



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ALGUNAS APLICACIONES DE LA SUCESIÓN ESPECTRAL
DE LERAY-SERRE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

ALBERTO ALCALÁ ALVAREZ

DIRECTOR:

MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Algunas aplicaciones de la sucesión espectral de Leray-Serre.

Alberto Alcalá Alvarez

Agradecimientos.

En primer lugar, quisiera agradecer y dedicar este trabajo a mis padres, Luz María Alvarez Argüelles y Raúl Alcalá Campos, por guiarme y apoyarme siempre incondicionalmente: mi madre ahora desde la memoria y la consciencia, y mi padre aún aquí gozando de plena salud, lo cual también agradezco y atesoro.

Por otro lado, le agradezco infinitamente al Dr. Marcelo Aguilar por toda su paciencia y su minucioso trabajo de conducción y corrección de esta tesis, así como por todo lo compartido más allá de lo matemático. Realmente ha sido una muy interesante, productiva y grata experiencia.

Por último, debo incluir aquí a los demás revisores de esta tesis, los doctores Carlos Prieto, José Luis Cisneros, Omar Antolín y Bernardo Villarreal, cuyos comentarios, correcciones y sugerencias fueron sumamente valiosas, detalladas y pertinentes. Gracias a todos ellos por su tiempo y disposición.

Introducción

La sucesión espectral de Leray-Serre es una herramienta algebraica sumamente útil para calcular grupos de homología (y cohomología) de espacios fibrados, que relaciona las homologías (cohomologías) del espacio base, la fibra y el espacio total, expresando la de este último en términos de las homologías de la base y la fibra. Fue desarrollada aproximadamente entre los 1940s y 50s, principalmente por Jean-Pierre Serre, a partir del trabajo de Jean Leray, que se centró en trabajar con el anillo de cohomología de un espacio normal ([MCH]).

Serre utilizó las sucesiones espectrales de espacios fibrados para demostrar resultados de diversos tipos, entre ellos algunos sobre las propiedades de geodésicas en variedades riemannianas completas y conexas (por ejemplo, que si la homología con coeficientes enteros es no nula en alguna dimensión, entonces hay infinitas geodésicas entre cualesquiera dos puntos); así como toda una serie de propiedades de los grupos de homotopía de las esferas, relacionándolos con sus grupos de homología mediante el teorema de Hurewicz. Serre construyó la sucesión espectral para la homología cúbica, pues es más fácil de manejar que la singular en el caso de espacios producto y espacios que localmente son un producto. En este trabajo presentamos las versiones para la homología singular.

A partir del trabajo de Serre, las sucesiones espectrales han sido ampliamente usadas para calcular la (co)homología de espacios mediante fibraciones, en particular de los espacios de Eilenberg-MacLane, la (co)homología de grupos, y los grupos de homotopía de las esferas (ver [MCG]). Cabe mencionar, además, que la sucesión espectral de Leray-Serre fue la primera de toda una colección de sucesiones espectrales, las cuales se aplican en distintos contextos: las sucesiones de Eilenberg-Moore, de Grothendieck, de Adams, etc. (ver [MCG]).

Índice general

1 Preliminares.	4
1.1 Fibraciones y parejas cofibradas.	6
1.2 Acción del grupo fundamental de la base sobre los grupos de homología de la fibra.	14
1.3 Complejos CW y espacios de Eilenberg-MacLane.	15
1.3.1 Aproximación CW.	17
1.3.2 Espacios de Eilenberg-MacLane.	22
1.3.3 Homología de complejos CW.	26
2 Sucesiones espectrales.	28
2.1 Sucesión espectral de un espacio filtrado.	28
2.2 Sucesión espectral de Leray-Serre de un espacio fibrado.	43
3 Algunas aplicaciones de la sucesión espectral de Leray-Serre de un espacio fibrado.	52
3.1 Característica de Euler y serie de Poincaré de un espacio fibrado.	68
3.2 Sucesiones de Wang, Serre y Gysin.	73
3.3 Homología de espacios de lazos.	79
3.4 Homología singular y geodésicas.	83
A Apéndice algebraico	90

1 Preliminares.

Consideremos \mathbf{Top}_2 , la categoría cuyos objetos son parejas de espacios topológicos (X, A) donde $A \subseteq X$, y cuyos morfismos son funciones continuas de parejas. Sea

$$\mathcal{R} : \mathbf{Top}_2 \rightarrow \mathbf{Top}_2$$

el functor restricción, dado por

$$\mathcal{R}(X, A) = (A, \emptyset)$$

$$\mathcal{R}[f] = [f|_A]$$

Definición 1.1. Una **teoría de homología** no reducida h_* en \mathbf{Top}_2 es una sucesión de funtores $h_n : \mathbf{Top}_2 \rightarrow \mathbf{Ab}$, $n \in \mathbb{Z}$, donde \mathbf{Ab} es la categoría de grupos abelianos, junto con transformaciones naturales $\partial_n : h_n \rightarrow h_{n-1} \circ \mathcal{R}$ ($n \in \mathbb{Z}$), que cumplen con los siguientes axiomas:

1. **Sucesión exacta larga:** para cualquier pareja (X, A) , la sucesión

$$\dots \rightarrow h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} h_n(A, \emptyset) \xrightarrow{h_n[i]} h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{h_n[j]} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X, A)} \dots$$

donde $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$, $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ son inclusiones, es exacta.

2. **Escisión:** para toda pareja (X, A) y cualquier $U \subset A$ tal que $\bar{U} \subset \mathring{A}$, la inclusión $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos $h_n[j] : h_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} h_n(X, A)$ ($n \in \mathbb{Z}$).
3. **Invariancia homotópica:** si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homotópicas, entonces $h_n(f) = h_n(g)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Escribimos f_* en vez de $h_n[f]$, y ∂_n en lugar de $\partial_n(X, A)$.

Nota 1.2. Dado un espacio topológico X y $B \subseteq A \subseteq X$, hay una sucesión exacta larga para la homología singular

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

que puede obtenerse de la sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \rightarrow S_*(A, B) \rightarrow S_*(X, B) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

o bien de las sucesiones de las parejas (A, B) , (X, B) , (X, A) , y por lo tanto es consecuencia de los axiomas para una teoría de homología.

Basados en las propiedades de la homología singular, damos las siguiente definiciones:

Definición 1.3. Una teoría de homología h_* es **ordinaria** si $h_q(pt) = 0$ para toda $q \neq 0$. En caso contrario, diremos que la teoría es **generalizada**.

Por otro lado, diremos que una teoría de homología h_* es **aditiva** si cumple que para cualquier colección de espacios $\{(X_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$, las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \coprod_{\beta \in \Lambda} X_\beta$, donde $\coprod_{\beta \in \Lambda} X_\beta$ tiene la topología de la unión ajena, inducen isomorfismos

$$\{i_{\alpha*}\} : \bigoplus_{\alpha} h_n(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} h_n\left(\coprod_{\alpha} X_\alpha\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Por último, decimos que h_* cumple el axioma de **equivalencia homotópica débil** si para toda equivalencia homotópica débil $f : X \rightarrow Y$ (esto es, una función continua que induce isomorfismos $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ para todas $n \geq 0$, $x_0 \in X$) se tienen isomorfismos

$$h_n(X) \xrightarrow[\cong]{f_*} h_n(Y)$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

El siguiente resultado puede consultarse en [Sp]:

Teorema 1.4. *La homología singular es aditiva y cumple el axioma de equivalencia homotópica débil.* \square

Para terminar esta sección, presentamos el siguiente resultado clásico, que utilizaremos recurrentemente.

Teorema 1.5. *(Teorema de Coeficientes Universales) Sea R un dominio de ideales principales, (C_*, d_*) un complejo de cadenas libre sobre R y M un R -módulo. Entonces, para cada $q \in \mathbb{Z}$, hay una sucesión exacta (natural)*

$$0 \rightarrow H_p(C_*) \otimes M \rightarrow H_p(C_* \otimes M) \rightarrow \text{Tor}_R(H_{p-1}(C_*), M) \rightarrow 0$$

que se escinde (de manera no natural), donde $\text{Tor}_R(-, -) = \text{Tor}_1^R(-, -)$. Es decir,

$$H_p(C_* \otimes M) \cong (H_p(C_*) \otimes_R M) \oplus \text{Tor}_1^R(H_{p-1}(C_*), M)$$

1.1 Fibraciones y parejas cofibradas.

Definición 1.6. Una **fibración (de Hurewicz)** es una función continua $p : E \rightarrow B$ con la propiedad de levantamiento de homotopías, es decir, para toda función continua $f : X \rightarrow E$ y cualquier homotopía $h : X \times I \rightarrow B$ que empieza en $p \circ f$, hay un levantamiento \tilde{h} de h a E que empieza en f ; en otras palabras, existe una función continua $\tilde{h} : X \times I \rightarrow E$ tal que $h = p \circ \tilde{h}$ y $\tilde{h} \circ i_0 = f$. Dado un punto $b \in B$, su **fibra** es $F_b = p^{-1}(\{b\})$. Se representa la situación con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

donde i_0 es la inclusión $X \hookrightarrow X \times \{0\} \subset X \times I$.

Nota 1.7. Existe otro concepto, el de fibración de Serre o fibración débil, que se refiere a funciones continuas con la propiedad de levantamiento de homotopías para funciones continuas cuyo dominio sea un complejo CW.

Ejemplo 1.8. La fibración del espacio de trayectorias. Para $(X, *) \in \text{Top.}$, la categoría de espacios topológicos punteados, sean $PX = \{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(0) = *\}$, el espacio de trayectorias de X que empiezan en $*$, y $p : PX \rightarrow X$ dada por $p(\gamma) = \gamma(1)$. Entonces p es una fibración con fibra $\Omega X = p^{-1}(*)$, el espacio de lazos de X . En efecto, dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & PX \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

podemos definir $\tilde{h} : Y \times I \rightarrow PX$ como sigue:

Para $y \in Y, s \in I$, la trayectoria $\tilde{h}(y, s)$ está dada por

$$\tilde{h}(y, s)(t) = \begin{cases} f(y)((1+s)t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{1+s} \\ h(y, (1+s)t - 1) & \frac{1}{1+s} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que para cualesquiera $y \in Y, s \in I$, $\tilde{h}(y, s)(0) = f(y)(0) = *$, y $\tilde{h}(y, s) : I \rightarrow X$ es continua, ya que para $t = \frac{1}{1+s}$ se tiene $f(y)((1+s)\frac{1}{1+s}) = f(y)(1) = p \circ f(y) = h(y, 0) = h(y, (1+s)\frac{1}{1+s} - 1)$.

Además, tenemos que $\tilde{h}(y, 0) = f(y) \forall y \in Y$ y $p\tilde{h}(y, s) = \tilde{h}(y, s)(1) = h(y, s)$. Es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & PX \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

Veamos ahora que $\tilde{h}(y, s)(t)$ es continua como función de (y, s, t) :

Sean $y \in Y, s \in I$. Primero, supongamos que $0 \leq t \leq \frac{1}{1+s}$, y tomemos una vecindad (abierto) U de $f(y)((1+s)t)$. Entonces, como $f(y)$ es continua, existe una vecindad $U' \subset I$

de $(1+s)t$ tal que $f(y)(U') \subset U$. Sea $K \subset U'$ un compacto que contenga una vecindad $U'' \subset I$ de $(1+s)t$. Entonces (K, U) es un abierto subbásico de la topología compactoabierto tal que $f(y) \in (K, U)$, así que, como f es continua, existe una vecindad $V_y \subset Y$ de y tal que $f(V_y) \subset (K, U)$. Ahora bien, como la función $\mu : I \times I \rightarrow I$ dada por $(s, t) \mapsto (1+s)t$ es continua también, existen vecindades $U_s, U_t \subset I$ de s y t , respectivamente, tales que $\mu(U_s \times U_t) \subset U'' \subset K$. Así, para toda terna $(y, s, t) \in V_y \times U_s \times U_t$ tal que $0 \leq t \leq \frac{1}{1+s}$, tenemos que $\tilde{h}(y, s, t) = f(y)((1+s)t) \in U$, pues $f(y) \in (K, U)$ y $\mu(U_s \times U_t) \subset K$.

Ahora, si $\frac{1}{1+s} \leq t \leq 1$ y V es una vecindad de $h(y, (1+s)t - 1)$, como h es continua, podemos encontrar vecindades $V_y \subset Y, V' \subset I$ de y y $(1+s)t - 1$, respectivamente, tales que $h(V_y \times V') \subset V$. Además, como $\nu : I \times I \rightarrow I, (s, t) \mapsto (1+s)t - 1$ es continua, existen vecindades $V_s, V_t \subset I$ de s y t , respectivamente, tales que $\nu(V_s \times V_t) \subset V'$. Así, vemos que si $(y, s, t) \in V_y \times V_s \times V_t$ y $\frac{1}{1+s} \leq t \leq 1$, entonces $\tilde{h}(y, s, t) = h(y, (1+s)t - 1) \in V$, con lo cual concluimos que $\tilde{h}(y, s, t)$ es continua.

Entonces, por la ley exponencial, como I es localmente compacto y de Hausdorff, tenemos que $\tilde{h} : Y \times I \rightarrow PX$ es continua también, y por lo tanto, $p : PX \rightarrow X, \gamma \mapsto \gamma(1)$ es una fibración.

Proposición 1.9. *El pullback de una fibración es también una fibración.*

Demostración. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & f^*E & \xrightarrow{\pi'} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde f^*E es el pullback de p a lo largo de un mapeo $f : X \rightarrow B$ y h es cualquier homotopía $Y \times I \rightarrow X$ de $\pi \circ \varphi$. Entonces $f \circ h$ es una homotopía de $p \circ \pi' \circ \varphi$ y podemos levantar $f \circ h$ a una homotopía $\tilde{h} : Y \times I \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{h} = f \circ h$ y $\tilde{h}(y, 0) = \pi' \circ \varphi$. Entonces la

función $(h, \tilde{h}) : Y \times I \rightarrow f^*E$ cumple que

$$\pi \circ (h, \tilde{h})(y, t) = \pi(h(z, t), \tilde{h}(y, t)) = h(y, t)$$

y

$$(h, \tilde{h})(y, 0) = (h(y, 0), \tilde{h}(y, 0)) = (\pi \circ \varphi(y), \pi' \circ \varphi(y)) = \varphi(y)$$

□

Definición 1.10. Una **pareja** (X, A) donde $A \subset X$ es **cofibrada** si dadas una homotopía $h : A \times I \rightarrow Y$ y una función continua $f : X \rightarrow Y$ tales que $h(a, 0) = f(a)$ para toda $a \in A$, existe una homotopía $\tilde{h} : X \times I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{h}(a, t) = h(a, t)$ y $\tilde{h}(x, 0) = f(x)$ para cualesquiera $a \in A, t \in I, x \in X$. Esta situación queda representada por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{(Id,0)} & A \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{(Id,0)} & X \times I \\
 \searrow f & & \swarrow \tilde{h} \\
 & & Y
 \end{array}$$

La siguiente caracterización de las parejas cofibradas puede encontrarse en [St]:

Proposición 1.11. Sea $A \subset X$ cerrado. La pareja (X, A) es cofibrada si y sólo si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ y una función continua $\varphi : X \rightarrow I$ tales que

$$A = \varphi^{-1}(\{0\})$$

$$H(x, 0) = x, \text{ para } x \in X$$

$$H(a, t) = a, \text{ para } a \in A \text{ y } t \in I$$

$$H(x, t) \in A, \text{ si } t \geq \varphi(x), \text{ con } x \in X \text{ y } t \in I$$

Además, si $U = \{u \in X \mid \varphi(u) < 1\} = \varphi^{-1}[0, 1)$, entonces U es abierto, $A \subset U$ y $H(x, 1) \in A$ para toda $x \in U$.

Proposición 1.12. Sean (B, A) una pareja cofibrada con A cerrado, $p : E \rightarrow B$ una fibración y $E \mid A = p^{-1}(A)$. Entonces la pareja $(E, E \mid A)$ es cofibrada.

Demostración. Dadas $H : B \times I \rightarrow B$ y $\varphi : B \rightarrow I$ como en la proposición anterior, y consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow{H \circ (p \times Id)} & B \end{array}$$

Como p es fibración, existe $\tilde{H} : E \times I \rightarrow E$ tal que hace conmutar los dos triángulos.

Definimos ahora

$$\bar{H} : E \times I \rightarrow E \quad \text{como}$$

$$\bar{H}(e, t) = \tilde{H}(e, \min\{t, \varphi p(e)\})$$

Entonces

$$(\varphi \circ p)^{-1}(\{0\}) = p^{-1}(\varphi^{-1}(\{0\})) = p^{-1}(A) = E \mid A$$

$$\bar{H}(e, 0) = \tilde{H}(e, 0) = e \quad e \in E$$

$$\bar{H}(d, t) = \tilde{H}(d, \min\{t, \varphi p(d)\}) = \tilde{H}(d, \min\{t, 0\}) = d, \quad d \in E \mid A, t \in I$$

y, si $t \geq \varphi p(e)$, $p\bar{H}(e, t) = p\tilde{H}(e, \varphi p(e)) = H(p(e), \varphi p(e)) \in A$ para toda $e \in E, t \in I$

de modo que $\bar{H}(e, t) \in A$ si $t \geq \varphi p(e)$.

con lo cual \bar{H} y $\varphi \circ p$ satisfacen la proposición anterior. Por lo tanto, $(E, E \mid A)$ es cofibrada. \square

Proposición 1.13. *Sea (X, A) cofibrada, con A cerrado. Entonces*

$$H_n(X, A) \cong H_n(X/A, *)$$

Demostración. Como en la proposición 1.11, $A = \varphi^{-1}(\{0\}) \subset U := \varphi^{-1}[0, 1)$, $H(a, t) = a$ para cualesquiera $a \in A$, $t \in I$, y si $x \in U$, entonces $H(x, 1) \in A$. Así, A es retracto fuerte por deformación de U . Veamos que $p : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ induce un isomorfismo en homología:

Primero, como A es retracto fuerte por deformación de U , tenemos que $H_n(A) \cong H_n(U)$ para toda $n \geq 0$, así que las sucesiones exactas de las parejas (X, A) y (X, U) , junto con el Lema del Cinco, nos dan un isomorfismo entre $H_n(X, A)$ y $H_n(X, U)$:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \cong \downarrow & & \parallel & & \downarrow \cong & & \cong \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(U) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longrightarrow & H_{n-1}(U) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Análogamente, tenemos un isomorfismo $H_n(X/A, *) \cong H_n(X/A, U/A)$ para cada $n \geq 0$, pues $*$ es retracto fuerte por deformación de U/A .

Además, como A es cerrado y U es abierto, por escisión tenemos un isomorfismo

$$H_n(X, U) \cong H_n(X - A, U - A)$$

También, como $\{*\}$ es cerrado en X/A (pues A es cerrado en X) y U/A es abierto en X/A , tenemos

$$H_n(X/A, U/A) \cong H_n(X/A - \{*\}, U/A - \{*\})$$

Por último, observemos que $p| : X - A \rightarrow X/A - \{*\}$ es un homeomorfismo, pues claramente es continua y biyectiva (para toda $x \in X - A$, $p(x) = \{x\}$), y si $V \subset X - A$ es un abierto, entonces $\bigcup_{v \in V} p(v) = \bigcup_{v \in V} \{v\} = V$, de modo que $p(V)$ es abierto en $X/A - \{*\}$.

Más aún, $p(U - A) = U/A - \{*\}$. Tenemos entonces un isomorfismo entre $H_n(X, A)$ y $H_n(X/A, *)$, dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, U) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X - A, U - A) \\
 \cong \downarrow p_* & & \downarrow p & & p| \downarrow \cong \\
 H_n(X/A, *) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X/A, U/A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X/A - \{*\}, U/A - \{*\})
 \end{array}$$

□

El siguiente resultado es parte del Teorema 8 del mismo artículo [St], y relaciona una fibración con una pareja cofibrada.

Proposición 1.14. (Strøm) Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y (X, A) una pareja cofibrada tal que $i : A \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica e $i(A)$ es cerrado en X . Entonces, para cualesquiera $f : X \rightarrow B$, $g : A \rightarrow E$ tales que $p \circ g = f|_A$, hay un levantamiento de $f, \tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $\tilde{f} \circ i = g$. Es decir, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & E \\
 \downarrow i \simeq & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Más aún, si \tilde{f}' es otro levantamiento de f tal que $\tilde{f}' \circ i = g$, entonces $\tilde{f} \simeq \tilde{f}'$ rel $i(A)$.

Definición 1.15. Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y $\gamma : I \rightarrow B$ una trayectoria en B , con punto inicial a y punto final b . Entonces hay una función $L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$, dada como sigue:

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 F_a & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow j & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 F_a \times I & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

donde $f(x, t) = \gamma(t)$ y \tilde{f} es un levantamiento de f , que existe pues p es una fibración.

Definimos entonces

$$L_\gamma : F_a \rightarrow F_b$$

$$x \mapsto \tilde{f}(x, 1)$$

Observación 1.16. Por la proposición anterior, al tomar distintos levantamientos \tilde{f}, \tilde{f}' en la definición de L_γ , éstos serán homotópicos relativos a $F_a \times \{0\}$, puesto que $j : F_a \hookrightarrow F_a \times I$ es una equivalencia homotópica. Sea H una homotopía que empieza en \tilde{f} y termina en \tilde{f}' . Entonces $H(_, 1, _) : F_a \times I \rightarrow E$, $(x, t) \mapsto H(x, 1, t)$ es una homotopía entre las correspondientes L_γ, L'_γ , definidas con \tilde{f} y \tilde{f}' , respectivamente, puesto que $H(x, 1, 0) = \tilde{f}(x, 1) = L_\gamma(x)$, $H(x, 1, 1) = \tilde{f}'(x, 1) = L'_\gamma$. Así, a cada trayectoria γ en B podemos asignarle una única clase de homotopía $[L_\gamma]$.

Definición 1.17. Sea X un espacio topológico. El **grupoide fundamental** de X , denotado por $\Pi(X)$, es la categoría cuyos objetos son los elementos de X , y cuyos morfismos son:

$$Mor_{\Pi(X)}(x_0, x_1) = \{ \text{clases de homotopía relativa a } \{0, 1\} \text{ de trayectorias de } x_1 \text{ a } x_0 \}$$

con la composición dada por la concatenación de clases de trayectorias: $[\sigma] \circ [\tau] = [\sigma * \tau]$.

Nótese que en la definición de los conjuntos de morfismos se invierte el orden de los elementos x_0, x_1 .

Teorema 1.18. (*[Sp], Teorema 12*) Dada una fibración $p : E \rightarrow B$, hay un funtor contravariante del grupoide fundamental de B a la categoría homotópica $H\text{-Top}$ de espacios

topológicos y clases de homotopía de funciones continuas, dado por

$$\Pi(B) \rightarrow H\text{-Top}$$

$$a \mapsto F_a \text{ para toda } a \in B$$

$$[\gamma] \mapsto [L_\gamma : F_a \rightarrow F_b] \text{ para toda } [\gamma] \in \text{Mor}_{\Pi(B)}(b, a)$$

Corolario 1.19. Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración, γ una trayectoria en B con punto inicial a y punto final b . Entonces las fibras F_a y F_b son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Sean $\bar{\gamma}$ la trayectoria γ recorrida en sentido contrario y $c_a : I \rightarrow B$ la constante a . Tenemos que $\gamma * \bar{\gamma}$ es un elemento de $\text{Mor}_{\Pi(X)}(a, a)$. Además, $\gamma * \bar{\gamma} \simeq c_a$. Entonces, por el teorema anterior, $L_{\gamma * \bar{\gamma}} \simeq L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma \simeq L_{c_a}$. Pero $L_{c_a} \simeq \text{Id}_{F_a}$, con lo cual

$$L_{\bar{\gamma}} \circ L_\gamma \simeq \text{Id}_{F_a}$$

De la misma manera, $L_\gamma \circ L_{\bar{\gamma}} \simeq \text{Id}_{F_b}$. Por lo tanto, L_γ es una equivalencia homotópica entre F_a y F_b , con inversa $L_{\bar{\gamma}}$. \square

1.2 Acción del grupo fundamental de la base sobre los grupos de homología de la fibra.

Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración y B es conectable por trayectorias, hay una acción (derecha) del grupo fundamental de B basado en un punto b , en la homología de la fibra $h_q(F)$, para cada $q \geq 0$, donde $F = p^{-1}(b)$ es la fibra sobre ese punto y h_* es cualquier teoría de homología. Esta acción está definida como sigue:

Por lo visto anteriormente, si consideramos solamente lazos basados en un $b_0 \in B$, obtenemos equivalencias homotópicas $L_\gamma : F \rightarrow F$, donde $F = p^{-1}(b_0)$. Entonces, dada una

clase de homotopía $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$, podemos asociarle el morfismo inducido en homología

$$L_{\gamma*} : h_q(F) \rightarrow h_q(F)$$

con lo cual se tiene una acción de $\pi_1(B, b_0)$ sobre $h_q(F)$, definida por

$$z \cdot [\gamma] = L_{\gamma*}(z)$$

para todo $z \in h_q(F)$, $\gamma \in \Omega(B, b_0)$. Más adelante nos centraremos en la situación en que esta acción es trivial. Es decir, para todo lazo γ , $L_{\gamma*}$ es la identidad en $h_q(F)$.

Ejemplo 1.20. Consideremos la aplicación cubriente $S^2 \xrightarrow{p} \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dada por la función antípoda, la cual tiene dos hojas. Al levantar un lazo γ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, obtenemos la mitad de un meridiano en S^2 que une un punto con su antípoda. Esto nos dice que sobre un punto dado en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ hay una fibra $F = \{x_0, -x_0\}$ y $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. La función $L_\gamma : F \rightarrow F$ está dada por $x \mapsto -x$. Claramente $H_0(F; R)$ es el único grupo de homología no trivial de F . Sea $[\alpha]$ la clase no trivial de este grupo. Entonces su acción sobre $H_0(F; R)$, que es el conjunto de combinaciones lineales de los puntos x_0 y $-x_0$, es la inducida por el cambio de hoja en la fibra, es decir, por el cambio de generador:

$$\begin{aligned} H_0(F; R) &\rightarrow H_0(F; R) \\ c_1x_0 + c_2(-x_0) &\mapsto c_1(-x_0) + c_2x_0 \end{aligned}$$

1.3 Complejos CW y espacios de Eilenberg-MacLane.

Definición 1.21. Dado $A \subset X$ y $f : A \rightarrow Y$ continua, definimos el **espacio de adjunción** obtenido de Y al adjuntarle X por medio de f como

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \sim$$

donde $a \sim f(a) \forall a \in A$. A f es le llama función de pegado.

El diagrama siguiente es un *pushout* en la categoría de espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow i_Y \\ X & \xrightarrow{j_X} & X \cup_f Y \end{array}$$

donde i_Y es inyectiva y j_X lo es si y sólo si f lo es.

Llamamos n -celda (abierto) a todo espacio homeomorfo a D^n (\mathring{D}^n).

Definición 1.22. Un **complejo CW** X es un espacio con una filtración $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$ donde X^0 es un espacio discreto, $X = \bigcup_i X^i$, y para cada n hay un homeomorfismo $X^{n-1} \cup_{\{f_\alpha\}_\alpha} \coprod_{\alpha} D_\alpha^n \xrightarrow{\cong} X^n$, $\alpha \in \Lambda$, donde $f_\alpha : S_\alpha^{n-1} \rightarrow X$, que para cada $n > 0$ producen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X^n & \cong & X^{n-1} \cup_{\{f_\alpha\}_\alpha} \coprod_{\alpha} D_\alpha^n \end{array}$$

X^n es llamado n -**esqueleto** de X y para cada α , la función $F_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$ inducida por f_α es llamada **función característica** de la α -ésima n -celda $e_\alpha^n := F_\alpha(D_\alpha^n)$.

Más adelante veremos algunos ejemplos concretos de complejos CW. El siguiente resultado ([Mi]), que nos dice cómo se comporta la homología de un complejo CW con respecto a filtraciones de subcomplejos.

Proposición 1.23. (Milnor) Sean h_* una teoría de homología aditiva, X un complejo CW y $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ subcomplejos de X tales que $X = \bigcup_{k \geq 1} X_k$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{Z}$, $h_n(X) \cong \text{colim}_k h_n(X_k)$. \square

1.3.1 Aproximación CW.

Definición 1.24. Una **aproximación CW** de X es un complejo CW Z junto con una equivalencia homotópica débil $f : Z \rightarrow X$.

La siguiente construcción de una aproximación CW aparece en [MiGeom].

Definición 1.25. (Milnor) Sea X un espacio topológico cualquiera. Definimos el conjunto simplicial $\mathcal{S}(X)$ como la familia de conjuntos $\{\mathcal{S}_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$\mathcal{S}_n(X) := \{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ continua}\}$$

el conjunto de n -simplejos singulares de X , junto con las funciones

$$\mathcal{S}_n(X) \xrightarrow{d_i} \mathcal{S}_{n-1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \sigma \circ \delta_{i\#}$$

$$\mathcal{S}_n(X) \xrightarrow{s_i} \mathcal{S}_{n+1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \sigma \circ \sigma_{i\#}$$

donde

$$\delta_{i\#}(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \in \Delta^n$$

$$\sigma_{i\#}(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}) \in \Delta^n$$

A las funciones d_i se les conoce como **operadores cara**, y a las s_i como **operadores de degeneración**.

Ahora, definimos

$$|\mathcal{S}(X)| = \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n / \sim$$

donde \amalg denota unión ajena, y la relación $(\sigma, t) \sim (\rho, s)$ está generada por las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(X)_{n-1} \times \Delta^{n-1} & \quad \mathcal{S}(X)_n \times \Delta^n \\ (d_i(\sigma), t) & \sim (\sigma, \delta_{i\#}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(X)_{n+1} \times \Delta^{n+1} & \quad \mathcal{S}(X)_n \times \Delta^n \\ (s_i(\sigma), t) & \sim (\sigma, \sigma_{i\#}(t)) \end{aligned}$$

Por último, se define

$$\begin{aligned} \rho_X : |\mathcal{S}(X)| & \rightarrow X \\ [\sigma, t] & \mapsto \sigma(t) \end{aligned}$$

En el mismo artículo ([MiGeom]) aparece el siguiente teorema.

Teorema 1.26. (Milnor) $\rho_X : |\mathcal{S}(X)| \rightarrow X$ es una aproximación CW de X .

Más aún, $|\mathcal{S}(_)|$ es funtorial:

Dada $f : X \rightarrow Y$ continua, se tienen, para cada n , funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(X) & \xrightarrow{f\#} \mathcal{S}_n(Y) \\ \sigma & \mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

las cuales nos dan una función

$$\coprod_{n \geq 0} f\# \times Id : \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n \rightarrow \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n$$

Ahora bien, al evaluar esta función en las parejas que definen las relaciones básicas, $(d_i(\sigma), t) \sim (\sigma, \delta_{i\#}(t))$ y $(s_i(\sigma), t) \sim (\sigma, \sigma_{i\#}(t))$, obtenemos las siguientes relaciones en

$$\coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n:$$

$$f_{\#} \times Id(d_i(\sigma), t) = (f \circ d_i(\sigma), t) = (d_i(f \circ \sigma), t) \sim (f \circ \sigma, \delta_{i\#}(t)) = f_{\#} \times Id(\sigma, \delta_{i\#}(t))$$

$$f_{\#} \times Id(s_i(\sigma), t) = (f \circ s_i(\sigma), t) = (s_i(f \circ \sigma), t) \sim (f \circ \sigma, \sigma_{i\#}(t)) = f_{\#} \times Id(\sigma, \sigma_{i\#}(t))$$

puesto que $d_i(f \circ \sigma) = f \circ \sigma \circ \delta_{i\#} = f \circ d_i(\sigma)$ y $s_i(f \circ \sigma) = f \circ \sigma \circ \sigma_{i\#} = f \circ s_i(\sigma)$.

Así, si $(\sigma, t) \sim (\sigma', t')$ en $\coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n$, entonces

$$f_{\#} \times Id(\sigma, t) = (f \circ \sigma, t) \sim (f \circ \sigma', t') = f_{\#} \times Id(\sigma', t')$$

en $\coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n$, con lo cual podemos definir

$$\begin{aligned} |f| : | \mathcal{S}(X) | &\rightarrow | \mathcal{S}(Y) | \\ [\sigma, t] &\mapsto [f \circ \sigma, t] \end{aligned}$$

Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(X) \times \Delta^n & \xrightarrow{\coprod_{n \geq 0} f_{\#} \times Id} & \coprod_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(Y) \times \Delta^n \\ \downarrow & & \downarrow \rho_Y \\ | \mathcal{S}(X) | & \xrightarrow{|f|} & | \mathcal{S}(Y) | \\ \rho_X \downarrow & & \downarrow \rho_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Nota 1.27. Si $A \subseteq X$, entonces $| \mathcal{S}(A) |$ es un subcomplejo de $| \mathcal{S}(X) |$ (ver: [Fe]).

Lema 1.28. *Sea $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_i \subset \dots$ una filtración de un espacio T_1 , $X = \bigcup_i X_i$. Si X tiene la topología coherente con la familia $\{X_i\}_{i \geq 1}$, entonces para todo compacto $K \subset X$*

hay una k tal que $K \subset X_k$.

Demostración. Supóngase que hay un compacto K tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $K \setminus X_i \neq \emptyset$. Sea $i_1 \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que $K \cap X_{i_1} \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos obtener una sucesión infinita de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_1 \in K \cap X_{i_1}$ y para toda n , $x_{n+1} \in (K \setminus X_{i_n}) \cap X_{i_{n+1}}$ donde i_{n+1} es el menor de los índices i tales que $(K \setminus X_{i_n}) \cap X_i \neq \emptyset$. Ahora bien, como el espacio es T_1 , los puntos son cerrados, con lo cual todo subconjunto de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cerrado, pues su intersección con cada X_i es un conjunto finito de puntos. Entonces también todo subconjunto de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es abierto, y luego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la topología discreta. Pero entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ resulta ser un subconjunto infinito y discreto en un compacto, lo cual es imposible. \square

Proposición 1.29. *Sea $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X$ una sucesión de subespacios de un espacio T_1 , X , tal que $X = \bigcup_i X_i$ y tiene la topología coherente con la familia $\{X_i\}_{i \geq 1}$. Sea h_* una teoría de homología aditiva que satisfaga el axioma de equivalencia homotópica débil. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$*

$$h_n(X) \cong \operatorname{colim}_{i \geq 1} h_n(X_i)$$

Demostración. Consideremos las resoluciones CW dadas por $\rho_{X_i} : |\mathcal{S}(X_i)| \rightarrow X_i$ y

$$\rho_X : |\mathcal{S}(X)| \rightarrow X$$

Como $X_i \subset X_{i+1}$, se tiene que, para cada $q \geq 0$, $\mathcal{S}_q(X_i) \subset \mathcal{S}_q(X_{i+1})$, de manera que las inclusiones $\mathcal{S}_q(X_i) \times \Delta^q \subset \mathcal{S}_q(X_{i+1}) \times \Delta^q$ inducen una inclusión

$$|\mathcal{S}(X_i)| \subset |\mathcal{S}(X_{i+1})|$$

Similarmente, cada inclusión $X_i \hookrightarrow X$ induce una inclusión $|\mathcal{S}(X_i)| \subset |\mathcal{S}(X)|$. Así, por la nota 1.27 tenemos una familia de subcomplejos $|\mathcal{S}(X_i)|$ de $|\mathcal{S}(X)|$ tales que $|\mathcal{S}(X_i)| \subset |\mathcal{S}(X_{i+1})|$. Tenemos entonces el siguiente diagrama (*ehd* abrevia equivalencia

homotópica débil):

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \hookrightarrow & |\mathcal{S}(X_n)| & \hookrightarrow & |\mathcal{S}(X_{n+1})| & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow |\mathcal{S}(X)| \\
& & \simeq_{ehd} \downarrow & & \simeq_{ehd} \downarrow & & \simeq_{ehd} \downarrow \\
\dots & \hookrightarrow & X_n & \hookrightarrow & X_{n+1} & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow X
\end{array}$$

Veamos ahora que $|\mathcal{S}(X)| = \bigcup_{i \geq 1} |\mathcal{S}(X_i)|$. Sea $[\sigma, t] \in |\mathcal{S}(X)|$, donde $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ y $t \in \Delta^q$. Entonces, como Δ^q es compacto, y X es T_1 y tiene la topología coherente con la familia $\{X_i\}_{i \geq 1}$, existe un X_k tal que σ se factoriza como $\Delta^q \rightarrow X_k \hookrightarrow X$, de modo que $[\sigma, t] \in |\mathcal{S}(X_k)|$. Con esto, queda demostrado que $|\mathcal{S}(X)| = \bigcup_{i \geq 1} |\mathcal{S}(X_i)|$.

Ahora, consideramos el siguiente diagrama de colímites:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & h_n(|\mathcal{S}(X_1)|) & \longrightarrow & h_n(|\mathcal{S}(X_2)|) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow h_n(|\mathcal{S}(X_i)|) \longrightarrow \dots \\
& & \cong \downarrow \rho_{X_1*} & & \cong \downarrow \rho_{X_2*} & & \cong \downarrow \rho_{X_i*} \\
\dots & \longrightarrow & h_n(X_1) & \longrightarrow & h_n(X_2) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow h_n(X_i) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos puesto que h_* satisface el axioma de homotopía débil. Por lo tanto,

$$\operatorname{colim}_i h_n(|\mathcal{S}(X_i)|) \cong \operatorname{colim}_i h_n(X_i)$$

Por la proposición 1.23 tenemos además un isomorfismo

$$\operatorname{colim}_i h_n(|\mathcal{S}(X_i)|) \cong h_n(|\mathcal{S}(X)|)$$

Entonces, como cada ρ_{X_i} y ρ_X son una equivalencias homotópicas débiles, podemos concluir que

$$\operatorname{colim}_i h_n(X_i) \cong \operatorname{colim}_i h_n(|\mathcal{S}(X_i)|) \cong h_n(|\mathcal{S}(X)|) \cong h_n(X)$$

□

1.3.2 Espacios de Eilenberg-MacLane.

Definición 1.30. Sean G un grupo y $n \in \mathbb{N}$. Un espacio topológico X es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G, n)$ si

$$\pi_k(X) \cong \begin{cases} G & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Notemos que si $n \geq 2$, entonces G debe ser un grupo abeliano.

Nota 1.31. Dados G y n que cumplan lo anterior, siempre existe un espacio de tipo $K(G, n)$, el cual es un CW único salvo equivalencia homotópica.

Ejemplo 1.32. El espacio proyectivo complejo infinito, $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$, es un espacio de tipo $K(\mathbb{Z}, 2)$:

Aplicaremos un teorema de Gleason ([Gl]), el cual nos dice que la proyección al espacio de órbitas $X \rightarrow X/G$ de una acción libre de un grupo de Lie G compacto sobre un espacio completamente regular X , es un haz fibrado. Mostraremos que hay una acción libre de S^1 en $S^\infty = \operatorname{colim}_{n \geq 1} S^{2n-1}$, el cual es completamente regular (por ser un CW, es normal (ver [Wh]) y de Hausdorff, y por lo tanto es completamente regular). Luego, usando la sucesión larga de homotopía de una fibración, veremos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ es un $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Consideremos la acción de $S^1 \subset \mathbb{C}$ en $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, definida como

$$z \cdot (z_1, \dots, z_n) = (zz_1, \dots, zz_n) \text{ para cualesquiera } z \in S^1, (z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$$

Como S^1 es localmente compacto, hay una biyección natural

$$\operatorname{Map}(S^1 \times X, Z) \leftrightarrow \operatorname{Map}(X, \operatorname{Map}(S^1, Z))$$

para cualesquiera espacios topológicos X, Z . Esto nos dice que los endofuntores de **Top** dados por $L(X) = S^1 \times X$ y $R(Z) = \operatorname{Map}(S^1, Z)$ son adjuntos (siendo L el adjunto

izquierdo y R el derecho), con lo cual L preserva colímites. Entonces se tiene

$$\operatorname{colim}_{n \geq 1} (S^1 \times S^{2n-1}) \cong S^1 \times \operatorname{colim}_{n \geq 1} S^{2n-1} =: S^1 \times S^\infty$$

Con esto podemos definir una acción $S^1 \times S^\infty \rightarrow S^\infty$, componiendo el homeomorfismo anterior con el colímite de las acciones $S^1 \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$, como muestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}_{n \geq 1} S^1 \times S^{2n-1} & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{n \geq 1} S^{2n-1} = S^\infty \\ \Downarrow & \dashrightarrow & \\ S^1 \times S^\infty & & \end{array}$$

Así, tenemos una acción de S^1 en S^∞ definida como

$$z \cdot \overline{(z_1, \dots, z_n)} = \overline{(zz_1, \dots, zz_n)} \text{ para } z \in S^1, (z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$$

Esta acción es libre, puesto que si $\overline{(zz_1, \dots, zz_n)} = \overline{(wz_1, \dots, wz_n)}$ con $z, w \in S^1$, entonces para alguna $m \geq n$ $(zz_1, \dots, zz_n, 0, \dots, 0) = (wz_1, \dots, wz_n, 0, \dots, 0) \in S^{2m-1}$. Así, es claro que $z = w$,

Con lo anterior, y el mencionado teorema de Gleason, tenemos un haz fibrado (y por lo tanto una fibración de Serre; ver, por ejemplo [AGP], teorema 4.5.6)

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & S^\infty/S^1 =: \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \end{array}$$

Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta larga:

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_n(S^\infty) \rightarrow \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \rightarrow \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

Sabemos que $\pi_k(S^\infty) \cong \operatorname{colim}_{n \geq 1} \pi_k(S^n) = \operatorname{colim}_{n > k} \pi_k(S^n)$ y este último es cero, puesto que para $n > k$, se tiene $\pi_k(S^n) = 0$. (De hecho, podemos decir algo más: S^∞ es contraíble, pues hay una equivalencia homotópica débil entre S^∞ y un punto $*$, y por el Teorema de Whitehead, ésta es una equivalencia homotópica al ser S^∞ un complejo CW.)

Así, se tiene la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) = 0 \rightarrow \pi_n(S^\infty) = 0 \rightarrow \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \rightarrow \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

con lo cual concluimos que el único grupo de homotopía no cero de $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ es $\pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}$.

Restringiendo la acción anterior a subgrupos cíclicos de S^1 , podemos construir espacios de tipo $K(\mathbb{Z}_n, 1)$, donde $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.33. Consideremos la acción de S^1 en S^∞ del ejemplo anterior y $n \geq 2$. Identificando el grupo \mathbb{Z}_n con el subgrupo de S^1 formado por las raíces n -ésimas de la unidad, $e^{\frac{2\pi i}{n}k}$, $k = 0, \dots, n-1$, tenemos una acción de \mathbb{Z}_n en S^∞ , dada por

$$e^{\frac{2\pi i}{n}k} \cdot \overline{(z_1, \dots, z_m)} = \overline{(e^{\frac{2\pi i}{n}k} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i}{n}k} z_m)}$$

Los espacios lente infinitos se definen, para cada $n \geq 1$, como el espacio de órbitas de esta acción

$$L(n) := S^\infty / \mathbb{Z}_n$$

Como \mathbb{Z}_n es, bajo la identificación mencionada arriba, un subgrupo de S^1 y la acción de S^1 en S^∞ es libre, la acción de \mathbb{Z}_n en S^∞ también es libre. Sabemos que la proyección al espacio de órbitas de una acción libre de un grupo finito en un espacio de Hausdorff es una aplicación cubriente, así que la proyección $p : S^\infty \rightarrow L(n)$ es una aplicación cubriente. Entonces, como los espacios cubrientes son fibraciones y S^∞ es contraíble, por la sucesión

exacta larga de grupos de homotopía asociada a una fibración tenemos que

$$\pi_k(L(n)) = 0 \text{ si } k = 0 \text{ o } k > 1$$

$$|\pi_1(L(n))| = n$$

Como S^∞ es simplemente conexo y localmente conectable por trayectorias (de hecho resulta ser la cubierta universal de $L(n)$), $\pi_1(L(n))$ es isomorfo a $G(p)$, el grupo de transformaciones cubrientes de p (homeomorfismos $f : S^\infty \rightarrow S^\infty$ tales que $p = p \circ f$). Para una demostración de este hecho, puede verse, por ejemplo, [GrH]. Por otro lado, si hay una acción libre $G \times X \rightarrow X$ de un grupo G en un espacio conexo X y $p : X \rightarrow X/G$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces $G \cong G(p)$, donde el isomorfismo está dado por

$$\varphi : G \rightarrow G(p)$$

$$g \mapsto \varphi_g$$

donde $\varphi_g(x) = g \cdot x$ para toda $x \in X$. Claramente esta función es inyectiva, pues la acción es libre, y luego $\varphi_g = \varphi_{g'}$ implica que $g = g'$, pues la acción es libre. Además, dados un homeomorfismo $f \in G(p)$ y $x_0 \in X$, como f manda fibras en fibras y en este caso las fibras son órbitas bajo la acción de G , x_0 y $f(x_0)$ pertenecen a la misma órbita, así que $f(x_0) = g \cdot x_0$ para alguna $g \in G$. Entonces las transformaciones cubrientes f y φ_g coinciden en el punto x_0 , con lo cual son iguales, ya que X es conexo. Esto demuestra que φ es biyectiva. Por otro lado, para toda $x \in X$,

$$\varphi_{gh}(x) = gh \cdot x = \varphi_g(h \cdot x) = \varphi_g(\varphi_h(x))$$

y luego $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Es decir, φ es un homomorfismo de grupos.

Por lo anterior, tenemos que

$$\pi_1(L(n)) \cong G(p) \cong \mathbb{Z}_n$$

Así, vemos que $\pi_1(L(n)) \cong \mathbb{Z}_n$, y $L(n)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(\mathbb{Z}_n, 1)$.

Además, puede darse a $L(n)$ una estructura de complejo CW con una sola k -celda en cada dimensión $k = 0, 1, 2, \dots$ (ver [HaAT]).

Nota 1.34. Para toda n , los espacios $L(n)$ tienen el mismo complejo de cadenas celular, dado por una copia de \mathbb{Z} en cada dimensión, y lo que los distingue son las diferenciales de este complejo de cadenas, las cuales están dadas por multiplicación por n en las dimensiones pares, y el morfismo cero en las impares.

1.3.3 Homología de complejos CW.

Consideremos un complejo CW, X . Tenemos la filtración de X dada por sus p -esqueletos

$$X^0 \subset \dots \subset X^p \subset X^{p+1} \subset \dots \subset X = \bigcup_{p \geq 0} X^p$$

Es bien sabido que para calcular la homología singular de X , en vez de calcular la homología del complejo de cadenas singulares directamente, podemos calcular la homología de otro complejo de cadenas, formado por los grupos $H_n(X^n, X^{n-1})$ junto con diferenciales d_n , definidas como sigue:

Consideremos las sucesiones exactas largas de las parejas (X^n, X^{n-1}) , (X^{n-1}, X^{n-2}) :

$$\dots H_n(X^n) \xrightarrow{j_*} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^n) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^n, X^{n-1}) \dots$$

$$\dots H_n(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-2}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \dots$$

Definimos $d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ como la composición

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

que es de hecho el morfismo de conexión en la sucesión exacta de la terna (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) .

Entonces

$$d_n \circ d_{n+1} : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^n) \xrightarrow{j_*} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

con lo cual $d_n \circ d_{n+1} = (j_* \circ \partial_n)(j_* \circ \partial_{n+1}) = j_* \circ (\partial_n j_*) \circ \partial_{n+1} = j_* \circ 0 \circ \partial_{n+1} = 0$.

Así, obtenemos el complejo de cadenas

$$\dots H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

el cual cumple:

Teorema 1.35. *Si X es un complejo CW, entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$*

$$H_n(H_*(X^*, X^{*-1}; R), d_*) \cong H_n(X; R)$$

En el ejemplo 2.6 damos una demostración de este resultado.

2 Sucesiones espectrales.

La construcción de una sucesión espectral de un espacio filtrado es en cierto modo una generalización de la construcción del complejo de cadenas de la sección 1.3.3, en la cual se obtiene un nuevo complejo de cadenas cuya homología nos da información sobre la homología (singular) del espacio en cuestión. En el caso de las sucesiones espectrales, se obtiene una sucesión de complejos de cadenas, cuya homología en cierto modo va aproximándose a $h_*(X)$, para una teoría de homología aditiva arbitraria.

2.1 Sucesión espectral de un espacio filtrado.

Sea X un espacio topológico. Consideramos en esta sección una teoría de homología aditiva arbitraria h_* y una filtración de X

$$X_0 \subset \dots \subset X_p \subset X_{p+1} \subset \dots \subset X = \bigcup_{p \geq 0} X_p$$

donde cada X_p es cerrado y todo subconjunto compacto de X está contenido en algún X_p (como por ejemplo, bajo las condiciones del lema 1.28).

A partir de los morfismos que aparecen en las sucesiones exactas de la pareja y la terna, podemos definir los siguientes grupos, para $p, q \geq 0$, $r \geq 1$:

$$Z_{p,q}^r := \text{Im}(j_* : h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))$$

$$B_{p,q}^r := \text{Im}(\Delta : h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))$$

$$Z_{p,q}^\infty := \text{Im}(j_* : h_{p+q}(X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))$$

$$B_{p,q}^\infty := \text{Im}(\Delta : h_{p+q+1}(X, X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))$$

$$F_{p,q} := \text{Im}(i_* : h_{p+q}(X_p) \rightarrow h_{p+q}(X))$$

Notemos que cada uno de los grupos $Z_{p,q}^r, B_{p,q}^r, Z_{p,q}^\infty, B_{p,q}^\infty$ es un subgrupo de $h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$, y que para referirnos a los morfismos que bajan de dimensión entre grupos de homología, hemos cambiado el símbolo ∂ por Δ . Además, $Z_{p,q}^1 = h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ (en este caso el morfismo en cuestión es la identidad) y $B_{p,q}^1 = 0$ (pues $h_n(A, A) = 0$ para toda n y cualquier espacio A). Por otro lado, a partir de las sucesiones de las ternas $(X_{p+r-1}, X_p, X_{p-1})$, (X_{p+r}, X_p, X_{p-1}) y $(X_{p+r}, X_{p+r-1}, X_p)$ tenemos, para cada $p, q \geq 0$, $r \geq 1$, los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) & \xrightarrow{j_*} & h_{p+q+1}(X_{p+r}, X_p) \\
 & \searrow \Delta & \swarrow \Delta \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

los cuales nos dicen que $B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1}$. Análogamente, considerando ahora las ternas $(X_p, X_{p-1}, X_{p-r-1})$, (X_p, X_{p-1}, X_{p-r}) obtenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 h_{p+q}(X_p, X_{p-r-1}) & \xrightarrow{\quad} & h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \\
 & \searrow j_* & \swarrow j_* \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

con los cuales vemos que $Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r$. También tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 h_{p+q}(X_p) & \xrightarrow{\quad} & h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 h_{p+q}(X_{p+r-1}, X_p) & \xrightarrow{\quad} & h_{p+q}(X, X_p) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & h_{p+q-1}(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
h_{p+q+1}(X, X_p) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & h_{p+q}(X_p) \\
& \searrow & \swarrow \\
& h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &
\end{array}$$

Respectivamente, éstos nos dan las inclusiones $Z_{p,q}^\infty \subset Z_{p,q}^r$, $B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^\infty$ y $B_{p,q}^\infty \subset Z_{p,q}^\infty$, con lo cual tenemos una cadena de contenciones:

$$0 = B_{p,q}^1 \subset \dots \subset B_{p,q}^r \subset \dots \subset B_{p,q}^\infty \subset Z_{p,q}^\infty \subset \dots \subset Z_{p,q}^r \subset \dots \subset Z_{p,q}^1 = h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned}
E_{p,q}^r &= \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r} \\
E_{p,q}^\infty &= \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty}
\end{aligned}$$

Proposición 2.1. *Hay un isomorfismo natural*

$$\frac{Z_{p,q}^r}{Z_{p,q}^{r+1}} \cong \frac{B_{p-r,q+r-1}^{r+1}}{B_{p-r,q+r-1}^r}$$

Además, hay morfismos

$$\dots \rightarrow E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d_{p+r,q-r+1}^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d_{p,q}^r} E_{p-r,q+r-1}^r \rightarrow \dots$$

tales que $d_{p,q}^r \circ d_{p+r,q-r+1}^r = 0$ y

$$H_{p,q}(E_{*,*}^r) := \frac{\text{Ker } d_{p,q}^r}{\text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r} \cong E_{p,q}^{r+1}$$

Demostración. A partir de las sucesiones exactas de las ternas

$$(X_p, X_{p-1}, X_{p-r}) \text{ y } (X_p, X_{p-r}, X_{p-r-1})$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con columna y renglón exactos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h_{p+q}(X_p, X_{p-r-1}) & & \\
 & & \downarrow k_* & \searrow j_{1*} & \\
 h_{p+q}(X_{p-1}, X_{p-r}) & \xrightarrow{i_*} & h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) & \xrightarrow{j_{2*}} & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \\
 & \searrow \Delta_1 & \downarrow \Delta_2 & & \\
 & & h_{p+q-1}(X_{p-r}, X_{p-r-1}) & &
 \end{array}$$

Consideremos $x = j_{2*}(y) \in h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$. Definimos $\varphi : Z_{p,q}^r = \text{Im } j_{2*} \rightarrow \frac{B_{p-r,q+r-1}^{r+1}}{B_{p-r,q+r-1}^r}$ como $\varphi(x) = \Delta_2(y) + B_{p-r,q+r-1}^r = \overline{\Delta_2(y)}$. Veamos primero que esta definición no depende de la preimagen de x :

Sean $y, z \in j_{2*}^{-1}(\{x\})$. Primero que nada, notemos que $\text{Im } \Delta_2 = B_{p-r,q+r-1}^{r+1}$. Además $y - z \in \text{Ker } j_{2*} = \text{Im } i_*$, con lo cual $\Delta_2(y - z) \in \text{Im } \Delta_1 = B_{p-r,q+r-1}^r$. Esto prueba que φ está bien definida.

Por otro lado, si $\overline{\Delta_2(y)} \in \frac{B_{p-r,q+r-1}^{r+1}}{B_{p-r,q+r-1}^r}$, entonces claramente $\varphi(j_{2*}(y)) = \overline{\Delta_2(y)}$, de modo que φ es suprayectiva.

Finalmente, se tiene que $\text{Ker } \varphi = \{x = j_{2*}(y) \in \text{Im } j_{2*} \mid \Delta_2(y) \in \text{Im } \Delta_1\}$ Ahora, si $x \in \text{Ker } \varphi$ entonces $y = i_*(z)$ para alguna $z \in h_{p+q}(X_{p-1}, X_{p-r})$ tal que $\varphi(x) = \Delta_2(y) = \Delta_1(z) = \Delta_2 \circ i_*(z)$. Entonces $y - i_*(z) \in \text{Ker } \Delta_2 = \text{Im } k_*$, digamos $y - i_*(z) = k_*(u)$. Así, resulta que $j_{1*}(u) = j_{2*} \circ k_*(u) = j_{2*}(y - i_*(z)) = j_{2*}(y) = x \in \text{Im } j_{1*} = Z_{p,q}^{r+1}$. Tenemos entonces que $\text{Ker } \varphi \subset Z_{p,q}^{r+1}$. Además, si $x = j_{1*}(u) \in \text{Im } j_{1*} = Z_{p,q}^{r+1}$, se verifica $\varphi(x) = \Delta_2(k_*(u)) = 0$, por lo cual $\text{Ker } \varphi = Z_{p,q}^{r+1}$ y se tiene el isomorfismo del enunciado.

Con el isomorfismo anterior y la cadena de contenciones que probamos previamente,

podemos dar un morfismo $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ mediante la composición

$$E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r} \longrightarrow \frac{Z_{p,q}^r}{Z_{p,q}^{r+1}} \xrightarrow{\cong} \frac{B_{p-r,q+r-1}^{r+1}}{B_{p-r,q+r-1}^r} \xrightarrow{\cong} \frac{Z_{p-r,q+r-1}^r}{B_{p-r,q+r-1}^r} = E_{p-r,q+r-1}^r$$

Entonces, como los últimos dos morfismos son inyectivos, se tiene que

$$\text{Ker } d_{p,q}^r = \text{Ker} \left(\frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r} \rightarrow \frac{Z_{p,q}^r}{Z_{p,q}^{r+1}} \right) = \frac{Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r}$$

Por otro lado, es claro que

$$\text{Im } d_{p,q}^r = \frac{B_{p-r,q+r-1}^{r+1}}{B_{p-r,q+r-1}^r}$$

con lo cual

$$\text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r = \frac{B_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r} \subset \text{Ker } d_{p,q}^r$$

Esto implica $d^r \circ d^r = 0$ y nos da un nuevo complejo de cadenas

$$\cdots \rightarrow E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d_{p+r,q-r+1}^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d_{p,q}^r} E_{p-r,q+r-1}^r \rightarrow \cdots$$

para el cual denotamos

$$H_{p,q}(E_{*,*}^r, d_{*,*}^r) := \frac{\text{Ker } d_{p,q}^r}{\text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r} = \frac{\frac{Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r}}{\frac{B_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^r}} \cong \frac{Z_{p,q}^{r+1}}{B_{p,q}^{r+1}} = E_{p,q}^{r+1}$$

□

Podemos relacionar la sucesión espectral de un espacio filtrado X con su homología, mediante los grupos $F_{p,q} = \text{Im} (i_* : h_{p+q}(X_p) \rightarrow h_{p+q}(X))$, como nos dice la siguiente proposición.

Proposición 2.2. Para $p \geq 0$, $n = p + q$ tenemos

$$0 = F_{-1,p+q-1} \subset F_{0,n} \dots \subset F_{p-1,q+1} \subset F_{p,q} \subset \dots \subset h_n(X) = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q}$$

y un isomorfismo

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{F_{p,q}}{F_{p-1,q+1}}$$

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q}(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{p+q}(X_p) \\ & \searrow i_{1*} & \swarrow i_{2*} \\ & & h_{p+q}(X) \end{array}$$

Entonces es claro que $Im i_{1*} = F_{p-1,q+1} \subseteq Im i_{2*} = F_{p,q}$.

Ahora, como $\bigcup_p X_p = X$, por lo visto en la subsección 1.3.1, tenemos un isomorfismo colím $\bigcup_p h_n(X_p) \cong h_n(X)$ (inducido por las inclusiones $i_p : h_n(X_p) \rightarrow h_n(X)$) cuya imagen es, por definición, $\bigcup_p F_{p,n-p} = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q}$. Así, vemos que $h_n(X) = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q}$.

Por otro lado, las sucesiones exactas de las parejas (X, X_p) y (X_p, X_{p-1}) nos dan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{p+q+1}(X, X_p) & & \\ & & \downarrow \partial & \searrow \Delta & \\ h_{p+q}(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{p+q}(X_p) & \xrightarrow{j_*} & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \\ & \searrow i_{1*} & \downarrow i_{2*} & & \\ & & h_{p+q}(X) & & \end{array}$$

con renglón y columna exactas. Para $x = j_*(y) \in Z_{p,q}^\infty := Im j_*$, definimos

$$f(x) = i_{2*}(y) + Im i_{1*} = i_{2*}(y) + F_{p-1,q+1} \in \frac{F_{p,q}}{F_{p-1,q+1}}$$

f está bien definida, pues si $x = j_*(z)$, entonces $y - z \in \text{Im } i_*$, así que $i_{2*}(y) - i_{2*}(z) \in \text{Im } i_{1*} := F_{p-1,q+1}$. Esta función es suprayectiva, pues todo elemento de $F_{p,q}$ es de la forma $i_{2*}(y) + F_{p-1,q+1}$, y se tiene $f(j_*(y)) = i_{2*}(y) + F_{p-1,q+1}$.

Por otro lado, $\text{Ker } f = \{x = j_*(y) \in \text{Im } j_* \mid i_{2*}(y) \in \text{Im } i_{1*}\} = \text{Im } \Delta := B_{p,q}^\infty$, ya que por un lado, si $i_{2*}(y) = i_{1*}(z)$, entonces $i_*(z) - y \in \text{Ker } i_{2*} = \text{Im } \partial$ y luego existe alguna $u \in H_{p+q+1}(X, X_p)$ tal que $\Delta(u) = j_*\partial(u) = j_*(i_*(z) - y) = j_*(y)$. Esto nos da la contención \subseteq . Ahora bien, claramente, todo elemento de la forma $\Delta(u)$ cumple que $f(\Delta(u)) = f(j_*\partial(u)) = i_{2*}\partial(u) + F_{p-1,q+1} = 0 + F_{p-1,q+1}$, con lo cual se da \supseteq .

Así, concluimos que

$$E_{p,q}^\infty := \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty} \cong \frac{F_{p,q}}{F_{p-1,q+1}}$$

□

Proposición 2.3. $Z_{p,q}^r = Z_{p,q}^\infty$ si $r > p$ y $B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r \geq 1} B_{p,q}^r$. Entonces hay un epimorfismo $E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r+1}$ si $r > p$ y además, $E_{p,q}^\infty = \text{colím}_{r > p} E_{p,q}^r$.

Demostración. Si $r > p$, tenemos que

$$\begin{aligned} Z_{p,q}^r &:= \text{Im}(j_* : h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1})) \\ &= \text{Im}(j_* : h_{p+q}(X_p, \emptyset) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1})) = Z_{p,q}^\infty \end{aligned}$$

Por otro lado, como $X = \bigcup_p X_p$, veamos que las inclusiones $(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{i_r} (X, X_p)$ inducen un isomorfismo

$$\text{colím}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{\cong} h_{p+q+1}(X, X_p)$$

Consideramos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow h_{p+q+1}(X_p) \rightarrow h_{p+q+1}(X_{p+r-1}) \rightarrow h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_{p+r-1}) \dots$$

Si tomamos colímites, obtenemos la sucesión exacta (ver A.1 en el apéndice)

$$\dots \rightarrow \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_p) \rightarrow \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}) \rightarrow \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \rightarrow \operatorname{colim}_r h_{p+q}(X_p) \dots$$

Ahora bien, claramente

$$\operatorname{colim}_r h_{p+q}(X_p) = h_{p+q}(X_p), \quad \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_p) = h_{p+q+1}(X_p)$$

y por la proposición 1.29, sabemos que

$$\operatorname{colim}_r h_{p+q}(X_{p+r-1}) \cong h_{p+q}(X), \quad \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}) \cong h_{p+q+1}(X)$$

Entonces, sustituyendo en la sucesión de colímites y agregando la sucesión exacta de la pareja (X, X_p) , tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & h_{p+q+1}(X_p) & \longrightarrow & h_{p+q+1}(X) & \longrightarrow & \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) & \longrightarrow & h_{p+q}(X_p) & \dots \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow \{i_{r*}\} & & \downarrow = & \\ \dots & \rightarrow & h_{p+q+1}(X_p) & \longrightarrow & h_{p+q+1}(X) & \longrightarrow & h_{p+q+1}(X, X_p) & \longrightarrow & h_{p+q}(X_p) & \dots \end{array}$$

Entonces, por el lema del cinco, podemos concluir que

$$\operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{\cong} h_{p+q+1}(X, X_p)$$

Asimismo, los operadores frontera $h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{\Delta_r} h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ de la sucesión exacta de la terna $(X_{p+r-1}, X_p, X_{p-1})$, inducen un morfismo

$$\operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \xrightarrow{\bar{\Delta}} h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \operatorname{colim}_r h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) & \xrightarrow{\cong} & h_{p+q+1}(X, X_p) \\
 \searrow \bar{\Delta} & & \swarrow \Delta \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

donde Δ es el operador frontera de la terna (X, X_p, X_{p-1}) . Entonces vemos que $B_{p,q}^\infty := \operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Im} \bar{\Delta} = \bigcup_{r \geq 1} \operatorname{Im} (h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \rightarrow h_{p+q}(X_p, X_{p-1})) := \bigcup_{r \geq 1} B_{p,q}^r$.

Como consecuencia de lo anterior, es claro que si $r > p$ hay un epimorfismo $E_{p,q}^r := \frac{Z_{p,q}^r}{B_{p,q}^r} = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^r} \twoheadrightarrow \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^{r+1}} = E_{p,q}^{r+1}$, puesto que $B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1}$.

Por último, de todo lo anterior podemos concluir que tenemos, para $s \geq r > p$, un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^r} & \twoheadrightarrow & E_{p,q}^s = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^s} \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & E_{p,q}^\infty = \frac{Z_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty} &
 \end{array}$$

Además, si hay morfismos $\varphi_r : E_{p,q}^r \rightarrow A$, A un R -módulo, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E_{p,q}^r & \twoheadrightarrow & E_{p,q}^s \\
 \searrow \varphi_r & & \swarrow \varphi_s \\
 & A &
 \end{array}$$

conmuta para cualesquiera $s \geq r > p$, entonces podemos definir, para $z \in Z_{p,q}^\infty$:

$$\begin{aligned}
 \varphi : E_{p,q}^\infty &\rightarrow A \\
 z + B_{p,q}^\infty &\mapsto \varphi_r(z + B_{p,q}^r)
 \end{aligned}$$

Este morfismo queda bien definido, pues si $z - z' \in B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r \geq 1} B_{p,q}^r$, entonces $z - z' \in B_{p,q}^{r_0}$ para alguna $r_0 \geq 1$, y luego $\varphi_{r_0}(z - z' + B_{p,q}^{r_0}) = \varphi_{r_0}(0 + B_{p,q}^{r_0}) = 0$. Además, para $s \geq r$, se

tiene $\varphi(z + B_{p,q}^\infty) = \varphi_r(z + B_{p,q}^r) = \varphi_s(z + B_{p,q}^s)$. Así, podemos concluir que

$$E_{p,q}^\infty \cong \operatorname{colim}_{r>p} E_{p,q}^r$$

□

Basados en todo lo anterior podemos definir:

Definición 2.4. La **sucesión espectral** (de tipo homológico) de un espacio filtrado X como el que aparece al inicio de esta sección, está dada por $\{E^r\}_{r \in \mathbb{N}}$, donde cada E^r es un R -módulo bigraduado $E^r = \{E_{p,q}^r\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$, junto con diferenciales $d_r = d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ tales que $E^{r+1} \cong \frac{\operatorname{Ker} d_{p,q}^r}{\operatorname{Im} d_{p+r,q-r+1}^r}$.

Decimos que la sucesión espectral es de **primer cuadrante** si sólo consideramos valores no negativos de p y q , o bien, si para toda $p, q < 0$ y cualquier r se tiene $E_{p,q}^r = 0$. En este trabajo nos enfocamos en sucesiones espectrales de esta clase (ver nota 2.8).

La sucesión espectral $\{E^r, d_r\}$ **converge** a $h_*(X)$ si para cada $n = p + q$ hay una filtración de $h_n(X)$

$$0 = F_{-1,p+q-1} \subset F_{0,n} \dots \subset F_{p-1,q+1} \subset F_{p,q} \subset \dots \subset h_n(X) = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q}$$

e isomorfismos

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{F_{p,q}}{F_{p-1,q+1}}$$

En este caso, escribimos $E_{p,q}^r \Rightarrow h_{p+q}(X)$.

Observación 2.5. Notemos que, si $E_{p,q}^r = 0$, entonces

$$E_{p,q}^{r+1} = \operatorname{ker} d_{p,q}^r / \operatorname{im} d_{p,q}^r = \operatorname{ker} 0 / \operatorname{im} 0 = 0$$

y luego, para toda $s \geq r$, $E_{p,q}^s = 0$.

Ejemplo 2.6. Sea X un complejo CW. Consideremos la sucesión espectral asociada a la filtración de los esqueletos, $X = \bigcup_{p \geq 0} X^p$, con respecto a la homología singular con coeficientes en un anillo R . Entonces

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{p\text{-celdas}} R & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

Ahora, consideramos $d_1 : H_p(X^p, X^{p-1}) \rightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ dado por la sucesión exacta larga de la terna. Así, por la observación anterior, al calcular E^2 , tenemos

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(H_*(X^*, X^{*-1})) & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

y para $r \geq 2$, $d_r = 0$. Entonces

$$E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$$

Así, esta sucesión espectral colapsa en el segundo paso, y como

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{F_{p,q}}{F_{p-1,q+1}}$$

donde $H_n(X) = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q}$, obtenemos la filtración dada por $0 = F_{0,n} \cong E_{0,n}^\infty = F_{1,n-1} = \dots \subset F_{n,0} \cong E_{n,0}^\infty = H_n(H_*(X^*, X^{*-1}))$, puesto que $E_{p,q}^\infty = 0$ si $q \geq 1$. Esto nos dice que la homología singular de los complejos CW puede calcularse como la homología del complejo de cadenas $H_*(X^*, X^{*-1})$:

$$H_n(X) = \bigcup_{p+q=n} F_{p,q} \cong H_n(H_*(X^*, X^{*-1}))$$

Esto da una demostración del teorema 1.35.

Ejemplo 2.7. (Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch-Whitehead) Sea X un complejo

CW. Consideremos la sucesión espectral asociada a la filtración dada por sus esqueletos, $X = \bigcup_{p \geq 0} X^p$, para una teoría de homología aditiva h_* . Entonces sabemos que

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &= h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \cong h_{p+q}(X^p/X^{p-1}, *) \cong h_{p+q}(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^p, *) \\ &\cong \bigoplus_{\alpha} h_{p+q}(S^p, *) \cong \bigoplus_{\alpha} h_q(S^0, *) \cong C_p(X) \otimes h_q(\{*\}) \end{aligned}$$

donde cada α corresponde a una p -celda de X , $C_p(X)$ es el grupo abeliano libre con base las p -celdas de X y $h_q(S^0, *) \cong h_q(\{*\})$, por escisión. Ahora bien, $d_{p,q}^1$ resulta ser el operador frontera de la sucesión exacta de la terna (X^p, X^{p-1}, X^{p-2}) .

$$h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\Delta} h_{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{\Delta} & h_{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ C_p(X) \otimes h_q(\{*\}) & \xrightarrow{d \otimes 1} & C_{p-1}(X) \otimes h_q(\{*\}) \end{array}$$

Entonces resulta que $E_{p,q}^2 \cong H_p(C_*(X) \otimes h_q(\{*\})) = H_p(X; h_q(\{*\}))$ y, bajo ciertas condiciones (como que X sea de dimensión finita), $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ converge a $h_*(X)$.

Nota 2.8. La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch-Whitehead puede ser o no de primer cuadrante, dependiendo de la teoría de homología a la que se aplique.

Regresemos ahora al caso de un espacio X (no necesariamente un *CW*) con una filtración $X_0 \subset \dots \subset X_p \subset \dots \subset X$, y consideremos en particular la homología singular H_* . Para cada p , tenemos la siguiente sucesión exacta larga de la pareja

$$\dots H_{n+1}(X_p) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_{p-1}) \xrightarrow{i_*} H_n(X_p) \xrightarrow{j_*} H_n(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{\partial_n} \dots$$

en donde i es el morfismo inducido por las inclusiones $X_{p-1} \hookrightarrow X_p$, j por los cocientes $S_n(X_p) \twoheadrightarrow \frac{S_n(X_p)}{S_n(X_{p-1})}$ y k es inducido por el operador frontera $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$.

Podemos también acomodar estas sucesiones como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X_p) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) & \longrightarrow & H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X_{p-1}, X_{p-2}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{p+1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{p+1}, X_p) & \longrightarrow & H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{p+2}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{p+2}, X_{p+1}) & \longrightarrow & H_n(X_{p+1}) \longrightarrow H_n(X_{p+1}, X_p) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array}$$

donde los “escalones” formados por dos flechas a la derecha y una hacia abajo son la sucesión exacta larga de la pareja.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow i_* & & & & \\
 H_{n+1}(X_p) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(X_{p-1}) & & \\
 & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \\
 & & H_n(X_p) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X_p, X_{p-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X_{p-1}) \\
 & & & & & & \downarrow i_* \\
 & & & & & & H_{n-1}(X_p) \xrightarrow{j_*}
 \end{array}$$

En general, no podemos decir nada sobre la exactitud de las sucesiones horizontales y verticales, pero después haremos algunas suposiciones sobre ellas, que se cumplen para clases muy importantes de espacios, y que nos permitirán manejar las sucesiones espectrales.

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $n = p + q$. Consideremos

$$E_{p,q}^1 = H_n(X_p, X_{p-1})$$

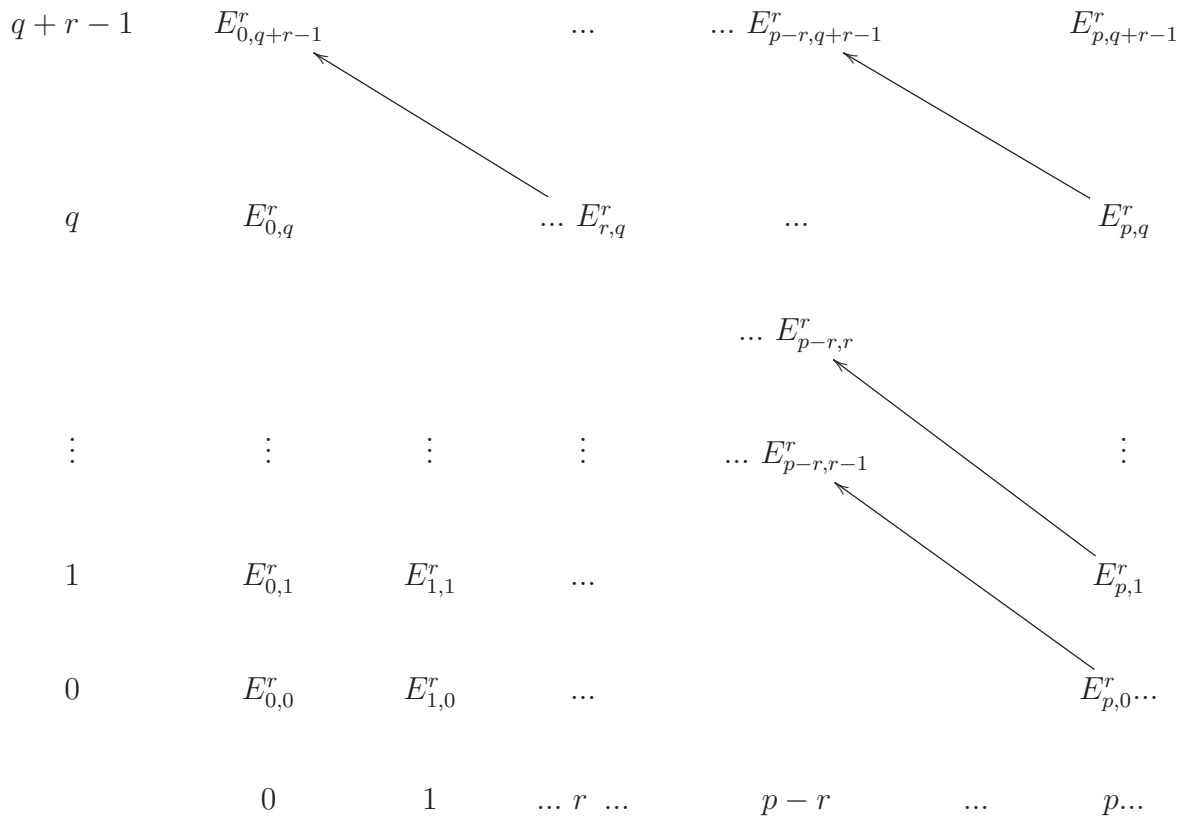
$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\text{Ker } d_{p,q}^r}{\text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r}$$

donde las diferenciales

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$$

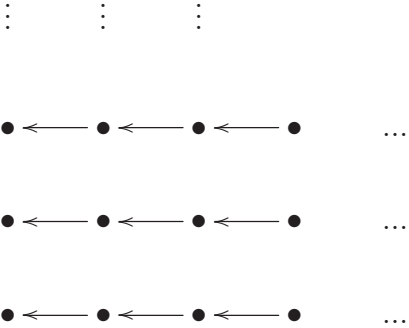
y esperamos sean calculables explícitamente, o bien podamos decir algo sobre ellas por la estructura algebraica de E^1, E^2, \dots .

Acomodamos estos términos en diagramas con coordenadas p, q :

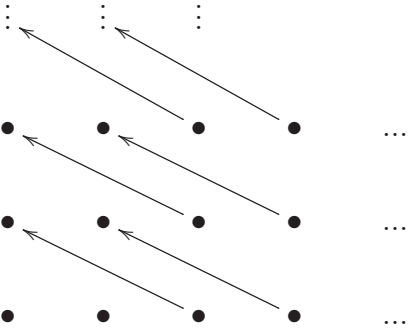


Esto es, las diferenciales en el diagrama van r columnas a la izquierda y $r - 1$ hacia arriba.

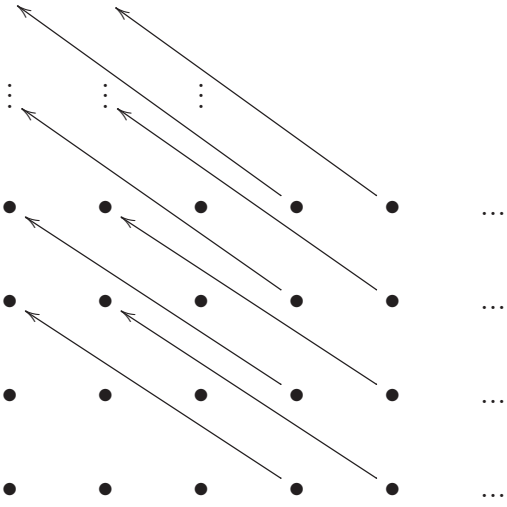
Si ya sabemos de qué término E^r se trata, simplificamos aún más los diagramas, omitimos los nombres de los $E_{p,q}^r$ y omitimos las diferenciales cero. Por ejemplo, E^1 tiene el siguiente diagrama:



Para E^2 escribimos



y para E^3



Observación 2.9. Dadas p, q fijas, para r suficientemente grande se tiene $d_{p,q}^r = d_{p+r,q-r+1}^r = 0$, pues si $r > p$ entonces $E_{p-r,q}^r = 0$ para toda q , y si $r > q + 1$ entonces $E_{p,q-r+1}^r = 0$ para toda p , ya que estamos considerando sólo sucesiones espectrales de primer cuadrante. Entonces, para r suficientemente grande $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1} = \dots = E_{p,q}^\infty$.

2.2 Sucesión espectral de Leray-Serre de un espacio fibrado.

A lo largo de esta sección, consideramos una fibración $F \hookrightarrow X \rightarrow B$.

Teorema 2.10. (*Leray-Serre*) Sea $F \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B$ una fibración donde B es conectable por trayectorias, F es conectable por trayectorias, y $\pi_1(B)$ actúa trivialmente sobre $H_*(F; G)$, donde G es un grupo abeliano. Entonces hay una sucesión espectral $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ tal que

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; G))$$

y converge a $H_*(X)$.

Demostración. Supongamos primero que B es un complejo CW. Denotamos por B^p al p -esqueleto de B , y por X_p a la preimagen de B^p bajo π . Consideremos la sucesión espectral $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ asociada a la filtración de X dada por $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_p \subset \dots$, y a la homología singular con coeficientes en un grupo G . Recordemos que, por definición, $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G)$, $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ y, por 2.1,

$$E_{p,q}^{r+1} \cong \frac{\text{Ker}(d_{p,q}^r)}{\text{Im}(d_{p+r,q-r+1}^r)}$$

Además, por la proposición 2.2, para $n \geq p \geq 0$ se tiene

$$E_{p,n-p}^\infty \cong \frac{F_{p,n-p}}{F_{p-1,n-p+1}}$$

para una filtración $0 \subset F_{0,n} \subset \dots \subset F_{n,0} = H_n(X; G) = \bigcup_{p \geq 0} F_{p,n-p}$.

Daremos para cada $q \geq 0$, un isomorfismo de cadenas Ψ entre el complejo de cadenas $\{E_{*,q}^1, d_{*,q}^1\}$ y el complejo de cadenas celulares de B con coeficientes en $H_q(F; G)$, $\{H_*(B^*, B^{*-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G), \partial_* \otimes Id\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) & \xrightarrow{d_1} & E_{p-1,q}^1 = H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}; G) & \longrightarrow & \dots \\ & & \Psi \downarrow \cong & & \Psi \downarrow \cong & & \\ \dots & \longrightarrow & H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G) & \xrightarrow{\partial_p \otimes Id} & H_{p-1}(B^{p-1}, B^{p-2}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Así, al tomar homologías tendremos que $E_{p,q}^2 \cong H_p(E_{*,q}^1) \cong H_p(B; H_q(F; G))$.

Sea $\Phi_\alpha : D_\alpha^p \rightarrow B^p$ una función característica para la p -celda e_α^p de B . Consideremos $\tilde{D}_\alpha^p := \Phi_\alpha^*(X_p)$, el pullback de la fibración $\pi|_{X_p}$ con respecto a Φ_α . Sea, además, $\tilde{S}_\alpha^{p-1} = \mu_\alpha^{-1}(S_\alpha^{p-1})$, donde μ_α es la función inducida en el pullback y $S_\alpha^{p-1} = \partial D_\alpha^p$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S}_\alpha^{p-1} & \hookrightarrow & \tilde{D}_\alpha^p & \xrightarrow{\nu_\alpha} & X_p \\ \mu_\alpha \downarrow & & \mu_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi| \\ S_\alpha^{p-1} & \hookrightarrow & D_\alpha^p & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & B^p \end{array}$$

en el cual ν_α y μ_α son proyecciones. Más aún, cada una de estas proyecciones ν_α es de hecho una función de parejas $\nu_\alpha : (\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) \rightarrow (X_p, X_{p-1})$, puesto que si tomamos $a \in S_\alpha^{p-1}$, entonces $\Phi_\alpha(a) \in B^{p-1}$, de modo que para toda pareja $(a, x) \in \tilde{D}_\alpha^p$, $\pi(x) = \Phi_\alpha(a) \in B^{p-1}$, con lo cual $\nu_\alpha(a, x) = x \in X_{p-1}$.

Hay entonces una función continua

$$\tilde{\Phi} : \coprod_{\alpha} (\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) \rightarrow (X_p, X_{p-1})$$

que para cada α está dada por ν_α .

Ahora bien, sabemos que B^{p-1} es un retracto fuerte por deformación de una vecindad U en B^p , así que (B^p, B^{p-1}) es una pareja cofibrada, y por la proposición 1.12, la pareja

(X_p, X_{p-1}) es cofibrada también. Entonces, por la proposición 1.13 tenemos, para toda $n \geq 0$:

$$H_n(X_p, X_{p-1}; G) \cong H_n(X_p/X_{p-1}, *; G)$$

Pero $X_p/X_{p-1} = \bigvee_{\alpha} \tilde{D}_{\alpha}^p / \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}$, así que

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \cong \bigoplus_{\alpha} H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}; G)$$

Así, vemos que $\tilde{\Phi}$ induce isomorfismos en homología.

Por otro lado, $H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}$, donde cada copia de \mathbb{Z} corresponde a una p -celda de B . Entonces $H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G) \cong \bigoplus_{\alpha} H_q(F; G)$.

Ahora construiremos isomorfismos $\varepsilon_{\alpha}^p : H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}; G) \rightarrow H_q(F; G)$, con lo que obtendremos un isomorfismo entre $H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G)$ y $H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G)$. Para aligerar la notación, llamemos por ahora $\tilde{D}^p = \tilde{D}_{\alpha}^p$. Como el pullback de una fibración es una fibración (proposición 1.9), $\tilde{D}^p := \Phi_{\alpha}^*(X_p) \rightarrow D^p$ es una fibración. Consideremos los hemisferios S_{\pm}^{p-1} en que se divide S^{p-1} , los cuales se intersectan en un ecuador S^{p-2} . Poniendo tildes a los correspondientes subespacios de \tilde{D}^p que cubren a estos subespacios de D^p , tenemos el siguiente diagrama, en el cual omitimos la mención de los coeficientes en G , así como índices para los morfismos:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{p+q}(\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}) & \xrightarrow{\varepsilon} & H_{p+q-1}(\tilde{S}_+^{p-1}, \tilde{S}^{p-2}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_{q+1}(\tilde{S}_+^1, \tilde{S}^0) \xrightarrow{\varepsilon} H_q(\tilde{S}_+^0) \\
\partial \downarrow \cong & \swarrow \cong & \partial \downarrow \cong & \swarrow \cong & & & \partial \downarrow \cong \\
H_{p+q-1}(\tilde{S}^{p-1}, \tilde{S}_-^{p-1}) & & H_{p+q-2}(\tilde{S}^{p-2}, \tilde{S}_-^{p-2}) & & \dots & & H_q(\tilde{S}^0, \tilde{S}_-^0)
\end{array}$$

El primer isomorfismo ∂ viene de la sucesión exacta de la terna $(\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}, \tilde{S}_-^{p-1})$, pues \tilde{S}_-^{p-1} es retracto por deformación de \tilde{D}^p (por las proposiciones 1.11 y 1.12, usando que S_-^{p-1}

es retracto fuerte por deformación de D^p y que $\tilde{D}^p \rightarrow D^p$ es una fibración) y por tanto $H_*(\tilde{D}^p, \tilde{S}_-^{p-1}) = 0$, de modo que se tiene la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n(\tilde{D}^p, \tilde{S}_-^{p-1}) = 0 \rightarrow H_n(\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial} H_{n-1}(\tilde{S}^{p-1}, \tilde{S}_-^{p-1}) \rightarrow H_{n-1}(\tilde{D}^p, \tilde{S}_-^{p-1}) = 0 \rightarrow \dots$$

Lo mismo aplica para los demás isomorfismos ∂ , considerando las ternas $(\tilde{S}_+^{p-1}, \tilde{S}^{p-2}, \tilde{S}_-^{p-2})$, tomando en cuenta que \tilde{S}_+^{p-1} es retracto fuerte por deformación de \tilde{D}^{p-1} .

Por otro lado, los isomorfismos i_* vienen dados por las escisiones $(\tilde{S}^{p-1} \setminus \tilde{S}_-^{p-1}, \tilde{S}_-^{p-1} \setminus \tilde{S}_-^{p-1}) = (\tilde{S}_+^{p-1}, \tilde{S}^{p-2})$.

Así, hemos obtenido isomorfismos (a los que ahora sí ponemos superíndices)

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &: H_{p+q}(\tilde{D}^p, \tilde{S}^{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(\tilde{S}_+^{p-1}, \tilde{S}^{p-2}) \\ \varepsilon^{p-1} &: H_{p+q-1}(\tilde{S}_+^{p-1}, \tilde{S}^{p-2}) \rightarrow H_{p+q-2}(\tilde{S}_+^{p-2}, \tilde{S}^{p-3}) \\ &\vdots \\ \varepsilon^1 &: H_{q+1}(\tilde{S}_+^1, \tilde{S}^0) \rightarrow H_q(\tilde{S}_+^0) \end{aligned}$$

Para terminar de construir los isomorfismos ε_α^p , consideramos lo siguiente:

Sea $F_\alpha = \Phi_\alpha(D_\alpha^0)$. Entonces como B es conectable por trayectorias, toda F_α es homotópicamente equivalente a una fibra fija F , así que hay isomorfismos

$$H_q(\tilde{D}_\alpha^0; G) \cong_{\Phi_{\alpha*}} H_q(F_\alpha; G) \cong H_q(F; G)$$

donde el segundo es único, pues por la hipótesis de la acción trivial de $\pi_1(B)$ en $H_*(F; G)$, para cada trayectoria γ en B , los automorfismos $L_{\gamma*} : H_q(F_{\gamma(0)}; G) \rightarrow H_q(F_{\gamma(1)}; G)$ dependen únicamente de sus puntos inicial y final.

Llamamos entonces $\varepsilon_\alpha^p : H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}; G) \rightarrow H_q(F; G)$ a la composición $\varepsilon^1 \circ \dots \circ \varepsilon^p$ seguida de estos isomorfismos, donde hemos identificado \tilde{S}_+^0 con \tilde{D}^0 . Obtenemos así el

siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{\alpha} H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}; G) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}_*} & H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) = E_{p,q}^1 \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\bigoplus_{\alpha} H_q(F; G) & \xrightarrow{\cong} & H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G)
\end{array}$$

Así, vemos que se puede identificar el término $E_{p,q}^1$ con $H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; G)$. Ahora mostramos cómo es posible identificar la diferencial $d_1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$ con el morfismo $\partial_p \otimes 1_{H_q(F)}$, donde ∂_p es la diferencial $H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{p-1}(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z})$ del complejo celular del espacio base B . Esta última está dada por $\partial_p(e_{\alpha}^p) = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} e_{\beta}^{p-1}$, donde $g_{\alpha\beta}$ es el grado de la composición $S_{\alpha}^{p-1} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} X^{p-1} \rightarrow S_{\beta}^{p-1}$ de la función de pegado φ_{α} de e_{α}^p con el cociente que colapsa $X^{p-1} \setminus e_{\beta}^{p-1}$ a un punto.

Según el diagrama anterior, a cada índice α le corresponde un sumando directo de la forma $H_q(F; G)$, el cual podemos identificar con $H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1})$. En cada uno de ellos, la diferencial d_1 corresponde a la composición

$$H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}) \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\alpha*}} H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

del isomorfismo $\tilde{\Phi}_{\alpha}$ restringido al α -ésimo sumando, con los morfismos que aparecen en las sucesiones largas de las parejas (X_p, X_{p-1}) , (X_{p-1}, X_{p-2}) (ver por ejemplo, el diagrama al inicio del capítulo 2). Podemos reemplazar esta composición usando el siguiente diagrama conmutativo, en el que omitimos algunos subíndices

$$\begin{array}{ccc}
H_{p+q}(\tilde{D}_{\alpha}^p, \tilde{S}_{\alpha}^{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p+q-1}(\tilde{S}_{\alpha}^{p-1}) \\
\downarrow \tilde{\Phi}_{\alpha*} & & \downarrow \tilde{\varphi}_{\alpha*} \\
H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p+q-1}(X_{p-1})
\end{array}$$

para obtener la siguiente descripción de d_1 :

$$H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(\tilde{S}_\alpha^{p-1}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\alpha*}} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

Como $X \rightarrow B$ es una fibración, podemos reemplazar φ_α por alguna función homotópica a ella, y $\tilde{\varphi}_{\alpha*}$ por la función inducida por su correspondiente levantamiento (homotópico a $\tilde{\varphi}_\alpha$). Entonces, podemos asumir que bajo φ_α , un hemisferio D_α^{p-1} de S_α^{p-1} va a dar a X_{p-2} , con lo que podemos escribir

$$\tilde{\varphi}_{\alpha*} : H_{p+q-1}(\tilde{S}_\alpha^{p-1}, \tilde{D}_\alpha^{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

Más aún, por escisión podemos reemplazar este último morfismo por

$$\tilde{\varphi}_{\alpha*} : H_{p+q-1}(\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{S}_\alpha^{p-2}) \rightarrow H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

donde ahora D_α^{p-1} denota al otro hemisferio de S_α^{p-1} , y S_α^{p-2} a su frontera. Así, d_1 es

$$H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{S}_\alpha^{p-2}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\alpha*}} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

Más aún, podemos volver a deformar φ_α mediante una homotopía de modo que mande los interiores de alguna colección finita de discos disjuntos D_i^{p-1} contenidos en D_α^{p-1} sobre la celda e_β^{p-1} , y el resto de D_α^{p-1} a $B_{p-1} \setminus e_\beta^{p-1}$. Con esto obtenemos otro homomorfismo equivalente e isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} H_{p+q-1}(\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{D}_\alpha^{p-1} \setminus \text{int}(\cup_i \tilde{D}_i^{p-1})) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\alpha*}} & H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-1} \setminus \tilde{e}_\beta^{p-1}) & \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \bigoplus_i H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2}) \longrightarrow & H_{p+q-1}(\tilde{D}_\beta^{p-1}, \tilde{S}_\beta^{p-2}) & \end{array}$$

Ahora, mediante los isomorfismos Ψ que definimos antes, podemos identificar los grupos

$H_{p+q-1}(\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{S}_\alpha^{p-2})$ y $H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2})$ con $H_q(F)$, así que en total se tiene

$$H_{p+q-1}(\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{S}_\alpha^{p-2}) \cong H_q(F) \rightarrow \bigoplus_i H_q(F) \cong \bigoplus_i H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2})$$

$$x \mapsto (x, \dots, x)$$

Así, resta ver que el morfismo $\bigoplus H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2}) \rightarrow H_{p+q-1}(\tilde{D}_\beta^{p-1}, \tilde{S}_\beta^{p-2})$ del diagrama anterior es $\pm Id$ en cada sumando $H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2})$, según el grado de φ_α en D_i sea ± 1 .

Consideramos entonces las posibilidades para una función continua $\tilde{\varphi} : (\tilde{D}_\alpha^{p-1}, \tilde{S}_\alpha^{p-2}) \rightarrow (\tilde{D}_\beta^{p-1}, \tilde{S}_\beta^{p-2})$ que es levantamiento de un homeomorfismo $\varphi : (D_\alpha^{p-1}, S_\alpha^{p-2}) \rightarrow (D_\beta^{p-1}, S_\beta^{p-2})$. Si φ tiene grado 1, entonces es homotópico a la identidad $(D_\alpha^{p-1}, S_\alpha^{p-2}) \rightarrow (D_\beta^{p-1}, S_\beta^{p-2})$, y podemos levantar esta homotopía a una homotopía de $\tilde{\varphi}$. Entonces, como ε^{p-1} es natural, el morfismo $\bigoplus H_{p+q-1}(\tilde{D}_i^{p-1}, \tilde{S}_i^{p-2}) \rightarrow H_{p+q-1}(\tilde{D}_\beta^{p-1}, \tilde{S}_\beta^{p-2})$ es la identidad.

Si, por otro lado, el grado de φ es -1 , podemos asumir que se trata de una reflexión, en particular la reflexión que manda D_+^0 en D_-^0 y viceversa, que deja fijos a los demás D_\pm^i . Entonces podemos restringirnos al caso $p-1=1$ en el cual φ es una reflexión de D^1 . En este caso, podemos reparametrizar D^1 mediante la reflexión que intercambia sus extremos. Este intercambio de D_+^0 con D_-^0 , en la definición de ε tiene el efecto de cambiar el signo, con lo cual se tiene el resultado.

Para el caso en que B no es un complejo CW, comenzamos con una aproximación CW de B , $f : B' \rightarrow B$, y consideramos la fibración pullback $X' \rightarrow B'$ de la fibración dada $X \rightarrow B$, así como el pullback de la acción de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F; G)$, que es la acción de $\pi_1(B')$ sobre $H_*(F; G)$. Esta última es trivial, por ser pullback de una acción trivial por hipótesis. Las sucesiones exactas largas de los grupos de homotopía de estas dos fibraciones están conectadas con isomorfismos entre los grupos de homotopía de las fibras y de las bases, puesto que $f : B' \rightarrow B$ es una aproximación CW de B y la fibra de $X' \rightarrow B'$ sobre un punto $y_0 \in B'$ es $F' = F_{f(y_0)} \times \{y_0\}$. Entonces, por el Lema del Cinco, se tienen también isomorfismos entre los grupos de homotopía de los espacios totales:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \rightarrow & \pi_n(F') & \longrightarrow & \pi_n(X') & \longrightarrow & \pi_n(B') & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F') & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X') & \longrightarrow & \pi_{n-1}(B') & \rightarrow & \cdots \\
& & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\
\cdots & \rightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(B) & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

Cabe aclarar que también se tienen biyecciones entre $\pi_0(F')$ y $\pi_0(F)$, entre $\pi_0(X')$ y $\pi_0(X)$, y entre $\pi_0(B')$ y $\pi_0(B)$ pues estamos asumiendo que tanto las bases como las fibras son conectables por trayectorias, y por lo tanto todos estos conjuntos tienen sólo un elemento.

Así, por el axioma de equivalencia homotópica débil, los morfismos inducidos en homología son también isomorfismos. Es decir, se tiene, para cada $n \geq 0$

$$H_n(B') \cong H_n(B)$$

$$H_n(X') \cong H_n(X)$$

$$H_n(F') \cong H_n(F)$$

Por lo tanto, la sucesión espectral para la fibración $X' \rightarrow B'$ nos da la sucesión espectral buscada para la fibración $X \rightarrow B$. \square

Para los casos más generales en los que se trata de una teoría de homología aditiva arbitraria, o bien cuando la acción del grupo fundamental de la base en la homología de la fibra no es trivial, tenemos, respectivamente, los siguientes enunciados (ver el capítulo 5 de [MCG]):

Teorema 2.11. *Sean G un grupo abeliano y h una teoría de homología aditiva que cumple el axioma de equivalencia homotópica débil. Sea $F \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B$ una fibración donde B es conectable por trayectorias, F es conectable por trayectorias, y $\pi_1(B)$ actúa trivialmente*

sobre $h_*(F; G)$. Entonces hay una sucesión espectral $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ tal que

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; h_q(F; G))$$

y converge a $h_*(X)$.

Teorema 2.12. Sean G un grupo abeliano y h una teoría de homología aditiva que cumple el axioma de equivalencia homotópica débil. Sea $F \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B$ una fibración donde B es conectable por trayectorias y F es conectable por trayectorias. Entonces hay una sucesión espectral $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ tal que

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G))$$

donde $\mathcal{H}_q(F; G)$ es un sistema local de coeficientes en la homología de F , y $\{E_{p,q}^r, d_{p,q}^r\}$ converge a $h_*(X)$.

3 Algunas aplicaciones de la sucesión espectral de Leray-Serre de un espacio fibrado.

Presentamos primero algunos ejemplos de cómo se utiliza comúnmente la sucesión espectral de Leray-Serre en los cálculos de homología.

Ejemplo 3.1. Recordando que $H_i(S^k; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $i = 0, k$ y cero si $i \neq 0, k$, podemos calcular la homología de un haz fibrado E sobre la n -esfera, $n \geq 2$, con fibra la m -esfera, $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} S^m & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow p \\ & & S^n \end{array}$$

Por el teorema 2.10,

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^n; H_q(S^m; \mathbb{Z})) = \begin{cases} H_p(S^n; \mathbb{Z}) & \text{si } q = 0, m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (p, q) = (0, 0), (0, m), (n, 0), (n, m) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos el siguiente diagrama de E^2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 m & \mathbb{Z} & 0 & 0 & & & \mathbb{Z} & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \cdots & & \mathbb{Z} & 0 \\
 & & 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots
 \end{array}$$

Entonces, claramente la única posible diferencial no trivial a partir de E^2 es $d_{n,0}^r : E_{n,0}^r \rightarrow E_{0,m}^r$, en caso de que $(0, m) = (n - r, r - 1)$, es decir, $r = n$ y $m = n - 1$. Si esto **no** ocurre, entonces todos los morfismos d^r son cero, y se tiene $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$. Entonces, por el teorema 2.10,

$$H_*(E; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{p+q=*} E_{p,q}^\infty = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \neq n \text{ y } * = 0, m, n, m + n \\ \mathbb{Z} & \text{si } m = n \text{ y } * = 0, 2n \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } m = n \text{ y } * = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso en que $d_{n,0}^n$ sea distinto de cero, entonces $E^{n+1} \cong E^\infty$ y

$$E_{p,q}^\infty = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (p, q) = (0, 0), (n, m) \\ \text{Ker } d_{n,0}^n & (p, q) = (n, 0) \\ \mathbb{Z}/\text{Im } d_{n,0}^n & (p, q) = (0, m) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como caso particular de lo anterior, consideremos fibraciones cuyo espacio total, base y fibra son esferas.

Proposición 3.2. *Si hay una fibración*

$$\begin{array}{ccc} S^k & \hookrightarrow & S^n \\ & & \downarrow \\ & & S^m \end{array}$$

con $m \geq 2$, entonces $k = m - 1$ y $n = 2m - 1$.

Demostración. Por lo anterior, sabemos que

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^m; H_q(S^k; \mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (p, q) = (0, 0), (0, k), (m, 0), (m, k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y que la única posible diferencial no trivial es $d_{m,0}^r : E_{m,0}^r \rightarrow E_{0,k}^r$ donde los índices satisfagan

$m - r = 0$ y $k = r - 1$. Es decir, $m = r$ y $k = m - 1$.

$$\begin{array}{cccccc}
 k & \mathbb{Z} & 0 & \cdots & \mathbb{Z} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 0 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots & \mathbb{Z} & \\
 & 0 & 1 & \cdots & m &
 \end{array}$$

Entonces E^∞ es de la forma

$$\begin{array}{cccccc}
 k & ? & 0 & \cdots & \mathbb{Z} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 0 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots & ? & \\
 & 0 & 1 & \cdots & m &
 \end{array}$$

Como $E_{p,q}^2 \Rightarrow H_{p+q}(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p+q=0, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, debe ocurrir que $m+k=n$ y $E_{m,0}^\infty = 0 = E_{0,k}^\infty$, así que en efecto $d_{m,0}^m$ debe ser no cero, y de hecho debe ser un isomorfismo.

Así, vemos que $k = m - 1$ y $n = 2m - 1$. □

Ahora aplicamos la sucesión de Leray-Serre para calcular la homología de un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Ejemplo 3.3. Consideramos la fibración $F \hookrightarrow P \rightarrow B$ donde (B, b_0) es un $K(\mathbb{Z}, 2)$ y P el espacio de trayectorias en B tales que $\sigma(0) = b_0$. Sabemos que P es contraíble, y que la fibra F es el espacio de lazos en b_0 , $\Omega(B, b_0)$. Como B es simplemente conexo, puede aplicarse el teorema 2.10 para tener una sucesión espectral de homología con coeficientes enteros.

Por el teorema 2.10, $E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z}))$. Como F es un espacio de tipo $K(\mathbb{Z}, 1)$, como \mathbb{S}^1 , tenemos que

$$H_i(F; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

así que

$$E_{p,q}^2 \cong \begin{cases} H_p(B; \mathbb{Z}) & q = 0, 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases}$$

Sabemos que $H_0(B) \cong \mathbb{Z}$, así que podemos escribir E^2 como sigue:

$$\begin{array}{cccccccc}
 q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 \uparrow & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 2 & 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \\
 & & & & & & & \\
 1 & \mathbb{Z} & \leftarrow H_1(B) & \leftarrow H_2(B) & \leftarrow H_3(B) & \leftarrow H_4(B) & \leftarrow H_5(B) & \dots \\
 & & & & & & & \\
 0 & \mathbb{Z} & \leftarrow H_1(B) & \leftarrow H_2(B) & \leftarrow H_3(B) & \leftarrow H_4(B) & \leftarrow H_5(B) & \dots \\
 & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & p
 \end{array}$$

Notemos que las diferenciales $d_r, r \geq 3$, son todas cero, pues suben al menos dos renglones. Así, a partir de $r = 3$, las cosas no cambian al tomar la homología $E_{p,q}^{r+1} = Ker d_r / Im d_r$. Esto nos dice que $E^3 = E^\infty$. Sabemos que los grupos $E_{p,q}^r$ son cero para $q \geq 2, r \geq 2$. Por otro lado, como P es contraíble, el único grupo de homología no trivial que aparece en la página E^∞ , debe ser \mathbb{Z} , en la posición $p = q = 0$.

Ahora bien, para que E^3 tenga esta forma, notemos que las diferenciales de E^2 van del primer renglón al segundo deben ser isomorfismos:

$$\begin{aligned} 0 = E_{p,0}^3 &= Ker(E_{p,0}^r \xrightarrow{d_2} E_{p-2,1}^r) / Im(0 \rightarrow H_{p,0}) \implies Ker(d_2) = Im(0) = 0 \\ 0 = E_{p,1}^3 &= Ker(E_{p,1}^r \rightarrow 0) / Im(E_{p+2,0}^r \xrightarrow{d_2} E_{p,1}^r) \implies E_{p,1}^r = Ker(0) = Im(d_2) \end{aligned}$$

Así, resulta que

$$H_n(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) = H_n(B; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases}$$

En concreto, este ejemplo puede aplicarse al espacio proyectivo complejo infinito, $\mathbb{C}P^\infty$, que es un espacio de tipo $K(\mathbb{Z}, 2)$, como mostramos en el ejemplo 1.32 .

Para los siguientes resultados de esta sección, que provienen de [Se], consideramos fibrationes $X \xrightarrow{p} B$ con fibra F , donde B y F son conectables por trayectorias, y tales que la acción del grupo fundamental de la base sobre $H_*(F; R)$, R un anillo conmutativo, sea trivial.

Proposición 3.4. (Serre) Sean R un dominio de ideales principales. Entonces, si dos de los tres espacios F, X, B (respectivamente, la fibra, el espacio total y el espacio base) tienen grupos de homología (con coeficientes en R) finitamente generados en todas las dimensiones, entonces también todos los grupos de homología del tercer espacio son finitamente

generados.

Demostración. Primero, supongamos que son F y B los que cumplen la propiedad. Por el Teorema de Coeficientes Universales (1.5) y el teorema 2.10,

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; R)) \cong (H_p(B; R) \otimes_R H_q(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_{p-1}(B; R), H_q(F; R))$$

donde recordamos que $\text{Tor}_R(_, _) = \text{Tor}_1^R(_, _)$.

Claramente el primer sumando de la expresión anterior es finitamente generado. Por otro lado, como todo dominio de ideales principales es noetheriano, los términos

$$\text{Tor}_R(H_{p-1}(B; R), H_q(F; R))$$

también son finitamente generados (ver proposición A.7). Así, los términos $E_{p,q}^2$ son finitamente generados, y luego $E_{p,q}^3$, $E_{p,q}^4$, ..., que son subcocientes consecutivos de $E_{p,q}^2$, son finitamente generados también. Así, los términos $\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty$ resultan ser finitamente generados, con lo cual también lo es $H_n(X; R)$, para toda n , pues la clase de los R -módulos finitamente generados es cerrada bajo extensiones.

Ahora, supongamos que son los espacios X y B los que tienen grupos de homología finitamente generados. Notemos que

$$E_{0,i}^2 \cong (H_0(B; R) \otimes_R H_i(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_{-1}(B; R), H_i(F; R)) = (R \otimes_R H_i(F; R)) \oplus 0 = H_i(F; R)$$

Mostraremos, por inducción, que todos estos términos son finitamente generados. El caso base, $i = 0$, se da trivialmente porque F es conectable por trayectorias. Supongamos que $H_{i-1}(F; R)$ es finitamente generado. Entonces

$$E_{2,i-1}^2 \cong (H_2(B; R) \otimes_R H_{i-1}(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_1(B; R), H_{i-1}(F; R))$$

es finitamente generado, por lo dicho en el caso anterior, pues estamos suponiendo que $H_n(B; R)$ es finitamente generado, para toda n . Entonces, la imagen de $d_{2,i-1}^2 : E_{2,i-1}^2 \rightarrow E_{0,i}^2$ es finitamente generada. Si $E_{0,i}^2$ no fuera finitamente generado, tampoco lo sería $E_{0,i}^3 = \frac{E_{0,i}^2}{\text{Im}d_{2,i-1}^2}$ (pues una extensión de dos módulos finitamente generados es finitamente generada), y así sucesivamente: $E_{0,i}^4, E_{0,i}^5, \dots, E_{0,i}^k = \dots = E_{0,i}^\infty$ no serían finitamente generados. Pero esto es imposible, pues

$$E_{0,i}^\infty \cong \frac{F_{0,i}}{F_{-1,i}} \cong F_{0,i}$$

que es finitamente generado, al ser submódulo de $H_i(X; R)$, que es finitamente generado sobre un dominio de ideales principales.

Por último, consideramos el caso en que tanto X como F tienen grupos de homología finitamente generados en todas las dimensiones. De nuevo, procedemos por inducción para mostrar que los R -módulos $H_i(B; R)$ son finitamente generados. El caso base, de nuevo, es trivial. Supongamos que $H_j(B; R)$ es finitamente generado para toda $j < i$. Notemos que ahora

$$E_{i,0}^2 \cong (H_i(B; R) \otimes_R H_0(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_{i-1}(B; R), H_0(F; R)) = (H_i(B; R) \otimes_R R) \oplus 0 \cong H_i(B; R)$$

Si este término no fuera finitamente generado, entonces tampoco lo sería $E_{i,0}^3 \cong \text{Ker}d_{i,0}^2$, pues de serlo, tendríamos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_{i,0}^3 \rightarrow E_{i,0}^2 \xrightarrow{d_{i,0}^2} \text{Im}d_{i,0}^2 \rightarrow 0$$

donde $\text{Im}d_{i,0}^2$ es finitamente generada, al ser un submódulo de

$$E_{i-2,1}^2 \cong (H_{i-2}(B; R) \otimes_R H_1(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_{i-3}(B; R), H_1(F; R))$$

que es finitamente generado, por la hipótesis de inducción y el caso que estamos tratando.

Esto implicaría que $E_{i,0}^2$ es finitamente generado.

Vemos entonces que si $E_{i,0}^2$ no es finitamente generado, tampoco lo son $E_{i,0}^3, \dots, E_{i,0}^\infty$. Pero $E_{i,0}^\infty \cong \frac{F_{i,0}}{F_{i-1,1}} = \frac{H_i(X)}{F_{i-1,1}}$ es un cociente de un módulo finitamente generado, por nuestras suposiciones para este caso, con lo cual también debe ser finitamente generado. Esto concluye la demostración. \square

Esta proposición puede usarse para demostrar que los grupos de homotopía de las esferas son finitamente generados, aplicando también la siguiente proposición:

Proposición 3.5. *Sean R un dominio de ideales principales y A un grupo abeliano finitamente generado. Para cada $n \geq 1$, sea $K(A, n)$ un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo A, n . Entonces, para cada $i \geq 0$, $H_i(K(A, n); R)$ es finitamente generado.*

Demostración. Por inducción sobre n . Consideremos una descomposición de A , de la forma

$$A \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{p_1}^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}^{\alpha_k}$$

Entonces, como los funtores $\pi_q(_)$ preservan productos, se tiene que

$$K(A, 1) \cong \left(\prod_1^m K(\mathbb{Z}, 1) \right) \times \left(\prod_{j=1}^k K(\mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}, 1) \right)$$

donde podemos tomar los espacios $K(\mathbb{Z}, 1)$ como S^1 y los espacios $K(\mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}, 1)$ como los espacios lente infinitos $L(\mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}) := S^\infty / \mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}$, que se obtienen restringiendo la acción de S^1 en S^∞ del ejemplo 1.32, al subgrupo $\mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}$ de S^1 , identificando a $\mathbb{Z}_{p_j}^{\alpha_j}$ con el subgrupo de S^1 formado por las raíces $p_j^{\alpha_j}$ -ésimas de la unidad (ver ejemplo 1.33). Estos espacios tienen grupos de homología finitamente generados en cada dimensión, pues tienen una descomposición como complejos CW con una sola celda en cada dimensión (ver [HaAT], como en el ejemplo 1.33).

Aplicando la fórmula de Künneth, tenemos que $H_i(K(A, 1); R)$ es una suma finita de

grupos de las formas

$$H_l(K(G, 1); R) \otimes H_p(K(G', 1); R) \text{ y } \text{Tor}_R(H_l(K(G, 1); R), H_p(K(G', 1); R))$$

donde $G, G' \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}, \dots, \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}\}$. Por lo anterior, todos estos grupos son finitamente generados y por lo tanto, podemos concluir que $H_i(K(A, 1); R)$ es finitamente generado, para toda $i \geq 0$.

Sea ahora $n > 1$. Consideremos la fibración del espacio de trayectorias sobre $K(A, n)$, $\Omega K(A, n) \hookrightarrow PK(A, n) \rightarrow K(A, n)$. Por la sucesión exacta de grupos de homotopía de una fibración, se tiene que $\Omega(K(A, n))$ es un espacio de tipo $K(A, n - 1)$. Es decir, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(A, n - 1) & \hookrightarrow & PK(A, n) \\ & & \downarrow \\ & & K(A, n) \end{array}$$

Sabemos que el espacio de trayectorias es contraíble, y por la hipótesis de inducción, $K(A, n - 1)$ tiene grupos de homología (con coeficientes en R) finitamente generados en todas las dimensiones. Entonces, aplicando la proposición anterior, concluimos que todos los grupos de homología de $K(A, n)$ son finitamente generados. \square

Ahora veamos cómo pueden usarse las dos proposiciones anteriores para demostrar que los grupos de homotopía de un complejo CW simplemente conexo con un número finito de celdas en cada dimensión, son finitamente generados. Primero, consideramos el siguiente teorema, que puede consultarse en [Gr] (Proposición 17.8):

Teorema 3.6. *Sea X un espacio conectable por trayectorias. Entonces, para cada $n \geq 1$ existe un espacio $X^{[n]}$ tal que $(X^{[n]}, X)$ es un complejo CW relativo con celdas en dimensiones $\geq n + 2$, $\pi_k(X^{[n]}) = 0$ para toda $k > n$ y la inclusión $j : X \hookrightarrow X^{[n]}$ induce isomorfismos en homotopía para toda $k \leq n$.*

Nota 3.7. Al espacio $X^{[n]}$ se le llama n -ésima sección de Postnikov de X .

A partir de este resultado, definimos un nuevo espacio, $X_{(n)}$, como la fibra homotópica de la inclusión $j : X \hookrightarrow X^{[n]}$. A estos espacios se les conoce como cubrientes de Whitehead. Esto es, si definimos

$$\begin{aligned}
E_j &:= \{(x, \sigma) \in X \times (X^{[n]})^I \mid j(x) = \sigma(0)\} \\
p_0 : E_j &\rightarrow X \quad , \quad p_0((x, \sigma)) = x \\
p : E_j &\rightarrow X^{[n]} \quad , \quad p((x, \sigma)) = \sigma(1) \\
X_{(n)} &:= p^{-1}(*) \\
\rho_n &:= p_0|_{X_{(n)}}
\end{aligned}$$

entonces se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X_{(n)} & \hookrightarrow & E_j \\
\rho_n \searrow & & \downarrow p \\
& & X \xrightarrow{j} X^{[n]} \\
& & \uparrow p_0 \simeq
\end{array}$$

donde p_0 es una equivalencia homotópica y p es una fibración, cuya fibra, $X_{(n)}$, es la fibra homotópica de j . Más aún, ρ_n también es una fibración (con fibra $\{x_0\} \times \Omega X^{[n]}$, donde x_0 es tal que $j(x_0) = *$), pues puede verse como el pullback de la fibración del espacio de trayectorias de $X^{[n]}$, $PX^{[n]} = (X^{[n]})^I \rightarrow X^{[n]}$, dada por $\sigma \mapsto \sigma(1)$. Resulta que ρ_n es una fibración n -conectiva (el espacio total es n -conexo, y los homomorfismos inducidos en homotopía por la fibración son isomorfismos para $k > n$; ver [WhG]), como establecemos a continuación:

Considerando la sucesión exacta larga de homotopía de la fibración $p : E_j \rightarrow X^{[n]}$ y el hecho de que p_0 es una equivalencia homotópica, tenemos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(X^{[n]}) \rightarrow \pi_k(X_{(n)}) \xrightarrow{\rho_{n\#}} \pi_k(X) \xrightarrow{j\#} \pi_k(X^{[n]}) \rightarrow \dots$$

en la cual tenemos que $\pi_k(X^{[n]}) = 0$ para $k > n$ y luego $\rho_{n\#} : \pi_k(X_{(n)}) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$ si $k > n$. Además, si $k \leq n$ se tienen isomorfismos $j_{\#} : \pi_k(X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X^{[n]})$, de manera que para $k \leq n$, $\pi_k(X_{(n)})$ debe ser 0. Esto es, $X_{(n)}$ es un espacio n -conexo tal que $\pi_k(X_{(n)}) \cong \pi_k(X)$ si $k > n$.

Tomando en cuenta lo anterior, a partir de un espacio conectable por trayectorias (0 -conexo) X podemos construir una sucesión de fibraciones, llamada la torre de Whitehead de X ,

$$X_{(n)} \xrightarrow{\rho_n} X_{(n-1)} \xrightarrow{\rho_{n-1}} \dots \xrightarrow{\rho_2} X_{(1)} \xrightarrow{\rho_1} X$$

tal que $X_{(n)}$ es n -conexo y $\pi_k(X_{(n)}) \cong \pi_k(X)$ si $k > n$. Como antes, $X_{(n)}$ es la fibra homotópica de $j : X_{(n-1)} \hookrightarrow (X_{(n-1)})^{[n]}$ y $\rho_n = p_{0|X_{(n)}}$. Es decir, en un abuso de notación, $X_{(n)} := (X_{(n-1)})_{(n)}$, y se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{(n)} & \hookrightarrow & E_j \\ & \searrow \rho_n & \downarrow p_0 \simeq \\ & & X_{(n-1)} \\ & & \hookrightarrow j & X_{(n-1)}^{[n]} \end{array}$$

donde escribimos $X_{(n-1)}^{[n]} = (X_{(n-1)})^{[n]}$. Notemos que $X_{(n-1)}^{[n]}$ es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(\pi_n(X), n)$, pues en la sucesión exacta asociada a p tenemos

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X_{(n-1)}^{[n]}) \rightarrow \pi_n(X_{(n)}) = 0 \xrightarrow{\rho_{n\#}} \pi_n(X_{(n-1)}) \cong \pi_n(X) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X_{(n-1)}^{[n]}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

así que $\pi_k(X_{(n-1)}^{[n]}) = 0$ si $k < n$, y $\pi_n(X_{(n-1)}^{[n]}) \cong \pi_n(X)$. Además, para $k > n$,

$$\pi_k(X_{(n)}) \cong \pi_k(X) \cong \pi_k(X_{(n-1)})$$

y se tiene

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(X_{(n-1)}^{[n]}) \rightarrow \pi_k(X_{(n)}) \xrightarrow[\cong]{\rho_{n\#}} \pi_k(X_{(n-1)}) \xrightarrow{j\#} \pi_k(X_{(n-1)}^{[n]}) \rightarrow \dots$$

de modo que $\pi_k(X_{(n-1)}^{[n]}) = 0$ si $k > n$, y entonces

$$\pi_k(X_{(n-1)}^{[n]}) \cong \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \pi_n(X) & k = n \end{cases}$$

Con todo esto, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Sea X simplemente conexo tal que $H_q(X; \mathbb{Z})$ es finitamente generado para toda $q \in \mathbb{N}$. Entonces $\pi_q(X)$ es finitamente generado para toda $q \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Primero, mostraremos por inducción sobre $n \geq 1$ que $H_q(X_{(n)}; \mathbb{Z})$ es finitamente generado, para cualquier $q \geq 0$. Como X es 1-conexo, $X_{(1)} = X$ y por hipótesis todos sus grupos de homología son finitamente generados. Supongamos que esto se cumple para $X_{(n-1)}$. Como este espacio es $(n-1)$ -conexo, por el Teorema de Hurewicz tenemos que

$$\pi_n(X_{(n-1)}) \cong H_n(X_{(n-1)})$$

Entonces, como $\pi_n(X) \cong \pi_n(X_{(n-1)})$, tenemos que $\pi_n(X)$ es finitamente generado, y por 3.5, $H_q(K(\pi_n(X), n))$ es finitamente generado, para toda q . Si consideramos la fibración

$$\begin{array}{ccc} X_{(n)} & \hookrightarrow & E_j \\ & & \downarrow p \\ & & X_{(n-1)}^{[n]} \end{array}$$

tenemos, por 3.4, que todos los grupos de homología de $X_{(n)}$ son finitamente generados, pues, como vimos antes, $X_{(n-1)}^{[n]}$ es un $K(\pi_n(X), n)$ y E_j es del mismo tipo de homotopía

que $X_{(n-1)}$, con lo cual todos los grupos de homología de ambos son finitamente generados. Esto concluye la inducción.

Ahora, como $X_{(n)}$ es n -conexo, nuevamente por el Teorema de Hurewicz, para toda $q \geq 2$ tenemos que

$$\pi_q(X_{(q-1)}) \cong H_q(X_{(q-1)})$$

el cual, por lo anterior, es finitamente generado. Así, como $\pi_q(X) \cong \pi_q(X_{(q-1)})$, entonces $\pi_q(X)$ es finitamente generado, para toda q . \square

Corolario 3.9. *Sea X un complejo CW simplemente conexo con un número finito de celdas en cada dimensión. Entonces $\pi_q(X; \mathbb{Z})$ es finitamente generado para toda $q \in \mathbb{N}$.*

Nótese que la hipótesis de que X sea simplemente conexo es necesaria:

Ejemplo 3.10. Sea $X = S^1 \vee S^2$. Claramente X no es simplemente conexo, y consta de tres celdas: una 0-celda, una 1-celda y una 2-celda. Sin embargo, su segundo grupo de homotopía no es finitamente generado:

Dado que la cubierta universal de S^1 es la recta real (con fibra \mathbb{Z}) y S^2 es su propia cubierta universal, la cubierta universal de X , digamos \tilde{X} , es la recta real, con una esfera pegada en cada entero. Así,

$$\pi_2(X) \cong \pi_2(\tilde{X}) \cong H_2(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

donde el segundo isomorfismo se da por el teorema de Hurewicz.

Corolario 3.11. *Para cualesquiera $q, n \in \mathbb{N}$, $\pi_q(S^n)$ es finitamente generado.*

Proposición 3.12. *Sea K un campo. Consideremos una fibración $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$ tal que $\pi_1(B)$ actúe trivialmente en $H_*(F; K)$. Supongamos además que $H_i(B; K) = 0$ para $i > p$, y $H_i(F; K) = 0$ para $i > q$. Entonces $H_n(X; K) = 0$ para $n > p + q$ y $H_{p+q}(X; K) \cong H_p(B; K) \otimes_K H_q(F; K)$.*

Demostración. Como K es un campo, entonces $H_i(B; K), H_j(F; K)$ son libres de torsión y luego, por 2.10,

$$E_{i,j}^2 \cong (H_i(B; K) \otimes_K H_j(F; K)) \oplus \text{Tor}_K(H_{i-1}(B; K), H_j(F; K)) = H_i(B; K) \otimes_K H_j(F; K)$$

Entonces, por la hipótesis, $E_{i,j}^r = 0$ si $i > p$ ó $j > q$, para toda $r \geq 2$. Así, si $n = i+j > p+q$, entonces $E_{i,j}^\infty = 0$, con lo que $H_n(X; K) = \bigoplus_{i+j=n} E_{i,j}^\infty = 0$.

Además, como $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ ($r \geq 2$), se tiene que $\text{Ker}(d_r) = E_{p,q}^r$, pues $q+r-1 > q$. Por otro lado, no puede haber un $z \neq 0 \in E_{p,q}^r \cap \text{Im}(d_{p+r,q-r+1}^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r)$, porque $p+r > p$. Así, tenemos que $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$.

Por otro lado, todos los demás grupos $E_{i,j}^\infty$ tales que $i+j = p+q$, $(i,j) \neq (p,q)$, son cero, pues i debe ser mayor que p , o bien j debe ser mayor que q . Así,

$$H_{p+q}(X; K) = \bigoplus_{i+j=p+q} E_{i,j}^\infty = E_{p,q}^\infty = H_p(B; K) \otimes_K H_q(F; K)$$

□

Corolario 3.13. *Sea K un campo. Si tenemos una fibración $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$ tal que la acción de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F; K)$ es trivial, y $H_i(X; K) = 0$ para toda $i > 0$, entonces ocurre alguna de las siguientes:*

1. $H_i(B; K) = 0 = H_i(F; K)$ para toda $i > 0$;
2. $H_i(B; K) \neq 0$ para una infinidad de índices i ;
3. $H_i(F; K) \neq 0$ para una infinidad de índices i .

Demostración. Si suponemos que no ocurre 2. ni 3. , entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $H_i(B; K) = 0$ para $i > p$, y $H_i(F; K) = 0$ para $i > q$. Tomemos p, q los mayores enteros tales que $H_p(B; K) \neq 0 \neq H_q(F; K)$. Entonces, aplicando la proposición anterior, tenemos que $H_{p+q}(X; K) = H_p(B; K) \otimes_K H_q(F; K) \neq 0$, puesto que se trata de un producto tensorial

de espacios vectoriales. Esto es posible sólo si $p + q = 0$, con lo cual $p = 0 = q$. Así, vemos que para todo índice $i > 0$, $H_i(B; K) = 0 = H_i(F; K)$. \square

Lema 3.14. *Sea X un espacio topológico tal que $H_i(X; K) = 0$ para $K = \mathbb{Q}$ y para $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo, y toda $0 < i \leq q$. Entonces $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $0 < i \leq q - 1$.*

Demostración. Sea K cualquier campo. Por el teorema 1.5, tenemos

$$H_i(X; K) \cong (H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), K)$$

Entonces, para $0 < i \leq q$, $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0 = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), K)$, con lo cual si $0 < i \leq q - 1$,

$$H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0 = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_i(X; \mathbb{Z}), K)$$

para cualquier campo K .

Así, $K = \mathbb{Q}$ implica que $H_i(X; \mathbb{Z})$ es de torsión (lema A.5). Por otro lado, si consideramos cualquier primo p y $K = \mathbb{Z}_p$, como

$$0 = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_i(X; \mathbb{Z}), K) = \{w \in H_i(X; \mathbb{Z}) \mid pw = 0\}$$

(ver proposición A.6), ningún elemento de $H_i(X; \mathbb{Z})$ tiene orden p . Por lo tanto, ningún elemento tiene orden distinto de uno y entonces $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ para toda $0 < i \leq q - 1$. \square

Proposición 3.15. *Consideremos un haz fibrado con espacio total $X = \mathbb{R}^n$, fibra conexa F y base B , ambas complejos CW de dimensión finita. Entonces $H_i(B; \mathbb{Z}) = 0 = H_i(F; \mathbb{Z})$ para toda $i > 0$.*

Demostración. Como F y B son espacios CW de dimensión finita, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i > n_0$, $H_i(B; \mathbb{Z}) = 0 = H_i(F; \mathbb{Z})$. Por el Teorema de Coeficientes Universales

(1.5), para cualquier espacio Y y cualquier campo K ,

$$H_i(Y; K) \cong (H_i(Y; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(Y; \mathbb{Z}), K)$$

por lo cual podemos decir que para $Y = B, F$ e $i > n_0 + 1$, se tiene $H_i(Y; K) = 0$, para un campo K arbitrario.

Por otro lado, tenemos la sucesión exacta de homotopía asociada a una fibración

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0$$

que en este caso, como $\pi_0(F) = 0 = \pi_1(\mathbb{R}^n)$, nos dice que $\pi_1(B) = 0$, así que su acción sobre $H_*(F; K)$ es trivial, para cualquier campo K . Así, podemos aplicar el corolario anterior (3.13) para concluir que para cualquier campo K , $H_i(B; K) = 0 = H_i(F; K)$ para toda $i > 0$. Entonces, por el lema anterior, $H_i(B; \mathbb{Z}) = 0 = H_i(F; \mathbb{Z})$ para toda $i > 0$. \square

Notemos que el resultado anterior no es cierto si la fibra F no es conexa. Como contraejemplo, podemos considerar la aplicación cubriente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

para la cual, la fibra \mathbb{Z} no es conexa y $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

3.1 Característica de Euler y serie de Poincaré de un espacio fibrado.

Definición 3.16. Dado un espacio topológico X tal que $H_n(X; \mathbb{Q})$ es de dimensión finita para toda $n \in \mathbb{N}$ y existe $q \geq 1$ tal que $H_n(X; \mathbb{Q}) = 0$ para $n > q$, definimos su n -ésimo

número de Betti, $b_n(X)$, como

$$b_n(X) = \dim H_n(X; \mathbb{Q})$$

A partir de estos números, definimos la **característica de Euler** de X como

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(X)$$

De manera más general, para un espacio vectorial bigraduado $E = \bigoplus_{p,q} E_{p,q}$ tal que $E_{p,q} = 0$ si $p = 0$ ó $q = 0$ y tal que existe $m \in \mathbb{N}$ para la cual $E_{p,q} = 0$ si $p, q > m$, definimos

$$\chi(E) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_{p,q}$$

Como consecuencia directa del teorema 2.10, tenemos la siguiente relación entre las características de Euler de un espacio fibrado, su base y sus fibras.

Corolario 3.17. *Sea $p : X \rightarrow B$ una fibración que cumple las hipótesis de 2.10, donde X y B cumplen con las condiciones de la definición anterior. Si $\chi(B)$ y $\chi(F)$ son finitos, entonces $\chi(X) = \chi(B)\chi(F)$.*

Demostración. Por el teorema 2.10, hay una sucesión espectral que converge a $H_n(X; \mathbb{Q})$ tal que $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; \mathbb{Q}))$, de modo que

$$b_n(X) = \dim H_n(X; \mathbb{Q}) = \sum_{p+q=n} \dim E_{p,q}^{\infty}$$

$$\chi(X) = \chi(E^{\infty})$$

Ahora, de nuevo por el teorema 2.10, junto con el Teorema de Coeficientes Universales

1.5, sabemos que hay sucesiones exactas

$$0 \rightarrow H_p(B; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_q(F; \mathbb{Q}) \rightarrow E_{p,q}^2 \rightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Q}}(H_{p-1}(B; \mathbb{Q}), H_q(F; \mathbb{Q})) \rightarrow 0$$

Como estamos tratando con espacios vectoriales, $\text{Tor}_{\mathbb{Q}}(H_{p-1}(B; \mathbb{Q}), H_q(F; \mathbb{Q})) = 0$ y luego

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes_{\mathbb{Q}} H_q(F), \text{ con lo cual}$$

$$\dim E_{p,q}^2 = b_p(B)b_q(F)$$

y

$$\chi(E^2) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_{p,q}^2 = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} b_p(B)b_q(F) = \chi(B)\chi(F)$$

Sean $C_{p,q}^r = \text{Ker } d_{p,q}^r$, $B_{p,q}^r = \text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r$, los conjuntos de ciclos y fronteras de $E_{p,q}^r$ bajo d^r , respectivamente. Tenemos las siguientes dos sucesiones exactas:

$$0 \rightarrow C_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^r \rightarrow B_{p-r,q+r-1}^r \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B_{p,q}^r \rightarrow C_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r+1} \rightarrow 0$$

Como se trata en este caso de espacios vectoriales,

$$\dim E_{p,q}^r = \dim C_{p,q}^r + \dim B_{p-r,q+r-1}^r$$

$$\dim C_{p,q}^r = \dim E_{p,q}^{r+1} + \dim B_{p,q}^r$$

así que

$$\dim E_{p,q}^{r+1} = \dim E_{p,q}^r - \dim B_{p-r,q+r-1}^r - \dim B_{p,q}^r$$

Así, en la expresión

$$\chi(E^{r+1}) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_{p,q}^{r+1} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} (\dim E_{p,q}^r - \dim B_{p-r,q+r-1}^r - \dim B_{p,q}^r)$$

cada término $B_{p,q}^r$ aparece exactamente dos veces, una en la expresión de $\dim E_{p,q}^{r+1}$, con signo $(-1)^{p+q}$, y otra en la expresión de $\dim E_{p+r,q-r+1}^{r+1}$, con signo $(-1)^{(p+r)+(q-r+1)} = (-1)^{p+q+1} = -(-1)^{p+q}$, de manera que todos estos términos se anulan. Tenemos entonces que $\chi(E^{r+1}) = \chi(E^r) = \dots = \chi(E^2)$ y luego $\chi(X) = \chi(E^\infty) = \chi(E^2) = \chi(B)\chi(F)$. \square

Definición 3.18. Sea V_* un espacio vectorial graduado localmente finito sobre un campo K ; es decir, $\dim_K V_i$ es finita para toda i . Se define la **serie de Poincaré** de V_* como

$$P_K(V_*) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_K V_i) t^i$$

Análogamente, dado un espacio vectorial bigraduado localmente finito $E_{*,*}$ (es decir, $E_{p,q}$ es de dimensión finita sobre K para cualesquiera p, q), definimos su serie de Poincaré como

$$P_K(E_{*,*}) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_K \left(\bigoplus_{p+q=i} E_{p,q} \right) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=i} \dim_K E_{p,q} \right) t^i$$

La serie de Poincaré de un espacio topológico X es la serie

$$P(X) = P_{\mathbb{Q}}(H_*(X; \mathbb{Q})) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{Q}} H_i(X; \mathbb{Q})) t^i$$

es decir, la serie cuyos coeficientes son los números de Betti de X .

Dadas dos series $P_1 = \sum a_i t^i$ y $P_2 = \sum b_i t^i$, decimos que $P_1 \geq P_2$ si $a_i \geq b_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Tenemos el siguiente resultado, que relaciona las sucesiones espectrales con las series de Poincaré.

Proposición 3.19. *Sea $\{E_{*,*}^r, d_{*,*}^r\}$ una sucesión espectral que converge a H_* tal que $E_{*,*}^2$ sea localmente finito. Entonces H_* es localmente finito y*

$$P(E_{*,*}^2) \geq P(E_{*,*}^3) \geq \dots \geq P(E_{*,*}^\infty) = P(H_*)$$

Más aún, $P(H_*) = P(E_{*,*}^r)$ si y sólo si $E_{*,*}^r = E_{*,*}^\infty$.

Demostración. Consideremos $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$. Sean $n, p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p + q = n$.

Entonces

$$\dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^r) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Ker } d_{p,q}^r) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Ker } d_{p,q}^r) - \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Im } d_{p+r,q-r+1}^r) = \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^{r+1})$$

y luego

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^r\right) \geq \dim_{\mathbb{Q}}\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^{r+1}\right)$$

Con esto, tenemos que, para toda r , $P(E_{*,*}^r) \geq P(E_{*,*}^{r+1})$.

Ahora bien, si la sucesión colapsa en el r -ésimo paso, es decir, $E_{*,*}^r = E_{*,*}^\infty$, entonces claramente $P(E_{*,*}^r) = P(E_{*,*}^\infty) := P(H_*)$. Por otro lado, si $P(H_*) = P(E_{*,*}^r)$, entonces, por la desigualdad anterior, tenemos que $P(E_{*,*}^r) = P(E_{*,*}^{r+k})$ para toda $k \geq 0$. Veamos que $\dim_{\mathbb{Q}} E_{p,q}^r = \dim_{\mathbb{Q}} E_{p,q}^{r+k}$ para cualesquiera $k, p, q \geq 0$. La igualdad de las series nos dice que, para toda n ,

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^r\right) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^{r+k}\right)$$

Además,

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^r\right) = \sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^r)$$

y como $E_{*,*}^2$ es localmente finito por hipótesis, tenemos que $E_{*,*}^r$ es localmente finito para $r \geq 2$, pues $E_{p,q}^{r+1}$ es un subcociente de $E_{p,q}^r$. Entonces,

$$\sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^r) = \sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^{r+k})$$

Como $\dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^r) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^{r+k}) \geq 0$, se tiene que $\dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^r) = \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^{r+k})$ para cualesquiera $k \geq 0$ y $p, q \geq 0$ tales que $n = p + q$. \square

Corolario 3.20. Sea $F \hookrightarrow X \rightarrow B$ una fibración tal que $\pi_1(B)$ actúa trivialmente en

$H_*(F; \mathbb{Q})$ y los tres espacios tienen grupos de homología localmente finitos. Entonces

$$P(F) \cdot P(B) \geq P(X)$$

Más aún, $P(F) \cdot P(B) = P(X)$ si y sólo si la sucesión espectral asociada a la fibración colapsa en el segundo término, es decir, $E^2 = E^\infty$.

Demostración. Por los teoremas 2.10 y 1.5, tenemos una sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ que converge a $H_*(X; \mathbb{Q})$ y

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Q})) \cong H_p(B; \mathbb{Q}) \otimes H_q(F; \mathbb{Q})$$

Entonces $\dim_{\mathbb{Q}} E_{p,q}^2 = \dim_{\mathbb{Q}} H_p(B; \mathbb{Q}) \cdot \dim_{\mathbb{Q}} H_q(F; \mathbb{Q})$ y luego

$$\sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{Q}}(E_{p,q}^2) = \sum_{p+q=n} \dim_{\mathbb{Q}} H_p(B; \mathbb{Q}) \cdot \dim_{\mathbb{Q}} H_q(F; \mathbb{Q})$$

Así,

$$P(E_{*,*}^2) = P(B) \cdot P(F) \geq \dots \geq P(H_*(X; \mathbb{Q})) := P(X)$$

Además, por la proposición anterior, $P(X) = P(E_{*,*}^2) = P(B) \cdot P(F)$ si y sólo si $E^2 = E^\infty$. □

3.2 Sucesiones de Wang, Serre y Gysin.

Esta sección está basada en [MacL].

Teorema 3.21. (*Sucesión de Wang*) Sean $k \geq 2$ y $p : X \rightarrow S^k$ una fibración con fibra F conectable por trayectorias. Entonces hay una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(F; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^k} H_{n-1}(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Demostración. Todos los grupos de homología se consideran con coeficientes enteros.

Recordando que $H_n(S^k) = \mathbb{Z}$ si $n = 0, k$ y cero si $n \neq 0, k$, por el teorema 2.10 y el Teorema de Coeficientes Universales (1.5), tenemos que

$$E_{p,q}^2 \cong (H_p(S^k) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(F)) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(S^k), H_q(F)) \cong \begin{cases} H_q(F) & p = 0, k \\ 0 & p \neq 0, k \end{cases}$$

pues como \mathbb{Z} es libre, $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) = 0$ para todo grupo abeliano A . Así, las únicas posibles diferenciales d^r , $r \geq 2$ no nulas son aquéllas con $r = k$, y luego $E^2 = E^3 = \dots = E^k$ y $E^{k+1} = E^\infty$. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_{k,q}^\infty = \text{Ker}(d^k) \rightarrow E_{k,q}^2 \xrightarrow{d^k} E_{0,q+k-1}^2 \rightarrow E_{0,q+k-1}^\infty \rightarrow 0$$

Además, por lo anterior, como $E_{0,n}^\infty$ y $E_{k,n-k}^\infty$ son los únicos términos no cero de E^∞ con grado total n , y para cada n , $E_{p,n-p}^\infty \cong \frac{F_n^p}{F_n^{p-1}}$ para la filtración $H_n(X) = F_n^n \supseteq \dots \supseteq F_n^0$, ésta tiene (posiblemente) sólo dos términos no cero: $F_n^0 = \dots = F_n^{k-1}$ y $F_n^k = \dots = F_n^n = H_n(X)$. Así, tenemos esta otra sucesión exacta:

$$0 \rightarrow E_{0,n}^\infty \cong F_n^0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow E_{k,n-k}^\infty \cong \frac{H_n(X)}{F_n^0} \rightarrow 0$$

Juntando estas sucesiones, con $q = n - k$ en la de arriba y $n, n - 1$ en la de abajo, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_n(X) & & & & 0 \\ & & \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E_{k,n-k}^\infty & \longrightarrow & H_{n-k}(F) & \xrightarrow{d^k} & H_{n-1}(F) & \longrightarrow & E_{0,n-1}^\infty & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \searrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & & & & & H_{n-1}(X) & & \end{array}$$

□

Podemos deducir de aquí la homología del espacio de lazos ΩS^k para $k \geq 2$, como veremos más adelante (ver corolario 3.26).

Teorema 3.22. (*Sucesión de Gysin*) Sea $\pi : X \rightarrow B$ una fibración con B simplemente conexa y fibra $F = S^k$, $k \geq 1$. Entonces hay una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} H_n(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^{k+1}} H_{n-k-1}(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Demostración. Todos los grupos de homología se consideran con coeficientes enteros.

Notemos que los únicos términos posiblemente no nulos de E^2 aparecen en las filas $q = 0, k$:

$$E_{p,q}^2 = (H_p(B) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(S^k)) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(B), H_q(S^k)) = \begin{cases} H_p(B) & q = 0, k \\ 0 & q \neq 0, k \end{cases}$$

Tenemos el siguiente diagrama para E^2 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 q & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 k+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 k & H_0(B) & H_1(B) & H_2(B) & H_3(B) & \cdots & H_p(B) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & H_0(B) & H_1(B) & H_2(B) & H_3(B) & \cdots & H_p(B) \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & p
 \end{array}$$

Así, la única posible diferencial no cero es $d^{k+1} : E_{n,0}^{k+1} = H_n(B) \rightarrow E_{n-k-1,k}^{k+1} = H_{n-k-1}(B)$, y $E^2 = \dots = E^{k+1}$, $E^{k+2} = E^\infty$. Esto nos da la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow E_{n,0}^2 = H_n(B) \xrightarrow{d^{k+1}} E_{n-k-1,k}^2 = H_{n-k-1}(B) \rightarrow E_{n-k-1,k}^\infty \rightarrow 0$$

Además, como para cada n hay a lo más dos términos no nulos en $\{E_{p,q}^\infty \mid p+q=n\}$, $E_{n,0}^\infty \cong \frac{H_n(X)}{F_n^{n-1}} = \frac{H_n(X)}{F_n^0}$ y $E_{n-k-1,k+1}^\infty = \text{Ker } d^{k+1} \cong \frac{F_n^{n-k-1}}{F_n^{n-k-2}} = \frac{F_n^{n-k-1}}{F_n^{n-k-2}} = F_n^0$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_{n-k-1,k+1}^\infty \rightarrow H_n(X) \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow 0$$

Combinando estas dos sucesiones se obtiene, para cada n ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_n(X) & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & E_{n,0}^\infty & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{d^{k+1}} & H_{n-k-1}(B) \longrightarrow E_{n-k-1,k}^\infty \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \searrow & \downarrow \\
 & & & & & & & H_{n-1}(X)
 \end{array}$$

lo cual nos da la sucesión del enunciado. \square

El siguiente resultado nos da otra sucesión exacta, y aparece en [Se].

Teorema 3.23. (*Sucesión exacta de Serre*) Sean R un dominio de ideales principales y $X \rightarrow B$ una fibración con fibra F , tal que la acción de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F; R)$ es trivial. Supóngase además que todos los espacios son conectables por trayectorias y que $H_i(B; R) = 0$ para $0 < i < m$ y $H_i(F; R) = 0$ para $0 < i < n$. Entonces hay una sucesión exacta

$$H_{m+n-1}(F) \rightarrow H_{m+n-1}(X) \rightarrow H_{m+n-1}(B) \rightarrow H_{m+n-2}(F) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(B) \rightarrow 0$$

donde todos los coeficientes son en R .

Demostración. Sabemos que la sucesión espectral de Leray-Serre cumple que

$$\begin{aligned}
 E_{p,q}^2 &= H_p(B; H_q(F; R)) \\
 &= (H_p(B; R) \otimes_R H_q(F; R)) \oplus \text{Tor}_R(H_{p-1}(B; R), H_q(F; R)) \Rightarrow H_*(X; R)
 \end{aligned}$$

Por la hipótesis, los únicos posibles grupos no nulos en E^r , $r \geq 2$ de grado total $k \leq m + n - 1$ son $E_{k,0}^r$ y $E_{0,k}^r$, y en particular,

$$E_{k,0}^2 = H_k(B; R)$$

$$E_{0,k}^2 = H_k(F; R)$$

Puesto que F y B son conexas, se tiene que $H_0(F; R) = R = H_0(B; R)$.

Ahora, para $k < m + n$, tenemos el siguiente diagrama para E^k :

$$\begin{array}{cccccccc}
 E_{0,k-1}^k & 0 & \cdots & 0 & E_{m,k-1}^k & \cdots & E_{k-1,k-1}^k & E_{k,k-1}^k \\
 E_{0,k-2}^k & 0 & \cdots & 0 & E_{m,k-2}^k & \cdots & E_{k-1,k-2}^k & E_{k,k-2}^k \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 E_{0,n}^k & 0 & \cdots & 0 & E_{m,n}^k & \cdots & E_{k-1,n}^k & E_{k,n}^k \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \cdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots \\
 E_{0,0}^k = R & 0 & \cdots & 0 & E_{m,0}^k & \cdots & E_{k-1,0}^k & E_{k,0}^k
 \end{array}$$

Con esto, vemos que la única posible diferencial no nula en E^k , entre grupos de grado total $k < m + n$, es $d_{k,0}^k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$. Además,

$$E_{k,0}^k = E_{k,0}^2 = H_k(B; R) \quad , \quad E_{0,k-1}^k = E_{0,k-1}^2 = H_{k-1}(F; R)$$

Por otro lado, sabemos que hay sucesiones exactas

$$0 \rightarrow E_{k,0}^\infty \rightarrow E_{k,0}^k \xrightarrow{d^k} E_{0,k-1}^k \rightarrow E_{0,k-1}^\infty \rightarrow 0$$

que por lo anterior, para $k < m + n$ toman la forma

$$0 \rightarrow E_{k,0}^\infty \rightarrow H_k(B; R) \xrightarrow{d^k} H_{k-1}(F; R) \rightarrow E_{0,k-1}^\infty \rightarrow 0$$

Por último, recordando que $E_{p,k-p}^\infty \cong \frac{F_{p,k-p}}{F_{p-1,k-p+1}}$ donde $0 \subset F_{0,k} \subset \dots \subset F_{k,0}$ es una filtración de $H_k(X; R)$, tenemos que los únicos elementos no nulos de la filtración son $F_{0,k} = \dots = F_{k-1,1}$ y $F_{k,0} = H_k(X; R)$, con lo que hay sucesiones exactas

$$0 \rightarrow E_{0,k}^\infty \cong F_k^0 \rightarrow H_k(X; R) \rightarrow E_{k,0}^\infty \cong \frac{H_k(X; R)}{F_k^0} \rightarrow 0$$

Uniendo estas sucesiones exactas, tenemos, para $k < m+n$ la sucesión exacta que buscamos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(F; R) & \longrightarrow & H_k(X; R) & \longrightarrow & H_k(B; R) & \xrightarrow{d^k} & H_{k-1}(F; R) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & \\ & & E_{0,k}^\infty & & E_{k,0}^\infty & & & & E_{0,k-1}^\infty & & \end{array}$$

□

3.3 Homología de espacios de lazos.

Esta sección está basada en el estudio de [Se]. Consideremos un espacio conectable por trayectorias, X , tal que en la fibración del espacio de trayectorias $\Omega X = \Omega(X, x_0) \hookrightarrow PX \rightarrow X$, $\pi_1(X)$ actúa trivialmente en $H_*(\Omega X)$.

Proposición 3.24. *Sean R un dominio de ideales principales y X simplemente conexo tal que $H_i(X; R)$ es finitamente generado, para toda i . Entonces $H_i(\Omega X; R)$ es finitamente generado, para toda i .*

Demostración. Consideremos la fibración p del espacio de trayectorias que comienzan en

un punto de X . Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \hookrightarrow & PX \\ & & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

Como PX es contraíble,

$$H_i(PX; R) \cong \begin{cases} R & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

Entonces, por la hipótesis y la proposición 3.4, $H_i(\Omega X; R)$ es finitamente generado para toda i . □

Proposición 3.25. *Sean X un espacio simplemente conexo, K un campo y $n \geq 2$ tal que $H_n(X; K) \neq 0$ y $H_k(X; K) = 0$ para $k > n$. Entonces, para todo entero $i \geq 0$, existe un entero $0 < j < n$ tal que $H_{i+j}(\Omega X; K) \neq 0$.*

Demostración. Para llegar a una contradicción, supongamos que hay un entero i para el cual no se cumple el enunciado. Si $H_i(\Omega X; K) = 0$, podemos reemplazar i por un entero menor para el cual $H_i(\Omega X; K) \neq 0$ (pues ΩX es conectable por trayectorias, así que al menos $H_0(\Omega X; K) \neq 0$). Entonces, por los teoremas 2.10 y 1.5,

$$E_{n,i}^2 \cong H_n(X; H_i(\Omega X; K)) \cong H_n(X; K) \otimes_K H_i(\Omega X; K) \neq 0$$

pues el producto tensorial de dos espacios vectoriales no nulos, es no nulo, y además $Tor_K(H_{n-1}(X; K), H_i(\Omega X; K)) = 0$ pues $H_{n-1}(X; K)$ es un espacio vectorial (sobre K), de modo que es libre de torsión.

Veamos ahora que $E_{n,i}^\infty = E_{n,i}^2$. Recordemos que $d_r : E_{n,i}^r \rightarrow E_{n-r,i+r-1}^r$, así que si $r > n$, $E_{n-r,i+r-1}^r = 0$ y luego $d_r = 0$. Por otro lado, para $2 \leq r \leq n$,

$$E_{n-r,i+r-1}^2 \cong H_{n-r}(X; K) \otimes_K H_{i+r-1}(\Omega X; K) = 0$$

por nuestra elección de i . Esto nos dice que también $E_{n-r,i+r-1}^r = 0$ para $2 \leq r \leq n$. Así, tenemos que también para estos valores de r , $d_r = 0$.

Además, los elementos de $E_{n,i}^r$ no pueden ser fronteras de d_r , porque, por hipótesis, $H_k(X; K) = 0$ para $k > n$, de modo que $E_{k,i}^r = 0$ si $k > n$, $r \geq 2$.

Así, podemos concluir que la sucesión espectral se estabiliza para el valor $r = 2$; es decir, $E_{n,i}^\infty = E_{n,i}^2$. Pero ya vimos que $E_{n,i}^2 \neq 0$, lo cual contradice el hecho de que PX es contraíble y por tanto sus grupos de homología son triviales, excepto para dimensión 0. \square

Ahora aplicamos el teorema 3.21 para calcular los grupos de homología del espacio de lazos de las esferas S^k , $k \geq 2$.

Corolario 3.26. (Homología de ΩS^k , $k \geq 2$) Para $k \geq 2$,

$$H_n(\Omega S^k; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n \equiv 0 \pmod{k-1} \\ 0 & n \not\equiv 0 \pmod{k-1} \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema 2.10, sabemos que

$$E_{p,q}^2 \cong (H_p(S^k; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z})) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(S^k; \mathbb{Z}), H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z})) = \begin{cases} H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z}) & p = 0, k \\ 0 & p \neq 0, k \end{cases}$$

pues en este caso, para toda pareja (p, q) , $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(S^k; \mathbb{Z}), H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z})) = 0$ ya que $H_{p-1}(S^k; \mathbb{Z}) \cong 0$ ó \mathbb{Z} . Además, como S^k es simplemente conexa para $k \geq 2$, ΩS^k es conectable por trayectorias y luego $H_0(\Omega S^k; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Consideramos entonces el siguiente diagrama de E^2 , en el cual los coeficientes de las

homologías son los enteros:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 q & H_q(\Omega S^k) & 0 & 0 & \cdots & H_q(\Omega S^k) & 0 & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 2k-1 & H_{2k-1}(\Omega S^k) & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 2k-2 & H_{2k-2}(\Omega S^k) & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 k & H_k(\Omega S^k) & 0 & 0 & \cdots & H_k(\Omega S^k) & 0 & \cdots \\
 k-1 & H_{k-1}(\Omega S^k) & 0 & 0 & \cdots & H_{k-1}(\Omega S^k) & 0 & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 1 & H_1(\Omega S^k) & 0 & 0 & \cdots & H_1(\Omega S^k) & 0 & \cdots \\
 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{Z} & 0 & \cdots \\
 & & 0 & 1 & 2 & \cdots & k & k+1
 \end{array}$$

Sabemos que el espacio de trayectorias PS^k es contraíble, así que $H_n(PS^k; \mathbb{Z}) = 0$ para toda $n \geq 1$. Entonces en E^∞ el único grupo no trivial es $E_{0,0}^\infty = \mathbb{Z}$. Como $H_n(PS^k; \mathbb{Z}) = 0$

para toda $n \geq 1$ y las únicas posibles diferenciales no nulas son $d^k : E_{k,q}^k \rightarrow E_{0,q+k-1}^k$, éstas deben ser isomorfismos para toda q . Además, $E^2 = \dots = E^k$, $E^{k+1} = \dots = E^\infty$ y para $0 < q < k - 1$, $E_{0,q}^\infty = 0 = E_{0,q}^2 = H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z})$ pues no hay morfismos no triviales hacia estos grupos. Entonces, como todos los términos $H_n(PS^k; \mathbb{Z})$, $n \geq 1$ de la Sucesión de Wang son cero, se tienen isomorfismos $H_{n-k}(\Omega S^k; \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(\Omega S^k; \mathbb{Z})$ para toda n . Esto nos dice que $\mathbb{Z} = H_0(\Omega S^k; \mathbb{Z}) \cong H_{k-1}(\Omega S^k; \mathbb{Z}) \cong H_{2k-2}(\Omega S^k; \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{n(k-1)}(\Omega S^k; \mathbb{Z})$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $0 = H_q(\Omega S^k; \mathbb{Z}) = H_{q+k-1}(\Omega S^k; \mathbb{Z}) = \dots = H_{q+n(k-1)}(\Omega S^k; \mathbb{Z})$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < k - 1$, con lo que se tiene el resultado. \square

Por último, presentamos el siguiente corolario del teorema 3.23:

Corolario 3.27. *Sea X un espacio topológico n -conexo. Entonces, para $k \leq 2n$ hay isomorfismos*

$$H_k(X; \mathbb{Z}) \cong H_{k-1}(\Omega X; \mathbb{Z})$$

Demostración. Por el Teorema de Hurewicz, sabemos que $H_k(X; \mathbb{Z}) = 0$ si $k < n + 1$ y que $H_k(\Omega X; \mathbb{Z}) = 0$ si $k < n$, pues $\pi_k(X) \cong \pi_{k-1}(\Omega X)$. Si aplicamos la sucesión exacta anterior a la fibración del espacio de trayectorias $PX \rightarrow X$, obtenemos

$$H_{2n}(\Omega X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n}(PX; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n-1}(\Omega X; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Ahora bien, como PX es contraíble, todos los grupos $H_*(PX; \mathbb{Z})$ de esta sucesión son cero, con lo cual obtenemos el resultado. \square

3.4 Homología singular y geodésicas.

La última aplicación que presentamos en esta tesis aparece también en [Se] y conecta la homología de una variedad riemanniana con sus geodésicas. Para lo referente a variedades riemannianas, nos basamos en las definiciones y resultados de [L].

Lema 3.28. *Sea X conectable por trayectorias y, para cualesquiera $x, y \in X$, sea $P_{x,y}$ el espacio de trayectorias de x a y , con la topología compacto-abierta. Entonces, dados $x_0, x_1, y \in X$, $P_{x_0,y}$ y $P_{x_1,y}$, son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Sea γ una trayectoria fija de x_1 a x_0 . Consideremos las funciones

$$P_{x_0,y} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} P_{x_1,y}$$

$$\sigma \mapsto \gamma * \sigma$$

$$\bar{\gamma} * \tau \leftarrow \tau$$

Veamos que f es continua:

Sea $(K, V) \subseteq P_{x_1,y}$ un abierto de la topología compacto-abierta. Hay tres casos:

Si $K \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, entonces $f(\sigma)(K) = \gamma * \sigma(K) \subseteq V$ si y sólo si $\gamma(2t) \in V$ para toda $t \in K$.

En este caso,

$$f^{-1}(K, V) = \begin{cases} P_{x_0,y} & \text{si } \gamma(2K) \subseteq V \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $2K = \{2t \mid t \in K\} \subseteq [0, 1]$. Así, $f^{-1}(K, V)$ es abierto en $P_{x_0,y}$.

Si $K \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $f(\sigma)(K) = \gamma * \sigma(K) \subseteq V$ si y sólo si $\sigma(2t - 1) \in V$ para toda $t \in K$. En este caso,

$$f^{-1}(K, V) = \{\sigma \in P_{x_0,y} \mid \sigma(2K - 1) \subseteq V\} = (2K - 1, V)$$

donde $2K - 1 = \{2t - 1 \mid t \in K\} \subseteq [0, 1]$. Entonces $f^{-1}(K, V)$ es un abierto de $P_{x_0,y}$.

Si $K \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset \neq K \cap [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $f(\sigma)(K) = \gamma * \sigma(K) \subseteq V$ si y sólo si $\gamma(2(K \cap [0, \frac{1}{2}])) \subseteq V$ y $\sigma(2(K \cap [\frac{1}{2}, 1]) - 1) \subseteq V$. Por lo anterior, $f^{-1}(K, V)$ es la intersección de dos

abiertos, y por lo tanto es abierto en $P_{x_0,y}$.

Así, f es continua y, análogamente, g también lo es.

Ahora bien, para cada $\sigma \in P_{x_0,y}$ se tiene $g \circ f(\sigma) = \bar{\gamma} * (\gamma * \sigma)$. Ésta trayectoria es homotópica a $(\bar{\gamma} * \gamma) * \sigma$, la cual es a su vez homotópica a $c_{x_0} * \sigma$ mediante

$$H_\sigma : I \times I \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto H_\sigma(s, t) = \begin{cases} \bar{\gamma} * \gamma((1-s)2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definimos

$$H : P_{x_0,y} \times I \rightarrow P_{x_0,y}$$

$$(\sigma, s) \mapsto H_\sigma(s, _)$$

Es decir, $H(\sigma, s)$ es la trayectoria tal que $H(\sigma, s)(t) = H_\sigma(s, t)$. Entonces

$$H(\sigma, 0) = H_\sigma(0, _) = (\bar{\gamma} * \gamma) * \sigma$$

$$H(\sigma, 1) = H_\sigma(1, _) = c_{x_0} * \sigma$$

Veamos que H es continua:

Sea (K, U) un abierto de la topología compacto-abierta de $P_{x_0,y}$. Entonces

$$H^{-1}(K, U) = \{(\sigma, s) \mid H_\sigma(s, t) \in U \text{ para toda } t \in K\}$$

Si $K \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, entonces $H_\sigma(s, t)(K) \subseteq U$ si y sólo si $\bar{\gamma} * \gamma \in ((1-s)2K, U)$. Sea $J := \{s \in$

$I \mid \bar{\gamma} * \gamma \in ((1-s)2K, U)\}$. Entonces, en este caso,

$$H^{-1}(K, U) = \begin{cases} P_{x_0, y} \times J & \text{si } J \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } J = \emptyset \end{cases}$$

Dada $s_0 \in J$, para toda $t \in (1-s_0)2K$, $\bar{\gamma} * \gamma(t) \in U$. Como U es abierto, $J' := (\bar{\gamma} * \gamma)^{-1}(U)$ es abierto en I y para toda $t_0 \in J'$ hay una $\varepsilon' > 0$ tal que $\bar{\gamma} * \gamma(t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon') \subseteq U$. Entonces, como $(1-s_0)2K \subseteq J'$, dado $t = (1-s_0)2t'$ con $t' \in K$, existen $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tales que si $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$,

$$t - \varepsilon' < (1-s)2t' < t + \varepsilon'$$

Por lo tanto $\bar{\gamma} * \gamma((1-s)2t') \in U$, para toda $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ y $t' \in K$. Con esto concluimos que J es abierto en I , y por lo tanto $H^{-1}(K, U)$ es abierto.

Por otro lado, si $K \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $H_\sigma(s, t)(K) \subseteq U$ si y sólo si $\sigma \in (2K - 1, U)$, así que

$$H^{-1}(K, U) = (2K - 1, U) \times I$$

el cual claramente es abierto.

Por último, si $K \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset \neq K \cap [\frac{1}{2}, 1]$, entonces, como antes, $H^{-1}(K, U)$ es la intersección de dos abiertos, y por lo tanto es abierto.

Concluimos que H es continua, y por lo tanto es una homotopía entre \tilde{f} y \tilde{g} dadas por

$$\begin{array}{ccc} P_{x_0, y} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{f}} \\ \xleftarrow{\tilde{g}} \end{array} & P_{x_0, y} \\ \sigma & \mapsto & (\bar{\gamma} * \gamma) * \sigma \\ c_{x_0} * \tau & \longleftarrow & \tau \end{array}$$

Notemos que, por lo dicho anteriormente, $\tilde{g} \simeq Id_{P_{x_0, y}}$ y $g \circ f \simeq \tilde{f}$. Así, $g \circ f \simeq$

$Id_{P_{x_0,y}}$. Análogamente puede verse que $f \circ g \simeq Id_{P_{x_1,y}}$, con lo cual f y g son equivalencias homotópicas inversas entre $P_{x_0,y}$ y $P_{x_1,y}$. \square

Corolario 3.29. *Sea X conectable por trayectorias. Entonces, para cualesquiera $a, b, x, y \in X$, los espacios $P_{a,b}$ y $P_{x,y}$ son del mismo tipo de homotopía. En particular, los espacios de lazos $\Omega(X, a)$ y $\Omega(X, x)$ son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Por el lema anterior, $P_{a,b}$ y $P_{x,b}$ son del mismo tipo de homotopía. Simétricamente, podemos decir que $P_{x,b}$ y $P_{x,y}$ son del mismo tipo de homotopía. Así, resulta que $P_{a,b}$ y $P_{x,y}$ son del mismo tipo de homotopía. \square

Teorema 3.30. (*[Se], p.484*) (*M. Morse*) *Sean M una variedad riemanniana completa y conexa, $a \neq b \in X$, $P_{a,b}$ el espacio de trayectorias de a a b en X , y K un campo. Si $H_i(P_{a,b}; K) \neq 0$ para una infinidad de valores de i , entonces hay infinitas geodésicas en X entre a y b .*

Este teorema se sigue del siguiente, que aparece bajo el número 22.5 en [ModGeo]:

Teorema 3.31. (*Teorema Fundamental de la Teoría de Morse*) *Sea M una variedad riemanniana completa, y sean $a, b \in M$ dos puntos no conjugados a lo largo de ninguna geodésica que los una. Entonces el espacio de trayectorias de a a b , $P_{a,b}$, es homotópicamente equivalente a un complejo CW cuyas celdas de dimensión n están en correspondencia biyectiva con las geodésicas de índice n de a a b .*

Lema 3.32. (*P. Smith*) *Sea M una variedad conexa de dimensión n , acíclica (es decir, $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ para toda $i > 0$). Si hay una acción de espacio cubriente (acción propiamente discontinua) de un grupo G en M , entonces G **no** tiene elementos $\neq e$ de orden finito.*

Demostración. Consideremos el espacio de órbitas M/G , el cual también es una variedad y es de dimensión $\leq n$. Entonces, para toda $q > n$ se tiene $H_q(M/G; \mathbb{Z}) = 0$. Por otro lado, para toda i , $H_i(M/G; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}) := H_i(BG; \mathbb{Z})$ (ver [MacL], capítulo IV, Teorema

11.5). Por otro lado, $S^\infty/\mathbb{Z}_n = B\mathbb{Z}_n$ y, como S^∞ es contraíble, $H_i(S^\infty/\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}) \cong H_i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z})$. Entonces, por lo visto en 1.33, los grupos de homología de $B\mathbb{Z}_n$ son no nulos en infinitas dimensiones (son isomorfos a \mathbb{Z}_n en dimensiones impares y 0 en las dimensiones pares ≥ 2). Así, vemos que el grupo G en cuestión no puede ser un grupo cíclico no trivial de orden finito. Más aún, G no puede tener elementos de orden finito, pues el subgrupo cíclico generado por un elemento también actúa en M , y su acción también es una acción de espacio cubriente. \square

Teorema 3.33. (*[Se], pp.484-485*) *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n , completa y conexa tal que $H_i(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ para algún $i \geq 1$. Entonces, para cualesquiera dos puntos distintos $a, b \in M$, hay una infinidad de geodésicas en M que los unen.*

Demostración. Sea $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ la aplicación cubriente universal de M . Entonces \tilde{M} admite una métrica riemanniana con la cual es completa (ver [L], lema 11.6). Sean $a \neq b \in M$ y consideremos un punto fijo $a' \in p^{-1}(\{a\})$. Existe una correspondencia biyectiva entre las geodésicas en \tilde{M} que unen a a' con los elementos de $p^{-1}(\{b\})$, y las geodésicas en M que unen a los puntos a y b ([L], 11.6). Por otro lado, el teorema de Hopf-Rinow ([L], teorema 6.13) nos dice que existe al menos una geodésica entre cualesquiera dos puntos de una variedad completa y conexa. Así, si el conjunto $p^{-1}(\{b\})$ es infinito, habrá una infinidad de geodésicas entre a y b . Éste es el caso si $\pi_1(M)$ es un grupo infinito.

Veamos que si $\pi_1(M)$ es finito, también se puede mostrar que hay infinitas geodésicas entre cualesquiera dos puntos (distintos) de \tilde{M} :

Lo primero es que, por el lema 3.32, debe haber al menos un entero positivo i tal que $H_i(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \neq 0$, pues de otro modo \tilde{M} sería una variedad acíclica en la que habría una acción de espacio cubriente de un grupo finito. Entonces, por el lema 3.14, hay un campo para el cual alguno de los grupos de homología $H_p(\tilde{M}; K)$ es no trivial. Más aún, podemos afirmar que $p \geq 2$, pues \tilde{M} es simplemente conexa. Como \tilde{M} es de dimensión finita ($\dim \tilde{M} = \dim M = n$), $H_k(\tilde{M}; K) = 0$ si $k > n$ y $H_n(\tilde{M}; K) \neq 0$. Así, podemos aplicar la

proposición 3.25 y concluir que hay una infinidad de enteros i tales que $H_i(\Omega\tilde{M}; K) \neq 0$ (aquí, $\Omega\tilde{M}$ es el espacio de lazos de \tilde{M}).

Ahora bien, por el 3.29, para cualesquiera dos puntos $a, b \in \tilde{M}$, los espacios $P_{a,b}$ y $\Omega\tilde{M}$ son del mismo tipo de homotopía, y por tanto tienen la misma homología. Así, vemos que para cualesquiera $a, b \in \tilde{M}$ hay infinitos enteros i tales que $H_i(P_{a,b}; K) \neq 0$. Por la proposición 3.30, concluimos que hay infinitas geodésicas entre cualesquiera dos puntos de \tilde{M} y, por lo tanto, también de M . □

A Apéndice algebraico

Lema A.1. Sean I un conjunto de índices y $(\{L_i\}_I, \{L_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} L_j\}_{i \leq j})$, $(\{M_i\}_I, \{M_i \xrightarrow{\mu_{ij}} M_j\}_{i \leq j})$, $(\{N_i\}_I, \{N_i \xrightarrow{\nu_{ij}} N_j\}_{i \leq j})$ sistemas directos de R -módulos. Si para cada $i \in I$ hay una sucesión exacta

$$L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$$

y los morfismos f_i, g_i son tales que $\mu_{ij} \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}$, $\nu_{ij} \circ g_i = g_j \circ \mu_{ij}$, entonces la sucesión

$$\operatorname{colím}_i L_i \rightarrow \operatorname{colím}_i M_i \rightarrow \operatorname{colím}_i N_i$$

es exacta.

Demostración. Ver, por ejemplo, el teorema 4.7.3. de [Hw]. □

Lema A.2. (Propiedades de $Tor_n(-, -)$) Sean $A_R \in \text{Mód-}R$ y ${}_R B \in R\text{-Mód}$. Entonces:

1. $Tor_n^R(A, B)$ no depende de la resolución proyectiva de A .
2. $Tor_n^R(A, B) \cong Tor_n^R(B, A)$.
3. $Tor_0^R(A, B) \cong A \otimes_R B$
4. si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ es exacta, entonces se tiene las sucesiones exactas largas

$$\dots \rightarrow Tor_1(A, N) \rightarrow Tor_1(B, N) \rightarrow Tor_1(C, N) \rightarrow A \otimes N \rightarrow B \otimes N \rightarrow C \otimes N \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow Tor_1(M, A) \rightarrow Tor_1(M, B) \rightarrow Tor_1(M, C) \rightarrow M \otimes A \rightarrow M \otimes B \rightarrow M \otimes C \rightarrow 0$$

donde todos los funtores Tor y \otimes son sobre R .

Demostración. Ver, por ejemplo, la sección 8 el capítulo III. de [Hi], así como la sección 11. del capítulo IV.. □

Proposición A.3. Si A_R o ${}_R B$ son proyectivos, entonces para toda $n \geq 1$, $Tor_n^R(A, B) = 0$.

Demostración. Para ${}_R P$ proyectivo, $\dots = P_2 = P_1 = 0 \rightarrow P_0 = P \rightarrow 0$ es una resolución proyectiva, de modo que para $n \geq 1$, $Ker(0 = P_n \otimes B \rightarrow P_{n-1} \otimes B) = 0$ y luego $Tor_n^R(P, B) = 0$ para toda $n \geq 1$. \square

Teorema A.4. Son equivalentes, para P_R :

1. P es plano.
2. para todo ${}_R M$, $Tor_1^R(P, M) = 0$.
3. para todo ${}_R M$ y toda $n \geq 1$, $Tor_n^R(P, M) = 0$.

Demostración. Todos los funtores Tor y \otimes son sobre el anillo R .

Claramente 3. implica 2.

Por el lema A.2, dada $0 \rightarrow_R A \rightarrow_R B \rightarrow_R C \rightarrow 0$ tenemos la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow Tor_1(P, A) \rightarrow Tor_1(P, B) \rightarrow Tor_1(P, C) \rightarrow P \otimes A \rightarrow P \otimes B \rightarrow P \otimes C \rightarrow 0$$

Así, si P satisface 2., entonces se tiene

$$0 \rightarrow P \otimes A \rightarrow P \otimes B \rightarrow P \otimes C \rightarrow 0$$

con lo cual P es plano.

Por último, sean P plano y $0 \rightarrow_R K \rightarrow_R X \rightarrow_R M \rightarrow 0$ exacta con X proyectivo (todo módulo tiene una presentación libre y por tanto proyectiva). Entonces, por A.3, tenemos la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow Tor_1(P, X) = 0 \rightarrow Tor_1(P, M) \rightarrow P \otimes K \rightarrow P \otimes X \rightarrow P \otimes M \rightarrow 0$$

Como P es plano, $P \otimes K \rightarrow P \otimes X$ es inyectiva, con lo cual $Tor_1(P, M) = 0$. Ahora, si $Tor_k(P, M) = 0$ para todo módulo M , $i = 1, \dots, n-1$, se tiene la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow Tor_n(P, X) = 0 \rightarrow Tor_n(P, M) \rightarrow Tor_{n-1}(P, K) = 0 \rightarrow \dots$$

donde el primer cero se da por A.3. Concluimos que para toda $n \geq 1$ y todo ${}_R M$, $Tor_n(P, M) = 0$. □

Lema A.5. Si $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, entonces A es un grupo de torsión.

Demostración. Si $x \in A$ es de orden infinito, como ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es plano (es libre de torsión y \mathbb{Z} es un dominio de ideales principales), tendríamos un monomorfismo

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

así que $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$. □

Proposición A.6. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y A un grupo abeliano

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, A) \cong \{a \in A \mid na = 0\}$$

Demostración. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{-n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

es una resolución libre y por tanto proyectiva de \mathbb{Z}_n . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, A) &\cong H_1(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\cdot n \otimes Id_A} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A) \\ &\cong \text{Ker}(\cdot n \otimes Id_A) \\ &\cong \text{Ker}(Id_{\mathbb{Z}} \otimes n \cdot) \\ &\cong \{a \in A \mid na = 0\} \end{aligned}$$

donde el tercer isomorfismo se da pues $\cdot n \otimes Id_A(k \otimes a) = kn \otimes a = k \otimes na$, y el último se tiene por el isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} A &\cong \mathbb{Z} \otimes A \\ a &\mapsto 1 \otimes a \end{aligned}$$

□

Proposición A.7. Sean R un anillo noetheriano y $M_{R,R} N$ R -módulos finitamente generados. Entonces

$$\text{Tor}_i^R(M, N)$$

es finitamente generado, para toda i .

Demostración. Como M es finitamente generado, podemos tomar una resolución proyectiva $\dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ con los F_i módulos derechos libres finitamente generados. Entonces cada $F_i \otimes_R N$ es también finitamente generado y por lo tanto noetheriano, con lo cual los módulos $\text{Tor}_i^R(M, N) = H_i(F_i \otimes_R N)$ resultan finitamente generados. □

Bibliografía

- [AGP] Aguilar, Marcelo, Gitler, Samuel y Prieto, Carlos. Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint. Springer-Verlag, Nueva York, 2002.
- [Ca] Cartan, Henri. Séminaire de Topologie Algébrique, tomo III. École Normale Supérieure, París, 1950-1951.
- [Fe] Ferrario, Davide L. y Piccinini, Renzo A.. Simplicial Structures in Topology. Springer, Nueva York, 2011.
- [Gl] Gleason, A.M. . Spaces with a compact Lie group of transformations. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 1 No. 1. (Feb. 1950), pp. 35-43.
- [Gr] Gray, Brayton. Homotopy Theory. An Introduction to Algebraic Topology. Academic Press, Nueva York, 1975.
- [GrH] Greenberg, M.J. y Harper, J. . Algebraic Topology. A first course. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [HaAT] Hatcher, Allen. Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HaSS] Hatcher, Allen. Spectral Sequences in Algebraic Topology, 2004 a la fecha. Publicado en <https://www.math.cornell.edu/hatcher/>.
- [Hi] Hilton, Peter John y Stammbach, Urs. A Course in Homological Algebra. Springer-Verlag, Nueva York 1997.
- [Hw] Hazewinkel, Michiel. Algebras, Rings and Modules. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [L] Lee, John M. . Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. Springer-Verlag, Nueva York, 1997.

- [MacL] MacLane, Saunders. Homology. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [MCH] McCleary, John. A History of Spectral Sequences: Origins to 1953, en James, Ioan (ed.), History of Topology, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [MCG] McCleary, John. A User's Guide to Spectral Sequences.
- [Mi] Milnor, John. On Axiomatic Homology Theory. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 12 No. 1, 1962, pp. 337-341.
- [MiGeom] Milnor, John. On the Geometric Realization of a Semi-Simplicial Complex. The Annals of Mathematics, Vol. 65, No, 2 (Mar., 1957), pp. 357-362.
- [ModGeo] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. y Novikov, S.P.. Modern Geometry - Methods and Applications: Part 3: Introduction to Homology. Springer-Verlag, Nueva York, 1990.
- [No] Novikov, S.P. , Taimanov, I.A. . Topological Library. Part 3: Spectral Sequences in Topology. World Scientific, 2012.
- [Se] Serre, Jean-Pierre. Homologie Singulière des Espaces Fibrés. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 54, No. 3. (Nov., 1951), pp. 425-505.
- [Sp] Spanier, Edwin H.. Algebraic Topology. Springer-Verlag, Nueva York, 1981.
- [St] Strøm, Arne. Note on Cofibrations II. Mathematica Scandinavica, vol. 22, 1968, pp. 130-142.
- [Sw] Switzer, Robert. Algebraic Topology - Homotopy and Homology. Springer-Verlag, Berlín, 2002.
- [We] Weibel, Charles. An Introduction to Homological Algebra. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [Wh] Whitehead, J.H.C. . Combinatorial Homotopy I. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 55, No. 3. (1949), pp. 213-245.
- [WhG] Whitehead, George. Elements of Homotopy Theory. Springer, 1978.