



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Dinámica efectiva cuántica del agujero negro de Schwarzschild

TESIS

Que para optar por el grado de
Doctor en Ciencias (Física)

Presenta:

William Francisco Cuervo Rodríguez

Directores de tesis:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl
Departamento de Física,

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Miembros del Comité Tutorial:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Alejandro Corichi Rodríguez-Gil

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad de México, Abril de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SYNOPSIS

The interior of Schwarzschild's black hole is singular. This manifests itself, for example, in the divergence of curvature scalars and in the anomalous behavior of the Raychaudhuri equation. The singularity is strong in the sense that the volume of a body that approaches the singularity tends to zero inexorably. Quantization methods inspired by Loop Quantum Gravity have allowed to introduce quantum-gravitational effects in homogeneous models such as the interior of Schwarzschild's black hole. In this work we take up one of these models and propose new techniques that allow for the first time to complete an exact analysis of the quantum geometry of the black hole interior. We show that all curvature scalars of arbitrary but finite order are bounded and that the Raychaudhuri equation is well behaved. We also show that the solutions of the effective Hamilton equations can be extended for infinite proper times. This is in contrast to the classical case, whose solutions end in a finite proper time. Additionally, we show that when the expansion factor is bounded, strong singularities do not develop, a result of great generality, also applicable to other models -homogeneous and inhomogeneous- and of which previously there was only some numerical evidence.

PACS numbers: 04.60.Pp, 03.65.Sq, 04.70.Dy, 04.70.Bw, 98.80.Qc

RESUMEN

El interior del agujero negro de Schwarzschild es singular. Esto se manifiesta por ejemplo en la divergencia de escalares de curvatura y en el comportamiento anómalo de la ecuación de Raychaudhuri. La singularidad es fuerte en el sentido de que el volumen de un cuerpo que se acerca a la singularidad tiende a cero inexorablemente. Métodos de cuantización inspirados en la Gravitación Cuántica de Lazos han permitido introducir efectos cuántico-gravitacionales en modelos homogéneos como es el caso del interior del agujero negro de Schwarzschild. En este trabajo retomamos uno de estos modelos y proponemos nuevas técnicas que permiten por primera vez hacer un análisis completo y exacto de la geometría cuántica del interior del agujero negro. Mostramos que todos los escalares de curvatura de orden arbitrario pero finito son acotados y que la ecuación de Raychaudhuri es bien comportada. También mostramos que las soluciones de las ecuaciones de Hamilton efectivas tienen un tiempo propio de vida infinito. Esto en contraste con el caso clásico, donde las soluciones terminan en un tiempo propio finito. Adicionalmente mostramos que cuando el factor de expansión es acotado no se desarrollan singularidades fuertes, un resultado de gran generalidad, aplicable también a otros modelos -homogéneos e inhomogéneos- y del cual solo había previamente algunos indicios numéricos.

Números PACS: 04.60.Pp, 03.65.Sq, 04.70.Dy, 04.70.Bw, 98.80.Qc

Índice general

1. Introducción	1
2. Agujero negro de Schwarzschild clásico	9
2.1. La singularidad del agujero negro de Schwarzschild	9
2.2. El interior del agujero negro de Schwarzschild	12
2.3. Formulación de Ashtekar-Barbero de la Relatividad General	13
2.4. Imposición de simetría de Kantowski-Sachs en la formula- ción de Ashtekar-Barbero	16
2.5. Enfoque alternativo para la singularidad del agujero negro de Schwarzschild	20
3. Modelos efectivos de la cuantización por lazos del interior del agujero negro de Schwarzschild	29
3.1. Aspectos Generales	29
3.2. Prescripción de Ashtekar-Bojowald	33
3.3. Prescripción de Chiou	34
3.4. Prescripción de de Böhmer-Vandersloot	35
3.5. Prescripción de Corichi-Singh	37
4. Dinámica cuántica efectiva	39
5. Discusión, conclusiones y perspectivas	55
Appendices	
A. Escalares de Kretschmann y Ricci para el interior del agujero negro efectivo	59
B. Propagador del modelo de Kantowski-Sachs y aproximación efec- tiva.	63

Bibliography

73

Capítulo 1

Introducción

A pesar de su simplicidad matemática, el agujero negro de Schwarzschild ha sido -y sigue siendo- uno de los sistemas físicos más difíciles de entender: clásicamente nada puede escapar de su interior. Ni siquiera la luz. Pero en presencia de un campo cuántico adquiere características térmicas y de allí emana la llamada «radiación Hawking». En su interior la curvatura crece infinitamente, todos los objetos físicos se comprimen hasta que su volumen se hace cero y la misma métrica pierde sentido matemático. Peor aún, los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose [34] aseguran que las geodésicas tipo tiempo dejan de existir como tales al transcurrir solamente un tiempo propio finito. Si un observador viajara por alguna de estas geodésicas, él también tendría un final abrupto. Ni siquiera saliendonos de la extrema idealización del agujero negro de Schwarzschild podemos escapar a estos comportamientos indeseados: los teoremas de Hawking y Penrose son válidos bajo suposiciones físicas muy razonables y generales e independientemente de la simetría del modelo.

Nuestro punto de vista es que estas patologías no tienen ninguna realidad física. Son el resultado de aplicar la Relatividad General clásica en escenarios donde los aspectos cuánticos de la gravedad deberían ser importantes y al ser tenidos en cuenta podrían tener consecuencias no triviales. De hecho, al acercarnos al centro del agujero negro, algunos escalares de curvatura superan la escala de Planck $l_p = \sqrt{G\hbar}$ haciendo necesario aplicar una teoría que incorpore aspectos cuánticos del campo gravitacional. La necesidad y búsqueda de esta teoría empezó casi simultáneamente con la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein:

«Debido al movimiento de los electrones dentro del átomo, éste debe radiar no solamente energía electromagnética sino también gravitacional, aunque esto sólo fuera en cantidades minúsculas. Debido a que esto en realidad no se da en la naturaleza, entonces parece que la teoría cuántica debe modificar no solamente la electrodinámica de Maxwell sino también la nueva teoría de la gravitación». Albert Einstein [28].

A pesar del tiempo transcurrido y del esfuerzo científico realizado, hasta el momento no se ha logrado encontrar una solución satisfactoria al problema de cuantizar la gravedad. Las propuestas más exploradas de las últimas décadas han sido la Teoría de Cuerdas [50, 51] y la Gravitación Cuántica de Lazos [6, 14, 53, 54, 61]. Es en esta última propuesta que está el origen conceptual y matemático de los resultados presentados en este trabajo. La Gravitación Cuántica de Lazos es un programa de cuantización canónica, es decir, que toma como punto de partida un formalismo hamiltoniano clásico de la Relatividad General. Las coordenadas del espacio fase gravitacional son una conexión $SU(2)$ denotada por A_a^i y su momento canónico conjugado E_i^a . Estas coordenadas son conocidas como las variables de Ashtekar-Barbero. Sin embargo, en Gravedad Cuántica de Lazos no se cuantizan directamente las funciones A_a^i y E_i^a . Lo que se promueve directamente a operadores cuánticos son las holonomías $h_c(A_a^i)$ a lo largo de curvas c y flujos $\Phi_S(E_a^i)$ a través de superficies S . Tanto holonomías h_c como flujos Φ_S se pueden ver como funciones sobre el espacio de fase con valores en los reales. El conjunto de funciones h_c y Φ_S junto con su corchete de Poisson natural es lo que se conoce como álgebra (clásica) de holonomías y flujos. Un resultado que va a ser importante para el presente trabajo es que en esta cuantización, aunque existe el operador holonomía \widehat{h}_c , no existe un operador conexión \widehat{A}_a^i como tal¹. Otro resultado relevante para nosotros concierne

¹ Una vez establecida la existencia de estos operadores, una pregunta que surge inmediatamente es la de su unicidad. El problema relacionado en la Mecánica Cuántica para sistemas con un número finito de grados de libertad es el de la equivalencia unitaria de diferentes cuantizaciones y su respuesta en este caso está dada por el teorema de Stone-Von Neumann que afirma que todas las representaciones continuas e irreducibles de las relaciones canónicas de conmutación son unitariamente equivalentes y dan lugar a la misma física. En el caso de teorías de campo con sus infinitos grados de libertad este teorema no es válido. Por otro lado, notablemente, en la Gravedad Cuántica de Lazos, que es una teoría cuántica de campos, se ha encontrado el llamado teorema LOST [41, 29]: Todas las posibles cuantizaciones del álgebra de holonomías y flujos que además son invariantes bajo difeomorfismos espaciales y transformaciones $SU(2)$ son unitariamente

a la cuantización del área, pues en este formalismo el operador cuántico de área resulta tener un espectro discreto con valor propio mínimo diferente de cero, $a_{\text{mín}} = 2\pi\sqrt{3}\gamma l_p^2$, donde γ es conocido como el parámetro de Barbero-Immirzi. Por tanto, y de acuerdo a la interpretación estándar de la Mecánica Cuántica, el valor mínimo que puede arrojar una medición del área física de una superficie es $a_{\text{mín}}$. Valores mayores de área también pueden ser medidos, pero solamente aquellos que estén en el espectro discreto del operador de área. Esto da lugar entonces a una noción de «geometría cuántica»². En contraste en la geometría clásica el área de una superficie puede tomar cualquier valor mayor o igual a cero.

A pesar de los avances mencionados previamente, y otros más, no se ha logrado hasta el momento encontrar soluciones a las ecuaciones generales cuánticas de movimiento. Un procedimiento menos ambicioso pero más exitoso ha sido la aplicación de conceptos y técnicas de la Gravedad Cuántica de Lazos para cuantizar modelos reducidos por simetría (ver [1, 2, 10] y los trabajos allí citados). Esto es lo que se conoce como Cosmología Cuántica de Lazos y su punto de partida es la imposición de alguna simetría a nivel clásico, lo que tiene como consecuencia la reducción de la cantidad de grados de libertad. La máxima reducción no trivial de grados de libertad ocurre en los modelos homogéneos e isótropos donde sobrevive un único grado de libertad, pero esta área de investigación también pretende la cuantización «a la lazos» de modelos homogéneos no isotrópicos, lo cual es de absoluta relevancia para nuestro trabajo pues el interior del agujero negro de Schwarzschild, que es nuestro sistema físico de interés, es una geometría homogénea y anisotrópica, más específicamente un modelo de Kantowski-Sachs sin materia. En la sección (2.2) del primer capítulo discutiremos brevemente este proceso de imposición de simetría para esta geometría en las variables de Ashtekar-Barbero, A_a^i y E_i^a . Después de la reducción simétrica se procede a cuantizar los grados de libertad que permanecen, pero para esto se adaptan técnicas y conceptos desarrollados para la Gravitación Cuántica de Lazos. Concretamente se usan los resultados mencionados arriba: 1) se cuantizan holonomías y flujos y 2) se impone la existencia de un área mínima. Varios modelos homogéneos e isótropos han sido cuantizados por este método (ver [7, 8, 9] y las referencias allí incluidas), y en todos ellos la Cosmología Cuántica de Lazos ha logrado remover la singularidad inicial del «big bang». La

equivalentes.

²Una aplicación de esta geometría cuántica de superficies es el cálculo desde un punto de vista microscópico del área del horizonte de un agujero negro y su entropía asociada (ver [3], capítulo 7 y las referencias allí citadas).

estrategia para comprobarlo es tomar un estado inicial semiclásico y tal que el valor esperado del operador de volumen en dicho estado sea del orden del volumen actual del universo. Con esta condición inicial, y con un campo escalar como contenido de materia, se evoluciona cuánticamente hacia atrás en el tiempo. La evolución temporal del valor esperado del operador volumen es tal que va disminuyendo hasta alcanzar un valor mínimo del orden de Planck tras el cual el volumen del universo empieza a aumentar hacia atrás en el tiempo. Esta dinámica recibe el nombre de rebote y se puede ver para un caso específico en la figura (1). Es decir el universo no tiene principio, es eterno, experimenta una contracción, luego un rebote y continúa con una gran explosión. La robustez de este fenómeno se comprobó posteriormente usando estados iniciales que no son semiclásicos [27, 26]. Sin embargo, abandonar la zona de confort de los universos homogéneos e isotrópicos y pasar a los modelos cuánticos anisotrópicos no ha sido tan fructífero. A pesar de que las ecuaciones de movimiento cuánticas se han podido plantear consistentemente en varios casos como Bianchi I [11, 43, 44], Bianchi II [12] y Bianchi IX [67] los detalles de la correspondiente evolución no han sido reportados -ni siquiera numéricamente-, debido a su «excepcional dificultad» [1]. Es por esto que ha sido necesario acudir al llamado «formalismo efectivo». Esta es una dinámica sobre un espacio de fase «clásico» pero con un hamiltoniano que contiene correcciones inspiradas en la geometría cuántica. Este formalismo nació con los modelos homogéneos e isotrópicos cuya dinámica cuántica es conocida en detalle. El resultado es sorprendente [8]: las trayectorias de la dinámica efectiva concuerdan casi perfectamente con la evolución cuántica (ver figura 1). Esto inclusive en el régimen de Planck.

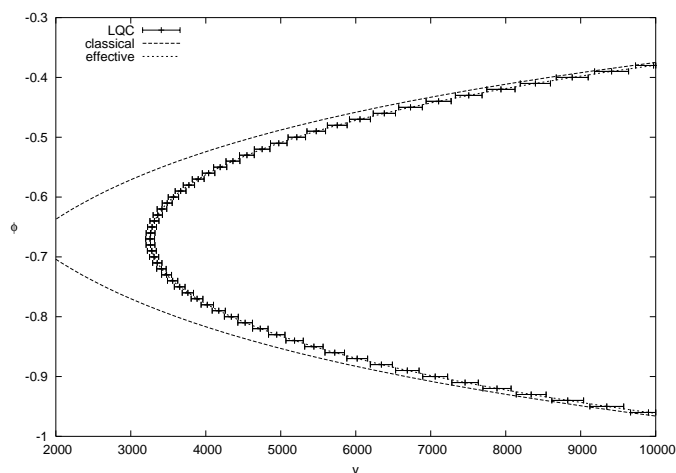


Figura 1. Aquí se muestra la evolución de los valores esperados del operador cuántico de volumen (eje horizontal) y su dispersión y se compara con las trayectorias de la dinámica clásica y efectiva. Figura tomada de [8].

El origen físico del formalismo efectivo puede ser entendido usando las integrales de camino de Feynman. Allí la contribución de cada trayectoria a la amplitud de probabilidad está multiplicada por una fase $e^{\frac{i}{\hbar}S}$, donde S es la acción clásica. Se puede mostrar, usando la aproximación de fase estacionaria, que cuando $\hbar \rightarrow 0$, la contribución más importante viene de la trayectoria que extremaliza la acción, es decir de la trayectoria que es solución de las ecuaciones de movimiento clásicas. La situación es muy similar –pero no completamente igual– en la cuantización a la lazos, pues allí, cuando se construye el propagador cuántico, cada trayectoria en el espacio de configuración es multiplicada por un factor $e^{\frac{i}{\hbar}S_{ef}}$. Pero ahora S_{ef} no es la acción clásica, sino que contiene contribuciones de la geometría cuántica [5, 42, 52, 30]. En el apéndice B discutiremos las ideas que están detrás de la construcción del propagador cuántico a la lazos que aplicadas al caso del interior de Schwarzschild nos permitirá proponer una expresión para S_{ef} . Volviendo al caso general, cuando $\hbar \rightarrow 0$, aún podemos aplicar la aproximación de fase estacionaria y concluir que las trayectorias que extremalizan la función S_{ef} contienen información de la dinámica cuántica con algún grado de fidelidad. Esto se hizo por primera vez en [8] con un modelo homogéneo e isótropo. El resultado es sorprendente: aún en el régimen de Planck donde se esperaría una fuerte contribución de efectos cuántico-gravitacionales la solución semiclásica sigue coincidiendo perfectamente con la dinámica cuántica exacta (ver

Figura 1). Aún más, en [27], se desarrolló numéricamente la dinámica cuántica de un universo homogéneo e isótropo, tomando estados iniciales no semiclásicos y se encontró que en este caso la solución efectiva sigue siendo una muy buena aproximación. En conclusión, hay evidencia importante de la utilidad del formalismo efectivo para extraer información física fidedigna de modelos de gravedad cuántica. La gran ventaja de este formalismo es que matemáticamente las soluciones son métricas suaves con las cuales se pueden usar todas las herramientas conocidas de la geometría riemanniana para explorar las características de la región donde clásicamente se desarrolla la singularidad. En particular nos interesa el comportamiento de los escalares de curvatura, de volúmenes y de áreas. Clásicamente los primeros típicamente divergen, mientras que volúmenes y áreas de regiones espaciales tienden inexorablemente a cero. En cuanto al comportamiento de las geodésicas, trabajaremos aquí la ecuación de Raychaudhuri, que en el caso clásico presenta divergencias en el factor de expansión θ , en su derivada $\dot{\theta}$ y en el factor de esfuerzo cortante σ . Con las métricas que se obtienen del formalismo efectivo también se pueden estudiar estas cantidades. En el caso de simetría homogénea e isótropa se han encontrado buenos resultados (ver por ejemplo [2] y las referencias allí incluidas): curvaturas, volúmenes, áreas y la ecuación de Raychaudhuri están bien comportadas. Para los modelos anisotrópicos los resultados no son tan completos: tanto para el caso de los modelos de Bianchi estudiados como de Kantowski-Sachs con y sin materia se ha mostrado que en la teoría efectiva los factores de expansión θ y de esfuerzo cortante σ son finitos. Sin embargo para descartar singularidades de las congruencias de geodésicas se necesita probar también la finitud de la derivada $\dot{\theta}$, cosa que hasta el momento no se había logrado *para ningún modelo*. Precisamente uno de los resultados de nuestro trabajo es el primer análisis completo de la ecuación de Raychaudhuri en presencia de anisotropías y de efectos cuánticos incorporados por medio de la dinámica efectiva. En este trabajo estudiamos la ecuación de Raychaudhuri para la geometría efectiva del interior de un agujero negro esféricamente simétrico y sin materia y mostramos que en este caso, $\theta, \dot{\theta}, \sigma$ y el escalar de Ricci permanecen acotados, rectificando de esta forma las correspondientes singularidades clásicas. En cuanto al comportamiento de la curvatura en presencia de anisotropías, tampoco existen resultados generales que afirmen la finitud de todos los escalares de curvatura. Aún con un mismo tipo de simetría se ha encontrado que, dependiendo del contenido de materia, puede haber –o no– singularidades de curvatura. Para poner un ejemplo, en el caso de Bianchi I [58] los escalares de Kretsch-

mann, Weyl y Ricci pueden diverger y *solamente* en el caso de un fluido perfecto ideal se puede demostrar la finitud. En este trabajo, también por primera vez mostraremos que toda la geometría efectiva en el interior del agujero negro de Schwarzschild es tal que todos los escalares de curvatura, polinomiales y diferenciales, y de orden arbitrario (finito) son finitos. Explícitamente mostraremos una cota para el escalar de Kretschmann. En cuanto al comportamiento del volumen en modelos anisótropos efectivos, se ha encontrado que en algunas soluciones numéricas (Bianchi I [11, 17], Bianchi II [12, 20] y Bianchi IX [21, 67]) el volumen, visto como una función del espacio de fase, no evoluciona hacia el punto singular $V = 0$, sino que evolucionando hacia el pasado se encuentra un volumen mínimo estrictamente mayor a cero tras lo cual se vuelve a expandir. Esto en contraste con la dinámica clásica donde todas las soluciones comparten la característica de encontrarse con la singularidad de volumen $V = 0$, donde termina la evolución. En este trabajo, uno de los resultados más importantes, es demostrar la existencia de este rebote, no solamente para el interior del agujero negro efectivo, sino para todos los modelos con factor de expansión θ acotado. Este es el caso de todos los modelos efectivos homogéneos, isótropos y anisótropos, aceptados hoy en día. De hecho uno de los criterios para aceptar la viabilidad de un modelo efectivo es la finitud del factor de expansión, por lo que este teorema descarta la existencia de singularidades en el que el volumen va a cero (singularidades fuertes) en dichos modelos. Es importante resaltar que este resultado es aplicable también a los menos explorados modelos inhomogéneos, por ejemplo los modelos de Gowdy cuantizados «a la lazos» que también tienen factor de expansión acotado [59]. Por ser además independiente del contenido de materia, este es uno de los resultados más generales y de mayor alcance dentro del área de teorías efectivas de lazos.

En cuanto a los teoremas de singularidades de Penrose y Hawking, que aseguran que observadores geodésicos (es decir, observadores en caída libre) tienen un tiempo propio de vida finito, algunos trabajos [55, 56] han asegurado que en la geometría efectiva este problema ya no existe. Basan esta conclusión en el buen comportamiento de las correspondientes ecuaciones diferenciales de las geodésicas efectivas. La interpretación de estos resultados no es correcta como lo muestra la bien comportada ecuación diferencial $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$, pero cuya solución $x(t) = x_0(1 - tx_0)^{-1}$ diverge, dejando de existir en un tiempo finito $t = 1/x_0$. Consideramos pues que este tema no ha sido adecuadamente discutido y tampoco tenemos un resultado robusto al respecto. Sin embargo, un tema relacionado es el de el tiempo de vida de la solución de las ecuaciones de Hamilton

de la Relatividad General, más específicamente el tiempo propio de vida de la geometría espacial. En el caso de Schwarzschild podemos mostrar que este tiempo de vida es finito, lo cual es una forma alternativa de caracterizar la singularidad. Por el contrario, cuando incorporamos efectos cuánticos mostramos aquí que la geometría efectiva tiene un tiempo de vida propio infinito. Este es otro de los resultados importantes que mostramos en este trabajo.

Parte de los resultados aquí mostrados fueron publicados en [24] y [23].

Quiero agradecer el apoyo financiero proveniente del proyecto CONACYT 237351, « Implicaciones físicas de la estructura del espacio tiempo».

Capítulo 2

Agujero negro de Schwarzschild clásico

2.1. La singularidad del agujero negro de Schwarzschild

La geometría que describe un campo gravitacional estacionario y esféricamente simétrico en el vacío está descrito en coordenadas de Schwarzschild por la métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dT^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

Aquí $T \in \mathbb{R}$ y r, θ y ϕ son las coordenadas esféricas usuales de tal manera que $r \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Una primera mirada a los coeficientes de la métrica (2.1) muestra que en $r = 0$ el coeficiente g_{TT} diverge. Lo mismo sucede en el radio de Schwarzschild $r_s := 2GM$, para el coeficiente g_{rr} . Históricamente estas divergencias fueron los primeros signos de la presencia de singularidades en la Relatividad General clásica y fueron descubiertas casi simultáneamente con la formulación definitiva de las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, la comprensión y caracterización físicamente satisfactoria de lo que es una singularidad del espacio-tiempo fue un proceso que tardó varias décadas. Un primer descubrimiento es que la presunta singularidad en $r_s = 2GM$ no es más que consecuencia de usar un sistema de coordenadas inadecuado (i.e., no

es más que una singularidad coordenada). Esto se puede ver por ejemplo estudiando los escalares de curvatura. En particular el escalar de Kretschmann,

$$K = R_{abcd}R^{abcd} \quad (2.2)$$

$$= \frac{48G^2M^2}{r^6} \quad (2.3)$$

es completamente regular en r_s . Algo diferente ocurre en $r = 0$, donde el escalar de Kretschmann diverge. Cuando un escalar de curvatura diverge, decimos que estamos ante una singularidad de curvatura. La caracterización de singularidades como divergencias de curvatura no es completamente satisfactoria como se discute en [64] (página 214) donde se menciona el caso de ondas gravitacionales planas cuyos escalares polinomiales de curvatura son cero, pero aún así el tensor de curvatura es singular. También se construye un espacio-tiempo cónico que es plano en casi todas partes, excepto en el origen, $r = 0$, donde la métrica no está definida. Tenemos así una geometría sin singularidades de curvatura, pero con una singularidad cónica. Otros posibles síntomas de la existencia de singularidades es cuando volúmenes o áreas de «objetos extensos» se vuelven cero. Esto es lo que sucede por ejemplo en los modelos cosmológicos donde el volumen del universo se vuelve cero en el «big bang». Un punto fundamental es que todos estos comportamientos indeseables deben ocurrir en un tiempo propio finito. Que una curvatura diverja o que el volumen del universo se haga cero en un tiempo propio infinito ciertamente es extraño, pero necesitaríamos toda una eternidad para poder realizar un experimento donde comprobáramos la existencia o inexistencia de dichas singularidades. Sería un fenómeno no falsable y por tanto no pertenecería al mundo del conocimiento científico. Es precisamente esta noción de fenómenos extraños ocurriendo a tiempos propios finitos lo que llevó a Penrose a proponer en 1964 [48] la que es considerada actualmente como la mejor caracterización de un espacio-tiempo singular: la existencia de geodésicas tipo luz o tipo tiempo incompletas. Recordemos que el movimiento de una partícula física en el espacio-tiempo \mathcal{M} es descrita por una trayectoria $\gamma(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}$ que es tipo tiempo o tipo luz. En el caso de partículas libres de prueba, éstas trayectorias son además geodésicas del espacio-tiempo con tiempo propio

$$\tau = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu} dt. \quad (2.4)$$

Aquí $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo y $\dot{\gamma}^\mu$ es el vector tangente a la curva. Recordemos además que el tiempo propio es el tiempo que marca

un reloj hipotético que viaja por la trayectoria γ . Para una partícula libre en el espacio-tiempo de Minkowski podemos extender γ tal que para la extensión máxima la expresión correspondiente a (2.4) sea tal que $t_f \rightarrow \infty$ y por tanto $\tau \rightarrow \infty$. La pregunta clave es si esta misma extensión se puede hacer en un espacio-tiempo arbitrario y si, en caso de ser posible, también para la extensión máxima se cumple que $\tau \rightarrow \infty$. Es aquí donde se introduce la siguiente y fundamental definición: Un espacio-tiempo es singular cuando hay alguna geodésica maximalmente extendida con tiempo propio τ finito. Estas geodésicas se denominan incompletas. Es exactamente esto lo que pasa con los modelos cosmológicos: una geodésica tipo tiempo que tiene su punto inicial hoy y que extendamos hacia atrás en el tiempo va a terminar en el «big bang» en un tiempo propio finito. Dentro de un agujero negro de Schwarzschild (ver ejercicio 31.4 en [45]) también se puede ver que ninguna geodésica tipo tiempo puede tener tiempo propio τ mayor a πM . Es decir, cualquier observador dentro del horizonte perdurará un tiempo de vida τ tal que

$$\tau < \pi M.$$

Inicialmente se pensó que la existencia de estas geodésicas incompletas podría ser producto de una imposición de simetría demasiado fuerte. Que este no es el hecho lo demostraron Penrose, Geroch y Hawking en los famosos teoremas de singularidades [32, 48]: todos los espacio-tiempo que satisfacen ciertas hipótesis físicamente aceptables tienen geodésicas tipo tiempo incompletas (ver [64], capítulo 9 y las referencias allí incluidas).

¿Qué le ocurriría a un reloj que viajara por una geodésica incompleta a medida que este se acerca al punto donde el tiempo propio asume su máximo valor, es decir, cuando se acerca a la singularidad? Constatar esta pregunta puede llegar a ser bastante difícil, pero de hecho no es de mucha utilidad: actualmente se piensa que las singularidades no tienen una existencia física real, sino que son producto de la aplicación de un modelo matemático que es inadecuado en la situación física de interés. De hecho, al examinar los escalares de curvatura estos divergen y por lo tanto superan la escala de la curvatura de Planck $\kappa_P = \frac{1}{l_P}$, donde $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ es la longitud de Planck. La expectativa es que la cuantización del campo gravitacional proporcione un modelo matemático físicamente adecuado que a su vez acote las curvaturas que divergen y permita la extensión de las geodésicas incompletas más allá de las singularidades.

2.2. El interior del agujero negro de Schwarzschild

Volviendo a la geometría de Schwarzschild, una región destacada del espacio-tiempo es el horizonte definido por $r = r_s$. Por construcción, fuera del horizonte los campos vectoriales $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a$ y $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a$ son tipo tiempo y tipo espacio respectivamente¹. En contraste dentro del horizonte el vector $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a$ es tipo espacio y el vector $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a$ es tipo tiempo. Para incorporar en la notación las características causales de las coordenadas se renombra a la coordenada espacial T como x y la coordenada temporal r por T . Así, la métrica queda

$$ds^2 = - \left(\frac{2GM}{T} - 1 \right)^{-1} dT^2 + \left(\frac{2GM}{T} - 1 \right) dx^2 + T^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

donde $0 < T < 2GM$ y $x \in \mathbb{R}$. Como resultado de este análisis, dentro del horizonte la geometría ya no es estacionaria, sino que es espacialmente homogénea y anisotrópica. De hecho, ésta corresponde a un espacio-tiempo de los llamados Kantowski-Sachs [38]: variedades lorentzianas de dimensión cuatro que admiten una acción del grupo de simetría $\mathbb{R} \times SO(3)$. En términos de los generadores ξ_i de $SO(3)$ y ζ de \mathbb{R} , el álgebra de Lie del grupo es:

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ij}^k \xi_k, \quad [\xi_i, \zeta] = 0. \quad (2.6)$$

Las órbitas de esta acción son superficies tipo espacio Σ con topología $\mathbb{R} \times S^2$. Es en este escenario que se desarrolla el comportamiento singular arriba mencionado. Los efectos cuánticos que incorporaremos en la dinámica de ésta geometría están inspirados en la llamada Gravitación Cuántica de Lazos, cuyos fundamentos clásicos presentaremos brevemente a continuación.

¹Adoptamos en este texto la convención de índices abstractos. Las primeras letras del alfabeto latino, a, b, c, \dots , denotan tensores sobre Σ . Letras minúsculas del alfabeto griego, μ, ν, ρ, \dots , denotan tensores en \mathcal{M} . Las letras intermedias del alfabeto latino, i, j, k, \dots , denotan tensores en el álgebra de Lie de $SU(2)$.

2.3. Formulación de Ashtekar-Barbero de la Relatividad General

Las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

son las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General. Sus soluciones son métricas lorentzianas $g_{\mu\nu}$ que describen la interacción gravitacional en una variedad \mathcal{M} de dimensión 4. Estas ecuaciones pueden ser halladas a partir de la acción de Einstein-Hilbert,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.8)$$

Aquí $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci. El punto de partida para la cuantización canónica de esta teoría es la formulación de la dinámica clásica en un espacio fase sobre el cual esté definida una función hamiltoniana. Los detalles de esta formulación se pueden ver por ejemplo en [3, 6, 31, 39, 61]. Allí también se pueden encontrar referencias a los trabajos originales. Para esto primero es necesario una foliación del espacio-tiempo en términos de hipersuperficies de Cauchy $\Sigma : \mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$. Esto es lo que se conoce como la descomposición 3 + 1. Dado un campo ϕ sobre el espacio-tiempo \mathcal{M} , éste puede ser expresado como $\phi(x, t)$ donde $x \in \Sigma$ y $t \in \mathbb{R}$. Podemos entonces interpretar a $\phi(x, t)$ como resultado de la dinámica hamiltoniana de un campo $\bar{\phi}(x)$ definido sobre el espacio tridimensional Σ que al evolucionar en el tiempo genera al campo $\phi(x, t)$ que está definido sobre \mathcal{M} . Por ejemplo, en el caso de la métrica, ésta puede ser escrita como

$$ds^2 = -N(x, t) dt^2 + q_{ab}(x, t) (dx^a + N^a(x, t) dt) (dx^b + N^b(x, t) dt). \quad (2.9)$$

Aquí el tensor q_{ab} es la métrica riemanniana de Σ inducida por $g_{\mu\nu}$.

El siguiente paso es usar la métrica en esta forma para, a partir de la acción de Einstein-Hilbert (2.8), encontrar la formulación hamiltoniana. En este proceso se debe tener en cuenta que no todas las componentes de $g_{\mu\nu}$ evolucionan independientemente y por tanto hay constricciones entre ellas. El resultado de este procedimiento es conocido como la formulación ADM de la relatividad general. Ésta se desarrolla sobre un espacio fase

con coordenadas q_{ab} y su momento canónico π^{ab} . El corchete de Poisson es

$$\{\pi^{ab}(x), q_{cd}(y)\} = 2\kappa\delta_{(c}^a\delta_{d)}^b\delta(x, y).$$

La acción en términos de estas variables queda

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int dt \int_{\Sigma} dx^3 \left(\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - N_a \mathcal{V}^a - NS \right),$$

donde

$$\mathcal{V}^a = -2\nabla_a \left(q^{-1/2} \pi^{ab} \right) = 0 \quad (2.10)$$

y

$$S = -q^{1/2} \left(R^{(3)} - q^{-1} \pi^{cd} \pi_{cd} + \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right) = 0 \quad (2.11)$$

son funciones del espacio de fase denominadas como constricción de difeomorfismos y constricción escalar respectivamente. También podemos identificar aquí a la densidad hamiltoniana $\mathcal{H} = N_a \mathcal{V}^a + NS$ que por tanto se anula idénticamente. Esta formulación hamiltoniana de la Relatividad General fue durante décadas el punto de partida para la cuantización canónica de la teoría. Sin embargo, el programa no logró progresar apreciablemente.

Un mayor avance se ha logrado desde la introducción de las variables de Ashtekar-Barbero. Aquí las nuevas variables canónicas son una conexión $SU(2)$, que denotaremos como $A_a^i(x)$, y su variable canónicamente conjugada $E_i^a(x)$ [49]. Esta última es conocida como triada densitizada y está relacionada directamente con las triadas usuales e_a^i

$$q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij},$$

con $i, j = 1, 2, 3$, a partir de las cuales obtenemos E_i^a :

$$E_i^a := \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k.$$

Notese que la triada tiene nueve componentes, mientras que q_{ab} , siendo simétrico, tiene solo seis. Estos grados de libertad adicionales surgen de la posibilidad de realizar tres rotaciones de las triadas y por tanto ésta formulación contiene una simetría $SO(3)$. Como en cada punto del espacio las rotaciones pueden ser diferentes, estamos ante una simetría de norma local, del mismo tipo que se encuentra en las teorías de Yang-Mills. En

este caso, la conexión natural es la llamada conexión de spin Γ_a^i que es la solución de las ecuaciones de estructura de Cartan,

$$\partial_{[a}e_{b]}^i + \epsilon^i{}_{jk}\Gamma_{[a}^j e_{b]}^k = 0, \quad (2.12)$$

o

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_{k}e_j^b \left(\partial_{[a}e_{b]}^k + \delta^{kl}\delta_{ms}e_l^c e_a^m \partial_b e_c^s \right). \quad (2.13)$$

Sin embargo, ésta conexión no es canónicamente conjugada a la triada densitizada. Para obtener la formulación canónica definitiva se introduce la conexión de Ashtekar-Barbero

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (2.14)$$

donde

$$K_a^i := \frac{1}{\sqrt{\det(E)}} K_{ab} E_j^b \delta^{ij},$$

está relacionado con la curvatura extrínseca $K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{ab}$ (n^a es normal a Σ y unitario) y γ es un numero real llamado parámetro de Immirzi [35]. De hecho lo que tenemos aquí es una familia uniparamétrica de variables canónicamente equivalentes parametrizadas por γ . El espacio fase es ahora más grande que aquel basado en métricas y tiene estructura simpléctica

$$\Omega[(A, E); (\underline{A}, \underline{E})] = \frac{1}{8\pi G \gamma} \int_{\Sigma} d^3x \left(E_i^a(x) \underline{A}_a^i(x) - \underline{E}_i^a(x) A_a^i(x) \right) \quad (2.15)$$

dando lugar a un corchete de Poisson

$$\{E_i^a(x), A_b^j(y)\} = 8\pi G \gamma \delta_b^a \delta_i^j \delta(x, y). \quad (2.16)$$

También hay una constricción adicional, la constricción de Gauss,

$$\mathcal{G}_i = D_a E_i^a = 0, \quad (2.17)$$

que proviene de la simetría bajo transformaciones $SU(2)$. Aquí $D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon^k{}_{ij} A_a^j E_k^a$ es la derivada covariante de la triada densitizada. En cuanto a las constricciones usuales de difeomorfismos (2.10) y escalar (2.11) ellas adquieren ahora la siguiente forma:

$$\mathcal{V}_b = E_j^a F_{ab} - (1 + \gamma^2) K_a^i \mathcal{G}_i = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{S} = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} \left(\epsilon^{ij} {}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right) = 0. \quad (2.19)$$

Donde $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$ es la curvatura de la conexión y $K_a^i = \frac{1}{\sqrt{\det E}} K_{ab} E_j^b \delta^{ij}$ está relacionado con la curvatura extrínseca de Σ , $K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n \left(\det |E|^{-1} \delta_{ij} E_a^i E_b^j \right)$ (n es la normal unitaria a Σ). La acción queda:

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int dt \int_{\Sigma} dx^3 \left(E_i^a \dot{A}_i^a - N^b \mathcal{V}_b - NS - N^i \mathcal{G}_i \right), \quad (2.20)$$

La dinámica está dada entonces por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{F} \left(A_a^i, E_i^a \right) = \{ F \left(A_a^i, E_i^a \right), H \} \quad (2.21)$$

donde las condiciones iniciales deben satisfacer las constricciones (2.17),(2.18) y (2.19).

2.4. Imposición de simetría de Kantowski-Sachs en la formulación de Ashtekar-Barbero

La investigación de escenarios físicos realistas es generalmente difícil. Es por esto que se aproximan situaciones reales con modelos matemáticos altamente simétricos. Esto se da por medio de la invariancia ante la acción de un grupo de simetría \mathcal{S} , sobre Σ

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \times \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (s, p) &\rightarrow s(p) \end{aligned}$$

En el caso de una teoría basada en métricas, exigimos invariancia de la métrica así: Para cada $s \in \mathcal{S}$, esta acción induce una aplicación $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$. La métrica q es invariante si para dos vectores tangentes $v, w \in T_p \Sigma$,

$$q_p(v, w) = q_{s(p)}(s_* v, s_* w),$$

donde la aplicación s_* es el mapeo diferencial $s_* : T_p \Sigma \rightarrow T_{s(p)} \Sigma$ [47].

En una teoría de conexiones con grupo de norma G el proceso de imponer la simetría debe ser acorde con el carácter geométrico de éstas, pues puede darse el caso donde un campo A no sea manifiestamente invariante en

el sentido que $s^*A = A' \neq A$, pero que $A \rightarrow A'$ estén relacionados por una transformación de norma. Es decir, la ecuación que debemos resolver es:

$$s^*A = g(s) A g(s)^{-1} + g(s)^{-1} dg(s)$$

donde g es un elemento del grupo de norma G . El formalismo matemático subyacente a esta ecuación se puede encontrar en [40, 66]. Algunos resultados con aplicaciones a la gravitación aparecen en [14]. Para nuestro caso necesitamos conexiones invariantes esféricamente simétricas. Estas fueron halladas en [19] y después implementadas a la simetría de Kantowski-Sachs en [4] con el siguiente resultado: la conexión y triada invariantes se pueden escribir de la forma

$$A = A_a^i \tau_i dx^a = \tilde{c} \tau_3 dx + (\tilde{a} \tau_1 + \tilde{b} \tau_2) d\theta + (-\tilde{b} \tau_1 \sin \theta + \tilde{a} \tau_2 \sin \theta + \tau_3 \cos \theta) d\phi, \quad (2.22)$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}^a_i \tau_i \partial_a = \tilde{p}_c \tau_3 \sin \theta \partial_x + (\tilde{p}_a \tau_1 + \tilde{p}_b \tau_2) \sin \theta \partial_\theta + (-\tilde{p}_b \tau_1 + \tilde{p}_a \tau_2) \partial_\phi \quad (2.23)$$

Aquí, en términos de las matrices de Pauli σ_i , $\tau_i = -i\sigma_i/2$ y es una base del álgebra de Lie de $SU(2)$ que satisface $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ij}^k \tau_k$. Las funciones $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{p}_a, \tilde{p}_b$ y \tilde{p}_c solamente dependen del tiempo. Es de resaltar aquí que las expresiones anteriores no son manifiestamente invariantes bajo simetría esférica, pues aparecen dependencias angulares explícitas. El siguiente paso en el proceso de reducción de simetría es evaluar las constricciones en los campos simétricos (2.22) y (2.23). Como resultado de esto la constricción de difeomorfismos se anula idénticamente. En cuanto a la constricción de Gauss ella queda [4]:

$$G = \tilde{a} \tilde{p}_b - \tilde{b} \tilde{p}_a.$$

Aquí se hace una fijación parcial de la norma tal que $\tilde{a} = 0$, lo cual implica que $\tilde{p}_a = 0$. También tenemos la simetría bajo reflexiones

$$(\tilde{b}, \tilde{p}_b) \rightarrow (-\tilde{b}, -\tilde{p}_b),$$

y podemos escoger $\tilde{p}_b > 0$. En este punto se nota [16] que el cambio de signo de \tilde{p}_c corresponde a diferentes orientaciones de las triadas por lo que podemos escoger $\tilde{p}_c \geq 0$. De este modo la única constricción que se mantiene es la constricción escalar \mathcal{S} . Finalmente al evaluar esto en la acción (2.20) y en la estructura simpléctica (2.15) se debe tener cuidado pues cuando Σ es una variedad no compacta y los campos que allí están definidos tienen simetría homogénea —como es nuestro caso— todas las integrales serán divergentes. La solución propuesta en la literatura

es restringir el dominio de integración para hacerlo acotado. En nuestro caso, tomaremos $0 \leq x \leq L$. Adicionalmente es conveniente hacer un reescalamiento de las variables:

$$b := \tilde{b}, \quad (2.24)$$

$$c := L\tilde{c},$$

$$p_b := L\tilde{p}_b$$

$$p_c := \tilde{p}_c. \quad (2.25)$$

En términos de estas variables los corchetes de Poisson quedan como

$$\{b, p_b\} = G\gamma, \quad \{c, p_c\} = 2G\gamma \quad (2.26)$$

y el hamiltoniano queda

$$H_{cl} = -\frac{N}{2G\gamma^2} \left[2bc\sqrt{p_c} + (b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right] \approx 0. \quad (2.27)$$

Las ecuaciones de movimiento con $N = 1$ son:

$$\dot{b} = -\frac{b^2 + \gamma^2}{2\sqrt{p_c}\gamma}, \quad (2.28)$$

$$\dot{c} = \frac{b^2 p_b - 2bc p_c + p_b \gamma^2}{2p_c^{3/2}\gamma}, \quad (2.29)$$

$$\dot{p}_b = \frac{b p_b + c p_c}{\sqrt{p_c}\gamma}, \quad (2.30)$$

$$\dot{p}_c = \frac{2b\sqrt{p_c}}{\gamma}. \quad (2.31)$$

Una selección importante aquí es la de la función lapso $N(t)$. Teniendo en cuenta que queremos estudiar el comportamiento singular de la geometría, es necesario usar como parámetro de evolución el tiempo propio de observadores que siguen trayectorias geodésicas en el espacio-tiempo. Esto equivale a tomar como función lapso $N(t) = 1$. Es con esta selección que se calculan las ecuaciones de arriba (2.28-2.31). Una vez podamos encontrar sus soluciones, procedemos a usar la relación entre la métrica espacial y la triada densitizada, $qq^{ab} = \delta^{ij}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b$, que implica que

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{p_b^2}{L^2 p_c} dx^2 + p_c (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.32)$$

Es así como estamos en capacidad de calcular toda la información geométrica. De particular utilidad son las siguientes relaciones para la longitud l del intervalo $[0, L]$, el área A_{S^2} de S^2 y el volumen V de $[0, L] \times S^2$:

$$l = p_b / \sqrt{p_c}, \quad (2.33)$$

$$A_{S^2} = 4\pi p_c, \quad (2.34)$$

$$V = 4\pi p_b \sqrt{p_c}. \quad (2.35)$$

En cuanto a la curvatura podemos encontrar que el escalar de Ricci toma la forma

$$R = \frac{2p_c \ddot{p}_b + p_b (2 + \ddot{p}_c)}{p_b p_c}, \quad (2.36)$$

y el de Kretschmann es

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2p_b^2 p_c^4} & \left[4p_c^2 (3\dot{p}_b^2 \dot{p}_c^2 - 4p_c \dot{p}_b \dot{p}_c \ddot{p}_b + 2p_c^2 \ddot{p}_b^2) \right. \\ & + 4p_b p_c (p_c \ddot{p}_b (3\dot{p}_c^2 - 2p_c \ddot{p}_c) + \dot{p}_b (-4\dot{p}_c^3 + 2p_c \dot{p}_c \ddot{p}_c)) \\ & \left. + p_b^2 (7\dot{p}_c^4 + 2p_c \dot{p}_c^2 (2 - 5\ddot{p}_c) + p_c^2 (8 + 6\ddot{p}_c^2)) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tenemos así el sistema físico completamente determinado y podemos proceder a buscar sus soluciones. Sin embargo, antes de proceder con esta tarea, veremos que aún sin conocer explícitamente las ecuaciones de movimiento, ni resolverlas, es posible obtener información muy útil.

2.5. Enfoque alternativo para la singularidad del agujero negro de Schwarzschild

2.5.1. Análisis algebraico de la constricción

El primer método que usamos lo podemos denominar «análisis algebraico de la constricción». Está basado en el hecho de que la constricción es una expresión algebraica definida sobre el espacio de fase, y que ella se debe satisfacer durante la evolución del sistema. Por ejemplo, notemos que en la constricción hamiltoniana del interior de Schwarzschild (2.27) el término $(b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}}$ es positivo. Para que la constricción se cumpla debe satisfacerse que el primer término $2bc\sqrt{p_c}$ sea negativo y que por tanto b y c tengan signos diferentes. Esta condición se debe cumplir para todo instante de tiempo y por tanto para cualquier solución del sistema (2.28-2.31) se debe cumplir que $b(t)$ y $c(t)$ tienen signos opuestos:

$$\text{signo}(b(t)) = -\text{signo}(c(t)) \quad (2.38)$$

Notablemente podemos saber esto sin usar ni las ecuaciones de movimiento, ni sus soluciones explícitas. Más adelante veremos que el signo de estas funciones determina si el sistema es un agujero negro ($b < 0$) o uno blanco ($b > 0$).

Otra observación útil es que la constricción (2.27) es una función cuadrática en la variable b , con discriminante

$$D = c^2 p_c^2 - \gamma^2 p_b^2.$$

Puesto que b es real se debe cumplir que el discriminante sea no-negativo lo que conduce a la desigualdad

$$\gamma^2 p_b^2 \leq (c p_c)^2.$$

Por otro lado es fácil mostrar [16] que

$$\gamma K_c := c p_c \quad (2.39)$$

es una constante de movimiento y por tanto

$$p_b \leq |K_c|. \quad (2.40)$$

Este resultado junto con (2.38) se concluyen únicamente estudiando las propiedades algebraicas de la constricción, sin usar ni resolver completamente las ecuaciones de movimiento. Aunque en este punto no sea evidente la relevancia de este tipo de análisis, más adelante veremos que un análisis algebraico similar permitirá conocer si los efectos provenientes de una teoría cuántica de la gravedad eliminan o no la singularidad de Schwarzschild.

2.5.2. Análisis cualitativo de las soluciones de las ecuaciones de movimiento.

La caracterización más aceptada modernamente de una singularidad del espacio-tiempo está basada en la incompletitud de geodésicas causales. Sin embargo existen otros síntomas geométricos que pueden estar indicando la presencia de singularidades. Por ejemplo, como discutimos antes, uno de ellos es la divergencia de escalares de curvatura. En esta sección queremos presentar una perspectiva diferente que nos puede estar señalando la existencia de singularidades del espacio-tiempo. Ella está basada en el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias, más precisamente en el comportamiento global de las soluciones. Referencias muy útiles en este tema son los libros de Teschl [60] y Vrabie [63]².

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se presenta en la forma

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0, \quad (2.41)$$

con $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, U no vacío y abierto, $t_0 \in I$, un intervalo no trivial en \mathbb{R} , y $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$. En nuestro caso, el sistema de ecuaciones diferenciales es (2.28-2.31) y el dominio $U = \{b, c, p_b, p_c \mid -\infty < b < \infty, -\infty < c < \infty, -\infty < p_b < \infty, 0 < p_c < \infty\}$. Nótese que aunque valores negativos de p_b están permitidos matemáticamente en U , la selección de norma es tal que p_b es positivo.

Dado el sistema (2.41), tres aspectos importantes a estudiar son la existencia, la unicidad y la extendibilidad de las soluciones. El teorema de

²Aquí quiero agradecer un pequeño, pero muy fructífero intercambio epistolar con los Profesores Teschl y Vrabie, quienes muy amablemente resolvieron dudas que me permitieron avanzar en este trabajo.

Picard-Lindelöf garantiza que si f es Lipschitz-continua ³ en x_0 , la solución a (2.41) existe y es única. Aunque en matemáticas es fácil encontrar ejemplos de ecuaciones diferenciales que dada una condición inicial tienen varias soluciones, en física este comportamiento es inadmisibles. Es por esto que damos por sentado que este requerimiento se cumple. O que a lo sumo, nos permite descartar algunas condiciones iniciales problemáticas. En nuestro caso la función f del lado derecho de (2.28-2.31) no es Lipschitz-continua para $p_c = 0$ y valores finitos de las otras variables. Por tanto se debe tener cuidado de escoger estos puntos como condición inicial. Notemos además que en la métrica (2.32) y en la constricción (2.27) estos mismos puntos producen problemas, por lo tanto tampoco son físicamente aceptables.

Ahora, desde el punto de vista de la existencia de singularidades, el aspecto mas importante es el comportamiento global de la solución. En la formulación hamiltoniana de la Relatividad General se especifica una geometría espacial inicial no singular (y que satisface las constricciones) y ésta evoluciona en el tiempo de tal manera que se satisfacen las ecuaciones de movimiento de Hamilton. La pregunta relevante aquí es: ¿Esta evolución ocurrirá indefinidamente en el tiempo, es decir, para valores arbitrariamente grandes de t ? ¿O por el contrario, la solución a las ecuaciones de Hamilton dejará de estar definida para algún tiempo finito? Para aclarar esta tema analicemos un ejemplo concreto. Sea nuestra ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$$

Dado el buen comportamiento de la función $f = x^2$, el teorema de Picard-Lindelöf garantiza la existencia y unicidad de la solución, que podemos además exhibir:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

Esta solución se puede extender arbitrariamente hacia el pasado ($t < 0$). En cambio hacia el futuro la solución solo existe para $t < \frac{1}{x_0}$, pues

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{x_0}} \frac{x_0}{1 - tx_0} = +\infty.$$

Análogamente, nos preguntamos si las soluciones al sistema (2.28-2.31) que gobiernan la dinámica del interior del agujero negro son extendibles

³La función f es Lipschitz-continua en U si para todo conjunto compacto $K \subset I \times U$, existe $c > 0$ tal que $\frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|} \leq c$ para (t,x) y (t,y) en K .

indefinidamente en el tiempo (no singulares) o si, por el contrario, tienen un tiempo de vida finito, en cuyo caso afirmamos que son singulares. Este problema del comportamiento global para tiempos grandes de soluciones de ecuaciones diferenciales tipo (2.41) ha sido ampliamente estudiado por los matemáticos. El resultado clave (ver por ejemplo [63], Teorema 2.4.3 y [60], Corolario 2.15) asegura básicamente que una solución maximalmente extendida tiene dos posibles destinos: diverge en un tiempo finito o se acerca a la frontera ∂U del dominio de definición U de la función f que define la ecuación diferencial (2.41). A continuación aplicaremos este teorema a nuestro problema (2.28-2.31). Para comenzar, vemos que las ecuaciones para b y p_c se desacoplan del sistema. Para las ecuaciones (2.28) y (2.31) la función f en (2.41) es

$$f(b, p_c) = \left(-\frac{b^2 + \gamma^2}{2\sqrt{p_c}\gamma}, \frac{2b\sqrt{p_c}}{\gamma} \right),$$

Su dominio es $D = \{(b, p_c) \in \mathbb{R}^2 | p_c > 0\}$. Nos interesa un agujero negro en cuyo caso tenemos que $b < 0$ y los valores iniciales están definidos en $D_0 = \{(b, p_c) \in \mathbb{R}^2 | b < 0, p_c > 0\}$. Miremos cuál es el comportamiento global de una solución con estas condiciones iniciales. Puesto que $\dot{b} < 0$ (ver (2.28)) y $\dot{p}_c < 0$ (que se sigue de (2.31) pues $b < 0$), las soluciones $b(t)$ y $p_c(t)$ van a ser monótonamente decrecientes en el tiempo. Usando el teorema arriba discutido, tenemos que la solución máximamente extendida debe alcanzar la frontera ∂D_0 de D_0 . Es decir, para t suficientemente grande $b(t) \rightarrow -\infty$ y $p_c(t) \rightarrow 0$. Ahora, usando que $cp_c = \gamma K_c$ (2.39), concluimos que en este mismo límite $c \rightarrow \infty$. Finalmente podemos hallar el comportamiento asintótico de p_b remplazando la constante de movimiento (2.39) en la constricción (2.27) de donde obtenemos

$$2b\gamma K_c + (b^2 + \gamma^2)p_b = 0, \quad (2.42)$$

y por tanto

$$p_b = -\frac{2b\gamma K_c}{(b^2 + \gamma^2)}$$

Cuando $b \rightarrow -\infty$ la anterior relación implica que $p_b \rightarrow 0$. Del anterior análisis se concluye que el punto final de la solución maximalmente extendida al sistema de ecuaciones (2.28 - 2.31) es

$$b \rightarrow -\infty, c \rightarrow \infty, p_b = 0, p_c = 0. \quad (2.43)$$

Finalmente recordemos que para clasificar como una singularidad, este punto final debe ser alcanzado en un tiempo propio finito. Para verificar

esto procedemos de la siguiente manera: usamos las ecuaciones diferenciales (2.28) y (2.31) para eliminar el tiempo y obtener

$$\frac{dp_c}{db} = -\frac{4bp_c}{(b^2 + \gamma^2)}. \quad (2.44)$$

que se puede integrar facilmente con resultado

$$b = -\gamma \sqrt{\sqrt{\frac{p_{cMAX}}{p_c}} - 1}. \quad (2.45a)$$

donde $p_{cMAX} = \frac{p_{c0}}{\gamma^4} (b_0^2 + \gamma^2)^2$ es una constante que lleva la información de las condiciones iniciales b_0 y p_{c0} de b y p_c , respectivamente. Dos observaciones importantes aquí son: primero que la selección de p_c como variable independiente no es solamente un asunto de conveniencia matemática, sino que es hecha con el propósito de escoger un tiempo relacional [53]. Segundo, la anterior expresión implica que p_c es positivo y alcanza un máximo

$$0 < p_c \leq p_{cMAX}.$$

Por lo tanto $p_c = p_{cMAX}$ corresponde al horizonte de Schwarzschild.

Ahora, para que la solución clásica sea singular es necesario mostrar que el tiempo de vida es finito. Para ver que éste es el caso sustituimos (2.45a) en (2.31) y obtenemos que

$$\dot{p}_c = -2\sqrt{\sqrt{p_{cMAX}p_c} - p_c},$$

y por tanto, integrando entre p_{c0} y p_{cf} ,

$$\Delta t = -\int_{p_{c0}}^{p_{cf}} \frac{dp_c}{2\sqrt{\sqrt{p_{cMAX}p_c} - p_c}},$$

hallamos que

$$\Delta t := t_f - t_0 = g(p_{cf}) - g(p_{c0}) \quad (2.46)$$

con

$$g(s) = \sqrt{\sqrt{p_{cMAX}} - \sqrt{ss^{\frac{1}{4}}}} - \sqrt{p_{cMAX}} \arctan\left(\frac{s^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\sqrt{p_{cMAX}} - \sqrt{s}}}\right). \quad (2.47)$$

Denotamos el tiempo de vida de la solución como

$$\Delta t_v := t_{fv} - t_0,$$

donde t_{fv} esta definido por $p_{cf}(t_{fv}) = 0$, es decir, t_{fv} es el tiempo en que la solución alcanza el punto límite final (2.43). Para estimar el tiempo de vida de la solución evaluamos (2.46) en $p_{cf} = 0$ y usando las desigualdades $|\arctan x| \leq \pi/2$ y $\sqrt{\sqrt{p_{cMAX}} - \sqrt{ss^{\frac{1}{4}}}} \leq \sqrt{p_{cMAX}}/2$ obtenemos una cota superior del tiempo de vida Δt en términos de las condiciones iniciales:

$$\Delta t \leq p_{c0}^{1/4} \sqrt{\sqrt{p_{cMAX}} - \sqrt{p_{c0}}} + \sqrt{p_{cMAX}} \left(\frac{1}{2} + \pi \right). \quad (2.48)$$

La importancia de este resultado es que nos bastará para plantear un análisis alternativo que nos permitirá ver el comportamiento singular de la geometría en la siguiente subsección.

2.5.3. Análisis alternativo de la singularidad de Schwarzschild

El punto límite (2.43) junto con (2.35) y (2.34) nos permiten concluir inmediatamente que volúmenes y áreas tienen un comportamiento singular en este espacio-tiempo, pues se hacen cero en un tiempo propio finito t_{fv} :

$$\lim_{t \rightarrow t_{fv}} A_{S^2} = 0 \quad (2.49)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{fv}} V = 0 \quad (2.50)$$

En cuanto a los escalares de curvatura de Ricci (2.36) y Kretschmann (2.37), para conocer su comportamiento necesitamos las segundas derivadas,

$$\ddot{p}_b = \frac{bc}{\gamma^2}, \quad (2.51)$$

$$\ddot{p}_c = -1 + \frac{b^2}{\gamma^2}, \quad (2.52)$$

que junto con el uso de la constricción nos da como resultado:

$$R \approx 0$$

y

$$K \approx \frac{12}{\gamma^4} \left(\frac{b^2 + \gamma^2}{p_c} \right)^2. \quad (2.53)$$

Adoptamos aquí la notación estándar de la mecánica con constricciones [39] donde el símbolo " \approx " denota una expresión donde ya se han usado las constricciones. Reemplazando (2.45a) en la relación (2.53) obtenemos finalmente que

$$K \approx \frac{12p_{c_{MAX}}}{p_c^3}. \quad (2.54)$$

El punto límite de la solución clásica (2.43) implica inmediatamente que el escalar de Kretschmann diverge hacia el futuro, reobteniendo así la singularidad. Además, comparando con la expresión de Kretschmann en coordenadas de Schwarzschild (2.3) y evaluando en el horizonte encontramos que $p_{c_{MAX}} = 4G^2M^2$. Con esto podemos calcular el área del horizonte

$$\begin{aligned} A_{MAX} &= 4\pi p_{c_{MAX}} \\ &= 16\pi G^2M^2, \end{aligned}$$

expresión que concuerda con la calculada usando las coordenadas de Schwarzschild [64].

2.5.4. La ecuación de Raychaudhuri

Uno de los ingredientes importantes en los teoremas de singularidades es el comportamiento de familias o congruencias de geodésicas tipo tiempo. Este está gobernado por la ecuación de Raychaudhuri [64]:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu \quad (2.55)$$

Aquí ζ^μ es el vector tangente a las geodésicas, θ el factor de expansión, σ describe la deformación por cizalladura, ω la vorticidad y $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci del espacio-tiempo. Podemos hacer una analogía entre una familia de geodésicas y un fluido. Un pequeño elemento de líquido que viaja con un fluido puede expandirse ($\theta > 0$) o contraerse ($\theta < 0$),

puede ser deformado isovolumétricamente ($\sigma_{\mu\nu} \neq 0$), o puede ser rotado ($\omega_{\mu\nu} \neq 0$). De gran significado físico es el factor de expansión θ pues con él se puede describir en el espacio-tiempo el carácter atractivo de la gravedad. De hecho, uno de los pasos claves en la demostración de los teoremas de singularidades es probar que bajo suposiciones físicas realistas descritas por condiciones de energía, la familia de geodésicas se contrae. Es decir, la gravedad es siempre atractiva de tal manera que $\theta \rightarrow -\infty$. En general se puede mostrar que $\theta = \dot{V}/V$ y para Kantowski-Sachs usando (2.35) se obtiene fácilmente que

$$\theta = \frac{\dot{p}_b}{p_b} + \frac{\dot{p}_c}{2p_c}. \quad (2.56)$$

Aquí podemos usar las ecuaciones de movimiento (2.31) y (2.30), junto con la relación (2.45a) y la constricción (2.27) para obtener que

$$\theta \approx \frac{3b^2 - \gamma^2}{2b\sqrt{p_c}\gamma} = \frac{4\sqrt{p_c} - 3\sqrt{p_{cMAX}}}{2p_c\sqrt{\sqrt{\frac{p_{cMAX}}{p_c}} - 1}}. \quad (2.57)$$

Cuando p_c es pequeño, tenemos que $\theta \sim -p_c^{-3/4}$. Por lo tanto, cuando la evolución nos lleva hacia la singularidad, el factor de expansión diverge en un tiempo propio finito. A partir de la anterior expresión podemos calcular la derivada temporal del factor de expansión:

$$\dot{\theta} \approx -\frac{9b^4 + 2b^2\gamma^2 + \gamma^4}{4b^2p_c\gamma^2} \quad (2.58)$$

$$= \frac{-9p_{cMAX} + 16\sqrt{p_{cMAX}p_c} - 8p_c}{4\sqrt{p_{cMAX}p_c^{3/2}} - 4p_c^2} \underset{p_c \ll 1}{\sim} -\frac{1}{p_c^{3/2}}. \quad (2.59)$$

En el primer renglón podemos ver que $\dot{\theta}$ es una función estrictamente negativa y que por tanto el factor de expansión θ es una función monótonamente decreciente de t y por tanto de p_c .

Para calcular el esfuerzo cortante empleamos la expresión [18]

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{p}_b}{p_b} - \frac{\dot{p}_c}{p_c} \right). \quad (2.60)$$

De nuevo usamos las ecuaciones de movimiento y la constricción para

hallar la dependencia con p_c

$$\sigma \approx -\frac{3b^2 + \gamma^2}{2\sqrt{3}b\sqrt{p_c}\gamma} = \frac{3\sqrt{p_{cMAX}} - 2\sqrt{p_c}}{2\sqrt{3}p_c\sqrt{\sqrt{\frac{p_{cMAX}}{p_c}} - 1}} \underset{p_c \ll 1}{\approx} \frac{1}{p_c^{3/4}}. \quad (2.61)$$

Vemos que todos los escalares geométricos (excepto la vorticidad que se anula cinemáticamente) divergen como resultado de la dinámica. Sin embargo, si los remplazamos en la ecuación de Raychaudhuri (2.55) encontramos que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu &= \frac{-(b^2 + \gamma^2)^2 p_b^2 + 4b^2 c^2 p_c^2}{4b^2 \gamma^2 p_b^2 p_c} \\ &= \frac{G}{2b^2 p_b^2} \left((b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} - 2bc\sqrt{p_c} \right) H_{cl} \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Un resultado que no nos debe sorprender puesto que para la Relatividad General en el vacío el tensor de Ricci es cero.

Capítulo 3

Modelos efectivos de la cuantización por lazos del interior del agujero negro de Schwarzschild

3.1. Aspectos Generales

Como discutimos en el capítulo anterior, la presencia de comportamientos singulares en soluciones físicamente aceptables de la Relatividad General se puede atribuir a usar la teoría más allá de su rango de aplicación. Por ejemplo, en el caso de singularidades de curvatura, las divergencias que aparecen superan la escala de la curvatura de Planck, $\kappa_P = 3,88 \times 10^{65} \text{cm}^{-2}$ (y por supuesto cualquier escala). Desde este punto de vista, la solución de las singularidades podría provenir de introducir efectos cuánticos en la dinámica del campo gravitacional. En las últimas décadas la propuesta de cuantización conocida como Gravitación Cuántica de Lazos ha tenido resultados estructurales importantes (ver por ejemplo [3] y las referencias allí citadas). Sin embargo, los intentos de aplicación a situaciones físicas específicas, o la extracción de resultados fenomenológicos potencialmente medibles, han sido infructuosos. Una estrategia que ha sido más eficiente es tomar los métodos, técnicas y resultados de la Gravitación Cuántica de Lazos para guiar la cuantización de sistemas gravitacionales con un número finito de grados de libertad.

Estos modelos son tradicionalmente conocidos como minisuperespacios y corresponden a las geometrías homogéneas e isotrópicas (Friedmann-Robertson-Walker) y anisotrópicas (Bianchi y Kantowski-Sachs) con diferentes contenidos de materia. Es importante enfatizar que no estamos hablando aquí de encontrar el sector simétrico de una teoría cuántica. Esto es precisamente lo que no ha podido ser realizado dentro de la Gravitación Cuántica de Lazos. En realidad, inclusive para modelos de dimensión finita, la cuantización solo ha podido ser completada para el caso homogéneo e isotrópico con un campo escalar como materia [9].

En la cuantización por lazos de minisuperespacios hay dos elementos que la diferencian de la cuantización estándar: el uso de holonomías y la incorporación de un área mínima física en la teoría¹. A continuación explicaremos en que consisten.

Holonomización: En la cuantización tradicional de un campo es útil el uso de distribuciones con valores en operadores (ver por ejemplo [65]). El campo cuántico $\hat{\phi}$, es un objeto que se define como una distribución que toma valores en un espacio de operadores. Es decir:

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &: D(\Sigma) \rightarrow L(H) \\ f &\rightarrow \hat{\phi}(f)\end{aligned}$$

Aquí $D(\Sigma)$ es un espacio de funciones de prueba «adecuado» y $f \in D(\Sigma)$. Recordemos que para nosotros Σ es una variedad tridimensional. Las funciones f tienen soporte compacto. En la formulación de Ashtekar-Barbero, una de las variables canónicas es un campo de norma A_a^i que es una 1-forma sobre Σ . Aunque matemáticamente se pueden integrar estos campos sobre volúmenes, es geoméricamente más natural integrarlos sobre curvas $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$. Es aquí donde aparece el concepto de holonomía,

$$h_\gamma[A] = \mathcal{P} \exp\left(\int_\gamma A\right), \quad (3.1)$$

en cuya definición aparece el ordenamiento según el camino \mathcal{P} . En cuanto a la variable canónicamente conjugada, E_i^a podemos difuminarla sobre

¹También aparecen correcciones originadas en triadas inversas, pero éstas son importantes en la escala de Planck, mientras que típicamente los modelos estudiados entran en un régimen cuántico muy por arriba de la escala de Planck y vuelven a escalas clásicas sin entrar en el régimen de Planck. Sin embargo recientemente estas modificaciones provenientes de triadas inversas han sido estudiadas [56]

superficies bidimensionales,

$$F_{S,f}[E] = \int_S f^j \epsilon_{abc} E_j^a dx^b \wedge dx^c. \quad (3.2)$$

para obtener los flujos.

Son las variables (3.1) y (3.2) las que se promueven a operadores en Gravitación Cuántica de Lazos. Y allí se obtienen los siguientes resultados que también han sido incorporados como ingredientes de la cuantización por lazos de minisuperespacios:

- 1) No existencia de operador asociado a la variable clásica A_a^i .
- 2) En esta cuantización el operador de área asociado a una superficie tiene espectro discreto y un valor mínimo

$$\Delta = 2\pi\sqrt{3}\gamma l_p^2. \quad (3.3)$$

El aspecto que va a ser relevante para nosotros es que, dada una superficie $S \subset \Sigma$, la geometría cuántica le asignará a S un área mínima diferente de cero igual a Δ .

Recordemos que tras la reducción de simetría y fijaciones de norma, la constricción hamiltoniana está dada por (2.27)

$$H_{cl} = -\frac{N}{2G\gamma^2} \left[2bc\sqrt{p_c} + (b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right] \approx 0.$$

donde b y c aparecen como componentes de la conexión simétrica (2.22). Cuantizar esta función es encontrar un espacio de Hilbert donde H_{cl} sea representado como un operador hermítico. El procedimiento estándar para hacer esto es representar las variables b, c, p_b y p_c como multiplicaciones y derivaciones en un espacio de funciones de cuadrado integrable. Es decir,

$$\begin{aligned} (\hat{b}\Psi)(b, c) &= b\Psi(b, c) \text{ y} \\ (\hat{p}_b\Psi)(b, c) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial b} \Psi(b, c), \end{aligned}$$

y similarmente para la pareja c y p_c . Sin embargo esto violaría el resultado general 1) arriba mencionado. Si queremos reproducir el procedimiento

seguido en Gravitación Cuántica de Lazos debemos expresar todas las funciones que queremos cuantizar en términos de holonomías. En lo que sigue presentaremos brevemente este procedimiento tal como se discute en detalle en [15]. En el caso de la constricción escalar, es más conveniente olvidarse de la constricción reducida por simetría (2.27) y más bien regresar a la constricción general (2.19). Esto debido a que en esta última aparece la curvatura F_{ab}^i y es bien conocido que la curvatura aproxima la holonomía calculada a lo largo de un paralelogramo infinitesimal :

$$\tau_i F_{ab}^i(x) \approx \frac{1}{Ar(\square)} (h_{\square}[A] - I) \quad (3.4)$$

Aquí $Ar(\square)$ es el área del paralelogramo \square . En el caso de Kantowski-Sachs se construyen paralelogramos $\square_{\theta\phi}$, $\square_{\phi x}$ y $\square_{x\theta}$ usando como aristas curvas que van a lo largo de los vectores coordenados $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a$ y $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a$ en el primer caso, $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a$ y $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ en el segundo caso y $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a$ y $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ en el último caso. La longitud de las aristas a lo largo de $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ la denotamos como $\mu_x L$, la longitud de la arista a lo largo de $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a$ la denominamos μ_θ y a la longitud de las aristas que van a lo largo de $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a$ la designamos como $\mu_\phi / \sin\theta$.

Las holonomías a lo largo de estos paralelogramos se usan para estimar las componentes de F_{ab}^i . Por ejemplo:

$$F_{\theta\phi}^3 \approx -\frac{2\sin\theta}{\mu_\theta\mu_\phi} \text{Tr} \left(\tau_3 h_\theta^{\mu_\theta} h_\phi^{\mu_\phi} (h_\theta^{\mu_\theta})^{-1} (h_\phi^{\mu_\phi})^{-1} - I \right),$$

con

$$h_\theta^{\mu_\theta} = e^{\mu_\theta b \tau_2}$$

y

$$h_\phi^{\mu_\phi} = e^{\mu_\phi (-b\tau_1 + \tau_3 \cot\theta)}.$$

Expresiones similares se encuentran para las otras componentes de F_{ab}^i . Estas expresiones se remplazan en la constricción hamiltoniana (2.19) para así encontrar que

$$H_\mu^{\text{eff}} = -\frac{1}{2G\gamma^2} \left[2\sqrt{p_c} \frac{\sin\mu_\theta b}{\mu_\theta} \frac{\sin\mu_x c}{\mu_x} + \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \left(\frac{\sin\mu_\theta b}{\mu_\theta} \right)^2 + \gamma^2 \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right]. \quad (3.5)$$

Es claro que si matemáticamente permitimos que $\mu_\theta b$ y $\mu_x c$ sean pequeños, la expresión anterior se podría aproximar clásicamente por (2.27):

$$H_\mu^{\text{eff}} = H_{cl} + O((\mu_\theta b)^n, (\mu_x c)^m) \quad n, m > 1$$

Pero en todo caso es importantísimo resaltar que en Gravitación Cuántica de Lazos el límite no existe:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \hat{H}_\mu^{\text{eff}} \text{ no existe.}$$

Una forma de incorporar este hecho y simultáneamente la brecha de área mínima es exigir que el área de los paralelogramos que se usan para calcular las holonomías tengan un valor mínimo de Δ :

$$Ar(\square) = \Delta.$$

Esta cantidad va a depender entre otras cosas de μ_x, μ_θ y μ_ϕ . Es por esto que se suele referir a estos μ 's como parámetros de discretización. La forma de imponer esta condición ha conducido a varias alternativas inequivalentes de incorporar efectos cuánticos de la geometría. Estas alternativas se han denominado en la literatura como prescripciones, las cuáles describiremos brevemente en las siguientes secciones

3.2. Prescripción de Ashtekar-Bojowald

En este caso imponemos [4] que todas las áreas de los paralelogramos tengan valor único Δ :

$$\mu_0 := \mu_\theta = \mu_\phi = \mu_x = \sqrt{\Delta} \quad (3.6)$$

El hamiltoniano efectivo resulta ser [13, 16, 46]

$$H_{\mu_0} = -\frac{N}{2G\gamma^2} \left(2 \frac{\sin b\mu_0}{\mu_0} \frac{\sin c\mu_0}{\mu_0} \sqrt{p_c} + \left(\frac{\sin^2 b\mu_0}{\mu_0^2} + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right). \quad (3.7)$$

Usando $N = \gamma\sqrt{p_c}\mu_0 / (\sin b\mu_0)$ se obtienen las ecuaciones de movimiento

[13]

$$\dot{c} = -2 \frac{\sin c \mu_0}{\mu_0} \quad (3.8)$$

$$\dot{p}_c = 2p_c \cos c \mu_0 \quad (3.9)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin b \mu_0}{\mu_0} + \frac{\gamma^2 \mu_0}{\sin b \mu_0} \right) \quad (3.10)$$

$$\dot{p}_b = \frac{1}{2} \cos b \mu_0 \left(1 - \frac{\gamma^2 \mu_0^2}{\sin^2 b \mu_0} \right) p_b. \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones se pueden integrar exactamente. Resulta de particular interés la solución

$$p_c(T) = e^{2T} + \gamma^2 m^2 (p_b^{(0)})^2 \frac{\mu_0^2}{4} e^{-2T},$$

pues sabemos que p_c es proporcional al área de la 2-esfera. Esta función tiene un mínimo en $T = \frac{1}{4} \ln \frac{m^2 \gamma^2 (p_b^{(0)})^2 \mu_0^2}{4}$ y $p_{c \min} = m \gamma \mu_0 p_b^{(0)}$. Se encuentra entonces que la solución de este sistema resuelve la singularidad clásica en el sentido de que la evolución del área física de la 2-esfera es tal que su valor mínimo ya no es cero (como ocurre en el caso clásico) sino que alcanza un mínimo dado por $A_{\min} = 4\pi \gamma m L \bar{p}_{b0} \mu_0$, donde hemos usado las variables originales (2.24), y luego empieza a aumentar. Es decir, hay un rebote en esta función. Sin embargo, este fenómeno depende del parametro auxiliar L y por tanto su validez física está bajo duda.

3.3. Prescripción de Chiou

Aquí se adapta [16] una prescripción que es exitosa en los modelos cosmológicos de lazos de FRW:

$$\bar{\mu}_b := \mu_\theta = \mu_\phi = \sqrt{\frac{\Delta}{p_b}}, \quad \bar{\mu}_c := \mu_x = \sqrt{\frac{\Delta}{p_c}}. \quad (3.12)$$

Según [16], usando $N = p_b \sqrt{p_c}$ las ecuaciones de movimiento quedan

$$\frac{dc}{dt'} = -2\gamma^{-1} \left[\frac{3 \sin(\bar{\mu}_c c)}{2\bar{\mu}_c} - \frac{c \cos(\bar{\mu}_c c)}{2} \right] \left[\frac{\sin(\bar{\mu}_b b)}{\bar{\mu}_b} p_b \right], \quad (3.13)$$

$$\frac{dp_c}{dt'} = 2\gamma^{-1} p_c \cos(\bar{\mu}_c c) \left[\frac{\sin(\bar{\mu}_b b)}{\bar{\mu}_b} p_b \right], \quad (3.14)$$

$$\frac{db}{dt'} = -\gamma^{-1} \left[\frac{3 \sin(\bar{\mu}_b b)}{2\bar{\mu}_b} - \frac{b \cos(\bar{\mu}_b b)}{2} \right] \left[\frac{\sin(\bar{\mu}_b b)}{\bar{\mu}_b} p_b + \frac{\sin(\bar{\mu}_c c)}{\bar{\mu}_c} p_c \right] - \gamma p_b, \quad (3.15)$$

$$\frac{dp_b}{dt'} = \gamma^{-1} p_b \cos(\bar{\mu}_b b) \left[\frac{\sin(\bar{\mu}_b b)}{\bar{\mu}_b} p_b + \frac{\sin(\bar{\mu}_c c)}{\bar{\mu}_c} p_c \right], \quad (3.16)$$

Una solución numérica de esta dinámica fue encontrada por Chiou [16]. Se puede ver allí que las funciones p_b y p_c no se acercan a cero, alcanzan un valor mínimo estrictamente mayor a cero, tras lo cual empiezan a aumentar. Es decir, estas funciones experimentan un rebote, en contraste con el caso clásico, donde alcanzan un valor cero y simultáneamente la dinámica termina. Un problema de esta prescripción es que sus detalles dependen de la selección de L , que es un parametro auxiliar que no debería tener consecuencias observables. Se puede ver esto por ejemplo en el trabajo de Chiou, donde se muestra que cuando p_c toma el valor

$$p_c = \left(\gamma^2 \left(\bar{p}_c^{\frac{3}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{\Delta}{p_c}} L \bar{c} \right) \right) \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.17)$$

la función p_c experimenta un rebote. Es decir, estos son los mínimos locales de $p_c(t)$. Como se puede ver de la expresión anterior este valor depende de L .

3.4. Prescripción de de Böhmer-Vandersloot

En esta propuesta originada en [13] se impone que el área física de los paralelogramos (aquella calculada con la métrica física q_{ab} (2.32)) es la que toma un valor mínimo Δ :

$$\begin{aligned} (\sqrt{g_{\theta\theta}} \mu_\theta) \left(\sqrt{g_{\phi\phi}} \frac{\mu_\phi}{\sin \theta} \right) &= p_c \mu_\theta \mu_\phi = \Delta, \\ \left(\sqrt{g_{\phi\phi}} \frac{\mu_\phi}{\sin \theta} \right) (\sqrt{g_{xx}} \mu_x L) &= p_b \mu_\phi \mu_x = \Delta, \\ (\sqrt{g_{xx}} \mu_x L) (\sqrt{g_{\theta\theta}} \mu_\theta) &= p_b \mu_x \mu_\theta = \Delta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Las soluciones de las anteriores ecuaciones son

$$\bar{\mu}'_b := \mu_\theta = \mu_\phi \equiv \mu'_b = \sqrt{\frac{\Delta}{p_c}}, \quad \bar{\mu}'_c := \mu_x = \frac{\sqrt{p_c \Delta}}{p_b}. \quad (3.19)$$

Esta prescripción se conoce como dinámica mejorada o simplemente $\bar{\mu}'$. Al remplazar las anteriores expresiones en el hamiltoniano efectivo (3.5) obtenemos que

$$H_{\bar{\mu}'}^{\text{eff}} = -\frac{1}{2G\gamma^2} \left[2 \frac{p_b \sqrt{p_c}}{\Delta} \sin \left(\sqrt{\frac{\Delta}{p_c}} b \right) \sin \left(\frac{\sqrt{p_c \Delta}}{p_b} c \right) + \left(\frac{1}{\Delta} p_c \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\Delta}{p_c}} b \right) + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right], \quad (3.20)$$

que es el hamiltoniano cuyas consecuencias físicas estudiaremos en este trabajo. En trabajos previos [13, 16] se obtuvieron soluciones numéricas de esta dinámica, así como algunos resultados cualitativos aproximados. Al igual que en los casos anteriores, la singularidad clásica es removida en el sentido de que funciones como p_b y p_c que clásicamente tienden a cero cerca de la singularidad y que además allí la evolución en el tiempo termina, en este caso ya no tienden a cero y la evolución continúa sin problemas. También desde el punto de vista de las congruencias de geodésicas tipo tiempo descritas por la ecuación de Raychaydhuri se han encontrado que las singularidades clásicas en el factor de expansión θ y el esfuerzo cortante σ desaparecen y son remplazados por cantidades acotadas [24]. En contraste con las otras prescripciones arriba mencionadas, los resultados obtenidos hasta el momento no dependen de L . Sin embargo, también aparecen efectos que han sido criticados como es el caso de correcciones cuánticas sobre el horizonte donde físicamente es de esperar que la estructura clásica se mantenga pues la escala de curvatura es clásica. En respuesta a estas críticas, consideramos que a pesar de lo anterior esta dinámica es válida en una región dentro del horizonte que rodea la región donde la Relatividad General se vuelve singular. De hecho, es el objetivo de nuestro trabajo analizar esta región singular y por tanto siempre nos mantendremos alejados del horizonte. También en defensa de esta cuantización, notamos que el cálculo de las holonomías a lo largo de los paralelogramos $\square_{\phi x}$ y $\square_{x\theta}$ que contienen segmentos a lo largo de la coordenada x pierde sentido sobre el horizonte, pues allí

el vector $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ se vuelve tipo luz. Por lo tanto allí no necesariamente está asegurada la pertinencia física del modelo cuántico. Por otro lado, la existencia de modificaciones de origen cuántico no necesariamente es incompatible con la física clásica, siempre y cuando estas modificaciones no estén en contradicción con las observaciones. Teniendo en cuenta que este es el modelo más aceptado actualmente y que fué el escogido para nuestro estudio, pospondremos la presentación de sus características para un capítulo posterior.

3.5. Prescripción de Corichi-Singh

Adicionalmente a L , en esta propuesta [22] se introduce un parámetro r_0 . En la dinámica clásica resultante este parámetro resulta igual al radio de Schwarzschild. El resultado para los parámetros de discretización es:

$$\delta_b := \mu_\theta = \mu_\phi = \frac{\sqrt{\Delta}}{r_0}, \quad \delta_c = \mu_x = \frac{\sqrt{\Delta}}{L}.$$

La solución, de acuerdo a [22], se puede encontrar escogiendo el lapso $N = \gamma \text{sgn}(p_c) |p_c|^{1/2} \mu_b / \sin(\mu_b b)$, tras lo cual las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\dot{b} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\mu_b b)}{\mu_b} + \gamma^2 \frac{\mu_b}{\sin(\mu_b b)} \right), \quad (3.21)$$

$$\dot{p}_b = \frac{1}{2} \cos(\mu_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\mu_b^2}{\sin^2(\mu_b b)} \right), \quad (3.22)$$

$$\dot{c} = -2 \frac{\sin(\mu_c c)}{\mu_c}, \quad (3.23)$$

$$\dot{p}_c = 2 p_c \cos(\mu_c c). \quad (3.24)$$

La dinámica resultante es tal que la singularidad ya no aparece. Esto se puede ver por ejemplo en la solución (exacta) para p_c :

$$p_c(T) = 4m^2 \left(e^{2T} + \frac{\gamma L^2 \delta^2}{64m^2} e^{-2T} \right).$$

A diferencia del caso clásico, esta función ya no es cero para ningún valor de T y está definida para todo T . El valor mínimo de p_c es

$$p_{c\min} = \gamma \Delta^{\frac{1}{2}} m,$$

que ocurre cuando

$$T_{\text{mín}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{8m} \right).$$

Nótese que, a pesar de que en la solución $p_c(T)$ aparece explícitamente L , ni $p_{c_{\text{mín}}}$ ni $T_{\text{mín}}$ dependen de L . Esto apunta a que en este modelo la dependencia de L es inexistente para cantidades que podrían ser susceptibles de observación como $p_{c_{\text{mín}}}$. Esto es lo que se espera de un modelo físicamente aceptable.

En el siguiente capítulo tomaremos la prescripción de Böhmer-Vandersloot, para la cual obtendremos resultados exactos que confirman la resolución de singularidades en este modelo.

Capítulo 4

Dinámica cuántica efectiva

En el capítulo anterior introdujimos los aspectos necesarios para construir un hamiltoniano efectivo inspirado en la Gravedad Cuántica de Lazos. A continuación estudiaremos las consecuencias físicas basadas en la prescripción de Bohmer-Vandersloot (3.19), que cuando se usa en el hamiltoniano (3.5), da lugar al hamiltoniano (3.20). Teniendo en cuenta que solo trabajaremos una de las prescripciones mencionadas en el capítulo anterior, y con el objetivo de simplificar la notación, en lo que queda de este trabajo renombraremos a las expresiones de (3.19) de la siguiente manera:

$$\bar{\mu}'_b \rightarrow \mu_b := \sqrt{\frac{\Delta}{p_c}} \text{ y } \bar{\mu}'_c \rightarrow \mu_c := \frac{\sqrt{p_c \Delta}}{p_b}.$$

4.0.1. Ausencia de singularidades fuertes en modelos efectivos

Cuando un cuerpo se acerca al centro del agujero negro, las fuerzas gravitacionales se hacen tan fuertes que lo comprimen hasta que su volumen se hace cero. Esto ocurre según la teoría clásica (ver ec. (2.50)) y es lo que se conoce como singularidades fuertes [62]. Cerca de la singularidad los escalares de curvatura son mayores que la escala de Planck, así que es de esperar que allí los efectos cuánticos de la gravedad sean lo suficientemente importantes como para evitar la formación de singularidades fuertes. Por otro lado, los teoremas de enfocamiento clásico [64] demuestran que bajo ciertas condiciones físicamente aceptables el factor de expansión θ diverge. En el caso particular de la solución de Schwarzschild esto lo

mostramos en el primer capítulo (2.58). Para el caso de la teoría efectiva con hamiltoniano (3.20) podemos calcular el factor de expansión [24, 37]

$$\begin{aligned}\theta_{ef} &= \frac{\{V, H_\mu\}}{V} \\ &= \frac{\cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) + \cos(b\mu_b) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma\sqrt{\Delta}}\end{aligned}\quad (4.1)$$

de donde es fácil encontrar una cota finita [24, 37]:

$$|\theta_{ef}| \leq \frac{3}{\gamma\sqrt{\Delta}}. \quad (4.2)$$

De hecho, la finitud del factor de expansión es una característica que se puede mostrar fácilmente en buena parte de los modelos efectivos de cosmología cuántica de lazos, en los cuales además se ha mostrado independientemente que no existen singularidades fuertes (ver por ejemplo [1] y las referencias allí citadas) en el sentido de que la función $V(t)$ experimenta un rebote. Mostrar esto requiere un fuerte trabajo, muchas veces numérico, en cuyo caso sólo se estudian algunas pocas condiciones iniciales. En otros casos, hay resultados analíticos que varían de modelo a modelo. En todo caso estos resultados sugieren una relación entre la finitud de θ y la no existencia de singularidades fuertes. Que esta relación es *completamente general* se mostrará a continuación.

Supongamos que tenemos una solución con volumen inicial $V(t_i) > 0$ y $\theta(t) = \dot{V}/V$ acotado. Queremos saber si existe un tiempo propio finito t_f tal que $\lim_{t \rightarrow t_f^-} V(t) = 0$ ¹. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que entre t_i y t_f no hay otros puntos donde $V(t)$ sea cero. Integrando θ entre el instante inicial t_i y un instante $t_f - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) obtenemos

$$\int_{t_i}^{t_f - \varepsilon} \theta(t) dt = \int_{V_{t_i}}^{V_{t_f - \varepsilon}} \frac{dV}{V} = \ln \frac{V_{t_f - \varepsilon}}{V_{t_i}}. \quad (4.3)$$

Usando la desigualdad triangular y la cota $\theta_{\text{máx}}$ para $|\theta|$:

$$\left| \ln \frac{V_{t_f - \varepsilon}}{V_{t_i}} \right| \leq \int_{t_i}^{t_f - \varepsilon} |\theta(t)| dt \leq \theta_{\text{máx}} (t_f - \varepsilon - t_i). \quad (4.4)$$

¹Esto no es cierto para $t_f \rightarrow \infty$. Tomemos por ejemplo, $V = e^{-t}$, en cuyo caso $\theta = -1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$.

Además la función V es continua y diferenciable por lo que tomando el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \ln \frac{V_{t_f - \varepsilon}}{V_{t_i}} \right| &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_{\text{máx}} (t_f - \varepsilon - t_i) \\ \left| \ln \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{t_f - \varepsilon}}{V_{t_i}} \right| &\leq \theta_{\text{máx}} (t_f - t_i) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por hipótesis $\lim_{t \rightarrow t_f} V = 0$ y por tanto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{t_f - \varepsilon} = 0$. Aquí llegamos a una contradicción:

$$\left| \ln \frac{0}{V_{t_i}} \right| = \infty \leq \theta_{\text{máx}} (t_f - t_i).$$

La hipótesis de que existe un tiempo propio finito t_f tal que $\lim_{t \rightarrow t_f^-} V(t) = 0$ es por tanto inconsistente y nos permite concluir que en estos casos existe un rebote del volumen: no hay singularidades fuertes en ningún modelo donde el factor de expansión es acotado. No solamente esto, sino que además la función volumen ni siquiera tiene al cero como valor límite. Existe entonces una brecha de volumen $\Delta V > 0$ tal que $V \geq \Delta V > 0$. Llamaremos $V_{\text{mín}}$ al volumen mas pequeño que una solución particular alcanza.

4.0.2. Analisis cualitativo de la constricción efectiva

Similarmente a como lo hicimos en el caso clásico, podemos analizar las propiedades algebraicas de la constricción efectiva (3.20). Esta constricción se debe anular durante toda la dinámica lo que implica que los valores que toman las soluciones del espacio fase no son arbitrarios. Empezaremos encontrando restricciones sobre p_c [24, 23].

Cota para p_c

La constricción (3.20) es cuadrática en la expresión $\sin(\mu_b b)$. Para que la solución sea real se debe cumplir la siguiente condición sobre el discriminante:

$$\left(2 \frac{\sin(\mu_c c)}{\mu_c} p_c \right)^2 - 4 p_b^2 \gamma^2 \geq 0. \quad (4.6)$$

Remplazando la expresión para μ_c (3.19) y simplificando obtenemos que

$$\Delta\gamma^2 \leq \sin^2(\mu_c c) p_c.$$

Finalmente aplicando que $\sin(x) \leq 1$, llegamos a la cota²

$$p_c \geq \Delta\gamma^2. \quad (4.7)$$

La interpretación física de este resultado es directa: el área de la 2-esfera es $A_{S^2} = 4\pi p_c$ (2.34). Por tanto encontramos que las áreas de estas esferas satisfacen esta cota, independientemente de la solución particular, es decir para cualquier condición inicial que se escoja. Usando esta cota se concluye inmediatamente que

$$\mu_b \leq 1/\gamma. \quad (4.8)$$

Aunque esta expresión no tiene interpretación física directa, más adelante nos va a ser de gran utilidad.

Cota para p_b

Ya encontramos que tanto el volumen V como la variable p_c al evolucionar en el tiempo, no solamente no tienen el valor cero, sino que ni siquiera tienden a él. Esto implica inmediatamente que p_b también tiene una cota mínima y no se puede acercar a cero. Pues supongamos que para algún t_f finito se cumple que $\lim_{t \rightarrow t_f} p_b = 0$. Entonces partiendo de

$$V = 4\pi p_b \sqrt{p_c} \geq V_{\min} \quad (4.9)$$

podemos tomar el límite

$$\lim_{t \rightarrow t_f} V = \lim_{t \rightarrow t_f} 4\pi p_b \sqrt{p_c} \geq \lim_{t \rightarrow t_f} V_{\min}.$$

Como todas las funciones son continuas, los límites existen y podemos aplicar que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{t \rightarrow t_f} V = 4\pi \lim_{t \rightarrow t_f} p_b \lim_{t \rightarrow t_f} \sqrt{p_c} \geq V_{\min}$$

y aplicando la hipótesis $\lim_{t \rightarrow t_f} p_b = 0$ llegamos a una contradicción inmediata:

$$0 \geq V_{\min}. \quad (4.10)$$

²La cota hallada en [16], $p_c \geq \Delta\gamma^2/3$, es consistente con nuestro resultado

Concluimos entonces que

$$p_b > p_{b\text{mín}} > 0, \quad (4.11)$$

donde $p_{b\text{mín}}$ es una brecha finita que separa a p_b de cero.

Cotas para $\mu_{c c}$ y $\mu_b b$

Reescribamos aquí la constricción:

$$H_{\bar{\mu}'}^{\text{ef}} = -\frac{1}{2G\gamma^2} \left[\frac{2p_b\sqrt{p_c}}{\Delta} \sin(\mu_b b) \sin(\mu_c c) + \left(\frac{p_c}{\Delta} \sin^2(\mu_b b) + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right]. \quad (4.12)$$

Observamos que el término $\left(\frac{p_c}{\Delta} \sin^2(\mu_b b) + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}}$ es estrictamente positivo pues p_b lo es (4.11). Como la constricción es igual a cero, entonces el primer sumando debe ser negativo y por tanto

$$\sin(\mu_b b) \sin(\mu_c c) < 0.$$

Esto significa que los argumentos de las funciones seno, $\mu_b b$ y $\mu_c c$, no son independientes entre sí. Si por ejemplo $\mu_b b$ es tal que $\sin(\mu_b b)$ es positivo, entonces en ese mismo instante de tiempo $\mu_c c$ debe ser tal que $\sin(\mu_c c)$ sea negativo. En otras palabras, si $\sin(\mu_b b)$ está en un valle, entonces $\sin(\mu_c c)$ está en un pico, y viceversa.

Podemos restringir en que pico y valle se está se está desarrollando la dinámica de la siguiente manera: Recordemos que queremos estudiar la evolución de este sistema partiendo de una condición inicial que aproxime a una configuración clásica³. Es decir queremos que en t_0 los valores iniciales de las variables del espacio fase $b(t_0), c(t_0), p_b(t_0)$ y $p_c(t_0)$ satisfagan no solamente la constricción efectiva sino que además satisfagan aproximadamente la constricción clásica. Para lograr esto recordemos que si

$$|\mu_b(t_0) b(t_0)| \ll 1 \quad \text{y} \quad |\mu_c(t_0) c(t_0)| \ll 1, \quad (4.13)$$

³Esto es lo que se hace cuando se estudia la dinámica en los modelos de Cosmología Cuántica de Lazos, por ejemplo en [10]. Excepto que allí se evolucionan datos finales clásicos hacia atrás en el tiempo.

entonces podemos obtener la siguiente aproximación:

$$\frac{\sin(\mu_b(t_0) b(t_0))}{\mu_b(t_0)} \approx b(t_0), \quad (4.14)$$

$$\frac{\sin(\mu_c(t_0) c(t_0))}{\mu_c(t_0)} \approx c(t_0), \quad (4.15)$$

y por tanto las constrictión clásica se satisface aproximadamente. Recordando las expresiones para μ_b y μ_c podemos reescribir (4.13) y obtendremos que las condiciones iniciales serían semiclásicas si:

$$\left| \sqrt{\frac{\Delta}{p_c(t_0)}} b(t_0) \right| \ll 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\sqrt{p_c \Delta}}{p_b(t_0)} c(t_0) \right| \ll 1$$

o

$$\left| \sqrt{\frac{1}{p_c(t_0)}} b(t_0) \right| \ll \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{y} \quad \left| \frac{\sqrt{p_c}}{p_b(t_0)} c(t_0) \right| \ll \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

Observamos que en el limite clásico (parametrizado por $\Delta \rightarrow 0$), se cumple la condición (4.13) y por tanto, no solamente las condiciones iniciales, sino la evolución será inicialmente muy similar a la evolución clásica. Aun cuando Δ no vaya a cero estrictamente, tendremos que ciertos valores b, c, p_c y p_b satisfacerán (4.13) y por tanto serán admisibles para nuestro propósito de evolucionar desde una configuración lo mas clásica posible. Podemos darle al anterior resultado un aspecto con interpretación física mas directa: anteriormente mostramos que cinemáticamente $A_{S^2} = 4\pi p_c$ (2.34) y $l = p_b / \sqrt{p_c}$ (2.33). Además en [16] se mostró que

$$b = \frac{\gamma}{\sqrt{16\pi A_{S^2}}} \frac{dA_{S^2}}{dt} \quad (4.16)$$

y

$$c = \gamma \frac{dl}{dt}. \quad (4.17)$$

Usando estas relaciones podemos reescribir (4.13) como

$$\left| \sqrt{\Delta} \right| \ll \frac{2A_{S^2}(t_0)}{\gamma \left| \frac{dA_{S^2}}{dt}(t_0) \right|} \quad \left| \sqrt{\Delta} \right| \ll \frac{l(t_0)}{\gamma \left| \frac{dl}{dt}(t_0) \right|}.$$

Físicamente, si estas áreas y longitudes iniciales están muy por encima del régimen de Planck, o si su variación inicial en el tiempo es pequeña,

ayuda a que las condiciones iniciales seán semiclásicas, y podamos usar el formalismo. Veamos ahora que sucede con la evolución posterior, dado que inicialmente se garantizan condiciones iniciales semiclásicas. Claramente (4.13) también restringe a que inicialmente

$$|\mu_b(t_0) b(t_0)| \leq \pi \quad \text{y} \quad |\mu_c(t_0) c(t_0)| \leq \pi. \quad (4.18)$$

Aún mas, como para un agujero negro $b < 0$ y $c > 0$ entonces

$$-\pi \leq \mu_b(t_0) b(t_0) < 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \mu_c(t_0) c(t_0) \leq \pi.$$

o

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \leq \frac{b(t_0)}{\sqrt{p_c(t_0)}} < 0 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{\sqrt{p_c}}{p_b(t_0)} c(t_0) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

A partir de estos valores iniciales la evolución procederá a través del hamiltoniano efectivo. Notemos además que aunque la anterior expresión restringe los posibles valores de b, c, p_c y p_b cuánticamente, en el mundo clásico esta restricción desaparece, pues cuando $\Delta \rightarrow 0$ estas cotas se satisfacen trivialmente:

$$-\infty \leq \frac{b(t_0)}{\sqrt{p_c(t_0)}} < 0 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{\sqrt{p_c}}{p_b(t_0)} c(t_0) \leq \infty.$$

Volviendo a las cotas (4.18), la pregunta importante aquí es si estas desigualdades se siguen manteniendo a medida que el sistema evoluciona en el tiempo, o si por el contrario se violan para un tiempo posterior $t_f > t_0$. Es decir si para este t_f

$$|\mu_b(t_f) b(t_f)| > \pi \quad \text{y/o} \quad |\mu_c(t_f) c(t_f)| > \pi$$

A continuación mostraremos que esto no pasa. Tomemos una solución de la dinámica efectiva que inicialmente satisface (4.13). Primero que todo no es posible que la dinámica sea tal que una de las funciones $\mu_b b$ o $\mu_c c$ escape de su región inicial y la otra no lo haga, pues de darse esto tendríamos que $\sin(\mu_b b) \sin(\mu_c c) > 0$ y la constricción se violaría. Por lo tanto, de darse el escape de su región inicial, tanto $\mu_b b$ como $\mu_c c$ lo deben hacer al mismo tiempo t_e (e de escape). En este tiempo se debe cumplir que $\mu_b(t_e) b(t_e) \approx \mp \pi$ y $\mu_c(t_e) c(t_e) \approx \mp \pi$ o equivalentemente que

$$\sin(\mu_b(t_e) b(t_e)) = \sin(\mu_c(t_e) c(t_e)) = 0.$$

Insertando esto en la constricción efectiva ⁴ encontramos que

$$H_{ef}(t_e) = -\frac{1}{2G} \frac{p_b(t_e)}{\sqrt{p_c(t_e)}} \approx 0.$$

Por (4.11) p_b no tiende al valor cero y por tanto la anterior condición solo se podría satisfacer si $p_c \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_e$, en cuyo caso la evolución terminaría y no habría escape. En conclusión tenemos que no hay escape y por tanto

$$|\mu_b(t) b(t)| < \pi \text{ y} \quad (4.19)$$

$$|\mu_c(t) c(t)| < \pi \quad (4.20)$$

durante toda la dinámica. De nuevo, en el límite clásico, $\Delta \rightarrow 0$, estas cotas se satisfacen trivialmente y no restringen los posibles valores de b, c, p_b y p_c . Finalmente notemos que por argumentos similares tampoco se puede dar el caso de que las funciones $\mu_b b$ y $\mu_c c$ se hagan cero simultáneamente y se intercambien de región. Las dos cotas anteriores (4.19) y (4.20) van a jugar un papel crucial en la resolución de la singularidad clásica. De hecho, se puede ver fácilmente que de acuerdo a la dinámica clásica las funciones $\mu_b b$ y $\mu_c c$ no son acotadas sino que divergen cerca de la singularidad. Para ver esto se puede encontrar que el comportamiento clásico está dado por

$$|\mu_b b|_{\text{clásico}} = \gamma \sqrt{\frac{\Delta}{p_{c_{MAX}}}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x}} \text{ y}$$

$$|\mu_c c|_{\text{clásico}} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{p_{c_{MAX}}}} \frac{1}{\sqrt{x^{3/2} - x^2}},$$

donde hemos usado el tiempo relacional adimensional $x = p_c/p_{c_{MAX}}$. Por tanto, cerca de la singularidad ($p_c \ll p_{c_{MAX}}$) $\mu_b b$ y $\mu_c c$ no son acotadas sino que divergen⁵.

⁴Sin embargo, notemos que esta demostración es válida para cualquiera de las prescripciones de cuantización estudiadas en el segundo capítulo.

⁵Cerca del horizonte, donde $p_c = p_{c_{MAX}}$, $\mu_b b$ es aún pequeño, pero $\mu_c c$ diverge.

4.0.3. Resolución de las singularides métricas

En el primer capítulo vimos que todas las soluciones clásicas terminan en un tiempo propio finito (2.48) teniendo un punto final (2.43) singular donde $p_c = p_b = 0$. En esta subsección demostraremos que la dinámica generada por el hamiltoniano efectivo (3.20) tiene soluciones que pueden ser extendidas indefinidamente en el tiempo.

Para esto usaremos un resultado de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los detalles de este teorema y su demostración pueden ser consultados por ejemplo en [60] (teorema 2.16) o en [63] (teorema 2.4.5). La intuición detrás de este teorema es sencilla: sabemos que todos los sistemas *lineales* de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión finita tienen soluciones que están bien definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Si tenemos un sistema de ecuaciones (2.41)

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0, \quad (4.21)$$

diferenciales que puede no ser lineal pero tal que la función f está acotada por una función lineal g , entonces las derivadas de las soluciones de (2.41) van a ser menores que las derivadas de las soluciones del sistema lineal $\dot{x} = g(x, t), x(t_0) = x_0$. Y por tanto podrán ser extendidas indefinidamente. Más precisamente, sea $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto que contiene al punto t_0, x_0 y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Si existen constantes M y L tal que

$$|f| \leq M + L|x|, \quad (4.22)$$

donde $|f|$ y $|x|$ representan la norma euclidiana usual, entonces el sistema (2.41) tiene soluciones que pueden ser extendidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Aplicaremos este teorema a las ecuaciones de Hamilton derivadas del hamiltoniano efectivo (3.20). Para poder tener una interpretación física más directa es importante tomar $N = 1$, en cuyo caso, las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{b} = \frac{-\gamma^2 \mu_b^2 - \sin(b\mu_b) (-2c\mu_c \cos(c\mu_c) + \sin(b\mu_b) + 2 \sin(c\mu_c))}{2\gamma\sqrt{\Delta}\mu_b}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{c} = & \frac{1}{2\gamma\sqrt{\Delta}\mu_c} [\gamma^2 \mu_b^2 + 2b\mu_b \cos(b\mu_b) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c)) \\ & - \sin(b\mu_b) (2c\mu_c \cos(c\mu_c) + \sin(b\mu_b) + 2 \sin(c\mu_c))], \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\sqrt{\Delta} \cos(b\mu_b) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma\mu_b\mu_c}, \quad (4.25)$$

$$\dot{p}_c = \frac{2\sqrt{\Delta} \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)}{\gamma\mu_b^2}. \quad (4.26)$$

Observemos que el lado derecho de las ecuaciones anteriores está expresado en términos de funciones trigonométricas y de las funciones μ_b , $b\mu_b$ y $c\mu_c$. Todas ellas están acotadas por (4.8), (4.19) y (4.20). Usando estas cotas un procedimiento largo pero sencillo muestra que para la dinámica efectiva

$$|\dot{b}| < \frac{(3 + 2\pi)p_c}{2\gamma^2\Delta^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \quad (4.27)$$

$$|\dot{c}| < \frac{(4 + 5\pi)p_b}{2\gamma^2\Delta^{3/2}} \quad (4.28)$$

$$|\dot{p}_b| < \frac{2p_b}{\gamma\sqrt{\Delta}} \quad (4.29)$$

$$|\dot{p}_c| < \frac{2p_c}{\gamma\sqrt{\Delta}}. \quad (4.30)$$

Una observación importante es que cuando Δ tiende a cero, las cotas anteriores divergen y por lo tanto este teorema no va a poder ser aplicado en el caso clásico.⁶ Con ayuda de estas cotas podemos calcular una cota para $f = (\dot{b}, \dot{c}, \dot{p}_b, \dot{p}_c)$. Para hacer esto usaremos variables adimensionales $\bar{p}_b, \bar{p}_c, \bar{b}, \bar{c}$ y \bar{f} , en términos de las cuales obtenemos que

$$\begin{aligned} |\bar{f}| &\leq \frac{1}{2} + \frac{(4 + 5\pi + 4\gamma)}{2\gamma^2} (|\bar{p}_b| + |\bar{p}_c|) \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{(4 + 5\pi + 4\gamma)}{2\gamma^2} (|\bar{b}| + |\bar{c}| + |\bar{p}_b| + |\bar{p}_c|) \\ &= M + L |\bar{x}|_1, \end{aligned}$$

⁶Tomar el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, no es trivial desde el punto de vista matemático. Esto es un ejemplo de los que se conoce como "límite de espacio-tiempo"[33]. Nótese que clásicamente p_c tiende a cero, así que podríamos tener expresiones del tipo 0/0. Aún si se diera esta posibilidad, nuestra conclusión está a salvo, pues el límite $\lim_{\Delta \rightarrow 0} |\dot{b}|$ es infinito, independientemente del comportamiento de p_c . Agradezco al doctor Jerónimo Cortez por esta interesante observación.

donde $M = \frac{1}{2}$, $L = \frac{(4+5\pi+4\gamma)}{2\gamma^2}$, $\bar{x} = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{p}_b, \bar{p}_c)$ y $\|\cdot\|_1$ denota la norma L_1 . Ahora podemos usar el hecho de que todas las normas en dimensión finita son equivalentes de tal manera que $A|x| \leq |x|_1 \leq B|x|$ (ver por ejemplo [25], teorema 1.3.13) y por lo tanto obtenemos

$$|\bar{f}| \leq M + B|\bar{x}|.$$

Por lo tanto las hipótesis del teorema de extendibilidad antes mencionado se satisfacen y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton efectivas pueden ser extendidas para valores arbitrariamente grandes del tiempo propio, incluido tiempos mas grandes que la cota superior al tiempo de vida de la solución clásica (2.48). En otras palabras, la dinámica efectiva es tal que pasa sin problemas por el valor de tiempo en que se produciría la singularidad clásica.

4.0.4. Escalares geométricos efectivos y ecuación de Raychaudhuri

En el primer capítulo vimos que la ecuación de Raychaudhuri en el interior del agujero negro de Schwarzschild contiene singularidades en el sentido de que el factor de expansión θ (2.57), su derivada $\dot{\theta}$ (2.58) y el esfuerzo cortante σ (2.61) divergen. A continuación veremos que en la teoría efectiva todas estas funciones son acotadas [24, 37]. Para esto, usamos las definiciones cinemáticas (2.56, 2.60) y las ecuaciones de Hamilton efectivas (4.23-4.26). La expresión para el factor de expansión ya la obtuvimos antes (4.1), al igual que su cota (4.2) que reescribimos aquí por completez:

$$|\theta_{ef}| \leq \frac{3}{\gamma\sqrt{\Delta}}, \quad (4.31)$$

Similarmente hallamos el esfuerzo cortante σ y su cota:

$$|\sigma_{ef}| = \left| \frac{-2 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) + \cos(b\mu_b) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\sqrt{3}\gamma\sqrt{\Delta}} \right| \quad (4.32)$$

$$\leq \frac{4}{\gamma\sqrt{3\Delta}}. \quad (4.33)$$

Mucho más difícil de estudiar es $\dot{\theta}_{ef}$. De hecho, este término no ha sido calculado hasta el momento para ninguno de los modelos efectivos de

cosmologías anisotrópicas cuánticas de lazos. Nosotros encontramos que $\dot{\theta}_{ef}$ puede ser expresado como:

$$\frac{d\theta_{ef}}{dt} = I_1 + I_2 + I_3, \quad (4.34)$$

donde

$$I_1 = -\frac{1}{4\gamma^2\Delta} (\sin(b\mu_b) (-5\sin(b\mu_b) + \sin(3b\mu_b)) \\ + \sin(b\mu_b) (-2(\sin(c\mu_c) + \sin(2b\mu_b - c\mu_c)) - 2(\sin(2b\mu_b + c\mu_c) + \sin(b\mu_b + 2c\mu_c)))) \\ I_2 = -\frac{\mu_b^2 \cos(2b\mu_b)}{2\Delta}$$

e

$$I_3 = \frac{(b\mu_b - c\mu_c) (-\sin(2b\mu_b) + \sin(2c\mu_c) + 2\sin(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b - c\mu_c))}{2\gamma^2\Delta}$$

Claramente I_1 está acotado en todo el espacio de fase. Para acotar I_2 podemos usar la constricción efectiva (3.20) o más directamente (4.8). En cuanto a I_3 , debemos usar las cotas sobre $b\mu_b$ (4.19) y sobre $c\mu_c$ (4.20). Es aquí donde empezamos a apreciar la importancia de las cotas de $b\mu_b$ y $c\mu_c$. Sin éstas no podríamos acotar I_3 . De hecho, el desconocimiento de cotas similares en otros modelos efectivos anisótropos es lo que ha impedido realizar un análisis más completo de la resolución de las singularidades. Usando lo discutido previamente podemos calcular que

$$\left| \frac{d\theta_{ef}}{dt} \right| \leq \frac{5 + 4\pi}{\gamma^2\Delta}.$$

En conclusión, todos los escalares geométricos que aparecen en la ecuación de Raychaudhuri (2.55) son finitos en la superficie de constricción efectiva. Por tanto el término de curvatura $R_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu$ también va a ser acotado. De hecho esto lo vamos a confirmar en la siguiente sección, donde mostraremos que *todos* los escalares de curvatura de la geometría efectiva son finitos.

4.0.5. Singularidades de curvatura

Uno de los síntomas de la presencia de singularidades de la geometría es la divergencia de escalares de curvatura. Tal es el caso del escalar de

Kretschmann que se hace infinito en la singularidad, $p_c = 0$ (2.54). En esta sección veremos que esta divergencia desaparece cuando incorporamos efectos cuánticos a la lazos. Mejor aún, argumentaremos que todos los escalares de cualquier orden, polinomiales o diferenciales, están bajo control.

El escalar de Kretschmann y el de Ricci en general dependen de los coeficientes métricos y de sus primeras y segundas derivadas. En el caso de geometrías homogéneas, solo van a depender de las derivadas temporales y en particular para Kantowski-Sachs ya mostramos que las primeras derivadas temporales están acotadas linealmente por (4.29) y (4.30). Cotas similares se pueden encontrar para las segundas derivadas: usando el hamiltoniano efectivo (3.20) encontramos que

$$\begin{aligned} \ddot{p}_b = & \frac{1}{2\gamma^2\mu_b\mu_c} (\cos(b\mu_b)\cos(c\mu_c)(\gamma^2\mu_b^2 - \sin(b\mu_b)^2 - 2\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c)) \\ & + \sin(b\mu_b)(\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))(\gamma^2\mu_b^2 + 2(b\mu_b - c\mu_c)\cos(c\mu_c)\sin(b\mu_b)) \\ & + \sin(b\mu_b)(\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))(\sin(b\mu_b)^2 + 2\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c)) \\ & + \cos(b\mu_b)^2(-\gamma^2\mu_b^2 + \sin(b\mu_b)^2 + 2(b\mu_b - c\mu_c)\cos(c\mu_c)\sin(c\mu_c)) \\ & + \cos(b\mu_b)^2(2\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c) + 2\sin(c\mu_c)^2)) \end{aligned} \quad (4.35)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{p}_c = & \frac{1}{\gamma^2\mu_b^2} (\sin(b\mu_b)(4\cos(c\mu_c)^2\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c)(\sin(b\mu_b)^2 + 2\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c) - \gamma^2\mu_b^2)) \\ & - \cos(b\mu_b)\cos(c\mu_c)(\sin(b\mu_b)^2 + 2\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c) + \gamma^2\mu_b^2) \\ & - 2\cos(b\mu_b)\cos(c\mu_c)^2\sin(b\mu_b)(b\mu_b - c\mu_c) \\ & - 2\cos(b\mu_b)\sin(b\mu_b)\sin(c\mu_c)(\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))(b\mu_b - c\mu_c)). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aplicando las cotas para μ_b , $b\mu_b$ y $c\mu_c$ podemos encontrar cotas lineales para las segundas derivadas:

$$|\ddot{p}_b| \leq \frac{(5 + 3\pi)p_b}{\gamma^2\Delta}, \quad (4.37)$$

$$|\ddot{p}_c| \leq \frac{(9 + 8\pi)p_c}{\gamma^2\Delta}. \quad (4.38)$$

Notemos de nuevo dos cosas: i) la importancia de las cotas de $b\mu_b$ y $c\mu_c$, sin las cuales no podríamos encontrar el anterior resultado ni tampoco los siguientes, y ii) la dependencia de las cotas con Δ dan el límite clásico correcto.

Las expresiones cinématicas para el escalar de Ricci y Kretschmann las mostramos en el primer capítulo: (2.36 y 2.37) respectivamente. Las podemos reescribir de la siguiente manera:

$$R = \frac{2\ddot{p}_b}{p_b} + \frac{\ddot{p}_c}{p_c} + \frac{2}{p_c} \quad (4.39)$$

y

$$K = +\frac{7}{2} \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^4 - 8 \left(\frac{\dot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^3 \quad (4.40)$$

$$+ 6 \left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b^2}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^2 + 6 \left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^2 + \frac{2}{p_c} \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^2 - 5 \left(\frac{\ddot{p}_c}{p_c}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^2 \quad (4.41)$$

$$- 8 \left(\frac{\dot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right) + 4 \left(\frac{\dot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\ddot{p}_c}{p_c}\right) \left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right) \quad (4.42)$$

$$+ 3 \left(\frac{\ddot{p}_c}{p_c}\right)^2 - 4 \left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b}\right) \left(\frac{\ddot{p}_c}{p_c}\right) \quad (4.43)$$

$$+ 4 \left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b}\right)^2 + \frac{4}{p_c^2}.$$

Por lo tanto, tenemos que R y K se pueden reescribir en términos de $\left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)$, $\left(\frac{\dot{p}_b}{p_b}\right)$, $\left(\frac{\ddot{p}_b}{p_b}\right)$, $\left(\frac{\ddot{p}_c}{p_c}\right)$ y $\frac{1}{p_c}$, cada uno de los cuales está acotados en la dinámica efectiva según (4.30, 4.29, 4.37, 4.38, 4.7). Podemos hallar una cota explícita:

$$|R| \leq \frac{1}{\Delta\gamma^2} (14\pi + 21) = \frac{64,982}{\Delta\gamma^2} \quad (4.44)$$

$$|K| \leq \frac{1}{\Delta^2\gamma^4} (1276\pi + 324\pi^2 + 1419) = \frac{8625,4}{\Delta^2\gamma^4}. \quad (4.45)$$

Concluimos entonces que los escalares de Ricci y Kretschmann están acotados en la dinámica efectiva. Recordemos que aunque el escalar de Ricci es cero en el caso clásico, el escalar de Kretschmann clásico diverge en la singularidad. Las expresiones explícitas de estos escalares y otra forma de calcular las cotas efectivas las presentaremos en el apéndice (A)

Finalmente podemos argumentar que no solamente los escalares de Kretschmann y Ricci están acotados en la teoría efectiva, sino que todos los invariantes de orden finito, inclusive los invariantes diferenciales son finitos. El argumento es el siguiente. El tensor de curvatura es función de las componentes de la métrica y sus primeras y segundas derivadas. En el caso de Kantowski-Sachs efectivo, estas componentes son cocientes de productos de p_b y p_c cuyos denominadores no tienden a cero por (4.7) y (4.11). Cuando se derivan obtenemos expresiones cuyos denominadores tampoco va a ser cero, ni siquiera en el límite. Este procedimiento puede continuarse derivando cuantas veces se desee y el resultado va a ser similar. Por tanto todos los invariantes de curvatura van a permanecer finitos.

Capítulo 5

Discusión, conclusiones y perspectivas

El hecho de que la Relatividad General falla y presenta singularidades se puede manifestar de varias formas: en la divergencia de los invariantes de curvatura, en la existencia de geodésicas causales que terminan en un tiempo propio finito y -desde un punto de vista hamiltoniano- en el final, en un tiempo propio finito de la evolución de la métrica. La expectativa general es que la incorporación de propiedades cuánticas de la gravitación curará este comportamiento singular. En particular, la aplicación de ideas provenientes de la Gravitación Cuántica de Lazos ha demostrado que modelos homogéneos e isotrópicos cuantizados a la lazos no contienen singularidades. Este enfoque funciona también en el nivel semiclásico: una dinámica simpléctica efectiva extraída del propagador cuántico a la lazos coincide muy bien, incluso en el régimen planckiano, con la evolución cuántica exacta [8].

En el sector anisotrópico, la teoría cuántica completa ha sido formulada en algunos modelos de Bianchi, sin embargo, los detalles de la dinámica son solo parcialmente conocidos. En contraste, el enfoque efectivo ha sido más fructífero y la física detrás de la resolución de la singularidad ha sido estudiada desde varias perspectivas [11, 12, 43, 44, 67] . En el caso del interior de Schwarzschild, se han propuesto modelos que incorporan las simetrías de Kantowski-Sachs y los efectos cuánticos de lazos [4], pero no están lo suficientemente maduros como para atacar el problema de la resolución de la singularidad. Por esta razón, la adopción de un formalis-

mo efectivo es temporalmente conveniente y se han encontrado algunas soluciones numéricas que apuntan a la existencia de un rebote cuántico.

En este trabajo, realizamos un análisis geométrico de los efectos que la gravedad cuántica de lazos induce en la geometría alrededor de la región donde aparece la singularidad clásica de Schwarzschild. Adoptamos para esto la prescripción de Bohmer-Vandersloot, por ser ésta la que, basada en criterios de viabilidad física, presenta características teóricamente deseables. En la ausencia de soluciones cerradas a las ecuaciones de Hamilton efectivas (4.23)-(4.26), hemos optado por estudiar primero sus propiedades cualitativas globales; en segundo lugar, el comportamiento de las geodésicas tal como las describe la ecuación de Raychaudhuri clásica y tercero, la finitud de la curvatura.

En cuanto a las propiedades globales de las soluciones efectivas, utilizamos principalmente dos herramientas: 1) el análisis algebraico de la superficie de constricción y 2) la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Las ventajas de estos métodos son: su generalidad, que no es necesario conocer soluciones explícitas y que no dependen de métodos numéricos y / o condiciones iniciales específicas.

En primer lugar utilizamos estas herramientas para recuperar el comportamiento en escalas temporales grandes (es decir global) de la dinámica hamiltoniana clásica. Mostramos que las soluciones máximamente extendidas en el tiempo llegan a un abrupto final en un tiempo propio finito y que, en el punto final, todos los objetos tienen volumen cero y el invariante de Kretschmann diverge.

Pasando a la dinámica efectiva, sus ecuaciones de movimiento son tan complicadas que prácticamente sólo hay dos posibles caminos: buscar soluciones numéricas aproximadas y / o hacer un análisis cualitativo exacto. Optamos por la última estrategia. Primero mostramos que cuando el factor de expansión θ está acotado, el volumen de un cuerpo no puede acercarse a cero en un tiempo propio finito, a diferencia del caso clásico, donde todo es comprimido a cero al acercarse a la singularidad (2.50). Luego, fuimos capaces de derivar límites inferiores estrictamente positivos para p_c (4.7) y p_b (4.11). Por lo tanto, desapareció el comportamiento singular clásico que se caracteriza porque estas dos variables evolucionan hacia cero (2.43). Este comportamiento de V , p_b y p_c se observó antes [16, 13] en algunas soluciones numéricas usando lapsos N diferentes, pero nuestros resultados son analíticos, válidos para condiciones iniciales arbitrarias y usando el tiempo propio, $N = 1$, lo cuál facilita la interpretación

física. De manera similar, encontramos límites para otras funciones del espacio de fase. Armados con estas herramientas, abordamos la siguiente e importante pregunta: ¿Los observadores geodésicos ven la geometría efectiva evolucionando suavemente para siempre? ¿O por el contrario, ven que la geometría se torna singular después de un tiempo propio finito como es el caso de la dinámica clásica? En términos matemáticos: dada una solución a las ecuaciones diferenciales efectivas (4.23) - (4.26), ¿puede extenderse ésta para tiempos arbitrarios? Aplicando un teorema estándar sobre la extendibilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, encontramos que la respuesta a la última pregunta es positiva, lo que a su vez responde a las dos primeras preguntas. Es este resultado el que nos permite afirmar la inexistencia de singularidades en la geometría efectiva.

Un punto importante es digno de mención aquí: la noción más aceptada de espacio-tiempo singular es la de incompletitud geodésica causal, es decir, cuando una geodésica inextensible tipo tiempo o tipo luz tienen parámetro afín finito. Lo que estamos estudiando aquí es el comportamiento a gran escala temporal de las soluciones al problema de Cauchy $3 + 1$ [36], un tema que está profundamente conectado con la existencia de singularidades. Por ejemplo, en la relatividad general clásica, es típico que la incompletitud geodésica causal se acompañe de un comportamiento anómalo a gran escala, como divergencias de curvatura y/o formación de un horizonte de Cauchy, que a su vez indican que la solución no puede evolucionar durante tiempos arbitrariamente grandes. De hecho, la ecuación geodésica también se puede reescribir como un problema de valor inicial, y se puede estudiar que esté bien definido y el comportamiento a gran escala temporal de sus soluciones. En trabajos previos [57, 58], las ecuaciones geodésicas efectivas para la Cosmología Cuántica de Lazos se han estudiado desde el punto de vista del teorema de Picard-Lindelöf. Como se destacó en el primer capítulo, incluso la ecuación diferencial simple, $\dot{x} = x^2$, tiene soluciones que se vuelven singulares en un tiempo finito. Por lo tanto, este tipo de análisis no puede utilizarse para concluir a favor o en contra de la no singularidad de las geodésicas.

Desde un punto de vista relacionado, las propiedades globales de las geodésicas también se pueden estudiar usando la ecuación de Raychaudhuri. Descubrimos en este trabajo [24] que el factor de expansión θ y el esfuerzo cortante σ son acotados. Esto está en consonancia con otros modelos homogéneos cuantizados a la lazos, incluyendo modelos anisotrópicos. Lo que nunca había sido reportado para ningún modelo es

el comportamiento de la derivada $\dot{\theta}$. En este trabajo derivamos por primera vez cotas para esta función, algo que nos permite probar la finitud - término por término - de la ecuación efectiva de Raychaudhuri. Como subproducto podemos directamente obtener una cota para la componente tiempo-tiempo del tensor de Ricci efectivo. Recordemos que a pesar de que en la métrica de Schwarzschild el tensor de Ricci es idénticamente igual a cero, otros escalares de curvatura como el de Kretschmann divergen al acercarse a la singularidad. Nosotros mostramos que, por el contrario, después de introducir los efectos cuánticos a la lazos, todos los invariantes (polinomiales o diferenciales y de cualquier orden finito) del modelo efectivo son finitos. Por lo tanto, de paso mostramos que todas las singularidades de curvatura, débiles o fuertes, se eliminan. De hecho, recordando la definición original de Tipler de singularidad fuerte [62] como aquella que comprime todo a volumen cero, la ausencia de singularidades de curvatura fuertes podría haberse detectado antes, cuando mostramos que ningún volumen puede acercarse a cero. Además, este es un resultado muy general aplicable a cualquier geometría, homogénea o inhomogénea, con factor de expansión acotado. Debido a la generalidad de estos resultados, esperamos que un análisis cualitativo similar al que realizamos en este trabajo también sea útil en todos los modelos efectivos donde es utópico conocer soluciones explícitas en forma cerrada. Además, de la misma manera que la interacción entre cálculos de modelos concretos y técnicas cualitativas generales condujo al descubrimiento del carácter genérico de singularidades en Relatividad General, esperamos que el análisis cualitativo sea útil para obtener un teorema genérico de inexistencia de singularidades en la teoría efectiva de cuantización por lazos.

Apéndice A

Escalares de Kretschmann y Ricci para el interior del agujero negro efectivo

En este trabajo encontramos técnicas que permiten calcular cotas que nunca antes había sido posible obtener. Una de ellas es la cota al escalar de Kretschmann efectivo. Aquí presentamos las expresiones explícitas de los escalares de Ricci y Kretschmann, así como una derivación alternativa (a la presentada en el capítulo 4) de su carácter acotado en la dinámica efectiva.

El escalar de Ricci efectivo lo podemos expresar como

$$R_{eff} = R_1 + R_2 + R_3, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$R_1 = \frac{1}{4\gamma^2\Delta} (12 - 8 \cos(2b\mu_b) - 2 \cos(2c\mu_c) - 3 \cos(2b\mu_b - 2c\mu_c) \\ + 6 \cos(b\mu_b - c\mu_c) \\ - 8 \cos(b\mu_b + c\mu_c) + \cos(2(b\mu_b + c\mu_c)) + 2 \cos(3b\mu_b + c\mu_c))$$

$$R_2 = \frac{\mu_b^2 (-2 + \cos(2b\mu_b))}{\Delta}$$

$$R_3 = \frac{(b\mu_b - c\mu_c) (-\sin(2b\mu_b) + \sin(2c\mu_c) + 2 \sin(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b - c\mu_c))}{\gamma^2\Delta}$$

R_1 está acotado en todo el espacio de fase. Para acotar R_2 podemos usar la constricción efectiva (3.20) o equivalentemente (4.8). Usando (4.19) junto

con (4.20) podemos acotar R_3 . Finalmente obtenemos que

$$|R_{ef}| \leq \frac{7(3 + 2\pi)}{\gamma^2 \Delta}.$$

Para el caso del escalar de Kretschmann lo podemos expresar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{ef} = & \frac{1}{8\gamma^4 \Delta^2} (b\mu_b - c\mu_c)^2 K_1 + \frac{1}{\gamma^4 \Delta^2} (b\mu_b - c\mu_c) K_2 \\ & + \frac{1}{2\gamma^2 \Delta^2} (b\mu_b - c\mu_c) \mu_b^2 K_3 + \frac{1}{2\gamma^2 \Delta^2} \mu_b^2 K_4 + \frac{\mu_b^4}{2\Delta^2} K_5 + K_6. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Los K 's son funciones polinomiales de $\cos b\mu_b$, $\cos c\mu_c$, $\sin b\mu_b$ and $\sin c\mu_c$ que mostramos explícitamente abajo. Claramente ellas son acotadas. En cuanto a los coeficientes que las acompañan son funciones de $b\mu_b$, $c\mu_c$ y μ_b que ya sabemos que son acotadas por (4.19), (4.20) y (4.8) respectivamente.

Explícitamente cada uno de los coeficientes K_i está dado por:

$$\begin{aligned} K_1 = & 24 - 12 \cos(4b\mu_b) + \cos(6b\mu_b) - 4 \cos(4c\mu_c) \\ & + \cos(2b\mu_b) \left(-9 - 32 \cos(2c\mu_c) \sin(b\mu_b)^4 + 96 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c) \right) \\ & + (21 \sin(2b\mu_b) - 4 \sin(4b\mu_b) + \sin(6b\mu_b)) \sin(2c\mu_c) \\ & - 16 \sin(b\mu_b)^2 \left((-2 \cos(b\mu_b) + \cos(3b\mu_b)) \cos(c\mu_c) + \cos(b\mu_b) \cos(3c\mu_c) \right) \\ & - 16 \sin(b\mu_b)^2 \left(+ \sin(b\mu_b) (\cos(2c\mu_c) \sin(b\mu_b) - 7 \sin(c\mu_c) - \sin(3c\mu_c)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 = & 5 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) - 5 \cos(2b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) + 2 \cos(4b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) \\ & - 4 \cos(b\mu_b)^2 \cos(3c\mu_c) \sin(b\mu_b) + 2 \cos(b\mu_b)^2 \cos(2b\mu_b) \cos(3c\mu_c) \sin(b\mu_b) \\ & - \frac{23}{8} \sin(2b\mu_b) - \frac{13}{8} \cos(2c\mu_c) \sin(2b\mu_b) + \cos(4c\mu_c) \sin(2b\mu_b) + \frac{5}{2} \sin(4b\mu_b) - \frac{3}{8} \sin(6b\mu_b) \\ & - \frac{1}{8} \cos(2c\mu_c) \sin(6b\mu_b) - 2 \sin(b\mu_b) \sin(2b\mu_b) \sin(c\mu_c) + \frac{7}{2} \sin(b\mu_b) \sin(4b\mu_b) \sin(c\mu_c) \\ & + \frac{17}{4} \sin(2c\mu_c) - \frac{23}{8} \cos(2b\mu_b) \sin(2c\mu_c) + \frac{3}{4} \cos(4b\mu_b) \sin(2c\mu_c) - \frac{1}{8} \cos(6b\mu_b) \sin(2c\mu_c) \\ & - 3 \sin(b\mu_b) \sin(2b\mu_b) \sin(3c\mu_c) - \cos(2b\mu_b) \sin(4c\mu_c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 = & -8 \cos(b\mu_b) \cos(2c\mu_c) \sin(b\mu_b)^3 + 6 \sin(2b\mu_b) - 5 \sin(4b\mu_b) \\ & + \cos(c\mu_c) (16 \sin(b\mu_b) + 5 \sin(3b\mu_b) + \sin(5b\mu_b)) \\ & + (12 \cos(b\mu_b) - 9 \cos(3b\mu_b) + \cos(5b\mu_b)) \sin(c\mu_c) \\ & - (-5 + 8 \cos(2b\mu_b) + \cos(4b\mu_b)) \sin(2c\mu_c) - 4 \sin(b\mu_b - 3c\mu_c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4 = & 6 + 2 \cos(4b\mu_b) + (3(\cos(b\mu_b) + \cos(3b\mu_b)) - 2 \cos(5b\mu_b)) \cos(c\mu_c) + 2 \cos(2c\mu_c) \\
& - 2 \cos(2b\mu_b) (6 + \cos(2c\mu_c)) - \cos(b\mu_b) \cos(3c\mu_c) - 3 \cos(3b\mu_b - 3c\mu_c) \\
& + 4 \cos(4b\mu_b - 2c\mu_c) + 4 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c) + \sin(b\mu_b) \sin(3c\mu_c)
\end{aligned}$$

$$K_5 = 15 + \cos(4b\mu_b) + 6 \cos(2b\mu_b - 2c\mu_c) - 4 \cos(3b\mu_b - c\mu_c) - 4 \cos(b\mu_b + c\mu_c)$$

$$\begin{aligned}
K_6 = & \frac{\cos(b\mu_b)^4 \sin(b\mu_b)^4}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{8 \cos(b\mu_b)^3 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^4}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{6 \cos(b\mu_b)^2 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^4}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{8 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c)^3 \sin(b\mu_b)^4}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{24 \cos(c\mu_c)^4 \sin(b\mu_b)^4}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{4 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^6}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{4 \cos(b\mu_b)^4 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{24 \cos(b\mu_b)^3 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{16 \cos(b\mu_b)^2 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{16 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c)^3 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{2 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^5 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{4 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^5 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{16 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^5 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{2 \sin(b\mu_b)^7 \sin(c\mu_c)}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{8 \cos(b\mu_b)^4 \sin(b\mu_b)^2 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{32 \cos(b\mu_b)^3 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^2 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{16 \cos(b\mu_b)^2 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^2 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{8 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{16 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{16 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{7 \sin(b\mu_b)^6 \sin(c\mu_c)^2}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{8 \cos(b\mu_b)^4 \sin(b\mu_b) \sin(c\mu_c)^3}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{16 \cos(b\mu_b)^3 \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b) \sin(c\mu_c)^3}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{12 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)^3}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{16 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)^3}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{4 \sin(b\mu_b)^5 \sin(c\mu_c)^3}{\gamma^4 \Delta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4 \cos(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^4}{\gamma^4 \Delta^2} - \frac{8 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^2 \sin(c\mu_c)^4}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{4 \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^4}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{32 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c)^3 \sin(b\mu_b)^3 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{2 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^5 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{8 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^5 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{8 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& - \frac{16 \cos(b\mu_b) \cos(c\mu_c) \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{12 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^3 \sin(c\mu_c)^2 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{8 \cos(b\mu_b)^2 \sin(b\mu_b)^2 \sin(c\mu_c)^3 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{24 \cos(b\mu_b)^2 \cos(c\mu_c)^2 \sin(b\mu_b)^2 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))^2}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{\sin(b\mu_b)^6 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))^2}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& + \frac{4 \sin(b\mu_b)^5 \sin(c\mu_c) (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))^2}{\gamma^4 \Delta^2} + \frac{4 \sin(b\mu_b)^4 \sin(c\mu_c)^2 (\sin(b\mu_b) + \sin(c\mu_c))^2}{\gamma^4 \Delta^2}
\end{aligned}$$

Las cotas de las funciones K pueden ser halladas fácilmente. Como resultado, en contraste con el caso clásico (2.54), encontramos que K_{ef} está acotado :

$$\begin{aligned}
|K_{ef}| & \leq \frac{1419 + 1276\pi + 324\pi^2}{\gamma^4 \Delta^2} \\
& \approx \frac{8625,42}{\gamma^4 \Delta^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty
\end{aligned}$$

Apéndice B

Propagador del modelo de Kantowski-Sachs y aproximación efectiva.

En este trabajo analizamos los efectos cuánticos que se derivan de una teoría efectiva del interior del agujero negro de Schwarzschild. Por esto entendemos una dinámica en el mismo espacio fase clásico pero cuyo hamiltoniano ya no es el clásico (2.27) sino una modificación no trivial de él: el hamiltoniano efectivo (3.20). Históricamente esta teoría efectiva fue propuesta inicialmente para el modelo homogéneo e isotrópico con curvatura espacial plana $k = 0$. Allí, en uno de los trabajos mas importantes del área [8] se mostró que la dinámica efectiva coincide exactamente con la dinámica cuántica. Sobre este resultado está soportada toda el área conocida como «Modelos Efectivos de Lazos». Sin embargo, es importante reconocer que salvo contados modelos (entre ellos el arriba mencionado), no hay una derivación rigurosa del hamiltoniano efectivo a partir de la correspondiente teoría cuántica. En este apéndice queremos mostrar un procedimiento que nos lleva a obtener el hamiltoniano efectivo (3.20) a partir de una teoría cuántica [23]. No es el objetivo hacer una derivación rigurosa, sino mas bién presentar una propuesta que conduce al resultado esperado y además ilustra la física de la extracción de predicciones semiclásicas en esta área.

Antes de presentar nuestra propuesta, queremos recordar el procedimiento estándar de cuantización. Esto con el objetivo de contrastar con el pro-

cedimiento de cuantización a la lazos de sistemas gravitacionales. Brevemente recordemos que dado un espacio fase F con corchete de Poisson $\{, \}$ la cuantización procede con los siguientes pasos:

1. Selección de un algebra de funciones

$$f_\lambda : F \rightarrow \mathbb{C}.$$

A las funciones f_λ las denominamos observables clásicos y deben ser cerradas bajo el corchete de Poisson:

$$\{f_\lambda, f_{\lambda'}\} = f_{\lambda''} \tag{B.1}$$

2. Encontrar un espacio de Hilbert \mathcal{H} y operadores hermíticos \widehat{f}_λ allí tales que ellos satisfacen una relación analoga a (B.1)

$$[\widehat{f}_\lambda, \widehat{f}_{\lambda'}] = i\hbar \widehat{\{f_\lambda, f_{\lambda'}\}}$$

Los operadores \widehat{f}_λ son los observables cuánticos. En este sentido podemos decir que en \mathcal{H} hay una representación de las relaciones de Poisson clásicas.

3. Ecuación de evolución: En el espacio de Hilbert se satisface la ecuación de Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial |\mu\rangle}{\partial t} = \widehat{H} |\mu\rangle$$

Para esto expresamos H como función de los observables elementales clásicos, $H = H(f_\lambda)$ y luego promovemos el resultado a un operador: $\widehat{H} = \widehat{H}(\widehat{f}_\lambda)$. Este paso no es trivial como parece. Si las cordenadas del espacio de fase son p y q , entonces claramente podemos escribir $f_\lambda = f_\lambda(p, q)$. Pero las relaciones inversas $q = q(f_\lambda)$ y $p = p(f_\lambda)$ no siempre existen. Además, inclusive en el caso en que estas relaciones clásicas existan, las correspondientes relaciones de operadores $\widehat{q} = \widehat{q}(\widehat{f}_\lambda)$ y $\widehat{p} = \widehat{p}(\widehat{f}_\lambda)$ podrían no estar definidas. Es el caso de la cuantización por lazos de polimérica donde \widehat{p} no existe, como veremos más adelante.

Para ilustrar el procedimiento anterior presentaremos tres ejemplos: la cuantización usual o de Schrödinger, la cuantización de Wigner y la cuantización polimérica.

- Cuantización de Schrödinger:

Considerando un sistema con un grado de libertad, procedemos escogiendo como observables fundamentales clásicos

$$\begin{aligned}f_1(q, p) &= 1 \\f_2(q, p) &= q \\f_3(q, p) &= p.\end{aligned}$$

Como espacio de Hilbert escogemos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dq)$ y sobre el actúan

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1\psi(q) &= \psi(q) \\ \widehat{f}_2\psi(q) &= q\psi(q) \\ \widehat{f}_3\psi(q) &= -i\hbar\frac{d\psi}{dq}(q).\end{aligned}$$

De allí se puede mostrar que $[\widehat{f}_\lambda, \widehat{f}_{\lambda'}] = i\hbar\{\widehat{f}_\lambda, \widehat{f}_{\lambda'}\}$ para $\lambda = 1, 2, 3$ y que f_λ son operadores hermíticos. Estos operadores son no acotados y sólo pueden definirse en dominios densos.

- Cuantización de Weyl. Aquí escogemos como observables clásicos elementales a las funciones

$$\begin{aligned}g_1(q, p) &= 1 \\g_2^u(q, p) &= e^{iuq} \\g_3^v(q, p) &= e^{ivp}\end{aligned}$$

con $u, v \in \mathbb{R}$ y corchete de Poisson

$$\{g_2^u, g_3^v\} = -uv e^{ipv} e^{iqu}.$$

Como espacio de Hilbert escogemos de nuevo $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dq)$ y sobre el actúan

$$\begin{aligned}\widehat{g}_1\psi(q) &= \psi(q) \\ \widehat{g}_2^u\psi(q) &= e^{iuq}\psi(q) \\ \widehat{g}_3^v\psi(q) &= \psi(q + v).\end{aligned}$$

Los operadores anteriores satisfacen las relaciones de Weyl:

$$\widehat{g}_2^u\widehat{g}_3^v = e^{-i\hbar uv}\widehat{g}_3^v\widehat{g}_2^u. \quad (\text{B.2})$$

Se puede ver que las relaciones de Weyl son formalmente equivalentes a las relaciones de conmutación canónicas $[q, p] = i\hbar$ y que

$$\widehat{g}_2^u = e^{iu\widehat{f}_2} = e^{iu\widehat{q}} \quad (\text{B.3})$$

$$\widehat{g}_3^v = e^{\frac{i}{\hbar}v\widehat{f}_3} = e^{\frac{i}{\hbar}v\widehat{p}}. \quad (\text{B.4})$$

Es decir, se puede ver a la cuantización de Weyl como una versión exponenciada de la cuantización de Schrödinger. También, retomando el comentario hecho en la nota de pie de página (1) de la introducción, el teorema de Stone-Von Neumann es aplicable a los dos casos anteriores pues las dos son representaciones unitariamente equivalente.

- Cuantización polimérica: Los observables clásicos elementales son de nuevo

$$\begin{aligned} g_1(q, p) &= 1 \\ g_2^u(q, p) &= e^{iuq} \text{ y} \\ g_3^v(q, p) &= e^{ivp}. \end{aligned}$$

Ahora el espacio de Hilbert se construye a partir de vectores abstractos $|\mu\rangle$ parametrizados por el número real μ con producto interno

$$\langle \mu | \nu \rangle = \delta_{\mu, \nu}. \quad (\text{B.5})$$

Nótese que en el lado derecho de la anterior ecuación no aparece el delta de Dirac como en la cuantización estándar sino que aparece la delta de Kronecker. Este espacio es no separable, recibe el nombre de espacio de Hilbert polimérico y lo denotamos como \mathcal{H}_{poly} . Los operadores cuánticos fundamentales son ahora

$$\begin{aligned} \widehat{k}_1 |\mu\rangle &= |\mu\rangle \\ \widehat{k}_2^u |\mu\rangle &= e^{iuq} |\mu\rangle \\ \widehat{k}_3^v |\mu\rangle &= |\mu - v\rangle. \end{aligned}$$

y ellos también satisfacen las relaciones de Weyl (B.2). A pesar de la aparente semejanza de esta cuantización con la cuantización de Weyl existen diferencias profundas. La más importante es que no existe una relación análoga a (B.4). Es decir, no existe un operador

\hat{p} tal que $\widehat{k}_3^v = e^{\frac{i}{\hbar}v\hat{p}}$. Esto es consecuencia de que el operador \widehat{k}_3^v no es débilmente continuo:

$$\langle \mu | \widehat{k}_3^v | \mu \rangle = \langle \mu | \mu - v \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } v = 0 \\ 0, & \text{si } v \neq 0 \end{cases} .$$

La cuantización polimérica se puede ver como un ejemplo sencillo y de juguete de algunos procedimientos de cuantización de la Gravitación Cuántica de Lazos. Allí una de las variables clásicas elementales son las holonomías asociadas a una conexión $SU(2)$, A_a^i ,

$$h_\gamma[A] = \mathcal{P} \exp\left(\int_\gamma A\right). \quad (\text{B.6})$$

En la Gravitación Cuántica de Lazos el espacio de Hilbert que se usa es tal que existen operadores \hat{h}_γ pero no existe \hat{A} . En completa analogía con la cuantización polimérica (\hat{h}_γ es análogo a \widehat{k}_3^v y γ es análogo a v) esto se debe a que el operador \hat{h}_γ no es débilmente continuo en el producto interno del espacio de Hilbert.

En el caso del interior del agujero negro, después de imponer la simetría de Kantowski-Sachs y fijar parcialmente la norma tal como lo comentamos en el segundo capítulo, llegamos a un sistema espacialmente homogéneo con dos grados de libertad y cuatro variables en el espacio de fase: b, c, p_b y p_c . Procederemos ahora a cuantizar poliméricamente este sistema. Siguiendo a [42], las funciones clásicas elementales que promoveremos a operadores son:

$$\lambda_b := \frac{p_b}{\sqrt{G\hbar}}, \quad \lambda_c := \sqrt{\frac{p_c}{G\hbar}}$$

y

$$U_b^\beta := e^{i\beta b \bar{\mu}'_b}, \quad U_c^\zeta := e^{i\zeta c \bar{\mu}'_c},$$

con $\bar{\mu}'_b := \sqrt{\frac{\Delta}{p_c}}$ y $\bar{\mu}'_c := \frac{\sqrt{p_c \Delta}}{p_b}$ (3.19). Usando la estructura de Poisson (2.26) $\{b, p_b\} = G\gamma$ y $\{c, p_c\} = 2G\gamma$ encontramos que

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda_b, U_b^\beta \right\} &= \beta \frac{\ell_0}{i\hbar} \frac{U_b^\beta}{\lambda_c}, \\ \left\{ \lambda_c, U_c^\zeta \right\} &= \zeta \frac{\ell_0}{i\hbar} \frac{U_c^\zeta}{\lambda_b}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con $\ell_0 := \gamma\sqrt{\Delta}$.

Pasando ahora a la teoría cuántica, definimos los operadores $\hat{\lambda}_b, \hat{\lambda}_c, \hat{U}_b^\beta$ y \hat{U}_c^ζ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{poly}^{(2)} = \mathcal{H}_{poly} \otimes \mathcal{H}_{poly}$ de la siguiente manera: $\mathcal{H}_{poly}^{(2)}$ admite una base $|\vec{\lambda}\rangle := |\lambda_b, \lambda_c\rangle$ de vectores propios de $\hat{\lambda}_b$ y $\hat{\lambda}_c$, es decir

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_b|\vec{\lambda}\rangle &= \lambda_b|\vec{\lambda}\rangle \\ \hat{\lambda}_c|\vec{\lambda}\rangle &= \lambda_c|\vec{\lambda}\rangle.\end{aligned}\tag{B.8}$$

con $\lambda_b, \lambda_c \in \mathbb{R}$. El producto interno lo definimos poliméricamente:

$$\langle \vec{\lambda}' | \vec{\lambda} \rangle = \delta_{\vec{\lambda}', \vec{\lambda}},\tag{B.9}$$

donde la δ es de Kronecker.

Para definir \hat{U}_b^β y \hat{U}_c^ζ usamos las relaciones cuánticas análogas a la relaciones clásicas (B.7):

$$[\hat{\lambda}_b, \hat{U}_b^\beta] = \beta\ell_0 \frac{\hat{U}_b^\beta}{\hat{\lambda}_c},\tag{B.10}$$

$$[\hat{\lambda}_c, \hat{U}_c^\zeta] = \zeta\ell_0 \frac{\hat{U}_c^\zeta}{\hat{\lambda}_b}.\tag{B.11}$$

De aquí podemos calcular la acción de \hat{U}_b^β y \hat{U}_c^ζ :

$$\begin{aligned}[\hat{\lambda}_b, \hat{U}_b^\beta]|\lambda_b, \lambda_c\rangle &= \beta\ell_0 \frac{\hat{U}_b^\beta}{\hat{\lambda}_c}|\lambda_b, \lambda_c\rangle \\ \hat{\lambda}_b \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle - \hat{U}_b^\beta \hat{\lambda}_b|\lambda_b, \lambda_c\rangle &= \beta \frac{\ell_0}{\lambda_c} \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle \\ \hat{\lambda}_b \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle &= \beta \frac{\ell_0}{\lambda_c} \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle + \lambda_b \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle \\ \hat{\lambda}_b \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle &= \left(\beta \frac{\ell_0}{\lambda_c} + \lambda_b\right) \hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle\end{aligned}$$

entonces $\hat{U}_b^\beta|\lambda_b, \lambda_c\rangle$ es vector propio de $\hat{\lambda}_b$ con valor propio $\left(\beta \frac{\ell_0}{\lambda_c} + \lambda_b\right)$.

Similarmente con \hat{U}_c^ζ . Por tanto

$$\hat{U}_b^\beta|\vec{\lambda}\rangle = |\lambda_b + \beta\ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle \text{ y}\tag{B.12}$$

$$\hat{U}_c^\zeta |\vec{\lambda}\rangle = |\lambda_b, \lambda_c + \zeta \ell_0 / \lambda_b\rangle. \quad (\text{B.13})$$

Veamos ahora que los operadores \hat{U}_b^β y \hat{U}_c^ζ no son débilmente continuos en β y ζ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\lambda} | \hat{U}_b^\beta | \vec{\lambda} \rangle &= \langle \lambda_b, \lambda_c | \lambda_b + \beta \ell_0 / \lambda_c, \lambda_c \rangle \\ &= \langle \lambda_b, \lambda_c | \lambda_b + \beta \ell_0 / \lambda_c, \lambda_c \rangle \\ &= \langle \lambda_b | \lambda_b + \beta \ell_0 / \lambda_c \rangle \langle \lambda_c | \lambda_c \rangle \\ &= \langle \lambda_b | \lambda_b + \beta \ell_0 / \lambda_c \rangle \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \beta = 0, \\ 0, & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los operadores \hat{U}_b^β y \hat{U}_c^ζ no tienen generadores, es decir, no existen $\widehat{\mu}_b b$ y $\widehat{\mu}_c c$ tal que

$$\begin{aligned} U_b^\beta &= e^{i\beta \widehat{\mu}_b b} \\ \hat{U}_c^\zeta &= e^{i\zeta \widehat{\mu}_c c} \end{aligned}$$

Queda entonces establecido que estamos ante un sistema cuántico definido sobre un espacio de Hilbert polimérico con similares características que el sistema polimérico considerado arriba.

El siguiente paso es definir un operador hamiltoniano que genere la dinámica en este espacio de Hilbert. El hamiltoniano clásico (2.27) está dado en términos de las variables clásicas b, c, p_b y p_c , o equivalentemente b, c, λ_b y λ_c . Pero, de acuerdo a la discusión del párrafo anterior, no existen en nuestro espacio de Hilbert operadores b y c . Así que no podemos seguir el procedimiento tradicional de simplemente cambiar cada variable clásica por su correspondiente operador cuántico. Para poder seguir adelante procedemos de la siguiente manera: Recordemos que para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\frac{e^{ix} - (e^{ix})^*}{2i} = x + O(x^2).$$

Basándonos en esto, proponemos el siguiente argumento

$$\begin{aligned} &\frac{\langle s | \hat{U}_b^\beta | s \rangle - \langle s | (\hat{U}_b^\beta)^\dagger | s \rangle}{2i} \\ &= \frac{\langle s | e^{i\beta \widehat{\mu}_b b} | s \rangle - \langle s | (e^{i\beta \widehat{\mu}_b b})^\dagger | s \rangle}{2i} = \beta \mu_b b + O((\beta \mu_b b)^2) \end{aligned}$$

para algun estado semiclásico $|s\rangle$. Aunque la igualdad anterior no esté probada ni garantizada la usamos como justificación heurística para el procedimiento que sigue a continuación:

Consideremos ahora los operadores (con $\beta = \zeta = 1$)

$$\widehat{\sin b\mu_b} := \frac{\widehat{U}_b - (\widehat{U}_b)^\dagger}{2i}$$

y

$$\widehat{\sin c\mu_c} := \frac{\widehat{U}_c - (\widehat{U}_c)^\dagger}{2i}$$

a partir de los cuales podemos definir

$$\widehat{\Phi}_b := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} \widehat{\sin b\mu_b} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} \quad \text{y} \quad \widehat{\Phi}_c := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\widehat{\lambda}_c} \widehat{\sin c\mu_c} \sqrt{\widehat{\lambda}_c}. \quad (\text{B.14})$$

La acción de estos operadores es:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_b |\vec{\lambda}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} \widehat{\sin b\mu_b} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} |\vec{\lambda}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\lambda_b} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} \left(\frac{\widehat{U}_b - (\widehat{U}_b)^\dagger}{2i} \right) |\vec{\lambda}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\lambda_b} \sqrt{\widehat{\lambda}_b} \left(\frac{|\lambda_b + \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle - |\lambda_b - \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\lambda_b} \left(\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_b} |\lambda_b + \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle - \sqrt{\widehat{\lambda}_b} |\lambda_b - \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\lambda_b} \left(\frac{\sqrt{\lambda_b + \ell_0/\lambda_c} |\lambda_b + \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle - \sqrt{\lambda_b - \ell_0/\lambda_c} \widehat{\lambda}_b |\lambda_b - \ell_0/\lambda_c, \lambda_c\rangle}{2i} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Similarmente

$$\widehat{\Phi}_c |\vec{\lambda}\rangle = -\frac{i\sqrt{\lambda_c}}{2\sqrt{\Delta}} \left[\sqrt{\lambda_c + \ell_0/\lambda_b} |\lambda_b, \lambda_c + \ell_0/\lambda_b\rangle - \sqrt{\lambda_c - \ell_0/\lambda_b} |\lambda_b, \lambda_c - \ell_0/\lambda_b\rangle \right]. \quad (\text{B.16})$$

Proponemos ahora que el hamiltoniano cuántico de nuestro sistema sea

$$\widehat{H}_\mu = -\frac{\hbar}{2\gamma^2} \left[\widehat{\Phi}_b \widehat{\Phi}_c + \widehat{\Phi}_c \widehat{\Phi}_b + (\widehat{\Phi}_b)^2 \frac{\widehat{\lambda}_c}{2\widehat{\lambda}_b} + \frac{\widehat{\lambda}_c}{2\widehat{\lambda}_b} (\widehat{\Phi}_b)^2 + \frac{\gamma^2 \widehat{\lambda}_b}{G\hbar \widehat{\lambda}_c} \right], \quad (\text{B.17})$$

Es importante notar que la versión clásica de este hamiltoniano, para $\mu_b b \ll 1$ y $\mu_c c \ll 1$, concuerda con el hamiltoniano clásico (2.27) :

$$H_\mu = H + O\left((\mu_b b)^2\right) + O\left((\mu_c c)^2\right).$$

Con estos elementos estamos listos para calcular

$$\left| \langle \vec{\lambda}_f; \tau_f | \vec{\lambda}_i; \tau_i \rangle \right|^2.$$

Esta es la probabilidad de que estando en un estado $|\vec{\lambda}_i\rangle$ en un tiempo propio inicial τ_i se mida un estado $|\vec{\lambda}_f\rangle$ en el tiempo propio final $\tau_f > \tau_i$. La amplitud de probabilidad está dada por

$$\langle \vec{\lambda}_f; \tau_f | \vec{\lambda}_i; \tau_i \rangle = \langle \vec{\lambda}_f | e^{-i\Delta\tau\hat{H}_\mu/\hbar} | \vec{\lambda}_i \rangle, \quad \Delta\tau = \tau_f - \tau_i. \quad (\text{B.18})$$

De aquí en adelante usaremos el método de integrales de camino de Feynman para calcular la expresión anterior. Como es usual expresamos

$$e^{-i\Delta\tau\hat{H}_\mu/\hbar} = \prod_{n=0}^{N-1} e^{-i\epsilon\hat{H}_\mu/\hbar}, \quad \text{con } N\epsilon = \Delta\tau. \quad (\text{B.19})$$

y usando la resolución de la identidad en términos de $|\vec{\lambda}_n\rangle$,

$$\hat{1} = \sum_{\vec{\lambda}_n} |\vec{\lambda}_n\rangle \langle \vec{\lambda}_n|, \quad (\text{B.20})$$

podemos expresar (B.18) como

$$\langle \vec{\lambda}_f; \tau_f | \vec{\lambda}_i; \tau_i \rangle = \sum_{\vec{\lambda}_{N-1}, \dots, \vec{\lambda}_1} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \vec{\lambda}_{n+1} | e^{-i\epsilon\hat{H}_\mu/\hbar} | \vec{\lambda}_n \rangle, \quad (\text{B.21})$$

donde $\vec{\lambda}_f = \vec{\lambda}_N$ y $\vec{\lambda}_i = \vec{\lambda}_0$. Teniendo en cuenta que podemos hacer ϵ tan pequeño como queramos tenemos que

$$\langle \vec{\lambda}_{n+1} | e^{-i\epsilon\hat{H}_\mu/\hbar} | \vec{\lambda}_n \rangle = \delta_{\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{\lambda}_n} - i\frac{\epsilon}{\hbar} \langle \vec{\lambda}_{n+1} | \hat{H}_\mu | \vec{\lambda}_n \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Los elementos matriciales $\langle \vec{\lambda}_{n+1} | \hat{H}_\mu | \vec{\lambda}_n \rangle$ los calculamos usando (B.8), (B.15) y (B.16)

$$\begin{aligned} \langle \vec{\lambda}_{n+1} | \hat{H}_\mu | \vec{\lambda}_n \rangle = \frac{\hbar}{8\gamma^2\Delta} \left\{ \sqrt{\lambda_{b,n+1}\lambda_{b,n}} \sqrt{\lambda_{c,n}\lambda_{c,n+1}} (P_n + Q_n) + \frac{4\gamma^2\Delta}{G\hbar} \frac{\lambda_{b,n}}{\lambda_{c,n}} \delta_{\vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_{n+1}} \right. \\ \left. + \sqrt{\lambda_{b,n}\lambda_{b,n+1}} \frac{\lambda_{b,n} + \lambda_{b,n+1}}{2} \left(\frac{\lambda_{c,n}}{2\lambda_{b,n}} + \frac{\lambda_{c,n+1}}{2\lambda_{b,n+1}} \right) R_n \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

donde

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} + \ell_0 / \lambda_{c,n+1}} - \delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} - \ell_0 / \lambda_{c,n+1}} \right) \left(\delta_{\lambda_{c,n+1}, \lambda_{c,n} + \ell_0 / \lambda_{b,n}} - \delta_{\lambda_{c,n+1}, \lambda_{c,n} - \ell_0 / \lambda_{b,n}} \right), \\ Q_n &= \left(\delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} + \ell_0 / \lambda_{c,n}} - \delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} - \ell_0 / \lambda_{c,n}} \right) \left(\delta_{\lambda_{c,n+1}, \lambda_{c,n} + \ell_0 / \lambda_{b,n+1}} - \delta_{\lambda_{c,n+1}, \lambda_{c,n} - \ell_0 / \lambda_{b,n+1}} \right), \\ R_n &= \left(\delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} + 2\ell_0 / \lambda_{c,n+1}} - 2\delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n}} + \delta_{\lambda_{b,n+1}, \lambda_{b,n} - 2\ell_0 / \lambda_{c,n+1}} \right) \delta_{\lambda_{c,n+1}, \lambda_{c,n}}. \end{aligned}$$

Para obtener la teoría continua se propone aquí [42] remplazar en la expresión anterior los deltas de Kronecker por deltas de Dirac. Esto es equivalente a cambiar el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{poly}^{(2)}$ a $\mathcal{H}_{Sch}^{(2)} = \mathcal{H}_{Sch} \otimes \mathcal{H}_{Sch}$, $\mathcal{H}_{Sch} = L^2(\mathbb{R}, dx)$. Luego de hacer esto, usamos la identidad

$$\delta(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_{n+1} e^{-i\varphi_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/\gamma} \quad (\text{B.23})$$

para obtener

$$\begin{aligned} \langle \vec{\lambda}_{n+1} | e^{-i\epsilon \hat{H}_n} | \vec{\lambda}_n \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \right)^2 \int d\vec{\varphi}_{n+1} e^{-i\vec{\varphi}_{n+1}(\vec{\lambda}_{n+1} - \vec{\lambda}_n)/\gamma} \\ &\quad \times \left\{ 1 + i \frac{\epsilon}{2\gamma^2 \Delta} \left[M_n + N_n + L_n + \frac{\gamma^2 \Delta}{G\hbar} \frac{\lambda_{b,n}}{\lambda_{c,n}} \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

donde

$$M_n = \sqrt{\lambda_{b,n+1} \lambda_{b,n}} \sqrt{\lambda_{c,n} \lambda_{c,n+1}} \sin(\sqrt{\Delta} \varphi_{b,n+1} / \lambda_{c,n+1}) \sin(\sqrt{\Delta} \varphi_{c,n+1} / \lambda_{b,n}), \quad (\text{B.25})$$

$$N_n = \sqrt{\lambda_{b,n+1} \lambda_{b,n}} \sqrt{\lambda_{c,n} \lambda_{c,n+1}} \sin(\sqrt{\Delta} \varphi_{b,n+1} / \lambda_{c,n}) \sin(\sqrt{\Delta} \varphi_{c,n+1} / \lambda_{b,n+1}), \quad (\text{B.26})$$

$$L_n = \sqrt{\lambda_{b,n} \lambda_{b,n+1}} \frac{\lambda_{b,n} + \lambda_{b,n+1}}{2} \left(\frac{\lambda_{c,n}}{2\lambda_{b,n}} + \frac{\lambda_{c,n+1}}{2\lambda_{b,n+1}} \right) \sin(\sqrt{\Delta} \varphi_{b,n+1} / \lambda_{c,n+1})^2. \quad (\text{B.27})$$

y $\vec{\varphi} = (\varphi_b, \varphi_c)$. Podemos entonces escribir la amplitud de probabilidad como

$$\langle \vec{\lambda}_f; \tau_f | \vec{\lambda}_i; \tau_i \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \right)^{2N} \int d\vec{\lambda}_{N-1} \dots d\vec{\lambda}_1 \int d\vec{\varphi}_N \dots d\vec{\varphi}_1 e^{i/\hbar S_\mu^{SN}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.28})$$

donde

$$\begin{aligned}
S_\mu^N = & \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} -\frac{\hbar}{\gamma} \vec{\varphi}_{n+1} \frac{\vec{\lambda}_{n+1} - \vec{\lambda}_n}{\epsilon} + \frac{\hbar}{2\gamma^2\Delta} \left[\sqrt{\lambda_{b,n+1}\lambda_{b,n}} \sqrt{\lambda_{c,n}\lambda_{c,n+1}} \right. \\
& \times \left(\sin(\sqrt{\Delta}\varphi_{b,n+1}/\lambda_{c,n+1}) \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_{c,n+1}/\lambda_{b,n}) + \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_{b,n+1}/\lambda_{c,n}) \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_{c,n+1}/\lambda_{b,n+1}) \right) \\
& \left. + \sqrt{\lambda_{b,n}\lambda_{b,n+1}} \frac{\lambda_{b,n} + \lambda_{b,n+1}}{2} \left(\frac{\lambda_{c,n}}{2\lambda_{b,n}} + \frac{\lambda_{c,n+1}}{2\lambda_{b,n+1}} \right) \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_{b,n+1}/\lambda_{c,n+1})^2 + \frac{\gamma^2\Delta}{G\hbar} \frac{\lambda_{b,n}}{\lambda_{c,n}} \right].
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Tomando el límite $N \rightarrow \infty$ (B.29) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
S_\mu = & \lim_{N \rightarrow \infty} S_\mu^N = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left\{ -\frac{\hbar}{\gamma} \vec{\varphi} \cdot \dot{\vec{\lambda}} \right. \\
& \left. + \frac{\hbar}{2\gamma^2\Delta} \left[\lambda_b \lambda_c \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_b/\lambda_c) \left(2 \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_c/\lambda_b) + \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_b/\lambda_c) \right) + \frac{\gamma^2\Delta}{G\hbar} \frac{\lambda_b}{\lambda_c} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Por tanto, podemos ver que el hamiltoniano efectivo es

$$H_\mu^{\text{eff}} = -\frac{\hbar}{2\gamma^2\Delta} \left[\lambda_b \lambda_c \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_b/\lambda_c) \left(2 \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_c/\lambda_b) + \sin(\sqrt{\Delta}\varphi_b/\lambda_c) \right) + \frac{\gamma^2\Delta}{G\hbar} \frac{\lambda_b}{\lambda_c} \right]. \tag{B.31}$$

Regresando a las variables (b, c, p_b, p_c) obtenemos que

$$H_\mu^{\text{eff}} = -\frac{1}{2G\gamma^2} \left[2\sqrt{p_c} \frac{\sin \mu_b b}{\mu_b} \frac{\sin \mu_c c}{\mu_c} + \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \left(\frac{\sin \mu_b b}{\mu_b} \right)^2 + \gamma^2 \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right]. \tag{B.32}$$

Bibliografía

- [1] Ivan Agullo and Alejandro Corichi. Loop quantum cosmology. In Abhay Ashtekar and Vesselin Petkov, editors, *Springer Handbook of Spacetime*. Springer, 2014 edition, 9 2014.
- [2] Ivan Agullo and Parampreet Singh. Loop Quantum Cosmology. In Abhay Ashtekar and Jorge Pullin, editors, *Loop Quantum Gravity: The First 30 Years*, pages 183–240. WSP, 2017.
- [3] Abhay Ashtekar. *Loop Quantum Gravity: The First 30 Years (100 Years of General Relativity)*. World Scientific Publishing Co, 5 2017.
- [4] Abhay Ashtekar and Martin Bojowald. Quantum geometry and the Schwarzschild singularity. *Class. Quant. Grav.*, 23:391–411, 2006.
- [5] Abhay Ashtekar, Miguel Campiglia, and Adam Henderson. Path Integrals and the WKB approximation in Loop Quantum Cosmology. *Phys.Rev.*, D82:124043, 2010.
- [6] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class. Quant. Grav.*, 21:R53, 2004.
- [7] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum nature of the big bang: An analytical and numerical investigation. I. *Phys. Rev.*, D73:124038, 2006.
- [8] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum nature of the big bang: Improved dynamics. *Phys. Rev.*, D74:084003, 2006.
- [9] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, Parampreet Singh, and Kevin Vandersloot. Loop quantum cosmology of $k=1$ FRW models. *Phys. Rev.*, D75:024035, 2007.
- [10] Abhay Ashtekar and Parampreet Singh. Loop Quantum Cosmology:

- A Status Report. *Class.Quant.Grav.*, 28:213001, 2011.
- [11] Abhay Ashtekar and Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of Bianchi I models. *Phys.Rev.*, D79:083535, 2009.
- [12] Abhay Ashtekar and Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of Bianchi type II models. *Phys.Rev.*, D80:123532, 2009.
- [13] Christian G. Boehmer and Kevin Vandersloot. Loop Quantum Dynamics of the Schwarzschild Interior. *Phys.Rev.*, D76:104030, 2007.
- [14] Martin Bojowald. *Canonical gravity and applications : cosmology, black holes, quantum gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK New York, 2011.
- [15] Dah-Wei Chiou. Phenomenological dynamics of loop quantum cosmology in Kantowski-Sachs spacetime. *Phys. Rev.*, D78:044019, 2008.
- [16] Dah-Wei Chiou. Phenomenological loop quantum geometry of the Schwarzschild black hole. *Phys. Rev.*, D78:064040, 2008.
- [17] Dah-Wei Chiou and Kevin Vandersloot. The Behavior of non-linear anisotropies in bouncing Bianchi I models of loop quantum cosmology. *Phys.Rev.*, D76:084015, 2007.
- [18] C. B. Collins. Global structure of the Kantowski-Sachs cosmological models. *J. Math. Phys.*, 18:2116, 1977.
- [19] P. Cordero. Canonical Formulation of the Spherically-Symmetric Einstein Yang-Mills Higgs System for a General Gauge Group. *Annals Phys.*, 108:79, 1977.
- [20] Alejandro Corichi and Edison Montoya. Effective Dynamics in Bianchi Type II Loop Quantum Cosmology. *Phys.Rev.*, D85:104052, 2012.
- [21] Alejandro Corichi and Edison Montoya. Loop quantum cosmology of Bianchi IX: Effective dynamics. *Class. Quant. Grav.*, 34(5):054001, 2017.
- [22] Alejandro Corichi and Parampreet Singh. Loop quantization of the Schwarzschild interior revisited. *Class. Quant. Grav.*, 33(5):055006, 2016.
- [23] Jerónimo Cortez, William Cuervo, Hugo A. Morales-Técotl, and Juan C. Ruelas. Effective loop quantum geometry of Schwarzschild interior. *Phys. Rev.*, D95(6):064041, 2017.
- [24] Jeronimo Cortez, William Cuervo, and Hugo A. Morales-Técotl. On

- the geometric resolution of the Schwarzschild black hole singularity within effective loop quantum gravity models. *AIP Conf.Proc.*, 1548:167–171, 2013.
- [25] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Third Edition*. Academic Press, 3 edition, 10 2005.
- [26] Peter Diener, Brajesh Gupt, Miguel Megevand, and Parampreet Singh. Numerical evolution of squeezed and non-Gaussian states in loop quantum cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 31:165006, 2014.
- [27] Peter Diener, Brajesh Gupt, and Parampreet Singh. Numerical simulations of a loop quantum cosmos: robustness of the quantum bounce and the validity of effective dynamics. *Class.Quant.Grav.*, 31:105015, 2014.
- [28] Albert Einstein. Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:688–696, 1916.
- [29] Christian Fleischhack. Representations of the Weyl algebra in quantum geometry. *Commun. Math. Phys.*, 285:67–140, 2009.
- [30] Kazuya Fujio and Toshifumi Futamase. Behavior of Bianchi type I spacetime by path integral approach in LQC. *Phys.Rev.*, D85:124002, 2012.
- [31] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. *A First Course in Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press, 1 edition, 11 2011.
- [32] Robert P. Geroch. What is a singularity in general relativity? *Annals Phys.*, 48:526–540, 1968.
- [33] Robert P. Geroch. Limits of spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 13:180–193, 1969.
- [34] S. W. Hawking and R. Penrose. The Singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A314:529–548, 1970.
- [35] Giorgio Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. *Class. Quant. Grav.*, 14:L177–L181, 1997.
- [36] James Isenberg. The initial value problem in general relativity. In Abhay Ashtekar and Vesselin Petkov, editors, *Springer Handbook of Spacetime*. Springer, 2014 edition, 9 2014.
- [37] Anton Joe and Parampreet Singh. Kantowski-Sachs spacetime in loop quantum cosmology: bounds on expansion and shear scalars

- and the viability of quantization prescriptions. *Class.Quant.Grav.*, 32(1):015009, 2015.
- [38] R. Kantowski and R. K. Sachs. Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models. *J. Math. Phys.*, 7:443, 1966.
- [39] Claus Kiefer. *Quantum gravity*, volume 124. Oxford University Press, 2004. [Int. Ser. Monogr. Phys.155,1(2012)].
- [40] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol II*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963.
- [41] Jerzy Lewandowski, Andrzej Okolow, Hanno Sahlmann, and Thomas Thiemann. Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras. *Commun. Math. Phys.*, 267:703–733, 2006.
- [42] Xiao Liu, Fei Huang, and Jian-Yang Zhu. Path Integral of Bianchi I models in Loop Quantum Cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 30:065010, 2013.
- [43] M. Martin-Benito, G.A. Mena Marugan, and T. Pawłowski. Loop Quantization of Vacuum Bianchi I Cosmology. *Phys.Rev.*, D78:064008, 2008.
- [44] Mercedes Martin-Benito, Guillermo A. Mena Marugan, and Tomasz Pawłowski. Physical evolution in Loop Quantum Cosmology: The Example of vacuum Bianchi I. *Phys.Rev.*, D80:084038, 2009.
- [45] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [46] Leonardo Modesto. Black hole interior from loop quantum gravity. *Adv. High Energy Phys.*, 2008:459290, 2008.
- [47] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Graduate student series in physics. Hilger, Bristol, 2003.
- [48] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14:57–59, 1965.
- [49] Alejandro Perez. Introduction to loop quantum gravity and spin foams. In *2nd International Conference on Fundamental Interactions (IC-FI 2004) Domingos Martins, Espirito Santo, Brazil, June 6-12, 2004*, 2004.
- [50] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 2007.

-
- [51] J. Polchinski. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, 2007.
- [52] Li Qin, Guo Deng, and Yong-Ge Ma. Path integrals and alternative effective dynamics in loop quantum cosmology. *Commun.Theor.Phys.*, 57:326–332, 2012.
- [53] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 12 2007.
- [54] Carlo Rovelli and Francesca Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2014.
- [55] Sahil Saini and Parampreet Singh. Geodesic completeness and the lack of strong singularities in effective loop quantum Kantowski–Sachs spacetime. *Class. Quant. Grav.*, 33(24):245019, 2016.
- [56] Sahil Saini and Parampreet Singh. Resolution of strong singularities and geodesic completeness in loop quantum Bianchi-II spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 34(23):235006, 2017.
- [57] Parampreet Singh. Are loop quantum cosmos never singular? *Class.Quant.Grav.*, 26:125005, 2009.
- [58] Parampreet Singh. Curvature invariants, geodesics and the strength of singularities in Bianchi-I loop quantum cosmology. *Phys.Rev.*, D85:104011, 2012.
- [59] Paula Tarrío, Mikel Fernández Méndez, and Guillermo A. Mena Marugán. Singularity avoidance in the hybrid quantization of the Gowdy model. *Phys. Rev.*, D88:084050, 2013.
- [60] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 8 2012.
- [61] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 1 edition, 12 2008.
- [62] Frank J. Tipler. Singularities in conformally flat spacetimes. *Phys.Lett.*, A64:8–10, 1977.
- [63] Ioan I Vrabie. *Differential Equations: An Introduction To Basic Concepts, Results And Applications (2Nd Edition)*. Wspc, 5 2011.
- [64] Robert M. Wald. *General Relativity*. University Of Chicago Press, 1st

edition edition, 6 1984.

- [65] Robert M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995.
- [66] Hsien-chung Wang. On invariant connections over a principal fibre bundle. *Nagoya Math. J.*, 13:1–19, 1958.
- [67] Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of Bianchi type IX models. *Phys.Rev.*, D82:043508, 2010.