



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**EFECTO DE LA ELASTICIDAD DE UN FLUIDO EN EL  
COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR**

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA:

**DANTE ALI VILCHEZ SÁNCHEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DRA. BLANCA ESTELA GARCIA ROJAS**



**CIUDAD DE MÉXICO, A 25 MARZO DEL 2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Vilchez Sánchez Dante Ali.  
con número de cuenta 41311788-7 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 26 del mes de Abril de 2019 a las 11:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA	<u>Edtson E. Herrera Valencia</u>
VOCAL	DRA. BLANCA ESTELA GARCÍA ROJAS	<u>[Firma]</u>
SECRETARIO	M. EN I. FRANCISCO JAVIER ALMAZÁN RUIZ	<u>[Firma]</u>
SUPLENTE	DR. RODOLFO ALBERTO HERRERA TOLEDO	<u>[Firma]</u>
SUPLENTE	DR. FRANCISCO VIDAL CABALLERO DOMÍNGUEZ	<u>[Firma]</u>

El título de la tesis que se presenta es: "Efecto de la elasticidad de un fluido en el coeficiente de transferencia de calor".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
CDMX a 01 de Abril de 2019.

DR. VICENTE JESUS HERNÁNDEZ ABAD

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA" DIRECCIÓN

RECIBÍ:  
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES  
Y DE GRADO

Vo.Bo.  
M. EN C. CESAR SAUL VELASCO HERNÁNDEZ  
JEFE DE LA CARRERA DE I.Q.

## DEDICATORIAS

Es mi deseo como sencillo gesto de agradecimiento, dedicarle mi título de Ingeniero Químico en el presente informe, a las siguientes personas que han marcado mi vida y me apoyaron en el transcurso de este logro:

### **A mi abuela Amelia Lagos Victorino†:**

Porque vives en mi corazón y siempre quisiste lo mejor para mí, y me apoyaste a tu manera sé que desde el cielo me estás cuidando y bendiciendo, para que todo salga bien.

### **A mi padre Avelardo Vilchez Nieto:**

Te agradezco padre por haberme dado siempre lo mejor incluso cuando estabas en tus límites, por siempre cuidarme, apoyarme en seguir adelante y sobre todo el haberme dado el máximo regalo que yo considero es la oportunidad del estudio para salir adelante en este mundo y poder defenderme solo.

### **A mi madre Mireya Sánchez Lagos:**

Por ser la amiga y compañera que me ha ayudado a crecer, gracias por estar siempre conmigo en todo momento. Gracias por la paciencia que has tenido para enseñarme, por el amor que me das, por tus cuidados en el tiempo que hemos vivido juntos, por los regañones que me merecía y que no entendía. Gracias Mamá por estar al pendiente durante toda esta etapa.

### **A mi familia como Rafaela González Lagos, Elizabeth Montes González y Miguel Sánchez Lagos:**

Son una gran parte de mi vida ya que siempre me han cuidado, enseñando, protegido y dado esa libertad de divertirme junto a su compañía. Y sobre todo apoyado en cualquier aspecto en el transcurso de mi vida, el cual estoy profundamente agradecido y sé que siempre estarán ahí para mí cuando más lo necesite así que les dedico respetuosamente esta tesis y este logro que significa mucho para mí. Demostrare que su apoyo y esfuerzo nunca será en vano. ¡Gracias!

### **A mi directora de tesis Blanca Estela García Rojas:**

Le agradezco mucho su apoyo en mis momentos difíciles que estuvo ahí para ayudarme y su paciencia en este tiempo que llevamos juntos, Gracias por sus consejos y su experiencia he aprendido demasiado. Así como la oportunidad que me dio para poder realizar este trabajo de investigación, al mismo tiempo por haberme dedicado su valioso tiempo y atención, la cual valoro y agradezco mucho. Estoy eternamente agradecido con usted por todo lo que me brindo. Muchas Gracias.

A mis amigos, **Luis Fernando Girón Farrera, Marco Antonio Barrios García y Daniel Amaury Mendoza Torres** por pasar a mi lado los momentos de mi vida universitaria, seguir estando siempre en las buenas y en las malas, como siempre motivarme a seguir creciendo jamás lo olvidaré.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IA106518>>.

# INDICE

<b>DEDICATORIAS</b> .....	<b>2</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>6</b>
<b>OBJECTIVO</b> .....	<b>7</b>
<b>HIPÓTESIS</b> .....	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>8</b>
<b>1.1 Transferencia de calor.</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2 Mecanismos de transferencia de calor.</b> .....	<b>8</b>
<b>1.3 Intercambiador de calor.</b> <sup>1</sup> .....	<b>12</b>
<b>1.4 Equipos de transferencia de calor.</b> <sup>4</sup> .....	<b>13</b>
<b>1.5 Operación de los intercambiadores de calor.</b> <sup>3</sup> .....	<b>21</b>
<b>1.6 Ecuación básica de diseño.</b> <sup>4</sup> .....	<b>24</b>
<b>1.7 Flujo térmico transferido.</b> .....	<b>24</b>
<b>1.8 Superficie de transferencia de calor.</b> .....	<b>24</b>
<b>1.9 Coeficiente global de transferencia de calor.</b> .....	<b>25</b>
<b>1.10 Diferencia media logarítmica de temperatura entre los fluidos.</b> .....	<b>26</b>
<b>1.11 Flujos combinados.</b> .....	<b>27</b>
<b>CAPÍTULO. 2 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>29</b>
<b>2.1 Fluido.</b> <sup>6</sup> .....	<b>29</b>
<b>2.2 Fluido newtoniano.</b> <sup>7</sup> .....	<b>30</b>
<b>2.3 Fluido no newtoniano.</b> <sup>7</sup> .....	<b>31</b>
<b>2.4 Fluidos viscoelásticos.</b> .....	<b>37</b>
<b>2.5 Número de Deborah y Numero de Weissenberg.</b> .....	<b>39</b>
<b>2.6 Ecuaciones Constitutivas de fluidos no newtonianos viscosos o Inelásticos.</b> .....	<b>40</b>
<b>2.7 Ecuaciones constitutivas no lineales.</b> .....	<b>43</b>
<b>CAPÍTULO. 3 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>46</b>
<b>3.1 Ecuaciones del modelo matemático.</b> .....	<b>46</b>
<b>3.2 Perfil de velocidad de un fluido visco elástico.</b> .....	<b>47</b>
<b>3.3 Ecuación Constitutiva Phan – Thien – Tanner.</b> .....	<b>47</b>
<b>3.4 Ecuación del Perfil de Velocidades.</b> .....	<b>50</b>
<b>3.5 Perfil de Velocidad Adimensional.</b> .....	<b>51</b>
<b>3.6 Ecuación de Energía.</b> .....	<b>51</b>

3.7 El Perfil de Temperatura Dimensional. ....	52
3.8 Coeficiente individual de transferencia de calor. ....	57
3.9 Numero de Nussel.....	57
<b>CAPÍTULO 4. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>58</b>
4.1 Análisis de resultados.....	58
<b>CAPÍTULO 5. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>62</b>
5.1 Conclusiones. ....	62
5.2 Trabajo a futuro.....	63
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>64</b>

## RESUMEN

Dentro de las diversas tareas que realiza el Ingeniero Químico en la industria de la transformación está el acondicionamiento térmico de materia prima o producto terminado en equipos que se conocen de manera general como intercambiadores de calor. El éxito del acondicionamiento térmico de las sustancias de trabajo se debe al adecuado dimensionamiento y diseño del intercambiador. Las variables que hay que tomar en cuenta para el diseño de dichos equipos van desde la selección adecuada de la geometría y el material de construcción del intercambiador hasta la dinámica (régimen laminar o turbulento) y las propiedades termofísicas de los fluidos involucrados en el intercambio de calor. La ecuación de diseño de los intercambiadores incluye el gradiente de temperatura que existe entre los fluidos involucrados, el área de transferencia y el coeficiente global de transferencia de calor. El coeficiente de transferencia de calor engloba las diferentes resistencias a la transferencia de calor (conducción y convección forzada principalmente). Para evaluar esta resistencia se requiere conocer la relación que guarda el coeficiente individual de transferencia de calor,  $h$ , con la naturaleza y dinámica del fluido. En este sentido se ha publicado correlaciones experimentales, basadas en análisis dimensional, en términos del número de Nusselt el Reynolds y el Prandtl. Una de las correlaciones más conocidas es la de Sieder y Tate, desarrollada para el flujo en tubos lisos en régimen turbulento. Sin embargo, existen otras como la de Petukhov que desarrollo una expresión más precisa, aunque más compleja, para el flujo turbulento completamente desarrollado en tubos lisos. Por otro lado, Hartnett ha proporcionado datos experimentales de la región de entrada para agua y aceites, mientras que Allen y Eckert han presentado estudios definitivos de transferencia turbulenta con agua en tubos lisos y flujo de calor uniforme. La mayoría de estas correlaciones se desarrollaron para fluidos simples (no forman estructura), mientras que en tiempos recientes se han tratado de desarrollar otras correlaciones para fluidos y geometrías más complejas (por ejemplo, fluidos no newtonianos independientes del tiempo o secciones no circulares). El desarrollo de estas correlaciones se ha realizado a través del uso de las ecuaciones de conservación y de ecuaciones constitutivas adecuadas para el tipo de fluido que está bajo estudio; existe literatura especializada en este sentido y el lector puede consultar, por ejemplo: Heat transfer in a non-newtonian fluid, Advances in heat transfer, Convective heat and mass transfer.

Basado en lo anteriormente mencionado, el presente trabajo de tesis tiene por objetivo desarrollar un modelo que permite determinar la influencia de la elasticidad de un fluido en el perfil de velocidad y de temperatura, así como en el número de Nusselt y por lo tanto en el coeficiente individual de transferencia de calor. Como primera aproximación, para esta tesis, se propuso que la geometría por la que circula el fluido viscoelástico sea un canal rectangular. Se eligió la versión lineal de la ecuación constitutiva de Phan-Thien-Tanner para considerar la viscoelasticidad del fluido.

Estas simplificaciones permitieron obtener una solución analítica para determinar el perfil de velocidad y de temperatura, así como en el número de Nusselt para un fluido viscoelástico que circula en un canal rectangular.

## **OBJECTIVO**

### **Objetivo general.**

Contribuir al entendimiento del efecto elástico de un fluido no newtoniano viscoelástico en el coeficiente individual de transferencia de calor el cual combina la contribución viscosa y elástica que están asociadas a la recuperación y la disipación de energía.

### **Objetivos Particulares.**

- i. Desarrollar las ecuaciones de un fluido no newtoniano incompresible que fluye en ducto rectangular en condiciones no isotérmicas.
- ii. Proponer un conjunto de variables adimensionales.
- iii. Programar las ecuaciones acopladas en un código Matlab.
- iv. Obtener las expresiones gráficas para el perfil de velocidades Adimensional y el perfil de temperatura Adimensional vs la posición del ducto rectangular.
- v. Obtener las expresión analítica y gráficas para la función del coeficiente individual de transferencia de calor vs Numero de Weissenberg y el Numero de Nusselt vs Numero de Weissenberg.

## **HIPÓTESIS**

La elasticidad de un fluido viscoelástico podría modificar el perfil de velocidad, el perfil de temperatura y por lo tanto repercutir en el coeficiente individual de transferencia de calor. En todo caso, la influencia que tuviera la elasticidad en el coeficiente de transferencia de calor debería ser tomada en cuenta en el diseño de equipo en el cual exista un intercambio de calor entre el fluido y una superficie de transferencia.



# CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

La transferencia de calor es una disciplina que busca predecir energía que puede tener lugar entre cuerpos materiales como resultado de una diferencia de temperatura. La termodinámica enseña que esta transferencia de energía se define como calor. La ciencia de la transferencia de calor no solo busca explicar cómo se puede transferir la energía térmica, sino también predecir la velocidad a la que se llevará a cabo el intercambio bajo ciertas condiciones específicas. El hecho de que una tasa de transferencia de calor sea el objetivo deseado de un análisis, señala la diferencia entre la transferencia de calor y la termodinámica. La termodinámica trata con sistemas en equilibrio; se puede usar para predecir la cantidad de energía requerida para cambiar un sistema de un estado de equilibrio a otro; no se puede usar para predecir qué tan rápido tendrá lugar un cambio ya que el sistema no está en equilibrio durante el proceso.

## 1.1 Transferencia de calor.

La transferencia de calor complementa los principios primero y segundo de la termodinámica al proporcionar reglas experimentales adicionales que pueden usarse para establecer las tasas de transferencia de energía. Al igual que en la ciencia de la termodinámica, las reglas experimentales utilizadas como base del tema de la transferencia de calor son bastante simples y se expanden fácilmente para abarcar una variedad de situaciones prácticas.

Como un ejemplo de los diferentes tipos de problemas que son tratados por la termodinámica y la transferencia de calor, considere el enfriamiento de una barra de acero caliente que se coloca en un cubo de agua. La termodinámica puede usarse para predecir la temperatura de equilibrio final de la combinación acero barra-agua. La termodinámica no nos dirá cuánto tiempo lleva alcanzar esta condición de equilibrio o cuál será la temperatura de la barra después de un cierto período de tiempo antes de que se alcance la condición de equilibrio. La transferencia de calor puede usarse para predecir la temperatura de la barra y el agua como una función del tiempo.

## 1.2 Mecanismos de transferencia de calor.

El calor por definición es la energía en tránsito debido a la diferencia de temperatura. Esta transferencia de calor se lleva a cabo por tres mecanismos de transferencia que son la conducción, convección y radiación. A continuación, analizamos cada uno de estos mecanismos con cierto detalle.

### 1.2.1 Conducción.

El fenómeno de transferencia de calor por *conducción* constituye un proceso de propagación de energía en un medio sólido, líquido o gaseoso mediante la interacción molecular directa cuando existe un gradiente de temperatura. De aquí que la Transferencia de calor por conducción sea de particular importancia en sólidos sujetos a una variación de temperaturas.

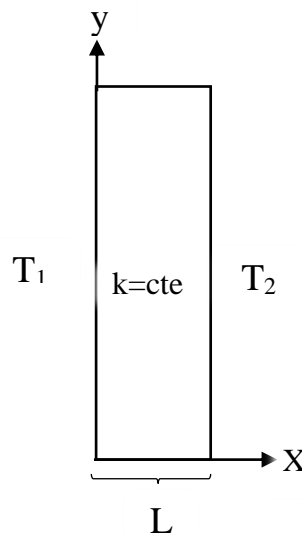
Al haber un gradiente de temperatura en el medio, la segunda ley de la termodinámica establece que la transferencia de calor se lleva a cabo de la región de mayor temperatura a la de menor, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.0)$$

Donde  $q''$  denota el flujo de calor por unidad de área (conocido como flux de calor) o densidad de calor en la dirección "x" y " $k$ " es la *conductividad térmica* del material, sus unidades son W/mK (watt por metro Kelvin) en el sistema Internacional (SI) de unidades. A la ecuación anterior se le agrega un signo negativo para que cumpla la segunda ley de la termodinámica, es decir que el calor debe fluir mayor a menor temperatura. Esta ecuación se conoce como *La Ley de Fourier*. Aplica para un sistema unidimensional.

Con la ecuación 1.0 puede determinar la transferencia de calor por conducción siempre y cuando se conozca la conductividad térmica y el gradiente de temperatura. En caso de que el flujo de calor sea constante este puede determinarse mediante una integración de la Ley de Fourier. Por ejemplo, si se considera una pared de espesor  $L$  cuyas superficies están expuestas a dos temperaturas constantes  $T_1$  y  $T_2$  (Figura 0) y además la conductividad térmica  $k$  es constante, la integración de la ecuación 1.0 es:

$$q'' = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) \quad (1.1)$$



**Fig. 0.** Transferencia de calor por conducción a través de una pared.

### 1.2.2 Convección

El fenómeno de Transferencia de calor por *convección* es un proceso de transporte de energía que se lleva a cabo como consecuencia del movimiento de un fluido (líquido o gas) en la vecindad de una superficie, y está íntimamente relacionado con su movimiento.

Un ejemplo para explicar sería que consideramos una placa cuya superficie tiene una temperatura  $T_s$  y que se disipa el calor hacia un fluido cuya temperatura es  $T_\infty$ .

Puesto que la velocidad relativa del fluido con respecto a la placa es en general igual a cero en la interface del sólido – fluido ( $y=0$ ), el calor se transfiere por conducción solo en este plano del fluido. Se puede ver con la ecuación (1.0) que el gradiente de temperatura en el fluido depende de las características, a menudo complejas, del flujo de calor. Por lo tanto, es más conveniente estimar el flujo por unidad de área de calor disipado por el sistema en términos de la diferencia total de temperaturas entre su superficie y el fluido. Es decir,

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (1.2)$$

Donde  $h$  es el *coeficiente local de Transferencia de Calor o Coeficiente de Película*. Sus unidades en el SI son  $W/m^2 K$  (watt por metro cuadrado Kelvin). La ecuación (1.2) se conoce como la *Ley de Newton de Enfriamiento*. Cabe precisar que esta expresión más que una ley fenomenológica, define el coeficiente local de transferencia de calor  $h$ .

Más importante que el coeficiente local es el coeficiente promedio de transferencia de calor, o simplemente coeficiente de transferencia de calor. Si se combinan las ecuaciones (1.0) y (1.2), tal coeficiente puede determinarse con la expresión

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx}{(T_s - T_\infty)} \quad (1.3)$$

Así, con esta definición nueva,

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) \quad (1.4)$$

Donde  $q$  es el flujo de calor y  $A$  es el área de transferencia de calor por convección. El mecanismo de transferencia de calor por convección suele clasificarse en dos categorías: Convección forzada y Convección libre o natural.

El coeficiente de transferencia de calor en algunas geometrías sencillas puede determinarse con la ecuación (1.3), la cual presupone que se conoce el perfil de temperatura en el fluido,

el cual puede obtenerse analíticamente mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación, que son continuidad, movimiento y energía.

El coeficiente de Transferencia de calor (de aquí en adelante se le designará con la letra  $h$ , a menos que se especifiquen lo contrario) para la convección forzada depende de varios parámetros; por ejemplo,

$$h = h(L, k, u_{\infty}, \mu, \rho, C_p, \dots) \quad (1.5)$$

y, para el caso de convección Natural,

$$h = h(L, k, g, \beta(T_s - T_{\infty}), \mu, \rho, C_p, \dots) \quad (1.6)$$

Donde  $L$  es una dimensión característica del sistema; Por ejemplo,  $L$  es la longitud en la placa,  $k$  la conductividad térmica del fluido,  $u_{\infty}$  la velocidad en la que se aproxima el fluido al sistema,  $\mu$  la viscosidad del fluido,  $\rho$  la densidad del fluido,  $C_p$  el calor específico a presión constante del fluido,  $\beta$  el coeficiente de expansión volumétrica del fluido y  $g$  la aceleración de la gravedad u otra aceleración externa. Todas estas variables pueden reducirse a dos grandes parámetros: la geometría del sistema y las propiedades físicas y características del flujo de fluido.

### 1.2.3 Radiación.

Tanto los mecanismos de transferencia de calor por conducción o por convección requieren un medio para propagar la energía. Sin embargo, el calor puede también propagarse en el vacío absoluto mediante *radiación*. A una temperatura dada todos los cuerpos emiten radiación en diferentes longitudes de onda, pero la magnitud de esta depende de la temperatura absoluta y de las características superficiales de dichos cuerpos.

Por otra parte, se le considera *radiación térmica* la que se ubica en el rango de las longitudes de onda entre 0.1 y 100 micrones, aproximadamente. Dentro de ese intervalo del espectro electromagnético se ubican en el rango ultravioleta, el infrarrojo y el visible. Este último comprende nada más entre 0.38 y 0.78 micrones.

Un radiador perfecto o *cuerpo negro* es el que permite la máxima cantidad de energía radiante desde su superficie a una razón proporcional a su temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia, es decir,

$$q'' = \sigma T^4 \quad (1.7)$$

Esta ecuación se le conoce como *ley de Stefan-Boltzmann*, donde  $\sigma$  es una constante que adquiere un valor igual a  $5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$  en el SI y que recibe el nombre de constante *de Stefan-Boltzmann*. De la ecuación anterior (1.7) se deduce que la superficie de todo cuerpo negro emite radiación si se encuentra a una temperatura diferente del cero absoluto.

Por otra parte, un cuerpo real no satisface las características de un cuerpo negro, ya que emite una menor cantidad de radiación. Así, el flujo de calor por unidad de área que emite una superficie real está dado por la expresión.

$$q'' = \sigma \varepsilon T^4 \quad (1.8)$$

Donde  $\varepsilon$  es una propiedad de la superficie y se denomina *emisividad*; numéricamente es igual al cociente de la emisión de radiación del cuerpo en estudio con respecto a la de uno negro. Esta propiedad superficial adquiere valores entre cero y unidad, y constituye una medida para evaluar cuan efectivamente emite radiación un cuerpo real con respecto a uno negro. El calor por radiación neto intercambiado por un cuerpo negro a una temperatura absoluta  $T_1$ , hacia un envolvente a una temperatura  $T_2$  que lo rodea por completo y que se comporta también como un cuerpo negro puede evaluarse con la expresión

$$q = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.9)$$

Por otra parte, la radiación emitida por un cuerpo real a una temperatura absoluta  $T_1$  hacia una envolvente de área  $A_2 \gg A_1$  y a temperatura, puede calcularse ahora con la expresión

$$q = \sigma A_1 \varepsilon (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.10)$$

Esta ecuación se le conoce como *la ley de Prevost*. Si se consideran ahora dos cuerpos reales a temperaturas absolutas  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente, el flujo neto de energía radiante entre ellos puede calcularse con

$$q = \sigma A_1 F (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.11)$$

Donde  $F$  es una función que no solo depende de las características superficiales de ambos cuerpos, sino también del arreglo geométrico que guardan entre sí. Es decir,  $F$  depende de las emisividades de ambos cuerpos y de la fracción de energía radiante emitida por el cuerpo que intercepta a otro cuerpo.

### 1.3 Intercambiador de calor.!

Los intercambiadores de calor son dispositivos que se utilizan para transferir energía térmica de un fluido a otro. Los intercambiadores de calor típicos que conocemos en nuestra vida diaria incluyen condensadores y evaporadores utilizados en unidades de aire acondicionado y refrigeradores. Calderas y condensadores en centrales térmicas son ejemplos de grandes industrias intercambiadores de calor. Hay intercambiadores de calor en nuestros automóviles en forma de radiadores y enfriadores de aceite. Los intercambiadores de calor también son abundantes en las industrias de proceso.

Existe una gran variedad de intercambiadores de calor para diversos tipos de usos, de ahí la construcción también difiere ampliamente. Sin embargo, a pesar de la variedad, la mayoría intercambiadores de calor se pueden clasificar en algunos tipos comunes basados en algunos conceptos fundamentales de diseño. Para propósitos del presente estudio, limitamos nuestra discusión a los intercambiadores de calor donde los modos primarios de transferencia de calor son la conducción y la convección.

#### **1.4 Equipos de transferencia de calor.<sup>4</sup>**

Si bien los intercambiadores de calor se presentan en una inimaginable variedad de formas y tamaños, la construcción de los intercambiadores está incluida en alguna de las dos siguientes categorías: carcaza y tubo o plato. Como en cualquier dispositivo mecánico, cada uno de estos presenta ventajas o desventajas en su aplicación.

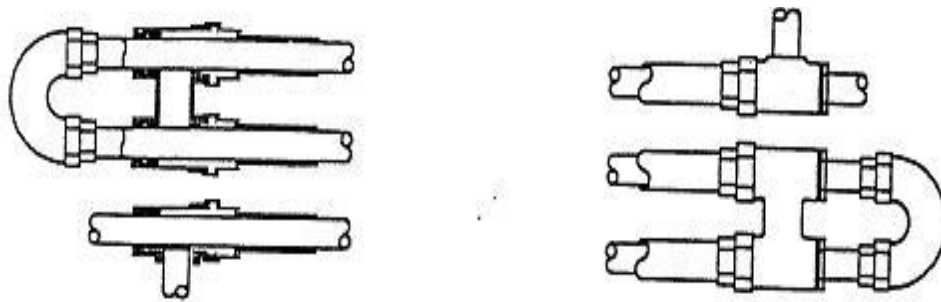
Debido a la gran variedad de procesos en el que se utilizan los equipos de transferencia de calor, existen diferentes tipos de equipos que se conocen con este nombre genérico; la forma de clasificarlos es muy diversa, pero se puede considerar de acuerdo a su tipo de construcción, la siguiente:

- Intercambiadores de doble tubo
- Intercambiadores de tipo evaporativo
- Intercambiadores de placa
- Intercambiadores de serpentín
- Intercambiadores de espiral
- Intercambiadores enfriados por aire
- Intercambiadores de coraza y tubos
- Intercambiadores de rotativo

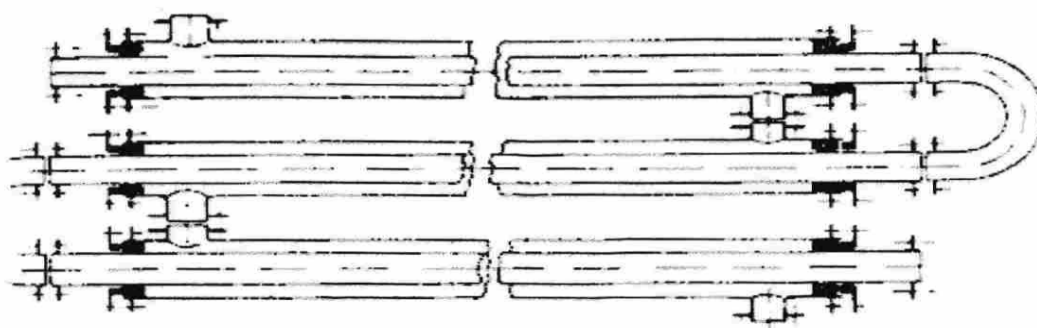
A continuación, se hace una breve descripción de cada uno de los equipos enlistados.

##### **1.4.1 Intercambiadores de doble tubo.**

Son los equipos de transferencia de calor más sencillos que existen, y están formados por dos tubos concéntricos, como lo muestra imagen 1 e imagen 2. Las características favorables de este equipo son su bajo costo, su simpleza de construcción y sus necesidades de mínimo mantenimiento. Sus desventajas son las de resultar de gran tamaño y no poder manejar fluidos a altas presiones. Una de sus principales aplicaciones se encuentra en el manejo de sustancias corrosivas.



**Imagen 1.** Se muestran las Vista seccionada del extremo izquierdo y Vista externa del extremo derecho<sup>4</sup>

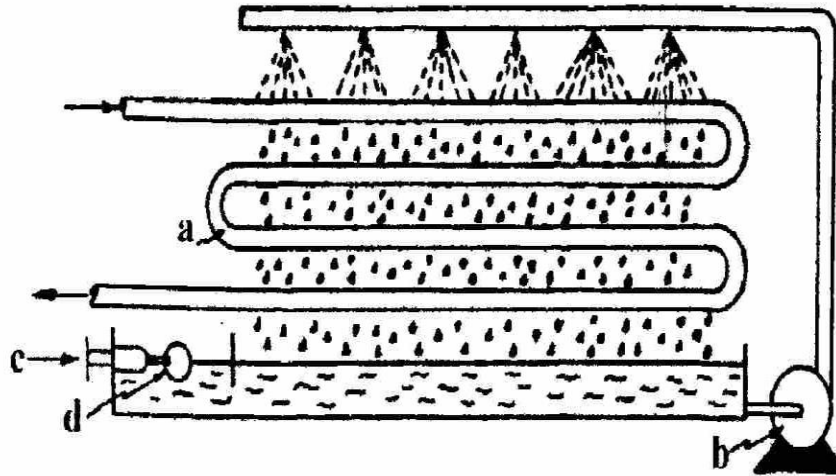


**Imagen 2.** Cambiador de calor de doble tubo<sup>4</sup>

Estos intercambiadores se utilizan cuando los requisitos de área de transferencia son pequeños.

#### 1.4.2 Intercambiadores de tipo evaporativo.

Estos equipos pueden usarse como condensadores o enfriadores de gases. El fluido de enfriamiento es agua que se rocía sobre los tubos por los que en el interior circula el fluido a condensar o a enfriar. El calor transmitido produce la evaporación de agua, por lo que necesita de una reposición permanente. El uso de estos equipos se encuentra principalmente en pequeñas plantas de refrigeración. En la imagen 3 se muestra una descripción esquemática del equipo.

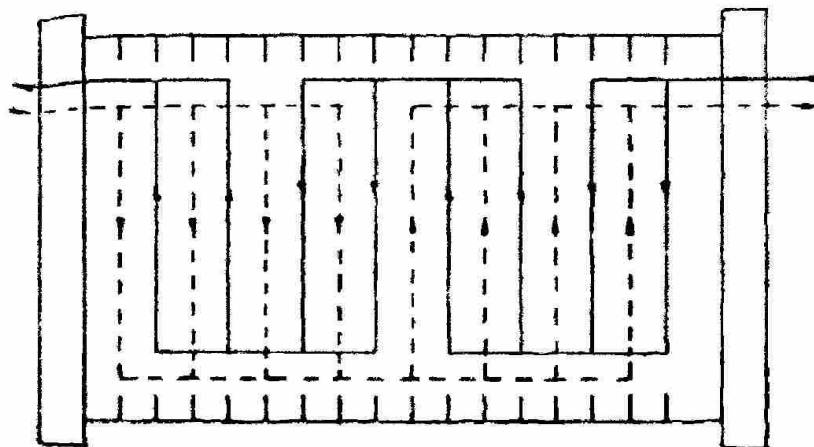


**Imagen 3.** Cambiador de calor de tipo evaporativo<sup>4</sup>

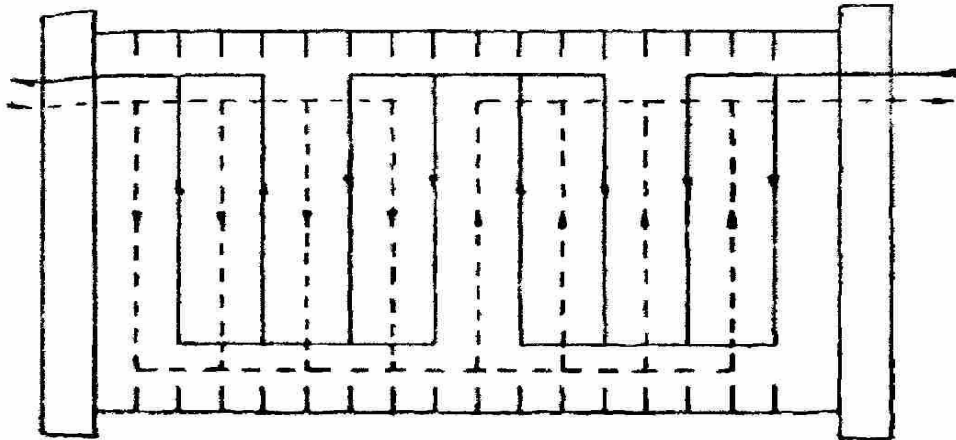
- a. Fluido a enfriar
- b. Bomba de circulación
- c. Alimentación de agua
- d. Válvula de flotador

### 1.4.3 Intercambiadores de placas.

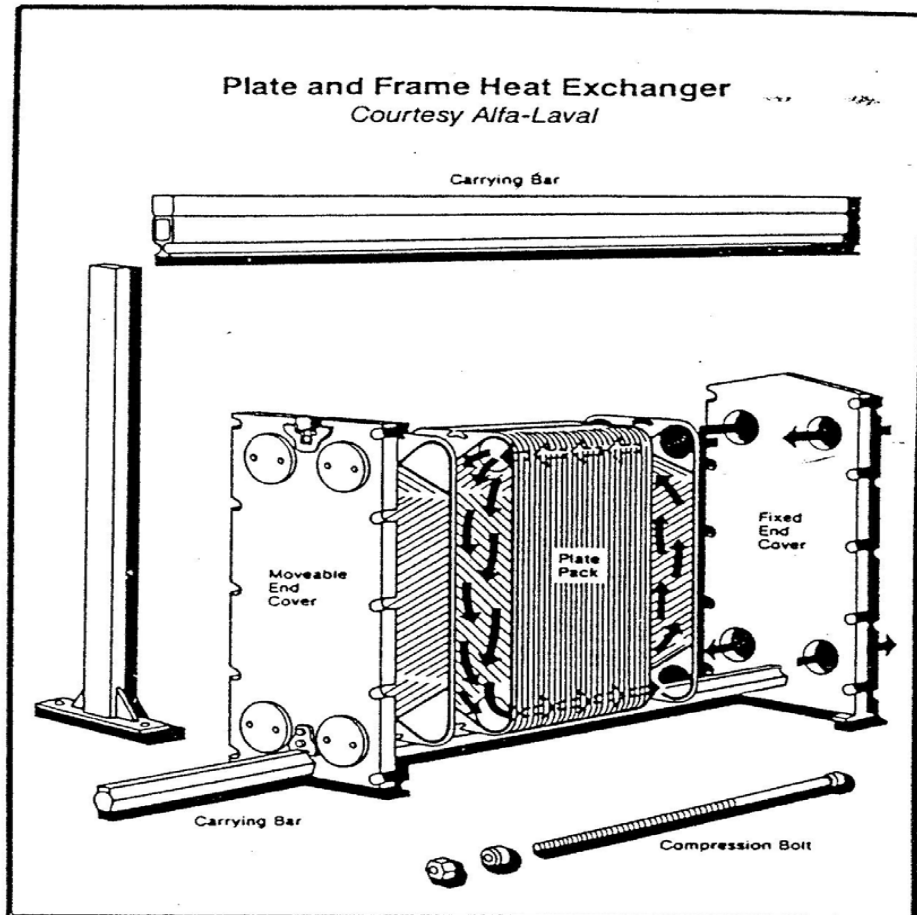
Están formados por placas de espesores de 0.0635 a 0.127 cm, colocadas paralelamente y montadas en marcos fijos que a la vez actúan como repartidores y separadores de los fluidos manejados. La separación entre placas es del orden de 0.102 a 0.203 cm. En las imágenes 4 e imagen 5 se muestra esquemáticamente éste tipo de equipos. Entre sus ventajas se pueden citar su facilidad de limpieza y su flexibilidad de modificar su superficie de transmisión de calor. Sus mayores aplicaciones se encuentran en las industrias alimenticias y farmacéuticas.







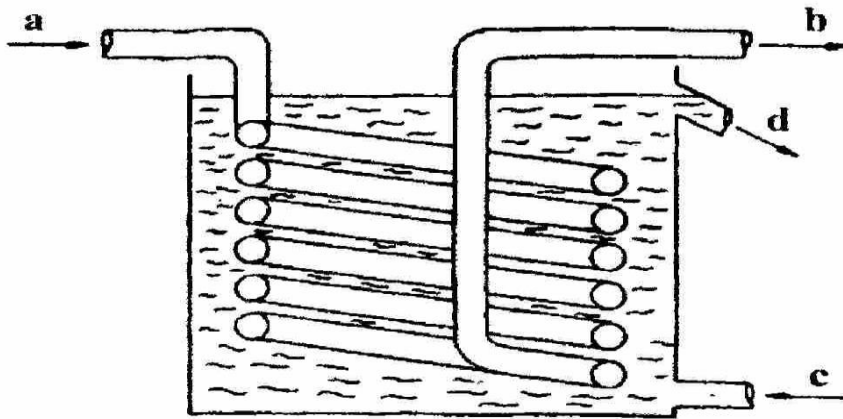
**Imagen 4.** Diagramas de un Intercambiador de Placas.



**Imagen 5.** Representación de un Intercambiador de placas.<sup>4</sup>

#### 1.4.4 Intercambiadores de serpentín.

Consiste en un serpentín colocado en un recipiente por el que circula agua de enfriamiento (Imagen 6). Sus principales aplicaciones se hacen en el enfriamiento de gases a alta presión, y cuando se tiene interés en detectar fugas en forma sencilla.



**Imagen 6.** Representación de un Intercambiador Serpentín.<sup>4</sup>

- a. Entrada de gas
- b. Salida de gas
- c. Entrada de agua
- d. Salida de agua

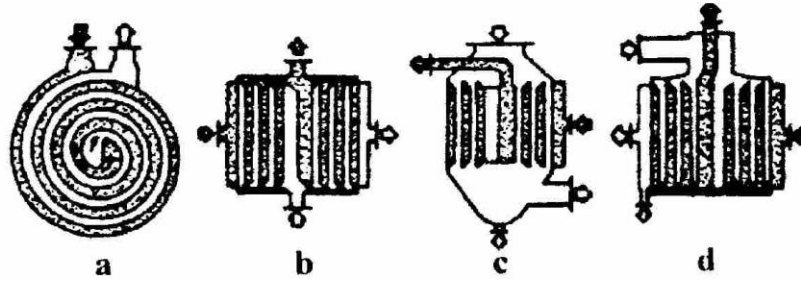
#### 1.4.5 Intercambiadores de espiral.

Están formados por placas enrolladas que mantienen los fluidos separados (imagen 7); las placas se colocan en el interior de un recipiente cilíndrico, cerrado con tapas herméticas por ambos lados.

Los fluidos pueden circular de las siguientes formas:

- Ambos fluidos en espiral
- Un fluido en espiral y otro en forma axial
- Un fluido en forma axial y el otro en forma combinada (espiral y axial)

La ventaja de estos equipos es que pueden manejar cualquier tipo de fluido, incluyendo los que contienen sólidos en suspensión. Como desventaja se presenta la dificultad de limpieza. Sus aplicaciones son a presiones moderadas y principalmente en la industria maderera.



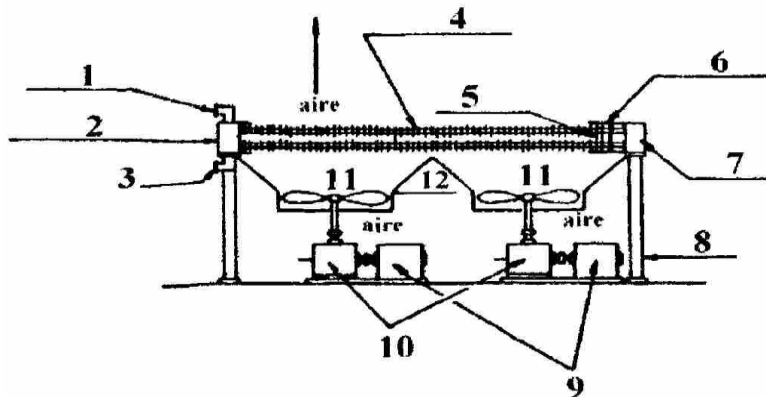
**Imagen 7.** Representación de un Intercambiador Espiral. <sup>4</sup>

### 1.4.6 Intercambiadores enfriados por aire.

Están compuestos por un haz de tubos aletados externamente, montados sobre dos cabezales que hacen las funciones de distribuidor y colector de fluido. Otro elemento primordial son los ventiladores que fuerzan la circulación del aire a través de los tubos aletados. Se conocen dos tipos: de tiro forzado y de tiro inducido.

#### 1.4.6.1 Intercambiadores enfriados por aire de tiro forzado.

Se muestra en la Imagen 8 este tipo de intercambiadores, y su característica principal es que los ventiladores se encuentran colocados antes del paso del aire por los tubos.



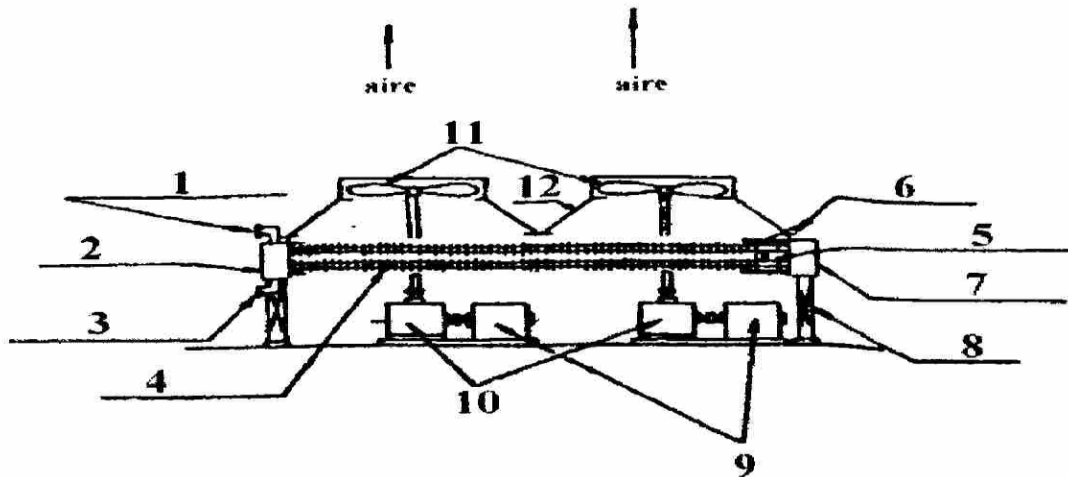
**Imagen 8.** Cambiador de calor enfriado por aire de tiro forzado. <sup>4</sup>

- |                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1. Entrada de fluido caliente | 7. Cabezal flotante       |
| 2. Cabezal fijo               | 8. Soporte                |
| 3. Salida de fluido caliente  | 9. Motor                  |
| 4. Tubos aletados             | 10. Reductor de velocidad |
| 5. Soporte de tubos           | 11. Ventilador            |
| 6. Soporte de canales         | 12. Tiro                  |

#### 1.4.6.2 Intercambiadores enfriados por aire de tiro inducido.

Se muestran en la Imagen 9, y su arreglo característico es que los ventiladores se encuentran colocados después del paso del aire por los tubos. La ventaja de estos equipos es que pueden usarse en lugares donde el agua es escasa o su tratamiento químico resulta muy costoso. Como desventaja se puede señalar su alto costo de adquisición.

**Imagen 9.** Cambiador de calor enfriado por aire de tiro Inducido. <sup>4</sup>



- |                              |                           |
|------------------------------|---------------------------|
| 1. Entrada de Huido caliente | 7. Cabezal flotante       |
| 2. Cabezal fijo              | 8. Soporte                |
| 3. Salida de fluido caliente | 9. Motor                  |
| 4. Tubos aletados            | 10. Reductor de velocidad |
| 5. Soporte de tubos          | 11. Ventilador            |
| 6. Soporte de canales        | 12. Tiro                  |

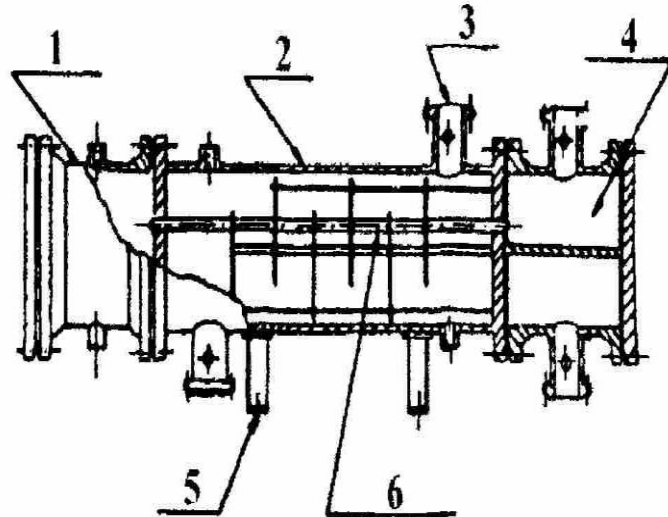
#### 1.4.5 Intercambiadores de carcasa y tubos.

Están compuestos por un haz de tubos contenidos en el interior de una carcasa, sus elementos principales son (imagen 10):

- A. Haz de tubos
- B. Espejos de tubos
- C. Cabezales
- D. Deflectores
- E. Carcasa

Estos equipos tienen la ventaja de ser compactos, y de soportar presiones tan altas o mayores a 400 atm. Sin lugar a dudas es el intercambiador de calor de mayor uso en la industria; los fluidos que pueden manejar son gases o líquidos, incluyendo cambios de fase.

También resultan ser los equipos más estudiados y sobre los que existe una normalización como es el TEMA (Tubular Exchanger Manufacturers Association).

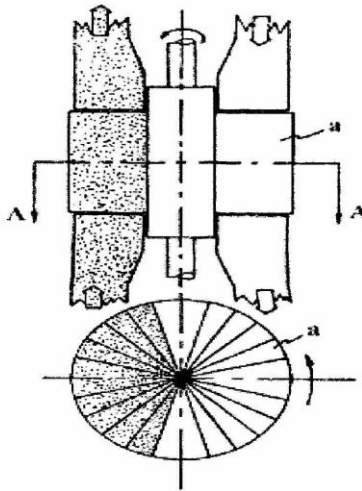


**Imagen 10.** Intercambiador de calor Carcaza y Tubos tipo MEM.<sup>4</sup>

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. Cabezal de retorno | 4. Cabezal de entrada |
| 2. Carcaza            | 5. Soporte            |
| 3. Boquilla           | 6. Haz de tubos       |

#### 1.4.6 Intercambiadores rotativos.

La matriz metálica entra en contacto de manera alterada, con las corrientes de gases calientes y fríos, intercambiando calor de esta forma. Como ventajas de estos equipos se pueden señalar que son muy compactos; a igual superficie de transmisión de calor resultan ser los menos caros, y la dirección alternada del fluido evita las incrustaciones. Como principal desventaja se considera la pequeña mezcla de gases que no es posible evitar.



**Imagen 11.** Cambiador de calor rotatorio Ljungstrom<sup>4</sup>

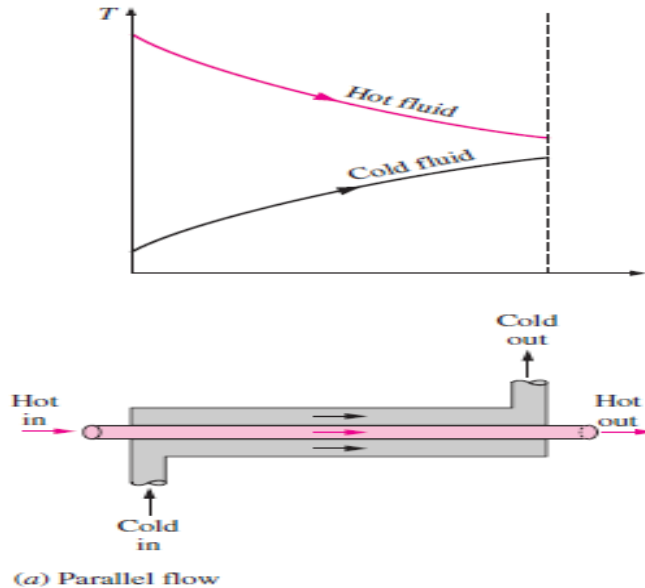
### 1.5 Operación de los intercambiadores de calor.<sup>3</sup>

Ya que los intercambiadores de calor se presentan en muchas formas, tamaños, materiales de fabricación y modelos, estos son categorizados de acuerdo con características comunes. Una de las características comunes que se puede emplear es la dirección relativa que existe entre los dos flujos de fluido. El fluido con menor temperatura nunca alcanza la temperatura del fluido más caliente. Las tres categorías son:

- Flujo paralelo
- Contraflujo
- Flujo Cruzado

#### 1.5.1 Flujo paralelo.

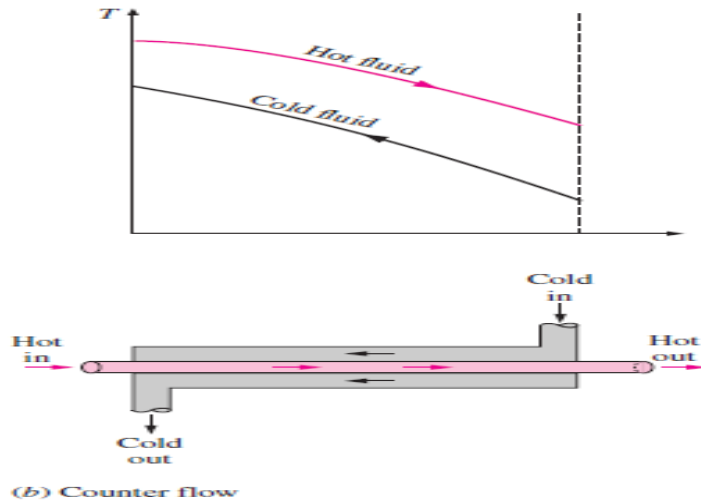
En un intercambiador de calor de flujo paralelo, fluyen los dos fluidos paralelos entre sí, y en la misma dirección. Representa esta configuración de forma esquemática. En un flujo en paralelo los intercambiadores hacen un uso pobre de la diferencia de temperatura que existe entre los fluidos involucrados en la transferencia de intercambiadores de flujo en paralelo sufren más estrés térmico debido a las diferencias de temperatura extremas en la entrada del dispositivo. Los intercambiadores paralelos son más adecuados cuando la meta es llevar los dos fluidos casi a la misma temperatura.



**Imagen 12.** Representación esquemática de un calor de flujo paralelo intercambiador.<sup>3</sup>

### 1.5.2 Contraflujo.

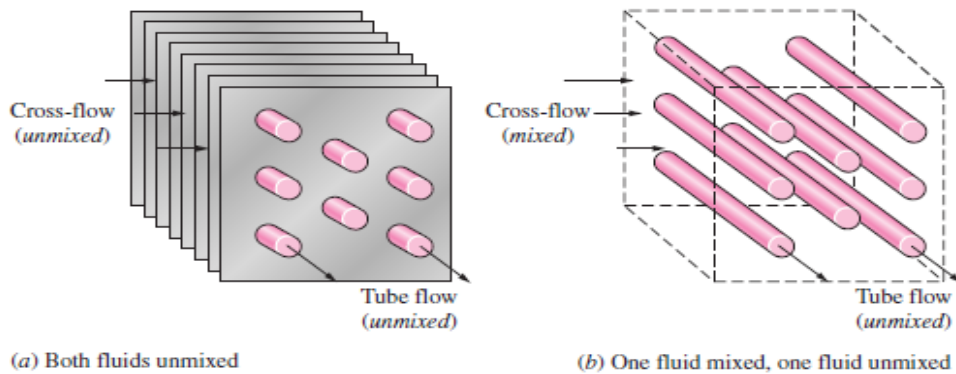
En un intercambiador de calor de contraflujo, los dos fluidos fluyen en direcciones opuestas. La Imagen 13 representa una configuración de este tipo esquemáticamente, mostrando un solo tubo de diámetro más pequeño colocado coaxialmente dentro de un tubo de mayor diámetro. Los dos fluidos fluyen, respectivamente, dentro del tubo interno y a través del espacio anular que separa los dos tubos. En la práctica, se puede insertar una gran cantidad de tubos dentro de un solo tubo circundante, de un diámetro mucho más grande, conocido como la coraza. Los intercambiadores que trabajan en contraflujo hacen uso de la diferencia de temperatura que existe entre los fluidos y puede obtener el mayor cambio de temperatura de cada fluido. El intercambiador en contracorriente normalmente puede transferir más energía que el intercambiador de diseño paralelo, debido a que la temperatura de salida del fluido frío puede acercarse a la mayor temperatura del fluido caliente.



**Imagen 13.** Representación esquemática de un calor de contraflujo intercambiador.<sup>3</sup>

### 1.5.3 Flujo cruzado.

En un intercambiador de flujo cruzado, las dos corrientes fluyen a la derecha el uno al otro. Por ejemplo, en la secuencia *a* podría fluir a través de un conjunto de tubos, dispuestos en un banco, mientras que en la secuencia *b* podría pasar a través de los espacios entre los tubos en una dirección generalmente en ángulo recto a los ejes del tubo. Esquemáticamente, los intercambiadores de flujo cruzado son usualmente representado como se muestra en la imagen 14. Son intermedios en eficiencia entre flujo paralelo, contra flujo y por razones prácticas relacionadas con el conducto de los fluidos hacia la superficie de transferencia de calor, a menudo son más fáciles de construir que cualquiera de los otros dos.



**Imagen 14.** Representación esquemática de un intercambiador de calor de flujo cruzado.<sup>3</sup>



## 1.6 Ecuación básica de diseño.<sup>4</sup>

El flujo térmico de calor transferido de un fluido a otro a través de la superficie de transferencia de calor es:

$$\dot{Q} = AU\Delta T_m \quad (1.12)$$

Donde:

$\dot{Q}$ : Flujo térmico transferido [W] o [Btu/h]

A: Superficie de transferencia de calor [m<sup>2</sup>] o [pie<sup>2</sup>]

U: Coeficiente global de transferencia de calor [W/m<sup>2</sup>-°F] o [Btu/h-pie<sup>2</sup>-°F]

$\Delta T_m$ : Diferencia media logarítmica de temperatura entre los fluidos [°C] o [°F]

## 1.7 Flujo térmico transferido.

Se refiere al flujo térmico cedido por el fluido caliente y ganado por el fluido frío. El cálculo correspondiente se hace con las siguientes ecuaciones:

$$\dot{Q} = \dot{M}C(T_1 - T_2) \quad (1.13)$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c(t_1 - t_2) \quad (1.14)$$

La ecuación (1.13) se refiere al flujo térmico cedido por el fluido caliente, y la ecuación (1.14) se refiere al flujo térmico ganado por el fluido frío. El significado de las literales en esas ecuaciones es el siguiente:

$\dot{M}$ : Gasto másico de fluido caliente [kg/s] o [lb/h]

$\dot{m}$ : Gasto másico del fluido frío [kg/s] o [lb/h]

C: Calor específico del fluido caliente [kJ/kg-°C] o [ Btu/lb-°F]

c: Calor específico del fluido frío [kJ/kg-°C] o [ Btu/lb-°F]

T<sub>1</sub>: Temperatura de entrada del fluido caliente [°C] o [°F]

t<sub>1</sub>: Temperatura de entrada del fluido frío [°C] o [°F]

T<sub>2</sub>: Temperatura de salida del fluido caliente [°C] o [°F]

t<sub>2</sub>: Temperatura de salida del fluido frío [°C] o [°F]

## 1.8 Superficie de transferencia de calor.

Por medio de la ecuación (1.12) se obtiene la superficie de transferencia de calor necesaria para transferir el flujo térmico  $\dot{Q}$ . El diseño térmico tiene como objetivo primordial el de calcular el área de esa superficie.

$$A = \dot{Q}/U\Delta Tm \quad (1.15)$$

### 1.9 Coeficiente global de transferencia de calor.

El coeficiente global de transferencia de calor contiene las diferentes resistencias a la transferencia de calor. Estas resistencias están relacionadas con los diferentes mecanismos de transferencia de calor como son convección (natural o forzada) y conducción (a través del área de transferencia de calor y a través de las incrustaciones que se pueden formar por las sales u otros sólidos suspendidos que pudieran llevar los fluidos que circulen a través del intercambiador y que se pueden adherir a las paredes del mismo). Haciendo referencia al lado del fluido caliente, el coeficiente global de transferencia de calor está dado por la ecuación:

$$U_1 = \frac{1}{\left[ \frac{1}{n_1 h_1} + Re_1 + \frac{1}{k} \frac{A_1}{A_m} + \left( Re_2 + \frac{1}{n_2 h_2} \right) \frac{A_1}{A_2} \right]} \quad (1.16)$$

Los diferentes términos que aparecen en la ecuación son:

- $h_1$ : Coeficiente de convección del lado caliente [W/m<sup>2</sup>-°C] o [Btu/h-pie<sup>2</sup>-°F]
- $h_2$ : Coeficiente de convección del lado frío [W/m<sup>2</sup>-°C] o [Btu/h-pie<sup>2</sup>-°F]
- $Re_1$ : Resistencia de ensuciamiento del lado caliente [m<sup>2</sup>-°C/W] o [h-pie<sup>2</sup>-°F/Btu]
- $Re_2$ : Resistencia de ensuciamiento del lado frío [m<sup>2</sup>-°C/W] o [h-pie<sup>2</sup>-°F/Btu]
- $k$ : Conductividad térmica de la pared [W/m-°C] o [Btu/h-pie-°F]
- $A_1$ : Superficie de transferencia de calor del lado caliente [m<sup>2</sup>] o [pie<sup>2</sup>]
- $A_2$ : Superficie de transferencia de calor del lado frío [m<sup>2</sup>] o [pie<sup>2</sup>]
- $A_m$ : Superficie de transferencia de calor media [m<sup>2</sup>] o [pie<sup>2</sup>]
- $n_1$ : Eficiencia de aletas (si las hay) del lado caliente
- $n_2$ : Eficiencia de aletas (si las hay) del lado frío
- $l$ : Espesor de la pared

Para superficies sin aletas:

$$A_m = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \quad (1.17)$$

Para superficies aletadas:

$$A_m = \frac{1}{2}(n_1 A_1 + n_2 A_2) \quad (1.18)$$

## 1.10 Diferencia media logarítmica de temperatura entre los fluidos.

La diferencia media logarítmica de temperatura  $\Delta T_m$  que se requiere para hacer uso de las ecuaciones (1.13) o (1.15), corresponde a la diferencia equivalente promedio de temperaturas entre los fluidos dentro de los equipos de transferencia de calor.

La circulación de un fluido con respecto a otro puede ser muy variada, pero siempre resultará como una combinación de tres casos típicos:

- a) Flujos en corrientes paralelas del mismo sentido
- b) Flujos en corrientes paralelas en sentido contrario (cortacorriente)
- c) Flujos en corrientes cruzadas

A continuación, se presentan los valores de la diferencia media de temperatura para cada uno de los casos anteriores.

### 1.10.1 Flujos paralelos del mismo sentido.

El diagrama correspondiente a ésta situación se muestra en la figura 1.14. La diferencia media de temperaturas corresponde a la diferencia media logarítmica del mismo sentido:

$$\Delta T_{m_s} = \frac{(T_1 - t_1) - (T_2 - t_2)}{\ln \frac{(T_1 - t_1)}{(T_2 - t_2)}} \quad (1.19)$$

### 1.10.2 Flujos en corrientes paralelas en contracorriente.

La distribución de temperaturas corresponde a la diferencia media logarítmica en contracorriente:

$$\Delta T_{m_\infty} = \frac{(T_1 - t_2) - (T_2 - t_1)}{\ln \frac{(T_1 - t_2)}{(T_2 - t_1)}} \quad (1.20)$$

### 1.10.3 Flujos en corrientes sujetos cruzadas.

En la figura 1.15 se muestra la distribución de temperaturas para éste caso. La diferencia media logarítmica de temperaturas correspondiente está dada por la ecuación:

$$\Delta T_{m_{fc}} = \omega(T_1 - t_1) \quad (1.21)$$

siendo  $\omega = f(x, \psi)$

$$x = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - t_1}$$

$$\psi = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$$

y  $\omega$  se obtiene de la siguiente tabla:

<b>X/Ψ</b>	<b>0.0</b>	<b>0.1</b>	<b>0.2</b>	<b>0.3</b>	<b>0.4</b>	<b>0.5</b>	<b>0.6</b>	<b>0.7</b>	<b>0.8</b>	<b>0.9</b>	<b>1.0</b>
<b>0.0</b>	1000	947	893	836	781	721	657	586	502	386	0
<b>0.1</b>	947	893	840	786	729	670	605	533	448	336	0
<b>0.2</b>	893	840	786	734	677	617	552	480	398	292	0
<b>0.3</b>	836	786	734	677	625	565	502	430	348	247	0
<b>0.4</b>	781	729	677	617	569	513	449	378	300	206	0
<b>0.5</b>	721	670	617	552	513	449	394	326	251	167	0
<b>0.6</b>	657	605	552	502	449	394	334	271	201	128	0
<b>0.7</b>	586	533	480	430	378	326	271	213	151	89	0
<b>0.8</b>	502	446	398	348	300	251	201	151	100	52	0
<b>0.9</b>	388	336	292	247	206	167	128	80	52	22	0
<b>1.0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Imagen 15.** Valores para 1000  $\omega$  en función de **X/Ψ**.

### 1.11 Flujos combinados.

Generalmente, los flujos en equipos de transferencia de calor son más complicados a los señalados anteriormente, y por la misma razón, el cálculo de la diferencia media logarítmica de temperaturas resulta muy complicada. El procedimiento que se sigue para su cálculo es usar la diferencia media logarítmica del caso de contracorriente y aplicarle un factor de corrección F, que depende del tipo de equipo.

Se presenta algunas ecuaciones típicas que permiten el cálculo de F para los tipos de Intercambiadores de calor de coraza y tubos que se muestran.

Así:

$$\Delta T_m = F \Delta T_{m\infty} \quad (1.22)$$

En los casos mostrados, la nomenclatura de las temperaturas es la siguiente:

$T_1$ : Temperatura de entrada del fluido a la carcaza

$t_1$ : Temperatura de entrada del fluido de los tubos

$T_2$ : Temperatura de salida del fluido de la carcaza

$t_2$ : Temperatura de salida del fluido de los tubos

F: Está en función de los parámetros P y R que se conocen como eficiencia térmica y capacidad calorífica respectivamente, expresándose de la siguiente forma:

(1.23)

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$$

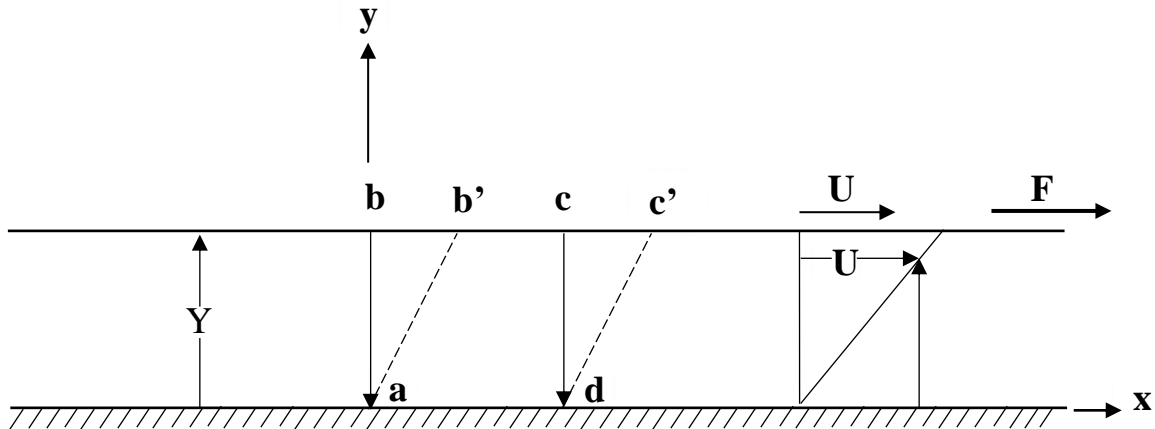
$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} \quad (1.24)$$

El cálculo de  $\Delta T m_\infty$  se hace partiendo de considerar que el equipo funciona en contra corriente pura.

## CAPÍTULO. 2 INTRODUCCIÓN

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante, por muy pequeño que sea. Un esfuerzo cortante en un punto se puede definir como el límite del cociente entre fuerza cortante (aquella que se aplica tangente a una superficie) y el área cuando el área se tiende a cero en el punto.

En la Imagen 16 se representa una sustancia que se ha colocado entre dos placas paralelas muy próximas y lo suficientemente largas para que puedan despreciarse las condiciones en los bordes. La placa inferior esta quieta y sobre la superior se aplica una fuerza  $F$ , que origina un esfuerzo cortante,  $F/A$ , en la sustancia colocada entre las placas ( $A$  es el área de la placa superior). Cuando esta fuerza  $F$ , por muy pequeña que sea, hace mover a la placa superior con una velocidad constante,  $U$ , (no nula), se puede concluir que la sustancia situada entre las placas es un fluido.



**Imagen 16.** Deformación resultante aplicada por una fuerza de cortadura constante.<sup>3</sup>

### 2.1 Fluido.<sup>6</sup>

Un hecho experimental que se ha comprobado en innumerables ensayos con varios tipos de fluidos y materiales es que el fluido en inmediato contacto con la pared sólida adquiere la misma velocidad de las paredes, a esto se le conoce como condición de no deslizamiento.

La experiencia demuestra que, si las otras magnitudes se mantienen constantes,  $F$  es directamente proporcional a  $A$  y  $U$  e inversamente proporcional a  $Y$  (distancia entre las placas), de manera que:

$$F = -\mu \frac{AU}{Y} \quad (2.0)$$

siendo  $\mu$  el factor de proporcionalidad. Como el esfuerzo cortante es  $\tau = F/A$ , resulta

$$\tau = -\mu \frac{U}{Y} \quad (2.1)$$

La relación  $U/Y$  es la deformación angular de la línea  $ab$ , o la rapidez de deformación del fluido, es decir, la disminución es la del ángulo “bad” en la unidad de tiempo. La deformación angular puede también escribirse como  $du/dy$ , y ambas,  $U/A$  y  $du/dy$ , expresan la variación de velocidad dividida por la distancia en la que se produce dicha variación. Sin embargo,  $du/dy$  es más general y sirve en todos los casos, aun en aquellos en que la velocidad angular y el esfuerzo cortante varían. La velocidad angular  $du/dy$  puede también ser considerada como el cociente de la velocidad con que una capa del fluido se mueve en relación con la capa adyacente. En forma diferencial la ecuación 2.1 puede escribirse como

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.2)$$

Es decir, existe una proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y el negativo de la rapidez de deformación de un fluido. El factor de proporcionalidad se llama viscosidad del fluido, y la (Ec. 2.2) se conoce como la ley de la viscosidad de Newton.

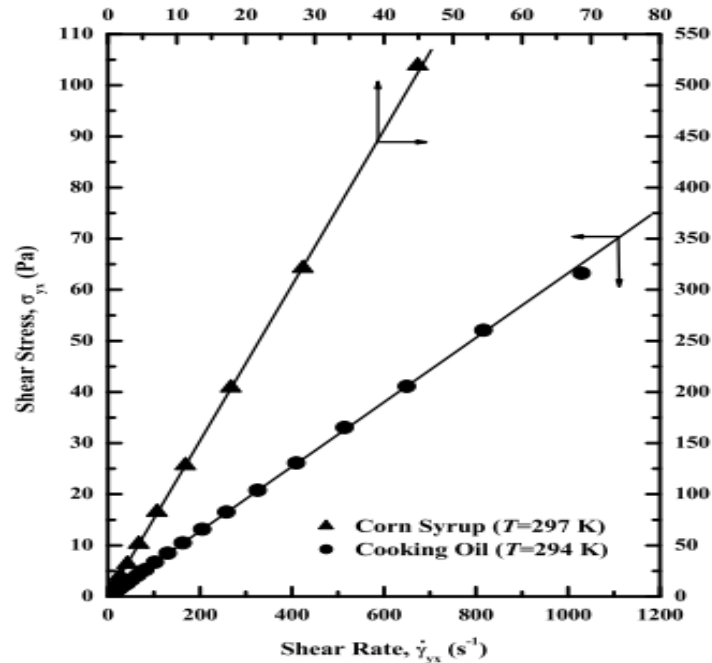
## 2.2 Fluido newtoniano. 7

Cuando un fluido se somete a una deformación de esfuerzo cortante simple (Imagen. 15), la respuesta de un fluido newtoniano se caracteriza por una relación lineal entre el esfuerzo de corte aplicado y el negativo de la velocidad de corte, es decir:

$$\tau_{yx} = \frac{F}{A} = -\mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (2.3)$$

En donde el subíndice “x”, refiere la dirección en la que fluye el fluido y el subíndice “y” la dirección en la que cambia la velocidad del fluido (cero en la placa inferior y hasta  $U$  en la placa superior).

La (Imagen. 16) muestra resultados experimentales para un jarabe de maíz y para un aceite de cocina que confirma su comportamiento como fluido newtoniano; las curvas de flujo pasan por el origen y los valores de viscosidad son  $\mu = 11.6$  Pa.s para el jarabe de maíz y  $\mu = 64$  mPa.s para el aceite de cocina.



**Imagen. 16.** Diagrama de esfuerzo y de rapidez de deformación para dos fluidos Newtonianos.<sup>5</sup>

Shear stress (Esfuerzo Cortante) y Shear rate (Rapidez de Deformación).<sup>5</sup>

### 2.3 Fluido no newtoniano.<sup>7</sup>

Todo aquel fluido que no cumple las condiciones para ser un fluido newtoniano es no newtoniano, se clasifica como no newtoniano. Lo será aquel fluido cuyo reograma (diagrama esfuerzo-rapidez de deformación) no es lineal o no pasa por el origen, es decir, aquella cuya viscosidad aparente no es constante para unas condiciones de presión y temperatura dadas, dependiendo de condiciones de flujo tales como su geometría, y el valor del esfuerzo cortante e incluso de la historia cinemática del fluido. Ejemplos de fluidos que tienen un comportamiento no newtoniano son las soluciones poliméricas, los polímeros fundidos, algunas emulsiones, etc.

En los fluidos existen diferentes tipos de comportamientos no newtonianos que se pueden presentar. La primera clasificación de los comportamientos no newtonianos puede ser a partir de su respuesta temporal, distinguiendo dos categorías:



1. **Fluidos independientes del tiempo**, puramente viscosos o inelásticos. Para los fluidos clasificados en esta categoría, la viscosidad en cualquier instante depende únicamente del esfuerzo cortante en dicho instante.
2. **Fluidos dependientes del tiempo**. La viscosidad del fluido depende, además del valor del esfuerzo aplicado, de la duración del mismo y de su historia cinemática y muestran una recuperación parcial elástica tras el cese del esfuerzo cortante.

Es importante constatar que los fluidos reales tendrán a menudo un comportamiento que será combinación de estos dos comportamientos, aunque siempre se podrá identificar uno de ellos como dominante. Algunos ejemplos de estos fluidos dependientes del tiempo e independientes del tiempo son:

<b>FLUIDOS NO NEWTONIANOS</b>	
Comportamiento independiente del tiempo	Comportamiento dependiente del tiempo
<b>Pseudoplástico</b> <b>Dilatante</b> <b>Plástico de Bingham</b> <b>Plástico de Casson</b>	<b>Tixotrópico</b> <b>Reopéxico</b>

**Imagen. 17.** Cuadro comparativo de comportamientos dependientes e independientes del tiempo.<sup>7</sup>

### 2.3.1 Fluidos no newtonianos inelásticos o viscosos (independientes del tiempo).

El comportamiento de este tipo de fluidos ante esfuerzos cortantes puede describirse por una relación simple del tipo:

$$\dot{\gamma} = \Psi(\tau) \quad (2.4)$$

**Donde:**

$\dot{\gamma}$  = La rapidez de Deformación.

$\tau$  = Esfuerzo Cortante.

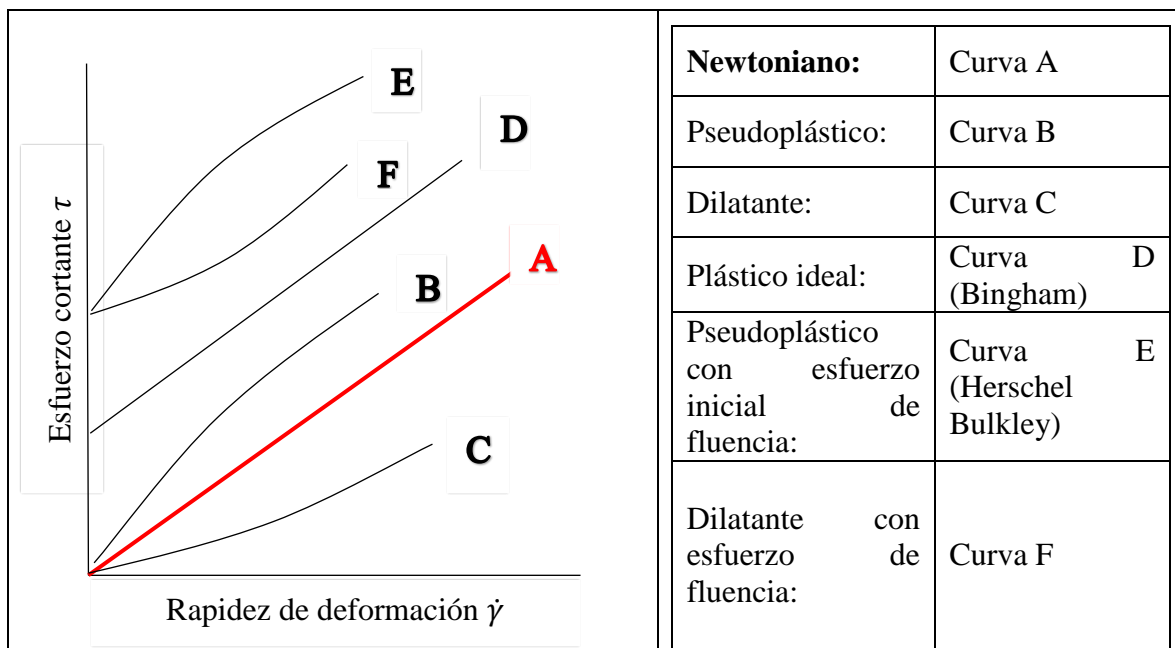
$\Psi$  = Función dependiente del esfuerzo.

Así, dependiendo de la forma que adopte la función  $\Psi$  los fluidos se pueden clasificar en tres subgrupos:

**Pseudoplásticos (Shear-thinning).** Es uno de los fluidos más ampliamente encontrado en la práctica de ingeniería. Se caracteriza porque la viscosidad aparente del fluido disminuye al aumentar el esfuerzo cortante al que están sometidos. Muchos alimentos muestran un comportamiento pseudoplástico como: el puré de frutas y vegetales, la mostaza, crema de leche, jugo de manzana (50-65 °Brix).

**Dilatantes (Shear-thickening).** La viscosidad aparente del fluido aumenta con el incremento del esfuerzo cortante. Es el comportamiento opuesto al de los fluidos Pseudoplásticos. Ejemplos de fluidos dilatantes son: las suspensiones de almidón, la miel de eucalipto facifolia o la miel de eucaliptos eugenioles.

**Visco-plásticos o fluidos tipo Bingham.** Estos fluidos se caracterizan por un valor límite de esfuerzo tangencial (yield stress), que debe excederse para que el material comience a fluir. En este tipo de fluidos una vez que se ha alcanzado el esfuerzo tangencial inicial estos pueden tener un comportamiento lineal o no lineal como lo muestran las curvas D, E y F, de la imagen 18.



**Imagen. 18** Tipos de comportamiento de flujos independientes del tiempo.<sup>7</sup>

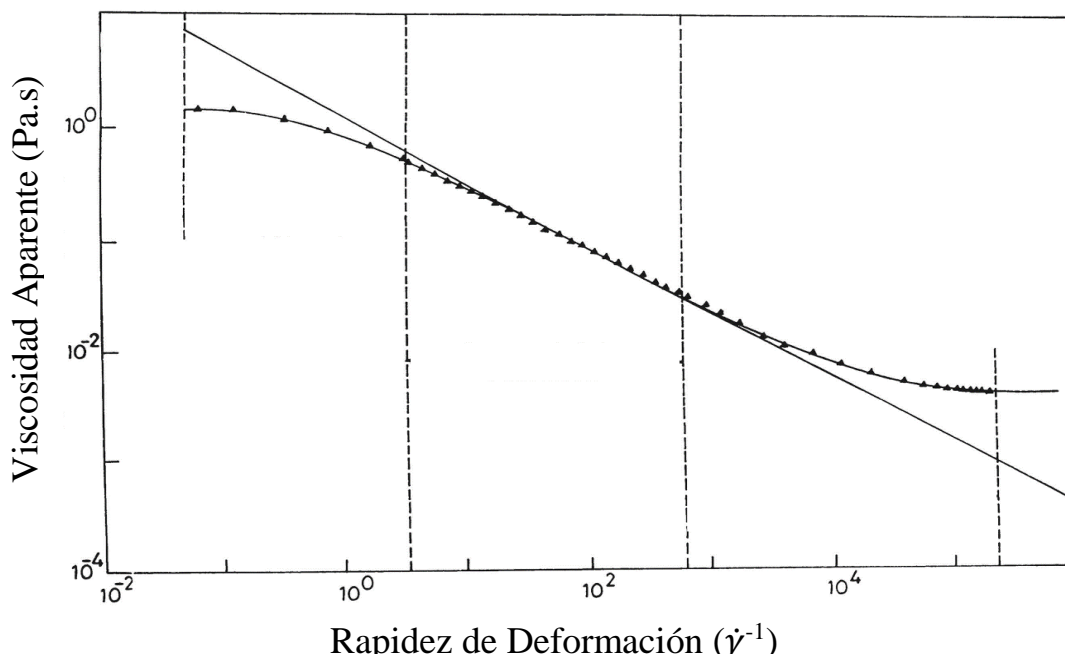
El comportamiento newtoniano y no newtoniano puede manifestarse en un mismo fluido, dependiendo de la rapidez de deformación o esfuerzo cortante al que es sometido, como puede apreciarse en la figura 19. En esta figura encontramos que, para un fluido en particular, se puede tener a baja rapidez de deformación,  $\dot{\gamma}$ , una zona de comportamiento newtoniano caracterizada por la meseta en donde la viscosidad aparente,  $\eta_o$ , es constante.

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\tau_{yx}}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \quad (2.5)$$

Después de esta primera zona nos encontramos un comportamiento pseudoplástico ya que como se observa en la figura hay una caída en la viscosidad aparente frente a la rapidez de deformación.

Finalmente, a alta rapidez de deformación,  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ , se tiene una nueva zona de comportamiento newtoniano.

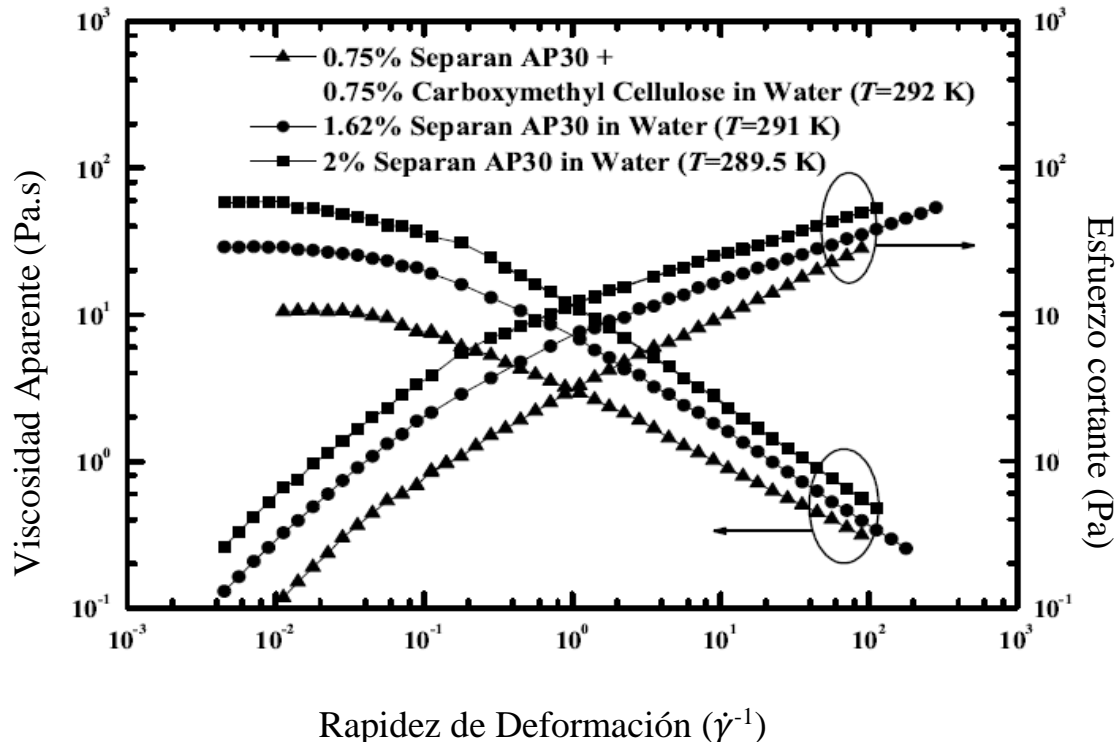
$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\tau_{yx}}{\dot{\gamma}} = \eta_\infty \quad (2.6)$$



**Imagen. 19** Demostración de esfuerzo cero y viscosidades de corte infinita para una solución de polímero.<sup>5</sup>

La imagen 20 muestra ejemplos de tres soluciones poliméricas que muestran un comportamiento newtoniano en el rango,  $\dot{\gamma}$ , comprendido entre  $10^{-2}$  y  $100$  s $^{-1}$ , y la zona pseudoplástica se manifiesta por arriba de los  $100$  s $^{-1}$ .

Por último, el valor de la rapidez de deformación que marca el inicio del comportamiento pseudoplástico o adelgazante es influenciado por varios factores tales como la naturaleza y concentración del polímero, la naturaleza del solvente, etc.



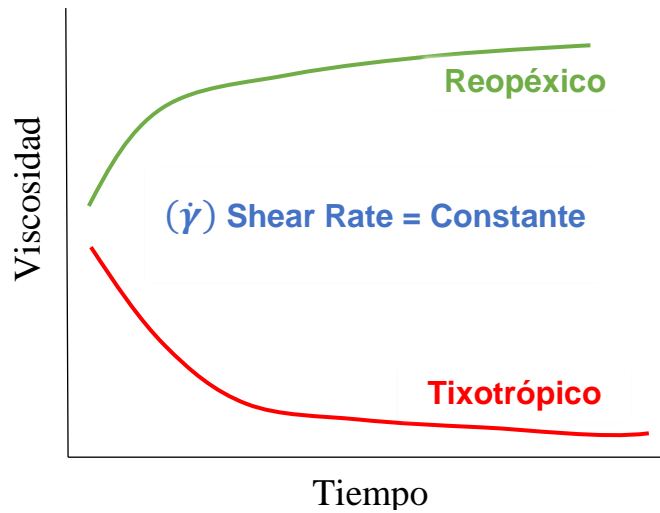
**Imagen. 20** Representación de Esfuerzo cortante y viscosidad aparente para tres diferentes tipos de soluciones poliméricas. <sup>5</sup>

### 2.3.2 Fluidos no newtonianos reopéxicos y tixotrópicos (dependientes del tiempo).

Estos fluidos se caracterizan porque sus propiedades varían con la duración del corte (esfuerzo cortante o velocidad de corte) y suelen dividirse en: **tixotrópicos** y **reopéxicos**.

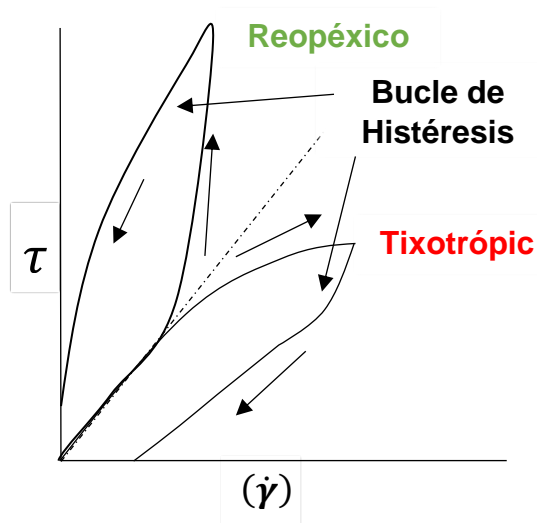
Para el fluido **reopéxico** se tiene un incremento en la viscosidad aparente con el tiempo a una velocidad o esfuerzo constantes, (Línea verde de la Imagen 21), seguido de una recuperación gradual cuando el esfuerzo o la velocidad son retirados.

En el fluido **tixotrópico** se observa un descenso en la viscosidad aparente con el tiempo a una velocidad o esfuerzo constantes (Línea roja de la Imagen 21), seguido de una recuperación gradual cuando el esfuerzo o la velocidad son retirados.



**Imagen. 21.** Tipos de comportamiento de flujos dependientes del tiempo.<sup>7</sup>

Estos tipos de fluidos generalmente presentan el fenómeno de histéresis. Como se observa en la siguiente Imagen 22.



**Imagen. 22** Lazo y área de histéresis de fluidos dependientes del tiempo.<sup>7</sup>

Algunos ejemplos de fluidos Reopexia y Tixotropía son:

La miel de brezo tiene comportamiento tixotrópico.

La miel de eucalipto tiene comportamiento reopéxico.

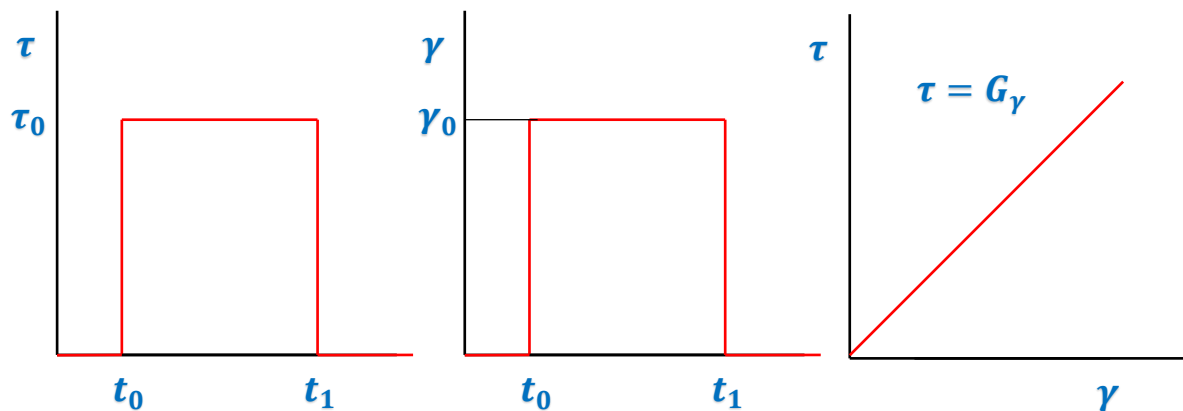
La clara de huevo por efecto de la agitación tiene comportamiento reopéxico.

Las sustancias sol-gel tiene un comportamiento tixotrópico (en la transición gel-sol, el gel tiene mayor viscosidad que sol).

## 2.4 Fluidos viscoelásticos.

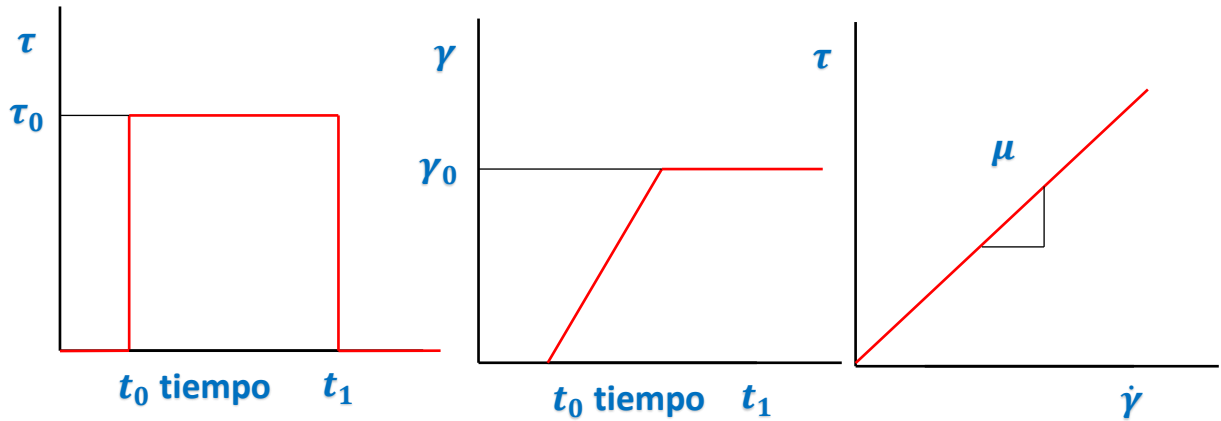
Los fluidos viscoelásticos se caracterizan por presentar a la vez tanto propiedades viscosas como elásticas. Esta mezcla de propiedades puede ser debida a la existencia en el líquido de moléculas muy largas y flexibles. Ejemplos de fluidos viscoelásticos son: la nata, algunas soluciones micelares que sean capaces de formar micelas gusano o también conocidas como micelas gigantes (como el Bromuro de cetiltrimetilamonio, CTAB), y la mayoría de soluciones poliméricas. Para entender mejor la naturaleza viscoelástica de los fluidos es necesario recordar la teoría clásica de la elasticidad, que considera las propiedades mecánicas de los sólidos elásticos, y la teoría clásica de la dinámica de fluidos, que trata entre otras cosas de las propiedades que exhiben los líquidos viscosos. Para un sólido de Hooke ideal, al aplicarle una fuerza externa al material, en un tiempo determinado (entre  $t_0$  y  $t_1$ , por ejemplo), se desarrollan esfuerzos en el sólido los cuales pueden dar lugar a una deformación que se manifestará en ese tiempo, cuando se deja de aplicar esa fuerza externa los esfuerzos en el sólido dejan de manifestarse de manera instantánea al igual que la deformación.

Además, para un sólido de Hooke ideal la relación esfuerzo deformación es directamente proporcional y su pendiente es el modelo elástico (**Imagen 23**).



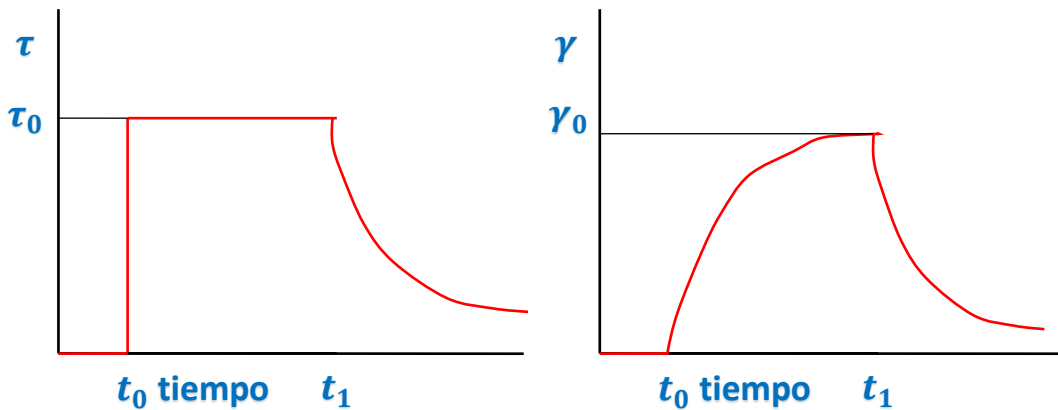
**Imagen 23.** Modelo elástico

En el caso de los líquidos viscosos newtonianos al imponerle una fuerza cortante en un periodo de tiempo, el fluido se deformará de manera continua y cuando la fuerza se retire el fluido permanecerá deformado de manera permanente. En el caso de los fluidos newtonianos, como ya se mencionó anteriormente, la relación entre el esfuerzo y la rapidez de deformación es lineal y comienza en el origen y su pendiente es la viscosidad.



**Imagen 24.** Relación esfuerzo y la rapidez de deformación.

Finalmente, los fluidos viscoelásticos manifiestan tanto propiedades de un sólido como las de un fluido. Así, cuando un fluido viscoelástico es sometido a una fuerza externa, como puede ser en un flujo cortante simple, ni los esfuerzos ni la deformación se detienen de manera instantánea cuando se retira dicha fuerza durante un periodo de tiempo determinado y que exhiben un decremento monótono (**ver Imagen 25**). En la mayoría de los casos de fluidos viscoelásticos la relación esfuerzo deformación solo es lineal en un rango de rapidez de deformación muy pequeño en general la relación es no lineal.



**Imagen 25.** Relación esfuerzo deformación contra tiempo.

## 2.5 Número de Deborah y Numero de Weissenberg.

Un parámetro utilizado para caracterizar o clasificar las sustancias de acuerdo a su comportamiento elástico, viscoso o viscoelástico es el número de Deborah. Este número se define como:

$$De = \lambda/t \quad (2.8)$$

donde  $t$  es un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido una determinada sustancia y  $\lambda$  es un tiempo de relajación característico de dicha sustancia; el tiempo de relajación es infinito para un sólido de Hooke y cero para un fluido de Newton.

Para aquellas sustancias con  $De < 1$  se mostrarán unos comportamientos predominantemente viscosos, aquellas en las que el  $De > 1$  se comportarán manifestando predominantemente un comportamiento elástico y para aquellas sustancias en las que el  $De \approx 1$  mostrarán un comportamiento viscoelástico, es decir, un comportamiento intermedio entre elástico y viscoso.

Según el concepto del número de Débora todas las sustancias pueden fluir, sólo hay que esperar el tiempo necesario,  $t$ . De esta forma, un material puede comportarse como un sólido de Hooke si tiene un tiempo de relajación muy grande o si es sometido a un proceso de deformación en un tiempo muy bajo.

El número de Weissenberg es muy semejante al de Deborah y se puede definir como:

$$We = \lambda\dot{\gamma} \quad (2.9)$$

donde  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de deformación, por ejemplo, cuando el fluido es sometido a un flujo cortante simple.

Así que de manera análoga al Deborah para aquellas sustancias con  $We < 1$  el comportamiento es predominantemente viscoso, aquellas en las que el  $We > 1$  serán predominantemente elásticas y para aquellas sustancias en las que el  $We \approx 1$  mostrarán un comportamiento viscoelástico.



## 2.6 Ecuaciones Constitutivas de fluidos no newtonianos viscosos o Inelásticos.

### 2.6.1 Ecuación de Ley de potencia u Ostwald de Waele.

Este modelo sirve para el comportamiento de fluidos pseudoplásticos y dilatantes. Tiene dos parámetros, conocidos como índice de consistencia de flujo (K) y un índice de comportamiento de flujo (n).

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n \quad (2.10)$$

Donde:

K= Consistencia

n= Índice de la potencia

$\tau$ = El esfuerzo cortante

$\dot{\gamma}$ = La rapidez de deformación

Si se escribe, en términos de la viscosidad aparente seria:,

$$\eta = K(\dot{\gamma})^{n-1} \quad (2.11)$$

Los valores de n permiten identificar el comportamiento reologico de la suspensión, así:

<b>Pseudoplásticos</b>	$\tau = K\dot{\gamma}^n$	$n < 1$
<b>Dilatantes</b>	$\tau = K\dot{\gamma}^n$	$n > 1$
<b>Ley de Newton de la viscosidad</b>	$\tau = K\dot{\gamma}^n$	$n = 1, K=\mu$

**Imagen. 26** Relaciones de las leyes de la potencia.

### 2.6.2 La Ecuación de Cross.

Cross presentó en 1965, la siguiente forma empírica escrito como:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{1}{1 + m(\dot{\gamma})^n} \quad (2.12)$$

Donde  $\eta$  es la viscosidad,  $m$  es una constante con unidades de tiempo y  $n$  es una constante adimensional. Se puede ver fácilmente que la estructura de la ecuación (2.12) asume que se debe conocer los valores de las viscosidades Newtonianas a baja y alta rapidez de deformación  $\eta_0 - \eta_\infty$ , además de los parámetros  $m$  y  $n$ , los cuales deben ser determinados experimentalmente. Manipulando la ecuación (2.12) se puede obtener una forma más sencilla del modelo de la viscosidad de Cross, como:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = m(\dot{\gamma})^n \quad (2.13)$$

### 2.6.3 El Modelo De Fluido De Ellis.

El modelo de Ellis es una ilustración de la forma inversa, la ecuación (2.10). Está escrita de la siguiente manera:

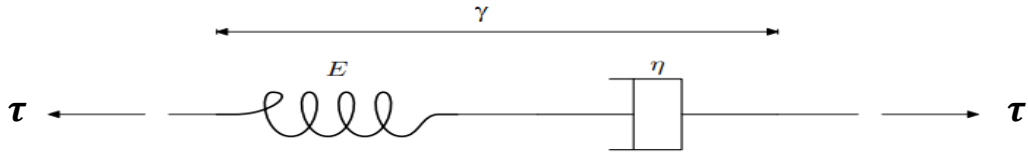
$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}}\right)^{\alpha-1}} \quad (2.14)$$

En la ecuación (2.14)  $\eta_0$  la viscosidad de corte es cero y de los dos parámetros restantes  $\tau_{1/2}$  y  $\alpha > 1$  son ajustados para obtener el mejor conjunto de datos dado. Claramente  $\alpha > 1$  los valores disminuyen de la viscosidad de corte al aumentar la rapidez de deformación. Se ve fácilmente que el límite newtoniano se recupera estableciendo  $\tau_{1/2} \rightarrow \infty$ . Además, cuando  $\frac{\tau}{\tau_{1/2}}$  la ecuación (2.14) se reduce al modelo de ley de potencia, la ecuación (2.10) o (2.11).

### 2.6.4 Fluidos Viscoelásticos.

Los fluidos viscoelásticos, como ya se mencionó, exhiben características tanto viscosas como elásticas cuando sufren una deformación. Algunos ejemplos de tales fluidos son las soluciones poliméricas, las soluciones de micelas gigantes, o todas aquellas soluciones que contengan moléculas de gran tamaño que sean capaces de entrelazarse física o químicamente entre ellas formando estructura.

Una ecuación que permite evaluar la relación esfuerzo deformación para este tipo de fluidos es la Ecuación de Maxwell. Esta ecuación es muy sencilla de obtener si utilizamos un modelo mecánico basado en el comportamiento lineal de un sólido elástico deformable y la deformación un fluido viscoso newtoniano. El modelo mecánico de Maxwell consiste entonces combinar un resorte y un amortiguador en serie (**Imagen 27**).



**Imagen 27. Modelo reológico de Maxwell**

Este elemento de Maxwell es sometido a una deformación constante y la fuerza de tensión aplicada la recibe tanto en el resorte como en el amortiguador. Entonces, la deformación del conjunto resulta de las contribuciones de ambos modelos elementales (Hooke y Newton) y por tanto se puede escribir como:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta} \quad (2.15)$$

Reacomodando la ecuación (2.15) tenemos,

$$\eta \dot{\gamma} = \tau + \frac{\eta}{E} \frac{d\tau}{dt} = \tau + \lambda \frac{d\tau}{dt} \quad (2.16)$$

donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación del material. Si la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$ , es mucho menor que  $1/\lambda$ , el amortiguador domina y el fluido se comporta como un fluido Newtoniano. Por otro lado, si  $\dot{\gamma}$  es mucho mayor a  $1/\lambda$  entonces el resorte domina y el material se comporta como un sólido elástico.

El modelo de Maxwell es muy sencillo y correlacionan adecuadamente los resultados experimentales en la zona en la que la relación esfuerzo deformación es lineal, es decir, para deformaciones muy bajas, a esta zona se le denomina como de "viscoelasticidad lineal. Para deformaciones mayores, dicha relación deja de ser lineal y se alcanza la denominada zona de viscoelasticidad no lineal, para la cual se han propuesto otro tipo de ecuaciones

## 2.7 Ecuaciones constitutivas no lineales.

### 2.7.1 Modelo de Maxwell Convectivo Superior (UMC, Upper Maxwell Convective).

Para un flujo en estado estacionario el modelo de Maxwell no predice esfuerzos normales y la viscosidad no es función de la rapidez de deformación,  $\dot{\gamma}$ , predicciones no son adecuadas para fluidos cuya viscosidad muestre dependencia con la rapidez de deformación y/o para fluidos que presentan hinchamiento debido al desarrollo de esfuerzos normales en el fluido, como lo son por ejemplo polímeros fundidos.

Una ecuación más adecuada que permite predecir esfuerzos normales es la ecuación de Maxwell Convectiva Superior (UMC por sus siglas en inglés), en la cual la derivada ordinaria del esfuerzo con respecto al tiempo se sustituye por una derivada convectiva, que es una derivada codeformacional cuyo significado es la rapidez de cambio observada en el sistema de referencia (partícula material) cuando se traslada y deforma con el fluido. Entonces la ecuación de Maxwell Convectiva Superior se expresa como:

$$\bar{\tau} + \lambda \overset{\boxplus}{\tau} = -\eta \overset{\boxplus}{\gamma} \quad (2.17)$$

$\overset{\boxplus}{\tau}$  es la derivada convectiva codeformacional superior que se define como:

$$\overset{\boxplus}{\tau} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla \bar{\tau}) - [(\nabla \bar{v}) \cdot \bar{\tau} + \bar{\tau} \cdot (\nabla \bar{v})] \quad (2.18)$$

Esta ecuación constitutiva se llama modelo de Maxwell Convectivo Superior. Los puntos más importantes que se deben señalar son que para pruebas dinámicas de baja amplitud las propiedades mecánicas son las mismas que las producidas por el modelo lineal viscoelástico (2.18). Además, para flujo de cortante, el modelo predice aun en estado estacionario los esfuerzos normales, sin embargo, tanto la viscosidad y los esfuerzos normales son constantes y no dependen de  $\dot{\gamma}$ .

### 2.7.2 Ecuación constitutiva de Phan Thien-Tanner (PTT).

La ecuación de Phan Thien-Tanner permite describir tanto las funciones materiales cortantes como extensionales. Esta ecuación es ampliamente usada en la simulación de soluciones poliméricas o de polímero fundido ya sea sometidos a deformación corte o extensional. La mayor contribución de esta ecuación es en la adecuada predicción del comportamiento de la viscosidad extensional ya que mientras la ecuación de Maxwell Convectiva Superior predice una viscosidad extensional infinita para ciertos valores de  $\dot{\gamma}$ , la versión exponencial de Phan Thien-Tanner presenta un máximo en la viscosidad extensional y limita su crecimiento haciendo que la predicción de la viscosidad tenga un valor finito.

La ecuación de Phan Thien-Tanner se expresa como:

$$Z(tr\bar{\tau})\bar{\tau} + \lambda\dot{\bar{\tau}} = -\eta\bar{\gamma} \quad (2.19)$$

En este caso la derivada convectiva superior se define como:

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla \bar{\tau}) - [\bar{L} \cdot \bar{\tau} + \bar{\tau} \cdot \bar{L}] \quad (2.20)$$

Donde  $\bar{L} = (\nabla \bar{v} - \xi \bar{\gamma})$ ,  $\xi$  es un parámetro de la ecuación relacionado con su comportamiento adelgazante o de engrosamiento al corte que no está incluido en la ecuación de Maxwell Convectivo Superior, de hecho, si  $\xi = 0$  se obtiene nuevamente la derivada convectiva codeformacional definida en la sección anterior (ecuación 2.18). La función  $Z(tr\tau)$ , es una función que depende de la traza del esfuerzo cortante, ésta determinada por cualquiera de las siguientes dos funciones:

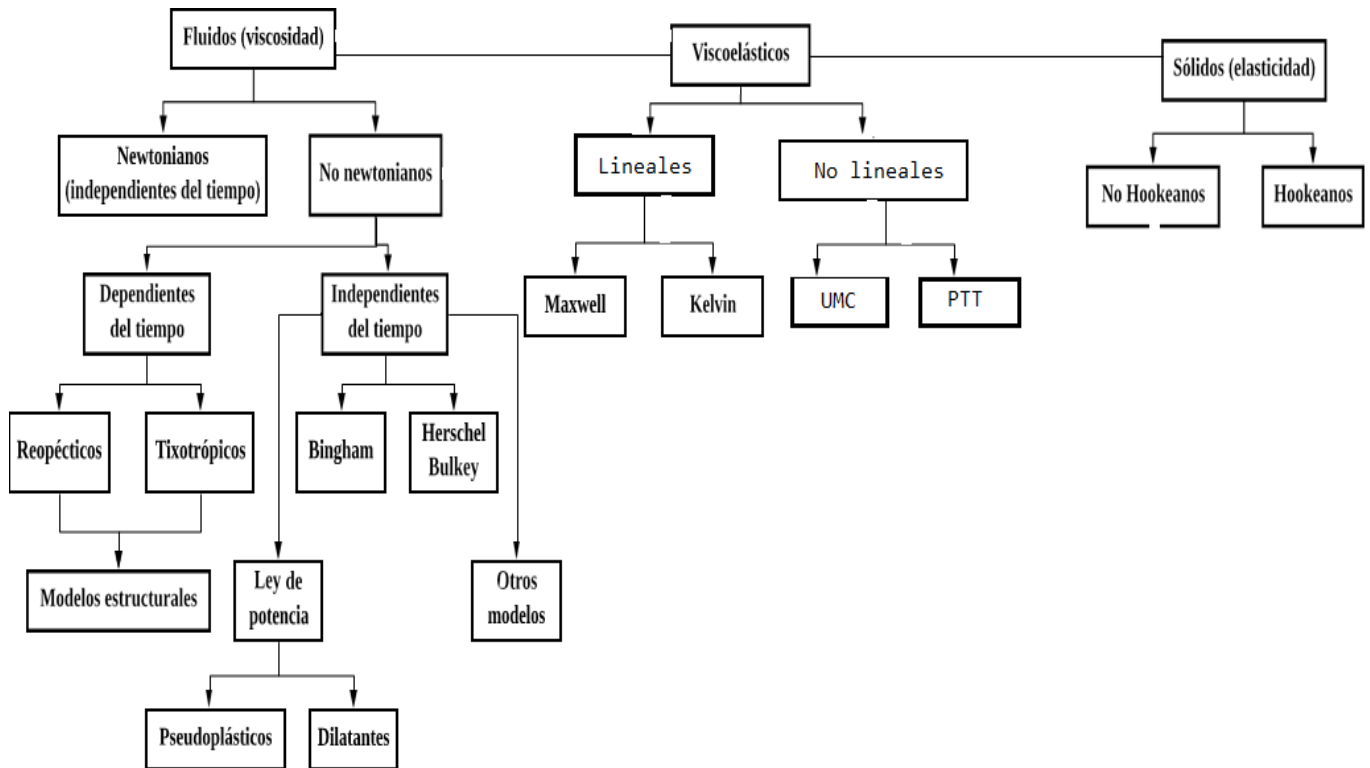
$$Z = \begin{cases} 1 - \varepsilon \lambda tr\tau / \eta_0 \\ \exp(\varepsilon \lambda tr\tau / \eta_0) \end{cases} \quad (2.21)$$

Donde  $\varepsilon$  es un parámetro del modelo relacionado con el comportamiento extensional del fluido. Por otro lado, la forma linealizada de  $Z$  se transforma en su versión exponencial si la traza del tensor de esfuerzos es pequeña y ambas versiones se reducen a la ecuación Maxwell Convectiva Superior cuando  $\varepsilon$  va a cero.

La imagen 28 muestra un resumen de las predicciones de las funciones materiales de los modelos no lineales que se describieron en esta sección. La imagen 29 muestra un esquema de la clasificación del tipo de fluidos en términos de su comportamiento viscoso o viscoelástico.

Modelo	Flujo cortante	Flujo extensional
Maxwell	$\eta = \mu, \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0$	$\bar{\eta} = 3\mu$
Maxwell Convectivo Superior	$\eta = \mu, \quad \Psi_1 = 2\mu\lambda$ $\Psi_2 = 0$	$\bar{\eta} = \frac{3\mu}{(1 + \lambda\varepsilon)(1 - 2\lambda\varepsilon)}$
Phan Thien-Tanner	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \xi(2 - \xi)(\lambda\dot{\gamma})^2}$ $\Psi_1 = \frac{2\eta\lambda}{1 + \xi(2 - \xi)(\lambda\dot{\gamma})^2}$ $\Psi_2 = -\frac{\xi}{2}\Psi_1$	No hay una solución analítica disponible

**Imagen. 28** Predicciones de modelos viscoelásticos para flujo cortante y extensional.



**Imagen 29.** Clasificación de fluidos viscosos y fluidos viscoelásticos

## CAPÍTULO. 3 INTRODUCCIÓN

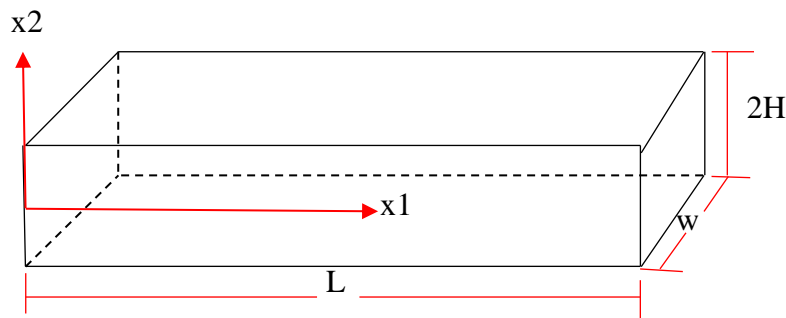
### 3.1 Ecuaciones del modelo matemático.

El objetivo de este capítulo es desarrollar las ecuaciones de un fluido no newtoniano incompresible que fluye en ducto rectangular en condiciones no isotérmicas, con la finalidad de obtener el perfil de velocidad, de temperatura y el número de Nusselt en términos del efecto elástico del fluido. El sistema de coordenadas generalizadas es  $x_1$  para la dirección horizontal,  $x_2$  para la dirección vertical y  $x_3$  para la dirección de la profundidad en el ducto.

Los resultados gráficos se presentan para el perfil de velocidad adimensional y el perfil de temperatura adimensional con varios parámetros de fluidos involucrados para newtonianos y no newtonianos. Para el modelo como primera aproximación tomamos un fluido viscoelástico que circula por un ducto rectangular, cuyas dimensiones son: longitud  $L$ , alto  $2H$ , ancho  $W$ .

Consideraciones del modelo que estamos analizando son las siguientes:

- Estado Estacionario
- Flujo unidimensional
- Fluido no newtoniano (Ecuación Constitutiva Phan Thien Tanner - PTT)
- Fluido incompresible
- Flujo es por presión en el perfil de velocidad
- No isotérmico
- Propiedades son constantes



**Imagen. 30.** Representación del Sistema en un ducto rectangular (Rejilla) con coordenadas cartesianas.

Las ecuaciones que rigen el flujo de un fluido no newtoniano incompresible son las siguientes:

## 3.2 Perfil de velocidad de un fluido visco elástico.

### 3.2.1 Ecuación Continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = \rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \dots (3.1)$$

$$\boxed{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \dots (3.2)} \text{ Fluido Incompresible}$$

Componente 1 de Ec. Cauchy.

$$0 = -\frac{dp}{dx_1} + \frac{d\tau_{12}}{dx_2} \dots (3.3)$$

$$\boxed{\frac{d\tau_{1,2}}{dx_2} = \left( \frac{dP}{dx_1} \right) \dots (3.4)}$$

### 3.3 Ecuación Constitutiva Phan – Thien – Tanner.

$$Z(tr\bar{\tau})\bar{\tau} + \lambda \dot{\bar{\tau}} = -\eta \dot{\bar{\gamma}} \dots \dots (3.5)$$

$$\boxed{\dot{\bar{\tau}} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla \bar{\tau}) - [\bar{L} \cdot \bar{\tau} + \bar{\tau} \cdot \bar{L}] \dots (3.6)}$$

$$\boxed{\bar{L} = (\nabla \bar{v} - \xi \bar{D}) \dots (3.7)}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} [\nabla \bar{v} + \nabla \bar{v}^T] \dots (3.8)$$

En este modelo se tomará la versión lineal de la ecuación constitutiva de Phan Thien-Tanner, por lo tanto, la traza está dada por:

$$Z(tr(\bar{\tau})) = 1 - \frac{\varepsilon \lambda}{\eta} \bar{\tau} \dots (3.9)$$

En índices la ecuación (3.5) en estado estacionario.

$$\boxed{f(tr(\tau_{RR}))\tau_{ij} + \lambda \left[ v_R \frac{\partial \tau_i}{\partial x_R} - L_{iR}\tau_{Rj} - \tau_{Rj}L_{Ri} \right] = 2\eta D_{ij} \dots (3.10)}$$

Realizando los productos puntos indicando en la ecuación (3.10) considerando  $v_3 = 0$ ,  $v_2 = 0$  y  $v_1 = v_1(x_2)$ .

$$\boxed{f(tr(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}))\tau_{ij} + \lambda \left[ v_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_1} - L_{i2}\tau_{2j} - \tau_{2j}L_{2i} \right] = 2\eta D_{ij} \dots (3.11)}$$

Componente  $i = 1, j = 1$



$$f(\text{tr}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}))\tau_{11} + \left[ v_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} - L_{12}\tau_{21} - \tau_{21}L_{21} \right] = 2\eta D_{11} \dots (3.12)$$

$$f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{11} = 2\lambda L_{12}\tau_{21} = 2\lambda \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \tau_{12} \dots (3.13)$$

$$\boxed{f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{11} = \lambda(2 - \xi) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tau_{12} \dots (3.14)}$$

Componente  $i = 2, j = 2$

$$\boxed{f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{22} = 0 \dots (3.15)}$$

Componente  $i = 3, j = 3$

$$\boxed{f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{33} = 0 \dots (3.16)}$$

Componente  $i = 1, j = 2$

$$f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{12} + \lambda[-L_{12}\tau_{22} - \tau_{22}L_{21}] = \eta D_{12} \dots (3.17)$$

$$f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{12} + \lambda \left[ -(1 - \xi) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tau_{22} \right] = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \dots (3.18)$$

$$\boxed{f(\text{tr}(\tau_{RR}))\tau_{12} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \lambda(1 - \xi) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tau_{22} \dots (3.19)}$$

La ecuación (3.15) y (3.16) implican que  $\tau_{22} = 0, \tau_{33} = 0$  ya que si  $f(\text{tr}(\tau_{RR})) = 0$  llevaría a una condición fuera de la realidad (no se complicaría la condición de adherencia o habría ausencia de flujo en presencia de un gradiente de presión impuesto) (Ver la Ec. 3.19) Por lo tanto:

$$\boxed{\text{tr}(\tau_{RR}) = \tau_{11} \dots (3.20)}$$

Integrando la Ec. (3.4)

$$\tau_{12} = \left( \frac{dP}{dx_1} \right) x_2 + C_1 \dots (3.21)$$

Condiciones de Frontera:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ \tau_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\tau_{12} = \left( \frac{dP}{dx_1} \right) x_2 \dots (3.22)}$$

Dividiendo ecuaciones (3.14) y (3.17)

$$\frac{f(t_r(\tau_{RR}))\tau_{11} = \lambda(2 - \xi) \frac{dv_1}{dx_2} \tau_{12}}{f(t_r(\tau_{RR}))\tau_{12} = \eta \frac{dv_1}{dx_2}} \dots (3.23)$$

Despejando  $\tau_{11}$  y sustituyendo  $\tau_{12}$  de (3.22)

$$\tau_{11} = \frac{\lambda(2 - \xi)\tau_{12}^2}{\eta} \dots (3.24)$$

$$\tau_{11} = \frac{\lambda(2 - \xi)}{\eta} \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 x_2^2 \dots (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.20)

$$t_r(\tau_{rr}) = \frac{\lambda(2 - \xi)}{\eta} \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 x_2^2 \dots (3.26)$$

Sustituyendo (3.7) y (3.26) en (3.19) con  $\tau_{22} = 0$

$$\left[1 + \frac{\epsilon}{\eta} \left\{ \frac{\lambda(2 - \xi)}{\eta} \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 x_2^2 \right\}\right] \tau_{12} = \eta \frac{dv_1}{dx_2} \dots (3.27)$$

Sustituyendo (3.22) en (3.27) y despejando  $\frac{dv_1}{dx_2}$

$$\frac{dv_1}{dx_2} = \left[1 + \frac{\epsilon}{\eta} \left\{ \frac{\lambda(2 - \xi)}{\eta} \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 x_2^2 \right\}\right] \left[\frac{dP}{dx_1}\right] \frac{x_2}{\eta} \dots (3.28)$$

Integrando (3.28) con respecto a  $x_2$

$$v_1 = \left[ \left(\frac{dP}{dx_1}\right) \frac{x_2^2}{2\eta} + \frac{\epsilon\lambda^2}{\eta^3} (2 - \xi) \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^3 \frac{x_2^4}{4} \right] + C_2 \dots (3.29)$$

Las condiciones de Frontera:  $x_2 = H, v_1 = 0$

Imponiendo condición de Frontera a (3.29)

$$C_2 = - \left[ \left(\frac{dP}{dx_1}\right) \frac{H^2}{2\eta} + \frac{\epsilon\lambda^2}{\eta^3} (2 - \xi) \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^3 \frac{H^4}{4} \right] \dots (3.30)$$

Sustituyendo (3.30) en (3.29) y sacando factor común

$$v_1 = \left[ -\frac{\left(1 - \left(\frac{x_2}{H}\right)^2\right) \left(\frac{dP}{dx_1}\right) H^2}{2\eta} - \frac{\epsilon\lambda^2}{4\eta^3} (2 - \xi) \left(1 - \left(\frac{x_2}{H}\right)^4\right) \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^3 H^4 \right] \dots (3.31)$$

Reduciendo más esta ecuación, tenemos como la:

### 3.4 Ecuación del Perfil de Velocidades.

$$v_1 = \left[ -\frac{\left(1 - \left(\frac{x_2}{H}\right)^2\right) \left(\frac{dP}{dx_1}\right) H^2}{2\eta} * \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2}{2\eta^2} (2 - \xi) \left(1 + \left(\frac{x_2}{H}\right)^2\right) \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 H^2\right) \right] \dots (3.32)$$

❖ Notar que la ecuación (3.32) se reduce al caso Newtoniano cuando  $\lambda = 0$  (Bird).

#### 3.4.1 Ecuación de la Velocidad Promedio.

$$v_p = \frac{\int_0^H \int_0^W v_1(x_2) dx_2 dx_3}{\int_0^H \int_0^W dx_2 dx_3} = w \frac{\left\{ -\left(\frac{dP}{dx_1}\right) \frac{H^2}{2\eta} \left[ x_2 \frac{H}{0} - \frac{x^3}{3H^2} \frac{H}{0} + \frac{\epsilon\lambda^2}{2\eta^2} H^2 (2 - \xi) \left\{ x_2 \frac{H}{0} - \frac{x^5}{5H^4} \frac{H}{0} \right\} \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 \right] \right\}}{HW} (3.33)$$

$$v_p = -\frac{\left(\frac{dP}{dx_1}\right)}{2\eta} \left[ \frac{2}{3} H^2 + \frac{\epsilon\lambda^2}{2\eta^2} (2 - \xi) \left(\frac{dP}{dx_1}\right)^2 \frac{4}{5} H^4 \right] \dots (3.34) \text{ Velocidad Promedio}$$

Si en (3.34) aplicamos  $\lambda = 0$  (En caso Newtoniano)

$$v_{pn} = -\frac{\left(\frac{dp}{dx_1}\right)}{3\eta} H^2 \dots (3.35) \text{ Velocidad Promedio Newtoniana}$$

Definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$\chi = \frac{x_2}{H}, \quad V = \frac{v_1}{v_p}, \quad P = \frac{pH}{\eta v_p}, \quad \left(\frac{dP}{dx_1}\right) = \frac{\eta v_p}{H} \frac{dP}{dx_1}$$

Se obtiene la ecuación (3.32) en forma adimensional

$$\frac{v_1}{v_p} = \frac{1.5v_{pn}}{v_p} (1 - \chi^2) \left[ 1 + \frac{\epsilon\lambda^2}{2\eta^2} (2 - \xi) (1 + \chi^2) \frac{v_{pn}^2 9\eta^2}{H^4} H^2 \dots (3.36) \right]$$

$$V = \frac{v_1}{v_p} = \frac{1.5v_{pn}}{v_p} (1 - \chi^2) \left[ 1 + \frac{9\epsilon\lambda^2 v_p^2}{2 H^2 v_p^2} v_{pn}^2 (2 - \xi) (1 + \chi^2) \right] \dots (3.37)$$

### 3.5 Perfil de Velocidad Adimensional.

$$V = \frac{v_1}{v_p} = \frac{1.5v_{pn}}{v_p} (1 - \chi^2) \left[ 1 + 4.5 \epsilon We^2 \left( \frac{v_{pn}}{v_p} \right)^2 (2 - \xi)(1 + \chi^2) \right] \dots (3.38)$$

$$We = \frac{\lambda v_p}{H} \dots (3.39) \text{ Numero de Weissenberg}$$

❖ Nota: Ecuación (3.34) también se puede expresar como:

$$v_p = -\frac{2}{3} \frac{\left( \frac{dP}{dx_1} \right) H^2}{2\eta} \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} \right) \frac{2\epsilon\lambda^2}{5\eta^2} (2 - \xi) \left( \frac{dP}{dx_1} \right)^2 H^2 \right] \dots (3.40)$$

$$v_p = v_{pn} \left[ 1 + \left( \frac{27}{5} \right) \epsilon We^2 \left( \frac{v_{pn}}{v_p} \right)^2 (2 - \xi) \right] \dots (3.41)$$

### 3.6 Ecuación de Energía.

$$\left( v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = \frac{K}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \dots (3.42)$$

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) = \frac{v_1}{\alpha} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \dots (3.43)$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{R}}{\rho C_p} \dots (3.44) \text{ Difusividad Térmica}$$

Condiciones de Frontera:

$$X_2 = 0, \quad X_2 = H, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad T = T_0 \leftarrow \text{Temperatura en la superficie}$$

Sustituyendo (3.38) en (3.43)

$$\left( \frac{d^2 T}{dx_2^2} \right) = \left\{ \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \right) \left[ 1 + 4.5 \epsilon We^2 \left( \frac{v_{pn}}{v_p} \right)^2 (2 - \xi) \left( 1 + \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \right) \right] \right\} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \dots (3.45)$$

Integrando la ecuación (3.38) con respecto a  $x_2$

Primera Integración:

$$\frac{dT}{dx_2} = \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \int \left[ \left( 1 - \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \right) + 4.5 \in We^2 \left( \frac{v_{pn}}{v_p} \right)^2 (2 - \xi) \left( 1 - \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right) \right] dx_2 \dots (3.46)$$

$$4.5 \in We^2 \left( \frac{v_{pn}}{v_p} \right)^2 (2 - \xi) = \mathbf{a} \dots (3.47)$$

$$\frac{dT}{dx_2} = \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left[ x_2 - \frac{x_2^3}{3H^2} + \mathbf{a} \left( x_2 - \left( \frac{x^5}{5H^4} \right) \right) \right] + C_1 \dots (3.48)$$

Utilizando condiciones de Frontera

$$X_2 = 0, \quad \frac{dT}{dx_2} = 0 \quad \therefore C_1 = 0$$

Segunda Integración:

$$T = \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left[ \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^4}{12H^2} + \mathbf{a} \left( \frac{x_2^2}{2} - \left( \frac{x^6}{30H^4} \right) \right) \right] + C_2 \dots (3.49)$$

Utilizando condición de Frontera nuevamente

$$X_2 = H \quad T = T_0$$

$$T_0 = \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left[ \frac{H}{2} - \frac{H^4}{12H^2} + \mathbf{a} \left( \frac{H^2}{2} - \left( \frac{H^6}{30H^4} \right) \right) \right] + C_2 \dots (3.50)$$

$$C_2 = T_0 - \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left[ \frac{5}{12} H^2 + \frac{14}{30} H^2 \mathbf{a} \right]$$

Sustituyendo  $C_2$  en (3.49) y acomodando términos, nos da como:

### 3.7 El Perfil de Temperatura Dimensional.

$$T = T_0 + \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left[ -\frac{H^2}{2} \left( \frac{5}{6} - \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right) - \frac{x_2^4}{12H^2} - \frac{\mathbf{a}H^2}{2} \left\{ \frac{14}{15} - \left( \frac{x^2}{H} \right)^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{x_2}{H} \right)^6 \right\} \right] \dots (3.51)$$

### 3.7.1 El Perfil de Temperatura Newtoniano.

Para el caso Newtoniano  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$T = T_0 + \frac{1.5v_{pn}}{\alpha} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \left[ -\frac{H^2}{2} \left( \frac{5}{6} - \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right) - \frac{x_2^4}{12H^2} \right] \dots (3.52)$$

Evaluando la Temperatura Promedio de Mezcla,  $T_m$

$$T_m = \frac{\int_0^w \int_0^H v_1 T dx_2 dx_3}{\int_0^w \int_0^H v_1 dx_2 dx_3} \dots (3.53)$$

El denominador es el Flujo Volumétrico

$$\int_0^w \int_0^H v_1 dx_2 dx_3 = v_p \int \int dx_2 dx_3 \dots (3.53)$$

La ecuación (3.43) la podemos expresar como

$$v_p = v_{pn} \left[ 1 + \frac{6}{5} \mathbf{a} \right] \dots (3.54)$$

Entonces (3.53) – Denominador

$$\int_0^w \int_0^H v_1 dx_2 dx_3 = v_p = v_{pn} \left[ 1 + \frac{6}{5} \mathbf{a} \right] WH \dots (3.55)$$

$WH = Area$

- ❖ Se procede a realizar la integral de la ecuación (3.53) del numerador para después dividir el resultado entre la ecuación (3.54).

$$\int_0^w \int_0^H v_1 \left[ T_0 - \frac{1.5v_{pn}H^2}{2\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) \left( \frac{5}{6} - \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^4 + \mathbf{a} \left\{ \frac{14}{15} - \left( \frac{x}{H} \right)^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{x}{H} \right)^6 \right\} \right] \dots (3.56)$$

$T_m - T_0$

$$= -\frac{w}{2\alpha} (1.5v_{pn})^2 \left( \frac{dT_m}{dx_1} \right) H^2 \int_0^H \left( \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) + \mathbf{a} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) \right) * \left( \frac{5}{6} - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 + \frac{1}{6} - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 + \mathbf{a} \left\{ \frac{14}{15} - \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{x_2}{H} \right)^6 \right\} \right) dx_2 \dots (3.57)$$

$$\begin{aligned}
T_m - T_0 = & -\frac{w}{\alpha} 2.25v_{pn}^2 H^2 \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \left[ \int_0^H \frac{5}{6} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) - \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) \right. \\
& + \frac{1}{6} \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) + \frac{14}{15} \mathbf{a} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) + \mathbf{a} \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\mathbf{a}}{15} \left( \frac{X_2}{H} \right)^6 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^2 \right) + \frac{5}{6} \mathbf{a} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) - \left( \frac{x_2}{H} \right)^2 \mathbf{a} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) \\
& + \frac{1}{6} \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \mathbf{a} \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) + \frac{14}{15} \mathbf{a}^2 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) - \mathbf{a}^2 \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) \\
& \left. + \frac{\mathbf{a}^2}{15} \left( \frac{X_2}{H} \right)^6 \left( 1 - \left( \frac{X_2}{H} \right)^4 \right) \right] \partial x_2 \dots (3.58)
\end{aligned}$$

$$\boxed{-\frac{w}{\alpha} 2.25v_{pn}^2 H^2 \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \} = \mathbf{B} \dots (3.59)$$

Integrando con respecto a  $dx_2$

$$\begin{aligned}
T_m - T_0 = \mathbf{B} & \left[ \frac{5}{6} \left( x_2 - \frac{X_2^3}{3H^2} \right) - \frac{X_2^3}{3H^2} + \left( \frac{X_2^5}{5H^4} \right) + \frac{X_2^5}{30H^4} - \frac{X^7}{42H^2} + \frac{14}{15} \mathbf{a} X_2 - \frac{14}{3(15)} \mathbf{a} \frac{X_2^3}{H^2} \right. \\
& + \frac{\mathbf{a} X_2^3}{3H^2} - \frac{\mathbf{a} X_2^5}{5H^4} + \frac{\mathbf{a} X_2^7}{7(15)H^6} - \frac{\mathbf{a} X_2^9}{9(15)H^8} + \frac{5\mathbf{a} X_2}{6(2)} - \frac{5\mathbf{a} X_2^5}{6(5)H^4} - \frac{\mathbf{a} X_2^3}{3H^2} + \frac{\mathbf{a} X_2^7}{7H^6} \\
& + \frac{\mathbf{a} X_2^5}{6(5)H^4} - \frac{\mathbf{a} X_2^9}{9(6)H^8} + \frac{14}{15} \mathbf{a}^2 X_2 - \frac{14}{15(5)} \mathbf{a}^2 \frac{X_2^5}{H^4} - \frac{\mathbf{a}^2 X_2^3}{3H^2} + \frac{\mathbf{a}^2 X_2^7}{7H^2} \\
& \left. + \frac{\mathbf{a} X_2^7}{15(7)H^6} - \frac{\mathbf{a} X_2^{11}}{15(11)H} \right] \frac{H}{0} \dots (3.60)
\end{aligned}$$

Evaluando la Integral entre 0 y  $H$

$$\begin{aligned}
T_m - T_0 = \mathbf{B} & \left[ H \left\{ \frac{5}{6} \left( \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} \right\} \right. \\
& + \mathbf{a} H \left\{ \frac{14}{15} - \frac{14}{3(15)} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7(15)} - \frac{1}{15(9)} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{30} \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6(9)} \right\} + \mathbf{a}^2 H \left\{ \frac{14}{15} - \frac{14}{15(5)} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15(7)} - \frac{1}{15(11)} \right\} \right] \frac{H}{0} \dots (3.61)
\end{aligned}$$

$$T_m - T_0 = \mathbf{H} \mathbf{B} \left[ \frac{421}{945} + \frac{\mathbf{a} 2213}{3780} + \frac{\mathbf{a}^2 3192}{5775} \right] \dots (3.62)$$

Dividiendo la integral del numerado entre el denominador Ec. (3.55)

$$T_m - T_0 = - \left[ \frac{421}{945} + \frac{a2213}{3780} + \frac{a^23192}{5775} \right] \left( \frac{9}{8} \right) \frac{H^2 v_{pn}}{\alpha \left[ 1 + \frac{6}{5} a \right]} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \dots (3.63)$$

### 3.7.2 Perfil de Temperatura adimensional.

$$\theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} \quad X = \frac{x_2}{H} \quad V = \frac{v_1}{v_p} \quad P = \frac{PH}{\eta v_p} \left. \vphantom{\theta} \right\} \text{Variables Adimensionales}$$

$$T - T_0 = \frac{-1.5v_{pn}}{2 \alpha} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) H^2 \left[ \left( \frac{5}{6} - X^2 \right) + \frac{1}{6} X^4 + a \left\{ \frac{14}{15} - X^2 + \frac{1}{15} X^6 \right\} \right] \dots (3.64)$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} = \frac{1.5v_{pn}H^2}{2 \alpha (T_0 - T_m)} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \left[ \left( \frac{5}{6} - X^2 \right) + \frac{1}{6} X^4 + a \left\{ \frac{14}{15} - X^2 + \frac{1}{15} X^6 \right\} \right] \dots (3.65)$$

De la ecuación (3.63)

$$T_0 - T_m = \left[ \frac{421}{840} + \frac{6639a}{10080} + \frac{3591a^2}{5775} \right] \frac{H^2 v_{pn}}{\alpha \left[ 1 + \frac{6}{5} a \right]} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \dots (3.66)$$

Sustituyendo:

$$\theta = \frac{1.5v_{pn}H^2}{2 \alpha} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \left[ \frac{\alpha \left[ 1 + \frac{6}{5} a \right]}{H^2 v_{pn} \left[ \frac{421}{840} + \frac{6639a}{10080} + \frac{3591a^2}{5775} \right] \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right)} \right] \left[ \frac{5}{6} - X^2 + \frac{1}{6} X^4 + a \left\{ \frac{14}{15} - X^2 + \frac{1}{15} X^6 \right\} \right] \dots (3.67)$$

### 3.7.3 Perfil de Temperatura adimensional.

$$\theta = \frac{3 \left[ 1 + \frac{6}{5} a \right] \left[ \frac{5}{6} - X^2 + \frac{1}{6} X^4 + a \left\{ \frac{14}{15} - X^2 + \frac{1}{15} X^6 \right\} \right]}{4 \left[ \frac{421}{840} + \frac{6639a}{10080} + \frac{3591a^2}{5775} \right]} \dots (3.68)$$

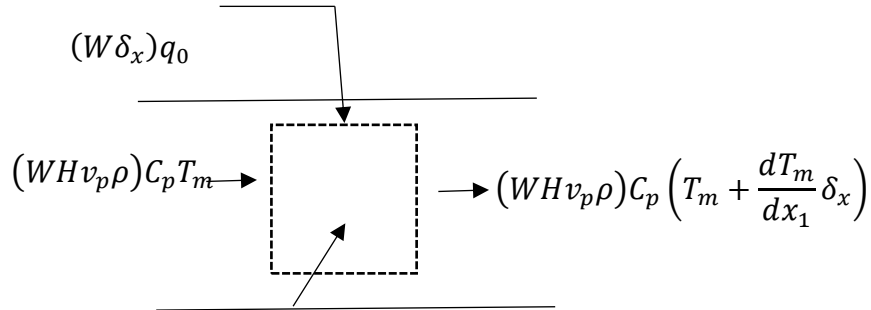
Evaluando el flux de calor por convección – Ecuación (3.63)

$$q_0 = h(T_0 - T_m) = \left( \frac{9}{8} \right) \frac{H^2 v_{pn}}{\alpha \left[ 1 + \frac{6}{5} a \right]^2} \left( \frac{\partial T_m}{\partial x_1} \right) \left[ \frac{421}{945} + \frac{a2213}{3780} + \frac{a^23192}{5775} \right] \dots (3.69)$$



En la ecuación (3.69) se ha sustituido  $v_{pn} = \left[1 + \frac{6}{5}a\right]$

Para evaluar el calor por conducción un balance de energía en un volumen de control diferencial.



*Volumen de control diferencial*

$(W\delta_x)q_0 \dots (3.70)$  Calor que entra por conducción

$(WHv_p\rho)C_p T_m \dots (3.71)$  Calor que entra por convección

$(WHv_p\rho)C_p \left(T_m + \frac{dT_m}{dx_1} \delta_x\right) \dots (3.72)$  Calor que sale por convección

Del balance en el elemento diferencial tenemos:

$$(WHv_p\rho)C_p T_m + W\delta_x q_0 - (WHv_p\rho)C_p \left(T_m + \frac{dT_m}{dx_1} \delta_x\right) = 0 \dots (3.73)$$

$$q_0 = -\frac{WHv_p\rho C_p}{W\delta_x} \left(\frac{dT_m}{dx_1}\right) \delta_x \dots (3.74)$$

### 3.7.4 Conducción.

$$q_0 = -Hv_p\rho C_p \left(\frac{dT_m}{dx_1}\right) \dots (3.75)$$

Igualando (3.69) y (3.75)

$$-\left(\frac{9}{8}\right) \frac{H^2 v_p * h}{\alpha \left[1 + \frac{6}{5}a\right]^2} \left(\frac{\partial T_m}{\partial x_1}\right) \left[\frac{421}{945} + \frac{a2213}{3780} + \frac{a^2 3192}{5775}\right] = -Hv_p\rho C_p \left(\frac{\partial T_m}{\partial x_1}\right) \dots (3.76)$$

Sustituyendo  $\alpha = \frac{\mathcal{R}}{\rho C_p}$  y eliminando términos

$$\left(\frac{9}{8}\right) \frac{Hh}{k \left[1 + \frac{6}{5}a\right]^2} \left[\frac{421}{945} + \frac{2213a}{3780} + \frac{3192a^2}{5775}\right] = 1 \dots (3.77)$$

$$h = \frac{8k \left[1 + \frac{6}{5}a\right]^2}{9H \left[\frac{421}{945} + \frac{2213a}{3780} + \frac{3192a^2}{5775}\right]} \left(\frac{1}{8}\right) \dots (3.78)$$

### 3.8 Coeficiente individual de transferencia de calor.

$$h = \frac{k \left[1 + \frac{6}{5}a\right]^2}{H \left[\frac{421}{840} + \frac{6639a}{10080} + \frac{3591a^2}{5775}\right]} \dots (3.79)$$

### 3.9 Numero de Nussel.

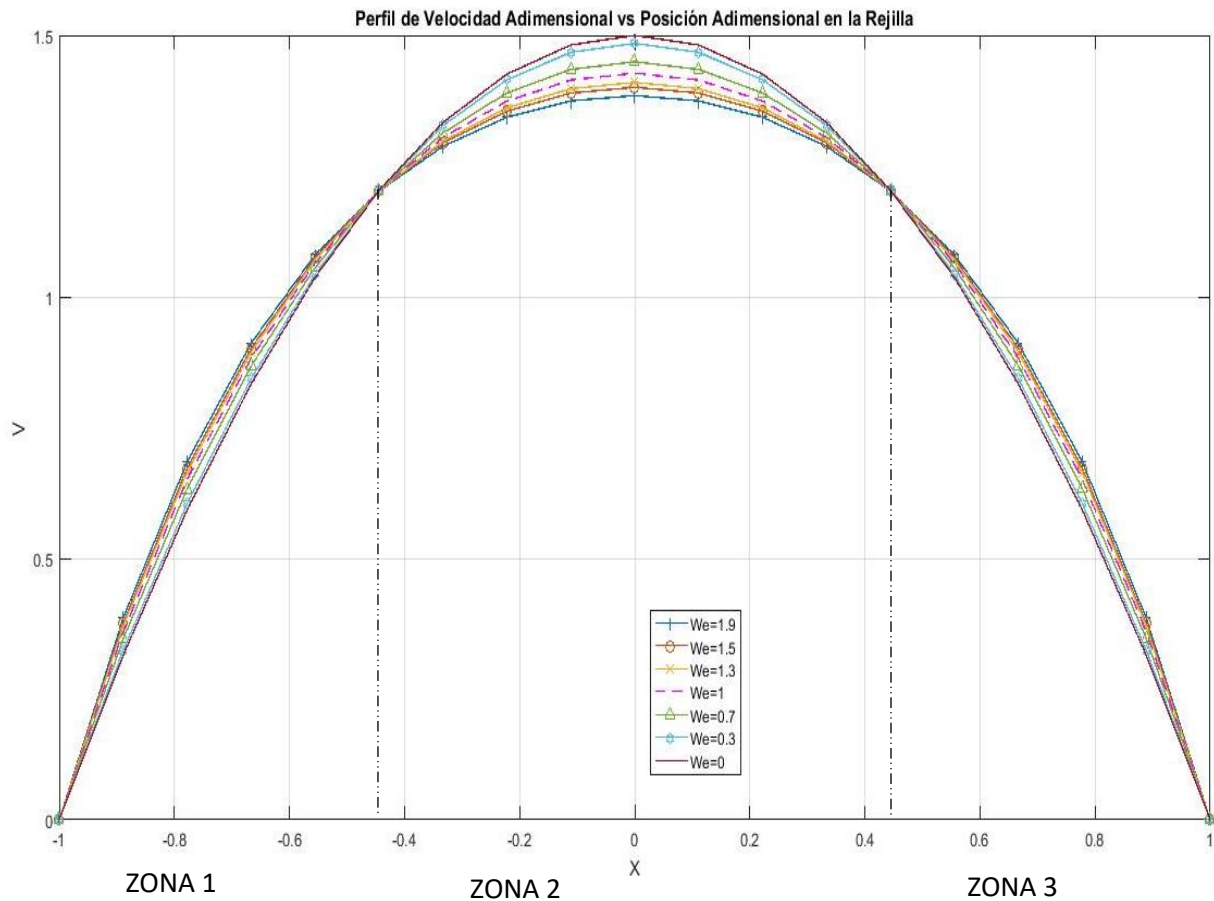
$$Nu = \frac{hH}{k} = \frac{\left[1 + \frac{6}{5}a\right]^2}{\left[\frac{421}{840} + \frac{6639a}{10080} + \frac{3591a^2}{5775}\right]} \dots (3.80)$$

## CAPÍTULO 4. INTRODUCCIÓN

### 4.1 Análisis de resultados.

Para analizar los resultados de este modelo matemático, se tuvo que llevar a cabo una programación en el software Matlab implementando las ecuaciones ya establecidas en el capítulo 3 para determinar los valores del número de Nusselt y del coeficiente de transferencia de calor, como también los perfiles de velocidad adimensional y los perfiles de temperatura adimensional.

En la imagen 1 se muestra el perfil de velocidad adimensional (Ec. 3.38) vs posición de la rejilla, en esta imagen vemos los siguientes perfiles parabólicos a distintos Números de Weissenberg donde sus valores son de 0, 0.3, 0.7, 1, 1.3, 1.5, y 1.9. Para  $We=0$  nos indica el comportamiento newtoniano ya para  $We>0$  hablamos de fluidos viscoelásticos. Vemos que los perfiles son parabólicos para cualquier número de Weissenberg, para describirlos con más detalle dividiremos la imagen en 3 zonas, las cuales se muestran a continuación.

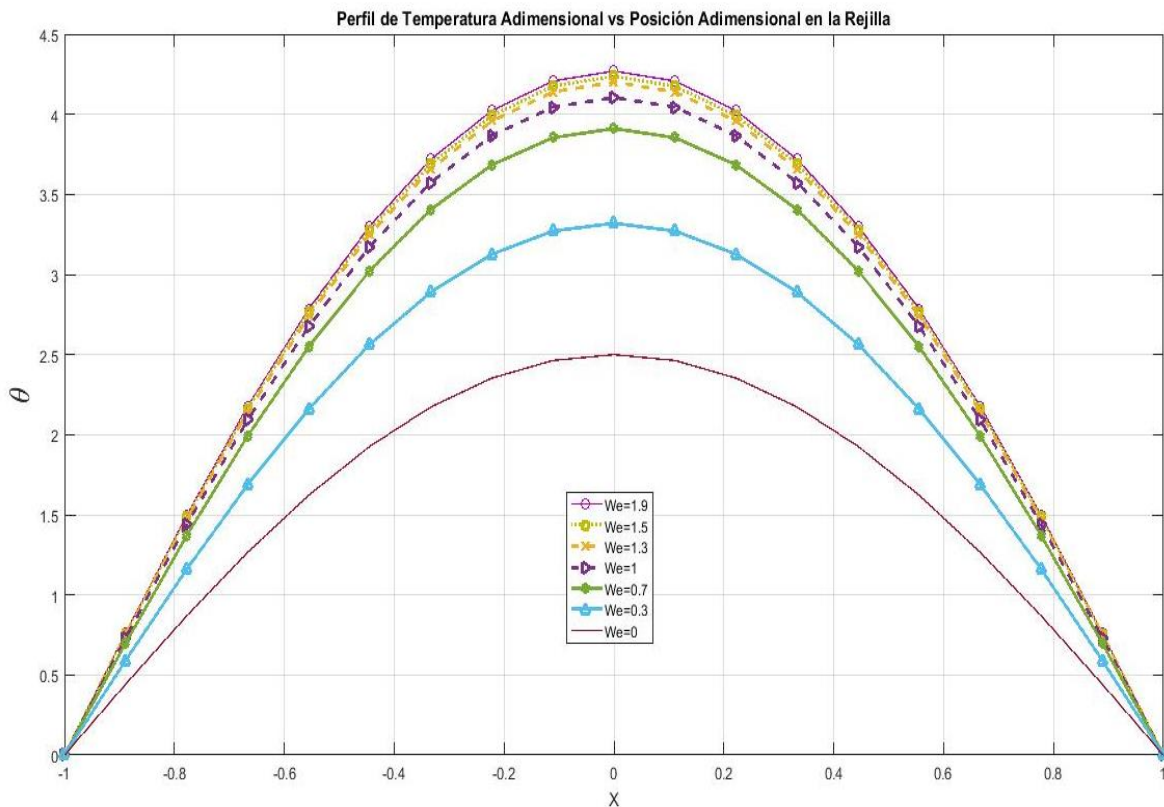


**Imagen 31.** Perfil de velocidad adimensional vs Posición de la rejilla.

En la zona 1 y zona 3 muestran que los fluidos viscoelásticos tienen una mayor viscosidad que el fluido netamente viscoso o newtoniano, estas zonas están más cerca de las paredes de la rejilla en donde se tienen los mayores gradientes de velocidad y los mayores efectos de disipación viscosa. El fluido newtoniano que es neta viscoso es el que se ve más afectado por este efecto de disipación por lo tanto alcanza en estas zonas una menor velocidad que aquellos que tiene además un efecto elástico.

Entre la zona 1 y zona 2, y entre la zona 2 y zona 3 existen dos puntos de transición en donde la elasticidad o efecto elastático es nulo y la velocidad es la misma que la de un fluido newtoniano. Además, a partir de este punto la imagen muestra que el fluido que alcanza una mayor velocidad es el newtoniano y esta velocidad máxima decrece con el aumento del número de Weissenberg, es decir con la elasticidad del fluido. Entonces, en la zona 2 el efecto viscoelástico no permite un aumento de velocidad máxima mayor al newtoniano.

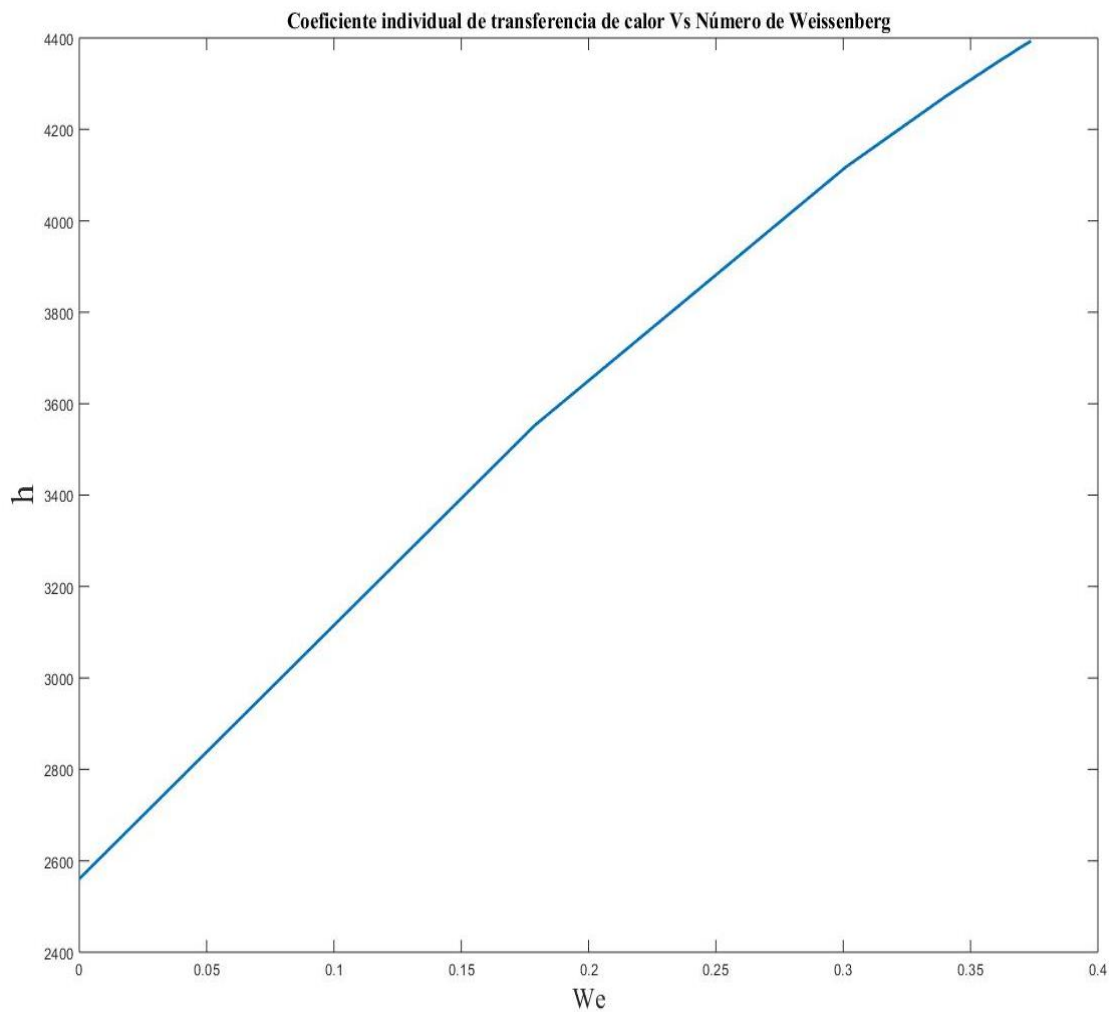
En la imagen 2 se muestra el perfil de temperatura adimensional vs posición de la rejilla, en esta imagen vemos los siguientes perfiles parabólicos a distintos Números de Weissenberg donde sus valores son de 0, 0.3, 0.7, 1, 1.3, 1.5, y 1.9. Para  $We=0$  nos indica el comportamiento newtoniano ya para  $We>0$  hablamos de fluidos viscoelásticos.



**Grafica 32.** Perfil de temperatura adimensional vs Posición de la rejilla.

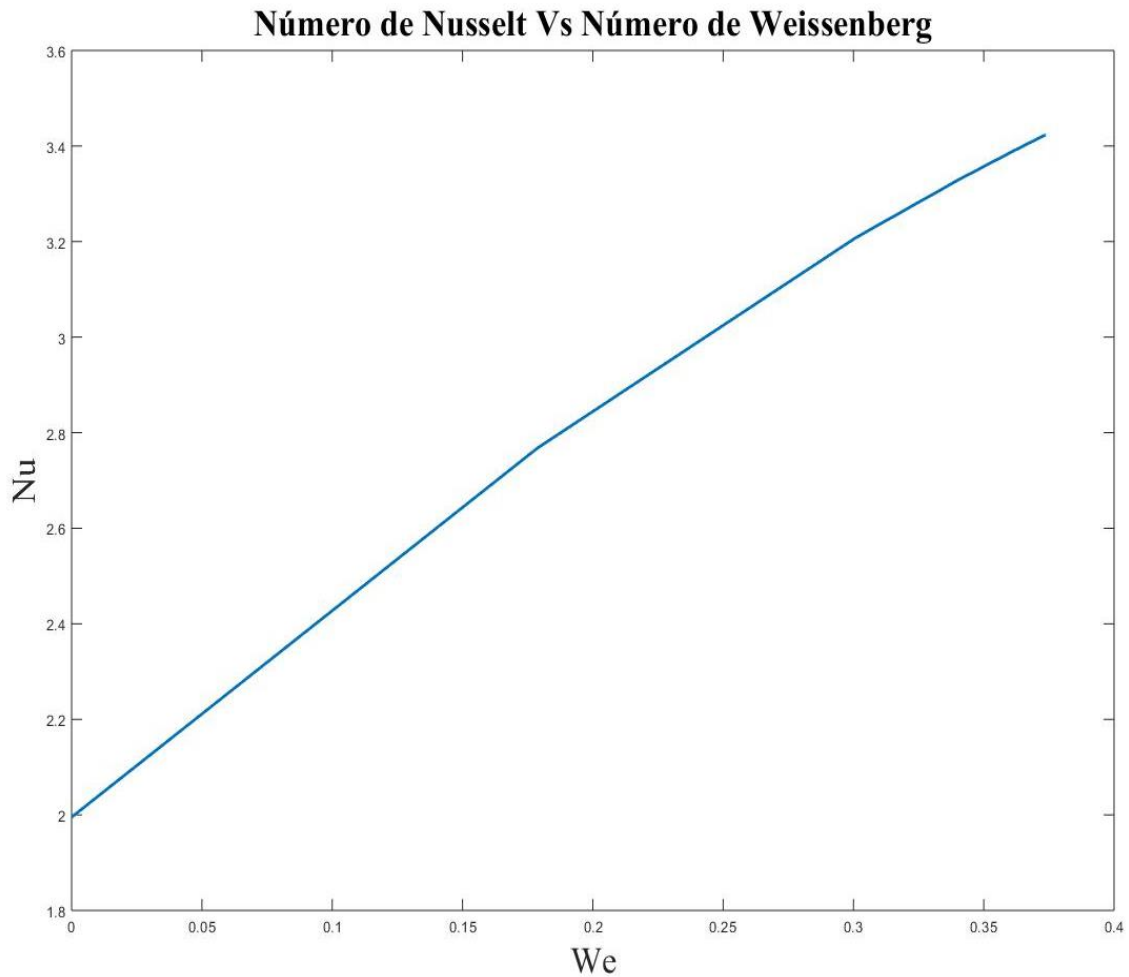
Por lo contrario, para los casos de los perfiles parabólicos con un numero de Weissenberg mayor del fluido newtoniano tenemos que “a” toma en cuenta el efecto convectivo y el efecto elástico (dada por la velocidad promedio newtoniano y la velocidad promedio no newtoniano), recordando que el número de Weissenberg está elevado a la potencia 2 (Ec. 3.45) y ocasiona que haya un considerable aumento de temperatura en estos perfiles parabólicos.

En la imagen 3 se observa una curva creciente en el coeficiente individual de transferencia de calor vs Numero de Weissenberg, es decir a mayor número de Weissenberg el coeficiente individual de transferencia de calor aumenta. Entonces, para un fluido con mayor elasticidad por convección aumentaría para un sistema que circula por una rejilla a la cual se le agrega un flujo de calor constante. Este aumento en el coeficiente individual de transferencia de calor influye directamente en el coeficiente global de transferencia de calor, el cual podría estar asociado a un tipo de intercambiador de calor.



**Imagen 33.** Coficiente individual de transferencia de calor vs Numero de Weissenberg.

En la Imagen 4 el número de Nusselt vs Numero de Weissenberg se observa una curva creciente, es decir a mayor número de Weissenberg el número de Nusselt se incrementa a una medida de la convección sobre la superficie donde el número de Nusselt tiene un aumento en la transmisión de calor desde una superficie por la que un fluido fluye (transferencia de calor por convección) comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción. En donde el número de Weissenberg toma el tiempo de relajación del fluido viscoelástico donde también se puede definir como el producto de la velocidad que se maneja en este tiempo característico.



**Imagen 34.** Número de Nusselt vs Numero de Weissenberg

## CAPÍTULO 5. INTRODUCCIÓN

### 5.1 Conclusiones.

En este trabajo se desarrolló un modelo matemático para analizar cómo afecta la elasticidad de un fluido no newtoniano tipo viscoelástico en el coeficiente individual de transferencia de calor en los perfiles de velocidad y temperatura. Como primera aproximación se eligió que el fluido circulara en un ducto rectangular, de tal manera que las ecuaciones del modelo están en coordenadas rectangulares. Como ecuación constitutiva del fluido viscoelástico se eligió el modelo lineal de Phan – Thien – Tanner, esta ecuación junto con la ecuación de continuidad y la de conservación de momento permitiendo obtener soluciones analíticas para el perfil de velocidad y del perfil de temperatura en términos del número de Weissenberg para este tipo de fluidos. Así mismo se obtuvo una expresión para el coeficiente individual de transferencia de calor como función de la elasticidad del fluido.

Los resultados gráficos del perfil de velocidad adimensional y del perfil de temperatura adimensional, muestran que si se ven afectados por la elasticidad el fluido. En este sentido, las gráficas resaltan que el efecto de la elasticidad incide más en la zona central del canal (zona 2), que cerca de las paredes del canal (zonas 1 y 3). En el caso del perfil de velocidad, la elasticidad disminuye la velocidad máxima del fluido, mientras que, en el perfil de temperatura, la elasticidad aumenta casi al doble la temperatura máxima en esa misma zona. Entonces, podríamos decir que el perfil de velocidad adimensional vs la posición de la rejilla nos dice que los efectos viscosos dominan tanto en la zona 1 como en la zona 3, y en la zona 2 domina el efecto elástico.

En cuanto al perfil de temperatura, el fluido newtoniano es el que alcanza una menor temperatura cuando circula por el canal, esto está relacionado con el perfil de velocidad ya que al ser el fluido que más velocidad alcanza dentro del canal, su tiempo de residencia es más corto que la de los fluidos viscoelásticos y por lo tanto no alcanza a estar tanto tiempo en contacto con las paredes del canal que son las que están recibiendo un flujo de calor constante.

Finalmente, tomando en cuenta los resultados de las imágenes 3 y, coeficiente individual de transferencia de calor y número de Nusselt vs Número de Weissenberg, vemos que tanto el coeficiente de transferencia como el Nusselt aumentan con el aumento en la elasticidad del fluido. Estos resultados muestran que la elasticidad del fluido podría ser un factor importante al diseñar el equipo que involucre la transferencia de energía entre fluidos viscosos y viscoelásticos.

## **5.2 Trabajo a futuro.**

Darle continuación a este tema ya que tiene impacto en el mundo industrial actualmente con las nuevas tecnologías y procesos que surgen, así como los nuevos profesionistas que necesitan están preparados en esta rama.

Expandir el estudio a los fluidos viscoelásticos no lineales (BMP). El análisis de los fluidos incompresibles, aplicado a la disipación viscosa en flujos complejos. Aplicar la ecuación de Fourier, la de Phan Thien Tanner y la función de transferencia para otro tipo de sistemas complejos y espacios totalmente diferentes. Los mecanismos de transferencia de masa, energía y momento aplicados al flujo. Simular y programar en otros programas especializados para una descripción que sirva en aplicaciones tecnológicas y de procesos industriales optimizados.



## BIBLIOGRAFÍA

- Martin Villalobos. (2015). Diseño termo hidráulico de intercambiadores de calor de placas. Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. MÉXICO, D.F.<sup>1</sup>
- D. Brian Spalding & J. Taborek. (1986). Intercambiador de calor diseño manual. Hemisphere Publishing Corporation. United States of America.<sup>2</sup>
- J.P. Holman. (2010). Heat transfer tenth edition. Department of mechanical engineering southern Methodist University. New york, NY 10020.<sup>3</sup>
- Ing. José Fernando Salazar Valdez. (2001). Diseño De Equipos De Transferencia. Universidad Autónoma De Nuevo León. San Nicolás De Los Garza, N. L.<sup>4</sup>
- R.P. Chhabra (2010). Fluidos No Newtonianos. Departamento De Física - Instituto Indio De Tecnología De Madrás, Chennai.<sup>5</sup>
- Víctor L. Streeter (1977). Mecánica de los Fluidos. Universidad de Michigan U.S.A.<sup>6</sup>
- Damián Crespí Llorens (2015). Comportamiento de fluidos no newtonianos en intercambiadores de calor tubulares con rascador alternativo. Universidad Politécnica de Cartagena Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos. Cartagena, España.<sup>7</sup>
- N. Sieder y G. E. Tate (1936), Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes, Ind. Eng. Chem., 28, (1429-1435).<sup>8</sup>
- Hartnett, J. P., Experimental Determination of the Thermal Entrance Length for the Flow of Water y of Oil in Circular Pipes», Trans. ASME, vol. 77, p. 1211, 1955.<sup>9</sup>
- Allen, R. W., y E. R. G. Eckert, Friction and Heat Transfer Measurements to Turbulent Pipe Flow of Water (Pr = 7 and 8) at Uniform Wall Heat Flux, J. Heat Transfer, ser. C, vol. 86, p. 301, 1964.<sup>10</sup>

- Subbarao Annasagaram, Ramachandra Prasad (2015). Heat Transfer effects a Non-Newtonian fluid with partial slip. Onmniscriptum Gmb & Co. kg. U.S.A.<sup>11</sup>
- R.K. Shah, A.L. London (1978). Advances in heat transfer laminar flow forced convection in ducts. Academy press. London (Uk).<sup>12</sup>
- W.Kays, Michael E. (1980). Convective heat and Mass Transfer. McGraville Hill Book Company. Southern Methodist University U.S.A.<sup>13</sup>
- Paulo J. Oliviera and Fernando T. Pinho, Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien–Tanner fluids, J. Fluid Mech. (1999), vol. 387, pp. 271–280.