ y tal que a no es unidad, tal que la homotecia siguiente es inyectiva

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{Y,y}$$

Por hipótesis $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo plano, así de la sucesión anterior se tiene que la siguiente homotecia también es inyectiva

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{f^*(a)} \mathcal{F}_x$$

Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ la homotecia definida por el elemento $f^*(a)^n$ es inyectiva. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(a)^n \notin \operatorname{Ann}(\mathcal{F}_x)$ y así si I es un ideal tal que $f^*(a) \in I$, se tiene que para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F}_x)$, $I \nsubseteq \mathfrak{p}$. Esto implica que $\mathfrak{M}_x \notin \operatorname{Ass}(\mathcal{F}_x)$ y así, $x \notin \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. □

Lo que se busca probar es que de hecho se tiene un resultado que caracteriza a los puntos asociados de una gavilla plana que satisface las hipótesis del resultado anterior. Dicho resultado se sigue del siguiente:

Teorema 6. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, $x \in X$, $y = f(x)$. Si $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo plano, entonces*

$$\operatorname{depth}(\mathcal{F}_x) = \operatorname{depth}(\mathcal{O}_{Y,y}) + \operatorname{depth}(\mathcal{F}_x \otimes k(y)).$$

Demostración. El argumento procede por inducción en $n = \operatorname{depth}(\mathcal{O}_{Y,y}) + \operatorname{depth}(\mathcal{F}_x \otimes k(y))$. Los detalles pueden consultarse en [Ma, (21.B)Teorema 50]. □

Proposición 19. *Sean X, Y esquemas noetherianos, $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente que es plana sobre Y. Entonces, $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ si y sólo si $f(x) \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_Y)$ y $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F} \otimes k(f(x)))$.*

Demostración. $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ si y sólo si $\operatorname{depth}(\mathcal{F}_x) = 0$. Del teorema anterior esto último sucede si y sólo si $\operatorname{depth}(\mathcal{O}_{Y,y}) = 0$ y $\operatorname{depth}(\mathcal{F}_x \otimes k(y)) = 0$, donde $y = f(x)$. Lo que es equivalente a decir que $y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_Y)$ y $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F} \otimes k(y))$. □

El siguiente resultado da una caracterización del concepto de planitud para ciertos morfismos de esquemas.

Proposición 20. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas finito con Y noetheriano y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos coherente. Entonces $\mathcal{F}$ es plano sobre Y si y sólo si $f_*\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo localmente libre.*

Demostración. $\Rightarrow$) La propiedad que se quiere probar es local en Y, así supóngase que $Y = \operatorname{Spec} S$ y al ser f finito, $X = \operatorname{Spec} R$. En particular R es un S-módulo finitamente generado. Además, por hipótesis $\mathcal{F} = \tilde{M}$ para $M \in$ **R-Mod**. Como M es un S-módulo plano, entonces para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S$, $M_\mathfrak{p} = M \otimes_S S_\mathfrak{p}$ es un $S_\mathfrak{p}$-módulo plano. Pero precisamente $(f_*\mathcal{F})_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$, luego, esto dice que $f_*\mathcal{F}_y$ es un $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo plano. Pero los módulos finitamente generados sobre un anillo local noetheriano son planos si y sólo si son libres. Así, para todo $y \in Y$, $f_*\mathcal{F}_y \cong \mathcal{O}_{Y,y}^n$. Sin embargo, esto último sucede si y sólo si existe $f \in S$ tal que $\Gamma(S_f, \mathcal{O}_Y^n) \to \Gamma(S_f, f_*\mathcal{F})$ es un isomorfismo, y de esto se deduce lo que se quería.

$\Leftarrow$) Si $f_*\mathcal{F}$ es localmente libre en Y, entonces nótese que como $\mathcal{F}_x$ es la localización del $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-módulo $(f_*\mathcal{F})_{f(x)}$ y todo módulo libre es plano, entonces la localización preserva planitud y de esto se obtiene el resultado. □

Nota 5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas finito con Y noetheriano e irreducible. Sea $y \in Y$ y considérese la fibra de f en y:

$$\begin{tikzcd} X_y := f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k(y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\mathcal{F}_y := i^*\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{X_y}$-módulos. Ahora, en el caso afín si $X = \operatorname{Spec} R$ y $Y = \operatorname{Spec} S$, entonces $X_y = \operatorname{Spec}(R \otimes_S k(y))$. Más aún si $\mathcal{F}$ es casi-coherente con digamos $\mathcal{F} = \tilde{M}$ para M un R-módulo, se tiene que

$$\mathcal{F}_y = M \otimes_R \widetilde{R \otimes_S} k(y) = M \widetilde{\otimes_S k}(y).$$

Donde en esta igualdad se usó que $M \otimes_R R \cong M$. Además se observa que como R es un S-módulo finitamente generado, $R \otimes_S k(y)$ es una $k(y)$-álgebra conmutativa de dimensión finita como $k(y)$ espacio vectorial.

Para el siguiente resultado relativo a planitud se requiere de el siguiente lema previo.

Lema 1. *Sea $(R, \mathfrak{M})$ un dominio local noetheriano, $k = R/\mathfrak{M}$ su campo de residuos, $K = Frac(R) = R_0$ y M un R-módulo finitamente generado. Si $n = \dim_K(M \otimes_R K) = \dim_k(M \otimes_R k)$, entonces M es un R-módulo libre.*

Demostración. Dado que $M/\mathfrak{M}M \cong M \otimes_R R/\mathfrak{M} = M \otimes_R k$, entonces $M/\mathfrak{M}M$ es un k-espacio vectorial de dimensión n. Así, sean $f_1, ..., f_n \in M$ tales que $\{\overline{f_1}, ..., \overline{f_n}\}$ es base de $M/\mathfrak{M}M$. Sea $\varphi : R^n \to M$ el morfismo de R-módulos tal que $\varphi(e_i) = f_i$. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta corta con $L = \ker \varphi$ y $N = \operatorname{Coker} \varphi$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Al aplicar $\_ \otimes_R k$ en 4 y usar que este funtor es exacto derecho se tiene la siguiente sucesión exacta

$$R^n \otimes_R k \xrightarrow{\varphi \otimes 1_k} M \otimes_R k \longrightarrow N \otimes_R k \longrightarrow 0$$

Pero $R^n \otimes_R k \cong k^n$, $M \otimes_R k \cong M/\mathfrak{M}M$ y $N \otimes_R k \cong N/\mathfrak{M}N$. Así, como $\varphi \otimes 1_k$ satisface que $(\varphi \otimes 1_k)(e_i \otimes 1) = f_i \otimes 1$, entonces dicho morfismo es suprayectivo. Luego, $N/\mathfrak{M}N = 0$ y dado que N es finitamente generado, el lema de Nakayama implica que $N = 0$.

El argumento anterior dice que la sucesión 4 se puede escribir como

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

Al en dicha sucesión $\_ \otimes_R K$ y al usar que este es exacto (ya que coincide con la localización en el primo cero) se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \otimes_R K \longrightarrow R^n \otimes_R K \xrightarrow{\varphi \otimes 1_K} M \otimes_R K \longrightarrow 0$$

Pero $R^n \otimes_R K \cong K^n$ y $\dim_K(M \otimes_R K) = n$, luego $\varphi \otimes 1_K$ es una transformación lineal suprayectiva de K-espacios vectoriales de dimensión finita con la misma dimensión, lo que implica que es inyectiva y así $L \otimes_K K = 0$. Esto dice que L es un módulo de torsión y dado que $L \subseteq R^n$ y R es un dominio, entonces $L = 0$. Esto implica que $M \cong R^n$ y así, M es un R-módulo finitamente generado. □

Proposición 21. *Sea $f : X \to Y$ con Y un esquema noetheriano, reducido e irreducible, $\mathcal{F}$ gavilla coherente en X, y f morfismo finito. Entonces $\mathcal{F}$ es plano sobre Y si y sólo si $y \mapsto \dim_{k(y)}(f_*\mathcal{F})_y \otimes k(y)$ es constante.*

Demostración. $\Rightarrow$) Nótese que por la proposición anterior existe una cubierta abierta $\{Y_\alpha \to Y\}$ tal que $\mathcal{F}|_{Y_\alpha} \cong \mathcal{O}_Y^n|_{Y_\alpha}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que dado $y \in Y$, existe α tal que $y \in Y_\alpha$ y así $\dim_{k(y)}(f_*\mathcal{F})_y \otimes k(y) = \dim_{k(y)} \mathcal{O}_Y^n|_y \otimes k(y) = n$. Así, como el punto fue arbitrario se concluye la prueba de la afirmación, ya que Y es irreducible y en particular conexo.

$\Leftarrow$) Se observa que que se cumplen las hipótesis del lema anterior, pues $\mathcal{O}_{Y,y}$ es local y noetheriano y $(f_*\mathcal{F})_y$ es finitamente generado. □

Cohomología de espacios proyectivos.

12. El caso proyectivo sobre un campo.

Se recuerda que por definición $\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n]$ y sea $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^n$ la gavilla canónica asociada al proyectivo.

Abusando de la notación sean $x_0, ..., x_n \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ las secciones correspondientes a las coordenadas. Entonces, para $S \in \mathbf{Sch}$ al considerar la proyección en la primera coordenada $\pi : \mathbb{P}^n \times S \to \mathbb{P}^n$ y al abusar nuevamente de la notación se escribe:

$$\mathcal{O}(1) := \pi^*(\mathcal{O}(1))$$

$$\forall i \in \{0, ..., n\},\ x_i := \pi^*(x_i)$$

Definición 24. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times S}$-módulos coherente. Se define el **twist de Serre** como:

$$\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times S}} \mathcal{O}(1)^{\otimes m}.$$

Con la notación discutida en esta sección y para el caso especial de k un campo, $S = \operatorname{Spec} k$ y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-módulos coherente se tienen los siguientes cuatro resultados.

Proposición 22. *$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita para todo i. Además, si $i > n$, entonces $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) = 0$.*

Demostración. Consideramos la sucesión espectral de Cech para la cubierta $\{\mathbb{P}^n_{x_i} \to \mathbb{P}^n\}_{Zar}$, $i = 0, \ldots, n$:

$$H^p(U_I, \mathcal{F}_I) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$$

con $I = j_1 < \cdots < j_q \subset \{0, \ldots, n\}$, $U_I = \mathbb{P}^n_{x_{j_1}} \cap \cdots \cap \mathbb{P}^n_{x_{j_q}} \subseteq \mathbb{P}^n$ y $\mathcal{F}_I$ la restricción de $\mathcal{F}$ a U_I. Como U_I es afín, concluimos que $H^p(U_I, \mathcal{F}_I) = 0$ para $p > 0$. Por lo tanto, $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) = 0$ para $i > n$ ya que en este caso $q \leq n$, $p \geq 1$.

Cuando $i \leq n$, usamos inducción en n para la sucesión exacta de gavillas:

$$0 \to \mathcal{F}(m-1) \xrightarrow{x_n} \mathcal{F}(m) \to i_* i^* \mathcal{F}(m) \to 0$$

en donde $i : \mathbb{P}^{n-1} \cong (\mathbb{P}^n \backslash \mathbb{P}^n_{x_n}) \subset \mathbb{P}^n$ es el hiperplano definido por x_n. Esta sucesión induce una sucesión exacta larga:

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathbb{P}^n, i_* i^* \mathcal{F}(m)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-1)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) \to \cdots$$

Ahora, como $i : \mathbb{P}^{n-1} \cong (\mathbb{P}^n \backslash \mathbb{P}^n_{x_n}) \to \mathbb{P}^n$ es afín (al ser una inmersión cerrada), concluimos que la sucesión espectral de Leray para i_* se degenera y $H^{i-1}(\mathbb{P}^n, i_* i^* \mathcal{F}(m)) \cong H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, i^* \mathcal{F}(m))$ el cual es de dimensión finita por inducción en n.

Finalmente, usamos inducción descente en m y la proposición siguiente (cuya prueba es independiente) para obtener el resultado. $\square$

Proposición 23. *Existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m)) = 0$ para todo $i > 0$. Además $\mathcal{F}(m)$ es generado por secciones globales como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-módulo.*

Demostración. Usamos la notación de la prueba anterior. El hecho de que $\mathcal{F}(m)$ está generado por secciones globales es un argumento clásico para modulos graduados.

Para el desvanecimiento de la cohomología, por la primer parte de la proposición anterior (cuya prueba no requiere la proposición actual) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ para $i \geq n+1$ y $\mathcal{F}$ coherente. Por lo tanto, basta considerar $i \leq n$ y podemos proceder por inducción descendente en i. Como $\mathcal{F}(m)$ está generada por secciones globales, tenemos una sucesión exacta de gavillas:

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

con $\mathcal{E} = \oplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r_j)$. Escogemos m tal que $\mathcal{K}(m)$, $\mathcal{E}(m)$, $\mathcal{F}(m)$ están generadas por secciones globales, y observamos la sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}(m)) \to \cdots$$

Por inducción descendente en i, tenemos $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}(m)) = 0$, por lo cual basta probar que para m suficientemente grande y para todo $i > 0$: $H^i(\mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0$. De nuevo, consideramos la sucesión exacta de gavillas:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{x_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to i_* i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0$$

y la sucesión exacta larga en cohomología correspondiente:

$$\cdots \to H^{i-1}(\mathbb{P}^n, i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1)) \xrightarrow{x_n} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \to \cdots$$

Ahora, como la sucesión espectral de Leray para el encaje cerrado $\mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$ se degenera,

$$H^{i-1}(\mathbb{P}^n, i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m)) \cong H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m))$$

pero por inducción en n, este grupo es cero para $i > 1$. Por lo tanto, tenemos un mapeo inyectivo (para $i = 1$ se prueba directamente por inspección):

$$0 \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1)) \xrightarrow{x_n} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$$

Para concluir la prueba, basta ver que el mapeo x_n es trivial. Para ello, es suficiente mostrar que para $i \geq 1$, $\mathcal{F} = \oplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(r)$: $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})_{x_n} = 0$. Consideramos la resolución de Cech de $\mathcal{F}$ para la cubierta $\{\mathbb{P}^n_{x_j} \xrightarrow{i_j} \mathbb{P}^n\}_{Zar}$:

$$0 \to \mathcal{F} \to \oplus i_{j*} i_j^* \mathcal{F} \to \oplus i_{jk*} i_{jk}^* \mathcal{F} \to \cdots$$

Localizando esta resolución en x_n, obtenemos la resolución de Cech de $\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^n_{x_n}}$ con respecto a la cubierta $\{\mathbb{P}^n_{x_j x_k} \to \mathbb{P}^n_{x_n} \cong \mathbb{A}^n\}_{Zar}$. Por lo tanto: $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})_{x_n} \cong H^i(\mathbb{A}^n, \mathcal{F}_{x_n}) = 0$ para $i \geq 1$. $\square$

Proposición 24. *$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m))$ es polinomial en m para todo m. Esta función es el* ***polinomio de Hilbert*** *de $\mathcal{F}$.*

Demostración. La característica de Euler (suma alternada de las dimensiones) es aditiva en sucesiones exactas largas. Por lo tanto, el resultado se sigue aplicando inducción en n a la sucesión exacta larga de cohomología inducida por la sucesión exacta corta de gavillas:

$$0 \to \mathcal{F}(m-1) \xrightarrow{x_n} \mathcal{F}(m) \to i_*(\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}) \to 0.$$

$\square$

Para el siguiente resultado se requieren plantear algunas cosas. Lo primero es que se puede definir la categoría de $k[x_0, ..., x_n]$-módulos graduados. En dicha categoría para M y N $k[x_0, ..., x_n]$-módulos graduados se define

$$\mathrm{Hom}_{gr}(M, N) = \operatorname*{colím}_n \; \mathrm{Hom}_{gr}\left(\bigoplus_{m \geq n} M_m, \bigoplus_{m \geq n} N_m\right).$$

Además, dado M un $k[x_0, ..., x_n]$-módulo graduado, a este se le puede asociar una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n_k$, que se denota por $\tilde{M}^{gr}$, de la siguiente forma: Para $i \in \{0, ..., n\}$ se considera $M^i = M_{x_i}$ que es un $k[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ... \frac{x_n}{x_i}]$-módulo, donde se recuerda que $k[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ... \frac{x_n}{x_i}] \cong \Gamma(\mathbb{P}^n_{x_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$.

Consideramos la gavilla coherente en $\mathbb{P}^n_{x_i}$, $\tilde{M}^i_0$ en donde $M^i_0 \subset M^i$ es el submódulo de grado cero. Es claro que las gavillas $\tilde{M}^i_0$ satisfacen la condición de pegado y por lo tanto definen una gavilla $\tilde{M}^{gr}$ en $\mathbb{P}^n$.

La construcción realizada anteriormente es funtorial. Más aún, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 25. *Existe una adjunción, la cual es equivalencia de categorías:*

$$k[x_0,...,x_n]\mathrm{mod}-\mathrm{graduados} \xrightarrow{(\sim,\Gamma)} \boldsymbol{CohShv}(\mathbb{P}^n_k)$$
$$M \longmapsto \tilde{M}^{gr}$$
$$\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Gamma(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{F}(m)) \longleftarrow \mathcal{F}$$

Demostración. Es claro que el funtor secciones globales es el inverso de la construcción tilde graduada, ya que ello ocurre a nivel de afines. □

Con las técnicas desarrolladas en esta sección es posible calcular la cohomología del proyectivo $H^i(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(m))$. Se recuerda que $k[x_0,...,x_n]^{(m)}$ es el k-espacio vectorial generado por monomios de grado m en las indeterminadas $x_0,...,x_n$.

Proposición 26. *Sea k campo.*

$$H^i(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(m))=\begin{cases}0, & Si\ 0<i<n.\\ 0, & Si\ i=n,\ m>-n-1\\ 0, & Si\ i=0,\ m<0.\\ k[x_0,...,x_n]^{(m)}, & Si\ i=0,\ m\geq 0.\end{cases}$$

13. Globalización de los resultados de cohomología de espacios proyectivos.

En esta sección S será un esquema noetheriano y $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n_S$. Además $p:\mathbb{P}^n_S\to S$ denota la proyección en la segunda coordenada. Lo que se busca es obtener resultados análogos a los mostrados en la sección anterior para $\mathbb{P}^n_S$.

Proposición 27. *Bajo las condiciones mencionadas $R^ip_*\mathcal{F}$ es coherente en S para todo i. Además $R^ip_*\mathcal{F}=0$ para todo $i>n$.*

Demostración. Observamos que $R^ip_*\mathcal{F}$ es la gavilla asociada a la pregavilla

$$U\subseteq S\mapsto H^i(p^{-1}U,\mathcal{F})=H^i(\mathbb{P}^n\times U,\mathcal{F}).$$

Por lo tanto, basta ver que para $U\subseteq S$ abierto afín $H^i(\mathbb{P}^n\times U,\mathcal{F})$ es cero para $i>n$. Sea $U\subseteq S$ abierto afín y considere la cubierta abierta afín $\{\mathbb{P}^n_{x_i}\times U\to\mathbb{P}^n\times U\}$ y su complejo de Cech asociado:

$$\mathcal{F}'=\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^n\times U}\to\oplus_\alpha j_{\alpha *}j^*_\alpha\mathcal{F}'\to\oplus_{\alpha\beta}j_{\alpha\beta *}j^*_{\alpha\beta}\mathcal{F}'\to\cdots$$

el cual induce la sucesión espectral de Cech:

$$H^j(V_I,\mathcal{F}_I)\Rightarrow H^{j+q}(\mathbb{P}^n\times U,\mathcal{F})$$

donde $I=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$, $V_I=\mathbb{P}^n_{x_{\alpha_0}\cdots x_{\alpha_q}}\times U$. Como V_I es afín, concluimos que $H^j(V_I,\mathcal{F}_I)=0$ para $j>0$. Lo cual implica que $H^i(\mathbb{P}^n\times U,\mathcal{F})$ es cero para $i>n$, ya que en este caso $q\leq n$ y por lo tanto $j>0$ en la sucesión espectral.

Para probar que $R^ip_*\mathcal{F}$ es coherente, usamos la siguiente proposición (cuya prueba es independiente) y procedemos como en el caso $S=\operatorname{Spec}k$ (ver proposición 22). □

Proposición 28. *Existe $m_0\in\mathbb{Z}$ tal que para todo $m\geq m_0$, $R^ip_*\mathcal{F}(m)=0$ para todo $i>0$, y $p^*p_*\mathcal{F}(m)\to\mathcal{F}(m)$ es suprayectiva.*

Demostración. Para la sobreyectividad de $p^*p_*\mathcal{F}(m)\to\mathcal{F}(m)$, consideramos $\{S_\alpha\to S\}$ una cubierta abierta afín y tomamos $\{\mathbb{P}^n_{x_i}\times S_\alpha\to\mathbb{P}^n\times S\}_{i,\alpha}$. Como en el caso $S=\operatorname{Spec}k$ (ver proposición 23), un argumento estándar con módulos graduados sobre un anillo graduado muestra que $\mathcal{F}(m)|_{\mathbb{P}^n_{x_i}\times S_\alpha}$ está generado por secciones globales para m suficientemente grande. Por lo tanto, $p^*p_*\mathcal{F}(m)|_{\mathbb{P}^n_{x_i}\times S_\alpha}\to\mathcal{F}(m)|_{\mathbb{P}^n_{x_i}\times S_\alpha}$ es sobre, lo cual implica el resultado.

Para el desvanecimiento de $R^i p_* \mathcal{F}(m)$, consideramos $\{S_\alpha \to S\}$ una cubierta abierta afín. Basta ver que para todo $i > 0$, $H^i(\mathbb{P}^n_{x_i} \times S_\alpha, \mathcal{F}(m)) = 0$ para m suficientemente grande. Pero la prueba para $S = \operatorname{Spec} k$ (ver proposición 23) funciona para cualquier S afín. □

Para el siguiente resultado consideramos la categoría de gavillas casi-coherentes de $\mathcal{O}_S[x_0, ..., x_n]$-módulos graduados finitamente generados, $\mathbf{Gr(cohShv}(S))$. Motivados en lo hecho en la sección pasada para $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbf{Gr(cohShv}(S))$ se define:

$$\operatorname{Hom}_{gr}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \underset{m_0}{\operatorname{colím}}\ \operatorname{Hom}_{gr}\left(\bigoplus_{m \geq m_0} \mathcal{M}_m, \bigoplus_{n \geq m_0} \mathcal{N}_n\right).$$

Proposición 29. *La asignación α : $\boldsymbol{CohShv}(\mathbb{P}^n_S) \to \boldsymbol{Gr(CohShv}(S))$ definida mediante*

$$\mathcal{F} \mapsto \bigoplus_{m=0}^{\infty} p_* \mathcal{F}(m)$$

es una equivalencia de categorías.

La prueba de este resultado es idéntica a la de la proposición 25 ya que el funtor inverso está definido de manera local por la construcción "tilde" graduada $\tilde{\_}^{gr}$.

14. Cambio de base.

Sean S un esquema noetheriano, $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$ y como antes $p : \mathbb{P}^n \times S \to S$ la proyección en la segunda coordenada. Por un lado se puede considerar la fibra de p en un punto $s \in S$ como esquema, la que se define con el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n_{k(s)} := p^{-1}(s) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathbb{P}^n_S \arrow[d, "p"] \\ \operatorname{Spec} k(s) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Entonces uno puede preguntarse si existe alguna relación entre $R^i p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ y $H^i(\mathbb{P}^n_{k(s)}, j^* \mathcal{F})$.

La pregunta anterior es un caso particular de la siguiente situación. Sea $g : T \to S$ un morfismo de esquemas y considérese el siguiente diagrama Cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \times T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}^n \times S \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Ahora la pregunta es si existe alguna relación entre $g^* R^i p_* \mathcal{F}$ y $R^i q_* h^* \mathcal{F}$ para una gavilla coherente $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n \times S$.

Observación 7. Para todo $U \subseteq S$ abierto existen morfismos

$$H^i(\mathbb{P}^n \times U, \mathcal{F}) \xrightarrow{h^*} H^i(\mathbb{P}^n \times g^{-1}(U), h^* \mathcal{F}) \to H^0(g^{-1}(U), R^i q_* h^* \mathcal{F})$$

lo cual induce un homomorfismo:

$$R^i p_* \mathcal{F} \to g_* R^i q_*(h^* \mathcal{F})$$

y mediante la adjunción (g^*, g_*), obtenemos un homomorfismo:

$$\theta_g : g^* R^i p_* \mathcal{F} \to R^i q_*(h^* \mathcal{F})$$

Definición 25. Si para todo $g : T \to S$, $\theta_g : g^* R^i p_* \mathcal{F} \to R^i q_* h^* \mathcal{F}$ es un isomorfismo, se dice que $R^i p_*$ **conmuta con cambio de base**.

Proposición 30. *Para toda $\mathcal{F}$ gavilla coherente en $\mathbb{P}^n \times S$ existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $g^*p_*\mathcal{F}(m) \to q_*h^*\mathcal{F}(m)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Esto es consecuencia directa de la compatibilidad de las equivalencias de categorías α_S, α_T (ver proposición 29) con productos tensoriales. En efecto, sea $\mathcal{F}$ gavilla coherente en $\mathbb{P}^n \times S$. Entonces $\mathcal{F}$ está definida en términos de la gavilla de $\mathcal{O}_S[x_0, ..., x_n]$-módulos graduados:

$$\mathcal{M} := \alpha_S(\mathcal{F}) = \bigoplus_{m\geq 0} p_*\mathcal{F}(m)$$

y $h^*\mathcal{F}$ está definida en términos de la gavilla de $\mathcal{O}_T[x_0, ..., x_n]$-módulos graduados:

$$\mathcal{N} := \alpha_T(h^*\mathcal{F}) = \bigoplus_{m\geq 0} q_*h^*\mathcal{F}(m)$$

Basta ver que el morfismo natural $g^*\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un isomorfismo en nuestra categoría graduada. Usando el funtor $\tilde{}$, que es el inverso de α, basta probar que $\widetilde{g^*\mathcal{M}} \cong h^*(\widetilde{\mathcal{N}})$, lo cual es consecuencia inmediata de la definición del funtor $\tilde{}$. □

Sin embargo, para obtener relaciones precisas entre las imágenes directas derivadas, debemos considerar el caso de gavillas planas $\mathcal{F}$ sobre S.

Proposición 31. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$, plana sobre S, tal que existen $s_0 \in S$, $i \in \mathbb{Z}$ tal que:*

$$R^ip_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \to H^i(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) \to 0,$$

entonces existe $U \subseteq S$ abierto tal que $s_0 \in U$ y con la propiedad de que para todo $g : T \to U$, $g^*R^ip_*\mathcal{F} \cong R^iq_*h^*\mathcal{F}$.

Demostración. El resultado es local en T, por lo cual basta considerar el caso afín. Sean $S = \operatorname{Spec} A$ con A un anillo local noetheriano, $T = \operatorname{Spec} C$ con C un anillo local noetheriano con estructura de A-álgebra. Sea $\mathcal{F} \to I^\bullet$ una resolución de Cech asociada a una cubierta afín de $\mathbb{P}^n \times S$, en particular esta resolución consiste de gavillas planas sobre S ya que $\mathcal{F}$ lo es. Consideramos los funtores:

$$\begin{aligned} f : A - \text{mod} &\longrightarrow A - \text{mod}; & f' : A - \text{mod} &\longrightarrow A - \text{mod} \\ N &\longmapsto N \otimes_A H^i(I^\bullet|_A) & N &\longmapsto H^i(I^\bullet \otimes_A N) \end{aligned}$$

Por la observación 7, existe una transformación natural $f \to f'$, y basta ver que es un isomorfismo. Debido a que f es un funtor exacto derecho, y $f(A) = f'(A)$ es suficiente probar que f' es también exacto derecho.

Ya que $I^\bullet$ es un complejo de A-módulos planos, f' forma parte de un funtor cohomológico, por lo cual f' es semi-exacto, i.e. si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos entonces $f'(M_1) \to f'(M_2) \to f'(M_3)$ es exacta.

Como el morfismo $A \to \hat{A}$ a la completación es fielmente plano, podemos asumir que los módulos son completos, i.e.

$$N = \hat{N} = \varprojlim N/(\mathfrak{m}^nN)$$

donde $\mathfrak{m}$ es el ideal máximo de A. Entonces, $f'(\hat{N}) = H^i(I^\bullet \otimes_A \hat{N}) \cong \widehat{H^i}(I^\bullet \otimes_A N)$ ya que $\hat{A}$ es un A-módulo plano. Por lo tanto, aplicando el criterio de Mittag-Leffler al sistema inverso

$$\cdots \to N/(\mathfrak{m}^{n+1}N) \to N/(\mathfrak{m}^nN) \to \cdots$$

de morfismos sobreyectivos, hemos reducido la prueba al caso Artiniano, i.e. basta probar que el funtor $N/(\mathfrak{m}^nN) \mapsto H^i(I^\bullet \otimes_{A/\mathfrak{m}^n} N/(\mathfrak{m}^nN))$ es exacto derecho.

Pero por hipótesis, la siguiente composición:

$$f'(A) = H^i(I^\bullet|_A) \to H^i(I^\bullet) \otimes_A A/\mathfrak{m} \to H^i(I^\bullet \otimes_A A/\mathfrak{m}) = f'(A/\mathfrak{m})$$

es sobreyectiva, lo cual implica por inducción en la longitud de N que f' preserva morfismos sobreyectivos. Como f' es semi-exacto, concluimos que f' es exacto derecho, como se quería. □

Proposición 32. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$, plana sobre S, tal que existen $s_0 \in S$, $i \in \mathbb{Z}$ tal que:*

$$R^i p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \to H^i(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) \to 0.$$

Entonces

$$R^{i-1} p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \to H^{i-1}(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) \to 0,$$

si y sólo si $R^i p_* \mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_S$-módulo localmente libre en una vecindad de s_0.

Demostración. Con la notación de la prueba de la proposición 31. Sea f'_r el funtor $N \mapsto H^r(I^\bullet \otimes_A N)$. Por el argumento en la prueba de la proposición 31, concluimos que f'_i es un funtor exacto derecho y naturalmente isomorfo al funtor $N \mapsto N \otimes_A H^i(I^\bullet)$.

Usando de nuevo la prueba de la proposición 31, tenemos que el morfismo $R^{i-1} p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \to H^{i-1}(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0})$ es sobreyectivo, si y solo si f'_{i-1} es exacto derecho, y como $\{f'_r\}_{r \in \mathbb{Z}}$ es un funtor cohomológico, esto ocurre si y solo si f'_i es exacto izquierdo.

Como ya observamos que f'_i es exacto derecho, tenemos que la condición de sobreyectividad es equivalente a que el funtor f'_i ($N \mapsto N \otimes_A H^i(I^\bullet)$) sea exacto, i.e. equivalente a que $H^i(I^\bullet)$ sea un A-módulo plano. Pero como A es noetheriano local, esto último es equivalente a que $H^i(I^\bullet)$ sea localmente libre, i.e. equivalente a que $R^i p_* \mathcal{F}$ sea un $\mathcal{O}_S$-módulo localmente libre en una vecindad de s_0. $\square$

Corolario 8. *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$, plana sobre S, y $s_0 \in S$ tales que $H^{j+1}(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$. Entonces, existe $U \subseteq S$ abierto con $s_0 \in U$, tal que para todo $g : T \to U$, $g^* R^j p_* \mathcal{F} \cong R^j q_* h^* \mathcal{F}$.*

En particular, $R^j p_* \mathcal{F} \otimes k(s) \cong H^j(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s)$ para todo $s \in U$.

Demostración. Al aplicar la proposición 31 para $i = j + 1$ existe $U \subseteq S$ un abierto con $s_0 \in U$ tal que $g^* R^{j+1} p_* \mathcal{F} \cong R^{j+1} q_* h^* \mathcal{F}$ para todo $g : T \to U$. Por definición de g^*, q_* y h^* esto implica que $R^{j+1} p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \cong H^{j+1}(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$. Como $R^{j+1} p_* \mathcal{F}$ es coherente, una de las versiones geométricas del lema de Nakayama implica que $(R^{j+1} p_* \mathcal{F})_{s_0} = 0$, de lo que se deduce que existe $W \subseteq S$ abierto con $s_0 \in W$ tal que $R^{j+1} p_* \mathcal{F}|_W = 0$, lo que implica que $R^{j+1} q_* h^* \mathcal{F}$ es localmente libre. Entonces por el regreso de la proposición 32 esto implica que $R^j p_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s_0) \to H^j(\mathbb{P}^n_{s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) \to 0$ es suprayectivo. Al usar nuevamente la proposición 31 esto implica que existe $U \subseteq S$ abierto con $s_0 \in U$ tal que para todo $g : T \to S$, $g^* R^j p_* \mathcal{F} \cong R^j q_* h^* \mathcal{F}$. $\square$

Corolario 9. *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$, plana sobre S, tal que existe i_0 con la propiedad de que para todo $i \geq i_0$, $R^i p_* \mathcal{F} = 0$. Entonces para todo $s \in S$ e $i \geq i_0$, $H^i(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s) = 0$.*

Demostración. Primero nótese que si $j > n$, entonces ya se probó que $H^j(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s) = 0$. Así, lo que resta probar es que la propiedad se cumple para i tal que $i_0 \leq i \leq n$. Para esto se usará inducción descendente. Supóngase que $H^{i+1}(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s) = 0$. Por el corolario anterior $H^i(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s) \cong R^i p_* \mathcal{F} \otimes k(s_0) = 0$. $\square$

Corolario 10. *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$, plana sobre S y $\mathcal{G}$ una gavilla coherente sobre S. Dado $\varphi : \mathcal{G} \to p_* \mathcal{F}$, este induce $\varphi \otimes 1_{k(s)}$ y se tiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \otimes k(s) \arrow[r, "\varphi \otimes 1_{k(s)}"] \arrow[dr] & p_* \mathcal{F} \otimes k(s) \arrow[d] \\
& H^0(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s)
\end{tikzcd}$$

Si para todo $s \in S$, $\mathcal{G} \otimes k(s) \to H^0(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s)$ es un isomorfismo, entonces φ es un isomorfismo, $\mathcal{G}$ es localmente libre y para todo $g : T \to S$, $g^* p_* \mathcal{F} \cong q_* h^* \mathcal{F}$.

Demostración. La proposición 31 para $i = 0$ implica que hay cambio de base, es decir, $g^* p_* \mathcal{F} \cong q_* h^* \mathcal{F}$ es un isomorfismo para todo $g : T \to S$. En particular, para todo $s \in S$, $p_* \mathcal{F} \otimes k(s) \cong H^0(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s)$.

Así, la hipótesis implica que para todo $s \in S$, $\varphi_s \otimes 1_{k(s)}$ es un isomorfismo. Entonces, por el lema de Nakayama φ_s es un isomorfismo para todo $s \in S$, i.e. φ es un isomorfismo. Finalmente, por la proposición 32 para $i = 0$, las hipótesis de la ida se cumple automáticamente, así $p_*\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ es localmente libre en S. □

Corolario 11. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente en $\mathbb{P}^n \times S$. Entonces $\mathcal{F}$ es plana sobre S si y sólo si existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $p_*\mathcal{F}(m)$ es localmente libre en S.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\mathcal{F}$ es coherente por la proposición 28 existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $i > 0$: $R^i p_*\mathcal{F}(m) = 0$. Usando los corolarios 9 y 8, concluimos que $p_*(\mathcal{F}(m)) \otimes k(s) \to H^0(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}_s(m))$ es sobre para todo $s \in S$. Entonces, por la proposición 32 concluimos que $p_*\mathcal{F}(m)$ es localmente libre.

$\Leftarrow$) Por hipótesis existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $p_*\mathcal{F}(m)$ es localmente libre en S. Así (ver proposición 29) $\alpha(\mathcal{F}) = \bigoplus_{m \geq 0} p_*\mathcal{F} \cong \bigoplus_{m \geq m_0} p_*\mathcal{F}$. Pero este último es un $\mathcal{O}_S$-módulo plano por ser suma de $\mathcal{O}_S$-módulos planos. Luego de la proposición 29, $\mathcal{F}$ está definida sobre una cubierta abierta afín por módulos obtenidos en dos pasos: a) localizando $\alpha(\mathcal{F})$ con respecto a x_i y b) pasando al submódulo de grado cero, el cual es un sumando directo.

Estos módulos son planos sobre $\mathcal{O}_S$ cuando $\alpha(\mathcal{F})$ es plano, por lo tanto concluimos que $\mathcal{F}$ es plano sobre S. □

Nota 6. El corolario anterior implica que el polinomio de Hilbert de $\mathcal{F}_s$ en $\mathbb{P}^n_s$, $\mathrm{Hilb}(\mathcal{F}_s)$, es localmente constante.

Proposición 33. *La proyección $p : \mathbb{P}^n \times S \to S$ es una función continua cerrada.*

Demostración. Sea $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times S$ un cerrado, y $\mathcal{F}$ la gavilla estructural del subesquema cerrado reducido con soporte Z. Por la proposición 28, existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $p^*p_*\mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}(m)$ es suprayectiva. Afirmamos que $p(Z) = \bigcap_{m \geq m_0} \mathrm{Supp}(p_*\mathcal{F}(m))$.

En efecto, como las secciones globales de $p_*(\mathcal{F}(m))$ generan a $\mathcal{F}(m)$ (por lo sobreyectividad mencionada arriba), se sigue que $p_*(\mathcal{F}(m))_s \neq 0$ para todo $s \in p(Z)$. Por lo tanto $p(Z)$ está contenido en la intersección.

Por otro lado, si $s \notin p(Z)$, entonces $\mathcal{F}_s = 0$. Por la proposición 30, para m suficientemente grande: $p_*(\mathcal{F}(m)) \otimes k(s) \cong H^0(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{F}(m)_s) = 0$. Por lo tanto, por el lema de Nakayama $p_*(\mathcal{F}(m))_s = 0$. □

Corolario 12.

$$R^i p_*\mathcal{O}(m) = \begin{cases} 0, & \textit{Si } 0 < i < n. \\ 0, & \textit{Si } i = n,\ m > -n-1 \\ \textit{loc libre con base } \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n]^{(m)}, & \textit{Si } i = 0. \end{cases}$$

Demostración. Para el desvanecimiento, observamos que el resultado vale cuando la base es un campo (ver proposición 26), por lo cual podemos aplicar la proposición 31, la cual implica en particular $R^i p_*\mathcal{O}(m) \otimes k(s) \cong H^i(\mathbb{P}^n_s, \mathcal{O}(m)) = 0$. Así, por el lema de Nakayama $R^i p_*\mathcal{O}(m)_s = 0$ para todo $s \in S$, y por lo tanto $R^i p_*\mathcal{O}(m) = 0$. La última parte se sigue del corolario 10 y el caso de campos base (ver proposición 26). □

Estratificaciones.

15. Existencia de estratificaciones aplanantes.

Considérese S un esquema noetheriano y $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre $\mathbb{P}^n \times S$. Dado un morfismo de esquemas $g : T \to S$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \times T \arrow[r, "1_{\mathbb{P}^n} \times g"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}^n \times S \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Si se define la gavilla en $\mathbb{P}^n \times T$, $\mathcal{F}_g = (1_{\mathbb{P}^n} \times g)^*\mathcal{F}$, entonces el problema que se pretende responder es si se pueden caracterizar los morfismos g tales que $\mathcal{F}_g$ sea plana sobre T.

Definición 26. Sea S un esquema. Una estratificación de S es una colección finita de subesquemas localmente cerrados de S, digamos $S_1, ..., S_n$, tales que $S = \amalg_{i=1}^n S_i$.

Teorema 7. *Sea S un esquema noetheriano. Entonces existe una estratificación de S, $S_1, ..., S_m$ tal que para todo morfismo de esquemas $g : T \to S$ con T noetheriano, $\mathcal{F}_g$ es plano sobre T si y sólo si existe g' tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g'"] \arrow[dr, "g"'] & \amalg_{i=1}^m S_i \arrow[d, hook] \\ & S \end{tikzcd}$$

Demostración. Demostraremos este teorema a lo largo de la sección. Primero consideramos el caso donde $n = 0$, por lo cual $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente sobre S. Dado que se tenia que $\mathcal{F}_g = (1_{\mathbb{P}^n} \times g)^*\mathcal{F}$ entonces para este caso $\mathcal{F}_g$ es visto simplemente como $g^*\mathcal{F}$ y por lo tanto esta gavilla es plana sobre T si y sólo si es localmente libre sobre T.

Dado $s \in S$, consideramos:

$$e(s) = \dim_{k(s)} \mathcal{F}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)$$

Ahora, fijamos $s \in S$. Sea $e = e(s)$ y escogemos $a_1, \dots, a_e \in \mathcal{F}_S$ cuyas imágenes en $\mathcal{F}_s \otimes k(s)$ forman una base para este espacio vectorial. Entonces, $a_1, \dots, a_e$ se extienden a secciones de $\mathcal{F}$ en una vecindad U_1 de s, y mediante éstas secciones obtenemos un homomorfismo en U_1:

$$\mathcal{O}_S^e \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}.$$

Obsérvese que $\mathcal{F}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \cong \mathcal{F}_s / m_s \mathcal{F}_s$. Esta observación es consecuencia del siguiente teorema

Teorema 8. *Sea A un anillo, m un ideal, y M un A-módulo, entonces $(A/m) \otimes_A M \cong M/mM$*

Demostración. Ver [Ma, 11 Teorema 2.3] □

Entonces tomando $M = \mathcal{F}_s$ y $k(s) = A/m_s$, se sigue de manera inmediata la observación. Por otra parte, ya que $a_1, \dots, a_e \in \mathcal{F}_s$ entonces generan a $\mathcal{F}_s \otimes k(s)$. Por la observación hecha anteriormente, los elementos $a_1, \dots, a_e \in \mathcal{F}_s / m_s \mathcal{F}_s$, los cuales son vistos en $\mathcal{F}_s / m_s \mathcal{F}_s$, como clases laterales, es decir, $\bar{a_1}, \dots, \bar{a_e} \in \mathcal{F}_s / m_s \mathcal{F}_s$, las cuales generan a este cociente. Ahora bien, denotando como N al subespacio generado por $a_1, \dots, a_e$ donde $N \subset \mathcal{F}_s$, se tiene por lo anterior que $\mathcal{F}_s = N + m_s \mathcal{F}_s$, donde $\mathcal{F}_s$ finitamente generada dado que $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, N es un submódulo de $\mathcal{F}_s$ y m_s al ser el único ideal maximal en el anillo dado, este coindice con el radical de Jacobson del mismo. Así se sigue por el lema de Nakayama que $N = \mathcal{F}_s$. De esta última observación concluimos que $a_1, \dots, a_e$ también generan a $\mathcal{F}_s$. Por lo tanto, φ es sobre en una vecindad más pequeña U_2 de s.

Considerando una vecindad U_3 aún más pequeña, podemos suponer que ker φ está generado por sus secciones globales sobre U_3. Así, obtenemos una sucesión exacta en $U_s = U_3$:

$$\mathcal{O}_S^f \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_S^e \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0$$

para algún $f \in \mathbb{N}$. Observamos que $\mathcal{F}$ está generada por $e(s)$ secciones en cualquier punto de U_s, por lo tanto:

$$\text{Si } s' \in U_s, e(s') \leq e(s) \tag{5}$$

es decir, e es semicontínua superior. Por lo tanto, el conjunto:

$$Z_e = \{s \in S : e(s) = e\}$$

es localmente cerrado. Además, si $s' \in U_s$, entonces $e(s') = e(s)$ si y solo si el homomorfismo:

$$k(s')^f \xrightarrow{\psi(s')} k(s')^e$$

es cero. Por lo cual, si ψ está dado por una matriz $e \times f$: (ψ_{ij}) de funciones en U_s, el subesquema cerrado Y_s de U_s definido por el ideal $\langle \psi_{ij} \rangle$ tiene soporte $Z_e \cap U_s$. El conjunto Y_s satisface la propiedad descrita en la proposición 34, la cual caracteriza al subesquema Y_s en una vecindad de cualquier punto de $Z_e \cap U_s$. Por lo tanto, si s_1 y s_2 son dos puntos arbitrarios de Z_e, en el conjunto abierto $U_{s_1} \cap U_{s_2}$ los dos subesquemas Y_{s_1} y Y_{s_2} son iguales. Por lo tanto, podemos pegar los subesquemas Y_s para darle estructura de subesquema al subconjunto localmente cerrado Z_e.

Denotamos a dicho subesquema Y_e. La familia $\{Y_e\}$ es una estratificación de S, y por la proposición 34 se sigue inmediatamente que dicha estratificación satisface las propiedades requeridas. Esto termina el caso $n = 0$.

La prueba en el caso general se concluirá en la observación 11. □

A continuación se dará una clase de clase de ejemplos los cuales nos permitirán ilustrar el teorema dado, pero antes se introducirá el concepto de estratificación de morfismos de esquemas.

Definición 27. Sean $f : X \to S$ un morfismo de esquemas. Una estratificación plana para un morfismo f es una descomposición disjunta de S en subesquemas localmente cerrados S_i tales que para otro morfismo de esquemas $g : T \to S$ se tiene que $T \times_S X \to T$ es plano si y sólo si $T \to S$ se factoriza a través de S_i para alguna i

Cabe mencionar que las estratifcaciones planas no siempre existen (caso afín), y a continuación se dará un ejemplo

Ejemplo 3. Sean $H := \text{Spec } \mathbb{C}[1, 1/t] \cong \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$, $B := \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ y $C := \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - xy)$. Consideremos el morfismo $f : H \to B$ inducido por el homomorfismo de anillos definido mediante $x \mapsto t^2 - t$, $y \mapsto t^3 - t^2$.

Nótese que la imagen de f está contenido en la curva $V = y^2 - x^3 - xy$, dado que evaluando $x = s^2 - s$ y $y = s^3 - s^2$ se sigue de manera inmediata que $(s^3 - s^2)^2 - (s^2 - s)^3 - (s^2 - s)(s^3 - s^2) = 0$

La curva C es una curva racional con un nodo simple en $(0, 0)$. Tenemos $x = y = 0$ si y sólo si $t \in \{0, 1\}$. Como t es invertible en $\mathbb{C}[1, 1/t]$, la imagen de H bajo f recorre el nodo únicamente por una de sus ramas (derivando y evaluando en $t = 1$ puede verse que dicha rama es la de pendiente 1). Ahora, como un par de curvas planas se intersecan en un número finito de puntos, no existe un subesquema de codimensión 1 en B localmente cerrado que contenga a $Im(f)$ y no contenga ambas ramas del nodo de la curva C, por lo tanto no existe una estratificación $B = \sqcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \hookrightarrow B$ localmente cerrado tal que f pueda factorizarse a través de algún B_j.

Por otro lado, tenemos $(\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)) \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} (\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)) \cong \mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$. De aquí tenemos el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} H \otimes_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}} H \cong H \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ H \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Es claro finalmente, que H es conexo y id_H es plano.

Proposición 34. *Si $g : T \to U_s$ es un morfismo donde T es noetheriano, entonces $g^*\mathcal{F}$ es localmente libre de rango $e = e(s)$ si y sólo si g se factoriza a través del subesquema cerrado Y_s.*

Demostración. Por definición de Y_s, g se factoriza a través de Y_s si y sólo si todas las funciones $g^*(\psi_{ij})$ son 0 en T. Pero ya que la sucesión:

$$\mathcal{O}_T^f \xrightarrow{g^*(\psi)} \mathcal{O}_T^e \xrightarrow{g^*(\varphi)} g^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

es exacta en T, lo anterior es equivalente a decir que $g^*(\varphi)$ es un isomorfismo. Lo cual claramente implica que $g^*(\varphi)$ es localmente libre de rango e.

Por otro lado, si $g^*(\mathcal{F})$ es localmente libre de rango e, tomamos $\mathcal{G} = ker(\varphi)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_T^e \xrightarrow{g^*(\varphi)} g^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Tensorisando con $k(t)$ para cualquier $t \in T$:

$$\mathrm{Tor}_1(g^*\mathcal{F}, k(t)) \longrightarrow \mathcal{G} \otimes k(t) \longrightarrow k(t)^e \longrightarrow g^*(\mathcal{F}) \otimes k(t) \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis $g^*\mathcal{F}$ es localmente libre de rango e, lo cual implica $\mathrm{Tor}_1(g^*\mathcal{F}, k(t)) = 0$. Finalmente, como $g^*(\mathcal{F}) \otimes k(t)$ es un $k(t)$-espacio vectorial de dimensión e, concluimos que $\mathcal{G} \otimes k(t) = 0$.

Obsérvese que si $\mathcal{G} \otimes k(t) = 0$. entonces $\mathcal{G} = 0$ en una vecindad de t. Esta observación es consecuencia de la siguiente proposición el cual es consecuencia de el lema de Nakayama

Proposición 35. *Sea A un anillo local, M y N A-módulos finitamente generados. Si $M \otimes N = 0$, entonces $M = 0$ o $N = 0$*

Demostración. Ver [Ma, 11 Teorema 2.3] □

Dado que $k(t)$ al ser un espacio vectorial es finitamente generado y $\mathcal{G}$ lo es dado que $\mathcal{G}$ es finitamente generada dado que $\mathcal{G}$ una gavilla coherente. Por la proposicón anterior se sigue que $\mathcal{G} = 0$ en una vecindad de t. Como t es arbitrario, $\mathcal{G} = 0$ en T, y $g^*(\varphi)$ es un isomorfismo. □

Observación 8. Se ha probado más que la existencia de la estratificación $\{Y_e\}$ buscada. De hecho, hemos indexado a los subesquemas Y_e tal que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Y_e}$ es localmente de rango e.

Proposición 36. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de tipo finito de esquemas noetherianos y sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre X. Supóngase que Y es un esquema reducido e irreducible. Entonces existe un subconjunto abierto no vacío $U \subset Y$ tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a $f^{-1}(U)$ es plana sobre U.*

Demostración. Para esta demostración se usa el Lema de Libertad Genérica el cual puede ser consultado en [Ei, pp 308]. □

Continuamos con la prueba del teorema 7, en donde $\mathcal{F}$ es coherente en $\mathbb{P}^n \times S$ y $p : \mathbb{P}^n \times S \to S$ es la proyección en la segunda coordenada. Sea:

$$\mathcal{E}_m = p_*(\mathcal{F}(m)).$$

Primero, observamos:

Proposición 37. *Existe un conjunto finito de subconjuntos localmente cerrados $Y_1, ..., Y_k$ de S tales que $S = \amalg_{i=1}^{k} Y_i$, y tales que si Y_i está equipado con la estructura de subesquema reducido:*

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Y_i} \text{ es plano sobre } Y_i.$$

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 36 y de la condición de cadenas descendentes para subconjuntos cerrados de S. □

Esto implica los siguientes resultados:

Proposición 38. *Existe $m_0 \in \mathbb{Z}$, tal que si $m \geq m_0$, entonces para todo $s \in S$ y para todo $i > 0$:*

$$H^i(\mathbb{P}_s^n, \mathcal{F}_s(m)) = 0$$

y además

$$\mathcal{E}_m \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) \cong H^0(\mathbb{P}_s^n, \mathcal{F}_s(m)).$$

Demostración. Consideramos la estratificación $S = \amalg_{i=1}^{k} Y_i$ dada por la proposición 37. Aplicando la proposición 28 sobre los esquemas base Y_i concluimos que existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ y para todo $i > 0$, $R^i p_* \mathcal{F}(m) = 0$. Finalmente aplicamos el corolario 9 y la proposición 30 para obtener el resultado. □

Proposición 39. *Existe sólo un número finito $p_1, ..., p_k$ polinomios de Hilbert de las gavillas $\mathcal{F}_s$ en las fibras $\mathbb{P}_s^n$ sobre S.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición 37. □

Proposición 40. *Sea m_0 como en la proposición 38, y sea $g : T \to S$ un morfismo con T noetheriano. Entonces $\mathcal{F}_g$ en $\mathbb{P}^n \times T$ es plano sobre T si y solo si $g^*\mathcal{E}_m$ es localmente libre en T para todo $m \geq m_0$.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que m_0 satisface las condiciones de la proposición 30, i.e. el morfismo canónico:

$$g^*\mathcal{E}_m \overset{\cong}{\to} q_*(\mathcal{F}_g(m))$$

es un isomorfismo para todo $m \geq m_0$, en donde $q : \mathbb{P}^n \times T \to T$ es la proyección en la segunda coordenada.

Supongamos primero que $\mathcal{F}_g$ es plano sobre T. Entonces por la proposición 38 podemos aplicar el corolario 10 para concluir que para todo $m \geq m_0$, $g^*\mathcal{E}_m$, $m \geq m_0$ es localmente libre en T.

Recíprocamente, si $g^*\mathcal{E}_m$ es plana para todo $m \geq m_0$, entonces como $g^*\mathcal{E}_m \cong q_*(\mathcal{F}_g(m))$, el corolario 11 implica que $\mathcal{F}_g$ es plana sobre T. □

Observación 9. Dos estratificaciones cualesquiera de S admiten una estratificación común que es el análogo de un máximo común divisor, i.e. dados:

$$S = \amalg Y_i = \amalg Z_j,$$

entonces S también es la unión de los subconjuntos localmente cerrados $W_{ij} = \sup(Y_i) \cap \sup(Z_j)$, y podemos equipar a W_{ij} con una estructura de esquema al considerar la suma de las gavillas de ideales que definen a Y_i y Z_j.

Observación 10. Por la prueba del caso $n = 0$ del teorema 7, cada una de las gavillas coherentes $\mathcal{E}_m$ admite una estratificación que satisface las condiciones del teorema 7. Ahora, por la proposición 40 tenemos que una estratificación para $\mathcal{F}$ que satisfaga las condiciones del teorema 7 es de hecho el máximo común divisor de las estratificaciones correspondientes de $\mathcal{E}_m$ para $m \geq m_0$.

De manera más concreta, sea $Y_e^{(m)}$ la componente de la estratificación dada por el caso $n = 0$ (ya probado) del teorema 7 para la gavilla $\mathcal{E}_m$, en la cual $\mathcal{E}_m$ es localmente de rango e. Sean $p_1, \ldots, p_k$ los polinomios de Hilbert de la proposición 39. Entonces:

Proposición 41. *Para todo i, la intersección:*

$$Z_i = \bigcap_{m=m_0}^{\infty} Y_{p_i(m)}^{(m)}$$

tiene estructura de subesquema localmente cerrado.

Demostración. Como se mencionó en la observación 9, cada intersección finita tiene estructura de subesquema. Pero, de manera conjuntista tenemos la igualdad:

$$\mathrm{supp} Z_i = \bigcap_{m=m_0}^{m_0+n} \mathrm{supp}(Y_{p_i(m)}^{(m)})$$

En efecto, sea $s \in \bigcap_{m=m_0}^{m_0+n} \mathrm{supp}(Y_{p_i(m)}^{(m)})$, y p_j el polinomio de Hilbert de $\mathcal{F}_s$ en $\mathbb{P}_s^n$. Por la proposición 38, $H^j(\mathbb{P}_s^n, \mathcal{F}_s(m)) = 0$ para todo $j > 0$ y para todo $m \geq m_0$, por lo cual:

$$\begin{aligned} \dim_{k(s)} \mathcal{E}_m \otimes k(s) &= p_j(m), \text{ para todo } m \geq m_0; \\ \dim_{k(s)} \mathcal{E}_m \otimes k(s) &= p_i(m), \text{ para } m_0 \leq m \geq m_0 + n; \end{aligned}$$

Pero esto implica que $p_i = p_j$ debido a que el grado de $p_i - p_j$ es menor o igual a n, y lo anterior muestra que existen $n+1$ ceros: m_0, ..., $m_0 + n$ para $p_i - p_j$. Pero esto implica que $s \in \mathrm{supp} Z_i$, ya que para todo m: $s \in Y_{p_j(m)}^{(m)}$.

Por lo tanto, Z_i es un límite de una cadena descendente de subesquemas localmente cerrados con soporte fijo, i.e. de subesquemas cerrados en un conjunto abierto fijo U. Por la condición de cadenas descendentes para subesquemas cerrados, esta cadena se estabiliza y Z_i es de hecho una intersección finita, y por lo tanto tiene estructura de subesquema localmente cerrado. □

Observación 11. Es claro por la construcción, que si consideramos los Z_1, ..., Z_k de la proposición 41 obtenemos la estratificación buscada para concluir la prueba del teorema 7.

Corolario 13. *Sea $f : X \to S$ un morfismo proyectivo, i.e. existe un encaje cerrado $i : X \to \mathbb{P}_S^n$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & S \\ & \mathbb{P}^n \times S \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente en X, entonces existe una estratificación $\{Z_i\}$ de S que satisface las condiciones del teorema 7.

Demostración. Como i es un encaje cerrado, tenemos que $\mathcal{F} \cong i^* i_* \mathcal{F}$. Por lo tanto, basta encontrar una estratificación para $i_*\mathcal{F}$ que satisfaga las condiciones del teorema 7. Pero esto se probó en la observación 11. □

Apéndice.

16. Sucesiones espectrales.

Definición 28. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Una **sucesión espectral en homología** de $\mathcal{A}$ (que empieza en E^a) consta de:

1. Una familia de objetos en $\mathcal{A}$, $\{E^r_{p,q}\}$ con $r \geq a$ y $p, q \in \mathbb{Z}$.
2. Para cada r una familia de morfismos $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tales que $d^r_{p,q} d^r_{p+r,q-r+1} = 0$.
3. Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq a$, $E^{r+1}_{p,q} \cong H_*(E^r_{p,q}) := \operatorname{Ker} d^r_{p,q} / \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1}$.

Nota 7. En una sucesión espectral:

- La segunda condición dice que para cada $r \geq a$ las líneas con pendiente $\frac{1-r}{r}$ forman un complejo de cadenas al pensar que para cada $r \geq a$ se tiene un plano cartesiano con ejes p y q, donde en el punto (p, q) se ubica el objeto $E^r_{p,q}$. A tal plano se le conoce como la **hoja** E^r_{**}.
- La condición dada en 2 se suele escribir como $d^r d^r = 0$ para evitar hacer la notación engorrosa. A los morfismos d^r se les llama **diferenciales** u **operadores frontera**.
- El **grado** de un objeto $E^r_{p,q}$ se define como $p + q$. Para la hoja E^r_{**} todos los términos con el mismo grado se ubican en una línea con pendiete -1 y cada diferencial decrece el grado del objeto en el dominio menos 1.

Definición 29. Sean (E, d) y (E', d') sucesiones espectrales (en homología). Un **morfismo de sucesiones espectrales** $f : E \to E'$ consta de una colección de morfismos en $\mathcal{A}$, $\{f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q} \mid r \geq a,\ p, q \in \mathbb{Z}\}$, tales que para todo $r \geq a$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, $f^r_{p-r,q+r-1} d^r_{p,q} = d'^r_{p,q} f^r_{p,q}$. Además, cada morfismo $f^{r+1}_{p,q}$ es inducido por el morfismo $f^r_{p,q}$ en homología.

Las dos definiciones anteriores permiten hablar de lo que se conoce como la **categoría de sucesiones espectrales**.

Al dualizar la definición anterior puede obtenerse la definición de una sucesión espectral en cohomología.

Definición 30. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Una **sucesión espectral en cohomología** de $\mathcal{A}$ (que empieza en E_a) consta de:

1. Una familia de objetos en $\mathcal{A}$, $\{E^{p,q}_r\}$ con $r \geq a$ y $p, q \in \mathbb{Z}$.
2. Para cada r una familia de morfismos $d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r$ tales que $d_r d_r = 0$.
3. Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq a$, $E^{p,q}_{r+1} \cong H^*(E^{p,q}_r)$.

Observación 12. Nótese que toda sucesión espectral el cohomología se puede ver como una sucesión espectral en homología al definir $E^{p,q}_r := E^r_{-p,-q}$.

Como consecuencia de la definición más el hecho de que todo funtor preserva isomorfismos, un argumento por inducción prueba el siguiente resultado.

Proposición 42. *Sea $f : E \to E'$ un morfismo de sucesiones espectrales. Si existe $r \geq a$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $f^r : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ es un isomorfismo, entonces para todo $s \geq r$, $f^s : E^s_{p,q} \to E'^s_{p,q}$ es un isomorfismo para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$.*

Las siguientes definiciones relativas a sucesiones espectrales especiales, son casos muy recurrentes de sucesiones en geometría algebraica. De hecho, a lo largo de estas notas todas las sucesiones espectrales consideradas satisfacen al menos la condición de ser acotadas, es por ello que en lugar de enunciar la teoría de la forma más general posible se tratarán los casos que en este momento son útiles.

Definición 31. Una sucesión espectral es **acotada** si para cada $n \in \mathbb{Z}$ existen una cantidad finita de términos no cero con grado n en la hoja E^a_{**}.

Ejemplo 4. Una sucesión espectral en el **primer cuadrante** es una sucesión tal que todos los términos que no pertenecen a la colección $\{E^r_{p,q} \mid p, q \geq 0\}$ son cero. Nótese que si la sucesión espectral empieza en E^a y la condición enunciada se satisface para la hoja E^a_{**}, entonces para todo $r \geq a$, E^r satisface la condición por ser cada hoja la homología de la hoja anterior.

Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ fijos. Si $r > \text{máx}\{p, q+1\}$, entonces $E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q}$ pues como $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ y $r > p$, entonces $E^r_{p-r,q+r-1} = 0$, luego $\operatorname{Ker} d^r_{p,q} = E^r_{p,q}$. Por otro lado como $d^r_{p+r,q-r+1} : E_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q}$ y $r > q+1$, entonces $E_{p+r,q-r+1} = 0$ y así $\operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} = 0$. Esto implica que $H_*(E^r_{p,q}) \cong E^r_{p,q}$, que por definición de sucesión espectral implica que $E^{r+1}_{p,q} \cong E^r_{p,q}$.

Una sucesión espectral acotada satisface la misma condición que se vio satisface una sucesión en el primer cuadrante, es decir, dados $p, q \in \mathbb{Z}$ existe r_0 (que depende de p y q) tal que para todo $r \geq r_0$, $E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q}$. A este valor común se le suele denotar por $E^\infty_{p,q}$.

Definición 32. Una sucesión espectral acotada **converge** a H_* si existe una familia de objetos en $\mathcal{A}$, $\{H_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, tal que cada H_n tiene una filtración finita

$$0 = F_s H_n \subseteq ... \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq ... \subseteq F_t H_n = H_n,$$

donde $E^\infty_{p,q} \cong F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q}$. Esto se denota por

$$E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}.$$

Definición 33. Una sucesión espectral **colapsa** en E^r para $r \geq 2$, si la hoja E^r_{**} tiene exactamente un fila ó una columna no cero.

Para fijar ideas sea E una sucesión espectral que colapsa en E^r y supóngase que $q_0 \in \mathbb{Z}$ es tal que sobre la hoja E^r_{**} todos los objetos fuera de la colección $\{E^r_{p,q_0} \mid p \in \mathbb{Z}\}$ son cero, es decir, la recta horizontal $q = q_0$ es la única línea horizontal con términos no cero. Dado que $d^r_{p,q} : E^r_{p,q_0} \to E^r_{p-r,q_0+r-1}$ y $E^r_{p-r,q_0+r-1} = 0$, entonces $\operatorname{Ker} d^r_{p,q} = E^r_{p,q_0}$. Por otro lado $d^r_{p+r,q_0-r+1} : E^r_{p+r,q_0-r+1} \to E^r_{p,q_0}$ y $E^r_{p+r,q_0-r+1} = 0$, entonces $\operatorname{Im} d^r_{p+r,q_0-r+1} = 0$. Así, $H_*(E^r_{p,q}) \cong E^r_{p,q}$ y luego para todo $s \geq r$, $E^s_{p,q} \cong E^{s+1}_{p,q}$. Más aún, nótese que si $E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$, entonces H_{p+q} es el único término no cero $E^r_{p,q}$.

La sucesión espectral de Grothendieck.

En su famoso artículo "Tohoku", Grothendieck define una sucesión espectral asociada a la composición de dos funtores entre categorías abelianas. Como se verá, esta poderosa herramienta permite obtener varios ejemplos de sucesiones espectrales.

Teorema 9. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías abelianas donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen suficientes inyectivos. Dados funtores exactos izquierdos $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tales que G manda inyectivos de $\mathcal{A}$ en F-aciclicos de $\mathcal{B}$, existe una sucesión espectral en el primer cuadrante convergente tal que para todo $A \in \mathcal{A}$,*

$$E^2_{p,q} = (R^p F)(R^q G)(A) \Rightarrow R^{p+q} FG(A)$$

La sucesión espectral del teorema anterior se conoce como la **sucesión espectral de Grothendieck** y una prueba de este resultado puede consultarse en [W, pp 151]. Lo que se va a hacer es usar esta para obtener algunas sucesiones espectrales.

Corolario 14. *(Sucesión espectral de Leray) Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Entonces existe una sucesión espectral tal que para toda gavilla de grupos abelianos en X, $\mathcal{F}$,*

$$H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Demostración. Se consideran los funtores "pullback" $f_* : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$ y secciones globales en Y, $\Gamma(Y, \_) : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Ab}$. Dado que las categorías $\mathbf{Sh}(X)$ y $\mathbf{Sh}(Y)$ tienen suficientes inyectivos (ver por ejemplo [Ha, pp 207]), f_* es exacto izquierdo (ver [Ha, pp 68]), preserva inyectivos (ver [W, pp 41–42]) y $\Gamma(Y, \_)$ es exacto izquierdo (ver [Ha, pp 66]), entonces del teorema anterior existe una sucesión espectral tal que para toda $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$,

$$(R^p\Gamma(Y,\_))(R^q f_*)(\mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q}\Gamma(Y,\_)f_*(\mathcal{F}).$$

Sin embargo, por definición $H^p(Y,\_) := R^p\Gamma(Y,\_)$ y así, $(R^p\Gamma(Y,\_))(R^q f_*)(\mathcal{F}) = H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F})$. Por otro lado nótese que dada $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$, $\Gamma(Y,\_)f_*\mathcal{F} = \Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(f^{-1}(Y), \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, de donde $R^{p+q}\Gamma(Y,\_)f_*(\mathcal{F}) = R^{p+q}\Gamma(X,\mathcal{F}) =: H^{p+q}(X,\mathcal{F})$. $\square$

Referencias

[Ei] Eisenbud D., *Conmutative Algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag New York Inc, 1994.
[Ha] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York Inc, 1977.
[Ma] Matsumura H., *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings Pub., 1980.
[Mu] Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton University Press, 1966.
[M] Mumford D., *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
[W] Weibel C. A., *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1997.

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Semestre 2018-2
E-mail address: ivan_es@outlook.es