



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

**Simulación numérica de una columna hueca de concreto
reforzado sujeta a carga lateral**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Ingeniero Civil

PRESENTA

Luis Alberto Juárez Fabián

Asesor: Dr. Marcos Mauricio Chávez Cano

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México

Octubre, 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A la *Universidad Nacional Autónoma de México*, por permitirme ser parte de su comunidad estudiantil desde la preparatoria.

A mis profesores y compañeros de la *Facultad de Estudios Superiores Acatlán*, por compartir sus experiencias y conocimientos.

Al *Instituto de Ingeniería*, por las facilidades técnicas y económicas proporcionadas para la realización de esta tesis.

Al *Dr. Marcos Chávez*, por su guía durante el desarrollo de la tesis y por el tiempo invertido en la revisión del trabajo escrito.

A cada una de las personas que me alentaron durante mis estudios, especialmente a mis padres por su apoyo incondicional.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Objetivo general.....	3
2 ANTECEDENTES	4
2.1 Comportamiento mecánico de los materiales	4
2.1.1 Resistencia del concreto bajo esfuerzos uniaxiales	4
2.1.2 Superficie de falla del concreto bajo esfuerzos combinados	5
2.1.3 Resistencia y ductilidad del concreto confinado por barras de refuerzo.....	7
2.1.4 Resistencia y comportamiento del acero de refuerzo	9
2.2 Resistencia y ductilidad de elementos sujetos a flexión y compresión	10
2.2.1 Hipótesis básicas	10
2.2.2 Planteamiento del equilibrio interno.....	10
2.2.3 Diagramas momento curvatura.....	11
2.2.4 Método de las fibras.....	12
2.2.5 Cálculo de las deformaciones por flexión	14
2.3 Estudio experimental de una columna hueca de concreto reforzado.....	15
2.3.1 Descripción del programa experimental	16
2.3.2 Propiedades mecánicas de los materiales	17
2.3.3 Dispositivos para la aplicación de las cargas	18
2.3.4 Resultados experimentales.....	18
3 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL POR EL MÉTODO DE LAS FIBRAS	21
3.1 Modelos constitutivos.....	21
3.2 Discretización de la sección transversal	23
3.3 Diagrama momento - curvatura	24
3.4 Diagrama de interacción	25
3.5 Respuesta carga – desplazamiento.....	25

4 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UNA COLUMNA HUECA DE CONCRETO	
REFORZADO.....	28
4.1 Generalidades del MEF	28
4.2 Modelación del concreto reforzado	29
4.3 Descripción del modelo numérico	30
4.3.1 Tipos de elementos	30
4.3.2 Modelos constitutivos de los materiales.....	31
4.3.3 Geometría y mallado	36
4.3.4 Condiciones de frontera	37
4.4 Proceso numérico de solución.....	38
4.4.1 Método Newton-Raphson.....	39
4.4.2 Criterios de convergencia.....	39
5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	41
5.1 Respuesta bajo cargas verticales	41
5.1.1 Peso propio	41
5.1.2 Carga axial	42
5.3 Respuesta bajo flexocompresión	43
5.3.1 Primer agrietamiento	43
5.3.2 Comportamiento posterior al primer agrietamiento	45
5.3.3 Fluencia del refuerzo longitudinal.....	47
5.3.4 Resistencia última	49
5.3.5 Comportamiento de las deformaciones en la sección crítica	51
5.4 Comparación de los resultados teóricos con experimentales	52
5.4.1 Diagrama momento-curvatura.....	52
5.4.2 Desplazamiento lateral.....	53
6 CONCLUSIONES.....	55
REFERENCIAS.....	58
APÉNDICE: OBTENCIÓN DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL	
CONCRETO CONFINADO	60
A.1 Estudio del confinamiento efectivo en núcleos de concreto con estribos rectangulares	60
A.2 Análisis del confinamiento efectivo en la sección del espécimen de prueba.....	62

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis numérico de una columna hueca de concreto reforzado bajo una carga lateral creciente. Las características del modelo numérico corresponden a las de uno de los especímenes que fueron ensayados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM (IIUNAM), como parte de un estudio experimental que fue realizado para determinar la capacidad de resistencia y deformación lateral de columnas típicas huecas de concreto presforzado con diferentes cuantías de acero de refuerzo y de presfuerzo, empleadas en viaductos elevados de la Ciudad de México. La columna modelada corresponde a la que cuenta únicamente con acero de refuerzo convencional.

Para simular analíticamente la respuesta del espécimen de prueba ante cargas laterales, se emplearon modelos constitutivos no lineales que representan el comportamiento mecánico de sus materiales. En la primera parte de este trabajo, se analiza la sección transversal de la columna mediante el método de las fibras utilizando las hipótesis básicas para obtener la resistencia de elementos sujetos a flexocompresión. Posteriormente, se describe el procedimiento para realizar el modelo numérico empleando el método de elementos finitos, así como las consideraciones empleadas para desarrollar la simulación en un programa de análisis no lineal.

Comparando los resultados de los modelos numéricos con la envolvente de los lazos de histéresis reportados en el estudio experimental, se observó una aproximación aceptable, principalmente, en resistencia y rigidez. Además, el agrietamiento del modelo numérico muestra buena correlación con el agrietamiento final del espécimen de prueba. Sin embargo, cuando se alcanza la resistencia a compresión de los elementos que conforman el recubrimiento de la columna, aun cuando se deshabilita la capacidad de estos elementos para aplastarse, se presentan problemas de convergencia en el método de solución del análisis no lineal, y por consiguiente, no se alcanza la resistencia última ni la ductilidad experimental.

ABSTRACT

This paper presents the results of the numerical simulation of a hollow column of typical reinforced concrete used in the construction of elevated viaducts in Mexico City. The characteristics of this column correspond to those of one of the specimens that were tested in the Institute of Engineering of the UNAM (IIUNAM), as part of a study that was carried out to determine the resistance and lateral deformation capacity of typical hollow columns of reinforced concrete with different ratios of conventional reinforcing steel and prestressing steel, used in elevated viaducts. The modeled column corresponds to the one that only has conventional reinforcing steel.

In the numerical simulation non-linear constitutive models were used to reproduce the behavior of the materials. In the first part of this work, the cross section of the column is analyzed by the fiber method using the basic hypotheses to obtain the resistance of elements subjected to flexo-compression. Subsequently, the development of the numerical model using the finite element method is described, as well as the hypotheses that were considered to develop the simulation in a non-linear analysis program.

Comparing the results of the numerical models with the envelope of the hysteresis loops reported in the experimental study, an acceptable approximation was observed, mainly in resistance and lateral stiffness. Moreover, the cracking of the numerical model shows good correlation with the final cracking of the test specimen. However, when the compressive strength of the elements that make up the compression coating of the column is reached, even when the capacity of these elements to be crushed is disabled, convergence problems arise in the solution method of the model, and consequently, the ultimate resistance and experimental ductility are not reached.

1 INTRODUCCIÓN

Sismos como los ocurridos en septiembre de 1985 en las costas de Michoacán y Guerrero, o más recientemente, los acontecidos en Pijijiapan, Chiapas y Axochiapan, Morelos, en septiembre de 2017, han demostrado la vulnerabilidad de las estructuras ante estos fenómenos naturales. Las pérdidas humanas y económicas provocadas por el daño o falla de las estructuras, por ejemplo el colapso de diferentes edificios como el mostrado en la figura 1-1, han incrementado la necesidad de realizar investigaciones con el propósito de mejorar los criterios de diseño y métodos de construcción que ayuden a incrementar su seguridad.



Fig. 1-1 Colapso del edificio Nuevo León, en Tlatelolco, después del sismo del 19 de septiembre de 1985 (La Jornada)

Estas investigaciones se han basado en la experimentación y en el desarrollo teórico de nuevas técnicas de análisis. Con ello ha sido posible tener una mayor comprensión tanto del comportamiento mecánico de los materiales de construcción, así como del comportamiento de las estructuras y sus mecanismos de falla. De esta manera ha sido posible actualizar los códigos de construcción y desarrollar metodologías cada vez más precisas para calcular la respuesta de las estructuras ante diferentes acciones, especialmente ante sismos de gran intensidad.

En el diseño sísmico se reconoce que no es económicamente viable diseñar estructuras lo suficientemente resistentes para que mantengan un comportamiento elástico lineal. Por ello, los criterios de diseño de la mayoría de los códigos de construcción establecen como objetivo evitar el colapso, pero aceptando un cierto nivel de daño ante la acción de un sismo excepcionalmente severo. De esta manera, parte de la energía introducida a la estructura por el sismo es disipada a través de daño mediante deformaciones inelásticas, proporcionando a la estructura una mayor capacidad de deformación en el rango inelástico, es decir, ductilidad (Bazán y Meli, 2003).

Esto implica la necesidad de calcular la capacidad de deformación lateral de las estructuras, tanto en el comportamiento elástico como en el rango plástico. Para el caso de elementos de concreto reforzado, esta labor no es sencilla pues fenómenos como por ejemplo, el agrietamiento debido a la microfisuración del concreto o la pérdida de adherencia del acero de refuerzo difícilmente pueden modelarse matemáticamente. En consecuencia, se han adaptado teorías de cuerpos homogéneos e isotrópicos, junto con ciertas hipótesis para establecer procedimientos que estimen de manera aproximada la respuesta de miembros de concreto reforzado.

1.1 Planteamiento del problema

Dadas las dificultades para estimar la rigidez lateral de elementos de concreto reforzado, se han desarrollado diversos estudios experimentales como el realizado por Lehman *et al*, (2004, figura 1-2), con el propósito de estudiar el desempeño de columnas típicas de viaductos elevados bajo la acción de cargas laterales, representativas de las solicitaciones durante un sismo intenso. Con base en la calibración de modelos numéricos con los resultados de algunos de estos estudios experimentales, diferentes investigadores han propuesto expresiones matemáticas para estimar la rigidez lateral y la ductilidad de este tipo de elementos. Sin embargo, en algunos casos dependen del ajuste de ciertos parámetros empíricos y en ocasiones solo son empleadas específicamente para cierto tipo de sección transversal.

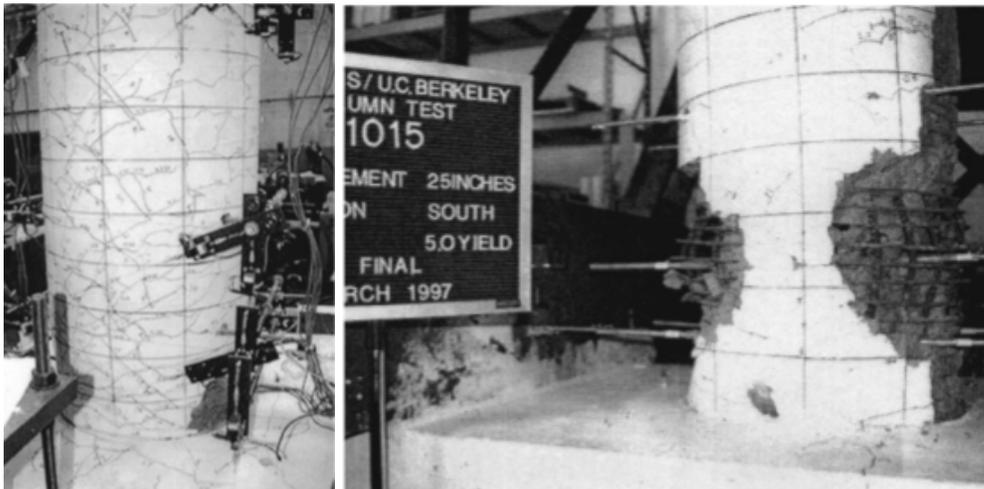


Fig. 1-2 Ensayo de una columna de puente bajo carga lateral (Lehman et al, 2004)

Por otro lado, se han formulado modelos constitutivos del concreto reforzado que reproducen adecuadamente el comportamiento de sus materiales, aún después de iniciar el agrietamiento y la fluencia del acero. Estos modelos se han implementado en programas computacionales que emplean el análisis estructural mediante el método de elementos finitos (MEF). Este método es aplicado en la mecánica de sólidos como una herramienta para obtener la solución aproximada cuando no es posible obtener una solución exacta de las ecuaciones diferenciales que gobiernan las condiciones de determinado problema. O bien, cuando el problema resulta demasiado extenso para resolverlo analíticamente.

En el MEF, las relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas que los originan, se expresan mediante un conjunto de ecuaciones que dan origen a lo que se conoce como matriz de rigidez de cada elemento estructural o matriz elemental. Posteriormente, se realiza el ensamblaje de estas matrices en una matriz global, que expresa las propiedades y geometría de toda la estructura en estudio. Las bases de este método se desarrollaron a inicios de la década de los años cincuenta, sin embargo fue hasta hace pocos años que comenzó a tomar mayor relevancia gracias al desarrollo computacional, ya que su implementación en modelos de gran escala requiere de un número considerable de operaciones aritméticas.

1.2 Objetivo general

El propósito de este trabajo es evaluar un modelo numérico que permita estimar el comportamiento ante cargas laterales de una columna de concreto reforzado empleada en la construcción de viaductos elevados. Para este propósito, se emplean los resultados experimentales del espécimen de una columna de concreto reforzado, de sección hueca, sometida a cargas cíclicas laterales, ensayado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM (II-UNAM).

Utilizando modelos constitutivos que representan el comportamiento experimental de los materiales en la evaluación de la sección por el método de las fibras y en el modelo de elementos finitos, realizado en un programa de análisis no lineal (ANSYS Mechanical APDL), se busca obtener la respuesta después del agrietamiento y previo a la resistencia última del espécimen de prueba. Principalmente, se definirá el procedimiento para realizar el modelo de elementos finitos adecuado a la geometría de la columna hueca, además de la obtención de las variables necesarias para desarrollar la simulación que permita obtener un comportamiento no lineal.

Al comparar los resultados numéricos con el comportamiento físico del espécimen se determinará el grado de precisión con el que se puede estimar la respuesta de un elemento de concreto reforzado. De este modo, se concluirá si la metodología desarrollada en el modelo de elementos finitos puede ser empleada para analizar otro tipo de elementos, así como comentar la viabilidad de este método para simular sistemas estructurales más complejos.

2 ANTECEDENTES

2.1 Comportamiento mecánico de los materiales

El refuerzo de barras de acero es empleado para resistir los esfuerzos de tensión que se producen sobre un elemento de concreto sujeto a esfuerzos de flexión. La teoría relacionada con los mecanismos resistentes en estos elementos se basa en el estudio del comportamiento mecánico de sus materiales. Mediante pruebas estandarizadas de concreto y acero ha sido posible desarrollar modelos matemáticos para estimar su comportamiento a compresión y tensión en una o varias direcciones. Posteriormente, se emplean algunas hipótesis que permiten calcular la respuesta general de elementos de concreto reforzado sometidos a diferentes condiciones de carga.

2.1.1 Resistencia del concreto bajo esfuerzos uniaxiales

Como se muestra en la figura 2-1, el comportamiento a compresión uniaxial del concreto es aproximadamente lineal hasta el 30 por ciento de su resistencia máxima, con una pendiente igual al módulo de elasticidad del concreto, E_c . Más allá de este punto, los esfuerzos se incrementan de manera parabólica hasta alcanzar la máxima resistencia a compresión, σ_{cu} , después la curva desciende en una zona de reblandecimiento, y eventualmente ocurre la falla por aplastamiento a una deformación última, ϵ_{cu} , (Bangash, 1989).

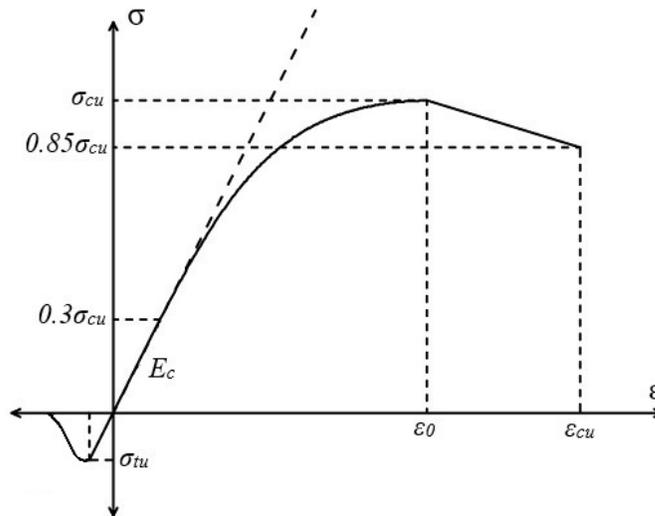


Fig. 2-1 Diagrama típico esfuerzo-deformación a compresión y tensión uniaxial del concreto (Bangash, 1989)

Una aproximación analítica del comportamiento no lineal a compresión de concretos con resistencias mayores a 41 MPa (418 kg/cm²), es el modelo propuesto por E. Hognestad (1951). El modelo consiste en una parábola de segundo grado, definida por la ecuación (2.1-1), con vértice en una deformación, ϵ_0 , correspondiente a la resistencia máxima. Respecto a la rama de reblandecimiento, se considera como lineal hasta un esfuerzo igual a $0.85\sigma_{cu}$.

$$\sigma_c = \sigma_{cu} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.1-1)$$

La deformación ε_0 puede calcularse como:

$$\varepsilon_0 = \frac{2 \sigma_{cu}}{E_c} \quad (2.1-2)$$

Donde:

σ_c = esfuerzos en el concreto para cualquier deformación

σ_{cu} = resistencia máxima del cilindro de concreto sometido a compresión axial

ε_0 = deformación unitaria correspondiente a la resistencia máxima

E_c = módulo de elasticidad del concreto

Mientras que el comportamiento de la relación esfuerzo-deformación en tensión, esta es aproximadamente lineal, con una pendiente igual al módulo de elasticidad, hasta que el concreto alcanza su resistencia máxima, σ_u . Después de este punto, el concreto se agrieta y la resistencia disminuye gradualmente a cero.

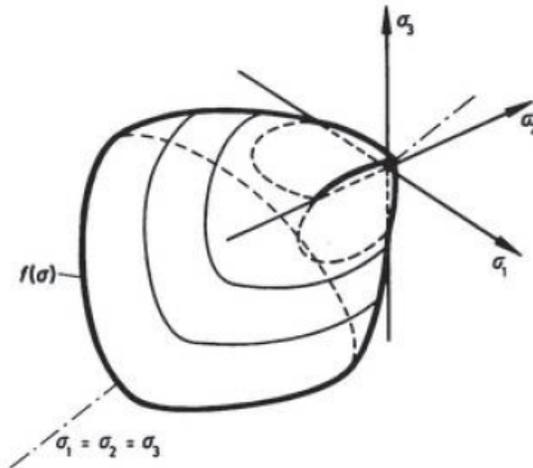
Por otra parte, la relación entre las deformaciones transversales y la deformación en dirección a la aplicación de la carga, también llamada relación de Poisson, oscila entre 0.11 y 0.21. Para concretos de alta resistencia es común considerar un valor bajo de este coeficiente, ya que una baja relación agua/cemento propicia menor propagación de microgrietas y a su vez menor deformación transversal del elemento.

2.1.2 Superficie de falla del concreto bajo esfuerzos combinados

Los esfuerzos de compresión en varias direcciones restringen la formación de microgrietas en la estructura interna del concreto, haciéndolo más resistente y con una mayor capacidad de deformación (MacGregor, 1992). La superficie en el espacio de esfuerzos que define la resistencia última para cualquier relación de esfuerzos principales, es conocida como superficie de falla o modelo de resistencia del material. Willam y Warnke (1974) propusieron un modelo que describe la superficie de falla en términos de los esfuerzos principales, y del comportamiento constitutivo del concreto bajo condiciones triaxiales de carga. Dada la importancia de este modelo, ha sido habilitado en diferentes programas computacionales especializados en análisis no lineal para describir el comportamiento constitutivo triaxial y los criterios de falla del concreto y de otros materiales con características mecánicas similares.

El modelo matemático considera la superficie de falla en un espacio de esfuerzos principales como se muestra en la figura 2-2, en donde: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. La superficie está basada en cuatro aspectos:

- ajuste estrecho con resultados experimentales de especímenes de concreto sujetos a cargas en varias direcciones
- el uso de parámetros que se identifiquen con los obtenidos de ensayos estándar (compresión y tensión axial o biaxial)
- la continuidad de la superficie, la cual facilita el cálculo y su programación y;
- la convexidad de la superficie.



**Fig. 2-2 Superficie de falla inicial bajo condiciones de carga triaxiales
(Willam y Warnke, 1974)**

La superficie de falla puede ser separada por dos secciones o planos, una sección hidrostática (asociada al cambio de volumen) y otra desviadora (asociada al cambio de forma) como se muestra en la figura 2-3. La sección hidrostática forma un plano meridional donde la bisectriz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (estado de esfuerzos hidrostáticos), es un eje de revolución. Por otra parte, la sección desviadora forma un plano normal a la bisectriz (Wolansky, 2004).

El trazo de los esfuerzos desviadores es descrito por las coordenadas polares r y θ donde r es el vector de posición que ubica la superficie de falla en función del ángulo θ . La superficie de falla es definida como:

$$\frac{1}{z} \frac{\sigma_a}{\sigma_{cu}} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_a}{\sigma_{cu}} = 1 \quad (2.1-3)$$

Donde:

σ_a y τ_a = componentes de esfuerzos promedio

z = el vértice de la superficie

σ_{cu} = la resistencia a compresión axial

Los ángulos de abertura del cono del estado hidrostático son definidos por φ_1 y φ_2 . El valor de los parámetros que modelan la superficie del cono z y r , son calculados a partir de la resistencia a tensión axial σ_{tu} , la resistencia a compresión axial σ_{cu} y la resistencia a compresión biaxial σ_{cbu} del concreto.

El modelo trazado mediante los tres parámetros (σ_{cu} , σ_{tu} y σ_{cbu}) se ajusta adecuadamente comparado con resultados de pruebas realizadas a concretos de baja resistencia. En consecuencia, Willam y Warnke incorporaron dos parámetros más para validarlo en concretos con resistencias tanto altas como bajas. Las resistencias a compresión en un estado de compresiones altas bajo condiciones hidrostáticas determinadas, f_1 y f_2 , se incorporaron para describir los meridianos curvos en el sentido de la bisectriz de estados hidrostáticos de la sección transversal del cono.

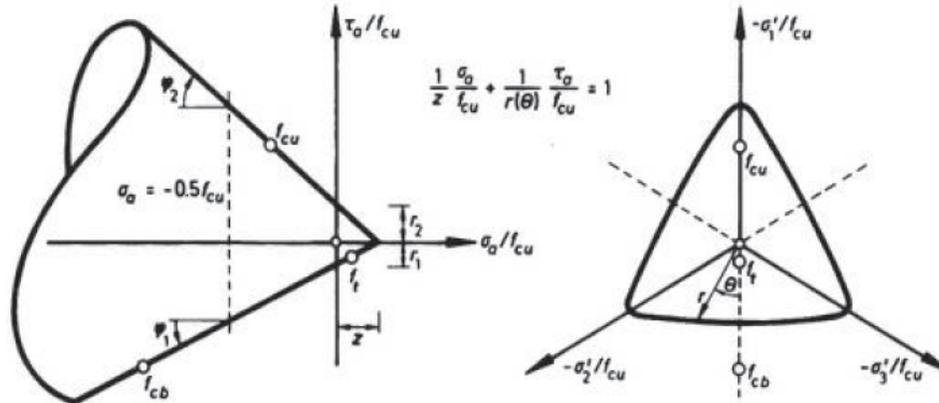


Fig. 2-3 Modelo de tres parámetros, sección hidrostática (izquierda) y sección desviadora (derecha), Willam y Warnke (1974)

2.1.3 Resistencia y ductilidad del concreto confinado por barras de refuerzo

En elementos de concreto reforzado que se someten a cargas que producen esfuerzos próximos a la resistencia del elemento, se presenta un mecanismo de confinamiento pasivo en el concreto dentro de la zona del refuerzo transversal y longitudinal (núcleo de concreto). El confinamiento pasivo es el resultado de la restricción de las deformaciones transversales progresivas por el agrietamiento del concreto, dentro del refuerzo transversal, mejorando así considerablemente las características de resistencia y ductilidad del núcleo de concreto (Park y Paulay 1978).

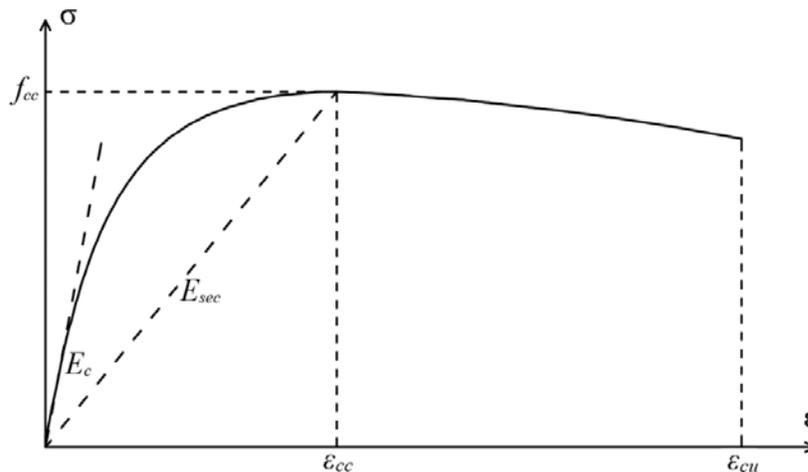


Fig. 2-4 Diagrama esfuerzo-deformación a compresión del concreto confinado por barras de acero de refuerzo (Mander et al., 1988)

Mander *et al* (1984), desarrollaron un modelo matemático del comportamiento del concreto confinado por refuerzo transversal de cualquier geometría sometido a compresión uniaxial, mostrado en la figura 2-4. Las curvas del concreto confinado y no confinado son parecidas hasta una deformación unitaria ϵ_{co} , que corresponde a la resistencia máxima del concreto no confinado. Posteriormente, el acero transversal proporciona una reacción, como resultado al incipiente cambio volumétrico del núcleo de concreto debido al agrietamiento, incrementando su resistencia y capacidad de deformación.

El esfuerzo y la respectiva deformación de concreto confinado por una presión activa por un fluido puede ser calculado como:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_l \quad (2.1-4)$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad (2.1-5)$$

Donde:

f'_{cc} y ε_{cc} = la resistencia del concreto a compresión y su correspondiente deformación bajo confinamiento lateral

f_l = confinamiento lateral

f'_{co} y ε_{co} = la resistencia del concreto y su correspondiente deformación a compresión

k_1 y k_2 = coeficientes que están en función de la mezcla de concreto y del confinamiento lateral

La curva que describe el comportamiento del concreto confinado está basada en la ecuación propuesta por Popovics (1973):

$$f_c = \frac{f'_{cc} x r}{r - 1 + x^r} \quad (2.1-6)$$

Además, x y r toman los valores de las expresiones (2.1-7) y (2.1-8).

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \quad (2.1-7)$$

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (2.1-8)$$

Donde:

ε_c = la deformación unitaria del concreto

E_c = el módulo de elasticidad tangente inicial del concreto

E_{sec} = el módulo de elasticidad secante del concreto

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \quad (2.1-9)$$

La deformación asociada a la resistencia del concreto confinado se calcula como:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (2.1-10)$$

La máxima presión transversal del refuerzo confinante solo se puede ejercer efectivamente en una parte del núcleo de concreto donde los esfuerzos confinantes se desarrollan completamente debido a la acción de arco. En la primera parte del anexo se muestra el análisis del confinamiento efectivo en secciones transversales con estribos rectangulares, además de la obtención de la resistencia del concreto confinado dados dos esfuerzos principales menores.

2.1.4 Resistencia y comportamiento del acero de refuerzo

Ante la baja resistencia a tensión del concreto, el acero de refuerzo es empleado principalmente para resistir los esfuerzos de tensión en elementos de concreto reforzado. Para incrementar la resistencia de elementos de concreto sometidos a flexión, se colocan barras de acero de refuerzo longitudinal en la zona de tensión, mientras que el refuerzo transversal actúa resistiendo esfuerzos de tensión inclinados ocasionados por fuerzas cortantes (Nilson, 1999).

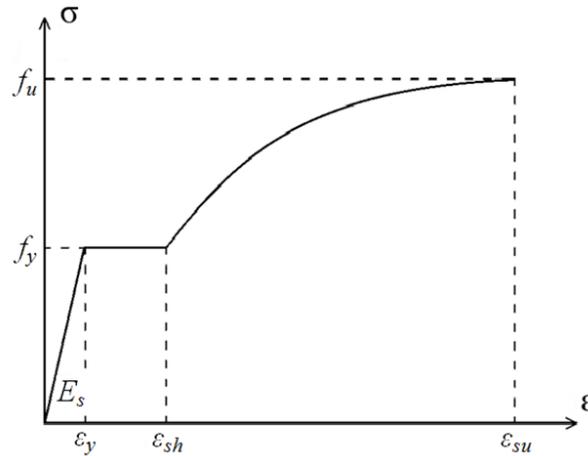


Fig. 2-5 Relación esfuerzo-deformación del acero de refuerzo (Park y Paulay, 1978)

La curva esfuerzo-deformación de las barras de acero de refuerzo sometidas a tensión, en su mayoría, puede ser descrita por tres líneas (ver figura 2-5), cada una se caracteriza por un comportamiento definido:

- El comportamiento elástico-lineal, en donde la deformación es linealmente proporcional con un pendiente igual al módulo de elasticidad del acero, E_s , hasta un esfuerzo de fluencia, f_y . Este estado se define mediante la expresión (2.1-11):

$$\epsilon_s = \frac{f_s}{E_s} \quad (2.1-11)$$

- El comportamiento perfectamente plástico, se describe mediante una meseta prácticamente horizontal posterior a la deformación de fluencia ϵ_y y antes de la deformación ϵ_{sh} .
- El endurecimiento por deformación se describe con una parábola con vértice en el esfuerzo máximo f_{su} y posteriormente desciende hasta llegar a la ruptura ϵ_{su} .

Distintos investigadores han propuesto modelos analíticos para representar el comportamiento no lineal del acero después de la fluencia. Principalmente, en la zona de endurecimiento por deformación. El modelo propuesto por Park y Paulay (1975) describe los esfuerzos del acero en la zona de endurecimiento por deformación como:

$$f_s = f_y \left[\frac{mu + 2}{60u + 2} + \frac{(60 - m)u}{2(30r + 1)^2} \right] \quad (2.1-12)$$

El valor de los parámetros m , r y u se obtiene de pruebas experimentales mediante las siguientes expresiones:

$$m = \frac{\frac{f_{su}}{f_y} (30r + 1)^2 - 60r - 1}{15r^2} \quad (2.1-13)$$

$$r = \varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh} \quad (2.1-14)$$

$$u = \varepsilon_s - \varepsilon_{sh} \quad (2.1-15)$$

Donde:

f_y = el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo

f_{su} = el esfuerzo máximo del acero de refuerzo

ε_y = la deformación de fluencia del acero de refuerzo

ε_{sh} = la deformación inicial del endurecimiento por deformación

ε_{su} = la deformación última del acero de refuerzo

2.2 Resistencia y ductilidad de elementos sujetos a flexión y compresión

Un elemento que es capaz de transmitir a sus apoyos cargas mediante flexión y cortante desarrolla una rotación de su eje. La resistencia a flexión de un elemento, así como su ductilidad pueden ser evaluadas mediante el análisis de su sección transversal. Asumiendo ciertas hipótesis de la cinemática y del principio de compatibilidad de deformaciones se puede establecer el estado de esfuerzos en la sección debido a determinadas condiciones de carga.

2.2.1 Hipótesis básicas

La teoría de la flexión se basa en tres hipótesis básicas para analizar el efecto de la flexión en elementos de concreto reforzado:

- Las secciones perpendiculares al eje de flexión permanecen planas durante la flexión (Principio de Navier-Bernoulli). Esta hipótesis implica que existe una superficie de puntos denominados eje neutro, kd , en el cual las distancias medias sobre dicha superficie antes, durante y después de la flexión se mantienen constantes.
- Existe adherencia perfecta entre el acero y el concreto adyacente (Principio de compatibilidad de deformaciones), por lo que las deformaciones en el concreto y el acero de refuerzo son iguales en el mismo nivel de la sección durante la flexión.
- Los esfuerzos en el concreto y el acero de refuerzo pueden ser calculados a partir de sus deformaciones usando diagramas esfuerzo-deformación.

2.2.2 Planteamiento del equilibrio interno

En flexión pura, el eje se deforma según un círculo de radio, ρ . En la teoría de flexión Euler-Bernoulli, la rotación del eje se puede relacionar con el momento flexionante. Por lo que la

rotación por flexión por unidad de longitud ($d\theta/dx$) o curvatura, φ , del eje del elemento se puede expresar como sigue:

$$\varphi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.2-1)$$

Donde:

φ = la curvatura

ρ = radio del giro del eje del elemento debido a la flexión

M = el momento flexionante en la sección

I/EI = rigidez a flexión del elemento

El estado de esfuerzos en la sección, resultante de la distribución lineal de las deformaciones unitarias en la sección, se reduce a fuerzas resultantes internas, una de compresión, C , y otra de tensión, T . Las fuerzas internas actúan a una distancia llamada brazo de palanca, jd . El equilibrio en una sección se logra cuando las resultantes C y T están en equilibrio con las fuerzas externas normales al eje de la barra, N :

$$C - T = N \quad (2.2-2)$$

Simultáneamente, el momento desarrollado por las fuerzas internas, calculado a partir de un punto conveniente de la sección, se iguala al momento flexionante provocado por las cargas externas. Si el momento se calcula en el punto de acción de la fuerza C , entonces:

$$M = T(jd) + N\left(\frac{h}{2} - jd\right) \quad (2.2-3)$$

Una manera de encontrar el equilibrio en la sección es ajustando la distancia entre la fibra extrema a compresión, $\varepsilon_{c\ max}$, y la profundidad del eje neutro, kd . En este punto, la curvatura φ , es calculada como la pendiente del diagrama de deformaciones, de acuerdo a la figura 2-7b, igual a:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{c\ max}}{kd} \quad (2.2-4)$$

2.2.3 Diagramas momento curvatura

Una forma de entender el comportamiento en flexión de un miembro estructural consiste en seguir la trayectoria del diagrama que relaciona el momento flexionante que resiste el elemento con la curvatura que presenta la sección. El diagrama momento – curvatura de los miembros de concreto reforzado es comúnmente como el mostrado en la figura 2-6. El comportamiento de la curva es lineal hasta que el momento flexionante toma un valor igual al momento de agrietamiento, M_{agr} , en este punto se alcanza la resistencia máxima a tensión del concreto, en consecuencia, la pendiente de la curva disminuye y el elemento se encuentra en un estado agrietado. Cuando se incrementa la magnitud de la carga, los esfuerzos en la sección crítica producen la fluencia del acero de refuerzo en el extremo a tensión, en este segundo punto, el momento flexionante es igual al momento de fluencia, M_y , y se produce nuevamente una disminución en la pendiente de la curva. La resistencia última del elemento se asocia con el

momento último, M_u , este tercer punto del diagrama comúnmente es caracterizado por el aplastamiento del concreto en el extremo a compresión del elemento.

En el diseño estructural es importante conocer la relación momento – curvatura de las secciones de los elementos estructurales, con el fin de estimar la capacidad de ductilidad por curvatura μ_ϕ , la máxima capacidad a flexión del elemento M_u , y comparar estas cantidades con las demandas que se tienen en el diseño. La ductilidad de curvatura de la sección, μ_ϕ , puede calcularse relacionando la curvatura última, ϕ_u , con la curvatura de fluencia, ϕ_y :

$$\mu_\phi = \frac{\phi_u}{\phi_y} \quad (2.2-5)$$

Si un elemento tiene poca capacidad de ductilidad por curvatura presentará una falla frágil cuando la estructura ingrese al intervalo no lineal, lo cual no es deseable. Se requiere que la sección tenga valor alto de ductilidad, de este modo el elemento tendrá una mayor capacidad para disipar energía (Hernández, 2012).

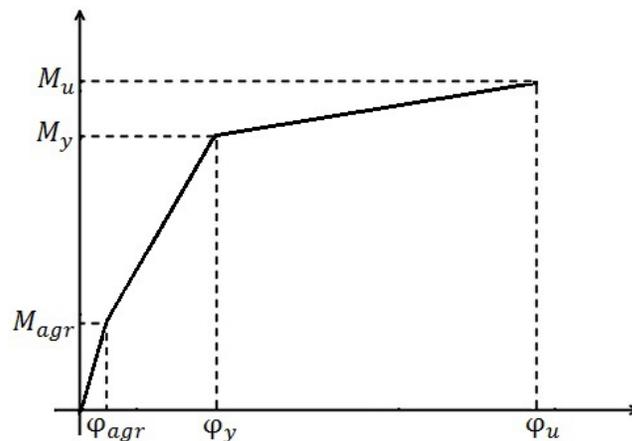


Fig. 2-6 Diagrama momento – curvatura típico de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión (Hernández, 2012)

2.2.4 Método de las fibras

El método de las fibras o de los elementos discretos, propuesto por Park y Paulay (1978) es empleado para obtener el diagrama momento-curvatura de secciones transversales con geometría y relaciones esfuerzo-deformación complejas; y también permite tomar en cuenta diferentes modelos constitutivos para el concreto, dependiendo si se trata de concreto confinado o no confinado. El método consiste en discretizar el concreto de manera perpendicular al peralte, d , para obtener un número de láminas o fibras con área y ubicación conocidas (ver figura 2-7 a).

El propósito de la segmentación es obtener elementos lo suficientemente pequeños para considerar una distribución lineal de los esfuerzos en cada una de las fibras de concreto. Asumiendo lo anterior, no es necesario integrar el área bajo la curva de la parábola descrita por cada una de las relaciones esfuerzo - deformación, de concreto confinado y no confinado, para obtener la magnitud y el punto de aplicación de las fuerzas a compresión.

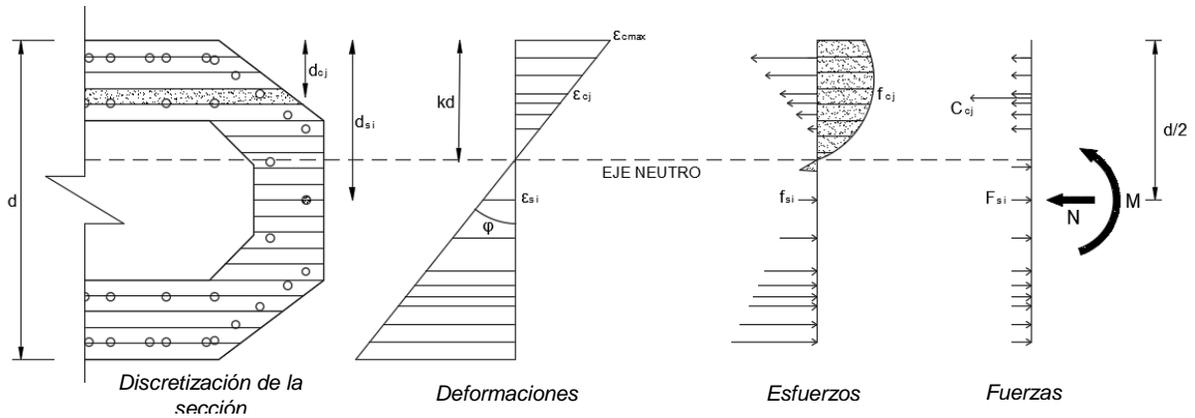


Fig. 2-7 Análisis de la sección (a) discretización de la sección, (b) diagrama de deformación, (c) diagrama de deformaciones y (d) diagrama de fuerzas

Conforme a la discretización, la deformación de la *j*-ésima fibra se calcula de acuerdo a la ecuación (2.2-6):

$$\epsilon_{cj} = \epsilon_{c\ max} \left(1 - \frac{dc_j}{kd} \right) \quad (2.2-6)$$

Análogamente, la deformación del *i*-ésimo lecho de acero se calcula mediante a la ecuación (2.2-7):

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{c\ max} \left(1 - \frac{ds_i}{kd} \right) \quad (2.2-7)$$

Donde:

- ds_j = la distancia del centroide del *i*-ésimo lecho de acero al paño superior del elemento
- dc_j = la distancia del centroide del *j*-ésima fibra de concreto al paño superior del elemento

Una vez obtenido el esfuerzo para cada una de las fibras, de acuerdo al diagrama de deformaciones propuesto para una deformación unitaria máxima a compresión, la fuerza aportada por la *j*-ésima lámina o fibra de concreto, se puede calcular mediante la expresión siguiente:

$$Fc_j = Ac_{cj}\sigma_{cj} + Ac_{ncj}\sigma_{ncj} \quad (2.2-8)$$

Donde:

- Fc_j = la fuerza aportada por la *j*-ésima fibra de concreto
- Ac_{cj} = el área de la *j*-ésima fibra de concreto confinado
- σ_{cj} = el esfuerzo en la *j*-ésima fibra de concreto confinado
- Ac_{ncj} = el área de la *j*-ésima fibra de concreto no confinado
- σ_{ncj} = el esfuerzo en la *j*-ésima fibra de concreto no confinado

En secciones con acero longitudinal en varios niveles del peralte, es posible determinar un área equivalente que contemple la contribución de cada una de las barras distribuidas en cada uno de los lechos de acero longitudinal. La fuerza que aporta cada área equivalente en el *i*-ésimo lecho se puede calcular como:

$$F_{s_i} = A_{s_i} \times f_{s_i} \quad (2.2-9)$$

Donde:

F_{s_i} = la fuerza aportada por el i -ésimo lecho de acero

A_{s_i} = el área del i -ésimo lecho de acero

f_{s_i} = el esfuerzo en el i -ésimo lecho de acero

El sentido de la fuerza, compresión o tensión, está en función de la posición del lecho respecto al eje neutro, cuando la sección se encuentre en equilibrio. La fuerza interna en la sección se puede calcular como sigue:

$$P = \sum_{j=1}^k F_{c_j} + \sum_{i=1}^n F_{s_i} \quad (2.2-10)$$

Dónde:

k = el número de láminas de la sección

n = el número de áreas equivalentes o lechos de acero de refuerzo

La fuerza interna P , deberá tomar la magnitud de la fuerza axial externa aplicada en la sección, si es nula, entonces $P = 0$. El momento resistente se estima como el momento aplicado por cada una de las fuerzas multiplicado por su brazo de palanca respecto a un eje apropiado, convenientemente puede ser tomando el paño superior del elemento, entonces:

$$M = \sum_{j=1}^k F_{c_j} d_{c_j} + \sum_{i=1}^n F_{s_i} d_{s_i} - N \frac{h}{2} \quad (2.2-11)$$

Donde:

h = el peralte de la sección

2.2.5 Cálculo de las deformaciones por flexión

Asumiendo que la ecuación diferencial de la elástica se puede simplificar, debido a que las deflexiones toleradas por la mayoría de las estructuras de concreto son muy pequeñas, entonces el radio de giro de la viga se puede expresar como la segunda derivada de la deflexión de la viga respecto a un incremento infinitesimal de la longitud de su eje, dx , (Popov, 2000):

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 \Delta}{dx^2} \quad (2.2-12)$$

Donde:

Δ = deflexiones de la curva elástica, perpendiculares al eje de la barra

Entonces, igualando la ecuación (2.2-12) con la ecuación (2.2-1):

$$\varphi_x = \frac{M_x}{EI} = \frac{d^2 \Delta}{dx^2} \quad (2.2-13)$$

Despejando la ecuación anterior, se puede relacionar la curvatura con el desplazamiento entre dos puntos de la barra mediante la distribución de su curvatura a lo largo de su eje:

$$\Delta = \int \int \varphi_x dx = \int \int \frac{M_x}{EI} dx \quad (2.2-14)$$

Además, mediante integración de la ecuación (2.2-1) se puede deducir la rotación en función de la curvatura, o bien derivando la ecuación (2.2-14), en forma general:

$$\theta = \int \varphi_x dx \quad (2.2-15)$$

La ductilidad de desplazamiento, μ_{Δ} , relaciona el desplazamiento último, Δ_u , con el desplazamiento de fluencia, Δ_y .

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta_u}{\Delta_y} \quad (2.2-16)$$

2.3 Estudio experimental de una columna hueca de concreto reforzado

Recientemente para optimizar los procesos constructivos de viaductos elevados se han empleado elementos prefabricados de concreto de alta resistencia con diferentes cuantías de acero convencional y presforzado. Estos elementos constan de un cabezal, en la parte superior, un fuste y una zapata rectangular en la base. Como parte de un programa experimental realizado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM (IIUNAM) para evaluar la capacidad de desplazamiento ante acciones sísmicas de este tipo de elementos, se ensayaron cinco especímenes sometidos a cargas laterales.

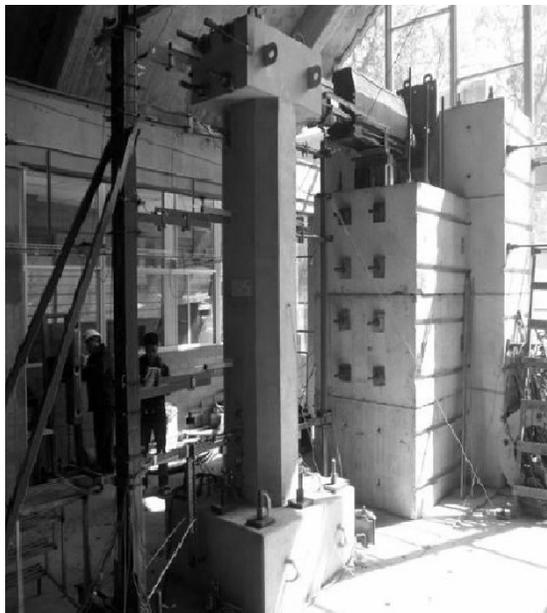


Fig. 2-8 *Especímen de prueba*

Los elementos de prueba se construyeron con diferentes configuraciones de acero longitudinal, variando la cantidad de acero convencional y de presfuerzo pero con una cuantía total cercana al 3.5%. Cada uno de los especímenes se sometió a una carga axial constante durante toda la prueba, representativa del peso propio de la superestructura de un puente vehicular, y para

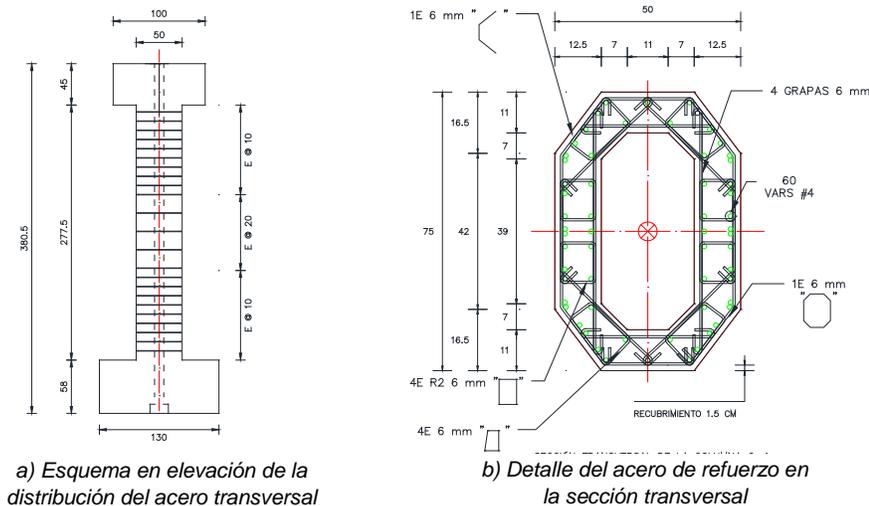
simular las solicitaciones durante un sismo, se aplicó una carga lateral reversible en el extremo libre, incrementando su magnitud hasta llegar a la falla del elemento (ver figura 2-8). Con esta investigación se demostró que la ductilidad y capacidad de desplazamiento de las columnas incrementa a medida que aumenta la cuantía de presfuerzo y que las columnas con mayor acero convencional disipan una mayor cantidad de energía.

Sin embargo, esta tesis se limita únicamente al estudio del espécimen C-4 del programa experimental, que corresponde al que está reforzado longitudinalmente con acero convencional grado 42. Lo anterior, con el objetivo de simular su comportamiento mediante modelos numéricos y validar los resultados analíticos con los resultados experimentales. De este modo, se definirán los procedimientos adecuados, así como las variables necesarias para simular el comportamiento de miembros de concreto reforzado sometidos a flexión y carga axial mediante el método de las fibras (Park y Paulay, 1978) y por medio del método de los elementos finitos (MEF) en un programa de análisis no lineal.

2.3.1 Descripción del programa experimental

El espécimen de prueba ensayado es un modelo a escala 1/4, representativo de la geometría de una columna, de sección hueca, típica empleada en la construcción de viaductos elevados. Fue fabricada con un concreto premezclado de alta resistencia de $f'c = 58.84$ MPa (600 kg/cm^2) nominal, revenimiento de 26 cm y T.M.A. de 3/8" (0.95 cm).

El elemento prefabricado consta de un cabezal, un fuste y una zapata, colados monolíticamente. La zapata es un bloque rectangular de 130 x 130 cm y 58 cm de alto. El fuste hueco es de sección octagonal de 50 x 75 cm y de 277.5 cm de alto (longitud entre el paño superior de la zapata y el paño inferior del cabezal). El cabezal es un bloque rectangular de 100 x 75 cm y de 45 cm de alto, ubicado en la parte superior del elemento (ver figura 2-9 a).



Como se observa en la figura 2-9 b, la sección transversal es de forma octagonal y tiene un ancho de pared de 12.5 cm y 1.5 cm de recubrimiento. El área efectiva de la sección es de 2110.5 cm^2 . El acero longitudinal está formado por 60 varillas de diámetro igual a 1/2" (12.7 mm), por lo que la cuantía de acero longitudinal es de 3.6%. Mientras que diferentes

configuraciones de estribos y grapas de diámetro igual a 1/4" (6.3 mm), dispuestos a cada 20 cm en el tercio medio y a cada 10 cm en los extremos, forman el refuerzo transversal (ver figura 2-9 a). Las varillas del acero transversal fueron fabricadas en Nueva Zelanda.

2.3.2 Propiedades mecánicas de los materiales

La resistencia a compresión, el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del concreto empleado en la fabricación de los especímenes se determinó mediante ensayos a compresión uniaxial de cilindros de 150 x 300 mm, recolectados durante la construcción de las columnas. Por otra parte, la resistencia a tensión se estimó mediante la prueba brasileña (tensión indirecta).

Tabla 2-1 Propiedades mecánicas del concreto (Martínez, 2013)

Resistencia a compresión		Módulo de elasticidad		Resistencia a tensión		Relación de Poisson
MPa	kgf/cm ²	GPa	kgf/cm ²	MPa	kgf/cm ²	
53.54	546	34.03	347000	4.41	45	0.26

A partir de muestras representativas se obtuvieron las propiedades mecánicas del acero de refuerzo longitudinal (1/2") y transversal (1/4") del espécimen C-4. Estas probetas fueron sometidas a cargas monótonas a tensión en una máquina universal para obtener su diagrama esfuerzo-deformación, figura 2-10. De estos diagramas se obtuvieron los esfuerzos promedio de fluencia y últimos, así como la deformación relativa a la falla (ver tabla 2-2).

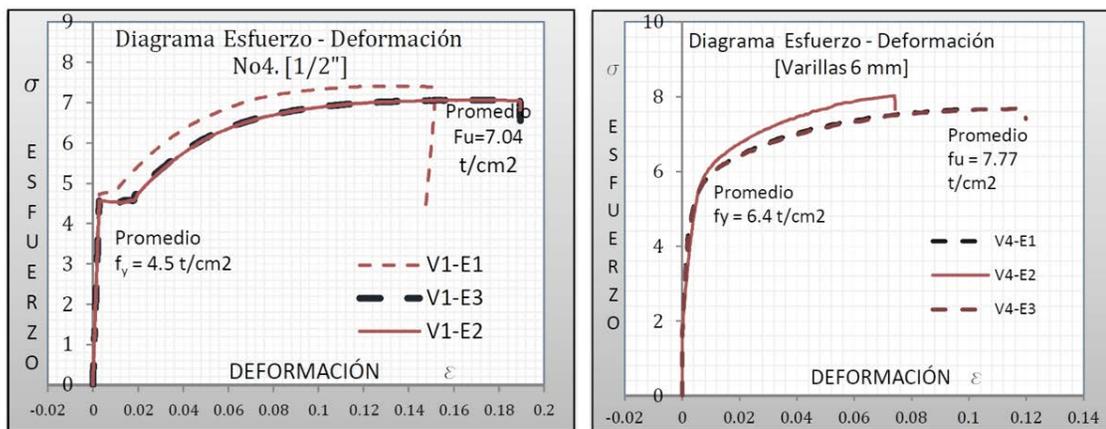


Fig. 2-10 Diagrama esfuerzo-deformación del acero de refuerzo habilitado en el espécimen (Martínez, 2013)

Tabla 2-2 Propiedades mecánicas del acero de refuerzo longitudinal de 1/2" y transversal de 1/4" (Martínez, 2013)

Diámetro	Esfuerzo de fluencia		Esfuerzo último		Deformación relativa al esfuerzo último
	MPa	kgf/cm ²	MPa	kgf/cm ²	
Var $\phi = 1/2''$	441.30	4500	690.39	7040	0.12
Var $\phi = 1/4''$	627.63	6400	761.98	7770	0.07

2.3.3 Dispositivos para la aplicación de las cargas

El sistema de carga consistió en una carga axial equivalente a las cargas gravitacionales de la superestructura del puente vehicular. Esta carga se aplicó mediante el postensado de un cable de acero no adherente a la columna a través de 12 torones de 1/2" (12.7 mm) colocados en un tubo de PVC de 4" que fue colocado longitudinalmente por el hueco central de la sección (Martínez, 2013). La carga axial aplicada debida a efectos gravitacionales se calculó con la siguiente expresión:

$$N = 0.08 \times A_g \times f'_c \quad (2.3-1)$$

Donde:

A_g = el área global de la sección transversal en cm

f'_c = la resistencia a compresión nominal del concreto en kg/cm²

Para simular el efecto de las cargas laterales en la columna, resultantes de la aceleración de la masa de la superestructura del puente durante un sismo, se aplicaron cargas laterales cíclicas reversibles mediante un actuador con capacidad de 980.1 kN (100 t) de fuerza, con una carrera de +/-175 mm. El actuador fue fijado sobre un muro de reacción y se sujetó al cabezal mediante barras de alta resistencia. Las cargas se aplicaron a una altura de 3 m de la columna medida a partir del paño superior de la zapata, como se muestra en la figura 2-11.

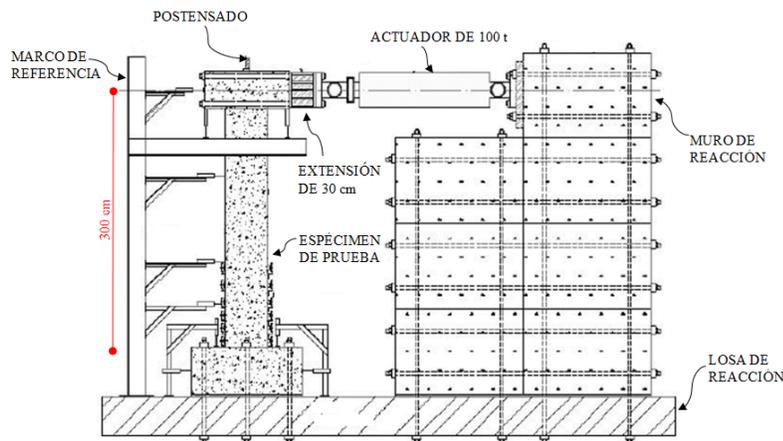


Fig. 2-11 Sistema de aplicación de cargas en el espécimen de prueba

2.3.4 Resultados experimentales

Durante el ensayo de la columna, el agrietamiento comenzó a observarse a partir de una carga lateral de 60.8 kN (6.2 t), en la base de la columna. El comportamiento lineal, limitado seguramente por la pérdida de rigidez debido a la fluencia del acero, se desarrolló hasta una carga lateral de 259.87 kN (26.5 t) y una deflexión lateral de 42.3 mm. Posteriormente, se observó una disminución considerable de rigidez; el desplazamiento correspondiente a la máxima carga aplicada, de 326.07 kN (33.25 t), superó los 159 mm. Al final de la prueba, se observó que el agrietamiento tuvo lugar hasta dos tercios de la altura total del fuste, siendo de 0.30 y 0.35 mm el ancho de las grietas después de alcanzar la carga lateral máxima. De los lazos de histéresis carga – desplazamiento, se muestra que el espécimen presentó un comportamiento similar en las dos direcciones, como se observa en la figura 2-12.

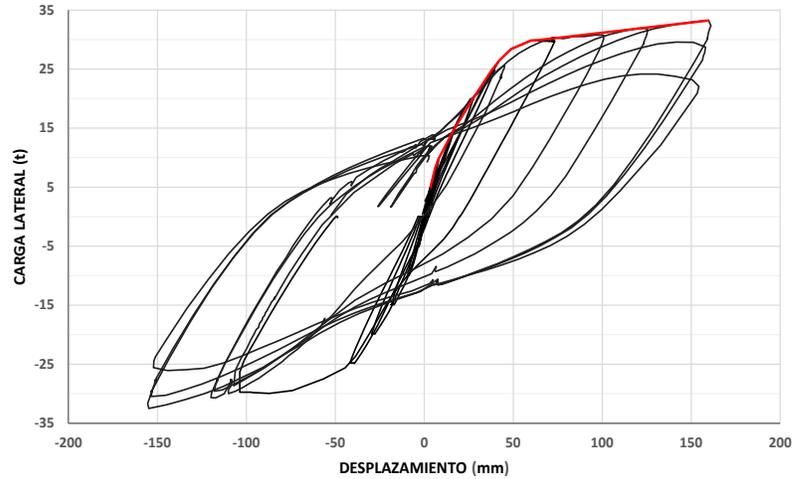


Fig. 2-12 Diagrama carga lateral – desplazamiento del espécimen de prueba

Una envolvente trazada sobre el diagrama de histéresis estima la respuesta del elemento ante una carga monótona creciente (figura 2-13). Lo anterior se puede justificar ya que el comportamiento a compresión de sus materiales (concreto y acero) bajo una carga monótona creciente es similar al obtenido por una envolvente de la relación esfuerzo-deformación producida por cargas cíclicas para tasas de deformación lentas (Park y Paulay, 1978).

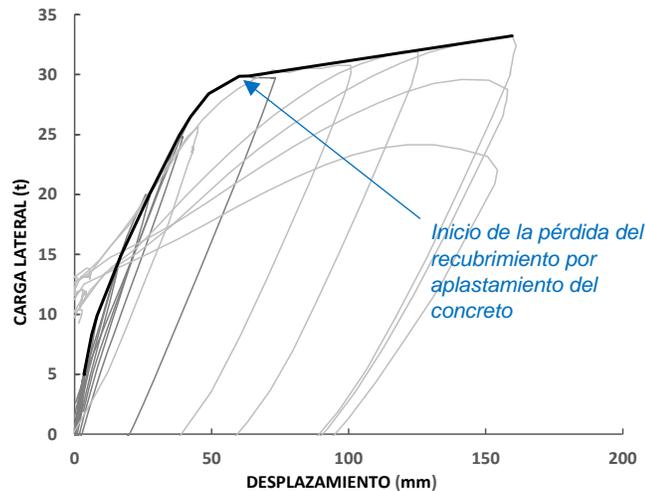


Fig. 2-13 Envolvente de los lazos de histéresis

Al final de la prueba, después de iniciarse el desprendimiento del recubrimiento, se degradó súbitamente la resistencia del elemento y se dio lugar a una articulación plástica, como se muestra en la figura 2-14. La separación del acero transversal, de 10 cm en la base, no restringió el pandeo de las varillas longitudinales, por lo que el pandeo de las varillas aumentó el desprendimiento del recubrimiento del espécimen.



Fig. 2-14 Daño en la base de la columna del espécimen C-4, aplastamiento del recubrimiento y pandeo del acero longitudinal

3 ANÁLISIS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL POR EL MÉTODO DE LAS FIBRAS

Para analizar la sección del espécimen según el método de las fibras se determinaron tres modelos constitutivos: acero de refuerzo, concreto confinado y concreto no confinado, ya que solo se requiere conocer la curva esfuerzo-deformación de los materiales que se deforman axialmente al eje del elemento, figura 3-1.

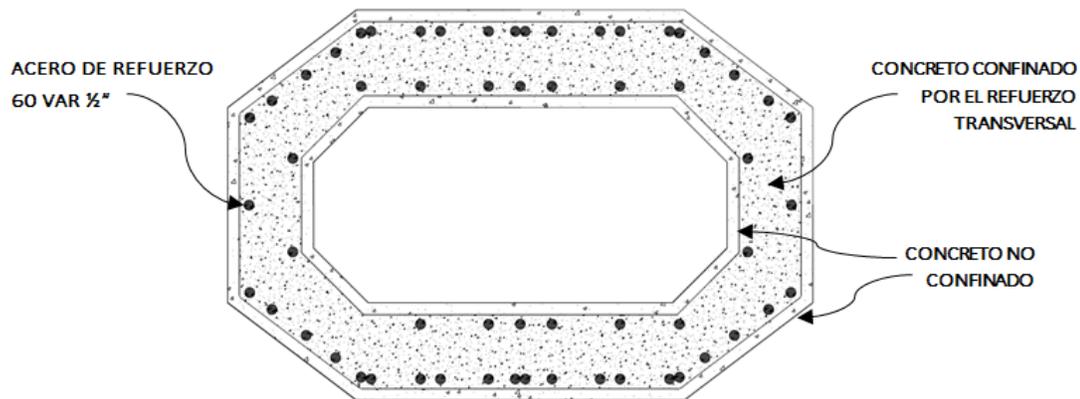


Fig. 3-1 Definición de los materiales de la sección para el análisis del método de las fibras

3.1 Modelos constitutivos

Concreto no confinado

El comportamiento mecánico del recubrimiento de la sección, de 15 mm tanto en el contorno externo como en el interno, se considera como concreto no confinado. De acuerdo con esto, la relación esfuerzo – deformación del concreto a compresión, en este trabajo, se definió por la parábola propuesta por Hognestad (1951).

Los parámetros de resistencia y el módulo de elasticidad corresponden a los valores del estudio experimental. La deformación referente a la resistencia máxima se determinó igual a 0.00315, según la ecuación (2.1-2). En compresión, los esfuerzos se calcularon mediante la expresión (2.1-1) hasta una deformación última de 0.0038. Mientras que en tensión, los esfuerzos y las deformaciones son linealmente proporcionales con una pendiente igual al módulo de elasticidad hasta la resistencia última, $f_r = 4.41 \text{ MPa}$ (45 kg/cm^2), y posteriormente son cero.

Concreto confinado

El concreto que se encuentra delimitado por el refuerzo transversal se supone confinado por el mismo refuerzo. Así que, su resistencia a compresión bajo esfuerzos laterales se determinó según el modelo propuesto por Mander *et al* (1988). En la segunda parte del anexo se expone

detalladamente el procedimiento matemático así como las consideraciones empleadas, de acuerdo al análisis de las secciones rectangulares, para la obtención de los parámetros mostrados en tabla 3-1, que determinan la curva esfuerzo – deformación del concreto confinado.

Tabla 3-1 Parámetros empleados para la determinación de la curva esfuerzo-deformación del concreto confinado

Resistencia del concreto confinado (f'_{cc})		Módulo de elasticidad (E_c)		Módulo secante (E_{sec})		Deformación relativa a la resistencia última (ϵ_{cc})
MPa	kgf/cm ²	GPa	kgf/cm ²	GPa	kgf/cm ²	
65.86	671.58	34.03	347000	9.73	99258	0.00677

En la figura 3-2 se muestran las curvas esfuerzo-deformación del concreto con y sin confinamiento empleadas para el análisis.

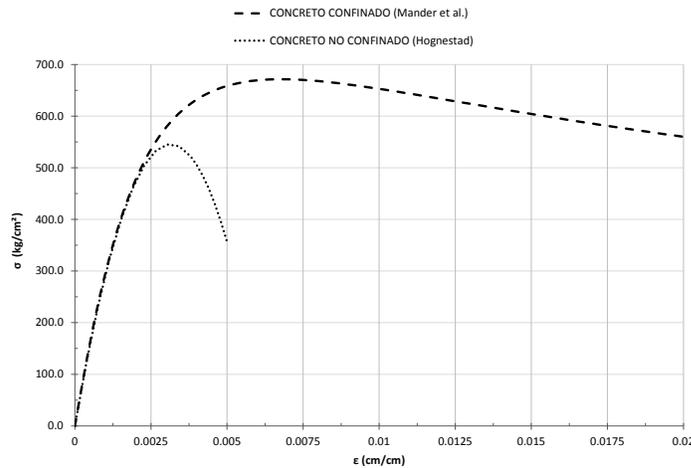


Fig. 3-2 Curvas esfuerzo deformación a compresión del concreto con y sin confinamiento lateral del espécimen de prueba empleadas en el análisis del método de las fibras

Acero de refuerzo

Para definir la curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo, tanto en tensión como en compresión, se tomaron los esfuerzos de fluencia y último de las pruebas experimentales del espécimen de prueba. Mientras que el módulo de elasticidad se determinó igual a $E_s = 205.94$ MPa (2.1×10^6 kg/cm²), de modo que la deformación de fluencia se calculó mediante la expresión (2.1-11).

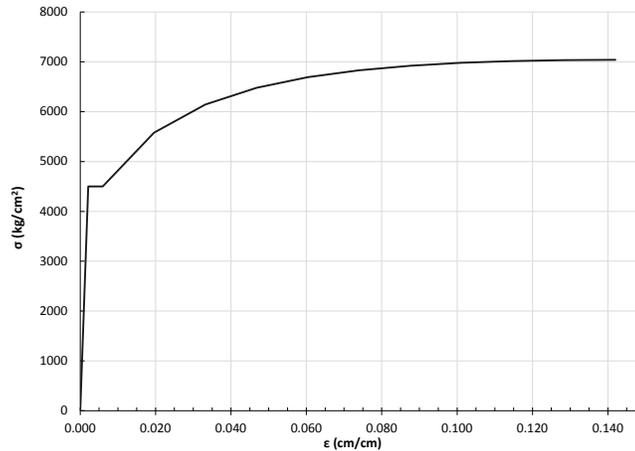


Fig. 3-3 Curva esfuerzo deformación a tensión del acero de refuerzo

Además, la deformación donde inicia la zona de endurecimiento por deformación, se estableció igual a $\epsilon_{sh} = 0.006$, con base en el trabajo experimental realizado por Rodríguez y Botero (1996) con varillas fabricadas en México de diámetro pequeño. En tanto que la deformación última se determinó igual a $\epsilon_{su} = 0.14$. Con estos parámetros, el comportamiento después de la fluencia se modeló mediante la ecuación (2.1-12), propuesta por Park y Paulay (1978).

3.2 Discretización de la sección transversal

Para analizar los esfuerzos y deformaciones del acero y del concreto de manera conveniente, en este estudio, se trazó una sección considerándola como si fuera únicamente de concreto con el objetivo de dividirla en fibras o laminas, cada una con cierta cantidad de concreto confinado por refuerzo transversal y concreto simple. Por otra parte, el acero de refuerzo longitudinal se consideró en una serie de lechos con un área equivalente igual a la suma de las áreas de las barras que componen cada uno.

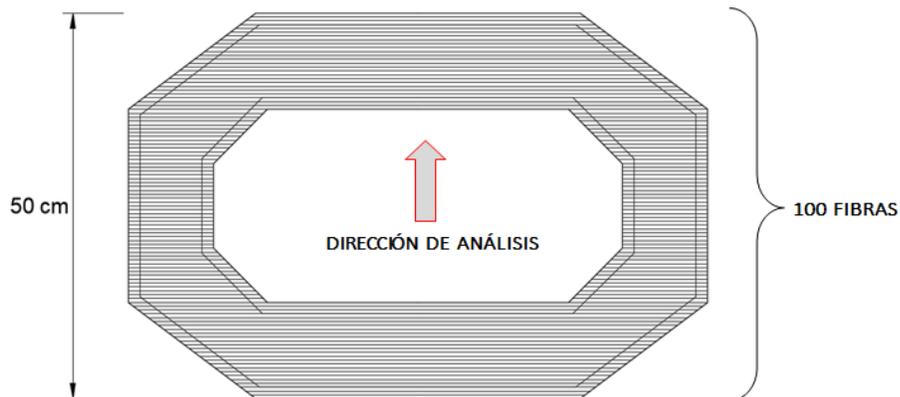


Fig. 3-4 Discretización de la sección transversal de la columna en fibras

Considerando el peralte de la sección, y teniendo en cuenta la dirección del análisis, se propuso que el ancho de cada una de las fibras sea igual a 5 mm de modo que la sección es dividida en 100 fibras (ver figura 3-4). En cambio, la distribución de las 60 barras de acero longitudinal se

idealizó como 15 lechos colocados a una distancia conocida de la fibra extrema a compresión, como se muestra en la figura 3-5.

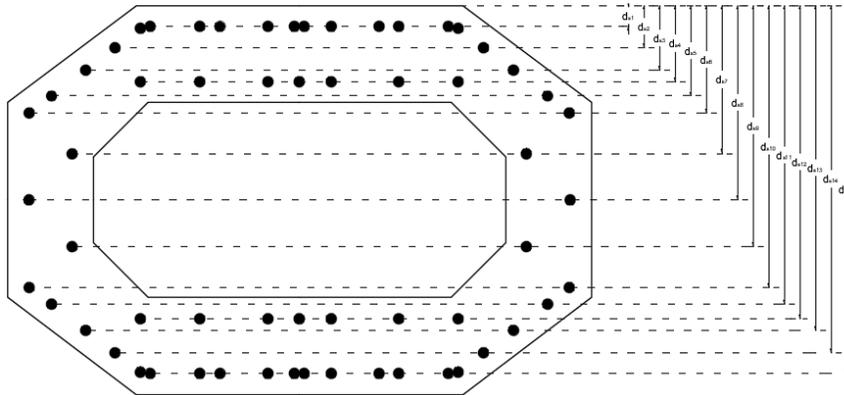


Fig. 3-5 Distribución de los lechos de refuerzo longitudinal en la sección transversal de la columna

3.3 Diagrama momento - curvatura

Para calcular el diagrama que asocie el incremento del momento resistente de cualquier sección transversal con su correspondiente curvatura, sujeta a una carga axial constante, N , que actúa en su centroide, es conveniente distinguir que la variable que define la profundidad del eje neutro, kd , es el producto del coeficiente k que multiplica al peralte, d . De este modo, una vez que se relaciona la deformación de la fibra extrema a compresión, $\epsilon_{c\ max}$, con las fuerzas internas, mediante la programación en una hoja de cálculo de las ecuaciones del método de las fibras, es posible variar manualmente el valor del parámetro k hasta que se cumpla con el equilibrio de fuerzas (cuando $P = N$) o bien, emplear una función de análisis de datos para encontrar su magnitud.

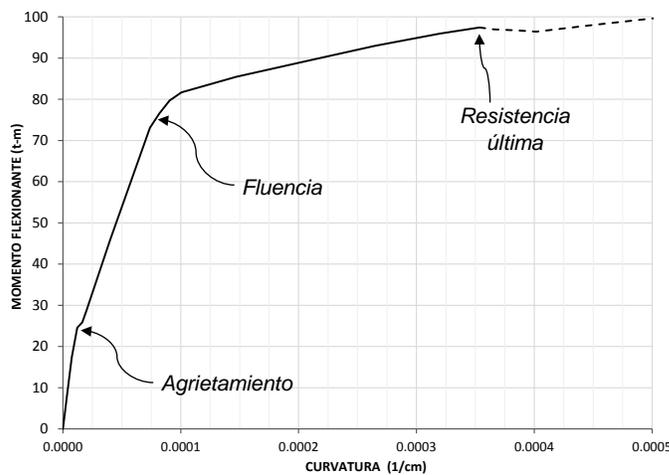


Fig. 3-6 Diagrama momento – curvatura (método de las fibras)

En este caso, la carga aplicada en la sección transversal es $N = 1,010.08$ kN (103 t).según la expresión (2.3-1). En la figura 3-6 se muestra el diagrama momento – curvatura de la sección

del fuste del espécimen de prueba obtenido mediante el método de las fibras. Como se observa, se aprecian los tres puntos representativos de las secciones de concreto reforzado, que corresponden a: el agrietamiento, la fluencia del acero a tensión y la resistencia última.

3.4 Diagrama de interacción

La resistencia del espécimen de prueba para cualquier combinación de carga axial y momento flexionante se puede determinar con el mismo modelo obtenido mediante el método de las fibras. Para determinar el contorno del diagrama de interacción, solo es de interés encontrar las fuerzas internas M y P que resulten en una variación del estado de esfuerzos cuando se presenta el aplastamiento del concreto en el extremo a compresión, así que no es necesario establecer equilibrio de las fuerzas internas con alguna combinación de fuerzas externas. En este caso, fijando la deformación de la fibra extrema a compresión, igual a $\epsilon_{cmax} = 0.0038$, y mediante la variación de la constante k se obtuvieron las combinaciones carga axial–momento resistente.

Del diagrama de interacción del espécimen, figura 3-7, se observa que la carga axial aplicada al espécimen de prueba es considerablemente menor a su resistencia axial y está por debajo de la zona de falla balanceada. Por lo que en teoría, al aplicar la carga lateral creciente en el extremo libre, se alcanza la resistencia después de la fluencia del acero en tensión. De este modo, se espera que el espécimen desarrolle ductilidad antes de llegar a la falla.

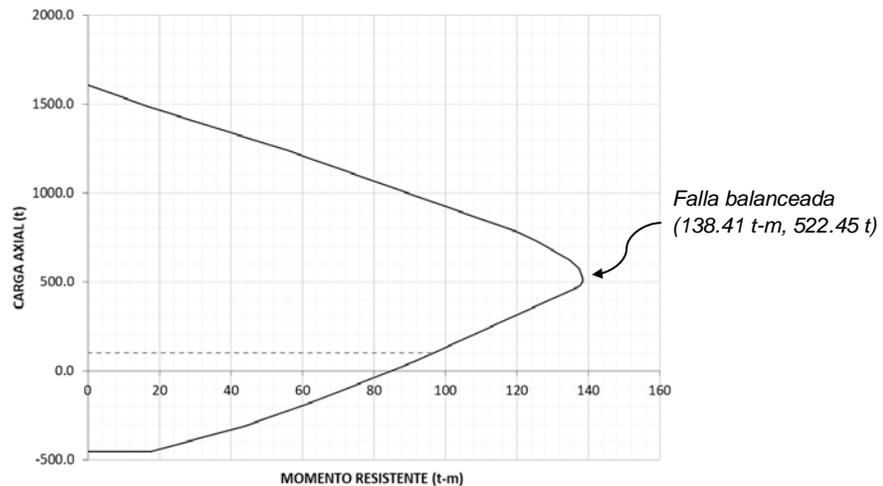


Fig. 3-7 Diagrama de interacción resultado del método de las fibras

3.5 Respuesta carga – desplazamiento

Considerando que los desplazamientos a nivel de la zapata son despreciables, el espécimen de prueba se puede analizar como un elemento en cantiléver de sección constante, de longitud, l , y cuyo eje es paralelo a la dirección x . De manera que, bajo los efectos de una fuerza lateral creciente, V , en su extremo libre, presenta un diagrama de momento flexionante lineal, como el

mostrado en la figura 3-8 b. El momento es máximo, con magnitud igual a Vl , en su extremo empotrado y nulo en su extremo libre, por lo que la ecuación (3.5-1) determina el momento flexionante en función de la longitud, en dirección de su eje, x :

$$M_x = Vx - Vl \quad (3.5-1)$$

Cuando la columna está cerca de su resistencia última, la distribución de la curvatura es parecida a la figura 3-8 c, donde la distribución irregular de la curvatura es el producto de la pérdida de rigidez lateral, en ciertas zonas agrietadas a lo largo del fuste. Además, la concentración de curvatura en la base se debe a la formación de una articulación plástica debido al aplastamiento del concreto en el recubrimiento en compresión y la fluencia del acero longitudinal en tensión. Entonces, sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.2-14), y tomando en cuenta las condiciones de frontera del elemento en cantiléver, el desplazamiento en el extremo libre se puede determinar como:

$$\Delta = \frac{\varphi_b l^2}{3} \quad (3.5-2)$$

Donde:

Δ = el desplazamiento en el extremo libre

φ_b = la curvatura de la sección crítica o en la base

l = la longitud de la columna

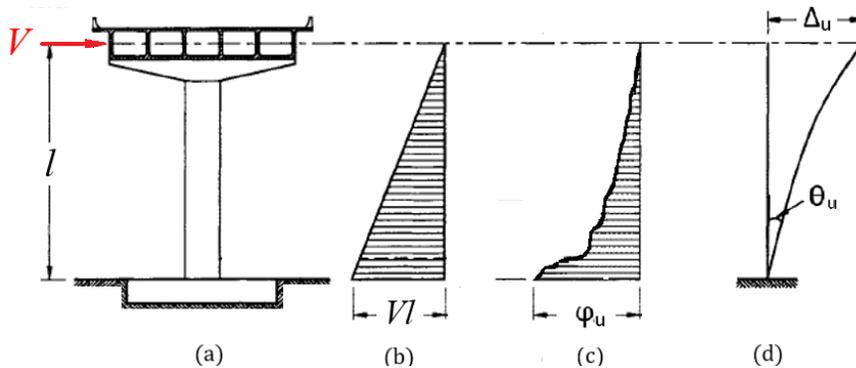


Fig. 3-8 Análisis plástico de una columna, (a) diagrama de momentos, (c) diagrama de curvaturas, (d) diagrama de deflexiones

Por lo anterior, la historia de desplazamientos en el extremo libre debido al incremento de la carga lateral se determinó mediante las curvaturas obtenidas en el diagrama momento-curvatura, considerando que el momento resistente en la sección crítica es igual al momento flexionante que actúa en la base y además, que la carga lateral corresponde al momento dividido entre el brazo de palanca, en este caso igual a 3 m. La figura 3-9 muestra el diagrama carga lateral-desplazamiento, de acuerdo a las suposiciones anteriores.

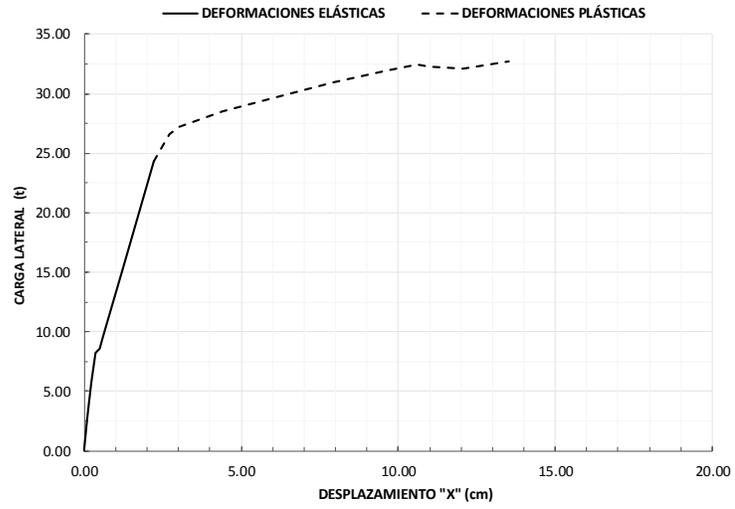


Fig. 3-9 Diagrama carga – desplazamiento lateral resultado del método de las fibras

4 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UNA COLUMNA HUECA DE CONCRETO REFORZADO

4.1 Generalidades del MEF

Para estimar el comportamiento no lineal de la columna de concreto reforzado hueca típica empleada en la construcción de viaductos elevados fue que se realizó un modelo numérico mediante el método de elementos finitos (MEF). Esta metodología se fundamenta en considerar un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) en un ensamble de elementos discretos o subdominios no intersectantes entre sí. Además, la interacción entre los elementos se define en puntos representativos llamados nodos. Los nodos tienen ciertos grados de libertad que caracterizan la respuesta del modelo y son definidos por el tipo de problema.

En general, para cualquier tipo de problema, la implementación computacional del MEF se define en tres etapas, figura 4-1:

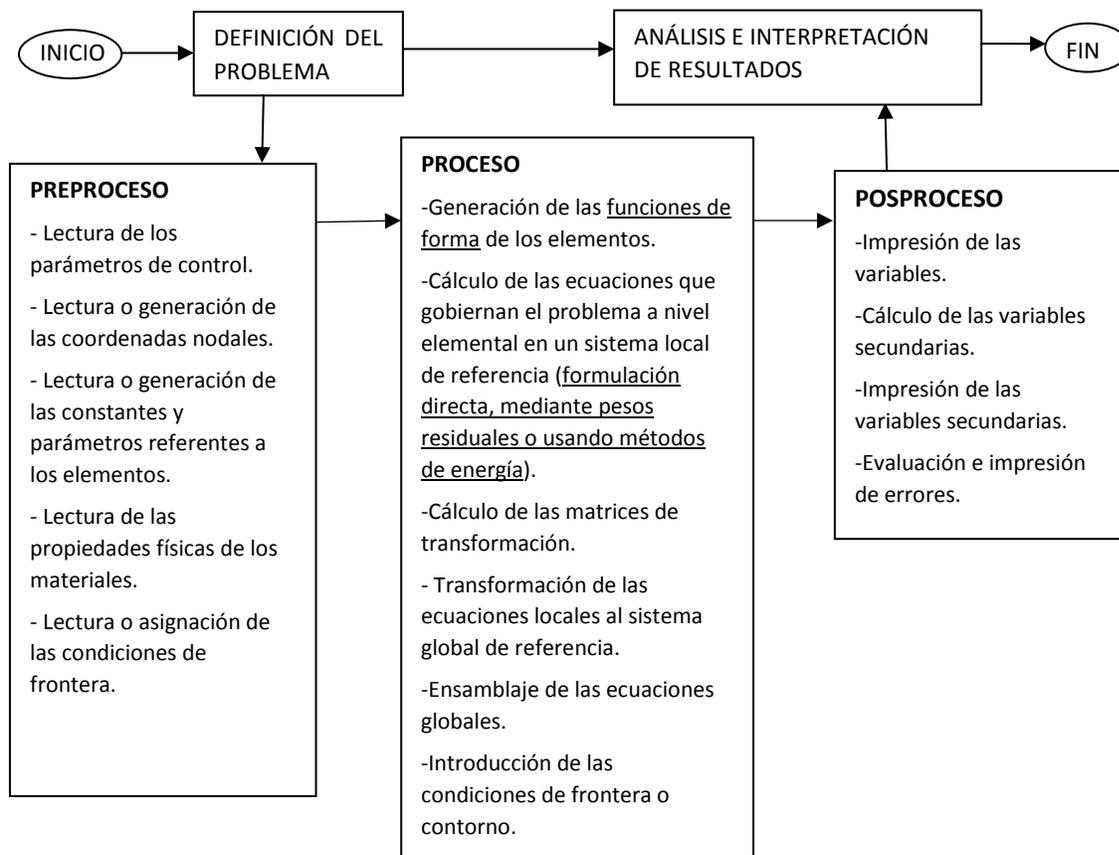


Fig. 4-1 Esquema general de la implementación computacional del MEF (Da Fonseca, 2011)

4.2 Modelación del concreto reforzado

Existen tres procedimientos para la modelación de concreto reforzado mediante el MEF: el modelo discreto, el modelo embebido y el modelo distribuido, Tavarez (2001). El método discreto (figura 4-2 a), utilizado en este trabajo, consiste en modelar las varillas de acero de refuerzo mediante elementos tipo barra conectados en nodos comunes con los elementos sólidos hexaédricos que conforman el concreto. La concordancia en los nodos implica que los dos elementos forman parte del mismo espacio, en este estudio, se despreció el efecto que esto conlleva en el cálculo de la masa y rigidez total del modelo.

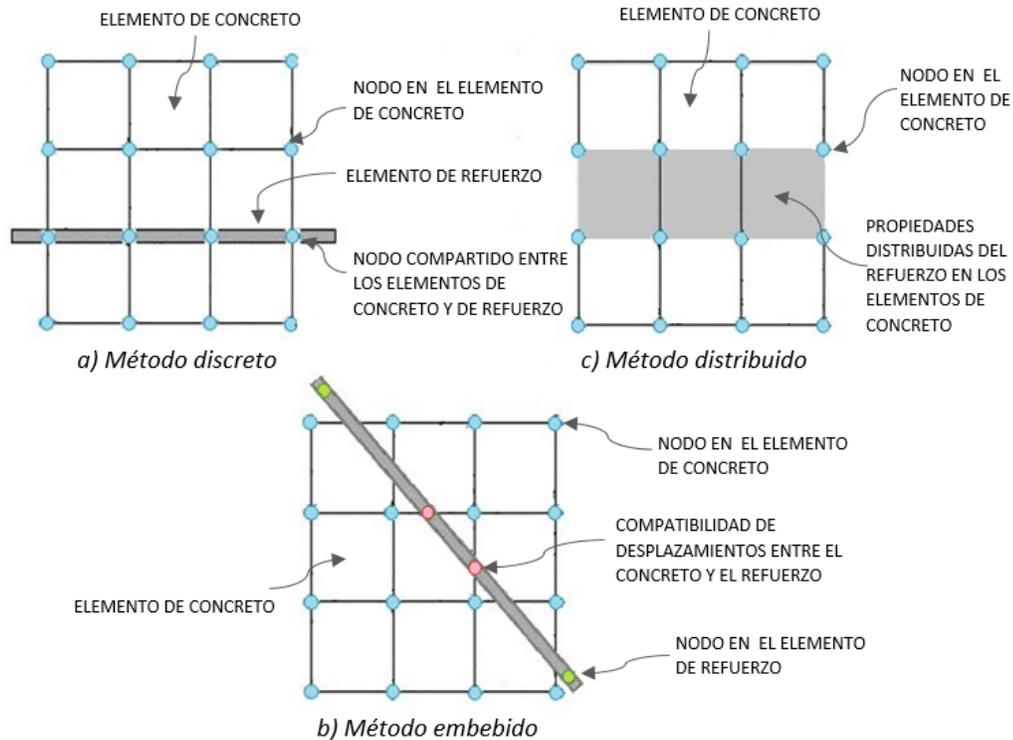


Fig. 4-2 Métodos para la modelación del concreto reforzado mediante el MEF (Tavarez, 2001).

En el modelo embebido (figura 4-2 b) no es necesario que existan nodos comunes, el elemento de refuerzo se incorpora dentro de la malla del concreto de tal forma que exista compatibilidad de deformaciones entre los materiales en los puntos de intersección. Sin embargo, el cómputo incrementa debido a la creación de nuevos nodos y por lo tanto, mayor número de grados de libertad que en el modelo discreto. Además, la rigidez del acero de refuerzo es evaluada independientemente de los elementos de concreto. Por otro lado, el modelo distribuido (figura 4-2 c) considera que el refuerzo está uniformemente distribuido en los elementos de concreto en una región definida de la malla. La aplicación de este método es conveniente en modelos de gran escala, donde el detalle en el refuerzo no contribuye significativamente a la respuesta global de una estructura.

4.3 Descripción del modelo numérico

4.3.1 Tipos de elementos

Para la modelación del concreto, en ANSYS, se empleó un elemento sólido de ocho nodos con tres grados de libertad en cada uno (SOLID 65), siendo estos desplazamientos nodales en las direcciones locales x , y y z . Además, cuenta con la capacidad de deformarse plásticamente, agrietarse y aplastarse en tres direcciones ortogonales, figura 4-3 a.

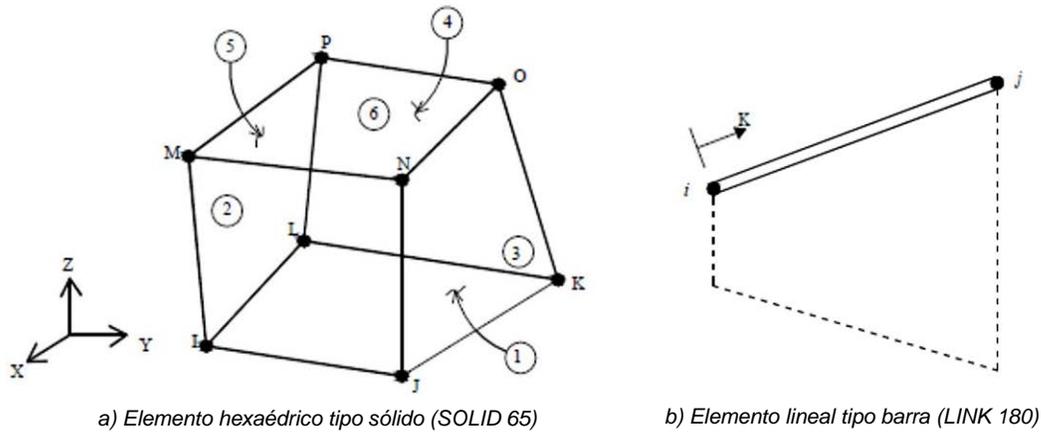


Fig. 4-3 Tipos de elementos empleados (Ansys, 2013)

En el caso del acero de refuerzo se utilizó un elemento tipo barra de dos nodos con tres grados de libertad cada uno (LINK 180). Este elemento trabaja de manera uniaxial, es decir, solo toma tensiones o compresiones en dirección a su eje local, K , figura 4-3 b. La rigidez axial y la masa de cada barra son calculadas a partir de una constante definida por dos factores: el área transversal y la densidad por unidad de longitud. Por ello, en este trabajo los empalmes de estribos y grapas, así como los paquetes de barras longitudinales, también se modelaron como una sola barra pero tomando en cuenta las propiedades del número de varillas consideradas por un elemento barra, tabla 4-1.

Tabla 4-1 Constantes, área transversal y densidad lineal, de los elementos tipo barra

MATERIAL	CONSTANTES DE LOS ELEMENTOS BARRA		
Acero longitudinal	Constante	Sección trasversal	Densidad lineal
	1	0.317	2.528 E-007
	2	0.634	5.056 E-007
	3	0.951	7.584 E-007
Acero transversal	Constante	Sección trasversal	Densidad lineal
	4	0.710	5.708 E-007
	5	1.420	1.142 E-007

4.3.2 Modelos constitutivos de los materiales

Concreto

La superficie de falla triaxial, basada en el modelo de cinco parámetros de Willam - Warnke, además de la capacidad de transferir cortante a través de una grieta y el comportamiento no lineal en tensión del concreto se reproducen en el programa mediante las siguientes constantes:

1. Coeficiente de transferencia de cortante para grieta abierta, β_t
2. Coeficiente de transferencia de cortante para grieta cerrada, β_c
3. Resistencia última a compresión uniaxial, σ_{cu}
4. Resistencia última a tensión uniaxial, σ_{tu}
5. Resistencia última a compresión biaxial, σ_{cbu}
6. Estado de esfuerzos hidrostáticos para los cuales se introducen las constantes 7 y 8, σ_h
7. Resistencia última a compresión biaxial bajo estado de esfuerzos hidrostáticos de la constante 6, f_1
8. Resistencia última a compresión uniaxial bajo estado de esfuerzos hidrostáticos de la constante 6, f_2
9. Coeficiente de rigidez ante una condición agrietada por tensión, T_c

Para un sólido con este modelo constitutivo (*Concrete*), el agrietamiento se presenta cuando el esfuerzo principal de tensión en cualquier dirección en uno o más puntos de integración es superior al de la superficie de falla (ver figura 2-2) y la rigidez en la dirección paralela al agrietamiento se anula. En cambio, cuando algún elemento se aplasta, su rigidez es cero en todas las direcciones; su masa y las cargas asignadas al elemento se transfieren a los nodos adyacentes, en consecuencia el elemento deja de existir en el modelo numérico.

Los coeficientes de transferencia de cortante, β_t y β_c , representan la fracción, entre cero y uno, del esfuerzo cortante que se transmite a través de una grieta cuando se encuentra abierta o cerrada, respectivamente. De la investigación realizada por algunos autores, como Kachlakev *et al* (2001) o Ru-deng (2008), se ha demostrado que existe buena aproximación de la respuesta experimental de vigas de concreto reforzado sometidas a flexión, cuando los valores del coeficiente β_t oscila entre 0.20 y 0.40; y β_c toma valores entre 0.80 y 1.0. Por ello, se consideró apropiado definir β_t igual a 0.25. En este caso, la modelación del problema en estudio no propiciara que existan grietas cerradas, ya que el elemento se cargará en un sola dirección hasta llegar a la resistencia última, por lo que se propone que β_c sea igual a 1.0.

Por otro lado, se deshabilitó la capacidad de los elementos para aplastarse, asignándole el valor -1 a la constante tres. Lo anterior, debido a que durante las primeras corridas del modelo, introduciendo la resistencia a compresión experimental, se observó que el modelo pierde estabilidad después del aplastamiento de los primeros sólidos en la zona a compresión. Posteriormente, el modelo sufre grandes desplazamientos a incrementos muy pequeños de carga, hasta que en cierto punto la solución diverge. Esta situación también es descrita por Kachlakev *et al* (2001).

En el programa de análisis empleado, si se desconoce la resistencia del concreto ante cierta condición de esfuerzos hidrostáticos, como en este caso, las constantes, σ_{cbu} , f_1 y f_2 necesarias

para modelar la superficie de falla se determinan mediante las ecuaciones (4.3-1), (4.3-2) y (4.3-3):

$$\sigma_{cbu} = 1.2\sigma_{cu} \quad (4.3-1)$$

$$f_1 = 1.45\sigma_{cu} \quad (4.3-2)$$

$$f_2 = 1.725\sigma_{cu} \quad (4.3-3)$$

Las expresiones anteriores solo son válidas si el estado de esfuerzos hidrostático cumple la siguiente condición:

$$|\sigma_h| \leq \sqrt{3}\sigma_{cu} \quad (4.3-4)$$

Donde el esfuerzo hidrostático se determina mediante los esfuerzos principales en las tres direcciones:

$$\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) \quad (4.3-5)$$

El comportamiento de la relación esfuerzo-deformación a tensión del concreto, empleado por el programa, es como el mostrado en la figura 4-4. Después de alcanzar la resistencia máxima, f_t , la curva disminuye súbitamente hasta un valor igual a T_c veces la resistencia a tensión, y posteriormente disminuye linealmente a cero hasta una deformación $6\varepsilon_t$. El programa asigna el valor $T_c = 0.6$ por defecto, si no se cuenta con información experimental para determinar este parámetro.

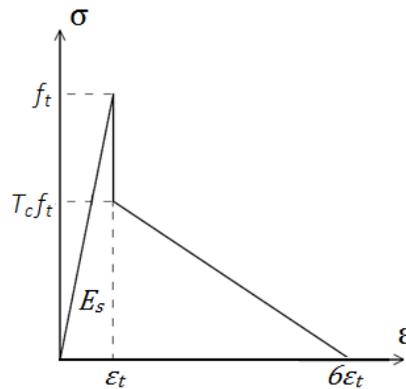


Fig. 4-4 Curva esfuerzo deformación a tensión del concreto

Además del modelo plástico y de falla, el programa permite incluir una relación esfuerzo-deformación no lineal para considerar un comportamiento parabólico a compresión. La rama ascendente del diagrama esfuerzo-deformación se determinó a partir de una curva multilínea de cinco puntos. Inicialmente presenta una pendiente igual al módulo de elasticidad del concreto, hasta el 30 por ciento de la resistencia a compresión. Posteriormente, se calcularon cuatro puntos más mediante el modelo propuesto por Hognestad, ecuación (2.1-2).

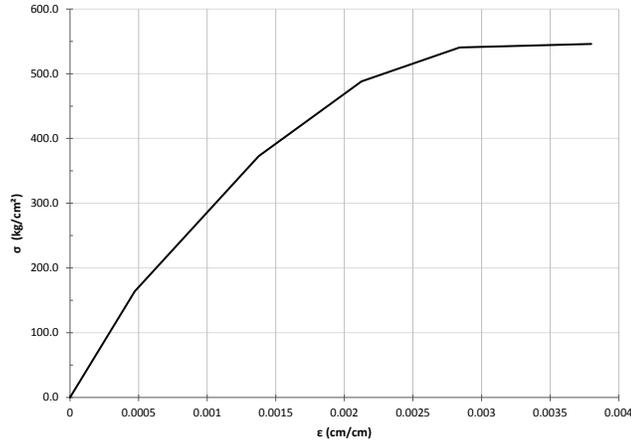


Fig. 4-5 Diagrama esfuerzo-deformación a compresión del concreto

En este trabajo, la pendiente negativa de la curva, en la zona de reblandecimiento, se sustituyó por una línea casi horizontal. Ya que, las pendientes negativas de las curvas esfuerzo-deformación tienden a conducir problemas de convergencia en la solución numérica, por lo que se supuso un comportamiento perfectamente plástico después de alcanzar la resistencia máxima, figura 4-5.

Acero de refuerzo

La relación esfuerzo-deformación del acero empleado como refuerzo longitudinal tiene un comportamiento similar al desarrollado para acero grado 42 (NMX-B-506-CANACERO-2011), principalmente después de la fluencia. Por lo que, la deformación unitaria a la fluencia ϵ_y , se determinó mediante la expresión (2.1-20), considerando el módulo de elasticidad igual a $E_s = 205.94 \text{ GPa}$ ($2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$). Mientras que la deformación ϵ_{sh} , se estableció a partir del trabajo experimental de Rodríguez y Botero (1996), con varillas fabricadas en México de diámetro pequeño. Además se empleó la ecuación (2.1-12) del modelo propuesto por Park y Paulay (1978), para obtener una curva multilínea de cuatro puntos que se aproximen a la rama parabólica en la zona de endurecimiento por deformación, figura 4-6.

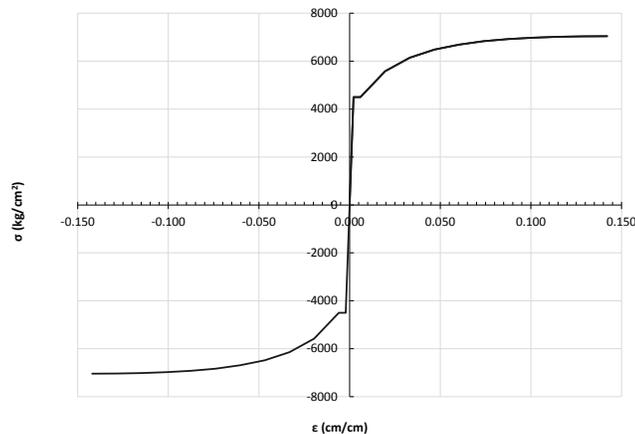


Fig. 4-6 Diagrama esfuerzo-deformación del acero longitudinal

En las pruebas realizadas al acero empleado como refuerzo transversal, se observó un comportamiento parecido al reportado para acero grado 60 (NMX-B-072-CANACERO-2013), caracterizado por la ausencia de una meseta después de la fluencia. En este caso, el diagrama esfuerzo deformación se simplificó a uno bilineal. La deformación de fluencia se calculó de igual forma que la correspondiente al acero longitudinal, ecuación (2.1-20).

$$E_T = \frac{f_{stru} - f_{ytr}}{\varepsilon_{stru} - \varepsilon_{ytr}} \quad (4.3-6)$$

Para el cómputo de la relación esfuerzo-deformación en el programa empleado de cualquier material que presenta un comportamiento bilineal, solo se requiere establecer el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y el módulo tangente del material. El módulo tangente es definido como la pendiente de la curva después de la fluencia. En ese sentido, una vez obtenidos los esfuerzos y deformaciones de fluencia y los de resistencia última, el módulo tangente se determina mediante la expresión (4.3-6).

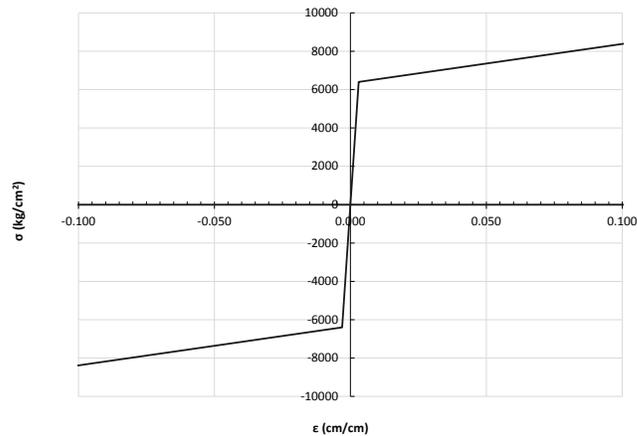


Fig. 4-7 Diagrama esfuerzo-deformación del acero transversal

La tabla 4-3 muestra la información de entrada para definir las propiedades mecánicas de los materiales del modelo numérico (en el modelo desarrollado se emplearon unidades del sistema técnico de unidades, cm - kgf - s)

Tabla 4-2 Modelos constitutivos de los materiales

MATERIAL	PROPIEDADES MECÁNICAS DEL MATERIAL	PROPIEDAD FISICAS																																																	
1 (Acero longitudinal)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Propiedades Isótropas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">E_{al}</td> <td style="text-align: center;">2.1E+006</td> </tr> <tr> <td>v_{al}</td> <td style="text-align: center;">0.30</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center;">Relación esfuerzo-deformación multilíneal</th> </tr> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">Deformación</th> <th style="text-align: center;">Esfuerzo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Punto 1</td> <td style="text-align: center;">0.002143</td> <td style="text-align: center;">4500.00</td> </tr> <tr> <td>Punto 2</td> <td style="text-align: center;">0.006000</td> <td style="text-align: center;">4501.00</td> </tr> <tr> <td>Punto 3</td> <td style="text-align: center;">0.038000</td> <td style="text-align: center;">6126.74</td> </tr> <tr> <td>Punto 4</td> <td style="text-align: center;">0.090000</td> <td style="text-align: center;">6918.32</td> </tr> <tr> <td>Punto 5</td> <td style="text-align: center;">0.142000</td> <td style="text-align: center;">7040.00</td> </tr> </tbody> </table>	Propiedades Isótropas		E _{al}	2.1E+006	v _{al}	0.30	Relación esfuerzo-deformación multilíneal				Deformación	Esfuerzo	Punto 1	0.002143	4500.00	Punto 2	0.006000	4501.00	Punto 3	0.038000	6126.74	Punto 4	0.090000	6918.32	Punto 5	0.142000	7040.00																							
Propiedades Isótropas																																																			
E _{al}	2.1E+006																																																		
v _{al}	0.30																																																		
Relación esfuerzo-deformación multilíneal																																																			
	Deformación	Esfuerzo																																																	
Punto 1	0.002143	4500.00																																																	
Punto 2	0.006000	4501.00																																																	
Punto 3	0.038000	6126.74																																																	
Punto 4	0.090000	6918.32																																																	
Punto 5	0.142000	7040.00																																																	
2 (Concreto)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Propiedades Isótropas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">E_c</td> <td style="text-align: center;">3.47E+005</td> </tr> <tr> <td>v_c</td> <td style="text-align: center;">0.26</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center;">Relación esfuerzo-deformación multilíneal</th> </tr> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">Deformación</th> <th style="text-align: center;">Esfuerzo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Punto 1</td> <td style="text-align: center;">0.000472</td> <td style="text-align: center;">163.80</td> </tr> <tr> <td>Punto 2</td> <td style="text-align: center;">0.001375</td> <td style="text-align: center;">372.63</td> </tr> <tr> <td>Punto 3</td> <td style="text-align: center;">0.002125</td> <td style="text-align: center;">488.19</td> </tr> <tr> <td>Punto 4</td> <td style="text-align: center;">0.002840</td> <td style="text-align: center;">540.71</td> </tr> <tr> <td>Punto 5</td> <td style="text-align: center;">0.003800</td> <td style="text-align: center;">546.00</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Modelo plástico triaxial</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">β_t</td> <td style="text-align: center;">0.25</td> </tr> <tr> <td>β_c</td> <td style="text-align: center;">1.00</td> </tr> <tr> <td>σ_{cu}</td> <td style="text-align: center;">45.00</td> </tr> <tr> <td>σ_{tu}</td> <td style="text-align: center;">-1.00</td> </tr> <tr> <td>σ_h</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td>f₁</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td>f₂</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td>T_c</td> <td style="text-align: center;">0.60</td> </tr> </tbody> </table>	Propiedades Isótropas		E _c	3.47E+005	v _c	0.26	Relación esfuerzo-deformación multilíneal				Deformación	Esfuerzo	Punto 1	0.000472	163.80	Punto 2	0.001375	372.63	Punto 3	0.002125	488.19	Punto 4	0.002840	540.71	Punto 5	0.003800	546.00	Modelo plástico triaxial		β _t	0.25	β _c	1.00	σ _{cu}	45.00	σ _{tu}	-1.00	σ _h	-	f ₁	-	f ₂	-	T _c	0.60	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Densidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">ρ_c</td> <td style="text-align: center;">2.243 E-006</td> </tr> </tbody> </table>	Densidad		ρ _c	2.243 E-006
Propiedades Isótropas																																																			
E _c	3.47E+005																																																		
v _c	0.26																																																		
Relación esfuerzo-deformación multilíneal																																																			
	Deformación	Esfuerzo																																																	
Punto 1	0.000472	163.80																																																	
Punto 2	0.001375	372.63																																																	
Punto 3	0.002125	488.19																																																	
Punto 4	0.002840	540.71																																																	
Punto 5	0.003800	546.00																																																	
Modelo plástico triaxial																																																			
β _t	0.25																																																		
β _c	1.00																																																		
σ _{cu}	45.00																																																		
σ _{tu}	-1.00																																																		
σ _h	-																																																		
f ₁	-																																																		
f ₂	-																																																		
T _c	0.60																																																		
Densidad																																																			
ρ _c	2.243 E-006																																																		
3 (Acero transversal)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Modelo elastoplástico bilíneal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">f_y</td> <td style="text-align: center;">6400</td> </tr> <tr> <td>E_T</td> <td style="text-align: center;">20448</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">Propiedades Isótropas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 30%;">E_{at}</td> <td style="text-align: center;">3.47E+005</td> </tr> <tr> <td>v_{at}</td> <td style="text-align: center;">0.30</td> </tr> </tbody> </table>	Modelo elastoplástico bilíneal		f _y	6400	E _T	20448	Propiedades Isótropas		E _{at}	3.47E+005	v _{at}	0.30																																						
Modelo elastoplástico bilíneal																																																			
f _y	6400																																																		
E _T	20448																																																		
Propiedades Isótropas																																																			
E _{at}	3.47E+005																																																		
v _{at}	0.30																																																		

4.3.3 Geometría y mallado

La zapata de los elementos prefabricados les proporciona estabilidad en la base y, por sus dimensiones, la rigidez lateral de este elemento es considerablemente mayor que la del fuste, por tanto, las rotaciones y deflexiones en la transición zapata-fuste se consideraron despreciables (asumiendo las condiciones en las que se ensayó el espécimen en el laboratorio). Además, aunque las cargas externas en el experimento se aplicaron sobre el cabezal, su presencia es intrascendente en el comportamiento de la sección crítica de la columna. De esta manera, la geometría del modelo de la columna se simplificó; solo tomando en cuenta el fuste hueco de la columna con las mismas dimensiones de la sección transversal del espécimen de prueba.

Al igual que en el programa experimental, en el modelo numérico, la carga lateral se aplicó con un claro de cortante de 3 m, medido a partir del paño superior de la zapata hasta el centro del cabezal, como se muestra en la figura 2-11.

En la aplicación del método discreto, la malla (discretización del sólido continuo) del modelo está influida determinantemente por la disposición del acero de refuerzo. Por lo que el mallado del modelo numérico se realizó manualmente, utilizando un programa de dibujo asistido por computadora (CAD).

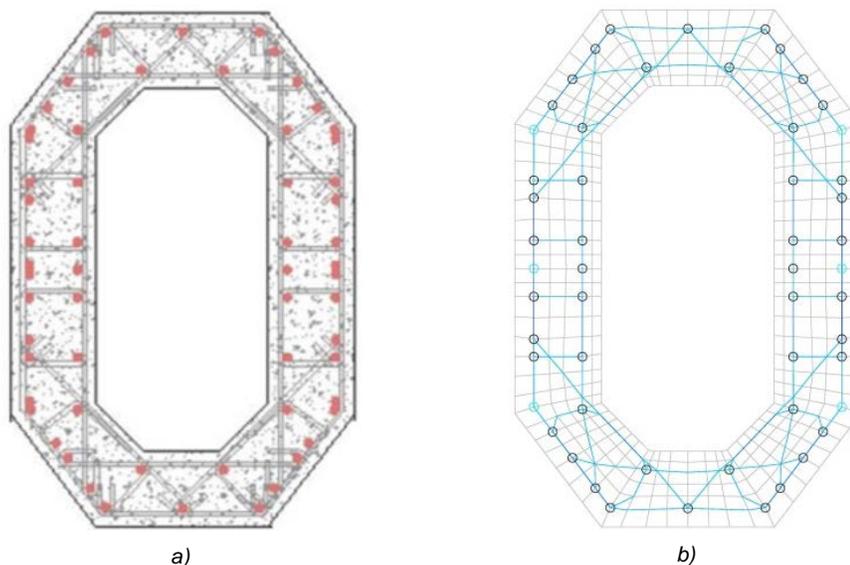


Fig. 4-8 Sección transversal; a) espécimen de prueba; b) modelo numérico

El cruce de barras de estribos y grapas en varias regiones de la sección y su geometría octagonal en planta definieron la orientación de los elementos sólidos. La disposición del acero de refuerzo y el número aproximado de elementos que se proponía obtener, determinaron el tamaño de los elementos. Ya definida la discretización en planta se estableció el tamaño adecuado en elevación, cuidando que no se presentara una relación de aspecto mayor a 3 entre su dimensión mayor y la menor. Como resultado, la sección mostrada en la figura 4-8 b se repite a cada 2.5 unidades a lo largo del fuste y la configuración de los elementos barra que constituyen el refuerzo transversal se repite según la separación mostrada en la figura 2-9 a.

Para obtener una aproximación adecuada de la respuesta de cualquier prototipo mediante el método de los elementos finitos, es necesario tener una densidad de malla adecuada del modelo. Por lo que se pretendió obtener una densidad de elementos lo suficientemente grande para detallar el refuerzo pero sin dejar de lado la demanda de recursos computacionales que implica un modelo extenso.

Resultado de las consideraciones anteriores, se obtuvo un modelo con 68,220 elementos: 13,500 elementos barra y 54,720 elementos sólidos; conectados por 64,372 nodos. La geometría de la malla y la configuración de los elementos barra en una sección con refuerzo transversal del modelo se muestran en las figuras 4-8 b y 4-9.

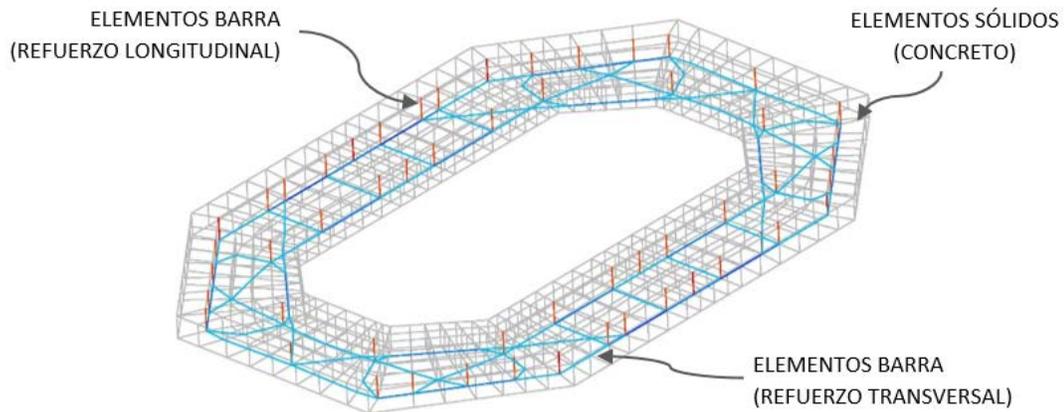


Fig. 4-9 Discretización de la sección transversal

4.3.4 Condiciones de frontera

Aunque los programas especializados en elemento finito emplean algoritmos para establecer condiciones de frontera que permitan modelar solo una porción del elemento cuando la geometría, las restricciones y las cargas presentan simetría en uno o varios ejes, en este trabajo se modeló completamente la columna. En el modelo numérico solo se restringieron los desplazamientos en los nodos de la base en las direcciones X , Y y Z son igual a cero durante todo el análisis, figura 4-10.

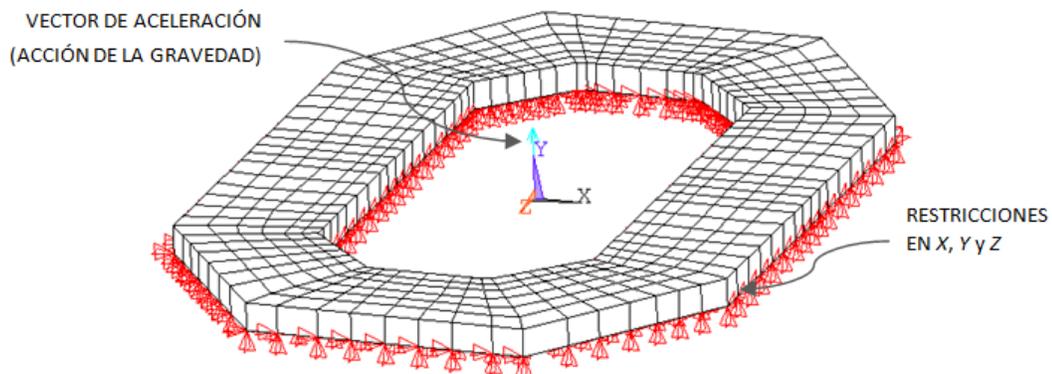


Fig. 4-10 Restricciones y vector de aceleración asignados a la sección inferior del modelo numérico

La aplicación de las cargas se dividió en tres etapas:

- Etapa I (fuerza de inercia). Para considerar los esfuerzos iniciales en el elemento debidos a la acción de la gravedad, como primer paso de carga se definió un vector de aceleración en dirección al eje Y con una magnitud de 9.81 m/s^2 (981 cm/s^2)
- Etapa II (carga axial). La carga P_p , se aplicó mediante una carga de superficie W_p (ecuación 4.3-7), uniformemente repartida sobre la cara superior del modelo, como se muestra en la figura 4-11.

$$W_p = \frac{P_p}{A_g} = 0.08 f'_c \quad (4.3-7)$$

- Etapa III (carga lateral). Debido a la ausencia de cabezal en el modelo numérico, la carga lateral incremental, V , del modelo numérico se aplicó en dirección del eje X , proporcionalmente en los nodos superiores, figura 4-11.

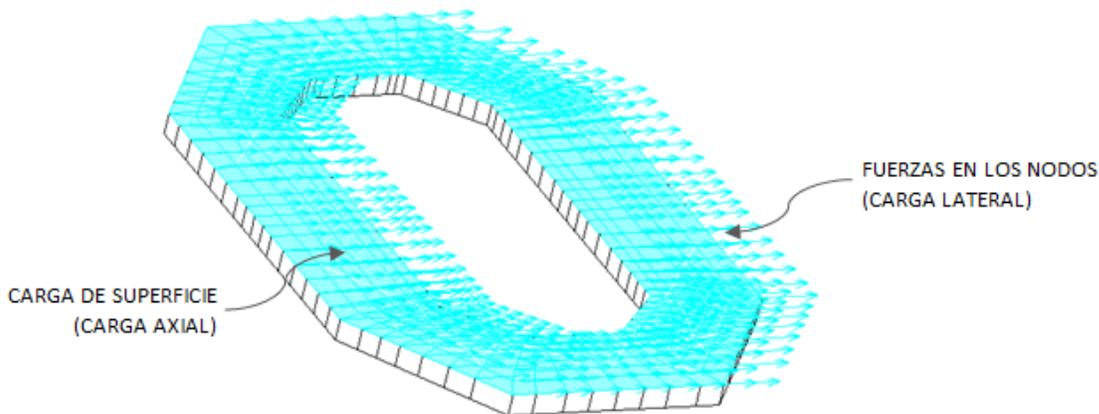


Fig. 4-11 Cargas de superficie y fuerzas aplicadas en la sección superior del modelo numérico

4.4 Proceso numérico de solución

Los métodos numéricos resuelven los problemas no lineales dividiendo la carga total aplicada en un paso de carga (loadstep), en una serie de incrementos (substeps). Cuando se ha resuelto el sistema para cada uno de los incrementos de carga, la rigidez del sistema se reevalúa con las propiedades de los materiales y la geometría del modelo resultante del paso anterior. De este modo la rigidez del modelo es ajustada para reflejar los cambios no lineales de la estructura antes de encontrar la solución lineal para el siguiente incremento de carga.

Las ecuaciones de equilibrio para resolver un problema estático lineal se plantean de acuerdo al método de las rigideces:

$$[K]\{u\} = \{F^a\} \quad (4.4-1)$$

Donde:

- $[K]$ = es la matriz de rigidez total
- $\{u\}$ = el vector de desplazamientos
- $\{F^a\}$ = vector de fuerzas aplicadas

4.4.1 Método Newton-Raphson

El programa utilizado emplea el método iterativo Newton-Raphson para actualizar la rigidez del modelo y encontrar la solución de un problema no lineal, ecuaciones (4.4-2) y (4.4-3). El método Newton-Raphson evalúa el vector de fuerzas no balanceado, el cual es la diferencia entre el vector de fuerzas restitutivas, $\{F^{fr}\}$, y las cargas aplicadas $\{F^a\}$.

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{fr}\} \quad (4.4-2)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} - \{\Delta u_i\} \quad (4.4-3)$$

Dónde:

- $\{K_i^T\}$ = la matriz de rigidez tangente
- $\{F^{fr}\}$ = vector de fuerzas restitutivas, relativas a las fuerzas de los elementos
- i = subíndice que indica la iteración de equilibrio actual

La matriz de rigidez tangente y el vector de fuerzas restitutivas se calculan a partir de las condiciones impuestas por el desplazamiento i , que generalmente, es la solución del paso previo. Si la ecuación (4.4-2) está en equilibrio, entonces se calcula $\{\Delta u_i\}$ con la ecuación (4.4-3) y es sumado al vector $\{u_i\}$. El programa encuentra la solución, usando las fuerzas no balanceadas (fuerzas residuales), y revisa la convergencia, si el criterio de convergencia no se satisface, el vector de fuerzas no balanceado es reevaluado y la matriz de rigideces se actualiza; para obtener una nueva solución. Este procedimiento iterativo continúa hasta que el problema converge (Ansys, 2013).

4.4.2 Criterios de convergencia

La convergencia se obtiene cuando el vector de fuerzas no balanceadas o de fuerzas residuales $\{R\}$, es menor que una tolerancia ε_R , multiplicada por un valor de referencia R_r , regularmente es igual a $\|\{F^a\}\|$, ecuación (4.4-4):

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_r \quad (4.4-4)$$

Donde:

$$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{fr}\}$$

El número de iteraciones para obtener la convergencia requerida depende de la no linealidad en el comportamiento del modelo cuando se aplica un incremento de carga, el número de

iteraciones puede ser extenso si el cambio en la respuesta del modelo es considerable antes de llegar a una solución. Para el caso del modelo de la columna fue necesaria la aplicación de la carga lateral utilizando varios pasos (loadsteps). En la tabla 4-3 se muestra la secuencia y el números de pasos por fase de carga.

De acuerdo al comportamiento y velocidad de cómputo, se estableció un número de incrementos (substeps) y una tolerancia de convergencia diferentes para cada uno de los pasos de carga, de modo que se presentara la convergencia mínima para obtener el equilibrio. La convergencia del modelo se revisó de acuerdo a los balances de fuerzas y de desplazamientos mediante las tolerancias ϵ_f y ϵ_u , respectivamente. Después de presentarse el agrietamiento, los valores de las tolerancias, que en un principio tomaron el valor de 0.001, se aumentaron hasta 7.5 veces en el caso de los valores iniciales del balance de fuerzas y 5 veces para el caso de desplazamientos.

Tabla 4-3 Secuencia de aplicación de cargas y criterios de convergencia

FASE	PASO DE CARGA (LOADSTEP)	NÚMERO DE INCREMENTOS (SUBSTEPS)	DIRECCIÓN	MAGNITUD	ϵ_f	ϵ_u
I	1	10	-Y	981.00	0.0010	0.0010
II	2	20	-Y	101,304.00	0.0010	0.0010
III (CARGA LATERAL)	3	125	X	6,250.00	0.0010	0.0010
	4	6000		15,000.00	0.0010	0.0010
	5	7500		3,750.00	0.0010	0.0010
	6	5000		2,500.00	0.0075	0.0050
	7	1600		800.00	0.0050	0.0050
	8	200		100.00	0.0050	0.0050

5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del análisis del modelo de una columna hueca de concreto reforzado sujeta bajo la acción de cargas axiales y laterales empleando el método de elementos finitos. Primeramente, se muestra en términos de esfuerzos y deformaciones (elásticas e inelásticas) la respuesta del modelo para determinados estados de carga, ya sea en los nodos o en los elementos. Además, se incluye la historia de desplazamientos en el centro del extremo libre asociada a la variación de rigidez durante la aplicación de la carga lateral. También, se monitoreó el comportamiento del modelo, a lo largo del fuste y en la sección crítica, durante la aplicación de las tres fases de carga: fuerza de inercia, carga axial y carga lateral.

Es importante señalar que los esfuerzos y deformaciones de los elementos tipo barra se muestran por separado; al ser elementos unidimensionales solo existe una dimensión asociada a su comportamiento, en este caso su eje local, K , (ver figura 4-2 b) que no corresponde con el sentido y dirección de los ejes globales X , Y y Z . Por último, se comparan los resultados del modelo desarrollado en el programa de análisis no lineal con los obtenidos experimentalmente y mediante el método de las fibras.

5.1 Respuesta bajo cargas verticales

5.1.1 Peso propio

La etapa I de carga define un estado inicial de esfuerzos en la columna previo a la aplicación de las cargas en el extremo libre. Debido a los efectos de la gravedad, la magnitud de los esfuerzos en los elementos es proporcional a su ubicación respecto a la altura de la columna, por lo que son mayores en la base, como se muestra en la figura 5-1.

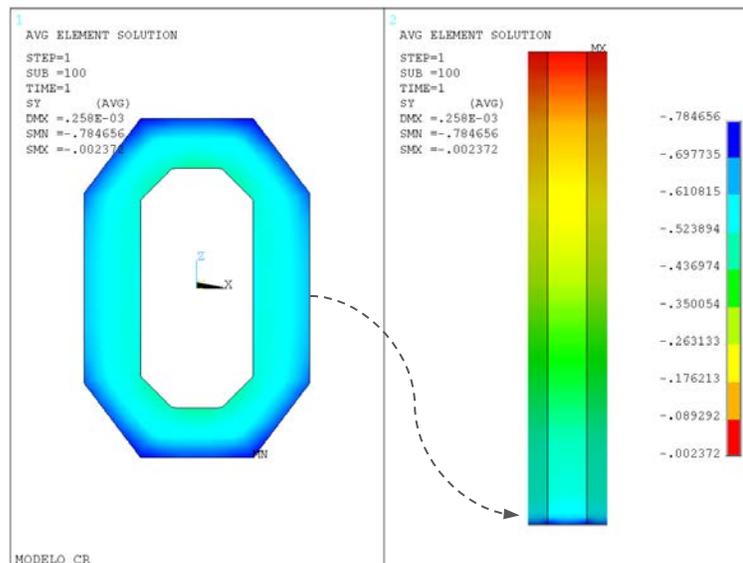


Fig. 5-1 Distribución de esfuerzos promedio en los sólidos, en dirección Y, resultado del primer paso de carga

Se comprobó que el peso propio calculado a partir de la geometría del fuste de 3 m de altura y con la densidad de sus materiales, coincidiera con la suma de reacciones en el eje global Y del modelo numérico que fue igual a 13.97 kN (1.42 t).

Por las dimensiones del modelo, en este caso, el esfuerzo máximo debido a la gravedad fue menor a 0.1 MPa (1 kgf/cm²), considerablemente menor que el esfuerzo resistente de los materiales. Sin embargo, el peso propio tomará mayor relevancia en la simulación de prototipos con un peso representativo.

5.1.2 Carga axial

La distribución de esfuerzos de compresión en el modelo a lo largo del fuste fue prácticamente uniforme durante la aplicación de toda la carga axial. Al final de la aplicación de esta carga, los esfuerzos resultantes fueron en promedio de 4.41 MPa (45.0 kgf/cm²). No obstante, existen variaciones por el efecto de la rigidez axial de los elementos barra, específicamente en los nodos adyacentes entre barras longitudinales y sólidos. Por otro lado, la concentración de esfuerzos en el contorno de la base es el resultado de las restricciones en X y Z de los nodos en esa sección del modelo. Como se observa en la figura 5-2, la restricción de desplazamientos en la base impide las deformaciones transversales de los sólidos en el contorno de esta sección.

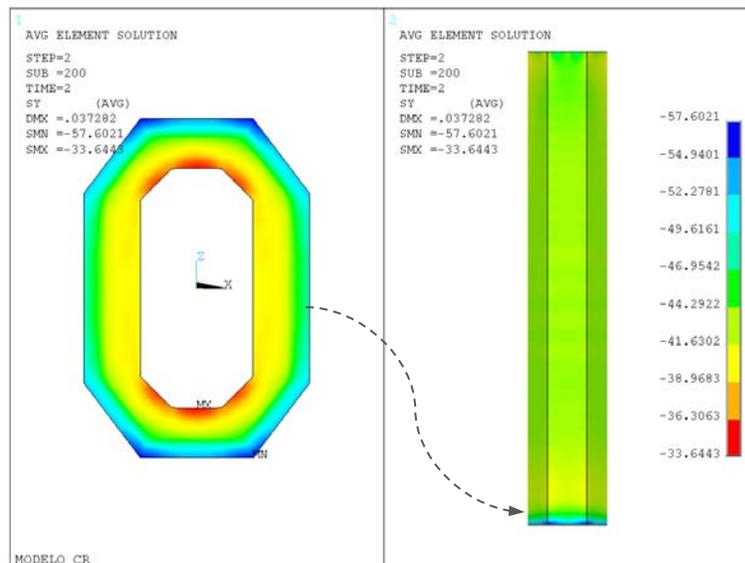


Fig. 5-2 Distribución de esfuerzos promedio en los sólidos, en dirección Y, debidos al efecto de la carga axial

Una vez aplicada la carga axial, los elementos barra que constituyen el refuerzo transversal presentan esfuerzos de tensión, cercanos a 8.83 MPa (90 kgf/cm²). Esto es debido a la restricción que ejercen sobre la deformación transversal de los sólidos. Mientras que, las barras longitudinales, al igual que los sólidos, toman esfuerzos de compresión por la compatibilidad de deformaciones que existe entre estos elementos pero con mayor magnitud a causa de su rigidez axial superior, siendo estos del orden de 27.95 MPa (285 kgf/cm²), figura 5-3.

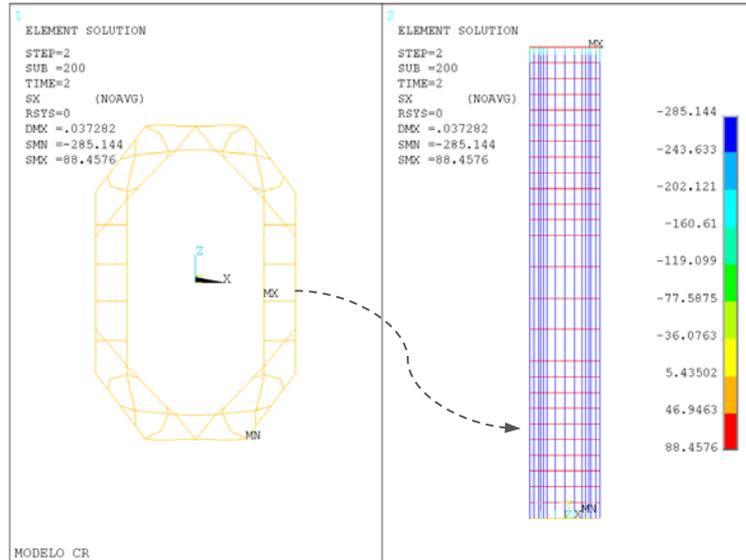


Fig. 5-3 Distribución de esfuerzos en las barras debido a la carga axial

5.3 Respuesta bajo flexocompresión

5.3.1 Primer agrietamiento

Al incrementar la magnitud de la carga lateral, la distribución de esfuerzos que se presentaba en la base de la sección de la columna dejó de ser uniforme. En consecuencia, los esfuerzos en el extremo a compresión aumentan en magnitud, en tanto que los esfuerzos en el extremo opuesto disminuyen hasta cambiar de sentido; convirtiéndose en esfuerzos de tensión, de igual forma se presenta este comportamiento en términos de deformaciones unitarias.

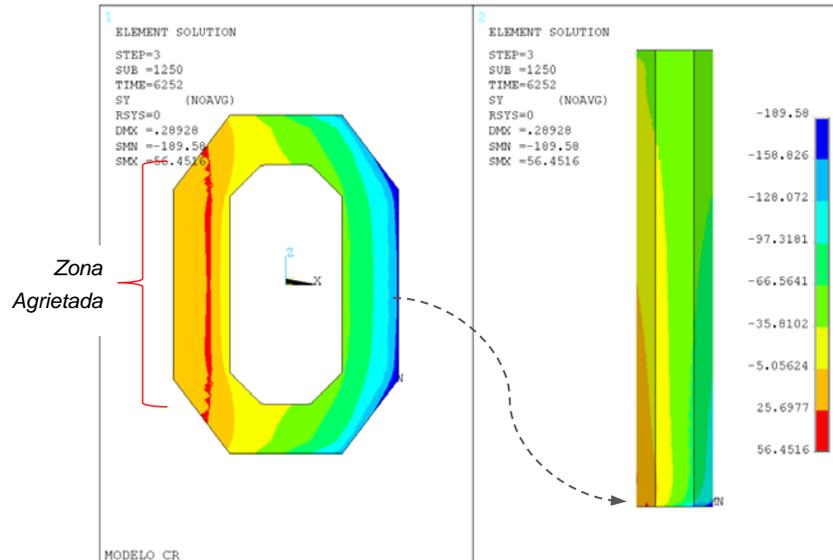


Fig. 5-4 Distribución de esfuerzos máximos en los puntos de integración de los sólidos, en dirección Y, durante el inicio del agrietamiento

Continuando con la aplicación de incrementos constantes de carga, los esfuerzos en la dirección *Y* en los sólidos pasan de ser completamente de compresión a distribuirse en regiones a tensión y otras a compresión, además su magnitud es proporcional a su posición respecto al peralte de la sección transversal (en el sentido de la carga). Después de superar el esfuerzo resistente a tensión, en algunos puntos de integración de los sólidos, comienzan a aparecer agrietamientos en estos elementos, por tanto, los esfuerzos en estos puntos disminuyen (ver figura 5-4).

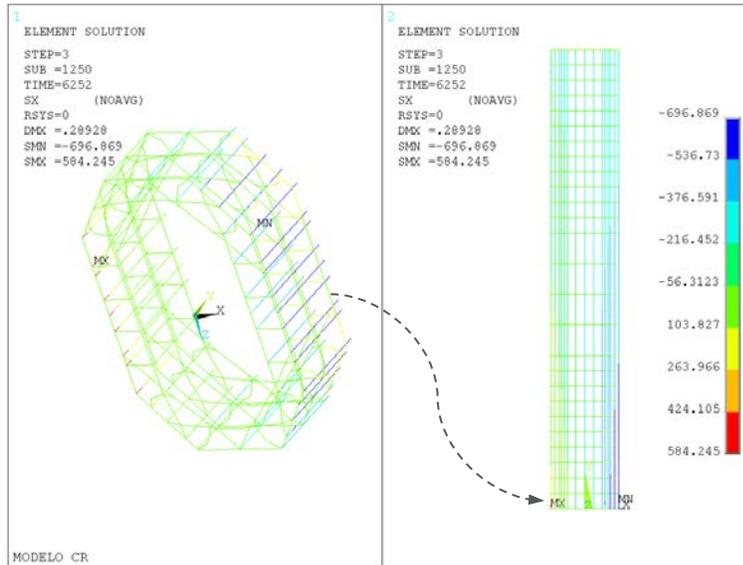


Fig. 5-5 Distribución de esfuerzos en las barras después del primer agrietamiento

Análogamente, los esfuerzos en las barras longitudinales pasan de ser completamente de compresión a ser de tensión en las zonas más alejadas de la región extrema a compresión, figura 5-5. Para esta condición, el desplazamiento en el extremo libre superior de la columna es de 2.9 mm. Y la rigidez lateral es del orden de 2,113.5 MN/cm (21,551.7 kgf/cm) previo a la aparición de las primeras grietas.

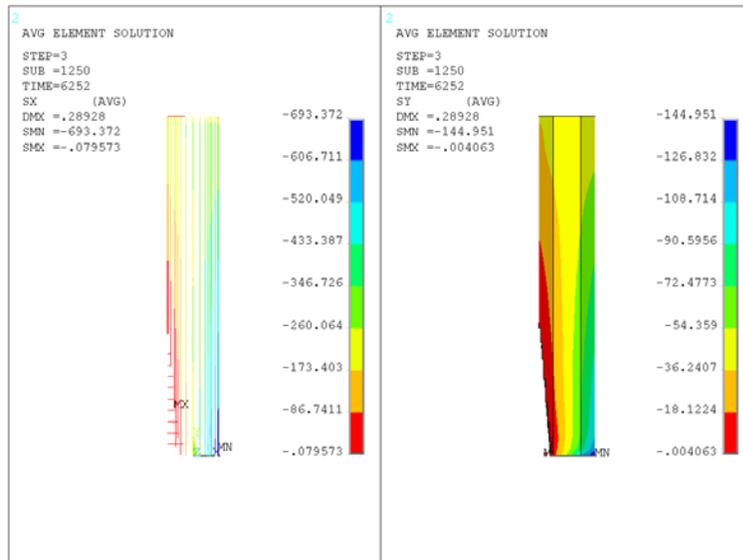


Fig. 5-6 Elementos bajo esfuerzos de compresión después del primer agrietamiento; en las barras, izquierda; y en los sólidos, en dirección *Y*, derecha

A lo largo de la aplicación de la carga, tanto los esfuerzos de las barras como los de los sólidos se observa una región de transición donde estos cambian de sentido, de compresión a tensión, y su ubicación coincide en ambos casos. Como se muestra en la figura 5-6, gráficamente se puede apreciar la posición de un plano neutro que cambia de ubicación mientras se incrementa la magnitud de la carga lateral.

5.3.2 Comportamiento posterior al primer agrietamiento

Una vez presentado el primer agrietamiento, los desplazamientos medidos en la parte central del extremo libre continúan siendo proporcionales a la magnitud de la carga lateral. El desarrollo de grietas en los elementos a tensión tiene poco impacto en la rigidez lateral hasta que los esfuerzos en el sentido perpendicular a las primeras grietas son próximos a la resistencia a tensión, figura 5-7.

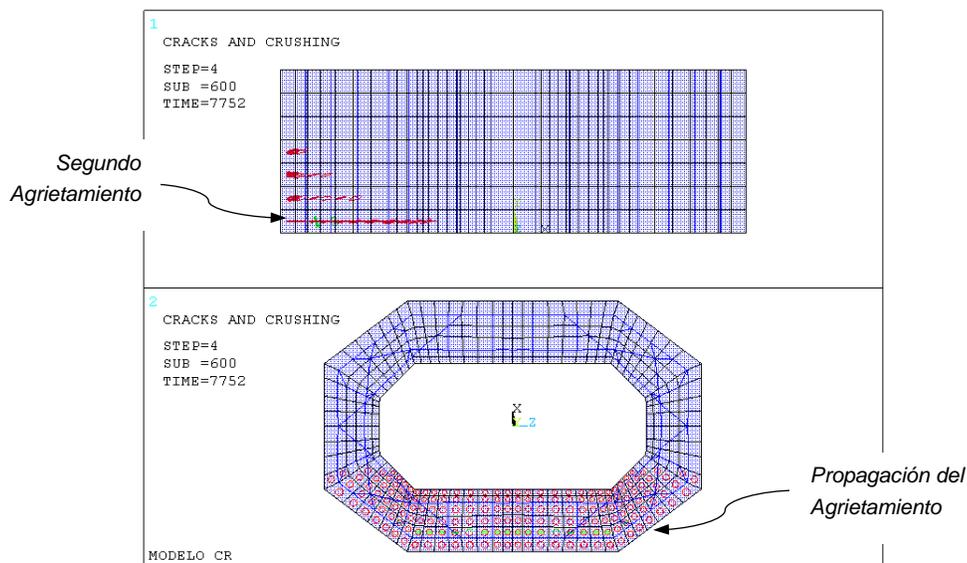


Fig. 5-7 Aparición de las primeras grietas

El programa de análisis indica con un círculo ubicado en el centroide del elemento sólido la presencia de grietas. El plano de cada círculo coincide con la dirección del agrietamiento y es perpendicular al esfuerzo principal que alcanza la resistencia a tensión del material. En este sentido, se señala con un círculo de color rojo la presencia del agrietamiento por la acción del primer esfuerzo principal; de color verde cuando ocurre debido al segundo esfuerzo principal; mientras que de color azul debido al tercer esfuerzo principal.

Como se observa en la figura 5-8, la relación carga-desplazamiento permanece lineal hasta que la carga lateral toma un valor de 76 kN (7.75 t). Solo después de la aparición de las segundas grietas y la propagación de las primeras, la rigidez lateral disminuye considerablemente.

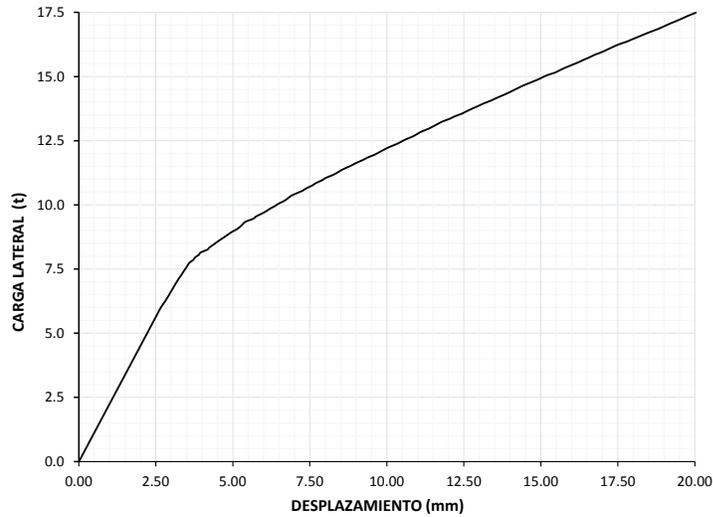


Fig. 5-8 Curva carga-desplazamiento antes y después del primer agrietamiento

Posterior al cambio de rigidez lateral, la curva carga-desplazamiento se mantiene prácticamente lineal con una pendiente igual a 563.40 MN/cm (5,745 kgf/cm), que es casi cuatro veces menor que la pendiente de esta curva antes de la aparición del primer agrietamiento. En el desarrollo de esta segunda rama, el agrietamiento tiene lugar en número mayor de sólidos, como se muestra en la figura 5-9.

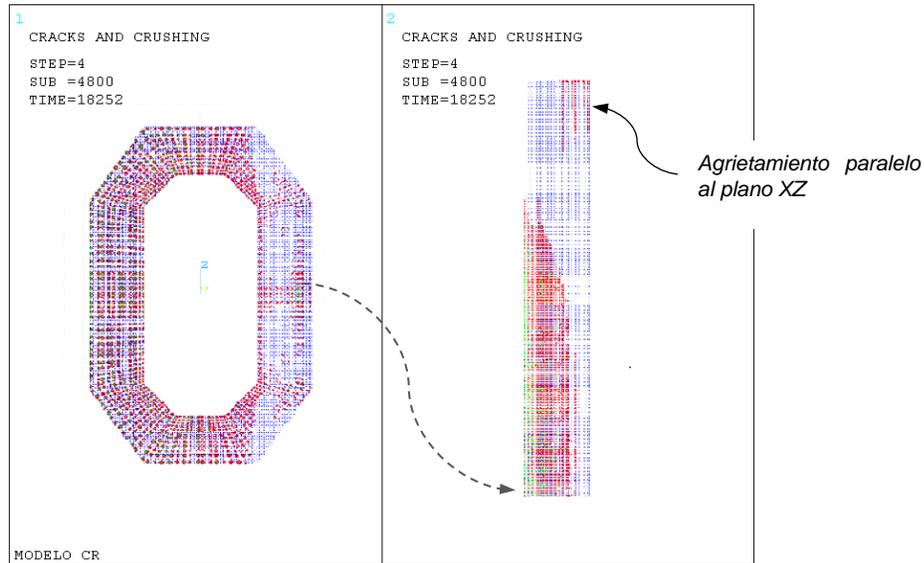


Fig. 5-9 Agrietamiento posterior al primer cambio de rigidez lateral

Además, se presenta cierto agrietamiento en el extremo libre en el sentido perpendicular a la sección de la columna. El cual puede ser relacionado con la distribución de los esfuerzos por la aplicación de la carga lateral ya que por su dirección, en el plano XZ de la figura 5-10, no se asocian a la flexión del elemento,

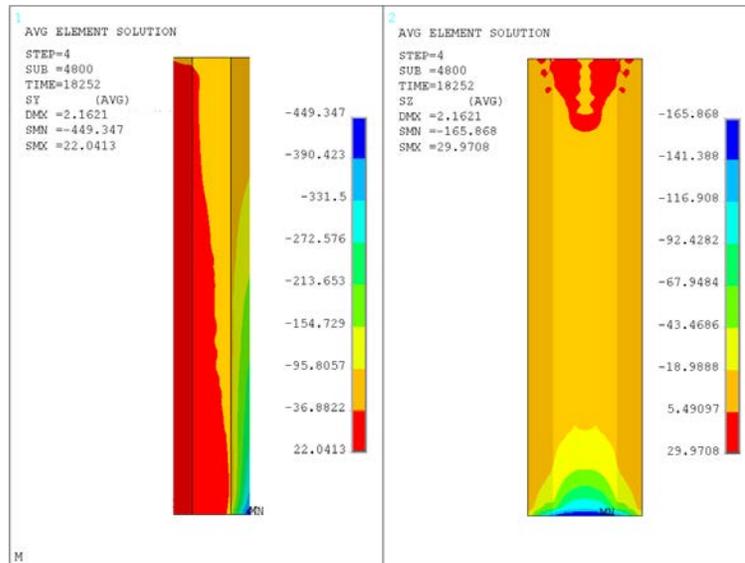


Fig. 5-10 Estado de esfuerzos promedio en los sólidos previo a la fluencia de las barras, esfuerzos en dirección Y (izquierda) en el plano XY y esfuerzos en dirección Z (derecha) en el plano YZ

5.3.3 Fluencia del refuerzo longitudinal

El incremento de la carga lateral y la poca resistencia a tensión de los elementos sólidos originan que el refuerzo longitudinal tome mayor cantidad de esfuerzos de tensión. Como se muestra en la figura 5-11, aunque la disposición del refuerzo es simétrica, los esfuerzos de tensión son de mayor magnitud que los esfuerzos en el extremo a compresión.

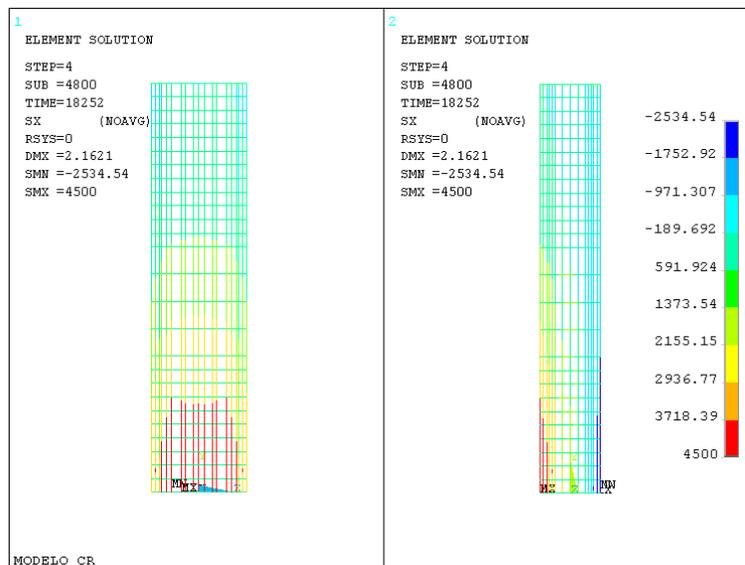


Fig. 5-11 Esfuerzos en las barras en la primera fluencia, plano YZ (izquierda) y plano XY (derecha)

Cuando las barras extremas a tensión de la base apenas superan el valor del esfuerzo de fluencia, se generan deformaciones plásticas en esos elementos. En la figura 5-11 se muestra que los esfuerzos de las barras longitudinales en la base de la columna son iguales a 441.30 MPa (4500 kgf/cm²), lo que indica el inició de la fluencia de estos elementos. Este ocurre

cuando la magnitud de la carga lateral es 179.0 kN (18.25 t), sin embargo, la relación carga-desplazamiento permanece sensiblemente lineal, y solo cuando se presenta la fluencia en más elementos barra es que observa un cambio significativo de rigidez. Se aprecia una parábola con vértice cerca de 207.4 kN (21.15 t) y una desplazamiento en el extremo libre de 28.6 mm (ver figura 5-13).

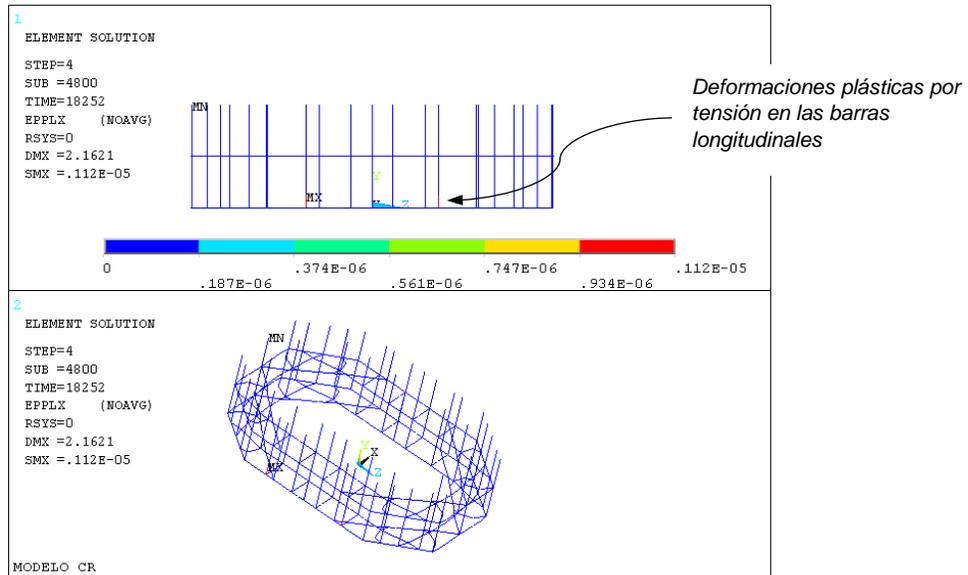


Fig. 5-12 Fluencia del refuerzo longitudinal

Cuando se presenta la primera fluencia y continúa el incremento de la carga lateral, los esfuerzos principales en compresión de los sólidos son mayores a la resistencia a compresión, como se muestra en la figura 5-14. Si bien se deshabilitó el aplastamiento, el programa tomó en cuenta la resistencia triaxial a causa de los esfuerzos de confinamiento que existen en las otras dos direcciones.

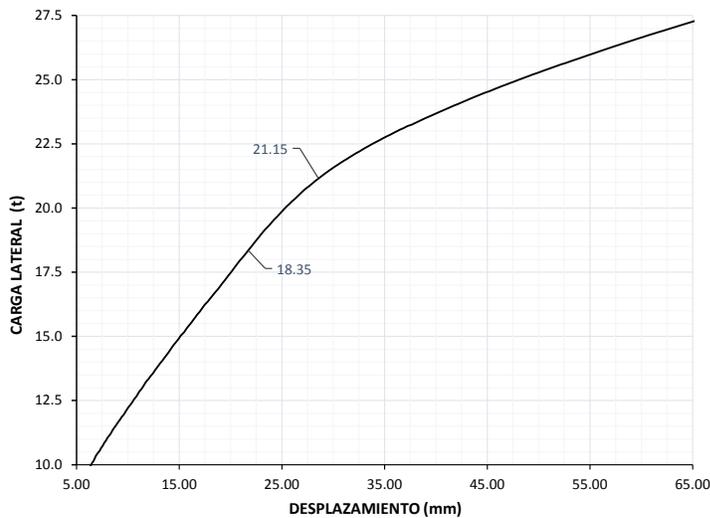


Fig. 5-13 Curva carga-desplazamiento antes y después de la fluencia

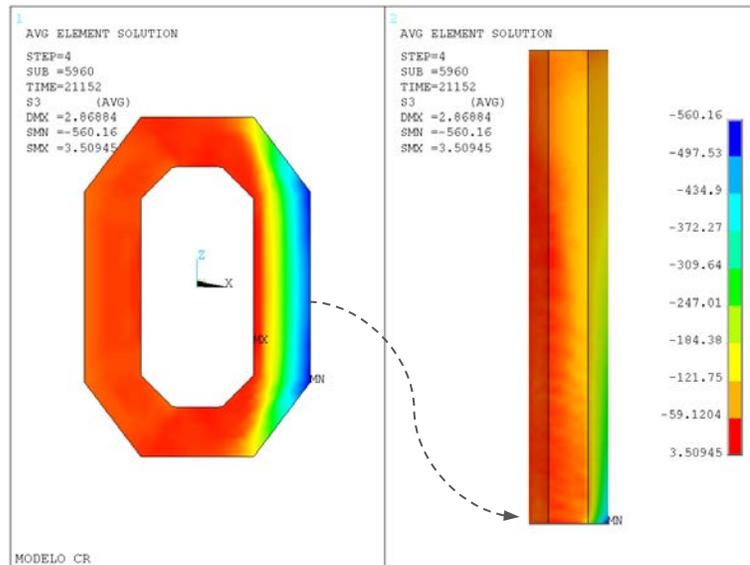


Fig. 5-14 Esfuerzos principales mayores promedio en los sólidos durante la fluencia del refuerzo

5.3.4 Resistencia última

Después de resolver el subpaso correspondiente a 277.6 kN (28.3 t) de carga lateral, el programa no determina una solución para siguiente incremento; durante el proceso iterativo, los nodos de la sección crítica a compresión, presentan desplazamientos que sobrepasan las dimensiones límite del programa. En este caso, la capacidad para seguir tomando carga se interrumpe abruptamente y el programa calcula deformaciones muy grandes para incrementos pequeños de carga, incluso menores a 2.45 N (0.25 kgf).

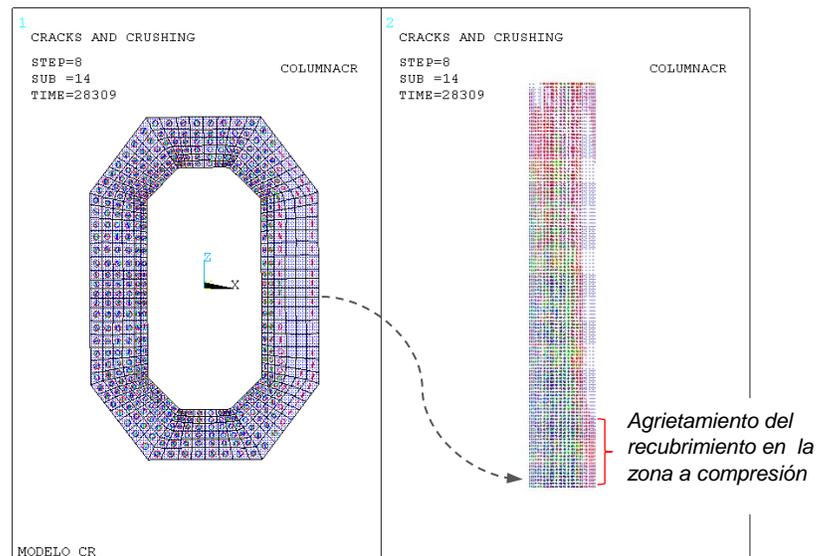


Fig. 5-15 Agrietamiento en el estado de resistencia última

Como se observa en la figura 5-15, mientras la columna sigue tomando carga, antes de alcanzar la resistencia última, el agrietamiento continúa en mayor parte de los sólidos y en el extremo a tensión se presentan esfuerzos en la tercera dirección principal que sobrepasan la resistencia a

tensión. Además, se identifican grietas en la zona a compresión de la sección crítica, las cuales son paralelas a la cara lateral de la columna, en el plano XZ. Este agrietamiento puede asociarse con la inminente falla de los sólidos, ya que el esfuerzo principal de compresión provoca deformaciones transversales que originan agrietamiento paralelo a la acción de la carga y de este modo se alcanza la resistencia a compresión de los sólidos; de acuerdo al modelo constitutivo empleado para estos elementos, cuando se llega a la resistencia máxima a compresión su rigidez es prácticamente nula. De esta manera, es posible concluir que el modelo numérico pierde estabilidad por la pérdida local de rigidez en el recubrimiento sujeto a compresión.

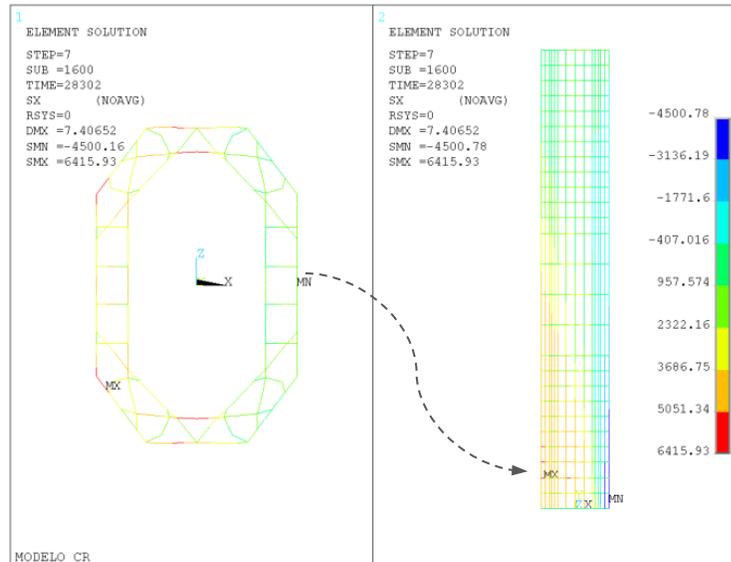


Fig. 5-16 Esfuerzos en las barras en el estado de resistencia última

Como se observa en la figura 5-16, a este nivel de carga los esfuerzos en las barras de refuerzo transversal, cercanos a la sección crítica, toman la magnitud de los esfuerzos que presentan las barras longitudinales, incluso cuando estas ya han fluido. Mientras que, en la región a compresión las barras longitudinales fluyen pero por esfuerzos de compresión, sin embargo, apenas toman esfuerzos superiores al de fluencia.

Al mismo tiempo, de la figura 5-17 se muestra que los esfuerzos promedio a compresión en los sólidos de la sección crítica sobrepasan los 76.5 MPa (780 kg/cm²), aproximadamente un 43 por ciento mayor que la resistencia a compresión uniaxial.

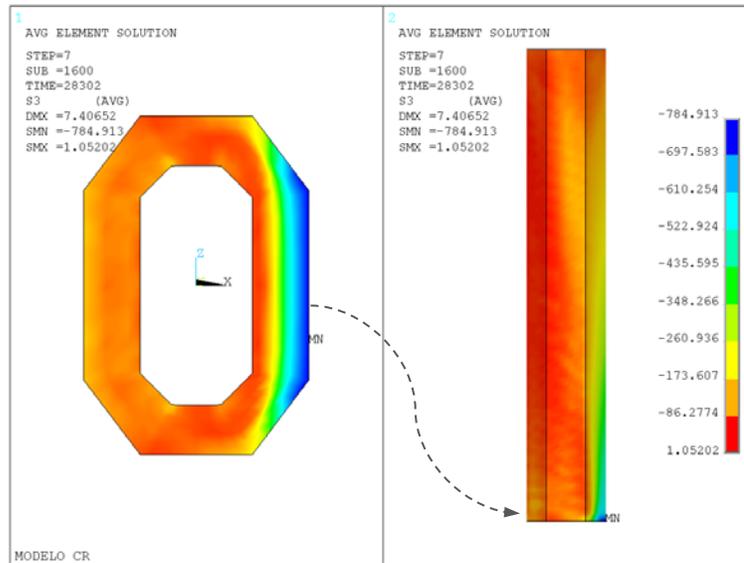


Fig. 5-17 Esfuerzos promedio en los sólidos, en dirección Y, en el estado de resistencia última

En la distribución de deformaciones, se puede observar una región en donde la mayoría de los elementos sobrepasan la deformación de fluencia, por lo que se puede estimar una longitud de plastificación o articulación plástica, aproximadamente igual a 650 mm.

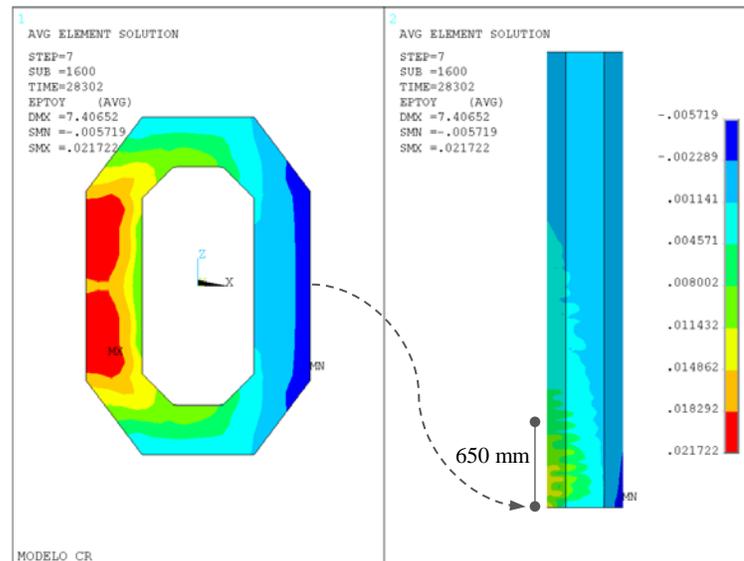


Fig. 5-18 Esfuerzos principales en los sólidos en el estado de resistencia última

5.3.5 Comportamiento de las deformaciones en la sección crítica

Como se muestra en la figura 5-18, las deformaciones unitarias en los elementos en la sección crítica no tienen una disposición lineal. Principalmente, existen concentraciones de esfuerzos y deformaciones en los nodos compartidos entre sólidos y barras longitudinales, figura 5-19.

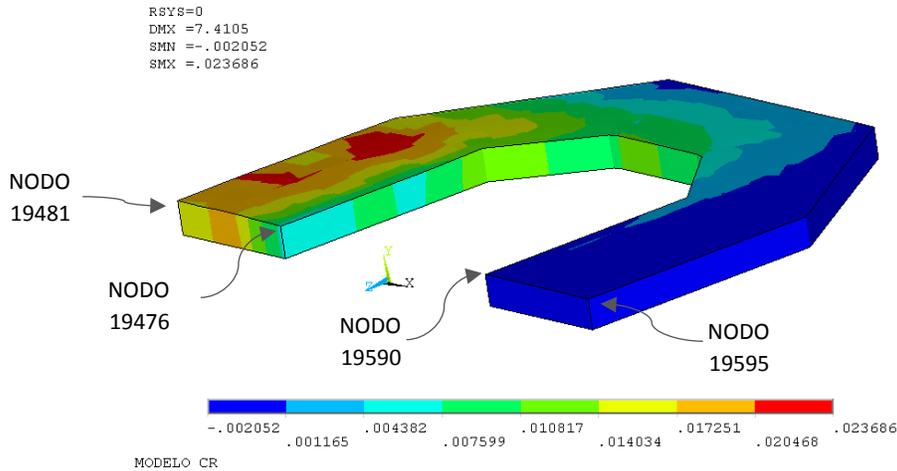


Fig. 5-19 Deformaciones en la dirección Y de los sólidos en la sección crítica

Una medición de la curvatura a diferentes profundidades del peralte de la sección muestra que su distribución no es uniforme. En la figura 5-20 se grafica la curvatura calculada a partir de las deformaciones totales de diferentes nodos respecto al extremo en tensión a lo largo de la aplicación de la carga lateral.

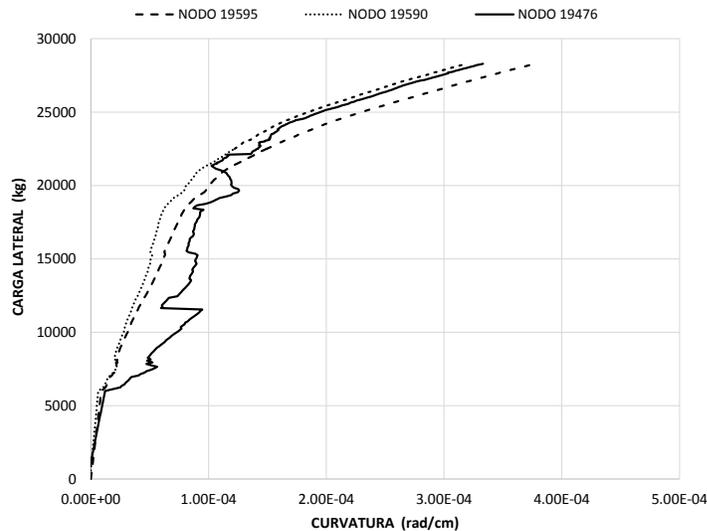


Fig. 5-20 Curvas carga lateral – curvatura de la sección crítica

5.4 Comparación de los resultados teóricos con experimentales

5.4.1 Diagrama momento-curvatura

Como se describe en la sección 5.3.5, el perfil de deformaciones en la sección crítica del modelo de elementos finitos no es uniforme mientras se desarrolla la flexión. Sin embargo, a partir de las deformaciones unitarias en dirección Y de los nodos 19590 y 19481, figura 5-19, se estimó un diagrama momento - curvatura representativo en la sección crítica, considerando que el momento flexionante correspondiente es igual a la carga lateral multiplicado por un brazo de

palanca, en este caso, de 3 m. En la figura 5-21 se muestran el comportamiento de la curvatura en la sección crítica a lo largo de la aplicación de la carga, calculada por el MEF y mediante el método de las fibras.

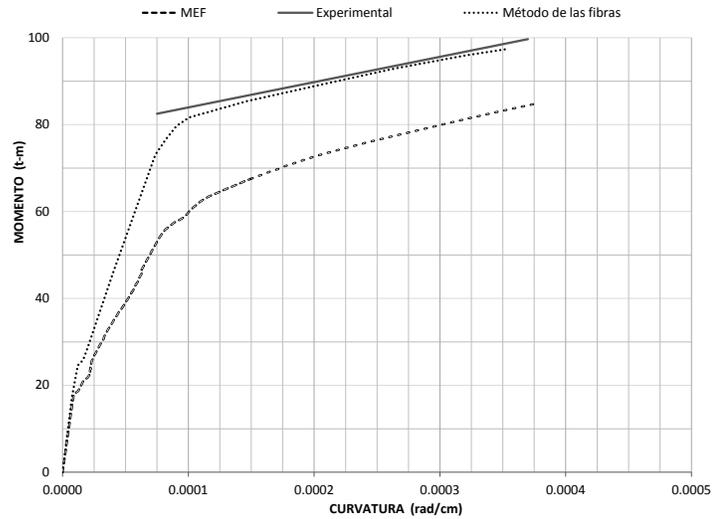


Fig. 5-21 Diagramas momento-curvatura de los modelos numéricos en la sección crítica

En la tabla 5-1 se comparan los resultados numéricos con el comportamiento de la curvatura registrados por Martínez (2013). Además, se calcula la ductilidad de curvatura, según la expresión (2.2-4), para cada uno de los modelos.

Tabla 5-1 Curvaturas y momentos de agrietamiento, fluencia y último analíticos y experimental

	Arietamiento		Fluencia		Último		Ductilidad
	M_{ag}	φ_{ag}	M_y	φ_y	M_u	φ_u	μ_φ
	kN - m (t-m)	(cm^{-1})	kN - m (t-m)	(cm^{-1})	kN - m (t-m)	(cm^{-1})	
MEF	183.87 (18.75)	1.26E-05	578.1 (58.95)	0.97E-04	832.58 (84.90)	3.77E-04	3.87
Método de las fibras	241.05 (24.58)	1.21E-05	716.77 (73.09)	0.74E-04	955.17 (97.40)	3.54E-04	4.78
Experimental	244.19 (24.90)	-	809.05 (82.50)	1.05E-04	977.72 (99.70)	2.85E-04	2.71

5.4.2 Desplazamiento lateral

Como se muestra en la figura 5-22, el comportamiento inicial de los modelos numéricos es similar, tanto en la medición de curvatura como de desplazamiento. Sin embargo, después del primer cambio de rigidez por agrietamiento, el comportamiento de la curva calculada mediante el método de las fibras muestra mayor rigidez. En el estado agrietado, la pendiente de la curva obtenida mediante el MEF se ajusta de mejor manera al comportamiento de la curva obtenida

experimentalmente, pero posterior a la fluencia esto no es así. La pérdida de rigidez por la fluencia del refuerzo longitudinal del MEF es de mayor magnitud que la presentada por los otros dos modelos, de tal modo que el comportamiento experimental presenta mayor resistencia y capacidad de desplazamiento que los modelos numéricos

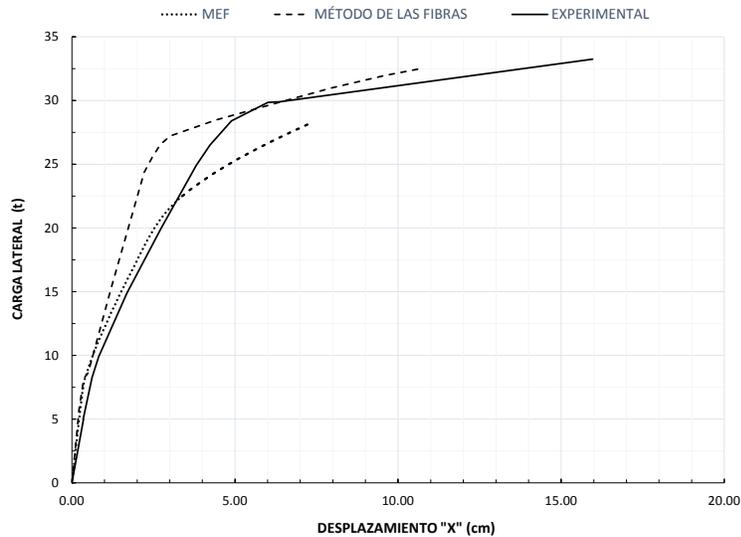


Fig. 5-22 Diagramas carga-desplazamiento de los modelos numéricos y del espécimen de prueba

La terminación de las curvas calculadas por los métodos numéricos representan la pérdida del recubrimiento por aplastamiento del concreto en compresión. En el caso del análisis por medio del método de las fibras, la resistencia última se propone cuando la fibra extrema a compresión alcanza la deformación última del concreto. Mientras que, en el MEF, si bien no se determina un aplastamiento de los sólidos, el comportamiento de la convergencia descrito en la sección 4.3.4 impide seguir con el análisis.

Tabla 5-2 Carga y desplazamiento de agrietamiento, fluencia y último analíticos y experimental

	Arietamiento		Fluencia		Último		Ductilidad
	P_{ag}	Δ_{ag}	P_y	Δ_y	P_u	Δ_u	
	kN (t)	mm	kN (t)	mm	kN (t)	mm	$\mu\Delta$
MEF	76.00 (7.75)	3.60	207.41 (21.15)	28.60	277.63 (28.31)	73.90	2.58
Método de las fibras	80.32 (8.19)	3.60	238.89 (24.36)	22.10	318.42 (32.47)	106.10	4.80
Experimental	81.40 (8.30)	6.20	269.68 (27.50)	33.10	325.87 (33.23)	167.90	5.07

6 CONCLUSIONES

Con base en la investigación realizada para la modelación de la columna en estudio, se encontró que la implementación del MEF en programas de análisis no lineal para evaluar la respuesta de diferentes elementos de concreto reforzado ha evolucionado significativamente, haciendo posible la modelación de problemas complejos en una menor cantidad de tiempo, obteniendo resultados con una aproximación aceptable en elementos sujetos a flexión, específicamente en el rango elástico. Para ello, es necesario conocer los parámetros empleados para estimar la resistencia triaxial, la superficie de falla y el agrietamiento en tensión del concreto, así como el comportamiento en el rango no lineal del acero de refuerzo. Es decir, se requiere el dominio de los diferentes modelos constitutivos que reproducen la no linealidad de la relación esfuerzo-deformación de los materiales que constituyen el concreto reforzado.

De la modelación numérica del espécimen de prueba, por el método de elementos finitos, se concluye que:

- La elección del tipo de elementos para modelar el concreto reforzado y los modelos constitutivos para representar las propiedades de los materiales, además de la generación adecuada de la malla, son la base para obtener una buena aproximación numérica del comportamiento real del modelo.
- El método discreto para modelar el acero de refuerzo se puede adaptar casi para cualquier geometría, sin embargo, cuando el modelo es extenso se requiere de mayores recursos computacionales y de tiempo efectivo de cómputo. Por lo cual, es recomendable establecer en primer lugar los alcances del problema a estudiar, definiendo así el método adecuado para modelar el refuerzo, las condiciones de frontera y el tipo de análisis (estático o dinámico).
- El modelo plástico empleado en ANSYS para representar el comportamiento constitutivo del concreto ha arrojado resultados aceptables en el rango elástico en este trabajo y en otros, como por ejemplo Kachlakev *et al* (2001), Wolansky (2004), Godínez (2011). Sin embargo, en el rango inelástico, es necesaria mayor investigación para simular apropiadamente la pérdida de adherencia entre los elementos previo la resistencia última.

Del comportamiento del modelo de elementos finitos, se observó que:

- Es importante la participación de los coeficientes que establecen la cantidad de cortante que se transmite entre grietas para la obtención de una buena aproximación real del problema. En este trabajo, la constante que definía la cantidad de cortante que se transmite cuando la grieta está cerrada no tuvo injerencia en los resultados ya que el elemento se cargó en una sola dirección y las grietas generadas en la zona a tensión no fueron cerradas por una carga reversible. En cambio, es recomendable la calibración de estas constantes en modelos que representen un comportamiento histerético; ya que se presentarán estados en donde las grietas podrán estar cerradas o abiertas, dependiendo el efecto de una carga reversible en el elemento, por lo que la magnitud de estos

coeficientes afectarán proporcionalmente la rigidez del elemento después de comenzar el agrietamiento.

- Previo a la fluencia del refuerzo en tensión, la densidad de las grietas reportadas numéricamente es mayor que el apreciado experimentalmente. Esto es porque en el análisis numérico, se grafican las grietas cada vez que en algún punto de integración de los sólidos se alcanza la resistencia a tensión independiente de su apertura.
- Por otro lado, la pérdida de estabilidad en la convergencia en el proceso de solución, cuando se alcanza la resistencia a compresión de los elementos que conforman el concreto, limita el análisis. Por ello, es importante el desarrollo de algoritmos que permitan atenuar la sensibilidad numérica propiciada por el mecanismo de falla de este tipo de elementos.

De la comparación de los resultados obtenidos de los modelos numéricos con los experimentales, se puede concluir lo siguiente:

- El comportamiento de las curvas carga-desplazamiento, previo a la fluencia de los elementos de refuerzo, obtenidas por el método de las fibras y mediante el MEF, en los dos casos mediante la aplicación de una carga monótona creciente, presentan buen ajuste con la envolvente trazada sobre la gráfica del comportamiento histórico del espécimen de prueba. Principalmente, existe mayor aproximación del comportamiento del espécimen en términos de resistencia que de ductilidad.
- La estimación de la resistencia a flexocompresión obtenida por el diagrama de interacción, basada en las hipótesis y los modelos constitutivos utilizados en este trabajo, muestra una aproximación muy parecida a la obtenida experimentalmente.
- Es importante señalar que en base al comportamiento de las deformaciones en la sección crítica del modelo de elementos finitos, a lo largo de la aplicación de la carga lateral, no presenta una distribución lineal, contrario a lo que se plantea en las hipótesis básicas para estimar la resistencia a flexión de elementos de concreto reforzado. Sin embargo, la distribución de los esfuerzos a lo largo de elemento, durante la aplicación de la carga lateral, presenta zonas a tensión y a compresión, sensiblemente separadas por un plano, lo que comprueba que el principio de Navier-Bernoulli es una consideración adecuada para analizar la flexión en elementos de concreto reforzado.
- Los resultados obtenidos analíticamente por el método de las fibras se ajustan de mejor manera a las resistencias de agrietamiento y fluencia experimentales, sin embargo los desplazamientos calculados son menores a los registrados en el estudio experimental. En este sentido es importante recordar que para el cálculo de curvaturas y desplazamientos, por este método, no se tomaron en cuenta la influencia de los esfuerzos cortantes y los efectos $P-\Delta$; en consecuencia, se estimó una mayor rigidez.
- El comportamiento mostrado por el modelo de elementos finitos muestra menor resistencia y ductilidad, principalmente existe una pérdida significativa de resistencia cuando se presenta la fluencia del refuerzo en tensión. Sin embargo, la rigidez lateral en estado agrietado de este modelo es muy parecida a la registrada experimentalmente, aun cuando se consideró adherencia perfecta entre sus elementos.

En cuanto a la estimación de la capacidad de desplazamiento lateral del espécimen de prueba, se comenta que:

- La carga lateral que produjo la fluencia del acero en tensión del espécimen de prueba tuvo una magnitud próxima a 270 kN (27.5 t), mientras que de la evaluación numérica la magnitud de ésta carga fue menor; 239 kN (24.36 t), por el método de las fibras; y 207 kN (21.15 t), por el método de elementos finitos. En este punto, el desplazamiento experimental fue de 33.10 mm, y numéricamente de 22.10 mm por el método de las fibras, y de 28.6 mm por el método de los elementos finitos.
- La capacidad máxima de desplazamiento lateral observada experimentalmente es considerablemente mayor a lo estimado numéricamente. Sin embargo, especialmente el criterio de falla de los modelos numéricos se determinó como el incipiente aplastamiento del concreto ubicado en el recubrimiento de la sección crítica, mientras que experimentalmente se observó que el elemento es capaz de seguir tomando carga y desarrollar ductilidad más allá de este punto; la resistencia máxima tuvo lugar hasta que las barras longitudinales se pandearon y se desarrolló una articulación plástica en la base. En este sentido, la aplicación de elementos que simulen la adherencia entre el refuerzo y el concreto es necesaria para desarrollar mayor ductilidad mediante deformaciones plásticas en los elementos que conforman la interacción de sus materiales, de este modo se modelaría apropiadamente el comportamiento plástico y el mecanismo de falla de los elementos de concreto reforzado.

REFERENCIAS

- ACI Committee 318. (2005), Building code requirements for reinforced concrete, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
- ANSYS Inc. (2013), ANSYS Mechanical APDL Structural Analysis Guide. ANSYS (Release 15.0), Canonsburg, Pennsylvania, USA.
- ANSYS Inc. (2013), ANSYS Mechanical APDL Theory Reference. ANSYS (Release 15.0). Canonsburg, Pennsylvania, USA.
- Bangash, M. Y. H. (1989), Concrete and concrete structures: Numerical modeling and applications. Elsevier Science Publishers Ltd., London, England.
- Bazán, E. y R. Meli. (2003), Diseño sísmico de edificios. Editorial Limusa, México.
- Da Fonseca Z. (2011), El método de los elementos finitos: una introducción. Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta, Vereda del Lago, Maracaibo, Venezuela.
- Godínez E.A., A. Tena. (2011), Modelado numérico de trabes acarteladas de concreto reforzado. Informe de Investigación presentado a CONACYT, Departamento de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana, Distrito Federal, México.
- Hernández H. (2012), Comportamiento y resistencia de elementos de concreto reforzado sometidos a flexión. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
- Hognestad, E. (1951), A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. University of Illinois, engineering experiment station, bulletin series No.399.
- Kachlakev, D.I.; T. Miller; S. Yim; K. Chansawat and T. Potisuk. (2001), Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened With FRP Laminates. California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA and Oregon State University, Corvallis, OR for Oregon Department of Transportation.
- Lehman, D., J. Moehle, S. Mahin, A. Calderone, and L. Henry. (2004), Experimental Evaluation of the Seismic Performance of Reinforced concrete bridge columns. Journal of Structural Engineering. ASCE 130(6): 869-879.
- MacGregor, J.G. (1992), Reinforced Concrete Mechanics and Design. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Martínez, O.T., (2013), Evaluación del comportamiento ante cargas laterales de columnas para puentes, prefabricadas de concreto, de sección hueca y pretensadas. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

- Mander, J.B.; M.J.N. Priestley and R. Park. (1988), Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering*. ASCE, V. 114, No 8.
- Nilson A. H. (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*. McGraw-Hill Interamericana, S.A., Santafé de Bogotá, Colombia.
- Park, R. y T. Paulay. (1978), *Estructuras de Concreto reforzado*. Editorial Limusa, México.
- Popov E.P. y T.A. Balan. (2000), *Mecánica de Sólidos*. Pearson Educación, México.
- Popovics, S. (1973), A numerical approach to the complete stress-strain curves for concrete. *Cement and Concr, Res.*
- Priestley, M.J.N.; F. Seible and G.M. Calvi. (1996), *Seismic design and retrofit of bridges*. John Wiley & Sons Inc., New York, USA.
- RCDF. (2004), *Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto*. Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Gaceta oficial de Distrito Federal, México.
- Rodríguez, M.E. y J.C. Botero. (1996). Aspectos del comportamiento sísmico de estructuras de concreto reforzado considerando las propiedades mecánicas de aceros de refuerzo producidos en México. *Publicación Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 575*.
- Ru-deng LUO (2008). Values of shear transfer coefficients of concrete element Solid65 in Ansys, *Journal of Jiangsu University*, Jiangsu University, China
- Tavarez, F.A. (2001), *Simulation of Behavior of Composite Grid Reinforced Concrete Beams Using Explicit Finite Element Methods*. Master's Thesis, University of Wisconsin-Madison, Madison, Wisconsin, USA.
- Willam, K.J. and E.P. Warnke. (1974), Constitutive Model for Triaxial Behaviour of Concrete. *Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, International Association of Bridge and Structural Engineering Conference, Bergamo, Italy, p.174.
- Wolansky, A.J. (2004), *Flexural Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element Analysis*. Master thesis, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, USA.

APÉNDICE: OBTENCIÓN DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL CONCRETO CONFINADO

A.1 Estudio del confinamiento efectivo en núcleos de concreto con estribos rectangulares

Los estribos de forma rectangular solo ejercen presión lateral de confinamiento efectiva cerca de las esquinas de la sección, ya que la presión lateral que ejerce el núcleo de concreto provoca pandeo de los lados de los estribos. En la figura A-I se muestra la acción de arco que se supone ocurre entre los niveles de refuerzo transversal rectangular (Mander et al 1988).

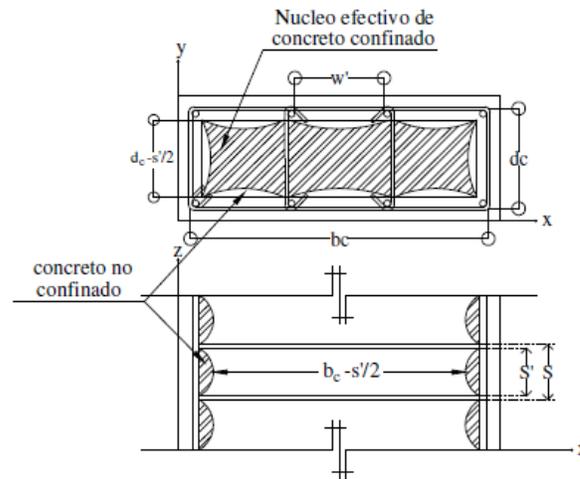


Fig. A-1 Núcleo de concreto efectivamente confinado de una sección rectangular (Mander et al., 1988)

Es conveniente calcular la resistencia y ductilidad del elemento en términos del área del núcleo de concreto. Por otra parte, el área efectiva confinada del núcleo de concreto A_e , es menor que el área del núcleo de concreto de concreto A_{cc} . Por lo que se puede considerar que la presión de confinamiento lateral efectiva es:

$$f'_l = f_l k_e \quad (A-1)$$

Asumiendo que la distribución de esfuerzos es uniformemente distribuida en la superficie del núcleo de concreto:

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (A-2)$$

El área del núcleo de concreto se puede calcular como:

$$A_{cc} = A_c (1 - \rho_{cc}) \quad (A-3)$$

Donde:

- f'_l = el esfuerzos efectivo de confinamiento lateral
- f_l = el esfuerzo de confinamiento sobre el concreto por el refuerzo transversal
- k_e = coeficiente de confinamiento efectivo
- A_c = el área de la sección delimitada por el perímetro del refuerzo transversal
- ρ_{cc} = la cuantía de acero de la sección

El área de confinamiento efectivo en secciones rectangulares, de ancho w' , está acotada por parábolas con una tangente inicial de 45° en sus vértices, tanto en sentido del refuerzo transversal como en el sentido de refuerzo longitudinal. La altura de la parábola con tangente inicial de 45° es $w'/4$ y el área es $(w')^2/6$. Así que, el área que no es confinada que es acotada por n barras en i longitudes entre barras longitudinales adyacentes es:

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6} \quad (A-4)$$

Incluyendo el área de influencia de las áreas inefectivas en elevación, como se observa en la figura A1-1, el área de confinamiento efectivo del núcleo de concreto a la mitad de la separación de los estribos se calcula como:

$$A_e = \left(b_c d_c - \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6} \right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad (A-5)$$

Donde $b_c \geq d_c$ y son las dimensiones del núcleo de concreto. Mientras que el coeficiente de efectividad de confinamiento para secciones rectangulares se calcula mediante la siguiente expresión:

$$k_e = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(w'_i)^2}{6 b_c d_c} \right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c} \right)}{(1 - \rho_{cc})} \quad (A-6)$$

Es posible que en miembros de concreto reforzado se tengan diferentes cantidades de refuerzo transversal confinante en las dos dimensiones ortogonales, x y y . Por lo que la cuantía de acero variará en las dos direcciones:

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{s d_c} \quad (A-7)$$

Y

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{s d_c} \quad (A-8)$$

Donde:

- A_{sx} = área de acero de refuerzo transversal que corre en sentido x
- A_{sy} = área de acero de refuerzo transversal que corre en sentido y

Por lo que el esfuerzo lateral confinante sobre el concreto en el sentido x es:

$$f_{lx} = \frac{A_{sx}}{s d_c} f_y = \rho_x f_y \quad (A-9)$$

Mientras que en el sentido y :

$$f_{ly} = \frac{A_{sy}}{s b_c} f_y = \rho_y f_y \quad (A-10)$$

Considerando la relación de esfuerzos confinantes efectivos:

$$f'_{lx} = k_e f_{lx} \quad (A-11)$$

$$f'_{ly} = k_e f_{ly} \quad (A-12)$$

Donde f_y es el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo transversal.

La resistencia del concreto confinado f'_{cc} se puede obtener a partir de modelos constitutivos y de superficie de falla para estados de esfuerzos triaxiales, considerando f'_{lx} y f'_{ly} como los dos esfuerzos principales menores. Mander *et al* emplearon el modelo de cinco parámetros descrito por Willam y Warnke (1974). La solución general, en términos de dos esfuerzos confinantes laterales, es presentada en la figura A-2:

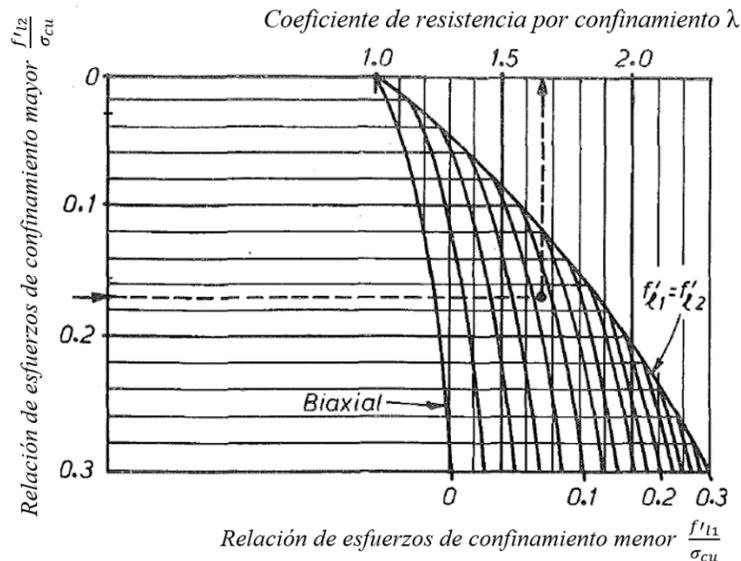


Fig. A-2 Determinación del coeficiente de resistencia debido a esfuerzos de confinamiento en secciones rectangulares de concreto reforzado (Mander et al 1988)

A.2 Análisis del confinamiento efectivo en la sección del espécimen de prueba

El concreto que se encuentra delimitado por el refuerzo transversal se supone confinado por el mismo refuerzo. Así que, su resistencia a compresión bajo esfuerzos laterales se determinó

según el modelo propuesto por Mander *et al.* Para estimar la magnitud de las áreas utilizadas para definir el coeficiente de confinamiento efectivo, k_e , de cómputo de diseño asistido por computadora (CAD).

En este caso, el área de concreto confinado es igual a $A_c = 1,370.83 \text{ cm}^2$, figura A1-1. El trazo de las parábolas descritas por el efecto de arco, que delimitan el confinamiento efectivo a nivel de los estribos, está basado en la relación de aspecto altura/ancho igual a 1/4. Por lo que la sumatoria de las áreas inefectivas en esta sección es igual a, $A_{inef} = 488.15 \text{ cm}^2$, según la figura A1-3.

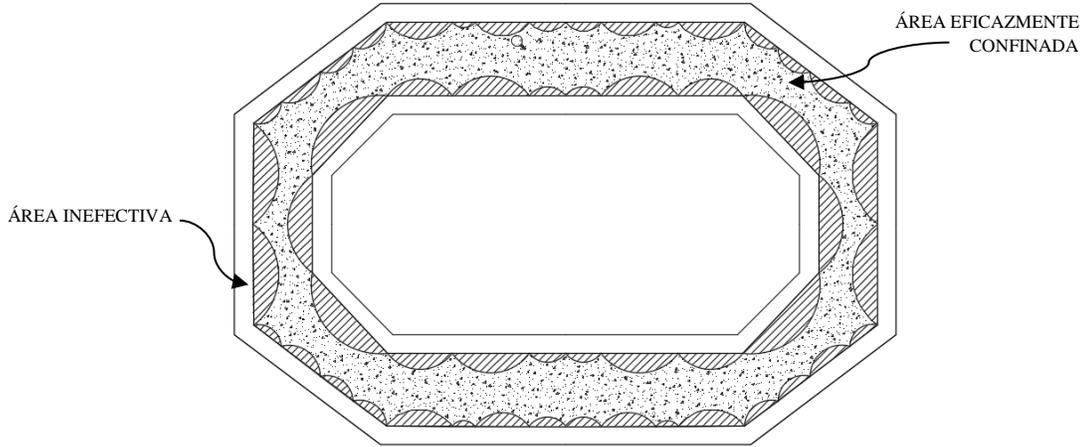


Fig. A1-3 Análisis del confinamiento efectivo en la sección con refuerzo transversal

La influencia de la acción de arco en elevación se determinó análogamente al análisis de secciones rectangulares, multiplicando el área eficazmente confinada a nivel de los estribos por el coeficiente A_{ee}/A_c , expresión (A1-1).

$$A_e = (A_c - A_{inef}) \left(\frac{A_{ee}}{A_c} \right) \quad (\text{A1-13})$$

Donde A_{ee} es el área efectiva de la sección media entre dos lechos de refuerzo transversal

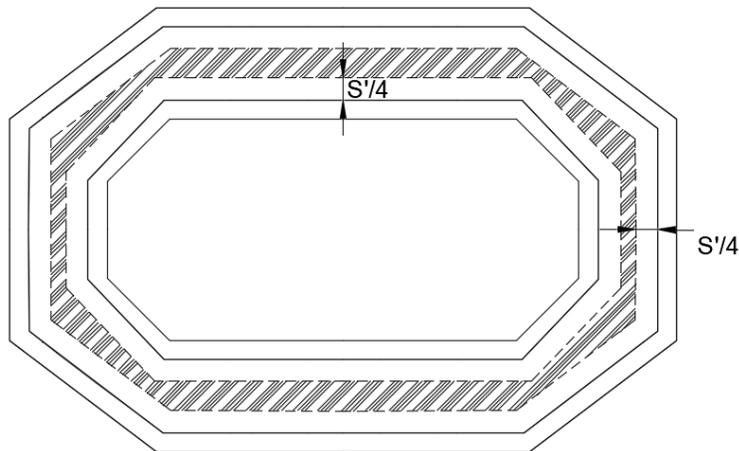


Fig. A1-4 Análisis del confinamiento efectivo en las secciones medias entre dos lechos de refuerzo transversal

Según la figura A1-3, el área A_{ee} es delimitada por la separación $S/4$, que es la altura de las parábolas en elevación e igual a un cuarto de la separación de los estribos. En el espécimen de

prueba $S' = 10$ cm, por lo que $A_{ee} = 482.12$ cm². De modo que, según la expresión A1-14 el cálculo del área efectiva de confinamiento es:

$$A_e = (1,370.83 - 488.15) \left(\frac{482.12}{1,370.83} \right) = 310.44 \text{ cm}^2$$

Y el valor del coeficiente de confinamiento efectivo se estima mediante la expresión (A-2):

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} = \frac{310.44}{1370.83(1 - 0.035)} = 0.235$$

Por otra parte, la distribución del refuerzo longitudinal no es uniforme y además, los estribos y grapas no son ortogonales en todos los casos. Por lo que, con el objetivo de estimar el promedio de cuantía transversal que corre en las dos direcciones X y Y se propone evaluar los esfuerzos de confinamiento en dos regiones rectangulares, figura A1-4.

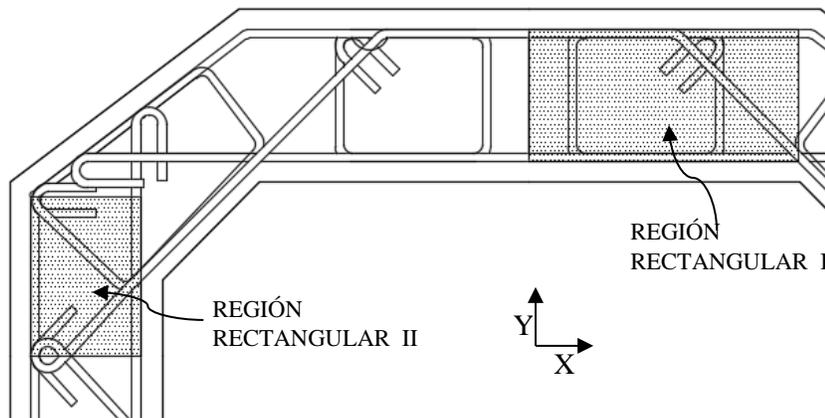


Fig. A1-5 Análisis de los esfuerzos de confinamiento en la sección

A partir de la configuración y dimensiones de cada región se estimaron las áreas de refuerzo, considerando que todas las ramas tienen un diámetro de 1/4" (0.635 cm), mientras que el área de concreto correspondiente se determinó como el producto de la dimensión o ancho perpendicular a la dirección de análisis multiplicado por la separación de los estribos.

Tabla A1-1 Análisis de la cuantía transversal promedio

DIRECCIÓN DE ANÁLISIS	REGIÓN	ÁREA DE REFUERZO (cm ²)	ÁREA DE CONCRETO (cm ²)	CUANTÍA DE REFUERZO	PROMEDIO
X	I	1.585	95.00	0.0167	0.0122
	II	0.897	115.20	0.0078	
Y	I	0.634	194.00	0.0033	0.0085
	II	1.082	79.20	0.0137	

En la tabla A1-1 se muestra la magnitud de las áreas en cada región, así como el resultado de las cuantías de refuerzo en las dos direcciones (para las barras inclinadas se tomó en cuenta la proyección de su área en cada dirección).

Considerando que el esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal es igual a $f_y = 6400$ kgf/cm², y que el coeficiente de confinamiento efectivo es 0.235, los esfuerzos laterales confinantes

efectivos se calculan con expresiones (A1-10) y (A1-11). Por lo que, al relacionar estos esfuerzos con la resistencia uniaxial del concreto se puede determinar el coeficiente de resistencia debido al confinamiento, λ , con ayuda de la figura A-2. Los resultados obtenidos que determinan la magnitud de los esfuerzos de confinamiento se resumen en la tabla A1-2.

Tabla A1-2 Resultados del análisis de los esfuerzos de confinamiento laterales

f'_{lx} kgf/cm ²	f'_{ly} kgf/cm ²	f'_{co} kgf/cm ²	f'_{lx} / f'_{co}	f'_{ly} / f'_{co}	λ
18.35	12.78	546.00	0.037	0.023	1.23

Una vez obtenido el parámetro λ , la resistencia a compresión bajo esfuerzo lateral se determina como:

$$f'_{cc} = \lambda f'_{co} \tag{A1-14}$$

Sustituyendo:

$$f'_{cc} = 1.23 (546) = 671.58 \text{ kgf/cm}^2$$

Mientras que la deformación asociada a f'_{cc} se determina mediante la ecuación (2.1-10):

$$\epsilon_{cc} = 0.00315 \left[1 + 5 \left(\frac{671.58}{546.00} - 1 \right) \right] = 0.00677$$

Por lo que el modulo tangente es, ecuación (2.1-9):

$$E_{sec} = \frac{671.58}{0.00677} = 99,258.14 \text{ kgf/cm}^2$$