UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HOMOLOGÍA RELATIVA Y OBJETOS GORENSTEIN EN CATEGORÍAS ABELIANAS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
VÍCTOR RUFINO BECERRIL SOMERA

DIRECTOR DE TESIS
DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. CHRISTOF GEISS HAHN
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

COMITÉ TUTOR
DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018.

Prefacio

Empezamos la primer parte del trabajo abordando el material necesario para desarrollar el resto de la tesis. Introducimos notación general y luego recordamos las nociones de dimensión proyectiva relativa y de dimensión resolución de una clase $\mathcal{X}$ de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Finalmente recordamos definiciones y propiedades básicas que necesitamos acerca de la teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz. En lo que sigue, estaremos tomando como referencia principal el articulo [7].

Destacamos que Auslander y Buchweitz suponen en [7] que una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ es una subcategoria resolvente y aditivamente cerrada , la cual es también cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$. En una muy cuidadosa revisión de las pruebas que aparecen en [7], podemos ver que algunas de las hipótesis supuestas no son usadas.

En la segunda parte, que corresponde al Capítulo 6, definimos a los objetos Gorenstein relativos para una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y usamos teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz en esta nueva teoría Gorenstein relativa. Tratamos de reproducir bajo el lenguaje correspondiente a objetos Gorenstein relativos, la mayoría de los resultados conocidos para módulos Gorenstein, como lo hace H. Holm en [47]. Para esto usamos algunas veces ideas similares a las de [47] y en otras ocasiones damos pruebas alternativas.

Introducción

El estudio de dimensiones homológicas, las cuales son obtenidas reemplazando los módulos proyectivos o inyectivos por ciertas subcategorías, fue iniciado por S. Eilenberg y J. C. Moore en [28], el cual fue el punto inicial de lo que hoy en día es llamado *álgebra homológica relativa*. Varios años después, una importante rama del álgebra homológica relativa fue desarrollada por Maurice Auslander y Ragnar O. Buchweitz en su artículo [7]. Los conceptos y resultados en su trabajo comprenden lo que usualmente es conocido como *teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz* (a la cual nos referiremos como *teoría* AB, para abreviar), la cual, consiste de métodos para obtener (pre-) cubiertas y (pre-) envolventes, esto es, aproximaciones a izquierda y derecha de generadores y cogeneradores de una subcategoría plena de una categoría abeliana.

Estos métodos permitieron probar a Auslander y Buchweitz, entre otros resultados, que para todo R-módulo a izquierda N, finitamente generado (con R un anillo noetheriano conmutativo Cohen-Macaulay), existe un R-módulo a izquierda M, Cohen-Macaulay maximal y un epimorfismo de M sobre N, tal que cualquier otro epimorfismo de un maximal Cohen-Macaulay sobre N se factoriza a través de éste; en otras palabras N tiene pre-cubierta Cohen-Macaulay maximal. Recientemente, Henrik Holm vuelve a probar este resultado en [49], para anillos locales Cohen-Macaulay, mostrando que la clase de módulos Cohen-Macaulay maximales es la parte izquierda de un par de cotorsión completo y hereditario en la categoría de módulos finitamente generados sobre tales anillos. Observe que en estos dos casos, donde R es un anillo conmutativo noetheriano Cohen-Macaulay o un anillo local Cohen-Macaulay, la existencia de las mencionadas precubiertas y pares de cotorsión completos y hereditarios es restringida a cierta subcategoría de R-módulos a izquierda, los cuales son finitamente generados. Así que, el problema de obtener aproximaciones para módulos sobre tales anillos es tomado *localmente*. En este trabajo, proponemos el concepto de *par de cotorsión relativo* como un método para hallar aproximaciones a derecha e izquierda de manera local en subcategorías gruesas de una categoría abeliana.

Cabe mencionar que la importancia de las aproximaciones no está solo restringida al contexto de módulos sobre anillos Cohen-Macaulay, si no que encuentra en el hecho de que la existencia de aproximaciones es un prerequisito para calcular dimensiones relativas. Por ejemplo, este hecho puede apreciarse en el trabajo de Holm [47], donde el autor construye pre-cubiertas Gorenstein proyectivas y pre-envolventes Gorenstein inyectivas, para ciertos módulos sobre un anillo arbitrario, de los cuales es posible definir dimensiones homológicas Gorenstein y funtores derivados Gorenstein. Los resultados de Holm, hacen notar la fuerte relación entre la existencia de pares de cotorsión completos y aproximaciones.

En años recientes, una útil herramienta para producir aproximaciones a través de pares de cotorsión completos ha sido desarrollada por Paul Eklof, Jan Tlrifaj, Edgar E. Enochs, Overtoun M. G. Jenda y Rüdier Göbel en [29, 25, 40]. De modo que no es de sorprender que la teoría AB provea una buena herramienta para investigar objetos Gorenstein relativos en categorías abelianas, los cuales, como probaremos, son también objetos cofibrantes y fibrantes de ciertas categorías de modelo, una noción que proviene de la topología algebraica. Esta última afirmación es una consecuencia de una correspondencia uno a uno, entre pares de cotorsión completos y estructuras de categorías de modelo sobre categorías abelianas, desarrolladas por Mark Hovey en [51], y después generalizada por James Gillespie en [36], para categorías exactas débilmente completas por idempotentes.

Teniendo en cuenta los hechos expuestos arriba, en el presente trabajo abordamos algunas ideas que son mas generales que las mencionadas. Dichas ideas son desarrolladas a través de técnicas propias del álgebra homológica al estilo Auslander-Buchweitz y elaboramos hasta donde es posible, otro tipo de álgebra homológica, la cual nos permite deducir bastantes de los resultados clásicamente conocidos en cada teoría abordada, así como otros nuevos, y otros mas generales, llevamos a cabo este desarrollo en dos temas principales.

En el primer tema, usando la teoría AB desarrollamos en el entorno general proporcionado por una categoría abeliana $\mathcal{A}$, la *teoría de pares de Frobenius a izquierda y a derecha*, los cuales son conceptos que provienen de las nociones de generadores y cogeneradores (en el sentido de Auslander y Buchweitz [7]). Usamos los pares de Frobenius para construir pares de cotorsión relativos para llevar la correspondencia uno a uno entre pares de cotorsión completos y estructuras de modelo a la teoría AB. Específicamente, de cierto tipo de pares de Frobenius $(\mathcal{X}, \omega)$ en una categoría $\mathcal{A}$, obtenemos estructuras de categoría de modelo (a las cuales llamamos *estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz*) sobre la subcategoría $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{A}$ de objetos en $\mathcal{A}$ con dimensión resolución finita, relativa a $\mathcal{X}$. Una vez obtenidas estas estructuras de modelo, calculamos sus categorías de homotopía, intentando representar el álgebra homológica resultante de generadores y cogeneradores como ciertas subcategorías estables. Como una aplicación, mostramos como varias categorías de homotopía conocidas procedentes de objetos Gorenstein relativos, tales como los Gorenstein-proyectivos, Ding-proyectivos y módulos Gorenstein AC-proyectivos (y sus respectivos duales), pueden ser representadas como categorías de homotopía de estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz. Este puente entre teoría AB, categorías de homotopía y estructuras de modelo vía pares de Frobenius se relaciona también con la noción de contextos de Auslander-Buchweitz. Veremos también como esta relación da lugar a generalizar algunos métodos para construir aproximaciones en teoría de Auslander-Reiten y teoría cotilting.

Para comprender el segundo tema, comentamos antes algunos hechos que ilustra la importancia de su estudio. Hacemos esto como sigue: Dentro del álgebra homológica clásica, las clases de módulos proyectivos, inyectivos y planos juegan un papel fundamental para definir dimensiones para cualquier módulo, las cuales permiten enunciar resultados referentes al anillo base. Alrededor del concepto de dimensión homológica, Auslander y Bridger introducen en 1969 la G-dimensión (ver [3]) para módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano y conmutativo. Ellos prueban la desigualdad $\text{G-dim}(M) \leq \text{pd}_R(M)$, se convierte en igualdad cuando $\text{pd}_R(M)$ es finita. Dicha igualdad es usada para dar una caracterización de los anillos locales Gorenstein (ver [2], Sección 3.2), así como para probar la fórmula generalizada de Auslander-Buchsbaum para G-dimensiones.

Posteriormente, en la primera parte de la década de los 90's, la noción de la G-dimensión fue extendida mas allá de los módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano. Para un anillo general R, Enochs y Jenda definen en [24] la *dimension Gorenstein proyectiva* $\mathrm{Gpd}_R(-)$ para módulos arbitrarios (no necesariamente finitamente generados). Tal dimensión está dada por medio de una resolución de *módulos Gorenstein proyectivos*. Trabajos subsecuentes de Avramov, Buchweitz, Martsinkovsky y Reiten muestran que un módulo M finitamente generado, sobre un anillo noetheriano, es Gorenstein proyectivo si y solo si $\text{G-dim}_R(M) = 0$ (ver [22] en la observación que le sigue al Teorema 4.2.6).

Recientemente H. Holm [47] prueba que la clase de módulos Gorenstein proyectivos, tratada por Enochs y Jenda [24], son una clase resolvente, lo cual permite calcular $\mathrm{Gpd}_R(-)$, por medio de resoluciones Gorenstein proyectivas, posteriormente se definen los bien conocidos módulos Gorenstein AC-proyectivos (inyectivos) [15], Ding-proyectivos (inyectivos) [35], los cuales son una generalización de los módulos Gorenstein proyectivos de H. Holm, cabe mencionar que, una excelente referencia para ahondar en estos temas, es el libro de Marco A. Pérez [68]. Desde entonces, varios intentos por generalizar a esta variedad de objetos Gorenstein proyectivos de una manera global han aparecido, acompañados con diversos nombres, algunos de ellos son: D. Bennis [14], seguido de M. Tamekkante [75], así como por F. Meng y Q. Pan [65], seguido de H. Cheng y X. Zhu [21], con algunas variaciones de Q. Pan y F. Cai [66], con otras versiones e independientemente por Y. Geng y N. Ding [33], D. Bennis, J. R. García Rozas y Luis Oyonarte [13], finalmente Aimin Xu en [79], entre otros. En dichos trabajos se vuelven a probar algunos de los resultados que H. Holm muestra en [47], pero en un contexto mas general.

El propósito del segundo tema es unificar las distintas nociones de objetos Gorenstein proyectivo en una sola. Para esto, definimos a los *objetos* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos relativos* y desarrollamos propiedades de estos mediante el uso de la teoría de Auslander-Buchweitz, y hacemos ver en varias ocasiones que los resultados obtenidos son una generalización de lo conocido en varios de los trabajos arriba mencionados. Damos algunos pares de cotorsión relativos en el sentido tratado en el Capítulo 2 de este trabajo; desarrollamos también las propiedades de las dimensiones homológicas relativas asociadas a nuestros objetos Gorenstein proyectivos relativos pasando por varias dimensiones finitistas relativas. Por otro lado, veremos como los objetos Gorenstein proyectivos relativos se relacionan a través de los pares de cotorsión relativos que inducen, con ciertos pares, llamados $\mathcal{W}$-cotilting. Cabe mencionar que dichos pares $\mathcal{W}$-cotilting, constituyen una noción mas general que los objetos cotilting, en el sentido de Angeleri-Coelho [5].

El trabajo está organizado como sigue. Empezamos el primer tema desde el Capítulo 1 y hasta el Capítulo 5. En el primer Capítulo recordamos algunos conceptos y resultados de la teoría AB, abordamos nociones básicas del álgebra homológica relativa, tales como *resoluciones* y *dimensiones homológicas*. Presentamos también la noción de pares de Frobenius (a derecha y a izquierda), los cuales constituyen el principal objeto de estudio en este primer tema. En el Capítulo 2, recordamos la noción de pares de cotorsión en categorías exactas. En el caso particular, donde $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ es una subcategoría gruesa, $\mathcal{S}$ puede ser considerada como una sub-categoría exacta; y un par de cotorsión *completo* en $\mathcal{S}$, será llamado un *par* *de $\mathcal{S}$-cotorsión*. Después proveemos una descripción alternativa de pares de $\mathcal{S}$-cotorsión y usamos este resultado para inducir pares de cotorsión relativos a partir de las nociones de *generador* y *cogenerador* que provienen de la teoría AB. Motivados en la interacción entre pares de cotorsión y categorías de modelo, mostramos cómo obtener de un par de Frobenius *fuerte* a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$, dos pares de cotorsión *compatibles* y *completos*, en la subcategoría $\mathcal{S} := \mathcal{X}^\wedge$ de objetos en $\mathcal{A}$ con *dimensión resolución* finita con respecto a $\mathcal{X}$ (la cual es gruesa). Aplicamos entonces en el Capítulo 3, un resultado conocido como *la correspondencia de Hovey-Gillespie*, para obtener una estructura *exacta* de modelo sobre $\mathcal{X}^\wedge$, a la cual llamamos *la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz*, donde $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^\wedge$ y $\omega^\wedge$ son las clases de objetos cofibrante, fibrante y triviales, respectivamente. Esta estructura de modelo puede ser aplicada a elecciones particulares de $\mathcal{X}$ y ω para reunir algunos resultados conocidos y presentar algunos nuevos. La aplicación mas sobresaliente de este punto será generalizar las estructuras de modelo *abelianas* que existen en álgebra homológica Gorenstein y Ding-Chen. Mas aún, vemos que la categoría de homotopía de esta estructura de modelo, representa en algún sentido, una generalización de la categoría estable de módulos $\mathrm{Stmod}(R)$ de un anillo R. Finalmente en el Capítulo 4, recordamos la noción de *contexto de Auslander-Buchweitz*, y presentamos algunas correspondencias (uno a uno entre ellos) con los pares de Frobenius, pares de cotorsión relativos y estructuras de modelo exactas. Como una aplicación de estas correspondencias, presentaremos en un contexto categórico, un importante teorema de M. Auslander e I. Reiten, el cual establece una correspondencia biyectiva entre los módulos cotilting básicos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ (la categoría de módulos a izquierda finitamente generados sobre Λ una álgebra de Artin) y las subcategorías resolventes, precubrientes $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ tales que $\mathcal{F}^\wedge = \mathrm{mod}(\Lambda)$. Con el fin de que la teoría desarrollada en la primera parte se vea enriquecida, damos en el Capítulo 5 un buen número de ejemplos sobre pares de Frobenius obtenidos en varios ambientes ya conocidos. Proporcionamos algunas aplicaciones importantes para apreciar la utilidad de los pares de Frobenius cuando se intercambian propiedades entre estructuras homológicas y homotópicas que aparecen en álgebra homológica Gorenstein y teoría de representaciones. Revisamos algunos resultados conocidos sobre los cuales la teoría de pares de Frobenius es motivada. En el marco general de categorías abelianas, en la Proposición 5.4 presentamos a las subcategorías Gorenstein en el sentido de S. Sather-Wagstaff, T. Sharif, D. White [72], como parte de un par de Frobenius fuerte. Otra interesante aplicación incluye caracterizaciones de ciertos anillos especiales. En la Proposición 5.13 mostramos que un anillo R es perfecto si, y sólo si, la clase de los R-módulos Ding-proyectivos y planos forman un par de Frobenius a izquierda. Para anillos conmutativos locales R, probamos en el Corolario 5.6 que R es no regular, Iwanaga-Gorenstein y artiniano si, y sólo si, R es casi-Frobenius y con dimensión global infinita. Al final de este capítulo, usamos a los módulos Gorenstein planos y pares de Frobenius para establecer una caracaterización de los anillos GF-cerrados. A saber, probamos en la Proposición **??** que tener un anillo GF-cerrado R es equivalente a decir que las clases de R-módulos Gorenstein planos y planos-perpendicular forman un par de Frobenius a izquierda.

En los Capítulo 6 y 7 desarrollamos el segundo tema de estudio en este trabajo. En el

Capítulo 6 definimos al principal objeto de estudio. Dado un par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ (ver Definición 6.4), tenemos a los *objetos* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos* (denotamos a tal colección por $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$, ver Definición 6.1), así como a los *objetos* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos débiles* (denotado $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$, ver Definición 6.13), damos una buena cantidad de ejemplos de tales pares. Probamos que bajo ciertas condiciones, estas dos clases de objetos se relacionan muy bien, a saber, se dan la igualdades (ver Teorema 6.35)

$$W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},$$

lo cual deja como caso particular a [79, Teorema 2.8] y [13, Proposición 2.16 (2)]. También hacemos ver como los resultados obtenidos en este trabajo resultan más generales que los clásicamente conocidos (con *clásicamente conocidos* nos referimos a [47]).

Habiendo desarrollado la herramienta necesaria para entrar al terreno de las dimensiones homológicas, pasamos al Capítulo 7, donde desarrollamos de manera unificada la teoría de dimensiones homológicas relativas Gorenstein. Establecemos relaciones entre diferentes tipos de dimensiones homológicas relativas, como lo son las dimensiones Gorenstein proyectiva relativa (débil), proyectiva relativa, finitista y dimensión resolución, esto lo hacemos mediante tomar diferentes pares $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, como una aplicación de los resultados obtenidos hasta éste punto, conseguimos volver a probar varios resultados conocidos, pero en mayor generalidad. Por ejemplo; probamos en el Teorema 7.24, que bajo ciertas condiciones sobre el par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, la dimensión $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva finitista de $\mathcal{A}$ y la dimensión proyectiva finitista de $\mathcal{A}$ coinciden, lo cual generaliza [47, Proposición 2.17].

En la Sección 7.1 introducimos la noción de par $\mathcal{W}$-tilting y $\mathcal{W}$-cotilting en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Mostramos que existe una fuerte relación entre los objetos Gorenstein proyectivos débiles $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, obtenidos de un par WGP-admisible $(\omega,\mathcal{Y})$ (ver Definición 7.5), y los pares de cotorsión relativos tratados en el Capítulo 2 de este trabajo. En mayor detalle, dado un par WGP-admisible $(\omega,\mathcal{Y})$, con ω cerrada por sumandos directos, el par $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ se convierte en un par de $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$-cotorsión en la categoría abeliana $\mathcal{A}$ (ver Proposición 7.39). Adicionalmente, mostramos que la igualdad $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^\perp\mathcal{Y}$ es cierta si, y sólo si, el par WGP-admisible $(\omega,\mathcal{Y})$ es un par $\mathcal{W}$-cotilting, para algún $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$ (ver Corolario 7.45). Si la categoría abeliana $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y para el par $\mathcal{W}$-cotilting $(\omega,\mathcal{Y})$ sabemos que ω es cerrada por sumandos directos y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$, tenemos del Teorema 7.52 que $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$. Mas aun, la dimensión global $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva de $\mathcal{A}$ coincide con diferentes tipos de dimensiones proyectivas finitistas relativas y dimensiones por resolución (ver los detalles en el Teorema 7.52 (c) y (e)). Los mismos resultados escritos en términos de objetos $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein proyectivos también resultan ser ciertos como puede verse en esta Sección 7.1.

En la Sección 7.2 introducimos la noción de objetos tilting y cotilting en categorías abelianas, la cual es una extensión de la definición dada por Angeleri-Coelho [5] para la situación de la categoría abeliana de módulos $\mathrm{Mod}(R)$, para un anillo arbitrario R. Esta definición de objeto tilting (cotilting) es usada a través de esta sección para ser comparada con la noción de $\mathcal{W}$-tilting ($\mathcal{W}$-cotilting). Por ejemplo, en el Corolario 7.66 tenemos que la noción de par

$\mathcal{W}$-cotilting es una generalización estricta de un objeto cotilting.
En esta Sección 7.2, somos capaces de aplicar los resultados obtenidos en la Sección 7.1, y así obtener varios resultados para objetos tilting y cotilting. Por mencionar uno; en el Teorema 7.65, probamos que para una categoría AB4* $\mathcal{A}$, con cogeneradores inyectivos y suficientes proyectivos, si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$, tal que $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es cerrado bajo productos, entonces existe algún objeto cotilting $M \in \mathcal{A}$ tal que $\omega = \mathrm{Prod}(M)$, $\mathrm{id}(M) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} = \omega^{\wedge}$ y $W\mathcal{GP}_{\omega} = \mathcal{X} = {}^{\perp}M$. Finalmente, en el Teorema 7.68, consideramos $\mathrm{Mod}(R)$, para un anillo R que es perfecto a izquierda, noetheriano a izquierda y coherente a derecha. Caracterizamos en este caso varias relaciones entre diferentes dimensiones homológicas introducidas en esta tesis.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de aproximación de Auslander-Buchweitz

Iniciamos este capítulo recolectando todo el material base que necesitaremos mas adelante. Introducimos primero notación general. Luego, recordamos algunas nociones de dimensión proyectiva relativa y dimensión de resolución dada por una clase de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Finalmente, recordamos definiciones y propiedades básicas que necesitaremos de la teoría de Auslander-Buchweitz. En lo que sigue, estaremos tomando como referencia principal el artículo [7].

Observamos que M. Auslander y R.-O. Buchweitz, en varios resultados de [7], trabajan con una sub-categoría $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, resolvente y aditivamente cerrada , la cual es también cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$. En una cuidadosa revisión de las pruebas de [7], podemos ver que algunas propiedades asumidas para $\mathcal{X}$ no son usadas. Para dar aplicaciones de la teoría de Auslander-Buchweitz al álgebra homológica Gorenstein, damos aquí una revisión, colocando en cada enunciado las hipótesis mínimas necesarias.

A través de éste trabajo, $\mathcal{A}$ denotara una categoría abeliana. Un ejemplo de tales categorías, considerada frecuentemente en este trabajo es $\mathrm{Mod}(R)$, la categoría de R-módulos, donde R es un anillo asociativo con unidad. Por R-módulos, nos referimos a los R-módulos a izquierda. En algunas ocasiones, consideraremos la categoría $\mathrm{Mod}(R^{op})$ de R-módulos a derecha.

La notación $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ significa que $\mathcal{X}$ es una clase de objetos de $\mathcal{A}$ (la cual puede ser pensada también como una sub-categoría plena de $\mathcal{A}$). La notación $M \in \mathcal{A}$ significa que M es un objeto de $\mathcal{A}$. El término *subcategoría* significara subcategoría plena.

Sean M, N objetos de $\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ subcategorías de $\mathcal{A}$, y $i > 0$ un entero positivo. Introducimos la siguiente notación:

1. **Relaciones de ortogonalidad**: Escribimos $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$, cuando $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. En los casos $\mathcal{X} := \{M\}$ y $\mathcal{Y} := \{N\}$, escribimos $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) = 0$ y $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, Y) = 0$, respectivamente.

2. **Dimensiones proyectivas e inyectivas relativas**: Recordamos de Angeleri-Hügel y Mendoza [6, Sección 1], las nociones de dimensión proyectiva e inyectiva relativa. Denotamos por $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M)$ a la *dimensión $\mathcal{X}$-proyectiva* de M (o la *dimensión proyectiva de M relativa a $\mathcal{X}$*), definida como

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) := \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{X}) = 0 \text{ para todo } i > n\}.$$

En el caso $\mathcal{X} := \mathcal{A}$, obtenemos la usual *dimensión proyectiva de M*, denotada por $\mathrm{pd}(M)$. Para dimensiones relativas de una subcategoría $\mathcal{Y}$, denotamos por $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ a la *dimensión $\mathcal{X}$-proyectiva de $\mathcal{Y}$*:

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) : M \in \mathcal{Y}\}.$$

Las nociones de *dimensión $\mathcal{X}$-inyectiva de M* y *dimensión $\mathcal{X}$-inyectiva de $\mathcal{Y}$* son definidas similarmente, y denotadas por $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$, $\mathrm{id}(M)$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, respectivamente. En el caso $\mathcal{X} := \mathcal{A}$, solo escribimos $\mathrm{pd}(\mathcal{Y})$ y $\mathrm{id}(\mathcal{Y})$ para la *dimensión proyectiva de $\mathcal{Y}$ y la dimensión inyectiva de $\mathcal{Y}$*, respectivamente. Puede verse que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, la cual es una propiedad muy importante para intercambiar dimensiones relativas, y que será muy usada conforme avancemos en el desarrollo del trabajo.

La noción de *objeto proyectivo* fue introducida en 1956 por Henri Cartan y Samuel Eilenberg en su importante libro *Homological Algebra*, en el ámbito de módulos sobre anillos. Posteriormente, el desarrollo de la teoría de categorías llevó a definirlos mediante las propiedades análogas que se conservan en tal generalidad.

3. **Dimensiones resolución y coresolución**. Recordamos también de [6] las nociones de dimensión resolución y coresolución. Denotamos la *dimensión de $\mathcal{X}$-resolución de M* por $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$, la cual es el menor entero no negativo n, para el cual existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. La sucesión ξ es una *$\mathcal{X}$-resolución finita de M*. Si tal n no existe, definimos $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) := \infty$. La *dimensión $\mathcal{X}$-resolución de una subcategoría $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$* es definida como

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Dualmente, tenemos la *dimensión de $\mathcal{X}$-coresolución de M* y de $\mathcal{Y}$, denotadas por $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, respectivamente.

Denotamos por $\mathcal{X}^\wedge$ a la subcategoría plena de objetos en $\mathcal{A}$ que tienen $\mathcal{X}$-resolución finita. La subcategoría $\mathcal{X}^\vee$ de objetos que tiene $\mathcal{X}$-corresolución finita se define de manera dual.

4. **Clases ortogonales**. Denotamos por

$$\mathcal{X}^{\perp_i} := \{M \in \mathcal{A} : \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-, M)|_{\mathcal{X}} = 0\} \ \text{ y } \ \mathcal{X}^{\perp} := \bigcap_{i>0} \mathcal{X}^{\perp_i},$$

a las subcategorías ortogonales parcial y total a derecha de $\mathcal{X}$, respectivamente. Dualmente, tenemos las subcategorías ortogonales parcial y total a izquierda de $\mathcal{X}$, denotadas por ${}^{\perp_i}\mathcal{X}$ y ${}^{\perp}\mathcal{X}$, respectivamente.

5. **Aproximaciones a derecha e izquierda**. Para un tratamiento más profundo de precubiertas y preenvolventes se puede consultar el trabajo de Enochs y Jenda [25, Definiciones 5.1.1 y 7.1.6]. Aunque estos conceptos son presentados en [25] para la categoría $\operatorname{Mod}(R)$, estos también pueden trasladarse al contexto de categorías abelianas. Recordemos que un morfismo $f : X \to M$ es llamado $\mathcal{X}$-*precubierta* de M si:

   (a) $X \in \mathcal{X}$, y

   (b) Para todo $X' \in \mathcal{X}$, el morfismo inducido

   $$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', f)\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', M),$$

   es sobreyectivo, o equivalentemente: para todo $f'\colon X' \to M$ con $X' \in \mathcal{X}$, existe un morfismo $h\colon X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & M \\ X' \arrow[u, dotted, "\exists\, h"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

   Mas aún, en caso de que en el diagrama anterior $X' = X$ y $f' = f$, éste solo pueda ser completado por un automorfismo de X, la $\mathcal{X}$-precubierta f es llamada $\mathcal{X}$-*cubierta*. Diremos que una $\mathcal{X}$-precubierta $f : X \to M$ es *especial* si $\operatorname{Coker}(f) = 0$ y $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{X}^{\perp_1}$. La clase $\mathcal{X}$ se dice *precubriente* si todo objeto de $\mathcal{A}$ tiene una $\mathcal{X}$-precubierta. Similarmente, podemos definir clase *cubriente* y clase *precubriente especial* en $\mathcal{A}$, esto es, $\mathcal{X}$ es cubriente (respectivamente, precubriente especial) si todo objeto en $\mathcal{A}$ tiene una $\mathcal{X}$-cubierta (respectivamente, una $\mathcal{X}$-precubierta especial). Dualmente, tenemos las nociones de $\mathcal{X}$-*preenvolvente*, $\mathcal{X}$-*envolvente* y $\mathcal{X}$-*preenvolvente especial* en $\mathcal{A}$. Así como las nociones de clase *envolvente*, *preenvolvente* y *preenvolvente especial*.

6. Frecuentemente usaremos varias propiedades de cerradura para clases de objetos en una categoría abeliana o exacta. Dada una clase $\mathcal{X}$ de objetos de $\mathcal{A}$, podemos pedir que: (1) $\mathcal{X}$ sea cerrada bajo sumandos directos, (2) $\mathcal{X}$ sea cerrada por extensiones, (3) $\mathcal{X}$

sea cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, o que (4) $\mathcal{X}$ sea cerrada por conúcleos de monomorfismos entre sus objetos. En lo que sigue, consideraremos una nueva terminología para cierta subcategoría $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, la cual será usada en varias descripciones.

Denotamos por $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{Inj}(\mathcal{A})$ a las clases de objetos proyectivos e inyectivos de $\mathcal{A}$, respectivamente.

Definición 1.1. *(Subcategorías de interés). Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es una* ***subcategoría prerresolvente*** *de $\mathcal{A}$ si es cerrada por extensiones y núcleos de epimorfismos entre sus objetos. Si además $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$, decimos que $\mathcal{X}$ es una* ***subcategoría resolvente*** *de $\mathcal{A}$. Si las propiedades duales se cumplen, tenemos los conceptos de* ***subcategoría precorresolvente*** *y* ***subcategoría corresolvente*** *(esto es, prerresolvente+$\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$).*

Decimos que una subcategoría prerresolvente $\mathcal{X}$ de $\mathcal{A}$ es ***gruesa a izquierda*** *si es también cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$. Dualmente, tenemos el concepto de* ***subcategoría gruesa a derecha*** *de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda y a derecha, decimos que $\mathcal{X}$ es una* ***subcategoría gruesa*** *de $\mathcal{A}$.*

Decimos que una subcategoría gruesa a izquierda $\mathcal{X}$ de $\mathcal{A}$ es ***saturada a izquierda*** *si también $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$. Dualmente, tenemos el concepto de* ***subcategoría saturada a derecha*** *de $\mathcal{A}$. Finalmente, decimos que $\mathcal{X}$ es* ***saturada*** *si $\mathcal{X}$ es saturada a izquierda y a derecha.*

Si $\mathcal{X}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$, denotaremos por $\mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{X})$ a la menor subcategoría gruesa a izquierda de $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{X}$. Mientras que la notación $\mathrm{Thick}^{+}(\mathcal{X})$ se refiere a la menor subcategoría gruesa a derecha de $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{X}$. Finalmente $\mathrm{Thick}(\mathcal{X})$ será la menor subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{X}$.

Observación 1.2. (a) *Los conceptos anteriores presentados tienen sus análogos en el contexto de categorías exactas, y como tales, también serán usados en capítulos siguientes. Para un acercamiento de estas nociones en categorías aditivas, recomendamos se consulte el trabajo de A. Beligiannis [16]. Con respecto a la dimensión $\mathcal{X}$-(co)resolución, A. Beligiannis usa una noción mas general de $\mathcal{X}$-(co)resolución [16, Sección 2], pero con la restricción que tal resolución debe ser covariantemente (respectivamente contravariantemente) $\mathcal{X}$-exacta. Para nuestros propósitos, será suficiente considerar $\mathcal{X}$-(co)resoluciones como en Angeleri-Hügel y Mendoza [6, Sección 1]. Las (co)-resoluciones, como se consideran en este trabajo, coinciden con las de A. Beligiannis en el caso abeliano o exacto si es que la subcategoría $\mathcal{X}$ es pre-cubriente (respectivamente, si $\mathcal{X}$ es pre-envolvente). Esta coincidencia ocurre, por ejemplo, si $\mathcal{X}$ es parte de un par de Frobenius a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$, donde $\mathcal{X}$ es pre-cubriente en $\mathcal{X}^{\wedge}$ (ver Definición 1.5).*

(b) *El presente trabajo considera subcategorías ortogonales total y parcial, ${}^{\perp_i}\mathcal{X}$ y ${}^{\perp}\mathcal{X}$ (o bien $\mathcal{X}^{\perp_i}$ y $\mathcal{X}^{\perp}$), separadamente, en especial para el caso $i = 1$. Otros tratados sobre álgebra homológica relativa solo consideran subcategorías ortogonales totales (ver [16], para esto).*

1.1. Resultados fundamentales en teoría de Auslander-Buchweitz

Teniendo en mente la terminología y notación que hemos presentado hasta ahora, estamos listos para recordar las bases necesarias de la teoría AB.

Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Se dice que ω es $\mathcal{X}$-*inyectivo* si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Decimos que ω es un **casi-cogenerador relativo** de $\mathcal{X}$, si para todo $X \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta $0 \to X \to W \to X' \to 0$, con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Si además, la inclusión $\omega \subseteq \mathcal{X}$ se cumple, la clase ω es llamada **cogenerador relativo** de $\mathcal{X}$. Dualmente, tenemos que ω es $\mathcal{X}$-proyectivo y **(casi)-generador relativo** en $\mathcal{X}$.

Ejemplo 1.3. *La siguiente noción de módulo Gorenstein proyectivo se debe a H. Holm (ver [47]), aunque sus orígenes se remontan a los trabajos de Auslander y Bridger [3], así como a Enochs y Jenda [24]. En su trabajo, H. Holm desarrolla un álgebra homológica relativa a esta clase de módulos Gorenstein proyectivos y hace uso de ella para dar varias propiedades y relaciones de esta clase de módulos y su interconexión con otras clases de módulos, tales como la clase de módulos Gorenstein planos. Recordamos que un R-módulo M se llama Gorenstein proyectivo si existe un complejo acíclico de módulos proyectivos*

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots ,$$

con $M = \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$ y tal que $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, P)$ es un complejo acíclico de grupos abelianos, para todo $P \in \mathrm{Proj}(R)$. Denotamos por $\mathrm{GProj}(R)$ a la clase de los R-módulos Gorenstein proyectivos. Los módulos ***Gorenstein inyectivos*** *se definen dualmente, y la clase de tales módulos es denotada por $\mathrm{GInj}(R)$.*

Observe que todo núcleo de $\boldsymbol{P}$ es un módulo Gorenstein proyectivo. Se sigue de este hecho que $\mathrm{Proj}(R)$ es un cogenerador y generador relativo en $\mathrm{GProj}(R)$. Más aún la exactitud del complejo $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, P)$, para todo $P \in \mathrm{Proj}(R)$, implica que $\mathrm{id}_{\mathrm{GProj}(R)}(\mathrm{Proj}(R)) = 0$, esto es: la clase $\mathrm{Proj}(R)$ es un cogenerador relativo $\mathrm{GProj}(R)$-inyectivo en $\mathrm{GProj}(R)$. Por otro lado, es claro que $\mathrm{Proj}(R)$ es $\mathrm{GProj}(R)$-proyectivo.

Dualmente, $\mathrm{Inj}(R)$ es un generador relativo $\mathrm{GInj}(R)$-proyectivo y un cogenerador relativo $\mathrm{GInj}(R)$-inyectivo en $\mathrm{GInj}(R)$.

Observación 1.4.

- *Los cogeneradores relativos $\mathcal{X}$-inyectivos son también conocidos como cogeneradores inyectivos o Ext-cogeneradores en parte de la literatura. Para evitar confusiones con la dimensión inyectiva absoluta, preferimos usar el adjetivo $\mathcal{X}$-inyectivo en su lugar.*

Las nociones de generadores y cogeneradores relativos proveen una herramienta para definir categorías de Frobenius en un sentido relativo. Haremos esto como sigue.

Definición 1.5. *Sean $\mathcal{X}, \omega$ un par de clases de objetos en $\mathcal{A}$. Decimos que $(\mathcal{X}, \omega)$ es un* ***par de Frobenius a izquierda*** *en $\mathcal{A}$ si las siguientes tres condiciones se satisfacen:*

1. *$\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda, esto es,* $\mathcal{X} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{X})$.

2. *ω es cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$.*

3. *ω es un cogenerador relativo $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$.*

*Si adicionalmente, ω es también un generador relativo $\mathcal{X}$-proyectivo en $\mathcal{X}$, entonces decimos que $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius **fuerte** a izquierda en $\mathcal{A}$.*

*Nos referimos al concepto dual como **par de Frobenius (fuerte) a derecha**, para el cual usamos la notación $(\nu, \mathcal{Y})$, donde $\nu \subseteq \mathcal{Y}$.*

Observación 1.6. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{X}$ es una categoría de Frobenius en el sentido usual; es decir, ésta es una categoría exacta con suficientes proyectivos e inyectivos, donde las clases de objetos proyectivos e inyectivos en $\mathcal{X}$ coinciden. En este caso:*

- *La estructura exacta sobre $\mathcal{X}$ es heredada de $\mathcal{A}$, pues $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones. Específicamente, si $\tau_{\mathcal{X}}$ es la clase de sucesiones exactas cortas (admisibles) $0 \to A \to B \to C \to 0$, con $A, B, C \in \mathcal{X}$, entonces $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}})$ es una categoría exacta.*

- *Los objetos proyectivos = inyectivos están dados por ω.*

Ejemplo 1.7. *En [47, Teorema 2.5], se prueba que* $\mathrm{GProj}(R)$ *es una clase saturada a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$*; y de este modo, es gruesa a izquierda. Por lo realizado en el Ejemplo 1.3, obtenemos que* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es un par de Fobenius fuerte a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Dualmente* $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}(R))$ *es un par de Frobenius fuerte a derecha en* $\mathrm{Mod}(R)$*.*

La prueba del siguiente lema, que relaciona la dimensión inyectiva y la dimensión coresolución, puede ser hallada en el trabajo de Mendoza y Sáenz [59, Lema 2.13].

Lema 1.8. *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \ \text{ e } \ \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}^{\wedge}) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}).$$

Para el siguiente resultado, el inciso (a) es consecuencia del lema anterior, mientras que la parte (b) se encuentra en el trabajo de Auslander y Buchweitz [7, Lema 2.1.1].

Proposición 1.9. *Sean $\mathcal{X}$ y ω un par de clases de objetos en $\mathcal{A}$ tales que ω es $\mathcal{X}$-inyectivo. Entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *$\omega^{\wedge}$ es $\mathcal{X}$-inyectivo.*

(b) *Si ω es cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$ y también un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\omega = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) = 0\} = \mathcal{X} \cap \omega^{\wedge}.$$

Estaremos usando las siguientes dimensiones en varios lugares mas adelante. Para un anillo arbitrario R

$$\operatorname{Proj}^{<\infty}(R) := \{M \in \operatorname{Mod}(R) : \operatorname{pd}(M) < \infty\},$$
$$\operatorname{Inj}^{<\infty}(R) := \{M \in \operatorname{Mod}(R) : \operatorname{id}(M) < \infty\}.$$

Ejemplo 1.10. *Por el Ejemplo 1.7, el par* $(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R))$ *satisface las hipótesis de 1.9. De modo que la parte* (a) *implica que* $\operatorname{id}_{\operatorname{GProj}(R)}(\operatorname{Proj}(R)^\wedge) = 0$. *Observemos también que la clase de módulos con dimensión proyectiva finita es de acuerdo a nuestra notación* $\operatorname{Proj}^{<\infty}(R) = \operatorname{Proj}(R)^\wedge$. *Se sigue que si* M *es un módulo Gorenstein proyectivo, entonces* $\operatorname{Ext}^i_R(M, W) = 0$ *para todo* W *de dimensión proyectiva finita y para todo* $i > 0$. *Esta propiedad también es establecida en [47, Proposición 2.3], y su dual es también valido para módulos Gorenstein inyectivos. Por otro lado la parte* (b) *implica que*

$$\operatorname{Proj}(R) = \operatorname{GProj}(R) \cap \operatorname{Proj}^{<\infty}(R);$$

esto es, la dimensión proyectiva de un módulo Gorenstein proyectivo es o cero o infinito. Así tenemos otra prueba de [25, Proposición 10.2.3] y de su correspondiente dual para módulos Gorenstein inyectivos:

$$\operatorname{Inj}(R) = \operatorname{GInj}(R) \cap \operatorname{Inj}^{<\infty}(R).$$

La prueba del siguiente resultado se encuentra en el trabajo de Auslander y Buchweitz [7, Lema 4.3].

Lema 1.11. *Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{A}$ *tales que* ω *es* $\mathcal{X}$*-inyectivo y un cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$. *Si* ω *es cerrado bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$, *entonces*

$$\mathcal{X} \cap \omega^\vee = \{X \in \mathcal{X} | \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}.$$

Además, tenemos que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(M) = \operatorname{coresdim}_\omega(M)$ *para todo* $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\vee$.

En el siguiente resultado, la expresión $\operatorname{resdim}_\omega(K) = -1$ significa que $K = 0$. Una prueba puede encontrarse en [7, Teorema 1.1]. Por otro lado H. Holm, da una prueba diferente en [47, Teorema 2.10] en el caso particular de que $\mathcal{X}$ y ω son las clases de R-módulos Gorenstein proyectivos y proyectivos, respectivamente.

Teorema 1.12. *[7, Teorema 1.1] Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{A}$, *tal que* $\mathcal{X}$ *es cerrado por isomorfismos en* $\mathcal{A}$, *extensiones,* $0 \in \mathcal{X}$ *y* ω *es un casicogenerador relativo de* $\mathcal{X}$. *Entonces, los siguientes enunciados son ciertos, para todo* $C \in \mathcal{A}$ *con* $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n < \infty$.

(a) *Existen sucesiones exactas cortas en* $\mathcal{A}$:

$$\eta_1 : 0 \to K \to X \xrightarrow{\varphi} C \to 0,$$

con $\operatorname{resdim}_\omega(K) \leq n-1$ *y* $X \in \mathcal{X}$ *(en el caso* $\omega \subseteq \mathcal{X}$, *se tiene que* $\operatorname{resdim}_\omega(K) = n-1$*), y*

$$\eta_2 : 0 \to C \xrightarrow{\varphi'} H \to X' \to 0,$$

con $\operatorname{resdim}_\omega(H) \leq n$ *y* $X' \in \mathcal{X}$.

(b) *Si ω es $\mathcal{X}$-inyectivo, entonces*

(i) *El morfismo $\varphi : X \to C$ en η_1 es una $\mathcal{X}$-pre-cubierta, con $K \in \mathcal{X}^{\perp}$.*

(ii) *El morfismo $\varphi' : C \to H$ en η_2 es una $\omega^{\wedge}$-pre-envolvente, con $X' \in {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$.*

Demostración. (a) Sea $C \in \mathcal{A}$ con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$. La prueba será por inducción sobre $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$. Si $n = 0$, se tiene que $C \in \mathcal{X}$, pues $\mathcal{X}$ es cerrada por isomorfismos. Entonces tenemos la primera sucesión exacta $0 \to 0 \to C \to C \to 0$, pues $0 \in \omega^{\wedge}$. La segunda sucesión exacta $0 \to C \to W \to X' \to 0$ existe ya que ω es un casi-cogenerador de $\mathcal{X}$.
Sea $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) > 0$. Luego, existe una sucesión exacta en $\mathcal{A}$

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \to C \to 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1$, donde $K := \mathrm{Im}(d_0)$. Como $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1$, existe una sucesión exacta $0 \to K \to W^K \to X^K \to 0$, con $\mathrm{resdim}_{\omega}(W^K) \leq n - 1 = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K)$ y $X^K \in \mathcal{X}$. Construimos el siguiente diagrama conmutativo y exacto de la siguiente manera; primero hacemos push-out con los morfismos $K \to X_0$ y $K \to W^K$, luego como el cuadro de push-out refleja monomorfismos y epimorfismos completamos a sucesiones exactas cortas y usamos el Lema de la Serpiente para obtener los isomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^K \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
& X^K \arrow[r, equal] \arrow[d] & X^K \arrow[d] & & \\
& 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $X_0, X^K \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, se tiene que $U \in \mathcal{X}$. Podemos tomar $0 \to W^K \to U \to C \to 0$ como la sucesión η_1 deseada.
Ahora, como ω es un casi-cogenerador de $\mathcal{X}$ y $U \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta $0 \to U \to W \to X^C \to 0$, con $W \in \omega$ y $X^C \in \mathcal{X}$. Para construir la sucesión η_2, consideremos el siguiente

diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & W^K \arrow[r, equal] \arrow[d] & W^K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

En la sucesión $0 \to W^K \to W \to Y^C \to 0$ tenemos que $\mathrm{resdim}_\omega(W^K) \le n-1$ y como $W \in \omega$, por definición se tiene que $\mathrm{resdim}_\omega(Y^C) \le n$. Por lo tanto la sucesión η_2 es

$$0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0.$$

Consideremos el caso en que $\omega \subseteq \mathcal{X}$. Deseamos probar que para la sucesión exacta

$$\eta_1 : 0 \to W^K \to U \to C \to 0,$$

encontrada arriba, se cumple que $\mathrm{resdim}_\omega(W^K) = n-1$.
Supongamos por reducción a lo absurdo que $\mathrm{resdim}_\omega(W^K) < n-1$. Como $\omega \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(W^K) \le \mathrm{resdim}_\omega(W^K) < n-1$. Combinando este hecho con la sucesión η_1 obtenemos que $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) < n$, pues $U \in \mathcal{X}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto concluimos que $\mathrm{resdim}_\omega(W^K) = n-1$.

(b) Supongamos que ω es $\mathcal{X}$-inyectivo, esto es $\mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega) = 0$. Por el Lema 1.8, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\mathcal{A}(\mathcal{X}, \omega^\wedge) = 0$, para todo $i > 0$.

(i) Sea $f : X'' \to C$ en $\mathcal{A}$ con $X'' \in \mathcal{X}$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"'] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado de la derecha es un pull-back. Como $\mathrm{Ext}^1_\mathcal{A}(\mathcal{X}, \omega^\wedge) = 0$, la sucesión superior se escinde. Luego f se factoriza a través de φ, lo cual implica que φ es una $\mathcal{X}$-precubierta de C y además $K \in \mathcal{X}^\perp$.

(ii) Sea $g : C \to Y$ con $Y \in \omega^\wedge$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "g"] & H \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E' \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado de la izquierda es un push-out. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \omega^\wedge) = 0$ la sucesión inferior se escinde. Luego g se factoriza a través de φ', lo cual implica que φ' es una $\omega^\wedge$-preenvolvente de C y además $X' \in {}^\perp(\omega^\wedge)$.

□

Ejemplo 1.13. *Denotamos por* $\mathrm{Gpd}(M)$ *y* $\mathrm{Gid}(M)$ *a las dimensiones Gorenstein proyectiva y Gorenstein inyectiva de un R-módulo izquierdo M (ver [25, Capítulo 11]), las cuales son definidas como*

$$\mathrm{Gpd}(M) := \mathrm{resdim}_{\mathrm{GProj}(R)}(M) \ \ y \ \ \mathrm{Gid}(M) := \mathrm{coresdim}_{\mathrm{GInj}(R)}(M).$$

Si R es un anillo Gorenstein, se sabe que $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ *es un par de cotorsión (ver la sección correspondiente a pares de cotorsión en este mismo trabajo). Mas aun, se sabe que dicho par es completo, y un modo de verlo es dando un conjunto generador para éste [51, Teorema 8.3]. Lo anterior significa que, para todo módulo M sobre un anillo Gorenstein R, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to W \to P \to M \to 0$$

donde P es Gorenstein proyectivo y W tiene dimensión proyectiva finita. Dicha sucesión es construida directamente (esto es, sin usar el hecho de que los pares de cotorsión que tienen un conjunto cogenerador, son pares completos) por H. Holm [47, Teorema 2.10], para todo módulo M con dimensión Gorenstein proyectiva finita y sobre un anillo asociativo arbitrario R. Mas aun, H. Holm también muestra que si $\mathrm{Gpd}(M) = n$, *entonces* $\mathrm{pd}(W) = n - 1$. *Por otro lado, esto es precisamente lo que el Teorema 1.12 implica al declarar* $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R)$ *y* $\omega := \mathrm{Proj}(R)$.

Es importante señalar que si R es un anillo Gorenstein, entonces la clase $\mathrm{GProj}(R)^\wedge$ *coincide con la categoría* $\mathrm{Mod}(R)$; *y de este modo, las dos sucesiones exactas cortas descritas en el Teorema 1.12 implican que* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ *es un par de cotorsión completo.*

Corolario 1.14. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de objetos en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones y sumandos directos en $\mathcal{A}$, y ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$. Si* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq 1$ *y $C \in {}^{\perp_1}\omega$, entonces $C \in \mathcal{X}$.*

Demostración. Sea $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq 1$. Luego, por el Teorema 1.12, existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to K \to X \to C \to 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $K \in \omega$. Dado que $C \in {}^{\perp_1}\omega$, se sigue que la sucesión exacta ξ se escinde y así $C \in \mathcal{X}$. $\square$

Ejemplo 1.15. *Definamos* $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R)$ *y* $\omega := \mathrm{Proj}(R)$. *Usando el Corolario 1.14, tenemos que, para una sucesión exacta corta*

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

con $A, B \in \mathrm{GProj}(R)$ *y tal que* $\mathrm{Ext}^1_R(C, P) = 0$, *para todo* $P \in \mathrm{Proj}(R)$, *se cumple que* $C \in \mathrm{GProj}(R)$. *La anterior propiedad fue probada inicialmente en [47, Corolario 2.11].*

Corolario 1.16. *Sean* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ *cerrada bajo extensiones y núcleos de epimorfismos entre sus objetos, y* ω *un cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$, *cerrado bajo isomorfismos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes para todo* $C \in \mathcal{A}$ *y* $n \geq 0$.

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq n$.

(b) Existe una sucesión exacta $0 \to K \to X \xrightarrow{\varphi} C \to 0$ con $\mathrm{resdim}_{\omega}(K) \leq n - 1$ y $X \in \mathcal{X}$.

(c) Existe una sucesión exacta $0 \to C \xrightarrow{\varphi'} H \to X' \to 0$, con $\mathrm{resdim}_{\omega}(H) \leq n$ y $X' \in \mathcal{X}$.

Demostración. Se sigue del Teorema 1.12, ver [7, Proposición 1.5]. $\square$

Proposición 1.17. *Sean* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *clases en* $\mathcal{A}$. *Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$, para todo $L \in \mathcal{A}$.

(b) *Supongamos que* $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$, *o bien que* $\mathcal{Y}$ *es una subclase de* $\mathcal{X}$ *la cual es cerrada bajo sumandos directos. Si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$, *entonces*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L), \text{ para todo } L \in \mathcal{Y}^{\vee}.$$

(c) *Sea* $\mathcal{A}$ *con suficientes inyectivos e* $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$. *Entonces, para todo* $M \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M).$$

En particular, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{X})$.

Demostración. La prueba dada en [59, Teorema 2.1 y Lema 3.3] funciona también para categorías abelianas. $\square$

Los siguientes dos resultados serán muy útiles a lo largo de éste trabajo.

Lema 1.18. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces* $\mathrm{resdim}_{^\perp\mathcal{B}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)$ *para todo $M \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A}$. Por el dual de la Proposición 1.17 (c), tenemos que

$$\mathrm{resdim}_{^\perp\mathcal{B}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M).$$

Por otro lado, como $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}({}^\perp\mathcal{B}) = 0$, se sigue del dual de la Proposición 1.17 (a), que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) \leq \mathrm{resdim}_{^\perp\mathcal{B}}(M)$. Así obtenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{resdim}_{^\perp\mathcal{B}}(M)$. □

Observación 1.19. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Por el dual de la Proposición 1.17 (b),* $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathrm{Proj}(A)}(M)$ *para todo $M \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$. Mas aun, en el caso de que $\mathcal{A}$ tenga suficientes proyectivos, se sigue del Lema 1.18 que* $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})}(M)$*, para todo $M \in \mathcal{A}$.*

El siguiente resultado puede hallarse en [7, Proposición 2.1], el cual establece una conexión entre resoluciones y dimensiones proyectivas relativas.

Teorema 1.20. *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ cerrado bajo extensiones en $\mathcal{A}$, y ω un cogenerador relativo de $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$-inyectivo el cual es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(C) = \mathrm{pd}_{\omega}(C) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C),\ \forall\, C \in \mathcal{X}^\wedge.$$

Algunas dimensiones homológicas son definidas como dimensiones proyectivas o inyectivas relativas a una cierta clase de módulos (sobre un anillo R), tales como la *dimensión FP-inyectiva* [1]. Las hay otras, tales como la dimensión Gorenstein proyectiva, las cuales son definidas como una dimensión de resolución relativa a una clase de módulos. En el caso de la dimensión FP-inyectiva, esta no puede ser expresada como una dimensión por coresolución relativa a una clase, a menos que se asuma que R es un anillo coherente. No es esta la situación con la dimensión Gorenstein proyectiva, como lo explicamos abajo.

Ejemplo 1.21. *Por el Teorema 1.20, tenemos que para todo R-módulo M con dimensión Gorenstein proyectiva finita*

$$\mathrm{Gpd}(M) := \mathrm{resdim}_{\mathrm{GProj}(R)}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(R)}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}^{<\infty}(R)}(M).$$

En otras palabras, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathrm{Gpd}(M) \leq n$.

(2) $\mathrm{Ext}^i_R(M, L) = 0$*, para todo $i > n$ y todo L con dimensión proyectiva finita.*

(3) $\mathrm{Ext}^i_R(M, P) = 0$*, para todo $i > n$ y todo módulo proyectivo P.*

[1] FP hace alusión a *finitamente presentado.*

Lo anterior fue probado por H. Holm en [47, Teorema 2.20], y por vez primera por E. E. Enochs y O. M. G. Jenda en [25, Proposición 11.5.7] para el caso de que R es un anillo Gorenstein.

Hasta ahora, el lector habrá notado que para cualquier par de Frobenius $(\mathcal{X}, \omega)$ en $\mathcal{A}$, las subcategorías $\mathcal{X}^\wedge$ y $\omega^\wedge$ tienen propiedades especiales relacionadas con la existencia de aproximaciones, y de esto, el cálculo de dimensiones proyectivas e inyectivas relativas. La subcategoría formada se convertirá en una subcategoría exacta de $\mathcal{A}$, en la cual tendremos pares de cotorsión y estructuras de modelo que involucran a la subcategoría $\mathcal{X}^\wedge$ junto con $\omega^\wedge$, de las cuales uno puede deducir, entre otras cosas, que $\mathcal{X}^\wedge$ es de hecho exacta. De modo que la importancia de $\mathcal{X}^\wedge$ demanda conocer otra descripción dada en el siguiente teorema, el cual fue originalmente probado en [7, Proposición 3.4 y 3.5].

En lo que sigue, dada una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ de objetos en $\mathcal{A}$, denotamos por $\mathrm{add}(\mathcal{X})$ a **la subcategoría de todos los objetos isomorfos a sumandos directos de sumas directas finitas de objetos en** $\mathcal{X}$.

Teorema 1.22. *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ una clase prerresolvente y ω un cogenerador relativo $\mathcal{X}$-inyectivo de $\mathcal{X}$. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

(a) *$\mathcal{X}^\wedge$ es la clase prerresolvente y precorresolvente mas pequeña en $\mathcal{A}$ que contiene a la clase $\mathcal{X}$.*

(b) *Si ω y $\mathcal{X}$ son cerradas bajo sumandos directos, entonces $\mathrm{add}(\mathcal{X}^\wedge) = \mathcal{X}^\wedge$.*

En particular, si $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda, entonces $\mathcal{X}^\wedge = \mathrm{Thick}^-(\mathcal{X})$.

Observación 1.23. *De lo anterior, podemos ver que si $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{X}^\wedge$ es una categoría exacta con clase de sucesiones exactas cortas (admisibles) dada por $\tau_{\mathcal{X}^\wedge}$. (ver Observación 1.6, para esto).*

Proposición 1.24. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, para todo $C \in \mathcal{X}^\wedge$ y $n \geq 0$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq n$.

(b) *Si $0 \to K_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to C \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{A}$, con $X_i \in \mathcal{X}$, entonces $K_n \in \mathcal{X}$.*

Los resultados anteriores, probados en [7, Proposición 3.3], también tienen su similar en álgebra homológica Gorenstein. En el caso particular de que $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R)$ y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$ fue primeramente probado en [47, Teorema 2.10] y extiende la equivalencia mencionada en el Ejemplo 1.21.

Los pares de cotorsión que construiremos mas adelante, y las estructuras de modelo asociadas a ellos sobre $\mathcal{X}^\wedge$, involucran a las clases ω y $\omega^\wedge$. De modo que en adelante, nos dedicamos a presentar propiedades de estas clases. Empezamos con la siguiente descripción de $\omega^\wedge$, cuya prueba puede hallarse en [7, Proposición 3.6].

Proposición 1.25. *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ cerrada bajo extensiones, y sea ω cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$-inyectivo y un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$. Entonces*

$$\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge.$$

Dado un par de Frobenius $(\mathcal{X}, \omega)$ en $\mathcal{A}$, de la proposición anterior podemos notar que la subcategoría $\omega^\wedge$ es cerrada bajo sumandos directos, extensiones y conúcleos de monomorfismos entre sus objetos. Aun así, $\omega^\wedge$ no es necesariamente cerrada bajo núcleos de epimorfismos entre sus objetos. El siguiente resultado es una forma de medir que tan lejos está $\omega^\wedge$ de ser gruesa.

Proposición 1.26. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{X} = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$$

Demostración. Sabemos por hipótesis que $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\omega$, por lo que de la Proposición 1.9 (a), obtenemos que $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\omega^\wedge)$. Por lo que para probar la segunda igualdad basta con probar que $\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge) \subseteq \mathcal{X}$. En efecto, sea $C \in \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$, entonces del Teorema 1.12, existe una sucesión exacta

$$\epsilon : 0 \to C \to Y \to X \to 0,$$

donde $X \in \mathcal{X} \subseteq {}^\perp(\omega^\wedge)$ y $Y \in \omega^\wedge$. Como $C \in {}^\perp(\omega^\wedge)$, tenemos que $Y \in {}^\perp(\omega^\wedge)$, y por lo tanto $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(Y, \omega^\wedge) = 0$, para todo $i \geq 1$. Ahora, usando el Teorema 1.20, tenemos que

$$0 = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(Y) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(Y)$$

y así $Y \in \mathcal{X}$. Más aún, en la sucesión exacta ϵ tenemos que $Y, X \in \mathcal{X}$ y dado que $\mathcal{X}$ es prerresolvente, obtenemos $C \in \mathcal{X}$.
Finalmente la inclusión $\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\omega \subseteq \mathcal{X}$ se obtiene como en la prueba anterior. □

Enunciamos el siguiente resultado, el cual será útil mas adelante, la prueba se encuentra en [7, Proposición 3.8].

Proposición 1.27. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, $\omega^\wedge$ es una clase gruesa a derecha en $\mathcal{A}$.*

Para dar una descripción de la categoría $\mathrm{Thick}(\omega)$, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.28. *Para cualquier clase $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ de objetos en $\mathcal{A}$,*

$$\mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) := \{C \in \mathcal{A} \mid \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(C) < \infty\}.$$

Observe que $\mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A})$ es una subcategoría gruesa de la categoría abeliana $\mathcal{A}$.
Para toda sub-categoría plena $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$, definimos $\mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{Y}$.

Teorema 1.29. *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ una clase pre-resolvente de objetos en $\mathcal{A}$, y $\omega \subseteq \mathcal{X}$ un cogenerador relativo $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

(a) $(\omega^{\wedge})^{\vee} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{A})$.

(b) *Si $\mathcal{X}$ y ω son cerrados bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$ (y de este modo $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius en $\mathcal{A}$), entonces*
$$(\omega^{\wedge})^{\vee} = \mathrm{Thick}(\omega).$$

Demostración. El inciso (a) se obtiene directamente de [7, Proposición 4.2].
Probaremos ahora la parte (b). Sean $\mathcal{X}$ y ω cerradas bajo sumando directos en $\mathcal{A}$. Entonces, por el Teorema 1.22, sabemos que $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathrm{Thick}(\mathcal{X})$, y así $(\omega^{\wedge})^{\vee}$ es una subcategoría gruesa en $\mathcal{A}$ (ver (a)). Supongamos que $\mathcal{B}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$ que contiene a ω. Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos entre sus objetos, se sigue que $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{B}$, y usando ahora que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos entre sus objetos, obtenemos que $(\omega^{\wedge})^{\vee} \subseteq \mathcal{B}$. □

En el siguiente teorema obtenemos otra igualdad que envuelve a la clase $\mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{X}^{\wedge})$. Éste es un resultado de M. Auslander, R.-O. Buchweitz, e I. Reiten [7, 8]. El enunciado que sigue es una simplificación de un resultado dado en [44, Teorema 1.12.10], adaptado a nuestra terminología y notación.

Teorema 1.30. *[44, Teorema 1.12.10] Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, $\mathcal{X}$ una clase gruesa a izquierda e $\mathcal{Y}$ una clase gruesa a derecha contenida en $\mathcal{X}^{\wedge}$, tales que $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$. Entonces*

$$\mathcal{Y} = \omega^{\wedge} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{X}^{\wedge}) \cap \omega^{\perp}.$$

Demostración. Por la Proposición 1.25 tenemos $\omega^{\wedge} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp}$. Mostraremos ahora que $\omega^{\wedge} = \mathcal{Y}$. En efecto, como $\omega \subseteq \mathcal{Y}$, tenemos que $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{Y}^{\wedge}$, y como $\mathcal{Y}$ es gruesa a derecha obtenemos $\mathcal{Y}^{\wedge} = \mathcal{Y}$, por lo tanto $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{Y}$. Ahora sea $Y \in \mathcal{Y}$. Sabiendo que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$, podemos aplicar el Teorema 1.12 para obtener la sucesión exacta

$$0 \to K \to X \to Y \to 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $K \in \omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y}$ es cerrado por extensiones, tenemos que $X \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} =: \omega$. De modo que $Y \in \omega^{\wedge}$, esto es $\mathcal{Y} \subseteq \omega^{\wedge}$. Hasta aquí hemos probado las igualdades $\mathcal{Y} = \omega^{\wedge} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp}$. De la tercer igualdad es claro que $\mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp_1}$. Ahora sea $Z \in \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp_1}$. Nuevamente por el Teorema 1.12, existe una sucesión exacta

$$0 \to Z \to W \to X \to 0,$$

con $W \in \omega^{\wedge}$ y $X \in \mathcal{X}$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Z) = 0$ la anterior sucesión se escinde, de donde Z es sumando directo de $W \in \omega^{\wedge} = \mathcal{Y}$, y así $Z \in \mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp}$. Por lo que obtenemos la tercer

igualdad.
Finalmente probamos que $\mathcal{Y} = \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty} \cap \omega^{\perp}$. Observe que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\perp} \subseteq \omega^{\perp}$ y por el Teorema 1.29, sabemos que

$$\mathcal{Y} = \omega^{\wedge} \subseteq (\omega^{\wedge})^{\vee} = \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{X}^{\wedge}).$$

De modo que $\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{X}^{\wedge}) \cap \omega^{\perp}$.
Ahora sea $L \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{X}}^{<\infty}(\mathcal{X}^{\wedge}) \cap \omega^{\perp}$, con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = k < \infty$. Usaremos inducción sobre k para probar que $L \in \mathcal{Y}$. Supongamos que $k = 1$. Dado $X \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to W \to X' \to 0$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Entonces obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(W, L) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, L) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X', L),$$

donde $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(W, L) = 0$, pues $L \in \omega^{\perp}$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X', L) = 0$ ya que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 1$. De donde $L \in \mathcal{X}^{\wedge} \cap \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$. Ahora, si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = k$, se puede probar de modo similar que $\mathrm{Ext}^{k-1}_{\mathcal{A}}(X, L) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$. Repitiendo el proceso, finalmente tenemos que $L \in \mathcal{X}^{\perp_1}$ y así obtenemos el resultado. $\square$

Capítulo 2

Pares de cotorsión relativos

Empezamos el capítulo recordando la noción de pares de cotorsión en categorías exactas e introducimos el concepto de pares de cotorsión relativos a una subcategoría gruesa $\mathcal{S}$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, al que llamarenis como **par de $\mathcal{S}$-cotorsión**, dicho par será un par de cotorsión completo en la subcategoría gruesa $\mathcal{S}$. Después damos una caracterización de éste concepto, el cual a través de los resultados desarrollados en esta sección nos permitirá construir pares de cotorsión relativos a partir de pares de Frobenius.

2.1. Pares de cotorsión en categorías exactas

La noción de par de cotorsión es análoga a la de par de torsión, donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$ es reemplazado por $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(-,-)$. Esta idea fue primeramente introducida por L. Salce en [71]. Un par de clases de objetos $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subset \mathcal{A}^2$ es un par de cotorsión si $\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$. La mayoría del álgebra homológica que se puede realizar sobre categorías abelianas también es realizable sobre categorías exactas (como puede apreciarse en [18]). De modo que no es de sorprender que se piense en la noción de pares de cotorsión en categorías exactas.

Sea $(\mathcal{E},\tau)$ una categoría exacta con τ una clase de *sucesiones exactas cortas* en $\mathcal{E}$. Los axiomas de categorías exactas (ver [18]) nos permiten construir los funtores de extensión $\mathrm{Ext}^i_{\tau}(-,-)$ como en categorías abelianas, esto es, usando la descripción de Baer-Yoneda. Por ejemplo, en el caso $i=1$, $\mathrm{Ext}^1_{\tau}(-,-)$ es el grupo abeliano de clases de equivalencia de sucesiones exactas cortas

$$0 \to B \to C \to A \to 0 \tag{2.1}$$

en τ, donde el elemento cero es el dado por la clase de equivalencia de la siguiente sucesión

$$0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0.$$

Todo morfismo $B \to C$ que aparece en la sucesión exacta (2.1) en τ es llamado un *monomorfismo admisible*. Dualmente, tenemos los *epimorfismos admisibles*. La colección de extensiones de tamaño i, es decir $\mathrm{Ext}^i_\tau(C, A)$ tienen una descripción similar, la cual es desarrollada en la tesis de D. Sieg [73, Capítulo IV]. Para cualquier clase de objetos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$, denotamos sus categorías ortogonales con respecto a $\mathrm{Ext}^1_\tau(-,-)$ por $\mathcal{X}^{\perp_{1,\tau}}$, ${}^{\perp_{1,\tau}}\mathcal{X}$, las cuales son definidas de la misma forma que en el contexto de categorías abelianas. Recordamos que un objeto $I \in \mathcal{E}$ es un objeto τ-*inyectivo* si todo monomorfismo admisible $I \to B$ se escinde, o equivalentemente, si $\mathrm{Ext}^1_\tau(\mathcal{E}, I) = 0$. Mientras que los objetos τ-*proyectivos* tienen una descripción dual. Decimos que una categoría exacta $(\mathcal{E}, \tau)$ tiene *suficientes* τ-*inyectivos* si para todo objeto $X \in \mathcal{E}$ existe un monomorfismo admisible $X \to I$, donde I es un τ-inyectivo de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ satisface la propiedad dual, decimos que tiene *suficientes* τ-*proyectivos*. Denotaremos por $\mathrm{Proj}(\mathcal{E})$ a la clase de objetos τ-proycetivos de $\mathcal{E}$. Observemos que $\mathrm{Proj}(\mathcal{E}) = {}^{\perp_{1,\tau}}\mathcal{A}$. El siguiente ejemplo presenta las principales dos categorías que estaremos usando durante los siguientes capítulos.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.*

1. *$\mathcal{A}$ es exacta, junto con la familia τ de todas las sucesiones exactas cortas en $\mathcal{A}$, (así, todo resultado o definición presentado en lo que sigue de este trabajo en el contexto de categorías exactas, será también valido para categorías abelianas) y en este caso* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ *es la clase de objetos proyectivos de $\mathcal{A}$ como categoría exacta.*

2. *Sea $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ que es cerrada bajo extensiones. Entonces, $\mathcal{Y}$ es una subcategoría exacta de $\mathcal{A}$, con la estructura exacta $(\mathcal{Y}, \tau_{\mathcal{Y}})$ de la Observación 1.6. En este caso, para cualquier $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, denotamos las subcategorías ortogonales por ${}^{\perp_{1,\tau_{\mathcal{Y}}}}\mathcal{X} =: {}^{\perp_{1,\mathcal{Y}}}\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^{\perp_{1,\tau_{\mathcal{Y}}}} =: \mathcal{X}^{\perp_{1,\mathcal{Y}}}$. Observe que*

$${}^{\perp_{1,\mathcal{Y}}}\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}^{\perp_{1,\mathcal{Y}}} = \mathcal{X}^{\perp_1} \cap \mathcal{Y}.$$

   En el caso particular que $\mathcal{Y} := \mathcal{S}$ sea una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{S}$ es también una categoría exacta. Aunque $\mathcal{S}$ no es necesariamente abeliana. De hecho, $\mathcal{S}$ es abeliana si, y sólo si, $\mathcal{S}$ es una subcategoría admisible, en el sentido de Marcos, Mendoza, Sáenz y Santiago [57, Proposición 2.3].

Recordemos que el concepto de pares de cotorsión en categorías exactas se debe a H. Krause y Ø. Solberg [54].

Definición 2.2. *Sea $(\mathcal{E}, \tau)$ una categoría exacta. Decimos que dos subcategorías $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ forman un **par de cotorsión** $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\mathcal{E}$ si $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1,\tau}}\mathcal{G}$ y $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_{1,\tau}}$.*
*Un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es **completo**, si para todo objeto $X \in \mathcal{E}$, existen sucesiones exactas en τ*

$$0 \to G \to F \to X \to 0 \;\; y \;\; 0 \to X \to G' \to F' \to 0,$$

con $F, F' \in \mathcal{F}$ y $G, G' \in \mathcal{G}$.
*Finalmente, un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\mathcal{E}$ es **hereditario a izquierda** si $\mathcal{F}$ es resolvente en $\mathcal{E}$. Dualmente, tenemos la noción de par de cotorsión **hereditario a derecha** en $\mathcal{E}$. Un **par de cotorsión hereditario** en $\mathcal{E}$ es un par de cotorsión hereditario a izquierda y a derecha.*

Las nociones duales de clases resolventes y co-resolventes son equivalentes cuando son consideradas con respecto a un par de cotorsión, como especifica el siguiente resultado (ver [40, Teorema 1.2.10]).

Lema 2.3. *Para un par de cotorsión* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *en una categoría exacta* $(\mathcal{E}, \tau)$*, con suficientes* τ*-proyectivos y* τ*-inyectivos, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es hereditario a izquierda.*

(b) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es hereditario a derecha.*

(c) $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$.

Observe que en un par de cotorsión hereditario $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en una categoría exacta $\mathcal{E}$, tenemos que $\mathcal{F}$ es saturada a izquierda y $\mathcal{G}$ es saturada a derecha (en $\mathcal{E}$).

2.2. Pares de cotorsión relativos y subcategorías gruesas

Por ahora fijaremos nuestra atención en un tipo especial de par completo de cotorsión en una subcategoría gruesa $\mathcal{S}$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Daremos en la Proposición 2.6 una caracterización de estos pares, la cual será mas adecuada para el estudio de propiedades y la construcción de ejemplos relacionados con la teoría de Auslander-Buchweitz.

Definición 2.4. *Sean* $\mathcal{S}$ *una subcategoría gruesa de una categoría abeliana* $\mathcal{A}$ *(y por tanto una subcategoría exacta) y* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *dos subcategorías de* $\mathcal{S}$*. Decimos que* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un* ***par de*** $\mathcal{S}$***-cotorsión a izquierda*** *en* $\mathcal{A}$ *si* $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$ *y si para todo objeto* $S \in \mathcal{S}$ *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to G \to F \to S \to 0,$$

con $F \in \mathcal{F}$ *y* $G \in \mathcal{G}$*. Similarmente, tenemos la definición de* ***par de*** $\mathcal{S}$***-cotorsión a derecha*** *en* $\mathcal{A}$*. Finalmente, un* ***par de*** $\mathcal{S}$***-cotorsión*** $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$*, significará que es un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a izquierda y a derecha.*

Observación 2.5. *Tengamos en cuenta los siguientes hechos referentes a pares de* $\mathcal{S}$*-cotorsión y clases ortogonales.*

(a) *Si* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a izquierda, entonces* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *son subclases de* $\mathcal{S}$*.*

(b) *Si* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a izquierda en* $\mathcal{A}$*, entonces* $\mathcal{F}$ *es cerrado bajo extensiones, pues* $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$*. Dualmente,* $\mathcal{G}$ *es cerrado bajo extensiones para todo par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a derecha* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *en* $\mathcal{A}$*.*

Proposición 2.6. *Sean* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *un par de clases de objetos en* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{S}$ *una subcategoría gruesa de* $\mathcal{A}$*. Consideremos las siguientes condiciones:*

(scp1) *$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$.*

(scp2) *$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ y $\mathcal{G}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$.*

(scp3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$.

(scp4) *Para todo objeto $S \in \mathcal{S}$, existe una $\mathcal{F}$-precubierta epi $\varphi\colon F \to S$, con $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{G}$.*[1]

(scp5) *Para todo objeto $S \in \mathcal{S}$, existe una $\mathcal{G}$-preenvolvente mono $\psi\colon S \to G$, con $\mathrm{Coker}(\psi) \in \mathcal{F}$.*

Los siguientes enunciados son ciertos:

(a) *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ satisfacen las condiciones* (scp1)*,* (scp3) *y* (scp4)*.*

(b) *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a derecha en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ satisfacen las condiciones* (scp2)*,* (scp3) *y* (scp5)*.*

(c) *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ satisfacen las condiciones de* (scp1) *a* (scp5)*.*

Demostración. Probaremos solamente el inciso (a), ya que (b) es dual y (c) se sigue de las partes (a) y (b).

Supongamos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda. Entonces por la Observación 2.5, tenemos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son subclases de $\mathcal{S}$. La misma observación nos dice que $\mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \mathcal{S}$, y de éste modo $\mathcal{F}$ es cerrada bajo sumandos directos ya que ${}^{\perp_1}\mathcal{G}$ y $\mathcal{S}$ lo son. De aquí obtenemos la condición (scp1). La condición (scp3) se obtiene de la igualdad $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$ y del hecho que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son subclases de objetos en $\mathcal{S}$. Finalmente (scp4) se obtiene del hecho que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda.

Ahora suponga que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos clases de objetos en $\mathcal{A}$ que satisfacen las condiciones (scp1), (scp3) y (scp4). Entonces por (scp1), tenemos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son subclases de $\mathcal{S}$. Vamos a verificar la igualdad $\mathcal{F} = {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$. La inclusión $\mathcal{F} \subseteq {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$ se obtiene por la igualdad $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$. Ahora sea $S \in {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G}$. Por (scp4), existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to F \xrightarrow{\varphi} S \to 0,$$

con $F \in \mathcal{F}$ y $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{G}$. Entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F, \mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$ y así la sucesión exacta anterior se escinde. Se sigue que S es sumando directo de $F \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es cerrado bajo sumandos directos por (scp1), tenemos que $S \in \mathcal{F}$ y de aquí obtenemos la inclusión ${}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, que junto con (scp4) prueba que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda. $\square$

[1] Observe que si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ y la condición (scp3) se cumple, entonces ésta $\mathcal{F}$-precubierta es especial, pues $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}$. Sin embargo la inclusión $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}$ no es cierta en general, y por eso no toda $\mathcal{F}$-precubierta especial de S tiene núcleo en $\mathcal{G}$.

2.3. Pares de cotorsión relativos a partir de pares de Frobenius

La caracterización de pares de $\mathcal{S}$-cotorsión (a izquierda y a derecha) dados en la Proposición 2.6 nos permite construir fácilmente pares de cotorsión a partir de pares de Frobenius (ver Definición 1.5). Después esto nos ayudará a estudiar las correspondencias entre estos dos conceptos.

Teorema 2.7. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) *$(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(b) *Las siguientes igualdades se cumplen:*

$$\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge, \quad \omega = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge, \quad y \;\; \mathcal{X} = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge).$$

Dualmente, si $(\nu, \mathcal{Y})$ es un par de Frobenius a derecha en $\mathcal{A}$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:

(i) *$(\nu^\vee, \mathcal{Y})$ es un par de $\mathcal{Y}^\vee$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(ii) *Las siguientes igualdades se cumplen:*

$$\nu^\vee = {}^\perp\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}^\vee, \quad \nu = \mathcal{Y} \cap \nu^\vee, \quad y \;\; \mathcal{Y} = \mathcal{Y}^\vee \cap \nu^\perp = \mathcal{Y}^\vee \cap (\nu^\vee)^\perp.$$

Demostración. Por el Teorema 1.22, sabemos que $\mathcal{X}^\wedge$ es una subcategoría gruesa en $\mathcal{A}$. Por otro lado, por el Lema 1.8, tenemos que $\mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega^\wedge) = \mathrm{id}_\mathcal{X}(\omega)$ y así obtenemos (scp3). Más aún, la Proposición 1.25 nos da $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge$, y de aquí $\omega^\wedge$ es cerrado bajo sumandos directos, por lo que obtenemos la condición (scp2). Además (scp1) se tiene ya que $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda. Observemos que (scp4) y (scp5) se cumplen por el Teorema 1.12 y de aquí por la Proposición 2.6 concluimos que $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$. Luego, de la Proposición 1.26 tenemos $\mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{X} = \mathcal{X}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$. Finalmente, la igualdad $\omega = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$ se obtiene de la Proposición 1.9. □

Si agregamos una condición adicional sobre el par $(\mathcal{X}, \omega)$ en el teorema anterior, es posible construir otro par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$.

Teorema 2.8. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:*

(a) *$(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(b) $\omega^\wedge = \mathrm{Thick}(\omega)$.

Dualmente, si $(\nu, \mathcal{Y})$ un par de Frobenius fuerte a derecha en $\mathcal{A}$, entonces:

(i) $(\mathcal{Y}^{\vee}, \nu)$ *es un par de $\mathcal{Y}^{\vee}$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(ii) $\nu^{\vee} = \mathrm{Thick}(\nu)$.

Demostración. (a) Por el Teorema 1.22 tenemos que $\mathcal{X}^{\wedge}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$. Ahora observe que ω es cerrado bajo sumandos directos por hipótesis, y $\mathcal{X}^{\wedge}$ satisface la misma propiedad puesto que es un clase gruesa. Más aún, $\omega \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$. Por lo que las condiciones (scp1) y (scp2) se cumplen.
Para demostrar (scp3) es suficiente usar el Lema 1.8 y la condición $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, lo cual hacemos como sigue:

$$0 = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = \mathrm{id}_{\omega}(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\omega}(\mathcal{X}^{\wedge}).$$

Observe que (scp5) es trivial puesto que $0 \in \omega$ (esto se sigue usando que ω es cerrado bajo sumando directos).
Finalmente, mostramos (scp4). Sea $Y \in \mathcal{X}^{\wedge}$. Por el Teorema 2.7 existe una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} Y \to 0$$

con $K \in \omega^{\wedge}$ y $X \in \mathcal{X}$. Por otro lado, existe una sucesión exacta

$$0 \to X' \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} X \to 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$, pues ω es un generador relativo en $\mathcal{X}$. Ahora consideremos la composición $q = \beta \circ p$. Por el Lema de la Serpiente y ya que p es epimorfismo, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(p) \to \mathrm{Ker}(q) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to 0,$$

donde $\mathrm{Ker}(p) = X' \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{Ker}(\beta) = K \in \omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$. Entonces $\mathrm{Ker}(q) \in \mathcal{X}^{\wedge}$ ya que $\mathcal{X}^{\wedge}$ es gruesa. De aquí, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(q) \to W \xrightarrow{q} Y \to 0,$$

con $W \in \omega$ y $\mathrm{Ker}(q) \in \mathcal{X}^{\wedge}$, probando (scp4).

(b) Efectivamente, por el Teorema 1.29, tenemos

$$\mathcal{X} \cap \mathrm{Thick}(\omega) = \mathcal{X} \cap \mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^{\wedge}) = \mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}).$$

Por el Lema 1.11, tenemos $\mathrm{Inj}^{<\infty}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$ y por la Proposición 1.9, tenemos que $\mathcal{X} \cap \omega^{\vee} = \omega$. Por lo que , $\mathcal{X} \cap \mathrm{Thick}(\omega) = \omega$ también es cierto. Definiendo $\mathcal{Y} := \mathrm{Thick}(\omega)$ en el Teorema 1.30, se tiene que $\omega^{\wedge} = \mathrm{Thick}(\omega)$. □

Sabiendo que el par de Frobenius fuerte a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$ nos proporciona un par $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ de cotorsión completo en la categoría exacta $\mathcal{X}^\wedge$, podemos escribir la igualdad $\omega = {}^{\perp_{1,\mathcal{X}^\wedge}}(\mathcal{X}^\wedge)$ y probar el siguiente resultado.

Corolario 2.9. *Si $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, entonces ω es la clase de objetos proyectivos en la subcategoría exacta $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{A}$. Mas aún, $\mathcal{X}^\wedge$ tiene suficientes $\tau_{\mathcal{X}^\wedge}$-proyectivos, esto es, para todo $C \in \mathcal{X}^\wedge$ existe un epimorfismo $W \to C$ en $\mathcal{A}$ con $W \in \omega$ y núcleo en $\mathcal{X}^\wedge$.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior, puesto que $\omega = {}^{\perp_{1,\mathcal{X}^\wedge}}(\mathcal{X}^\wedge) = \mathrm{Proj}(\mathcal{X}^\wedge)$. □

Hasta ahora solo sabemos que el concepto de par de $\mathcal{S}$-cotorsión es una descripción adicional de la noción de completitud de pares de cotorsión (a izquierda y a derecha) en $\mathcal{S}$; como la mayoria de los pares de cotorsión completos son hereditarios, introduciremos en la siguiente sección la propiedad de ser *fuertemente hereditario* para un par de $\mathcal{S}$-cotorsión en $\mathcal{A}$, y la comparamos con la definición habitual de par de cotorsión hereditario en $\mathcal{S}$ (esta es, Definición 2.2).

2.4. Pares de cotorsión relativos hereditarios

En esta sección estudiamos dos nociones de pares de cotorsión en el contexto relativo, una de ellas corresponde a la *habitual*, y la otra es mas *fuerte*. Estas dos nociones no son siempre equivalentes. Algunos de los resultados que aparecerán mas adelante proveerán condiciones sobre las cuales los pares de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión obtenidos en el Teorema 2.7 y Teorema 2.8 son hereditarios y *hereditarios fuertes* en el sentido que da la siguiente definición.

Definición 2.10. *Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de $\mathcal{S}$-cotorsión en $\mathcal{A}$. Decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es:*

1. ***hereditario a izquierda** si $\mathcal{F}$ es una clase resolvente de $\mathcal{S}$,*

2. ***hereditario fuerte a izquierda** si $\mathcal{F}$ es una subcategoría resolvente en $\mathcal{A}$.*

*Las nociones de pares de $\mathcal{S}$-cotorsión **hereditario (fuerte) a derecha** y **hereditario (fuerte)** se definen similarmente.*

Observemos que en la Definición 2.10 en los conceptos 1. y 2., $\mathcal{F}$ es cerrada por extensiones y núcleos de epimorfismos. La diferencia entre ambos conceptos es que $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}$ se cumple en 1., mientras que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$ en 2.
Como se observa, el hecho que causa que las nociones de par de $\mathcal{S}$-cotorsión hereditario a izquierda y hereditario fuerte a izquierda no sean la misma es que los objetos proyectivos de $\mathcal{S}$ no son necesariamente los objetos proyectivos de $\mathcal{A}$. De modo que es natural preguntarse si es posible hallar alguna condición bajo la cual los objetos proyectivos de $\mathcal{A}$ y los objetos proyectivos de $\mathcal{S}$ coincidan. La pregunta tiene una respuesta en el siguiente resultado.

Proposición 2.11. *Sea $\mathcal{S}$ una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$. Si* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}$ *y $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces* $\operatorname{Proj}(\mathcal{S}) = \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$.

Demostración. Primero, observemos que la inclusión $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$ es clara, ya que $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}$. Ahora, sea $Q \in \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$. Como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, existe una sucesión exacta corta

$$\eta : 0 \to K \to P \to Q \to 0,$$

con $P \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$. También sabemos que $\mathcal{S}$ es una sub-categoría gruesa, por lo que $K \in \mathcal{S}$. Por lo tanto η es una sucesión exacta en $\mathcal{S}$, y como $Q \in \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$, tenemos que η se parte, así que Q es sumando directo de P, lo cual implica que $Q \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$. □

Como una consecuencia tenemos lo siguiente.

Observación 2.12. *Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de cotorsión en $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathcal{F}$ es resolvente en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es resolvente en $\mathcal{S}$ y* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$.

El siguiente teorema nos provee un método para obtener pares Frobenius a izquierda y a derecha a partir de un par de $\mathcal{S}$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda. Pero antes, necesitamos introducir la notación que se usará para sizigias y cosizigias. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos. Sea $A \in \mathcal{A}$ y

$$\gamma : \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

una resolución proyectiva de A. Denotamos por $\Omega^i(A) := \operatorname{Ker}(P_{i-1} \to P_{i-2})$, a la i-ésima *sizigia* de $\mathcal{A}$ que ocurre en γ, para cada entero $i \geq 1$. Para $i = 0$, definimos $\Omega^0(A) := A$.

Teorema 2.13. *Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de $\mathcal{S}$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ *para todo* $i \geq 0$.

(b) $(\mathcal{F}, \omega)$ *es un par de Frobenius a izquierda en* $\mathcal{A}$.

(c) $(\omega, \mathcal{G})$ *es un par de Frobenius a derecha en* $\mathcal{A}$.

(d) *Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge$, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{F}^\wedge$-cotorsión y*

$$\mathcal{G} = \omega^\wedge = \mathcal{F}^\wedge \cap \mathcal{F}^\perp \ \text{ y } \ \mathcal{F} = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge).$$

Demostración. (a) Sean $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es resolvente (en $\mathcal{A}$) y $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, tenemos que $\Omega^{i-1}(F) \subseteq \mathcal{F}$, para todo $i \geq 1$. Entonces tenemos que $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(F, G) \simeq \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F', G) = 0$ para todo $F' \in \Omega^{i-1}(F)$.

(b) Primero, necesitamos verificar que $\mathcal{F}$ es gruesa a izquierda. Como $\mathcal{F}$ es resolvente solo resta verificar que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, lo cual se obtiene de la igualdad

$\mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \mathcal{S}$.
Observe que ω es cerrado bajo sumandos directos puesto que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ lo son. Así, para mostrar que $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius en $\mathcal{A}$, resta ver que ω es un cogenerador relativo $\mathcal{F}$-inyectivo en $\mathcal{F}$. La parte (a) implica que ω es $\mathcal{F}$-inyectivo, pues $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\omega) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Ahora, sea $F \in \mathcal{F}$. Por (scp5) existe una sucesión exacta

$$0 \to F \to W \to F' \to 0,$$

en $\mathcal{A}$, con $F' \in \mathcal{F}$ y $W \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es cerrado bajo extensiones, obtenemos $W \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} =: \omega$, probando que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{F}$, de donde obtenemos (b).

(c) Primero observemos que $\mathcal{G}$ es gruesa a derecha. La igualdad $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{S}$ implica que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo extensiones y sumandos directos en $\mathcal{A}$. Ahora consideremos una sucesión exacta

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

en $\mathcal{S}$, con $A, B \in \mathcal{G}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F, -)$ a la sucesión exacta anterior, con $F \in \mathcal{F}$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F, B) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F, C) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(F, A),$$

donde $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F, B) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(F, A) = 0$ pues $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ por el inciso (a). De aquí, se sigue que $C \in \mathcal{F}^{\perp_1} \cap \mathcal{S} = \mathcal{G}$. Así, tenemos que $\mathcal{G}$ es gruesa a derecha. El resto de la prueba se obtiene como en el inciso (b).

(d) Cómo $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$, tenemos del Teorema 2.7 que

$$\omega^\wedge = \mathcal{F}^\wedge \cap \mathcal{F}^\perp \;\text{ y }\; \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{F} = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge).$$

Afirmamos que $\mathcal{G} = \omega^\wedge$. De hecho, de (c), tenemos que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{G}$. Para probar que $\mathcal{G} \subseteq \omega^\wedge$, es suficiente ver que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge \cap \mathcal{F}^\perp$. Lo cual se sigue de (a) ya que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge$. □

El siguiente resultado muestra como obtener pares de cotorsión hereditarios fuertes relativos de pares de cotorsión hereditarios en categorías abelianas.

Corolario 2.14. *Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de cotorsión hereditario a izquierda y completo en $\mathcal{A}$, y $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\wedge)$ es un par de $\mathcal{F}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, y*

$$\omega^\wedge = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\wedge = \mathcal{F}^\wedge \cap \mathcal{F}^\perp \;\; y \;\; \mathcal{F} = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge).$$

Demostración. Sabemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{A}$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces por el Teorema 2.13, tenemos que $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda.

De aquí por el Teorema 2.7 tenemos que $(\mathcal{F}, \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{F}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, y adicionalmente tenemos las igualdades

$$\omega^\wedge = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}^\wedge = \mathcal{F}^\wedge \cap \mathcal{F}^\perp \;\text{ y }\; \mathcal{F} = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{F}^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge),$$

donde $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_1} = \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F}$ es resolvente y $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos. □

Cerramos esta sección presentando las condiciones para las cuales los pares de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ son hereditarios fuertes.

Teorema 2.15. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ *y* $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$.

(b) $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ *es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte en $\mathcal{A}$.*

(c) $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ *es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Primero observemos que, por el Teorema 2.7 y 2.8, los pares $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ son de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$ y $\omega^\wedge$ es gruesa.

- (a) $\implies$ (b): Es suficiente mostrar que ω es preresolvente en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}^\wedge$ es precoresolvente en $\mathcal{A}$. El último hecho se cumple pues $\mathcal{X}^\wedge$ es gruesa. La igualdad $\omega = {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$ implica que ω es cerrado bajo extensiones. Para mostrar que ω es también cerrada bajo núcleos de epimorfismos, supongamos que tenemos una sucesión exacta corta

  $$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

  con $B, C \in \omega$. Como $\omega \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $B, C \in \mathcal{X}$, y de este modo $A \in \mathcal{X}$ ya que $\mathcal{X}$ es gruesa izquierda. Por otro lado, la inclusión $\omega \subseteq \omega^\wedge$ y el hecho de que $\omega^\wedge$ es gruesa, implica que $A \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$, donde $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$, por el Teorema 2.7. Por lo tanto $A \in \omega$, y así obtenemos (b).

- (b) $\implies$ (c): Supongamos que $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ y $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. La clase $\omega^\wedge$ es precoresolvente, pues es gruesa. Observe también que $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\perp$. Por tanto $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge = \omega^\wedge$, donde la ultima igualdad se da por el Teorema 2.7. De aquí, $\omega^\wedge$ es coresolvente en $\mathcal{A}$. Por otro lado $\mathcal{X}$ es preresolvente, pues $\mathcal{X} = \mathrm{Thick}^-(\mathcal{X})$. También sabemos por hipótesis que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega \subseteq \mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{X}$ es coresolvente en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión hereditario fuerte en $\mathcal{A}$, de donde obtenemos (b).

- (c) $\implies$ (a): Supongamos que $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$. Como $\omega^\wedge$ es coresolvente en $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Por otro lado, la inclusión $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ y la igualdad $\omega = {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^\wedge) \cap \mathcal{X}^\wedge$ implican que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$. Por lo que obtenemos (a).

□

2.5. Ejemplos de pares de cotorsión relativos

En esta sección desarrollamos algunos ejemplos de pares de $\mathcal{S}$-cotorsión. Presentaremos para esto a las clases de módulos Ding-Chen, Gorenstein y Gorenstein-AC y vemos que el álgebra homológica que se obtiene en cada clase nos permite obtener pares de Frobenius, lo cual a su vez nos dará pares de $\mathcal{S}$-cotorsión.

Pares obtenidos de módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos

Consideremos $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$, $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R)$ y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$. La clase $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda por [47, Teorema 2.5] y ω es $\mathcal{X}$-inyectivo por [47, Proposición 2.3]. Por el *Ejemplo 1.7*, sabemos que $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathrm{Mod}(R)$. Entonces por los Teoremas 2.7 y 2.8 tenemos que $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^{<\infty})$ y $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{GProj}(R)^{\wedge})$ son $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge}$-pares de cotorsión en $\mathrm{Mod}(R)$. Estos pares en general no son hereditarios fuertes a izquierda, pues las inclusiones $\mathrm{Inj}(R) \subseteq \mathrm{GProj}(R)^{\wedge}$ y $\mathrm{Inj}(R) \subseteq \mathrm{Proj}^{<\infty}(R)$ no son necesariamente ciertas. Observemos que estos pares son hereditarios (a izquierda y a derecha) como pares de cotorsión en la categoría exacta $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge}$. Sin embargo, estas dos nociones de pares de cotorsión hereditario coinciden en el caso de que el anillo R sea Gorenstein, ya que en ese caso se cumplen las igualdades $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$ y $\mathrm{Proj}^{<\infty}(R) = \mathrm{Inj}^{<\infty}(R)$.

Recordemos del Ejemplo 1.10 la igualdad $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{GProj}(R) \cap \mathrm{Proj}^{<\infty}(R)$. Además las siguientes igualdades son ciertas:

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}^{<\infty}(R) &= \mathrm{GProj}(R)^{\perp} \cap \mathrm{GProj}(R)^{\wedge}, \\ \mathrm{GProj}(R) &= \mathrm{GProj}(R)^{\wedge} \cap {}^{\perp}\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{GProj}(R)^{\wedge} \cap {}^{\perp}\mathrm{Proj}^{<\infty}(R). \end{aligned}$$

Estas igualdades son generalizaciones de las relaciones de ortogonalidad

$$\mathrm{Proj}^{<\infty}(R) = \mathrm{GProj}(R)^{\perp} \quad \text{y} \quad \mathrm{GProj}(R) = {}^{\perp}\mathrm{Proj}^{<\infty}(R),$$

las cuales se cumplen cuando R es un anillo Gorenstein, pues en éste caso tenemos un par de cotorsión $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ y la igualdad $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$ (ver [25, Observación 11.5.10].) De lo anterior concluimos el siguiente resultado.

Corolario 2.16. *Si* $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$*, entonces* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$*.*

También tenemos las inclusiones duales si consideramos $\mathcal{Y} := \mathrm{GInj}(R)$ y $\nu := \mathrm{Inj}(R)$ en los Teoremas 2.7 y 2.8.

Pares obtenidos de módulos Ding-inyectivos y Ding-proyectivos: Los resultados de H. Holm que hemos citado anteriormente de [47], junto con los argumentos que se prueban, nos permiten obtener resultados análogos para módulos Ding-proyectivos y Ding-inyectivos.

Recordemos que un R-módulo a izquierda se dice **Ding-proyectivo**, si existe una sucesión de módulos proyectivos

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

con $M = \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$, tales que $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, F)$ es un complejo exacto de grupos abelianos, para todo módulo plano $F \in \mathrm{Flat}(R)$. Denotamos por $\mathrm{DProj}(R)$ a la clase de R-módulos a izquierda Ding-proyectivos. Dualmente, un R-módulo a izquierda es **Ding-inyectivo** si existe una sucesión exacta de módulos inyectivos

$$\boldsymbol{I} = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

con $N = \mathrm{Ker}(I_0 \to I^0)$, tal que $\mathrm{Hom}_R(J, \boldsymbol{I})$ es un complejo exacto de grupos abelianos, para todo módulo FP-inyectivo J (esto es, un R-módulo a izquierda en $\mathrm{FP}^{\perp_1}$, donde FP denota a la clase de los módulos finitamente presentados).

Usando un razonamiento similar, como en el ejemplo de los módulos Gorenstein-proyectivos, si definimos $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$, $\mathcal{X} := \mathrm{DProj}(R)$ como la clase de módulos Ding-proyectivos y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$, tenemos que el par $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ es de Frobenius fuerte a izquierda. De aquí tenemos los pares de $\mathrm{DProj}(R)^\wedge$-cotorsión hereditarios fuertes a izquierda

$$(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R)) \;\; \text{y} \;\; (\mathrm{Proj}(R), \mathrm{DProj}(R)^\wedge),$$

en $\mathrm{Mod}(R)$. El primero de estos pares de cotorsión es una generalización del par de cotorsión $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}^{<\infty}(R))$ hallado por J. Gillespie en [35] (donde $\mathrm{Flat}^{<\infty}(R)$ denota a los R-módulos de dimensión plana finita). Más aún, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}(R) &= \mathrm{DProj}(R) \cap \mathrm{Proj}^{<\infty}(R), \\
\mathrm{Proj}^{<\infty}(R) &= \mathrm{DProj}(R)^{\perp} \cap \mathrm{DProj}(R)^\wedge, \\
\mathrm{DProj}(R)^\wedge \cap {}^{\perp}\mathrm{Proj}(R) &= \mathrm{DProj}(R) = \mathrm{DProj}(R)^\wedge \cap {}^{\perp}(\mathrm{Proj}^{<\infty}(R)).
\end{aligned}$$

En [35, Proposicoón 3.8] se prueba que un módulo Ding-proyectivo es o bien proyectivo o tiene dimensión plana infinita. Esto puede ser escrito como la igualdad $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{DProj}(R) \cap \mathrm{Flat}^{<\infty}(R)$. Se sigue que los módulos planos no proyectivos no son Ding-proyectivos. Por esta razón, consideramos $\omega := \mathrm{Proj}(R)$, en lugar de $\omega := \mathrm{Flat}(R)$. Así, la primera igualdad de arriba puede extenderse a

$$\mathrm{DProj}(R) \cap \mathrm{Flat}^{<\infty}(R) = \mathrm{Proj}(R) = \mathrm{DProj}(R) \cap \mathrm{Proj}^{<\infty}(R).$$

Dualmente, si $\mathrm{DInj}(R)$ denota a la clase de los módulos Ding-inyectivos, tenemos un par de Frobenius fuerte a derecha $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{DInj}(R))$, y los correspondientes pares de $\mathrm{DInj}(R)^\wedge$-cotorsión son obtenidos de manera dual.

Pares obtenidos de módulos Gorenstein AC-proyectivos y AC-inyectivos

Los módulos Gorenstein AC-proyectivos y AC-inyectivos fueron definidos por D. Bravo, J Gillespie y M. Hovey en [15, Sección 5 y 8]. Recordemos estas nociones en las siguientes lineas.

(1) Un R-módulo a izquierda Q es **de tipo** FP_∞ si este tiene una presentación de longitud infinita y de tipo finito, esto es, si existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to Q \to 0$$

donde F_k es finitamente generado y libre para todo $k \geq 0$.

(2) Un R-módulo a izquierda E es **absolutamente limpio** si $\mathrm{Ext}^1_R(Q, E) = 0$ para todo R-modulo a izquierda Q de tipo FP_∞.

(3) Un R-módulo a izquierda L es de **nivel** si $\mathrm{Tor}^R_1(Q, L) = 0$ para todo R-módulo a derecha Q de tipo FP_∞.

(4) Un R-módulo a izquierda M es **Gorenstein AC-proyectivo** si existe un complejo exacto consistente de módulos proyectivos de la forma

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

con $M = \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$ y tal que el complejo inducido $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, L)$ sea exacto para todo R-módulo a izquierda L de nivel.

(5) Un R-módulo a izquierda N se dice **Gorenstein AC-inyectivo** si existe un complejo exacto consistente de módulos inyectivos

$$\boldsymbol{I} = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

con $N = \mathrm{Ker}(I^0 \to I^1)$ y tal que el complejo inducido $\mathrm{Hom}_R(E, \boldsymbol{I})$ sea exacto para todo R-módulo a izquierda E absolutamente limpio.

Consideremos $\nu := \mathrm{Inj}(R)$ y $\mathcal{Y} := \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$ como la clase de los módulos Gorenstein AC-inyectivos: Observe que $\mathrm{Inj}(R) \subseteq \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$. Por otro lado, $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$ es gruesa a derecha, pues es la mitad derecha de de un par de cotorsión hereditario (consultar [15, Lema 5.6]). Ahora, el hecho de que $\mathrm{Inj}(R)$ es un generador $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$-proyectivo relativo en $\mathrm{GInj}(R)$ se obtiene por la definición de módulos Gorenstein AC-inyectivos. Por otro lado, $\mathrm{Ext}^i_R(V, Y) = 0$ para todo $V \in \mathrm{Inj}(R)$ y todo $Y \in \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$, pues podemos calcular $\mathrm{Ext}^i_R(V, Y)$ usando una corresolución inyectiva de Y la cual es $\mathrm{Hom}_R(E, -)$-exacta para todo módulo E absolutamente limpio. Finalmente, sabemos que $\mathrm{Inj}(R)$ es cerrado bajo sumandos directos. Entonces $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R))$ es un par de Frobenius fuerte a derecha; y de este modo, por los resultados duales de los Teoremas 2.7 y 2.8 obtenemos los pares de $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\vee}$-cotorsión $(\mathrm{Inj}(R)^{\vee}, \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R))$ y $(\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\vee}, \mathrm{Inj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$, los cuales son hereditarios a derecha. De un modo similar, de la definición de módulos Gorenstein AC-proyectivos y de los resultados correspondientes en [15], tenemos un par de Frobenius fuerte a izquierda $(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R))$, donde $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)$ denota la clase de los módulos Gorenstein AC-proyectivos. Más aún, tenemos pares de $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge}$-cotorsión hereditarios a izquierda $(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ y $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge})$ en $\mathrm{Mod}(R)$.

Capítulo 3

Estructuras exactas de modelos a partir de pares de Frobenius

En esta sección, dado un par de Frobenius fuerte a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$ en $\mathcal{A}$, obtendremos una estructura de modelo sobre la categoría exacta $\mathcal{X}^\wedge$ (ver Ejemplo 2.1), cuya categoría de homotopía representa, en algún sentido que especificamos después, una generalización de la categoría estable de módulos de un anillo.

3.1. Correspondencia de Hovey-Gillespie

Recordamos primero la noción de estructura exacta de modelo, junto con el enunciado de la *Correspondencia de Hovey-Gillespie*, para obtener con esta herramienta estructuras de modelo a partir de los pares de cotorsión que se obtienen en los Teoremas 2.7 y 2.8. Nuestro objetivo en esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces existe una única estructura exacta de modelo sobre $\mathcal{X}^\wedge$, que denotaremos por $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$, a la cual nos referimos como la* ***estructura de modelos proyectiva de Auslander-Buchweitz*** *, tal que $\mathcal{X}$ es la clase de los objetos cofibrantes, $\mathcal{X}^\wedge$ es la clase de objetos fibrantes y $\omega^\wedge$ es la clase de objetos triviales.*
Dualmente, si $(\nu, \mathcal{Y})$ es un un par de Frobenius fuerte a derecha en $\mathcal{A}$, entonces existe una única estructura exacta de modelo sobre $\mathcal{Y}^\vee$, denotada $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\nu, \mathcal{Y})$, y referida como la ***estructura de modelos inyectiva de Auslander-Buchweitz****, tal que $\mathcal{Y}^\wedge$ es la clase de los objetos cofibrantes, $\mathcal{Y}$ es la clase de objetos fibrantes y $\nu^\vee$ es la clase de objetos triviales.*

El concepto de categoría de modelo fue introducida por D. Quillen en 1967. Existen dos aproximaciones modernas a esta definición hoy en día: una proporcionada por Hovey en [50, Capítulo 1], y otra por Beligiannis y Reiten [17, Capítulo VIII]. Estas dos aproximaciones son ligeramente distintas entre ellas, y difieren de la definición original dada por Quillen.

Para el propósito de este trabajo, las estructuras de modelo serán siempre consideradas sobre categorías exactas (a menos que se especifique lo contrario), aunque la definición que damos abajo cubre situaciones mas generales.
Recordamos de [17] que una **estructura de modelo** sobre una categoría exacta $\mathcal{E}$ está dada por tres clases $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{T}$ de morfismos en $\mathcal{E}$, llamados **fibraciones, cofibraciones** y **equivalencias débiles**, respectivamente, que satisfacen los siguientes tres axiomas

[M1] $\mathfrak{T}$ tiene la propiedad dos de tres con respecto a la composición. Esto es; si f, g son morfismos que se pueden componer, y si cualesquiera dos de los morfismos f, g, o fg son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero.

[M2] $\mathfrak{F}, \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{T}$ son cerradas bajo retractos. Esto significa lo siguiente; Si g es un morfismo distinguido y f es un retracto de g, entonces f es también distinguido. Donde un morfismo f es retracto de un morfismo g si existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "id"] & B \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & B' \arrow[r, "r'"] & A' \end{tikzcd}$$

[M3] Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde f es una cofibración trivial (esto es, $f \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{T}$) y g es una fibración, o bien f es una cofibración y g es una fibración trivial (esto es, $g \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{T}$), entonces existe un morfismo $d : B \to X$ tal que $d \circ f = u$ y $g \circ d = v$.

[M4] Todo morfismo $f \in \mathcal{E}$ admite una factorización $f = p \circ i = q \circ j$, donde $i \in \mathfrak{C}$, $j \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{T}$, $p \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{T}$ y $q \in \mathfrak{F}$.

Para mas detalles con respecto a estos axiomas, consulte [50, Definición 1.1.3] o bien [17, Sección 1 del Capítulo VII]. Por una **categoría de modelo** nos referimos a una categoría exacta $\mathcal{E}$ equipada con una estructura de modelo $\mathcal{M} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ sobre $\mathcal{E}$.

Observación 3.2. *Necesitamos señalar algunas consideraciones sobre esta definición de categoría de modelo. En el sentido de Hovey, una categoría de modelo es una categoría $\mathcal{E}$ con límites (pequeños) y colímites (pequeños), que está equipada con una estructura de modelo tal que las factorizaciones en el axioma [M4] son funtoriales. En la definición de Beligiannis y Reiten, por otro lado, basta con que $\mathcal{E}$ sea una categoría aditiva con núcleos y conúcleos.*
De modo que nuestra definición de categoría de modelo es mas similar a la de Beligiannis y Reiten, con el único detalle que las categorías exactas pueden no tener núcleos y coñucleos, de acuerdo con la definición de Quillen en [64]. Sin embargo, esto no representará un problema en nuestro contexto. En realidad, la parte de teoría de categorías de modelo considerada en este trabajo solo requieren categorías exactas $\mathcal{E}$ tales que: (1) $\mathcal{E}$ tenga objetos iniciales y finales, (2) el producto $X \prod X$ y coproducto $X \coprod X$ de cualquier objeto $X \in \mathcal{E}$ consigo mismo existe, y (3) los push-out de todas las cofibraciones y los pull-back de todas las fibraciones existen. Con solo estos tres requerimientos, será posible usar algunos importantes resultados básicos de teoría de homotopía. Especificamos lo anterior como sigue.

Una estructura de modelo provee a la categoría sobre la cual está definida un entorno general para hacer teoría de homotopía. Con esto queremos decir que toda categoría de modelo $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ tiene una *categoría de homotopía* asociada, denotada por $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$, la cual es definida al invertir formalmente las equivalencias débiles de $\mathcal{M}$. En otras palabras, $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ es obtenida después de localizar $\mathcal{E}$ por la clase $\mathfrak{T}$ de equivalencias débiles [50, Sección 1.2]. Es importante mencionar que la construcción de $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ no requiere de que $\mathcal{E}$ tenga límites y colímites finitos, solamente las condiciones (1), (2) y (3) en la Observación 3.2, como es explicado por Gillespie en [36, Sección 1 y Hecho 4.2].

Estamos interesados en una familia particular de estructuras de modelo sobre categorías exactas que son llamadas también *exactas*. Para tales estructuras de modelo, las clases objetos cofibrantes, fibrantes y objetos triviales tienen una mayor importancia que las clases de cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles. Por otro lado, recordamos que un objeto $X \in \mathcal{E}$ en una categoría de modelo $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ se dice:

- **cofibrante** si el único morfismo $0_{\mathcal{E}} \to X$ es una cofibración.
- **fibrante** si el único morfismo $X \to 0_{\mathcal{E}}$ es una fibración.
- **trivial** si el único morfismo $0_{\mathcal{E}} \to X$ es una equivalencia débil.

Denotamos las clases de objetos cofibrantes, fibrantes y triviales por $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente. En algunas ocasiones, la estructura de modelo $\mathcal{M}$ puede ser pensada como el triple $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})$.
Las estructuras exactas de modelo fueron definidas por Gillespie en [36, Definición 3.1] como aquellas estructuras de modelo sobre una categoría exacta $\mathcal{E}$ tal que

- f es una cofibración si, y sólo si, f es un monomorfismo admisible y $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{Q}$.

- g es una fibración si, y sólo si, g es un epimorfismo admisible y $\mathrm{Ker}(g) \in \mathcal{R}$.

Tales estructuras de modelo tienen una atractiva interacción con ciertos tipos de triples de subcategorías de $\mathcal{E}$. Tres subcategorías $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{W}$ de objetos en $\mathcal{E}$ forman un **triple de Hovey** $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{W})$ en $\mathcal{E}$, si $\mathcal{W}$ es gruesa y si $(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F}, \mathcal{G} \cap \mathcal{W})$ son pares completos de cotorsión en $\mathcal{E}$. Gillespie prueba en [36, Teorema 3.3] que existe una correspondencia uno a uno entre estructuras de modelo exactas sobre $\mathcal{E}$ y triples de Hovey en $\mathcal{E}$, en el caso que la categoría exacta $\mathcal{E}$ sea **débilmente completa por idempotentes**, esto es, si todo monomorfismo que se escinde tiene conúcleo y todo epimorfismo que se escinde tiene un núcleo [36, Definición 2.2]. Este resultado es una generalización de una correspondencia similar probada por Hovey en el contexto de categorías abelianas [51, Teorema 2.2], el cual enunciamos a continuación.

Teorema 3.3 (Correspondencia de Hovey-Gillespie)**.** *Sea $\mathcal{E}$ una categoría exacta, con una estructura exacta de modelo. Entonces $(\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{T})$ es un triple de Hovey en $\mathcal{E}$. Si además $\mathcal{E}$ es débilmene completa por idempotentes, entonces también se cumple el recíproco. Esto es, si $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{W})$ es un triple de Hovey en $\mathcal{E}$, existe una única estructura de modelo exacta sobre $\mathcal{E}$, tal que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{W}$ son las clases de objetos cofibrantes, fibrantes y objetos triviales respectivamente.*

Es digno de mención que una versión similar, a ésta interacción entre estructuras de modelo y pares de cotorsión, fue desarrollada en el caso abeliano de manera independiente por Beligiannis y Reiten en [17, Capítulo VIII], dando también resultados diferentes a los que obtienen Hovey y Gillespie.

En este trabajo, solo usamos el recíproco de la *Correspondencia de Hovey-Gillespie*. Las categorías gruesas son ejemplos de categorías exactas que son débilmente completas por idempotentes, y de este modo el recíproco de la *Correspondencia de Hovey-Gillespie* se cumple en las sub-categorías gruesas $\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}^\wedge \subseteq \mathcal{A}$, obtenidas de un par de Frobenius a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$ y un par de Frobenius a derecha $(\nu, \mathcal{Y})$. Si adicionalmente, suponemos que $(\mathcal{X}, \omega)$ es fuerte, entonces, por los Teoremas 2.7 y 2.8, tenemos dos pares de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$, donde $\omega = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$. Estos son pares de cotorsión completos en la categoría exacta $\mathcal{X}^\wedge$. Y después considerando $\mathcal{F} := \mathcal{X}$, $\mathcal{G} := \mathcal{X}^\wedge$, y $\mathcal{W} := \omega^\wedge$ en el Teorema 3.3, obtenemos la estructura exacta de modelo sobre $\mathcal{X}^\wedge$ descrita en el Teorema 3.1. Esta estructura de modelo es *proyectiva* en el sentido de que todo objeto en $\mathcal{X}^\wedge$ es fibrante.

Observación 3.4. *Otra observación acerca de nuestra definición de categoría de modelo es que no consideramos factorizaciones funtoriales. De hecho, no sabemos si en general las factorizaciones en la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz del Teorema 3.1 son funtoriales. Como esta estructura de modelo es exacta, y las estructuras de modelo exactas están en correspondencia uno a uno con los triples de Hovey, podemos observar que $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}, \omega) = (\mathcal{X}, \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ tiene factorizaciones funtoriales si, y sólo si, los pares de cotorsión asociados $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ en $\mathcal{X}^\wedge$ son funtorialmente completos en el sentido de Hovey [51]. La última condición ocurre, por ejemplo, cuando estos pares de cotorsión son cogenerados por un conjunto. En muchos casos, para mostrar que un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$*

en una categoría exacta $\mathcal{E}$ es cogenerado por un conjunto, se requiere construir para todo sumando directo de todo objeto en $\mathcal{F}$ una filtración por un conjunto, y esto a su vez necesita la existencia de colimites pequeños en $\mathcal{E}$. Observe que éste no es necesariamente el caso de $\mathcal{X}^\wedge$

El siguiente resultado provee un fácil método para conseguir estructuras exactas de modelo de un par de $\mathcal{S}$-cotorisión.

Corolario 3.5. *Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de $\mathcal{S}$-cotorsión en $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathcal{F}$ es resolvente en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{G}$ es coresolvente en $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge$ entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, \mathcal{F}^\wedge)$ son pares de $\mathcal{F}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$, en otras palabras $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{F}^\wedge)$ es un triple de Hovey en $\mathcal{F}^\wedge$. Dualmente, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^\vee$, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{G}^\vee, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ son pares de $\mathcal{G}^\vee$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

Cerramos esta sección presentando algunos ejemplos de estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz, las cuales son generalizaciones de algunas estructuras abelianas de modelo en álgebra homológica Gorenstein y Ding-Chen.

Ejemplo 3.6. *Generalizamos, en el sentido explicado abajo, algunas estructuras de modelo halladas por D. Bravo, M. Hovey y J. Gillespie en [51].*

(1) *Del par de Frobenius fuerte a izquierda* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *en* $\mathrm{Mod}(R)$, *obtenemos la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)) = (\mathrm{GProj}(R), \mathrm{GProj}^{<\infty}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$$

sobre $\mathrm{GProj}^{\infty}(R)$. *Esta es la única estructura exacta de modelo sobre* $\mathrm{GProj}^{<\infty}(R)$ *con* $\mathrm{GProj}(R), \mathrm{GProj}^{<\infty}(R)$ *y* $\mathrm{Proj}^{<\infty}(R)$ *como las clases objetos cofibrante, fibrante y triviales, respectivamente. Dualmente, existe una única estructura de modelo inyectiva de Auslander-Buchweitz sobre* $\mathrm{GInj}^{<\infty}(R)$, *tal que* $\mathrm{GInj}^{<\infty}(R), \mathrm{GInj}(R)$ *y* $\mathrm{Inj}^{<\infty}(R)$ *son las clases de objetos, cofibrante, fibrante y triviales, respectivamente.*
Esta estructura de modelo generaliza la estructura de modelo abeliana (proyectiva e inyectiva) de Hovey sobre $\mathrm{Mod}(R)$, *con R un anillo de Gorenstein [51, Teorema 8.6]. Observe que no dimos condición alguna sobre el anillo base R. Aun así, necesitamos pagar un precio por esto. Nosotros no obtenemos una estructura de modelo abeliana sobre* $\mathrm{GProj}^{<\infty}(R)$ *y* $\mathrm{GInj}^{<\infty}(R)$, *pero sí una exacta. Por otro lado, ya hemos mencionado que si R es un anillo de Gorenstein, las dos subcategorías* $\mathrm{GProj}^{<\infty}(R)$ *y* $\mathrm{GInj}^{<\infty}(R)$, *coinciden con* $\mathrm{Mod}(R)$, *y en este caso las estructuras de modelo* $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *y* $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}(R))$ *son las estructuras de modelo descritas en [51, Teorema 8.6].*

(2) *Para los pares de Frobenius fuerte a izquierda y fuerte a derecha*

$$(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)) \text{ y } (\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}(R))$$

en $\mathrm{Mod}(R)$*, obtenemos las estructuras de modelo proyectiva e inyectiva de Auslander-Buchweitz*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)) = (\mathrm{DProj}(R), \mathrm{DProj}^{<\infty}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R)),$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{inj}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{DInj}(R)) = (\mathrm{DInj}^{\infty}(R), \mathrm{DInj}(R), \mathrm{Inj}^{<\infty}(R)).$$

sobre $\mathrm{DProj}^{<\infty}(R)$ *y* $\mathrm{DInj}^{<\infty}(R)$*, respectivamente.*
Estas estructuras de modelo son generalizacióñes (en el sentido especificado en el inciso anterior de este ejemplo) de la estructura abeliana de modelo sobre $\mathrm{Mod}(R)$ *(cuando* R *es un anillo Ding-Cheng) halladas por J. Gillespie en [36, Teorema 4.7]. Sin embargo, los autores no saben si* $\mathrm{Mod}(R) = \mathrm{DProj}^{<\infty}(R)$*, en el caso de que* R *es un anillo Ding-Chen.*

(3) *Finalmente, en el entorno mas general de módulos Gorenstein AC-proyectivos y Gorenstein AC-inyectivos, para los pares de Frobenius fuertes a izquierda y derecha*

$$(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)) \text{ y } (\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R))$$

obtenemos las estructuras de modelo proyectiva e inyectiva de Auslander-Buchweitz

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)) = (\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}^{<\infty}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R)),$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{inj}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)) = (\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}^{<\infty}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Inj}^{<\infty}(R)).$$

Estas estructuras de modelo están relacionadas con las estructuras de modelo abelianas Gorenstein AC-proyectivas y Gorenstein AC-inyectivas sobre $\mathrm{Mod}(R)$ *(donde* R *es un anillo arbitrario) descritas en [15, Teorema 5.5 y 8.5] por D. Bravo, M. Hovey y J. Gillespie. Para estas estructuras de modelo, las clases de objetos triviales tienen una descripción diferente a la que dimos arriba [15, Lema 5.4 y 8.4]. Por otro lado, los autores no saben si las clases* $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}^{<\infty}(R)$ *y* $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}^{<\infty}(R)$ *coinciden con la categoría completa* $\mathrm{Mod}(R)$*. Si lo anterior resultara cierto, sabríamos otra forma de obtener estructuras de modelo Gorenstein AC-proyectiva y Gorentein AC-inyectiva.*

(4) *Los incisos* (1), (2) *y* (3) *de este ejemplo también pueden ser obtenidos del Corolario 3.5. Sea* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión en una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos.*

(a) *Si* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge$*, entonces existe una única estructura de modelo exacta sobre* $\mathcal{F}^\wedge$ *donde* $\mathcal{F}$ *es la clase de objetos cofibrantes,* $\mathcal{F}^\wedge$ *es la clase de objetos fibrantes, y* $\mathcal{G}$ *es la clase de objetos triviales.*

(b) *Si* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^\vee$*, entonces existe una única estructura de modelo exacta sobre* $\mathcal{G}^\vee$*, donde* $\mathcal{G}^\vee$ *es la clase de objetos cofibrantes,* $\mathcal{G}$ *es la clase de objetos fibrantes, y* $\mathcal{F}$ *es la clase de objetos triviales.*

3.2. Subestructuras de modelo

Empezamos esta sección con la siguiente definición.

Definición 3.7. *Decimos que un triple de Hovey* $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{W})$ *en una categoría exacta* $\mathcal{E}$ *es* ***hereditario a izquierda*** *si los pares de cotorsión* $(\mathcal{F}, \mathcal{G} \cap \mathcal{W})$ *y* $(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}, \mathcal{G})$ *son ambos hereditarios a izquierda, esto es, las clases* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ *son resolventes en* $\mathcal{E}$*. Dualmente, tenemos la definición de* ***triples de Hovey hereditarios a derecha****. Finalmente, un triple de Hovey es* ***hereditario*** *si es hereditario a izquierda y a derecha.*
En el caso de que $\mathcal{E}$ *sea una sub-categoría exacta de una categoría abeliana* $\mathcal{A}$*, el triple de Hovey* $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{W})$ *(en* $\mathcal{E}$*) es* ***hereditario fuerte a izquierda*** *o* ***hereditario fuerte a derecha*** *si los pares de cotorsión* $(\mathcal{F}, \mathcal{G} \cap \mathcal{W})$ *y* $(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}, \mathcal{G})$ *son hereditarios fuertes a izquierda, o hereditarios fuertes a derecha, en* $\mathcal{E}$*, respectivamente (ver Definición 2.10).*

Recordamos de [36, Definición 5.3] la noción de subestructura de modelo. Dada una categoría exacta $\mathcal{E}$ equipada con una estructura de modelo exacta $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})$ y una subcategoría plena y exacta $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$, una estructura de modelo $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{T}_0, \mathcal{R}_0)$ sobre $\mathcal{E}_0$ es una **estructura de submodelo** de $\mathcal{M}$ si las siguientes dos condiciones se cumplen:

(a) el funtor inclusión $i : \mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ preserva la estructura de modelo $\mathcal{M}_0$, esto es, toda cofibración, fibración y equivalencia débil en $\mathcal{M}_0$ es una cofibración, fibración y equivalencia débil en $\mathcal{M}$, respectivamente;

(b) el funtor inducido $\mathrm{Ho}(i) : \mathrm{Ho}_{\mathcal{M}_0}(\mathcal{E}_0) \to \mathrm{Ho}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ es una equivalencia de categorías.

La condición (a) de arriba es equivalente a decir que $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{T}_0$ son subcategorías plenas de $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente.
En [36], Gillespie construye de un triple de Hovey $(\mathcal{F}, \mathcal{W}, \mathcal{G})$ en $\mathcal{E}$, subestructuras de modelo (de la única estructura de modelo en $\mathcal{E}$ resultante de $(\mathcal{F}, \mathcal{W}, \mathcal{G})$) sobre las subcategorías plenas $\mathcal{Q} = \mathcal{F}$, $\mathcal{R} = \mathcal{G}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ de objetos cofibrantes, fibrantes y cofibrantes-fibrantes, respectivamente. La primer propiedad obtenida después de asumir que $(\mathcal{F}, \mathcal{W}, \mathcal{G})$ es hereditario, es que las subcategorías resultantes $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ son exactas débilmente completas por idempotentes [36, Lema 5.1, Proposición 5.2]. Las resultantes subestructuras de modelo sobre $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ son descritas en [36, Proposición 5.2]. En esta sección aplicamos este resultado para verificar cuáles subestructuras de modelo son obtenidas de un par de Frobenius fuerte a izquierda.

Proposición 3.8. *Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathcal{A}$*. Entonces la terna* $(\mathcal{X}, \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ *es un triple de Hovey en* $\mathcal{X}^\wedge$*. Más aún,* $(\mathcal{X}, \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ *es un triple de Hovey hereditario fuerte en* $\mathcal{X}^\wedge$*, si y sólo si,* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ *y* $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$*.*

Demostración. El hecho que $(\mathcal{X}, \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ sea un triple de Hovey hereditario en $\mathcal{X}^\wedge$, se obtiene de las propiedades de los dos pares de cotorsión $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ en la subcategoría exacta $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{A}$. Mientras que la caracterización de $(\mathcal{X}, \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ como un triple de Hovey hereditario fuerte es consecuencia del Teorema 2.15 . □

Observación 3.9. *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces la inclusión* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ *en el enunciado previo puede ser reemplazada por* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$*, ya que la Proposición 2.11 asegura que* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) = \operatorname{Proj}(\mathcal{X}^\wedge)$*; y de este modo* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$*. Observemos también que* $\operatorname{Proj}(\mathcal{X}^\wedge) \subseteq \omega$*, ya que* $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ *es un par de cotorsión en* $\mathcal{X}^\wedge$*.*

Después de aplicar la Proposición 3.8, junto con [36, Proposición 5.2], obtenemos las siguientes subestructuras de modelo a partir de un par de Frobenius a izquierda.

Proposición 3.10. *Sea* $(\mathcal{X}, \omega)$ *un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathcal{A}$*. Si* $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ [1] *y* $\operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$*, entonces existen las siguientes subestructuras de modelo de* $\mathcal{M}^{\text{proj}}_{\text{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$*:*

(a) *Una estructura exacta de modelo sobre* $\mathcal{X}$*, donde los objetos cofibrantes y fibrantes están dados por* $\mathcal{X}$*, y los objetos triviales por* ω*.*

(b) *Una estructura exacta de modelo sobre* $\omega^\wedge$*, donde* ω *es la clase de objetos cofibrantes y* $\omega^\wedge$ *la clase de objetos fibrantes*

En [36, Proposición 5.2], la subestructura de modelo resultante sobre $\mathcal{R} := \mathcal{X}^\wedge$ coincide con $\mathcal{M}^{\text{proj}}_{\text{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$. Esto sucede ya que $\mathcal{M}^{\text{proj}}_{\text{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$ es una estructura de modelo proyectiva. Por otro lado, las subestructuras de modelo resultantes sobre $\mathcal{Q} := \mathcal{X}$ y sobre $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} := \mathcal{X}$, coinciden.

Ejemplo 3.11. *La estructura de modelo de* (a) *es un ejemplo de lo que Gillespie llama* ***estructura de modelo de Frobenius****, esto es, que todo objeto en la categoría exacta sea fibrante y cofibrante.*
Recordemos que una categoría de Frobenius es una categoría exacta en la cual las nociones de objetos proyectivos e inyectivos coinciden, y existen suficientes objetos proyectivos e inyectivos. En toda categoría de Frobenius $\mathcal{E}$*, se tiene que* $(\mathcal{E}, \operatorname{Proj}(\mathcal{E}), \mathcal{E})$ *es un triple de Hovey, el cual da lugar a una estructura de modelo de Frobenius con* $\operatorname{Proj}(\mathcal{E})$ *como la clase de objetos triviales.*
Un ejemplo de una categoría de Frobenius está dado por $\operatorname{Mod}(R)$*, con* R *un anillo casi-Frobenius. Otro ejemplo está dado por* $\operatorname{GProj}(R)$ *(con* R *un anillo arbitrario). Observe que* $\operatorname{GProj}(R)$ *y* $\operatorname{Mod}(R)$ *coinciden en el caso que* R *sea un anillo casi-Frobenius. Se sigue que existe una única estructura exacta de modelo de Frobenius sobre* $\operatorname{GProj}(R)$ *con* $\operatorname{Proj}(R)$ *como la clase de objetos triviales. Esta estructura puede ser también obtenida al definir* $\mathcal{A} := \operatorname{Mod}(R), \mathcal{X} = \operatorname{GProj}(R)$ *y* $\omega := \operatorname{Proj}(R)$ *en la Proposición 3.10.*

[1] Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, esta inclusión puede ser reemplazada por $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$, pues la Proposición 2.11 afirma que $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) = \operatorname{Proj}(\mathcal{X}^\wedge)$; y de este modo $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ (observe que $\operatorname{Proj}(\mathcal{X}^\wedge) \subseteq \omega$ pues $(\omega, \mathcal{X}^\wedge)$ es un par de cotorsión en $\mathcal{X}^\wedge$).

3.3. La categoría de homotopía de una estructura de modelo de Auslander-Buchweitz

Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Por simplicidad escribimos la categoría de homotopía de la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz $\mathcal{M}_{\text{AB}}^{\text{proj}}(\mathcal{X}, \omega)$ sobre $\mathcal{X}^\wedge$ como

$$\text{Ho}_{\text{AB}}^{\text{proj}}(\mathcal{X}^\wedge) := \text{Ho}_{\mathcal{M}_{\text{AB}}^{\text{proj}}(\mathcal{X},\omega)}(\mathcal{X}^\wedge).$$

En esta sección, presentamos una descripción explícita de $\text{Ho}_{\text{AB}}^{\text{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)$, y hacemos ver cómo esta categoría de homotopía es equivalente a la categoría estable de una subcategoría de Frobenius de $\mathcal{A}$.

Las estructuras exactas de modelo sirven como descripciones, desde un punto de vista homotópico, de un buen número de importantes categorías consideradas en álgebra homológica relativa, tales como categorías derivadas y categorías estables. Por ejemplo, es bien conocido que la categoría derivada de un anillo es equivalente a la categoría de homotopía de la estructura de modelo proyectiva sobre la categoría de complejos de cadena sobre un anillo R, descrita por Hovey en [50, Sección 2.3]. Otro ejemplo sucede en el caso de que R sea casi-Frobenius, donde la categoría estable de módulos de R es equivalente a la categoría de homotopía de la estructura de modelo estable sobre $\text{Mod}(R)$ descrita en [50, Sección 2.2]. De modo que podemos ver que las estructuras de modelo exactas pueden contener información homológica y homotópica dependiendo sobre cual clase de equivalencias débiles estemos localizando.
En esta ocasión, nuestro marco teórico favorece la construcción de modelos desde categorías estables mas generales. Seremos mas específicos sobre esta afirmación al calcular la categoría de homotopía asociada a la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz de un par de Frobenius fuerte a izquierda $(\mathcal{X}, \omega)$.
Recordamos que dada una estrucura exacta de modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})$ sobre una categoría exacta $\mathcal{E}$, dos morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{E}$ son **homotopícos a derecha** si y sólo si $f - g$ se factorizan a través de un objeto en $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T}$. Dualmente, f y g son **homotópicos a izquierda** si y sólo si $g - f$ se factoriza a través de un objeto en $\mathcal{R} \cap \mathcal{T}$. Lo anterior fue propuesto por Gillespie en [36, Proposición 4.4]. Si el triple de Hovey $(\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})$ es hereditario, las subestructuras de modelo sobre $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ son **estructuras de submodelo plenamente equivalentes**, esto es:

1. Las inclusiones $i_\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $i_\mathcal{R} : \mathcal{R} \to \mathcal{E}$ y $i_{\mathcal{Q}\cap\mathcal{R}} : \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{E}$ preservan las correspondientes estructuras de modelo.

2. Los funtores inducidos en homotopía $\text{Ho}(i_\mathcal{Q}) : \text{Ho}(\mathcal{Q}) \to \text{Ho}(\mathcal{E})$, $\text{Ho}(i_\mathcal{R}) : \text{Ho}(\mathcal{R}) \to \text{Ho}(\mathcal{E})$ y $\text{Ho}(i_{\mathcal{Q}\cap\mathcal{R}}) : \text{Ho}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}) \to \text{Ho}(\mathcal{E})$ son equivalencias de categorías.

Estos dos resultados fueron probados en [36, Proposición 5.2], y podemos aplicarlos al triple de Hovey asociado a la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz $\mathcal{M}_{\text{AB}}^{\text{proj}}(\mathcal{X}, \omega)$. Más aún, el triple de Hovey asociado a esta estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz, $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X},\omega)$ es hereditario, como probamos a continuación.

Proposición 3.12. *Sea $(\mathcal{X},\omega)$ un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces, la clase $\omega^\wedge$ es gruesa a derecha. Si además $(\mathcal{X},\omega)$ es fuerte, entonces $(\mathcal{X},\omega^\wedge,\mathcal{X}^\wedge)$ es un triple de Hovey hereditario en $\mathcal{X}^\wedge$.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, tenemos la igualdad $\omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge$. Las clases $\mathcal{X}^\perp$ y $\mathcal{X}^\wedge$ son claramente gruesas a derecha, y de aquí $\omega^\wedge$ es gruesa a derecha.
Ahora supongamos que $(\mathcal{X},\omega)$ es fuerte. Entonces, tenemos los pares de cotorsión $(\mathcal{X},\omega^\wedge)$ y $(\omega,\mathcal{X}^\wedge)$ en la categoría exacta $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{A}$. Primero, observemos que ω es la clase de objetos proyectivos en $\mathcal{X}^\wedge$. Por lo que se sigue que $\mathcal{X}$ y ω son clases resolventes en $\mathcal{X}^\wedge$. Por otro lado, las clases $\omega^\wedge$ y $\mathcal{X}^\wedge$ son gruesas a derecha, y así son corresolventes en $\mathcal{X}^\wedge$. $\square$

De hecho, por la Proposición 3.8 se sigue que si $\mathcal{X}^\wedge$ está equipada con la estructura de modelo AB proyectiva $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X},\omega)$, entonces la subcategoría de objetos cofibrantes-fibrantes $\mathcal{Q}\cap\mathcal{R} = \mathcal{X}$ está equipada con la subestructura de modelo $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} = (\mathcal{X},\omega,\mathcal{X})$ de $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X},\omega)$ descrita en la Proposición 3.10, y las correspondientes categorías de homotopía $\mathrm{Ho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)$ y $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}}(\mathcal{X})$ son equivalentes. Una ventaja de este hecho es que $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}\mathrm{cf}}(\mathcal{X})$ es mas fácil de describir que $\mathrm{Ho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)$. Primero que todo, sobre la subcategoría $\mathcal{Q}\cap\mathcal{R} = \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^\wedge$, las relaciones de ser homotópico a izquierda y a derecha (denotada por $\sim$) coinciden. Por otro lado, por Hovey [50, Teorema 1.2.10 (i)], existe una equivalencia de categorías $\mathrm{Ho}_{\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}}(\mathcal{X}) \cong (\mathcal{Q}\cap\mathcal{R})/\sim\, = \mathcal{X}/\sim$. Por la Observación 1.6, $\mathcal{X}$ es una categoría de Frobenius, y para cada par de morfismos $f,g : X \to Y$ tenemos que $f \sim g$ si y sólo si $g-f$ se factoriza a través de un objeto proyectivo en $\mathcal{X}$ (esto es, un objeto en ω). De aquí el cociente $\mathcal{X}/\sim$ es la **categoría estable** de $\mathcal{X}$.
La descripción de $\mathrm{Ho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)$ involucra algunos conocimientos de reemplazos cofibrantes y fibrantes. Si X es un objeto en la categoría exacta $\mathcal{E}$ con una estructura exacta de modelo $\mathcal{M}$, podemos factorizar el morfismo $0 \to X$ como una cofibración $0 \to QX$ seguido por una fibración trivial $QX \to X$. El objeto QX es entonces cofibrante y es llamado un **reemplazo cofibrante** de X. Dualmente, uno tiene la noción de reemplazo fibrante de X, usualmente denotado como RX. En este caso, $\mathcal{M}$ es la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz, $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)$, tenemos por [50, Teorema 1.2.10 (ii)] que para todo $X,Y \in \mathcal{X}^\wedge$ existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X}^\wedge)}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}^\wedge}(QX,RY)/\sim .$$

Como todo objeto en $\mathcal{X}^\wedge$ es fibrante, podemos tomar $RY = Y$. Resumimos estos hechos en el siguiente resultado.

Proposición 3.13. *Sea $(\mathcal{X},\omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Para la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz, $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X},\omega) = (\mathcal{X},\mathcal{X}^\wedge,\omega^\wedge)$ sobre $\mathcal{X}$, existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{X}^\wedge)}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}^\wedge}(QX,Y)/\sim$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}^\wedge$*, donde* $f \sim g$*, si y sólo si,* $g - f$ *se factoriza a través de un objeto en* ω*. Más aún,* $\mathrm{Ho}(\mathcal{X}^\wedge)$ *es equivalente a la categoría estable* $\mathcal{X}/\sim$*.*
Dualmente, si $(\nu, \mathcal{Y})$ *es un par de Frobenius fuerte a derecha en* $\mathcal{A}$*. Para la estructura de modelo inyectiva de Auslander-Buchweitz,* $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\nu, \mathcal{Y}) = (\mathcal{Y}^\vee, \mathcal{X}, \nu^\vee)$ *sobre* $\mathcal{Y}^\vee$*, existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{Y}^\vee)}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^\vee}(X, RY)/\sim$$

para todo $X, Y \in \mathcal{Y}^\vee$*, donde* $f \sim g$*, si y sólo si,* $g - f$ *se factoriza a través de un objeto en* ν*. Más aún,* $\mathrm{Ho}(\mathcal{Y}^\vee)$ *es equivalente a la categoría estable* $\mathcal{Y}/\sim$*.*

Observación 3.14. *Dado un par de Frobenius fuerte a izquierda* $(\mathcal{X}, \omega)$ *en* $\mathcal{A}$*, sabemos por la Proposición 3.13 que* $\mathrm{Ho}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}^\wedge)$ *es equivalente a la categoría estable* $\mathcal{X}/\sim$*. Por otro lado, por la Observación 1.6,* $\mathcal{X}$ *es una categoría de Frobenius, y así* $\mathcal{X}/\sim$ *es de hecho triangulada por Happel [42, Teorema I.2.6]. Este último hecho sobre* $\mathcal{X}/\sim$ *también puede deducirse de Beligiannis [16, Teorema 2.11], ya que* $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\omega$ *y* ω *es un cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$*. Es importante declarar que el concepto de categoría triangulada empleado aquí es el clásico definido por Verdier [76]. Uno puede estar tentado a decir que* $(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}^\wedge))$ *es una categoría de modelo estable en el sentido de Hovey [50, Capítulo 7], esto es, esta es una categoría de modelo cuya categoría de homotopía es triangulada. Sin embargo, uno debe ser cuidadoso con esta terminología. La definición de categoría triangualda en [50] es relativamente nueva y mas fuerte que la clásica, y requiere de un moderno tratamiento de categorías de modelo que usa (co)límites pequeños. Podemos solamente afirmar que* $(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}^\wedge))$ *es una categoría de modelo exacta con estructura de modelo proyectiva cuya categoría de homotopía es una categoría triangulada estable clásica, pero no necesariamente triangulada en el sentido de Hovey.*

La proposición previa codifica la categoría estable $\mathrm{Stmod}(R)$ de un anillo casi-Frobenius R, como ejemplo particular, al definir $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$ (con R un anillo casi-Frobenius), $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R) = \mathrm{Mod}(R)$, y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$. Esto es explicado en detalle abajo.

Ejemplo 3.15. *Recuperamos algunos ejemplos de categorías de homotopía construidos por D. Bravo, M. Hovey y J. Gillespie.*

1) *Consideremos la categoría de homotopía* $\mathrm{Ho}(\mathrm{GProj}^{<\infty}(R))$ *de la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz,*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)).$$

   Por la Proposición 3.13, tenemos que dos morfismos $f, g : X \to Y$ *en* $\mathrm{GProj}^{<\infty}(R)$ *son homotópicos si su diferencia se factoriza a través de un módulo proyectivo. La categoría de homotopía de esta estructura de modelo es la categoría estable proyectiva de módulos* $\mathrm{GProj}(R)/\sim$*, la cual es también la categoría de homotopía de la estructura de modelo abeliana de Hovey* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Mod}(R), \mathrm{Proj}^{<\infty}(R))$ *sobre* $\mathrm{Mod}(R)$*, cuando* R *es un anillo de Gorenstein [51, Sección 9]. Esta categoría estable de módulos coincide* *con la categoría estable de módulos usual* $\mathrm{Stmod}(R)$*, en el caso que* R *es un anillo casi-Frobenius, esto es, un anillo* 0*-Gorenstein. Usando la Proposición 3.13, obtenemos similares conclusiones en el caso inyectivo, y la misma categoría estable de módulos de* $\mathrm{Ho}(\mathrm{GInj}^{<\infty}(R))$ *en el caso que* R *es un anillo casi-Frobenius.*

2) *Recordando el Ejemplo 3.6, las categorías de homotopía de las estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)) \text{ y } \mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R))$$

son exactamente las categorías de homotopía obtenidas en [15, Teorema 5.7 y Teorema 5.8].

Capítulo 4

Contextos de Auslander-Buchweitz, pares de cotorsión, pares de Frobenius y estructuras de modelo.

Presentamos en éste capítulo correspondencias uno a uno entre los objetos que hemos estudiado hasta ahora: pares de Frobenius, pares de cotorsión relativos y estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz. Los contextos de Auslander-Buchweitz jugaran un importante papel en esta sección y también aparecerán en esta correspondencia.

4.1. Contextos de Auslander-Buchweitz, pares de Frobenius y pares de cotorsión relativos

La siguiente definición de contexto de Auslander-Buchweitz se debe a M. Hashimoto en [44, Teorema 1.1.2.10], pero se escribirá de acuerdo a la terminología que hemos estado usando hasta ahora.

Definición 4.1. *Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un* ***pre-contexto de Auslander-Buchweitz débil a izquierda (AB pre-contexto débil a izquierda****, para abreviar) en $\mathcal{A}$ si:*

(a) *El par $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda.*

(b) $\mathcal{G} = \mathrm{Thick}^{+}(\mathcal{G})$.

Si adicionalmente:

- *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ satisface que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^{\wedge}$, decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un* ***AB contexto débil a izquierda*** *in $\mathcal{A}$;*

- $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *satisface que* $\mathcal{F}^\wedge = \mathcal{A}$, *decimos que* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un* ***AB contexto a izquierda*** *en* $\mathcal{A}$.

La noción de AB precontexto débil a derecha se define dualmente, esto es, un par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *de clases de objetos en* $\mathcal{A}$, *con* $\nu := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, *tal que:*

(i) *El par* $(\nu, \mathcal{G})$ *es un par de Frobenius a derecha.*

(ii) $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{F})$.

Si adicionalmente:

- $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *satisface que* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^\vee$, *decimos que* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un* ***AB contexto débil a derecha*** *en* $\mathcal{A}$;

- $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *satisface que* $\mathcal{G}^\vee = \mathcal{A}$, *decimos que* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un* ***AB contexto a derecha*** *en* $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4.2. *Las clases* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$, *en el Teorema 1.30, forman un AB contexto débil a izquierda.*

Observación 4.3. *Existen nociones ligeramente distintas para AB-contextos en la literatura, tal como la considerada por A. Beligiannis [16, Definición 4.4]. Aquí, el autor trabaja asumiendo que* $\mathcal{F}$ *es* ω*-resolvente y que* $\mathcal{G}$ *es cerrada por extensiones de sucesiones* ω*-admisibles. Otra diferencia es que nosotros pedimos que* $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{F})$ *y* $\mathcal{G} = \mathrm{Thick}^{+}(\mathcal{G})$. *Aunque en la Definición 4.1, la clase* $\mathcal{F}$ *es* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$*-resolvente y* $\mathcal{G}$ *es cerrada por extensiones de sucesiones* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$*-admisibles en el sentido de [16], no se cumple en general que las subcategorías* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ *y* ω *coincidan, como veremos mas adelante.*

El objetivo de éste capítulo es estudiar la relación que tienen los AB contextos débiles a izquierda con pares de Frobenius a izquierda y pares de cotorsión relativos. Específicamente, nos enfocaremos en probar el siguiente teorema de correspondencia.

Teorema 4.4. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana. Consideremos las siguientes clases de objetos en la categoría producto* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} &:= \{(\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A} : (\mathcal{X}, \omega) \text{ es un par de Frobenius a izquierda en } \mathcal{A}\},\\
\mathfrak{C} &:= \{(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A} : (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ es un AB contexto débil a izquierda en } \mathcal{A}\},\\
\mathfrak{P} &:= \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A} : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión en } \mathcal{A} \text{ con } \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0\}.
\end{aligned}$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

1. *Existe una correspondencia uno a uno*

$$\Phi : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}, \;\; \textit{dada por } (\mathcal{X}, \omega) \mapsto (\mathcal{B} := \mathcal{X}, \mathcal{C} := \omega^\wedge),$$

con inversa

$$\Psi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{F}, \;\; \textit{dada por } (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \mapsto (\mathcal{X} := \mathcal{B}, \omega := \mathcal{B} \cap \mathcal{C}).$$

2. $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}$.

Primero mostramos cómo obtener pares de cotorsión relativos a partir de AB contextos débiles.

Teorema 4.5. *Sean* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *un AB contexto débil a izquierda en* $\mathcal{A}$*, y* $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$*. Entonces:*

(a) $\omega = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp}$ *y* $\omega^{\wedge} = \mathcal{G}$*.*

(b) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un par de* $\mathcal{F}^{\wedge}$*-cotorsión en* $\mathcal{A}$ *con* $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$*.*

Demostración. Por un lado $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$, y por el Teorema 2.7 tenemos un par de $\mathcal{F}^{\wedge}$-cotorsión $(\mathcal{F}, \omega^{\wedge})$ con $\omega = \mathcal{F} \cap \omega^{\wedge} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{F}^{\wedge}) = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp}$. Por otro lado, $\omega \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} = \mathrm{Thick}^{+}(\mathcal{G})$ implica que $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{G}$. Mostramos ahora la inclusión restante. Sea $N \in \mathcal{G}$. Entonces $N \in \mathcal{F}^{\wedge}$ pues $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^{\wedge}$, y podemos aplicar el Teorema 1.12 para obtener la sucesión exacta

$$0 \to K \to A \to N \to 0,$$

con $A \in \mathcal{F}$ y $K \in \omega^{\wedge}$. Como $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{G}$, tenemos que $K \in \mathcal{G}$. Entonces $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} =: \omega$ pues $\mathcal{G}$ es cerrado por extensiones. Se sigue que $N \in \omega^{\wedge}$. Por lo tanto $\mathcal{G} = \omega^{\wedge}$, y de este modo $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{F}^{\wedge}$-cotorsión en $\mathcal{A}$.

Solo resta mostrar que $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Sea $B \in \mathcal{G}$. Consideremos una sucesión exacta corta

$$0 \to K \to A \to B \to 0,$$

con $A \in \mathcal{F}$ y $K \in \omega^{\wedge} = \mathcal{G}$. Por el dual de [23, Lema 1.1], tenemos

$$\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(B) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(A), \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(K) - 1\},$$

donde $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(K) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\omega^{\wedge})$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\omega)$, por el Lema 1.8. Por otro lado, $\mathrm{id}_{F}(\omega) = 0$. Entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(K) = 0$, y de aquí

$$\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(B) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(A).$$

Por otro lado, $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \omega$ y de este modo $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{G}$. □

Lema 4.6. *Sea* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a izquierda en* $\mathcal{A}$ *tal que* $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$*. Entonces* $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{F})$*. Dualmente, si* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *es un par de* $\mathcal{S}$*-cotorsión a derecha en* $\mathcal{A}$ *tal que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = 0$*, entonces* $\mathcal{G} = \mathrm{Thick}^{+}(\mathcal{G})$*.*

Demostración. Primero, sabemos que $\mathcal{F} = {}^{\perp_1, \mathcal{S}}\mathcal{G} := {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \mathcal{S}$. Así, tenemos que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo sumandos directos y extensiones. Es suficiente mostrar que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo núcleos de epimorfismos entre objetos de $\mathcal{F}$. Para esto, supongamos que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

con $B, C \in \mathcal{F}$. Sean $G \in \mathcal{G}$. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(B, G) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, G) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(C, G),$$

donde $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(B, G) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(C, G) = 0$, pues $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. De aquí $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, G) = 0$ para todo $G \in \mathcal{G}$, y de este modo $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{G}$. Por otro lado $A \in \mathcal{S}$, ya que $\mathcal{S}$ es gruesa y $B, C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$. Por lo tanto $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \mathcal{S} =: {}^{\perp_{1,\mathcal{S}}}\mathcal{G} = \mathcal{F}$. □

Proposición 4.7. *Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de $\mathcal{S}$-cotorsión en $\mathcal{A}$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un AB pre-contexto débil a izquierda y a derecha en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Las igualdades $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^-(\mathcal{F})$ y $\mathcal{G} = \mathrm{Thick}^+(\mathcal{G})$ se obtienen del Lema 4.6 y su dual. Por otro lado, $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ implica que $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\omega) = 0$, donde $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Ahora sea $F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, existe una sucesión exacta

$$0 \to F \to G \to F' \to 0,$$

con $F' \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es cerrada por extensiones, tenemos que $G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} =: \omega$; y de este modo ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{F}$. Finalmente, $\mathrm{pd}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ y $\omega \subseteq \mathcal{F}$ implican que $\mathrm{pd}_{\mathcal{G}}(\omega) = 0$. Dualmente, para todo $G \in \mathcal{G}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \to G' \to F \to G \to 0,$$

con $F \in \mathcal{F}$ y $G' \in \mathcal{G}$, y así $F \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} =: \omega$. Por lo tanto, ω es un generador relativo en $\mathcal{G}$. □

Teorema 4.8. *Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión en $\mathcal{A}$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Entonces:*

(a) $\mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\wedge$.

(b) *$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un AB contexto izquierdo débil en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.7, el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un AB precontexto débil a izquierda. Entonces $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda, y de este modo el Teorema 1.22 implica que $\mathcal{F}^\wedge = \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Finalmente, solo necesitamos mostrar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^\wedge$. Pero $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\wedge$ así obtenemos el resultado. □

A partir de ahora denotaremos por $\mathcal{A}^2$ a la categoría producto $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Demostración del Teorema 4.4. Definamos la correspondencia

$$\Phi \colon \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C},$$
$$(\mathcal{X}, \omega) \mapsto (\mathcal{B} := \mathcal{X}, \mathcal{C} := \omega^\wedge).$$

Veamos que Φ está bien definida, esto es, que si $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda, entonces $(\mathcal{B} := \mathcal{X}, \mathcal{C} := \omega^\wedge)$ es un AB contexto débil a izquierda. Por la Proposición 1.9 tenemos

$$(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge) = (\mathcal{X}, \omega),$$

y así $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ es un par de Frobenius a izquierda. Solo queda mostrar que $\mathcal{C} = \mathrm{Thick}^+(\mathcal{C})$ y que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}^\wedge$. Por el Teorema 2.7, $\mathcal{C} = \omega^\wedge = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{X}^\wedge$, y también $\mathcal{X}^\perp$ y $\mathcal{X}^\wedge$ son gruesas a derecha. Entonces, $\mathcal{C}$ es gruesa a derecha y de aquí $\mathcal{C} = \mathrm{Thick}^+(\mathcal{C})$. Finalmente, la inclusión $\mathcal{C} = \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{B}^\wedge$ es clara.

Tenemos que Φ es una función bien definida. Para mostrar que es uno a uno, construimos la aplicacón inversa. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi \colon \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{F}, \\ (\mathcal{B}, \mathcal{C}) &\mapsto (\mathcal{X} := \mathcal{B}, \omega := \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \end{aligned}$$

la cual esta bien definida por la definición de AB contexto débil a izquierda. Mostraremos que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}}$ y $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$.

Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius a izquierda. Entonces

$$\Psi \circ \Phi(\mathcal{X}, \omega) = \Psi(\mathcal{X}, \omega^\wedge) = (\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge) = (\mathcal{X}, \omega)$$

donde $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ por la Proposición 1.9. Por otro lado, si $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ es un AB contexto débil a izquierda, tenemos

$$\Phi \circ \Psi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \Phi(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{B}, (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})^\wedge) = (\mathcal{B}, \mathcal{C})$$

donde $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})^\wedge = \mathcal{C}$ por el Teorema 4.5.

Ahora nos enfocamos en mostrar que $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}$. Sea $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathfrak{C}$ un AB contexto débil a izquierda. Entonces, por el Teorema 4.5, el par $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ es un par de $\mathcal{B}^\wedge$-cotorsión con $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 0$, donde $\mathcal{B}^\wedge = \mathrm{Thick}(\mathcal{B})$ por el Teorema 1.22. De aquí $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathfrak{P}$, y $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}$. La inclusión restante $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{P}$ se siguen del Teorema 4.8. $\square$

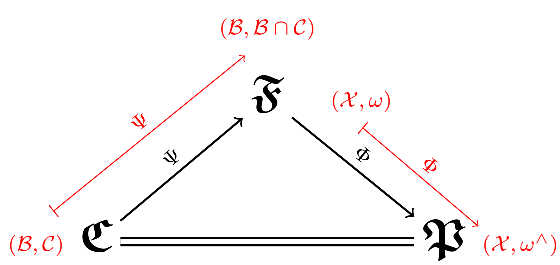

Figura 4.1: Correspondencias entre pares de Frobenius a izquierda, AB contextos débiles a izquierda y pares de cotorsión relativos en categorías abelianas.

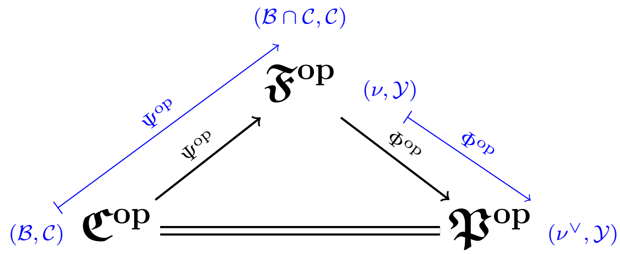

Figura 4.2: Correspondencias entre pares de Frobenius a derecha, AB contextos débiles a derecha y pares de cotorsión relativos en categorías abelianas.

4.2. Pares de cotorsión relativos y clases cubrientes

Es importante recordar en este punto, cómo los pares de cotorsión se relacionan con clases cubrientes y envolventes. Un par de cotorsión $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ en $\mathcal{A}$ se denomina *perfecto* si $\mathcal{F}$ es cubriente y $\mathcal{G}$ es envolvente. En esta sección, proponemos el análogo relativo de pares de cotorsión perfectos. Mostraremos su relación con clases cubrientes y envolventes. Para esto, la clase $\mathfrak{G}$ definida por

$$\mathfrak{G} := \{\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A} : \mathcal{F} \text{ es una clase saturada a izquierda en } \mathcal{A}, \text{ y precubriente en } \mathrm{Thick}(\mathcal{F})\}.$$

tiene un importante papel en el Teorema 4.4, cuando pedimos condiciones extra sobre la categoría $\mathcal{A}$.

Definición 4.9. *Sea $\mathcal{S}$ una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$. Un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ se dice* ***perfecto a izquierda*** *si todo objeto en $\mathcal{S}$ tiene una $\mathcal{F}$-cubierta. El* ***par de $\mathcal{S}$-cotorsión perfecto a derecha*** *se define dualmente. Finalmente, un par de $\mathcal{S}$-cotorsión es* ***perfecto*** *si todo objeto en $\mathcal{S}$ tiene una $\mathcal{F}$-cubierta y una $\mathcal{G}$-envolvente.*

Es posible el estudio de alguna relación entre las clases $\mathfrak{G}$ y :

$$\mathfrak{P}' := \left\{(\mathcal{F},\mathcal{G})\subseteq\mathcal{A}^2 : \begin{array}{l}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión perfecto}\\ \text{a izquierda en } \mathcal{A}, \text{ con } \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})=0 \text{ y } \mathrm{Proj}(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{F}\end{array}\right\}\subseteq\mathfrak{P}.$$

Primero veamos cómo enviar elementos de $\mathfrak{P}'$ a $\mathfrak{G}$. Sea Θ la siguiente correspondecia:

$$\begin{aligned}\Theta\colon \mathfrak{P}' &\to \mathfrak{G}\\ (\mathcal{F},\mathcal{G}) &\mapsto \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Afirmamos que Θ está bien definida. Esto será consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 4.10. *Sea $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión en $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase gruesa a izquierda y precubriente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$.*

Demostración. Por (scp4) en la Proposición 2.6, todo objeto en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ tiene una $\mathcal{F}$-precubierta epi. Solo queda probar que $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{F})$, lo cual se sigue del Lema 4.6 $\square$

Obtenemos así que, para todo $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathfrak{P}'$, la clase $\mathcal{F}$ es gruesa a izquierda y precubriente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Lo anterior junto con el hecho de que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$, implica que $\mathcal{F}$ es saturada a izquierda en $\mathcal{A}$, esto es, Θ está bien definida.
Bajo ciertas condiciones, es posible construir una inversa a izquierda para la correspondencia de arriba. A saber, necesitamos que la categoría base $\mathcal{A}$ sea Krull-Schmidt. Recordemos que una categoría $\mathcal{A}$ es **Krull-Schmidt** si es aditiva y todo objeto se descompone en una suma directa finita de objetos que tienen anillo de endomorfismos local.

Teorema 4.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana Krull-Schmidt con suficientes proyectivos. Entonces, la función $\Theta : \mathfrak{P}' \to \mathfrak{G}$ es inyectiva.*

Antes de poder probar éste resultado, necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.12. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría Krull-Schmidt con suficientes proyectivos, y $\mathcal{S}$ una subcategoría gruesa de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ es saturada a izquierda en $\mathcal{A}$, la cual también es precubriente en $\mathcal{S}$, entonces las siguientes condiciones se se satisfacen:*

(a) *Para cada $S \in \mathcal{S}$, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to F \xrightarrow{\varphi} S \to 0,$$

donde φ es una $\mathcal{F}$-cubierta y $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{F}^{\perp_1}$.

(b) $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp_1}$.

(c) *Definiendo $\mathcal{G} := \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{S}$, el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión a izquierda que es perfecto a izquierda en $\mathcal{A}$, con $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$.*

Dualmente, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana Krull-Schmidt con suficientes inyectivos y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ es saturada a derecha en $\mathcal{A}$, la cual también es preenvolvente en $\mathcal{S}$, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión perfecto a derecha en $\mathcal{A}$, con $\mathrm{pd}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = 0$, donde $\mathcal{F} := {}^{\perp}\mathcal{G} \cap \mathcal{S}$ y ${}^{\perp}\mathcal{G} = {}^{\perp_1}\mathcal{G}$.

Demostración. Probaremos (a), (b), y (c).

(a) Sea $S \in \mathcal{S}$. Por un lado, S tiene una $\mathcal{F}$-precubierta. Luego, como $\mathcal{A}$ es una categoría Krull-Schmidt, el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(S)$ es semiperfecto (ver [53, Corolario 4.4]). Por otro lado por el [40, Corolario 2.1.10 (b)][1], S tiene una $\mathcal{F}$-cubierta, la cual puede ser tomada epi, ya que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$. Esto es, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to F \xrightarrow{\varphi} S \to 0$$

[1]El enunciado y la prueba en la referencia es para la categoría de R-módulos, pero este resultado también es valido en categorías abelianas

donde $\varphi \colon F \to S$ es una $\mathcal{F}$-cubierta. Entonces, usando el *Lema de Wakamatsu* [40, Lema 5.12][2], tenemos que $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{F}^{\perp_1}$.

(b) Es suficiente mostrar que $\mathcal{F}^{\perp_1} \subseteq \mathcal{F}^{\perp}$. Así, tomamos $Y \in \mathcal{F}^{\perp_1}$ y $F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, para cada $i \geq 0$, podemos hallar una sucesión exacta

$$0 \to K_i \to P_{i-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to F \to 0$$

donde $K_i \in \Omega^{i-1}(F)$. Observe que $K_i \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F}$ es saturada a izquierda en $\mathcal{A}$. Entonces por el Lema del Corrimiento, obtenemos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K_i, Y) = 0.$$

De aquí, concluimos que $\mathcal{F}^{\perp_1} = \mathcal{F}^{\perp}$.

(c) Verificamos las condiciones (scp1), (scp3) y (scp4) de la Proposición 2.6 para el par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

(scp1) Las inclusiones $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ son inmediatas. Por otro lado, $\mathcal{F}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$, ya que $\mathcal{F}$ es gruesa a izquierda.

(scp3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ se sigue ya que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^{\perp}$.

(scp4) Por (a) y (b), para todo $S \in \mathcal{S}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to F \xrightarrow{\varphi} S \to 0,$$

donde $\varphi \colon \mathcal{F} \to S$ es una $\mathcal{F}$-cubierta y $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{F}^{\perp}$. Mas aun $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{S}$, pues $F, S \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es gruesa. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{S} = \mathcal{G}$.

Hasta aquí, hemos probado que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión perfecto a izquierda en $\mathcal{A}$, y la condición $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$ se obtiene de la definición de $\mathcal{G}$.

□

Prueba del Teorema 4.11. Consideremos la correspondencia

$$\begin{aligned} \Omega \colon \mathfrak{G} &\to \mathfrak{P}' \\ \mathcal{F} &\mapsto (\mathcal{F}, \mathcal{G} := \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Mostraremos que Ω está bien definida y que es una inversa a izquierda de Θ. Sea $\mathcal{F} \in \mathfrak{G}$, esto es, $\mathcal{F}$ es una clase saturada a izquierda en $\mathcal{A}$, la cual es pre-cubriente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Entonces $\mathcal{F} = \mathrm{Thick}^{-}(\mathcal{F})$ y $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es pre-cubriente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$, con $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$, y $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, $\mathcal{F}$ es una clase pre-cubriente epi. Por el Lema 4.12, tenemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathfrak{P}'$. Finalmente, la igualdad $\Theta \circ \Omega = \mathrm{id}_{\mathfrak{G}}$ es fácil de verificar, y así Ω define un encaje de $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{P}'$. □

[2] Aunque el enunciado y la prueba que aparecen en la referencia son escritos para la categoría de R-módulos a derecha, los argumentos también funcionan en una categoría abeliana

¿Es posible restringir Θ a una sub-clase de $\mathfrak{P}'$, digamos $\tilde{\mathfrak{P}}$, de modo tal que $\Theta|_{\tilde{\mathfrak{P}}}$ defina una correspondencia uno a uno a subclases de $\mathfrak{G}$, digamos $\tilde{\mathfrak{G}}$? Dicha pregunta es considerada en el siguiente resultado.

Teorema 4.13. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana Krull-Schmidt, con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre las siguientes clases:*

$$\tilde{\mathfrak{P}} := \left\{ (\mathcal{F},\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{c} (\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión perfecto en } \mathcal{A} \\ \text{con } \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0, \text{ Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}, \text{ y Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Thick}(\mathcal{F}) \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{G}} := \left\{ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ es una clase saturada a izquierda en } \mathcal{A}, \text{ y precubriente en Thick}(\mathcal{F}), \\ \text{tal que Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Thick}(\mathcal{F}) \end{array} \right\}.$$

Demostración. Primero veamos que todo par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ en $\tilde{\mathfrak{P}}$ es llevado a $\tilde{\mathfrak{G}}$ vía Θ. Por la Proposición 4.10, tenemos que $\mathcal{F}$ es una clase saturada a izquierda en $\mathcal{A}$, precubriente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. El hecho de que $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ implica $\mathcal{F} \in \tilde{\mathfrak{G}}$. Así obtenemos que la restricción de Θ sobre $\tilde{\mathfrak{P}}$ define una correspondencia $\tilde{\Theta} \colon \tilde{\mathfrak{P}} \to \tilde{\mathfrak{G}}$.

Ahora construimos la inversa $\tilde{\Omega} \colon \tilde{\mathfrak{G}} \to \tilde{\mathfrak{P}}$. Definamos $\tilde{\Omega} := \Omega|_{\tilde{\mathfrak{G}}}$. Veamos que $\tilde{\Omega}$ está bien definida. Sea $\mathcal{F} \in \tilde{\mathfrak{G}}$. Por el Lemma 4.12, tenemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G} := \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F}))$ es un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión perfecto a izquierda en $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0$. La inclusión $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ se tiene por hipótesis, y $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$ se cumple, pues $\mathcal{F}$ es saturada a izquierda en $\mathcal{A}$. Solo queda mostrar que $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión a derecha y perfecto. Verificamos solamente (scp5), ya que (scp3), y (scp2) son claras. Sea $S \in \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Mostraremos que existe una sucesión exacta corta

$$0 \to S \to G \to F \to 0,$$

donde $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to S \to I \to C \to 0,$$

donde $I \in \mathrm{Inj}(\mathcal{A})$ y $C \in \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Por otro lado, ya que $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión a izquierda, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to G' \to F \to C \to 0,$$

con $F \in \mathcal{F}$ y $G' \in \mathcal{G}$. Haciendo pullback de $I \to C$ y $F \to C$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas, donde el cuadrado inferior derecho es un pullback:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{pb}"] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3: Pullbacks de epimorfismos preservan sucesiones exactas cortas.

El renglón del medio cumple (scp5), esto es, $\mathcal{G}$ es una pre-envolvente especial en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Mas aun, $\mathcal{G}$ es saturada a derecha en $\mathcal{A}$. Para mostrar esto, observe que $\mathcal{G}$ es cerrada bajo extensiones y sumandos directos en $\mathcal{A}$. Por otro lado $\mathcal{G}$ es cerrada bajo co-núcleos de monomorfismos entre sus objetos, pues $\mathcal{G} := \mathcal{F}^\perp \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}^\perp$ y $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ son ambas cerradas bajo co-núcleos de monomorfismos entre sus objetos. Finalmente, la inclusión $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}^\perp$ es clara, y $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ se da por hipótesis, y de aquí $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$. Tenemos que $\mathcal{G}$ es una clase saturada a derecha en $\mathcal{A}$ la cual es pre-envolvente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Por el dual del Lema 4.12, tenemos que $\mathcal{G}$ es la mitad derecha de un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión a derecha y perfecto en $\mathcal{A}$, y así $\mathcal{G}$ es envolvente en $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión perfecto en $\mathcal{A}$, y así podemos definir una correspondencia $\tilde{\Omega} \colon \tilde{\mathfrak{G}} \to \tilde{\mathfrak{P}}$ como $\tilde{\Omega} := \Omega|_{\tilde{\mathfrak{G}}}$.

Ahora, mostraremos que $\tilde{\Theta}$ y $\tilde{\Omega}$ son inversas una de la otra. La igualdad $\tilde{\Theta} \circ \tilde{\Omega} = \mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{G}}}$ es fácil de verificar. Ahora sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \tilde{\mathfrak{P}}$. Tenemos:

$$\tilde{\Omega} \circ \tilde{\Theta}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \tilde{\Omega}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F})).$$

Como $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de $\mathrm{Thick}(\mathcal{F})$-cotorsión a derecha y $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}^{\perp_1}$, se obtiene la igualdad $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_1} \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\perp \cap \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$, y de este modo $\tilde{\Omega} \circ \tilde{\Theta}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Por lo tanto, $\tilde{\Theta}$ define una biyección entre $\tilde{\mathfrak{P}}$ y $\tilde{\mathfrak{G}}$. $\square$

Usando el Teorema 4.13, la correspondencia del Teorema 4.4 puede ser extendida al caso donde $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana Krull-Schmidt con suficientes proyectivos e inyectivos. Específicamente, trataremos esto en el siguiente resultado.

Corolario 4.14. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre las siguientes clases:*

$$\tilde{\mathfrak{F}} := \left\{ (\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{X}, \omega) \text{ es un par de Frobenius a izquierda en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}, \text{ y } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge} \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{P}} := \left\{ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es una par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión perfecto en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = 0, \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}, \text{ y } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{F}) \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \left\{ (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ es un AB contexto débil a izquierda en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}, \text{ y } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{B}) \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{G}} := \left\{ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ es una clase saturada a izquierda en } \mathcal{A}, \\ \text{y precubriente en Thick}(\mathcal{F}), \text{ tal que } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{F}) \end{array} \right\},$$

donde $\tilde{\mathfrak{P}} = \tilde{\mathfrak{C}}$, y las respectivas correspondencias son denotadas por $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Psi}$, y $\tilde{\Phi}$. Dualmente existe una correspondencia uno a uno entre las clases:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\nu, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\nu, \mathcal{Y}) \text{ es un par de Frobenius a derecha en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}, \text{ y } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}^{\vee} \end{array} \right\}$$

$$\tilde{\mathfrak{P}}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{G})\text{-cotorsión perfecto en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{pd}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = 0, \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}, \text{ y } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{G}) \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ es un AB contexto débil a derecha en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \operatorname{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}, \text{ y } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{C}) \end{array} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}^{\mathrm{op}} := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} : \begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ es una clase saturada a derecha en } \mathcal{A}, \text{ y pre-envolvente} \\ \text{en Thick}(\mathcal{G}), \text{ tal que } \operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Thick}(\mathcal{G}) \end{array} \right\},$$

donde $\tilde{\mathfrak{P}}^{\mathrm{op}} = \tilde{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}}$, y las respectivas correspondencias son denotadas por $\tilde{\Theta}^{\mathrm{op}}$, $\tilde{\Omega}^{\mathrm{op}}$, $\tilde{\Psi}^{\mathrm{op}}$, y $\tilde{\Phi}^{\mathrm{op}}$.

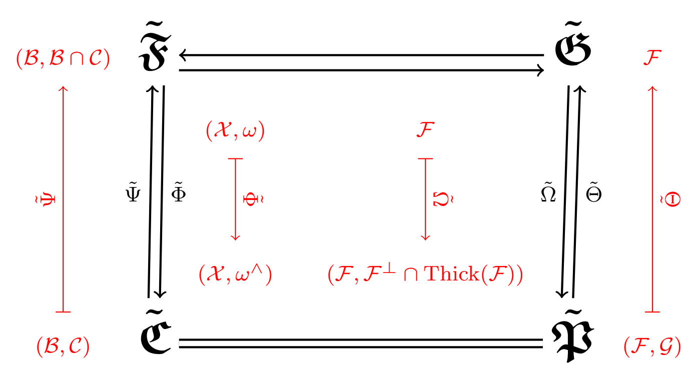

Figura 4.4: Correspondencias entre pares de Frobenius a izquierda, AB contextos débiles a izquierda, pares de cotorsión relativos y clases precubrientes en categorías abelianas Krull-Schmidt.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}\cap\mathcal{C},\mathcal{C}) & \tilde{\mathfrak{F}}^{\mathrm{op}} \arrow[rrr, shift right] \arrow[dd, shift left, "\tilde{\Phi}^{\mathrm{op}}"] & (\nu,\mathcal{Y}) \arrow[d, mapsto, "\tilde{\Phi}^{\mathrm{op}}"] & \mathcal{G} \arrow[d, mapsto, "\tilde{\Omega}^{\mathrm{op}}"] & \tilde{\mathfrak{G}}^{\mathrm{op}} \arrow[lll, shift right] \arrow[dd, shift right, "\tilde{\Omega}^{\mathrm{op}}"'] & \mathcal{G} \\
 & & (\nu^{\vee},\mathcal{Y}) & ({}^{\perp}\mathcal{G}\cap\mathrm{Thick}(\mathcal{G}),\mathcal{G}) & & \\
(\mathcal{B},\mathcal{C}) \arrow[uu, mapsto, "\tilde{\Psi}^{\mathrm{op}}"] & \tilde{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}} \arrow[uu, shift left, "\tilde{\Psi}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rrr, equal] & & & \tilde{\mathfrak{P}}^{\mathrm{op}} \arrow[uu, shift right, "\tilde{\Theta}^{\mathrm{op}}"'] & (\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[uu, mapsto, "\tilde{\Theta}^{\mathrm{op}}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 4.5: Correspondencias entre pares de Frobenius a derecha, AB contextos débiles a derecha, pares de cotorsión relativos y clases pre-envolventes en categorías abelianas Krull-Schmidt.

4.3. Algunas observaciones acerca de pares de cotorsión perfectos

El problema de obtener cubiertas, mediante ciertas clases de módulos ha tenido un importante interés recientemente en álgebra homológica y teoría de representaciones de álgebras. Esto en parte ha sido motivado por la *conjetura de la cubierta plana* [3], establecida por L. Bican, R. El Bashir y E. E. Enochs en [11]. Varios autores han estudiado las condiciones bajo las cuales es posible obtener cubiertas. Por ejemplo, se sabe que todo R-módulo a izquierda, sobre un anillo perfecto, tiene una cubierta proyectiva. Este resultado también es válido en la categoría $\mathrm{mod}(\Lambda)$ de módulos finitamente generados sobre una R-álgebra de Artin Λ, donde R es un anillo conmutativo artiniano con elemento identidad. En un contexto mas general, H. Holm y P. Jørgensen han establecido en [45, Teorema 3.4] ciertas condiciones bajo las cuales una clase $\mathcal{F}$ de R-módulos a izquierda es cubriente. Digamos, si $\mathcal{F}$ contiene al anillo base R, es cerrada bajo extensiones, coproductos, sub-módulos puros y cocientes puros de módulos, entonces $(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\perp_1})$ es un par de cotorsión perfecto, y de aquí $\mathcal{F}$ es cubriente. En el siguiente resultado, damos otras condiciones bajo las cuales una clase de objetos en una categoría abeliana es cubriente.

Corolario 4.15. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abelina Krull-Schmidt, con suficientes proyectivos e inyectivos. Entonces, existe una correspondecia uno a uno entre las siguientes clases:*

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\mathcal{A}) := \left\{(\mathcal{F},\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de cotorsión hereditario y perfecto en } \mathcal{A}, \\ \text{con } \mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}.\end{array}\right\}$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}) := \left\{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} : \begin{array}{l}\mathcal{F} \text{ es una clase saturada a izquierda y pre-cubriente en } \mathcal{A}, \\ \text{tal que } \mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}.\end{array}\right\}.$$

[3]Todo R-módulo a izquierda tiene una cubierta plana

Demostración. Por el Lema 2.3 y Teorema 4.13, la biyección está dada por $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{F}$, con inversa $\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp})$. □

Observación 4.16. *Para el caso* $\mathcal{A} := \mathrm{mod}(\Lambda)$*, donde* Λ *es un álgebra de Artin, M. Auslander e I. Reiten en [8, Proposición 3.3] probaron que* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp})$ *es un par de cotorsión hereditario y perfecto en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *con* $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathrm{mod}(\Lambda)$*, siempre que* $\mathcal{F}$ *sea una clase saturada a izquierda y pre-cubriente en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *tal que* $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathrm{mod}(\Lambda)$*. El corolario previo establece que estas dos afirmaciones son de hecho equivalentes.*

4.4. Teoremas de correspondencia de Auslander-Reiten

En esta sección, hacemos algunas observaciones sobre la relación de pares de cotorsión perfectos, clases pre-envolventes, y módulos cotilting, dentro del esquema de las correspondencias que hemos estudiado hasta aquí. En su artículo *Applications of Contravariantly Finite Subcategories* [8], M. Auslander e I. Reiten probaron el siguiente teorema de correspondencia:

Teorema 4.17. *Sea* Λ *un R-álgebra de Artin.*

- (a) *Existe una correspondencia uno a uno entre las siguientes clases:*
  - (a)-(i) *La clase de clases de isomorfismo de módulos cotilting básicos.*
  - (a)-(ii) *La clase de sub-categorías contravariantemente finitas resolventes* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *que satisfacen* $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathrm{mod}(\Lambda)$.
  - (a)-(iii) *La clase de pares de cotorsión completos* $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$*, con* $\mathcal{F}$ *resolvente y* $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathrm{mod}(\Lambda)$.
- (b) *Existe una correspondencia uno a uno entre las siguientes clases:*
  - (b)-(i) *La clase de clases de isomorfismo de módulos cotilting básicos.*
  - (b)-(ii) *La clase de sub-categorías covariantemente finitas corresolventes de* $\mathrm{inj}^{<\infty}(\Lambda)$.

La correspondencia (a)-(i) $\leftrightarrow$ (a)-(ii) está dada por $[C] \mapsto {}^{\perp}C$, donde $[C]$ denota a la clase de Λ-módulos isomorfos a C. El inverso de la previa correspondencia, está dado por $\mathcal{F} \mapsto [C_{\mathcal{F}}]$, donde $C_{\mathcal{F}}$ es el Λ-módulo cotilting definido como la suma directa de módulos $\mathcal{X}$-inyectivos indescomponibles. La prueba de estos hechos puede hallarse en [56, Capítulo 8, por I. Reiten, Teorema 2.2 (c)] o en [8, Teorema 5.5 (a)].

Por otro lado, la correspondencia (a)-(i) $\leftrightarrow$ (a)-(iii) está dada por $[C] \mapsto ({}^{\perp}C, \mathrm{add}(C)^{\wedge})$, cuyo inverso es definido como $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto [C_{\mathcal{F}\cap\mathcal{G}}]$, donde $C_{\mathcal{F}\cap\mathcal{G}}$ es la suma directa de pares de Λ-módulos no isomorfos finitamente generados indescomponibles en $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Este hecho es probado en [56, Capítulo 8, por I. Reiten, Corolario 2.3 (b)].

Finalmente, en [8, Teorema 5.5 (b)] o [56, Capítulo 8, por I. Reiten, Teorema 2.2 (d)], uno puede verificar que la correspondencia (b)-(i) $\leftrightarrow$ (b)-(ii) está dada por $[C] \mapsto \mathrm{add}(C)^\wedge$, con inversa $\mathcal{G} \mapsto [C_\mathcal{G}]$, donde $C_\mathcal{G}$ es la suma directa de Λ-módulos no isomorfos dos a dos, finitamente generados indescomponibles y $\mathcal{G}$-proyectivos.

Observación 4.18. *En el caso de un álgebra de Artin Λ-básica, la correspondencia* (a)-(i) $\leftrightarrow$ (a)-(ii) $\leftrightarrow$ (a)-(iii) *del Teorema 4.17 puede ser extendida a una clase de estructuras de modelo sobre* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *que satisfacen una serie de cuatro condiciones (ver [17, Teorema VIII 5.8] para mas detalles). Abordamos éste punto de estructuras de modelo otra vez de diferente modo en la siguiente sección, donde establecemos una correspondencia uno a uno entre estructuras de modelo AB proyectivas, pares de Frobenius fuertes a izquierda y ciertos pares de $\mathcal{S}$-cotorsión. El enfoque abordado en la siguiente sección, será ligeramente diferente al presentado en esta sección, y aquellos pares de $\mathcal{S}$-cotorsión serán relativos a $\mathcal{S} := \mathrm{Thick}(\mathcal{F})$ y satisfarán $\mathrm{id}_\mathcal{F}(\mathcal{G}) = 0$ y $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$; y así, no estarán necesariamente en $\widetilde{\mathfrak{B}}(\mathcal{A})$.*

El teorema previo es una de las motivaciones del Corolario 4.15. Este puede ser mas apreciado si explicamos cómo conectar el Corolario 4.15 con el Teorema 4.17. Antes de esto, y para mejor entendimiento, recordamos algunas definiciones.

Para el resto de esta sección, explicamos cómo los enunciados (a) y (b) son equivalentes. Antes de hacer esto, recordamos la terminología usada en el teorema previo.

- [22, Definición 8.1.1]: Un R-módulo C es **cotilting** siempre que las siguientes tres condiciones se satisfagan:
  - (a) $\mathrm{id}(C) < \infty$;
  - (b) $\mathrm{Ext}^i_R(C^I, C) = 0$ para todo $i > 0$ y para todo conjunto de indices I, donde C^I denota el producto directo de copias de C indexadas por I;
  - (c) $\mathrm{resdim}_{\mathrm{Prod}(C)}(Q) < \infty$, donde $\mathrm{Prod}(C)$ denota a la clase de sumandos directos de productos arbitrarios de copias de C y Q es un cogenerador inyectivo.
- [8]: Un R-módulo a izquierda M es **básico** si en una descomposición en suma directa de M, por módulos inescindibles, ninguno de estos aparece mas de una vez.
- Un R-módulo M es **auto-ortogonal** si $\mathrm{Ext}^i_R(M, M) = 0$ para todo $i > 0$.
- En [8], las clases pre-cubrientes son llamadas **contravariantemente finitas**, y las clases pre-envolventes son llamadas **covariantemente finitas**.
- En [8], las subcategorías de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ son consideradas cerradas bajo isomorfismos y sumandos directos, de modo que las clases resolventes y coresolventes en [8] son saturadas a izquierda y saturadas a derecha en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, respectivamente, de acuerdo a nuestra terminología.

Recordemos que $\mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A})$ denota a la clase de objetos de $\mathcal{A}$ con dimensión inyectiva finita. Nos permitimos presentar la siguiente definición con el fin de simplificar algunos enunciados y notaciones.

Definición 4.19. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientees proyectivos e inyectivos. Decimos que $\mathcal{A}$ es una **categoría IP-finita** si para cualquier subcategoría saturada a derecha y pre-envolvente especial $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, la siguiente equivalencia es cierta:*

$$\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A}) \textit{ si, y sólo si, } ({}^{\perp}\mathcal{X})^{\wedge} = \mathcal{A}.$$

Proposición 4.20. *Para una categoría IP-finita $\mathcal{A}$, los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Para las clases*

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A}) : \begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ es una sub-categoría pre-envolvente} \\ \text{especial y saturada a derecha de } \mathcal{A}. \end{array} \right\},$$
$$\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) := \left\{ (\mathcal{F},\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de cotorsión completo} \\ \text{y hereditario en } \mathcal{A}, \text{ con } \mathrm{Thick}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}. \end{array} \right\}.$$

existe una correspondencia uno a uno

$$\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}} \colon \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \to \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}), \textit{ dada por } \mathcal{G} \mapsto ({}^{\perp}\mathcal{G}, \mathcal{G}),$$

con inversa $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \mapsto \mathcal{G}$, para todo $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$.

2. *Para la clase:*

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{B},\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}^2 : (\mathcal{B},\mathcal{C}) \text{ es un AB contexto a izquierda en } \mathcal{A}\},$$

la igualdad $\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ se cumple.

3. *Para la clase*

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) := \left\{ (\mathcal{X},\omega) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{X},\omega) \text{ es un par de Frobenius a izquierda} \\ \text{en } \mathcal{A} \text{ tal que } \mathcal{X}^{\wedge} = \mathcal{A}. \end{array} \right\},$$

existe una correspondencia

$$\tilde{\Psi}_{\mathsf{IP}} : \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}), \textit{ dada por } (\mathcal{B},\mathcal{C}) \mapsto (\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C}),$$

con inversa

$$\tilde{\Phi}_{\mathsf{IP}} : \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}), \textit{ dada por } (\mathcal{X},\omega) \mapsto (\mathcal{X}, \omega^{\wedge}).$$

Demostración. 1. Veamos que la correspondencia $\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}}\colon \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \to \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ está bien definida. Es suficiente mostrar que $({}^{\perp}\mathcal{G}, \mathcal{G})$ es un par de cotorsión para todo $\mathcal{G} \in \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ con $\mathrm{Thick}({}^{\perp}\mathcal{G}) = \mathcal{A}$. El hecho que $({}^{\perp}\mathcal{G}, \mathcal{G})$ es completo y hereditario se seguirá de la hipótesis que dice que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos, y de las propiedades de $\mathcal{G}$. Primero observe que la clase ${}^{\perp}\mathcal{G}$ es gruesa a izquierda, y $\mathcal{G}$ es gruesa a derecha. Consideremos $\omega := {}^{\perp}\mathcal{G} \cap \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es pre-envolvente especial y saturada a derecha en $\mathcal{A}$, para todo $X \in {}^{\perp}\mathcal{G}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \to X \to G \to K \to 0,$$

donde $G \in \mathcal{G}$ y $K \in {}^{\perp_1}\mathcal{G} = {}^{\perp}\mathcal{G}$. Ahora, como ${}^{\perp}\mathcal{G}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos $G \in {}^{\perp}\mathcal{G} \cap \mathcal{G} = \omega$. Por otro lado, es claro que $\mathrm{id}_{{}^{\perp}\mathcal{G}}(\omega) = 0$. Entonces, ω es un cogenerador relativo ${}^{\perp}\mathcal{G}$-injectivo en ${}^{\perp}\mathcal{G}$.

Finalmente, observe que $\mathcal{G} \subseteq ({}^{\perp}\mathcal{G})^{\wedge}$ pues $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}$ es una categoría IP-finita. Así, por el Teorema 1.30, tenemos $\mathcal{G} = ({}^{\perp}\mathcal{G})^{\wedge} \cap ({}^{\perp}\mathcal{G})^{\perp_1} = ({}^{\perp}\mathcal{G})^{\perp_1}$. De aquí, la función $\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}}$ está bien definida y su inversa está dada por la proyección $\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}}\colon (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{G}$.

2. La inclusión $\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \supseteq \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ se sigue por el Teorema 4.5, y $\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \subseteq \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ en consecuencia del Teorema 4.8.

3. Finalmente, no es difícil ver que las correspondencias

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X},\omega^{\wedge}) & (\mathcal{X},\omega) \arrow[l, mapsto] \\
\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift right, "\tilde{\Psi}_{\mathsf{IP}}"'] & \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[l, shift right, "\tilde{\Phi}_{\mathsf{IP}}"'] \\
(\mathcal{B},\mathcal{C}) \arrow[r, mapsto] & (\mathcal{B},\mathcal{B}\cap\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

están bien definidas y son inversas una de la otra. $\square$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F},\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) & (\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[l, mapsto, "\tilde{\Psi}_{\mathsf{IP}}"'] & (\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[r, mapsto, "\tilde{\Theta}_{\mathsf{IP}}"] & \mathcal{G} \\
\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left, "\tilde{\Psi}_{\mathsf{IP}}"] & \tilde{\mathfrak{C}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[l, shift left, "\tilde{\Phi}_{\mathsf{IP}}"] \arrow[r, equal] & \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left, "\tilde{\Theta}_{\mathsf{IP}}"] & \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \arrow[l, shift left, "\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}}"] \\
(\mathcal{X},\omega) \arrow[r, mapsto, "\tilde{\Phi}_{\mathsf{IP}}"'] & (\mathcal{X},\omega^{\wedge}) & ({}^{\perp}\mathcal{G},\mathcal{G}) & \mathcal{G} \arrow[l, mapsto, "\tilde{\Omega}_{\mathsf{IP}}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 4.6: Correspondencias entre pares de Frobenius a izquierda, AB contextos a izquierda, pares de cotorsión hereditarios y completos, y sub-categorías pre-envolventes especiales en categorías IP-finitas.

Observación 4.21. *Consideremos la categoría* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *de* Λ*-módulos a izquierda finitamente generados, sobre un álgebra de Artin* Λ*. En [8, Proposición 5.3 y 5.5], Auslander y Reiten* *probaron que, si $\mathcal{G}$ es una subcategoría preenvolvente, saturada a derecha de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *y* ${}^{\perp}\mathcal{G}$ *es la subcategoría precubriente saturada a izquierda asociada en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$, *entonces* $({}^{\perp}\mathcal{G})^{\wedge} = \mathrm{mod}(\Lambda)$ *si, y sólo si,* $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{inj}^{<\infty}(\Lambda)$, *donde* $\mathrm{inj}^{<\infty}(\Lambda)$ *denota a la clase de* Λ*-módulos a izquierda finitamente generados con dimensión inyectiva finita. La Definición 4.19 es motivada en éste resultado.*

El siguiente resultado es una versión categórica del Teorema 4.17. Este es una consecuencia de la Proposición 4.20 and Corolario 4.15.

Corolario 4.22. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría Krull-Schmidt y IP-finita. Entonces $\tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathfrak{P}}(\mathcal{A})$, y existe una correspondencia uno a uno entre las clases $\tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ y $\tilde{\mathfrak{G}}(\mathcal{A})$.*

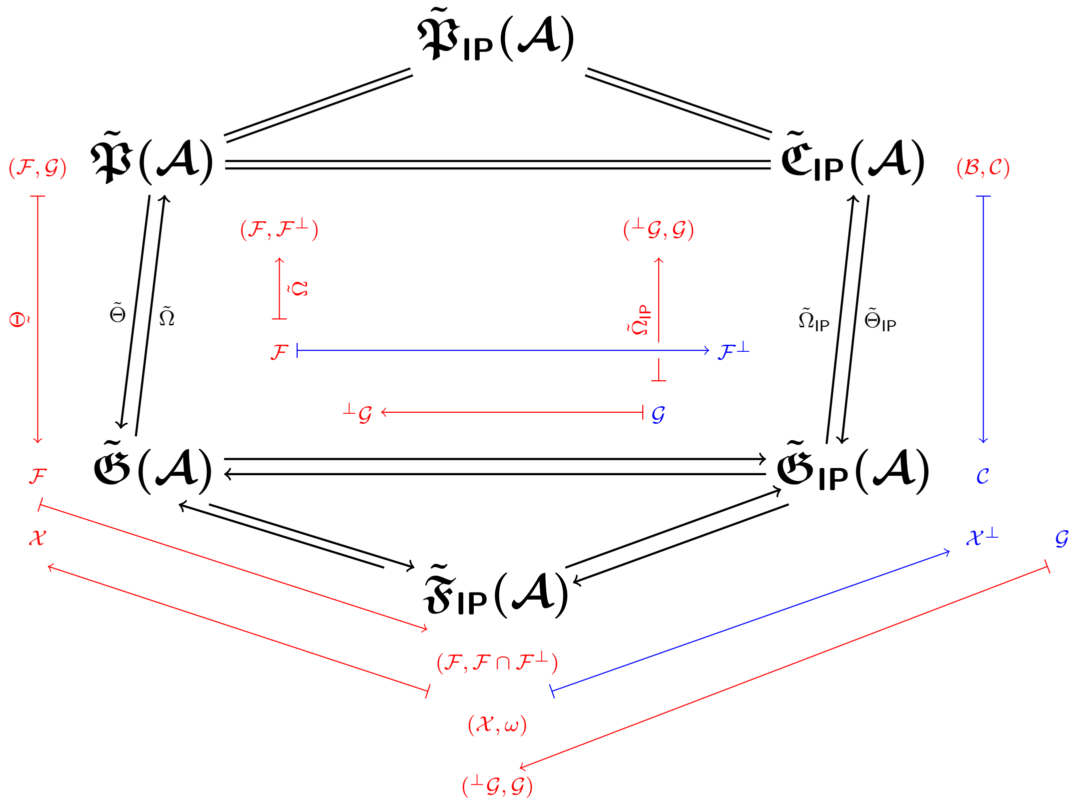

Figura 4.7: Correspondencias entre pares de Frobenius a izquierda, AB contextos a izquierda, y pares de cotorsión hereditarios y perfectos, clases envolventes, y clases cubrientes en categorias Krull-Schmidt y IP-finitas.

Prueba del Corolario 4.22. Primero, observemos que tenemos correspondencias uno a uno $\tilde{\mathfrak{G}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$ y $\tilde{\mathfrak{P}}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{G}}(\mathcal{A})$. Sea $(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \tilde{\mathfrak{P}}(\mathcal{A})$. Entonces, $\mathcal{G}$ es una clase envolvente saturada a izquierda en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{F} = {}^{\perp}\mathcal{G}$ satisface $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathcal{A}$. Esta igualdad implica

$\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A})$. Por otro lado, como $\mathcal{G}$ es envolvente y contiene a los módulos inyectivos, se sigue que todo objeto tiene una $\mathcal{G}$-pre-envolvente inyectiva. Por el *Lema de Wakamatsu [40, Lemma 5.12]*, estas $\mathcal{G}$-pre-envolventes pueden ser construidas de un modo tal que sus conúcleos estén en ${}^{\perp}\mathcal{G} = {}^{\perp_1}\mathcal{G} = \mathcal{F}$. De aquí, se sigue que $\mathcal{G}$ es una clase pre-envolvente especial, y así $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$.

Ahora, sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \tilde{\mathfrak{P}}_{\mathsf{IP}}(\mathcal{A})$. Entonces, $\mathcal{G}$ es una clase pre-envolvente especial saturada a derecha en $\mathcal{A}$, contenida en $\mathrm{Inj}^{<\infty}(\mathcal{A})$; y así $\mathcal{F}^{\wedge} = \mathcal{A}$. Por el *Lema 4.12*, se sigue que $\mathcal{G}$ es envolvente y $\mathcal{F}$ es cubriente en $\mathcal{A}$. De aquí, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \tilde{\tilde{\mathfrak{P}}}(\mathcal{A})$. □

Un par de cotorsión en $\mathrm{Mod}(R)$ se dice que es **cotilting** si éste es de la forma $({}^{\perp}C, ({}^{\perp}C)^{\perp})$, para algún módulo cotilting C. Si C es básico, el par $({}^{\perp}C, ({}^{\perp}C)^{\perp})$ es llamado **par de cotorsión cotilting básico** .

El siguiente resultado nos da una caracterización de pares de cotorsión hereditarios y perfectos en $\mathsf{mod}(\Lambda)$, como una consecuencia del *Corolario 4.22*.

Corolario 4.23. *Sea Λ una R-álgebra de Artin. Entonces, un par de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\mathsf{mod}(\Lambda)$ es hereditario y perfecto, si y sólo si, es básico cotilting. Mas aún, para todo Λ-módulo básico cotilting $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, se tiene la igualdad* $\mathrm{add}(C)^{\wedge} = ({}^{\perp}C)^{\perp}$.

4.5. Pares de Frobenius fuertes, triples de Hovey y estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz

Dedicamos la última parte de éste capítulo para complementar las correspondencias estudiadas antes, ahora involucrando las estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz en la interacción. Restringimos nuestra atención a la siguiente subclase de $\mathfrak{F}$,

$$\mathrm{s}\mathfrak{F} := \left\{ (\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{X}, \omega) \text{ es un par de Frobenius a izquierda} \\ \text{en } \mathcal{A} \text{ con } \mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge} \end{array} \right\},$$

y mostramos cómo esta clase está en correspondencia uno a uno con las estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz.

Proposición 4.24. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos. Si $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$ con* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$, *entonces los pares de $\mathcal{X}^{\wedge}$-cotorsión $(\mathcal{X}, \omega^{\wedge})$ y $(\omega, \mathcal{X}^{\wedge})$ en $\mathcal{A}$, dados en el* Teorema 2.7 *y el* Teorema 2.8, *son ambos hereditarios fuertes a izquierda en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.12, sabemos que $(\mathcal{X}, \omega^{\wedge})$ y $(\omega, \mathcal{X}^{\wedge})$ son pares de $\mathcal{X}^{\wedge}$-cotorsión hereditarios en $\mathcal{A}$, y por la Proposición 2.11, tenemos $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{X}^{\wedge})$. Por otro lado, $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$. De aquí, $\mathrm{Proj}(\mathcal{X}^{\wedge}) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$. El hecho que $\mathcal{X}$ y ω son resolventes en $\mathcal{A}$ se sigue por la Observación 2.12. □

Consideremos la siguiente clase:

$$\mathfrak{T} := \left\{ (\mathcal{X}, \omega) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} \omega \subseteq \mathcal{X} \text{ es cerrada bajo sumandos directos en } \mathcal{X},\ \mathcal{X}^\wedge \text{ es una} \\ \text{sub-categoría exacta de } \mathcal{A}, \text{ y } (\mathcal{X}, \mathcal{X}^\wedge, \omega^\wedge) \text{ es un triple de Hovey} \\ \text{hereditario fuerte a izquierda en } \mathcal{X}^\wedge \end{array} \right\}.$$

En las siguientes líneas, probamos que las clases s$\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{T}$ coinciden. Comenzamos con la siguiente propiedad de los Triples de Hovey.

Proposición 4.25. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos, y $\mathcal{S}$ una sub-categoría gruesa de $\mathcal{A}$. Si $(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ es un triple de Hovey hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{S}$, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Definamos $\omega := \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Por hipótesis, tenemos que $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de $\mathcal{S}$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Por el Teorema 2.13, tenemos que $(\mathcal{F}, \omega)$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Por otro lado, la condición (scp5) para el par de $\mathcal{S}$-cotorsión $(\omega, \mathcal{S})$, tenemos que para todo $F \in \mathcal{F}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to F' \to W \to F \to 0,$$

donde $W \in \omega$ y $F' \in \mathcal{S}$. Usando que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo núcleos de epimorfismos entre objetos de $\mathcal{F}$, tenemos que $F' \in \mathcal{F}$. Se sigue que ω es un generador proyectivo relativo en $\mathcal{F}$. Es suficiente mostrar que $\mathrm{pd}_{\mathcal{F}}(\omega) = 0$, para concluir que $\mathcal{F}$ es también $\mathcal{F}$-proyectivo; y de aquí, $(\mathcal{F}, \omega)$ será un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Esto se seguirá después de probar que $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$.

Del par de $\mathcal{S}$-cotorsión hereditario fuerte a izquierda $(\omega, \mathcal{S})$ en $\mathcal{A}$, es claro que $\omega = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$. Por otro lado, como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, tenemos por la Proposición 2.11 que $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$, probándose el resultado. □

La proposición anterior, también es valida si reemplazamos a $\mathcal{S}$ por una sub-categoría exacta $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Sin embargo, el resultado es establecido y probado en términos de $\mathcal{S}$ debido a la sencillez de la prueba y para los propósitos de éste trabajo.
Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.26. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos. Entonces s$\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$. Dualmente, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, con suficientes inyectivos, entonces las clases s$\mathfrak{F}^{\mathrm{op}}$ y $\mathfrak{T}^{\mathrm{op}}$ son iguales, donde:*

$$s\mathfrak{F}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\nu, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\nu, \mathcal{Y}) \textit{ es un par de Frobenius fuerte} \\ \textit{a derecha en } \mathcal{A} \textit{ con } \mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}^\vee. \end{array} \right\}.$$

$$\mathfrak{T}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\nu, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} \nu \subseteq \mathcal{Y} \textit{ es cerrada bajo sumandos directos en } \mathcal{Y},\ \mathcal{Y}^\vee \textit{ es una} \\ \textit{sub-categoría exacta de } \mathcal{A}, \textit{ y } (\mathcal{Y}^\vee, \mathcal{Y}, \nu^\vee) \textit{ es un triple de Hovey} \\ \textit{hereditario fuerte a derecha en } \mathcal{Y}^\vee. \end{array} \right\}.$$

Demostración. Solo probaremos la igualdad $s\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$. Sea $(\mathcal{X}, \omega) \in s\mathfrak{F}$, esto es, $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Proj}(A) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$. Por la Proposición 4.24, los pares de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{X}^\wedge) = (\mathcal{X} \cap \omega^\wedge, \mathcal{X}^\wedge)$ son hereditarios fuertes a izquierda. Entonces el triple de Hovey $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\wedge, \omega^\wedge)$ es hereditario fuerte a izquierda, y de aquí $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{T}$. Ahora, sea $(\mathcal{X}, \omega) \in \mathfrak{T}$, esto es, $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\wedge, \omega^\wedge)$ es un triple de Hovey hereditario fuerte a izquierda en la categoría exacta $\mathcal{X}^\wedge$, tal que $\omega \subseteq \mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos en $\mathcal{X}$. Entonces, por la Proposición 4.25, tenemos que $(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \omega^\wedge)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Solo queda mostrar que $\omega = \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$. La inclusión $\omega \subseteq \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$ es clara. Ahora supongamos que $X \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge$. Como $X \in \omega^\wedge$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to W' \to W \to X \to 0,$$

con $W \in \omega$ y $W' \in \omega^\wedge$. Por otro lado, $X \in \mathcal{X}$ y $(\mathcal{X}, \omega^\wedge)$ es un par de cotorsión en $\mathcal{X}^\wedge$, y así la sucesión anterior se escinde (como una sucesión exacta corta en $\mathcal{X}^\wedge$), lo cual implica que X es un sumando directo de $W \in \omega$, y así $X \in \omega$. Por lo tanto $\mathcal{X} \cap \omega^\wedge \subseteq \omega$. □

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 4.25 y el Teorema 4.26.

Corolario 4.27. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos. Entonces, la inclusión $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ implica que $\omega = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$.*

Para concluir esta sección, mostraremos que existe una correspondencia uno a uno entre $s\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$ y la siguiente colección de estructuras de modelo exactas:

$$\mathfrak{M} := \left\{ (\mathcal{S}, \mathcal{M}) : \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ es una sub-categoría gruesa de } \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R}) \text{ es una} \\ \text{estructura de modelo proyectiva exacta sobre } \mathcal{S} \text{ tal que } \mathcal{Q} \text{ es} \\ \text{resolvente en } \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}^\wedge. \end{array} \right\}.$$

Teorema 4.28. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos. Entonces, la función*

$$\begin{aligned} \Xi \colon s\mathfrak{F} &\to \mathfrak{M} \\ (\mathcal{X}, \omega) &\mapsto (\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}, \omega)), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$ es la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz sobre $\mathcal{X}^\wedge$, del Teorema 3.1, que define una correspondencia uno a uno entre las clases $s\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{M}$. Dualmente, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, entonces la función

$$\begin{aligned} \Xi^{\mathrm{op}} \colon s\mathfrak{F}^{\mathrm{op}} &\to \mathfrak{M}^{\mathrm{op}} \\ (\nu, \mathcal{Y}) &\mapsto (\mathcal{Y}^\vee, \mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\nu, \mathcal{Y})), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\nu, \mathcal{Y})$ es la estructura de modelo inyectiva de Auslander-Buchweitz sobre $\mathcal{Y}^\vee$, del Teorema 3.1, que define una correspondencia uno a uno entre las clases $s\mathfrak{F}^{\mathrm{op}}$ y

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{op}} := \left\{ (\mathcal{S}, \mathcal{M}) : \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ es una sub-categoría gruesa de } \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R}) \text{ es una} \\ \text{estructura de modelo inyectiva exacta sobre } \mathcal{S} \text{ tal que } \mathcal{R} \text{ es} \\ \text{corresolvente en } \mathcal{A}, \text{ y } \mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}^\vee. \end{array} \right\}.$$

Demostración. Probaremos solamente el enunciado concerniente a Ξ. Primero, observemos que la correspondencia Ξ está bien definida, pues la estructura de modelo exacta $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{X}, \omega)$ sobre $\mathcal{X}^\wedge$ es única por la *Correspondencia de Hovey-Gillespie*, y $\mathcal{X}$ es resolvente en $\mathcal{A}$ por el Teorema 4.26.

Ahora construimos una inversa para Ξ. Sea Γ la función:

$$\begin{aligned} \Gamma \colon \mathfrak{M} &\to \mathrm{s}\mathfrak{F} \\ (\mathcal{S}, \mathcal{M}) &\mapsto (\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{T}), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$ denota las clases de objetos cofibrantes, fibrantes y triviales de $\mathcal{M}$. Verificamos que Γ está bien definida. Si $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})$ es una estructura de modelo proyectiva exacta sobre $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, y por la *Correspondencia de Hovey-Gillespie* tenemos que $(\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ es un triple de Hovey. Por otro lado, el par de cotorsión $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{T}, \mathcal{S})$ en $\mathcal{S}$ es claramente hereditario a izquierda en $\mathcal{S}$, y $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ es también un par de cotorsión hereditario a izquierda en $\mathcal{S}$, pues $\mathcal{Q}$ es resolvente en $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ es gruesa, tenemos que $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T}$ son ambos pre-resolventes en $\mathcal{A}$. Para demostrar que el triple de Hovey $(\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ es hereditario fuerte a izquierda en $\mathcal{S}$ y usar la Proposición 4.25 para concluir que $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{T})$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$, solo hace falta mostrar que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Q} \cap \mathcal{T}$.

Por definición de $\mathfrak{M}$, tenemos que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Q}$. Por otro lado, observe que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, por Proposición 2.11, tenemos que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$, donde $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{T}$, pues $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{T}, \mathcal{S})$ es un par de cotorsión en $\mathcal{S}$. Se sigue que $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{T}) \in \mathrm{s}\mathfrak{F}$.

Finalmente, para ver que Ξ y Γ son inversas una de la otra, necesitamos verificar las igualdades $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^\wedge$ y $\mathcal{T} = (\mathcal{Q} \cap \mathcal{T})^\wedge$, para todo $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, (\mathcal{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{R})) \in \mathfrak{M}$.

- Prueba de la igualdad $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^\wedge$: Observe que $\mathcal{Q}^\wedge \subseteq \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es gruesa. Ahora, sea $S \in \mathcal{S}$. Como el par $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ es completo en $\mathcal{S}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to T \to Q \to S \to 0$$

  con $Q \in \mathcal{Q}$ y $T \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}^\wedge$. Se sigue $S \in \mathcal{Q}^\wedge$, y de este modo $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^\wedge$.

- Prueba de la igualdad $\mathcal{T} = (\mathcal{Q} \cap \mathcal{T})^\wedge$: La igualdad $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^\wedge$, probada arriba, y el Teorema 2.7 implican que

$$(\mathcal{Q} \cap \mathcal{T})^\wedge = \mathcal{Q}^\perp \cap \mathcal{Q}^\wedge = \mathcal{Q}^\perp \cap \mathcal{S}.$$

  Por otro lado, como $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ es un par de cotorsión hereditario en $\mathcal{S}$, tenemos que

$$\mathcal{T} = \mathcal{Q}^{\perp_1, \mathcal{S}} = \mathcal{Q}^{\perp_1} \cap \mathcal{S} = \mathcal{Q}^\perp \cap \mathcal{S}.$$

  Por lo tanto, $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{T})^\wedge = \mathcal{T}$.

Tenemos

$$\Xi \circ \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{M}) = \Xi(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{T}) = (\mathcal{Q}^\wedge, \mathcal{M}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{T})),$$

donde $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\wedge, (\mathcal{Q}\cap\mathcal{T})^\wedge)$ es el triple de Hovey correspondiente a $\mathcal{M}_{\rm AB}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\cap\mathcal{T})$. De las igualdades $\mathcal{Q}^\wedge = \mathcal{S} = \mathcal{R}$ y $(\mathcal{Q}\cap\mathcal{T})^\wedge = \mathcal{T}$, tenemos:

$$\Xi\circ\Gamma(\mathcal{S},\mathcal{M}) = (\mathcal{Q}^\wedge, \mathcal{M}_{\rm AB}(\mathcal{Q},\mathcal{Q}\cap\mathcal{T})) = (\mathcal{S},(\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{T})) = (\mathcal{S},\mathcal{M}).$$

Por lo que $\Xi\circ\Gamma = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$.

Ahora sea $(\mathcal{X},\omega)\in \mathrm{s}\mathfrak{F}$. Tenemos:

$$\Gamma\circ\Xi(\mathcal{X},\omega) = \Gamma(\mathcal{M}_{\rm AB}(\mathcal{X},\omega),\mathcal{X}^\wedge) = (\mathcal{X},\mathcal{X}\cap\omega^\wedge).$$

Como $(\mathcal{X},\omega)$ es un par de Frobenius a izquierda, por el Teorema 2.7 tenemos $\mathcal{X}\cap\omega^\wedge = \omega$. Entonces

$$\Gamma\circ\Xi(\mathcal{X},\omega) = (\mathcal{X},\mathcal{X}\cap\omega^\wedge) = (\mathcal{X},\omega).$$

Por lo tanto $\Gamma\circ\Xi = \mathrm{id}_{\mathrm{s}\mathfrak{F}}$. □

Cerramos éste capítulo complementando la correspondencia dada en el Teorema 4.4 para categorías abelianas, con suficientes proyectivos, cuando nos restringimos a la sub-clase $\mathrm{s}\mathfrak{F}$.

Corolario 4.29. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre las clases $\mathrm{s}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, y:*

$$s\mathfrak{P} := \left\{ (\mathcal{F},\mathcal{G})\subseteq\mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{F})\text{-cotorsión en } \mathcal{A} \text{ con } \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})=0 \\ \text{y } \mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \end{array} \right\}.$$

Dualmente, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, con suficientes inyectivos, entonces existe una correspondencia uno a uno entre las clases $\mathrm{s}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}^{\rm op}$, y:

$$s\mathfrak{P}^{\rm op} := \left\{ (\mathcal{F},\mathcal{G})\subseteq\mathcal{A}^2 : \begin{array}{l} (\mathcal{F},\mathcal{G}) \text{ es un par de Thick}(\mathcal{G})\text{-cotorsión en } \mathcal{A} \text{ con } \mathrm{pd}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})=0 \\ \text{y } \mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \end{array} \right\}.$$

Demostración. Solo probaremos que $\mathrm{s}\mathfrak{F}$ y $\mathrm{s}\mathfrak{P}$ están en correspondencia uno a uno. Consideremos la correspondencia $\Phi\colon \mathfrak{F}\to\mathfrak{P}$ del Teorema 4.4. Sea $(\mathcal{X},\omega)\in\mathrm{s}\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}$. Mostramos que $\Phi(\mathcal{X},\omega) = (\mathcal{X},\omega^\wedge)\in\mathrm{s}\mathfrak{P}$. Primero, nosotros sabemos que $(\mathcal{X},\omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{X}^\wedge$-cotorsión en $\mathcal{A}$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^\wedge)=0$. Por otro lado, como $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, podemos aplicar el Corolario 4.27 para obtener $\mathcal{X}\cap\omega^\wedge = \omega = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$, así probamos que $(\mathcal{X},\omega^\wedge)\in\mathrm{s}\mathfrak{P}$. Esto implica que la restricción de Φ sobre $\mathrm{s}\mathfrak{F}$ nos da una función $\mathrm{s}\Phi := \Phi|_{\mathrm{s}\mathfrak{F}}\colon \mathrm{s}\mathfrak{F}\to\mathrm{s}\mathfrak{P}$.

Para mostrar que la función $\mathrm{s}\Phi$ define una correspondencia uno a uno entre $\mathrm{s}\mathfrak{F}$ y $\mathrm{s}\mathfrak{P}$, es suficiente mostrar que la restricción $\Psi\colon\mathfrak{P}\to\mathfrak{F}$ (la inversa de Φ en el Teorema 4.4) sobre $\mathrm{s}\mathfrak{P}$, tiene su imagen sobre $\mathrm{s}\mathfrak{F}$. Sea $(\mathcal{F},\mathcal{G})\in\mathrm{s}\mathfrak{P}$, esto es, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un par de Thick$(\mathcal{F})$-cotorsión en $\mathcal{A}$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})=0$ y $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$. Por un lado, sabemos que $\Psi(\mathcal{F},\mathcal{G}) = (\mathcal{F},\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. De modo que solo queda mostrar que $\omega := \mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ es un generador relativo $\mathcal{F}$-proyectivo en $\mathcal{F}$, con $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{F}^\wedge$. Esto se sigue de que $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y $\mathcal{F}$ es gruesa a izquierda. □

$$(\mathcal{X},\omega^{\wedge}) \overset{s\Phi}{\longleftarrow\!\!\dashv} (\mathcal{X},\omega) \qquad\qquad (\mathcal{X},\omega) \xmapsto{\Xi} (\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathcal{X},\omega),\mathcal{X}^{\wedge})$$

$$s\mathfrak{P} \underset{s\Psi}{\overset{s\Phi}{\leftrightarrows}} s\mathfrak{F} =\!=\!=\!=\!= \mathfrak{T} \underset{\Gamma}{\overset{\Xi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{M}$$

$$(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xmapsto[s\Psi]{} (\mathcal{F},\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad\qquad (\mathcal{Q},\mathcal{Q}\cap\mathcal{T}) \underset{\Gamma}{\longleftarrow\!\!\dashv} (\mathcal{M},\mathcal{S})$$

Figura 4.8: Correspondencias entre pares de Frobenius fuertes a izquierda y estructuras de modelo proyectivas de Auslander-Buchweitz sobre categorías abelianas con suficientes proyectivos.

$$(\nu^{\vee},\mathcal{Y}) \overset{s\Phi^{\mathrm{op}}}{\longleftarrow\!\!\dashv} (\nu,\mathcal{Y}) \qquad\qquad (\nu,\mathcal{Y}) \xmapsto{\Xi^{\mathrm{op}}} (\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{inj}}(\nu,\mathcal{Y}),\mathcal{Y}^{\vee})$$

$$s\mathfrak{P}^{\mathbf{op}} \underset{s\Psi^{\mathrm{op}}}{\overset{s\Phi^{\mathrm{op}}}{\leftrightarrows}} s\mathfrak{F}^{\mathbf{op}} =\!=\!=\!=\!= \mathfrak{T}^{\mathbf{op}} \underset{\Gamma^{\mathrm{op}}}{\overset{\Xi^{\mathrm{op}}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{M}^{\mathbf{op}}$$

$$(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xmapsto[s\Psi^{\mathrm{op}}]{} (\mathcal{F}\cap\mathcal{G},\mathcal{G}) \qquad\qquad (\mathcal{R}\cap\mathcal{T},\mathcal{R}) \underset{\Gamma^{\mathrm{op}}}{\longleftarrow\!\!\dashv} (\mathcal{M},\mathcal{S})$$

Figura 4.9: Correspondencias entre pares de Frobenius fuertes a derecha y estructuras de modelo inyectivas de Auslander-Buchweitz sobre categorías abelianas con suficientes inyectivos.

Capítulo 5

Ejemplos en álgebra homológica Gorenstein

En éste capítulo presentamos una serie de ejemplos de pares de Frobenius que se obtienes a partir del álgebra homológica Gorenstein relativa, algunos de ellos ya han sido presentados anteriormente, aun así, los citamos aquí con el propósito de ver con mayor claridad el alcance de la teoría de dichos pares de Frobenius y sus conexiones con la categorías de modelo y los contextos de Auslander-Buchweitz.

El siguiente concepto comprenderá varios tipos de módulos Gorenstein. Consideremos una clase de objetos $\mathcal{X}$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Decimos que un complejo $\mathbf{C} = (C_m, \partial^C_m : C_m \to C_{m-1})_{m\in\mathbb{Z}}$ de objetos y morfismos en $\mathcal{A}$ es $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$-**acíclico** si el complejo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathbf{C}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C_m), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \partial^{\mathbf{C}}_m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de grupos abelianos y morfismos de grupos, es acíclico para todo $X \in \mathcal{X}$. Existe también una noción dual de complejos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$-acíclicos.

5.1. Estructuras de modelo de Gorenstein

Recordamos que un R-módulo M es **Gorenstein proyectivo** si $M = Z_0(\mathbf{P}) := \mathrm{Ker}(\partial^{\mathbf{P}}_0)$, para algún complejo acíclico $\mathbf{P}$ de R-módulos proyectivos que sea $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Proj}(R))$-acíclico. Denotamos por $\mathrm{GProj}(R)$ a la subcategoría de $\mathrm{Mod}(R)$ formada por todos los R-módulos Gorenstein proyectivos. En estos términos es importante señalar que en [47, Teorema 2.5] se prueba que $\mathrm{GProj}(R)$ es una subcategoría resolvente de $\mathrm{Mod}(R)$, la cual es también cerrada bajo sumandos directos. De aquí, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *El par* $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$*, para un anillo arbitrario* R*.*

Revisaremos algunos hechos, sobre R-módulos Gorenstein proyectivos, desde las propiedades de pares de Frobenius a izquierda aplicados al par $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$.

- Primero, observemos que el par $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{GProj}(R))$ no es necesariamente un par de Frobenius a derecha en $\mathrm{Mod}(R)$, pues $\mathrm{GProj}(R)$ no es corresolvente en general. Sin embargo, en algunos casos particulares, uno puede asegurar que $\mathrm{GProj}(R)$ es cerrado al tomar conúcleos de monomorfismos entre sus objetos. Específicamente, tomando $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R)$ y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$, en el Corolario 1.14, nos proporciona otra forma de mostrar [47, Corolario 2.11]. Esto es, si

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

es una sucesión exacta corta en $\mathrm{Mod}(R)$ con $A, B \in \mathrm{GProj}(R)$ y $\mathrm{Ext}^1_R(C, P) = 0$ para todo R-módulo proyectivo P, entonces $C \in \mathrm{GProj}(R)$.

- El par $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ satisface las hipótesis en el Lema 1.11. De modo que la parte (a) de dicho lema implica que $\mathrm{id}_{\mathrm{GProj}(R)}(\mathrm{Proj}(R)^\wedge) = 0$. Observe también que $\mathrm{Proj}(R)^\wedge$ coincide con la subcategoría de R-módulos con dimensión proyectiva finita. Así, obtenemos el bien conocido hecho de que si M es un R-módulo Gorenstein proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}^i_R(M, W) = 0$, para todo R-módulo W con dimensión Gorenstein proyectiva finita y todo entero $i > 0$. Esta propiedad es también establecida en [47, Proposición 2.3]. Por otro lado, la parte (b) de la Proposición 1.12 implica otra importante relación entre las clases $\mathrm{GProj}(R)$ y $\mathrm{Proj}(R)$, a saber, que $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{GProj}(R) \cap \mathrm{Proj}(R)^\wedge$. En otras palabras, la dimensión proyectiva de un R-módulo Gorenstein proyectivo es 0 o bien infinito. Así, tenemos otra prueba de Enochs y Jenda [25, Proposición 10.2.3]. Estas conclusiones también pueden ser obtenidas del trabajo de Beligiannis en [16, Teorema 4.3].

- Usando el Teorema 1.22, y el hecho que $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathrm{Mod}(R)$, tenemos que $\mathrm{GProj}(R)^\wedge$ es una subcategoría gruesa de $\mathrm{Mod}(R)$. Recordamos de Enochs y Jenda [25, Capítulo XI] que la *dimensión Gorenstein proyectiva* de un R-módulo M, es definida como $\mathrm{Gpd}(M) := \mathrm{resdim}_{\mathrm{GProj}(R)}(M)$. De modo que $\mathrm{GProj}(R)^\wedge$ es precisamente la subcategoría de $\mathrm{Mod}(R)$ formada por los módulos con dimensión Gorenstein proyectiva finita. En el caso en que R es un anillo Iwanaga-Gorenstein (esto es, R es un anillo noetheriano bilateral, con dimensión auto-inyectiva finita por ambos lados) se sabe que el par $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión completo en $\mathrm{Mod}(R)$. Un modo de ver esto es observando que para tal R se cumple $\mathrm{GProj}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R)$, y entonces se aplica el Teorema 1.12.

- Ciertas dimensiones homológicas son definidas como dimensiones proyectivas o inyectivas relativas a cierta subcategoría de módulos, tales como la dimensión FP-inyectiva (o absolutamente pura). Existen otras, tales como la dimensión Gorenstein proyectiva recién mencionada, las cuales son definidas como una dimensión por resolución, relativa a una subcategoría de módulos. En el caso mencionado inicialmente, la dimensión FP-inyectiva no puede ser expresada como una dimensión por coresolución, a menos que asumamos que en anillo base R, sea un anillo coherente. Note que no es un inconveniente para la dimensión Gorenstein proyectiva, como es indicado en el trabajo de H. Holm [47, Teorema 2.20]. Éste resultado puede obtenerse como consecuencia del Teorema 1.20.

Específicamente, si tenemos un R-módulo M con dimensión Gorentein proyectiva finita, entonces

$$\operatorname{Gpd}(M) = \operatorname{pd}_{\operatorname{Proj}(R)} = \operatorname{pd}_{\operatorname{Proj}(R)^{\wedge}}(M).$$

En otras palabras, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes para todo $n \geq 0$.

(a) $\operatorname{Gpd}(M) \leq n$.

(b) $\operatorname{Ext}^i_R(M, L) = 0$ para todo $i > n$ y para todo R-módulo L tal que $\operatorname{pd}(L) < \infty$.

(c) $\operatorname{Ext}^i_R(M, P) = 0$ para todo $i > n$ y para todo R-módulo proyectivo P.

Con respecto a los pares de cotorsión y a las estructuras de modelo que involucran a la clase $\operatorname{GProj}(R)$, tenemos por la Proposición 5.1 y Teoremas 2.7 y 2.8 que los pares $(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R)^{\wedge})$ y $(\operatorname{Proj}(R), \mathcal{GP}(R)^{\wedge})$ son pares de $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge}$-cotorsión en $\operatorname{Mod}(R)$. Estos pares, no son en general hereditarios fuertes a derecha, ya que las inclusiones $\operatorname{Inj}(R) \subseteq \operatorname{GProj}(R)^{\wedge}$ y $\operatorname{Inj}(R) \subseteq \operatorname{Proj}(R)^{\wedge}$ no son necesariamente ciertas. Sin embargo, se puede ver que estos pares son hereditarios (a izquierda y a derecha) como pares de cotorsión en la subcategoría exacta $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge} \subseteq \operatorname{Mod}(R)$. Mas aun, estas dos nociones de pares hereditarios coinciden en el caso en que R sea un anillo Iwanaga-Gorenstein, donde las igualdades $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge} = \operatorname{Mod}(R)$ y $\operatorname{Proj}(R)^{\wedge} = \operatorname{Inj}(R)^{\vee}$ se cumplen. Entonces, tenemos otra forma de obtener el resultado de Enochs y Jenda [25, Observación 11.5.10], a saber; si $\operatorname{GProj}^{\wedge}(R) = \operatorname{Mod}(R)$, entonces $(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R)^{\wedge})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\operatorname{Mod}(R)$.
Cerramos nuestro resumen de álgebra homológica Gorenstein presentando un ejemplo de estructuras de modelo de Auslander-Buchweitz, el cual se convierte en una generalización de una bien conocida estructura de modelo proyectiva abeliana sobre $\operatorname{Mod}(R)$.
Del par de Frobenius fuerte a izquierda $(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R))$ en $\operatorname{Mod}(R)$ obtenemos la estructura de modelo proyectiva AB

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R)) = (\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R)^{\wedge}, \operatorname{GProj}(R)^{\wedge})$$

sobre la subcategoría $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge} \subseteq \operatorname{Mod}(R)$. Esta estructura de modelo, generaliza a la estructura de modelo proyectiva abeliana de Hovey [51, Teorema 8.6] sobre $\operatorname{Mod}(R)$, en el caso en que R sea un anillo Iwanaga-Gorenstein. Observe que no hemos impuesto alguna condición sobre el anillo base R para obtener $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R))$. Sin embargo, no obtenemos una estructura de modelo abeliana, pero si una exacta sobre $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge}$, la cual es una subcategoría exacta de $\operatorname{Mod}(R)$. Por otro lado, ya hemos mencionado que si R es un anillo Iwanaga-Gorenstein, entonces $\operatorname{GProj}(R)^{\wedge}$ coincide con $\operatorname{Mod}(R)$; y en tal caso, $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R))$ es precisamente la estructura de modelo abeliana descrita en [51, Teorema 8.6].
Consideremos ahora la categoría de homotopía $\operatorname{Ho}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\operatorname{GProj}(R)^{\wedge})$ de

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\operatorname{GProj}(R), \operatorname{Proj}(R)).$$

Por la Proposición 3.13, tenemos que dos morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathrm{GProj}(R)^{\wedge}$ son homotópicos si, y sólo si, su diferencia $g - f$ se factoriza a través de un módulo proyectivo. La categoría de homotopía de ésta estructura de modelo es la categoría de módulos estable proyectiva $\mathrm{GProj}(R)/\sim$, la cual es también la categoría de homotopía de la estructura de modelo proyectiva abeliana de Hovey $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^{\wedge}, \mathrm{Mod}(R))$ sobre $\mathrm{Mod}(R)$, cuando R es un anillo Iwanaga-Gorenstein (ver [51, Sección 9]). Esta categoría estable de módulos coincide con la categoría estable de módulos usual $\mathrm{Stmod}(R)$ en caso de que R es un anillo casi-Frobenius, esto es, un anillo 0-Iwanaga-Gorenstein. Este último es un bien conocido ejemplo de un categoría de Frobenius. En el caso de que R sea un anillo arbitrario, otro ejemplo de tal categoría está dado por $\mathrm{GProj}(R)$. De hecho $\mathrm{GProj}(R) = \mathrm{Mod}(R)$ si R es un anillo casi-Frobenius. Se sigue que existe una única estructura de modelo de Frobenius sobre $\mathrm{GProj}(R)$ con $\mathrm{Proj}(R)$ como la subcategoría de objetos triviales, la cual puede ser obtenida también mediante definir $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$, $\mathcal{X} := \mathrm{GProj}(R)$ y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$ en la Proposición 3.10.
Observe que podemos seguir un planteamiento dual a los resultados y comentario previos, mediante considerar el par de Frobenius fuerte a derecha $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$, donde $\mathrm{GInj}(R)$ denota la categoría de R-módulos Gorenstein inyectivos. La estructura de modelo inyectiva de Auslander-Buchweitz correspondiente

$$\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}(R)) := (\mathrm{GInj}(R)^{\vee}, \mathrm{Inj}(R)^{\vee}, \mathrm{GInj}(R))$$

sobre $\mathrm{GInj}(R)^{\vee}$, coincide con la estructura de modelo inyectiva de Hovey [51, Teorema 8.6] en caso de que R sea un anillo Iwanaga-Gorenstein.

5.2. Pares de Frobenius a izquierda a partir de subcategorías Gorenstein

El ejemplo que presentamos en la siguiente proposición representa una ligera generalización del previo y es motivado en el trabajo titulado *Stability of Gorenstein categories* de S. Sather-Wagstaff, T. Sharif, D. White [72]. Mostraremos que $(\mathcal{G}(\omega), \omega)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Aquí ω es una subcategoría de $\mathcal{A}$ que satisface una serie de condiciones especificadas abajo y $\mathcal{G}(\omega)$ denota la *subcategoría Gorenstein* asociada a ω, definida como la clase de objetos $M \in \mathcal{A}$ tal que $M = \mathrm{Coker}(\partial_1^{\mathbf{W}})$ para algún complejo $\mathbf{W}$ en ω que sea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\omega, -)$-acíclico y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \omega)$-acíclico.
Listamos de [72] algunas condiciones sobre ω que hacen a $(\mathcal{G}(\omega), \omega)$ un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$. Primero, por [72, Corolarios 4.5, 4.7 y Proposición 4.11] tenemos que si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\omega, \omega) = 0$, para todo $i \geq 1$, entonces $\mathcal{G}(\omega)$ es cerrada por extensiones y sumandos directos, y ω es un cogenerador $\mathcal{G}(\omega)$-inyectivo relativo y un generador $\mathcal{G}(\omega)$-inyectivo relativo en $\mathcal{G}(\omega)$. Si adicionalmente ω es cerrado por núcleos de epimorfismos entre sus objetos, tenemos la misma propiedad de cerradura para $\mathcal{G}(\omega)$ [72, Teorema 4.12].

Proposición 5.2. *Sea ω una clase de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ que es cerrada por sumandos directos y por núcleos de epimorfismso entre sus objetos, y tal que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\omega, \omega) = 0$ para todo entero $i \geq 1$. Entonces $(\mathcal{G}(\omega), \omega)$ es un par de Frobenius fuerte a izquierda en $\mathcal{A}$.*

Podemos deducir varias propiedades del resultado previo, complementando así las propiedades de subcategorías Gorenstein ya descubiertas en [72]. Supongamos que ω es una clase de objetos en $\mathcal{A}$, que satisface las hipótesis de la proposición previa. Primero, sabemos de la Proposición 1.9, la Proposición 1.25 y la Proposición 1.26 las siguientes interacciones entre las clases $\mathcal{G}(\omega)$ y ω.

Proposición 5.3. *Sea ω una clase de objetos en $\mathcal{A}$, que satisface las condiciones en la Proposición 5.2. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

1. $\omega = \mathcal{G}(\omega) \cap \omega^\wedge = \mathcal{G}(\omega) \cap \omega^\vee$.
2. $\mathcal{G}(\omega)^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}(\omega)^\wedge \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$.
3. $\omega^\wedge = \mathcal{G}(\omega)^\perp \cap \mathcal{G}(\omega)^\wedge$.

Referente a los pares de cotorsión y estructuras de modelo exactas, tenemos el siguiente resultado del Teorema 3.1 y la Proposición 3.13.

Proposición 5.4. *Sea ω una clase de objetos en $\mathcal{A}$, que satisface las condiciones de la Proposición 5.2. Entonces, $(\mathcal{G}(\omega), \omega^\wedge)$ y $(\omega, \mathcal{G}(\omega)^\wedge)$ son pares de cotorsión en la subcategoría exacta $\mathcal{G}(\omega)^\wedge$. Mas aun, existe una única estructura de modelo exacta sobre $\mathcal{G}(\omega)^\wedge$, dada por el triple de Hovey*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{G}(\omega), \omega) := (\mathcal{G}(\omega), \omega^\wedge, \mathcal{G}(\omega)^\wedge),$$

cuya categoría de homotopía es equivalente a la categoría estable $\mathcal{G}(\omega)/\sim$.

En lo que resta de éste ejemplo, sea R un anillo conmutativo y noetheriano, de modo que la categoría $\mathrm{mod}(R)$ de R-módulos finitamente generados es abeliana. Aplicamos el resultado previo para obtener versiones finitamente generadas de las estructuras de modelo de Frobenius (ver [50, Sección 2.2] o el Ejemplo 3.11 definiendo $\mathcal{E} := \mathrm{Mod}(R)$, con R casi-Frobenius) y la estructura de modelo Gorenstein proyectiva [51, Teorema 8.6].
Denotamos por $\mathrm{proj}(R)$ a la clase de R-módulos a izquierda, proyectivos finitamente generados. Es sencillo probar que $\mathrm{proj}(R)$ es cerrada bajo sumandos directos y núcleos de epimorfismos en $\mathrm{proj}(R)$, mientras que la condición $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{proj}(R), \mathrm{proj}(R)) = 0$ es clara para todo entero $i > 0$. Así, por la proposición 5.4, tenemos la estructura exacta de modelo

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)), \mathrm{proj}(R)) := (\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)), \mathrm{proj}(R)^\wedge, \mathcal{G}(\mathrm{proj}(R))^\wedge)$$

sobre $\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R))^\wedge$, del par de Frobenius fuerte a izquierda $(\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)), \mathrm{proj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$. Más aún, por [82, Proposición 1.4], tenemos que $\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)) = \mathcal{GP}(R) \cap \mathrm{mod}(R)$, y así la existencia de $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)), \mathrm{proj}(R))$ representa de algún modo el resultado de Hovey [51, Teorema 8.6] en el contexto de módulos finitamente generados.

Observación 5.5. *Si adicionalmente, R es un anillo Iwanaga-Gorenstein no regular y artiniano, tenemos por [72, Ejemplo 5.7] que $\mathcal{G}(\mathrm{proj}(R)) = \mathrm{mod}(R)$. Entonces, por la Proposición 5.4, tenemos la estructura de modelo de Frobenius*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{mod}(R), \mathrm{Proj}(R)) := (\mathrm{mod}(R), \mathrm{proj}(R)^{\wedge}, \mathrm{mod}(R)),$$

sobre $\mathrm{mod}(R)$. Observe que en éste caso, por la Proposición 7.61 (resultado que es independiente de la teoría de pares Frobenius desarrollada hasta el momento), que $\mathrm{proj}(R) = \mathrm{proj}(R)^{\wedge}$. En particular, la dimensión finitista pequeña (izquierda) de R definida como sigue

$$\mathrm{fin.dim}(R) := \sup\{\mathrm{pd}(M) : M \in \mathrm{mod}(R) \text{ con } \mathrm{pd}(M) < \infty\},$$

es cero. Por un resultado de Bass [9] y Foxby [31, comentario que sigue al Teorema 3.1], tenemos que R es un anillo auto-inyectivo. Esto a su vez, implica que R debe ser un anillo 0-Iwanaga-Gorenstein; y así R es un anillo casi-Frobenius por [27, Teorema 9.1.10]. Por otro lado, usando un resultado de Matsumura [58, Teorema 19.2], tenemos también que R tiene dimensión global finita. Resumimos esto en el siguiente corolario.

Corolario 5.6. *Sea R un anillo conmutativo y local. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *R es no regular Iwanaga-Gorenstein y artiniano.*

(b) *R es casi-Frobenius, con dimensión global finita.*

Mas aun, si alguna de las condiciones de arriba se cumple, entonces $\mathrm{fin.dim}(R) = 0$.

5.3. Estructuras de modelo exactas de módulos Gorenstein relativos a pares de dualidad

Construiremos ejemplos de pares de Frobenius que envuelven relativizaciones de módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos, con respecto a pares de dualidad, un concepto debido a H. Holm y P. Jørgensen [46]. Dos clases $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ forman un **par de dualidad** $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ sobre R si las siguientes dos condiciones se cumplen:

(a) $L \in \mathcal{L}$ si, y sólo si $L^{+} := \mathrm{Hom}_R(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in \mathcal{R}$;

(b) $\mathcal{R}$ es cerrado bajo sumandos directos y sumas directas finitas.

Si además, $\mathcal{L}$ contiene a R y es cerrado bajo coproductos y extensiones, diremos que $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un par de dualidad **perfecto** . Uno puede también intercambiar los roles de las clases $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ y decir que $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ es un par (perfecto) de dualidad sobre R.
Para las versiones relativas de módulos Gorenstein, se considera un tipo particular de pares

de dualidad primeramente estudiados por Bravo, Gillespie y Hovey en [15, Apéndice A], en el contexto de estructuras de modelo. A saber, un **par de dualidad simétrico** sobre R está dado por un par de clases $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$, con $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$, tal que $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ y $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ son pares de dualidad sobre R. Si además, $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es perfecto, el par de dualidad simétrico $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$ se dice que es **completo**. Debemos tener en cuenta que Bravo Gillespie y Hovey no trabajan con los calificativos de *simétrico* ni de *completo*, estos términos son mas bien usados en un trabajo reciente de Gillespie [34].

Ejemplo 5.7.

- 1. *Por Enochs y Jenda [25, Sección 3.2]. Si R es un anillo coherente a derecha, podemos ver que $\{\mathrm{Flat}(R), \mathrm{Inj}(R^{\mathrm{op}})\}$ es un par de dualidad completo sobre R, donde $\mathrm{Flat}(R)$ denota a la clase de los R-módulos a izquierda planos. Por [30], podemos asegurar que se cumple lo mismo para el par $\{\mathrm{Flat}(R), \mathrm{FP{-}Inj}(R^{\mathrm{op}})\}$, donde $\mathrm{FP{-}Inj}(R^{\mathrm{op}})$ denota la clase de los R-módulos a derecha FP-inyectivos (o absolutamente puros) [74].*

- 2. *Recordamos las nociones de R-módulos de nivel y FP_∞-inyectivos, introducidos en [15, Definición 2.6]. Estos son R-módulos a izquierda planos e inyectivos, relativos a módulos de tipo FP_∞. Específicamente, un R-módulo a izquierda Q es de **de tipo FP_∞** si existe una sucesión exacta*

$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to Q \to 0,$$

*donde F_k es finitamente generado y libre para todo $k \geq 0$ [15, Definición 2.2]. Un R-módulo E es **FP_∞-inyectivo** (o bien **absolutamente limpio**) si $\mathrm{Ext}^1_R(Q, E) = 0$, para todo R-módulo Q de tipo FP_∞. Similarmente, un R-módulo L es **de nivel** si $\mathrm{Tor}^R_1(Q, L) = 0$, para todo R-módulo derecho Q de tipo FP_∞. Denotamos por $\mathrm{Lev}(R)$ y $FP_\infty - Inj(R)$ a las clases de los R-módulos a izquierda de nivel y FP_∞-inyectivos, respectivamente. En [15], se demuestra que $\{\mathrm{Lev}(R), \mathrm{FP}_\infty - Inj(R^{\mathrm{op}})\}$ es un par de dualidad completo sobre R.*

Los módulos Gorenstein relativos a pares de dualidad, fueron introducidos recientemente por Gillespie en [34, Definiciones 4.1 y 4.2]. Sea $\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$ un par de dualidad completo sobre R. Un R-módulo M es **$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$-Gorenstein proyectivo** si $M = Z_0(\mathbf{P})$, para algún complejo acíclico $\mathbf{P}$ de R-módulos proyectivos que es también $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{L})$-acíclico. Existe una noción dual de R-módulos $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$-Gorenstein inyectivos, definidos como ciclos de un complejo acíclico de R-módulos a derecha inyectivos que es $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{R}, -)$-acíclico. Denotamos estas clases de módulos como $\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)$ y $\mathcal{GI}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R^{\mathrm{op}})$, respectivamente.

Ejemplo 5.8.

- 1. *Considerando $\mathcal{L} := \mathrm{Flat}(R)$ y $\mathcal{R} := \mathrm{FP} - \mathrm{Inj}(R^{op})$, en la definición de $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$-Gorenstein proyectivo y $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$-Gorenstein inyectivo, obtenemos los conceptos de R-módulos Ding-proyectivos a izquierda y Ding-inyectivos a derecha, introducidos por Gillespie en [35, Definiciones 3.2, 3,7]. Aunque necesitamos que R sea un anillo coherente a derecha, para que $\{\mathrm{Flat}(R), \mathrm{FP} - \mathrm{Inj}(R^{\mathrm{op}})\}$ sea un par de dualidad completo,*

estos conceptos se cumplen para cualquier par arbitrario R.
Los módulos Ding proyectivos y Ding inyectivos son una generalización de los módulos Gorenstein proyectivos y Gorentein inyectivos, respectivamente. Si denotamos por $\mathrm{DProj}(R)$ *a la clase de R-módulos a izquierda Ding proyectios, y por* $\mathrm{DInj}(R^{\mathrm{op}})$ *a la clase de R-módulos a derecha Ding inyectivos, es claro que* $\mathrm{DProj}(R) \subseteq \mathrm{GProj}(R)$ *y* $\mathrm{DInj}(R^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathrm{GInj}(R^{\mathrm{op}})$*, aunque la contension recíproca no se cumple necesariamente para anillos arbitrarios. Hasta ahora, se sabe de Gillespie [35, Observación 3.3 y 3.8] que* $\mathrm{DProj}(R) = \mathrm{GProj}(R)$*, cuando R es un anillo Gorenstein; y* $\mathrm{DInj}(R^{\mathrm{op}}) = \mathrm{GInj}(\mathcal{R}^{\mathrm{op}})$*, cuando R es noetheriano.*

- 2. *Otras generalizaciones de módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos, que cubren a los módulos Ding proyectivos y Ding inyectivos, fueron definidos por Bravo, Gillespie y Hovey en [15, Secciones 5 y 8]. Estas generalizaciones son conocidas como R-módulos Gorenstein AC-proyectivos y Gorenstein AC-inyectivos (a izquierda y a derecha), y son obtenidos al definir* $\mathcal{L} := \mathrm{Lev}(R)$ *y* $\mathcal{R} := \mathrm{FP}_\infty - \mathrm{Inj}(R^{\mathrm{op}})$ *en las definiciones de* $(\mathcal{L},\mathcal{R})$*-Gorenstein proyectivo y* $(\mathcal{L},\mathcal{R})$*-Gorenstein inyectivo. En lo que sigue, denotamos por* $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)$ *a la clase de los R-módulos Gorenstein AC-proyectivos; y por* $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)$ *a la clase de los R-módulos Gorenstein AC-inyectivos.*

Observación 5.9. *Los R-módulos Gorenstein proyectivos son un ejemplo de lo que Beligiannis [16, Definición 2.12] llama objetos* $\mathcal{X}$*-Gorenstein, si definimos* $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R)$*. Sin embargo, éste enfoque general no puede ser aplicado a los R-módulos Ding proyectivos ni a los Gorenstein AC-proyectivos.*

Verificamos como $\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)$ es parte de un par de Frobenius a izquierda.

Proposición 5.10. *El par* $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$ *para todo par de dualidad completo* $\{\mathcal{L},\mathcal{R}\}$ *sobre R.*

Demostración. Por la versión proyectiva de [34, Lema 4.5], tenemos que la clase $\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)$ es gruesa a izquierda. El resto de las condiciones en la Definición 1.5 son claras. Veamos que $\mathrm{Ext}^i_R(M,P) = 0$ se cumple para todo $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)$, $P \in \mathrm{Proj}(R)$ y todo entero $i > 0$, pues $\mathrm{Proj}(R) \subseteq \mathcal{L}$ [34, Proposición 2.3]. □

Como consecuencia del Teorema 3.1 y Proposición 3.13, tenemos una estructura de modelo exacta y proyectiva sobre $\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)^\wedge$, dada por

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R), \mathrm{Proj}(R)) := (\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge, \mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)^\wedge),$$

cuya categoría de homotopía es equivalente a la categoría estable $\mathcal{GP}_{(\mathcal{L},\mathcal{R})}(R)/\sim$.
Nos permitimos comentar algunas aplicaciones derivadas de Ejemplo 5.8 y concernientes a los trabajos [15, 35] de Bravo, Gillespie y Hovey. Primero, tenemos la siguiente consecuencia de la Proposición 5.10.

Corolario 5.11. *Para todo anillo R arbitrario,* $(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$.

Aunque otra consecuencia inmediata de la Proposición 5.10, Ejemplos 5.7 y 5.8 es que $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ es un par Frobenius fuerte a izquierda en R, en caso de que R sea un anillo coherente a derecha, esto puede ser probado para cualquier anillo arbitrario mediante un razonamiento similar al de la Sección 5.1. De hecho, se logra a partir de los resultados de H. Holm [47] que citamos en la Sección 5.1, junto con los argumentos que los prueban, aplicados a las subcategorías $\mathrm{DProj}(R)$ y $\mathrm{DInj}(R^{\mathrm{op}})$. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.12. *Para cualquier anillo arbitrario R,* $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es un par de Frobenius fuerte a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$.

De la definición de R-módulo Ding proyectivo, uno puede ser tentado a definir $\omega := \mathrm{Flat}(R)$ y asegurar incorrectamente que $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ es un par de Frobenius en $\mathrm{Mod}(R)$. Para esto, se puede ver que el par $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ satisface casi todas las condiciones de la Definición 1.5. Específicamente $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathrm{Mod}(R)$ si, y sólo si, la inclusión $\mathrm{Flat}(R) \subseteq \mathrm{DProj}(R)$ es cierta. En [35, Proposición 3.8] se prueba que un R-módulo Ding proyectivo es proyectivo o tiene dimensión plana infinita, esto es, se cumple la igualdad $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{DProj}(R) \cap \mathrm{Flat}(R)^\wedge$. Se sigue de lo anterior, que los módulos planos no proyectivos no pueden ser Ding proyectivos, y así la contensión $\mathrm{Flat}(R) \subseteq \mathrm{DProj}(R)$ no es necesariamente cierta. Por ésta razón, tenemos que considerar $\omega := \mathrm{Proj}(R)$ en lugar de $\omega := \mathrm{Flat}(R)$. Sin embargo, tenemos la siguiente caracterización de anillos perfectos en términos del par $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$.

Proposición 5.13. *Sea R un anillo arbitrario. Entonces, R es perfecto a izquierda si, y sólo si, el par* $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ *es un par de Frobenius a izquierda en* $\mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es clara, ya que $\mathrm{Flat}(R) = \mathrm{Proj}(R)$ se cumple para todo anillo perfecto R.
$(\Leftarrow)$ Ahora, supongamos que $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ es un par de Frobenius a izquierda en $\mathrm{Mod}(R)$; y sea $F \in \mathrm{Flat}(R)$. Por otro lado, como F es Ding proyectivo, tenemos que existe una sucesión exacta corta

$$0 \to F \to P \to M \to 0,$$

donde P es proyectivo y M es Ding proyectivo. Ahora, como $\mathrm{id}_{\mathrm{DProj}(R)}(\mathrm{Flat}(R)) = 0$ por Gillespie [35, Lema 3.9], tenemos que ésta sucesión se divide, y así F es sumando directo del R-módulo proyectivo P. Se sigue que todo R-módulo plano es proyectivo, y de aquí R es un anillo perfecto a izquierda. $\square$

Con respecto a los pares de cotorsión relativos, obtenemos de la Proposición 7.70 y Teoremas 2.7 y Teorema 2.8 pares de $\mathrm{DProj}(R)^\wedge$-cotorsión hereditarios (no necesariamente fuertes) en $\mathrm{Mod}(R)$ de la forma $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge)$ y $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{DProj}(R)^\wedge)$, donde $\mathrm{DProj}(R)^\wedge$ es la subcategoría de R-módulos con dimensión Ding proyectiva finita (definida como una dimensión resolución por la clase $\mathrm{DProj}(R)$). En caso de que R sea un anillo Ding-Chen, Gillespie obtiene en [35, Prueba del Teorema 4.7] que R es un anillo Ding-Chen si R es ambos, coherente a derecha y a izquierda y las dimensiones FP-inyectivas de R como módulo a izquierda y derecha coinciden. Para tales anillos Gillespie construye en [35, Prueba del Teorema 4.7] un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge)$ en $\mathrm{Mod}(R)$.

En éste punto, uno puede ver la diferencia entre el estudio del álgebra homológica Gorenstein y el álgebra homológica Ding-Chen desde el punto de vista de los pares de Frobenius. A saber:

- No sabemos si el par de $\mathrm{DProj}(R)^\wedge$-cotorsión $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge)$ y el par de cotorsión $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge)$ en $\mathrm{Mod}(R)$ coinciden, cuando R es un anillo Ding-Chen. Es sabido que para tales anillos, $\mathrm{Flat}(R)^\wedge$ coincide con la clase $FP-\mathrm{Inj}(R)^\vee$ de R-módulos con dimensión FP-inyectiva finita, pero no sabemos si la igualdad $\mathrm{Flat}(R)^\wedge = \mathrm{Proj}(R)^\wedge$ se cumple en este caso. Otro inconveniente es que no sabemos si $\mathrm{DProj}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R)$, cuando R es un anillo Ding-Chen, según podemos apreciar de [77].

  Problema abierto 5.14. *En el caso de que R sea un anillo Ding-Chen, ¿Las igualdades* $\mathrm{Flat}(R)^\wedge = \mathrm{Proj}(R)^\wedge$, $\mathrm{DProj}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R)$ *y* $\mathrm{DProj}(R)^\wedge = \mathrm{DInj}(R)^\vee$*, se cumplen?*

- Para un anillo arbitrario R, el par de Frobenius fuerte a izquierda$(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$ produce la estructura de modelo proyectiva de Auslander-Buchweitz

  $$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)) = (\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge, \mathrm{DProj}(R)^\wedge),$$

  sobre $\mathrm{DProj}(R)^\wedge$. En caso de que R sea un anillo Ding-Chen, existe una estructura de modelo abeliana $(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge, \mathrm{Mod}(R))$ sobre $\mathrm{Mod}(R)$, hallada por Gillespie en [35, Teorema 4.7]. Para tales anillo no estamos seguros si la última estructura de modelo coincide con la estrctura exacta $\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{proj}}(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R))$, que debería ser el caso, si el Problema 5.14 tuviera una respuesta positiva.
  Dualmente, existe una única estructura de modelo exacta

  $$\mathcal{M}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{Inj}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{DInj}(R)) := (\mathrm{DInj}(R)^\vee, \mathrm{Inj}(R)^\vee, \mathrm{DInj}(R)),$$

  sobre $\mathrm{DInj}(R)^\vee$ obtenida del par de Frobenius a derecha $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{DInj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$. Esta estructura generaliza a la estructura de modelo inyectiva de Gillespie [35, Teorema 4.7], en caso de que hubiera una respuesta positiva para el dual del Problema 5.14.

Considerando la subcategoría $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)$, obtenemos del Corolario 7.69 y de los Teoremas 2.7 y 2.8 dos pares de $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^\wedge$-cotorsión hereditarios en $\mathrm{Mod}(R)$

$$(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge) \text{ y } (\mathrm{Proj}(R), \mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^\wedge),$$

los cuales producen la estructura de modelo proyectiva sobre $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge}$

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)) = (\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)^{\wedge}, \mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge}).$$

Comparamos la estructura anterior con la estructura de modelo abeliana Gorenstein AC-proyectiva sobre $\mathrm{Mod}(R)$ (con R un anillo arbitrario) descrita en [15, Teorema 8.5]. Para la última estructura de modelo, la subcategoría de objetos triviales tiene una descripción [15, Lema 5.4] que no es necesariamente la misma que la dada arriba para la estructura $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R))$. Por otro lado, no estamos convencidos de si la subcategoría $\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge}$ coincide con la categoría completa $\mathrm{Mod}(R)$, para un anillo arbitrario R. Si esto resulta ser cierto, tendríamos otro modo de obtener la estructura de modelo abeliana Gorenstein AC-proyectiva.

Problema abierto 5.15. *Sea R un anillo. ¿Bajo cuales condiciones sobre R, los siguientes enunciados son ciertos?*

1. $\mathrm{Mod}(R) = \mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\wedge}$.
2. *Cualquier R-módulo tiene dimensión Gorenstein AC-proyectiva finita si, y sólo si, éste tiene dimensión Gorenstein AC-inyectiva finita.*

La categoría de homotopía de la estructura de modelo de Auslander-Buchweitz

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R)),$$

es exactamente la categoría de homotopía obtenida en [15, Teorema 8.7]. De modo que podemos decir que la estructura de modelo $\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R))$ y la estructura de modelo Gorenstein AC-proyectiva *coinciden* en el sentido de que tienen la misma categoría de homotopía.

Observación 5.16. *Las estructuras de modelo*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}(R)), \quad \mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{DProj}(R), \mathrm{Proj}(R)) \text{ y } \mathcal{M}^{\mathrm{proj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{GProj}_{\mathrm{AC}}(R), \mathrm{Proj}(R))$$

pueden ser obtenidas del Corolario 3.5.

Dualmente, se puede obtener la estructura de modelo inyectiva de Auslander-Buchweitz

$$\mathcal{M}^{\mathrm{inj}}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)) = (\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\vee}, \mathrm{Inj}(R), \mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)),$$

sobre $\mathrm{GInj}_{\mathrm{AC}}(R)^{\vee}$, con la misma categoría de homotopía que la estructura de modelo Gorenstein AC-inyectiva que [15, Teorema 5.5].

Capítulo 6

Objetos Gorenstein relativos

Iniciamos el segundo bloque de la tesis, abordando a una clase general de objetos Gorenstein. Entre el extenso trabajo realizado por M. Auslander tenemos, en la tesis doctoral de su alumno Bridger [3] a la G-dimensión de un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano y conmutativo. En la mencionada tesis, se prueba que $\text{G-dim}(M) \leq \text{pd}(M)$, con igualdad cuando $\text{pd}_R(M)$ es finita. Esta desigualdad es muy importante, ya que provee una herramienta mas fina que la dimensión proyectiva para clasificar a los módulos; y es tan buena, que coincide con ésta en caso de ser la segunda finita. El inconveniente es que fue definida en principio solamente para módulos finitamente generados sobre una clase especial de anillos. En un esfuerzo por extender esta herramienta, Enochs y Jenda [24] definen la *dimensión Gorenstein proyectiva* $\text{Gpd}_R(-)$, la cual es una dimensión por resolución, por una clase de *módulos Gorenstein proyectivos*, para módulos arbitrarios sobre anillos generales; y es H. Holm [47] quien prueba que la clase usada para definir ésta dimensión, posee propiedades homológicas importantes, como veremos a través del capítulo. Basados en ésta dinámica, damos aquí una exposición de resultados y conceptos que engloban a los objetos Gorenstein, pero ahora definidos a través de una categoría abeliana general. Los objetos Gorenstein relativos que tratamos aquí engloban a varios objetos tipo Gorenstein que aparecen en la literatura actual (ver [14, 75, 65, 21, 66, 33, 13, 79]) y han sido definidos de tal forma que nos permiten desarrollar un álgebra homológica relativa mas extensa, en comparación que los existentes.

6.1. Objetos Gorenstein proyectivos relativos.

En todo lo que sigue, supondremos que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana. Siguiendo la notación introducida en el Capítulo 1, denotamos por $\text{pd}(X)$ a la **dimensión proyectiva** de $X \in \mathcal{A}$. Similarmente $\text{id}(X)$ denotará a la **dimensión inyectiva** de $X \in \mathcal{A}$. Para un entero no negativo n, definimos

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{A}) := \{X \in \mathcal{A} : \text{pd}(X) \leq n\}.$$

En particular, $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) := \mathcal{P}_0(\mathcal{A})$ es la clase de objetos proyectivos de $\mathcal{A}$. Las clases $\mathcal{I}_n(\mathcal{A})$ y $\mathrm{Inj}(\mathcal{A})$, se definen de manera dual.
Una clase de objetos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ es **$\mathcal{X}$-epi** en $\mathcal{A}$, si para todo objeto $A \in \mathcal{A}$ existe un epimorfismo $X \to A$, con $X \in \mathcal{X}$. Observe que si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, la clase $\mathcal{P}_0(\mathcal{A})$ de objetos proyectivos en $\mathcal{A}$ es $\mathcal{P}_0(\mathcal{A})$-epi.
Dualmente, tenemos la noción de **$\mathcal{X}$-mono** en $\mathcal{A}$. Mas aún, para la clase $\mathcal{I}_0(\mathcal{A})$ de objetos inyectivos en $\mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{I}_0(\mathcal{A})$ es $\mathcal{I}_0(\mathcal{A})$-mono en $\mathcal{A}$, en caso de que $\mathcal{A}$ tenga suficientes inyectivos.

Usaremos varios tipos de pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, de clases de objetos en $\mathcal{A}$. Un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ es **completo a izquierda** (**completo a derecha**, respectivamente) si para cualquier $A \in \mathcal{A}$, existe una sucesión exacta $0 \to Y \to X \to A \to 0$ ($0 \to A \to Y \to X \to 0$, respectivamente), donde $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Decimos también que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es **completo** si es completo a izquierda y a derecha. Finalmente, el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es **hereditario** si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$.

Definición 6.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$. Una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-**resolución completa a izquierda** es un complejo acíclico*

$$\eta : \cdots \to X_1 \to X_0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

*con $X_i, X^i \in \mathcal{X}$ tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. En tal caso, el objeto $M := \mathrm{Ker}(X^0 \to X^1)$ es llamado $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-**Gorenstein proyectivo relativo** (para abreviar diremos, objeto $GP_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivo). La clase de todos los objetos $GP_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivos es denotada por $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ o simplemente por $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Decimos también que $\mathcal{X}$ es la **clase de aproximación** y $\mathcal{Y}$ es la **clase de testeo** en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

Observación 6.2. *De la definición anterior, se sigue que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, en caso que $0 \in \mathcal{X}$. Notemos que dicha definición fue dada primeramente en [66, Definición 2.1], pero asumiendo que $\mathcal{P}_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$.*

Daremos a continuación una noción mas débil de cogenerador relativo. Adelante, hacemos ver la importancia que tiene dentro de los objetos Gorenstein proyectivos débiles.

Definición 6.3. *Sea $(\omega, \mathcal{X})$ un par de clases de objetos en $\mathcal{A}$. Decimos que ω es un **casi-cogenerador relativo** de $\mathcal{X}$ si, para cada $X \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta*

$$0 \to X \to W \to X' \to 0,$$

*con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$. Mas aún, en caso que $\omega \subseteq \mathcal{X}$, diremos que ω es un **cogenerador relativo** en $\mathcal{X}$.*

Definición 6.4. *Un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de clases de objetos en $\mathcal{A}$ es **GP-admisible débil** si $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ y $\mathcal{X}$ es $\mathcal{X}$-epi en $\mathcal{A}$. Si además, el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisface las siguientes dos condiciones*

(a) *$\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son cerradas por coproductos finitos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones;*

(b) $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *es un cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$*;*

decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es un par* ***GP-admisible****.*

Definición 6.5. *Para cualquier par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *y* $M \in \mathcal{A}$*, la dimensión* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectiva de* M *es*

$$\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) := \mathrm{resdim}_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M).$$

Para cualquier clase $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$*, definimos* $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{Z}) := \sup\{\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$*. Si* $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$*, por simplicidad, definimos* $\mathcal{GP}_{\mathcal{X}} := \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}$ *y* $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{X}}(M) := \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(M)$*.*

Ejemplo 6.6. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$*.*

1. *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *es una categoría abeliana, con suficientes proyectivos. En éste caso, escribimos*

   $$\mathcal{GP}(\mathcal{A}) := \mathcal{GP}_{\mathcal{P}_0(\mathcal{A})} \text{ y } \mathrm{Gpd}(M) := \mathrm{Gpd}_{\mathcal{P}_0(\mathcal{A})}(M).$$

   Si $\mathcal{X} = \mathcal{P}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{Y}$*, el par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es GP-admisible y los objetos* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos relativos son los objetos Gorenstein proyectivos usuales en* $\mathcal{A}$*.*

   Si $\mathcal{P}_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{Y}$*, los objetos* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos relativos son justo los llamados* $\mathcal{X}$*-Gorenstein proyectivos, considerados en [14] y [75].*

2. *Para* $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}(R)$*, la categoría de* R*-módulos a izquierda,* $\mathcal{X} = \mathcal{P}_0(\mathcal{A})$ *y* $\mathcal{Y}$ *los* R*-módulos planos, se tiene que los módulos* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*-Gorenstein proyectivos relativos son los módulos* ***Ding proyectivos*** *[35]. En éste caso, escribimos*

   $$\mathcal{DP}(R) := \mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))} \quad \text{y } \mathrm{Dpd}(M) := \mathrm{Gpd}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))}(M).$$

Lema 6.7. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$*, con* $0 \in \mathcal{X}$*. Entonces, la clase* $\mathcal{X}$ *es un generador y cogenerador relativo en* $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*.*

Demostración. Sea $\cdots \to X_1 \stackrel{d_1}{\to} X_0 \to X^0 \to X^1 \stackrel{d^1}{\to} \cdots$ una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-resolución completa a izquierda tal que $M = \mathrm{Im}(X_0 \to X^0)$. Entonces, tenemos las sucesiones exactas $0 \to \mathrm{Im}(d_1) \to X_0 \to M \to 0$ y $0 \to M \to X^0 \to \mathrm{Ker}(d^1) \to 0$, donde $\mathrm{Im}(d_1)$ y $\mathrm{Ker}(d^1)$ son objetos $GP_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivos. $\square$

Definición 6.8. *Un par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *de clases de objetos en* $\mathcal{A}$ *es* ***GI-admisible débil*** *si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ *y* $\mathcal{Y}$ *es* $\mathcal{Y}$*-mono en* $\mathcal{A}$*. Si además, el par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *satisface las siguientes condiciones*

(a) $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *son cerradas por coproductos finitos en* $\mathcal{A}$*, y* $\mathcal{Y}$ *es cerrada bajo extensiones;*

(b) $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *es un generador relativo en* $\mathcal{Y}$*;*

decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es* ***GI-admisible****.*

Definición 6.9. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$. Una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**resolución completa a derecha** es un complejo acíclico,*

$$\eta : \cdots \to Y_1 \to Y_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

*con $Y_i, Y^i \in \mathcal{Y}$ tal que el complejo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,\eta)$ es acíclico, para todo $X \in \mathcal{X}$. En tal caso, el objeto $M := \operatorname{Im}(Y_0 \to Y^0)$ es llamado $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**Gorenstein inyectivo relativo** (para abreviar diremos, objeto $GI_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo). La clase de todos los objetos $GI_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivos es denotada por $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ o simplemente por $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Decimos también que $\mathcal{Y}$ es la **clase de aproximación** y $\mathcal{X}$ es la **clase de testeo** en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

Si $\mathcal{X} = \mathcal{I}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{Y}$, los objetos $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein inyectivos relativos son precisamente los objetos Gorenstein inyectivos usuales en $\mathcal{A}$. En el caso que $\mathcal{A} = \operatorname{Mod}(R)$, $\mathcal{X}$ es la clase de R-módulos FP-inyectivos (es decir, aquellos $E \in \operatorname{Mod}(R)$ tales que $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F,E) = 0$, para cualquier R-módulo finitamente presentado F) y $\mathcal{Y} := \mathcal{I}_0(\mathcal{A})$, los módulos $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein inyectivos son justo los módulos Ding-inyectivos [35].

Definición 6.10. *Para cualquier par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ y $M \in \mathcal{A}$, la dimensión $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein inyectiva de M es*

$$\operatorname{Gid}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) := \operatorname{coresdim}_{\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M).$$

Observación 6.11. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$. Puede verse que $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es GI-admisible en $\mathcal{A}$ si y sólo si $(\mathcal{Y}^{\mathrm{op}},\mathcal{X}^{\mathrm{op}})$ es GP-admisible en la categoría opuesta $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Mas aún, $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = (\mathcal{GP}_{(\mathcal{Y}^{\mathrm{op}},\mathcal{X}^{\mathrm{op}})}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$. Por lo tanto, cualquier resultado obtenido para objetos en la clase $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ puede ser trasladado en un resultado para objetos en la clase $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De modo que, en lo que sigue, trataremos solo con objetos Gorenstein proyectivos relativos.*

El siguiente resultado [22, Lema 4.1.1 (c)] será una útil herramienta para estudiar la clase de objetos Gorenstein proyectivos relativos.

Lema 6.12. *Sean $N \in \mathcal{A}$ y $X^\bullet : \cdots \to X^i \xrightarrow{d^i_{X^\bullet}} X^{i+1} \to \cdots$ un complejo acíclico tal que $X^i \in {}^{\perp}N$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces, para $Z^i_{X^\bullet} := \operatorname{Ker}(d^i_{X^\bullet})$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *El complejo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, N)$ es acíclico.*

(b) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^l_{X^\bullet}, N) = 0 \ \forall\, l \in \mathbb{Z}$.

(c) $\operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(Z^l_{X^\bullet}, N) = 0 \ \forall\, l \in \mathbb{Z}$ *y* $\forall m > 0$.

Definición 6.13. *Para $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, introducimos la subcategoría plena $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq \mathcal{A}$, consistente de los objetos $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**Gorenstein proyectivos débiles** (para abreviar diremos; objetos $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivos). Decimos que $M \in \mathcal{A}$, es $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivo si $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$, con $X^i \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{Im}(X^i \to X^{i+1}) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

En caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, por simplicidad, escribiremos $W\mathcal{GP}_{\mathcal{X}}$ en lugar de $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}$. Diremos que cada elemento de $W\mathcal{GP}_{\mathcal{X}}$ es un objeto $\mathcal{X}$-Gorenstein proyectivo débil. La dimensión $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorentein proyectiva débil de M es

$$W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) := \mathrm{resdim}_{W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M).$$

*Para cualquier clase $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A}$, definimos $W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{Z}) := \sup\{W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, denotamos $W\mathrm{Gpd}_{\mathcal{X}}(M) := W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(M)$. Dualmente, tenemos la clase $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ de objetos $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**Gorenstein inyectivos débiles** o bien objetos $WGI_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo en $\mathcal{A}$, y la **dimensión** $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**Gorenstein inyectiva débil** $W\mathrm{Gid}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M)$ de M.*

Ejemplo 6.14. *1. [13] La clase $G_CP(R)$ de R-módulos G_C-proyectivos es introducida en [13, Definición 2.2] y también se estudian sus propiedades homológicas, para el caso en que C sea un R-módulo débilmente-Wakamatsu tilting (i.e C es Σ-ortogonal y ${}_RR \in W\mathcal{GP}_{\mathrm{Add}(C)}$).*
Tomando C como Σ-ortogonal, por [13][Proposición 2.4] y Lema 6.12, tenemos que $\mathcal{G}_CP(R) = W\mathcal{GP}_{\mathrm{Add}(C)}$. Como veremos , muchos de los resultados obtenidos en [13], son casos particulares de la teoría desarrollada en este trabajo.

2. [17] Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\omega \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$. En este caso, los objetos en $W\mathcal{GP}_\omega$ son llamados objetos Cohen-Macaulay en $\mathcal{A}$, y ésta clase de objetos es denotada en [17] por $\mathrm{CMC}(\omega)$.

Observación 6.15. *Para cualquier par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)}$. De hecho, por el dual del Lema 1.8, sabemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(M)$, para cualquier $M \in \mathcal{A}$, y así ${}^\perp\mathcal{Y} = {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$.*

Observe que, en general, para un par arbitrario $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, la clase $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ no tiene porque coincidir con $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$; sin embargo, podemos establecer la siguiente relación entre ellos.

Proposición 6.16. *Para cualquier $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Si $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

(b) *Si $0 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, entonces $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$.*

Demostración. (a) Sea $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, existe un complejo acíclico

$$\eta : \cdots \to X_1 \to X_0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots ,$$

con $X_i, X^i \in \mathcal{X}$, tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es acíclico $\forall\, Y \in \mathcal{Y}$ y $G = \mathrm{Ker}(X^0 \to X^1)$. En particular, la sucesión exacta

$$\eta' : 0 \to G \to X^0 \to X^1 \to \cdots ,$$

cumple que el complejo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta', Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Como $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, del Lema 6.12 y el complejo η', obtenemos que $\operatorname{Ker}(X^i \to X^{i+1}) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.
(b) Como $0 \in \mathcal{X}$, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ se sigue del hecho que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. □

Basados en la proposición anterior, podemos ahondar más en la relación que existe entre $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Observe que si suponemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $0 \in \mathcal{X}$, pero que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \neq 0$ llegamos a una contradicción. Por lo que en la situación $0 \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \neq 0$ debe suceder que exista $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ tal que $G \notin W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, de donde concluimos que, en general $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \neq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De lo anterior, toma sentido trabajar a ambas clases de objetos paralelamente, siendo que en general son distintas.

Corolario 6.17. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *tal que* $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$. *Entonces*

(a) $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(\mathcal{X}) = 0$,

(b) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y} \cap {}^{\perp}(\mathcal{Y}^\wedge) = {}^{\perp}(\mathcal{Y}^\wedge)$ *y* $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y} \cap {}^{\perp}(\mathcal{Y}^\wedge) = {}^{\perp}(\mathcal{Y}^\wedge)$.

Demostración. Por la Proposición 6.16, tenemos que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0$. Por otro lado, por hipótesis, tenemos que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, por lo que el inciso (a) se sigue directamente del Lema 1.8. Finalmente, (b) se obtiene de (a) y la igualdad $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0$. □

El siguiente resultado es una generalización de [13, Proposición 2.4], [47, Proposición 2.3], [75, Proposición 3.8] y [66, Proposición 2.4].

Proposición 6.18. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par GP-admisible débil en* $\mathcal{A}$. *Entonces, para* $M \in \mathcal{A}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

(b) $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ *y existe una sucesión exacta* $\xi : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$, *con* $X^i \in \mathcal{X}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, *tal que el complejo* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi, Y)$ *es acíclico para todo* $Y \in \mathcal{Y}$.

(c) $M \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por definición, existe un complejo acíclico

$$\xi' : \cdots \to X_1 \to X_0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

con $X_i, X^i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $M = \operatorname{Ker}(X^0 \to X^1)$ y tal que el complejo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi', Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Por el Lema 6.12, $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y la sucesión exacta $\xi : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ cumple que el complejo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi, Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que, para $M \in \mathcal{A}$, existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

con $X^i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi, Y)$ es acíclico para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Como $\mathcal{X}$ es $\mathcal{X}$-epi en $\mathcal{A}$, existe $X_0 \in \mathcal{X}$ tal que $X_0 \to M \to 0$ es exacta. Sea $Z_0 := \mathrm{Ker}(X_0 \to M)$. Así, de la sucesión exacta $0 \to Z_0 \to X_0 \to M \to 0$ tenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X_0, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(Z_0, Y) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(M, Y) = 0$$

para todo $i > 0$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, se sigue que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X_0, Y) = 0$ para todo $i > 0$. Por lo tanto $Z_0 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Repitiendo este procedimiento, podemos formar una sucesión exacta

$$\xi' : \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{Ker}(X_i \to X_{i+1}) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por el Lema 6.12, la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi', Y)$ es exacta para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto el complejo ξ'', que resulta de pegar las sucesiones ξ y ξ', es acíclico; mas aun, el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi'', Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. De lo anterior $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) Se sigue de la Definición 6.13 y del Lema 6.12. $\square$

Proposición 6.19. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión hereditario en $\mathcal{A}$, el cual es completo a derecha. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *$\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda y $\mathcal{Y}$ es gruesa a derecha. Más aún, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$.*

(b) *$W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$.*

Demostración. (a) Como $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$, ${}^{\perp_1}\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$, se tiene que $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda y que $\mathcal{Y}$ es gruesa a derecha. Por otro lado, el hecho que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es completo a derecha implica que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$.
(b) Como $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y $\mathcal{Y}$ es coresolvente, se sigue que ${}^{\perp_1}\mathcal{Y} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y así $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Entonces, (b) se sigue de las inclusiones $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. $\square$

Como una consecuencia del corolario de arriba, se sigue que los pares de cotorsión completos y hereditarios pueden ser vistos como casos particulares de la teoría Gorenstein relativa en categorías abelianas con suficientes proyectivos e inyectivos. Mas específicamente, tenemos la siguiente observación.

Observación 6.20. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo en $\mathcal{A}$. Entonces, el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es ambos, GP-admisible y GI-admisible. Además, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{X}$ y $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{Y}$.*

Proposición 6.21. *Para $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ con $0 \in \mathcal{X}$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *$\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo.*

(b) *$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 0$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq \mathcal{GP}_{\mathcal{X}}$.*

Si una de las condiciones de arriba se cumple, entonces $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{X}}(M) \leq \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Empezamos probando que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 0$. Como $0 \in \mathcal{X}$, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, y usando la hipótesis de que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo, obtenemos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0.$$

Sea $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, existe una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución completa izquierda

$$\eta : \quad \cdots \to X_1 \to X_0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

tal que $M = \mathrm{Im}(X_0 \to X^0)$. Aseguramos que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, X)$ es acíclico para todo $X \in \mathcal{X}$. En efecto, como todos los ciclos del complejo η son objetos $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-proyectivos y $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0$, obtenemos del Lema 6.12 que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, \mathcal{X})$ es acíclico para todo $X \in \mathcal{X}$. De aquí $M \in \mathcal{GP}_{\mathcal{X}}$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 0$, se sigue de la Proposición 6.16 que $\mathcal{GP}_{\mathcal{X}} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$. Así $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$ y entonces $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. $\square$

Lema 6.22. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ tal que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$. Si se cumple alguna contención, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}^\wedge$ o $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{Y}^\wedge$, entonces $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}^\wedge$ (el otro caso es similar). Del Corolario 6.17 tenemos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0,$$

probando que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. $\square$

Lema 6.23. *Sean $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible débil y $M \in \mathcal{A}$. Entonces $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta en $\mathcal{A}$*

$$0 \to M \to X \to G \to 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A}$. Si $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, por definición, existe una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución completa a izquierda

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots,$$

con $X_i, X^i \in \mathcal{X}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, tal que $M = \mathrm{Ker}(X^0 \to X^1)$, y también $G := \mathrm{Ker}(X^1 \to X^2) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De donde obtenemos la sucesión exacta $0 \to M \to X^0 \to G \to 0$, con $X^0 \in \mathcal{X}$ y

$G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.
Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión exacta en $\mathcal{A}$

$$\eta : 0 \to M \to X \to G \to 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego, por la Proposición 6.18, se sigue que $G \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, y además que existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to G \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

con $X^i \in \mathcal{X}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi, Y)$ es acíclico para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Consideremos la sucesión exacta en $\mathcal{A}$

$$\epsilon : 0 \to M \to X \to X^0 \to X^1 \to \cdots ,$$

que resulta al pegar η y ξ. Para ver que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\epsilon, Y)$ es acíclico $\forall\ Y \in \mathcal{Y}$, solo hace falta probar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es acíclico $\forall\ Y \in \mathcal{Y}$. En efecto, para $Y \in \mathcal{Y}$, de la sucesión exacta η tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(G, Y) = 0,$$

donde el último término es cero, ya que $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Veamos ahora que $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. En efecto, para $Y \in \mathcal{Y}$, de la sucesión exacta η tenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(G, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(G, Y) = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego, como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, Y) = 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. Finalmente, por la Proposición 6.18, concluimos que $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. $\square$

6.2. Categorías abelianas con estructura adicional

En algunos lugares consideramos categorías abelianas con ciertas condiciones adicionales, las cuales fueron introducidas por Alexander Grothendieck (ver el Apéndice para un tratamiento mas amplio del tema). Estaremos particularmente interesados en las condiciones AB4* y AB4. Una categoría abeliana $\mathcal{A}$ es una **categoría abeliana AB4*** si $\mathcal{A}$ tiene productos y el producto de cualquier conjunto no vacío de epimorfismos es también un epimorfismo. Dualmente, una **categoría abeliana AB4** es una categoría abeliana $\mathcal{A}$, la cual tiene coproductos y el coproducto de cualquier conjunto no vacío de monomorfismos es también un monomorfismo.

Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathrm{Prod}(\mathcal{X})$ (respectivamente, $\mathrm{Add}(\mathcal{X})$) a la clase de objetos en $\mathcal{A}$ que consiste de los sumandos directos de productos (respectivamente, coproductos) de elementos en $\mathcal{X}$. En el caso de un solo objeto $\mathcal{X} = \{X\}$, por simplicidad escribiremos solamente $\mathrm{Prod}(X)$ (respectivamente $\mathrm{Add}(X)$).

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con coproductos. Un objeto $M \in \mathcal{A}$ es **$\sum$-ortogonal** si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, M^{(I)}) = 0$, para todo $i \geq 1$ y cualquier conjunto I. Dualmente, en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con productos, un objeto $M \in \mathcal{A}$ es $\prod$-ortogonal si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M^I, M) = 0$, para todo $i \geq 0$ y todo conjunto I.

Observación 6.24. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría AB4* con suficientes inyectivos. En éste caso, el producto de cualquier conjunto de sucesiones exactas es una sucesión exacta [69, Proposición 8.3]. Puede mostrarse que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B_\alpha)$, para todo $i \geq 0$. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que $\mathrm{id}(\prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \sup_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{id}(B_\alpha)$. En particular, se sigue que*

$$\mathrm{id}(\mathrm{Prod}(M)) = \mathrm{id}(M) \quad y \quad {}^{\perp}\mathrm{Prod}(M) = {}^{\perp}M,$$

para cualquier objeto $M \in \mathcal{A}$. Si M es $\prod$-ortogonal, entonces $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M)) = 0$ para todo $i \geq 0$.

El siguiente resultado es una generalización de [14, Teorema 2.3], [47, Teorema 2.5], [66, Teorema 2.5], [75, Teorema 3.11] en el contexto de objetos Gorenstein proyectivos relativos. Otra posible generalización es dada en el Corolario 6.36.

Teorema 6.25. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ un par GP-admisible débil, en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. Entonces, los siguientes enunciados se cumplen.*

(a) *Si $\mathcal{X}$ es cerrado por coproductos finitos, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es una clase pre-resolvente.*

(b) *Si $\mathcal{A}$ es AB4 y $\mathcal{X}$ es cerrada por coproductos arbitrarios, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrada por coproductos arbitrarios y gruesa a izquierda en $\mathcal{A}$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada por coproductos finitos. Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$. Veamos lo siguiente

(i) $M', M'' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ implica que $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Primeramente, observemos que $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, pues $M', M'' \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Por otro lado, dado que $\mathcal{X}$ es un casi-cogenerador relativo de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ (ver Proposición 6.18), podemos construir el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dl, "f'"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & \\
 & \eta' & \eta & \eta'' &
\end{tikzcd}
$$

donde $X', X'' \in \mathcal{X}$, $X := X' \oplus X'' \in \mathcal{X}$, y $K', K'' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, ya que $\mathcal{X}$ es cerrada por coproductos finitos. El morfismo $f' : M \to X'$ existe, pues

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha, X') : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, X') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', X')$$

es un epimorfismo ya que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. Luego, usando el Lema de la Serpiente, el morfismo

$$\lambda := \begin{pmatrix} f' \\ g\beta \end{pmatrix} : M \longrightarrow X' \oplus X'',$$

es un monomorfismo. Por la Proposición 6.18, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta', Y)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta'', Y)$ son acíclicos, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

En efecto, para todo $Y \in \mathcal{Y}$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K, Y),$$

cuyo último término es cero, ya que también tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K'', Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K', Y),$$

con extremos cero para todo $Y \in \mathcal{Y}$, pues $K', K'' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Repitiendo el procedimiento anterior, para $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$, se obtiene la sucesión exacta

$$\xi^+ : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots,$$

con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi^+, Y)$ acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Dado que $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, por el Lema 6.18, obtenemos que $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

(ii) $M, M'' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ implica que $M' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Para $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, existe una sucesión exacta $0 \to M \to X \to G \to 0$, con $X \in \mathcal{X}$ y $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego, por el Lema de la Serpiente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 \gamma : 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Por el inciso (i), $M'', G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ implican que $T \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por lo tanto, de la sucesión exacta γ y el Lema 6.23, obtenemos que $M' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

De lo anterior se sigue que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es una clase pre-resolvente.

(b) Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ cerrada por co-productos arbitrarios, donde $\mathcal{A}$ satisface el axioma AB4. El axioma mencionado implica que *el co-producto arbitrario de sucesiones exactas en $\mathcal{A}$ es nuevamente una sucesión exacta en $\mathcal{A}$*. Usaremos fuertemente éste hecho en lo que sigue.

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de objetos en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Para cada $i \in I$, existe un complejo acíclico

$$\eta_i : \cdots \to X_{i,1} \to X_{i,0} \to X^{i,0} \to X^{i,1} \to \cdots, \text{ con } X^{i,j}, X_{i,j} \in \mathcal{X} \ \forall i, j \in \mathbb{N},$$

tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta_i, Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y $G_i = \mathrm{Ker}(X^{i,0} \to X^{i,1})$. Entonces, el complejo suma directa

$$\eta := \oplus_{i\in I}\eta_i : \cdots \to \oplus_{i\in I}X_{i,1} \to \oplus_{i\in I}X_{i,0} \to \oplus_{i\in I}X^{i,0} \to \oplus_{i\in I}X^{i,1} \to \cdots$$

es un complejo acíclico (pues $\mathcal{A}$ satisface el axioma AB4), con $\bigoplus_{i\in I} X^{i,j} \in \mathcal{X}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I} X^{i,j} \to \bigoplus_{i\in I} X^{i,j+1}) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(X^{i,j} \to X^{i,j+1})$. Además, para cada $Y \in \mathcal{Y}$, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ es tal que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\oplus_{i\in I}\mathrm{Ker}(X^{i,j} \to X^{i,j+1}), Y) \;\cong\; \Pi_{i\in I}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(X^{i,j} \to X^{i,j+1}), Y) = 0,$$

donde la ultima igualdad se da por el Lema 6.12, puesto que $\mathrm{Ker}(X^{i,j} \to X^{i,j+1}) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Lo cual es equivalente a que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ sea un complejo acíclico. Por último, el hecho que $\mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I} X^{i,0} \to \bigoplus_{i\in I} X^{i,1}) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(X^{i,0} \to X^{i,1}) = \bigoplus_{i\in I} G_i$, implica que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrada por sumas arbitrarias.

Por el inciso (i), sabemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es pre-resolvente. Así, usando el *Truco de Eilenberg* (Proposición 8.4), se sigue que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrada por sumandos directos. $\square$

Lema 6.26. *Sean* $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *tal que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$*, con* $\mathcal{X}$ *cerrada por extensiones, y* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathcal{A}$*. Si* $A \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *y* $C \in \mathcal{X}$*, entonces* $B \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*.*

Demostración. Sea $A \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego, existe una sucesión exacta $0 \to A \to X \to G \to 0$, con $X \in \mathcal{X}$ y $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
& G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
& 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $X, C \in \mathcal{X}$, obtenemos que $Q \in \mathcal{X}$.

Notemos ahora que, en la sucesión exacta $\epsilon : 0 \to B \to Q \to G \to 0$, se tiene que $Q \in \mathcal{X}$ y $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego, usando ϵ y el hecho que $Q, G \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, se puede ver que $B \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Finalmente, como $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, se sigue por definición que $B \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. $\square$

Proposición 6.27. *Sean* $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *tal que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$*, con* $\mathcal{X}$ *cerrado por extensiones, y* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *cerrado bajo coproductos finitos en* $\mathcal{A}$*, que es también cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$*. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *La clase* ω *es cerrada por extensiones, un cogenerador relativo* $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*-inyectivo en* $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *y* $\mathrm{id}_{\omega}(\omega) = 0$.

(b) *Si* ω *es cerrada bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$*, entonces* $\omega = \mathcal{Y} \cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$*.*

Demostración. (a) Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, tenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\omega,\omega) = 0$, para todo $i \geq 1$. Entonces, cualquier sucesión exacta $0 \to W \to E \to W' \to 0$, con $W, \mathcal{W}' \in \omega$, se divide; y así $E = W \oplus W' \in \omega$, pues ω es cerrado por coproductos finitos en $\mathcal{A}$.

Veamos ahora que ω es un cogenerador relativo en $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Sea $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. En particular, existe una sucesión exacta

$$0 \to G \to X \to G' \to 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $G' \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por ser ω un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta $0 \to X \to W \to X' \to 0$, con $X' \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$. Del Lema de la Serpiente, obtenemos el diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & G \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & X' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien $G' \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $X' \in \mathcal{X}$ implican, por el Lema 6.26, que $T \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Más aún, de la inclusión $\omega \subseteq \mathcal{X} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y la sucesión exacta η, se sigue que ω es un cogenerador relativo en $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Finalmente, tenemos que $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$, ya que $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y} \subseteq {}^\perp\omega$.

(b) Sea ω cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$. Probamos que $\omega = \mathcal{Y} \cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Es claro que $\omega \subseteq \mathcal{Y} \cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Por otro lado, sea $M \in \mathcal{Y} \cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Entonces, por (a), existe una sucesión exacta $\epsilon : 0 \to M \to W \to C \to 0$, con $W \in \omega$ y $C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega) = 0$, se sigue que ϵ se escinde, y así $M \in \omega$. $\square$

Corolario 6.28. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *La clase ω es cerrada bajo extensiones, un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$.*

(b) *Si ω es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces $\omega = \mathcal{Y} \cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.*

Demostración. Como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es GP-admisible, tenemos de la Proposición 6.18 que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, el resultado se sigue de la Proposición 6.27. $\square$

Proposición 6.29. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, el par $(\mathcal{X}, \omega)$ es GP-admisible y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}$.*

Demostración. Como $\omega \subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$, se sigue que $\mathrm{pd}_{\omega}(\mathcal{X}) = 0$; y así $(\mathcal{X}, \omega)$ es un par GP-admisible.
Sea $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego $M \in {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}\omega$. Por otro lado, del Lema 6.18, existe una sucesión exacta

$$\xi^+ : 0 \to M \to X_0 \to X_1 \to \cdots,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi^+, Y)$ es acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Dado que $\omega \subseteq \mathcal{Y}$, se tiene también que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi^+, W)$ es acíclico, para todo $W \in \omega$. Por lo que, del Lema 6.18, concluimos que $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\omega)}$. $\square$

En lo que sigue, estudiaremos la categoría $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ (ver Definición 6.13), para el caso en que $\omega \subseteq \mathcal{Y}$. Una situación particular ha sido estudiada por M. Auslander e I. Reiten en [8], para $\omega = \mathrm{add}(T) = \mathcal{Y}$, con T un Λ-módulo finitamente generado, auto-ortogonal (i.e. $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(T,T) = 0 \;\forall\, i \geq 1$) y Λ una álgebra de Artin.

Lema 6.30. *Para $(\omega, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, con $\omega \subseteq \mathcal{Y}$, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) La clase ω es un casi-cogenerador relativo $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$-inyectivo de $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(b) Si $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$ y $0 \in \omega$, entonces ω es un cogenerador relativo de $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(c) Si ω es un cogenerador relativo de $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, entonces $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$.

Demostración. (a) Por definición, la clase ω es un casi-cogenerador relativo de $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Resta probar que ω es $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$-inyectivo, esto es $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega) = 0$, para todo $i > 0$. En efecto, lo anterior se sigue de la siguiente inclusión $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}\omega$, pues $\omega \subseteq \mathcal{Y}$.

(b) Por el inciso (a), solo debemos que probar que $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Note que $\omega \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$, pues $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$. Por otro lado, para $W \in \omega$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \to W \xrightarrow{1_W} W \xrightarrow{f_0} 0 \xrightarrow{f_1} 0 \xrightarrow{f_2} \cdots.$$

Luego, como $0 \in \omega \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$, se sigue que $W \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(c) Es inmediato de la definición de cogenerador relativo y del hecho que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. $\square$

El siguiente resultado muestra que, dado un par GP-admisible $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en $\mathcal{A}$, los objetos $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$-Gorenstein proyectivos débiles pueden ser una clase mas grande que los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein proyectivos.

Lema 6.31. *Para un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, GP-admisible en $\mathcal{A}$, se tiene que*

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}}.$$

Demostración. Sea $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por la Proposición 6.27, existe una sucesión exacta $0 \to G \to W_0 \to G_0 \to 0$, con $W_0 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y $G_0 \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Repitiendo el proceso anterior, podemos construir una sucesión exacta $0 \to G \to W_0 \to W_1 \to W_2 \to \cdots$, con $W_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y $\mathrm{Im}(W_i \to W_{i+1}) \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. □

El siguiente resultado generaliza [13, Proposición 2.9 y Corolario 2.10]. Una prueba alternativa a que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ sea cerrado bajo núcleos de epimorfismos entre sus objetos y extensiones, puede hallarse en el Apéndice, desde la Definición 8.5 y terminando en el Teorema 8.16. Para ello, se han definido un tipo especial de sucesiones, las cuales se inspiran en la Definición 6.1.

Teorema 6.32. *Sean $\omega \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$, con ω cerrado por coproductos finitos. Entonces $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda.*

Demostración. Llevamos a cabo la demostración en varios pasos.
(i) Veamos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es cerrado bajo extensiones.

Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta, con $A, C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Luego $B \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y existen sucesiones exactas

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\epsilon} W_0 \longrightarrow L \to 0,$$
$$\eta' : 0 \to C \xrightarrow{\xi} W_0' \longrightarrow K \to 0,$$

con $W_0, W_0' \in \omega$ y $L, K \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\epsilon"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\epsilon'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\gamma : 0 \arrow[r] & W_0 \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como $C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}\omega$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C, W_0) = 0$. Por lo que, la sucesión γ se escinde y obtenemos $U = W_0 \oplus C$. Ahora, usando el Lema de la Serpiente, junto con la sucesión exacta $0 \to W_0 \oplus C \xrightarrow{\delta} W_0 \oplus W_0' \longrightarrow K \to 0$, donde $\delta := 1_{W_0} \oplus \xi$ y $W_0 \oplus W_0' \in \omega$

(pues ω es cerrado por sumas directas), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, equal] & W_0 \oplus C \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\delta\epsilon'"] & W_0 \oplus W_0' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior, por hipótesis $L, K \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, lo cual implica que $V \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Luego, en la sucesión exacta $0 \to B \to W_0 \oplus W_0' \to V \to 0$ es claro que $W_0 \oplus W_0' \in \omega$ y $B, V \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Mas aun, en la sucesión exacta $0 \to L \to V \to K \to 0$ se tienen $L, K \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. De modo que podemos repetir el proceso anterior con V, y así obtener la sucesión deseada para B.

(ii) Veamos ahora que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos entre sus objetos y sumandos directos. Sea $\eta : 0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta, con $B, C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ (en particular, se tiene que $A \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$). Dado que $B \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, existe una sucesión exacta $\eta' : 0 \to B \to W_0 \to E_0 \to 0$, con $W_0 \in \omega$ y $E_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Por lo que podemos armar el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & C' \arrow[d, "t"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & W_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & W_0 \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0, & & &
\end{tikzcd}$$

del cual, por Lema de la Serpiente, se sigue que $C \simeq C'$.

En lo que sigue, veremos que $A \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. En efecto, tenemos $C' \simeq C, E_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, lo cual por el inciso (i) y la tercera columna del diagrama anterior, nos da $K_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Luego, la sucesión exacta $0 \to A \to W_0 \to K_0 \to 0$ y $W_0 \in \omega$, implican que $A \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

Supongamos ahora que la sucesión η se parte. Del diagrama anterior, cambiando C' por C en la tercera columna y sumando con 1_A, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}} A \oplus K_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}} E_0 \longrightarrow 0.$$

Dado que $A\oplus C = B \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ y $E_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ se sigue de (i) que $A\oplus K_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ (y por lo tanto $K_0 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$). Dado que $A \oplus K_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, podemos armar un diagrama como el anterior

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & \overline{C} \arrow[d, "t_1"] & \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "r_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus K_0 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A \arrow[d] & & 0 & \\
& 0, & & &
\end{tikzcd}$$

donde $E_1 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, $W_1 \in \omega$ y $A \simeq \overline{C}$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \oplus K_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1_{K_0} \end{pmatrix}} K_1 \oplus K_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}} E_1 \longrightarrow 0.$$

Como $E_1, A \oplus K_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, se tiene que $K_1 \oplus K_0 \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ (y por lo tanto $K_1 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$). Podemos continuar, con $K_1 \oplus K_0$, el mismo proceso que con $A \oplus K_0$, para obtener una sucesión $0 \to A \to W_0 \to W_1 \to W_2 \to \cdots$ como en la Definición 6.13. $\square$

Es natural preguntarse que se obtiene, en términos de Gorenstein proyectivos relativos, cuando consideramos el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$ y $(W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$. Esto es, el estudio de las clases

$\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} := \mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})}$ y $W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} := W\mathcal{GP}_{(W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})}$. En el siguiente resultado, consideramos objetos Gorenstein proyectivos débiles.

Una versión del inciso del siguiente resultado ha sido probado en [79], para el caso $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})}$, donde $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$.

Teorema 6.33. *Sea* $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *tal que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ *y* $\mathcal{X}$ *es cerrado bajo extensiones, con* $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ *cerrado bajo coproductos finitos en* $\mathcal{A}$ *y un cogenerador relativo en* $\mathcal{X}$*. Entonces, la clase* $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *es gruesa a izquierda y*

$$W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

Demostración. Sea $M \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por la Proposición 6.27 (a), existe una sucesión exacta $0 \to M \to W \to G \to 0$, con $W \in \omega$ y $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Repitiendo el procedimiento anterior con G, se obtiene que $M \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Ahora, la inclusión $\omega \subseteq \mathcal{X}$, nos da $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$; probando que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por otro lado, por el Teorema 6.32, tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda.

Sea $G \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Consideremos el complejo acíclico

$$\eta : \cdots \to 0 \to G = G \to 0 \to \cdots .$$

Observe que η es un complejo de objetos en $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es acíclico para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto $G \in W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Sea $M \in W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, existe un complejo acíclico

$$\eta : \cdots \to G_1 \to G_0 \to G^0 \to G^1 \to \cdots ,$$

con $G_i, G^i \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, $M \simeq \mathrm{Im}(G_0 \to G^0)$, tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es un complejo acíclico para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Luego, por el Lema 6.12, sabemos que $L^i := \mathrm{Im}(G^i \to G^{i+1}) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $G^0 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, existe una sucesión $0 \to G^0 \to F^0 \to K^1 \to 0$, exacta con $F^0 \in \mathcal{X}$ y $K^1 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, por el Lema de la Serpiente, se tiene siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G^0 \arrow[r] \arrow[d] & L^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & F^0 \arrow[r] \arrow[d] & T^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K^1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Como $K^1 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y $L^0 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, tenemos que $T^0 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. También, por el Lema de la Serpiente, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L^0 \arrow[r] \arrow[d] & G^1 \arrow[r] \arrow[d] & L^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^0 \arrow[r] \arrow[d] & U^1 \arrow[r] \arrow[d] & L^1 \arrow[r] & 0 \\
& K^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K^1 \arrow[d] & & \\
& 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como $K^1, G^1 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $U^1 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De lo anterior, podemos armar el siguiente complejo ξ^+ como sigue

$$\begin{tikzcd}
\xi^+ : 0 \arrow[r] & T^0 \arrow[r] & U^1 \arrow[r] \arrow[dr] & G^2 \arrow[r] & G^3 \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & L^0 \arrow[r] & G^1 \arrow[r] & L^1 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[dr] & 0 & \\
& & & 0 \arrow[u] & 0. &
\end{tikzcd}$$

El cual es $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{Y})$-exacto, pues $T^0, L^1 \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$; y como $U^1 \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, por el Lema 6.18 obtenemos que $T^0 \in W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, en la sucesión exacta $0 \to M \to F^0 \to T^0 \to 0$, con $F^0 \in \mathcal{X}$ y $M \in^{\perp} \mathcal{Y}$, también se tiene que $T^0 \in W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por lo tanto, podemos repetir el proceso para T^0 y obtener una sucesión exacta

$$0 \to M \to F^0 \to F^1 \to F^2 \to \cdots ,$$

con núcleos en ${}^{\perp}\mathcal{Y}$ y $F^i \in \mathcal{X}$. Luego, por la Proposición 6.18, concluimos que $M \in W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. □

El siguiente Corolario es una generalización de [13, Proposición 2.16].

Corolario 6.34. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4, con suficientes proyectivos, y $M \in \mathcal{A}$ un objeto Σ-ortogonal. Entonces $W\mathcal{GP}_{\mathrm{Add}(M)} = W\mathcal{GP}^2_{(\mathrm{Add}(M),\mathrm{Add}(M))}$.*

Demostración. Se sigue de la Observación 6.24 y Teorema 6.33. □

El siguiente resultado es una generalización de [79, Teorema 3.8].

Teorema 6.35. *Sean $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Entonces, el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es GP-admisible y*

$$W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

Demostración. Por la Proposición 6.18, sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Además, del Teorema 6.33, tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, por la Proposición 6.18, para ver que $W\mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^2_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, es suficiente probar que el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es GP-admisible.

Dado que el par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es GP-admisible, se tiene que $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ es una subcategoría aditiva. Además, por el Teorema 6.32 y Teorema 6.33, se sigue que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es una subcategoría cerrada por extensiones. Como $\mathcal{X}$ es $\mathcal{X}$-epi en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, se sigue que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-epi en $\mathcal{A}$. Sabemos también que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$, por lo tanto $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) = 0$. Solo queda probar que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo de $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Sea $G\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por el Corolario 6.23, existe una sucesión exacta $0\to G\to X\to G'\to 0$, con $X\in\mathcal{X}$ y $G'\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Y como $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo de $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta $0\to X\to E\to X'\to 0$, con $X'\in\mathcal{X}$ y $E\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Luego, por el Lema de la Serpiente, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & X' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Como $G'\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $X'\in\mathcal{X}\subseteq\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, obtenemos que $Q\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, ya que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrada por extensiones. Por lo tanto, la sucesión exacta $0\to G\to E\to Q\to 0$, cumple que $Q\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $E\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\mathcal{Y}$. Lo cual prueba que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es GP-admisible. □

El siguiente resultado generaliza [79, Proposición 2.7].

Corolario 6.36. *Si $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 6.33 y del Teorema 6.32. □

Teorema 6.37. *Para un par GP-admisible* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *y* $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$*, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Los pares* $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$, $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\omega)$ *y* $(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)$ *son GP-admisibles.*

(b) *Sea* $\mathcal{Y}$ *cerrado por sumandos directos en* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*. Entonces, el par* $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ *es de Frobenius a izquierda, los elementos de* $\mathcal{Y}$ *son sumandos directos de objetos en* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}^\wedge$ *es gruesa a derecha.*

(c) *Si* ω *es cerrado bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$*, entonces* $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\mathcal{Y}=\omega$*.*

(d) *Si* $\mathcal{Y}^\wedge,\omega$ *y* $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\wedge$ *son cerrados bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$*, entonces*

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}=\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)}\quad y\quad \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\mathcal{Y}^\wedge=\omega=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\wedge.$$

Demostración. (a) El hecho que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es GP-admisible se muestra en el Teorema 6.35. Probaremos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\omega)$ es GP-admisible. Como $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es GP-admisible, tenemos que $\omega:=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ es cerrado bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$. Mas aun, como $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es $\mathcal{GP}$-admisible, tenemos en particular que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es cerrado por extensiones y coproductos finitos en $\mathcal{A}$, y es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-epi en $\mathcal{A}$. Por el Corolario 6.28 (a) y la igualdad $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\omega=\omega$ tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\omega$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por otro lado, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\subseteq{}^\perp\mathcal{Y}\subseteq{}^\perp\omega$ implica que $\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})=0$. Así, se sigue que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\omega)$ es GP-admisible.
Veamos ahora que $(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)$ es GP-admisible. En efecto, por el Lema 1.8 tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(\mathcal{X})=0$. Además, $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\wedge$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{X}$. Finalmente, $\mathcal{Y}^\wedge$ es cerrado bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$, ya que $\mathcal{Y}$ tiene esta propiedad.

(b) Supongamos que $\mathcal{Y}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Probaremos que $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ es de Frobenius a izquierda. Por el Corolario 6.36 tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda, y la Proposición 6.18 nos dice que $\mathcal{Y}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. Mas aun, el Corolario 6.28 (a) y la inclusión $\omega\subseteq\mathcal{Y}$ implican que $\mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Una vez que tengamos que el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\mathcal{Y})$ de es Frobenius a izquierda, concluiremos de la Proposición 1.27 que $\mathcal{Y}^\wedge$ es gruesa a derecha. Finalmente, sea $Y\in\mathcal{Y}$, entonces existe una sucesión exacta $\epsilon: 0\to Y\to X\to G\to 0$, donde $X\in\mathcal{X}$ y $G\in\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})=0$, por la Proposición 6.16 (b), tenemos que ϵ se divide, de modo que Y es sumando directo de X.
(c) Sea ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces por el Corolario 6.28 (a) $\omega=\mathcal{Y}\cap W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Mas aun, del Teorema 6.35, sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}=\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y así obtenemos en inciso (c).
(d) Sean $\mathcal{Y}^\wedge,\omega$ y $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\wedge$ cerradas por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Por (a), sabemos que $(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)$ es GP-admisible. Aplicando el inciso (c) al par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)$ y por la Observación 6.15 y Proposición 6.18, tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}=\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)}$ y $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\cap\mathcal{Y}^\wedge=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\wedge$.
Como $(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)$ es GP-admisible, se sigue de (a) que el par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)},\mathcal{Y}^\wedge)$ es GP-admisible.

Entonces, por el Corolario 6.28 (a), tenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)} \cap \mathcal{Y}^\wedge$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)},\mathcal{Y}^\wedge)}$ el cual es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)},\mathcal{Y}^\wedge)}$-inyectivo. Pero del Teorema 6.35, sabemos que

$$\mathcal{GP}_{(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)},\mathcal{Y}^\wedge)} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)}.$$

Entonces, por la igualdad $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y}^\wedge)}$ obtenemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y}^\wedge$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ el cual es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo. Así, de la Proposición 1.9, se sigue que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y}^\wedge = \omega = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y}$. □

Corolario 6.38. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son cerrados bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, para $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *El par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \mathcal{Y}^\wedge)$ es un par de $\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-cotorsión en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$.*

(b) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{Y}^\wedge = \omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^\wedge$.

(c) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$ *y* $\mathcal{Y}^\wedge = \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{GP}^\perp_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Demostración. Se sigue del Teorema 6.37, Proposición 1.26 y Teorema 2.7. □

Corolario 6.39. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos, y $\omega \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \omega$ con $\mathrm{add}(\omega) = \omega$ y $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen.*

(a) *El par $(\mathcal{GP}_\omega, \omega^\wedge)$ es un par de $\mathcal{GP}^\wedge_\omega$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(b) $\mathcal{GP}_\omega \cap \omega^\wedge = \omega$.

(c) $\mathcal{GP}_\omega = \mathcal{GP}^\wedge_\omega \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$ *y* $\omega^\wedge = \mathcal{GP}^\wedge_\omega \cap \mathcal{GP}^\perp_\omega$.

Demostración. Por las hipótesis dadas, tenemos que el par (ω,ω) satisface las condiciones necesarias para aplicar el Corolario 6.38. □

Capítulo 7

Dimensiones homológicas relativas Gorenstein

En esta sección desarrollamos, de un modo unificado, la teoría de dimensiones homológicas relativas Gorenstein. Para cada par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, que satisface ciertas condiciones, establecemos relaciones entre diferentes tipos de dimensiones homologícas relativas, llamadas: dimensión Gorenstein proyectiva relativa (débil), proyectiva relativa, y por resolución. Al tomar distintas clases de objetos en $\mathcal{A}$, como una aplicación, obtenemos varios de los resultados existentes en la teoría clásica de módulos, así como en las anteriores generalizaciones de objetos Gorenstein en categorías abelianas que hemos mencionado antes.

En el siguiente resultado, la expresión $\operatorname{resdim}_{\omega}(K) = -1$ significa que $K = 0$. Este teorema generaliza [21, Proposición 3.9], [47, Teorema 2.10], [65, Teorema 3.11 y Proposición 3.16].

Teorema 7.1. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, para cualquier $C \in \mathcal{A}$, con $\operatorname{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) = n < \infty$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Existen sucesiones exactas en $\mathcal{A}$, con $G, G' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*

$$0 \to K \to G \xrightarrow{\varphi} C \to 0 \quad y \quad 0 \to K' \to G' \xrightarrow{\varphi'} C \to 0$$

donde $\varphi : G \to C$ es una $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-precubierta, con $\operatorname{resdim}_{\omega}(K) = n - 1 = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(K')$ y $K \in \mathcal{GP}^{\perp}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

(b) *Existen sucesiones exactas en $\mathcal{A}$, con $\overline{G}, \overline{G}' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*

$$0 \to C \xrightarrow{\psi} H \to \overline{G} \to 0 \quad y \quad 0 \to C \xrightarrow{\psi'} H' \to \overline{G}' \to 0,$$

donde $\psi : C \to H$ es una $\omega^{\wedge}$-preenvolvente, $\max\{\operatorname{resdim}_{\omega}(H), \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(H')\} \leq n$ y $\overline{G} \in {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$.

(c) *Sea $\mathcal{X}$ una clase $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectiva. Entonces $\varphi' : G' \to C$ es una $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-precubierta y $K' \in \mathcal{GP}^{\perp}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Más aún, $\psi' : C \to H$ es una $\mathcal{X}^{\wedge}$-preenvolvente y $\overline{G}' \in {}^{\perp}(\mathcal{X}^{\wedge})$.*

Demostración. Por el Corolario 6.36 sabemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Mas aun, del Corolario 6.38 (a), tenemos que ω es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo y un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por otro lado, por el Lema 6.7, tenemos que $\mathcal{X}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces el resultado se sigue mediante aplicar dos veces el Teorema 1.12. □

En el caso de objetos Gorenstein proyectivos débiles, tenemos el siguiente resultado, el cual es una generalización de [13, Teorema 3.5].

Teorema 7.2. *Sea $(\omega, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, con $\omega \subseteq \mathcal{Y}$ y ω cerrado por coproductos finitos. Entonces, para todo $C \in \mathcal{A}$, con $W\mathrm{Gpd}(C) = n < \infty$, se cumple:*

(a) *Existen sucesiones exactas cortas:*

$$\eta_1 : 0 \to W_C \to G_C \xrightarrow{\varphi_C} C \to 0,$$

con $\mathrm{resdim}_{\omega}(W_C) \leq n-1$ *y* $G_C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

$$\eta_2 : 0 \to C \xrightarrow{\varphi^C} W^C \to G^C \to 0,$$

con $\mathrm{resdim}_{\omega}(W^C) \leq n$ *y* $G^C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(b) *El morfismo $\varphi_C : G_C \to C$ en η_1 es una $W\mathcal{GP}$-precubierta, con $W_C \in W\mathcal{GP}^{\perp}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.*

(c) *El morfismo $\varphi^C : C \to W^C$ en η_2 es una $\omega^{\wedge}$-preenvolvente, con $G^C \in {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$.*

(d) *Si $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ (i.e. que ω es cogenerador de $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$), entonces*

$$\mathrm{resdim}_{\omega}(W_C) = n-1, \; W\mathrm{Gpd}(W_C) \leq n-1 \;\; y \;\; W\mathrm{Gpd}(W^C) \leq n.$$

Demostración. Por el Lema 6.30 y Teorema 6.32, el par $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega)$ cumple las hipótesis del Teorema 1.12, por lo que se siguen los incisos (a), (b) y (c). Finalmente el inciso (d) se sigue de la hipótesis $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ y el Teorema 1.12. □

Corolario 7.3. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrada bajo isomorfismos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, para todo $C \in \mathcal{A}$ y $n \geq 0$.*

(a) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) \leq n$.

(b) *Existe una sucesión exacta $0 \to K \to G \to C \to 0$, con $\mathrm{resdim}_{\omega}(K) \leq n-1$ y $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

(c) *Existe una sucesión exacta $0 \to C \to H \to \overline{G} \to 0$, con $\mathrm{resdim}_{\omega}(H) \leq n$ y $\overline{G} \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

(d) *Existe una sucesión exacta* $0 \to K' \to G' \to C \to 0$, *con* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K') \leq n-1$ *y* $G' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

(e) *Existe una sucesión exacta* $0 \to C \to H' \to \overline{G}' \to 0$, *con* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(H') \leq n$ *y* $\overline{G}' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Demostración. Por el Corolario 6.36 sabemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Más aún, de la Proposición 6.27, sabemos que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Observe que ω es cerrada bajo isomorfismos en $\mathcal{A}$, pues es cerrada bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$. Por otro lado, por el Lema 6.7, tenemos que $\mathcal{X}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces, el resultado se sigue de aplicar dos veces el Corolario 1.16. $\square$

Observación 7.4. *Sean R un anillo y $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$. Si $\mathcal{X} = \mathrm{Proj}(R) \subseteq \mathcal{Y}$, entonces [65, Proposición 3.11] es un caso particular del Corolario 7.3.*

Definición 7.5. *Decimos que el par $(\omega, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ es **WGP-admisible** si $\omega \subseteq \mathcal{Y}$, $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$ y ω es cerrado bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$. Dualmente, un par $(\mathcal{X}, \nu)$ es **WGI-admisible** si $\nu \subseteq \mathcal{X}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\nu) = 0$ y ν es cerrado bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$.*

Ejemplo 7.6. *(1) Sean R un anillo y $M, N \in \mathrm{Mod}(R)$ tales que M es Σ-ortogonal y N es Π-ortogonal. Entonces, por la Observación 6.24 y su dual, tenemos que los pares $(\mathrm{Add}(M), \mathrm{Add}(M))$ y $(\mathrm{Prod}(N), \mathrm{Prod}(N))$ son ambos WGP-admisible y WGI-admisible. Observe que $\mathrm{Add}(M)$ es una clase precubriente; y por lo tanto, $\mathrm{Add}(M)$ es $\mathrm{Add}(M)$-epi en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathrm{Proj}(R) \subseteq \mathrm{Add}(M)$. En particular, si ${}_RR \notin \mathrm{Add}(M)$, entonces $(\mathrm{Add}(M), \mathrm{Add}(M))$ no es GP-admisible.*

(2) Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par hereditario de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ con cerrados bajo coproductos finitos en $\mathcal{A}$. Entonces, para $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, tenemos que $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $(\mathcal{X}, \omega)$ es WGI-admisible.

Observe que el par $(\mathcal{X}, \nu) \subseteq \mathcal{A}^2$ es WGI-admisible en $\mathcal{A}$ si, y sólo si, el par $(\nu^{\mathrm{op}}, \mathcal{X}^{\mathrm{op}})$ es WGP-admisible en $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Por lo tanto, cualquier resultado o noción relacionado con pares WGP-admisibles pueden ser trasladados en términos de pares WGI-admisibles. Estos pares están relacionados con los pares GP-admisibles, como puede verse enseguida.

Observación 7.7. *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ es un par GP-admisible, entonces $(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $(\mathcal{X}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ es WGI-admisible.*

Corolario 7.8. *Sea $(\omega, \mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en $\mathcal{A}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes, para todo $C \in \mathcal{A}$ y $n \geq 0$.*

(a) $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(C) \leq n$.

(b) *Existe una sucesión exacta* $0 \to K \to G \to C \to 0$, *con* $\mathrm{resdim}_{\omega}(K) \leq n-1$ *y* $G \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(c) *Existe una sucesión exacta* $0 \to C \to H \to \overline{G} \to 0$, *con* $\operatorname{resdim}_\omega(H) \leq n$ *y* $\overline{G} \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

Demostración. Del Teorema 6.32, sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Por el Lema 6.30, tenemos que ω es $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$-inyectivo y un cogenerador relativo en $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Entonces, el resultado se sigue aplicando el Corolario 1.16. $\square$

Corolario 7.9. *Sea* $(\omega, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *un par WGP-admisible, con* ω *cerrada bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$. *Entonces, el par* $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega)$ *es de Frobenius a izquierda y los siguientes enunciados son equivalentes, para todo* $C \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$ *y* $n \geq 0$.

(a) $W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) \leq n$.

(b) *Si* $0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to C \to 0$, *es una sucesión exacta, con* $G_i \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, *entonces* $K_n \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

Demostración. Del Teorema 6.32 sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Mas aun, del Lema 6.30, tenemos que $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega)$ es de Frobenius a izquierda. Entonces, la equivalencia entre (a) y (b) se sigue de la Proposición 1.24. $\square$

Corolario 7.10. *Sean* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par GP-admisible en* $\mathcal{A}$ *y* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *cerrado por sumandos directos en* $\mathcal{A}$. *Entonces, el par* $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega)$ *es de Frobenius a izquierda y los siguientes enunciados son equivalentes, para todo* $C \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *y* $n \geq 0$.

(a) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) \leq n$.

(b) *Si* $0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to C \to 0$, *es una sucesión exacta, con* $G_i \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, *entonces* $K_n \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Demostración. De la Observación 7.7 y el Teorema 6.35, tenemos que el par $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue del Corolario 7.9. $\square$

Corolario 7.11. *Sean* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par GP-admisible en* $\mathcal{A}$, *y* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

(a) *Sea* ω *cerrado por sumandos directos en* $\mathcal{A}$. *Entonces*

$$\mathrm{pd}_{\omega^\wedge} = \mathrm{pd}_\omega(C) = \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) \quad \forall\, C \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

(b) *Sea* $\mathcal{X}$ $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*-inyectivo y cerrado bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$. *Entonces*

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}^\wedge}(C) = \mathrm{pd}_\mathcal{X}(C) = \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(C) \quad \forall\, C \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

Demostración. (a) Por el Teorema 6.32 y el Teorema 6.35, sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Por el Lema 6.30 (a), tenemos que ω es un cogenerador $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Entonces el resultado se sigue de aplicar el Teorema 1.20 al par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega)$.
(b) Como $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda, y del Lema 6.7, tenemos que $\mathcal{X}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, luego, obtenemos el inciso (b) mediante aplicar el Teorema 1.20 al par $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \mathcal{X})$. $\square$

Observación 7.12. *Sean R un anillo y $\mathcal{A} := \operatorname{Mod}(R)$. Entonces, los siguientes resultados son casos particulares del Corolario 7.10 y Corolario 7.11:*

1. *[47, Teorema 2.20] al tomar $\mathcal{X} = \operatorname{Proj}(R) = \mathcal{Y}$,*
2. *[80, Proposición 2.8] al tomar $\mathcal{X} = \operatorname{Proj}(R)$ y $\mathcal{Y} = \operatorname{Flat}(R)$,*
3. *[65, Lema 3.13 y Proposición 3.14] y [21, Teorema 3.10] al tomar $\mathcal{X} = \operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathcal{Y}$.*

Proposición 7.13. *Sea $(\omega, \mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos*

(a) *Si $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces*

(a1) $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(M)$ *para todo* $M \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$,

(a2) $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\mathcal{Y} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$.

(b) *Si ω es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces*

(b1) $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(M)\ \ \forall\, M \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$,

(b2) $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(M)$ *para todo* $M \in \omega^\wedge$,

(b3) $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap \omega^\wedge = \omega$ *y* $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\omega = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$.
(a1) Por el Teorema 6.32, sabemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es gruesa a izquierda. Para probar (a1), es suficiente verificar las condiciones del Teorema 1.20 para el par $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \mathcal{Y})$. Es claro que $\mathcal{Y}$ es $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$-inyectivo. Mas aun, $\mathcal{Y}$ es un cogenerador relativo en $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, como ω también lo es (ver Lema 6.30). Finalmente, por la hipótesis sabemos que $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$.
(a2) Por el Corolario 6.17 (b), tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$. Entonces, (a2) se sigue de (a1).
(b) Sea ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$.
(b1) Por el Corolario 7.9, sabemos que el par $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega)$ es de Frobenius a izquierda. Entonces, el inciso (b1) se sigue de aplicar el Teorema 1.20 a éste par de Frobenius.
(b2) Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$, tenemos que ω es ω-inyectivo y así, es cerrada por extensiones, pues ω es cerrado por coproductos finitos en $\mathcal{A}$. Entonces, del Teorema 1.20, se sigue que $\mathrm{resdim}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M)$, para cualquier $M \in \omega^\wedge$. Por lo tanto, (b2) se sigue de (b1).
(b3) La igualdad $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap \omega^\wedge$ se sigue de (b2). Por otro lado, del Corolario 6.17 (b), tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^\perp\omega \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$, pues ${}^\perp\mathcal{Y} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge) \subseteq {}^\perp\omega \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$. Así, las igualdades $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\omega = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$ se siguen de (b1). □

Observación 7.14. *El Corolario 7.9 y la Proposición 7.13 generalizan [13, Teorema 3.8], el cual es dado en el contexto de R-módulos débilmente-Wakamatsu tilting.*

Corolario 7.15. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Si $\mathcal{Y}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces:*

(a1) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(M)$*, para todo* $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*;*

(a2) $\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\mathcal{Y} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$.

(b) *Si $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces:*

(b1) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(M)\ \ \forall\, M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*;*

(b2) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(M)\ \ \forall\, M \in \omega^\wedge$*;*

(b3) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \omega^\wedge = \omega$ *y* $\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\omega = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$.

(c) *Si $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo y cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, entonces:*

(c1) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}^\wedge}(M)$*, para todo* $M \in \mathcal{X}^\wedge$*;*

(c2) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{X}^\wedge = \mathcal{X}$.

Demostración. De la Observación 7.7 y el Teorema 6.35, tenemos que el par $(\omega,\mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, los enunciados (a) y (b) se siguen directamente de la Proposición 7.13.
Probaremos el inciso (c). Supongamos que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-inyectivo y cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Por la Proposición 6.21 (b), tenemos que $\mathcal{X}$ es $\mathcal{X}$-inyectivo. Mas aun, $\mathcal{X}$ es cerrado bajo extensiones, pues $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ es GP-admisible. Entonces, del Teorema 1.20 se sigue que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{X}^\wedge$. Por lo tanto, el Corolario 7.11 (b) nos da (c1). Finalmente (c2) se sigue de (c1). □

Definición 7.16. *Para cualquier par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, consideramos las siguientes dimensiones homologícas **finitistas**.*

1. *La **dimensión finitista $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva** de $\mathcal{A}$*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) := \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}).$$

*En particular, la **dimensión finitista Gorenstein proyectiva** de la categoría abeliana $\mathcal{A}$ es* $\mathrm{FGPD}(\mathcal{A}) := \mathrm{FGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathrm{Proj}(\mathcal{A}))}(\mathcal{A})$.

2. *La **dimensión finitista proyectiva** de $\mathcal{A}$ es* $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) := \mathrm{pd}(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge)$.

3. *La **dimensión finitista $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva débil** de $\mathcal{A}$*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) := W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}).$$

*De manera similar, tenemos $\mathrm{FGID}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$, la cual es la **dimensión finitista $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein inyectiva** de $\mathcal{A}$; y $\mathrm{WFGID}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ la cual es la **dimensión finitista $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein inyectiva débil** de $\mathcal{A}$.*

Definición 7.17. *Para cualquier par* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *de clases de objetos en una categoría abeliana* $\mathcal{A}$*, consideramos las siguientes dimensiones homológicas* ***globales****.*

1. *La* ***dimensión global*** $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$***-Gorenstein proyectiva*** *de* $\mathcal{A}$

$$\mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) := \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}).$$

   En particular, la ***dimensión global Gorenstein proyectiva*** *de la categoría abeliana* $\mathcal{A}$ *es* $\mathrm{gl.GPD}(\mathcal{A}) := \mathrm{gl.GPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathrm{Proj}(\mathcal{A}))}(\mathcal{A})$.

2. *La* ***dimensión global proyectiva*** *de* $\mathcal{A}$ *es* $\mathrm{gl.PD}(\mathcal{A}) := \mathrm{pd}(\mathcal{A})$.

3. *La* ***dimensión global*** $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$***-Gorenstein proyectiva débil*** *de* $\mathcal{A}$

$$\mathrm{gl.WGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) := W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}).$$

   De manera similar, tenemos $\mathrm{gl.GID}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$*, la cual es la* ***dimensión global*** $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$***-Gorenstein inyectiva*** *de* $\mathcal{A}$*; y* $\mathrm{gl.WGID}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$*, la cual es la* ***dimensión global*** $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$***-Gorenstein inyectiva débil*** *de* $\mathcal{A}$*.*

En caso que $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}(R)$, para algún anillo R, la dimensión finitista $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva del anillo R es $\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(R) := \mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathrm{Mod}(R))$, la dimensión débil finitista $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva de R es $\mathrm{WFGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(R) := \mathrm{WFGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathrm{Mod}(R))$ y la dimensión finitista proyectiva del anillo R es $\mathrm{FPD}(R) := \mathrm{FPD}(\mathrm{Mod}(R))$. Tenemos también las siguientes dimensiones homologícas del anillo R. Llamadas, la dimensión **finitista Ding proyectiva** $\mathrm{FDPD}(R) := \mathrm{FDPD}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))}(\mathrm{Mod}(R))$ y la dimensión finitista Gorenstein proyectiva $\mathrm{FGPD}(R) := \mathrm{FGPD}(\mathrm{Mod}(R))$.
También tenemos las llamadas dimensiones globales relativas del anillo R, como sigue,

$$\mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(R) := \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathrm{Mod}(R)),$$

la cual es la dimensión global $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein proyectiva de R; y

$$\mathrm{gl.GID}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(R) := \mathrm{Gid}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathrm{Mod}(R)),$$

la cual es la dimensión global $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein inyectiva de R, etc.
El Corolario 7.18 generaliza a [47, Proposición 2.27] y [81, Proposición 4.3].

Corolario 7.18. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par GP-admisible en* $\mathcal{A}$*, tal que* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$*. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}(M)$*, para todo* $M \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$*.*

(b) $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_\omega(M) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(M)$*, para todo* $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$*.*

(c) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \omega^\wedge = \omega$ *y* $\mathcal{GP}^\wedge \cap {}^\perp\omega = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$*.*

(d) $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{gl.PD}(\mathcal{A})$.

Demostración. Como $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, se sigue que $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) \leq \mathrm{pd}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}$. En particular $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge \subseteq \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue del Corolario 7.15 (b). $\square$

Proposición 7.19. *Sean $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, tal que $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda. Entonces*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge).$$

Demostración. Por simplicidad, hagamos $\alpha := \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge)$ y $\beta := \mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$. Podemos suponer que $\alpha < \infty$.
Aseguramos que $\beta < \infty$. En efecto, dado que $\mathcal{X}$ es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ (ver Lema 6.7), por el Teorema 7.1, para cada $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ existe un objeto $H \in \mathcal{A}$ con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(H) = \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) - 1$. Por lo tanto $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) \leq \alpha + 1$ y así β es finito. Como $\alpha \geq 0$, para probar que $\beta \leq \alpha$, podemos asumir que $\beta > 0$.

Elijamos un objeto $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ tal que $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \beta$. Por el Teorema 7.1, existe una sucesión exacta $0 \to K \to G \to M \to 0$, con $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = \beta - 1$. Como $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, existe una sucesión exacta $0 \to G \to Q \to G' \to 0$ con $Q \in \mathcal{X}$ y $G' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, por lo que obtenemos el monomorfismo $\psi : K \to G \to Q$, y podemos considerar la sucesión exacta $0 \to K \to Q \to \mathrm{Coker}(\psi) \to 0$. Definamos $L := \mathrm{Coker}(\psi)$. Por el Lema de la Serpiente, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior, obtenemos la sucesión exacta $0 \to M \to L \to G' \to 0$, donde $G' \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Si $L \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, entonces $M \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ (ver Corolario 6.36), lo cual es una contradicción ya que $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \beta > 0$. Lo anterior implica que $L \notin \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, y de aquí, $L \notin \mathcal{X}$. Finalmente, de la Proposición 1.24 y la sucesión exacta $0 \to K \to Q \to L \to 0$, obtenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K) + 1$. De donde se sigue la desigualdad $\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge)$. $\square$

En el caso de la categoría abeliana $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(R)$ de R-módulos a izquierda, para algún anillo R, el siguiente resultado es una generalización de [47, Proposición 2.27, Teorema 2.28].

Corolario 7.20. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathrm{Gpd}(M) = \mathrm{pd}(M)$ *para todo* $M \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$.

(b) $\mathrm{Gpd}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge}(M)$, *para todo* $M \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})^\wedge$.

(c) $\mathcal{GP}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ *y* $\mathcal{GP}(\mathcal{A})^\wedge \cap {}^\perp\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = \mathcal{GP}(\mathcal{A}) = \mathcal{GP}(\mathcal{A})^\wedge \cap {}^\perp(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge)$

(d) $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{FGPD}(\mathcal{A})$.

(e) *Si* $\mathrm{gl.GPD}(\mathcal{A}) < \infty$ *entonces* $(\mathcal{GP}(\mathcal{A}), \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$.

Demostración. Consideremos el par GP-admisible $(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}), \mathrm{Proj}(\mathcal{A}))$. Entonces, los incisos del (a) al (d) se siguen del Corolario 7.18 y la Proposición 7.19. Finalmente el inciso (e) se sigue del Corolario 6.39. □

Proposición 7.21. *Sea $(\omega, \mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en $\mathcal{A}$, tal que ω es cerrado por sumandos directos y núcleos de epimorfismos entre sus objetos. Entonces, el par (ω, ω) es de Frobenius a izquierda, $\omega^\wedge$ es una clase gruesa a izquierda en $\mathcal{A}$ y*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge).$$

Demostración. Como $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$ y ω es cerrado por coproductos finitos en $\mathcal{A}$, se sigue que ω es cerrado por extensiones. Por lo tanto, (ω, ω) es un par de Frobenius a izquierda en $\mathcal{A}$. Más aún, de [10, Teorema 2.11], tenemos que $\omega^\wedge$ es una clase gruesa en $\mathcal{A}$. Usando el Teorema 7.2, el Teorema 6.32 y la Proposición 1.24, podemos adaptar la demostración dada en el Teorema 7.19 para obtener una prueba de éste resultado. □

Teorema 7.22. *Sea $\mathcal{Y}$ una clase de objetos en $\mathcal{A}$ tal que* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}$. *Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $W\mathrm{Gpd}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}(M)$, *para todo* $M \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$.

(b) $W\mathrm{Gpd}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge}(M)$, *para todo* $M \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}$.

(c) $W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \cap \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ *y* $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \cap {}^\perp\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge)$.

(d) $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{WFGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$.

(e) *Sea $\mathcal{Y}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces* (e1) $W\mathrm{Gpd}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}^\wedge}(M)$, *para todo* $M \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}$;

(e2) $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge) = W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge)$;

(e3) *si* $\mathcal{A}$ *tiene suficientes proyectivos, entonces*

$$\begin{array}{rcl} W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} = & \mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}, & \mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = \mathcal{Y} \cap \mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})} \;\; y \\ \mathrm{FGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = & \mathrm{FPD}(\mathcal{A}) & = \mathrm{WFGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}). \end{array}$$

(f) *Si* $\mathrm{gl.WGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$ *entonces* $(W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}, \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$.

Demostración. Observe que el par $(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$ es un par WGP-admisible y $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ es una clase gruesa a izquierda en $\mathcal{A}$. Como $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}$, se sigue que

$$W\mathrm{Gpd}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{A})}(M),$$

para todo $M \in \mathcal{A}$. En particular $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge \subseteq W\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}$. Así, por la Observación 1.19 y Proposición 7.13 (b), obtenemos (a), (b), (c) y $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{WFGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$. Más aún de la Proposición 7.21, tenemos

$$\mathrm{WFGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{FPD}(\mathcal{A}),$$

y así obtenemos (d).
Sea $\mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces, por la Proposición 7.13 (a), tenemos (e1) y (e2). Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos. Entonces, el par $(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$ es GP-admisible débil; y así, por la Proposición 6.18, concluimos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. De aquí, por (d), y para $\omega := \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ las igualdades $\mathrm{FGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ son ciertas. Finalmente, del Teorema 6.37 (c), tenemos que $\omega = \mathcal{Y} \cap \mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$; probando (e3).
Sea $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$. En particular, se sigue que $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$. Por otro lado, del Corolario 7.9, tenemos que $(\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega)$ es de Frobenius a izquierda. Luego, el inciso (f) se sigue de [10, Proposición 2.14 y Teorema 3.6]. □

El siguiente resultado nos será útil.

Lema 7.23. *Consideremos una clase* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ *cerrada por isomorfismos. Entonces, la condición* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$, *implica que* $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{A}$. Procederemos por inducción sobre $n := \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$. Si $n = 0$ es claro, pues $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Proj}(A)^\wedge$. Supongamos que $C \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$, para todo C con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) < n$. Sea $L \in \mathcal{X}^\wedge$, con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L) = n$. Así, existe una sucesión exacta

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to L \to 0, \text{ con } X_i \in \mathcal{X} \; \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

de la cual podemos tomar la sucesión exacta corta $0 \to K_0 \to X_0 \to L \to 0$, donde $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_0) = n - 1$; y por lo tanto $K_0 \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$. Dado que $X_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Proj}(A)^\wedge$, existe una sucesión exacta $0 \to K_1 \to P \to X_0 \to 0$, con $P \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$ y $K_1 \in \operatorname{Proj}(A)^\wedge$. De lo anterior, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como $K_0, K_1 \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$, por el Lema de la Herradura (ver Apéndice) obtenemos que $Q \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$, lo cual implica que $L \in \operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$. $\square$

Teorema 7.24. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{X}$ es gruesa a izquierda y $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\operatorname{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge) = \operatorname{FPD}(\mathcal{A})$.

(b) *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces* $\operatorname{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \operatorname{FGPD}_{(\operatorname{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$.

Demostración. (a) Observe que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge$, por el lema anterior. De aquí, por la Proposición 7.19 se sigue que

$$\operatorname{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge).$$

Por otro lado, la inclusión $\operatorname{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ y la Observación 1.19 implican que

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge) \leq \operatorname{resdim}_{\operatorname{Proj}(\mathcal{A})}(\operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge) = \operatorname{FPD}(\mathcal{A}).$$

Más aún, por el Corolario 7.18 (d) $\operatorname{FPD}(\mathcal{A}) \leq \operatorname{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ y así

$$\operatorname{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^\wedge) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Proj}(\mathcal{A})^\wedge) = \operatorname{FPD}(\mathcal{A}).$$

(b) Como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, se sigue que $(\operatorname{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$ es GP-admisible y satisface las mismas hipótesis que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces, por (a) tenemos que $\operatorname{FGPD}_{(\operatorname{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \operatorname{FPD}(\mathcal{A})$. $\square$

Corolario 7.25. *Para cualquier anillo R, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathcal{DP}(R) = W\mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))}(\mathrm{Mod}(R)) = \mathcal{GP}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R)^\wedge)}(\mathrm{Mod}(R))$.

(b) $\mathrm{Gpd}(M) = \mathrm{pd}(M) = \mathrm{Dpd}(M)$, *para cualquier* $M \in \mathrm{Proj}(R)^\wedge$.

(c) *Para cualquier* $M \in \mathcal{DP}(R)^\wedge$, *tenemos*

$$\mathrm{Dpd}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(R)}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Proj}(R)^\wedge}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)}(M) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)^\wedge}(M).$$

(d) $\mathcal{DP}(R) \cap \mathrm{Proj}(R)^\wedge = \mathrm{Proj}(R) = \mathcal{DP}(R) \cap \mathrm{Flat}(R) = \mathcal{DP}(R) \cap \mathrm{Flat}(R)^\wedge$.

(e) $\mathcal{DP}(R)^\wedge \cap {}^\perp\mathrm{Proj}(R) = \mathcal{DP}(R) = \mathcal{DP}(R)^\wedge \cap {}^\perp(\mathrm{Proj}(R)^\wedge)$

(f) $\mathcal{DP}(R)^\wedge \cap {}^\perp\mathrm{Flat}(R) = \mathcal{DP}(R) = \mathcal{DP}(R)^\wedge \cap {}^\perp(\mathrm{Flat}(R)^\wedge)$

(g) $\mathrm{FDPD}(R) = \mathrm{FPD}(R) = \mathrm{FGPD}(R) = \mathrm{WFGPD}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))}(R)$.

Demostración. Por [25, Proposición 8.4.19], tenemos que la clase $\mathrm{Flat}(R)^\wedge$ es cerrada por sumandos directos en $\mathrm{Mod}(R)$. Entonces, el resultado se sigue directamente del Teorema 7.22, el Teorema 6.37 y Corolario 7.20, mediante tomar $\mathcal{Y} := \mathrm{Flat}(R)$ y $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R)$ en la categoría abeliana $\mathrm{Mod}(R)$. □

Corolario 7.26. *Sea* $\mathcal{Y}$ *una subcategoría plena y aditiva de la categoría abeliana* $\mathcal{A}$*, con suficientes proyectivos, tal que* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y}$*. Entonces*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}),\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}(\mathcal{A}).$$

Demostración. Se sigue del Teorema 7.24, ya que el par $(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$ satisface las condiciones necesarias. □

Teorema 7.27. *Sea* $(\omega, \mathcal{Y})$ *un par WGP-admisible en* $\mathcal{A}$*, con* ω *cerrado bajo sumandos directos en* $\mathcal{A}$*. Entonces*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge).$$

Demostración. Sean $\alpha := \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge)$ y $\beta := \mathrm{WFGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$. Como $\omega^\wedge \subseteq W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$, se sigue del Proposición 7.13 (b2) que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge)$.
Probaremos que $\beta \leq \alpha$. Para hacer esto, podemos asumir que $\alpha < \infty$. Aseguramos que $\beta < \infty$. En efecto, sea $C \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$ y $n := W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(C)$. Entonces, por el Teorema 7.2 existe una sucesión exacta $0 \to H \to T \to C \to 0$, donde $\mathrm{resdim}_\omega(H) = n - 1$. De aquí $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(C) = \mathrm{resdim}_\omega(H) + 1 \leq \alpha + 1 < \infty$, probando que $\beta < \infty$.
Para concluir que $\beta \leq \alpha$, es suficiente mostrar la existencia de algún $L \in \omega^\wedge$ tal que $\mathrm{resdim}_\omega(L) = \beta$. Efectivamente, como $\beta < \infty$, existe $M \in W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$, con $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \beta$. Entonces, por el Teorema 7.2, existe una sucesión exacta $0 \to K \to G \to C \to 0$, donde $G \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ y $\mathrm{resdim}_\omega(K) = \beta - 1$. Además, como ω es un cogenerador relativo en $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, existe una sucesión exacta $0 \to G \to W \to G' \to 0$, con $G' \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, $W \in \omega$

y $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$. Entonces, tenemos la sucesión exacta $\eta : 0 \to K \to W \to L \to 0$. Como $\mathrm{resdim}_\omega(K) = \beta - 1$, por η concluimos que $\mathrm{resdim}_\omega(L) \leq \beta < \infty$. Luego, el Corolario 7.15 (b2), nos da que

$$\mathrm{pd}_\omega(K) = \mathrm{resdim}_\omega(K) = \beta - 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{pd}_\omega(L) = \mathrm{resdim}_\omega(L).$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, W')$ a la sucesión exacta η, con $W' \in \omega$, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(W, W') \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K, W') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, W') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(W, W').$$

Como $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$, se sigue que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K, W') \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, W')$, para todo $W' \in \omega$ y $i > 0$. Por lo tanto $\mathrm{resdim}_\omega(L) = \mathrm{pd}_\omega(L) = \mathrm{pd}_\omega(K) + 1 = \beta$. $\square$

Corolario 7.28. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge),$$
$$\mathrm{WFGID}_{(\mathcal{X},\omega)}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_\omega(\omega^\vee) = \mathrm{id}_\omega(\omega^\vee) = \mathrm{id}_{\omega^\vee}(\omega^\vee).$$

Demostración. De la Observación 7.7 y el Teorema 6.35, tenemos que el par $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, la primera lista de igualdades se sigue del Teorema 7.27.
Por otro lado, por la Observación 7.7, tenemos que $(\mathcal{X}, \omega)$ es WGI-admisible; y entonces, por el dual del Teorema 7.27, tenemos la segunda lista de igualdades. $\square$

Observe que el siguiente resultado generaliza [47, Proposición 2.28].

Corolario 7.29. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$. Entonces,*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge).$$

Demostración. Se sigue directamente del Corolario 7.28. $\square$

Recordemos que, para todo anillo R, la dimensión finitista Ding Proyectiva de R es $\mathrm{FDPD}(R) := \mathrm{FGPD}_{(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))}(\mathrm{Mod}(R))$.

Corolario 7.30. *Para cualquier anillo R tenemos que*

$$\mathrm{FGPD}(R) = \mathrm{FPD}(R) = \mathrm{FDPD}(R).$$

Demostración. El resultado se sigue del Corolario 7.29 mediante tomar los pares GP-admisibles $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ y $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ en la categoría abeliana $\mathrm{Mod}(R)$. $\square$

Definición 7.31. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Para cualquier clase $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$, la **dimensión $\mathcal{Y}$-finitista proyectiva** de $\mathcal{A}$ es $\mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}^{<\infty})$, donde $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}^{<\infty} := \{M \in \mathcal{A} : \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) < \infty\}$. Para cualquier anillo R y $\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$, la dimensión $\mathcal{Y}$-finitista proyectiva de R es $\mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}}(R) := \mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Mod}(R))$. Dualmente, tenemos la clase $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}^{<\infty}$, y a la **dimensión $\mathcal{Y}$-finitista inyectiva** de $\mathcal{A}$, denotada $\mathrm{FID}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A})$, y la dimensión $\mathcal{Y}$-finitista inyectiva del anillo R, $\mathrm{FID}_{\mathcal{Y}}(R)$.*

Lema 7.32. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de clases de objetos en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos, tal que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$. Entonces, para $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathcal{Y}, \omega^\wedge, \mathcal{Y}^\wedge\}$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Si ${}^\perp\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, entonces $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = {}^\perp\mathcal{Z}$ y $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Z}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}$.*

(b) *Si ${}^\perp\mathcal{Z} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, entonces $W\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = {}^\perp\mathcal{Z}$ y $W\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Z}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}$.*

Demostración. (a) Supongamos que ${}^\perp\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Sea $M \in \mathcal{A}$. Luego, por el dual de la Proposición 1.17 (c), tenemos

$$\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M) \leq \mathrm{resdim}_{{}^\perp\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M).$$

Para las otras elecciones de $\mathcal{Z}$, los mismos argumentos usados en lo previo funcionan, pues por el Corolario 6.17 (b), sabemos que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y} \cap {}^\perp(\mathcal{Y}^\wedge) \subseteq {}^\perp\omega \cap {}^\perp(\omega^\wedge)$.
(b) Se prueba de la misma forma que en (a). □

Teorema 7.33. *Para un par WGP-admisible $(\omega, \mathcal{Y})$ en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Sea $\mathcal{Y}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^\wedge\}$. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$, entonces*
$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) \quad y \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge.$$

(b) *Sea ω cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{Z} \in \{\omega, \omega^\wedge\}$. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$, entonces*
$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) \quad y \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge.$$

Demostración. (a) Supongamos que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$. Entonces, por la Proposición 7.13 (a1), tenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$. Luego, mediante usar que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$ junto con la Proposición 7.13 (a1), obtenemos

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{WGpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}).$$

(b) puede ser probado como en (a). □

Corolario 7.34. *Para un par GP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Sea $\mathcal{Y}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^\wedge\}$. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$, entonces*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) = \mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \quad y \;\; \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^\wedge.$$

(b) *Sea ω cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{Z} \in \{\omega, \omega^\wedge\}$. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}^\wedge$, entonces*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) = \mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) \quad y \;\; \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^\wedge.$$

(c) *Sea $\mathcal{X}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{X}, \mathcal{X}^\vee\}$. Si $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}^\vee$, entonces*

$$\mathrm{WFGID}_{(\mathcal{X},\omega)}(\mathcal{A}) = \mathrm{FID}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) \quad y \quad \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} = W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}^\vee.$$

Demostración. (a) y (b): De la Observación 7.7 y el Teorema 6.35, tenemos qu el par $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue del Teorema 7.33.
(c) De la Observación 7.7, tenemos que el par $(\mathcal{X}, \omega)$ es WGI-admisible. Entonces (c) se sigue del dual al Teorema 7.33 (a). □

Corolario 7.35. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos, tal que $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$, y sea $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Sea $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathcal{Y}, \omega^\wedge, \mathcal{Y}^\wedge\}$. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{<\infty} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^\wedge$, entonces*

$$\mathrm{FGPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{FGPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) = \mathrm{FGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) =$$

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge).$$

(b) $\omega^\vee = \omega \quad y \quad \mathcal{I}_\omega^{<\infty} = \mathcal{I}_{\omega^\vee}^{<\infty} = \mathcal{A}$.

(c) $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}^\vee = W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$.

Demostración. (a) Aplicando el Corolario 7.28 al par $(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}), \mathrm{Proj}(\mathcal{A}))$, obtenemos que $\mathrm{FPD}(\mathcal{A}) = \mathrm{FGPD}(\mathcal{A})$. Así, el resultado se sigue del Corolario 7.29, el Corolario 7.34 y el Teorema 7.22 (d).
(b) Como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par GP-admisible, tenemos que $(\omega, \mathcal{Y})$ es GP-admisible. Usando que $\omega^\perp = \mathcal{A}$ y que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, tenemos que $W\mathcal{GI}_{(\omega,\omega)} = \mathcal{A}$. Entonces, aplicando el Corolario 7.34 al par $(\omega, \mathcal{Y})$, el inciso (b) se cumple.
(c) Por la Observación 7.7, sabemos que el par $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGI-admisible. Luego, por el dual de la Proposición 7.13 (b3), tenemos que $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}^\vee \cap \omega^\perp = W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$. Por lo tanto, la igualdad en (c) es cierta, pues $\omega^\perp = \mathcal{A}$. □

Corolario 7.36. *Para cualquier anillo R tal que $\mathcal{DP}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R)$ y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathcal{DP}(R) = {}^\perp\mathcal{Z}$, *para todo* $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathrm{Flat}(R), \omega^\wedge, \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$.

(b) $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{\leq\infty} = \mathrm{Mod}(R)$, *para todo* $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathrm{Flat}(R), \omega^\wedge, \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$.

(c) *Para todo* $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathrm{Flat}(R), \omega^\wedge, \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$, *tenemos que*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathrm{Flat}(R))}(R) = \mathrm{FDPD}(R) = \mathrm{FPD}(R) = \mathrm{FGPD}(R) =$$

$$\mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(R) = \mathrm{pd}_{\omega}(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge).$$

Demostración. El inciso (a) se sigue del Corolario 7.25 (d), (e). Es claro que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{\leq\infty} \subseteq \mathcal{DP}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R)$, para todo $\mathcal{Z} \in \{\omega, \mathrm{Flat}(R), \omega^\wedge, \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$. Entonces, por el Corolario 7.34 y el Corolario 7.35, tenemos (b) y (c), mediante considerar el par $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ □

Sea R un anillo. Denotamos por $\mathrm{FP}(R)$ a la clase de R-módulos a izquierda finitamente presentados. La **dimensión FP-inyectiva** de $M \in \mathrm{Mod}(R)$ es $\mathrm{FPid}(M) := \mathrm{id}_{\mathrm{FP}(R)}(M)$. Recordemos (ver [35]) que R es un anillo Ding-Cheng, si R es ambos, coherente a derecha y a izquierda y $\mathrm{FPid}({}_RR) = \mathrm{FPid}(R_R)$ es finita.

Corolario 7.37. *Sea R un anillo Ding-Chen y $\omega := \mathrm{Proj}(R)$. Entonces*

(a) ${}^\perp(\mathrm{Flat}(R)^\wedge) = \mathcal{DP}(R) = {}^\perp\,\mathrm{Flat}(R)$;

(b) $\mathcal{P}_{\mathrm{Flat}(R)^\wedge}^{<\infty} = \mathcal{DP}(R)^\wedge = \mathcal{P}_{\mathrm{Flat}(R)}^{<\infty}$;

(c) *para cualquier* $\mathcal{Z} \in \{\mathrm{Flat}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$, *tenemos que*

$$\mathrm{WFGPD}_{(\omega,\mathrm{Flat}(R))}(R) = \mathrm{FDPD}(R) = \mathrm{FPD}(R) = \mathrm{FGPD}(R) =$$

$$\mathrm{FPD}_{\mathcal{Z}}(R) = \mathrm{pd}_{\omega}(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge);$$

(d) $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{DP}(R),\omega)} = \mathrm{Flat}(R)^\wedge$.

Demostración. Aseguramos que ${}^\perp(\mathrm{Flat}(R)^\wedge) = {}^\perp\mathrm{Flat}(R)$. En efecto, sea $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Por el dual del Lema 1.8, tenemos

$$\mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)^\wedge}(M) = \mathrm{id}_M(\mathrm{Flat}(R)^\wedge) = \mathrm{id}_M(\mathrm{Flat}(R)) = \mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)}(M),$$

probando la afirmación. Por otro lado, por [35, Teorema 4.7] se sigue que $(\mathcal{DP}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge)$ es un par de cotorsión hereditario y completo, de lo anterior y por el Corolario 6.19 (b) $\mathcal{DP}(R) = {}^\perp(\mathrm{Flat}(R)^\wedge) = {}^\perp\mathrm{Flat}(R)$.
Consideremos el par $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Flat}(R))$. Sea $\mathcal{Z} \in \{\mathrm{Flat}(R), \mathrm{Flat}(R)^\wedge\}$. Como la igualdad

$\mathcal{DP}(R) = {}^{\perp}\mathcal{Z}$ es cierta, se sigue del Lema 7.32 que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}^{\leq\infty} \subseteq \mathcal{DP}(R)^{\wedge}$. Entonces, los incisos (a), (b) y (c) se siguen del Corolario 7.34 (a) y el Corolario 7.35.
Como $(\mathcal{DP}(R), \mathrm{Flat}(R)^{\wedge})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{DP}(R)^{\perp} = \mathrm{Flat}(R)^{\wedge}$. Así, la clase $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{DP}(R),\omega)}$ consiste de todos los $M \in \mathrm{Flat}(R)^{\wedge}$ que admiten una resolución proyectiva P_M de M tal que $\Omega^{i}_{P_M}(M) \in \mathrm{Flat}(R)^{\wedge}$, para todo $i \geq 1$. Como $\mathrm{Mod}(R)$ tiene suficientes proyectivos y $\mathrm{Flat}(R)^{\wedge}$ es resolvente, obtenemos (d). $\square$

Observación 7.38. *Para un anillo Ding-Chen R, se demostró en [77, Teorema 3.1] que*

$$\mathrm{gl.DPD}(R) \leq \mathrm{FPid}({}_{R}R) + \mathrm{pd}(\mathrm{Flat}(R)).$$

Así, para un anillo Ding-Chen R con $\mathrm{pd}(\mathrm{Flat}(R))$ *finita (como es el caso de los anillos n-perfectos), se sigue que* $\mathcal{DP}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$.

7.1. Pares de cotorsión y objetos Gorenstein proyectivos relativos

En esta sección, como antes, $\mathcal{A}$ será una categoría abeliana.
Introducimos las nociones de par tilting relativo en $\mathcal{A}$, y mostramos la fuerte conexión que tienen con pares de cotorsión relativos. Recordemos que un par de $\mathcal{S}$-cotorsión, en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, consiste de los siguientes elementos: (a) una subclase gruesa $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ y (b) un par de clases de objetos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{F} = {}^{\perp_1}\mathcal{G} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\perp_1} \cap \mathcal{S}$ y para cualquier $S \in \mathcal{S}$ existen sucesiones exactas cortas $0 \to G \to F \to S \to 0$ y $0 \to S \to G' \to F' \to 0$, con $F, F' \in \mathcal{F}$ y $G, G' \in \mathcal{G}$.

Proposición 7.39. *Sea $(\omega, \mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, con ω cerrado por sumandos directos. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *$(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega^{\wedge})$ es un par de $W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})}$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(b) *$\omega^{\wedge} = W\mathcal{GP}^{\perp}_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$.*

(c) *Si $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ es finita, entonces $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \omega^{\wedge})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Por el Corolario 7.9, tenemos que $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})})$ es de Frobenius a izquierda. Entonces (a) y (b) se siguen del [10, Teorema3.6 y Proposición 2.14]. Asumamos ahora que $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ es finito. Luego $W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$, y así, (c) se sigue de (a) y (b). $\square$

Corolario 7.40. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible en $\mathcal{A}$, con $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *$(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega^{\wedge})$ es un par de $\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-cotorsión en $\mathcal{A}$.*

(b) $\omega^\wedge = \mathcal{GP}^{\perp}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap \mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *y* $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \cap {}^{\perp}(\omega^\wedge)$.

(c) *Si* $\mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ *es finita, entonces* $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$.

(d) $(\omega^\vee, W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)})$ *es un par de* $W\mathcal{GI}^{\vee}_{(\mathcal{X},\omega)}$*-cotorsión en* $\mathcal{A}$.

(e) $\omega^\vee = {}^{\perp}W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap W\mathcal{GI}^{\vee}_{(\mathcal{X},\omega)}$ *y* $W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)} = W\mathcal{GI}^{\vee}_{(\mathcal{X},\omega)} = W\mathcal{GI}^{\vee}_{(\mathcal{X},\omega)} \cap (\omega^\vee)^{\perp}$.

(f) *Si* $\mathrm{gl.WGID}_{(\mathcal{X},\omega)}(\mathcal{A})$ *es finita, entonces* $(W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}, \omega^\vee)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$.

Demostración. Por la Observación 7.7, tenemos que $(\omega, \mathcal{Y})$ es WGP-admisible y $(\mathcal{X}, \omega)$ es WGI-admisible. Mas aun, el Teorema 6.35 nos dice que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue de la Proposición 7.39 y su dual. □

Definición 7.41. *Decimos que un par* $(\omega, \mathcal{Y})$ *de clases de objetos en* $\mathcal{A}$*, es* $\mathcal{W}$***-cotilting****, para* $\mathcal{W}$ *una subclase de objetos de* $\mathcal{A}$*, si las siguientes tres condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{W} \subseteq \omega^\wedge$ *y* $(\omega, \mathcal{Y})$ *es WGP-admisible.*

(b) *Para todo* $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$*, existe una sucesión exacta* $0 \to C \to W \to C' \to 0$ *en* $\mathcal{A}$*, con* $W \in \mathcal{W}$.

(c) *Para todo* $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$*, existe una* $\mathcal{Y}$*-preenvolvente* $C \to C_{\mathcal{Y}}$*, con* $C_{\mathcal{Y}} \in \omega$.

Ejemplo 7.42. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana con suficientes inyectivos, y sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par hereditario en* $\mathcal{A}$*, el cual es de cotorsión a izquierda y completo a derecha, con* $\mathcal{Y}$ *cerrado por coproductos finitos en* $\mathcal{A}$*. Entonces, para* $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*, tenemos que* $(\omega, \mathcal{Y})$ *es un par* ω*-cotilting. De hecho, como* $\mathcal{A}$ *tiene suficientes inyectivos y* $\mathcal{Y}$ *es corresolvente, se sigue que* $\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{Y} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$*; y usando esto, las condiciones arriba mencionadas se verifican.*

Definición 7.43. *Un par* $(\mathcal{X}, \nu)$ *de clases de objetos en* $\mathcal{A}$ *es* $\mathcal{W}$***-tilting****, para* $\mathcal{W}$ *una subclase de objetos de* $\mathcal{A}$*, si las siguientes tres condiciones se cumplen.*

(a) $\mathcal{W} \subseteq \nu^\vee$ *y* $(\mathcal{X}, \nu)$ *es WGI-admisible.*

(b) *Para cualquier* $C \in \mathcal{X}^{\perp}$*, existe una sucesión exacta* $0 \to C' \to V \to C \to 0$ *en* $\mathcal{A}$*, con* $V \in \mathcal{W}$.

(c) *Para cualquier* $C \in \mathcal{X}^{\perp}$*, existe una* $\mathcal{X}$*-precubierta* $C_{\mathcal{X}} \to C$*, con* $C_{\mathcal{X}} \in \nu$.

Observe que un par $(\mathcal{X}, \nu)$ de clases de objetos en $\mathcal{A}$ es $\mathcal{W}$-tilting si, y sólo si, el par $(\nu^{\mathrm{op}}, \mathcal{X}^{\mathrm{op}})$ es $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$-cotilting en la categoría opuesta $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Así, cualquier resultado obtenido para pares $\mathcal{W}$-cotilting, puede ser traducido en términos de pares $\mathcal{W}$-tilting.

Teorema 7.44. Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $(\omega, \mathcal{Y})$ un par $\mathcal{W}$-cotilting en $\mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$.

(b) Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}$. Mas aun $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$.

Demostración. (a) Por definición de la clase $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, se tiene que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Probemos ahora la contensión $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \supseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Sea $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Por la Definición 7.41 (b), existe una sucesión exacta $0 \to C \xrightarrow{h_0} I \longrightarrow C_0 \to 0$, con $I \in \mathcal{W}$. Dado que $\mathcal{W} \subseteq \omega^{\wedge}$, existe una sucesión exacta

$$0 \to W_n \xrightarrow{f_n} W_{n-1} \to \cdots \to W_1 \xrightarrow{f_1} W_0 \xrightarrow{f_0} I \to 0,$$

con $W_i \in \omega \subseteq W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. De la sucesión exacta $\eta : 0 \to L \to W_0 \xrightarrow{f_0} I \to 0$, haciendo Pull-Back y aplicando el Lema de la Serpiente, obtenemos el diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\eta' : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "f_0'"] \arrow[d, "h_0'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & W_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C_0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Sea $X \in {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}\omega$. Apliquemos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ a la sucesión $0 \to W_n \to W_{n-1} \to \mathrm{Im}(f_{n-1}) \to 0$, para obtener la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, W_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{Im}(f_{n-1})) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, W_n) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, W_{n-1}) = 0,$$

lo cual implica que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{Im}(f_{n-1})) = 0$, para todo $i > 0$. Procediendo inductivamente, obtenemos $0 = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{Im}(f_1)) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, L)$, para todo $i > 0$ y $X \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Como $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, se tiene que η' se parte; y así, existe $f_0'' : C \to E$ tal que $1_C = f_0' f_0''$. Note que $h_0' f_0'' : C \to W_0$ es un monomorfismo. Dado que $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$, existe una $\mathcal{Y}$-preenvolvente $h_0'' : C \to W_0'$, con $W_0 \in \omega$. Más aún, el morfismo

$$h := \begin{pmatrix} h_0' f_0'' \\ h_0'' \end{pmatrix} : C \to W_0 \oplus W_0',$$

también es una $\mathcal{Y}$-preenvolvente de C. Ahora bien, como $h'_0 f''_0$ es un monomorfismo, se sigue que h es un monomorfismo. Por lo que obtenemos la sucesión exacta

$$\zeta : 0 \to C \to W_0 \oplus W'_0 \to \mathrm{Coker}(h) \to 0.$$

Afirmamos que $\mathrm{Coker}(h) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. En efecto, sea $Y \in \mathcal{Y}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ a ζ se tienen las sucesiones exactas:

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W_0 \oplus W'_0, Y) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathrm{Coker}(h), Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(W_0 \oplus W'_0, Y) = 0$, este último termino es cero ya que $\mathrm{id}_\omega(\mathcal{Y}) = 0$.

(ii) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(C, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Coker}(h), Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(W_0 \oplus W'_0, Y)$, para todo $i > 0$.

Dado que h es $\mathcal{Y}$-preenvolvente, se sigue de (i) que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathrm{Coker}(h), Y) = 0$. Usando que $C \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$ y que $\mathrm{id}_\omega(\mathcal{Y}) = 0$, se sigue de (ii) que $\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Coker}(h), Y) = 0$, para todo $i > 0$. Por lo tanto $\mathrm{Coker}(h) \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Repitiendo el procedimiento anterior, con $\mathrm{Coker}(h)$, y usando la sucesión ζ, se obtiene que $C \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$.

(b) Sea $A \in \mathcal{A}$. Como ${}^{\perp}\mathcal{Y} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$, tenemos del Lema 1.18 que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{{}^{\perp}\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{WGpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M).$$

Por lo tanto $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$. □

Corolario 7.45. *Para un par WGP-admisible $(\omega, \mathcal{Y})$, en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$.

(b) *El par $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting, para alguna clase $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$.*

(c) *El par $(\omega, \mathcal{Y})$ es ω-cotilting.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Mostramos que podemos elegir $\mathcal{W} := \omega$. Como $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$, las condiciones (a) y (b) 7.41 se cumplen claramente.

Sea $C \in^{\perp} \mathcal{Y} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Entonces, existe una sucesión exacta $\eta : 0 \to C \xrightarrow{\psi} W \to Z \to 0$, con $W \in \omega$ y $Z \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ a η, con $Y \in \mathcal{Y}$, tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W, Y) \xrightarrow{(\psi,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z, Y).$$

Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z, Y) = 0$, se sigue que $\psi : C \to W$ es una $\mathcal{Y}$-preenvolvente de C.
(b) $\Rightarrow$ (c) Del Teorema 7.44, obtenemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Pero como hemos visto en la implicación previa, en éste caso, el par $(\omega, \mathcal{Y})$ es ω-cotilting.
(c) $\Rightarrow$ (a) Se sigue directamente del Teorema 7.44. □

Observación 7.46. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría aditiva y $\omega \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{add}(\omega) = \omega$ y $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$. En este caso, tenemos que (ω, ω) es WGP-admisible. Así, por el Corolario 7.45, tenemos que (ω, ω) es $\mathcal{W}$-cotilting si, y sólo si, $C \in {}^\perp\omega$ admite una ω-preenvolvente mono $C \to W$.*

Proposición 7.47. *Sea $(\omega, \mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos, tal que $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados*

(a) *$W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$ si, y sólo si, $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{pd}_\mathcal{Y}(M) < \infty$, para todo $M \in \mathcal{A}$.*

(b) *$\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$ si, y sólo si, $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$.*

Demostración. (a) Sea $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$. Por la Proposición 7.13 (a2) $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^\perp\mathcal{Y}$; y así, por el Corolario 7.45, se tiene que $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting. Por lo tanto, del Teorema 7.44 (b), obtenemos $\mathrm{pd}_\mathcal{Y}(M) = W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) < \infty$, para cualquier $M \in \mathcal{A}$.
Supongamos ahora que $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{pd}_\mathcal{Y}(M) < \infty$, para todo $M \in \mathcal{A}$. Entonces, por el Teorema 7.44 (b), $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_\mathcal{Y}(M) < \infty$, para todo $M \in \mathcal{A}$, probando que $W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$.
(b) Sea $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$. Luego, por (a), tenemos que $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting. Por lo tanto, del Teorema 7.44 (b), $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) = \mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$.
Supongamos ahora que $(\omega, \mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$. Entonces, por el Teorema 7.44 (b), $W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$. □

Corolario 7.48. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos, y $\omega \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{add}(\omega) = \omega$ y $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$W\mathcal{GP}^\wedge_\omega = \mathcal{A}$ (respectivamente, $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\omega)}(\mathcal{A}) < \infty$).*

(b) *(ω, ω) es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{pd}_\omega(M) < \infty$ para todo $M \in \mathcal{A}$ (respectivamente, $\mathrm{id}(\omega) < \infty$).*

(c) *Cualquier $C \in {}^\perp\omega$ admite una ω-preenvolvente mono y $\mathrm{pd}_\omega(M) < \infty$, para todo $M \in \mathcal{A}$ (respectivamente, $\mathrm{id}(\omega) < \infty$).*

Si una de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces $\mathrm{gl.WGPD}_\omega(\mathcal{A}) = \mathrm{id}(\omega)$.

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 7.47, la Observacion 7.46 y el Teorema 7.44 (b). □

Corolario 7.49. *Sea R un anillo tal que $\mathcal{GP}(R)^\wedge = \mathrm{Mod}(R) = \mathcal{GI}(R)^\vee$. Entonces*

$$\mathrm{gl.GPD}(R) = \mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) \quad y \quad \mathrm{gl.GID}(R) = \mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)).$$

Demostración. Podemos aplicar el Corolario 7.48 a la clase $\omega := \mathrm{Proj}(R)$. Observe que la clase $W\mathcal{GP}_\omega$ coincide con la clase de los R-módulos Gorenstein proyectivos $\mathcal{GP}(R)$; y así, $\mathrm{gl.WGPD}_\omega(\mathcal{A})$ es precisamente la dimensión global Gorenstein proyectiva gl.GPD(R) del anillo R. Para obtener la igualdad $\mathrm{gl.GID}(R) = \mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R))$, aplicamos el dual del Corolario 7.48 a la clase $\nu := \mathrm{Inj}(R)$. □

Corolario 7.50. *Para un par GP-admisible $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, y $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Sea $(\omega,\mathcal{Y})$ un par $\mathcal{W}$-cotilting. Entonces*

(a1) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$;

(a2) *si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces* $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)$ *para cualquier $M \in \mathcal{A}$. Mas aun* $\mathrm{gl.GPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$.

(b) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ *si, y sólo, si el par $(\omega,\mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting.*

(c) *Sea $\mathcal{Y}$ cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos. Entonces*

(c1) $\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$ *si, y sólo si, $(\omega,\mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) < \infty$, *para cualquier $M \in \mathcal{A}$;*

(c2) $\mathrm{gl.GPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) < \infty$ *si, y sólo si, $(\omega,\mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y* $\mathrm{id}(\mathcal{Y})$ *es finita.*

Demostración. Por la Observación 7.7, tenemos que $(\omega,\mathcal{Y})$ es WGP-admisible. Más aun, por el Teorema 6.35 tenemos $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Así el resultado se sigue del Teorema 7.44, el Corolario 7.45 y la Proposición 7.47. □

Observación 7.51. *(1) Sean R un anillo, $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R)$ y $\mathcal{Y} := \mathrm{Flat}(R)$. Aplicamos ésta situación al Corolario 7.50 (c1). Observe que en éste caso $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es la clase de los R-módulos Ding-proyectivos $\mathcal{DP}(R)$. Así, tenemos que $\mathcal{DP}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$ si, y sólo si, $(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)}(M) < \infty$, para todo R-módulo M.*

(2) Sea R un anillo Ding-Chen. Por el Corolario 7.45 y el Corolario 7.37 (a), tenemos que el par $(\mathrm{Proj}(R),\mathrm{Flat}(R))$, es $\mathcal{W}$-cotilting. Luego por (1), tenemos que $\mathcal{DP}(R)^{\wedge} = \mathrm{Mod}(R)$ si, y sólo si, $\mathrm{pd}_{\mathrm{Flat}(R)}(M) < \infty$, para todo R-módulo M.

Teorema 7.52. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos, y $(\omega,\mathcal{Y})$ un par $\mathcal{W}$-cotilting en $\mathcal{A}$, con ω cerrado por sumandos directos en $\mathcal{A}$ y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$. Entonces, las siguientes condiciones son ciertas.*

(a) $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^{\wedge})$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$.*

(b) $\omega = {}^{\perp}\mathcal{Y}\cap\omega^{\wedge}$, $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\omega = {}^{\perp}(\omega^{\wedge}) = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ *y* $W\mathcal{GP}^{\perp}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \omega^{\wedge}$.

(c) $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathrm{FPD}_{\omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\omega^{\wedge}}(\mathcal{A}) = \mathrm{resdim}_{\omega}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{pd}_{\omega}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{pd}_{\omega^{\wedge}}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$.

(d) $\mathcal{P}^{<\infty}_{\omega} = \mathcal{A} = W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{P}^{<\infty}_{\omega^{\wedge}}$.

(e) *Supongamos que $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces,*

$$\mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{A} = \mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{Y}^{\wedge}} \quad y \quad \mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}^{\wedge}}(\mathcal{A}).$$

Demostración. (a) Por el Teorema 7.44 (b), y dado que $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$, tenemos que la dimensión $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$ es finita. Entonces, de la Proposición 7.39 (c), obtenemos (a).

(b) Por el Teorema 7.44 (a), tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$. Luego, la Proposición 7.13 (b3) implica que

$$\omega = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} \cap \omega^{\wedge} = {}^{\perp}\mathcal{Y} \cap \omega^{\wedge}.$$

Mas aun, como $W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$, tenemos de la Proposición 7.13 (b3) las igualdades

$$W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\omega = {}^{\perp}(\omega^{\wedge}) = {}^{\perp}\mathcal{Y}.$$

Por otro lado, de la Proposición 7.39 (b) se sigue que $W\mathcal{GP}^{\perp}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \omega^{\wedge}$.

(c) y (d): Se sigue del Teorema 7.27, el Teorema 7.44 (b) y el Teorema 7.33 (b), pues $W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$ y $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$.

(e) Se sigue del Teorema 7.33 (a), pues $W\mathcal{GP}^{\wedge}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{A}$.

□

Corolario 7.53. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par GP-admisible en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, con suficientes proyectivos, y tal que $(\omega,\mathcal{Y})$ es un par $\mathcal{W}$-cotilting en $\mathcal{A}$, donde $\omega := \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$ y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *$(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega^{\wedge})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$.*

(b) $\omega = {}^{\perp}\mathcal{Y} \cap \omega^{\wedge}$, $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = {}^{\perp}\omega = {}^{\perp}(\omega^{\wedge}) = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ *y* $\mathcal{GP}^{\perp}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \omega^{\wedge}$.

(c) $\mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\omega^{\wedge}}(\mathcal{A}) = \mathrm{resdim}_{\omega}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{pd}_{\omega}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{pd}_{\omega^{\wedge}}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$.

(d) $\mathcal{P}^{<\infty}_{\omega} = \mathcal{A} = \mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \mathcal{P}^{<\infty}_{\omega^{\wedge}}$.

(e) *Consideremos a $\mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces,*

$$\mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{A} = \mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{Y}^{\wedge}} \quad y \quad \mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\mathcal{Y}^{\wedge}}(\mathcal{A}).$$

Demostración. Por la Observación 7.7, tenemos que $(\omega,\mathcal{Y})$ es WGP-admisible. Mas aun, el Teorema 6.35 nos dice que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue del Teorema 7.52. □

Teorema 7.54. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, con suficientes proyectivos e inyectivos, y $(\omega,\mathcal{Y})$ un par WGP-admisible en $\mathcal{A}$, con ambos ω y $\mathcal{Y}$ cerrados por sumandos directos en $\mathcal{A}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El par $(\omega,\mathcal{Y})$ es $\mathcal{W}$-cotilting y $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$.*

(b) $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$*, tal que* $\mathrm{id}(\omega)<\infty$.

(c) $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}={}^\perp\omega$ *y* $\mathrm{id}(\omega)<\infty$.

Si alguna de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)=W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M)=\mathrm{pd}_\omega(M),$$

para cualquier $M\in\mathcal{A}$*. Mas aun* $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})=\mathrm{id}(\mathcal{Y})=\mathrm{id}(\omega)<\infty$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por el Teorema 7.52 (a), tenemos que $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$ y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}={}^\perp\omega$. Entonces, por el Lema 1.18, Teorema 7.44 (b), y Proposición 7.13 (b1), $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)=W\mathrm{Gpd}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M)=\mathrm{pd}_\omega(M)$, para cualquier $M\in\mathcal{A}=W\mathcal{GP}^\wedge_{(\omega,\mathcal{Y})}$. En particular $\mathrm{id}(\omega)=\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{A})=\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A})=\mathrm{id}(\mathcal{Y})$, y así $\mathrm{id}(\omega)<\infty$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Como $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ es un par de cotorsión hereditario, tenemos que $\omega^\wedge$ es coresolvente y $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}={}^{\perp_1}(\omega^\wedge)$. Usando ahora que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y $\omega^\wedge$ es coresolvente, se sigue que ${}^{\perp_1}(\omega^\wedge)={}^\perp(\omega^\wedge)$ y así $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}={}^\perp(\omega^\wedge)$. Finalmente, por el Lema 1.8, tenemos que ${}^\perp(\omega^\wedge)={}^\perp\omega$.
(c) $\Rightarrow$ (a) Como $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}={}^\perp\omega$, tenemos del Lema 1.18 que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}(M)=\mathrm{pd}_\omega(M)$, para todo $M\in\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\mathcal{Y})}(\mathcal{A})=\mathrm{pd}_\omega(\mathcal{A})=\mathrm{id}(\omega)<\infty$. Entonces, por la Proposición 7.47 (b), concluimos (a). □

Corolario 7.55. *Sean* $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *un par GP-admisible en la categoría abeliana* $\mathcal{A}$*, con suficientes proyectivos e inyectivos, y* $(\omega,\mathcal{Y})$ *un par WGP-admisible en* $\mathcal{A}$*, con ambos* $\omega:=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ *y* $\mathcal{Y}$ *cerrados por sumandos directos en* $\mathcal{A}$*. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El par* $(\omega,\mathcal{Y})$ *es* $\mathcal{W}$*-cotilting y* $\mathrm{id}(\mathcal{Y})<\infty$.

(b) $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})},\omega^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathcal{A}$ *tal que* $\mathrm{id}(\omega)$ *es finita.*

(c) $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}={}^\perp\omega$ *y* $\mathrm{id}(\omega)<\infty$.

Si una de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)=\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M)=\mathrm{pd}_\omega(M)$*, para todo* $M\in\mathcal{A}$*. Mas aun* $\mathrm{gl.GPD}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})=\mathrm{id}(\mathcal{Y})=\mathrm{id}(\omega)<\infty$.

Demostración. Por la Observación 7.7, tenemos que $(\omega,\mathcal{Y})$ es un par WGP-admisible. Mas aun, el Teorema 6.35 nos dice que $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}=W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$. Así, el resultado se sigue del Teorema 7.54. □

Podemos dar la siguiente caracterización de la finitud del la dimensión global Ding-proyectiva del anillo R.

Corolario 7.56. *Para cualquier anillo* R*, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El par* $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Flat}(R))$ *es* $\mathcal{W}$*-cotilting y* $\mathrm{id}(\mathrm{Flat}(R)) < \infty$.

(b) $(\mathcal{DP}(R), \mathrm{Proj}(R)^{\wedge})$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$*, y además* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) < \infty$.

(c) $\mathcal{DP}(R) = {}^{\perp}\mathrm{Proj}(R)$ *y* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) < \infty$.

(d) $\mathrm{gl.DPD}(R) < \infty$.

Mas aun, si una de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces

$$\mathrm{gl.DPD}(R) = \mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) = \mathrm{id}(\mathrm{Flat}(R)).$$

Demostración. Se sigue del Corolario 7.55 y el Corolario 7.50 (c2), mediante tomar $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R)$ y $\mathcal{Y} := \mathrm{Flat}(R)$. □

Podemos dar la siguiente caracterización de la finitud de la dimensión global Gorenstein-proyectiva de un anillo R.

Corolario 7.57. *Para cualquier anillo* R*, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El par* $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es* $\mathcal{W}$*-cotilting y* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) < \infty$.

(b) *El par* $(\mathcal{GP}(R), \mathrm{Proj}(R)^{\wedge})$ *es de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$*, y* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) < \infty$.

(c) $\mathcal{GP}(R) = {}^{\perp}\mathrm{Proj}(R)$ *y* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) < \infty$.

(d) $\mathrm{gl.GPD}(R) < \infty$.

Mas aun, si una de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces $\mathrm{gl.GPD}(R) = \mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R))$.

Demostración. Se sigue del Corolario 7.55 y el Corolario 7.50 (c2), mediante tomar $\mathcal{X} := \mathrm{Proj}(R) =: \mathcal{Y}$. □

Finalmente, damos la siguiente caracterizacíń de finitud de la dimensión global Gorenstein-inyectiva de un anillo R.

Corolario 7.58. *Para cualquier anillo* R*, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El par* $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{Inj}(R))$ *es* $\mathcal{W}$*-tilting y* $\mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)) < \infty$.

(b) *El par* $(\mathrm{Inj}(R)^{\vee}, \mathcal{GI}(R))$ *es de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$*, y* $\mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)) < \infty$.

(c) $\mathcal{GI}(R) = \mathrm{Inj}(R)^{\perp}$ *y* $\mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)) < \infty$.

(d) $\text{gl.GID}(R) < \infty$.

Mas aun, si una de las condiciones equivalentes de arriba se cumple, entonces $\text{gl.GID}(R) = \text{pd}(\text{Inj}(R))$.

Demostración. Sea sigue de los duales al Corolario 7.55 y al Corolario 7.50 (c2), mediante tomar $\mathcal{X} := \text{Inj}(R) =: \mathcal{Y}$. □

7.2. Objetos cotilting y pares $\mathcal{W}$-cotilting

Los objetos tilting y cotilting fueron introducidos en la década de los 80's por Brenner y M. Butler [19], así como por D. Happel y C. M. Ringel [43], en el contexto de la categoría abeliana $\text{mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos a izquierda finitamente generados, para algún álgebra de Artin Λ. Una generalización de tilting y cotilting en $\text{mod}(R)$, fue dada por Y. Miyashita en [61]. En el caso de la categoría abeliana $\text{Mod}(R)$, para un anillo arbitrario R, una generalización de tilting y cotilting fue dada por L. Angeleri Hügel y F. U. Coelho [5]. Esta generalización de cotilting (respectivamente, tilting) es adecuada para extenderse a categoría abelianas, y será usada a través de ésta sección, para ser comparada con la noción de pare $\mathcal{W}$-cotilting (respectivamente, $\mathcal{W}$-tilting).

En lo que sigue, cada vez que hagamos uso de las siguientes dos terminologías, que presentamos en las definiciones de objetos cotilting y tilting que siguen, estaremos asumiendo que la categoría abeliana $\mathcal{A}$ posee productos o coproductos, respectivamente.

Definición 7.59. *[5] Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con cogeneradores inyectivos. Un objeto $M \in \mathcal{A}$ es **cotilting** si las siguientes condiciones se cumplen.*

(C1) $\text{id}(M) < \infty$.

(C2) *M es Π-ortogonal, esto es,* $\text{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M^I, M) = 0$ $\forall i \geq 1$ *y cualquier conjunto I.*

(C3) *Existe un cogenerador inyectivo Q en $\mathcal{A}$ tal que* $\text{resdim}_{\text{Prod}(M)}(Q) < \infty$.

Dualizando la definición anterior, tenemos la noción de objeto tilting. Por completitud, escribimos la definición enseguida.

Definición 7.60. *[5] Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con generadores proyectivos. Un objeto $M \in \mathcal{A}$ es **tilting** si las siguientes condiciones se cumplen.*

(T1) $\text{pd}(M) < \infty$.

(T2) *M es Σ-ortogonal, esto es,* $\text{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, M^{(I)}) = 0$ $\forall i \geq 1$ *y cualquier conjunto I.*

(T3) *Existe un generador proyectivo P en $\mathcal{A}$ tal que* $\text{coresdim}_{\text{Add}(M)}(P) < \infty$.

Proposición 7.61. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos. Entonces, para cualquier $M \in \mathcal{A}$, que satisface las condiciones (C2) y (C3) en la Definición 7.59, el par* $(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M))$ *es $\mathcal{W}$-cotilting.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A}$ y $\omega := \mathrm{Prod}(M)$. Siguiendo los detalles de la prueba dada en [5, Proposición 1.1], se puede ver que ω es una clase preenvolvente.
Supongamos que M satisface las condiciones (C2) y (C3) en la Definición 7.59. Por (C2) y la Observación 6.24, tenemos que $\mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$ y $\omega \subseteq \mathcal{X}^\perp$, para $\mathcal{X} := {}^\perp\omega$. Por otro lado, por (C3), existe una sucesión exacta $(*) : 0 \to M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_0 \to Q \to 0$, donde $M_i \in \omega\ \forall\ i$. Como $\mathcal{X}^\perp$ es coresolvente y $\omega \subseteq \mathcal{X}^\perp$, de la sucesión exacta $(*)$ tenemos que $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{X}^\perp$. Por lo tanto, $f : M_0 \to Q$ es una $\mathcal{X}$-precubierta de Q.
Afirmamos que cualquier objeto en $\mathcal{X} = {}^\perp\omega$ admite una ω-preenvolvente mono. De hecho, como ω es una clase preenvolvente, es suficiente mostrar que cualquier objeto en $\mathcal{X}$ puede ser encajado, a través de un monomorfismo, en algún objeto de ω.
Sea $Z \in \mathcal{X}$. Como Q es un cogenerador inyectivo en $\mathcal{A}$, existe un monomorfismo $g : Z \to Q^I$, para algún conjunto I. Por otro lado, tenemos la $\mathcal{X}$-precubierta $f : M_0 \to Q$, y así tenemos la $\mathcal{X}$-precubierta $f^I : M_0^I \to Q^I$, pues $M_0^I \in \mathcal{X}$. En particular, existe un morfismo $g' : Z \to M_0^I$ tal que $g = f^I g'$, y de aquí g' es un monomorfismo; probando la afirmación. Finalmente, de la Observación 7.46, concluimos que el par $(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M))$ es $\mathcal{W}$-cotilting. □

Observación 7.62. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos, suficientes proyectivos y $M \in \mathcal{A}$. Usando las ideas de la Proposción 7.61, podemos mostrar que los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Si M satisface (C2), en la Definición 7.59, y $W\mathcal{GI}_{({}^\perp M, \mathrm{Prod}(M))}$ tiene un cogenerador inyectivo en $\mathcal{A}$, entonces el par* $(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M))$ *es $\mathcal{W}$-cotilting.*

(b) *Si M satisface las condiciones (C2) y (C3), en la Definición 7.59, entonces la clase $W\mathcal{GI}_{({}^\perp M, \mathrm{Prod}(M))}$ tiene un cogenerador inyectivo en $\mathcal{A}$.*

Corolario 7.63. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos y suficientes proyectivos. Entonces, para cualquier objeto cotilting $M \in \mathcal{A}$ y $\omega :=$ $\mathrm{Prod}(M)$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $(W\mathcal{GP}_\omega, \omega^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$.*

(b) $\omega = {}^\perp M \cap \omega^\wedge$, $W\mathcal{GP}_\omega = {}^\perp M = {}^\perp(\omega^\wedge)$ *y* $W\mathcal{GP}_\omega^\perp = \omega^\perp$.

(c) $\mathrm{gl.WGPD}_{(\omega,\omega)}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_\omega(\mathcal{A}) = \mathrm{FPD}_{\omega^\wedge}(\mathcal{A}) = \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_\omega(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega^\wedge}(\omega^\wedge) = \mathrm{id}(M) < \infty$.

(d) $\mathcal{P}_\omega^{<\infty} = \mathcal{A} = W\mathcal{GP}_\omega^\wedge = \mathcal{P}_{\omega^\wedge}^{<\infty}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{A}$ un objeto cotilting y $\omega := \mathrm{Prod}(M)$. Por la Observación 6.24, sabemos que ${}^\perp M = {}^\perp\omega$ y $\mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(M)$. Entonces, el corolario se sigue de la Proposición 7.61 y el Teorema 7.52. □

La siguiente generalización del Lema del corrimiento nos será muy útil.

Lema 7.64. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de clases de objetos en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Entonces, para cualquier sucesión exacta*

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_{n-1} \to Z_n \to 0,$$

donde $Y_t \in \mathcal{Y}$ para todo $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, se tiene

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-, Z_n)|_{\mathcal{X}} \simeq \mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{A}}(-, M)|_{\mathcal{X}}, \quad \textit{para todo} \quad i > 0.$$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}$ y consideremos la sucesión exacta $0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_{n-1} \to Z_n \to 0$, donde $Y_t \in \mathcal{Y}$ para todo $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Notemos que se descompone en sucesión exactas cortas $\eta_t : 0 \to Z_t \to Y_t \to Z_{t+1} \to 0$, con $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ donde $Z_0 := M$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ a η_t, obtenemos para todo $i > 0$ la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y_t) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Z_{t+1}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, Z_t) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y_t) = 0, \;\; \forall t \in \{0, \ldots, n-1\},$$

donde los extremos son cero pues $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Por lo que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Z_{t+1}) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, K_t)$ para todo $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En particular para $t := n-1$, tenemos para todo $i > 0$ que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Z_n) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, Z_{n-1}), \text{ y recursivamente } \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Z_n) \simeq \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(X, Z_{n-j}),$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que para $j = n$, tenemos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Z_n) \simeq \mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{A}}(X, Z_0) = \mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{A}}(X, M), \text{ para todo } i > 0 \text{ y todo } X \in \mathcal{X}.$$

$\square$

Teorema 7.65. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos y suficientes proyectivos, y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathcal{A}$, tal que* $\mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$ *y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es cerrado por productos. Entonces, existe algún objeto cotilting $M \in \mathcal{A}$ tal que $\omega = \mathrm{Prod}(M)$, $\mathrm{id}(M) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} = \omega^\wedge$ y $W\mathcal{GP}_\omega = \mathcal{X} = {}^\perp M$.*

Demostración. Por el Teorema 2.13, tenemos que $\mathrm{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Y} = \omega^\wedge$. En particular, por el Lema 1.8, $\mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$. Como $\omega \subseteq \mathcal{Y}$, $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) = 0$ y ω es cerrado bajo sumandos directos en $\mathcal{A}$, por el dual de la Proposición 1.17 (b), tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega^\wedge) = \mathrm{resdim}_\omega(\omega^\wedge)$. En particular, tenemos que

$$n := \mathrm{resdim}_\omega(\mathrm{Inj}(\mathcal{A})) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega^\wedge) = \mathrm{id}_{\omega^\wedge}(\mathcal{Y}) \leq \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty.$$

Elijamos algún cogenerador inyectivo Q en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathrm{resdim}_\omega(Q) \leq \mathrm{resdim}_\omega(\mathrm{Inj}(\mathcal{A})) = n$; y así, existe una sucesión exacta $0 \to W_n \to \cdots \to W_1 \to W_0 \to Q \to 0$, con $W_i \in \omega$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Consideremos $M := \oplus_{i=0}^n W_i$. Como ω es cerrado bajo productos, se sigue que $\mathrm{Prod}(M) \subseteq \omega$. En particular $\mathrm{id}_{\mathrm{Prod}(M)}(M) \leq \mathrm{id}_\omega(\omega) = 0$, y así, las condiciones (C2) y (C3) en la Definición

7.59 se cumplen para M. De aquí, por la Proposición 7.61 y el Teorema 7.44, se sigue que $W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)} = {}^{\perp}\mathrm{Prod}(M)$. Mas aun, la inclusión $\mathrm{Prod}(M) \subseteq \omega$ implica que $\omega \subseteq {}^{\perp}\omega \subseteq {}^{\perp}\mathrm{Prod}(M) = W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$ y así $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$.
Ahora, usando la inclusión $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$, mostraremos que $\omega \subseteq \mathrm{Prod}(M)$. En efecto, sea $m := \mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Y}) < \infty$. Consideremos $W \in \omega \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$. Entonces, existe una sucesión exacta

$$(*) : 0 \to W \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \cdots M_{m-1} \xrightarrow{f_m} M_m \to K_{m+1} \to 0,$$

donde $M_i \in \mathrm{Prod}(M)$ y $K_{i+1} := \mathrm{Coker}(f_i) \in {}^{\perp}\mathrm{Prod}(M)$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Como $\mathrm{id}_{{}^{\perp}\mathrm{Prod}(M)}(\mathrm{Prod}(M)) = 0$, del Lema 7.64 tenemos $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K_{m+1}, K_m) \simeq \mathrm{Ext}^{m+1}_{\mathcal{A}}(K_{m+1}, W) = 0$ y así la sucesión exacta $0 \to K_m \to M_m \to K_{m+1} \to 0$ se divide; probando que $K_m \in \mathrm{Prod}(M) \subseteq \omega \subseteq {}^{\perp}\omega$. Luego, usando que ${}^{\perp}\omega$ es resolvente, tenemos de $(*)$ que $K_1 \in {}^{\perp}\omega$. Pero, ahora $\mathrm{id}_{\mathrm{Prod}(M)}(\omega) \leq \mathrm{id}_{\omega}(\omega) = 0$ y de aquí la sucesión exacta $0 \to W \to M_0 \to K_1 \to 0$ se divide; probando que $W \in \mathrm{Prod}(M)$. Entonces $\omega = \mathrm{Prod}(M)$ y $\mathrm{id}(M) = \mathrm{id}(\mathrm{Prod}(M)) = \mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$.
Finalmente, por el Lema 1.8, tenemos que ${}^{\perp}\omega = {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$. Por lo tanto $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y} = {}^{\perp}\omega = {}^{\perp}M = W\mathcal{GP}_{\omega}$. □

Corolario 7.66. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos y suficientes proyectivos y $\omega \subseteq \mathcal{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *El par (ω, ω) es $\mathcal{W}$-cotilting,* $\mathrm{id}(\omega) < \infty$ *y* $\omega = \mathrm{Prod}(\omega)$.

(b) *Existe un objeto cotilting $M \in \mathcal{A}$ tal que* $\omega = \mathrm{Prod}(M)$.

Demostración. (a) ⇒ (b) Se sigue del Corolario 7.63 y el Teorema 7.65.
(b) ⇒ (a) Se sigue de la Proposición 7.61. □

Recordemos que un anillo R es **perfecto a izquierda**, si todo R-módulo a izquierda posee una cubierta proyectiva. Recordemos también que es habitual usar la notación ${}_R R$ para referirse a la estructura natural de R como R-módulo a izquierda.

Lema 7.67. *Sean R un anillo perfecto a izquierda, noetheriano a izquierda y coherente a derecha, y Q un cogenerador inyectivo en* $\mathrm{Mod}(R)$. *Entonces*

(a) $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{Prod}({}_R R)$, ${}^{\perp}\mathrm{Proj}(R) = {}^{\perp}R$ *y* $\mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)) = \mathrm{id}({}_R R)$;

(b) $\mathrm{Inj}(R) = \mathrm{Add}(Q)$, $\mathrm{Inj}(R)^{\perp} = Q^{\perp}$ *y* $\mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)) = \mathrm{pd}(Q)$;

(c) ${}_R R$ *es* Π*-ortogonal y* Q *es* Σ*-ortogonal;*

(d) $\mathrm{resdim}_{\mathrm{Prod}({}_R R)}(M) = \mathrm{pd}(M)$ *y* $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(Q)}(M) = \mathrm{id}(M)$ $\forall M \in \mathrm{Mod}(R)$.

Demostración. (a) Por [20, Teorema 3.3], se sigue que $\mathrm{Proj}(R)$ es cerrado bajo productos en $\mathcal{A}$ y así $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{Prod}({}_RR)$. Entonces, por la Observación 6.24, obtenemos (a).
(b) Por [1, Proposición 18.13], se sigue que $\mathrm{Inj}(R)$ es cerrado bajo coproductos en $\mathcal{A}$ y así $\mathrm{Inj}(R) = \mathrm{Add}(Q)$. Luego, por el dual de la Observación 6.24, obtenemos (b).
(c) Sea I un conjunto. Entonces, por (a) tenemos que R^I es proyectivo y así $\mathrm{Ext}^i_R(R^I, R) = 0$, para todo $i \geq 1$. Por otro lado, por (b), tenemos que $Q^{(I)}$ es inyectivo y así $\mathrm{Ext}^i_R(Q, Q^{(I)}) = 0$, para todo $i \geq 1$.
(d) De (a) y (b), sabemos que $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{Prod}({}_RR)$ y $\mathrm{Inj}(R) = \mathrm{Add}(Q)$. Por lo tanto (d) se cumple. $\square$

Teorema 7.68. *Sean R un anillo perfecto a izquierda, noetheriano a izquierda, y coherente a derecha y Q un cogenerador inyectivo en* $\mathrm{Mod}(R)$*. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) ${}_RR$ *es cotilting en* $\mathrm{Mod}(R)$.

(b) $\mathrm{id}({}_RR) < \infty$ *y* $\mathrm{pd}(Q) < \infty$.

(c) *El par* $(\mathrm{Proj}(R), \mathrm{Proj}(R))$ *es $\mathcal{W}$-cotilting y* $\mathrm{id}({}_RR) < \infty$.

(d) $(\mathcal{GP}(R), \mathrm{Proj}(R)^\wedge)$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$ *y* $\mathrm{id}({}_RR) < \infty$.

(e) $\mathcal{GP}(R) = {}^\perp({}_RR)$ *y* $\mathrm{id}({}_RR) < \infty$.

(f) $\mathrm{gl.GPD}(R) < \infty$.

(g) Q *es tilting en* $\mathrm{Mod}(R)$.

(h) *El par* $(\mathrm{Inj}(R), \mathrm{Inj}(R))$ *es $\mathcal{W}$-tilting y* $\mathrm{pd}(Q) < \infty$.

(i) $(\mathrm{Inj}(R)^\vee, \mathcal{GI}(R))$ *es un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}(R)$ *y* $\mathrm{pd}(Q) < \infty$.

(j) $\mathcal{GI}(R) = Q^\perp$ *y* $\mathrm{pd}(Q) < \infty$.

(k) $\mathrm{gl.GID}(R) < \infty$.

Mas aun, si alguno de los enunciados equivalentes de arriba se cumple, entonces $\mathrm{Proj}(R)^\wedge = \mathrm{Inj}(R)^\vee$ *y*

$$\mathrm{FPD}(R) = \mathrm{gl.GPD}(R) = \mathrm{id}({}_RR) = \mathrm{pd}(Q) = \mathrm{gl.GID}(R) = \mathrm{FID}(R) < \infty.$$

Demostración. Las equivalencias entre (a) y (b) se siguen del Lema 7.67. Mediante el uso del Lema 7.67 y el Corolario 7.66, podemos ver que (a) y (c) son equivalentes. Las equivalencias entre (c), (d), (e) y (f) se siguen del Lema 7.67 y el Corolario 7.57.
Las equivalencias entre (g) y (b) se siguen del Lema 7.67. Mientras que usando el Lema 7.67 y el dual del Corolario 7.66, se puede ver que (g) y (h) son equivalentes. Las equivalencias entre (h), (i), (j) y (k) se siguen del Lema 7.67 y el Corolario 7.58.
Supongamos que $\mathrm{id}({}_RR) < \infty$ y $\mathrm{pd}(Q) < \infty$. Probaremos que $\mathrm{Proj}(R)^{\wedge} = \mathrm{Inj}(R)^{\vee}$. En efecto, sea $X \in \mathrm{Proj}(R)^{\wedge}$. Entonces, por el Lema 7.67 (a) y el Lema 1.8, tenemos que $\mathrm{id}(X) \leq \mathrm{id}(\mathrm{Proj}(R)^{\wedge}) = \mathrm{id}({}_RR) < \infty$ y así $X \in \mathrm{Inj}(R)^{\vee}$. Consideremos $Y \in \mathrm{Inj}(R)^{\vee}$. Entonces, por el Lema 7.67 (b) y Lema 1.8, tenemos $\mathrm{pd}(Y) \leq \mathrm{pd}(\mathrm{Inj}(R)^{\vee}) = \mathrm{pd}(Q) < \infty$ y de aquí $Y \in \mathrm{Proj}(R)^{\wedge}$; probando que $\mathrm{Proj}(R)^{\wedge} = \mathrm{Inj}(R)^{\vee}$.
Sean $\omega := \mathrm{Proj}(R)$ y $\nu := \mathrm{Inj}(R)$. En particular, por la Proposición 6.18 y su dual, tenemos que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\omega)} = \mathcal{GP}(R)$ y $W\mathcal{GI}_{(\nu,\nu)} = \mathcal{GI}(R)$. Supongamos que uno de los enunciados de arriba es cierto. Por el Teorema 7.52 y su dual, se sigue que $\mathrm{FPD}(R) = \mathrm{gl.GPD}(R) = \mathrm{pd}_{\omega^{\wedge}}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{id}_{\nu^{\vee}}(\nu^{\vee}) = \mathrm{gl.GID}(R) = \mathrm{FID}(R)$. Finalmente, del Corolario 7.57 y el Corolario 7.58, tenemos que $\mathrm{gl.GPD}(R) = \mathrm{id}({}_RR)$ y $\mathrm{gl.GID}(R) = \mathrm{pd}(Q)$. □

Corolario 7.69. *Sean Λ una R-álgebra de Artin y $D := \mathrm{Hom}_R(-,k) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$ la dualidad usual, donde k es la envolvente inyectiva de $R/\mathrm{rad}(R)$. Si $\mathrm{id}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$ y $\mathrm{id}(\Lambda_\Lambda) < \infty$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *${}_\Lambda\Lambda$ es cotilting en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ y $D(\Lambda_\Lambda)$ es tilting en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.*

(b) *El par $(\mathrm{Proj}(\Lambda), \mathrm{Proj}(\Lambda))$ es $\mathcal{W}$-cotilting.*

(c) *$(\mathcal{GP}(\Lambda), \mathrm{Proj}(\Lambda)^{\wedge})$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.*

(d) *$\mathcal{GP}(\Lambda) = {}^{\perp}({}_\Lambda\Lambda)$ y $\mathcal{GI}(\Lambda) = (D(\Lambda)_\Lambda)^{\perp}$.*

(e) *El par $(\mathrm{Inj}(\Lambda), \mathrm{Inj}(\Lambda))$ es $\mathcal{W}$-tilting.*

(f) *$(\mathrm{Inj}(\Lambda)^{\vee}, \mathcal{GI}(\Lambda))$ es un par de cotorsión hereditario y completo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$.*

(g) *$\mathrm{Proj}(\Lambda)^{\wedge} = \mathrm{Inj}(\Lambda)^{\vee}$.*

(h) *$\mathrm{FPD}(\Lambda) = \mathrm{gl.GPD}(\Lambda) = \mathrm{id}({}_\Lambda\Lambda) = \mathrm{id}(\Lambda_\Lambda) = \mathrm{gl.GID}(\Lambda) = \mathrm{FID}(\Lambda) < \infty$.*

Demostración. Como Λ es una R-álgebra de Artin, se sigue en particular que Λ es un anillo artiniano, y así, también es perfecto a izquierda, noetheriano a izquierda y coherente a derecha. Mas aun, por [4, Lema 3.2.2], sabemos que $D(\Lambda_\Lambda)$ es un cogenerador inyectivo en $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Por lo tanto, para probar el resultado, por el Teorema 7.68, es suficiente mostrar que $\mathrm{pd}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{id}(\Lambda_\Lambda)$.
Observe primero que, $\mathrm{mod}(\Lambda)$ es una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos, $\mathrm{proj}(\Lambda) := \mathrm{Proj}(\mathrm{mod}(\Lambda)) = \mathrm{Proj}(\Lambda) \cap \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{inj}(\Lambda) := \mathrm{Inj}(\mathrm{mod}(\Lambda)) = \mathrm{Inj}(\Lambda) \cap \mathrm{mod}(\Lambda)$

y Λ^{op} es una R-algebra de Artin. Como $\mathrm{Mod}(R)$ tiene cubiertas proyectivas, y la cubierta proyectiva de un Λ-modulo finitamente generado es finitamente generada, tenemos que

$$\mathrm{pd}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{resdim}_{\mathrm{Proj}(\Lambda)}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{resdim}_{\mathrm{proj}(\Lambda)}(D(\Lambda_\Lambda)).$$

Mas aun, usando la dualidad $D : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$, se sigue que

$$\mathrm{resdim}_{\mathrm{proj}(\Lambda)}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{inj}(\Lambda^{\mathrm{op}})}(\Lambda_\Lambda).$$

Como $\mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$ tiene suficientes inyectivos y $\mathrm{Mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$ tiene envolventes inyectivas, se sigue que la envolvente inyectiva de un Λ-módulo finitamente generado es finitamente generada. Por lo tanto $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{inj}(\Lambda)^{\mathrm{op}}}(\Lambda_\Lambda) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{inj}(\Lambda^{\mathrm{op}})}(\Lambda_\Lambda) = \mathrm{id}(\Lambda_\Lambda)$; probando que $\mathrm{pd}(D(\Lambda_\Lambda)) = \mathrm{id}(\Lambda_\Lambda)$. $\square$

Proposición 7.70. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana AB4*, con cogeneradores inyectivos y suficientes proyectivos, y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario en $\mathcal{A}$. Sea Q un cogenerador inyectivo en $\mathcal{A}$ y $0 \to Y_0 \to M \to Q \to 0$ una sucesión exacta con $Y_0 \in \mathcal{Y}$ y $M \in \omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Si ${}^{\perp}M \subseteq \mathcal{X}$ y ω es cerrado por productos, entonces $\omega = \mathrm{Prod}(M)$, $\mathrm{id}(M) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} = \omega^{\wedge}$ y $W\mathcal{GP}_{\omega} = \mathcal{X} = {}^{\perp} M$.*

Demostración. Sea ${}^{\perp}M \subseteq \mathcal{X}$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrado por productos. Por el Teorema 2.13, tenemos que $\mathcal{Y} = \omega^{\wedge}$. En particular, por el Lema 1.8 $\mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$. Además, por el Lema 1.8, tenemos que ${}^{\perp}\omega = {}^{\perp}(\omega^{\wedge})$. Por lo tanto $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y} = {}^{\perp}\omega$.
Observe que $\mathrm{Prod}(M)$ es siempre una clase preenvolvente. Mas aun, afirmamos que el par $(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M))$ es $\mathcal{W}$-cotilting. De hecho, por la Observaión 7.46, es suficiente mostrar que cualquier objeto en ${}^{\perp}M = {}^{\perp}\mathrm{Prod}(M)$ puede ser encajado a través de un monomorfismo, en algún objeto de $\mathrm{Prod}(M)$. Sea $Z \in {}^{\perp}M$. Entonces, existe un monomorfismo $\alpha : Z \to Q^I$, para algún conjunto I. Por la Observación 6.24, tenemos la sucesión exacta $0 \to Y_0^I \to M^I \to Q^I \to 0$. Observe que $Y_0^I \in \mathcal{Y}$, pues $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo productos. Consideremos el siguiente diagrama de pull-back

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_0^I \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_0^I \arrow[r] & M^I \arrow[r] & Q^I \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como ${}^{\perp}M \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}({}^{\perp}M, \mathcal{Y}) = 0$ para todo $i \geq 1$, y así la primera columna en el diagrama de arriba se escinde. De aquí α se factoriza a través de $M^I \to Q^I$, y de este modo obtenemos el monomorfismo $Z \to M^I$; probando la afirmación.
Como el par $(\mathrm{Prod}(M), \mathrm{Prod}(M))$ es un par $\mathcal{W}$-cotilting, se sigue del Teorema 7.44 (a), que $W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)} = {}^{\perp}M$. Usando ahora que ω es cerrado bajo productos, tenemos que $\mathrm{Prod}(M) \subseteq \omega \subseteq \mathcal{Y}$ y de aquí $\omega \subseteq {}^{\perp}\omega \subseteq {}^{\perp}M = W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$ y $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq {}^{\perp}M \subseteq \mathcal{X}$. por lo tanto $\omega \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$ y $\mathcal{X} = {}^{\perp}M$.
Ahora, probamos que $\omega \subseteq \mathrm{Prod}(M)$. Sea $W \in \omega \subseteq W\mathcal{GP}_{\mathrm{Prod}(M)}$. Entonces, existe una

sucesión exacta $0 \to W \to M_0 \to K_0 \to 0$, con $M_0 \in \mathrm{Prod}(M)$ y $K_0 \in {}^{\perp}M$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}({}^{\perp}M, \omega) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \omega) = 0$, la sucesión exacta de arriba se escinde y así $W \in \mathrm{Prod}(M)$; probando que $\omega = \mathrm{Prod}(M)$. Por lo tanto $\mathrm{id}(M) = \mathrm{id}(\mathrm{Prod}(M)) = \mathrm{id}(\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Y})$. $\square$

Capítulo 8

Apéndice: Algunas herramientas homológicas

8.1. Axiomas de Grothendieck

Antes de definir el objeto algebraico fundamental, sobre el cual se desarrollan los resultados de éste trabajo, deseo dar una analogía que puede ser de utilidad. Las primeras nociones a las que tiene acceso un estudiante de matematicas, ingeniería o actuaría son las del cálculo diferencial e integral, materias fundamentales incluso para la civilización. Posteriormente, a las ideas del cálculo integral, le siguen las del cálculo integral vectorial, pasando por ideas de convergencia y análisis, para llegar a la teoría de la medida, donde se realiza un tratamiento semejante al del cálculo integral e integral vectorial, pero sobre conjuntos mas generales, se vuelve a definir en estos una forma de medir y una noción de continuidad de funciones, permitiendo así declarar una integral de estas funciones. Algunas de las mas conocidas, la clásica de Riemman, la integral Lebesgue, la integral de contorno, la integral de Darboux, la integral de Riemman-Stieltjes y la integral Haar, entre otras. Cada una de éstas inspirada en la que se aprende en el primer curso de cálculo integral, para la cual se sustituye el conjunto de los números reales, por otros conjuntos que no son ni densos ni ordenados, pero sobre los cuales se pueden medir y declarar abiertos, obteniendo para cada una de ellas un sistema semejante al clásico conocido.
Algo similar a ésto sucede para llegar a las categorías abelianas. La historia comienza nuevamente con las propiedades de los números reales, las fabulosas propiedades de suma y producto, así como su interacción entre éstas, llevan a tratar de replicarlas en otros conjuntos, donde no se tiene necesariamente un orden, o bien donde solo se considera una de las operaciones, en el caso de la teoría de grupos, mientras que al considerar ambas operaciones (donde el producto solo constituye un monoide) obtenemos la teoría de anillos. Al considerar colecciones de conjuntos con éstas características, y las funciones entre ellos que conservan las estructuras multiplicativa y aditiva (o una de ellas, según dependa de la colección), obtenemos dos importantes colecciones: conjuntos con estructura algebraica y morfismos entre estas estructuras. Al tratar de catalogar a estos pares de colecciones, obtenemos la noción

de categoría. En éste punto, es en el que se puede ver que sucede si en la categoría ya no se consideran específicamente conjuntos y funciones entre los conjuntos, si no solamente objetos y morfismos entre los objetos. Considerando algunas propiedades fundamentales entre objetos y morfismos, obtenemos diferentes clases de categorías, por nombrar algunas, tenemos: categoría preaditiva, categoría aditiva, categoría exacta, categoría pre-abeliana y categoría abeliana; donde nuevamente se tratar de replicar lo que ocurre para la categoría de módulos, pero en clases mas generales.
Habiendo hecho ésta analogía, estamos listos para definir el concepto de categoría abeliana.

Definición 8.1 ([70]). *Una categoría $\mathcal{A}$, consiste de:*

1. *Una clase de objetos, denotada por* $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.
2. *Para cada pareja de objetos (A, B) de $\mathcal{A}$, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, los elementos de éste conjunto se llamarán* ***morfismos*** *de A en B.*
   Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, decimos que A es el dominio de f y que B es el dominio de f. La notación $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$, significa que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ (lo mismo que $A \xrightarrow{f} B$).
3. *Para cada terna (A, B, C) de objetos en $\mathcal{A}$, tenemos una función*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C),$$

   $(f, g) \mapsto f \circ g$ (usualmente denotada por fg) llamada la composición de f y g, tal que satisface las siguientes propiedades.

   (a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D) = \emptyset$, *si* $(A, B) \neq (C, D)$.

   (b) *Si $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ están en $\mathcal{A}$, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f;$$

   esto es, se cumple la asociatividad de la composición.

   (c) *Para cada objeto A en $\mathcal{A}$, existe un morfismo 1_A (el morfismo identidad en A) tal que*

$$\begin{cases} 1_A \circ f = f \quad \textit{para cada} \quad f : C \to A, \\ \\ g \circ 1_A = g \quad \textit{para cada} \quad g : A \to C. \end{cases}$$

Vamos ahora a enunciar algunas de las propiedades que debe tener una categoría, para obtener un ambiente idóneo, en el cual se puedan obtener resultados útiles.

Definición 8.2 ([70]). *Una categoría $\mathcal{A}$ es* ***aditiva*** *si:*

(i) $\mathrm{Hom}_A(A, B)$ *es un grupo abeliano (aditivo) para todo* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$*;*

(ii) *las leyes distributivas se cumplen: dados los morfismos* $X \xrightarrow{a} A$, $A \xrightarrow{f,g} B$, $B \xrightarrow{b} Y$, *donde* $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, *se tiene que*

$$b(f+g) = bf + bg \quad y \quad (f+g)a = fa + ga;$$

(iii) $\mathcal{A}$ *tiene objeto cero;*

(iv) $\mathcal{A}$ *tiene productos y coproductos finitos: para todos los objetos* $A, B \in \mathcal{A}$, *ambos objetos* $A \prod B$ *y* $A \coprod B$ *existen en* $\mathcal{A}$.

Finalmente, damos la definición de categoría abeliana.

Definición 8.3 ([32])**.** *Una categoría* $\mathcal{A}$ *es una* ***abeliana*** *si es aditiva y satisface las siguientes condiciones:*

(i) *todo morfismo tiene núcleo y conúcleo;*

(ii) *todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo;*

(iii) *para cualquier morfismo* $\varphi : X \to Y$ *en* $\mathcal{A}$, *existe una sucesión exacta*

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} K'$$

llamada ***descomposición canónica****, con las siguientes propiedades:*

(a) $j \circ i = \varphi$;

(b) K *es el núcleo de* φ, K' *es el conúcleo de* φ;

(c) I *es el conúcleo de* k *y el núcleo de* c.

Iniciamos presentando tres axiomas de Grothendieck AB3, AB4, y AB5, [41]. Tales axiomas adicionales se requieren algunas veces, para garantizar la existencia en algunas construcciones, y para que las sumas y productos infinitos tengan ciertas propiedades. Debemos mencionar que tales axiomas poseen sus axiomas duales AB3*, AB4* y AB5*.

AB3. *Para cualquier familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *de objetos en* $\mathcal{A}$, *la suma directa de la familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *existe en* $\mathcal{A}$. Lo anterior se expresa diciendo que $\mathcal{A}$ tiene coproductos.

El axioma AB3 implica que, para cualquier familia de sub-objetos $\{A_i\}$ de algún $A \in \mathcal{A}$, el supremo de los A_i existe. Para verificar esto, basta con tomar la imagen de la suma directa $\bigoplus A_i$ bajo el morfismo cuyas componentes son las inclusiones canónicas $A_i \to A$.

AB4. *El axioma* AB3 *se satisface, y una suma directa de una familia no vacía de monomorfismos es un monomorfismo.*

El siguiente axioma es estrictamente mas fuerte que AB4.

AB5. *El axioma* AB3 *se satisface, y si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *es una familia dirigida creciente de sub-objetos de* $A \in \mathcal{A}$*, y* B *es cualquier sub-objeto de* A*, tenemos que* $(\Sigma_{i\in I}A_i)\cap B = \Sigma_{i\in I}(A_{i\in I}\cap B)$.

En concordancia a la tradición, se denota por ΣA_i al supremo de los A_i, y por $P \cap Q$ al ínfimo de los sub-objetos P y Q de A. El axioma AB5 puede expresarse también como sigue: *El axioma* AB3 *se satisface, y si* $A \in \mathcal{A}$ *es el supremo de una familia creciente dirigida de sub-objetos* A_i*, y si para cada* $i \in I$ *tenemos un morfismo* $u_i : A_i \to B$ *tal que, cuando* $A_i \subseteq A_j$*,* $u_i = u_j|_{A_i}$*, entonces existe un morfismo* $u : A \to B$ *tal que* $u_i = u|_{A_i}$.

8.2. Álgebra homológica

La siguiente proposición se basa esencialmente en la idea de la paradoja del Hotel de Hilbert. En el caso de una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con co-productos, el argumento es correcto ya que los co-productos infinitos sobre $\mathcal{A}$ existen.

Proposición 8.4 (Truco de Eilenberg)**.** *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase pre-resolvente en una categoría abeliana* $\mathcal{A}$ *con co-productos. Si* $\mathcal{X}$ *es cerrada por co-productos, entonces* $\mathcal{X}$ *es cerrada por sumandos directos.*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{A}$ un sumando directo de X. Entonces, $X = Y \oplus Z$, para algún $Z \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrado bajo co-productos arbitrarios, el objeto $W := \oplus_{i=1}^{\infty} X$ pertenece a la clase $\mathcal{X}$, pero

$$W = Y \oplus Z \oplus Y \oplus Z \oplus \cdots = Y \oplus (Z \oplus Y \oplus Z \oplus \cdots) \cong Y \oplus W.$$

Como en particular $Y \oplus W \in \mathcal{X}$, de la sucesion exacta que se escinde

$$0 \to Y \to Y \oplus W \to W \to 0,$$

y del hecho que $\mathcal{X}$ es pre-resolvente, obtenemos que $Y \in \mathcal{X}$. □

Extendiendo la noción de $\mathcal{X}$-resolución a izquierda, de H. Holm [47, 1.5 Resolutions.] damos la siguiente definición que nos será muy útil.

Definición 8.5. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$*. Para* $M \in \mathcal{A}$*, considere los siguientes dos tipos de sucesiones.*

(a) *Una* $\mathcal{X}$*-resolución de* M *es una sucesión exacta* $\eta := \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$*, con* $X_n \in \mathcal{X}$ *para todo* $n \geq 0$.

(b) *Una* $\mathcal{X}$*-coresolución de* M *es una sucesión exacta* $\eta := 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$*, con* $X^n \in \mathcal{X}$ *para todo* $n \geq 0$.

*Tomemos ahora una $\mathcal{X}$-resolución η de M. Diremos que η es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**resolución propia a izquierda** si la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es exacta para todo $Y \in \mathcal{Y}$. De modo similar, una $\mathcal{X}$-coresolución γ de M es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**coresolución propia a izquierda**, si la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ es exacta para todo $Y \in \mathcal{Y}$. En el caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, diremos simplemente que η es una $\mathcal{X}$-resolución propia a izquierda o bien que γ es una $\mathcal{X}$-coresolución propia a izquierda, según sea el caso.*

Observación 8.6. *Notemos que, en las condiciones de la Definición 8.5 anterior, una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución propia a izquierda η de M y una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda γ de M, constituyen juntas una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución completa a izquierda, en el sentido de la Definición 6.1.*

También es posible hablar de resoluciones y coresoluciones propias a derecha, hacemos esto en la siguiente definición.

Definición 8.7. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$. Para $M \in \mathcal{A}$ consideremos una $\mathcal{Y}$-resolución η de M. Decimos que η es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**resolución propia a derecha** si la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \eta)$ es exacta para todo $X \in \mathcal{X}$. De modo similar, una $\mathcal{Y}$-coresolución γ de M es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-**coresolución propia a derecha**, si la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \eta)$ es exacta para todo $X \in \mathcal{X}$. En el caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, diremos simplemente que η es una $\mathcal{X}$-resolución propia a derecha, y respectivamente, que γ es una $\mathcal{X}$-coresolución propia a derecha.*

Observación 8.8. *Como antes, en las condiciones de la Definición 8.7, una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución propia a derecha η de M y una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a derecha γ de M constituyen juntas una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-resolución completa a derecha, en el sentido de la Definición 6.9.*

Finalmente, enunciamos y probamos el siguiente Lema, que será fundamental para varios de los resultado que siguen. Éste resultado es una parte del presentado en [22, Lema 4.1.1].

Lema 8.9. *Sean $N \in \mathcal{A}$ y $X^\bullet : \cdots X^{i-1} \overset{d^{i-1}_{X^\bullet}}{\to} X^i \overset{d^{i}_{X^\bullet}}{\to} X^{i+1} \to \cdots$ un complejo acíclico. Entonces, para $Z^i_{X^\bullet} := \mathrm{Ker}(d^i_{X^\bullet})$ y $Z^{-i}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet,N)} := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, N) \overset{(d^{i-1}_{X^\bullet},N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{i-1}, N))$, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $Z^{-l}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet,N)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N)$, *para todo $l \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Considere las siguientes condiciones:*

   (i) *el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, N)$ es acíclico;*

   (ii) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^l_{X^\bullet}, N) = 0$, *para todo $l \in \mathbb{Z}$.*

   Entonces (ii) $\Rightarrow$ (i). *Mas aun, si $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X^l, N) = 0$, para todo $l \in \mathbb{Z}$, se tiene que* (i) $\Rightarrow$ (ii).

Demostración. (a) Aplicando el funtor exacto a izquierda $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,N)$, a la sucesión exacta a derecha

$$X^{l-1} \to X^l \to Z^{l+1}_{X^\bullet} \to 0,$$

obtenemos la sucesión exacta a izquierda

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{l-1}, N).$$

Por lo que

$$Z^{-l}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet,N)} := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \overset{(d^{l-1}_{X^\bullet},N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{l-1}, N))$$

es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N)$.

(b) Probaremos que (ii) $\Rightarrow$ (i). Como $X^\bullet$ es un complejo acíclico, se descompone en sucesiones exactas cortas de la forma

$$\xi_l : 0 \to Z^l_{X^\bullet} \to X^l \to Z^{l+1}_{X^\bullet} \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,N)$ a esta sucesión obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi_l, N) : 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^l, N) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}, N),$$

donde el último término es cero, pues $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^l_{X^\bullet}, N) = 0$, para todo $l \in \mathbb{Z}$. Usando el inciso (a) y el Lema de cinco, esta última sucesión es isomorfa a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \overset{(d^{l-1}_{X^\bullet},N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{l-1}, N)) \to 0.$$

Lo cual implica que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, N)$ es acíclico.
Probaremos ahora que (i) $\Rightarrow$ (ii). En efecto, supongamos que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^\bullet, N)$ es acíclico. Usando el inciso (a) y el Lema del cinco, lo anterior implica que la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi_l, N) : 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^l, N) \to 0,$$

es exacta para todo $l \in \mathbb{Z}$. Por lo que, de la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}_{X^\bullet}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^l, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z^l, N) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}, N) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X^l, N),$$

obtenemos la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}, N) \to 0$, pues $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X^l, N) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$ por hipótesis. Lo cual implica que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z^{l+1}, N) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. □

Teniendo estos conceptos presentes, enunciamos el siguiente resultado que nos será de gran utilidad. Este resultado es básicamente el que aparece en [25, Lema 8.2.1], solamente ha sido extendido a las nociones que nos permiten tratar con objetos Gorenstein relativos.

Lema 8.10. *Sean $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo co-productos finitos, $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y}$ y $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y},\mathcal{X})=0$. Consideremos una sucesión exacta $0\to M'\to M\to M''\to 0$ en $\mathcal{A}$, tal que*

$$0\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,M')\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,M)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,M'')\to 0$$

es exacta, para todo $Y\in\mathcal{Y}$. Si M' y M'' admiten $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-resoluciones propias a derecha, entonces también M admite una $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-resolución propia a derecha.

Demostración. Dado que M' y M'' tienen $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-resoluciones propias a derecha, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[u] \arrow[r, "\beta"] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[u, "f"] \arrow[r] & X_0 \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r] & X_0'' \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "g'"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0' \arrow[u] \arrow[r] & K_0 \arrow[u] \arrow[r] & K_0'' \arrow[u] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[u] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[u] \arrow[d, equal] & \\
 & \eta' & \eta & \eta'' &
\end{tikzcd}$$

Mas precisamente η' y η'' son parte de la $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-resolución propia a derecha de M' y M''; por lo que $X_0',X_0''\in\mathcal{X}$ y $X_0:=X_0'\oplus X_0''\in\mathcal{X}$, ya que $\mathcal{X}$ es cerrada por coproductos finitos. Además, el morfismo $g':X_0''\to M$ existe ya que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0'',\beta):\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0'',M)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0'',M'')$$

es un epimorfismo, pues $X_0\in\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y}$. Luego, usando el Lema de la Serpiente, el morfismo

$$\lambda:=(f\alpha,g'):X_0'\oplus X_0''\longrightarrow M,$$

es un epimorfismo. Por hipótesis, tenemos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,\eta')$ y $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,\eta'')$ son acíclicos, para todo $Y\in\mathcal{Y}$. Veamos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,\eta)$ es acíclico, para todo $Y\in\mathcal{Y}$.

En efecto, para todo $Y\in\mathcal{Y}$, tenemos la sucesión exacta

$$0\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,K_0)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,X_0)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,M)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y,K_0),$$

cuyo último término es cero, ya que también tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y, K_0') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y, K_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y, K_0''),$$

con extremos cero para todo $Y \in \mathcal{Y}$, pues por el dual del Lema 8.9 $K_0', K_0'' \in \mathcal{Y}^{\perp_1}$.

Repitiendo el procedimiento anterior, para $0 \to K_0' \to K_0 \to K_0'' \to 0$, se obtiene la sucesión exacta

$$\xi : \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0,$$

con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \xi)$ acíclico, para todo $Y \in \mathcal{Y}$, por el dual del Lema 8.9. □

El siguiente resultado, se consigue dualizando el Lema 8.10, y es conocido como el Lema de la Herradura.

Lema 8.11 (Lema de la Herradura)**.** *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo co-productos finitos, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$. Consideremos una sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ en $\mathcal{A}$, tal que*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', Y) \to 0$$

es exacta para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Si M' y M'' admiten $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresoluciones propias a izquierda, entonces también M admite una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda.

El siguiente resultado extiende el resultado que aparece en [25, Ejercicio 2, p 169].

Proposición 8.12. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, con $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, y $f : M \to \tilde{M}$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\eta : 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X^0 \arrow[r] & X^1 \arrow[r] & X^2 \arrow[r] & \cdots \\
\tilde{\eta} : 0 \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[r] & \tilde{X}^0 \arrow[r] & \tilde{X}^1 \arrow[r] & \tilde{X}^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde η es una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda de M, y el renglón inferior $\tilde{\eta}$ es una $\mathcal{X}$-coresolución de $\tilde{M}$. Entonces, $f : M \to \tilde{M}$ induce un morfismo de cadenas $\bar{f} : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
M_\bullet : 0 \arrow[r] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \cdots \\
\tilde{M}_\bullet : 0 \arrow[r] & \tilde{X}^0 \arrow[r] & \tilde{X}^1 \arrow[r] & \tilde{X}^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con la propiedad de que el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X^0 \arrow[d, "f^0"] \\
\tilde{M} \arrow[r] & \tilde{X}^0
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el morfismo de cadena inducido $\bar{f} : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$ está unívocamente determinado salvo homotopías.

Demostración. (i) Veamos que existe la cadena de complejos $\bar{f} : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$.
Por inducción. Para $n = 0$, dado que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(d^{-1}, \tilde{X}^0) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^0, \tilde{X}^0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \tilde{X}^0)$$

es epi, pues el renglon superior es una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia y $\tilde{X}^0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Para $\tilde{d}^{-1} f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \tilde{X}^0)$, existe $f^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^0, \tilde{X}^0)$ tal que $f^0 d^{-1} = \tilde{d}^{-1} f$.
Para el paso de inducción, supongamos que tenemos los morfismos f^{n-1} y f^n, vamos a ver que existe el morfismo f^{n+1}, para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "\pi_{n-1}"] \arrow[dd, "f^{n-1}"] & & X^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dr, "\pi_n"] \arrow[dd, "f^n"] & & X^{n+1} \\
& \mathrm{Ker}(d^n) \arrow[ur, "i_n"] & & \mathrm{Ker}(d^{n+1}) \arrow[ur, "i_{n+1}"] & \\
\tilde{X}^{n-1} \arrow[rr, "\tilde{d}^{n-1}"] & & \tilde{X}^n \arrow[rr, "\tilde{d}^n"] & & \tilde{X}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

donde el primer cuadro conmuta y los morfismos i_j y π_{j+1} son los morfismos canónicos que factorizan a cada d^j, para todo $j \in \mathbb{N}$. Observemos que tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^n f^n i_n \pi_{n-1} = \tilde{d}^n f^n d^{n-1} &= \tilde{d}^n \tilde{d}^{n-1} f^{n-1} \\
&= 0 \\
&= 0\pi_{n-1}
\end{aligned}$$

Como π_{n-1} es cancelable por la derecha, tenemos que $\tilde{d}^n f^n$ anula a i_n; pero $\mathrm{Coker}(i_n) = \mathrm{Ker}(d^{n+1})$, por lo que existe un morfismo $\rho_n : \mathrm{Ker}(d^{n+1}) \to \tilde{X}^{n+1}$ tal que $\rho_n \pi_n = \tilde{d}^n f^n$.
Dado que η es una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-corresolución propia a izquierda, tenemos para $\tilde{X}^{n+1} \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_{n+1}, \tilde{X}^{n+1}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{n+1}, \tilde{X}^{n+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(d^{n+1}), \tilde{X}^{n+1})$$

es un epimorfismo. Esto implica que, para $\rho_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(d^{n+1}), \tilde{X}^{n+1})$, existe un morfismo $f^{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{n+1}, \tilde{X}^{n+1})$ tal que $f^{n+1} i_{n+1} = \rho_n$. Así, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$f^{n+1} d^n = f^{n+1}(i_{n+1}\pi_n) = \rho_n \pi_n = \tilde{d}^n f^n,$$

Lo cual termina con la inducción.
(ii) Veamos que el morfismo de cadenas, construido en (i), es único hasta homotopía.
Sea $h : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$ otro morfismo de cadenas, tal que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X^0 \arrow[d, "h^0"] \\
\tilde{M} \arrow[r] & \tilde{X}^0
\end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[dd, "f"] & X^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, "\pi_0"] \arrow[dd, bend right, "f^0"'] \arrow[dd, bend left, "h^0"] & & X^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, "f^1"] & & X^2 \\
& & & \operatorname{Ker}(d^1) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dl, "\varphi_1"] & & \operatorname{Ker}(d^2) \arrow[ur, "i_2"] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{d}^{-1}"'] & \tilde{X}^0 \arrow[rr, "\tilde{d}^0"'] & & \tilde{X}^1 \arrow[rr, "\tilde{d}^1"'] & & \tilde{X}^2
\end{tikzcd}$$

Como $(f^0 - h^0)d^{-1} = f^0 d^{-1} - h^0 d^{-1} = \tilde{d}^0 f - \tilde{d} f$ y $\operatorname{Coker}(d^{-1}) = \operatorname{Ker}(d^1)$, existe un morfismo $\varphi_1 : \operatorname{Ker}(d^1) \to \tilde{X}^0$ tal que $f^0 - h^0 = \varphi_1 \pi_0$. Dado que η es una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda y $\tilde{X}^0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \tilde{X}^0)$ en $i_1 : \operatorname{Ker}(d^1) \to X^1$, obtenemos el siguiente epimorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(i_1, \tilde{X}^0) : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^1, \tilde{X}^0) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{Ker}(d^1), \tilde{X}^0).$$

Por ser $\varphi_1 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{Ker}(d^1), \tilde{X}^0)$, existe $s^1 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^1, \tilde{X}^0)$ tal que $s^1 i_1 = \varphi_1$.
Así, al definir $s^0 : X^0 \to \tilde{M}$ como el morfismo cero, obtenemos

$$\tilde{d}^{-1} s^0 + s^1 d^0 = 0 + s^1(i_1 \pi_0) = (s^1 i_1)\pi_0 = \varphi_1 \pi_0 = f^0 - h^0.$$

Supongamos ahora que hemos construido una familia de morfismos $\{s^k : X^k \to \tilde{X}^{k-1}\}_{k=1}^n$ tales que $f^k - h^k = s^{k+1} d^k + \tilde{d}^{k-1} s^k$, para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dl, bend right, "s^{n-1}"'] \arrow[dd, bend right, "f^{n-1}"'] \arrow[dd, bend left, "h^{n-1}"] & X^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dr, "\pi_n"] \arrow[ddl, bend right, "s^n"'] \arrow[dd, bend right, "f^n"'] \arrow[dd, bend left, "h^n"] & & X^{n+1} \\
& & & \operatorname{Ker}(d^{n+1}) \arrow[ur, "i_{n+1}"] & \\
\tilde{X}^{n-2} \arrow[r, "\tilde{d}^{n-2}"'] & \tilde{X}^{n-1} \arrow[r, "\tilde{d}^{n-1}"'] & \tilde{X}^n \arrow[rr, "\tilde{d}^n"'] & & \tilde{X}^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Observemos que se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
(f^n - h^n - \tilde{d}^{n-1} s^n) d^{n-1} &= (f^n - h^n) d^{n-1} - (\tilde{d}^{n-1} s^n) d^{n-1} \\
&= (f^n - h^n) d^{n-1} - \tilde{d}^{n-1}(f^{n-1} - h^{n-1} - \tilde{d}^{n-2} s^{n-1}) \\
&= (f^n - h^n) d^{n-1} - \tilde{d}^{n-1}(f^{n-1} - h^{n-1}) - \tilde{d}^{n-1}(\tilde{d}^{n-2} s^{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Dado que $d^{n-1} = i_n \pi_{n-1}$, tenemos $(f^n - h^n - \tilde{d}^{n-1} s^n) i_n = 0$, pero $\operatorname{Coker}(i_n) = \operatorname{Ker}(d^{n-1})$. Por lo tanto, existe $\varphi_{n+1} : \operatorname{Ker}(d^{n+1}) \to \tilde{X}^n$ tal que $\varphi_{n+1} \pi_n = f^n - h^n - \tilde{d}^{n-1} s^n$.

Sabemos que η es una $\mathcal{X}$-coresolución propia. Por lo que aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \tilde{X}^n)$, para $i_{n+1} : \mathrm{Ker}(d^{n+1}) \to X^{n+1}$, obtenemos el siguiente epimorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_{n+1}, \tilde{X}^n) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{n+1}, \tilde{X}^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(d^{n+1}), \tilde{X}^n).$$

Dado que $\varphi_{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(d^{n+1}), \tilde{X}^n)$, existe $s^{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{n+1}, \tilde{X}^n)$ tal que $s^{n+1}i_{n+1} = \varphi_{n+1}$. Así

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n &= \tilde{d}^{n-1}s^n + s^{n+1}(i_{n+1}\pi_n) \\ &= \tilde{d}^{n-1}s^n + (\varphi_{n+1})\pi_n \\ &= \tilde{d}^{n-1}s^n + f^n - h^n - \tilde{d}^{n-1}s^n \\ &= f^n - h^n. \end{aligned}$$

De modo que el levantamiento $\bar{f}$ de f es único hasta homotopía. $\square$

Dualizando la Proposición 8.12, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 8.13. *Sean $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}^2$, con $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, y $g : M \to \tilde{M}$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \eta : \cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ \tilde{\eta} : \cdots \arrow[r] & \tilde{X}_2 \arrow[r] & \tilde{X}_1 \arrow[r] & \tilde{X}_0 \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde η es una $\mathcal{X}$-resolución de M, y el renglón inferior $\tilde{\eta}$ es una $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-resolución propia a derecha de $\tilde{M}$. Entonces $g : M \to \tilde{M}$ induce un morfismo de cadenas $\bar{g} : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$

$$\begin{tikzcd} M_\bullet : \cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & 0 \\ \tilde{M}_\bullet : \cdots \arrow[r] & \tilde{X}_2 \arrow[r] & \tilde{X}_1 \arrow[r] & \tilde{X}_0 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

con la propiedad de que el siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[d, "g"] \\ \tilde{X}_0 \arrow[r] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, el morfismo de cadena inducido $\bar{g} : M_\bullet \to \tilde{M}_\bullet$ está unívocamente determinado salvo homotopías.

Para enunciar el siguiente resultado, necesitamos la construcción de un objeto especial, denominado el cono de un morfismo. Para mayores detalles sugerimos [26, Sección 2.4].

Definición 8.14. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Consideremos los complejos $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D} \in Ch(\mathcal{A})$ y $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ un morfismo de complejos, a saber;*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C}: \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d^C_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d^C_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d^C_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \\ \boldsymbol{D}: \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d^D_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "d^D_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "d^D_{n-1}"] & D_{n-2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Entonces, ***el cono de*** *f es el complejo denotado por $C(f)$, tal que $C(f)_n := D_n \oplus C_{n-1}$ y donde $d_n^{C(f)} := \begin{pmatrix} d_n^D & f_{n-1} \\ 0 & -d_{n-1}^C \end{pmatrix}$.*

Siguiendo la Definición anterior, también necesitaremos la siguiente Proposición (ver [26, Proposición 2.4.2 y Definición 1.1.6] para mayores detalles).

Proposición 8.15. *Un morfismo $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ en $Ch(\mathcal{A})$ es un casi-isomorfismo si, y sólo si, $C(f)$ es un complejo acíclico.*

El resultado que sigue es una extensión del presentado por Z. Huang en [52, Teorema 1.2 y Teorema 1.3], cuya idea principal tiene lugar en la prueba de [47, Teorema 2.5]. Enunciamos esto como sigue.

Teorema 8.16. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, con $\mathcal{X}$ cerrado por coproductos finitos, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta donde M y M'' admiten una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda. Entonces, M' admite una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos las siguientes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-coresoluciónes propias a izquierda

$$\eta : 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to X^2 \to \cdots, \quad \text{y} \quad \eta'' : 0 \to M'' \to X''^0 \to X''^1 \to X''^2 \to \cdots.$$

Del morfismo $M \to M''$, y por la Proposición 8.12, obtenemos un morfismo de cadenas $\eta \to \eta''$. Denotemos por $\mathbf{C}$ al cono del morfismo $\eta \to \eta''$. Dado que η y η'' son complejos acíclicos, tenemos que el morfismo $\eta \to \eta''$ es un casi-ismomorfismo; y usando la Proposición 8.15, tenemos que $\mathbf{C}$ es un complejo acíclico. Ahora, para $Y \in \mathcal{Y}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{C}, Y)$ es isomorfo (en realidad a un corrimiento) al cono del morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta'', Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$, el cual es un casi-isomorfismo, ya que tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta'', Y)$ como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, Y)$ son acíclicos para todo $Y \in \mathcal{Y}$; así $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{C}, Y)$ es también acíclico para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Observemos que tenemos la siguiente sucesión exacta de complejos

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & X''^0 \oplus X^1 \arrow[u] \arrow[r, equal] & X''^0 \oplus X^1 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^0 \arrow[u] \arrow[r] & M'' \oplus X^0 \arrow[u] \arrow[r] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & M'' \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \eta' \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathbf{D} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aseguramos que la primera columna, es decir η', es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda de M'. Como $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son exactos, la sucesión larga para complejos [52, Sección 2.3] muestra que η' es exacta también. Como $\mathcal{X}$ es cerrado bajo co-productos finitos se sigue que η' es una $\mathcal{X}$-coresolución de M'. Para ver que es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda, tomemos $Y \in \mathcal{Y}$ y apliquemos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$ al diagrama anterior, para obtener una sucesión exacta de complejos

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{D},Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{C},Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta,Y) \to 0,$$

cuya exactitud se debe a lo siguiente. Para el primer renglón

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'',Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M',Y) \to 0,$$

la exactitud se cumple ya que, por hipótesis, M'' admite una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda, de modo que usando el Lema 8.9 (b), obtenemos que $M'' \in {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$; mientras que para el resto de los renglones, la exactitud es clara. Como ya hemos mencionado, el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{C},Y)$ es exacto y evidentemente $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{D},Y)$ lo es también. Usando nuevamente la sucesión larga para complejos, podemos ver que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta',Y)$ es un complejo exacto también. De donde η es una $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-coresolución propia a izquierda para M'. □

Observación 8.17. *Como se puede notar, del Teorema 6.32, al tomar el par $(\omega,\mathcal{Y})$ y aplicar el Teorema 8.16, obtenemos que la clase $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos, mientras que del Lema de la Herradura (Lema 8.11) se obtiene que $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$ es cerrada bajo extensiones. Aunque se tiene básicamente el mismo resultado, es importante señalar que se han obtenido a partir de otras técnicas, muy distintas a las usadas en la prueba del Teorema 6.32.*

8.3. El funtor Ext-derivado Gorenstein.

En esta sección, presentamos el **funtor Gorenstein derivado**. Hacemos esto, basándonos en [48], aunque seguiremos el estilo de [55, Sección 5], de acuerdo a nuestra terminología y notación.

Para un par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, consideremos a la clase $\mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$ consistente de los objetos $M \in \mathcal{A}$ que poseen una $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-resolución propia a derecha [1] digamos $X_\bullet(M) \to M$. Usando éste complejo, podemos definir de la manera usual (para mas detalles vea [60, Capitulo VII, Sección 7]), el funtor derivado $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(-,N') : \mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) \to \mathrm{Ab}$, [2] para cada $N' \in \mathcal{A}$ fijo. De manera dual, definimos a la clase $\mathrm{CoresL}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$ que consiste de los objetos $N \in \mathcal{A}$ que poseen una $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-coresolución propia a izquierda, digamos $N \to X^\bullet(N)$, mediante el cual podemos definir el funtor derivado $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M',-) : \mathrm{CoresL}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) \to \mathrm{Ab}$, para cada $M' \in \mathcal{A}$ fijo. La intensión principal, en lo que sigue, es la de definir un funtor

$$\mathrm{GExt}^n_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(-,-) : \mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) \times \mathrm{CoresL}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}) \to \mathrm{Ab},$$

para lo cual usamos el criterio dado por H. Holm en [48, Teorema 2.6]. Escribimos a continuación la versión de éste criterio, que se adapta a nuestra terminología y notación. Cabe mencionar que éste también aparece en [55, Teorema 5.4].

Teorema 8.18. *[48, Teorema 2.6] Sean $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ clases de objetos en la categoría abeliana $\mathcal{A}$, que satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Cualquier $M \in \tilde{\mathcal{F}}$ admite una $\mathcal{F}$-resolución propia a derecha $\eta_M = F_\bullet(M) \to M$, que también es una $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-resolución propia a izquierda, es decir, tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta_M, G)$ es acíclico, para todo $G \in \mathcal{G}$.*

(b) *Cualquier $N \in \tilde{\mathcal{G}}$ admite una $\mathcal{G}$-coresolución propia a izquierda $\theta_N = N \to G^\bullet(N)$, que también es una $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-coresolución propia a derecha, es decir, tal que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F, \theta_N)$ es acíclico, para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Entonces, para todo $i \geq 1$, tenemos el siguiente isomorfismo funtorial

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{G}}(M,N,)$$

para todo $M \in \tilde{\mathcal{F}}$ y $N \in \tilde{\mathcal{G}}$.

Basados en éste resultado, dado un par $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$, es suficiente mostrar que se satisfacen las condiciones (a) y (b) para las clases $\tilde{\mathcal{F}} := \mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$ y $\tilde{G} := \mathrm{CoresL}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$, y así poder hablar del funtor $\mathrm{GExt}^n_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Advierta el lector que hasta el momento no hemos

[1] en el sentido de la Definición 8.5 y Definición 8.7

[2] donde Ab denota a la categoría de grupos abelianos

impuesto condiciones sobre el par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. En lo que sigue, veremos cuales son las condiciones suficientes sobre el par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ para que las clases $\mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$ y $\mathrm{CoresL}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$ sean no vacías y tengan las propiedades que hagan posible cumplir las condiciones (a) y (b) del Teorema 8.18. Empezamos analizando las condiciones sobre el par $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ con la siguiente observación

Observación 8.19. *Sean $(\mathcal{X},\mathcal{Y})\subseteq\mathcal{A}^2$, con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})=0$. Entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) *Para todo $L\in\mathcal{A}$ se cumple que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(L)\leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$.

(b) *Para todo $L\in\mathcal{A}$ se cumple que* $\mathrm{pd}_{W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(L)\leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$.

Demostración. (a) Sean $L\in\mathcal{A}$ y $G\in\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Probaremos que $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(L,G)=0$ para todo $j>\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$. Procederemos por inducción sobre $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$. Si $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)=\infty$, el enunciado se cumple trivialmente. Supongamos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)<\infty$. Si $L\in\mathcal{X}$, por el dual del Corolario 6.17 (b), se cumple que $\mathcal{X}^{\perp}\supseteq\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por lo que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L,G)=0$ para todo $i>0$.
Supongamos ahora que $m:=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)>0$ y que para todo $K\in\mathcal{X}^{\wedge}$, con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K)<m$, se cumple que $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(K,G)=0$ para todo $j\geq m$. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0\to X_m\to\cdots\to X_1\to X_0\to L\to 0,\ \text{con } X_i\in\mathcal{X},$$

que se descompone en sucesiones exactas cortas. De las cuales, en particular, $\lambda: 0\to K_0\to X_0\to L\to 0$ cumple que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_0)<m$. Apliquemos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,G)$ a la sucesión exacta λ, para obtener

$$0=\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(X_0,G)\to\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(K_0,G)\to\mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathcal{A}}(L,G)\to\mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathcal{A}}(X_0,G)=0,$$

donde los extremos son cero para todo $j>0$, pues $\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\subseteq\mathcal{X}^{\perp}$. Así que $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(K_0,G)\cong\mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathcal{A}}(L,G)$ para todo $j>0$. En particular

$$0=\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(K_0,G)\cong\mathrm{Ext}^{j+1}_{\mathcal{A}}(L,G)\ \text{para todo } j\geq m>\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_0).$$

Por lo tanto $\mathrm{Ext}^{j'}_{\mathcal{A}}(L,G)=0$ para todo $j':=j+1>m=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$.
(b) Se sigue del inciso (a) y el dual de la Proposición 6.16 (a). □

Tenemos aquí otro interesante resultado.

Proposición 8.20. *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{Y})\subseteq\mathcal{A}^2$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})=0$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^{\wedge},\mathcal{Y})=0$. Entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}^{\wedge}}(\mathcal{Y})=0$.*

Demostración. En efecto, sea $M \in \mathcal{X}^\wedge$. Procederemos por inducción sobre $n := \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$. Si $n = 0$ es inmediato, pues $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Supongamos que $n > 0$ y que, para todo $N \in \mathcal{X}^\wedge$ con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(N) < n$, se cumple que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(N, Y) = 0$, para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y $i > 0$. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0 \ \text{ con } \ X_i \in \mathcal{X},$$

de la cual tomamos la sucesión exacta corta $\eta : 0 \to K \to X_0 \to M \to 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ a η, con $Y \in \mathcal{Y}$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X_0, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K, Y) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(M, Y) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X_0, Y), \forall\, i > 0.$$

Donde los extremos son cero ya que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Dado que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K) < n$, obtenemos por hipótesis de inducción $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K, Y) = 0$ para todo $i > 0$, por lo tanto $\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(M, Y) = 0$ para todo $i > 0$. Dado que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}) = 0$, obtenemos $M \in {}^{\perp_\infty}\mathcal{Y}$, lo cual implica que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}^\wedge}(\mathcal{Y}) = 0$. $\square$

Aquí es donde empiezan a aparecer los objetos Gorenstein relativos. Para el resultado que sigue, tenemos la condición $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}) = 0$, que en la teoría de módulos Gorenstein sobre un anillo general R, corresponde (sobre la clase de módulos Gorenstein inyectivos como es el caso) a la condición $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Inj}(R)^\wedge, \mathrm{Inj}(R)) = 0$, la cual resulta siempre cierta, puesto que $\mathrm{Mod}(R) = {}^{\perp}\mathrm{Inj}(R)$. Veremos mas adelante, como tal condición tiene una gran importancia en los objetos Gorenstein relativos.

Proposición 8.21. *Sean* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ *tal que* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. *Si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}) = 0$. *Entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

(a) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G) = 0$ *para todo* $L \in \mathcal{X}^\wedge$, $G \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$, $i > 0$.

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G) = 0$ *para todo* $L \in \mathcal{X}^\wedge$, $G \in W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathcal{A})$, $i > 0$.

Demostración. (a) Sean $L \in \mathcal{X}^\wedge$ y $G \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Sabemos que existe un complejo acíclico

$$\gamma : \cdots \to Y_1 \to Y_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots,$$

con $Y_t, Y^t \in \mathcal{Y}$, para todo $t \geq 0$, tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \eta)$ es acíclico, para todo $X \in \mathcal{X}$, con $\mathrm{Ker}(Y^0 \to Y^1) \cong G$. La cual se descompone en sucesiones exactas cortas $\gamma_t : 0 \to G_{t+1} \to Y_t \to G_t \to 0$ (donde $G_0 = G$) para $t \geq 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, -)$ a γ_t obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, Y_t) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G_t) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, G_{t+1}) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, Y_t),$$

para todo $i > 0$ y $t \geq 0$. Por la Proposición 8.20, se tiene que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, Y_t) = 0 = \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, Y_t), \ \text{para todo } i > 0 \text{ y } t \geq 0.$$

Lo anterior implica que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G_t) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(L, G_{t+1})$, para todo $i > 0$ y $t \geq 0$. Así, para $t = 0$ y de manera recursiva obtenemos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G_0) \cong \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(L, G_j), \text{ para todo } j, i > 0.$$

Usando la Observación 8.19 (a), sabemos que $\mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(L, G_j) = 0$ para todo $i+j > \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$. Por lo que obtenemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(L, G_0) = 0$ para todo $i > 0$.
(b) Se sigue de la demostración del inciso (a), solamente usando la Observación 8.19 en su inciso (b) en lugar del inciso (a). □

Estamos casi listos para alcanzar el resultado principal, pero antes necesitamos la siguiente Proposición.

Proposición 8.22. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ un par GP-admisible, con $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}) = 0$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, \omega) = 0$, para todo $i > 0$.*

Demostración. Tomemos $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $W \in \omega$. Sea $0 \to \tilde{W}_0 \to G_0 \to M \to 0$ la sucesión exacta corta proporcionada por el Teorema 7.1 (a), es decir, con $G_0 \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $\tilde{W}_0 \in \mathcal{GP}^\perp_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ tal que $\mathrm{resdim}_\omega(\tilde{W}_0) \leq \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) - 1$.
Por el Corolario 6.28, sabemos que ω es un cogenerador relativo en $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Por lo que existe una sucesión exacta $0 \to G_0 \to L \to G'_0 \to 0$, con $L \in \omega$ y $G'_0 \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Del Lema de la Serpiente, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{W}_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{W}_0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G'_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G'_0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Tengamos en cuenta varias cosas: Primero observemos que

$$\mathrm{resdim}_\omega(P) \leq \mathrm{resdim}_\omega(\tilde{W}_0) + 1 \leq \mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) < \infty,$$

pues $L \in \omega$, es decir, $P \in \omega^\wedge$. Mas aun, dado que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$, obtenemos que $P \in \mathcal{X}^\wedge$.
Por otro lado, notemos que $\omega \subseteq \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, pues la hipótesis de que $\mathcal{Y}$ sea cerrado por coproductos finitos implica que $0 \in \mathcal{Y}$.

Ahora, para el $W \in \omega$ del inicio, aplicamos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, W)$ a la sucesión exacta $0 \to M \to P \to G'_0 \to 0$ para obtener la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(P, W) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, W) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(G'_0, W) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(P, W) \text{ con } i \geq 1,$$

donde los extremos son cero para todo $i > 0$, por la Proposición 8.21, ya que $P \in \mathcal{X}^\wedge$ y $W \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De donde obtenemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, W) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(G'_0, W)$ para todo $i \geq 1$. Finalmente observemos que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(G'_0, W) = 0$ pues $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq {}^\perp\omega$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, W) = 0$, para todo $i > 0$. □

Para el siguiente resultado, necesitamos antes recordar algunos hechos referentes a objetos Gorenstein relativos. Consideremos un par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ GP-admisible. Puesto que $\mathcal{X}$ es cerrado por coproductos finitos, sabemos que $0 \in \mathcal{X}$; y de este modo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. Luego, se sigue que $\mathcal{X}^\wedge \subseteq \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, lo cual garantiza que la clase $\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ es no vacía. Basados en esto y usando el Teorema 7.1 repetidamente, podemos ver que para todo $C \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ se tiene una resolución finita $C_\bullet : 0 \to G_t \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to C \to 0$, por objetos Gorenstein proyectivos G_i $\forall i \in \{0, 1, \ldots, t\}$, la cual se compone por sucesiones exactas cortas $0 \to K_i \to G_i \to K_{i-1} \to 0$ para $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$, donde $K_t := G_t$ y $K_{-1} := C$, con la propiedad de que cada núcleo $K_i \in \mathcal{GP}^\perp_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, t\}$. Esta última propiedad implica, por el dual del Lema 6.12, que el complejo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, C_\bullet)$ es acíclico para todo $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. De aquí se desprende que $\mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \subseteq \mathrm{ResR}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$. Mas aun, toma sentido el siguiente resultado, el cual es una generalización de [48, Lema 3.4].

Proposición 8.23. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ un par GP-admisible tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{Y}) = 0$. Consideremos $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y para $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ sea $M_\bullet : \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$ la $\mathcal{GP}$-resolución propia a derecha de M (i.e. tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, M_\bullet)$ es acíclico para todo $G \in \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$). Entonces $M_\bullet$ también es una $(\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}, W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)})$-resolución propia a izquierda de M (esto es, que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_\bullet, H)$ es acíclico para todo $H \in W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$).*

Demostración. Como $M_\bullet$ se descompone en sucesiones exactas cortas. Es suficiente mostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta, H)$ es exacta para todo $H \in W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$ y para toda sucesión exacta corta $\eta : 0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} M \to 0$, donde $G \to M$ es una $\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-precubierta de $M \in \mathcal{GP}^\wedge_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ con $\mathrm{resdim}_\omega(K) < \infty$.

Necesitamos probar la exactitud de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, H) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, H) \to 0$. Para esto, sea $\alpha : K \to H$. Deseamos hallar $\rho : G \to H$ tal que $\rho i = \alpha$. Sabemos que existe una sucesión exacta $\gamma : 0 \to H' \to E \xrightarrow{g} H \to 0$, donde $E \in \omega$ y $H' \in W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, -)$ a γ obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, E) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, H) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K, H') = 0,$$

donde $K \in \omega^\wedge \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ y $H' \in W\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\omega)}$. Así, dado que el par $(\mathcal{X}, \omega)$ cumple las condiciones de la Proposición 8.21 concluimos que el último término es cero. Por lo tanto, existe $\epsilon : K \to E$ tal que $g\epsilon = \alpha$. Luego, aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, E)$ a γ obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, E) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, E),$$

donde el último término es cero por la Proposición 8.22, pues $M \in \mathcal{GP}^{\wedge}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y $E \in \omega$. Por lo que existe $\tilde{\epsilon} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, E)$ tal que $\tilde{\epsilon} i = \epsilon$. Ahora observemos que tenemos la siguiente cadena de igualdades $(g\tilde{\epsilon})i = g(\tilde{\epsilon} i) = g\epsilon = \alpha$, así $\rho := g\tilde{\epsilon} : G \to H$ es el morfismo buscado. $\square$

Enunciamos aquí la versión dual del resultado anterior.

Proposición 8.24. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ un par GI-admisible tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\vee}) = 0$. Consideremos $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Para $M \in \mathcal{GI}^{\vee}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ sea $M^{\bullet} : 0 \to M \to G^0 \to G^1 \to \cdots$ la $\mathcal{GI}$-coresolución propia a izquierda de M (i.e. tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M^{\bullet}, G)$ es acíclico para todo $G \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$). Entonces $M^{\bullet}$ es también una $(W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}, \mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})})$-coresolución propia a derecha (esto es, que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H, M^{\bullet})$ es acíclico para todo $H \in W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})}$).*

Para el siguiente resultado usamos fuertemente el Teorema 6.35 (así como su dual), a saber, que para un par GP-admisible $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\omega := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ se da la igualdad $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Teorema 8.25. *Consideremos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}^2$ un par GI-admisible y GP-admisible, tal que*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\vee}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^{\wedge}, \mathcal{Y}).$$

Entonces, para todos $M, N \in \mathcal{A}$ con $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) < \infty$ y $\mathrm{Gid}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(N) < \infty$, tenemos el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{GP}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{GI}}(M, N),$$

el cual es funtorial en ambas variables.

Demostración. Podemos ver que a partir de la igualdad $W\mathcal{GP}_{(\omega,\mathcal{Y})} = \mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ y su dual, las condiciones del Teorema 8.18, se satisfacen gracias a la Proposición 8.23 y la Proposición 8.24. $\square$

Por el resultado anterior toma sentido la siguiente definición.

Definición 8.26. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par GP-admisible y GI-admisible tal que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\vee}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^{\wedge}, \mathcal{Y})$ y $M, N \in \mathcal{A}$ con $\mathrm{Gpd}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M) < \infty$ y $\mathrm{Gid}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(N) < \infty$. Entonces escribimos*

$$\mathrm{GExt}^n_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(M, N) := \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{GP}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{GI}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}}(M, N).$$

Para el isomorfismo que se obtiene en el Teorema 8.25.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag, 1973.

[2] M. Auslander, *Anneaux de Gorenstein, et Torsion en Algebre Commutative*, Séeminaire d Algebre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67. Texte rédigé, dáprés des expos és de Maurice Auslander, par Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro. Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles, Secrétariat Mathématique, Paris, France, 1976, http://www.numdam.org/ .

[3] M. Auslander, M. Bridger. *Stable module theory.* Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1969).

[4] L. Angeleri Huğel. *An introduction to Auslander-Reiten Theory.* Lecture Notes. Advanced School on Representation Theory and related Topics. ICTP Trieste, January 2006.

[5] L. Angeleri Huğel, F. U. Coelho. *Infinitely generated tilting modules of finte projective dimension.* Forum Maht. 13, 239-250, (2001).

[6] L. Angeleri-Hügel and O. Mendoza. *Homological dimensions in cotorsion pairs*. Illinois Journal of Mathematics, 53(1):251-263, 2009.

[7] M. Auslander, R.O. Buchweitz. *The Homological Theory of Maximal Cohen-Macaulay Approximations*. Societe Mathematique de France. Memoire 38 (1989) 5-37.

[8] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math. 86 (1991), 111-152.

[9] H. Bass *On the ubiquity of Gorenstein rings.* Math. Z. 82, 8-28 (1963).

[10] V. Becerril, O. Mendoza, M. A. Pérez, V. Santiago. *Frobenius pairs in abelian categories.* Journal of Homotopy and Related Structures. (2018). https://doi.org/10.1007/s40062-018-0208-4.

[11] L. Bican, R. El Bashir, and E. E. Enochs. *All modules have flat covers.* Bulletin of the London Mathematical Society, 33:385-390, 2001.

[12] D. Bennis, *Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions.* Commun. Algebra 37(3), 855-868 (2009).

[13] Driss Bennis, J. R. García Rozas and Luis Oyonarte *Relative Gorenstein Dimensions.* Mediterr. J. Math. DOI 10.1007/s00009-014-0489-8, 2014.

[14] Driss Bennis, Khalid Ouarghi. *$\mathcal{X}$-Gorenstein projective modules.* International Math. Forum, 5, num. 10, 487-491, 2010.

[15] D. Bravo, J. Gillespie, and M. Hovey. *The Stable Module Category of a General Ring.* Preprint. arXiv:1405.5768, 2014.

[16] A. Beligiannis. *The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories, and (co-)stabilization. Comm. Algebra.*, 28(10):4547-4596, 2000.

[17] A. Beligiannis and I. Reiten. *Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories*, volume 883 of Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2007.

[18] T. Bühler. *Exact categories.* Expositiones Mathematicae, 28:1-69, 2010.

[19] S. Brener, M. Butler. *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflections funtors.* Proc. of ICRA II Springer Lecture Notes in Mathematics 832, 103-169, (1980).

[20] U. Chase. *Direct Products of Modules.* Transaction of the AMS, 97(3), 457-473, (1960).

[21] H. Cheng, X. Zhu, *Gorenstein Projective Objects in Abelian Categories*, Bulluetin of the Iranian Mathematical Society, Vol 39 No. 6 (2013), pp 1079-1097.

[22] L. W. Christensen. *Gorenstein Dimensions.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1747, Springer-Verlag, Berlin (2000).

[23] E. Enochs. *Injective and Flat Covers, Envelopes and Resolvents.* Israel Journal of Mathematics. Vol 39, No. 3. 1981.

[24] E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Z. 220 (1995), no. 4, 611-633.

[25] E. Enochs, O.M.G. Jenda. *Relative Homological Algebra.* De Gruyter, Berlin.(2001).

[26] E. Enochs, O.M.G. Jenda. *Relative Homological Algebra, Volume 2.* De Gruyter, Berlin.(2011).

[27] S. Estrada, A. Iacob, M. A. Pérez, *Model structures and relative Gorenstein flat modules.* Preprint. arXiv:1709.00658 (2017).

[28] S. Eilenberg and John C. Moore. *Fundations of relative homological algebra. Mem. Am. Math. Soc.,* 55:39 p., 1965.

[29] P. Eklof, J. Trlifaj. *How to make Ext vanish*. Bull. London Math. Soc. 33 (2001) 41-51.

[30] D.J. Fieldhouse, *Character modules, dimension and purity.* Glasg. Math. J. 13,144-146(1972).

[31] H. B. Foxby, *Isomorphisms between complexes with applications to the homological theory of modules.* Math. Scand. 40(1), 5-19 (1977).

[32] S. I. Gelfand, Y. I. Manin. *Methods of Homological Algebra.* Springer Monographs in Mathematics, 2nd ed. (2003).

[33] Yuxian Geng, Nanqing Ding. *$\mathcal{W}$-Gorenstein modules.* Journal of Algebra, 325 (2011) 132-146.

[34] J. Gillespie, *Duality pairs and stable module categories.* Preprint. arXiv:1710.09906 (2017).

[35] J. Gillespie. *Model structures on modules over Ding-Chen rings*. Homology, Homotopy Appl. 12(19), 61-73, (2010).

[36] J. Gillespie. *Model structures on exact categories*. Journal of Pure and Applied Algebra, 215(12):2892-2902, 2011.

[37] J. Gillespie. *How to construct a Hovey triple from two cotorsion pairs*. Fund. Math., 230(3):281-289, 2015.

[38] J. Gillespie,*The flat stable module category of acoherent ring.* J.Pure Appl. Algebra 221(8), 2025- 2031 (2017).

[39] J. Gillespie, M. Hovey,*Gorenstein model structures and generalized derived categories.* Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 53(3), 675-696 (2010).

[40] R. Göbel, J. Trlifaj. *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*. Editorial Walter de Gruyter. (2006).

[41] A. Grothendieck *Sur quelques points dálgèbre homologique*, Tôhoku Mathematical Journal, Volume 9, Number 2 (1957), 119-221, MR 0102537, doi:10.2748/tmj/1178244839.

[42] D. Happel. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras*, volume 119 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge,1988.

[43] D. Happel, C. M. Ringel. *Tilted algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 274, 399-443, (1982).

[44] M. Hashimoto. *Auslander-Buchweitz Approximations of Equivariant Modules*, volume 282 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2000.

[45] H. Holm and P. Jørgensen. *Cover, precovers, and purity.* Illinois Journal of Mathe- matics, 52(2):691-703, 2008

[46] H. Holm, P. Jørgensen *Cotorsion pairs induced by duality pairs.* J. Commut. Algebra 1(4), 621-633 (2009).

[47] H. Holm. *Gorenstein Homological dimensions.* Journal of Pure and Applied Algebra 189, 167-193 (2004).

[48] H. Holm. *Gorenstein derived functors.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 132, Number 7, 1913-1923.

[49] H. Holm. *The structure of balanced big Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. Glas. Math. J.*, In press, 2016.

[50] M. Hovey. *Model Categories*, volume 63 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI (1999).

[51] M. Hovey. *Cotorsion pairs, model category structures and representation theory.* Mathematical Zeitschrift, 241:553-592, 2002.

[52] Zhaoyong Huang. *Proper resolutions and Gorenstein categories.* Journal of Algebra, 393 (2013) 142-169.

[53] H. Krause. *Krull-Schmidt categories and projective covers.* Expositiones Mathemati- cae, 33:535-549, 2015.

[54] H. Krause and Ø. Solberg. *Applications of cotorsion pairs. J. London Math. Soc.* (2), 68(3):631-650, 2003.

[55] Marcelo Lanzilotta, Octavio Mendoza. *Relative Igusa-Todorov Functions and Relative Homological Dimensions*, Algebras and Representation Theory, (2017) 20:765-802.

[56] L. Angeleri-Hügel, D. Happel, and H. Krause, editors. *Handbook of Tilting Theory*, volume 332 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2007.

[57] E. N. Marcos, O. Mendoza, C. Sáenz and V. Santiago. *Wide subcategories of finitely generated* Λ*-modules. J. Algebra Appl.*, 17(5), 2018.

[58] H. Matsumura, *Commutative ring theory.*Volume 8 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition (1989). Translated from the Japanese by M. Reid.

[59] O. Mendoza, C. Sáenz. *Tilting Categories with applications to Stratifying Systems*. Journal of algebra. 302(2006)419-449.

[60] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, Inc. 1965.

[61] Y. Miyashita. *Tilting modules of finite projective dimension.* Math. Z. 193, 113-146, (1986).

[62] D. Murfet, S. Salarian *Totally acyclic complexes over noetherian schemes.* Adv. Math. 226(2),1096- 1133 (2011).

[63] D. G. Quillen. *Homotopical Algebra*, volume 43 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1967.

[64] D. G. Quillen. *Higher K-Theory. I.* pages 85-147. Lecture Notes in Math., Vol.341, 1973.

[65] F. Meng, Q. Pan. *$\mathcal{X}$-Gorenstein projective and $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective modules. Hacettepe J. of Math. and Stat.* 40 (4), 537-554, (2011)

[66] Qunxin Pan, Faqun Cai. *$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-Gorenstein projective and injective modules*, Turkish Journal of Mathematics, 2015, 39: 81-90.

[67] J. R. Garcia Rozas. *Covers and envelopes in the category of complexes of modules*. Chapman and Hall/CRC, London. (1999).

[68] M. A. Pérez Bullones. *Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions*. Champan and Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, 2016.

[69] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules.* Academic Press, 1973.

[70] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, Second Edition, 2009.

[71] L. Salce. *Cotorsion theories for abelian groups*. Symposia Math.XXIII(1979) 11-32.

[72] S. Sather-Wagstaff, T. Sharif, D. White, *Stability of Gorenstein categories.* J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 77(2), 481-502 (2008).

[73] D. Sieg *A Homological Approach to the splitting Theory of PLS-spaces*. PhD thesis, Universität Trier, Universitätsring 15, 54296 Trier, 2010.

[74] B. Stenström, *Coherent rings and FP-injective modules.* J. Lond. Math. Soc. 2(2), 323-329 (1970).

[75] Mohammed Tamekkante. *$\mathcal{X}$-Gorenstein projective modules.* International Scholarly Reserch Network, ISNR Algebra Volume 2011, Article ID 270814, 10 pages, doi: 10.5402/2011/270814.

[76] J.-L. Verdier. *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes.* Paris: Société Mathématique de France, 1996.

[77] J. Wang. *Ding projective dimension of Gorenstein flat modules.* Bull. Korean Math. Soc. vol. 54, isue 6, 1935-1950, (2017). https://doi.org/10.4134/BKMS.b160547.

[78] J. Wei. *Finitistic Dimension and Restricted Flat Dimension.* Journal of algebra Volume 320, Issue 1 (2008) Pages 116-127.

[79] Aimin Xu. *Gorenstein Modules and Gorenstein Model Structures.* Glasgow Mathematical Journal. 2017, 1-19.

[80] C. H. Yang. *Strongly Gorenstein flat and Gorenstein FP-injective modules. Turk. J. Math.* 37, 218-230, (2013).

[81] T. Zhao. *$\mathcal{DP}$-projective modules and dimensions. International Electronic Journal of Algebra*, 15, 101-116, (2014).

[82] P. Zhang, *A brief introduction to Gorenstein projective modules.* www.math.uni-bielefeld.de/sek/sem/ abs/zhangpu4.pdf