



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

TRANSICIONES DE FASE Y FENÓMENOS CRÍTICOS EN GASES DE
BOSE ULTRAFRÍOS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
IGNACIO REYES AYALA

DIRECTOR DE INVESTIGACIÓN
DR. VÍCTOR MANUEL ROMERO ROCHÍN

IF-UNAM

COMITÉ TUTOR

DRA. ROSARIO PAREDES GUTIÉRREZ

IF-UNAM

DR. JAVIER MIRANDA MARTÍN DEL CAMPO

IF-UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente:

Secretario:

Vocal:

1er. Suplente:

2o. Suplente:

La tesis se realizó en Instituto de Física, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Víctor Manuel Romero Rochín

IF-UNAM

*A mis padres y a mis hermanas.
Yo soy porque nosotros somos.*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, Ramona e Ignacio, lo bueno que aprendí en la vida se los debo a ustedes, todo su esfuerzo me ha traído hasta aquí y me ha permitido desarrollarme en todos los aspectos. Junto con ellos, a mis hermanas Abril, Perlita y Mariela, por todo el apoyo brindado estos años a pesar de no entender qué estaba haciendo. Pascualito, gracias por hacerme sentir tan cerca a pesar de la distancia y por tu gran apoyo en todos los momentos.

A mis tutores, Víctor y Rosario por guiarme y apoyarme desde la maestría. En especial a Víctor por todas sus enseñanzas y motivación para aprender todos los días algo nuevo en la física y en la vida. Sus motivadoras charlas públicas son las que me llevaron a esta área de la física, y después, en nuestras discusiones particulares me guiaron en todo mi posgrado y me permitieron llegar hasta aquí, siempre estaré agradecido.

A mis amigos del grupo de átomos fríos por toda la motivación, el aprendizaje y las anécdotas en viajes y congresos.

A Jorge y Jackson por su asesoría en temas experimentales. Gracias Jackson por todos estos semestres de colaboración y apoyo en tantas horas de discusión y además por tu inestimable amistad.

A mis amigas sinaloenses Tania, Evelyn y Cecy por aguantarme estos años por acá y proporcionarme un pedacito de Sinaloa en la ciudad.

A mis amigos del grupo ciclista por todas las rodadas que fueron siempre un soplo de aire fresco, en especial a Sergio por animarme a moverme en bici por la ciudad.

A CONACYT por las becas de maestría y doctorado que me permitieron llevar a cabo todo mi trabajo.

Al Instituto de Física por proporcionarme un lugar y un ecosistema en el cual desarrollé mi posgrado. Al proyecto DGAPA-PAPIIT No. IN105217 por el apoyo económico para escribir esta tesis.

A la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, le debo toda mi

formación académica y social. Junto con ella, agradezco a la sociedad mexicana ya que gracias a ella existen las universidades públicas y las becas de posgrado en este país. Los estudiantes no debemos olvidar que debemos nuestra formación a la sociedad y tenemos una responsabilidad eterna para con ella.

*Bring forward what is true
Write it so that it is clear
Defend it to your last breath!*
-Ludwig Boltzmann(1844-1906)

*Study and in general the pursuit
of truth and beauty is a sphere of
activity in which we are permitted
to remain children all our lives.*
-Albert Einstein (1879-1955)

*El tiempo se bifurca perfectamente
hacia innumerables futuros.*
-Jorge Luis Borges (1899-1986)

Resumen

En el presente trabajo se hace un estudio de la termodinámica de gases de Bose atrapados en potencial homogéneo y en potenciales armónicos. Para llevar a cabo esto, proponemos una ecuación de estado heurística de campo medio que tiene por límites, el gas ideal de Bose para altas temperaturas (arriba de la transición) y la aproximación de Thomas-Fermi para bajas temperaturas (abajo de la transición). Calculamos las variables termodinámicas importantes del gas homogéneo y las susceptibilidades, posteriormente se estudia la transición y se calculan los exponentes críticos. Por encima de la transición encontramos unos exponentes críticos novedosos que cumplen escalamiento pero que difieren con lo que se ha considerado en la literatura, es decir, encontramos una nueva universalidad para el gas de Bose homogéneo. Por otro lado, a través de la aproximación de densidad local encontramos el perfil de densidad para el gas de Bose en trapa armónica lo que nos permita encontrar la ecuación fundamental del sistema inhomogéneo a partir del formalismo de las variables globales. Finalmente, calculamos las susceptibilidades termodinámicas y los exponentes críticos asociados para mostrar que la transición es de tercer orden en el caso inhomogéneo.

Abstract

In the present thesis, a study is made of the thermodynamics of Bose gases trapped in homogeneous potential and trapped in harmonic potentials. For this purpose, we propose a midfield heuristic state equation which has two limits, the ideal Bose gas for high temperatures (above the transition) and the Thomas-Fermi approximation for low temperatures (below the transition). We calculate the thermodynamic variables of the homogeneous gas and its susceptibilities, furthermore we study the transition and calculate the critical exponents. Above the transition we found a new critical exponents which match scaling but are different from those reported in the literature, i.e., we found a new univesality class for the ideal Bose gas. On the other hand, using the local density approximation we found the density profile for Bose gas in harmonic trap, this allows us to find the fundamental equation of the inhomogeneous system from the formalism of the global variables. Finally, we calculate the thermodynamics susceptibilities and the associated critical exponents to show that it is a third order transition.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Sobre esta tesis	2
2. Gases de Bose Ultrafríos	5
2.1. Gas de Bose ideal en potencial homogéneo	5
2.2. Gas de Bose sin interacciones en potencial armónico	7
2.3. Gas de Bose con interacciones débiles	9
2.4. Variables Globales	11
2.5. Exponentes Críticos	14
3. Ecuación de estado heurística para un gas de Bose homogéneo	19
4. Termodinámica de gas de Bose Homogéneo	27
4.1. Relación fundamental	27
4.2. Entropía	30
4.3. Susceptibilidades	32
4.3.1. Compresibilidad Isotérmica κ_T	32
4.3.2. Calor específico a volumen constante	33
4.3.3. Coeficiente de expansión térmica	34
4.3.4. Calor específico a presión constante	36
5. Exponentes Críticos del gas homogéneo	39
5.1. Exponente γ	39
5.1.1. $\mu < 0$	39
5.1.2. $\mu > 0$	41

ÍNDICE GENERAL

5.2. Exponente α	42
5.2.1. $\mu < 0$	42
5.2.2. $\mu > 0$	43
5.3. Exponente δ	43
5.3.1. $\mu < 0$	44
5.3.2. $\mu > 0$	44
5.4. Exponente β	45
5.5. Exponente η	46
5.6. Exponente ν	48
5.7. Discusión y comparación con la literatura	49
5.7.1. Nuevos exponentes para el Gas ideal de Bose en potencial homogéneo	50
6. Termodinámica del gas de Bose en Potencial armónico	55
6.1. Perfil de densidad, potencial armónico	56
6.2. Termodinámica de Variables Globales	57
6.2.1. Presión global	61
6.2.2. Compresibilidad Isotérmica Global	62
6.2.3. Calores Específicos y coeficiente de expansión térmica globales	71
7. Exponentes Críticos, Gas Inhomogéneo	75
7.1. Presión Global \mathcal{P} como función de la densidad global η	75
7.1.1. Arriba de la transición ($\mu < 0$)	76
7.1.2. Abajo de la transición, $\mu > 0$	78
7.2. Derivada de la compresibilidad isotérmica global $\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}$	80
7.2.0.1. Arriba de la transición	80
7.2.1. Abajo de la transición	81
7.3. Derivada del Calor Específico $\frac{\partial c_V}{\partial T}$	82
7.4. Fracción de Condensación	83
7.5. Resumen exponentes	84
8. Conclusiones	87
A. Funciones Especiales	91
B. Unidades Naturales	95
C. Colisiones de dos partículas a bajas energías	97
D. Derivadas gas homogéneo	101
E. Función de Correlación	103
F. Derivadas y otras expresiones del gas inhomogéneo	109

Bibliografía

113

Índice de figuras

3.1. Ajuste experimental para un gas con fase BEC, las curvas que se usan para ajustar son una gaussiana y una parábola (Imagen proporcionada por F. J. Poveda-Cuevas).	21
3.2. Esquema del modelo para la ecuación de estado. Se muestra una isoterma.	22
3.3. Densidad como función de la temperatura para potencial químico constante ($\mu > 0$).	26
4.1. Gráfica de $p\lambda_T^3/kT$ como función de $\zeta = e^{-\mu/kT}$ para un gas ultrafrío de átomos de ${}^7\text{Li}$ a una temperatura de $T = 1.6 \times 10^{-6}$ K, con una longitud de correlación de $a_s = 8 a_0$, con a_0 el radio de Bohr. Los datos experimentales fueron obtenidos de Nascimbène et al. [78]. La línea continua es la ecuación de estado del modelo propuesto, $p = p(\mu, T)$, en (4.5) y (4.6). No se ajusta ningún parámetro.	29
4.2. Diferentes isodensidades (en azul) en el plano Presión-Temperatura, decrecen en el eje vertical de mayor a menor densidad. En rojo se muestra la presión crítica.	30
4.3. Diferentes isodensidades en el plano Entropía-Temperatura. En rojo se muestra la entropía crítica.	31
4.4. Compresibilidad Isotérmica κ_T como función de T , para una densidad n fija. Unidades, $\hbar = m = a_s = 1$	33
4.5. La línea continua es el calor específico a volumen constante c_V como función de T para nuestro modelo. La línea punteada en azul es el calor específico de un gas ideal de Bose por debajo de T_c , por encima ambos coinciden	35
4.6. Coeficiente de expansión térmica en función de la temperatura.	36
4.7. Calor Específico a presión constante.	37
6.1. Perfil de densidad $\rho(r)$ como función de r , para diferentes valores del potencial químico. La línea naranja (sólida) $\mu = -0.71$ y la línea verde (punteada) $\mu = -0.35$ están abajo de la transición, mientras que la línea azul $\mu = 0.71$ y negra $\mu = 2.08$ se encuentran arriba de la transición. La temperatura es $kT = 36.42$, en unidades naturales para el oscilador, $\hbar = m = \omega = 1$	58

ÍNDICE DE FIGURAS

6.2.	Perfil de densidad $\rho(r)$ como función de r , para diferentes valores de la temperatura. Línea negra $kT = 22.0$, azul $kT = 29.5$, línea verde $kT = 36.5$, línea naranja $kT = 44.5$, todas dentro de la transición. El potencial químico es $\mu = 0.8$	59
6.3.	Presión global como función del potencial químico para diferentes temperatura. Las curvas de presión más alta son también las de mayor temperatura, es decir, las isothermas quedan ordenadas por el valor de su temperatura.	63
6.4.	Una curva típica de la compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T , como función de T/T_c , para $N = 5 \times 10^5$ átomos en la trampa. En la temperatura crítica T_c , la compresibilidad cambia su curvatura, muestra un punto de inflexión. Unidades naturales de la trampa, $\hbar = m = \omega = 1$	67
6.5.	Compresibilidad Isotérmica global experimental (Imagen proporcionada por F.J. Poveda-Cuevas y que aparece en [28]).	68
6.6.	Compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T como función del potencial químico μ para diferentes temperaturas.	69
6.7.	Datos experimentales de la compresibilidad isotérmica global (la imagen fue tomada de [27]).	70
6.8.	Derivada de la compresibilidad isotérmica, a número de partículas constante N y \mathcal{V} , $T \left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T} \right)_{N, \mathcal{V}}$ como función de la temperatura T/T_c , para $N = 5 \times 10^5$ átomos en la trampa.	71
6.9.	Capacidad calorífica a presión global constante C_p/Nk (arriba), Capacidad calorífica a volumen global constante (en medio) C_v/Nk , y coeficiente de expansión térmica global $T_c \mathcal{B}_T$ (abajo), como función de T/T_c	74

Índice de tablas

5.1. Exponentes Críticos, gas ideal Bose.	50
5.2. Exponentes Críticos, Modelo Esférico.	51
7.1. Exponentes Críticos, gas de Bose en potencial armónico.	84

Introducción

Antecedentes

El fenómeno clave a estudiar en este trabajo es la transición que ocurre cuando un fluido normal de Bose pasa al estado de Condensado de Bose Einstein (BEC), al variársele la temperatura o la densidad. El primer antecedente para el descubrimiento de este estado es la publicación de Nath Bose [1] donde se describe la estadística que siguen los bosones y que por tanto permitió describir a los gases compuestos por este tipo de partículas. Einstein, a partir de la estadística de Bose, publicó un par de artículos en 1924-1925 [2, 3] en los cuales hace un estudio estadístico de la termodinámica de un gas compuesto por bosones no interactuantes en un potencial homogéneo y deduce, por primera vez, la condensación de Bose-Einstein. Fenómeno que está definido por la ocupación macroscópica del estado base del sistema que ocurre cuando este pasa por una temperatura crítica a partir de la cual la mayor parte de las partículas del sistema empiezan a poblar el estado de mínima energía. Para que esto ocurra es crucial la estadística, ya que a diferencia de los fermiones es posible tener un número arbitrario de bosones ocupando un mismo estado cuántico. En ausencia de interacciones el fenómeno es regido únicamente por la estadística, es por ello que hasta que Bose publicó sus ideas fue posible encontrar este estado.

A pesar de que la condensación de Bose-Einstein fue descrita en una época temprana del desarrollo histórico de la mecánica cuántica no fue hasta la década de los 80s del siglo pasado cuando empezó a cobrar una gran relevancia experimental, y esto fue debido a que la temperatura a la que se alcanza este fenómeno se encuentra en el orden de los nanokelvin, rango fuera de alcance para la tecnología de bajas temperaturas hasta antes de ese periodo. En 1987, Bagnato y colaboradores [4, 5] calculan, por primera vez, las variables termodinámicas de interés para un gas de bosones atrapado en un potencial inhomogéneo. Durante esa década se lleva a cabo un arduo desarrollo de técnicas experimentales para lograr enfriar gases a temperaturas del orden de micro y nano kelvin por medio de láseres y trampas magneto-ópticas [6], trabajo por

1. INTRODUCCION

el cual se entregó el premio Nobel a W. Phillips [7], Cohen-Tannoudji [8] y S. Chu [9]. Estos esfuerzos experimentales tienen su punto culminante en 1995 con la obtención de los primeros condensados de Bose-Einstein en ^{87}Rb , ^{23}Na y ^7Li por los grupos de Wieman-Cornell [10], Ketterle [11] y Hulet [12] respectivamente (los tres primeros fueron galardonados con el premio Nobel en 2001 por este logro). Desde entonces se han obtenido BECs en la mayoría de los elementos alcalinos [13, 14, 15] y de otros elementos no alcalinos como ^4He [16, 17], Yb [18], Cr [19], Ca [20], Sr [21], Er [21] y Dy [22].

Todos los experimentos que se mencionan anteriormente se llevan a cabo en potenciales confinantes que son inhomogéneos (armónicos en muchos de los casos) y para los cuales las variables termodinámicas que solemos usar para describir a los flúidos, como volumen y presión, dejan de ser adecuadas para caracterizar al sistema. Es por eso que surge el formalismo de las variables globales propuesto por V. Romero-Rochín [23, 24] en el cual se define una nueva variable a partir del potencial que juega el rol del volumen mientras que su variable conjugada juega el rol de la presión. Se han venido realizando diferentes experimentos en el grupo de Brasil a cargo de V. Bagnato en los cuales se estudian la termodinámica de gases ultrafríos en potenciales armónicos por medio de las variables globales, en particular la transición de fase [25, 26, 27, 28, 29].

En el año 2018 se logra obtener el primer condensado en México en el Laboratorio Nacional de Materia Ultrafría (LANMAC) en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se espera, dentro de poco, que se pueda aplicar el formalismo de las variables termodinámicas para estudiar la termodinámica de la transición del condensado. En particular el presente trabajo proporciona una guía teórica y una motivación por medio de un modelo para llevar a cabo dichos experimentos [30, 31].

Sobre esta tesis

Este trabajo parte de un bagaje en el área del estudio de los gases ultrafríos atrapados en potenciales inhomogéneo con el uso de las variables globales y que fue desarrollado por Víctor Romero en colaboración con su estudiante de doctorado Nadia Figueroa [32]. Así como también de un interés por parte del grupo de V. Bagnato por estudiar termodinámica de variables globales en sus experimentos con ^{87}Rb [27]. En ese contexto, nuestro trabajo toma la línea de desarrollar un modelo de campo medio de un gas de bosones confinados por un potencial armónico que permita el estudio termodinámico del sistema aplicando lo previamente desarrollado

En esta tesis empezamos, en el capítulo 2, haciendo un breve resumen de la teoría que será fundamental para el planteamiento de nuestro trabajo y que servirá para poner en contexto el desarrollo que se hará durante esta tesis. Primero se hace un repaso de la condensación de Bose en gases no interactuantes, confinados en potencial homogéneo

y después en potencial armónico. Luego seguimos con el gas de bosones pero introduciendo interacciones a bajas energías para llegar a la ecuación de Gross-Pitaevskii [33, 34]. A partir de la aproximación de Thomas-Fermi se llega a una solución de esta ecuación que nos da un perfil de densidad que será uno de los puntos de partida para construir nuestro modelo. Posteriormente se presenta *grosso modo* el formalismo de la termodinámica de variables globales que será nuestra herramienta básica para estudiar el sistema. Para finalizar el capítulo agregamos una sección donde mostramos conceptos básicos para el estudio de las transiciones de fase, en esencia el concepto de los exponentes críticos.

En el Capítulo 3 nos adentramos en el corazón de este trabajo, empezamos justificando la construcción de un nuevo modelo de campo medio y luego pasamos a construirlo partiendo de los límites de gas ideal de Bose y aproximación de Thomas-Fermi. Se ajusta una función que une los dos límites y obtenemos un modelo para la densidad del gas homogéneo en términos del potencial químico μ y la temperatura T . A partir de este modelo, en el capítulo 4 estudiamos la termodinámica del gas de bosones en potencial tipo caja. Calculamos la ecuación fundamental del sistema, la presión como función de μ y T , a partir de esta encontramos la entropía y las susceptibilidades termodinámicas; compresibilidad isotérmica y los calores específicos. Posteriormente estudiamos la transición, enfocándonos en los límites asintóticos cerca del punto crítico para con esto obtener los exponentes críticos. En este capítulo destacamos que los exponentes que se obtienen por encima de la transición son los del gas ideal de Bose en potencial homogéneo y que son novedosos con respecto a la literatura, donde se ha enmarcado a este sistema dentro de la universalidad del modelo esférico [35]. Calculamos de forma exacta los exponentes críticos y con eso mostramos que no coinciden con los del modelo esférico y que por tanto el sistema posee su propia universalidad.

Después de estudiar el gas homogéneo, en el capítulo 6 usamos la aproximación de densidad local para extender nuestro modelo al caso inhomogéneo, particularmente al gas de Bose en una trampa armónica. Con esto obtenemos el perfil de densidad, y por medio de la teoría de variables globales obtenemos la ecuación fundamental del sistema y la ecuación de estado para la densidad. Posteriormente nos centramos en la compresibilidad isotérmica global para mostrar que no presenta divergencias, como ocurre en el caso homogéneo, pero que sí presenta un comportamiento no analítico en el punto crítico pues su derivada sí es divergente. Posteriormente, en el capítulo 7, nos centramos en obtener los exponentes críticos con el fin de estudiar el comportamiento crítico del sistema en la transición. Este desarrollo muestra una guía teórica de cómo estudiar la termodinámica de los gases ultrafríos en potenciales inhomogéneos pues en los experimentos todos los análisis parten de los perfiles de densidad. Cerramos la tesis con las conclusiones y perspectiva del trabajo desarrollado.

Gases de Bose Ultrafríos

En las tres secciones de este capítulo se hace una breve introducción de la teoría alrededor de la condensación de Bose-Einstein que plantea ciertas herramientas matemáticas que son básicas para el presente trabajo. Se empieza por presentar el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein en gases ultrafríos sin interacciones atrapados en potenciales armónicos, posteriormente se presenta un breve estudio del gas de Bose pero con interacciones con aproximaciones a bajas energías. Finalmente, la última sección presenta el formalismo de las variables globales. Esto será el punto de partida para el presente trabajo. En la última sección se dan conceptos básicos de exponentes críticos que usaremos después para describir las transiciones.

Gas de Bose ideal en potencial homogéneo

Consideramos un gas de bosones sin interacciones atrapado por un potencial homogéneo o tipo caja de volumen V , las partículas tienen espín cero y su masa es m . En este sistema la energía de las partículas está dada únicamente por la energía cinética (despreciamos efectos gravitatorios). Entonces el hamiltoniano para el sistema es la suma sobre las partículas en cada estado del momento de una partícula,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{n}_{\mathbf{p}}, \quad (2.1)$$

siendo

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{n}_{\mathbf{p}} \quad (2.2)$$

el operador de número de las partículas.

La gran función de partición está dada por,

$$\Xi = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu N)} \quad (2.3)$$

con $\beta = \frac{1}{kT}$ y μ el potencial químico.

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

Se puede mostrar (véase [36, 37]) que el gran potencial $\Omega = -kT \text{Ln}(\Xi)$ es,

$$\Omega = -kT \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (2.4)$$

donde $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$ es la longitud de onda térmica de de Broglie y $g_{5/2}$ es la función de Bose, que es un caso especial de las funciones polilogarítmicas [38] (vea Apéndice A para más detalles de dichas funciones):

$$g_s(e^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^{-\alpha} e^x - 1}. \quad (2.5)$$

A partir del gran potencial se pueden obtener la presión y el número de partículas,

$$p = \frac{kT}{\lambda_T^3} g_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (2.6)$$

$$N = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (2.7)$$

y de esta última expresión la densidad es $\rho = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right)$.

Sin embargo en la expresión (2.7) solo estamos considerando el número de partículas en los estados excitados porque en el límite termodinámico y con potenciales químicos diferentes de cero, en esencia el número de partículas en el estado base N_0 es cero. Pero, esto ya no es cierto cuando nos acercamos a $\mu = 0$, veamos cómo es la función de distribución para los estados en la estadística de Bose,

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} - 1}. \quad (2.8)$$

El caso con $p = 0$ es el de las partículas que no hemos considerado, es decir,

$$N_0 = \frac{z}{1 - z} \quad (2.9)$$

donde se ha definido la fugacidad como $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$. El potencial químico es negativo, y cuando $|\mu|$ es muy grande N_0/V es despreciable, sin embargo, cuando el potencial químico tiende a cero entonces el número de partículas en el estado base puede crecer indefinidamente. Por otro lado, si mantenemos T y V constante y agregamos partículas al sistema, entonces el potencial químico crece y se va acercando a cero, ¿Qué pasa con el número de partículas en los estados excitados? Como la temperatura y el volumen son constantes y el potencial químico se incrementa hasta cero entonces el número de partículas en los estados excitados tiende al valor,

$$N_e = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(e^{\frac{\mu \rightarrow 0}{kT}} \right) \quad (2.10)$$

2.2 Gas de Bose sin interacciones en potencial armónico

como límite. Y la función de Bose tiende a la función zeta de Riemann $\zeta(3/2)$ que tiene un valor finito (≈ 2.61), es decir, el número de partículas en estados excitados tiene por cota superior $\frac{V}{\lambda_T^3} \zeta(3/2)$. Entonces, todas las demás partículas que sigamos agregando al sistema, al alcanzar esta cota, irán al estado base porque el número de partículas que puede albergar no está acotado. Lo mismo sucede si mantenemos cierto número de partículas, al llegar a $\mu = 0$ queda definida una temperatura crítica T_c a partir de la cual ocurre el mismo fenómeno, el potencial químico se mantiene en cero y si bajamos de esa temperatura las partículas empiezan a ocupar macroscópicamente el estado base. Esto es lo que se conoce como **Condensación de Bose-Einstein** (BEC¹), la ocupación macroscópica del estado base a partir de cierta temperatura crítica y es considerada una transición de fase pues el sistema se divide en dos fases, un gas térmico con partículas en los estados excitados y la fase condensada de las partículas en el estado base.

Haciendo el potencial químico cero en (2.7), obtenemos la temperatura crítica,

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left[\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (2.11)$$

El número de partículas total es el número de partículas en el estado base más las partículas en el estado excitado $N = N_0 + N_e$. Definimos la fracción de condensación como el número de bosones en el estado base entre el número total, es decir, $\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N}$. A partir de (2.7) y (2.11), se puede mostrar que la fracción condensada está dada por,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.12)$$

Gas de Bose sin interacciones en potencial armónico

Para un gas de N bosones confinado en un potencial externo $V_{ext}(\vec{r})$, el número de ocupación para el estado k está dado por la distribución de Bose-Einstein [39],

$$f_{BE}(\varepsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \quad (2.13)$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B la constante de Boltzmann, ε_k la energía del nivel k y μ el potencial químico. Así el número total de partículas es la suma sobre todos los estados,

$$N = \sum_k f_{BE}(\varepsilon_k) \quad (2.14)$$

$$= \sum_{\varepsilon_k} \frac{s_k}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1} \quad (2.15)$$

¹En la literatura se suele usar BEC para referirse a la condensación de Bose-Einstein por su abreviatura en inglés.

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

donde hemos cambiado la suma sobre los estados para sumar sobre las energías, por lo que s_k es claramente la degeneración de cada nivel.

En el límite termodinámico el número de partículas y el volumen global $\mathcal{V} = \frac{1}{\omega^3}$ (se darán los detalles de esta definición en la sección 2.4) tienden a infinito $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ pero el cociente de estos se mantiene constante $n = N/\mathcal{V} = cte$. Si consideramos este límite el espaciamiento entre niveles energéticos consecutivos es mucho más pequeño que las escalas típicas del sistema $k_B T$. Usando este hecho podemos suponer que la diferencia entre niveles se vuelve infinitesimal y así se puede reemplazar la suma por una integral,

$$N = N_0 + \int_0^\infty f_{BE}(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.16)$$

con N_0 el número de partículas en el estado base que se ha separado porque en la integral no se toman en cuenta, y al pasar de una suma a una integral se reemplazó la degeneración de estados s_k por la densidad de estados $\rho(\varepsilon)$ que es el número de estados entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, la cual está dada por

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \int_{V(\varepsilon)} \sqrt{\varepsilon - V_{ext}(r)} d^3r \quad (2.17)$$

donde $V(\varepsilon)$ es el volumen disponible en el espacio ε y V_{ext} es el potencial externo.

Para el caso que se está considerando, el potencial es armónico,

$$V_{ext}(x, y, z) = \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.18)$$

donde ω_i es la frecuencia del oscilador en la dirección i y los niveles energéticos para este potencial están dados por

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z. \quad (2.19)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en (2.17) e integrando se obtiene que la densidad de estados para el potencial armónico está dada por

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}. \quad (2.20)$$

A su vez sustituimos este resultado en (2.2) junto con la distribución de Bose-Einstein para obtener el número de partículas en los estados excitados,

$$N_e = N - N_0 \quad (2.21)$$

$$= g_3(z) \left(\frac{kT}{\hbar\bar{\omega}}\right) \quad (2.22)$$

donde $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$.

Si ahora se supone que el punto crítico ocurre en $\mu = 0$ se obtiene la temperatura crítica,

$$T_c = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (2.23)$$

Y que a su vez nos permite obtener la fracción de condensación con respecto al número de partículas,

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (2.24)$$

Gas de Bose con interacciones débiles

La siguiente discusión está basada en las notas de Víctor Romero [40] para el curso de introducción al estudio de los gases ultrafríos, cabe aclarar que no están publicadas.

Para el estudio de gases reales es necesario considerar las interacciones entre las partículas que lo conforman. Como vimos anteriormente, el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein se da incluso sin la presencia de las interacciones, sin embargo el fenómeno de la superfluidez solo puede ser descrito en presencia de interacciones. El hamiltoniano para un gas con N átomos está dado por

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \hat{U}(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_{i<j=1}^N \hat{V}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (2.25)$$

donde $\hat{V}(\mathbf{r}_{ij})$ es la interacción entre partículas y $\hat{U}(\mathbf{r}_i)$ es el potencial externo. La primera suposición que hacemos es que las interacciones son de corto alcance y que el potencial con el que las partículas interactúan es el de esferas duras con radio a_s (Vease el Apéndice C para mayor detalles sobre esta aproximación), siendo este radio la longitud de dispersión. Si las colisiones son a bajas energías la dispersión está dominada por la onda s y la interacción efectiva entre dos átomos puede ser vista como una interacción de contacto escrita como,

$$\int d^3r' V_{eff}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = g \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \quad (2.26)$$

con $V_{eff}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ un potencial de contacto efectivo. Se ha definido la constante $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s$ que a partir de ahora llevará toda la información sobre la interacción y para distinguir de la función de Bose $g_n(\mu/kT)$ a partir de aquí usaremos la notación usual de la función polilogaritmo Li_n [41] para esta última.

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

Dadas estas suposiciones, podemos construir el hamiltoniano de N partículas bosónicas interactuantes como [42]

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V_{eff} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t),\end{aligned}\quad (2.27)$$

donde $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{\psi}(\mathbf{r}', t)$ son los operadores de campo escritos en términos de los operadores de creación y aniquilación que cumplen con las siguientes propiedades

$$\left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right] = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (2.28)$$

$$\left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right] = 0 = \left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \right]. \quad (2.29)$$

Introduciendo la forma del potencial efectivo en 2.27, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{2} g \int d^3r \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t),\end{aligned}\quad (2.30)$$

y eliminando una integral con la función delta simplificamos a,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{2} g \int d^3r \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Ahora, recordemos que la ecuación de movimiento de Heisenberg es

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H} - \hat{N} \right]. \quad (2.32)$$

donde \hat{N} es el operador de número,

$$\hat{N} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

Sustituimos en esta, la expresión para la función de onda, esto nos da explícitamente la ecuación de movimiento que queda como

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) + g \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.34)$$

Si ahora suponemos que el potencial es independiente del tiempo, $V_{ext}(\mathbf{r}, t) = V_{ext}(\mathbf{r})$, podemos expresar los operadores de campo en la base de los operadores de creación y aniquilación bosónicos,

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \phi_k(\mathbf{r}, t) \hat{b}_k \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_k \phi_k^*(\mathbf{r}, t) \hat{b}_k^\dagger. \quad (2.35)$$

Hacemos la suposición crucial de que el sistema está a una temperatura $T = 0$, con lo que podemos considerar que las partículas están ocupando el estado base no interactuante del condensado, es decir, en $k = 0$ con $\psi_0(k)$. Esto se traduce en que (2.35) se aproxime como,

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \approx \Phi_0(\mathbf{r}, t) \hat{b}_0 \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \approx \Phi_0^*(\mathbf{r}, t) \hat{b}_0^\dagger. \quad (2.36)$$

donde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ es llamada, la función de onda del condensado.

Y si ahora sustituimos esta última aproximación en la ecuación de movimiento se llega a la siguiente expresión

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) - \mu \right) \Phi_0(\mathbf{r}, t) + g |\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \Phi_0(\mathbf{r}, t). \quad (2.37)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo. Y en el caso estacionario, la expresión toma la forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right) \Phi_0(\mathbf{r}) + g |\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \Phi_0(\mathbf{r}) = \mu \Phi_0(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

Para sistemas lo suficientemente grandes, se puede aproximar la energía del estado base despreciando el término cinético en la ecuación de Gross-Pitaevskii. Esto nos lleva a obtener una solución de la forma,

$$n(\mathbf{r}) = |\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{g} [\mu - U(\mathbf{r})] \quad (2.39)$$

La aproximación usada para llegar a esta expresión, es conocida como aproximación de Thomas-Fermi [43, 44, 45].

Variables Globales

Aquí se presenta un breve resumen del tema, para profundizar se puede consultar alguna de las siguientes referencias [23, 32, 46]. Cuando se tiene un gas confinado por un potencial inhomogéneo las variables usuales de presión y volumen dejan de ser adecuadas para describir el sistema. En un gas atrapado en un potencial armónico, por ejemplo, el volumen disponible se extiende por todo el espacio ya que no hay unas paredes que confinen al gas a una región bien definida. Contrario a lo que sucede en

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

un potencial tipo caja, en el caso inhomogéneo las partículas sienten un potencial en cualquier punto del espacio en que se encuentren, mientras que en el homogéneo solo lo hacen al chocar con las paredes. Es necesario entonces escoger otra variable que juegue el rol del volumen, para esto hacemos uso del formalismo de las variables globales [47], del cual se hace una breve exposición a continuación.

Consideramos un gas de N partículas atrapado en un potencial externo y en el que existe interacción a pares entre las partículas. Por simplicidad, aunque vale para cualquier potencial confinante, nos restringimos al caso del potencial armónico. Para este sistema el hamiltoniano es,

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} u(r_{ij}) + \sum_{j=1}^N V_{ext}(\vec{r}_j), \quad (2.40)$$

con $u(r_{ij})$ el potencial de interacción entre las partículas. La función de partición está dada por,

$$Z = \text{Tr} e^{-H/kT}. \quad (2.41)$$

Recordamos ahora que el potencial es de la forma $V_{ext}(\vec{r}) = m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2$, si además se toma el límite termodinámico y se desprecia el término de interacción nos restringimos al caso de un gas ideal atrapado en un potencial armónico. Calculando la energía libre de Hemholtz se obtiene [39]

$$F(N, T) = -NkT \left(\ln \frac{1}{N} \left(\frac{kT}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 + 1 \right). \quad (2.42)$$

donde $\bar{\omega}$ es la media armónica de las frecuencias de la trampa. Y por lo tanto, el gran potencial está dado por,

$$\Omega(\mu, T) = -kT \left(\frac{kT}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \text{Li}_4(\mu/kT) \quad (2.43)$$

donde Li_4 es la función polilogaritmo (A.1) de orden 4. Vemos que en estas expresiones no aparece el volumen V ya que el gas no está confinado en un recipiente, cuando si lo están, la energía libre y el gran potencial sí presentan explícitamente dicha variable [36]. En el límite termodinámico, las variables N , F , Ω , S divergen, pero sus cocientes deben permanecer finitos. Por lo que entonces en las expresiones de arriba, para preservar la extensividad se debe cumplir que $\bar{\omega}^3 \rightarrow 0$, mientras que $N\bar{\omega}^3$, $\Omega\bar{\omega}^3$, $F\bar{\omega}^3$, permanecen constantes. Esto lleva a pensar que el inverso de la frecuencia al cubo juega el rol del volumen, es entonces ésta la variable extensiva termodinámica adecuada para estudiar el sistema. Dado lo anterior, se define el *volumen global* como [23, 46, 48],

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\bar{\omega}^3}. \quad (2.44)$$

Lo mismo aplica para el caso con interacciones [46]. Tanto la energía libre $F = F(N, \mathcal{V}, T)$ como el gran potencial $\Omega = \Omega(\mathcal{V}, T, \mu)$, dependen del volumen global \mathcal{V} de forma completamente análoga a como sucede con el volumen geométrico usual V cuando se considera el caso del potencial caja. La interpretación física de esto es que la interacción de las partículas con el potencial externo se refleja macroscópicamente en la aparición de una variable termodinámica que se conoce como volumen y que su forma depende del tipo de potencial externo que esté en juego, si este es el potencial homogéneo, el volumen global se reduce al volumen usual.

Si la temperatura y el potencial químico permanecen constantes, un incremento en \mathcal{V} se ve acompañado de un incremento en el número de partículas N , es decir, es el comportamiento de un volumen, aunque no tenga las unidades de este. Habiendo definido el volumen global, se define la presión global como la variable conjugada a éste [23],

$$\mathcal{P} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{V}} \right)_{N,T} = - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathcal{V}} \right\rangle \quad (2.45)$$

de esta forma el trabajo mecánico en una trampa armónica que se expande o contrae, está dado por $dW = -\mathcal{P}d\mathcal{V}$. Si nos enfocamos al potencial armónico, la expresión anterior nos lleva a

$$\mathcal{P} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \sum_i \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\rangle \quad (2.46)$$

$$\mathcal{P} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{V}^{\frac{2}{3}}} \sum_i \frac{1}{2} m (x^2 + y^2 + z^2) \right\rangle \quad (2.47)$$

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \left\langle \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\rangle. \quad (2.48)$$

Por otro lado se tiene que,

$$\vec{r} \cdot \nabla V_{ext}(\vec{r}) = m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.49)$$

y sustituyendo en (2.48),

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{1}{3\mathcal{V}} \int d\vec{r} \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{r}_i \cdot \nabla_i V_{ext}(\vec{r}_i) \right\rangle. \quad (2.50)$$

Además la densidad está definida como,

$$\rho(\vec{r}) = \left\langle \sum_i^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right\rangle \quad (2.51)$$

sustituyendo esta expresión en (2.50) se obtiene la expresión,

$$\mathcal{P}\mathcal{V} = \frac{1}{3} \int \rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \nabla V_{ext}(\vec{r}) d^3r. \quad (2.52)$$

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

La relación anterior es muy relevante ya que la densidad que aparece es la que se obtiene directamente en los experimentos con átomos fríos, es decir, es el perfil de densidad. Si la integramos, sobre todo el espacio, nos permite obtener el número de partículas,

$$N = \int \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (2.53)$$

Es importante notar que estas nuevas variables globales no tienen unidades de volumen y presión, pero el producto de ellas $\mathcal{P}\mathcal{V}$ sí tiene las unidades de energía como ocurre con las variables usuales. El volumen global, en el caso armónico, podríamos relacionarlo con un espacio en el sentido real puesto que este, en cierto sentido nos proporciona información de que tan “abierta” está la trampa.

Si nos restringimos a un potencial armónico, de la ecuación (2.52) obtenemos una fórmula para calcular la presión global con sólo conocer el perfil de densidad y las frecuencias de la trampa,

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3\mathcal{V}} \int \rho(\vec{r}) \left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \right) d^3r. \quad (2.54)$$

Y además, esta expresión nos permite calcular toda la termodinámica pues es una relación fundamental. En particular, la compresibilidad isotérmica,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T &= -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{P}} \right)_{N,T} \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{\mathcal{V},T}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lo importante de la compresibilidad isotérmica global es que es una susceptibilidad del sistema ya que está relacionada directamente con las fluctuaciones del sistema como lo muestra la última relación. Además se puede medir directamente en un arreglo experimental [27, 49].

Exponentes Críticos

Desde finales del siglo XIX ha habido interés por describir los fenómenos que ocurren cuando un sistema pasa de un estado a otro, como sucede cuando el agua sufre un cambio de fase, el ejemplo más cotidiano con el que la humanidad ha convivido. Es por esto que las transiciones de fase fueron asociadas, inicialmente, a cambios entre los distintos estados de agregación del agua. Después se asociaron a otros cambios macroscópicos que sufren sistema de índole muy diferente como la magnetización espontánea, la condensación de Bose-Einstein, la superfluidez, la superconductividad, entre otros. El estudio de estos cambios abrió el área de lo que hoy se conoce como fenómenos críticos. No es intención en esta introducción ahondar en el tema, simplemente pasaremos a dar algunas de las definiciones y conceptos en el área de los fenómenos críticos que usaremos

en el estudio de la transición de fase de los gases de Bose ultrafríos, esto nos dará un contexto sobre el lenguaje que usaremos más adelante.

Se define el exponente crítico de una función $f(\epsilon)$ en un punto crítico [50, 51] como

$$\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\epsilon}, \quad (2.56)$$

donde ϵ es la variable que mide qué tan cerca estamos del punto singular,

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (2.57)$$

y T_c es la llamada temperatura crítica, es decir, la temperatura en la cuál ocurre la transición.

Muy cerca del punto crítico el término dominante es el de orden más bajo, es decir, aquel asociado al exponente crítico, esto permite aproximar la función como

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^\lambda \quad (2.58)$$

y en general como una serie de potencias agregando las correcciones a órdenes mayores,

$$f(\epsilon) = A\epsilon^\lambda (1 + B\epsilon^y + \dots) \quad (2.59)$$

con $y > 0$. Estas dos últimas formas nos serán de utilidad a lo largo de esta tesis para calcular los exponentes críticos de la transición del gas de Bose.

La definición anterior tiene una deficiencia cuando el exponente resulta ser cero, ya que el comportamiento de la función pudiera corresponder a varios casos; una función logarítmica que diverge en el punto, una función que es finita pero no cero o una función que no diverge pero es discontinua. Para subsanar ese problema se añade la siguiente definición, se encuentra el entero más pequeño j tal que $f^j(\epsilon) = d^j f(\epsilon)/d\epsilon^j$ sea divergente, entonces se define el exponente crítico λ_s como

$$\lambda_s = j + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln|f^j(\epsilon)|}{\ln\epsilon} \quad (2.60)$$

En estas dos definiciones se ha supuesto que la función se acerca al punto crítico por arriba, es decir, $T > T_c$ y entonces ϵ siempre es positivo. Cuando la función se acerca por debajo del punto crítico $\epsilon < 0$, se cumplen definiciones análogas, solo se cambia ϵ por $-\epsilon$ en la definición y al exponente se le designa con el mismo nombre pero primado, λ' .

Existen ciertos exponentes de interés en cada sistema termodinámico a los que se les asocian las letras griegas α , β , γ , δ , η y ν . Debido a que en este trabajo estamos interesados en sistemas de fluidos entonces los definiremos en relación a las variables

2. GASES DE BOSE ULTRAFRÍOS

termodinámicas que describen un fluido, para otros sistemas se usan las mismas letras y se asocian a las variables termodinámicas que son análogas, en esos sistemas, a las de los fluidos. Definimos, en primera instancia, los exponentes críticos asociados con dos de las susceptibilidades del sistema, compresibilidad isotérmica κ_T y calor específico a volumen constante C_V , sus exponentes críticos correspondientes α y γ se definen como

$$C_V \sim \epsilon^{-\alpha} \quad (2.61)$$

$$\kappa_T \sim \epsilon^{-\gamma}. \quad (2.62)$$

Ahora, pasamos a los exponentes asociados a las correlaciones del sistema. Si $G(r)$ es la función de correlación densidad-densidad del sistema y ξ la longitud de correlación entonces se definen sus exponentes críticos η y ν , respectivamente, como [52]

$$G(r) \sim \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{d-2+\eta}} \quad (2.63)$$

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu}. \quad (2.64)$$

donde d es la dimensión del sistema. Es decir, la universalidad y la transición del sistema dependen fuertemente de las dimensiones en las que esté.

Los dos exponentes críticos restantes β y δ , son los exponentes que corresponden con la interacción del sistema con el campo de presiones y el parámetro de orden. El primero se define de la relación entre la presión y la densidad cerca del punto crítico (isoterma crítica), es decir

$$p - p_c \sim (\rho - \rho_c)^\delta. \quad (2.65)$$

El último exponente corresponde al parámetro de orden, que está definido dependiendo del sistema en cuestión y está relacionado con una cantidad que es cero por encima de la temperatura crítica y que aparece al llegar a esta para incrementarse conforme la temperatura tiende a cero, es decir, es en esencia la fase hacia la que ocurre la transición. En el caso de los sistemas magnéticos este parámetro es la magnetización mientras en la transición gas-líquido es la diferencia de densidades del gas con el líquido. Usaremos éste último parámetro a modo de definición del exponente β y más adelante discutiremos sobre el parámetro de orden que describe la transición BEC. Se define entonces, el exponente crítico asociado al parámetro de orden como,

$$\rho_L - \rho_G \sim (-\epsilon)^\beta. \quad (2.66)$$

con ϵ negativo porque estamos por debajo de la temperatura crítica.

La definición de los exponentes críticos solo hace alusión a la forma de la función en una vecindad del punto crítico, entonces, es natural preguntarse en qué radica su importancia si no proporcionan información completa sobre la función. En primer lugar existen razones del tipo experimental, cerca del punto crítico el término asociado al exponente es el que domina y entonces la función en esa vecindad se comporta de acuerdo a como lo dicta el exponente crítico, y cuando se llevan a cabo experimentos

en esa región lo que se mide es realmente ese comportamiento. Pero además por la forma misma de la definición es relativamente fácil obtener el exponente en gráficas de tipo log-log. Otra razón de la importancia de los exponentes es que nos permiten caracterizar al sistema, y esto es lo que define lo que se denomina la clase de universalidad. Dos sistemas pueden ser muy diferentes en apariencia pero tener los mismos exponentes, es decir, comportarse de forma muy similar en la transición. Dos sistemas con exponentes críticos iguales se dice que pertenecen a la misma clase de universalidad [53] y son en esencia el mismo sistema desde el punto de vista de la teoría de grupos renormalización [54]. Por otro lado, desde este formalismo se ha probado que los exponentes críticos satisfacen una serie de igualdades, que son conocidas como la ecuaciones de escalamiento [55, 56, 57, 58] y son las siguientes,

$$\begin{aligned}\gamma &= \nu(2 - \eta) \\ \alpha &= 2 - \nu d \\ \beta &= \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \\ \delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}.\end{aligned}\tag{2.67}$$

Esto implica que los exponentes críticos no son independientes si no que solo hay dos independientes y a partir de ahí se pueden derivar todos.

En la literatura se asocia a la condensación de Bose-Einstein homogénea sin interacciones dentro de la clase de universalidad del modelo esférico, que tiene los exponentes $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$, $\delta = 5$, $\eta = 0$ y $\nu = 1$. En el Capítulo 5 volveremos a ellos para comparar con los exponentes que se obtendrán en este trabajo. Por otro lado, la transición BEC de gases con interacciones se asocia con la universalidad del modelo XY [59, 60], que es un tema de frontera en la actualidad pues se siguen buscando mediciones de precisión y simulaciones [61, 62] para determinar con mayor exactitud el valor de los exponentes críticos para este modelo. Hasta ahora, las mediciones experimentales más precisas en este modelo se han realizado Helio líquido, particularmente en la capacidad calorífica [63, 64] e incluso en experimentos hechos en microgravedad para mejorar la precisión de las medidas [65].

Ecuación de estado heurística para un gas de Bose homogéneo

El problema de muchos cuerpos es uno de los problema abiertos en las áreas de la cuántica y la física estadística, incluso para los sistemas más sencillos como el gas de Bose con interacciones en potencial homogéneo se desconoce la ecuación de estado. Para el estudio de los gases ultrafríos se han propuesto diversas aproximaciones enfocadas en explotar el hecho de que estos sistemas se encuentran a muy bajas temperaturas y por lo tanto las energías son bajas. Dos de las descripciones más exitosas son las de Bogoliubov [66] y Gross-Pitaevskii [33, 67] que son soluciones a temperatura cero, y por esta razón no pueden describir la transición sino que se enfocan en describir el estado condensado. Debido al éxito de estas aproximaciones para describir las fases superfluidas, se han realizado diferentes intentos de extender estos modelos al régimen de temperatura finita. Entre los modelos más conocidos están los basados en la teoría Hartree-Fock [68], así como los de Popov [69] y Yukalov-Yukalova [70, 71], todos estos analizados a detalle por V. Romero y L. Olivares-Quiroz en dos trabajos [72, 73]. En estos trabajos muestran que ninguno de los modelos analizados describe de forma adecuada la vecindad de la transición, ya que las funciones de estado $\mu(n, T)$ que estas predicen son multivaluadas siendo incompatibles con la teoría termodinámica. Aunado a esto son incapaces de describir de forma adecuada transiciones de segundo orden como es esperado para un gas de bosones en un potencial tipo caja de acuerdo a la teoría de este sistema para el caso ideal.

Debido a las fallas para describir correctamente la transición en los modelos que se han propuesto en la literatura, nos proponemos construir un modelo de campo medio que sí nos permita estudiar la vecindad alrededor del punto crítico. Para esto, partimos de los modelos conocidos que funcionan bien en los límites asintóticos de altas y muy bajas temperaturas. Para este último (por debajo de la transición) se tiene la aproximación de Thomas-Fermi que es solución a la ecuación de GP y que sabemos que funciona muy bien a temperatura cero, como se vio en el capítulo 2. En el otro límite tenemos el

3. ECUACIÓN DE ESTADO HEURÍSTICA PARA UN GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

gas ideal de Bose que es una buena aproximación cuando nos encontramos por encima de la transición ya que suponemos que las interacciones son de corto alcance, por lo que a altas temperaturas podemos despreñar las interacciones. La idea es usar estos dos regímenes y proponer un modelo que tienda a ellos asintóticamente en los límites apropiados. En medio debemos considerar una función que se comporte correctamente en el sentido termodinámico, es decir, que sea univaluada y que permita construir un perfil de densidad que sea suave a través de la temperatura crítica y a la vez describa correctamente el orden de la transición. En resumen, nos proponemos construir una función $\mu(n, T)$ que en el límite de bajas densidades y altas temperaturas tienda al gas ideal mientras que en el límite de temperatura cero tienda a la aproximación de Thomas-Fermi.

¿Qué tan adecuado es considerar los límite de gas ideal, por un lado, y la aproximación de Thomas-Fermi por otro? En los experimentos con BECs toda la información es extraída a través de una imagen, ya sea de absorción o por algún otro método, que proporciona el perfil de densidad del gas. Para esto se ajusta el perfil de densidad en dos regiones, uno que corresponde a la nube térmica, el cual se ajusta con una curva gaussiana o una función de Bose (esto permite conocer la temperatura) y otro por medio de una curva cuadrática que corresponde a la parte condensada (vease, [74, 75]). En la figura 3.1¹ se pueden ver estos ajustes en imágenes reales de un experimento.

El hecho de que los ajustes experimentales peguen bien con los modelos de gas ideal y Thomas-Fermi justifican tomar estos dos límites para construir el modelo de forma heurística. Se propone entonces para temperaturas arriba de la temperatura de transición usar la expresión de la densidad de un gas ideal de Bose (2.7), mientras que para temperaturas por debajo de T_c se busca encontrar una función que en el límite de temperaturas muy bajas y altas densidades tienda a T-F. Otra suposición que se considera para construir el modelo es que la transición ocurre exactamente en $\mu = 0$ (aunque análisis termodinámicos sugieren que debe ocurrir en $\mu < 0$ [76]) por simplicidad y para no incluir un término extra que mueva la transición abajo o arriba de ese punto.

Finalmente, el modelo que se propone se muestra en la Figura 3.2. Como se ve en el esquema, para potenciales químicos negativos la función es bien conocida, sin embargo para potenciales químicos positivos sólo sabemos que la función propuesta debe tender a T-F para densidades altas y debe ser cero en la transición, pero además debe ajustar bien con la función del otro lado. Y con ajustar bien nos referimos a que ambas funciones deben valer lo mismo en la transición, además de tener la misma derivada para que tiendan a la transición con la misma pendiente y no haya una discontinuidad artificial.

Como se requiere una curva que tenga una recta con cierta pendiente como asíntota,

¹Datos tomados en el grupo del V. Bagnato en 2013, en la Universidad de São Carlos. Corresponden a un condensado de átomos de ⁸⁷Rb.

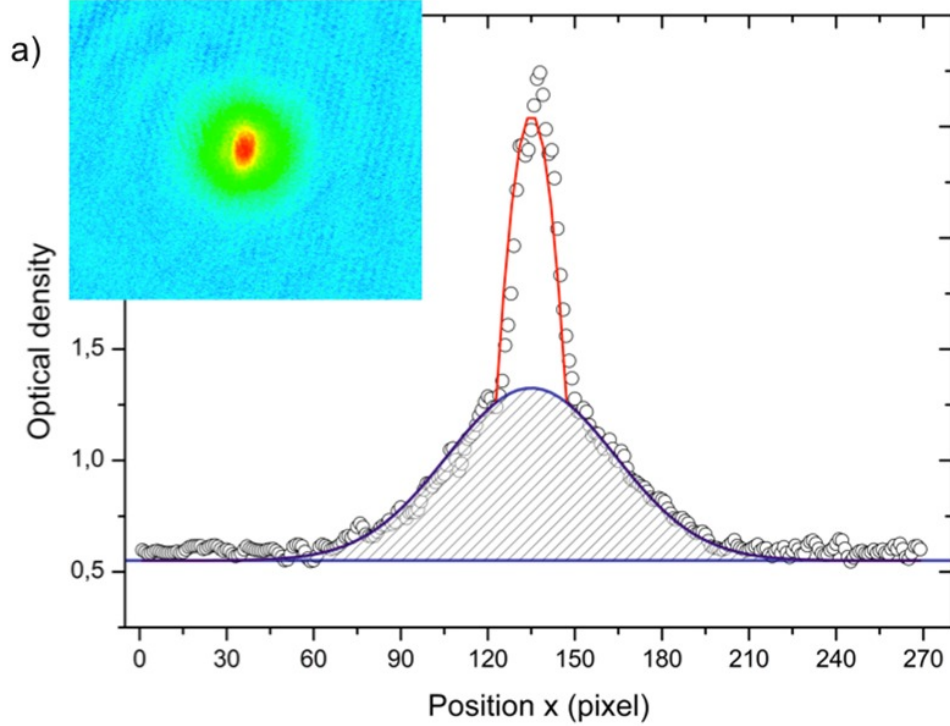


Figura 3.1: Ajuste experimental para un gas con fase BEC, las curvas que se usan para ajustar son una gaussiana y una parábola (Imagen proporcionada por F. J. Poveda-Cuevas).

y además que su derivada sea cero en algún punto lejano a la asíntota, se propone una hipérbola como la curva más sencilla, ya que dicha cónica tiene un mínimo en su vértice (derivada cero) y además la pendiente de su asíntota es ajustable. Se propone entonces una curva hipérbólica con eje vertical y centro en (h, k) ,

$$\frac{(\mu - h)^2}{a^2} - \frac{(n - k)^2}{b^2} = 1. \quad (3.1)$$

Se requiere (ver gráfico 3.2) que el vértice de la hipérbola esté ubicado sobre el eje x a una distancia n_c del origen por lo que entonces el centro debe estar en $(n_c, -a)$. Esto ajusta dos de los parámetros del modelo general. Al sustituir las coordenadas del centro en la ecuación de la hipérbola se obtiene,

$$\frac{(\mu + a)^2}{a^2} - \frac{(n - n_c)^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

Si ahora se despeja el potencial químico se obtiene,

$$\frac{\mu + a}{a} = \sqrt{1 + \frac{(n - n_c)^2}{b^2}} \quad (3.3)$$

3. ECUACIÓN DE ESTADO HEURÍSTICA PARA UN GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

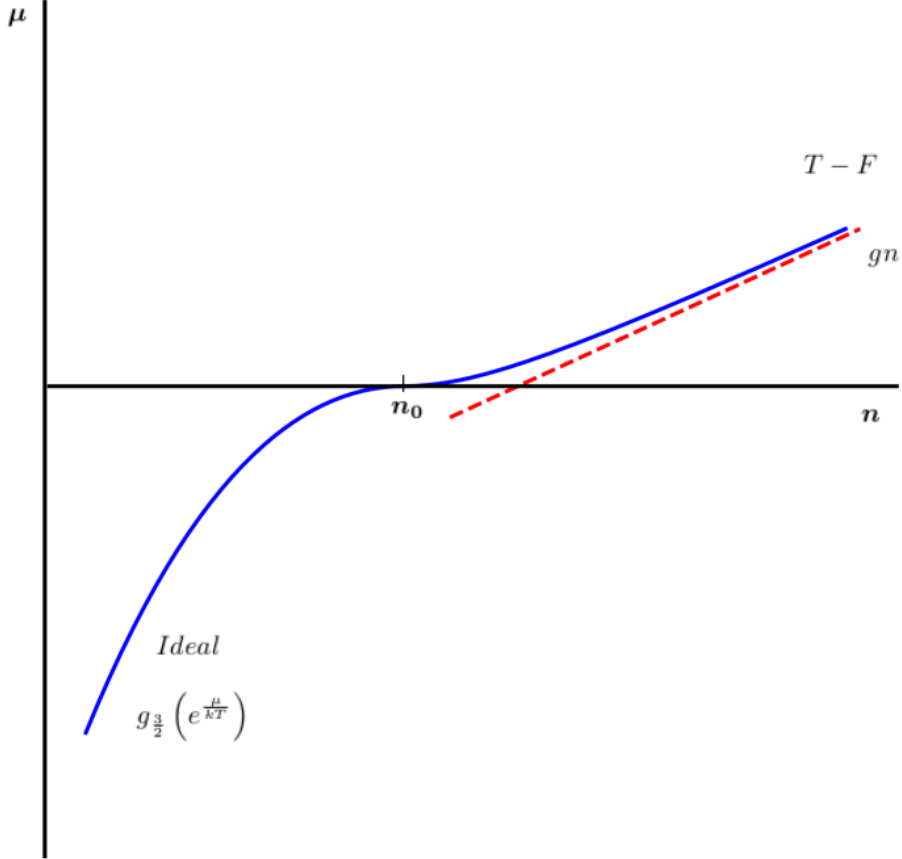


Figura 3.2: Esquema del modelo para la ecuación de estado. Se muestra una isoterma.

$$\mu = a\sqrt{1 + \frac{(n - n_c)^2}{b^2}} - a. \quad (3.4)$$

Aún se tienen dos parámetros libres, a y b , pero queda la condición de que la asíntota debe ser una recta con la pendiente dada por la aproximación de Thomas-Fermi $\mu(n, T) = gn$. Para obtener la asíntota de la hipérbola se hace tender n a infinito, por lo que $(n - n_c)/b \gg 1$ y entonces el potencial químico tiende a la siguiente forma,

$$\mu \simeq \frac{a}{b}(n - n_c) - a. \quad (3.5)$$

Que es la ecuación de la recta asíntótica. Para compaginar con el modelo de TF se requiere que la pendiente de esta recta sea $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$, esta condición fija otro de los

parámetros pues al igualar se obtiene,

$$a = bg \tag{3.6}$$

$$\mu = bg\sqrt{1 + \frac{(n - n_c)^2}{b^2}} - bg. \tag{3.7}$$

Despejando para la densidad,

$$n = \sqrt{\frac{(\mu + bg)^2}{g^2} - b^2} + n_c. \tag{3.8}$$

Queda una condición, que la derivada del potencial químico respecto a la densidad debe ser cero en $n = n_c$. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la derivada de una hipérbola en el vértice es cero siempre, por lo que esto no proporciona información que permita fijar el parámetro b . Es decir, independientemente del valor de éste se cumplen las condiciones pedidas para la curva que se está buscando. Entonces, el modelo propuesto es el siguiente,

$$n(\mu, T) = \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) \quad \text{si } \mu \leq 0 \tag{3.9}$$

siendo $\lambda_T = h/(2\pi mkT)^{1/2}$ la longitud de onda térmica con h y k las constantes de Planck y Boltzmann respectivamente, mientras que $\text{Li}_{\frac{3}{2}}$ es la función polilogarítmica (A.1).

Y para el otro lado de la transición, es decir, para potencial químico mayor o igual que cero se propone la función que se encontró con el ajuste,

$$n(\mu, T) = \frac{1}{g} \sqrt{(\mu + bg)^2 - (gb)^2} + n_c(T), \quad \text{si } \mu \geq 0. \tag{3.10}$$

con $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ la interacción de contacto, ya que no es posible describir el estado de superfluido sin interacciones [66], siendo a_s la longitud de dispersión de onda s . Mientras que n_c es la densidad crítica para una temperatura fija T y con $\mu = 0$, es decir,

$$n_c(T) = \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta(3/2), \tag{3.11}$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann A.9. De esta forma aseguramos que $n(\mu, T)$ es continua en $\mu = 0$, es decir, el punto de la transición y el que elegimos para unir ambas partes del modelo. El parámetro b es función de la temperatura y tiene unidades de densidad, lo fijaremos a continuación de tal forma que el modelo ya no tenga parámetros libres.

Para fijar el parámetro b imponemos la condición de que las derivadas por la derecha y la izquierda, tengan el mismo comportamiento en la vecindad de $\mu = 0$, termodinámicamente no estamos obligados a hacerlo pero lo hacemos para que el modelo sea lo más

3. ECUACIÓN DE ESTADO HEURÍSTICA PARA UN GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

sencillo posible y no tener parámetros libres. Si invertimos el modelo de tal forma que obtengamos μ como función de la densidad y la temperatura, como se muestra en la Figura (3.2), entonces la derivada en la vecindad de la transición tiende a cero. Esto implica que la derivada inversa, $\partial\mu/\partial n$, que está relacionada (como veremos más adelante) con la compresibilidad isotérmica, tiende a infinito por ambos lados. Usamos este hecho para encontrar b , imponiendo que las derivadas por ambos lados no solo sean divergentes, si no que además diverjan con el mismo coeficiente. Las derivadas por ambos lados están dadas por,

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_- = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_T^3 kT} \text{Li}_{1/2}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) \quad (3.12)$$

y

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_+ = \frac{1}{g} \frac{\mu + bg}{\sqrt{\mu^2 + 2bg\mu}}. \quad (3.13)$$

Ahora, para ver el comportamiento cerca de $\mu = 0$ usamos la expansión de la función de Bose, de orden fraccionario, cerca de cero A.5,

$$\text{Li}_s(e^\alpha) = \Gamma(1-s)|\alpha|^{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(s-k)}{k!} |\alpha|^k \quad (3.14)$$

mantenemos el término divergente para el caso $s = 1/2$ y expandimos (3.12),

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{\mu \rightarrow 0^-} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_T^3 kT} \frac{1}{|\frac{\mu}{kT}|^{1/2}}, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{\mu \rightarrow 0^+} = \frac{1}{g}(\mu + bg) \left(\frac{1}{\sqrt{2bg\mu}} - \frac{1}{2} \frac{\mu^{1/2}}{(2bg)^{3/2}} + \dots \right) \approx \frac{1}{g} \frac{bg}{\sqrt{2bg\mu}}. \quad (3.16)$$

El único término divergente va como $\mu^{-\frac{1}{2}}$, todos los demás permanecen finitos en ambas derivadas por lo que conforme nos acerquemos a cero éste término es el dominante y por tanto se cumplen las siguientes aproximaciones,

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \mu}\right|_{\mu \rightarrow 0^-} \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_T^3 kT} \left| \frac{kT}{\mu} \right|^{1/2}, \quad (3.17)$$

y

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \mu}\right|_{\mu \rightarrow 0^+} \simeq \sqrt{\frac{b}{2g}} \frac{1}{\mu^{1/2}}. \quad (3.18)$$

El orden de la divergencia es el mismo a ambos lados, ahora pedimos que el coeficiente también lo sea. Igualando (3.16) y (3.17) se obtiene,

$$b(T) = \frac{4\pi}{\lambda_T^3} \frac{a_s}{\lambda_T}. \quad (3.19)$$

De esta forma el parámetro extra queda completamente determinado como una densidad en la cual el volumen está dado por la longitud de onda térmica λ_T^3 . Además, ésta densidad está multiplicado por un coeficiente que depende del parámetro a_s . Esto último implica que b depende fuertemente del tipo de gas que se está considerando. Es decir, que b no solo depende de la temperatura si no que también depende del tipo de átomo o molécula que se está estudiando.

Finalmente nuestro modelo es una ecuación de estado definida por partes,

$$n(\mu, T) = \begin{cases} \frac{1}{g} \sqrt{\left(\mu + \frac{4\pi g}{\lambda_T^3} \frac{a_s}{\lambda_T}\right)^2 - \left(\frac{4\pi g}{\lambda_T^3} \frac{a_s}{\lambda_T}\right)^2} + n_c & \text{si } \mu \geq 0 \\ \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) & \text{si } \mu < 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

ya vimos que en la transición ($\mu = 0$) la ecuación de estado es continua y que su derivada por ambos lados une correctamente las dos partes. En el límite $\mu \rightarrow \infty$ y $T \rightarrow 0$, el parámetro $b(T)$ tiende claramente a cero por lo que entonces $n(\mu, T)$ tiende asintóticamente a $\frac{\mu}{g}$ que es la aproximación de TF. Se tiene entonces una ecuación de estado que cumple con los requerimientos que se habían pedido inicialmente. En la Figura 3.3 se muestra una curva típica de la densidad en función de la temperatura para un potencial químico constante a modo ilustrativo de cómo se ve la densidad en el modelo propuesto. En el capítulo siguiente estudiaremos toda la termodinámica de un gas de Bose homogéneo.

3. ECUACIÓN DE ESTADO HEURÍSTICA PARA UN GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

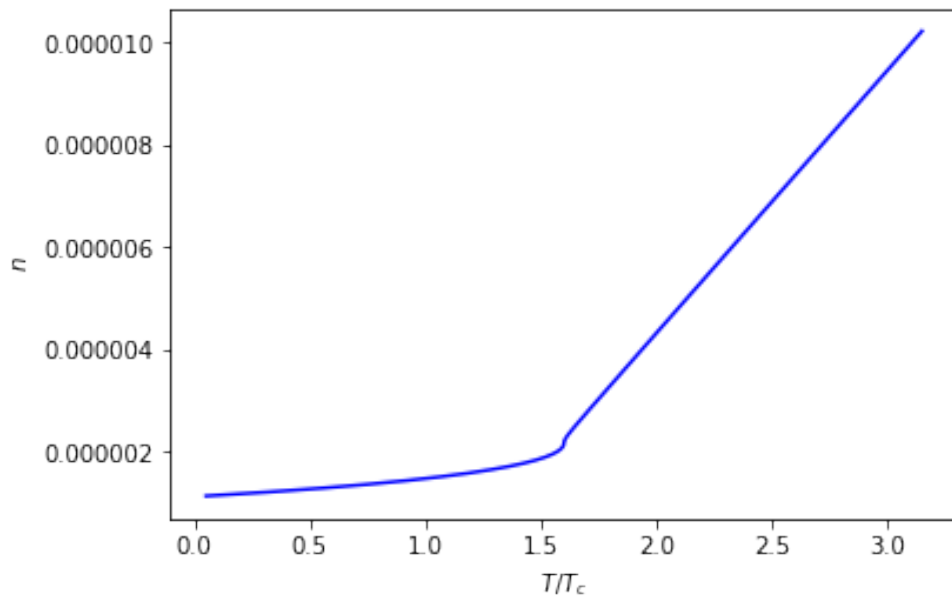


Figura 3.3: Densidad como función de la temperatura para potencial químico constante ($\mu > 0$).

Termodinámica de gas de Bose

Homogéneo

Habiendo construído un modelo heurístico en términos de la densidad como función del potencial químico y la temperatura, el siguiente paso es usarlo para describir la termodinámica del gas homogéneo. Para esto obtendremos la relación fundamental y a partir de ella calcularemos todas las variables termodinámicas importantes. Además compararemos el modelo con datos experimentales y calcularemos los parámetros importantes en la transición de fase, los exponentes críticos.

Relación fundamental

El modelo que se construyó es una relación de $n = n(\mu, T)$, por lo que no es una relación fundamental. Es posible obtener una relación fundamental haciendo uso de la ecuación de Gibbs-Duhem [77],

$$dp = nd\mu + sdT, \quad (4.1)$$

integrando esta relación a $T = Cte$,

$$p = \int_0^\mu nd\mu + p(0). \quad (4.2)$$

Ahora, introducimos la expresión para la densidad en nuestro modelo,

$$n(\mu, T) = \begin{cases} \frac{1}{g} \sqrt{\left(\mu + \frac{4\pi g a_s}{\lambda_T^3} \frac{a_s}{\lambda_T}\right)^2 - \left(\frac{4\pi g a_s}{\lambda_T^3} \frac{a_s}{\lambda_T}\right)^2} + n_c & \text{si } \mu \geq 0 \\ \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) & \text{si } \mu < 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

Calculando la integral para el caso $\mu \leq 0$ se obtiene,

$$p(\mu, T) = \frac{kT}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right), \quad (4.4)$$

4. TERMODINÁMICA DE GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

que es la expresión bien conocida para la presión en un gas de Bose ideal en un potencial caja. Lo cual es lo esperado pues así se construyó el modelo. Además esta expresión nos permite conocer el valor de $p(0, T)$ requerido en la ecuación 4.2,

$$p(0, T) = \frac{kT}{\lambda_T^3} \zeta(5/2), \quad (4.5)$$

Calculando la integral para el caso $\mu \geq 0$, se obtiene

$$p(\mu, T) = \frac{kT}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2}(0) + n_c(T)\mu + \frac{b^2g}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\mu}{bg}\right) \sqrt{\frac{\mu}{bg} \left(2 + \frac{\mu}{bg}\right)} - \ln \left[1 + \frac{\mu}{bg} + \sqrt{\frac{\mu}{bg} \left(2 + \frac{\mu}{bg}\right)} \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Esta expresión junto con 4.4 nos da la relación fundamental del sistema $p = p(\mu, T)$, con la cual podemos hallar toda la termodinámica del sistema.

Aunque el modelo que se ha propuesto es una ecuación de campo medio, es interesante comparar con datos experimentales. En el trabajo de Nascimbene y colaboradores [78] se tomaron mediciones *in situ* muy precisas del perfil de densidad de un vapor de ^7Li . Aunque en realidad los átomos estaban atrapados en un potencial inhomogéneo, ellos fueron capaces de reconstruir la presión p en función de μ y T del gas homogéneo por medio de la aproximación de densidad local [79, 80, 81] (LDA). Los datos extraídos de este experimentos se muestran en la Figura 4.1. Para comparar con nuestro modelo graficamos la presión obtenida en 4.4 y 4.6 como función de μ/kT en la misma imagen. Para esto se usan los datos reportados en el experimento, una temperatura de $T = 1.6 \times 10^{-6}\text{K}$ y una longitud de dispersión de $a_s = 8a_0$, con a_0 el radio de Bohr. Como puede verse claramente, modelo y experimento concuerdan muy bien, es importante recalcar que no se hace ningún ajuste puesto que nuestro modelo no cuenta con ningún parámetro libre a ajustar. Otros modelos también muestran un buen ajuste con los datos experimentales [78], sin embargo se construyen suponiendo que la densidad de la fase condensada está dada directamente por la aproximación de Thomas-Fermi $n = \mu/g$ lo cual resulta en una compresibilidad isotérmica independiente de la temperatura $\kappa_T = 1/n^2g$. Por lo tanto esta no diverge cuando T tiende T_c para una densidad constante, esto implica que estos modelos no muestren el comportamiento crítico esperado en la transición. Como veremos al calcular la compresibilidad, nuestro modelo sí muestra un fenómeno crítico en la temperatura de transición, lo cual nos permitirá estudiarlo más adelante en el marco de las variables globales.

Para mostrar gráficamente cómo se comporta la presión, en la Figura 4.2 se grafican varias isodensidades en el plano $p - T$. Se observa el cambio de comportamiento en la presión cuando cruza por la densidad crítica, consecuencia de la transición de fase

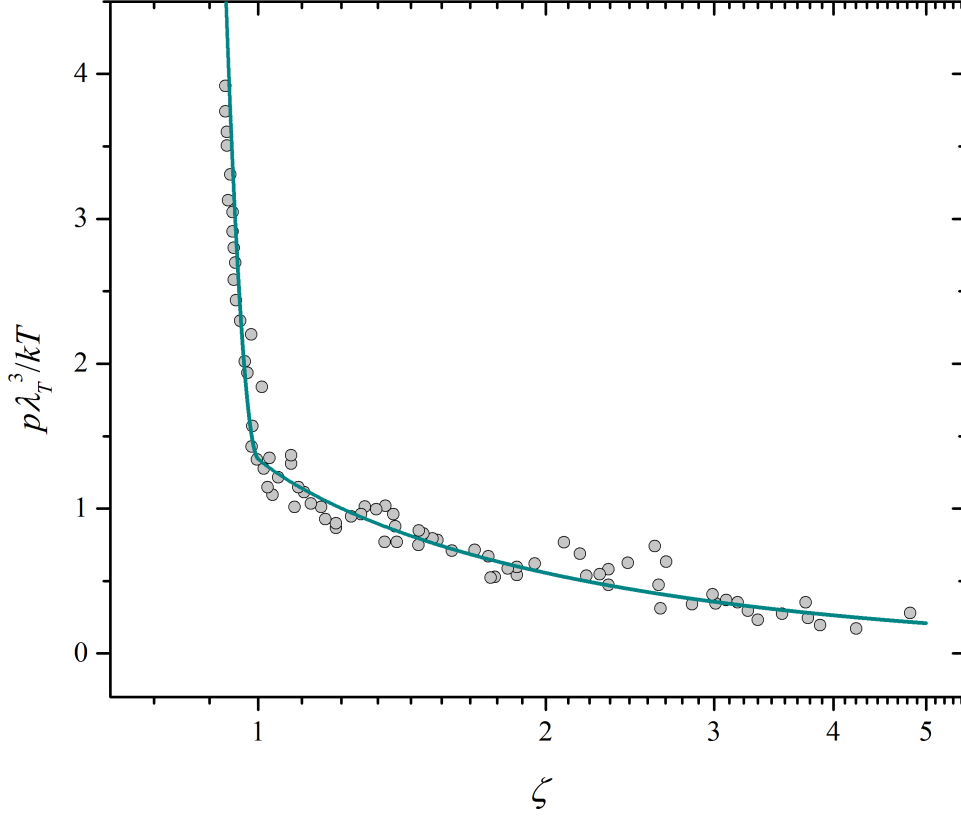


Figura 4.1: Gráfica de $p\lambda_T^3/kT$ como función de $\zeta = e^{-\mu/kT}$ para un gas ultrafrío de átomos de ${}^7\text{Li}$ a una temperatura de $T = 1.6 \times 10^{-6}$ K, con una longitud de correlación de $a_s = 8 a_0$, con a_0 el radio de Bohr. Los datos experimentales fueron obtenidos de Nascimbène et al. [78]. La línea continua es la ecuación de estado del modelo propuesto, $p = p(\mu, T)$, en (4.5) y (4.6). No se ajusta ningún parámetro.

que ocurre al alcanzarse la temperatura crítica para cada densidad determinada. Las curvas no tienden a cero para T tendiendo a cero porque como son isodensidades, el potencial químico debe tender a infinito conforme la temperatura cae para poder mantener la densidad constante. Es decir, para $\mu > 0$, pidiendo que la densidad se mantenga constante en 4.3, se obtiene

$$\mu = \sqrt{g^2 \left(n_0 - \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_T} \right)^2 + (bg)^2} - bg \quad (4.7)$$

con n_0 la isodensidad sobre la que estamos moviéndonos. Si ahora hacemos tender T a

4. TERMODINÁMICA DE GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

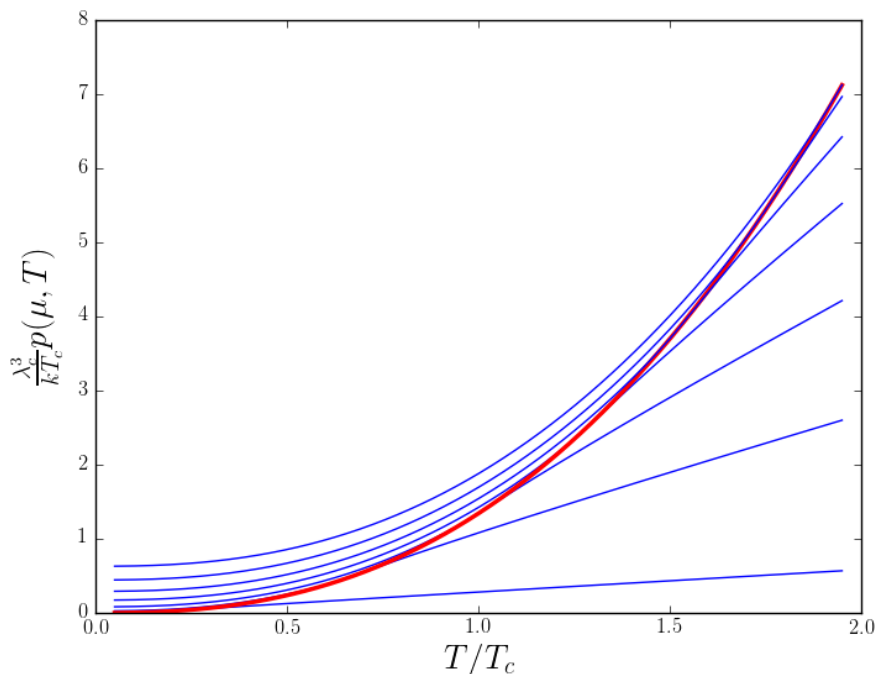


Figura 4.2: Diferentes isodensidades (en azul) en el plano Presión-Temperatura, decrecen en el eje vertical de mayor a menor densidad. En rojo se muestra la presión crítica.

cero, se obtiene,

$$\mu \sim gn_0. \quad (4.8)$$

Además en este límite estamos en el régimen de Thomas-Fermi, por lo que $n = \mu/g$ y por tanto $p = \mu^2/2g$. Lo que implica que entonces manteniendo la densidad constante y la temperatura tendiendo a cero, las curvas de presión tienden a,

$$p = \frac{gn_0^2}{2}. \quad (4.9)$$

Entropía

A partir de la presión es posible obtener directamente la entropía por volumen del sistema de la siguiente forma,

$$s = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\mu. \quad (4.10)$$

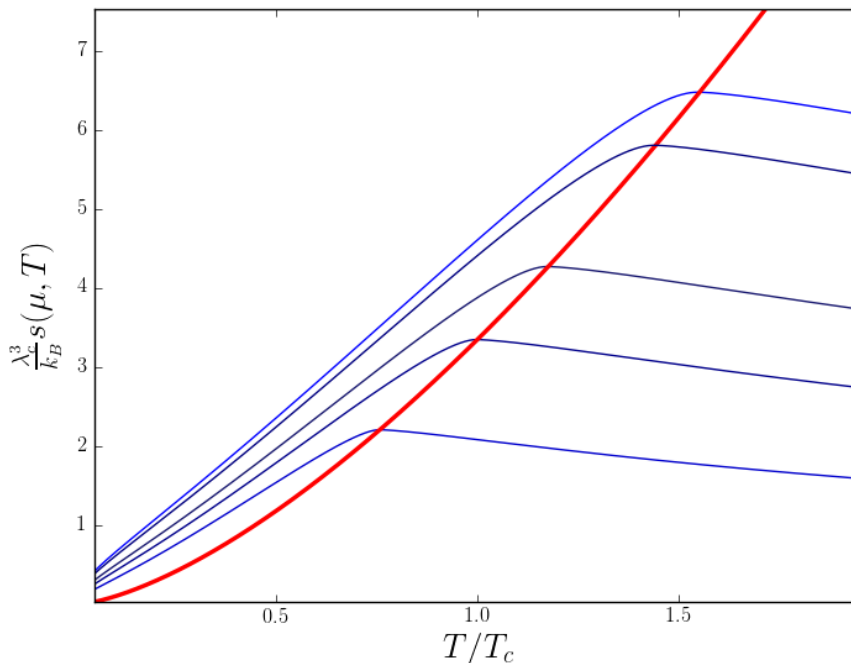


Figura 4.3: Diferentes isodensidades en el plano Entropía-Temperatura. En rojo se muestra la entropía crítica.

Derivando directamente la presión de las expresiones 4.4 y 4.6, se obtiene

$$s = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu}{T} \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad \mu < 0 \quad (4.11)$$

$$s(\mu, T) = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda_T^3} \zeta(5/2) + \frac{3}{2} \frac{n_c(T)\mu}{T} + \frac{2b^2g}{T} \left\{ \sqrt{2x+x^2} - \ln \left[1+x+\sqrt{2x+x^2} \right] \right\} \quad \mu > 0 \quad (4.12)$$

donde hemos definido la variable adimensional $x = \frac{\mu}{bg}$ por cuestiones de notación, más adelante será útil al escribir expresiones más complejas.

Para potenciales químicos negativos obtenemos la expresión bien conocida para el gas ideal de Bose. La curva crítica ocurre en $\mu = 0$, de tal forma que s va como $T^{\frac{3}{2}}$, como se muestra en la curva roja de la Figura 4.3. Las curvas de entropía a densidad constante sufren un cambio en su comportamiento al llegar a la entropía crítica, como es de esperarse en la transición. Caen a cero en $T = 0$ pues el sistema tiende a un único estado.

4. TERMODINÁMICA DE GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

Susceptibilidades

Otras cantidades termodinámicas de gran relevancia en el sistema son las susceptibilidades, porque son las cantidades que miden cómo reacciona el sistema ante cambios en las cantidades intensivas, en particular en la transición estas cantidades son de gran relevancia para describir cómo ésta ocurre. En el Capítulo 2, éstos están asociados a los exponentes críticos de la transición. Además, las susceptibilidades son cantidades que se pueden medir experimentalmente, incluso en muchos casos es más fácil medir éstos coeficientes que las variables fundamentales en sí. En lo que resta del capítulo calcularemos éstas cantidades para el sistema en cuestión.

Compresibilidad Isotérmica κ_T

La compresibilidad isotérmica está dada por la siguiente definición,

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (4.13)$$

Como nuestro modelo fue construido a partir de una relación entre μ , n y T , nos es más conveniente usar la siguiente relación, que es equivalente,

$$\kappa_T = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T. \quad (4.14)$$

Derivando directamente la expresión 4.3, se obtiene que la compresibilidad isotérmica está dada por,

$$\kappa_T(\mu, T) = \begin{cases} \frac{1}{gn^2} \frac{\mu+bg}{\sqrt{(\mu+bg)^2-(bg)^2}} & \text{if } \mu > 0 \\ \frac{1}{n^2kT} \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(\mu/kT) & \text{if } \mu \leq 0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

Sabemos que n no presenta divergencias y como vimos anteriormente, la derivada $\partial n/\partial \mu$ tienda a infinito en la transición por lo que entonces la compresibilidad isotérmica presenta un comportamiento crítico en $\mu = 0$, tiende a infinito por ambos lados. Este comportamiento lo podemos ver en la Figura 4.4, manteniendo constante la densidad se grafica κ_T contra T/T_c de tal forma que se puede ver claramente la divergencia en la temperatura crítica. El hecho de que ni los potenciales termodinámicos ni las primeras derivadas de éstos (por ejemplo la presión y la densidad) diverjan pero si lo hacen las segundas derivadas, como la compresibilidad en este caso, nos dice que estamos ante una transición de segundo orden debido a que el fenómeno crítico se manifiesta hasta las segundas derivadas de los potenciales termodinámicos.

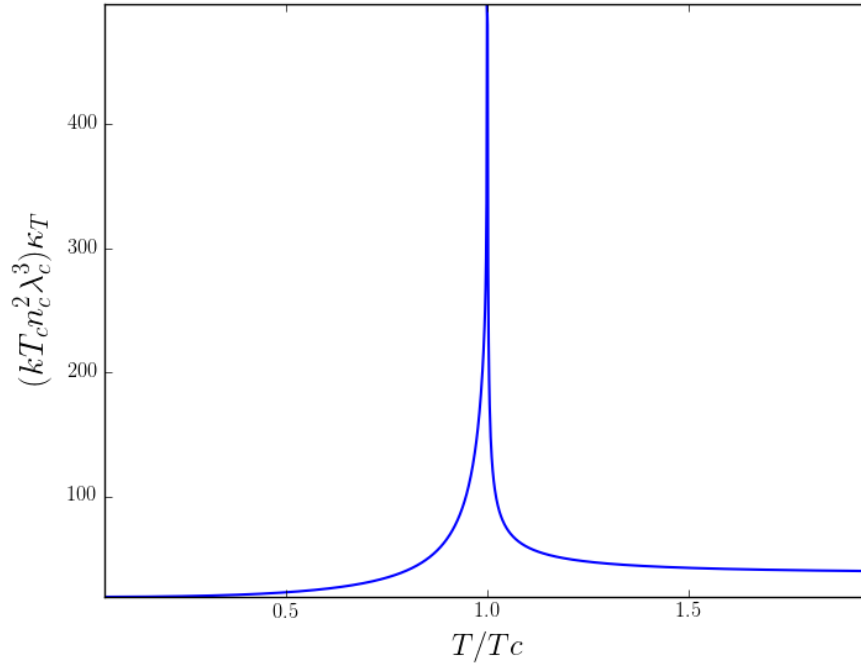


Figura 4.4: Compresibilidad Isotérmica κ_T como función de T , para una densidad n fija. Unidades, $\hbar = m = a_s = 1$

Calor específico a volumen constante

El calor específico, a volumen constante está definido como,

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad (4.16)$$

Como ya tenemos una expresión para la entropía, entonces usaremos la relación,

$$c_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu, \quad (4.17)$$

que es equivalente, aunque en este caso es por unidad de volumen. Se tiene que derivar implícitamente, entonces la expresión a calcular es,

$$c_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu + T \left(\frac{\partial s}{\partial \mu} \right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_n. \quad (4.18)$$

4. TERMODINAMICA DE GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

Para calcular $\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_n$ se hace uso de la relación cíclica entre las variables n , μ y T ,

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_n = -\frac{\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T}, \quad (4.19)$$

de ésta manera se obtiene finalmente que la capacidad calorífica está dado por,

$$c_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\mu - T \left(\frac{\partial s}{\partial\mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T} \quad (4.20)$$

Se calcularon las cuatro derivadas requeridas en ésta expresión tanto para μ mayor y menor que cero. Por razones de claridad las expresiones obtenidas por debajo de la transición se colocaron en el Apéndice D, aquí ponemos la expresión por encima de la transición y la gráfica completa del calor específico c_v en la Figura 4.5.

$$c_V = \frac{15}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) - \frac{\frac{9}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}^2\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}{\text{Li}_{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}. \quad (4.21)$$

En la gráfica podemos ver que para temperaturas altas, el calor específico a volumen constante, tiende asintóticamente a $3/2$ siendo consistente de que en éste límite el sistema tiende a un gas ideal clásico. Para temperaturas por debajo de T_c se observa que nuestro modelo se desvía un poco del comportamiento $\sim T^{3/2}$ del gas ideal de Bose. La transición queda reflejada en el pico que aparece en la temperatura crítica. En el siguiente capítulo caracterizaremos cómo se comporta ésta susceptibilidad cerca de la transición.

Coefficiente de expansión térmica

El coeficiente de expansión térmica es una susceptibilidad térmica que está definida como,

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (4.22)$$

Se puede obtener mostrar que la definición es equivalente a la siguiente expresión, que nos es más útil por la representación en la que estamos,

$$\beta = -\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p \quad (4.23)$$

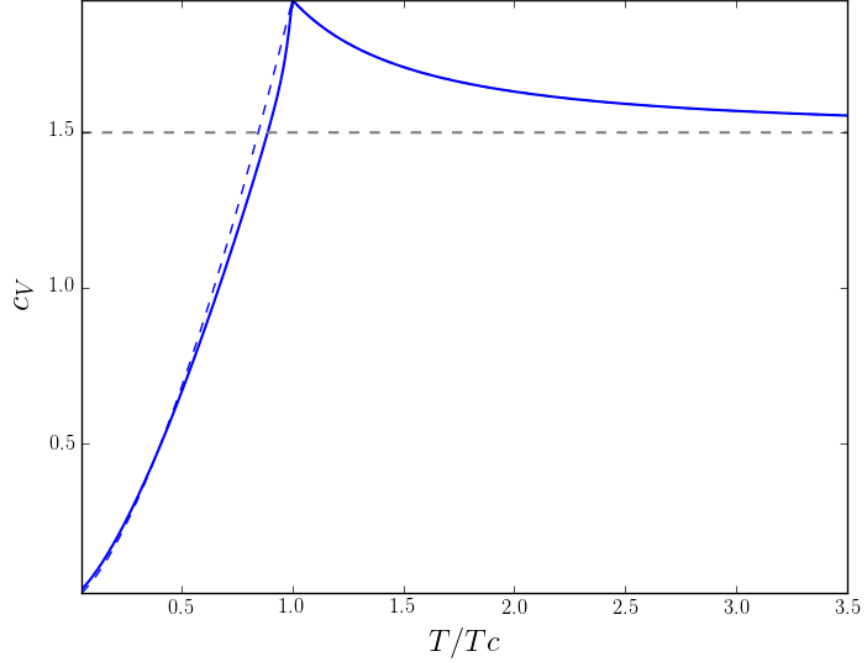


Figura 4.5: La línea continua es el calor específico a volumen constante c_V como función de T para nuestro modelo. La línea punteada en azul es el calor específico de un gas ideal de Bose por debajo de T_c , por encima ambos coinciden

Se tiene además que $n = n(\mu, T)$, entonces la derivada a p constante está dado por,

$$\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\mu + \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p, \quad (4.24)$$

y escribimos la diferencial de p como

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T d\mu \quad (4.25)$$

y como se está a presión constante, entonces $dp = 0$

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T d\mu \Rightarrow \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T} \quad (4.26)$$

4. TERMODINÁMICA DE GAS DE BOSE HOMOGÉNEO

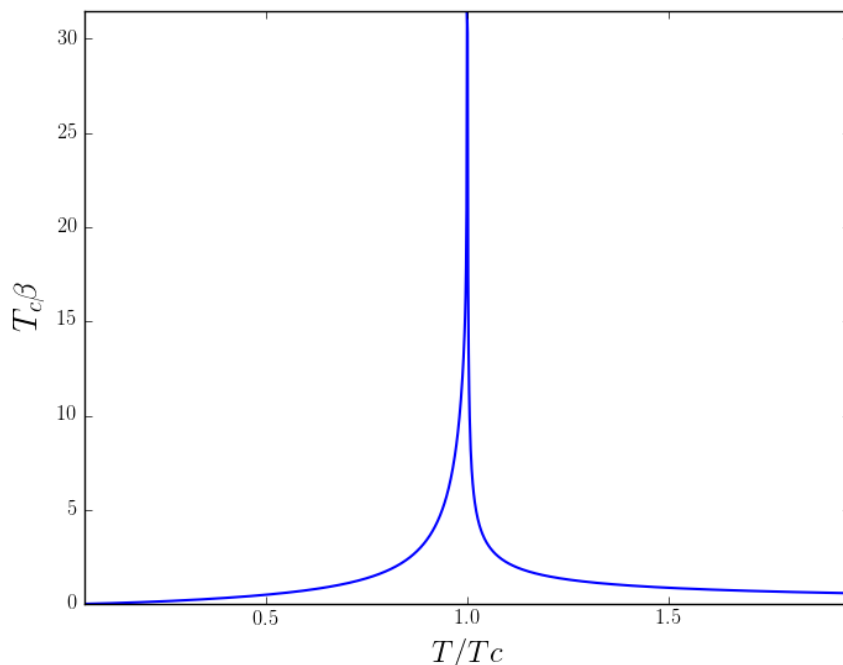


Figura 4.6: Coeficiente de expansión térmica en función de la temperatura.

de esta forma podemos calcular β a partir de,

$$\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\mu - \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T} \quad (4.27)$$

Nuevamente, pasamos las derivadas que se calcularon para obtener el coeficiente de expansión al Apéndice D y mostramos en la Figura 4.6 el comportamiento en función de la temperatura. Al igual que la compresibilidad isotérmica, hay una divergencia en la temperatura crítica, veremos más adelante la importancia de este comportamiento al obtener el exponente crítico asociado a esta susceptibilidad.

Calor específico a presión constante

El calor específico, a presión constante está definido como,

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p, \quad (4.28)$$

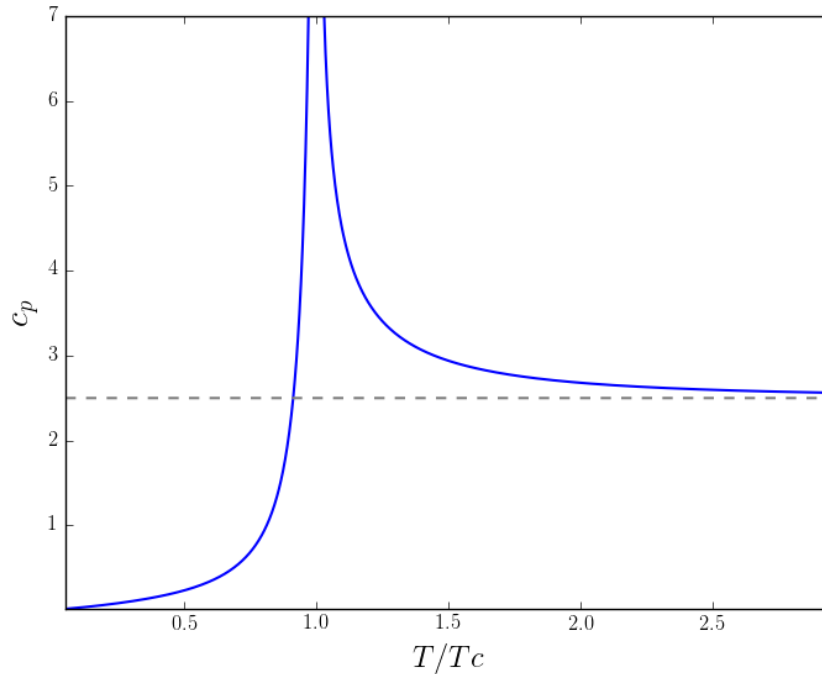


Figura 4.7: Calor Específico a presión constante.

En lugar de calcular directamente la expresión, nos valemos de la relación termodinámica,

$$c_p - c_V = \frac{T\beta^2}{n\kappa_T}, \quad (4.29)$$

y como ya hemos calculado κ , c_V y β entonces el calor específico a presión constante queda completamente determinado. Construimos una gráfica de éste en función de la temperatura (Figura 4.7), para temperaturas altas tiende asintóticamente a $5/2$ que es lo esperado para el límite clásico de un gas ideal. Sin embargo, a diferencia de c_V , ahora existe una divergencia en la temperatura crítica como consecuencia de la transición.

Para finalizar, en éste capítulo hemos calculado las variables termodinámicas de más interés en el sistema del gas de bosones en un potencial tipo caja. En el siguiente capítulo caracterizaremos la transición de éste sistema calculando los exponentes críticos.

Exponentes Críticos del gas homogéneo

Habiendo obtenido todas las cantidades termodinámicas que describen el sistema en ambos lados de la transición, en este capítulo nos enfocamos en calcular los exponentes críticos. Encontramos en el capítulo anterior que las divergencias en la transición ocurren en las segundas derivadas de los potenciales termodinámicos, ahora caracterizaremos cómo es que ocurren esas divergencias para indagar sobre la clase de universalidad de este sistema. Cabe aclarar que los exponentes que se calculan por encima de la transición son los exponentes del gas ideal de Bose en un potencial homogéneo debido a la forma en que construimos el modelo. Esto será de gran relevancia al momento de comparar estos exponentes con la literatura. Pasamos, entonces a calcular los exponentes asociados al sistema en la transición gas ideal-BEC utilizando las expresiones que se calcularon en el capítulo previo.

Exponente γ

Este exponente está asociado a la compresibilidad isotérmica. En el capítulo anterior encontramos que ésta susceptibilidad diverge, ahora por medio del exponente crítico caracterizaremos el comportamiento cerca de la temperatura crítica. Primero, para el caso de potencial químico negativo y después para el otro caso.

$$\mu < 0$$

Recordamos que, en cualquiera de los casos, la densidad crítica está dada por,

$$n_c(0, T_c) = \frac{1}{\lambda_c^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (5.1)$$

aquí hemos definido $\lambda_c = \lambda_T(T_c)$.

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

Ahora, mantenemos la densidad constante al variar la temperatura, por definición del exponente crítico. De esta forma como ρ depende también del potencial, estas variables quedan atadas. De esta forma,

$$\frac{n_c}{n} = 1. \quad (5.2)$$

Sustituyendo, las expresiones para la densidad,

$$\frac{n_c}{n} = \frac{\lambda^3}{\lambda_c^3} \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)} = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}, \quad (5.3)$$

Ahora, combinamos con (5.2), para obtener,

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (5.4)$$

Si ahora definimos $\Delta T = T - T_c$, y de aquí despejamos $T = \Delta T + T_c$, se obtiene de la parte izquierda de (5.4), expandiendo a primero orden,

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_c} + \mathcal{O}(\Delta T^2). \quad (5.5)$$

Por otro lado, la función polilogarítmica puede ser expandida como (Vease Apéndice A),

$$\text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(e^{\theta}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) |\theta|^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(\theta) \quad (5.6)$$

con $\theta = \frac{\mu}{kT}$ ¹. Si nos quedamos con el orden más bajo en (5.5) y (5.6), sustituyendo en (5.4) obtenemos,

$$|\theta| \approx \left[\frac{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}} \right]^2 \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2, \quad (5.7)$$

esta expresión será de gran utilidad para éste y los demás coeficientes.

Por otro lado, recordemos que la capacidad calorífica venía dada por,

$$\kappa_T = \frac{1}{n^2} \frac{1}{kT\lambda_T^3} \text{Li}_{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right). \quad (5.8)$$

Volvemos a hacer uso del desarrollo de la función polilogarítmica y nos quedamos con el término divergente en $\theta = 0$ y obtenemos,

¹En la literatura se suele usar $\alpha = \frac{\mu}{kT}$, sin embargo α será usado para uno de los exponentes críticos así que se decidió usar θ para no confundir

$$\kappa_T = \frac{1}{n^2} \frac{1}{kT\lambda_T^3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (-\theta)^{-\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(\theta) \right], \quad (5.9)$$

$$\kappa_T \approx \frac{4\pi}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{kTn^2\lambda_T^3} \frac{T_c}{\Delta T}. \quad (5.10)$$

Ahora desarrollamos el término $\frac{1}{kT\lambda_T^3}$ a primer orden,

$$\frac{1}{kT\lambda_T^3} \approx \frac{1}{kT_c\lambda_c^3} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\Delta T}{T_c} \right). \quad (5.11)$$

Finalmente, quedándonos con el término divergente (orden más bajo), obtenemos que la compresibilidad isotérmica cerca del punto crítica adopta la forma,

$$\kappa_T \approx \frac{4\pi}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{n^2} \frac{1}{kT_c\lambda_c^3} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^{-1}. \quad (5.12)$$

Comparando con la definición del exponente crítico $\kappa_T \sim |T - T_c|^{-\gamma}$, concluimos que éste está dado por,

$$\gamma = 1 \quad (5.13)$$

$\mu > 0$

En este lado de la transición, usamos la relación (4.20) y las derivadas del Apéndice D para obtener una expresión cerca del punto crítico. Recordemos que la densidad está dada por,

$$n = \frac{1}{g} \sqrt{(\mu + bg)^2 - (bg)^2} + \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta(3/2) \quad (5.14)$$

mientras que la densidad crítica es,

$$n_c = \frac{1}{\lambda_c} \zeta(3/2). \quad (5.15)$$

Ahora, consideramos $n = n_c = cte$, entonces

$$1 = \frac{n}{n_c} = \frac{\frac{1}{g} \sqrt{(\mu + bg)^2 - (bg)^2} + \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta(3/2)}{\frac{1}{\lambda_c^3} \zeta(3/2)} \quad (5.16)$$

y despejando $\mu + bg$,

$$\mu + bg = \sqrt{g^2 \frac{(2\pi mk)^3}{h^6} \zeta^2(3/2) \left[T_c^{3/2} - T^{3/2} \right]^2 + b^2 g^2}. \quad (5.17)$$

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

Sustituímos, $T = T_c - T$ y hacemos la expansión del exponente,

$$\mu + bg \approx \sqrt{g^2 \frac{(2\pi mk)^3}{h^6} \zeta^2(3/2) \left[-\frac{3}{2} T_c^{1/2} \Delta T \right]^2 + b^2 g^2}. \quad (5.18)$$

Usamos esto para sustituirlo en la compresibilidad isotérmica (4.15),

$$\kappa_T = \frac{1}{g^2 n^2} \frac{b_c g}{\frac{(2\pi mk)^{3/2}}{h^3} \zeta(3/2) \frac{3}{2} \sqrt{T_c} |\Delta T|}, \quad (5.19)$$

donde se ha definido $b_c = \frac{4\pi a_s}{\lambda_c^3 \lambda_c}$ desarrollando y agrupando términos se llega a,

$$\kappa_T = \frac{2b_c}{3gn^3} \frac{T_c}{|\Delta T|}. \quad (5.20)$$

Finalmente, se concluye que,

$$\gamma = 1 \quad (5.21)$$

Exponente α

El exponente crítico α está asociado a calor específico a volumen constante. Como vimos antes, ésta susceptibilidad tenía un comportamiento singular en la temperatura crítica, ya que a pesar de no mostrar una divergencia si tiene un pico. Esto implica que entonces la derivada presenta una discontinuidad. Para caracterizar el comportamiento, calculamos el exponente crítico.

$\mu < 0$

Recordemos que en este caso, el calor específico está dado por,

$$c_V = \frac{15}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\frac{9}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}^2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right)}{\text{Li}_{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right)}. \quad (5.22)$$

Expandiendo las funciones polilogarítmicas,

$$c_V = \frac{15}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \left[\Gamma \left(-\frac{3}{2} \right) \theta^{\frac{3}{2}} + \zeta \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{\zeta \left(\frac{3}{2} \right)}{1!} \theta + \dots \right] - \frac{\frac{9}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \left[\Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \theta^{\frac{1}{2}} + \zeta \left(\frac{3}{2} \right) + \zeta \left(\frac{1}{2} \right) \theta + \dots \right]^2}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \theta^{-\frac{1}{2}} + \zeta \left(\frac{1}{2} \right) + \zeta \left(-\frac{1}{2} \right) \theta + \dots} \quad (5.23)$$

Trabajando esta expresión, expandemos el cuadrado y el cociente. Luego de reagrupar y sustituir el valor de θ de la ecuación (5.7),

$$c_V \approx \frac{15}{4} \frac{k}{\lambda_T^3} \zeta \left(\frac{5}{2} \right) - \frac{27}{16} \frac{k}{\lambda_T^3} \frac{\zeta^3 \left(\frac{3}{2} \right)}{\sqrt{\pi} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right) + \left[\frac{5}{2} - 3 \frac{\Gamma \left(-\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \right] \frac{3^3}{2^5} \frac{k}{\lambda_T^3} \frac{\zeta^3 \left(\frac{3}{2} \right)}{\pi} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2. \quad (5.24)$$

De donde obtenemos finalmente,

$$c_V - c_0 \approx \left(15\zeta \left(\frac{5}{2} \right) - \frac{3^2 \zeta^3 \left(\frac{3}{2} \right)}{2\pi} \right) \frac{3k}{2^3 \lambda_c^3} \frac{\Delta T}{T_c} + \left(\frac{17}{2\pi} - \frac{3}{\sqrt{\pi}\Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \right) \frac{3^3 \zeta^3 \left(\frac{3}{2} \right) k}{2^5 \lambda_c^3} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2 \quad (5.25)$$

donde hemos definido $c_0 = \frac{15k}{4\lambda_c^3} \zeta \left(\frac{5}{2} \right)$.

De ésta expresión, comparando directamente con la definición de exponente crítico asociado $c_V \sim \epsilon^{-\alpha}$, concluimos que

$$\alpha = -1 \quad (5.26)$$

$\mu > 0$

Habíamos encontrado, en el capítulo anterior, que el calor específico está dado por

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu + T \left(\frac{\partial s}{\partial \mu} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_\mu}{\left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T} \quad (5.27)$$

Las derivadas se encuentran en el Apéndice D, y además si se expanden en series y nos quedamos a términos más bajos, se llega a las siguientes aproximaciones

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu \approx \frac{15}{4} \frac{k\zeta(5/2)}{T_c \lambda_c^3} + \frac{75}{8} \frac{k\zeta(5/2)}{T_c \lambda_c^3} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right) + \left[\frac{45}{8} \frac{k\zeta(5/2)}{T_c \lambda_c^3} + \frac{3^3}{2^2} \frac{\zeta^2 \left(\frac{3}{2} \right)}{T_c \lambda_c^6} \left(\frac{g}{2^{3b}} \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_c^3} - 1 \right) \right] \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2 \quad (5.28)$$

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial \mu} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)_\mu}{\left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T} \approx \frac{3^2}{2^2} \frac{gn_c^3(T_c)}{bT_c} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right) + \frac{117}{2^3} \frac{gn_c^3(T_c)}{bT_c} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2 + O(\Delta T^3) \quad (5.29)$$

De estas dos expresiones se deduce entonces que,

$$c_v - c_0 \approx \left[\frac{3^2}{2^2} \frac{gn_c^3}{bT_c} + \frac{75}{8} \frac{k\zeta \left(\frac{5}{2} \right)}{T_c \lambda_c^3} \right] \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right) + \left[\frac{45}{8} \frac{k\zeta \left(\frac{5}{2} \right)}{T_c \lambda_c^3} + \frac{3^2}{2^2} \frac{n_c^2}{T_c} \left(\frac{55}{2^3} \frac{gn_c}{b} - 3 \right) \right] \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2 \quad (5.30)$$

de donde finalmente concluimos que,

$$\alpha = -1 \quad (5.31)$$

Exponente δ

El exponente δ describe como se aproximan, al punto crítico, la relación de la presión con la densidad mientras la temperatura se mantiene constante, es decir, como se acercan al punto crítico las isothermas en el diagrama presión-densidad.

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

$\mu < 0$

Para este caso usamos la expresión para la presión (4.4), y restamos la presión en el punto crítico,

$$p - p_c = \frac{kT}{\lambda_T^3} \text{Li}_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{kT}{\lambda_c^3} \zeta \left(\frac{5}{2} \right), \quad (5.32)$$

y de nuevo usamos la expansión del polilogaritmo, pero esta vez de orden 5/2 para obtener,

$$p - p_c = \frac{kT}{\lambda_T^3} \left(\Gamma \left(-\frac{3}{2} \right) |\theta|^{\frac{3}{2}} + \zeta \left(\frac{5}{2} \right) + \zeta \left(\frac{3}{2} \right) |\theta| + \mathcal{O}(\theta^2) \right) - \frac{kT}{\lambda_c^3} \zeta \left(\frac{5}{2} \right) \quad (5.33)$$

como estamos a $T = T_c$, se cancelan los términos en $\zeta \left(\frac{5}{2} \right)$, además nos quedamos a orden lineal que es el orden dominante cuando θ tiende a cero,

$$p - p_c \approx \frac{kT}{\lambda_T^3} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) |\theta|. \quad (5.34)$$

Si ahora hacemos un desarrollo análogo con la densidad, obtenemos la expresión,

$$n - n_c \approx -\frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda^3} |-\theta|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

Finalmente de las dos últimas expresiones concluimos que,

$$p - p_c \approx \frac{kT_c \lambda_c}{4\pi} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) (n - n_c)^2 \text{sgn}(n - n_c). \quad (5.36)$$

De donde concluimos directamente que el exponente crítico asociado es,

$$\delta = 2 \quad (5.37)$$

$\mu > 0$

Regresando a la forma de las funciones encontradas en el capítulo anterior (4.3) y (4.6), podemos escribir,

$$n - n_c = \frac{1}{g} \sqrt{(\mu + bg)^2 - (bg)^2} \quad (5.38)$$

$$p - p_c = n_c(T)\mu + \frac{b^2g}{2} \left\{ \frac{(\mu + bg)}{b^2g^2} \sqrt{\mu^2 + 2bg\mu} - \text{Ln} \left[\frac{\mu + bg}{bg} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 2bg\mu}}{bg} \right] \right\}. \quad (5.39)$$

Enfocándonos en la densidad (5.37), a partir de esta podemos obtener las dos ecuaciones siguientes,

$$\mu^2 + 2bg\mu = g^2 (n - n_c)^2 \quad (5.40)$$

$$\mu + bg = \sqrt{g^2 (n - n_c)^2 + (bg)^2}. \quad (5.41)$$

Sustituimos estas dos formas en $p - p_c$ y se obtiene,

$$p - p_c = n_c \left[bg \sqrt{\frac{1}{b^2} (n - n_c)^2 + 1} - bg \right] + \frac{b^2 g}{2} \left[\frac{(n - n_c)}{b} \sqrt{\frac{(n - n_c)^2}{b^2} + 1} \right] - \frac{b^2 g}{2} \text{Ln} \left[\sqrt{\frac{(n - n_c)^2}{b^2} + 1} + \frac{(n - n_c)}{b} \right]. \quad (5.42)$$

Ahora expandimos en series los radicales y el logaritmo, quedándonos hasta segundo orden,

$$p - p_c \approx \frac{gn_c}{2b} (n - n_c)^2 + \frac{b^2 g}{2} \left[\frac{(n - n_c)}{b} + \frac{1}{2b^3} (n - n_c)^3 \right] - \frac{b^2 g}{2} \left[\frac{(n - n_c)}{b} + \frac{1}{2b^2} (n - n_c)^2 \right]. \quad (5.43)$$

Finalmente, se llega a una expresión que relaciona a la presión con la densidad cerca del punto crítico,

$$p - p_c \approx \frac{g}{2} \left(\frac{n_c}{b} - \frac{1}{2} \right) (n - n_c)^2 \quad (5.44)$$

y de aquí se concluye que el exponente crítico es,

$$\delta = 2 \quad (5.45)$$

Exponente β

En este caso vale la pena recordar que el exponente crítico está definido solamente por debajo de la temperatura crítica. También es necesario remarcar que para obtener este exponente nos basaremos única y exclusivamente en el gas ideal de Bose sin considerar la ecuación para la densidad que hemos estado usando en el modelo construido. En la discusión al final del capítulo quedará claro que esto se hace porque por encima de la transición el modelo está basado en el gas ideal y todos los exponentes obtenidos por encima son los de este.

El exponente β está asociado con el parámetro de orden. En el caso de un gas ideal de Bose, se ha considerado que el parámetro de orden debe estar asociado con la función de onda del sistema, sin embargo, para justificar esto solo se ha considerado que la transición del sistema tiene que ser análoga a la transición de la superfluidez del helio líquido o la de los gases ultrafríos interactuantes. Sin embargo, el gas ideal de Bose no tiene interacciones, entonces no hay razón para que la transición sea similar a la de los otros dos sistemas. Hay que recordar que la transición del gas ideal se debe únicamente a un efecto de la estadística de los bosones, lo que representa un fenómeno diferente al

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

de la superfluidez. Es decir en el fondo es una transición fenomenologicamente distinta.

Entonces ¿cuál es el parámetro de orden asociado a esta transición? Fenomenologicamente sabemos que existe un parámetro que aparece tras la transición y que se vuelve cero por encima de la transición, nos referimos a la fracción condensada. Además ésta caracteriza la fase que aparece al llegar a la temperatura crítica ya que puede ser medida a través de este parámetro. Esos motivos nos llevan a escoger a la fracción condensada como el parámetro de orden de la transición.

La fracción condensada, como vimos en el Capítulo 2, para un BEC ideal en potencial homogéneo está dada por

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.46)$$

Usando, de nuevo, la definición $\Delta = T_c - T$, pero ahora invirtiendo el signo porque estamos por debajo de la temperatura crítica. Sustituimos y hacemos la expansión hasta orden más bajo,

$$\frac{N_0}{N} \approx \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_c} \quad (5.47)$$

De la definición del exponente $\rho_l - \rho_g \sim e^\beta$, se obtiene entonces que

$$\beta = 1 \quad (5.48)$$

Exponente η

Este exponente está asociado con la función de correlación. Como solo tenemos acceso a los estados del sistema por encima de la temperatura crítica (pues en ese lado de la transición suponemos que es ideal), unicamente calcularemos la función de correlación en este lado de la transición.

La función de correlación densidad-densidad está definida como,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\rho}(\vec{r}) \hat{\rho}(\vec{r}') \rangle - \langle \hat{\rho}(\vec{r}) \rangle \langle \hat{\rho}(\vec{r}') \rangle, \quad (5.49)$$

donde $\hat{\rho}(\vec{r})$ es el operador de densidad del sistema,

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (5.50)$$

Partiendo de un gas ideal de Bose en una caja y haciendo todos los cálculos (véase Apéndice E), se llega a la siguiente expresión,

$$G(r) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_T^2}\right)^3 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^{\frac{3}{2}}} e^{m\alpha - \frac{\pi r^2}{m\lambda^2}} \right]^2 + \delta(r) \frac{N}{V}. \quad (5.51)$$

Algo interesante en este punto es calcular la integral de $G(r)$ para corroborar que es la función de correlación real del sistema,

$$\begin{aligned} \int G(r) d^3r &= 4\pi \int_0^{\infty} r^2 h(r) dr + 4\pi \frac{N}{V} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_T}\right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(m+l)^{3/2}} e^{(m+l)\beta\mu} + \frac{N}{V} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_T}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{\frac{1}{2}}} e^{n\beta\mu} - \left(\frac{1}{\lambda_T}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{\frac{3}{2}}} e^{n\beta\mu} + \frac{N}{V}, \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_T}\right)^3 Li_{\frac{1}{2}}(e^{\frac{\mu}{kT}}) \\ &= n^2 kT \kappa_T \end{aligned} \quad (5.52)$$

es decir, se satisface que

$$\kappa_T = \frac{1}{kT n^2} \int G(r) d^3r, \quad (5.53)$$

lo cual confirma que es la función de correlación del sistema.

Por otro lado, se puede mostrar (véase Apéndice E) que el primer término de (5.51) es equivalente a,

$$\frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^{\infty} \frac{p dp \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} - 1} \right|^2. \quad (5.54)$$

Esta última expresión es útil para ver el límite cerca del punto crítico. Expandimos la exponencial cerca de $\mu = 0$ e integramos, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^{\infty} \frac{p dp \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} - 1} \right|^2 &\approx \frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^{\infty} \frac{p dp \sin\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{\frac{p^2}{2kTm} + \frac{|\mu|}{kT}} \right|^2, \\ &= \frac{m^2 T^2}{4\pi \hbar^2 r^2} e^{-r/\xi} \end{aligned} \quad (5.55)$$

donde hemos identificado a la longitud de correlación como,

$$\xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m|\mu|}} \quad (5.56)$$

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

lo que implica que entonces,

$$G(r) \approx \frac{m^2 T^2}{4\pi \hbar^2 r^2} e^{-r/\xi}. \quad (5.57)$$

De la definición del exponente crítico asociado $G(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}$, se obtiene la ecuación

$$-(d - 2 + \eta) = -2. \quad (5.58)$$

Como estamos en un sistema de tres dimensiones entonces $d = 3$, y se concluye que,

$$\eta = 1 \quad (5.59)$$

Además de haber encontrado el exponente crítico, es importante señalar la relevancia de las relaciones 5.52 y 5.53. Éstas expresiones muestran la conexión entre una propiedad atómica del sistema, como lo es la función de correlación entre partículas, con una variable termodinámica macroscópica que es además una susceptibilidad termodinámica. Ésta profunda conexión nos dice cómo se correlacionan las partículas del sistema a través observar el comportamiento de la compresibilidad isotérmica que generalmente se puede medir en el laboratorio. Esto le da un papel muy importante a esta susceptibilidad para caracterizar la transición de este tipo de sistemas, la divergencia de esta tiene una implicación profunda en lo que le sucede a la correlación y por tanto al sistema cuando se acerca al punto crítico.

Exponente ν

La longitud de correlación está definida a partir de la expresión asintótica de la función de correlación (2.63), es el coeficiente en el exponente que ya hemos calculado en la expresión 5.34. Por completez, reescribimos aquí la longitud de correlación,

$$\xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m|\mu|}}. \quad (5.60)$$

Para obtener el exponente, pondremos esta expresión en términos de la temperatura. Para eso usamos la ecuación 5.7 que relaciona al potencial químico con ΔT cerca de la temperatura crítica, sustuímos y llegamos a la relación

$$\xi \approx \left(\frac{T_c}{\Delta T} \right) \frac{\lambda_{T_c}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (5.61)$$

donde λ_{T_c} es la longitud de onda térmica evaluada en la temperatura crítica, es decir, $\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT_c}}$.

La expresión (5.61) es muy descriptiva porque nos dice como se correlaciona el sistema al variar la temperatura, además nos proporciona la longitud de correlación en

términos de la otra longitud importante del sistema λ . Para temperaturas altas, lejos de la temperatura crítica, la longitud de correlación se vuelve muy pequeña y por lo tanto las distintas partes del sistema se descorrelacionan. Por otro lado, conforme nos acercamos a la temperatura crítica, la longitud de correlación se vuelve comparable a la longitud de onda térmica y después se hace infinita al llegar a la temperatura crítica. Entonces, éste parámetro tiene un peso muy importante en la transición de fase gas ideal-BEC, sin embargo en la literatura se le ha dado poca importancia como responsable de la transición del sistema. Lo cual es algo de gran relevancia y de lo que poco se habla en la literatura, se le da únicamente importancia a la longitud de onda térmica λ_T y su rol al pasar del régimen clásico al cuántico. Sin embargo, cuando se habla de la transición poco se hace alusión a que existe otra longitud importante en el sistema y que es la longitud importante cuando el sistema se acerca a la temperatura crítica. La relación (5.60) tiene aún mayor importancia puesto que fue de ella que se dedujo la longitud de correlación y además nos dice, más profundamente, que la variable termodinámica que juega el rol importante para la transición es el potencial químico. Es por ello que en éste sistema, la temperatura crítica queda fijada a partir de que el potencial químico sea cero.

Finalmente, de la ecuación (5.61) y de la definición del exponente crítico asociado a la longitud de correlación $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$, se deduce que

$$\nu = 1 \tag{5.62}$$

La longitud de correlación mide que tan grandes son las fluctuaciones de las medias de los parámetros termodinámicos del sistema. El hecho de que crezca infinitamente cerca del punto crítico nos dice que cuando el sistema va a cercándose a este punto las fluctuaciones pasan de ser insignificantes a volverse tan grandes como el tamaño mismo del sistema. Esto se ve reflejado a nivel macroscópico en el fenómeno de opalescencia crítica, el sistema pasa por una zona donde dispersa luz en todas las direcciones [82, 83] esto hace que a simple vista se pueda observar un cambio de color, un caso muy conocido es el de CO_2 , con cientos de videos en la red. Sin embargo, en los experimentos con gases ultrafríos no se observa el fenómeno de opalescencia crítica, más adelante veremos que es, quizá, debido a la presencia del potencial inhomogéneo que confina al gas, puesto que estos experimentos no se llevan a acabo en potenciales homogéneos.

Discusión y comparación con la literatura

En resumen, los exponentes críticos calculados en las secciones anteriores fueron,

Los exponentes se calcularon usando las expresiones del modelo que se construyó en el capítulo (3). Los exponentes por arriba y por debajo de la transición coinciden, en aquellos en los que se puede calcular por ambos lados. Es muy importante aclarar, una vez más, que por la forma en que está construido el modelo, por encima de la transición lo que estamos calculando son los exponentes críticos del gas ideal de Bose

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

Exponente	Valor	Relación
γ	1	κ_T
α	-1	C_V
δ	2	$p - p_c$
β	1	N_0/N
η	1	$G(r)$
ν	1	ξ

Tabla 5.1: Exponentes Críticos, gas ideal Bose.

en un potencial tipo caja. Esto es relevante porque la comparación y la discusión que sigue, a partir de ahora es enfocándonos únicamente en este sistema.

Nuevos exponentes para el Gas ideal de Bose en potencial homogéneo

El gas ideal de Bose en un potencial homogéneo es un sistema ampliamente conocido en la literatura. Es uno de los primeros sistemas cuánticos que se estudian en los cursos de física estadística ya que es un sistema en el cual se pueden obtener todas las propiedades termodinámicas de forma exacta. Es natural pensar que en éste sistema todo se ha resuelto, sin embargo veremos que los exponentes críticos que hemos calculado en este capítulo son novedosos y que cambian la visión de la naturaleza de la transición BEC que por mucho tiempo se ha tenido.

En la literatura (por citar algunos [35, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92]), se considera que la transición de un gas ideal de Bose en potencial homogéneo a BEC como una transición de segundo orden perteneciente a la clase de universalidad del modelo esférico. Los exponentes críticos de este modelo se muestran en la siguiente tabla.

Comparándolos con los que se obtuvieron en esta sección, solo coinciden α y ν . ¿A qué se debe la discrepancia? Al gas de Bose se le asignan los exponentes de 5.2, a partir de los cálculos que hicieron J. D. Gunton and M. J. Buckingham [84]. A continuación hacemos un análisis de este trabajo para identificar en dónde está el problema con el cálculo de los exponentes.

Con el fin de caracterizar la fase condensada definen un par de operadores a partir de los operadores de creación y aniquilación, de la siguiente manera,

$$\psi_k = V^{-\frac{1}{2}} a_k \quad \psi_k^\dagger = V^{-\frac{1}{2}} a_k^\dagger \quad (5.63)$$

Exponente	Valor	Relación
γ	2	κ_T
α	-1	C_V
δ	5	$p - p_c$
β	$\frac{1}{2}$	N_0/N
η	0	$G(r)$
ν	1	ξ

Tabla 5.2: Exponentes Críticos, Modelo Esférico.

donde V es el volumen. A partir de estos operadores, definen los promedios termodinámicos de estos como

$$\Psi_k = \langle \psi_k \rangle \quad \Psi_k^* = \langle \psi_k^\dagger \rangle. \quad (5.64)$$

Y la variable intensiva asociada a ellos es ν . Entonces para describir la fase condensada se quedan con el momento cero, $k = 0$ y lo denominan el momento de Bose. Como parámetro de orden escogen la variable $V\Psi_0$. Bajo estas suposiciones, modifican el hamiltoniano del sistema para introducir el campo de Bose, de tal forma que la gran función de partición queda como,

$$\Xi = \text{Tr} \exp[-[\hat{H} - \mu\hat{N} - V(\nu_0\hat{\psi}_0 + \nu_0^*\hat{\psi}_0^\dagger)]/kT] \quad (5.65)$$

No queda muy claro la naturaleza del campo de Bose, más allá de intentar describir el parámetro de orden. El problema de introducir artificialmente estas variables termodinámicas en la gran función de partición es que modifica crucialmente la naturaleza de la transición, poniéndola dentro de una aproximación de campo medio como veremos a continuación.

En el límite termodinámico, encuentran que la función de partición es,

$$\Omega(T, V, \mu, \nu_0) = -V \frac{\nu_0^* \nu_0}{\mu} + \Omega_{ideal}(T, V, \mu) \quad (5.66)$$

con $\Omega(T, V, \mu)_{ideal}$ la función de partición usual del gas. A partir de la función de partición obtienen toda la termodinámica del sistema, en particular la densidad, para la que obtienen,

$$\rho = \frac{\nu_0 \nu_0^*}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}(\mu/kT). \quad (5.67)$$

5. EXPONENTES CRÍTICOS DEL GAS HOMOGÉNEO

Por otro lado, obtienen la función de onda del condensado como,

$$\Psi_0 = -\frac{\nu_0^*}{\mu}. \quad (5.68)$$

De las dos últimas relaciones resulta que la densidad se expresa como,

$$\rho = \Psi_0^* \Psi_0 + \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}(\mu/kT). \quad (5.69)$$

Como el segundo término solo suma sobre estados excitados entonces el primero término debe ser la densidad condensada, es decir, $\Psi\Psi^* = |\Psi_0|^2$.

Por otro lado, de la definición de promedio termodinámico se tiene que para un operador cualquiera A , el promedio está dado como,

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{\Xi} \text{Tr} \left(\hat{A} \exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N} - V(\nu_0\hat{\psi}_0^\dagger + \nu_0^*\hat{\psi}_0))] \right) \quad (5.70)$$

Si calculamos, la función de onda condensada, de acuerdo a la definición que se le dio anteriormente, se obtiene,

$$\Psi_0 = \langle \hat{\psi}_0 \rangle = -\frac{\nu_0^*}{\mu}$$

Que coincide con lo ya calculado anteriormente. Pero, si calculamos la densidad, se obtiene,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{V} \langle \hat{N} \rangle \\ &= \frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger a_0 \rangle + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p} \neq 0} \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle \\ &= \frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger a_0 \rangle + \frac{1}{\lambda_T^3} \text{Li}_{3/2}(\mu/kT). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Comparamos con la densidad que se había obtenido anteriormente en (5.69) se llega a la igualdad,

$$\langle \hat{a}_0^\dagger a_0 \rangle / V = \Psi_0^* \Psi_0 \quad (5.72)$$

pero ya que $\langle \hat{a}_0^\dagger a_0 \rangle / V = \langle \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 \rangle$ entonces para que las densidades calculadas anteriormente sean iguales se debe cumplir que $\langle \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 \rangle = \Psi_0^* \Psi_0 = \langle \hat{\psi}_0^\dagger \rangle \langle \hat{\psi}_0 \rangle$, es decir, que las correlaciones en el condensado son cero. Pero esto no puede ser cierto, calculemos la correlación del operador de partículas condensadas,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 \rangle &= \frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{V} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_0 + \Psi_0^* \Psi_0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Por lo tanto, para que las dos densidades calculadas sean ciertas entonces se debe cumplir $\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_0 = 0$ para todas las temperaturas, para lo cual no hay justificación.

El hecho de poner a mano el *campo de Bose* al hamiltoniano impone un modelo de campo medio. Es decir, suponer la existencia del campo de Bose impone artificialmente un parámetro de orden que conduce al modelo esférico. Además el cálculo de Gunton-Buckingham presenta un problema termodinámico claro al llegar a una expresión errónea para la compresibilidad isotérmica. Por otro lado, todos nuestros cálculos fueron exactos, sin meter ninguna suposición extra al gas de Bose Ideal, simplemente tomando el sistema y calculando toda la termodinámica, esto nos condujo a obtener los exponentes críticos de manera directa, que además son consistentes con la hipótesis de escalamiento ya que satisfacen idénticamente las ecuaciones entre exponentes que mostramos en (2.67).

$$\begin{aligned}\gamma &= \nu(2 - \eta) \\ \alpha &= 2 - \nu d \\ \beta &= \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \\ \delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}.\end{aligned}$$

La discusión anterior nos lleva a concluir que el gas de Bose ideal en potencial homogéneo no pertenece a la clase de universalidad del Modelo Esférico. Además, en la literatura no existe otro modelo o sistema que tenga los exponentes críticos que se encontraron, esto implica que el gas de Bose tiene su propia clase de universalidad. Pero no solo eso, también nuestros cálculos demuestran que existe un modelo diferente a Ising que se puede resolver de forma exacta en tres dimensiones [93].

Termodinámica del gas de Bose en Potencial armónico

En los dos capítulos previos (4, 5) se estudió el gas de Bose en un potencial tipo caja, usando el modelo que se desarrolló en el Capítulo 3. En este pasaremos a estudiar el gas de Bose pero en un potencial armónico, por lo que el potencial ya no es homogéneo. Por razones de claridad y sin pérdida de generalidad expondremos el desarrollo en un potencial isotrópico, de tal forma que el potencial depende solamente de la magnitud del vector de posición en la trampa como variable espacial. El camino a seguir es construir el perfil de densidad a partir del modelo de densidad en el caso homogéneo conectándolo con el caso inhomogéneo por medio de la aproximación de densidad local. A partir del perfil de densidad explotaremos el formalismo de las variables globales para encontrar las variables termodinámicas que describen el sistema. Esto nos permitirá encontrar la relación fundamental del sistema que contiene toda la información de la termodinámica, en particular nos enfocaremos en la compresibilidad isotérmica global ya que esta está relacionada directamente con las fluctuaciones, lo cual hace que sea importante en la caracterización de la transición de fase.

Desde hace varios años el grupo de V. Bagnato ha estado realizando mediciones de termodinámica de variables globales: presión, compresibilidad isotérmica, coeficiente de expansión térmica y capacidad calorífica globales [94, 95, 96, 97]. En conexión con eso, el desarrollo teórico que haremos en este capítulo proporciona un marco teórico para esos experimentos y da la pauta para el análisis e interpretación de los datos de experimentos ya realizados así como una visión de hacia donde dirigir los futuros diseños experimentales. Un ejemplo de lo anterior son los exponentes críticos, nuestro enfoque proporciona una motivación para obtener datos en la región crítica para poder obtener los exponentes experimentalmente. Específicamente el caso de la compresibilidad isotérmica global, como veremos más adelante, no es divergente pero su derivada si lo es lo que implica que para poder calcular el exponente crítico los datos deben ser lo suficientemente buenos que permitan calcular la derivada, pues en principio esta com-

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

presibilidad se obtiene experimentalmente a partir de la derivada de la presión global, es decir, encontramos que es necesario llegar hasta una segunda derivada numérica.

Perfil de densidad, potencial armónico

La Aproximación de Densidad Local [81] nos permite pasar del caso homogéneo al caso inhomogéneo, esta consiste en considerar que las variables termodinámicas son validas en una región pequeña pero macroscópica del sistema cuando se está dentro de un potencial que depende de la posición. Es de importancia señalar que dicha aproximación es exacta en el límite termodinámico, como ha sido probado en los trabajos [46, 79, 80].

En el Capítulo 3, construimos el perfil de densidad del caso homogéneo $n(\mu, T)$. Ahora, para obtener el perfil de densidad del gas atrapado en un potencial que depende de la posición hacemos uso de la Aproximación de Densidad Local. Para esto consideramos que el potencial químico depende de la posición, es decir, ahora es local. El nuevo potencial químico pasa a ser el que se tenía antes menos el potencial externo $\mu \rightarrow \mu - V_{ext}(\vec{r})$, de esta forma el perfil de densidad ahora depende de las variables espaciales,

$$\rho(\vec{r}; \mu, T) = n(\mu - V_{ext}(\vec{r}), T) \quad (6.1)$$

donde se ha usado ρ para diferenciar al perfil de densidad del gas inhomogéneo de la densidad n en el caso homogéneo. Entonces, usaremos ρ para llamar al perfil de densidad a partir de ahora.

La expresión 6.1 nos proporciona directamente el perfil de densidad para un potencial químico y temperatura fija. Ahora, sustituimos $n(\mu, T) \rightarrow n(\mu - V_{ext}(\vec{r}), T)$ en nuestro modelo y además nos restringimos a un potencial externo armónico e isotrópico con la finalidad de que las expresiones y los gráficos sean más claros, $V_{ext}(\vec{r}) = m\omega^2 r^2/2$ con la misma frecuencia en todas las direcciones. El caso anisotrópico es completamente análogo. El perfil de densidad queda entonces como,

$$\rho(r; \mu, T) = \frac{1}{g} \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + bg\right)^2 - (bg)^2} + n_c(T) \quad (6.2)$$

si $\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \geq 0$, y

$$\rho(r; \mu, T) = \frac{1}{\lambda^3} Li_{\frac{3}{2}} \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}{kT} \right) \quad (6.3)$$

en el caso de $\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \leq 0$.

Notemos que ahora es el potencial químico local $\mu - V_{ext}(\vec{r})$ el que delimita las dos partes de la función (y por lo tanto la transición), que vistas en el perfil de densidad son dos regiones en el espacio puesto que la LDA ha introducido la dependencia en las coordenadas físicas. La primera región es el pico del condensado, mientras que la segunda es la nube térmica remanente de los alrededores. Para encontrar el radio en el que se unen las dos zonas basta con despejar r de la condición $\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = 0$, de donde se obtiene

$$R_{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}. \quad (6.4)$$

Se ha etiquetado este radio como TF a propósito pues resulta ser el radio usual de Thomas-Fermi. La diferencia es que aquí el radio indica la localización espacial del condensado para cualquier temperatura y no solamente para $T = 0$ [43, 67]. Para ilustrar esto en las Figuras 6.1 y 6.2, se muestran gráficas de $\rho(r)$ para diferentes potenciales químicos y diferentes temperaturas. En la primera de ellas se aprecia claramente como se mueve el radio de Thomas-Fermi cuando cambia el potencial químico y además la presencia o no de la parte condensada dependiendo si este es positivo o negativo, en el primer caso se aprecia el punto de transición entre las dos fases, mientras que en el otro sólo hay nube térmica pues cuando tenemos un potencial químico negativo el potencial global siempre será negativo y por lo tanto siempre estaremos en la zona de gas ideal de Bose sin cruzar por la transición. Este comportamiento refleja, de forma cualitativa, el comportamiento del sistema en los experimentos. En la Figura 6.2 el potencial químico es positivo y es el mismo para todas los perfiles, por lo que en este caso se ve como R_{TF} se mantiene constante y es el punto de separación entre las dos regiones. Una disminución de temperatura provoca que la nube térmica tienda a desaparecer y que la zona de transición se vuelva mucho más brusca, es decir, hay más región condensada. Cuando la temperatura es muy grande, la mayor parte de las partículas está en la región de nube térmica y el condensado es prácticamente nulo.

Las expresiones 6.2 y 6.3 nos dan el perfil de densidad del gas como sería observado en el laboratorio. A partir de éste calcularemos las variables termodinámicas relevantes para describir el sistema. Recordemos, de la Introducción, que para este sistema termodinámico la variable adecuada es el volumen global \mathcal{V}^1 , la temperatura y el número de partículas. A partir de estas obtendremos las demás variables globales y posteriormente las susceptibilidades globales.

Termodinámica de Variables Globales

Partimos del hecho de que el volumen es conocido, puesto que en principio conocemos la frecuencia de la trampa tal y como sucede en los experimentos con gases

¹Las variables globales se denotan con la fuente de *Mathcal* para diferenciar de las variables no globales.

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

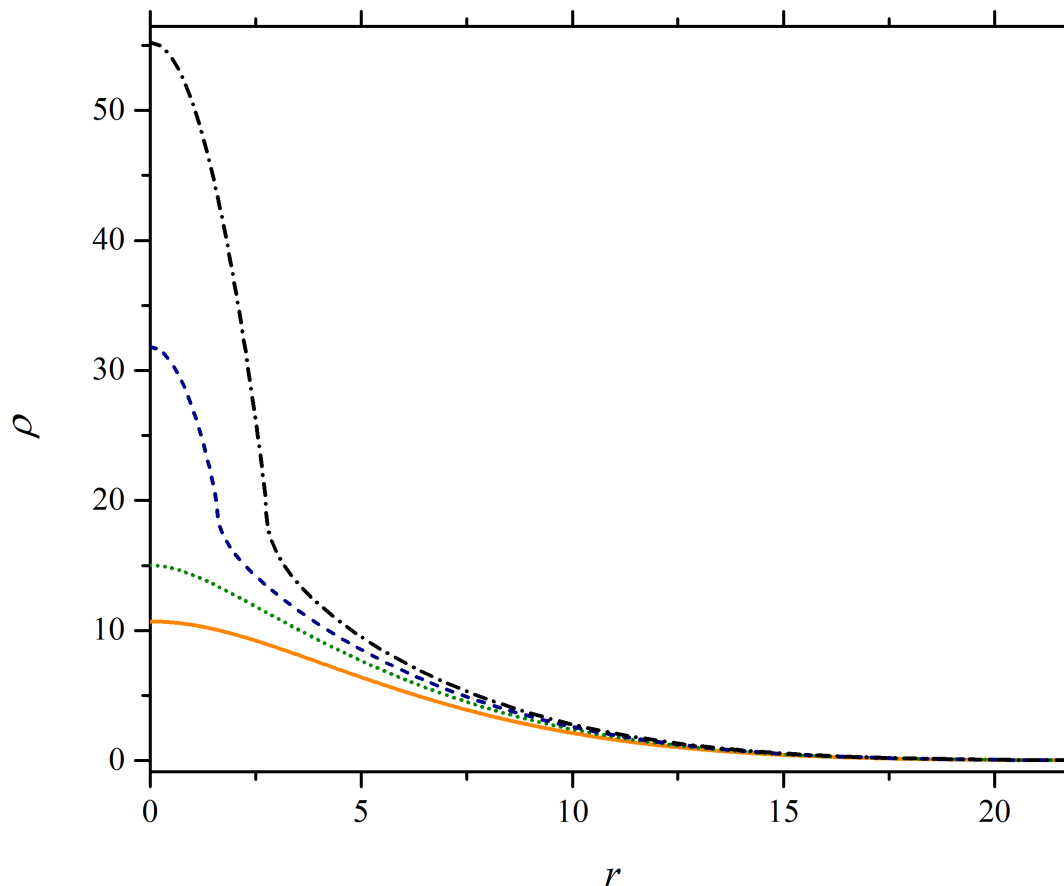


Figura 6.1: Perfil de densidad $\rho(r)$ como función de r , para diferentes valores del potencial químico. La línea naranja (sólida) $\mu = -0.71$ y la línea verde (punteada) $\mu = -0.35$ están abajo de la transición, mientras que la línea azul $\mu = 0.71$ y negra $\mu = 2.08$ se encuentran arriba de la transición. La temperatura es $kT = 36.42$, en unidades naturales para el oscilador, $\hbar = m = \omega = 1$.

atrapados en potenciales armónicos [98] y suponemos que la trampa es isotrópica, es decir, la frecuencia en los tres ejes coordenados es la misma, entonces el volumen global es el dado por,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\omega^3}. \quad (6.5)$$

Por otro lado, la relación (2.53) nos permite obtener N integrando el perfil de densidad. Se nos presentan dos casos, cuando el potencial químico es negativo y cuando es positivo.

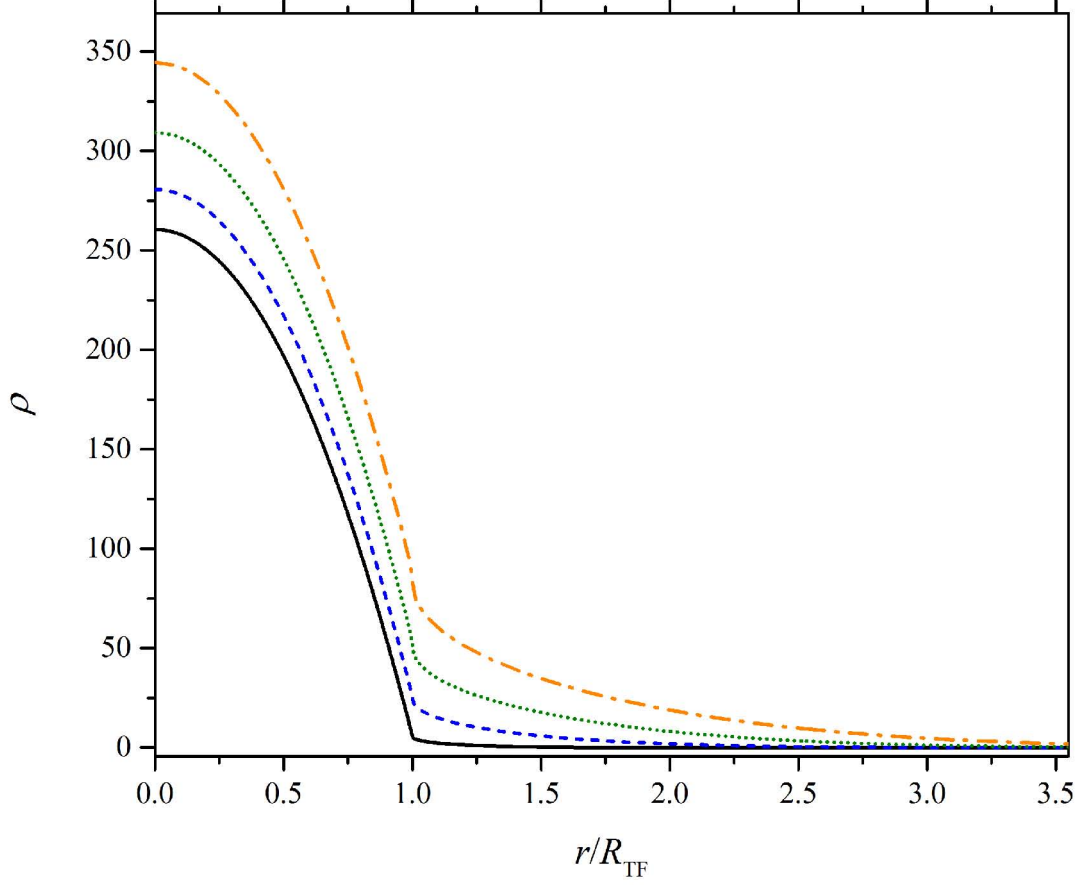


Figura 6.2: Perfil de densidad $\rho(r)$ como función de r , para diferentes valores de la temperatura. Línea negra $kT = 22.0$, azul $kT = 29.5$, línea verde $kT = 36.5$, línea naranja $kT = 44.5$, todas dentro de la transición. El potencial químico es $\mu = 0.8$.

En el primer caso, sólo integramos la parte del gas de Bose ideal,

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = 4\pi \int_0^\infty r^2 \frac{1}{\lambda^3} \text{Li}_{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}{kT}} \right) dr \quad (6.6)$$

la integración se hace usando el desarrollo en series de $\text{Li}_{3/2}$

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = \frac{4\pi}{\lambda^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j\frac{\mu}{kT}}}{j^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{j}{2} \frac{m\omega^2 r^2}{kT}} dr \quad (6.7)$$

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3 \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (6.8)$$

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

con $\mu \leq 0$. Esta es la expresión conocida del número de partículas N para un gas de Bose ideal atrapado en un potencial armónico como se mostró en la introducción [67]. Esto era de esperarse ya que estamos en la región del modelo en el que únicamente consideramos la parte ideal.

Para el caso $\mu \geq 0$ tenemos dos integrales divididas por el radio de Thomas-Fermi,

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = 4\pi \int_0^{R_{TF}} r^2 \left(\frac{1}{g} \sqrt{(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + bg)^2 - (bg)^2} + n_c \right) dr \\ + 4\pi \int_{R_{TF}}^\infty \frac{r^2}{\lambda^2} \text{Li}_{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}{kT}} \right) dr \quad (6.9)$$

Para integrar conviene definir $y = \frac{bn_c g}{\mu}$ y hacer el cambio de variable $\tilde{r} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mu}} r$,

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = 4\pi \left(\frac{2\mu}{m\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\mu}{g} \int_0^1 \tilde{r}^2 \sqrt{(1 - \tilde{r}^2 + y)^2 - y^2} d\tilde{r} + \frac{1}{3} n_c \right] \\ + \frac{4\pi}{\lambda^3} \left(\frac{2\mu}{m\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_1^\infty \tilde{r}^2 \text{Li}_{3/2} \left(e^{\frac{\mu - \mu \tilde{r}^2}{kT}} \right) d\tilde{r} \quad (6.10)$$

llevando a cabo ambas integrales se obtiene la expresión para el número de partículas siempre que $\mu \geq 0$

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{TF}^3}{\lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{5} Z_1(x) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{2\alpha} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}} \tilde{\text{Li}}_3(\alpha) \right], \quad (6.11)$$

donde $\alpha = \mu/kT$ y

$$Z_1(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \left[(4x^2 + 2x + 1) \text{E}\left(\frac{1}{2x+1}\right) - x(4x+1) \text{K}\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right].$$

con $x = \frac{2\pi g^2}{\mu \lambda^6 kT}$, mientras que $\text{K}(x)$ y $\text{E}(x)$ Son las integrales elípticas de primer y segundo tipo respectivamente A. Además hemos definido la función $\tilde{\text{Li}}_s$ como

$$\tilde{\text{Li}}_s(\alpha) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{l\alpha}}{l^s} \text{Erfc}(\sqrt{l\alpha}), \quad (6.12)$$

estas funciones son muy similares a las funciones polilogarítmicas, con la diferencia que cada término de la serie está pesada por una función error complemento. Notar también, que a diferencia de las funciones polilogarítmicas que solo están definidas para $\mu < 0$ debido a la divergencia en e^0 , éstas funciones si tienen sentido para $\mu > 0$ pues la función error completamente garantiza la convergencia de la serie. En $\mu = 0$ las funciones Li y $\tilde{\text{Li}}$ valen lo mismo, el valor de la función zeta de Riemann evaluada en el orden del polilogaritmo. Y en una vecindad alrededor de $\mu = 0$ las funciones se comportan

de forma similar pues conforme nos acercamos al cero, la función error complemento se aproxima rápidamente a uno.

Podemos ver en las expresiones 6.8 y 6.11 el rol que desempeña el volumen global \mathcal{V} en analogía con el volumen normal V , la primera de ellas podemos reescribirla como,

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) = \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \mathcal{V} \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (6.13)$$

es claro que a mayor volumen más número de partículas porque al aumentar el volumen estamos bajando la frecuencia y abriendo la trampa. En el caso de 6.11 sucede algo similar, puesto que $R_{TF} \sim \frac{1}{\omega}$ y por tanto,

$$N(\mu, T, \mathcal{V}) \sim \mathcal{V}$$

Desde esta perspectiva, el volumen global se comporta como un volumen usual conteniendo a las partículas y conservando la relación lineal volumen-número de partículas que ocurre en un sistema tridimensional.

Presión global

Para el cálculo de la presión global, recordamos que ésta es la variable canónica conjugada del volumen global, es decir, la derivada de la energía libre de Helmholtz con respecto al volumen global. Como se mostró en la sección 2.4, la presión puede obtenerse vía el perfil de densidad a través de la siguiente relación,

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \frac{4\pi}{3} \frac{m}{\mathcal{V}^{\frac{5}{3}}} \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr. \quad (6.14)$$

Para llevar acabo la integral tenemos nuevamente dos casos, potencial químico negativo y potencial químico positivo. Para el primero se obtiene, después de integrar, que la presión está dada por

$$\mathcal{P} = kT \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \text{Li}_4(\alpha) \quad \text{si } \mu \leq 0. \quad (6.15)$$

Es interesante notar que a pesar de ser la presión global para potenciales químicos negativos es igual la presión usual de un gas de Bose ideal en un potencial armónico. Para el caso de potencial químico positivo tenemos que integrar, nuevamente, el perfil de densidad en dos partes que están separadas por el radio de Thomas-Fermi,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu, T) = & \frac{4\pi}{3} \frac{m\omega^2}{\mathcal{V}} \int_0^{R_{TF}} r^4 \left[\frac{1}{g} \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + bg \right)^2 - (bg)^2} + n_c \right] dr \\ & + \frac{4\pi}{3} \frac{m\omega^2}{\mathcal{V}} \int_{R_{TF}}^\infty r^4 \frac{1}{\lambda^3} \text{Li}_{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\mu - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2}{kT}} \right) dr \end{aligned} \quad (6.16)$$

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

integramos haciendo un cambio de variables similar al que se hizo en la sección anterior para ponerla en forma de funciones elípticas y se llega a

$$\mathcal{P}(\mu, T) = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3m^{3/2}} \frac{\mu^{5/2}}{\lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{105} Z_2(x) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{5} + \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{2\alpha} + \frac{3\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{4\alpha^2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}} \tilde{\text{Li}}_4(\alpha) \right], \quad (6.17)$$

con

$$Z_2(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \left[(32x^3 + 38x^2 + 9x + 3) E\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (32x^3 + 30x^2 + 3x) K\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right], \quad (6.18)$$

y x es la misma que se definió anteriormente en el cálculo del número de partículas.

Las expresiones 6.14 y 6.16 nos dan la presión global, la importancia de estas radica en que $\mathcal{P}(\mu, T)$ es una relación fundamental y que es posible calcular toda la termodinámica a partir de ella. Para ilustrar la forma de la presión global en la Figura 6.3 se muestra una gráfica de esta en función del potencial químico, para distintas temperaturas.

Habiendo calculado el número de partículas y la presión global, pasaremos a calcular las susceptibilidades del sistema. Como vimos anteriormente, es de particular interés la compresibilidad isotérmica debido a su relación con la función de correlación del sistema.

Compresibilidad Isotérmica Global

La compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T fue definida en la ecuación (2.55). Esta expresión pudiera parecer una simple analogía a la del caso homogéneo κ_T por la forma en la que está definida, pero en realidad es la verdadera susceptibilidad del sistema, ya que al expresarla en términos del número de partículas (que no es una variable global) podemos notar que está relacionada directamente con la fluctuación de ese número. Por otro lado, su inverso nos dice cómo responde el sistema ante cambios en el volumen global, en esencia la frecuencia y que a su vez es el potencial externos. Es decir, la compresibilidad isotérmica es la susceptibilidad que nos dice cómo responde el sistema ante cambios en el potencial externo. Cabe señalar, también, que esta puede ser medida experimentalmente como se ha venido haciendo en ^{87}Rb [25, 27]. Por estas razones, estamos muy interesados en ver cómo se modifica esta susceptibilidad al pasar del sistema homogéneo al inhomogéneo para estudiar las modificaciones en la forma de la transición.

Como habíamos visto en el Capítulo 2, la definición de la Compresibilidad Isotérmica Global es,

$$\mathcal{K}_T = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{P}} \right)_{N, T},$$

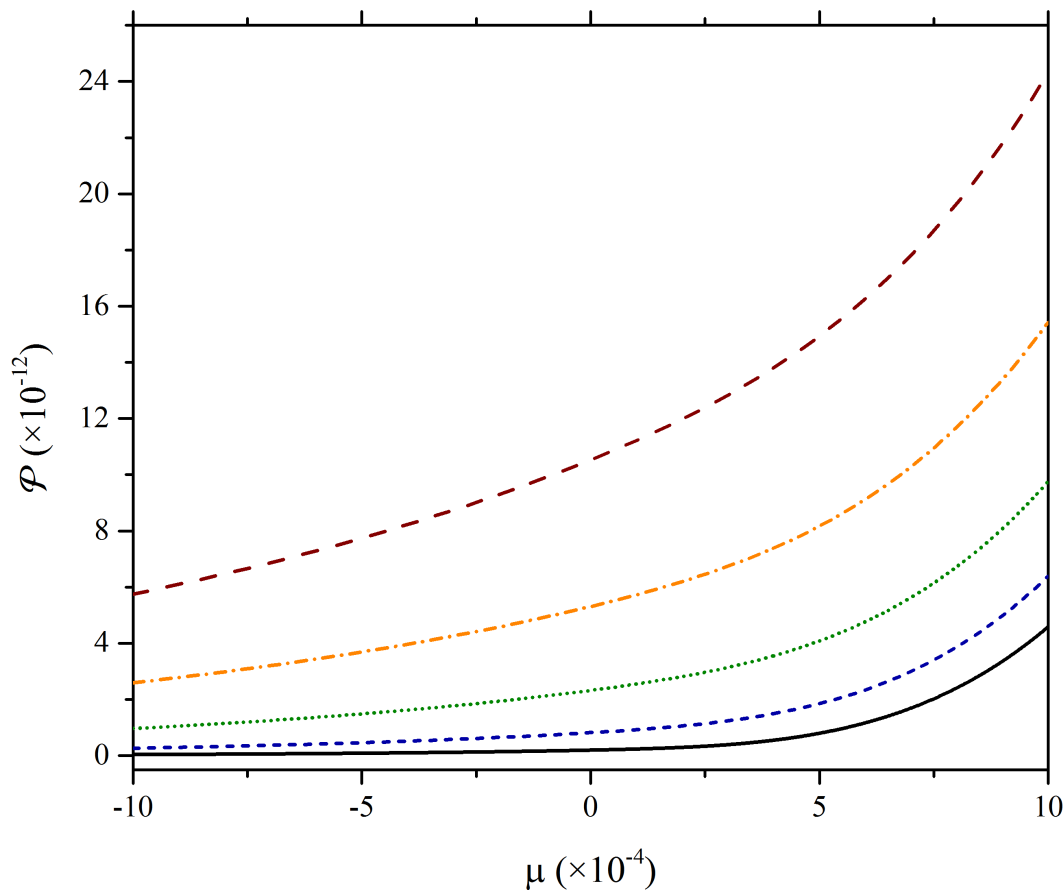


Figura 6.3: Presión global como función del potencial químico para diferentes temperatura. Las curvas de presión más alta son también las de mayor temperatura, es decir, las isothermas quedan ordenadas por el valor de su temperatura.

para obtener una forma equivalente pero más conveniente para nuestros cálculos, usamos la ecuación de Gibbs-Duhem con variables globales,

$$-SdT + \mathcal{V}d\mathcal{P} - Nd\mu = 0 \quad (6.19)$$

hacemos la temperatura constante $T = \text{cte}$ y dividimos por $d\mathcal{V}$,

$$\mathcal{V} \frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{V}} = N \frac{d\mu}{d\mathcal{V}}. \quad (6.20)$$

Ahora, usamos que el volumen se puede expresar a través de la densidad $\mathcal{V} = \frac{N}{\eta}$ ¹ y

¹Usamos η para la densidad global $\eta = \frac{N}{\mathcal{V}}$, no confundir con el exponente crítico asociado a la función de correlación.

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

entonces $\frac{d}{d\mathcal{V}} = -\frac{N}{\mathcal{V}^2} \frac{d}{d\eta}$. Por lo que sustituyendo esto en (6.20),

$$\mathcal{V} \frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{V}} = -\frac{N^2}{\mathcal{V}^2} \frac{d\mu}{d\eta} \quad (6.21)$$

y finalmente sustituyendo en la definición llegamos a la expresión equivalente,

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right)_T. \quad (6.22)$$

que es una expresión análoga a la de la compresibilidad isotérmica usual κ_T del sistema inhomogéneo [99].

Esta forma, compresibilidad isotérmica global en función de la densidad global y potencial químico nos será más conveniente puesto que ya hemos calculado el número de partículas como función del potencial químico. Aunado a esto, cabe señalar que en la ecuación (6.22) muestra que si mantenemos el volumen global contante y sustituímos η por el número de partículas podemos expresar a la compresibilidad isotérmica global como la derivada del número de partículas respecto al potencial químico, es decir, en términos de variables termodinámicas no globales, como mencionamos anteriormente dicha derivada está relacionada con las fluctuaciones del sistema. Esto nos confirma, que efectivamente, la compresibilidad global es de verdad una susceptibilidad del sistema.

Obtendremos una relación que nos permita calcular la compresibilidad directamente del perfil de densidad y no a través de la presión o el número de partículas. Para esto, recordemos que el número de partículas N es la integral del perfil de densidad ρ y además que el potencial es armónico, por lo que podemos hacer un cambio de variable en el radio \tilde{r} de tal forma que explotando la forma del potencial esfericemos el sistema,

$$\tilde{r} = (\omega_x x, \omega_y y, \omega_z z)$$

de tal forma que podemos escribir,

$$\tilde{r} = \sqrt{\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2}.$$

Entonces, con este cambio de variable y del hecho de que el perfil de densidad $\rho(\vec{r})$ solo depende del radio como escalar obtenemos,

$$\begin{aligned} N &= \int \rho(\vec{r}) dx dy dz \\ &= \frac{1}{\bar{\omega}^3} \int \rho(\tilde{r}) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{V} = \frac{1}{\bar{\omega}^3}$, la densidad global en el potencial armónico es $\eta = \bar{\omega}^3 N$. Entonces sustituyendo η e integrando en coordenadas esféricas,

$$\eta = 4\pi \int_0^\infty \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) dr. \quad (6.23)$$

Dada esta forma de la densidad global η , podemos sustituirla en la definición de la compresibilidad isotérmica \mathcal{K}_T y puesto que la integral con respecto al potencial químico es independiente del radio podemos intercambiar lo signos de derivación parcial con integración,

$$\mathcal{K}_T = \frac{\mathcal{V}}{N^2} 4\pi \int_0^\infty r^2 \frac{\partial \rho(r)}{\partial \mu} dr. \quad (6.24)$$

El perfil de densidad para el caso homogéneo se construyó a partir de la aproximación de densidad local, es decir, la densidad es $\rho = \rho(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{r}^2)$, entonces

$$\mathcal{K}_T = \frac{\mathcal{V}}{N^2} 4\pi \int_0^\infty r^2 \frac{\partial \rho(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2)}{\partial \mu} dr,$$

ésta ecuación sugiere el cambio de variable $X = \mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Derivando implícitamente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} = -\frac{1}{m\omega^2 r} \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

volviendo a la expresión para la compresibilidad global,

$$\mathcal{K}_T = -\frac{4\pi\mathcal{V}}{m\omega^2 N^2} \int_0^\infty r \frac{\partial \rho}{\partial r} dr$$

se integra por partes para finalmente obtener,

$$\mathcal{K}_T = \frac{\mathcal{V}^2}{N^2} \frac{4\pi}{m} \int_0^\infty \rho(r; \mu, T) dr, \quad (6.25)$$

que es la expresión que estábamos buscando, es decir, una expresión sencilla para calcular la compresibilidad isotérmica por medio del perfil de densidad, aún sin conocer \mathcal{P} y N . Desde el punto de vista experimental es muy interesante tener esta expresión porque, como se ha dicho anteriormente, el perfil de densidad es lo único que se puede medir en el laboratorio y es de él que se extrae toda la información, sin hablar de las frecuencias que son ajustadas de antemano. Además, la ecuación 6.25 nos evita una derivada que a nivel de análisis de datos requiere puntos cercanos para disminuir el error, es decir, requiere muchas mediciones de la presión global. Mas adelante veremos que es necesario calcular la derivada de la compresibilidad, lo que significa el tener que ir hasta la segunda derivada de la presión, entonces es importante ahorrarnos una de esas derivadas en el análisis de datos.

En nuestro caso, ya tenemos un perfil de densidad. Entonces integramos (para los dos partes de siempre) de forma similar a como se hizo con \mathcal{P} y \mathcal{V} , se obtiene que la compresibilidad isotérmica global está dada como (para $\mu \leq 0$),

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{kT} \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \text{Li}_2(\alpha) \quad (6.26)$$

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

y para $\mu > 0$,

$$\mathcal{K}_T = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \frac{\mu^{1/2}}{\eta^2 \lambda_T^3} \left[\frac{2b\lambda_T^3}{3} Z_3(x) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{1/2}} \tilde{\text{Li}}_2(\alpha) \right], \quad (6.27)$$

donde

$$Z_3(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \left[(x+1) \text{E}\left(\frac{1}{2x+1}\right) - x \text{K}\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right]. \quad (6.28)$$

De (6.27) y (6.28) podemos deducir que hay una compresibilidad isotérmica crítica (\mathcal{K}_c), cuando estamos por encima de la temperatura crítica es claro que \mathcal{K}_T tiende a

$$\mathcal{K}_c = \frac{1}{kT_c} \frac{1}{\eta_c^2} \left(\frac{kT_c}{\hbar} \right)^3 \zeta(2). \quad (6.29)$$

Por debajo de la temperatura crítica también se tiende a esa misma expresión pues cuando el potencial químico es cero la variable x también es cero y entonces también $Z_3(x)$ es cero, por lo que el único término que sobrevive en (6.27) es el polilogarítmico. Esto garantiza que la compresibilidad isotérmica sea finita en la temperatura crítica y que además sea continua. Para ver su comportamiento, en la Figura 6.4 se muestra una curva típica de esta en función de la temperatura y para un número de partículas N constante, como la frecuencia se mantiene también constante, es también una isodensidad. Gráficamente se confirma que no diverge, a diferencia de la contraparte homogénea (Figura 4.4) que sí lo hace. Es decir, en el caso inhomogéneo no existe divergencia en las segundas derivadas, esto pareciera indicar que no hay un comportamiento crítico, sin embargo en la curva se puede apreciar a simple vista un cambio de curvatura al llegar a T_c , es decir, hay un punto de inflexión que pudiera indicar un comportamiento divergente en la derivada de la compresibilidad. Para comprobarlo, calcularemos la derivada. Además la curva que obtuvimos para la compresibilidad isotérmica global es cualitativamente muy similar a la que se ha obtenido de forma experimental[28] y que mostramos en la Figura 6.5

Antes de mostrar el cálculo de la derivada y su comportamiento es interesante mostrar la Figura 6.6 donde se grafican varias curvas de la compresibilidad isotérmica como función del potencial químico μ para diferentes temperaturas, estas muestran picos en la transición pero no divergen. Este comportamiento es similar a curvas mostradas en el artículo [27] obtenidas a partir de mediciones en ^{87}Rb , en la Figura 6.7. Lo que parece corroborar que existe un comportamiento singular de la derivada de la compresibilidad en la temperatura crítica, no solo en el modelo teórico que hemos venido estudiando sino que existe realmente. Para comparar datos experimentales con nuestro modelo, al momento de escribir esta tesis se está buscando una colaboración con el grupo que tomó esos datos. Por otro lado, también la transición lambda del helio líquido muestra un comportamiento cualitativamente similar [100, 101, 102].

Para ver el comportamiento de la Compresibilidad Isotérmica cerca del punto crítico, calcularemos la derivada. Puesto que tenemos variables implícitas, la expresión a

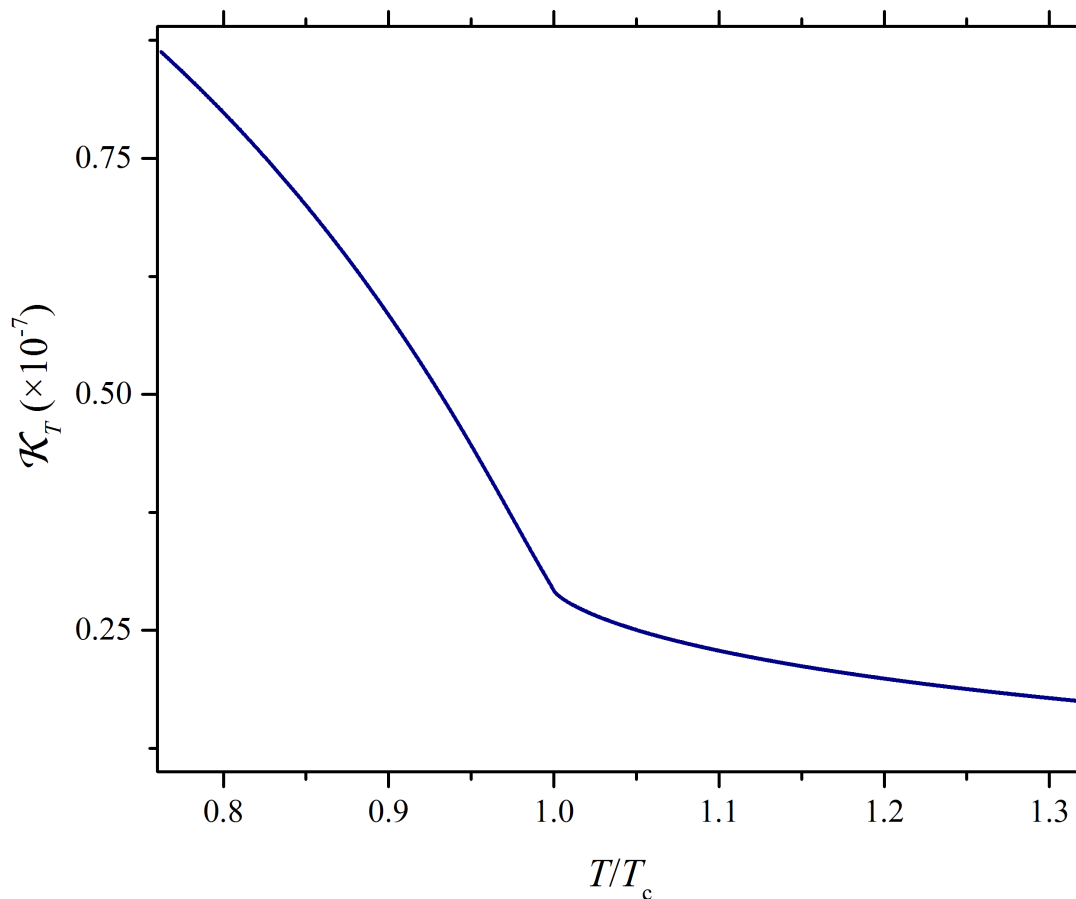


Figura 6.4: Una curva típica de la compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T , como función de T/T_c , para $N = 5 \times 10^5$ átomos en la trampa. En la temperatura crítica T_c , la compresibilidad cambia su curvatura, muestra un punto de inflexión. Unidades naturales de la trampa, $\hbar = m = \omega = 1$.

calcular es

$$\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_\mu + \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N, \quad (6.30)$$

hacemos uso de la identidad cíclica para calcular $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N$ puesto que en la representación en que estamos es muy complicado calcularla directamente, entonces le daremos la vuelta obteniéndola a través de otras dos derivadas las cuales son mucho más sencillas

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

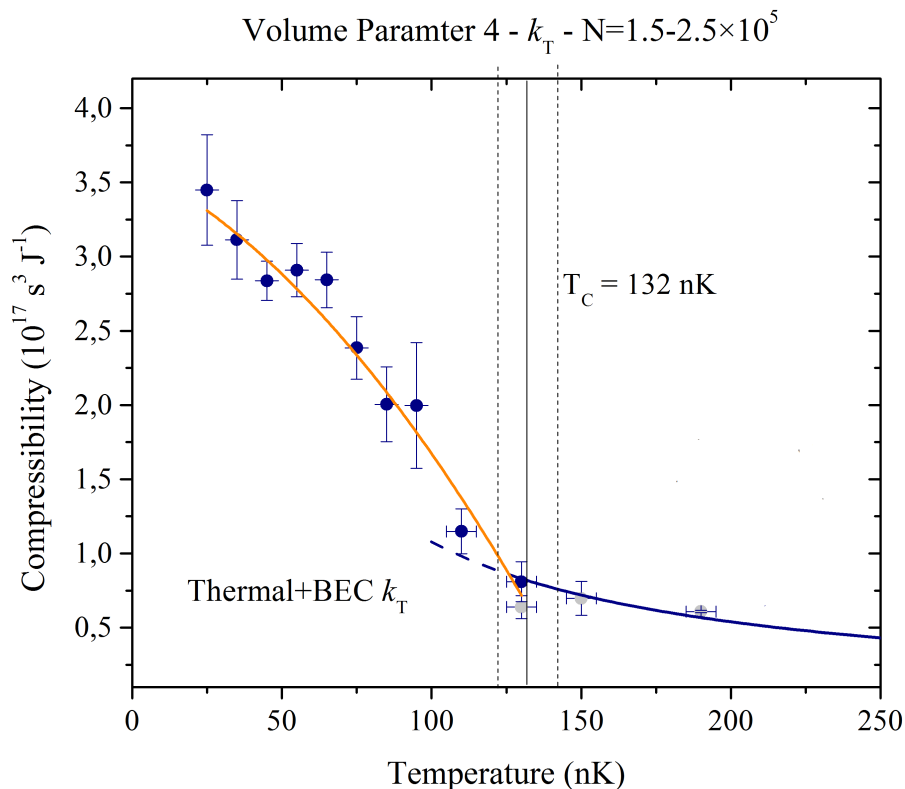


Figura 6.5: Compresibilidad Isotérmica global experimental (Imagen proporcionada por F.J. Poveda-Cuevas y que aparece en [28]).

de obtener,

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_\mu = -1 \implies \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N = -\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T} \quad (6.31)$$

de lo cual se obtiene que la derivada de la compresibilidad está dada por:

$$\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_\mu - \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial \mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T}. \quad (6.32)$$

Se calcularon cada una de las cuatro derivadas requeridas, (para mirar las funciones obtenidas en el caso $\mu \geq 0$ pasar al Anexo F). La gráfica de la derivada es mostrada en la Figura 6.8, observamos inmediatamente la divergencia que antes no apareció en la compresibilidad. Para ver la forma en que diverge analizamos la expresión de la

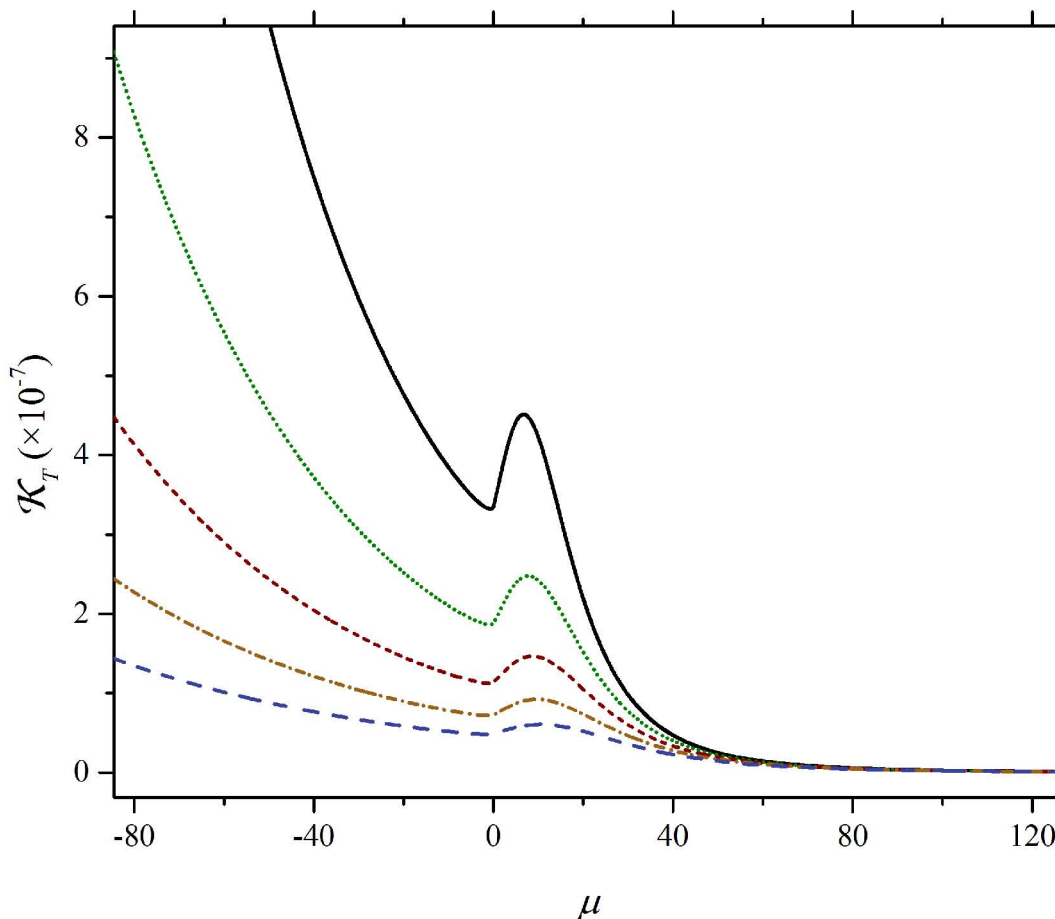


Figura 6.6: Compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T como función del potencial químico μ para diferentes temperaturas.

derivada, en el caso correspondiente a potencial químico negativo la expresión obtenida es la siguiente,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,V} = k \frac{kT}{\hbar^3 \frac{N^2}{V}} \frac{1}{\text{Li}_2(\alpha)} [2 \text{Li}_2(\alpha) \text{Li}_2(\alpha) - 3 \text{Li}_1(\alpha) \text{Li}_3(\alpha)], \quad (6.33)$$

para $\mu \geq 0$ se obtuvo una expresión mucho más complicada pero si hacemos una aproximación cerca del punto crítico llegamos a una expresión idéntica a la anterior con la diferencia que en lugar de tener funciones polilogarítmicas, se tienen funciones $\tilde{\text{Li}}_n(\alpha)$,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,V} \approx k \frac{kT}{\hbar^3 \frac{N^2}{V}} \frac{1}{\tilde{\text{Li}}_2(\alpha)} [2 \tilde{\text{Li}}_2(\alpha) \tilde{\text{Li}}_2(\alpha) - 3 \tilde{\text{Li}}_1(\alpha) \tilde{\text{Li}}_3(\alpha)]. \quad (6.34)$$

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

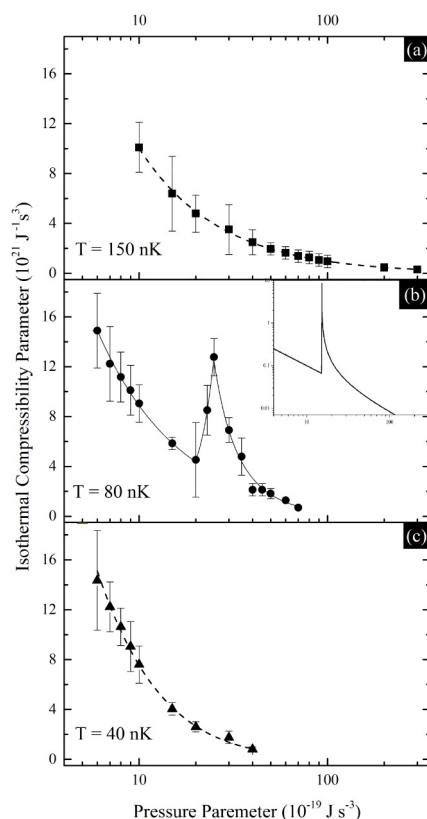


Figura 6.7: Datos experimentales de la compresibilidad isotérmica global (la imagen fue tomada de[27]).

En el siguiente capítulo analizaremos en la vecindad del punto crítico como se comportan estas dos expresiones con la finalidad de obtener el exponente crítico. Cabe destacar el fenómeno encontrado al pasar del sistema homogéneo al potencial armónico. En el primer caso teníamos un comportamiento singular en las segundas derivadas (κ_T) lo que nos da la firma de una transición de segundo orden, al introducir el potencial externo la singularidad paso de las segundas derivadas a las terceras derivadas. Es decir, pareciera que la presencia del potencial externo recorrió el orden de la transición, en particular es clave el comportamiento de la compresibilidad isotérmica \mathcal{K}_T porque al estar relacionada directamente con las correlaciones del sistema nos lleva a especular que la presencia del potencial externo evita que las correlaciones se hagan infinitas en la transición. Además es quizá este fenómeno el que explique por qué no se observa el fenómeno de opalescencia crítica en los experimentos con gases ultrafríos atrapados en potenciales inhomogéneos.

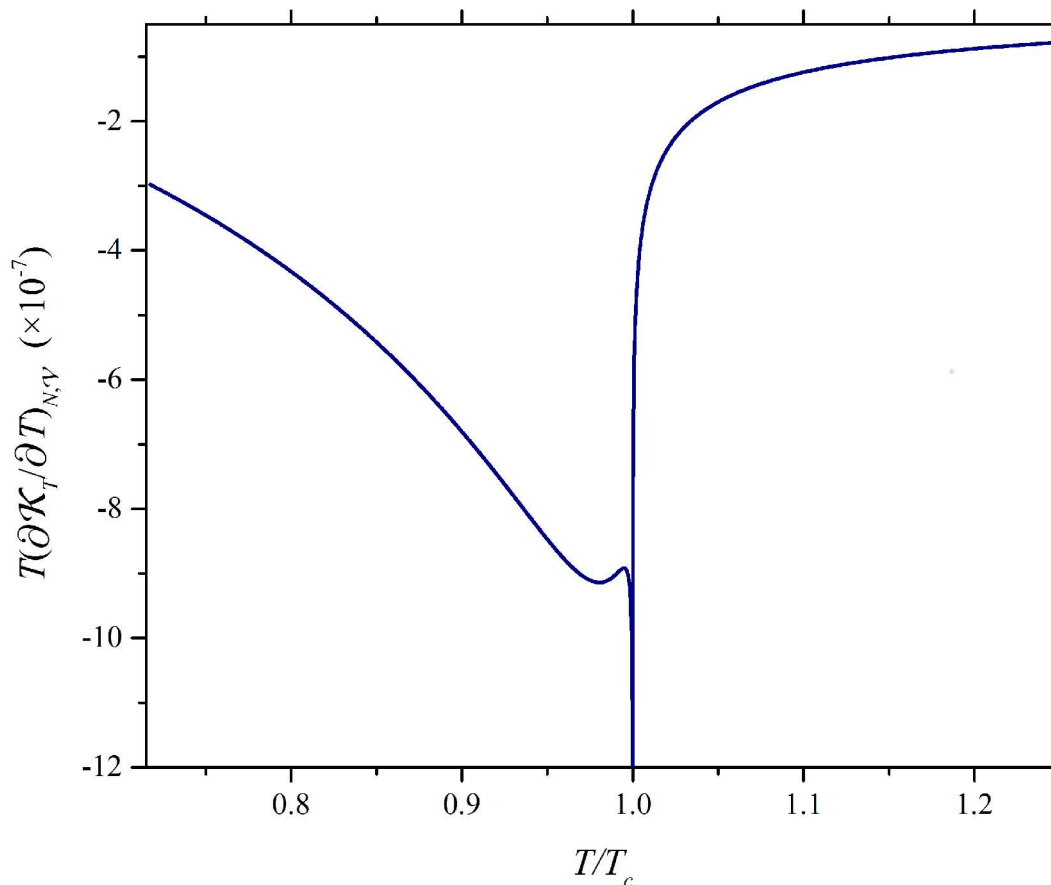


Figura 6.8: Derivada de la compresibilidad isotérmica, a número de partículas constante N y \mathcal{V} , $T \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T} \right)_{N, \mathcal{V}}$ como función de la temperatura T/T_c , para $N = 5 \times 10^5$ átomos en la trampa.

Calores Específicos y coeficiente de expansión térmica globales

Aquí hacemos un breve recuento de los resultados obtenidos para las otras cantidades termodinámicas relevantes en la transición de fase. Estas son la capacidad calorífica a volumen global constante C_V , la capacidad calorífica a presión global constante C_P y el coeficiente de expansión térmica global \mathcal{B}_T . Las fórmulas que definen a estos son los siguientes,

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N, \mathcal{V}} \quad (6.35)$$

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

$$C_{\mathcal{P}} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N, \mathcal{P}} \quad (6.36)$$

$$\mathcal{B}_T = \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_{N, \mathcal{P}} \quad (6.37)$$

Para obtener el calor específico global, lo hacemos a través de la ecuación fundamental $\mathcal{P}(\mu, \mathcal{V}, T)$. Partiendo de la definición, se llega a la expresión,

$$C_{\mathcal{V}} = T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} \right)_{\mu} - T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu}}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T} \quad (6.38)$$

Se calcularon las cuatro derivadas requeridas (Apéndice F) por ambos lados de la transición. En la figura 6.9 mostramos el comportamiento del calor específico como función de la temperatura. No hay divergencia pero al igual que en la capacidad calorífica si aparece un punto de inflexión en la temperatura crítica. Para el límite de temperaturas altas tiende a 3/2 como se espera para el límite clásico. En el trabajo [25] se reportan las mediciones de $C_{\mathcal{V}}$ en un gas de ^{87}Rb con gráficas muy similares a las mostradas en la Figura 6.9.

Para el coeficiente de expansión térmica global \mathcal{B} se muestra que la definición es equivalente a la siguiente relación, que es más adecuado para las variables que estamos usando,

$$\mathcal{B}_T = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_{\mu, \mathcal{P}} \quad (6.39)$$

entonces, para calcular \mathcal{B}_T es necesaria calcular la siguientes cuatro derivadas (Apéndice F),

$$\mathcal{B}_T = -\frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_{\mu} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \right)_{\mu, \mathcal{V}}}{\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mu} \right)_{T, \mathcal{V}}} \right] \quad (6.40)$$

Finalmente para obtener el calor específico a presión global constante se hizo uso de la siguiente identidad que es análoga a la relación termodinámica entre las susceptibilidades no globales [103],

$$C_{\mathcal{P}} - C_{\mathcal{V}} = \mathcal{V} T \frac{\mathcal{B}_T^2}{\mathcal{K}_T} \quad (6.41)$$

En la Figura 6.9 se muestra el comportamiento de estas susceptibilidades como función de la temperatura T , en la vecindad de la temperatura crítica T_c . Podemos ver que las tres son finitas en la temperatura crítica, sin embargo también muestran un cambio de curvatura en la transición, es decir, un comportamiento similar a lo que ocurría con la compresibilidad isotérmica global. Por tanto sus derivadas son las que

si divergen. En el caso del calor específico a presión global constante, en el límite de altas temperaturas tiende a $5/2$, es decir, tiende al valor del calor específico a presión constante del gas clásico de manera similar a como ocurre con el otro calor específico. Esto nos proporciona otra comprobación de que las variables globales son las variables termodinámicas adecuadas para el estudio de los sistemas confinados por potenciales no homogéneos.

En el siguiente capítulo usaremos dos de las susceptibilidades termodinámicas calculadas, \mathcal{K}_T y C_V , para caracterizar la transición. Para esto obtendremos los exponentes críticos asociados a estas así como los asociados al parámetro de orden y a la isoterma crítica. Al hacer esto mostraremos la forma en que las variables termodinámicas se comportan en la vecindad de la transición.

6. TERMODINÁMICA DEL GAS DE BOSE EN POTENCIAL ARMÓNICO

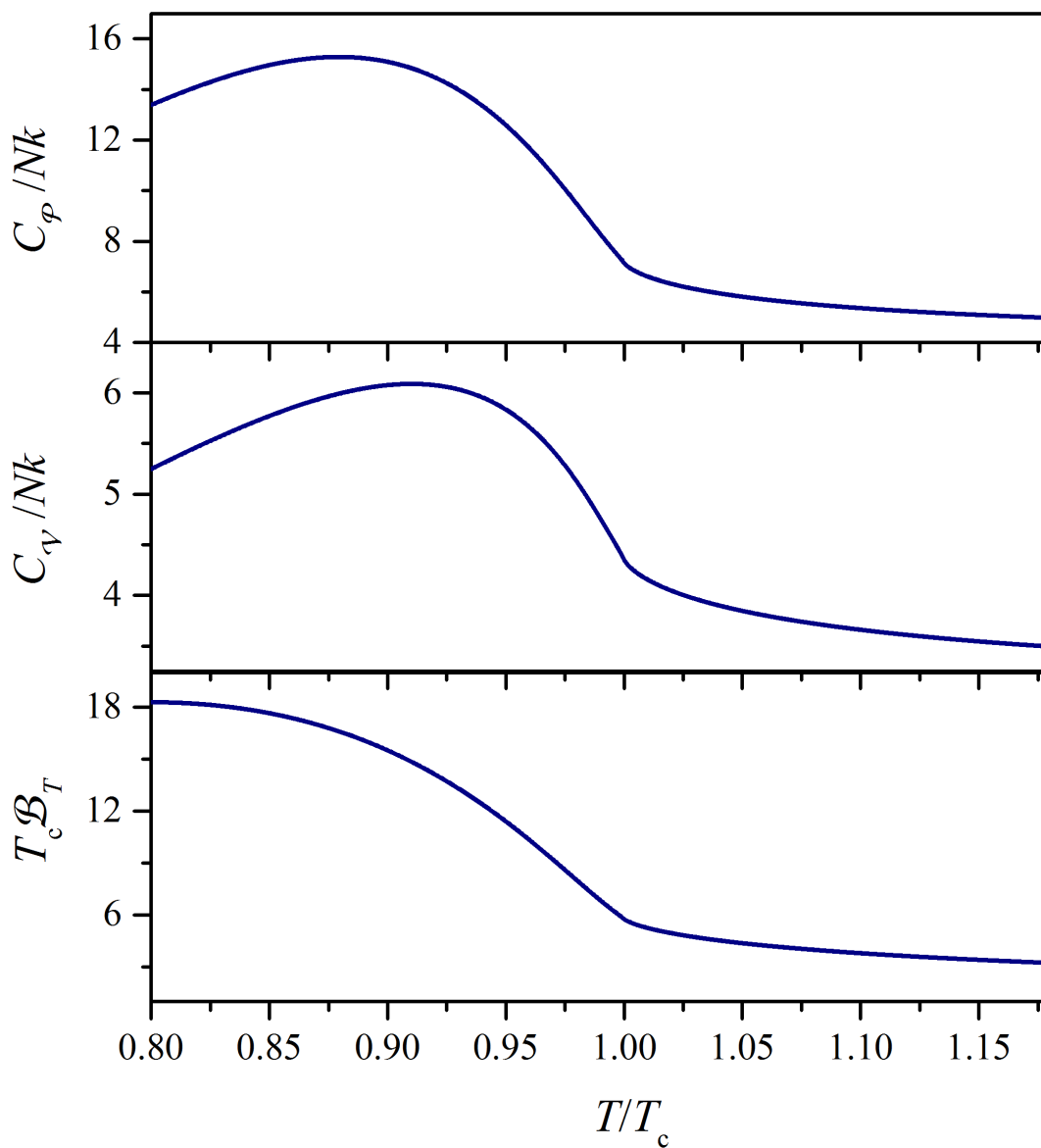


Figura 6.9: Capacidad calorífica a presión global constante C_p/Nk (arriba), Capacidad calorífica a volumen global constante (en medio) C_v/Nk , y coeficiente de expansión térmica global $T_c B_T$ (abajo), como función de T/T_c .

Exponentes Críticos, Gas Inhomogéneo

En el capítulo previo, encontramos las cantidades termodinámicas importantes para describir al gas de Bose en un potencial armónico y además isotrópico. Vimos que el orden de la transición pasó de estar en segundo orden hasta el tercer por la mera introducción del potencial externo, de acuerdo a la clasificación de Ehrenfest [104]. Ahora nos queda por describir cómo ocurre la transición, es decir, cuantificar cómo se comportan las susceptibilidades termodinámicas en una vecindad del punto crítico. Para esto calcularemos ciertos exponentes críticos asociados a las divergencias de la derivada de la compresibilidad isotérmica global \mathcal{K}_T y calor específico global \mathcal{C}_V ; además se calculará el exponente asociado a la relación entre la presión global \mathcal{P} y la densidad global η así como el asociado a la fracción de condensación. Cabe aclarar que, como vimos en la sección sobre exponentes críticos, los exponentes críticos están definidos sobre la compresibilidad isotérmica y el calor específico a volumen constante y no sobre sus derivadas. Sin embargo, como la singularidad está en las derivadas entonces recurrimos a la definición (2.60) en la que se define el exponente λ_s sobre la primera derivada divergente de la función. Por otro lado, lo importante para nuestro trabajo es que deducir esos exponentes nos permitirá entender de qué manera se comportan las susceptibilidades termodinámicas en la región cerca al punto crítico.

Como se ha hecho en capítulos previos, pasaremos los cálculos o expresiones más engorrosas al Apéndice F debido a que la forma de las variables termodinámicas las expresiones tornan las expresiones finales muy aparatosas y restan claridad a la lectura. Por lo tanto, en lugar de poner todas las ecuaciones de forma explícita, se pondrán de forma esquematizada el proceso de cómo se obtuvieron cada uno de los exponentes.

Presión Global \mathcal{P} como función de la densidad global η

Una vez más, tenemos dos casos en cada uno de los exponentes, por arriba y por debajo de la transición, separados por la temperatura crítica T_c o el cambio de signo

7. EXPONENTES CRÍTICOS, GAS INHOMOGÉNEO

en el potencial químico μ . primero se obtendrá el exponente por arriba de la transición que corresponde a un gas ideal de Bose en potencial armónico y posterior mente por abajo de la transición. Para ambos casos lo primero es llegar a una expresión entre el potencial químico μ y la diferencia de temperatura ΔT que es clave para calcular los cuatro exponentes buscados.

Para hacer las expansiones de las cantidades termodinámicos, usaremos constantemente el desarrollo en serie de la función polilogarítmica, cuando s es entero este desarrollo difiere del que mostramos previamente que correspondía al caso de s no entera. Para este caso la serie es,

$$\text{Li}_s(e^\mu) = \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} [H_{n-1} - \ln(-\mu)] + \sum_{k=0, k \neq n-1} \frac{\zeta(n-k)}{k!} \mu^k \quad (7.1)$$

con H_n el número armónico,

$$H_n = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h} \quad (7.2)$$

Arriba de la transición ($\mu < 0$)

Con el propósito de obtener una relación entre μ y ΔT en una vecindad del punto crítico hacemos un desarrollo de la densidad global hasta el orden más bajo usando el desarrollo en series de la función polilogarítmica (vease Apéndice A). Para esto recordemos la forma de la presión global, obtenida en el capítulo anterior (6.15),

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\hbar^3} (kT)^4 \text{Li}_4\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right),$$

de forma tal que la densidad global crítica $\eta_c = \eta(T = T_c, \mu = 0)$ queda como

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{\hbar^3} (kT)^4 \zeta(4). \quad (7.3)$$

Como buscamos una relación entre temperatura y potencial químico entonces tenemos que movernos sobre una isodensidad o isobara de tal forma que podamos despejar a una variable con respecto de otra, en particular escogemos una isobara y en particular la crítica, de esta forma $\eta(T, \mu) = \eta_c$. Esto nos permite escribir,

$$\frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}} = 1 = \frac{T_c^4}{T^3} \frac{\zeta(4)}{\text{Li}_3\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}, \quad (7.4)$$

despejando para las temperaturas,

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^4 = \frac{\text{Li}_4\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right)}{\zeta(4)}. \quad (7.5)$$

7.1 Presión Global \mathcal{P} como función de la densidad global η

Por otro lado, como nos interesa la diferencia de temperatura respecto al punto crítico hacemos $\Delta T = T - T_c$ y sustituimos la temperatura en términos de ésta diferencia $T = \Delta T + T_c$. Con esto hacemos una expansión a primer orden de la parte izquierda de (7.5),

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^4 = \left(\frac{T_c}{\Delta T + T_c}\right)^4 = \left(\frac{1}{\frac{\Delta T}{T_c} + 1}\right)^4 \approx 1 - 4\frac{\Delta T}{T_c}.$$

Ahora, usamos la expansión en series de la función polilogarítmica y también la cortamos hasta el primer orden,

$$\text{Li}_4(e^\theta) \approx \zeta(4) + \zeta(3)\theta. \quad (7.6)$$

Sustituimos estas dos expansiones en (7.5) y despejamos μ para finalmente obtener la relación que estábamos buscando,

$$1 - 4\frac{\Delta T}{T_c} = \frac{\zeta(4) + \zeta(3)\theta}{\zeta(4)} \quad (7.7)$$

$$\theta \approx -4\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}\frac{\Delta T}{T_c} \quad (7.8)$$

Esta ecuación nos será muy útil para calcular todos los exponentes pues permite poner a las cantidades termodinámicas en función de la temperatura, únicamente.

Regresamos al cálculo del exponente buscado, para esto tomamos las identidades de la presión global y la presión global críticas (6.15) y (7.3), las restamos para buscar ponerlas en términos de la densidad global. Cabe aclarar que ya no estamos sobre la isobara por lo que la restas de ellas no es cero, estamos ahora sobre una isoterma pues el exponente está definido para $T = T_c$, entonces tenemos,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c = \frac{1}{\hbar^3} (kT)^4 \text{Li}_4\left(e^{\frac{\mu}{kT}}\right) - \frac{1}{\hbar^3} (kT_c)^4 \zeta(4) \quad (7.9)$$

usamos, otra vez, la expansión de la función polilogarítmica de orden 4 y simplificamos para finalmente quedarnos con el orden más bajo de la serie,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{1}{\hbar^3} (kT)^4 \left[\zeta(4) + \frac{\zeta(2)}{2}\theta^2 + \zeta(3)\theta \right] - \frac{1}{\hbar^3} (kT_c)^4 \zeta(4) \quad (7.10)$$

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{1}{\hbar^3} (kT_c)^4 \zeta(3)\theta. \quad (7.11)$$

Hacemos lo mismo con la densidad global,

$$\eta - \eta_c \approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 [\zeta(3) + \zeta(2)\theta] - \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \zeta(3) \quad (7.12)$$

$$\eta - \eta_c \approx \left(\frac{kT_c}{\hbar}\right)^3 \zeta(2)\theta \quad (7.13)$$

7. EXPONENTES CRÍTICOS, GAS INHOMOGÉNEO

Finalmente de esta expresión y (7.11), despejando el potencial químico en una y sustituyendo en la otra podemos llegar a la expresión buscada,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} kT_c (\eta - \eta_c) \quad (7.14)$$

Es decir, la relación entre las presiones y densidades ancladas en el punto crítico es lineal. Lo que nos permite concluir entonces que el exponente crítico asociado es 1,

$$\delta = 1 \quad (7.15)$$

Es interesante comparar con el caso homogéneo, se había obtenido en ese caso que la densidad y la presión tenía una relación cuadrática, $p - p_c \sim (n - n_c)^2$, lo que llevo a encontrar un exponente igual a 2 en contraste con el valor de δ que acabamos de encontrar puesto que en éste caso la relación fue lineal. A pesar de que estamos por encima de la transición, es decir, aún en gas ideal sin interacción hay un cambio profundo en la fenomenología del sistema y de la transición, la sola presencia del potencial inhomogéneo confinante sin incluir las interacciones basta para modificar los exponentes.

Abajo de la transición, $\mu > 0$

Para este caso haremos un desarrollo análogo, obteniendo ahora la relación de temperatura-potencial químico a través de la densidad global. Para esto regresamos a la ecuación de la densidad global (6.11) y solo quedémonos con los términos que no tienden a cero cuando nos acercamos a la temperatura crítica, con esta aproximación obtenemos,

$$\eta \approx \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \tilde{\text{Li}}_3(\theta). \quad (7.16)$$

Y la densidad crítica es,

$$\eta_c = \left(\frac{kT_c}{\hbar} \right)^3 \zeta(3). \quad (7.17)$$

La idea es usar las expansiones asintóticas de Li_s para poder aproximar como se ha hecho en otros casos,

$$\tilde{\text{Li}}_3(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j\theta}}{j^3} \text{Erfc}(\sqrt{j\theta})$$

pero no conocemos las propiedades de esta función, hasta el momento de escribir esta tesis no se ha encontrado en alguna referencia matemática, sólo se ha visto en la referencia [105] donde se define de forma similar a como se hicimos en el capítulo anterior. Sin embargo, solo estamos interesados en cómo son las transiciones por el punto crítico, que se alcanza cuando el potencial químico es cero $\mu = 0$, por lo que una aproximación de las funciones error y exponencial a primer orden son bastante adecuadas. La función error se expresa en series alrededor de cero como,

$$\text{Erfc}(\sqrt{j\theta}) = 1 - \frac{2\sqrt{j\theta}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3} \frac{(j\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{(j\theta)^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}} + \dots \quad (7.18)$$

7.1 Presión Global \mathcal{P} como función de la densidad global η

Nos quedamos solo con el orden más bajo, al igual que lo hacemos con la función exponencial, así la densidad global se aproxima como

$$\eta \approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{2\sqrt{j\theta}}{\sqrt{\pi}}}{j^3} \quad (7.19)$$

reagrupando y usando la definición de las función polilogarítmica,

$$\begin{aligned} \eta &\approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3} - \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{5}{2}}} \right) \\ \eta &\approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \left[\zeta(3) - \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Dada esta aproximación, ahora podemos hacer un artificio algebraico similar al que hicimos en la sección anterior, nos movemos sobre una isodensidad, escogemos la crítica particularmente. Así dividimos entre (7.19) y obtenemos,

$$1 = \frac{\eta}{\eta_c} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left[1 - \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{kT}} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta(3)} \right]. \quad (7.21)$$

Ahora, hacemos la sustitución $\Delta T = T_c - T$ y hacemos la expansión de la fracción al cubo para obtener, después de reagrupar,

$$-3 \frac{\Delta T}{T_c} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta(3)} \sqrt{\theta} \quad (7.22)$$

de donde llegamos a la expresión buscada,

$$\theta = \frac{9\pi}{4} \left[\frac{\zeta(3)}{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)} \right]^2 \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)^2. \quad (7.23)$$

Para obtener el exponente escribimos las expresiones para la presión global y densidad global, de nuevo quedándonos con los términos que no tienden a cero al tender la temperatura al punto crítico

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}} \frac{(kT)^{\frac{5}{2}}}{\lambda^3} \tilde{\text{Li}}_4(\theta) - \frac{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}} \frac{(kT_c)^{\frac{5}{2}}}{\lambda_c^3} \zeta(4) \quad (7.24)$$

$$\eta - \eta_c \approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \tilde{\text{Li}}_3(\theta) - \left(\frac{kT_c}{\hbar}\right)^3 \zeta(3). \quad (7.25)$$

7. EXPONENTES CRÍTICOS, GAS INHOMOGÉNEO

Hacemos el mismo desarrollo usado anteriormente para las funciones Li_s y sumamos,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}} \frac{(kT)^{\frac{5}{2}}}{\lambda^3} \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} \zeta\left(\frac{7}{2}\right) \quad (7.26)$$

$$\eta - \eta_c \approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \frac{2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (7.27)$$

y de estas dos expresiones se deduce que,

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_c \approx \frac{\zeta(7/2)}{\zeta(5/2)} kT_c (\eta - \eta_c) \quad (7.28)$$

Que es una relación lineal con la única diferencia a la que se obtuvo por encima de la transición en el cociente de las constantes que acompañan. Aunque el cociente no es tan diferente puesto que $\frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \approx 0.73$ y $\frac{\zeta(7/2)}{\zeta(5/2)} \approx 0.84$. Se concluye entonces que el exponente por abajo de la transición es

$$\delta = 1$$

y que coincide con el exponente por arriba de la transición.

Derivada de la compresibilidad isotérmica global $\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}$

Habíamos visto, en el capítulo previo que la compresibilidad isotérmica global era continua pero que mostraba un pico alrededor de la transición cuando se graficaba sobre isotermas, y al graficar las isodensidades se observó un punto de inflexión que después de confirmarlo al obtener la derivada, esta es una función singular que diverge en la temperatura crítica T_c . Para caracterizar esa divergencia, obtendremos la forma en la que la derivada diverge y eso nos dará el exponente asociado. De nuevo, se requiere calcularlo por ambos lados de la transición para hacer la comparación y verificar si la divergencia por ambos lados es igual.

Arriba de la transición

La expresión exacta que se obtuvo para la derivada de la compresibilidad por encima de la temperatura crítica fue (6.33)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{\omega^3 (kT)^2}{T \hbar^3 \eta^2} \frac{1}{\text{Li}_2(\theta)} [2\text{Li}_2(\theta)\text{Li}_2(\theta) - 3\text{Li}_1(\theta)\text{Li}_3(\theta)]$$

Las funciones polilogarítmicas (como se puede ver a detalle en el Apéndice A) $\text{Li}_s(e^\theta)$ son divergentes en $\theta = 0$ cuando el orden de la función s es menor o igual a 1, en caso

7.2 Derivada de la compresibilidad isotérmica global $\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}$

contrario es finita y su valor es la función zeta de riemann evaluada en el parámetro $\zeta(s)$. Debido a esto, el término importante en la ecuación es la parte negativa, entonces si mantenemos ese y a la vez aproximamos los polilogaritmos que son finitos obtenemos,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} = -\frac{3}{\nu T} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \text{Li}_1(\theta), \quad (7.29)$$

usando el desarrollo en series de Li_1 obtenemos,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} = \frac{3}{\nu T} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \text{Ln}(-\theta). \quad (7.30)$$

Regresamos a la ecuación que obtuvimos para θ como función de ΔT en (7.8), sustituimos para llegar a,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} = \frac{3}{\nu T} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \text{Ln}\left(4 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} \frac{\Delta T}{T_c}\right) \quad (7.31)$$

y finalmente se obtiene la expresión asintótica buscada,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} = \frac{3}{\nu T_c} \frac{(kT_c)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \text{Ln}\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right). \quad (7.32)$$

lo cual muestra que la divergencia en el punto crítico es logarítmica. Ésto explica la razón por la cual el punto de inflexión es poco notorio en la compresibilidad isotérmica, la pendiente tiende a una recta vertical pero lo hace de forma muy lenta pues una divergencia logarítmica es la de exponente más bajo, se le asocia un exponente cero [52, 56, 106]. Es decir el exponente crítico es $\gamma_s = -1$, de acuerdo a la definición mostrada en la sección de exponentes críticos para exponentes en los que la función no es divergente pero la derivada si lo es.

Abajo de la transición

La derivada de la compresibilidad isotérmica es mucho más complicada por debajo de la transición, como se había mostrado en la ecuación (6.32), se requerían cuatro derivadas,

$$\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial T}\right)_\mu - \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial \mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T}.$$

no pondremos aquí cada una de ellas, se pueden consultar en el Apéndice F. Al quedarnos con los términos que no tienden cero cuando el sistema se acerca al punto crítico, la expresión que se obtiene es la forma que ya se había mostrado en (6.34)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} \approx \frac{1}{\nu T} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{1}{\tilde{\text{Li}}_2(\theta)} \left[2 \tilde{\text{Li}}_2(\theta) \tilde{\text{Li}}_2(\theta) - 3 \tilde{\text{Li}}_1(\theta) \tilde{\text{Li}}_3(\theta)\right].$$

7. EXPONENTES CRÍTICOS, GAS INHOMOGÉNEO

De forma similar a como las funciones polilogarítmicas $\text{Li}_s(e^\theta)$ divergen en $\theta = 0$ cuando $s > 1$ también las funciones $\tilde{\text{Li}}_s$ cumplen esto. Entonces nos quedamos con el término que contiene a $\tilde{\text{Li}}_1$, que es el que diverge y que de hecho tiende a la serie armónica en el punto crítico.

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} \approx -\frac{1}{\nu T_c} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{3\zeta(3)}{\zeta(2)} \tilde{\text{Li}}_1(\theta) \quad (7.33)$$

para obtener una expresión cerca del punto crítico, desarrollamos a orden más bajo la función $\tilde{\text{Li}}_1$, usamos de nuevo la expansión de la función error complemento,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} \approx -\frac{1}{\nu T_c} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{3\zeta(3)}{\zeta(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{2\sqrt{j\theta}}{\sqrt{\pi}}}{j} \quad (7.34)$$

ahora hacemos una aproximación un tanto burda pero que entre más cerca estemos del punto crítico mejor es, aproximamos con una función exponencial,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} \approx \frac{1}{\nu T_c} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{3\zeta(3)}{\zeta(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\frac{j\theta}{\pi}}}}{j} \quad (7.35)$$

y como θ es positivo entonces hemos obtenido la función polilogarítmica de orden 1 que ya habíamos aproximado por encima de la transición, como un logaritmo. Usamos ese desarrollo y la ecuación (7.23),

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} \approx -\frac{1}{\nu T_c} \frac{(kT)^2}{\hbar^3 \eta^2} \frac{3\zeta(3)}{\zeta(2)} \text{Ln} \left(\frac{3\zeta(3)}{\zeta(\frac{5}{2})} \frac{\Delta T}{T_c} \right) \quad (7.36)$$

Se obtiene el mismo comportamiento que por encima de la transición, incluso con el mismo coeficiente. Se concluye entonces que el exponente γ_s es -1 por ambos lados de la transición.

El hecho de que la transición sea logarítmica tiene implicaciones experimentales fuertes, para observar una transición así se requieren medidas de precisión alrededor del punto crítico ya que para obtener la compresibilidad a nivel experimental se hace como la derivada de la presión y por lo tanto encontrar este exponente requiere una segunda derivada.

Derivada del Calor Específico $\frac{\partial \mathcal{C}_\nu}{\partial T}$

El calor específico global a volumen constante se había obtenido a través de la presión,

$$c_\nu = T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} \right)_\mu - T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_\mu}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right)_T}$$

y calcular la derivada requiere también otras cuatro funciones,

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{p,V} = \left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{p,V} + \left(\frac{\partial c_V}{\partial \mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right)_T}. \quad (7.37)$$

Y esto a su vez conduce a los artificios algebraicos,

$$\frac{\partial c_V}{\partial T} = \frac{c_V}{T} + T \left[\left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T^3}\right) - \left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T \partial \mu \partial T}\right) \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right)} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T}\right) \frac{\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right) - \left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial \mu}\right)}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right)^2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial \mu}\right)_T = T \left[\left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T^2}\right) - \frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial \mu \partial T} \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right)_T} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T}\right) \frac{\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mu \partial T}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right) - \left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mu^2}\right)}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \mu}\right)^2} \right]$$

Llevando a cabo todos los cálculos (véase Apéndice F para más detalle) y desarrollando cada uno en series alrededor del punto crítico $\theta = 0$ se obtiene que el término divergente tanto por arriba como por abajo son muy similares al de la compresibilidad isotérmica

$$\frac{\partial c_V}{\partial T} \approx \text{Cte} - \frac{1}{\hbar^3} \frac{[\zeta(3)]^3}{[\zeta(2)]^3} \frac{27}{T_c^2} (kT_c)^4 \text{Ln}(\theta), \quad \theta \leq 0 \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial c_V}{\partial T} \approx \text{Cte} - \frac{1}{\hbar^3} \frac{[\zeta(3)]^3}{[\zeta(2)]^3} \frac{27}{T_c^2} (kT_c)^4 \text{Ln}\left(2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\right), \quad \theta \geq 0 \quad (7.39)$$

sustituimos las expresiones para α en cada caso y obtenemos, finalmente, el comportamiento para la derivada del calor específico global cerca de la transición,

$$\frac{\partial c_V}{\partial T} \approx -\frac{27k^4}{\hbar^3} \frac{[\zeta(3)]^3}{[\zeta(2)]^3} T_c^2 \text{Ln}\left[\frac{T - T_c}{T_c}\right] \quad \theta \leq 0$$

$$\frac{\partial c_V}{\partial T} \approx -\frac{27k^4}{\hbar^3} \frac{[\zeta(3)]^3}{[\zeta(2)]^3} T_c^2 \text{Ln}\left[\frac{T_c - T}{T_c}\right] \quad \theta \geq 0 \quad (7.40)$$

De donde llegamos a la conclusión que el exponente crítico asociado $\alpha_s = -1$ por ambos lados de la transición. Al igual que en el caso de la compresibilidad isotérmica la divergencia es logarítmica.

Fracción de Condensación

Antes de mostrar éste exponente, es necesario aclarar que la elección de la fracción de condensación es una extrapolación del caso homogéneo, donde se mostró que es el parámetro de orden adecuado para el sistema. En este caso lo proponemos también

7. EXPONENTES CRÍTICOS, GAS INHOMOGÉNEO

como una extensión natural del caso homogéneo al caso inhomogéneo. En la literatura se habla de la función de onda del condensado como el parámetro de orden, sin embargo el cuadrado de esta al final está relacionada con la densidad del condensado. Por otro lado, termodinámicamente no hay razones para pensar que la función de onda debería ser el parámetro adecuado.

Como se vio en el primer capítulo, la fracción de condensación para un gas de Bose ideal atrapado en una trampa armónica ¹, la fracción de condensación $\frac{N_0}{N}$ está dada como,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

y entonces en términos de la diferencia de temperatura y haciendo la expansión se obtiene,

$$\frac{N_0}{N} \approx 3\frac{\Delta T}{T_c}$$

Es decir, el exponente crítico asociado $\beta = 1$. Que es el mismo que se obtuvo en el caso homogéneo.

Resumen exponentes

Se calcularon cuatro de los seis exponentes críticos que se asocian a una transición, los dos restantes son los relacionados con la función de correlación (η) y a su vez con la longitud de correlación (ν). Queda abierto la obtención de esos dos exponentes restantes para un trabajo a futuro y para culminar el estudio del gas de bosones en potencial inhomogéneo. De los tres exponentes que se pueden calcular por ambos lados de la transición se encontró que por ambos lados son iguales. En la Tabla 7.1 se resumen los exponentes calculados.

Exponente	Valor	Relación
γ_s	-1	$\mathcal{K}_T \sim \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^{-\gamma_s}$
α_s	-1	$c_V \sim \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^{-\alpha_s}$
δ	1	$(\mathcal{P} - \mathcal{P}_c) \sim (\eta - \eta_c)^\delta$
β	1	$N_0/N \sim \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^\beta$

Tabla 7.1: Exponentes Críticos, gas de Bose en potencial armónico.

¹Recordemos que el modelo se ha construido de tal forma que por encima de la temperatura crítica es el gas ideal de Bose

Es interesante hacer notar que los cuatro exponentes satisfacen las ecuaciones de escalamiento donde aparecen únicamente ellos, si nos quedamos con la definición en que la derivada es la que lleva el exponente (cero) pero no las satisfacen si usamos la definición de los exponentes del tipo λ_s

$$\begin{aligned} 2 - \alpha &= 2\beta + \gamma \\ 2\beta + \gamma &= \beta(\delta + 1) \\ \frac{\gamma}{\nu} &= d \frac{\delta - 1}{\delta + 1}. \end{aligned}$$

Queda abierta la pregunta de si al calcular los otros dos exponentes se siguen cumpliendo las ecuaciones de escalamiento.

Cabe preguntarse ahora, cómo se comparan estos exponentes con los del caso homogéneo. De los cuatro solo β que está asociado a la fracción de condensación se mantiene igual, a pesar de que el potencial confinante es inhomogéneo la razón de las partículas en la nueva fase sigue siendo la misma. En cuanto a los exponentes de las susceptibilidades divergentes éstos difieren en la unidad de sus contrapartes homogéneos. Lo cual significa que la naturaleza de la divergencia tiene una forma bastante diferente, recordemos que obtuvimos divergencias logarítmicas. ¿De dónde viene una divergencia logarítmica? Se puede mostrar directamente, ya sea por integración de las derivadas o volviendo a las propiedades de la función polilogarítmicas de orden 2, que este comportamiento se hereda de que \mathcal{K}_T y c_V se comportan como $\sim \frac{\Delta T}{T_c} - \frac{\Delta T}{T_c} \text{Ln} \left(\frac{\Delta T}{T_c} \right)$ al acercarse al punto crítico. Esperamos que estas deducciones puedan compararse con datos experimentales de mediciones cercanas a la transición .

Conclusiones

En este trabajo se propuso un modelo heurístico de campo medio que permitió hacer un estudio completo de la termodinámica del gas de Bose en potencial homogéneo y en potencial armónico, aunque el modelo puede usarse para cualquier potencial confinante. El modelo en sí, representa una herramienta teórica para el estudio de la termodinámica de gases de Bose, en particular para el estudio experimental de los gases ultrafríos. Se mostró que satisface los requerimientos termodinámicos y que además ajusta de forma adecuada los datos experimentales en un gas de ^7Li y además tiene la bondad de no requerir el ajuste de ningún parámetro extra.

Al estudiar el gas de Bose en potencial homogéneo encontramos que la transición ocurre a segundo orden con la compresibilidad isotérmica y el calor específico a presión constante mostrando una divergencia en el punto crítico. Se encontró la ecuación fundamental del sistema y a partir de ella encontramos las relaciones termodinámicas. Se calcularon los exponentes críticos de la transición y se mostró que son iguales por encima y por debajo de la transición.

Con el análisis del gas de Bose en trampa armónica proporcionamos una línea a seguir para el estudio experimental de este sistema partiendo de los perfiles de densidad que se obtienen por diversos métodos ópticos en los laboratorios de materia ultrafría. Mostramos que la transición de este sistema ocurre hasta tercer orden en las derivadas de la energía libre ya que, a diferencia del sistema homogéneo, la compresibilidad isotérmica y las demás susceptibilidades no divergen pero sus derivadas sí. Razón que explica el hecho de que experimentalmente no se haya observado el fenómeno de opalescencia crítica en estos sistemas. Encontramos cuatro de los exponentes críticos de la transición, y corroboramos que son iguales por arriba y por debajo de la transición. Para obtener los exponentes asociados a la compresibilidad isotérmica y el calor específico encontramos que, dentro de nuestro modelo, la divergencia ocurre de forma logarítmica. En el modelo XY el exponente α es muy cercano a cero lo que le da una gran similitud con una divergencia del tipo logarítmica.

8. CONCLUSIONES

En el caso del gas de Bose ideal homogéneo, merece la pena mencionar por separado, que encontramos de forma exacta los exponentes críticos y que resultan ser novedosos respecto a lo que se conoce en la literatura en donde se le han enmarcado dentro de la universalidad del modelo esférico. Esto nos permite concluir que, en realidad, posee su propia clase de universalidad. Esto proporciona una contribución a la teoría del fenómeno de la condensación de Bose-Einstein, y además lo es en el sistema en la que fue descrita por primera vez. Aunado a la importancia de lo anterior, el hecho de encontrar un sistema en tres dimensiones que se puede resolver de forma exacta y que posee su propia clase de universalidad es una contribución en si mismo.

Los resultados obtenidos en el gas inhomogéneo han sido publicados en dos artículos [30, 31] y los resultados con respecto a la nueva clase de universalidad encontrada en el gas homogéneo ideal de Bose se encuentran en un artículo que acaba de enviarse para refereo pero puede consultarse en el sistema *Arxiv* [107]. Además hay un par de artículos más en proceso de escritura con los resultados de los exponentes críticos en el gas inhomogéneo y con la termodinámica del gas homogéneo.

Perspectivas

Durante este trabajo se mostró que hay un área a explotar en el tema de los gases ultrafríos en potenciales inhomogéneos. Queda abierto el problema de medir con precisión las variables globales para poder encontrar los exponentes críticos y así caracterizar de forma adecuada la transición, por lo que hay bastante trabajo teórico-experimental para llevar a cabo esta tarea. En el mismo sentido nuestro trabajo pone énfasis en cómo se ajustan los perfiles de densidad que se obtienen en los experimentos y el cómo se analizan, ajustar los datos a una nube térmica clásica más una nube condensada de Thomas Fermi es imponer de antemano al sistema que son cruciales para determinar los exponentes críticos ya que como mostramos estos son muy susceptibles a la interacción con el potencial externo y a la manera en cómo se ajusten los datos en la vecindad de la transición. La expresión que relaciona la presión y volumen global con el perfil de densidad (2.50) debe ser la que se use directamente para obtener las variables globales y así evitar introducir suposiciones que podrían alterar la forma de la transición.

Por otro lado, queda abierto la aplicación de nuestro modelo para el análisis de la termodinámica en otros potenciales confinantes que se usan en los experimentos, como el potencial cuadrupolar. Esto permitiría comparar la forma en que ocurre la transición y además los exponentes críticos entre un potencial y otro. Vimos que cuando pasamos del potencial homogéneo al inhomogéneo la transición se modificó drásticamente, sin embargo no sabemos si el cambio venga de la inhomogeneidad en si o de la forma particular del potencial inhomogéneo.

Otro problema a atacar es buscar un modelo que considere las interacciones por encima de la transición para mejorar la descripción del sistema en la región crítica, esto

también nos permitiría estudiar la universalidad del gas no ideal de Bose en potencial homogéneo y comparar con el caso ideal. [108]

Funciones Especiales

Función polilogarítmica

La función polilogarítmica se define como [109],

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^s} \quad (\text{A.1})$$

con $|z| < 1$ para garantizar convergencia. Y se puede escribir en términos de la distribución de Bose-Einstein, de ahí que las funciones de Bose sean un caso especial del polilogaritmo,

$$\text{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{\frac{e^t}{z} - 1} dt. \quad (\text{A.2})$$

Estas funciones presentan una recurrencia respecto a la derivación que es bastante útil,

$$z \frac{\partial \text{Li}_s(z)}{\partial z} = \text{Li}_{s-1}(z) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \text{Li}_s(e^\mu)}{\partial \mu} = \text{Li}_{s-1}(e^\mu). \quad (\text{A.4})$$

Es de especial interés en este trabajo las expansiones asintóticas de $\text{Li}_s(e^\mu)$ alrededor de $\mu = 0$, si s no es entero se muestra [110] que la función se puede expandir como ($|\mu| < 2\pi$)

$$\text{Li}_s(e^\alpha) = \Gamma(1-s) |\alpha|^{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(s-k)}{k!} |\alpha|^k. \quad (\text{A.5})$$

Y en el caso de s entero [111], la expansión en series es

$$\text{Li}_s(e^\mu) = \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} [H_{n-1} - \ln(-\mu)] + \sum_{k=0, k \neq n-1}^{\infty} \frac{\zeta(n-k)}{k!} \mu^k \quad (\text{A.6})$$

A. FUNCIONES ESPECIALES

con H_n el número armónico,

$$H_n = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h} \quad (\text{A.7})$$

Las funciones polilogaritmo divergen en e^0 cuando el orden s es menor o igual a uno. En caso contrario, $s > 1$, convergen a la función zeta de Riemann [38] evaluada en s , es decir,

$$\text{Li}_s(1) = \zeta(s) \quad s > 1. \quad (\text{A.8})$$

Función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann se define [112]

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\text{A.9})$$

converge para s con parte real mayor que uno.

Función error complemento

La función error complemento se define como $1 - \text{erf}(x)$, es decir,

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} \quad (\text{A.10})$$

La derivada de esta función es,

$$\frac{d}{dx} \text{erfc}(x) = -\frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{A.11})$$

Alrededor de cero su expansión en series de Taylor es,

$$\text{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3 - \frac{2}{5\sqrt{\pi}}x^5 + \frac{2}{21\sqrt{\pi}}x^7 - \dots \quad (\text{A.12})$$

Integrales elípticas de primer y segundo tipo

La integral elíptica completa de primer tipo se define como,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (\text{A.13})$$

Mientras que la de segundo tipo es,

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt \quad (\text{A.14})$$

La serie analítica de cada una de ellas es,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 k^{2n} \quad (\text{A.15})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} \quad (\text{A.16})$$

Y sus derivadas están dadas en términos de ellas mismas,

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad (\text{A.18})$$

Unidades Naturales

Para adimensionalizar el modelo computacional se escoge $a_s = \hbar = k_B = m = 1$. Usando los datos de ^{87}Rb , los parámetros tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \hbar &= \frac{h}{2\pi} = \frac{6.62607015}{2\pi} \times 10^{-34} \text{Js} \\
 k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1} \\
 m &= 86.9091835u = 1.44 \times 10^{-25} \text{kg} \\
 a_s &= 100a_0 = 5.2917720859 \times 10^{-09} \text{m}
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Combinando éstas constantes de la siguiente manera se encuentra la unidad de temperatura para éste sistema de unidades:

$$\frac{[\hbar^2]}{[k][m][a^2]} = \frac{[Energia]^2 [Tiempo]^2}{\frac{[Energia]}{[Temperatura]} [Masa] [Longitud]^2} = \frac{[Masa] [longitud]^2 [Temperatura] [Tiempo]^2}{[Tiempo]^2 [Masa] [Longitud]^2}
 \tag{B.2}$$

la unidad de temperatura queda:

$$[Temperatura] = \frac{[\hbar^2]}{[k][m][a^2]} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{K}
 \tag{B.3}$$

Para las frecuencias se hace algo similar, se busca la combinación de variables en el sistema de unidades escogido para obtener Hz

$$\frac{[\hbar]}{[m][a^2]} = \frac{[Masa] [Longitud]^2 [Tiempo]}{[Masa] [Longitud]^2 [Tiempo]^2} = 2.6 \times 10^7 \text{Hz}
 \tag{B.4}$$

Unidades de Volumen:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\omega^3} = 0.057 \times 10^{-21} \text{s}^3
 \tag{B.5}$$

Unidades de energía:

B. UNIDADES NATURALES

$$\frac{[\hbar^2]}{[m] [a^2]} = \frac{[Masa]^2 [Longitud]^4 [Tiempo]^2}{[Masa] [Longitud]^2 [Tiempo]^4} = 2.8 \times 10^{-27} \text{ Joules} \quad (\text{B.6})$$

Presión generalizada:

$$[\mathcal{P}] = \frac{[Energia]}{[\mathcal{V}]} = 4.9 \times 10^{-5} \text{ Joules} \times s^3 \quad (\text{B.7})$$

Colisiones de dos partículas a bajas energías

La discusión que se presenta a continuación puede ser encontrada y consultada con más detalle en [113]. Estudiamos brevemente la dispersión elástica de dos partículas que solo interactúan a través de un potencial central, consideramos que la energía cinética $\hbar^2 k^2/2m$ es baja y por lo tanto estamos en el límite donde k es pequeña. Las partículas tienen masas m_1 y m_2 , y una masa reducida $m^* = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Nos paramos en el sistema de coordenadas del centro de masa y nos quedamos con la dispersión en la coordenada relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, la ecuación de Schrödinger queda entonces como,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{C.1})$$

Se propone la solución en términos de una onda plana entrante más una onda, en coordenadas esféricas, dispersada $\psi_{sc}(\vec{r})$,

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \psi_{sc}(\vec{r}). \quad (\text{C.2})$$

Escogemos el vector incidente \vec{k} a lo largo del eje z , es decir, $\vec{k} = k\hat{z}$. Esto implica que la dispersión dependerá únicamente de r y θ pues tendrá simetría en ϕ . Ahora hacemos la suposición de que el potencial es de corto alcance y nos fijamos en las soluciones a distancias muy alejadas de la colisión, entonces podemos escribir la onda dispersada como una onda esférica con un coeficiente dependiente de θ ,

$$\psi(r, \theta) = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{C.3})$$

el coeficiente $f(\theta)$ es llamada amplitud de dispersión y lleva toda la información de la dispersión. A partir de él se obtiene la sección eficaz que nos da una medida de la probabilidad total de que una partícula sea dispersada,

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta. \quad (\text{C.4})$$

C. COLISIONES DE DOS PARTÍCULAS A BAJAS ENERGÍAS

En coordenadas esféricas se propone escribir la función solución en términos de la base de los polinomios de Legendre como,

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) R_{lk}(r). \quad (\text{C.5})$$

Sustituyendo la aproximación (C.3) y desarrollando se llega a,

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta) \quad (\text{C.6})$$

Ahora hacemos lo que se conoce como dispersión en ondas, nos quedamos con el término más bajo en el desarrollo $l=0$ que corresponde al límite $k \rightarrow 0$. En el caso de los gases ultrafríos esto es bastante real pues las temperaturas son muy cercanas a $T=0$, entonces la energía cinética de las partículas es muy pequeña. La aproximación, entonces, lleva a obtener que $f(\theta)$ es,

$$f(\theta) \approx \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) \quad (\text{C.7})$$

con δ_0 el corrimiento de fase de onda s . A partir de este se define la longitud de dispersión a_s con la ecuación,

$$\tan \delta_0 = -ka_s. \quad (\text{C.8})$$

Podemos expresar la ecuación de onda dispersada como,

$$\psi_{sc}(r) \approx \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) \frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{\sin \delta_0}{kr} e^{i(kr+\delta_0)}, \quad (\text{C.9})$$

hacemos la aproximación $|ka| \ll 1$ y obtenemos,

$$\psi_{sc}(r) \approx -\frac{a_s}{r} e^{ik(r-a_s)} \quad (\text{C.10})$$

Por otro lado, se puede mostrar que la amplitud de dispersión y la sección eficaz a temperaturas muy bajas en el límite asintótico están dadas por,

$$f(\theta) = -a_s \quad (\text{C.11})$$

y

$$\sigma = 4\pi a_s^2. \quad (\text{C.12})$$

La expresión para σ indica que los átomos se comportan como esferas duras con radio $|a_s|$. El valor específico de a_s depende del potencial con el que las partículas interactúan, sin embargo, al final el cómo ocurre la colisión a detalle quedará oculto y toda la información estará en a_s . Entonces, en el límite de bajas energías, suponemos que la colisión es mediada por un potencial efectivo $V_{eff}(\bar{r})$ que satisface la identidad,

$$\int V_{eff}(\bar{r}) d^3r = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \equiv g \quad (\text{C.13})$$

por lo tanto, la interacción efectiva entre dos partículas en las posiciones \bar{r} y \bar{r}' puede ser considerada como una interacción de contacto dada por,

$$V_{eff}(\bar{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (\text{C.14})$$

Derivadas gas homogéneo

En este apéndice se anexan las derivadas que se calcularon para obtener las susceptibilidades termodinámicas. Se define $x = \mu/bg$ y $\alpha = \mu/kT$.

$-\mu > 0$

$$\frac{\partial}{\partial T} s(\mu, T) = \frac{15}{4} \frac{k}{T\lambda_T^3} \zeta(5/2) + \frac{3}{4} \frac{n_c(T)\mu}{T^2} + \frac{2\mu^2}{gT^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{6x + x^2}{\sqrt{2x + x^2}} - 3 \ln \left[1 + x + \sqrt{2x + x^2} \right] \right\}. \quad (D.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} s(\mu, T) = \frac{3}{2} \frac{n_c(T)}{T} + \frac{2}{gT} \frac{\mu}{\sqrt{2x + x^2}} \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} n(\mu, T) = \frac{2b}{T} \frac{\mu}{\sqrt{(\mu + bg)^2 - (bg)^2}} + \frac{3}{2} \frac{n_c}{T} \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} n(\mu, T) = \frac{1}{g} \frac{(\mu + bg)}{\sqrt{(\mu + bg)^2 - (bg)^2}} \quad (D.4)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right)_T = n_c(T) + \frac{\mu}{g} \left\{ \frac{x^2 + 3x + 2 + (2 + x) \sqrt{(2x + x^2)}}{\left[1 + x + \sqrt{(2x + x^2)} \right] \sqrt{(2x + x^2)}} \right\} \quad (D.5)$$

$$\frac{\partial p(\mu, T)}{\partial T} = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda_T^3} g_{5/2}(0) + \frac{3}{2} \frac{n_c(T)\mu}{T} + \frac{2b^2g}{T} \left\{ \sqrt{2x + x^2} - \ln \left[1 + x + \sqrt{2x + x^2} \right] \right\} \quad (D.6)$$

$-\mu < 0$

$$\frac{\partial}{\partial T} s(\mu, T) = \frac{15}{4} \frac{k}{T\lambda_T^3} Li_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{3\mu}{T^2} \frac{1}{\lambda_T^3} Li_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) + \left(\frac{\mu^2}{kT^3} \right) \frac{1}{\lambda_T^3} Li_{1/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (D.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} s(\mu, T) = \frac{3}{2} \frac{1}{T\lambda_T^3} Li_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu}{kT^2} \frac{1}{\lambda_T^3} Li_{1/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (D.8)$$

D. DERIVADAS GAS HOMOGÉNEO

$$\frac{\partial}{\partial T}n(\mu, T) = \frac{3}{2} \frac{1}{T\lambda^3} Li_{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu}{kT^2} \frac{1}{\lambda^3} Li_{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}n(\mu, T) = \frac{1}{kT} \frac{1}{\lambda^3} Li_{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial p(\mu, T)}{\partial \mu} = \frac{1}{\lambda_T^3} Li_{3/2} \left(\frac{\mu}{kT} \right) \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial p(\mu, T)}{\partial T} = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda_T^3} Li_{5/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu}{T} \frac{1}{\lambda_T^3} Li_{3/2} \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{D.12})$$

Función de Correlación

En los artículos de Bosse et al. [114, 115] llegan a unas expresiones iguales a las que a continuación se obtienen pero usando el método de funciones de Green. La función de correlación está definida como,

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \langle \hat{\rho}(\bar{r}) \hat{\rho}(\bar{r}') \rangle - \langle \hat{\rho}(\bar{r}) \rangle \langle \hat{\rho}(\bar{r}') \rangle. \quad (\text{E.1})$$

En un gas ideal de bosones con potencial homogéneo, los eigenestados son los de la partícula en una caja tomando condiciones periódicas en la frontera,

$$\phi_k(\bar{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \quad (\text{E.2})$$

Entonces escribimos la función de onda en términos de los eigenestados como,

$$\hat{\psi}(\bar{r}) = \sum_k \phi_k(\bar{r}) \hat{a}_k. \quad (\text{E.3})$$

En el caso del término negativo en la función de correlación (E.1) se obtiene directamente que es la densidad del sistema,

$$\langle \hat{\rho}(\bar{r}) \rangle = \frac{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} + \mu\hat{N})} \sum_k |\phi(\bar{r})|^2 a_k^\dagger a_k}{\Xi} = \frac{N}{V}. \quad (\text{E.4})$$

Ahora, nos enfocamos en calcular el otro término de $G(\bar{r}, \bar{r}')$,

$$\langle \hat{\rho}(\bar{r}) \hat{\rho}(\bar{r}') \rangle = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4} \phi_{k_1}^*(\bar{r}) \phi_{k_2}(\bar{r}) \phi_{k_3}^*(\bar{r}') \phi_{k_4}(\bar{r}') \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle \quad (\text{E.5})$$

sustituyendo las funciones propias,

$$\langle \hat{\rho}(\bar{r}) \hat{\rho}(\bar{r}') \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\cdot\bar{r}} e^{-i(\bar{k}_3 - \bar{k}_4)\cdot\bar{r}'} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle. \quad (\text{E.6})$$

E. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

Ahora consideramos por separado cada uno de los casos que dan las combinaciones de las k_i .

Caso $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}$

Los argumentos de las exponenciales son cero, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_3 - \bar{k}_4) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_k \langle a_k^\dagger a_k a_k^\dagger a_k \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_k \langle \hat{n}_k \hat{n}_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Caso $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_4$

Este caso es cero puesto que los operadores de creación y aniquilación siempre actúan sobre estados diferentes, lo que implica que al tomar la traza esto es cero.

Caso $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_3 - \bar{k}_4) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_3} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_1} a_{k_3}^\dagger a_{k_3} \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_3} \langle \hat{n}_{k_1} \hat{n}_{k_3} \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Caso $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 \neq \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_3 - \bar{k}_4) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_2} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_2}^\dagger a_{k_1} \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_2} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot (\bar{r} - \bar{r})} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_2}^\dagger a_{k_1} \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_2} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot (\bar{r} - \bar{r})} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_1} (1 + a_{k_2}^\dagger a_{k_2}) \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 \neq k_2} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot (\bar{r} - \bar{r})} \langle \hat{n}_{k_1} + \hat{n}_{k_1} \hat{n}_{k_2} \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Caso $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$

$$\frac{1}{V^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_3 - \bar{k}_4) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}^\dagger a_{k_4} \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} e^{-i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}} \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} \rangle \quad (\text{E.10})$$

Cualquier otra combinación es cero. De estos casos obtenemos, combinando con

(E.4), para la función de correlación,

$$\begin{aligned}
G(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{V^2} \sum_k \langle \hat{n}_k \hat{n}_k \rangle + \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} \langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle + \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} \langle \hat{n}_k \rangle \\
&+ \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} e^{-i(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} \langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle - \left(\frac{\bar{N}}{V} \right)^2
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Ahora escribimos el término de la densidad al cuadrado como dos sumas, una de índices iguales y otra en la que son diferentes,

$$\begin{aligned}
G(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{V^2} \sum_k \langle \hat{n}_k \hat{n}_k \rangle + \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} \langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle + \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} e^{-i(\bar{k}' - \bar{k}) \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} \langle \hat{n}_k \rangle \\
&+ \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} e^{-i(\bar{k}' - \bar{k}) \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} \langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle - \frac{1}{V^2} \sum_{k=k'} \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k'} \rangle - \frac{1}{V^2} \sum_{k \neq k'} \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k'} \rangle.
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Pasamos al límite termodinámico, por tanto las sumas pueden convertirse en integrales,

$$\begin{aligned}
G(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{V^2} \int \int (\langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle - \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k'} \rangle) dk dk' + \frac{\bar{N}}{V} \delta(\bar{r}' - \bar{r}) \\
&+ \frac{1}{V^2} \int \int e^{-i(\bar{k}' - \bar{k}) \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k'} \rangle dk dk'.
\end{aligned} \tag{E.13}$$

El primer término es de orden $\frac{1}{V^2}$ y los otros dos $\frac{1}{V}$, por tanto despreciamos el primero y nos quedamos con los otros dos, definimos $k' - k = q$

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{\bar{N}}{V} \delta(\bar{r}' - \bar{r}) + \frac{1}{V} \int e^{-i\bar{q} \cdot (\bar{r}' - \bar{r})} dk \int \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k+q} \rangle dq \tag{E.14}$$

Nos quedamos con el término en la primera integral,

$$h(q) = \int \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k+q} \rangle dq. \tag{E.15}$$

Reescribimos los promedios de ocupación de la siguiente manera,

$$h(q) = \int \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k+q} \rangle dq \tag{E.16}$$

$$\bar{n}_{\bar{q} + \bar{k}} = \frac{1}{e^{\beta(-\mu + \epsilon_{k+q})} - 1} = \frac{e^{-\beta(-\mu + \epsilon_{k+q})}}{1 - e^{-\beta(-\mu + \epsilon_{k+q})}} \tag{E.17}$$

Podemos usar una suma geométrica para reescribir el denominador,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

E. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

Entonces, se obtiene

$$\bar{n}_{\bar{k}}\bar{n}_{\bar{k}+\bar{q}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(m+1)\beta(-\mu+\epsilon_{\bar{k}})} e^{-(l+1)\beta(-\mu+\epsilon_{\bar{k}+\bar{q}})}. \quad (\text{E.18})$$

Regresamos a la integral y escogemos el eje de coordenadas de tal forma que z y \bar{q} sean paralelos, eso nos permite escribir,

$$|\bar{k} + \bar{q}| = k^2 + q^2 + 2qk\cos\theta$$

Entonces ahora podemos escribir la integral como,

$$\tilde{h}(q) = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{(m+l+2)\beta\mu} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta e^{-(m+1)\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}k^2\right)} e^{-(l+1)\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k^2+q^2+2qk\cos\theta)\right)} \quad (\text{E.19})$$

Para integrar, se reagrupan exponentes para después completar cuadrados y definir el cambio de variable, $u = k \pm a$ con, $a = \frac{(l+1)}{(m+l+2)}q$, así obtenemos

$$\tilde{h}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2m}{\beta\hbar^2 q} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{(m+l+2)\beta\mu - \beta\frac{\hbar^2}{2m}q^2(l+1 - \frac{(l+1)^2}{(m+l+2)})} \int_0^{\infty} k dk \left(e^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}(m+l+2)u^2} - e^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}(m+l+2)u^2} \right) \quad (\text{E.20})$$

Calculando las integrales, llegamos a

$$\tilde{h}(q) = \frac{2e^{2\beta\mu}}{\lambda_T^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(m+l+2)^{\frac{3}{2}}} e^{(m+l)\beta\mu - \beta\epsilon_q \left[l+1 - \frac{(l+1)^2}{(m+l+2)} \right]} \quad (\text{E.21})$$

y si recorremos el índice podemos reescribirlo como,

$$\tilde{h}(q) = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(m+l)^{\frac{3}{2}}} e^{(m+l)\beta\mu - \beta\frac{lm}{m+l}\epsilon_q} \quad (\text{E.22})$$

Para pasar al espacio real usamos la transformada inversa de Fourier, es decir,

$$h(r) = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q^2 \sin(\theta) dq d\theta d\phi e^{iqr\cos(\theta)}}{(m+l)^{\frac{3}{2}}} e^{(m+l)\beta\mu - \beta\frac{lm}{m+l}\epsilon_q} \quad (\text{E.23})$$

Completando cuadrados en los exponentes y calculando las integrales se obtiene que,

$$h(r) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_T^2} \right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(ml)^{\frac{3}{2}}} e^{(m+l)\beta\mu} e^{-\frac{m+l}{ml} \frac{\pi r^2}{\lambda^2}} \quad (\text{E.24})$$

Y esta última doble suma se puede escribir como el cuadrado de una única suma,

$$h(r) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_T^2} \right)^3 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^{\frac{3}{2}}} e^{m\alpha - \frac{\pi r^2}{m\lambda^2}} \right]^2. \quad (\text{E.25})$$

Por otro lado, se puede mostrar (partiendo de la segunda y llegando a la primer) que esa expresión se puede escribir en forma integral como,

$$h(r) = \frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty \frac{pdpsen\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} + 1} \right|^2 \quad (\text{E.26})$$

Esta última expresión nos es de utilidad para ver el comportamiento cerca del punto crítico. Se puede mostrar que la integral cerca de $\mu = 0$ ([116]) se aproxima como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty \frac{pdpsen\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} - 1} \right|^2 &\approx \frac{1}{4\pi^4 r^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty \frac{pdpsen\left(\frac{pr}{\hbar}\right)}{\frac{p^2}{2kTm} + \frac{|\mu|}{kT}} \right|^2 \\ &= \frac{m^2 T^2}{4\pi \hbar^2 r^2} e^{\left(-r \frac{2\sqrt{2m|\mu|}}{\hbar}\right)} \end{aligned}$$

Entonces eso nos lleva a concluir que,

$$h(r) \approx \frac{m^2 T^2}{4\pi \hbar^2 r^2} e^{\left(-r \frac{2\sqrt{2m|\mu|}}{\hbar}\right)} \quad (\text{E.27})$$

Esto implica que cerca del punto crítico la función de correlación se escribe como,

$$G(r) \sim \frac{1}{r^2}. \quad (\text{E.28})$$

Y la longitud de correlación es,

$$\xi = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m|\mu|}} \quad (\text{E.29})$$

Derivadas y otras expresiones del gas inhomogéneo

La derivada de la compresibilidad isotérmica global requiere el cálculo de las siguientes indentidades.

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{\mu,\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{K}_{T,\nu}}{\partial \mu}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\mu,\nu}}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,\nu}}. \quad (\text{F.1})$$

Se calculó cada una de las derivadas y se obtuvieron las siguientes expresiones ($\mu \geq 0$):

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{\mu} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \frac{\mu^{1/2}}{\tilde{\rho}^2 T \lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{3} Z_4(x) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}} \tilde{g}_2(\alpha) - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{1/2} \tilde{g}_1(\alpha) \right], \quad (\text{F.2})$$

donde

$$Z_4(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(6x^2 + 3x) \text{E}\left(\frac{1}{2x+1}\right) - 6x^2 \text{K}\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right].$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial \mu}\right)_T = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \frac{1}{\tilde{\rho}^2 \mu^{1/2} \lambda^3} \left[\frac{b\lambda^3}{3} Z_5(x) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{1/2} \tilde{g}_1(\alpha) \right] \quad (\text{F.3})$$

con

$$Z_5(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(x^2 + 8x + 3) \text{E}\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (x^2 + 3x) \text{K}\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right].$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\mu,\nu} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \frac{\nu \mu^{3/2}}{T \lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{3} Z_6(x) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \frac{3\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{2\alpha} - \frac{3\sqrt{\pi} \text{Li}_2(\alpha)}{4\alpha^{1/2}} + \frac{3\sqrt{\pi} \text{Li}_3(\alpha)}{4\alpha^{3/2}} \right] \quad (\text{F.4})$$

F. DERIVADAS Y OTRAS EXPRESIONES DEL GAS INHOMOGENEO

donde

$$Z_6(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(8x^3 + 6x^2 + x) E\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (8x^3 + 4x^2) K\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right]$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{m^{3/2}} \frac{\mathcal{V}\mu^{1/2}}{\lambda^3} \left[\frac{b\lambda^3}{3} Z_7(x) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{1/2}} \tilde{g}_2(\alpha) \right] \quad (\text{F.5})$$

con

$$Z_7(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(2x^2 + 3x + 1) E\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (2x^2 + x) K\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right].$$

Si $\mu \leq 0$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}_T}{\partial T}\right)_{N,V} = k \frac{kT}{\hbar^3 \left(\frac{N}{\mathcal{V}}\right)^2} \frac{1}{g_2(\alpha)} [2g_2(\alpha)g_2(\alpha) - 3g_1(\alpha)g_3(\alpha)] \quad (\text{F.6})$$

Para el coeficiente de expansión térmica global obtuvimos, para $\mu \leq 0$,

$$\beta_T = \frac{1}{T} \left[4 \frac{g_2(\alpha)g_4(\alpha)}{g_3(\alpha)g_3(\alpha)} - 3 \right] \quad (\text{F.7})$$

y para $\mu > 0$ son necesarias las siguientes derivadas

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_{\mu} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3m^{3/2}} \frac{\mu^{5/2}}{T\lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{105} Z_8(x) + \frac{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{10} + \frac{5\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{4\alpha} + \frac{3\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{\alpha^2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{3/2}} \tilde{g}_3(\alpha) + \frac{3\sqrt{\pi}}{2\alpha^{5/2}} \tilde{g}_4(\alpha) \right] \quad (\text{F.8})$$

donde,

$$Z_8(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(448x^4 + 588x^3 + 224x^2 + 21x) E\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (448x^4 + 476x^3 + 126x^2) K\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right]$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mu}\right)_T = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3m^{3/2}} \frac{\mu^{3/2}}{\lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{105} Z_9(x) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \frac{3\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{4\alpha} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{3/2}} \tilde{g}_3(\alpha) \right] \quad (\text{F.9})$$

donde

$$Z_9(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} \left[(84x^3 + 84x^2 + 42x + \frac{21}{2}) E\left(\frac{1}{2x+1}\right) - (84x^3 + 63x^2 + \frac{21}{2}x) K\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right].$$

La capacidad calorífica global \mathcal{C}_V está dada como:

$$\mathcal{C}_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mu, \nu} = T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} \right)_{\mu} - T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right)_T \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu}}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T} \quad (\text{F.10})$$

se requieren las siguientes derivadas para $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} \right)_{\mu} &= \frac{16\sqrt{2}\pi}{3m^{3/2}} \frac{\mu^{5/2}}{T^2 \lambda^3} \left[\frac{2b\lambda^3}{105} Z_{10}(x) + \frac{3\zeta(\frac{3}{2})}{20} + \frac{3\zeta(\frac{5}{2})}{2\alpha} + \frac{9\zeta(\frac{7}{2})}{\alpha^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{1/2}} \tilde{g}_2(\alpha) - \frac{9\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}} \tilde{g}_3(\alpha) + \frac{9\sqrt{\pi}}{2\alpha^{5/2}} \tilde{g}_4(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

donde:

$$\begin{aligned} Z_{10}(x) &= \frac{1}{x(2x+1)^{3/2}} \\ &\times \left[(3584x^5 + 5260x^4 + 2660x^3 + 504x^2 + 21x) \text{E} \left(\frac{1}{2x+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - (3584x^5 + 4816x^4 + 5544x^3 + 336x^2) \text{K} \left(\frac{1}{2x+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right)_T &= \frac{16\sqrt{2}\pi}{3m^{3/2}} \frac{\mu^{3/2}}{T \lambda^3} \left[\frac{b\lambda^3}{105} Z_{11}(x) + \frac{3\zeta(\frac{3}{2})}{4} + \frac{9\zeta(\frac{5}{2})}{4\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{1/2}} \tilde{g}_2(\alpha) + \frac{9\sqrt{\pi}}{8\alpha^{3/2}} \tilde{g}_3(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

donde

$$\begin{aligned} Z_{11}(x) &= \frac{1}{x(2x+1)^{3/2}} \left[(1680x^4 + 2100x^3 + 840x^2 + 189x) \text{E} \left(\frac{1}{2x+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - (1680x^4 + 1680x^3 + 420x^2) \text{K} \left(\frac{1}{2x+1} \right) \right] \end{aligned}$$

y para $\mu \leq 0$ se obtuvo

$$\mathcal{C}_V = \frac{3}{\hbar^3} \frac{(kT)^4}{T g_2(\alpha)} [4g_2(\alpha) g_4(\alpha) - 3g_3(\alpha) g_3(\alpha)] \quad (\text{F.14})$$

Para calcular la derivada de \mathcal{C}_V se requiere calcular la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} (\mathcal{C}_V) &= \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} \right) + T \left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T^3} \right) - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right) \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)} - T \left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T \partial \mu \partial T} \right) \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)} \\ &\quad - T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} \right) \frac{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial T^2} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right) - \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial T \partial \mu} \right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

F. DERIVADAS Y OTRAS EXPRESIONES DEL GAS INHOMOGÉNEO

Para $\mu \leq 0$, las derivadas requeridas para calcular la expresión anterior, son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial T^2} = [3kT - \mu] \frac{4}{\hbar^3} \frac{(kT)^3}{T^2} \text{Li}_4 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{2\mu}{\hbar^3} \frac{(kT)^3}{T^2} \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) + \frac{\mu^2}{\hbar^3} \frac{(kT)^2}{T^2} \text{Li}_2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{F.16})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T^3} \right) &= \left(\frac{24}{\hbar^3} k^4 T - \frac{4\mu}{\hbar^3} k^3 \right) \text{Li}_4 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) + \left(\frac{4\mu^2 k^2}{\hbar^3 T} - \frac{14k^3}{\hbar^3} \mu \right) \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \\ &+ \frac{2\mu^2 k^2}{\hbar^3 T} \text{Li}_2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu^3 k}{\hbar^3 T^2} \text{Li}_1 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \mu \partial T} (\mu, T) = \frac{3}{\hbar^3} \frac{(kT)^3}{T} \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{\mu}{\hbar^3} \frac{(kT)^2}{T} \text{Li}_2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{F.18})$$

$$\left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial T \partial \mu \partial T} \right) = \frac{6}{\hbar^3} k^3 T \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - 4 \frac{\mu}{\hbar^3} k^2 \text{Li}_2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) + \frac{1}{\hbar^3} \frac{k\mu^2}{T} \text{Li}_1 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{F.19})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = 6 \left(\frac{k}{\hbar} \right)^3 T \text{Li}_3 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) - \frac{4k}{\hbar^3} \mu \text{Li}_2 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) + \frac{k}{\hbar^3} \frac{\mu^2}{T} \text{Li}_1 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{F.20})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mu^2} = \frac{kT}{\hbar^3} \text{Li}_1 \left(e^{\frac{\mu}{kT}} \right) \quad (\text{F.21})$$

Bibliografía

- [1] S. N. Bose. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Zeitschrift fur Physik*, 26(178-181), 1924. [1](#)
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Physikalisch-mathematische Klasse*, XXII:261, 1924. [1](#)
- [3] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Physikalisch-mathematische Klasse*, 8:3–14, January 1925. [1](#)
- [4] D. E. Pritchard V. Bagnato and D. Kleppner. Bose-Einstein condensation in an external potential. *Physical Review A*, 35(10):4354–4358, may 1987. [1](#)
- [5] V. Bagnato and D. Kleppner. Bose-einstein condensation in low-dimensional traps. *Physical Review A*, 44(11):7439–7441, dec 1991. [1](#)
- [6] H. J. Metcalf and P. van der Straten. Laser cooling and trapping of atoms. *Journal of the Optical Society of America B*, 20(5):887, may 2003. [1](#)
- [7] W. D. Phillips. Nobel lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):721–741, jul 1998. [2](#)
- [8] Claude N. Cohen-Tannoudji. Nobel lecture: Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):707–719, jul 1998. [2](#)
- [9] S. Chu. Nobel lecture: The manipulation of neutral particles. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):685–706, jul 1998. [2](#)
- [10] M. R. Matthews C. E. Wieman M. H. Anderson, J. R. Ensher and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, jul 1995. [2](#)
- [11] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75(22):3969–3973, nov 1995. [2](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [12] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 75(9):1687–1690, aug 1995. [2](#)
- [13] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. *Physical Review Letters*, 81(18):3811–3814, nov 1998. [2](#)
- [14] G. Roati, M. Zaccanti, C. D’Errico, J. Catani, M. Modugno, A. Simoni, M. Inguscio, and G. Modugno. K 39 Bose-Einstein condensate with tunable interactions. *Physical Review Letters*, 99(1), jul 2007. [2](#)
- [15] T. Weber. Bose-Einstein condensation of cesium. *Science*, 299(5604):232–235, dec 2002. [2](#)
- [16] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, Junmin Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein condensation of metastable helium. *Physical Review Letters*, 86(16):3459–3462, apr 2001. [2](#)
- [17] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, and A. Aspect. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292(5516):461–464, apr 2001. [2](#)
- [18] T. Fukuhara, S. Sugawa, and Y. Takahashi. Bose-Einstein condensation of an ytterbium isotope. *Physical Review A*, 76(5), nov 2007. [2](#)
- [19] Axel Griesmaier, Jörg Werner, Sven Hensler, Jürgen Stuhler, and Tilman Pfau. Bose-Einstein condensation of chromium. *Physical Review Letters*, 94(16), apr 2005. [2](#)
- [20] S. Kraft, F. Vogt, O. Appel, F. Riehle, and U. Sterr. Bose-Einstein condensation of alkaline earth atoms:ca40. *Physical Review Letters*, 103(13), sep 2009. [2](#)
- [21] S. Stellmer, M. K. Tey, B. Huang, R. Grimm, and F. Schreck. Bose-Einstein condensation of strontium. *Physical Review Letters*, 103(20), nov 2009. [2](#)
- [22] Mingwu Lu, Nathaniel Q. Burdick, Seo Ho Youn, and Benjamin L. Lev. Strongly dipolar Bose-Einstein condensate of dysprosium. *Physical Review Letters*, 107(19), oct 2011. [2](#)
- [23] Víctor Romero-Rochín. Equation of state of an interacting Bose gas confined by a harmonic trap: The role of the “harmonic” pressure. *Physical Review Letters*, 94(13), apr 2005. [2](#), [11](#), [12](#), [13](#)
- [24] Víctor Romero-Rochín. Thermodynamics and phase transitions in a fluid confined by a harmonic trap†. *The Journal of Physical Chemistry B*, 109(45):21364–21368, nov 2005. [2](#)

- [25] R. F. Shiozaki, G. D. Telles, P. Castilho, F. J. Poveda-Cuevas, S. R. Muniz, G. Roati, V. Romero-Rochin, and V. S. Bagnato. Measuring the heat capacity in a Bose-Einstein condensation using global variables. *Physical Review A*, 90(4), oct 2014. [2](#), [62](#), [72](#)
- [26] R. R. Silva, E. A. L. Henn, K. M. F. Magalhães, L. G. Marcassa, V. Romero-Rochin, and V. S. Bagnato. Definition and measurement of global thermodynamic variables for laser-cooled trapped gas. *Laser Physics*, 16(4):687–692, apr 2006. [2](#)
- [27] F. J. Poveda-Cuevas, P. C. M. Castilho, E. D. Mercado-Gutierrez, A. R. Fritsch, S. R. Muniz, E. Lucioni, G. Roati, and V. S. Bagnato. Isothermal compressibility determination across Bose-Einstein condensation. *Physical Review A*, 92(1), jul 2015. [xvi](#), [2](#), [14](#), [62](#), [66](#), [70](#)
- [28] F. J. Poveda Cuevas. *Aspectos sobre confinamento híbrido para um condensado de Bose-Einstein: pressão global e compressibilidade*. PhD thesis, Instituto de Física de São Carlos, 2014. [xvi](#), [2](#), [66](#), [68](#)
- [29] E. Henn, K. Farias, V. Romero-Rochin G. B. Seco, L. G. Marcassa, and V. Bagnato. Thermodynamics of cold trapped atoms and Bose-Einstein condensates described by global variables. In *Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena*, pages LVIII–LIX, 05 2007. [2](#)
- [30] I. Reyes-Ayala, F. J. Poveda-Cuevas, J. A. Seman, and V. Romero-Rochín. Critical properties of weakly interacting bose gases as modified by a harmonic confinement. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(7):073101, jul 2017. [2](#), [88](#)
- [31] F. J. Poveda-Cuevas, I. Reyes-Ayala, J. A. Seman, and V. Romero-Rochín. Global thermodynamics of confined inhomogeneous dilute gases: A semi-classical approach. In *Latin American School of Physics “Marcos Moshinsky” 2017*. Author(s), 2018. [2](#), [88](#)
- [32] Sandoval-Figueroa Nadia. *Gases de bose débilmente interactuantes en una trampa cuadrupolar lineal*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2016. [2](#), [11](#)
- [33] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento*, 20(3):454–477, may 1961. [3](#), [19](#)
- [34] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2):451–454, 1961. [3](#)
- [35] T. H. Berlin and M. Kac. The spherical model of a ferromagnet. *Physical Review*, 86(6):821–835, jun 1952. [3](#), [50](#)
- [36] Paul D. Beale R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Elsevier LTD, Oxford, 2012. [6](#), [12](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [37] K. Huang. *Statistical Mechanics, 2nd Edition*. John Wiley & Sons, 1987. [6](#)
- [38] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., 1965. [6](#), [92](#)
- [39] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Stocker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer New York, 2012. [7](#), [12](#)
- [40] V. Romero-Rochín. *Notes on many body theory of Bose and Fermi gases at low temperatures*. Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 20-364, México D. F. 01000, México, February 2011. [9](#)
- [41] M. Howard Lee and Jangil Kim. Quantum gases and polylogs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 304(3-4):421–428, feb 2002. [9](#)
- [42] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Cambridge University Press, 2002. [10](#)
- [43] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2011. [11](#), [57](#)
- [44] L. H. Thomas. The calculation of atomic fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 23(05):542, jan 1927. [11](#)
- [45] E. Fermi. Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo. *Accademia Nazionale dei Lincei*, 6:602–607, 1927. [11](#)
- [46] N. Sandoval-Figueroa and V. Romero-Rochín. Thermodynamics of trapped gases: Generalized mechanical variables, equation of state, and heat capacity. *Physical Review E*, 78(6), dec 2008. [11](#), [12](#), [13](#), [56](#)
- [47] Víctor Romero-Rochín and Vanderlei S. Bagnato. Thermodynamics of an ideal gas of bosons harmonically trapped: equation of state and susceptibilities. *Brazilian Journal of Physics*, 35(3a):607–613, sep 2005. [12](#)
- [48] G. J. Hooyman S. R. De Groot and C. A. Ten Seldam. On the Bose-Einstein condensation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 203(1073):266–286, sep 1950. [12](#)
- [49] F. J. Poveda-Cuevas E. D. Mercado and V. Bagnato. Isothermal compressibility and thermal expansion coefficient for a bose-einstein condensate in a harmonic trap. In *Latin America Optics and Photonics Conference*. OSA, 2016. [14](#)
- [50] H. Eugene Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. OXFORD UNIV PR, 1987. [15](#)
- [51] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. OUP Oxford, 1992. [15](#)

- [52] Shang keng Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Perseus, 2000. 16, 81
- [53] H. Eugene Stanley. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 71(2):S358–S366, mar 1999. 17
- [54] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press, 2002. 17
- [55] B. Widom. Equation of state in the neighborhood of the critical point. *The Journal of Chemical Physics*, 43(11):3898–3905, dec 1965. 17
- [56] M. E. Fisher. The theory of equilibrium critical phenomena. *Reports on Progress in Physics*, 30(2):615–730, jul 1967. 17, 81
- [57] L. P. Kadanoff, W. Götze, D. Hamblen, R. Hecht, E. A. S. LEWIS, V. V. Palciauskas, M. Rayl, J. Swift, D. Aspnes, and J. Kane. Static phenomena near critical points: Theory and experiment. *Reviews of Modern Physics*, 39(2):395–431, apr 1967. 17
- [58] Kenneth G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Physical Review B*, 4(9):3174–3183, nov 1971. 17
- [59] T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Ottl, M. Kohl, and T. Esslinger. Critical behavior of a trapped interacting Bose gas. *Science*, 315(5818):1556–1558, mar 2007. 17
- [60] G. Ceccarelli, J. Nespolo, A. Pelissetto, and E. Vicari. Bose-Einstein condensation and critical behavior of two-component bosonic gases. *Physical Review A*, 92(4), oct 2015. 17
- [61] Massimo Campostrini, Martin Hasenbusch, Andrea Pelissetto, Paolo Rossi, and Ettore Vicari. Critical behavior of the three-dimensional XY universality class. *Physical Review B*, 63(21), may 2001. 17
- [62] E. Burovski, J. Machta, N. Prokof'ev, and B. Svistunov. High-precision measurement of the thermal exponent for the three-dimensional XY universality class. *Physical Review B*, 74(13), oct 2006. 17
- [63] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, and U. E. Israelsson. Heat capacity and thermal relaxation of bulk helium very near the lambda point. *Physical Review Letters*, 76(6):944–947, feb 1996. 17
- [64] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, Z. K. Geng, P. R. Williamson, D. A. Stricker, T. C. P. Chui, U. E. Israelsson, and M. Larson. Specific heat of helium confined to a 57 geometry near the lambda point. *Physical Review Letters*, 84(21):4894–4897, may 2000. 17

BIBLIOGRAFÍA

- [65] J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. A. Stricker, D. R. Swanson, and T. C. P. Chui. Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point. *Physical Review B*, 68(17), nov 2003. [17](#)
- [66] N. Bogolyubov. On the theory of superfluidity. *Journal of Physics*, XI(1), 1947. [19](#), [23](#)
- [67] Sandro Stringari Lev. P. Pitaevskii. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003. [19](#), [57](#), [60](#)
- [68] V. Goldman, I. F. Silvera, and A. J. Leggett. Atomic hydrogen in an inhomogeneous magnetic field: Density profile and bose-einstein condensation. *Physical Review B*, 24(5):2870–2873, sep 1981. [19](#)
- [69] V. N. Popov. *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. Springer Netherlands, 1983. [19](#)
- [70] V. I. Yukalov and E. P. Yukalova. Bose-Einstein-condensed gases with arbitrary strong interactions. *Physical Review A*, 74(6), dec 2006. [19](#)
- [71] V. I. Yukalov and E. P. Yukalova. Condensate and superfluid fractions for varying interactions and temperature. *Physical Review A*, 76(1), jul 2007. [19](#)
- [72] L. Olivares-Quiroz and V. Romero-Rochin. On the order of BEC transition in weakly interacting gases predicted by mean-field theory. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(20):205302, oct 2010. [19](#)
- [73] L. Olivares-Quiroz and V. Romero-Rochin. Isotherms, order parameter and density profiles for weakly interacting Bose gases within three mean-field theories. *Journal of Low Temperature Physics*, 164(1-2):23–40, apr 2011. [19](#)
- [74] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi*, 140(Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases):67–176, 1999. [20](#)
- [75] J. Szczepkowski, R. Gartman, M. Witkowski, L. Tracewski, M. Zawada, and W. Gawlik. Analysis and calibration of absorptive images of Bose-Einstein condensate at nonzero temperatures. *Review of Scientific Instruments*, 80(5):053103, may 2009. [20](#)
- [76] M. Mendoza-Lopez and V. Romero-Roch in. Entropy geometric construction of a pure substance with normal, superfluid and supersolid phases. *Revista Mexicana de Física*, 2016. [20](#)
- [77] Tin-Lun Ho and Q. Zhou. Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases. *Nature Physics*, 6(2):131–134, dec 2009. [27](#)

- [78] S. Nascimbène, N. Navon, F. Chevy, and C. Salomon. The equation of state of ultracold Bose and Fermi gases: a few examples. *New Journal of Physics*, 12(10):103026, oct 2010. [xv](#), [28](#), [29](#)
- [79] C. Marchioro and E. Presutti. Thermodynamics of particle systems in the presence of external macroscopic fields. i classical case. *Comm. Math. Phys.*, 27(2):146–154, 1972. [28](#), [56](#)
- [80] C. Marchioro and E. Presutti. Thermodynamics of particle systems in the presence of external macroscopic fields. ii quantal case. *Comm. Math. Phys.*, 29(4):265–284, 1973. [28](#), [56](#)
- [81] C. Garrod and C. Simmons. Rigorous statistical mechanics for nonuniform systems. *Journal of Mathematical Physics*, 13(8):1168–1176, aug 1972. [28](#), [56](#)
- [82] H. Z. Cummins and H. L. Swinney. Critical opalescence: The rayleigh linewidth. *The Journal of Chemical Physics*, 45(12):4438–4444, dec 1966. [49](#)
- [83] M. E. Fisher. Correlation functions and the critical region of simple fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 5(7):944–962, jul 1964. [49](#)
- [84] J. D. Gunton and M. J. Buckingham. Condensation of the ideal Bose gas as a cooperative transition. *Phys. Rev.*, 166:152–158, February 1968. [50](#)
- [85] C. K. Hall. Scaling in the ideal bose gas. *Journal of Statistical Physics*, 13(2):157–172, aug 1975. [50](#)
- [86] M. Baldo, E. Catara, and U. Lombardo. On the equivalence between the ising model and the bose system near T_c . *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2*, 15(7):214–216, feb 1976. [50](#)
- [87] D.G. Caldi, A.M. Din, and V. Rittenberg. The spherical model as a guide to specific heat phase transitions. *Physics Letters B*, 107(3):211–216, dec 1981. [50](#)
- [88] M. Rasolt, M. J. Stephen, M. E. Fisher, and P. B. Weichman. Critical behavior of a dilute interacting bose fluid. *Physical Review Letters*, 53(8):798–801, aug 1984. [50](#)
- [89] Xian-Zhi Wang and Jai Sam Kim. Critical nature of ideal Bose-Einstein condensation: Similarity with yang-lee theory of phase transition. *Physical Review E*, 59(1):1242–1245, jan 1999. [50](#)
- [90] C. P. Search. Testing broken $u(1)$ symmetry in a two-component atomic Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 64(1), jun 2001. [50](#)
- [91] D. V. Shopova and D. I. Uzunov. Some basic aspects of quantum phase transitions. *Physics Reports*, 379(1):1–67, may 2003. [50](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [92] M Napiórkowski, P Jakubczyk, and K Nowak. The imperfect Bose gas in dimensions: critical behavior and casimir forces. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013(06):P06015, jun 2013. 50
- [93] Rodney J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Guilford Publications, 2013. 53
- [94] E. D. Mercado-Gutiérrez, F. J. Poveda-Cuevas, and V. Bagnato. Thermal global expansion coefficient measurement for a harmonic trapped gas across bose-einstein condensation. *Brazilian Journal of Physics*, 48(6):539–542, aug 2018. 55
- [95] P. C. M. Castilho, F. J. Poveda-Cuevas, J. A. Seman, R. F. Shiozaki, G. Roati, S. R. Muniz, D. V. Magalhães, and V. Bagnato. Equation of state for a trapped quantum gas: remnant of zero-point energy effects. *New Journal of Physics*, 18(2):023014, jan 2016. 55
- [96] Rodrigo Figueiredo Shiozaki. *Quantum turbulence and thermodynamics on a trapped Bose-Einstein condensate*. PhD thesis, Instituto de Física de São Carlos, 2013. 55
- [97] E. D. Mercado Gutierrez. *Thermal expansion coefficient for a trapped Bose gas during phase transition*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2016. 55
- [98] E. A. L. Henn, G.B. Seco, J.A. Seman, K.M.F. Magalhães, V. Romero-Rochín, and V. Bagnato. Global thermodynamic variables description for a confined cold gas undergoing Bose-Einstein condensation. *Nuclear Physics A*, 790(1-4):800c–803c, jun 2007. 58
- [99] V. I. Yukalov. Theory of cold atoms: basics of quantum statistics. *Laser Physics*, 23(6):062001, apr 2013. 64
- [100] E. R. Grilly. Compressibility of liquid He 4 as a function of pressure. *Physical Review*, 149(1):97–101, sep 1966. 66
- [101] C. Boghosian and H. Meyer. Density, coefficient of thermal expansion, and entropy of compression of liquid He 4 under pressure below 1.4k. *Physical Review*, 152(1):200–206, dec 1966. 66
- [102] David L. Elwell and Horst Meyer. Molar volume, coefficient of thermal expansion, and related properties of liquid He 4 under pressure. *Physical Review*, 164(1):245–255, dec 1967. 66
- [103] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Important Books, 2013. 72
- [104] G. Jaeger. The ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution. *Archive for History of Exact Sciences*, 53(1):51–81, may 1998. 75

BIBLIOGRAFÍA

- [105] M Naraschewski and Roy Glauber. Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases. *Physical Review A*, 59, 06 1998. [78](#)
- [106] D. J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific Pub. Co. Inc., 1984. [81](#)
- [107] I. Reyes-Ayala, F. J. Poveda-Cuevas, and V. Romero-Rochin. Non-classical critical exponents at Bose-Einstein condensation. *arXiv:1812.05194*, 2018. [88](#)
- [108] J. Besprosvany and R. Romero. Heavy quarks within the electroweak multiplet. *Physical Review D*, 99(7), apr 2019. [89](#)
- [109] Leonard Lewin. *Polylogarithms and Associated Functions*. Elsevier Science Ltd, 1981. [91](#)
- [110] T. A. A. Broadbent and L. Lewin. Dilogarithms and associated functions. *The Mathematical Gazette*, 43(346):312, dec 1959. [91](#)
- [111] David Wood. The computation of polylogarithms. Technical Report 15-92*, University of Kent, Computing Laboratory, University of Kent, Canterbury, UK, June 1992. [91](#)
- [112] A. Ivic. *The Riemann Zeta-Function: Theory A*. Dover Publications Inc., 2003. [92](#)
- [113] J. Napolitano J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Pr., 2017. [97](#)
- [114] J. Bosse, K. N. Pathak, G. S. Singh, S. K. Tripathi, Keya Dharamvir, Ranjan Kumar, and G. S. S. Saini. Density fluctuations in uniform quantum gases. In *International Conference on Advances in Condensed and Nano Materials (ICACNM-2011)*. AIP, 2011. [103](#)
- [115] J. Bosse, K. N. Pathak, and G. S. Singh. Analytical pair correlations in ideal quantum gases: Temperature-dependent bunching and antibunching. *Physical Review E*, 84(4), oct 2011. [103](#)
- [116] E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Statistical Physics*. Elsevier Science & Technology, 1996. [107](#)