UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y GEOMÉTRICAS DEL CONJUNTO CANTOR.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN.

PRESENTA

JONATHAN JAIR SÁNCHEZ CONTRERAS

ASESOR: ADRIANA DÁVILA SANTOS

AGOSTO 2019 — **Naucalpan de Juárez. Estado de México.**

Propiedades topológicas y geométricas del conjunto Cantor.

Dedicado a los que opinan
que nada es más importante
que el conocimineto, pero,
sobre todo, a los que aún
no opinan así.

Índice general

Introducción

El objetivo es presentar al conjunto Cantor y algunas propiedades que posee. La idea es dar una exposición detallada sobre dicho conjunto, de tal manera que se pueda comenzar con una construcción intuitiva, que dé paso a la construcción algebraica.Con la finalidad de generar un compendio para alumnos que inician en licenciatura, o de estudios superiores que quieran conocer o ampliar su comprensión en los temas y conceptos aquí desarrollados. Además, el lector de este trabajo contará con temas de autocontenido y con algunos conceptos previos.

Delimitación del problema

El principal problema con el que se trata, es que la literatura dedicada en su totalidad al desarrollo detallado del tema es muy escasa, cuando se le agrega la condición de que sea en español los resultados se reducen más.
Cuando se habla del conjunto Cantor es común encontrarse con la clásica construcción geométrica y algunas definiciones alternas, pero difícilmente con un desarrollo algebraico, es común encontrar en libros de topología propiedades referentes al conjunto como concepto general, y a lo más alguna mención del conjunto como caso particular o ejercicio.
En mi experiencia muchas veces el desarrollo detallado de ciertos temas particulares ayuda mucho a la formación básica y a la buena comprensión de conceptos más generales, por lo tanto se nota el evidente problema que genera el no tener un compendio sobre el tema que sea fácil de seguir de una manera autodidacta.
Actualmente con el poder de Internet y los sitios Web existe una variedad enorme de posibilidades de consultar información sobre el conjunto Cantor y sobre sus propiedades topológicas, pero en la mayoría de ellos se suponen muchos conceptos previos y no se detienen a una exposición, solo se remiten a la prueba matemática.

Justificación

La falta de una exposición sobre el tema para alumnos que inician en licenciatura puede generar ciertas dudas e inquietudes, que son fácilmente corregidas con una exposición detallada sobre el tema.Por eso me resulta interesante y vale la pena dedicarle tiempo a este tema, ya que el conjunto Cantor por ser un conjunto que cumple una gran cantidad de características topológicas, funge como herramienta perfecta para incursionar en conceptos e ideas que son de suma utilidad en el avance de la matemática actual, por ende, en el desarrollo académico personal de quien lo desee.

Formulación de objetivos

- Brindar biografías de los involucrados con el conjunto Cantor.
- Introducción de conceptos básicos previos al desarrollo.
- Construcción geométrica del conjunto.
- Hacer observaciones de la construcción geométrica.
- Construcción algebraica del conjunto.
- Exponer las propiedades topológicas con las que cumple Cantor.
- Construcción de conjuntos tipo Cantor que muestra una primera generalización del conjunto.
- Construcción del conjunto Cantor en dos y tres dimensiones.
- Construcción de conjuntos en base al conjunto Cantor.

Marco teórico conceptual

El conjunto Cantor se definió formalmente a mediados de 1875 y sus propiedades han sido estudiadas desde entonces por topológos y analistas, quienes descubrieron que el conjunto Cantor está dotado de muchas cualidades interesantes como la de ser compacto, denso en sí mismo, perfecto, entre otras, las cuales le han permitido ser una herramienta en la construcción de contraejemplos y una excelente primera prueba para la validez de enunciados que se están por demostrar.
El conjunto Cantor inicialmente descrito por Henry John Stephen Smith debe su nombre al matemático Georg Cantor por ser este último quien lo hizo popular en 1883.

Entre sus múltiples definiciones podemos describir al conjunto Cantor como el conjunto de todos los puntos del intervalo real $[0,1]$ que admiten una representación en base 3 que no utilice el dígito 1, teniendo en cuenta que en nuestro sistema, 1 puede ser representado como 0.9999999... .
El conjunto Cantor debe su nombre y fama al matemático Georg Cantor, pero su primera aparición pública o descubrimiento se debe al matemático Henry Smith, quien en un artículo titulado “On the integration of discontinuous functions” o “Sobre la integración de funciones discontinuas” por su traducción al español, introduce la definición de un conjunto extremadamente parecido al conjunto Cantor que se conoce actualmente.
Pero no fue hasta 1883 cuando Georg Cantor introduce el conjunto que lleva su nombre, en una serie de seis artículos, que van desde 1979 hasta 1884 bajo el titulo de “Über unendliche, lineare punktmannichfaltigkeiten” publicados en los Matematische Annalen donde en el quinto de estos artículos incluye lo que se conoce actualmente como el conjunto Cantor como un ejemplo de un conjunto Perfecto.
Lo expresa bajo la definición de un conjunto cuyos puntos se pueden expresar como: $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ donde cada a_n toma valores de 0 ó 2.

Véase [9].

Capítulo 1

Antecedentes del conjunto Cantor

Antes de comenzar toda la exposición sobre el conjunto Cantor vale la pena destinarle tiempo a responder las siguientes preguntas:
¿Dónde aparece el conjunto Cantor?, ¿a quién se le atribuye su descubrimiento?, esto con el fin de conocer un poco, de las demás aportaciones a la matemática que les debemos a estas grandes personalidades que dedicaron prácticamente toda su vida a la investigación y a la aportación en la difícil tarea de la trascendencia del conocimiento humano, lo que deja en claro que es una tarea ardua y demandante llena de una constante superación personal, donde sus resultados valen toda la dedicación aún cuando quien se incursiona en esta labor no llega a ver el fruto de sus grandiosas ideas. Es importante dar un contexto en cuanto a los conceptos y definiciones básicas que se ocuparán durante la exposición del presente tema, lo que permite una homogeneidad en cuanto al significado de los conceptos y definiciones que se requieren, para evitar así la necesidad de reparar mucho en estos a lo largo del desarrollo posterior.

1.1. Biografías.

En el presente apartado se brinda una biografía con los aspectos más resaltables de la vida de los dos matemáticos que jugaron un papel importante tanto en el avance de la matemática, como para el desarrollo del conjunto Cantor.

Henry John Stephen Smith
2 de Noviembre de 1826 - 9 de Febrero de 1883

Figura 1.1: Henry Smith

Fue un matemático y astrónomo amateur irlandés, trabajó en divisores elementales, formas cuadráticas y en la famosa fórmula Smith-Minkowski-Siegel en teoría numérica. En teoría de matrices se recuerda su nombre en la forma normal de Smith.

Su familia migró a Inglaterra donde vivió en distintos lugares, no recibió educación escolar hasta que cumplió 11 años de edad, cuando tuvo la oportunidad de tener tutores privados. Cuando cumplió 15 años fue admitido en la escuela Rugby en Warwickshire, a los 19 años entró al Balliol College en Oxford donde se graduó con los más altos honores en matemáticas en 1849, en donde se convirtió en profesor de matemáticas, rápidamente fue promovido como "Fellow".

En 1861 fue promovido a la "Savilian Chair of Geometry" en Oxford para después, en 1873, ser beneficiario como "Fellowship" en Corpus Christi College en Oxford, por lo que renunció a enseñar en Balliol.

A causa de su gran desempeño, Smith era muy solicitado por administraciones académicas y comités de trabajo, fue cuidador del museo de la universidad de Oxford, matemático revisor de la universidad de Londres, miembro de la real comisión para la revisión de la práctica de la educación científica, miembro de la comisión para reformar el gobierno de la universidad de Oxford, presidente del comité de científicos que supervisan la oficina meteorológica, dos veces presidente de la Sociedad Matemática de Londres, entre muchos otros cargos.

Murió en 1883 y fue enterrado en el St Sepulchre's Cementery en Oxford.
Véase [8].
Imagen tomada de:
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Henry_John_Stephen_Smith

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
3 de Marzo de 1845 - 6 de Enero de 1918

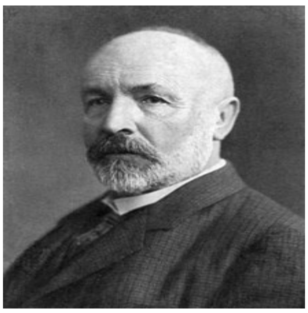

Figura 1.2: Georg Cantor

Fue un matemático y lógico nacido en Rusia, aunque de ascendencia alemana y judía, mundialmente conocido por ser el fundador de la teoría de conjuntos junto con Dedekind y Frege, la cual es la base de las matemáticas modernas.

Debido a sus investigaciones sobre conjuntos infinitos fue el primero que formalizó la noción de infinito bajo los números cardinales, que determinan la cantidad de elementos en un conjunto. Y es a quien debe el nombre el conjunto Cantor.

Vivió una vida aquejado por la depresión que se presumía eran causados por las criticas que recibía debido a sus ideas y a sus fallidos intentos en la búsqueda de la demostración de la hipótesis del continuo, aunque en la actualidad se cree que padecía de un tipo de depresión denominada ciclo-maníaca. Su primera educación fue impartida por un tutor privado, posteriormente ingreso a la escuela elemental de San Petesburgo, cuando su familia emigro a Alemania, asistió a escuelas privadas de Fráncfort y Darmstat hasta que a los 15 años ingresó al instituto de Wiesbaden.

En 1862 comenzó sus estudios universitarios en Zúrich pero un año después al morir su padre, pasó a la universidad de Berlín donde se especializó en matemáticas, filosofía y física, siendo alumno de grandes maestros como Ernst Kummer, Karl Weierstrass y Leopoldo Kronecker.

A los 27 años se convirtió en catedrático en la universidad de Halle, donde comenzaron sus primeras investigaciones, las cuales se centraban en las series de Fourier, las cuales le llevaron al desarrollo de la teoría de los números irracionales y en 1874 apareció su primer trabajo sobre teoría de conjuntos.

En su estudio de conjuntos infinitos Cantor postuló su idea de que no todos tenían el mismo tamaño, es decir, había infinitos más grandes que otros, idea que su profesor Kronecker clasificó como una locura. Este hecho marcó la vida del matemático, ya que fue criticado y acusado hasta el cansancio por muchas escuelas y personas que no comprendían sus descubrimientos, además dedicó muchos años en tratar de demostrar la famosa hipótesis del continuo, que ahora se sabe es algo imposible.

Dentro de sus avances logro sistematizar el conjunto de los números reales y presentó el concepto de conjunto abierto, es el autor del "principio de los intervalos encajados" que es muy usado en análisis matemático y fue el creador de muchos espacios en topología y en teoría de la medida.

Perdió la vida debido a un paro cardíaco en la clínica psiquiátrica de Halle.
Imagen tomada de:
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
Véase [2].

1.2. Conceptos previos

Antes de comenzar la exposición del conjunto Cantor este apartado se encarga de definir algunos de los conceptos que se ocupan durante las secciones posteriores, esto con la finalidad de brindar los detalles a quien los desconoce y, para quien los conoce, dar un medio de consulta.

Para el desarrollo de esta sección mostramos algunos conceptos los cuales su definición formal requiere de un tratamiento que supera el alcance del presente trabajo, aclarado esto, para dichos conceptos daremos una definición intuitiva, la cual nos será de utilidad para la exposición de los capítulos posteriores.

1.2.1. Conjuntos

Definición 1.2.1.
Para nuestros fines, definimos un ***conjunto*** *como una colección de objetos.*

Por ejemplo, el conjunto formado por ciertas personas ó el conjunto formado por las vocales.

En matemáticas trabajamos principalmente con conjuntos de objetos matemáticos, por ejemplo, un conjunto formado por figuras geométricas, un conjunto formado por ciertos números, etc. Para poder trabajar con un conjunto es importante conocer todos sus elementos, es decir, los objetos individuales de los que se conforma el conjunto. Dicho de otra manera un conjunto queda determinado por sus elementos.

Normalmente se van a denotar a los conjuntos mediante las primeras letras mayúsculas del alfabeto y a sus elementos con las letras minúsculas, tenemos dos formas de expresar un conjunto, ya sea por extensión, que es una lista de sus elementos de forma que quede claro por quien está conformado el conjunto, o mediante comprensión, que está dada por una propiedad especifica con la que cumplen todos sus elementos.

Ejemplo 1.2.1.

$$A = \{a, e, i, o, u\} \;\; y \;\; B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$$

Son los mismos que estos otros respectivamente:

$$A = \{x|x \text{ es una vocal}\} \;\; y \;\; B = \{x|x \text{ es un número par}\}$$

La notación anterior se lee como "A es el conjunto conformado por elementos equis tales que equis es una vocal" y "B es el conjunto de elementos equis tales que equis es un número par."

Ahora que sabemos denotar un conjunto, nos gustaría tener una notación para expresar cuándo un elemento forma parte de nuestro conjunto y cuándo no, se hace de la siguiente manera:

- $a \in A$ ("a es un elemento de A" o "a pertenece a A").
- $a \notin A$ ("a no es un elemento de A" o "a no pertenece a A").

Un conjunto no depende del orden de sus elementos, ni de la cantidad de veces que aparecen en el conjunto.

Ejemplo 1.2.2.

$$\text{Sean } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 1, 3, 2, 5\} \quad y \quad C = \{1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5\}$$

representan el mismo conjunto.

Definición 1.2.2.
Exite un conjunto sin elementos,al cual denotamos por ***conjunto vacío****, se define por* $\emptyset = \{x|x \neq x\}$*, es un conjunto sin elementos.*

Definición 1.2.3.
Decimos que Y *es un* ***subconjunto*** *de* X *siempre que se cumpla que si* $x \in Y$ *entonces* $x \in X$.

Observación 1.2.1.
$X = Y$ *si* $X \subseteq Y$ *y* $Y \subseteq X$.

Un subconjunto de un conjunto dado se puede entender como la colección de ciertos elementos de un conjunto.

Ejemplo 1.2.3.
Sean $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, ..., z\}$ *y* $B = \{a, e, i, o, u\}$
Decimos que B *es un subconjunto de* A*, es decir, el conjunto de las vocales es un subconjunto del conjunto de las letras del abecedario y se denota como* $B \subseteq A$*, análogamente* $C \nsubseteq D$ *si* C *no es subconjunto de* D*.*
Véase la figura 1.3

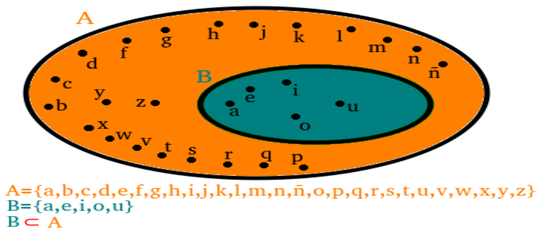

Figura 1.3: Subconjunto

Observación 1.2.2.
La notación $A \subset B$ *significa que* A *es subconjunto de* B *excluyendo la posibilidad* $A = B$*, mientras que la notación* $A \subseteq B$*, indica que se puede dar el caso donde* $A = B$*.*

Ahora necesitamos saber construir más conjuntos a partir de los que tenemos, para esto nos sirve el álgebra de conjuntos, la cual nos brinda las siguientes operaciones:

Definición 1.2.4.
Si tenemos dos conjuntos A *y* B *podemos construir un nuevo conjunto que conste de los elementos de* A *y* B*, a este nuevo conjunto se le denomina la* ***unión*** *de* A*,* B*, se denota por* $A \cup B$ *y es el conjunto definido por*
$A \cup B = \{x | x \in A \ \ o \ \ x \in B\}$.

Observación 1.2.3.
Se puede realizar con más de dos conjuntos, es decir, si tuvieramos n *cantidad de conjuntos* $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$ *su unión es* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_n$ *la cual por facilidad de*
notación escribimos como $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$*, esta consta de todos los elementos de los conjuntos* A_i*. Véase la figura 1.4*

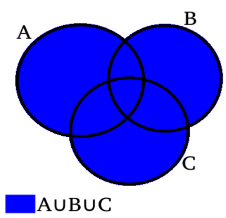

Figura 1.4: Unión

Ejemplo 1.2.4.
Si tenemos que $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ *y* $B = \{a,b,c,d\}$ *entonces* $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,a,b,c,d\}$*.*

Definición 1.2.5.
Para nuestro estudio podemos definir a una ***familia de conjuntos*** *como un conjunto* $\mathscr{F}$ *cuyos elementos son conjuntos.*

Definición 1.2.6.
Sea $\mathscr{F}$ *una familia de conjuntos definimos su unión como* $x \in \bigcup \mathscr{F}$*, si* $x \in A$ *para algún* $A \in \mathscr{F}$*.*

Observación 1.2.4.
Por la Definición1.2.4 tenemos que $A \subseteq A \cup B$ *y* $B \subseteq A \cup B$*.*

Definición 1.2.7.
Si tenemos dos conjuntos, A *y* B*, nos interesa conocer los elementos que son a la vez elementos de* A *y de* B*, a este nuevo conjunto conformado por los elementos en común de dos conjuntos se le conoce como intersección, se denota por* $A \cap B$ *y se define como* $A \cap B = \{x | x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$*.*

Observación 1.2.5.
La intersección se puede expresar en términos de más de dos conjuntos, si tenemos n *cantidad de conjuntos* $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$ *su intersección es* $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ... \cap A_n$ *la cual por facilidad de notación escribimos como* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$*, esta consta de todos los elementos en común de los conjuntos* A_i*. Véase la figura1.5.*

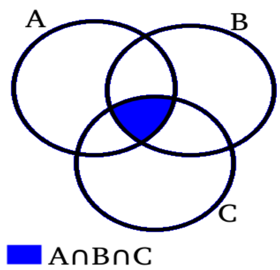

Figura 1.5: Intersección

Ejemplo 1.2.5.
Por ejemplo, sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *y* $B = \{a,b,c,d,3,2\}$*, entonces* $A \cap B = \{3,2\}$*.*

Definición 1.2.8.
Sea $\mathscr{F}$ *una familia de conjuntos definimos su intersección como* $x \in \bigcap \mathscr{F}$*, si* $x \in A$ *para todo* $A \in \mathscr{F}$*.*

Observación 1.2.6.
Por la Definición1.2.7 tenemos que $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$*.*

Definición 1.2.9.
Si tenemos dos conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$ *decimos que* A *y* B *son* ***disjuntos*** *o* ***ajenos****.*

Definición 1.2.10.
Si tenemos dos conjuntos A y B, podemos construir un nuevo conjunto que conste de los elementos de A y que no contenga a los elementos de B a este nuevo conjunto se le conoce como la ***diferencia*** *de A, B, se denota por $A \setminus B$, y se define por $A \setminus B = \{x | x \in A \ \ y \ \ x \notin B\}$. Véase la figura1.6.*

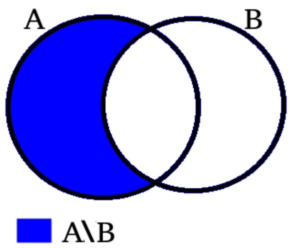

Figura 1.6: Diferencia

Una de las operaciones más importantes entre conjuntos es el producto cartesiano, resulta de relacionar los elementos de un conjunto con los del otro.
Este se define de manera que se forman todas las parejas posibles con los elementos de los conjuntos de una manera ordenada.
El producto cartesiano se denota como $A \times B$.

Definición 1.2.11.
Sean A y B dos conjuntos dados, el producto cartesiano se define como $A \times B = \{(a, b) \ | a \in A \ \ y \ \ b \in B\}$.

Ejemplo 1.2.6.
Supongamos que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ entonces
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
Lo anterior se visualiza de una mejor manera si se trabaja de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|ccc} b & (1,b) & (2,b) & (3,b) \\ a & (1,a) & (2,a) & (3,a) \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Note que se están dando todas las posibles parejas en las que los primeros elementos son los que pertenecen a A y los segundos los que pertenecen a B.

Observación 1.2.7.
Por la Definición1.2.11 se puede notar que $A \times B$ es distinto que $B \times A$.

Muchos de los conceptos que se trabajan en matemáticas dependen de conjuntos de números específicos, los cuales se mencionaran sin dar una definición formal ya que esta se sale del objetivo del presente trabajo.

Definición 1.2.12.
El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ y se define como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$.
Por como definimos a los naturales tenemos que $0 \notin \mathbb{N}$ así que denotamos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Los números naturales tienen su fundamento en algo que se denomina sistemas de Peano*, cosa que no se tratará en el presente texto pero se menciona para el lector interesado.
El conjunto de los números naturales es un conjunto que contiene una infinidad de números, es decir, es un conjunto infinito, lo cual suena lógico si se piensan como los números que utilizamos para contar.
Véase la figura1.7.
*Véase Carme Laveaga, *Álgebra Superior*, Dirección General de Publicaciones, México 2016, Capítulo 5.

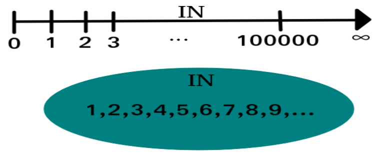

Figura 1.7: Números naturales

El conjunto de los enteros se denota por $\mathbb{Z}$ y este conjunto surge por una necesidad básica de representar cantidades negativas, ya que en el conjunto de los naturales podemos hacer la resta de cualquiera dos elementos $a, b \in \mathbb{N}$, $a - b$ solamente si $a \geq b$. Por ejemplo, podemos efectuar $6 - 3 = 3$ porque 6 es mayor que 3 pero si tratamos de efectuar ahora $3 - 6$ el resultado no es un número natural, entonces dentro de los naturales la resta $a - b$ cuando $b > a$, no está definida, en este sentido los números naturales quedan limitados, por esto se definen los números enteros que no son otra cosa que agregarle a los naturales su copia negativa y el cero, es decir, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Definición 1.2.13.
El conjunto de los enteros se define como $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. *Y en este nuevo conjunto* $\mathbb{Z}$ *ya podemos representar números negativos y positivos.*

Observación 1.2.8.
Por la definición1.2.13 y la Observación1.2.4 tenemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. *Véase figura1.8.*

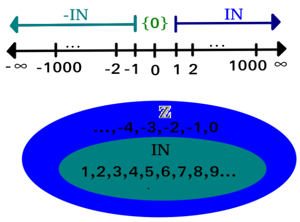

Figura 1.8: Números enteros

El conjunto de los racionales se denota por $\mathbb{Q}$, este, al igual que los enteros, se define por la necesidad de representar cantidades que no existen en los otros conjuntos y que surgen por la idea intuitiva de dividir, por ejemplo, cuando nosotros dividimos una naranja por la mitad nos quedan dos mitades y cada mitad la representamos por $\frac{1}{2} = 0.5$ pero estos valores no existen en los enteros ni en los naturales.

Definición 1.2.14.
Los racionales se definen como $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \ \ y \ \ b \neq 0 \right\}$. *Véase figura1.9.*

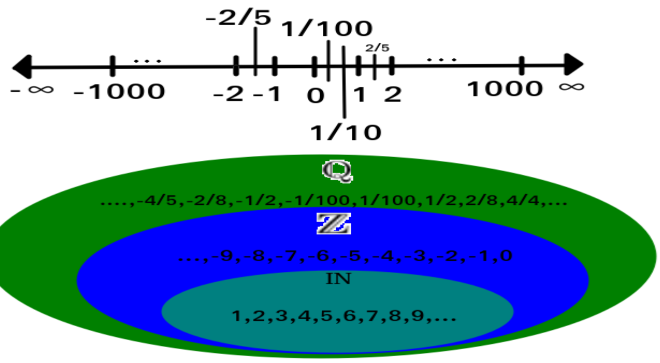

Figura 1.9: Números racionales

El conjunto de los números irracionales se denota por $\mathbb{I}$ y se define por la necesidad de representar números que no contiene ninguno de los conjuntos anteriores.

Definición 1.2.15.
*Los números **irracionales** son aquellos que no se pueden representar de la forma $\dfrac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$, es decir, no se pueden representar como una fracción.*

Definición 1.2.16.
*Sea x un número tal que $x \geqslant 0$, denotamos a su **raíz cuadrada** por $\sqrt{x}$, al número tal que $\sqrt{x} * \sqrt{x} = x$.*

La cantidades irracionales aparece naturalmente cuando intentamos medir algunas distancias, por ejemplo, supongamos el caso de tener un terreno cuadrado que mide 1 metro por lado y deseamos medir la distancia de su diagonal, por el teorema de Pitágoras que relaciona los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa sabemos que $h^2 = a^2 + b^2$, véase figura1.10, resulta que su diagonal mide $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623...$ que es irracional lo cual se demuestra fácilmente.

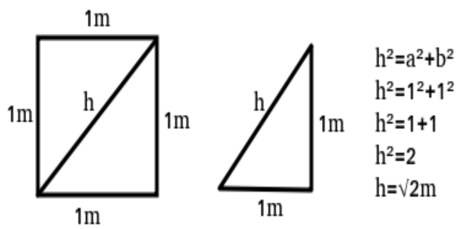

Figura 1.10: Terreno

Teorema 1.2.1.
$\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración.
Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ entonces $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$, podemos suponer que p y q no tiene factores en común.
De lo anterior obtenemos que $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$, lo que nos dice que p^2 es un múltiplo de 2, por lo tanto p es un múltiplo de 2, así $p = 2k$ para un cierto k, esto nos da que $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, lo cual nos dice que q es múltiplo de dos, lo cual contradice que p y q no tienen factores en común, por lo tanto $\sqrt{2}$ no puede ser racional.■

Definición 1.2.17.
Definimos a los Reales como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. *Véase la figura1.11.*

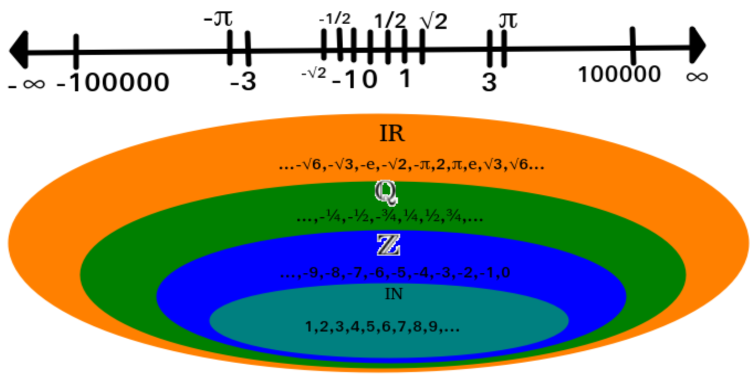

Figura 1.11: Números reales

Definición 1.2.18.

- *Sea* $X \subset \mathbb{R}$, *un subconjunto no vacío,* $s \in \mathbb{R}$, *decimos que* s *es una* ***cota superior*** *de* X *si* $x \leqslant s$, *para toda* $x \in X$.
- *Sea* $X \subset \mathbb{R}$, *un subconjunto no vacío,* $m \in \mathbb{R}$, *decimos que* m *es una* ***cota inferior*** *de* X *si* $m \leqslant x$, *para toda* $x \in X$.

Definición 1.2.19.

- *Sea* $X \subset \mathbb{R}$, *un subconjunto no vacío,* $s \in \mathbb{R}$, *decimos que* s *es el* ***supremo*** *de* X *si cumple que,* s *es una cota superior y además, si* s' *es otra cota superior de* X, *entonces* $s < s'$.
- *Sea* $X \subset \mathbb{R}$, *un subconjunto no vacío,* $m \in \mathbb{R}$, *decimos que* m *es el* ***infimo*** *de* X *si cumple que,* m *es una cota inferior y además, si* m' *es otra cota superior de* X, *entonces* $m' < m$.

Con estas nuevas definiciones, el conjuto de los número reales, tiene una propiedad que lo caracteriza, conocida como el axioma del supremo.

Axioma 1.2.1.
Sea $X \subset \mathbb{R}$, *un subconjunto no vacío, que tenga al menos una cota superior, entonces* X *tiene supremo.*

1.2.2. Funciones

Una función es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo. Es uno de los conceptos más importantes de la matemática ya que nos permite conocer propiedades de conjuntos a tráves de otros.

Definición 1.2.20.
Una función es un conjunto f *de pares ordenados tal que no contiene dos pares distintos con la misma primera componente:* $(a, b), (a, c) \in f \Rightarrow b = c$. *Así sean,* A *y* B *conjuntos dados, denotamos a una función de* A *en* B *por* $f : A \longrightarrow B$.

Por facilidad de notación escribimos $f(a) = b$ en vez de $(a, b) \in f$.

Definición 1.2.21.
El dominio de una función $f : A \longrightarrow B$ *se define como:*
$Dom(f) = \{a \in A | \exists b \in B \text{ tal que } f(a) = b\}$.

Definición 1.2.22.
La imagen de una función $f : A \longrightarrow B$ *se define como:*
$Im(f) = \{b \in B | \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$.

Definición 1.2.23.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ *es inyectiva, si y solo si,* $x_1, x_2 \in X$ *tales que*

$$(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definición 1.2.24.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ *es suprayectiva, si y solo, si* $\forall y \in Y, \exists x \in X$ *tal que* $f(x) = y$.

Definición 1.2.25.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ *es biyectiva, si y solo si, es inyectiva y suprayectiva.*

Dada una función f a cada $x \in Dom(f)$ le corresponde un elemento $y = f(x)$, por lo tanto podemos considerar el par (x, y).

Definición 1.2.26.
La gráfica de una función f *dada es un subconjunto* $G \subset A \times B$*, dado por* $G = \{(x, y) | x \in Dom(f), y = f(x)\}$. *Véase figura1.12.*

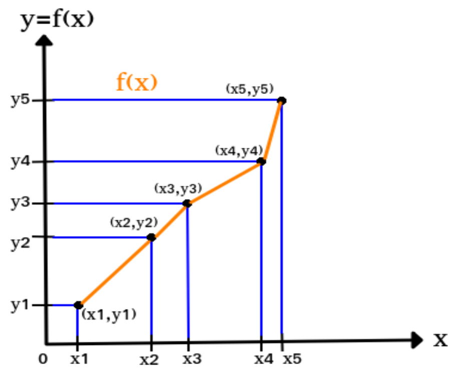

Figura 1.12: Gráfica de una función

Ya que definimos el concepto de función, podemos exponer algunas propiedades sobre conjuntos.

Definición 1.2.27.
Decimos que dos conjuntos dodos A *y* B*, son* ***equipotentes*** *si existe una función biyectiva* $f : A \longrightarrow B$ *y lo denotamos por* $A \approx B$. *Véase la figura1.13.*

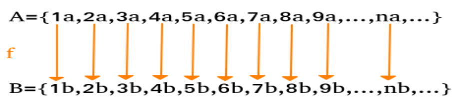

Figura 1.13: Conjuntos equipotentes

Definición 1.2.28.
Decimos que si A es un conjunto tal que $A \approx \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces A es ***finito*** *y tiene n elementos.*
Al número n, se le denomina el ***cardinal*** *de un conjunto y se denota $card(A) = n$ o $|A| = n$.*

Definición 1.2.29.
Decimos que un conjunto es ***infinito*** *si no es finito.*

La diferencia entre un conjunto finito y uno infinito es que si A es un conjunto infinito entonces existe un subconjunto $B \subset A$ tal que $A \approx B$ lo cual es imposible si A es finito.

Definición 1.2.30.
Un conjunto A dado es ***numerable*** *si es equipotente a los naturales, es decir, $A \approx \mathbb{N}$.*

Definición 1.2.31.
Un conjunto A dado es ***contable*** *si es finito o numerable. Vease la figura1.14.*

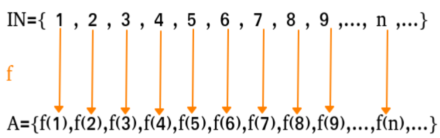

Figura 1.14: Conjunto numerable

La función valor absoluto se ocupará más adelante para definir otros conceptos.

Definición 1.2.32.
Denotamos a los reales no negativos por $\mathbb{R}^+$ y lo definimos como
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$.

Definición 1.2.33.
El valor absoluto es una función $|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geqslant 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$

Teorema 1.2.2.
Sean x, y, z números reales tenemos:

- $|x| \geqslant 0$.
- $|x| = 0$ *solamente si* $x = 0$.
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- $|x - y| = |y - x|$.
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$.
- $|x| \leqslant y$ *es equivalente a* $-y \leqslant x \leqslant y$.
- $|x| \geqslant y$ *es equivalente a* $x \leqslant -y$ *o* $y \leqslant x$.

Los números reales pueden ser representados gráficamente por una recta numérica que va desde $-\infty$ hasta ∞ donde posicionamos el número 0 en el "centro" el cual denominamos origen, a la derecha del cero se representan los reales positivos y a la izquierda los negativos. Véase la figura1.15.

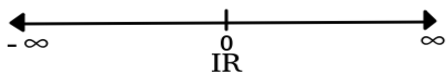

Figura 1.15: Representación gráfica de los reales

Definición 1.2.34.
Un intervalo es un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ tal que si $a, b \in I$ tales que $a \leqslant b$, entonces para todo $c \in I$ tal que $a \leqslant c \leqslant b$ se cumple que $c \in I$.

Definición 1.2.35.
*Llamamos **intervalo cerrado** al subconjunto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definido por $[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq x \leq b\}$ donde $a \leqslant b$.*

Definición 1.2.36.
*Decimos que el tamaño o la **longitud** del intervalo está dado por $|b-a|$ y se denota por $l([a, b]) = |b - a|$.*

Definición 1.2.37.
El límite de una función f dada, cuando x tiende a c es l, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda $x \in Dom(f)$, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$, y se denota $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$. Véase la figura1.16.

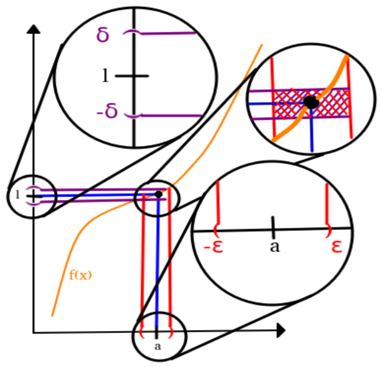

Figura 1.16: Interpretación gráfica de límite.

Definición 1.2.38.
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$, si y solo si, para para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $x > N$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definición 1.2.39.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para toda x , $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Véase la figura1.17.

Definición 1.2.40.
Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $A \subseteq X$ si es continua en cada punto x de A.

Observación 1.2.9.
Por la Definición1.2.37, se dice que una función es continua en x_0, si cumple que:

- $f(x_0)$ *está definido.*
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *está definido.*
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

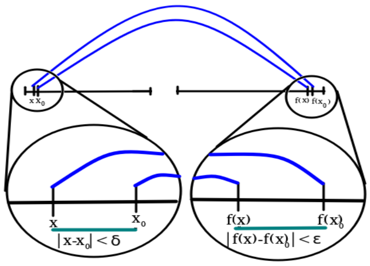

Figura 1.17: Continuidad

1.2.3. Sucesiones y series

Definición 1.2.41.
Una sucesión de números sobre un conjunto A dado, es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, tal que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(n) = a_n$ y se denota por $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Resulta interesante investigar si los términos de una sucesión se aproximan a un número ó si no lo hacen, es decir, por ser una función nos gustaría poder obtener su límite para ver como se comporta a medida de que se obtienen más y más términos.

Ejemplo 1.2.7.

$$\textit{Sea } \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \overbrace{\frac{1}{2}}^{i=1}, \overbrace{\frac{2}{3}}^{i=2}, \overbrace{\frac{3}{4}}^{i=3}, \ldots, \overbrace{\frac{n}{n+1}}^{i=n}, \ldots \right\}$$

Si calculamos más términos vemos que $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots\right\}$
que es lo mísmo que $\{0.5, 0.666666..., 0.75, 0.8, 0.83333..., 0.85714285, 0.875, 0.8888..., 0.9, ...\}$
Esto nos hace intuir que mientras n crece, a_n parece acercarse cada vez más a 1.
Se puede ver que podemos aproximar $\{a_n\}$ hacia 1 agregando cada vez más términos, de esta forma la diferencia entre 1 y el n-ésimo término:
$1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ *se hace pequeña cuando n se hace grande.*
Entonces de acuerdo a esta observación podemos pensar en que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.
Aprovechando que la sucesión es una función podemos visualizarla mendiante su gráfica. Véase la figura1.18.

El Ejemplo1.2.7, nos impulsa a dar la siguiente definición.

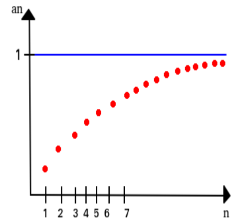

Figura 1.18: Ejemplo de sucesión

Definición 1.2.42.
Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es* ***convergente****, y converge a* l*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *esta definido, es decir,si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N$ *entonces* $|a_n - l| < \varepsilon$*, de lo contrario decimos que la sucesión* ***diverge****.*

Definición 1.2.43.

- *Una sucesión dada* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, es* ***creciente*** *si* $a_n \leqslant a_{n+1}$ *para toda* $n \geqslant 1$*.*
- *Una sucesión dada* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, es* ***decreciente*** *si* $a_{n+1} \leqslant a_n$ *para toda* $n \geqslant 1$*.*

Si una sucesión es creciente o decreciente se le denomina ***monótona****.*

Definición 1.2.44.

- *Una sucesión dada* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, es* ***acotada superiormente*** *si existe* M *tal que* $a_n \leqslant M$ *para toda* $n \geqslant 1$*.*
- *Una sucesión dada* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*,* ***acotada inferiormente*** *si existe* m *tal que* $m \leqslant a_n$ *para toda* $n \geqslant 1$*.*

Si una sucesión es acotada superiormente e inferiormente se denomina simplemente ***acotada****.*

Ahora nuestro interés es en la suma de los términos de una sucesión, pero, ¿tiene sentido hablar de sumas de una infinidad de términos?

Ejemplo 1.2.8.
Intentemos encontrar la suma de los términos de la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n, ...\}$*, primero encontremos la suma para los primeros* n *términos usando un método descubierto por el matemático Carl Friederich Gauss.*
Queremos encontrar la suma S *tal que* $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$ *la idea fundamental está en que da igual sumar al reves, es decir,*
$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + ... + 1$ *, sumando estas dos representaciones de la suma tenemos lo siguiente*

$$\begin{array}{c|ccccccc} S & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... & n \\ S & n & (n-1) & (n-2) & (n-3) & (n-4) & ... & 1 \\ \hline 2S & (n+1) & (n+1) & (n+1) & (n+1) & (n+1) & ... & (n+1) \end{array}$$

Es decir, $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n \text{ veces}}$
sumar n *veces* $(n+1)$ *es igual a multiplicar* $n(n+1)$ *por lo tanto* $2S = n(n+1)$

dividiendo entre 2 resulta que $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *donde* S *es la suma de los primeros* n *términos de* $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.
De esta forma se ve que cuando n *se hace muy grande* S *se hace muy grande por lo tanto la suma* $1+2+3+4+5+...+n+...$ *no está definida.*

El Ejemplo1.2.8 impulsa a investigar cuales sumas infinitas estan definidas y cuales no.

Definición 1.2.45.
Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *definimos su* ***serie*** *asociada, dada por la suma* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$, *que denotaremos por* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición 1.2.46.
Dada una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *definimos sus* ***sumas parciales*** *como:*

$$\begin{gathered}
S_1 = a_1 \\
S_2 = a_1 + a_2 \\
S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
\vdots \\
S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{gathered}$$

Cada S_n *es un número, por lo tanto, las sumas parciales nos definen una sucesión* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *la cual puede tener un límite o no, es decir, puede converger o diverger.*

Definición 1.2.47.
Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *decimos que la serie* ***converge*** *a* S, *si* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *converge, es decir, si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$, *tal que si* $n > N$ *entonces* $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i - S\right| < \varepsilon$, *en caso contrario decimos que a serie* ***diverge****.*

Definición 1.2.48.
Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *al número* S *dado por* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *se le denomina* ***suma*** *de la serie.*

Veamos un caso particular de serie que se denomina geométrica, ya que a lo largo del texto aparecerán, así que estamos interesados en su convergencia.

Lema 1.2.1.
La serie ***geométrica*** *real de término inicial* $a \in \mathbb{R}$, *no nulo y de razón,* $r \in \mathbb{R}$ *es convergente, si y solamente si,* $|r| < 1$. *En tal caso:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

Demostración.
La suma parcial es $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} ar^i = a + ar + ar^2 + ... + ar^n$.
Multiplicando por r *a* S_n *tenemos*

$$rS_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = ar + ar^2 + ... + ar^{n+1}.$$

Restando estas dos expresiones tenemos:

$$\begin{array}{r|cccccc} S_n & a & ar & ar^2 & ... & ar^n & 0 \\ rS_n & 0 & ar & ar^2 & ... & ar^n & ar^{n+1} \\ \hline S_n - rS_n & a & 0 & 0 & ... & 0 & -ar^{n+1} \end{array}$$

Entonces $S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$ *lo que es igual a* $S_n = \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$ *si tomamos* $|r| < 1$ *vemos* $r^{n+1} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

De esta forma $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ *por lo tanto la serie converge.* ■

Ahora podemos usar sumas finitas para dar una representación de valores en distitas bases.
La representación en base 10, requiere de un conjunto formado por 10 dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y las potencias de 10 para representar cualquier cantidad.

Definición 1.2.49.
Sea $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}$ *y* $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *definimos* $x_{base(10)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{10^n}$ *o* $x_{base(10)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} a_n 10^n$, *para algún* $r \in \mathbb{N}$, *como la representación de* x *en base 10.*

De forma similar, podemos representar una cantidad usando un conjunto de dígitos formados por $\{0, 1\}$ y las potencias de 2.

Definición 1.2.50.
Sea $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}$ *y* $a_n \in \{0, 1\}$ *definimos* $x_{base(2)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{2^n}$ *o* $x_{base(2)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} a_n 2^n$, *para algún* $r \in \mathbb{N}$, *como la representación de* x *en base 2 o representación binaria de* x.

Usando ahora un conjunto de dígitos formados por $\{0, 1, 2\}$ y las potencias de 3 tenemos:

Definición 1.2.51.
Sea $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}$ *y* $a_n \in \{0, 1, 2\}$ *definimos* $x_{base(3)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{3^n}$ *o* $x_{base(3)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} a_n 3^n$, *para algún* $r \in \mathbb{N}$, *como la representación de* x *en base 3.*

1.2.4. Topología.

Ya estamos en la posibilidad de dar algunos conceptos de los más básicos, pero de los más importantes en matemáticas, estos se refieren a topología, que se dedica a estudiar las propiedades de los objetos matemáticos que se mantienen, cuando a dichos objetos se les trasforma mediante una función continua.

Definición 1.2.52.
Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, *a la familia de subconjuntos de* X *denotada por* $\mathcal{T}$, *se le denomina* ***topología*** *sobre* X *si cumple con:*

- $X \in \mathcal{T}$ *y* $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- *Para todo* $A \subseteq \mathcal{T}$ *entonces* $\displaystyle\bigcup_{J \in A} J \in \mathcal{T}$.
- *Si* $J_1, J_2 \in \mathcal{T}$ *entonces* $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ *se le denomina espacio topológico.*

Definición 1.2.53.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, a los miembros de* $\mathcal{T}$ *se les llama conjuntos* ***abiertos*** *en* X.

Definición 1.2.54.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, un subconjunto* $S \subseteq X$ *es un conjunto* ***cerrado*** *en* X*, si su complemento* X/S *es abierto.*

Definición 1.2.55.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, una colección* $\mathcal{B}$ *de subconjuntos abiertos de* X *se llama* ***base*** *de una topología, si cada conjunto abierto es una unión de miembros de* $\mathcal{B}$.

Definición 1.2.56.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* $A \subset X$*, un punto* $x \in X$ *se llama* ***punto límite*** *de* A *si para todo abierto* U*, tal que* $x \in U$ *se cumple que* $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 1.2.57.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* $A \subset X$ *y denotemos* A' *por el conjunto de todos los puntos límites de* A*, llamamos la* ***clausura*** *de* A *al conjunto* $A \cup A'$ *y se denota por* $\bar{A}$.

Definición 1.2.58.
Sean $(X, \mathcal{T})$,$(Y, \mathcal{T}_1)$ *espacios topológicos, una función* $f : X \longrightarrow Y$*, es* ***continua*** *si para cada* $U \in \mathcal{T}_1$ *tenemos que* $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Definición 1.2.59.
Sean $(X, \mathcal{T})$,$(Y, \mathcal{T}_1)$ *espacios topológicos, una función* $f : X \longrightarrow Y$*, es un* ***homeomorfismo*** *si se cumple que:*

- f *es biyectiva.*
- f *es continua.*
- f *tiene inversa continua.*

Definición 1.2.60.
Sea X *un conjunto no vacío dado, una función*
$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *se denomina* ***métrica*** *si cumple con:*

- $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Sea X *un conjunto no vacío dado y* d *una métrica, llamamos al par* (X, d) *un espacio métrico.*

Definición 1.2.61.
Sea (X, d) *un espacio métrico y* $r \in \mathbb{R}^+$*, la* ***bola abierta*** *centrada en* $a \in X$ *y de radio* r*, es el conjunto* $B_r(a) = \{x | x \in X \ \ y \ \ d(a, x) < r\}$.

Definición 1.2.62.
Sean (X, d) *un espacio métrico, entonces la familia de bolas abiertas en* (X, d) *es una base de una topología sobre* X*. Dicha topología se denomina* ***topología inducida*** *por la métrica d:* $\mathcal{T}_d = \{B_r(a)\}$.

Definición 1.2.63.
Sean $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, una colección* S *de subconjuntos abiertos de* X *se llama* ***subbase*** *de* $\mathcal{T}$*, si la colección de todas las intersecciones finitas de miembros de* S *forman una base para* $\mathcal{T}$*.*

Capítulo 2

Presentación del conjunto Cantor.

Ya que contamos con los conceptos y definiciones que se expusieron en el primer capítulo, estamos en condiciones de presentar al conjunto Cantor dando una construcción geométrica, la cual es una primera visualización del conjunto, posteriormente se dará una construcción que transporte nuestras ideas geométricas a un modelo algebraico.

2.1. Construcción geométrica.

El conjunto Cantor es un subconjunto de los números reales que se construye mediante un proceso recursivo.
Inicialmente vamos a trabajar con el intervalo cerrado $[0,1] \subset \mathbb{R}$, el cual tiene una longitud de $|1-0| = 1$, después vamos a dividir nuestro intervalo inicial en tres intervalos que tengan la misma longitud, es decir, que tengan longitud $\frac{1}{3}$, obteniendo los tres intervalos siguientes: $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, de estos tres intervalos vamos a descartar al intervalo abierto intermedio y definimos a $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
Estos van a ser nuestros pasos base para la construcción del conjunto Cantor.
Para continuar con nuestra construcción debemos construir un elemento C_2 aplicando nuestros pasos base a cada intervalo cerrado del elemento C_1, de la siguiente forma: tanto $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ como $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ tienen longitud $\left|\frac{1}{3} - 0\right| = \left|1 - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$ por lo que necesitamos dividir cada intervalo cerrado en intervalos de longitud $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{3} = \frac{1}{9}$, obteniendo así los siguientes intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \text{ y } \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Eliminado los respectivos intervalos abiertos intermedios definimos

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Después se continua el proceso, ahora aplicando los pasos base a los intervalos cerrados de C_2 para generar C_3 y así sucesivamente.
En general, si tenemos $n \in \mathbb{N}$, para construir a C_{n+1} necesitamos dividir en tres intervalos de la misma longitud a cada intervalo cerrado de C_n, descartar el intervalo abierto de cada terna en C_n y finalmente definir a C_{n+1} como la unión de todos los intervalos cerrados restantes.

Finalmente definimos al **conjunto Cantor** como todos los elementos que tienen en común los conjuntos C_n.

Definición 2.1.1.

Definimos al conjunto ***Cantor*** *como* $\mathscr{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. *Véase la figura2.1.*

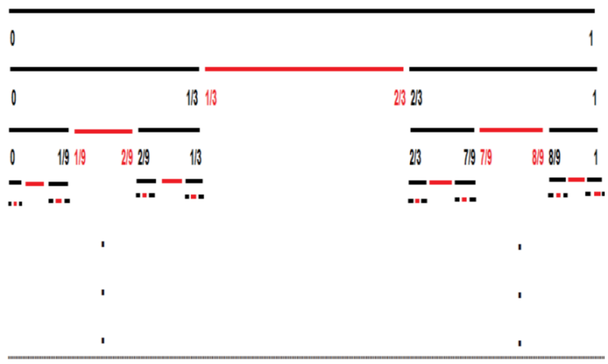

Figura 2.1: Construcción geométrica de los C_n

Ya que construimos al conjunto Cantor lo primero que nos interesa indagar es que tenga elementos, es decir, que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ lo cual es fácil de notar ya que si observamos la construcción geométrica nos damos cuenta que los extremos del intervalo $[0, 1]$ nunca se alteran, es decir, el 0 y el 1 pertenecen a todos los C_n para toda $n \in \mathbb{N}$, de esta forma tenemos que $0, 1 \in \mathscr{C}$ con lo que al menos el conjunto Cantor tiene dos elementos, así $\mathscr{C} \neq \emptyset$.

Observaciones sobre la construcción.

Para obtener una fórmula explícita que nos proporcione al conjunto C_n en general, podemos notar que C_1 es la unión de $2^1 = 2$ intervalos cerrados y ajenos.
C_2 es la unión de $2^2 = 4$ intervalos cerrados y ajenos.
C_3 es la unión de $2^3 = 8$ intervalos cerrados y ajenos.
Nuestra intuición nos dice que entonces C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados y ajenos.

Afirmación 2.1.1.
C_n *es la unión de* 2^n *intervalos cerrados y ajenos.*

Demostración.
Para $n = 1$ *es claro por la construcción que* C_1 *es la unión de* $2^1 = 2$ *intervalos cerrados y ajenos.*
Suponiendo cierta la afirmación para alguna $n \in \mathbb{N}$ *tenemos que* C_n *es la unión de* 2^n *intervalos cerrados y ajenos.*
Queremos demostrar entonces que C_{n+1} *es la unión de* 2^{n+1} *intervalos cerrados y ajenos.*
Como C_{n+1} *se obtiene de dividir a* C_n *en tres intervalos de igual longitud y eliminar el intervalo abierto intermedio, entonces tenemos que por cada intervalo cerrado de* C_n *obtenemos otros dos intervalos cerrados y ajenos.*
Pero la hipótesis de inducción dice que C_n *tiene* 2^n *intervalos, así* C_{n+1} *tiene* $2 * 2^n = 2^{n+1}$, *con lo que se demuestra que* C_n *es la unión de* 2^n *intervalos cerrados y ajenos para toda* $n \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$.

2.2. Construcción algebraica.

Para la construcción algebraica del conjunto Cantor usaremos la definición original que uso Georg Cantor en su publicación, él se refirió al conjunto Cantor como todos los números contenidos en el intervalo $[0,1]$ que pueden ser representados en base 3 sin usar el uno como parte de esta representación, teniendo en cuenta que 1=0.999999999... en los números reales.
Un número $x \in [0,1]$ puede ser representado en base tres si se escribe como

$$x = \sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{3^n} \text{ donde } a_n \in \{0,1,2\} \text{ y para algún } r \in \mathbb{N}.$$

Requerimos todas las representaciones de esta forma donde $a_n \in \{0,2\}$.
Con estas definiciones vamos a tratar de construir el extremo izquierdo del m-ésimo intervalo de C_n.
Para empezar sabemos que C_n esta conformado por 2^n intervalos así que vamos a numerar estos intervalos de forma que le asignaremos a cada intervalo un número $m \in \{0,1,2,3,...,2^n-1\}$, hay que notar que empezamos a numerar los intervalos desde el 0 por eso el conjunto cuenta con solo $2^n - 1$ números para asignar.
Ahora vamos a construir números $a(m)$ para $m \in \mathbb{N}^*$ de la siguiente manera:
Para construir a $a(m)$ tomamos a $m \neq 0$ y lo representamos en base dos, después los dígitos que son 1 en esta representación los volvemos 2 y este nuevo número lo representamos en base 3.

Definición 2.2.1.
Tomemos $m \in \mathbb{N}^*$

- *Si $m = 0$, definimos $a(0) = 0$.*
- *si $m \neq 0$ entonces representamos a m en base dos*

$$m = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i \text{ donde } b_n = 1 \text{ y } b_i \in \{0,1\} \text{ para } i \neq n.$$

$$\text{Y definimos } a(m) = 2\sum_{i=0}^{n} 3^i b_i.$$

Lema 2.2.1.
$a(2^m) = 2 \cdot 3^m$ para toda $m \in \mathbb{N}^*$.

Demostración.
Por la Definición 2.2.1 y expresando a 2^m en binario tenemos

$$2^m = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + ... + 1 \cdot 2^m$$

Calculando $a(2^m) = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3^m = 2 \cdot 3^m$ $\blacksquare$.

Lema 2.2.2.
Sea $m \in \mathbb{N}^*$ y su representación binaria $m = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i$ entonces

$$a(m) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot a(2^i).$$

Demostración.
Tomemos un $m \in \mathbb{N}^*$ arbitrario y fijo, lo expresamos en binario:

$$m = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i \text{ donde } b_n = 1 \text{ entonces } a(m) = 2\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 3^i.$$

Por otro lado

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot a(2^i) = 2\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 3^i, \text{ con lo que tenemos}$$

$$a\left(\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i\right) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot a(2^i) \ \blacksquare.$$

El lema anterior reduce las operaciones para calcular los $a(m)$.

Lema 2.2.3.
$a(m) + 1 < a(m+1)$ *para toda* $m \in \mathbb{N}^*$.

Demostración.
Divideremos la demostración en dos casos

- *Si m es número par, en binario $b_0 = 0$, así $m = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 2^i$ entonces*

  $a(m) = 2\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 3^i$ *como m es par entonces $m+1$ es impar así*

$$m + 1 = 1 \cdot 2^0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 2^i.$$

  Por otra parte, se tiene $a(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 3^i$.
  Se nota que en lo único que es diferente $a(m)$ y $a(m+1)$ es en el primer elemento de la suma, el cual en $a(m)$ es 0 y en $a(m+1)$ es 2 por lo tanto $a(m+1) = 2 + a(m)$ entonces $a(m) + 1 < a(m+1)$.

- *Si m es impar debe contener un 1 en los dígitos de su representación binaria*

$$m = \sum_{i=0}^{p} 1 \cdot 2^i + 0 \cdot 2^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} b_i \cdot 2^i.$$

  Podría darse el caso de que no hubiera ningún 0; en dado caso $p = n$ y $p \geqslant 0$:

$$a(m) = 2\sum_{i=0}^{p} 1 \cdot 3^i + 0 \cdot 2 \cdot 3^{p+1} + 2\sum_{i=p+2}^{n} b_i \cdot 3^i \text{ y}$$

$$m + 1 = 0\sum_{i=0}^{p} \cdot 2^i + 1 \cdot 2^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} b_i \cdot 2^i \text{ Así}$$

$$a(m+1) = 0 \cdot 2\sum_{i=0}^{p} 3^i + 1 \cdot 2 \cdot 3^{p+1} + 2\sum_{i=p+2}^{n} b_i \cdot 3^i$$

Como el último sumando de $a(m)$ y $a(m+1)$ son iguales, resulta

$$\left(2\sum_{i=0}^{p} 1\cdot 3^i + 0\cdot 2\cdot 3^{p+1}\right) + 1 < 0\cdot 2\sum_{i=0}^{p} 3^i + 1\cdot 2\cdot 3^{p+1} = \left(2\sum_{i=0}^{p} 3^i\right) + 1.$$

Suprimiendo los elementos multiplicados por cero en la expresión anterior

$\left(2\sum_{i=0}^{p} 3^i\right) + 1 < 2\cdot 3^{p+1}$. *Dada a la igualdad* $\sum_{i=0}^{p} 3^i = \frac{1}{2}(3^{p+1}-1)$, *resulta*

$\left(2\sum_{i=0}^{p} 3^i\right) + 1 = 3^{p+1}$, *lo que equivale a probar que*

$3^{p+1} < 2\cdot 3^{p+1}$, *pero esta desigualdad es trivial.* ■

Lema 2.2.4.
$3a(m) = a(2m)$ *para toda* $m \in \mathbb{N}^*$.

Demostración.
Sea $m = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i$ *multiplicando* $2m = 2\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^{i+1}$ *entonces*
$a(2m) = 0\cdot 3^0 + 2\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 3^{i+1} = 2\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 3^{i+1} = 2\cdot 3\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 3^i = 3a(m)$ ■

Lema 2.2.5.
$3a(m) + 2 = a(2m+1)$ *para toda* $m \in \mathbb{N}^*$.

Demostración.
Sea $m = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i$ *entonces*
$2m+1 = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^{i+1}\right) + 1 = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^{i+1}\right) + 1\cdot 2^0$ *calculando*

$$a(2m+1) = 2\cdot 3\sum_{i=0}^{n} 3^i + 2 = 3a(m) + 2 \quad ■$$

Ya podemos dar una una fórmula explícita que genere a C_n para toda $n \in \mathbb{N}$ sin necesidad de ocupar recursión.

Definición 2.2.2.
Sea $a(m)$ *como en la Definición 2.2.1, definimos* $B_n = \bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(m)}{3^n}, \frac{a(m)+1}{3^n}\right]$ *para toda* $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.1.
$C_n = B_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.
Para $n = 1$ *tenemos:*

$$B_1 = \left[\tfrac{a(0)}{3}, \tfrac{a(0)+1}{3}\right] \bigcup \left[\tfrac{a(1)}{3}, \tfrac{a(1)+1}{3}\right] = \left[\tfrac{0}{3}, \tfrac{0+1}{3}\right] \bigcup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{2+1}{3}\right] = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \bigcup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right] = C_1$$

Supongamos que $B_n = C_n$ *para alguna* $n \in \mathbb{N}$, *es decir,* $C_n = \displaystyle\bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(m)}{3^n}, \frac{a(m)+1}{3^n}\right]$.

Los intervalos $\left[\dfrac{a(m)}{3^n}, \dfrac{a(m)+1}{3^n}\right]$ *son ajenos, según nuestra construcción geométrica estos intervalos se deben dividir en 3 intervalos de la misma longitud, así dividamos a* $\left[\dfrac{a(m)}{3^n}, \dfrac{a(m)+1}{3^n}\right]$ *en 3 partes iguales*

$$\left[\frac{3a(m)}{3^{n+1}}, \frac{3a(m)+1}{3^{n+1}}\right], \left(\frac{3a(m)+1}{3^{n+1}}, \frac{3a(m)+2}{3^{n+1}}\right), \left[\frac{3a(m)+2}{3^{n+1}}, \frac{3a(m)+3}{3^{n+1}}\right]$$

eliminando el intervalo abierto y uniendo los dos restantes obtenemos

$$C_{n+1} = \bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left(\left[\frac{3a(m)}{3^{n+1}}, \frac{3a(m)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \left[\frac{3a(m)+2}{3^{n+1}}, \frac{3a(m)+3}{3^{n+1}}\right] \right).$$

Usando el Lema 2.2.4 y el Lema 2.2.3, tenemos

$$C_{n+1} = \bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left(\left[\frac{a(2m)}{3^{n+1}}, \frac{a(2m)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \left[\frac{a(2m+1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2m+1)+1}{3^{n+1}}\right] \right) =$$

$$\left[\frac{a(2\cdot 0)}{3^{n+1}}, \frac{a(2\cdot 0)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{a(2\cdot(2^n-1))}{3^{n+1}}, \frac{a(2\cdot(2^n-1))+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup$$

$$\left[\frac{a(2\cdot(2^n-1)+1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2\cdot(2^n-1)+1)+1}{3^{n+1}}\right] =$$

$$\left[\frac{a(0)}{3^{n+1}}, \frac{a(0)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{a(2^{n+1}-2)}{3^{n+1}}, \frac{a(2^{n+1}-2)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \left[\frac{a(2^{n+1}-1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2^{n+1}-1)+1}{3^{n+1}}\right],$$

$$\textit{finalmente } C_{n+1} = \bigcup_{m=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{a(m)}{3^{n+1}}, \frac{a(m)+1}{3^{n+1}}\right] = B_{n+1}.$$

por lo tanto, $C_n = B_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ ■

Entonces nuestras dos construcciónes son equivalentes, la ventaja de la construcción algebraica es que nos permitirá hacer demostraciones formales sobre el conjunto Cantor, ahora podemos escribir $C_n = \displaystyle\bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(m)}{3^n}, \frac{a(m)+1}{3^n}\right]$. Bajo esta nueva construcción tenemos que el conjunto Cantor queda definido como:

$$\mathscr{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(m)}{3^n}, \frac{a(m)+1}{3^n}\right] \right).$$

Observaciones sobre la construcción

Ya que hemos dado una fórmula explícita para los C_n podemos hacer observaciones que nos servirán para dar paso a conceptos más generales, y que nos permiten conocer mejor al conjunto Cantor.

Observación 2.2.1.
Los intervalos que conforman a C_n tienen longitud $\frac{1}{3^n}$ debido a que

$$C_n = \bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(m)}{3^n}, \frac{a(m)+1}{3^n}\right].$$

Podemos tomar $k \in \{0,1,2,...,2^n-1\}$ y calcular la longitud del k-ésimo intervalo

$$l\left(\left[\frac{a(k)}{3^n}, \frac{a(k)+1}{3^n}\right]\right) = \left|\frac{a(k)+1}{3^n} - \frac{a(k)}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n}.$$

Observación 2.2.2.
Si sumamos las longitudes de los intervalos que conforman a C_n estas suman $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, dado que tenemos 2^n intervalos cerrados que miden $\frac{1}{3^n}$, tenemos que

$$\frac{1}{3^n} \cdot 2^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Observación 2.2.3.
$C_{n+1} \subset C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, dado que en la construcción geométrica, se puede notar que estamos formando cadenas decendentes de conjuntos.

Teorema 2.2.2.
$x \in \mathscr{C}$, si y solo si, existe una sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ con cada $e_m \in \{0,2\}$ tal que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}.$$

Demostración.

- $\Longrightarrow$]
  Tomando $x \in \mathscr{C}$, por definición, tenemos que $x \in C_m$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Haremos una construcción de números $e_{m,n}$ con $1 \leqslant m \leqslant n$ y $m,n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \in \mathbb{N}, x \in C_n$ por construcción, existe $k \in \{0,1,..,2^n-1\}$ que cumple $x \in \left[\frac{a(k)}{3^n}, \frac{a(k)+1}{3^n}\right]$, pasando a k en binario $k = \sum_{i=0}^{r} b_i 2^i$ con $b_r = 1$ esto implica que $2^r \leqslant \sum_{i=0}^{r} b_i 2^i = k$ y comó sabíamos que $k \leqslant 2^n - 1$, se tiene $2^r \leqslant 2^n - 1 < 2^n$ así, $r < n$
  Podemos escribir entonces a k de la siguiente forma, aunque se ocupen ceros

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i, \text{ calculando } a(k), \text{ tenemos } a(k) = 2\sum_{i=0}^{n-1} b_i 3^i, \text{ haciendo}$$

$$\frac{a(k)}{3^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2b_i 3^i}{3^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2b_i}{3^{n-i}},$$

definimos $e_{n,n} = 2b_0, e_{n-1,n} = 2b_1, ..., e_{1,n} = 2b_{n-1}$.

Cada $e_{m,n}$ es 0 o 2 puesto que cada b_n es 0 o 1 y depende de x, m y n, pero nos gustaría que no dependiera de n, en efecto probemos que $e_{m,n}$ no depende de n

$$C_{n+1} \bigcap \left[\frac{a(k)}{3^n}, \frac{a(k)+1}{3^n}\right] =$$
$$\left[\frac{a(2k)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k)+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \left[\frac{a(2k+1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k+1)+1}{3^{n+1}}\right],$$

así, se tiene que $x \in \left[\frac{a(2k)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k)+1}{3^{n+1}}\right]$ o $x \in \left[\frac{a(2k+1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k+1)+1}{3^{n+1}}\right]$.

Si $x \in \left[\frac{a(2k)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k)+1}{3^{n+1}}\right]$, podemos calcular $e_{m,n+1}$, además se tiene que

$$a(2k) = 2\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 3^{i+1},$$

entonces, por definición

$$e_{n+1,n+1} = 0, e_{n,n+1} = 2b_0, ..., e_{1,n+1} = 2b_{n-1},$$

de esta manera, resulta

$$e_{n,n+1} = e_{n,n}, e_{n-1,n+1} = e_{n-1,n}, ..., e_{1,n+1} = e_{1,n}$$

Si $x \in \left[\frac{a(2k+1)}{3^{n+1}}, \frac{a(2k+1)+1}{3^{n+1}}\right]$, y $a(2k+1) = 2 \cdot 3^0 + \sum_{i=0}^{n-1} 2b_i 3^{i+1}$, entonces, tenemos

$$e_{n+1,n+1} = 2, e_{n,n+1} = 2b_0, ..., e_{1,n+1} = 2b_{n-1},$$

de esta forma

$$e_{n,n+1} = e_{n,n}, e_{n-1,n+1} = e_{n-1,n}, ..., e_{1,n+1} = e_{1,n}.$$

Así, en ambos casos
$e_{m,n} = e_{m,n+1}$ para toda $m \in \{1, 2, ..n\}$, de esta misma manera, se obtiene que
$e_{m,n} = e_{m,n+2} = e_{m,n+3} = ...$ para toda $m \in \{1, 2, ..n\}$, entonces $e_{m,n}$, no depende de n, por lo tanto, lo denotaremos solo e_m.
Probemos que efectivamente

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\left(\frac{1}{3}\right)^m \to 0$ cuando, $m \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$ sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$ probemos que

$$0 \leqslant x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} < \varepsilon.$$

Sea $k \in \{0, 1, .., 2^n - 1\}$, *tal que,* $x \in \left[\frac{a(k)}{3^m}, \frac{a(k)+1}{3^m}\right]$, *como*

$$\frac{a(k)}{3^m} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2b_i}{3^{n-i}}, \text{ tenemos}$$

$0 \leqslant x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} = x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_{m,n}}{3^m} = x - \frac{a(k)}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^N} < \varepsilon$, *como se quería probar.*

- $\Longleftarrow$]
  Queremos probar que $x \in C_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *lo que es igual a probar que existe* $j \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ *tal que* $x \in \left[\frac{a(j)}{3^n}, \frac{a(j)+1}{3^n}\right]$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
  Tomando un $n \in \mathbb{N}$ *y definiendo los coeficientes de la notación binaria de* j *como,*
  $b_0 = \frac{e_n}{2}, b_1 = \frac{e_{n-1}}{2}, ..., b_{n-1} = \frac{e_1}{2}$, *cada* $b_i \in \{0, 1\}$ *puesto que cada* $e_i \in \{0, 2\}$ *para* $i = 1, 2, .., n-1$ *de forma que nos queda demostrar que si*

  $$j = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i, \text{ entonces } j \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}.$$

  Sabemos que $e_m \leqslant 2$ *para toda* $m \in \mathbb{N}$, *así* $b_m 2^m \leqslant 2^m$ *para* $m = 1, 2, ..., n-1$. *De esta manera obtenemos*

  $$j = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \text{ con lo que } j \in \{0, 1, .., 2^n - 1\}.$$

  Por otro lado, tenemos

  $$\frac{a(j)}{3^m} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2b_i 3^i}{3^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{3^i} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{3^i} = x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} =$$

  $\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} = \frac{a_j + 1}{3^n}$,
  es decir,

  $$\frac{a(j)}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{a(j)+1}{3^n}.$$

  De esta forma $x \in \left[\frac{a(j)}{3^n}, \frac{a(j)+1}{3^n}\right] \subset \bigcap_{i=0}^{2^n-1} \left[\frac{a(i)}{3^n}, \frac{a(i)+1}{3^n}\right] = C_n$, *esta prueba se hizo para una* n *particular pero arbitraria, así* $x \in C_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.■

Capítulo 3

Propiedades topológicas del conjunto Cantor.

Definición 3.0.1.
Sea $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia dada de espacios topológicos. Definimos al ***producto****, como*
$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_1, x_2, x_3, ...,)|x_n \in X_n \ \text{para toda} \ n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $\mathscr{B}$ la familia de subconjuntos de X de la forma

$$U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times ...$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $U_i \in \mathcal{T}_i$ para cada $i \leqslant n$ y cada $U_i \neq X$.

Si cada $\mathcal{T}_n$, viene inducida por una métrica d_n tal que $d_n(x_n, y_n) \leqslant 1$ para cada $x_n, y_n \in X_n$. Podemos definir $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$ con la diferencia de que aquí $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $y = (y_1, y_2, y_3, ...)$.

Teorema 3.0.1.
$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$ *es una métrica.*

Demostración.
Sabemos que $d_n(x_n, y_n) \leqslant 1$, de esta forma, $0 < \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < 1$, por el Lema 1.2.1, $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$ converge.

- *$d(x, y) = 0$, si y solo si, $x = y$.*
  $\Longrightarrow]$
  Si $d(x, y) = 0$ entonces $d_n(x_n, y_n) = 0$, por la Definición 1.2.60, $x_n = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x = y$.
  $\Longleftarrow]$
  Si $x = y$ entonces $x_n = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la Definición 1.2.60, $d_n(x_n, y_n) = 0$, es decir, $d(x, y) = 0$.

- *$d(x, y) = d(y, x)$.*
  Por la Definición 1.2.60, tenemos que $d_n(x_n, y_n) = d_n(y_n, x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, dividiento entre 2^n, obtenemos, $\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = \frac{d_n(y_n, x_n)}{2^n}$, sumando en ambos lados sobre n, resulta $d(x, y) = d(y, x)$.

- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
Por la Definición 1.2.60, tenemos que $d_n(x_n, y_n) \leqslant d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, dividiento entre 2^n, obtenemos,

$$\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \leqslant \frac{d_n(x_n, z_n)}{2^n} + \frac{d_n(z_n, y_n)}{2^n},$$

sumando en ambos lados sobre n, resulta $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Demostramos que $d(x,y)$ cumple con la Definición 1.2.60, es decir, es una métrica. ■

Teorema 3.0.2.
La topología que induce d en X es la misma topología que genera $\mathscr{B}$.

Demostración.
Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathscr{B}$ y $\widetilde{\mathcal{T}}$ la topología inducida por d, mostraremos que $\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{T}}$.

- $\subset]$
Tomando $U \in \mathcal{T}$, entonces por la Definición 1.2.55, existe $\mathfrak{B} \subset \mathscr{B}$ tal que $U = \bigcup B_i$ para $B_i \in \mathfrak{B}$, sea $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in U$, por ser conjuntos abiertos, existe un $B \in \mathfrak{B}$, tal que $x \in B \subset U$, como $B \in \mathscr{B}$ entonces,

$$B = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times ...$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i \in \mathcal{T}_i$ para toda $i \leqslant n$. De esta forma como $x \in U_i \in \mathcal{T}_i$ y $\mathcal{T}_i$ está inducida por d_i, por la Definición 1.2.62, tenemos que existe $r_i > 0$, tal que $B_{r_i}(x) \subset U_i$; Queremos demostar que $U \in \widetilde{\mathcal{T}}$, es suficiente mostrar que existe $r > 0$, tal que $B_r(x) \subset U$. Tomando a $r = min\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2^2}, ..., \frac{r_n}{2^n}\right\}$, y dada $y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in B_r(x)$, por como definimos d, se tiene que

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_n(x,y)}{2^n} < r$$

Para cada $j = 1, 2, 3, ..., n$ tenemos

$$\frac{d_j(x_j, y_j)}{2^j} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_n(x,y)}{2^n} < r \leqslant \frac{r_j}{2^j}$$

Por transitividad $d_j(x_j, y_j) < r_j$, de forma que $y_j \in B_{r_j} \subset U_j$, por lo tanto $y \in B$.

- $\supset]$
Tomemos $U \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Sea $x = (x_1, x_2, ...)$ un punto cualquiera de U. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.
Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$. Definimos A_x como

$$A_x = B_{\frac{r}{2}}(x_1) \times B_{\frac{r}{2}}(x_2) \times ... \times B_{\frac{r}{2}}(x_N) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times ...$$

Tenemos que $A_x \in \mathscr{B}$. Dada $y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in A_x$, notamos que $y_i \in B_{\frac{r}{2}}(x_i)$ para toda $1 \leqslant i \leqslant N$. Así

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} = \frac{d_1(x_1, y_1)}{2} + ... + \frac{d_N(x_N, y_N)}{2^N} + \frac{d_{N+1}(x_{N+1}, y_{N+1})}{2^{N+1}} + ...$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{r}{2^2} + \frac{r}{2^3} + ... + \frac{r}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + ... \\
&= \frac{r}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{N-1}}\right) + \frac{1}{2^{N+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right) \\
&< \frac{r}{2^2}(2) + \frac{1}{2^{N+1}}(2) = \frac{r}{2} + \frac{1}{2^N} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.
\end{aligned}
$$

Lo que se resume en $d(x,y) < r$, entonces $y \in B_r(x)$, así $A_x \subset B_r(x)$. Como $B_r(x) \subset U$ tenemos que $A_x \subset U$, esto concluye la prueba. ■

Definición 3.0.2.
Sea (X, d) un espacio métrico y $\varepsilon > 0$, decimos que X es un conjunto ***denso en sí mismo****, si para todo $x \in X$, existe un elemento $y \in X$, tal que $x \neq y$ y cumpla que $d(x,y) < \varepsilon$.*

Teorema 3.0.3.
El conjunto Cantor es denso en sí mismo.

Demostración.
Sea $x \in C_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tómando $\varepsilon > 0$, como $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$, recórdando que $\mathscr{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n$ tenemos que en partícular $x \in C_N$, por lo que existe $j \in \{0, 1, 2, ..., 2^N - 1\}$, tal que

$$x \in \left[\frac{a(j)}{3^N}, \frac{a(j)+1}{3^N}\right]$$

Sabemos que en partícular $\frac{a(j)}{3^N} \in \mathscr{C}$ y $\frac{a(j)+1}{3^N} \in \mathscr{C}$, como $x \in \left[\frac{a(j)}{3^N}, \frac{a(j)+1}{3^N}\right]$ es evidente que x está en el interior de este intervalo o es alguno de los dos extremos, pero no puede ser ambos a la vez, en cualquier caso podemos escoger $y = \frac{a(j)}{3^N}$ o $y = \frac{a(j)+1}{3^N}$, de forma que $x \neq y$, así se tiene

$$|x - y| \leqslant \left|\frac{a(j)+1}{3^N} - \frac{a(j)}{3^N}\right| = \frac{1}{3^N} < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 3.0.4.
El conjunto Cantor es cerrado.

Demostración.
Para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^N}, \frac{a_j+1}{3^N}\right]$, por la Afirmación 2.1.1, C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados. Así C_n es la unión finita de conjuntos cerrados, por lo tanto, C_n es un conjunto cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathscr{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Entonces $\mathscr{C}$ es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados por lo tanto $\mathscr{C}$ es cerrado. ■

Definición 3.0.3.
Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto distinto del vacío, decimos que X es ***compacto*** *si es cerrado y acotado.*

Teorema 3.0.5.
El conjunto cantor es compacto.

Demostración.
Por el Teorema 3.0.4, el conjunto Cantor es cerrado.
Es inmediato que el conjunto Cantor es acotado, ya que $\mathscr{C} \subset [0,1]$, lo que termina la prueba. ■

Definición 3.0.4.
Un subconjunto A de un espacio topológico es perfecto, si y solo si, es denso en sí mismo y cerrado.

Observación 3.0.1.
El conjunto Cantor es Perfecto.
Por el Teorema 3.0.4 y el Teorema 3.0.3, el conjunto Cantor es perfecto.

Definición 3.0.5.
Para cualquier conjunto no vacío X, la métrica ***discreta*** *se define por:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & si \quad x \neq y \\ 0, & si \quad x = y \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$

Definición 3.0.6.
Sea el conjunto $\{0,2\}$, definimos a $\{0,2\}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$ como el conjunto de todas las sucesiones formadas únicamente por 0 y 2.

Para cada $\{0,2\}$ definimos la metrica discreta

$$d_n(p,q) = \begin{cases} \frac{|p-q|}{2}, & \text{si} \quad p \neq q \\ 0, & \text{si} \quad p = q \end{cases}$$

Definición 3.0.7.
Para toda $x_n, y_n \in \{0,2\}^\infty$, definimos la función $d_\infty(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(p,q)}{2^n}$.

Observación 3.0.2.
Por el Teorema 3.0.1, $d_\infty(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(p,q)}{2^n}$ es una métrica.

Teorema 3.0.6.

$$Si \quad \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m} \right| < \frac{1}{3^n} \quad con\ e_m, g_m \in \{0,2\} \quad entonces\ e_i = g_i \quad para\ i = 0, 1, ..., n$$

Demostración.
Para $n = 1$

$$Si \quad \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m} \right| < \frac{1}{3} \quad entonces\ e_1 = g_1.$$

Sin perdida de la generalidad supongamos que $e_1 = 2$ *y* $g_1 = 0$*, calculando*

$$\left|\frac{e_1 - g_1}{3}\right| - \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leqslant \left|\frac{e_1 - g_1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \left|\frac{e_1 - g_1}{3}\right| < \frac{1}{3} + \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right|$$

Pero tenemos

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leqslant \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m} \leqslant \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{3^m} = \frac{2}{3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{2}{3^2}\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

Es decir,

$$\left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leqslant \frac{1}{3}$$

Por lo tanto $\frac{2}{3} < \frac{1}{3} + \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leqslant \frac{2}{3}$*, lo que implica* $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ *lo que resulta absurdo, por lo tanto tiene que ser* $e_1 = g_1$*.*
Demostremos que se cumple para $n = k + 1$*, es decir,*

$$\text{Si } \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} \text{ entonces } e_i = g_i \text{ para } i = 0, 1, ..., k + 1$$

Supongamos que

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}}$$

Ya que $\frac{1}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^k}$*, podemos aplicar la hipotesis de inducción y obtener* $e_i = g_i$ *para* $i = 0, 1, ..., k$*.*
Como

$$\left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| - \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| \leqslant \left|\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}}$$

Obtenemos que

$$\left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right|.$$

Supongamos que $e_{k+1} \neq g_{k+1}$

$$\frac{|e_{k+1} - g_{k+1}|}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Calculando

$$\frac{2}{3^{k+1}} = \left|\frac{e_{k+1} - g_{k+1}}{3^{k+1}}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \left|\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m}\right| < \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Es decir, $\frac{2}{3^{k+1}} < \frac{2}{3^{k+1}}$*, lo cual es absurdo. Esto muestra que debe ser* $e_{k+1} = g_{k+1}$*.*$\blacksquare$

Lema 3.0.1.
Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, una función $f : X \longrightarrow Y$, continua e inyectiva con X compacto, entonces $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es continua.

Demostración.
Sea $V \subset X$ un conjunto abierto,entonces X/V es cerrado en X, por lo tanto, compacto,así $f(X/V)$ es un subconjunto compacto y cerrado de Y. Como f es inyectiva, $f(V)$ es el complemento de $f(X/V)$ y por lo tanto $f(V)$ es abierto en Y. Por la Definición 1.2.58 f^{-1} es continua $\blacksquare$.

Teorema 3.0.7.
El conjunto Cantor es homeomorfo a $\{0, 2\}^\infty$

Demostración.
Sea

$$\varphi : \mathscr{C} \to \{0, 2\}^\infty$$

Definida de la siguiente manera. Dada $x \in \mathscr{C}$, por el Teorema 2.2.2 existe una sucesión, $\{e_m\}_{m=1}^\infty$, donde cada $e_m = 0$ o 2 tal que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}.$$

Definimos

$$\varphi(x) = (e_1, e_2, e_3, ...)$$

- *La función está bien definida*
  Supongamos que existe $x \in \mathscr{C}$ con dos representaciones

  $$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \text{ y } x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m} \text{ con } e_m, g_m \in \{0, 2\} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}$$

  Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $e_n \neq g_n$ y además, n es el primer subíndice donde son distintas. Sin perdida de la generalidad tomemos $e_n = 0$ y $g_n = 2$, calculando

  $$x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{e_i}{3^i} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} =$$

  $$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}$$

  $$< \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{g_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{3^i} = x$$

  Es decir, $x < x$ lo cual es absurdo, por lo tanto se debe de tener $e_n = g_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto φ está bien definida.

- *φ es inyectiva.*
  Si $\varphi(x) = \varphi(y)$. Por la definición de φ
  $(e_1, e_2, e_3, ...) = (g_1, g_2, g_3, ..)$, lo que implica que $e_1 = g_1, e_2 = g_2, ...$, como $e_i = g_i$ para toda i, entonces $x = y$.

- *φ es suprayectiva.*
  Tomemos $(e_1, e_2, e_3, ...) \in \{0,2\}^\infty$, y sea la serie

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}$$

  Como $0 \leqslant e_m \leqslant 2$, entonces $\frac{e_m}{3^m} \leqslant \frac{2}{3^m}$. De modo que la serie está acotada por una serie que converge. Esto muestra que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \text{ converge.}$$

  Llamamos a su límite x. Por el Teorema 2.2.2, $x \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $\varphi(x) = (e_1, e_2, e_3, ...)$, es decir φ es suprayectiva.

- *φ es continua.*
  Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, $N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ y sea $\delta = \frac{1}{3^N}$. Tomemos $x, y \in \mathscr{C}$ tales que $|x - y| < \frac{1}{3^N}$.

$$\textit{Escribimos } \; x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}, y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m}.$$

  Por el Teorema 3.0.6, como $\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m - g_m}{3^m} \right| = |x - y| < \frac{1}{3^N}$ *entonces*

$$e_1 = g_1, e_2 = g_2, e_3 = g_3, ..., e_N = g_N.$$

  Calculando

$$d_\infty(\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|e_i - g_i|}{2^{i+1}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|e_i - g_i|}{2^{i+1}} =$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|e_i - g_i|}{2^{i+1}} \leqslant \sum_{i=N+2}^{\infty} \frac{2}{2^i} = \frac{2}{2^{N+2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2}{2^{N+2}}(2) = \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

  Como x y y son arbitrarios la función es uniformemente continua por lo tanto es continua.

Tenemos una función, continua e inyectiva del espacio métrico compacto $\mathscr{C}$ sobre el espacio métrico $\{0,2\}^\infty$, por el Lema 3.0.1, φ tiene inversa continua, por lo tanto, es un homeomorfismo.$\blacksquare$

Teorema 3.0.8.
El conjunto Cantor no es mumerable.

Demostración.
Supongamos que $\mathscr{C}$ es númerable, entonces por el Teorema 3.0.7, $\{0,2\}^\infty$ debe ser no númerable, si $\{0,2\}^\infty$ es numerable, entonces podemos enlistar todos sus elementos

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1, ...\right) \\
a_2 &= \left(e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2, ...\right) \\
a_3 &= \left(e_1^3, e_2^3, e_3^3, e_4^3, ...\right) \\
a_4 &= \left(e_1^4, e_2^4, e_3^4, e_4^4, ...\right) \\
&\vdots \\
a_n &= (e_1^n, e_2^n, e_3^n, e_4^n, ...) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Construyamos un elemento de la siguiente forma

$$
x_n = \begin{cases} 0, & si \quad e_n^n = 2 \\ 2, & si \quad e_n^n = 0 \end{cases}
$$

$(x_1, x_2, x_3, x_3, ...)$ *es una sucesión compuesta solo por 0 y 2, por lo tanto, pertenece a* $\{0, 2\}^\infty$*, pero resulta que* $(x_1, x_2, x_3, x_3, ...) \neq (e_1^n, e_2^n, e_3^n, e_4^n, ...)$*, porque* $x_n \neq e_n^n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*
Construimos un nuevo elemento que no se está tomando en cuenta en la lista numerable que dimos, lo que es una contradicción, por lo tanto $\{0, 2\}^\infty$ *es no numerable.* ■

Definición 3.0.8.
Sea $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* $C \subseteq X$ *es un conjunto* ***conexo****, si y solo si,* $A, B \in \mathcal{T}$*, tales que* $A \cap B \cap C = \emptyset$ *y* $C \subseteq A \cup B$ *implica que* $C \subseteq A$ *o* $C \subseteq B$*.*

Definición 3.0.9.
Decimos que un subconjunto de un espacio topológico es ***disconexo*** *si no es conexo.*

Definición 3.0.10.
Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$*, se llama* ***componente conexa****, a cada uno de los conjuntos maximales conexos. Es decir, un subconjunto* $Y \subset X$ *es un componente conexo si se cumple*

- $Y \subset X$ *es conexo*
- *Cualquier conjunto* Z *que contiene propiamente a* Y *es disconexo.*

Definición 3.0.11.
Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$*,* $A \subseteq X$ *se dice que es* ***totalmente disconexo****, si los únicos subconjuntos conexos están formados por conjuntos de la forma* $\{x\}$*, donde* $x \in A$*. Véase la figura 3.1.*

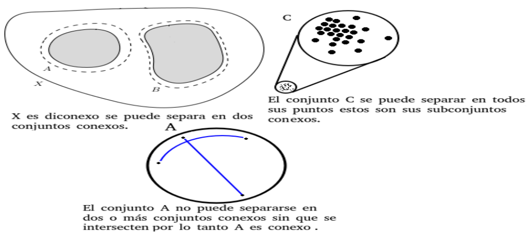

Figura 3.1: Conexidad y disconexidad

Lema 3.0.2.
Sean $x \in \mathscr{C}, r > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *tales que* $\dfrac{1}{2 \cdot 3^n} < r$, *entonces* $B_r(x) \bigcap (\mathbb{R}/C_n) \neq \emptyset$

Demostración.
Supongamos que $B_r(x) \bigcap (\mathbb{R}/C_n) = \emptyset$, *si esto pasa, tenemos que* $B_r(x) \subset C_n$, *por hipotesis* $x \in \mathscr{C}$, *entonces* $x \in C_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
Sabemos que, los 2^n *intervalos que componen a* C_n *son cerrados y ajenos.*
$B_r(x)$ *es un conjunto convexo y como* $B_r(x) \subset C_n$, *entonces existe un* $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, *tal que* $B_r(x) \subset \left[\dfrac{a_k}{3^n}, \dfrac{a_k + 1}{3^n}\right]$, *tenemos que*

$$2r = \textit{diámetro}(B_r(x)) \leqslant l\left(\left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k + 1}{3^n}\right]\right) = \frac{1}{3^n}.$$

Lo cual es una contradicción, ya que esta desigualdad implica que $2r \leq \dfrac{1}{3^n}$, *lo que equivale a* $r \leq \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$, *pero nosotros teniamos que* $\dfrac{1}{2 \cdot 3^n} < r$, *lo que demuestra que*

$$B_r(x) \bigcap (\mathbb{R}/C_n) \neq \emptyset. \ \blacksquare$$

Lema 3.0.3.
Sean $x, y \in \mathscr{C}$ *con* $x < y$ *entonces existe* $z \in (\mathbb{R}/\mathscr{C})$ *tal que* $x < z < y$

Demostración.
Supongamos que no existe $z \in (\mathbb{R}/\mathscr{C})$, *tal que* $x < z < y$, *esto nos dice entonces que el intervalo abierto* $(x, y) \subset \mathscr{C}$, *entonces sea* $p \in (x, y)$, *así* $p \in \mathscr{C}$ *y tómese*

$$r > 0, \text{ tal que } B_r(p) \subset (x, y).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, *que cumpla que* $\dfrac{1}{2 \cdot 3^n} < r$, *por la el Lema 3.0.2, existe* $q \in B_r(p) \bigcap (\mathbb{R}/\mathscr{C})$.
Entonces $q \in B_r(p) \subset (x, y) \subset \mathscr{C}$ *y* $q \in (\mathbb{R}/\mathscr{C})$, *lo que es una contradicción.*$\blacksquare$

Teorema 3.0.9.
El conjunto Cantor es totalmente disconexo.

Demostración.
Debemos probar que las componentes disconexas de Cantor son sus puntos, suponiendo lo contrario, entonces una componente no es un punto, sea esta componente A, *entonces* A *es un conjuto conexo tal que* $A \subset \mathscr{C}$, *existen* $x, y \in A$, *tales que* $x < y$. *Por el Lema 3.0.3, existe* $z \in (\mathbb{R}/\mathscr{C})$, *tal que* $x < z < y$ *tomándo* $p \in A$, *tal que* $p \neq z$, *ya que* $z \notin \mathscr{C}$, *de modo que* $p < z$ *o* $p > z$. *Esto muestra que podemos escribir a* A *como,* $A = ((-\infty, z) \bigcap A) \bigcup ((z, \infty) \bigcap A)$, *donde* $x \in (-\infty, z) \bigcap A$ *y* $y \in (z, \infty) \bigcap A$, *entonces escribimos a* A *como la unión de dos conjuntos abiertos en* A *que son ajenos y no vacios entonces* A *es disconexo, esto es una contradicción.*$\blacksquare$

Definición 3.0.12.
Sea (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$, *el* ***diámetro*** *del conjunto* A *se define como*

$$diam(A) = max\{d(a, b) | a, b \in A\}$$

.

Teorema 3.0.10.
El conjunto Cantor tiene diámetro nulo.

Demostración.
Por la Obsrvación 2.2.2, la suma de las longitudes de cualquier C_n estan dadas por $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, así tenemos que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.■

Teorema 3.0.11.
El conjunto Cantor tiene interior vacio.

Demostración.
Queremos demostrar que $\mathscr{C}$ no tiene puntos interiores, esto es equivalente a decir, que si tomamos cualquier punto en el conjunto Cantor, este punto tiene elementos del conjunto y de su complemento. Sea $x \in \mathscr{C}$ arbitrario, queremos probar que para todo $\varepsilon > 0$, se cumple que $B_\varepsilon(x) \bigcap \mathscr{C}^c \neq \emptyset$.
Sea $x \in \mathscr{C}$ y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $r = \frac{1}{2^N} < \varepsilon$, entonces tenemos que $B_r(x) \subset B_\varepsilon(x)$, como $\mathscr{C} \subset C_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in C_n$, para toda n, en particular tenemos que $x \in C_N$, como $C_N = \bigcup_{j=0}^{2^N-1}\left[\frac{a_j}{3^N}, \frac{a_j+1}{3^N}\right]$, entronces existe $k \in \{0, 1, ..., 2^N - 1\}$, tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^N}, \frac{a_k+1}{3^N}\right] \subset C_N$, sabemos que $l(C_N) = \frac{1}{3^N} < \frac{1}{2^N} = r$ esto muestra que, $B_r(x)$ no esta completamente contenida en el intervalo, es decir, $B_r(x) \not\subset C_N$, por lo tanto $B_\varepsilon(x) \bigcap \mathscr{C}^c \neq \emptyset$.■

Teorema 3.0.12.
El conjunto Cantor es denso en ningúna parte, es decir $Int(\bar{\mathscr{C}}) = \emptyset$.

Demostración.
Por ser Cantor un conjunto cerrado cumple que $\bar{\mathscr{C}} = \mathscr{C}$, por lo tanto $Int(\bar{\mathscr{C}}) = Int(\mathscr{C})$, por el Teorema 3.0.11, se sabe que $Int(\mathscr{C}) = \emptyset$.■

Definición 3.0.13.
Si tenemos un conjunto, y para cubrilo se requieren de $N(x)$ autosemejanzas de tamaño x, la dimensión fractal se define como

$$n = \frac{ln(N(x))}{ln\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Véase la figura 3.2.

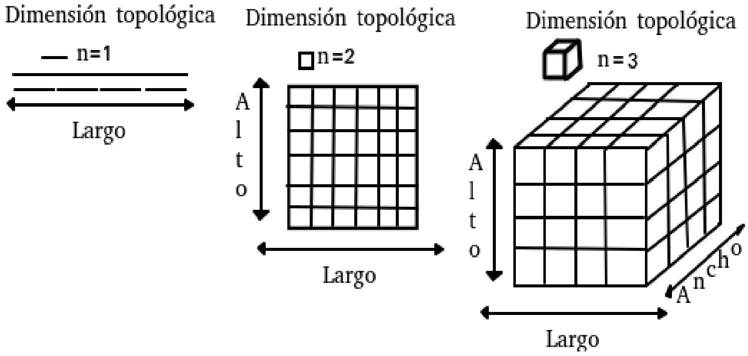

Figura 3.2: Dimensión fractal

Observación 3.0.3.
Para cubrir al conjunto Cantor en la construcción de C_k, se requieren 2^k copias de longitud $\frac{1}{3^k}$, de esta froma tenemos que $N(x) = 2^k$ y $x = \frac{1}{3^k}$, calculando

$$n = \frac{ln(2^k)}{ln\left(\frac{1}{\frac{1}{3^k}}\right)} = \frac{k \cdot ln(2)}{ln(3^k)} = \frac{k \cdot ln(2)}{k \cdot ln(3)} = \frac{ln(2)}{ln(3)} \approx 0.6309297536$$

Definición 3.0.14.
*Sea la función $\psi_\alpha : \prod_{\beta \in B} X_\beta \longrightarrow X_\alpha$, tal que si $\bar{x} \in \prod_{\beta \in B} X_\beta$, entonces $\psi_\alpha(\bar{x}) = x_\alpha$, se le denomina **la proyección** de la coordenada α.*

Lema 3.0.4.
La proyección $\psi_\alpha : \prod_{\beta \in B} X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ es continua.

Demostración.
Sea $U_k \in \mathcal{T}_{X_k}$ un abierto correspondiente a la topología del conjunto X_k, tenemos que $\psi_k^{-1}(U_k) = U_k \times \prod_{k' \in B, k' \neq k} X'_k$, que es un abierto en el producto, por la Definición 1.2.58, la prueba concluye.■

Lema 3.0.5.
$f : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es continua, si y solo si, la proyección $\psi_\alpha(f)$ es continua para cada $\alpha \in A$.

Demostración.

- $\Longrightarrow]$
  Esta parte es trivial ya que si f es continua, por el Lema 3.0.4, ψ_α es continua y la composición de funciones continuas es una función continua.

- $\Longleftarrow]$
  Supongamos que $\psi_\alpha(f)$ es continua para cada $\alpha \in A$, los conjunto $\psi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ para $\alpha \in A$ y $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$, que es un abierto en X_α, forman una subbáse para la topología en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, pero $f^{-1}(\psi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (\psi_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$, entonces la imagen inversa de f de los subbásicos son abiertos en X.

Por la Definición 1.2.58, la prueba concluye.■

Teorema 3.0.13.
Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}$ es homeomorfo a $\mathscr{C}^n$.

Demostración.
Para $n = 2$, es decir, $\mathscr{C}$ es homeomorfo $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$.
Definimos

$$f : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Entonces definamos f como $f : \{0,2\}^\infty \times \{0,2\}^\infty \longrightarrow \{0,2\}^\infty$ tal que:

$$f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...)$$

- *f es inyectiva*
  Sean
  $$f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...)$$
  y
  $$f((c_1, c_2, c_3, ...), (d_1, d_2, d_3, ...)) = (c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3, ...)$$
  Supongamos
  $$f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = f((c_1, c_2, c_3, ...), (d_1, d_2, d_3, ...)).$$
  Lo que implica
  $$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...) = (c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3, ...)$$
  de esta forma tenemos que $a_i = c_i$ y $b_i = d_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto, f es inyectiva.

- *f es suprayectiva*
  Supongamos
  $$(a_1, a_2, a_3, ...) \in \{0, 2\}^\infty$$
  Definamos
  $$((a_1, a_3, a_5, ...), (a_2, a_4, a_6, ...)) \in \{0, 2\}^\infty \times \{0, 2\}^\infty$$
  Aplicando la función
  $$f((a_1, a_3, a_5, ...), (a_2, a_4, a_6, ...)) = (a_1, a_2, a_3, ...).$$
  Lo que prueba que f es suprayectiva.

- *f es continua*
  Por el Lema 3.0.5, es equivalente a probar que $\psi_n(f)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos
  $$\psi_n(f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...))) = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}}, & si \quad n \text{ es impar} \\ b_{\frac{n}{2}}, & si \quad n \text{ es par} \end{cases}$$
  $$\varphi_1((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = (a_1, a_2, a_3, ...)$$
  $$\varphi_2((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = (b_1, b_2, b_3, ...)$$
  Calculamos
  $$\psi_n(\varphi_1((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...))) = \psi_n((a_1, a_2, a_3, ...)) = a_n$$
  $$\psi_{2n-1}(f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...))) = a_{\frac{2n-1+1}{2}} = a_n$$
  $$\psi_n(\varphi_2((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...))) = \psi_n((b_1, b_2, b_3, ...)) = b_n$$
  $$\psi_{2n}(f((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...))) = b_{\frac{2n}{2}} = b_n$$
  Lo que muestra explícitamente que $\psi_n(f)$ es una proyección, aparte tenemos que
  $$\psi_n(\varphi_1) = \psi_{2n-1}(f)$$
  y
  $$\psi_n(\varphi_2) = \psi_{2n}(f).$$
  Ya que φ_1, φ_2 y ψ_n son continuas, entonces tenemos que $\psi_n(f)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ es un métrico compacto, ya que el producto cartesiano de conjuntos compactos es un conjunto compacto, y además tenemos una función continua e inyectiva de un espacio métrico compacto sobre $\mathscr{C}$, por el Lema 3.0.1 f es un homeomorfismo.

Ahora terminemos la prueba por inducción.
Supongamos que $\mathscr{C}$ es homeomorfo $\mathscr{C}^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, Como $\mathscr{C}^{n+1}$ es homeomorfo $\mathscr{C}^n \times \mathscr{C}$, por nuestra hipótesis de inducción tenemos que $\mathscr{C}^n \times \mathscr{C}$ es homeomorfo a $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$, y este último es homeomorfo a $\mathscr{C}$ por lo tanto $\mathscr{C}^{n+1}$ es homeomorfo a $\mathscr{C}$.■

Definición 3.0.15.
Decimos que un conjunto A es imagen continua de otro conjunto B, si existe una función $f : B \longrightarrow A$ que sea continua y suprayectiva.

Teorema 3.0.14.
El intervalo cerrado $[0, 1]$ es imagen continua del conjunto Cantor.

Demostración.
Definamos

$$g : \mathscr{C} \longrightarrow [0, 1]$$

tal que

$$g((a_1, a_2, a_3, ...)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

- *g esta bien definida.*
  Aplicando g a un elemento arbitrario de $\mathscr{C}$

  $$g((a_1, a_2, a_3, ...)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a_n}{2}}{2^n}$$

  Como $a_n \leqslant 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{a_n}{2} \leqslant 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así

  $$g((a_1.a_2, a_3, ...)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

  Al estar acotada por una serie convergente

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

  converge a un número entre 0 y 1, por lo tanto, nos garantiza que g esta bien definida.

- *g es suprayectiva*
  Sea $y \in [0, 1]$ su representación binaria nos dice que

  $$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$

  donde $b_n \in \{0, 1\}$. Como

  $$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} = g((2a_1, 2a_2, 2a_3, ...)) \in \{0, 2\}^{\infty},$$

  obtenemos que g es suprayectiva.

- *g es continua.*
  Sean $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \delta$. Dados $(a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...) \in \{0, 2\}^\infty$ tales que $d_\infty((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) < \delta$ entonces

$$|g((a_1, a_2, a_3, ...)) - g((b_1, b_2, b_3, ...))| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - b_n}{2^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} = d_\infty((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) < \delta = \varepsilon.$$

  Esto es,

$$|g((a_1, a_2, a_3, ...)) - g((b_1, b_2, b_3, ...))| < \varepsilon$$

  por lo tanto, g es continua.

De esta forma concluye la prueba.■

Definición 3.0.16.
*El **cubo de Hilbert** se define por $[0, 1]^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]$.*

Teorema 3.0.15.
El cubo de Hilbert es imagen continua del conjunto Cantor.

Demostración.
Definimos

$$f : \mathscr{C}^\infty \longrightarrow [0, 1]^\infty$$

tal que
$f(x_1, x_2, x_3, ...) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3), ...)$ donde $x_i = (a_1, a_2, ...)$ para $a_i \in \{0, 1\}$.

$$g : \mathscr{C} \longrightarrow [0, 1]$$

$$g((a_1, a_2, a_3, ...)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

- *f es continua.*
  Como f es una función que entra coordenada a coordenada en un producto, para demostar su continuidad, basta mostrar que $\psi_n(f)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, done $\psi_\alpha : [0, 1]^\infty \longrightarrow [0, 1]$ es la proyección n-ésima.
  Tomando $n \in \mathbb{N}$, calculamos

$$\psi_n(f(x_1, x_2, x_3, ...)) = g(x_n) = g(\psi_n(x_1, x_2, x_3, ...))$$

  En la demostración del Teorema 3.0.14, se mostro que g es continua en $\mathscr{C}$, por lo tanto $\psi_n(f)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$ con lo que se demuestra que f es continua.

- *f es suprayectiva.*
  Sea $(c_1, c_2, c_3, ...) \in [0, 1]^\infty$, tomando $n \in \mathbb{N}$ por ser g suprayectiva, existe una $x_n \in \mathscr{C}$, que cumple con $c_n = g(x_n)$. Tomemos el punto que se forma por estas x_n, es decir,
  $(x_1, x_2, x_3, ...) \in \mathscr{C}^\infty$, aplicando f a este punto

$$f((x_1, x_2, x_3, ...)) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3), ...) = (c_1, c_2, c_3, ...)$$

  mostrando que la función es suprayectiva.

Esto concluye nuesta demostración. ∎

Definición 3.0.17.
Decimos que un conjunto dado A, se encaja en un conjunto B, si existe una función $f : A \longrightarrow B$, continua e inyectiva.

Teorema 3.0.16.
Todo espacio métrico compacto X, tiene diámetro finito.

Demostración.
Como X es compacto, existe una familia finita de conjuntos abiertos de diámetro finito $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$ en particular, tal que

$$X \subset \mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

tenemos

$diam(X) < diam(\mathscr{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} diam(A_i) < \infty$ *lo que concluye la prueba.* ∎

Teorema 3.0.17.
Todo espacio métrico compacto X, contiene un subconjunto denso y numerable.

Demostración.
Sea X un espacio métrico compacto, para $n \in \mathbb{N}$, definimos la bola abierta

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B_{\frac{1}{n}}(x)$$

por ser X compacto debe tener una cubierta finita. Sea D_n el conjunto de los centros de cada cubierta finita para X, haciendo esto para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

que es a lo más numerable.
Tomemos $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, por ser cada D_n una cubierta y $D_n \subset D$ para toda n, entonces existe $y \in D_n$, tal que $x \in B_{\frac{1}{n}}(y)$ lo que implica que $y \in B_{\varepsilon}(x)$. Cualquier bola abiera centrada en un punto arbitrario de X, contiene puntos de D por lo tanto D es denso en X, esto termina la prueba. ∎

Teorema 3.0.18.
Todo espacio métrico compacto X, puede ser dotado de una métrica d_1, tal que $d_1 \leqslant 1$.

Demostración.
Por el Teorema 3.0.16, tenemos que $diam(X)$ es finito, entonces denotamos

$$d_1 = \frac{d(p, q)}{diam(X)}$$

donde d es la métrica que ya tenía el espacio. Por ser generada por d se ve claramente que d_1 es métrica y por su definición se tiene que $d_1 \leqslant 1$. Lo que termina la prueba. ∎

Teorema 3.0.19.
Sea X un espacio métrico compacto, entonces X se puede encajar en el cubo de Hilbert.

Demostración.
Por el Teorema 3.0.18, podemos suponer que $d(p,q) \leqslant 1$ para cualquiera $p, q \in X$. Por el teorema 3.0.17, existe un conjunto denso y numerable $D = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Sea

$$h : X \longrightarrow [0,1]^{\infty}$$

definida por

$$h(p) = (d(p,a_1), d(p,a_2), d(p,a_3), ...)$$

- *h es continua.*
  Queremos probar que $\psi_n(h)$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ calculamos

$$\psi_n(h(p)) = \psi_n((d(p,a_1), d(p,a_2), d(p,a_3), ...)) = d(p,a_n)$$

  si demostramos que la distancia de un punto fijo es continua, entonces acabamos. Sea

$$H : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

  dada por

$$H(x) = d(x,x_0)$$

  la cual, por ser una métrica tenemos que

$$d(x,x_0) \leqslant d(x,y) + d(y,x_0), \text{ entonces } d(x,x_0) - d(y,x_0) \leqslant d(x,y) \text{ de manera análoga}$$

$$d(y,x_0) - d(x,x_0) \leqslant d(x,y)$$

  Entonces $|H(x) - H(y)| \leqslant d(y,x)$ lo que implica que H es continua.

  h es inyectiva.

  Supongamos que $h(p) = h(q)$ y además $p \neq q$. Como $p \neq q$, entonces $c = d(p,q)$ es positivo, ya que D es un denso en X cumple que

$$B_{\frac{c}{2}}(p) \bigcap D \neq \emptyset$$

  entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_r \in B_{\frac{c}{2}}(p)$, como suponemos que $h(p) = h(q)$ tenemos $d(p,a_n) = d(q,a_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, en partícular $d(p,a_r) = d(q,a_r)$, entonces

$$c = d(p,q) \leqslant d(p,a_r) + d(a_r,q) = 2d(p,a_r) < 2\frac{c}{2} = c$$

  lo que nos dice que $c < c$ lo cual es una contradicción, por lo tanto h es inyectiva.

Dado esto, tenemos que $h(X) \subset [0,1]^{\infty}$ como se quería probar. ■

Capítulo 4

Generalización

Ya definimos y expuesimos muchas de las propiedades topológicas del conjunto Cantor, ahora es momento de retomar el punto de vista geométrico para ver un poco de lo que las propiedades descritas en el capítulo anterior nos pueden brindar en espacios más generales.

Conjuntos tipo Cantor

Demostramos que el conjunto conjunto Cantor cumple que $l(\mathscr{C}) = 0$, como una primera generalización del conjunto, se puede ver, que de hecho, es posible construir conjuntos de la misma forma que construimos al conjunto Cantor pero con la propiedad de que su longitud tenga una longitud distinta a cero.
Sean $\alpha, \beta > 0$, tal que $\alpha + \beta = 1$, construyendo una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ que cumpla que $a_0 = 1$ y $a_n > 2a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n}.$$

Hay que notar que bajo estas condiciones, lo que estamos haciendo es partir del intervalo $[0, 1]$ y dividirlo en tres segmentos, con la diferencia de que ahora estamos variando la longitud de estas particiones. Véase la figura 4.1.

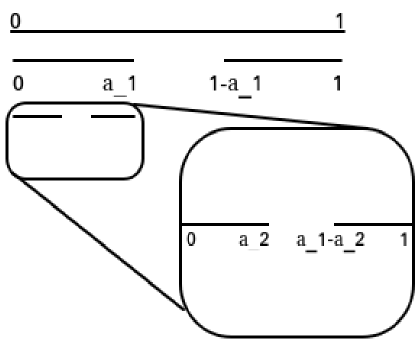

Figura 4.1: Conjunto tipo Cantor

Alfombra de Sierpinski

El caso particular de $[0,1]^2$, nos hace intuir que podemos aplicar el mismo procedimiento para la construcción del conjunto Cantor, pero ahora en dos dimensiones, es decir, podemos partir del conjunto $[0,1] \times [0,1]$, que no es otra cosa que el cuadrado de lado 1 con su esquina centrada en el origen.
En el conjunto de Cantor trabajámos con segmentos de recta, es decir, intervalos y para su construcción eliminámos segmentos de rectas más pequeñas, es decir, intervalos de longitud más pequeña que el original, pero ahora estamos trabajando inicialmente con un cuadrado entonces siguiendo esta analogía, ahora vamos a hacer nuestra construcción eliminando cuadrados de área más pequeña, es decir, eliminando subconjuntos de $[0,1] \times [0,1]$.
Sabiendo esto, comenzamos con nuestro cuadrado original de lado 1 y la suprimimos el cuadrado central de lado $\frac{1}{3}$, ahora trabajando sobre el conjunto resultante, vamos a eliminar 8 cuadrados de lado $\frac{1}{9}$, sobre esta estructura suprimimos los 64 cuadrados de lado $\frac{1}{27}$, sobre esta estructura vamos a eliminar los 512 cuadrados de lado $\frac{1}{81}$ y así sucesivamente, en general, tenemos que para la construcción de la estructura n, vamos a eliminar los 2^{3n-3} cuadrados de lado $\frac{1}{3^n}$, o dicho de otra forma, de área $\frac{1}{3^{2n}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Resumiendo tenemos

iteración	Cantidad de cuadrados a eliminar	área
1	1	$\frac{1}{9}$
2	8	$\frac{1}{81}$
3	64	$\frac{1}{729}$
4	512	$\frac{1}{6561}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{3n-3}	$\frac{1}{3^{2n}}$

A esta generalización del conjunto Cantor se le conoce como la **Alfombra de Sierpinski**, y geométricamente, podemos ver su construcción como sigue

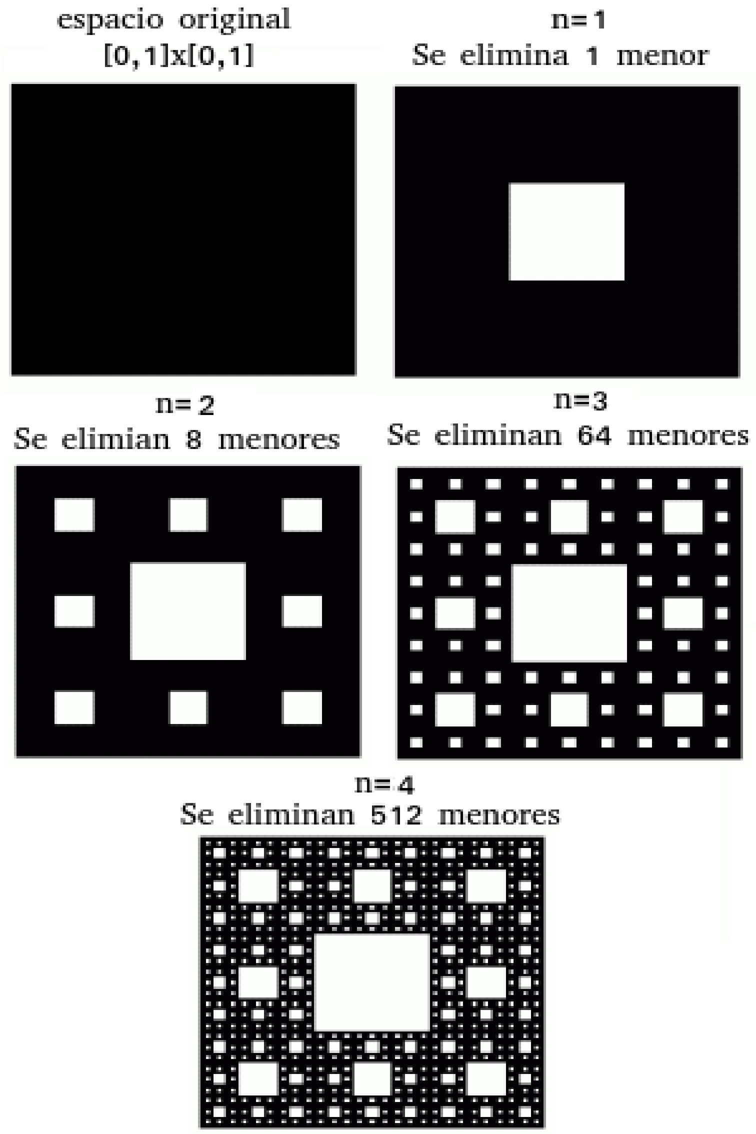

Figura 4.2: Construcción de Sierpinski

Continuando de esta forma para toda $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

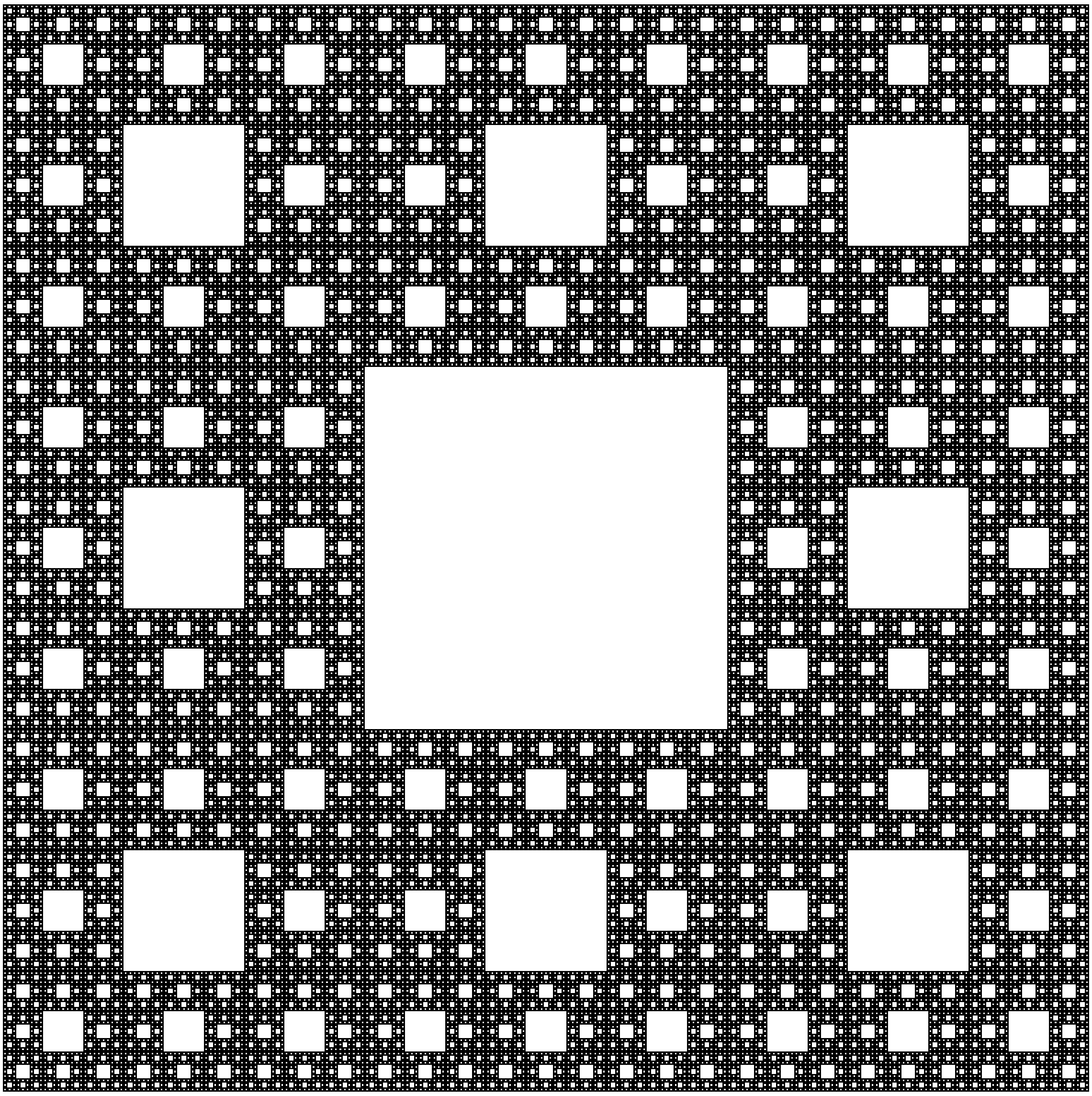

Figura 4.3: Alfombra de Sierpinski

Imagen obtenida de:
[•]http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/practicas/fractales_clasicos/alfombra.html

Esponja de Menger.

Podemos fijarnos en el caso particular $[0,1]^3$ para hacer un análisis similar al del la sección anterior, entonces, de la misma forma en que partimos del conjunto Cantor para construir la alfombra de Sierpinski, ahora partimos de la alfombra de Sierpinski para construir una nueva estructura. En la alfombra de Sierpinski iniciábamos con el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ de lado y área 1, de este eliminámos cuadrados de área más pequeña.

Nuestra nueva estructura va a trabajar sobre $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, en cierta forma, estamos dotando ahora a nuestro espacio de una nueva dimensión, por lo que estamos trabajando con el cubo de volumen 1 cuyas caras son cuadrados de lado 1, entonces nos gustaría poder construir una estructura eliminándo cubos de volumen menor, lo podemos hacer bajo la siguiente observación:

Como nuestro cubo esta formado por 6 caras de lado 1, podemos ver y tratar cada una de estas caras como una alfombra de Sierpinski, de esta forma, para construir la alfombra de Sierpinski se inicia eliminándo el cuadrado central de área $\frac{1}{9}$ y así sucesivamente, hasta que teníamos la construcción general, que nos decía que en cada iteración eliminábamos 2^{3n-3} cuadrados de área $\frac{1}{3^{2n}}$, entonces en nuestro cubo vamos a eliminar $6 \cdot (2^{3n-3})$ cubos de área menores, es decir, la cantidad que eliminábamos en la alfombra de Sierpinski por la cantidad de caras del cubo, de esta forma por estar trabajando con cuadrados de área $A = \frac{1}{3^{2n}}$, podemos ver que en cada iteración de la alfombra Sierpinski, tenemos que $l^2 = \frac{1}{3^{2n}}$, donde l simboliza la longitud del lado del cuadrado, así, tenemos que $l = \sqrt{\frac{1}{3^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{3^{2n}}}$, como el volumen se puede expresar como $V = A \cdot l$, tenemos que en cada iteración vamos a eliminar $6 \cdot (2^{3n-3})$ cubos de volumen $V = \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^{2n}}}$, lo que se puede representar de forma equivalente por $V = \frac{1}{27^n}$. esto para toda $n \in \mathbb{N}$.
En resumen tenemos que

paso	Cantidad de cubos a eliminar	volumen
1	6	$\frac{1}{27}$
2	48	$\frac{1}{729}$
3	384	$\frac{1}{19683}$
4	3072	$\frac{1}{531441}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$6 \cdot 2^{3n-3}$	$\frac{1}{27^n}$

A esta generalización del conjunto Cantor se le conoce como la **Esponja de Menger**, y geométricamente, podemos ver su construcción como sigue

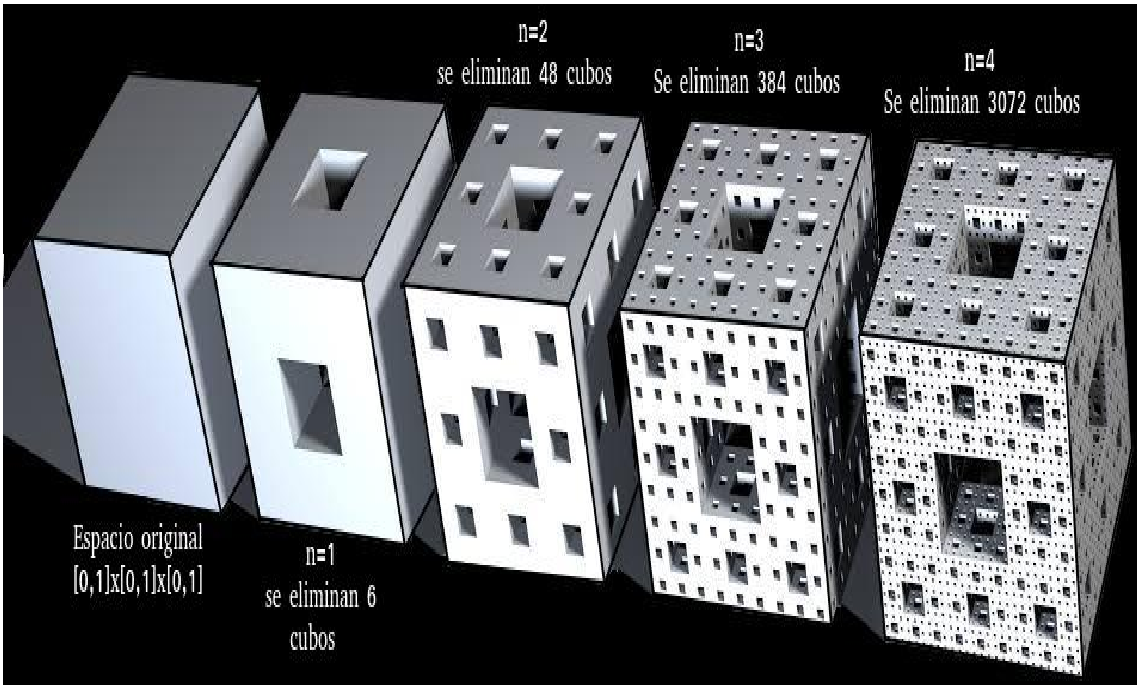

Figura 4.4: Construcción de la esponja de Menger

Imagen obtenida de:
[•]http://www.epsilones.com/paginas/curvas/curvas-035-esponja-menger.html
Continuando de esta forma para toda $n \in \mathbb{N}$ obtenemos

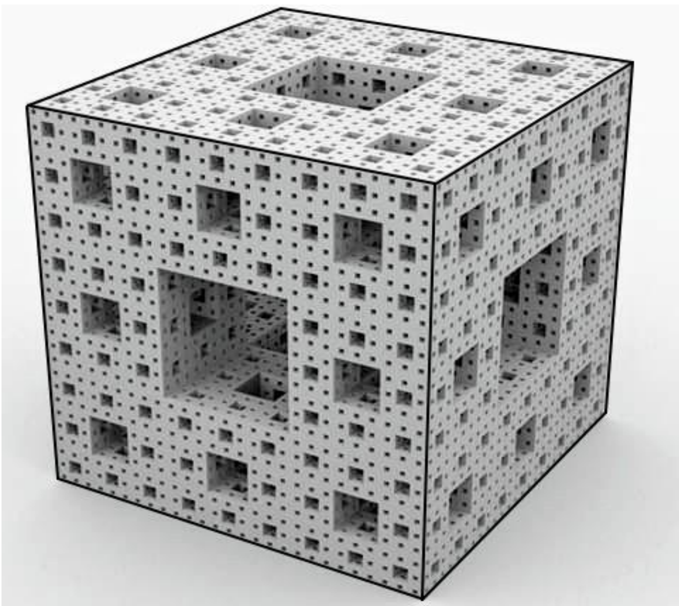

Figura 4.5: Esponja de Menger

Imagen obtenida de:
[•]https://matematicascercanas.com/2014/09/06/viaje-por-el-interior-de\-una-esponja-de-menger/

Cantor en dimensión dos

Ya se expuso cómo es que se generaliza el conjunto Cantor en $[0,1] \times [0,1]$, pero también, demostramos que $\mathscr{C} \cong \mathscr{C}^{\infty}$, entonces, esto nos hace pensar en qué significa geométricamente trabajar con $\mathscr{C}^2 = \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, como $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \subset [0,1] \times [0,1]$, podemos ver que estamos trabajando con subconjuntos del cuadrado unitario.

Geométricamente, $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$, dice que lo que se esta haciendo es aplicar la construcción de los C_n en el intervalo $[0,1]$ de X, y en el intervalo $[0,1]$ de Y simultáneamente, es decir, vamos a partir los respectivos intervalos en 3 intervalos de misma longitud, eliminamos el intermedio y volvemos aplicar nuestro procedimiento sobre el resultante. Cuando se constuyo al conjunto Cantor, lo que hicimos fue fragmentar nuestra recta base en rectas de longitudes más pequeñas hasta el grado de generar subconjuntos pequeñitos, recordemos que en este sentido lo que hacíamos era construir subconjuntos C_n formados por 2^n rectas de longitud $\frac{1}{3^n}$.

Intuitivamente, como estamos trabajando con $\mathscr{C}^2$, ahora estamos trabajando con cuadrados, es decir, queremos fragmentar nuestro cuadrado inicial en cuadrados de área más pequeña, de manera que casi no nos quede nada.
Observando que $\mathscr{C}^2 = \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, entonces vemos que queremos partir al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en $2^n \times 2^n = 2^{2n}$ cuadrados más pequeños que tengan área
$\frac{1}{3^n} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{2n}}$.
En resumen tenemos que

iteración	Cantidad de cuadrados resultantes	área
1	4	$\frac{1}{9}$
2	16	$\frac{1}{81}$
3	64	$\frac{1}{729}$
4	256	$\frac{1}{6561}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{2n}	$\frac{1}{3^{2n}}$

Geométricamente se ve como:

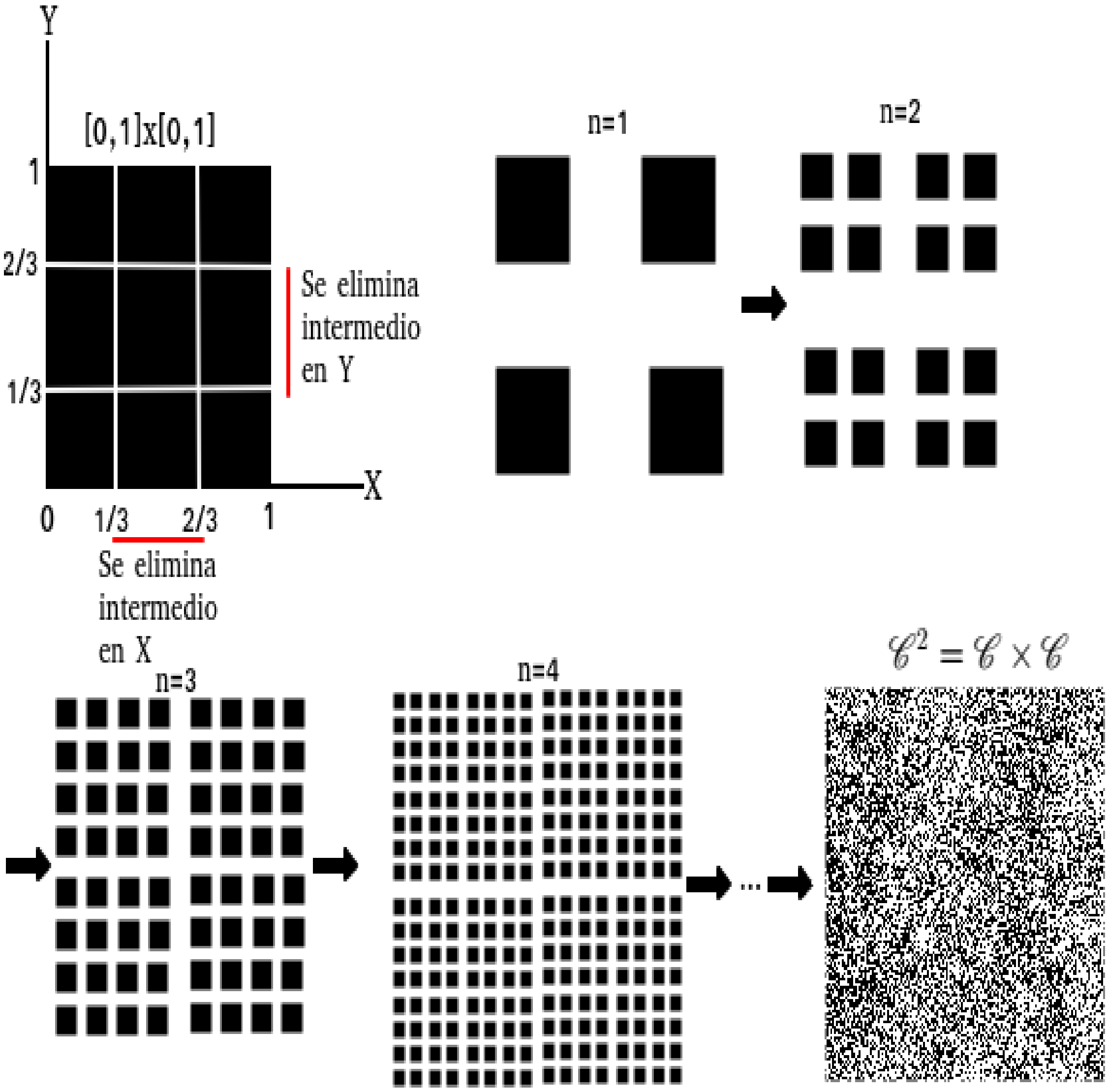

Figura 4.6: Cantor en 2 dimensiones

Cantor en dimensión tres

De manera análoga a la sección anterior, nos interesa saber cómo se ve $\mathscr{C}^3$, haciendo el análisis, vemos que $\mathscr{C}^3 = \mathscr{C}^2 \times \mathscr{C}$, entonces estamos dividiendo un cubo de volumen 1, que está formado por 6 caras de cuadrados de lado 1, es decir, estamos dividiendo un cubo, en cubos de volumen más pequeño hasta deshacerlo prácticamente, como $\mathscr{C}^3 \subset [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, y además lo que se esta haciendo es aplicar el proceso de construcción para los C_n del conjunto Cantor, pero ahora en sus respectivos $[0,1]$ en el eje X ,$[0,1]$ en el eje Y y $[0,1]$ en el eje Z simultáneamente, se ve que lo que se esta realizando es:
Partiendo del conjunto $[0,1]^2 \times [0,1] = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, queremos dividirlo en $2^{2n} \times 2^n = 2^{3n}$, cubos más pequeños de volumen $\dfrac{1}{3^{2n}} \times \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3^{3n}}$.
En resumen tenemos que:

iteración	Cantidad de cubos resultantes	volumen
1	8	$\frac{1}{27}$
2	64	$\frac{1}{729}$
3	512	$\frac{1}{19683}$
4	4096	$\frac{1}{531441}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{3n}	$\frac{1}{3^{3n}}$

Geométricamente, se vería como

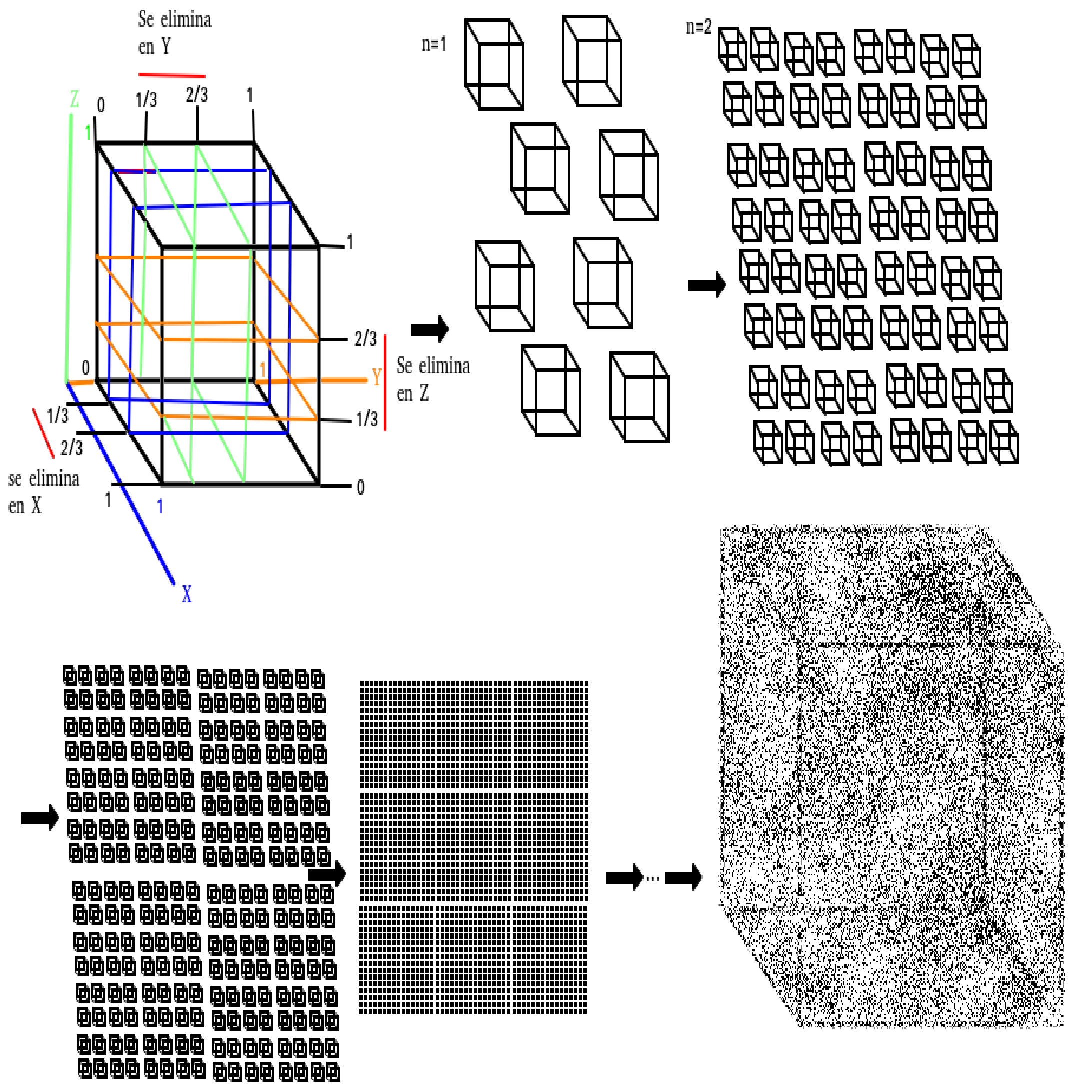

Figura 4.7: Cantor en 3 dimensiones

Conclusiones

Se dio toda una exposición detallada sobre el conjunto Cantor de forma gradual y progresiva hacia conceptos cada vez más generales, dando paso a un extenso desarrollo del tema, así como un compendio de resultados y conceptos, que pueden ser utilizados para el desarrollo de nuevos temas o de resultados más generales que no se han expuesto en el presente trabajo.

Bibliografía

[1] C.Prieto, *Topológia básica*, Fondo de Cultura Económica, México 2003.
[2] Grattan, Ivor, *Towards a Biography of Georg Cantor*, Annals of Science, 1971.
[3] M.Macho, *En un paseo por la geométria*, 1999/2000.
[4] M.Spivak, *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Editorial Reverté, 1981.
[5] S.Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing, .Co Reading, 1970.
[6] T.M.Apostol, *Análisis Mátematico*, Editorial Reverté, S.A, 1976
[7] Walter Rudin, *Principios de Análisis Mátematico*, McGraw Hill, 1980.

Referencias electrónicas

[8] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Smith.html
[9] https://naukas.com/2011/10/17/algunas-propiedades-del-conjunto-de-cantor/
[10] http://platea.pntic.mec.es/mzapata/tutor_ma/fractal/dim_frac.htm

Índice de figuras