



Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría y Doctorado en Arquitectura
Facultad de Estudios Superiores Aragón
Campo de Conocimiento: Tecnología

Título:

Arquitectura y teselaciones; sus implicaciones.
Desarrollo de una herramienta digital
para la configuración de formas modulares.

Tesis

que para optar por el grado de:
Maestra en Arquitectura

Presenta:

Sandra Belinda Socci Martínez

Tutor:

Mtro. Francisco Reyna Gómez
Facultad de Arquitectura, Ciudad Universitaria

Comité Tutor:

Dr. Alejandro Leal Menegus
Facultad de Arquitectura, Ciudad Universitaria

Dra. María de la Paz Álvarez Scherer
Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria

Mtro. Humberto Islas Ramos
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Mtro. Eduardo I. Velázquez Richards
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México, Septiembre, 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



CONACYT



INSTITUTO
DE INVESTIGACIONES
HISTÓRICAS



Tutor:

Mtro. Francisco Reyna Gómez
Facultad de Arquitectura, Ciudad Universitaria

Comité Tutor:

Dr. Alejandro Leal Menegus
Facultad de Arquitectura, Ciudad Universitaria

Dra. María de la Paz Álvarez Scherer
Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria

Mtro. Humberto Islas Ramos
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Mtro. Eduardo I. Velázquez Richards
Facultad de Estudios Superiores Aragón



Agradecimientos:

Quiero resaltar mi satisfacción, ya que este trabajo ha sido posible con la participación de destacadas personas e instituciones que han facilitado el desarrollo para que llegue a un feliz término. Por ello, es para mi de un genuino agrado utilizar este espacio para expresar mi agradecimiento.

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por su noble labor de promover y alentar el desarrollo del talento tecnológico entre los mexicanos.

A mi madre **Aurora**. Por haberme apoyado en todo momento con sus consejos, motivación constante y sobre todo por su amor, nunca será suficiente expresarle mi gratitud.

A **Gasde Hunedy** infinitamente por su respaldo incondicional en todo momento, su conocimiento, motivación y mucho más...

De manera especial y sincera al **Mtro. Francisco Reyna**, por aceptarme para realizar esta tesis. Por su apoyo y confianza en mí, para guiar mis ideas con su sabiduría y conocimiento hasta lograr la meta.

Al **Dr. Alejandro Leal** por sus aportaciones y participación activa en el desarrollo de esta tesis. Su asesoría fue de gran ayuda durante el proceso de esta investigación.

Al **Mtro. Eduardo Velázquez Richards**, por su inagotable imaginación geométrica, por su tiempo, dedicación y por compartir su conocimiento.

A la **Dra. Ma. de la Paz Álvarez**, por la confianza que me brindó, por crear espacios y oportunidades para la evolución de este trabajo, por ser receptiva y amable con mis ideas.

Al **Mtro. Humberto Islas**, por su confianza en esta investigación.

Finalmente, de manera especial, al **Mtro. Ernesto A. Vázquez** por su paciencia con mi persona, su disponibilidad y generosidad para compartir su experiencia y bastos conocimientos de la ciencia matemática. No cabe duda que su guía enriqueció el trabajo realizado.

Arquitectura y matemática; sus implicaciones

Desarrollo de una herramienta digital para la
configuración de formas modulares

Sandra Belinda Socci Martínez

19 de septiembre de 2018

CONTENIDO

Resumen	3
Introducción	4
PRIMERA PARTE: Bases teóricas	8
1. Teselaciones y su construcción	9
1.1. Lo necesario para cubrir el plano	10
1.2. Diseño y construcción de frisos	18
1.3. Diseño y construcción de teselaciones	41
SEGUNDA PARTE: Arquitectura y matemática: sus implicaciones	87
2. Conexiones entre el diseño arquitectónico y el desarrollo matemático	88
2.1. La geometría del arquitecto	89
2.2. Arquitectura y matemática: Potencial de la creatividad	91
2.3. Modularidad en diseño y arquitectura	97
3. Análisis estructural en la arquitectura	104

3.1. Análisis geométrico: Un método consistente	104
3.2. Teselaciones espaciales y búsqueda de formas	106
3.3. Las teselaciones en la Arquitectura: de lo decorativo a lo es- tructural	109
TERCERA PARTE: Herramienta digital	111
4. Tecnología de un mundo en marcha	112
4.1. Claroscuro de las tecnologías en la educación	116
4.2. La génesis del diseño geométrico asistido por computadora . .	117
4.3. Omnipresencia de la tecnología digital en la arquitectura . . .	120
Conclusiones	125
Anexo 1. Muestreo	128
Anexo 2. Herramienta digital (TeselArt)	135
Referencias	144

RESUMEN

Palabras clave: Modularidad, integración multidisciplinaria, arquitectura, geometría, herramienta digital, tecnología, teselaciones, frisos.

Esta investigación aborda la importancia del trabajo multidisciplinario del diseño arquitectónico en la actualidad tecnológica; la cual requiere una sólida base científica que vaya de lo estético a lo estructural. Así mismo, hace mención de las implicaciones entre el proyecto arquitectónico y el desarrollo matemático y como estas disciplinas siempre han estado vinculadas.

En lo académico se constató la necesidad de conocimientos geométricos más sólidos sustentados en la interacción de las ciencias.

Se estudiaron las teselaciones, los frisos y las isometrías y se desarrolló e implementó una aplicación móvil, como herramienta didáctica, que incorporaron elementos propios de la geometría, el pensamiento espacial y la expresión artística, logrando con ello la integración de un conocimiento matemático, arquitectónico, artístico y tecnológico.

INTRODUCCIÓN

La generación de formas es uno de los aspectos más importantes de la enseñanza y de la práctica profesional en la arquitectura. Por un lado, los avances tecnológicos con el desarrollo de nuevas herramientas digitales permiten crear formas cada vez más complejas y por otro lado este avance conduce a una desconexión entre la arquitectura y su contexto. Sin embargo, los procesos de diseño en busca de formas pueden integrar herramientas y técnicas de diseño siempre y cuando se haga un uso consciente de ello.

Tales enfoques desconectan las obras arquitectónicas de su contexto y de sus usuarios y conducen a una disminución de calidad espacial. Por lo tanto, las críticas ¿Deberían dirigirse contra las herramientas o, mas bien, contra los métodos y conocimiento de diseño?

El propósito de esta investigación se enfoca a la importancia del trabajo multidisciplinario en el desarrollo del diseño arquitectónico aplicables a la actualidad tecnológica en constante movimiento, que requieren una sólida base científica.

Una de las características de obras antiguas es que fueron construidas por personas que por sí mismas tenían una visión interdisciplinaria integral tomando en cuenta sus conocimientos en filosofía, matemática, arquitectura, medicina, bellas artes, sin hacer una separación de cada disciplina.

En la actualidad y dada la tendencia a la subespecialización, pocas personas pueden demostrar un conocimiento integral, lo que hace necesario un trabajo en equipo con la participación de diferentes disciplinas que aportan una parte del todo lo que implica el proyecto.

Es importante hacer mención que la separación que existe entre arte y ciencia es perceptiva, ya que siempre ha existido un vínculo entre ambas y son complemento, pero con un uso inconsciente por el manejo de software y facilidades tecnológicas.

Para analizar esta actividad y tomando en cuenta que la tecnología tiene un ritmo de cambios tan acelerados que permite que cada vez se tomen más atajos para llegar al objetivo, obviando la conciencia del conocimiento con bases científicas, se observó una inmensa cantidad de herramientas digitales, cada vez más ubicuas, completas y poderosas, que parecen confirmar la idea que la tecnología todo lo puede.

En el plano académico se comprobó mediante un estudio realizado con alumnos de arquitectura en diferentes campus de la UNAM, la necesidad de

conocimientos más sólidos, relacionados con la geometría y sobre todo, sustentados en la interacción de las ciencias hacia un mismo fin.

Esta propuesta, se materializa con el desarrollo e implementación de una aplicación móvil como herramienta didáctica, coherentemente estructurada, que integra elementos propios de la geometría, el pensamiento espacial y la expresión artística y logra con ello la integración de un conocimiento matemático, arquitectónico, artístico y tecnológico.

La aplicación móvil, es un programa informático que al descargarlo e instalarlo en Ipad en el sistema operativo iOS (Apple), permite a sus usuarios ejecutarlo con o sin conexión a internet.

En ella se presenta el uso de las teselaciones que con diferentes combinaciones, facilitan a los arquitectos y diseñadores configurar formas modulares con bases de geometría para apoyar en el diseño de su proyecto.

Se realizó un proceso de programación que abarcó cada una de las 17 teselaciones presentando un modelo matemático aplicado al diseño arquitectónico y facilitado a través de un instrumento móvil.

El capítulo 1 da las bases teóricas que sustentan la investigación explicando el diseño y construcción de cada una de las isometrías, los frisos y las teselaciones. El capítulo 2 trata de las conexiones e implicaciones que existen entre el diseño arquitectónico y el desarrollo matemático. El capítulo 3 versa

del análisis estructural de la arquitectura desde un enfoque geométrico, presentando la Alhambra, como ejemplo decorativo y el Centro Nacional Acuático de Beijing con un desarrollo estructural en el que una teselación en tres dimensiones da sustento a la estructura; y como la tecnología ha evolucionado a través de los años para transformar el diseño decorativo en propuestas que resuelven problemas estructurales. El capítulo 4, presenta la evolución de la tecnología y como ésta tiene su claroscuro y omnipresencia en la educación, al mismo tiempo como la tecnología ha impactado para el desarrollo de proyectos arquitectónicos.

Se presentan dos anexos:

Anexo 1. Se explica el muestreo realizado para evaluar el nivel de conocimientos de personas en formación de arquitectura acerca de sus bases geométricas.

Anexo 2. Se presenta la aplicación desarrollada y los lugares donde se ha expuesto hasta la fecha.

PRIMERA PARTE: BASES TEÓRICAS

*"Aprende las reglas como un profesional, para que puedas
romperlas como un artista"*

Pablo Picasso

CAPÍTULO 1

TESELACIONES Y SU CONSTRUCCIÓN

La percepción del orden es fundamental para la comprensión del mundo que nos rodea; se encuentra en el lenguaje, paisaje, crecimiento de las plantas y animales, en la música, la poesía, la matemática, en todas las ramas de la ciencia y la ingeniería, en la danza y en las artes visuales; diseño y arquitectura.

El orden no es aleatorio, tiene un proceso lógico y sistemático; una de sus características principales es la simetría.

La simetría es una característica que rige la estructura en una amplia gama de formas tanto en la naturaleza como en lo construido. Implica regularidad, igualdad, orden, repetición y es un aspecto importante de la estructura y la forma en el arte, diseño y arquitectura.

Los diseños simétricos proporcionan un agradable efecto visual de equilibrio y orden, a la vez proporcionan un elemento de intriga y fascinación a

través del cual se analizan las propiedades geométricas y el marco estructural. Davis y Hersh [10] observaron que, a través de la intuición, el artista es a menudo un matemático inconsciente, descubriendo y explorando ideas de disposición espacial, simetría y transformaciones.

A lo largo de la historia, el ser humano ha observado formas geométricas en la naturaleza que han servido de base en diversas manifestaciones artísticas, las cuales no son privativas de alguna cultura en particular, es simplemente una manifestación de creatividad humana que expresa el deseo de dar un orden visual a las cosas. Un ejemplo son: los mosaicos árabes, los frisos de Mitlá, la artesanía de diversas culturas Mesoamericanas, etc.

Entre los elementos artísticos más utilizados desde la antigüedad se encuentran los frisos y las teselaciones, en los cuales se combinan elementos geométricos del plano para el estudio de las formas bidimensionales ¹ y sus movimientos en el mismo. Las perspectivas teóricas presentadas en este capítulo son explicar las diferentes configuraciones de estas formas.

1.1. Lo necesario para cubrir el plano

En arquitectura, es importante la comprensión del concepto de simetría y sus propiedades para lograr un diseño adecuado que al mismo tiempo permita desarrollar habilidades para percibir formas y capacidades como la visión

¹Una forma bidimensional se refiere a la representación gráfica sobre cualquier plano; es decir, solo tiene dos dimensiones: largo y ancho, pero no profundidad

espacial y perspectiva en la resolución de problemas.

El primer concepto importante de este capítulo es el de isometría, que se definen como una transformación o movimiento en el plano que preserva distancias.

Este concepto integrado al análisis y creación de frisos y teselaciones, puede permitir que estudiantes de éstas áreas, se aproximen a la adquisición del concepto de congruencia.²

1.1.1. Movimientos en el plano: isometrías

Washburn y Crowe [51] describen un movimiento de simetría como la configuración específica de las partes para cada diseño, es decir, es la relación exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un proyecto. La simetría no describe las partes, sino cómo se combinan y arreglan para hacer un patrón y que se trata solo de un aspecto del diseño; su estructura.

Cada una de las isometrías o movimientos de simetría pueden clasificarse de la siguiente manera:

- ***Simetría de Identidad***

Esta simetría se caracteriza por no tener movimientos. La figura o el diseño se coloca exactamente en la misma posición. Preserva orienta-

²Equivalencia de formas, diseños u objetos a partir de una relación entre ellos.

ción,³ Es equivalente a una rotación de 360° alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación o bien reflejar dos veces sobre la misma recta.

En la figura se muestra representada esta isometría con sus equivalencias, es decir, una rotación de 360° y dos reflexiones a partir de un mismo eje, dan como resultado la identidad (Figura 1.1).

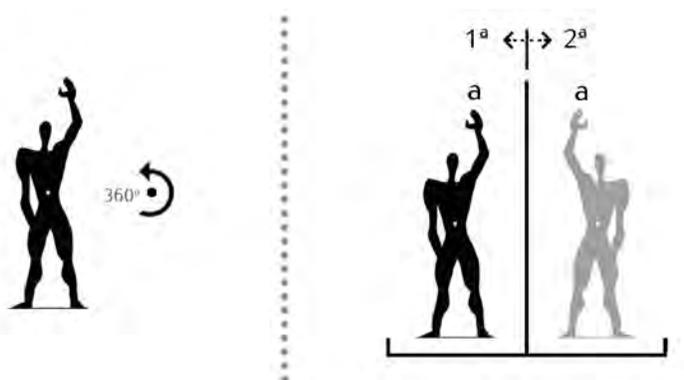


Figura 1.1: Equivalencias de la simetría de Identidad.

- **Simetría de Reflexión** La simetría de reflexión es la imagen producida en un espejo, la recta que la determina se denomina eje de reflexión, la cual queda fija. Esta isometría invierte orientación (Figura 1.2). Es la isometría básica, ya que cualquier otra (Identidad, rotación, traslación y deslizamiento) es la composición de a lo más tres reflexiones (Tabla 1.1).

³Una simetría preserva orientación cuando conserva a la figura o diseño después de aplicar un movimiento

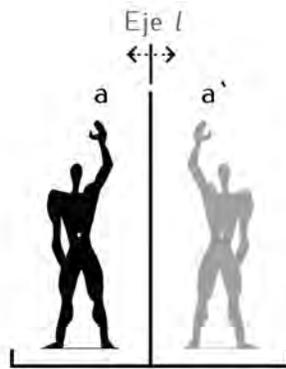


Figura 1.2: Simetría de reflexión

- **Simetría de Traslación** Todas las partes de las figuras se mueven la misma distancia en la misma dirección. Una traslación se puede ver como la composición de dos reflexiones por rectas paralelas. El vector (dirección) de la traslación es perpendicular a las rectas y tiene la propiedad de que a cada objeto lo moverá en la dirección de este, el doble de la distancia entre las rectas. Esta isometría no tiene puntos fijos y preserva orientación.

En la figura se muestra representada esta isometría con sus equivalencias, es decir, una traslación de una distancia (l) en una dirección (d) o el bien, dos reflexiones sobre un mismo eje (Figura 1.3).

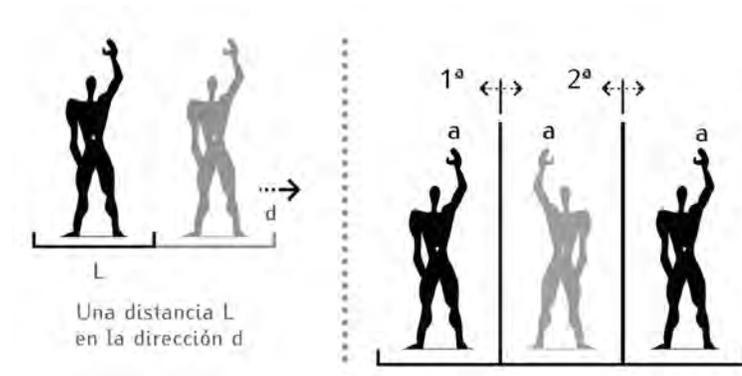


Figura 1.3: Equivalencias de la simetría de traslación

- **Simetría de Rotación** Un diseño tiene una simetría de rotación alrededor de un punto fijo si cuando se gira en su propio plano alrededor de ese punto a través de un ángulo y múltiplos enteros de ese ángulo, coincide con su posición original.

También se puede ver como la composición de dos reflexiones por rectas que se intersecan. Al punto de intersección se le denomina centro de rotación y el ángulo de rotación será el doble del ángulo (agudo o recto) formado por estas rectas (Figura 1.4).

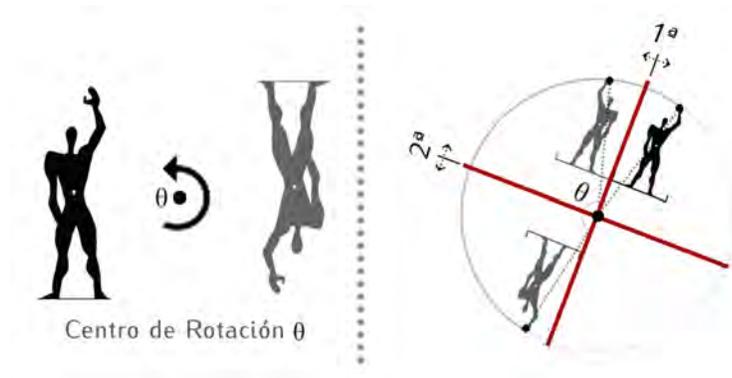


Figura 1.4: Equivalencias de la simetría de rotación

- **Simetría de Deslizamiento** También conocido como "paso", es la composición de una traslación y una reflexión por una recta perpendicular a las rectas paralelas que forman la traslación. Esta isometría no tiene puntos fijos e invierte orientación (Figura 1.5).

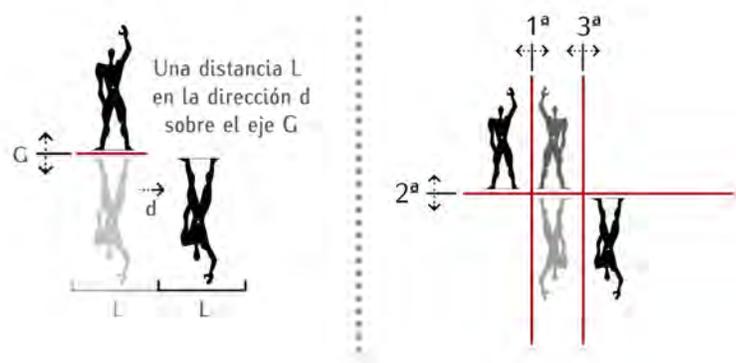


Figura 1.5: Simetría de Deslizamiento

Cada movimiento del plano es la composición de dos o tres reflexiones, un resultado que se conoce como el Teorema de las Tres Reflexiones (Tabla 1.1). Para ver una demostración de este resultado se puede consultar [36].

Tabla 1.1: Teorema de las tres reflexiones

Teorema de las tres reflexiones		
Ninguna Reflexión	Identidad	
Una Reflexión	Reflexión	
Dos Reflexiones	Traslación	Rotación
Tres Reflexiones	Deslizamiento	Reflexión

A continuación se presenta una tabla resumen de las isometrías (Figura 1.6):

Isometrías

Las isometrías son transformaciones del plano que preservan distancias.
 Toda isometría es composición de a lo más 3 reflexiones

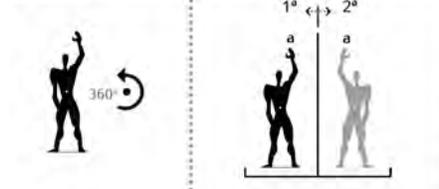
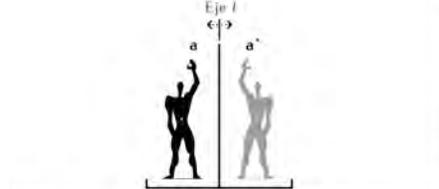
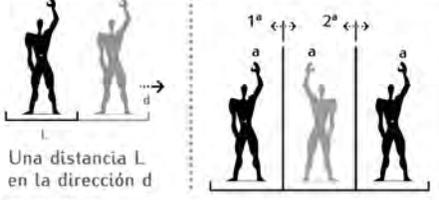
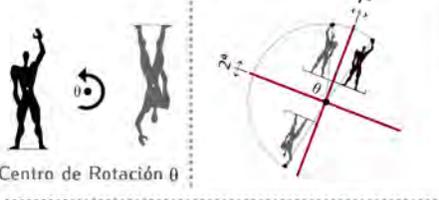
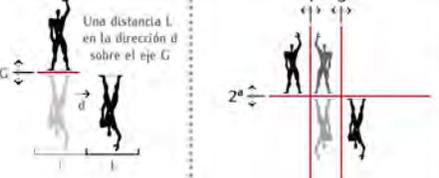
<p>Identidad ▲</p> <p>No tiene movimientos.</p>		<p>Esta simetría se caracteriza por no tener movimientos. La figura o el diseño se coloca exactamente en la misma posición. Preserva orientación. Es equivalente a una rotación de 360° alrededor de un punto o a reflejar dos veces sobre la misma recta.</p>
<p>Reflexión ↔</p>		<p>La simetría de reflexión es la imagen producida en un espejo. La recta que la determina se denomina eje de reflexión, el cual queda fija. Esta isometría invierte orientación. Es la isometría básica, ya que cualquier otra isometría es la composición de a lo más 3 reflexiones.</p>
<p>Traslación →</p> <p>Composición de 2 reflexiones por rectas paralelas</p>	 <p>Una distancia L en la dirección d</p>	<p>Una traslación se puede ver como la composición de dos reflexiones por rectas paralelas. El vector (dirección) de la traslación es perpendicular a las rectas y tiene la propiedad de que a cada objeto lo moverá en la dirección de este, el doble de la distancia entre las rectas. Esta isometría no tiene puntos fijos y preserva orientación.</p>
<p>Rotación ↻</p> <p>Composición de 2 reflexiones por rectas que concurren.</p>	 <p>Centro de Rotación θ</p>	<p>Una rotación es la composición de dos reflexiones por rectas que se intersecan. Al punto de intersección se le denomina centro de rotación y el ángulo de rotación será el doble del ángulo (agudo o recto) formando por estas rectas. En esta isometría el único punto fijo es el centro de rotación.</p>
<p>Deslizamiento</p> <p>Composición de 3 reflexiones por rectas</p>	 <p>Una distancia L en la dirección d sobre el eje G</p>	<p>Un deslizamiento o "paso" es la composición de una traslación y una reflexión por una recta perpendicular a las rectas paralelas que forman la traslación. Esta isometría no tiene puntos fijos e invierte orientación.</p>

Figura 1.6: Isometrías

1.2. Diseño y construcción de frisos

Existen muchos edificios que presentan, a lo largo de sus fachadas o en paredes interiores, bandas decorativas llamadas frisos. Se presentan bajo la forma de franjas entre bordes paralelos limitados en ambos sentidos. Los motivos que los componen se repiten con regularidad (la misma distancia entre ellos) y obedecen las reglas de transformaciones del plano como: traslaciones, rotaciones (180°), reflexiones horizontales o verticales y deslizamientos (Figura 1.7).



Figura 1.7: Frisos del Palacio de Mitlá, Oaxaca

1.2.1. Algunas definiciones de friso

1. Definición arquitectónica: un friso es una franja horizontal decorativa que forma parte del entablamiento, entre la arquitrabe y la cornisa. También

puede ser una banda decorativa rectangular en el cual, un motivo se repite en una dirección, en ambos sentidos.

2. Definición matemática: un friso es el cubrimiento de la región del espacio de longitud infinita pero de anchura finita, limitada por dos rectas paralelas, obtenido a partir de la aplicación de movimientos en el plano a una determinada figura o agrupación de figuras.⁴

1.2.2. *Isometrías de los frisos*

Para la construcción de los frisos, es necesario la comprensión de los movimientos en el plano que pueden formar parte de ellos:

1. Traslaciones con una dirección y una distancia determinada (Figura 1.8).



Figura 1.8: Traslación con una dirección y una distancia d

2. Reflexión con respecto a una recta vertical (Figura 1.9).

⁴Definición matemática tomada de: <https://es.wikipedia.org/wiki/Friso>

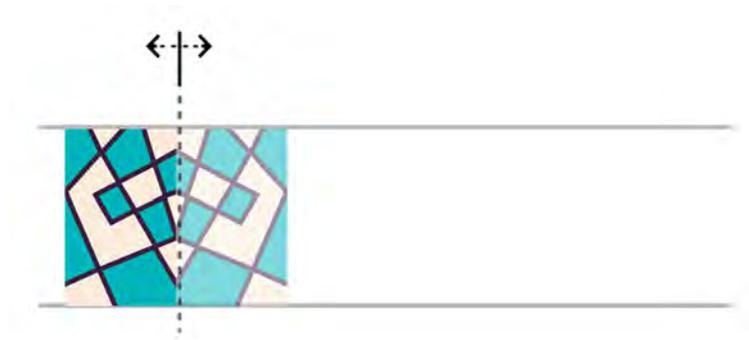


Figura 1.9: Reflexión vertical

3. Reflexión con respecto a una recta horizontal (Figura 1.10).

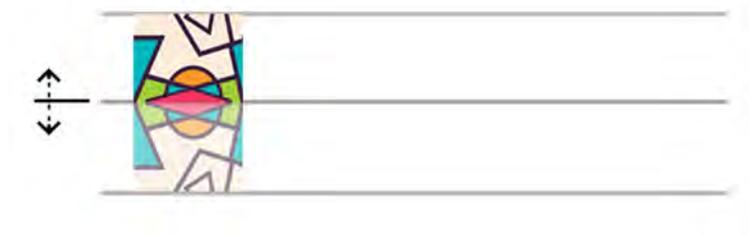


Figura 1.10: Reflexión horizontal

4. Deslizamiento (Composición de una reflexión y una traslación) (Figura 1.11).



Figura 1.11: Deslizamiento

5. Rotación de 180° respecto a un punto ubicado a la mitad de la franja o banda (Figura 1.12). Cabe señalar que es el único tipo de rotación que existe en los frisos, ya que otro tipo de rotación con otro ángulo provocaría que el diseño se salga de la franja.

Figura 1.12: Rotación de 180°

1.2.3. *Diseño de frisos*

Para diseñar un friso se debe considerar (Figura 1.13).:

1. La elección de un motivo base y su posición en la banda.
2. Aplicar las transformaciones geométricas antes descritas (isometrías).
3. Trasladar el motivo o patrón de repetición para permitir llenar la banda rectangular que contiene el friso.

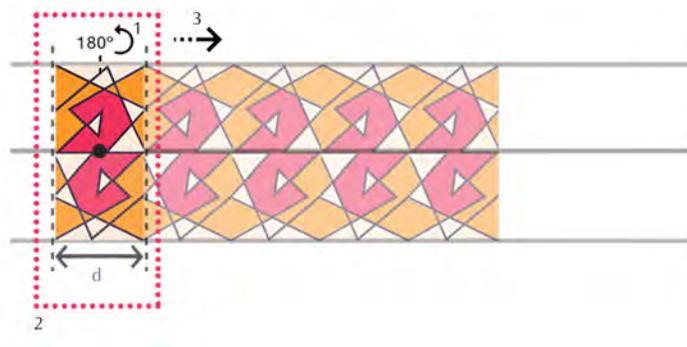


Figura 1.13: Diseño de frisos

1.2.4. *Notación de los frisos*

La notación más común para clasificar los frisos, usan caracteres que provienen de la cristalografía. Washburn y Crowe [51], dieron una explicación de las anotaciones, la cual consta de cuatro caracteres en un determinado orden y señala que una isimetría pertenece o no al grupo de simetría del friso, donde el primero es siempre una letra p , que indica la existencia de una traslación

(en los frisos por construcción, siempre existe la traslación) seguida de tres caracteres (Tabla 1.2).

Tabla 1.2: Notación de frisos

	Isometría		Carácter
Primer Carácter	Hay traslación	Sí	p
Segundo Carácter	Hay reflexión con respecto a un eje vertical	Sí	m
		No	1
Tercer Carácter	Hay reflexión con respecto a un eje horizontal	Sí	m
		Con deslizamiento	a
		No	1
Cuarto Carácter	Hay rotación de 180	Sí	2
		No	1

1.2.5. ¿Cuántos tipos de frisos existen?

Varios académicos han tratado de explicar los diferentes medios de combinar estas cuatro operaciones de simetría para crear diseños de frisos, Paul Niggli [39], realizó la primera demostración sobre la existencia de siete grupos de frisos en el año de 1926.

Utilizando el Método exhaustivo ⁵ se realizan todas las combinaciones de las isometrías de los frisos, sin considerar la traslación ⁶, se obtienen 16 combinaciones posibles, numeradas del 1 al 16 en la tabla (Tabla 1.3), donde se muestra cada posibilidad con una combinación de SÍ y NO.

⁵El método exhaustivo consiste en analizar cada una de las opciones hasta agotar todas las combinaciones y esto se puede lograr porque el número de transformaciones son finitas.

⁶En la tabla no se considera la traslación debido a que en todos los grupos de frisos se presenta

En ella se puede observar que solo existen 7 posibles grupos y se descartan 11 posibilidades, esto es debido a que existen combinaciones que son equivalente a otras. Por ejemplo; en el número 2 se presenta una reflexión vertical, una reflexión horizontal y un deslizamiento; al momento de analizar estas isometrías, dan como resultado una reflexión vertical, es decir, es equivalente a pm11 (friso 4).

Tabla 1.3: Método exhaustivo que demuestra que solo existen 7 grupos de frisos

Combinación de simetrías	Reflexión vertical	Reflexión horizontal	Deslizamiento	Rotación 180°	Clase de friso encontrado
1	Sí	Sí	Sí	Sí	pmm2 (friso 6)
2	Sí	Sí	Sí	No	
3	Sí	Sí	No	Sí	
4	Sí	Sí	No	No	
5	Sí	No	Sí	Sí	pma2 (friso7)
6	Sí	No	Sí	No	
7	Sí	No	No	Sí	
8	Sí	No	No	No	pm11 (friso 4)
9	No	Sí	Sí	Sí	
10	No	Sí	Sí	No	
11	No	Sí	No	Sí	
12	No	Sí	No	No	p1m1 (friso 3)
13	No	No	Sí	Sí	
14	No	No	Sí	No	p1a1 (friso 5)
15	No	No	No	Sí	p112 (friso 2)
16	No	No	No	No	p111 (friso 1)

De las combinaciones posibles se demuestra que sólo existen siete combinaciones de simetrías que permiten generar patrones de frisos, los cuales son: **p111, p1a1, pm11, p112, pma2, p1m1, pmm2.**

1.2.6. Región generadora de los frisos

- A continuación se presenta un esquema que muestra cada una de las regiones generadoras que forman los 7 grupos de frisos existentes (Figura 1.14):

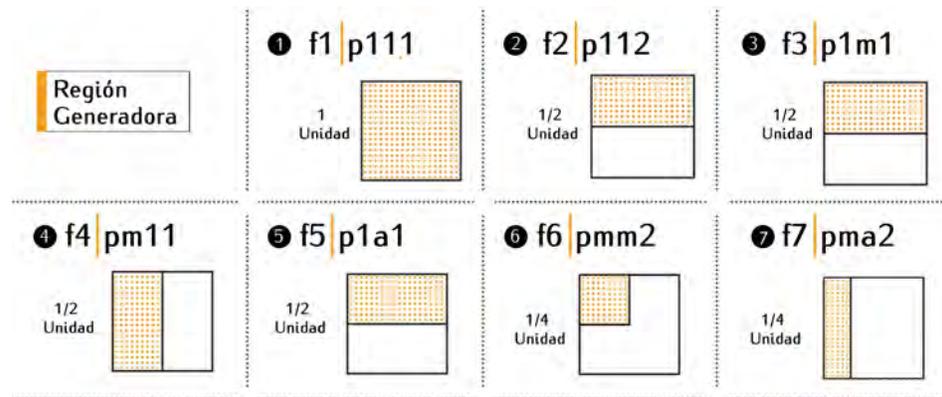


Figura 1.14: Región generadora de los frisos

1.2.7. Clasificación de los frisos y su construcción

- Friso 1 (Clase p111). Los frisos de esta clase son los más sencillos de los grupos de friso, ya que la única operación que posee es la traslación (Figura 1.15).

Construcción del friso 1:(Figura 1.16)

1. Se genera una franja
2. Se realiza un diseño el cual se le va a nombrar **Motivo o patrón de repetición** dentro de la región generadora.
3. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
4. Se genera el friso 1.



Figura 1.15: Friso 1. Clase p111, Templo de Mitlá

Tipo f1 | p111

Isometrías

Traslación →

Esquema



Región generadora

1 unidad





Características

Los frisos de esta clase son los más simples. En éstos, sólo se presentan simetrías como lo son la identidad y la traslación; se repite indefinidamente al aplicarle una traslación al motivo o patrón de repetición.

Construcción

<p>1 Banda Rectangular</p> 	<p>2 Región generadora</p> 	<p>3 Motivo o patrón de repetición</p> 
<p>4 Traslación</p> 	<p>5 Traslación</p> 	<p>6 Diseño de friso 1</p> 

Figura 1.16: Friso 1 (Clase p111)

- Friso 2 (Clase p112). Estos frisos se caracterizan por tener una rotación de 180° (Figura 1.17).

Construcción del friso 2:(Figura 1.18)

1. Se genera una recta paralela auxiliar a las rectas que forman la franja que pasa por un punto medio de la distancia entre ellas.
2. Se realiza un diseño en la parte superior, entre la franja y la recta auxiliar.
3. Se aplica una rotación de 180° con centro en un punto de la recta paralela auxiliar dentro de la región generadora.
4. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se genera el friso 2.



Figura 1.17: Friso 2. Clase p112, Alhambra

Tipo f2 | p112

Isometrías

Traslación \rightarrow Rotación 180°

Esquema



Región generadora

1/2 Unidad




Características

Los frisos de este tipo se componen de una rotación a 180° y una traslación.

Construcción

- Banda Rectangular**
- Región generadora**
- Rotación de 180° desde el punto medio**
- Motivo o patrón de repetición**
- Traslación**
- Diseño de friso 2**

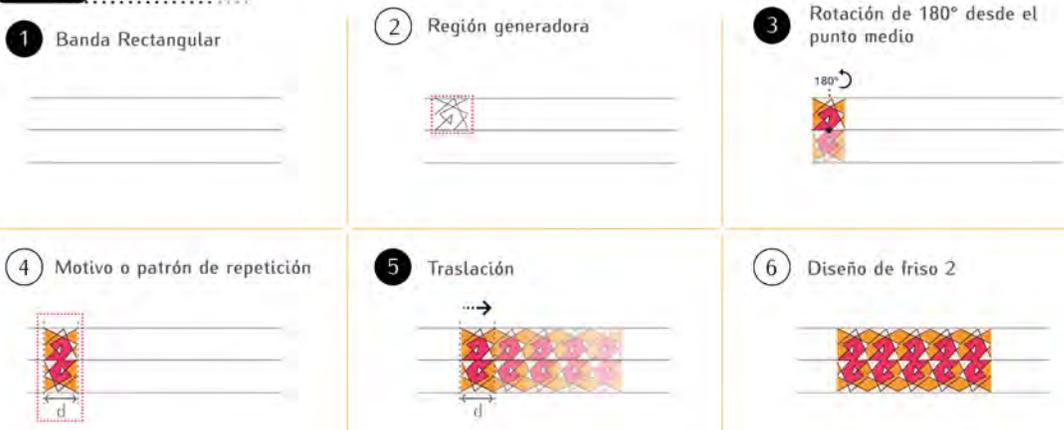


Figura 1.18: Friso 2. Clase p112

- Friso 3 (Clase $p1m1$). En esta clase, se encuentran los frisos cuyo grupo de simetría contiene una reflexión con respecto a una recta horizontal y una traslación cuyo vector es paralelo a la recta de reflexión (Figura 1.19).

Construcción del friso 3:(Figura 1.20)

1. Se genera una recta paralela auxiliar a las rectas que forman la franja que pasa por un punto medio de la distancia entre ellas (eje de reflexión).
2. Se realiza un diseño en la parte superior, entre la franja y la recta auxiliar.
3. Se aplica una reflexión al diseño respecto a una recta horizontal.
4. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se genera el friso 3.



Figura 1.19: Friso 3. Clase $p1m1$, Mitlá, Oaxaca

Tipo f3 | p1m1

Isometrías

Traslación \rightarrow Reflexión horizontal \updownarrow

Esquema



Región generadora

1/2 unidad 



Características

En esta clase se encuentran los frisos cuyo grupo de simetría contiene una reflexión con respecto a una recta horizontal y una traslación.

Construcción

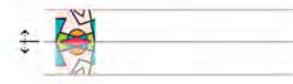
1 Banda Rectangular



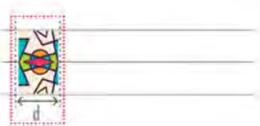
2 Región generadora



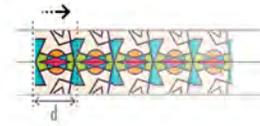
3 Reflexión con respecto a una recta horizontal



4 Motivo o patrón de repetición



5 Traslación



6 Diseño de friso 3



Figura 1.20: Friso 3. Clase p1m1

- Friso 4 (Clase pm11). En esta clase, se encuentran los frisos cuyo grupo de simetría contiene una reflexión respecto a una recta vertical y una traslación cuyo vector es perpendicular a la recta de reflexión (Figura 1.21).

Construcción del friso 4:(Figura 1.22)

1. Se genera una franja.
2. Se realiza un diseño a lo largo de la franja.
3. Se aplica una reflexión al diseño respecto a una recta vertical.
4. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se genera el friso 4.



Figura 1.21: Friso 4. Clase pm11, Alahambra

Tipo f4 pm11

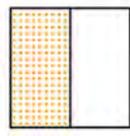
Isometrías

Traslación $\dots \rightarrow$ Reflexión $\leftarrow \updownarrow \rightarrow$
vertical

Esquema



Región generadora

1/2 unidad 



Características

En esta clase se encuentran los frisos cuyo grupo de simetría contiene una reflexión con respecto a una recta vertical y una traslación.

Construcción

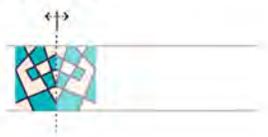
1 Banda Rectangular



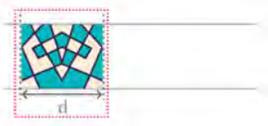
2 Región generadora



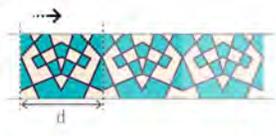
3 Reflexión con respecto a una recta vertical



4 Motivo o patrón de repetición



5 Traslación



6 Diseño de friso 4



Figura 1.22: Friso 4. Clase pm11

- Friso 5 (Clase p1a1) Los frisos de esta clase, se construyen a partir de un deslizamiento (Composición de una reflexión y una traslación) al diseño y una traslación al motivo o patrón de repetición (Figura 1.23).

Construcción del friso 5:(Figura 1.24)

1. Se genera una franja con una recta auxiliar paralela central (eje de reflexión).
2. Se realiza un diseño en la parte superior, entre la franja y la recta auxiliar.
3. Se aplica una reflexión al diseño con respecto a una recta horizontal y se realiza una traslación (deslizamiento).
4. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se genera el friso 5.



Figura 1.23: Friso 5. Clase p1a1, Mitlá, Oaxaca

Tipo f5 | p1a1

Isometrías

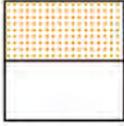
Traslación → Deslizamiento ⇄

Esquema



Características

1/2 unidad





Características

Los frisos de esta clase, se construyen a partir de un deslizamiento (Reflexión + traslación) a la región fundamental y una traslación al motivo o patrón de repetición

Construcción

1 Banda Rectangular



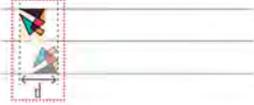
2 Región generadora



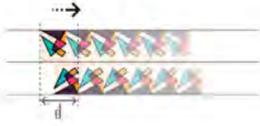
3 Se aplica un deslizamiento (Reflexión + traslación)



4 Motivo o patrón de repetición



5 Traslación



6 Diseño de friso 5



Figura 1.24: Friso 5. Clase p1a1

- Friso 6 (Clase $pmm2$). En esta clase, se encuentran los frisos generados por una reflexión con respecto a una recta vertical, una reflexión con respecto a una recta horizontal y una traslación cuyo vector es paralelo a la recta de la franja (Figura 1.25).

Construcción del friso 6:(Figura 1.26)

1. Se genera una franja con una recta auxiliar paralela central (eje de reflexión).
2. Se realiza un diseño en la parte superior, entre la franja y la recta auxiliar.
3. Se aplica una reflexión al diseño con respecto a una recta horizontal.
4. Se aplica una reflexión al resultado obtenido en el paso anterior respecto a una recta vertical.
5. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
7. Se genera el friso 6.

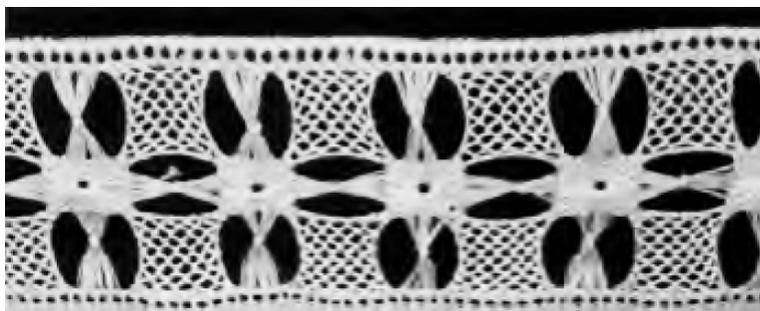


Figura 1.25: Friso 6. Taller para Re-crear Matemáticas del IES [5]

Tipo f6 | pmm2

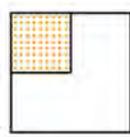
Isometrías

Traslación $\cdots \rightarrow$ | Reflexión horizontal \updownarrow | Reflexión vertical $\leftarrow \rightarrow$

Esquema



Región generadora

1/4 Unidad 



Características

En esta clase, se encuentran los frisos cuyo grado de simetrías es generado por una reflexión con respecto a una recta vertical, una reflexión con respecto a una recta horizontal y una traslación.

Construcción

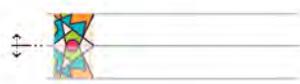
1 Banda Rectangular



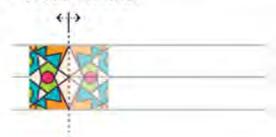
2 Región generadora



3 Reflexión con respecto a una recta horizontal



4 Reflexión con respecto a una recta vertical



5 Traslación al motivo o patrón de repetición



6 Diseño de friso 6



Figura 1.26: Friso 6. Clase pmm2

- Friso 7 (Clase pma2). En esta clase, se encuentran los frisos generados por una reflexión, una rotación a 180° cuyo centro se encuentra en el punto medio de la distancia de la franja y una traslación (Figura 1.27).

Construcción del friso 7:(Figura 1.28)

1. Se genera una franja con una recta auxiliar paralela central.
2. Se realiza un diseño a lo largo de la franja y la recta auxiliar.
3. Se aplica una reflexión al diseño con respecto a una recta vertical u horizontal.
4. Se aplica una rotación de 180° con centro en un punto de la recta auxiliar de la franja.
5. Con los pasos anteriores se genera el motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica una traslación al motivo o patrón de repetición.
7. Se genera el friso 7.

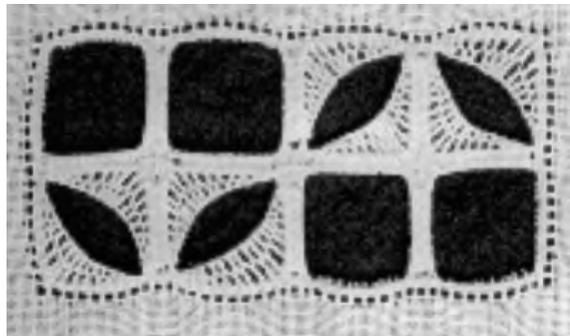


Figura 1.27: Friso 7. Taller para Re-crear Matemáticas del IES [5]

Tipo f7 | pma2

Isometrías

Traslación $\cdots \rightarrow$ | Reflexión horizontal \updownarrow | Rotación 180° \curvearrowright

Esquema



Región generadora

1/4 unidad 

Características

En esta clase, se encuentran los frisos cuyo grado de simetrías es generado por una reflexión, una rotación a 180° y una traslación.

Construcción

- Banda Rectangular**

- Región generadora**

- Reflexión**

- Rotación de 180° respecto al punto medio**

- Traslación al motivo o patrón de repetición**

- Diseño de friso 7**




Figura 1.28: Friso 7. Clase pma2

Tabla 1.4: Tabla resumen de los 7 frisos

N°	Tipo	Reflexión vertical	Reflexión horizontal	Deslizamiento	Rotación 180	Región generadora
1	p111	No	No	No	No	1 unidad
2	p112	No	No	No	Sí	1/2 unidad
3	p1m1	No	Sí	No	No	1/2 unidad
4	pm11	Sí	No	No	No	1/2 unidad
5	p1a1	No	No	Sí	No	1/2 unidad
6	pmm2	Sí	Sí	Sí	Sí	1/4 unidad
7	pma2	Sí	No	Sí	Sí	1/4 unidad

1.3. Diseño y construcción de teselaciones

En los edificios es frecuente encontrar paredes o pisos cubiertos por una figura que se repite de forma regular ⁷; en un lenguaje coloquial se llama mosaicos a las piezas utilizadas para recubrir el piso.

Distintas culturas a lo largo de la historia han utilizado esta técnica para formar pavimentos o muros de mosaicos en sus construcciones o artesanías de manera más formal.

Una decoración del plano construida repitiendo regularmente la letra una figura en dos direcciones no paralelas y a intervalos regulares iguales (Figura 1.29) se le llama mosaico o embaldosado. Este se puede obtener a partir de un ornamento básico, que aparece sombreado mediante repeticiones de tal forma que cubre el plano, también se puede observar que sólo hay dos tipos de movimientos del plano, los cuales son traslaciones hacia (arriba / abajo) o

⁷La palabra regular hace referencia a que se repite de una manera constante y tiene la misma forma y tamaño

(derecha / izquierda) un número entero de unidades.

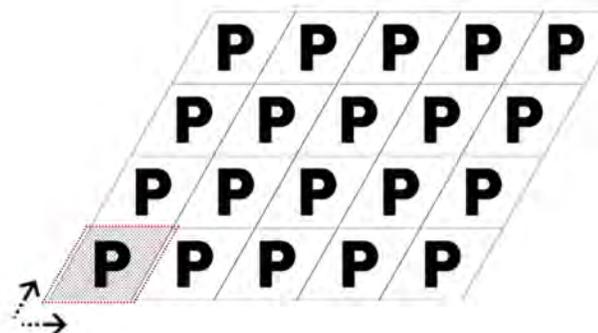


Figura 1.29: Recubrimiento del plano a partir de un ornamento básico (letra *P*)

La clasificación de los mosaicos, tanto del plano, como del espacio, ha sido de interés desde tiempos remotos. Kepler encontró los denominados retículas del plano; un polígono que al repetirlo de forma regular conforma un mosaico sin dejar huecos o traslapes, los cuáles son los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos.

En el siglo XIX se inició el camino en busca de una clasificación de mosaicos del plano y del espacio. Fedorov Schoenflies y Barlow clasificaron los 17 grupos cristalográficos de dimensión dos y los 230 grupos cristalográficos de dimensión tres.

En este apartado, se explica la clasificación y configuración geométrica de los 17 grupos cristalográficos.

1.3.1. *Definición*

La palabra tesela (del latín tessella) significa "cada una de las piezas que se forman en un mosaico", sin embargo, el objetivo principal es explicar los mosaicos que repiten un patrón geométrico a lo largo y ancho del piso o muros.

Los términos teselaciones y teselado hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos: ⁸

1. Que no queden huecos.
2. Que no haya traslapes en las figuras.

Para poder cubrir el plano, es necesario que las figuras coincidan arista - arista o cara - cara.

1.3.2. *Figuras que teselan el plano*

Existe una demostración la cual indica que los únicos polígonos regulares ⁹ que cubren completamente una superficie plana son: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares [8]. Esto se debe a que en cada vértice la suma de ángulos es de 360° , sin que haya huecos ni traslapes y cada arista contiene exactamente dos polígonos.

⁸Definición matemática tomada de: <https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado>

⁹Es un polígono cuyos ángulos internos son iguales a la longitud de cada lado igual entre sí

El teselado regular se hace con un único tipo de polígono regular, el cual debe tener un ángulo interior que sea divisor de 360° . Los únicos polígonos regulares cuyos ángulos interiores son divisores de 360° son el triángulo equilátero (60°), el cuadrado (90°) y el hexágono regular (120°) (Figura 1.30).

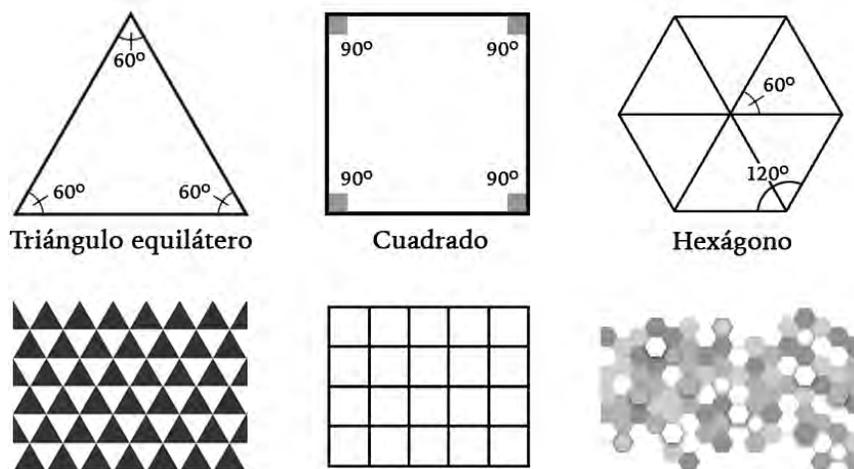


Figura 1.30: Figuras que teselan el plano

1.3.3. Notación de los grupos de simetría

De forma similar que con los frisos, la notación de los 17 grupos de simetría utiliza un símbolo de cuatro términos que usualmente se asigna a cada uno para representar alguna de las propiedades simétricas del diseño (Tabla 1.5).

Para los grupos de simetría, la notación completa comienza con p o c , para una celda primitiva o una celda centrada. Una celda primitiva es una región del paralelogramo delimitada por segmentos rectos. Todos los grupos de si-

metría menos dos se describen con respecto a los ejes de celdas primitivas, una base de coordenadas que utiliza los vectores de traslación de la retícula. En los dos casos restantes, la descripción de simetría es con respecto a una celda centradas que son más grandes que la primitiva y por lo tanto, tienen una repetición interna; las direcciones de sus lados son diferentes de las de los vectores de traslación que abarcan una celda primitiva.

El segundo término es un número que indica el orden máximo de rotación, este puede ser 1, 2, 3, 4 ó 6. La rotación de orden 1 representa un giro de 360° , la de orden 2 es de 180° , la de orden 3 es de 120° , la de orden 4 es de 90° y la de orden 6 es de 60° .

El tercer y cuarto símbolo, m , g o 1, indica si hay eje de simetría de reflexión o deslizamiento. La letra m indica un eje de simetría de la reflexión, la g indica un deslizamiento y el número 1 indica que no existe alguno de los dos mencionados (Tabla 1.31).

Tabla 1.5: Notación de los 17 grupos cristalográficos

Primer término	p	celda primitiva
	c	celda centrada
Segundo término (n)	1	No hay simetría de rotación
	2	Si la simetría de rotación de 180° es el orden más alto de rotación.
	3	Si la simetría de rotación de 120° es el orden más alto de rotación.
	4	Si la simetría de rotación de 90° es el orden más alto de rotación.
	6	Si la simetría de rotación de 60° es el orden más alto de rotación.
Tercer término (x)	m	si hay un eje de reflexión perpendicular a un lado del paralelogramo, es decir, si es paralelo a un eje de reflexión en la celda.
	g	si hay un eje de deslizamiento perpendicular a un lado del paralelogramo, es decir, si es paralelo a un eje de reflexión y deslizamiento en celda.
	1	Ninguna de los anteriores
Cuarto término (y)	m	si hay un eje de reflexión en:
		- 90 ° con respecto al eje x
		- 45 ° al eje x
	- 30 ° al eje x , si el eje y es paralelo a un eje de reflexión en la celda unitaria	
g	si hay un eje de reflexión en:	
	- 90 ° con respecto al eje x	
	- 45 ° al eje x ,	
- 30 ° al eje x , si el eje y es paralelo a un eje de reflexión en la celda unitaria		
1	Ninguna de los anteriores	

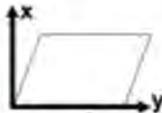
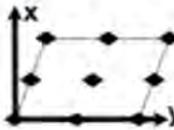
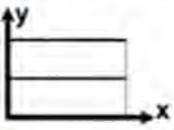
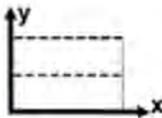
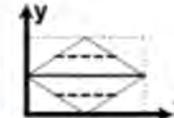
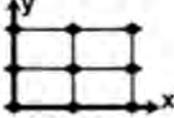
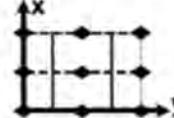
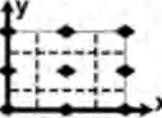
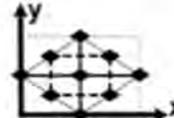
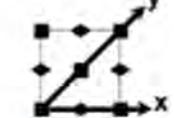
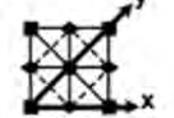
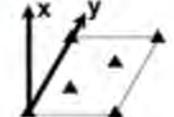
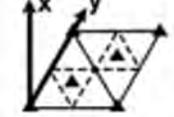
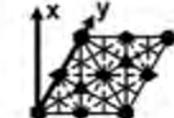
Nomenclatura	1 $p1$ ($p111$) 	2 $p2$ ($p211$) 	3 pm ($p1m1$) 
4 pg ($p1g1$) 	5 cm ($c1m1$) 	6 pmm ($p2mm$) 	7 pmg ($p2mg$) 
8 pgg ($p2gg$) 	9 cmm ($c2mm$) 	10 $p4$ ($p411$) 	11 $p4m$ ($p4mm$) 
12 $p4g$ ($p4gm$) 	13 $p3$ ($p311$) 	14 $p3m1$ ($p3m1$) 	15 $p31m$ ($p31m$) 
16 $p6$ ($p611$) 	17 $p6m$ ($p6mm$) 	$\frac{c/p}{n} \times \underline{x} \underline{y}$ c/p : celda primitiva o celda centrada n : orden máximo de rotación x : rotación o deslizamiento en eje "x" y : rotación o deslizamiento en eje "y"	

Figura 1.31: Notación de los 17 grupos cristalográficos [27]

1.3.4. *Tipos de retículas*

Antes de explicar las características de simetría de todos los grupos, es importante señalar que cada diseño que se repite regularmente se basa en un marco estructural. Esto se representa en forma de una matriz de puntos llamada red o retícula. Estas estructuras consisten en celdas unitarias de idéntico tamaño, forma y contenido que cuando se trasladan en dos direcciones independientes, no paralelas, producen el patrón de repetición completo.

La combinación de las cuatro isometrías produce un total de diecisiete clases de patrones; cada uno, asociado con los diferentes tipos de retícula y cada retícula asociada a una forma particular de paralelogramo (o celda unitaria) que contiene la unidad repetitiva del diseño.

Un paralelogramo tiene cuatro lados rectos: dos lados paralelos de longitud a y dos lados paralelos de longitud b . Uno de los ángulos, en el que estos dos conjuntos de líneas se cruzan entre sí es Θ . El tipo específico de paralelogramo está determinado por las condiciones de a , b y Θ . Los resultados de diferentes combinaciones de estas variables se dan (Figura 1.32):

1. Si $a = b$ y $\Theta = 90^\circ$, el paralelogramo es un *cuadrado*
2. Si $a = b$, $\Theta \neq 60^\circ$ y $\Theta \neq 90^\circ$ el paralelogramo es un *rombo*.
3. Si $a = b$ y $\Theta = 60^\circ$, el paralelogramo está compuesto de dos triángulos equiláteros y es *hexagonal*
4. Si $a \neq b$, $\Theta = 90^\circ$, el paralelogramo es un *rectángulo*

5. Si $a \neq b$ y $\theta \neq 90^\circ$, es un paralelogramo sin ángulos rectos.

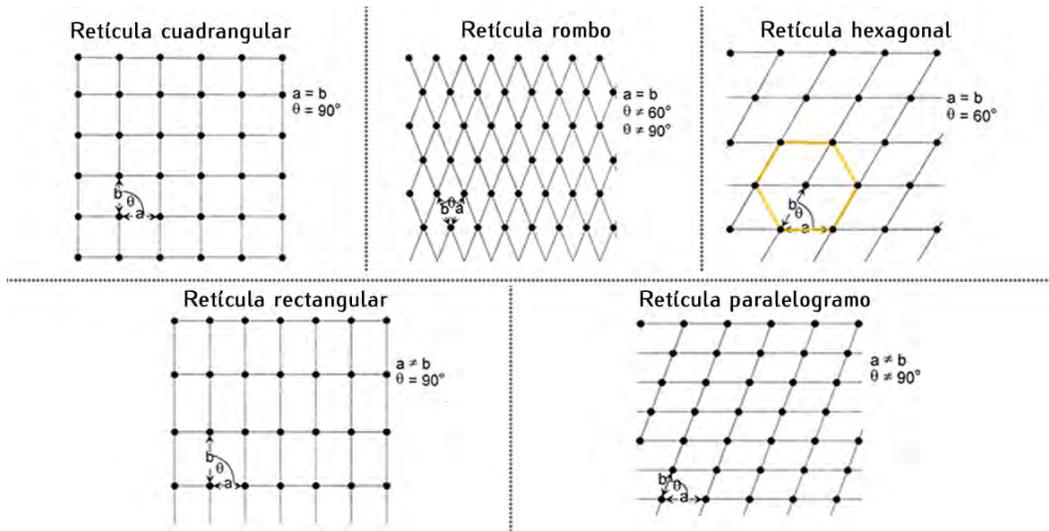


Figura 1.32: Tipos de retículas

1.3.5. Región generadora

Una región generadora se puede definir como las isometrías que actúan en una pequeña porción del paralelogramo (los cristalógrafos usan el término "unidad asimétrica", los matemáticos usan el término "región fundamental" o "dominio fundamental"). La forma de la región no siempre es única para un diseño cualquiera, pero su área siempre es la misma. La figura encerrada se denominará "motivo o patrón de diseño" y los componentes por separado se denominan "elementos de diseño".

El área de una región generadora siempre será una parte racional de una unidad del paralelogramo (Figura 1.33).

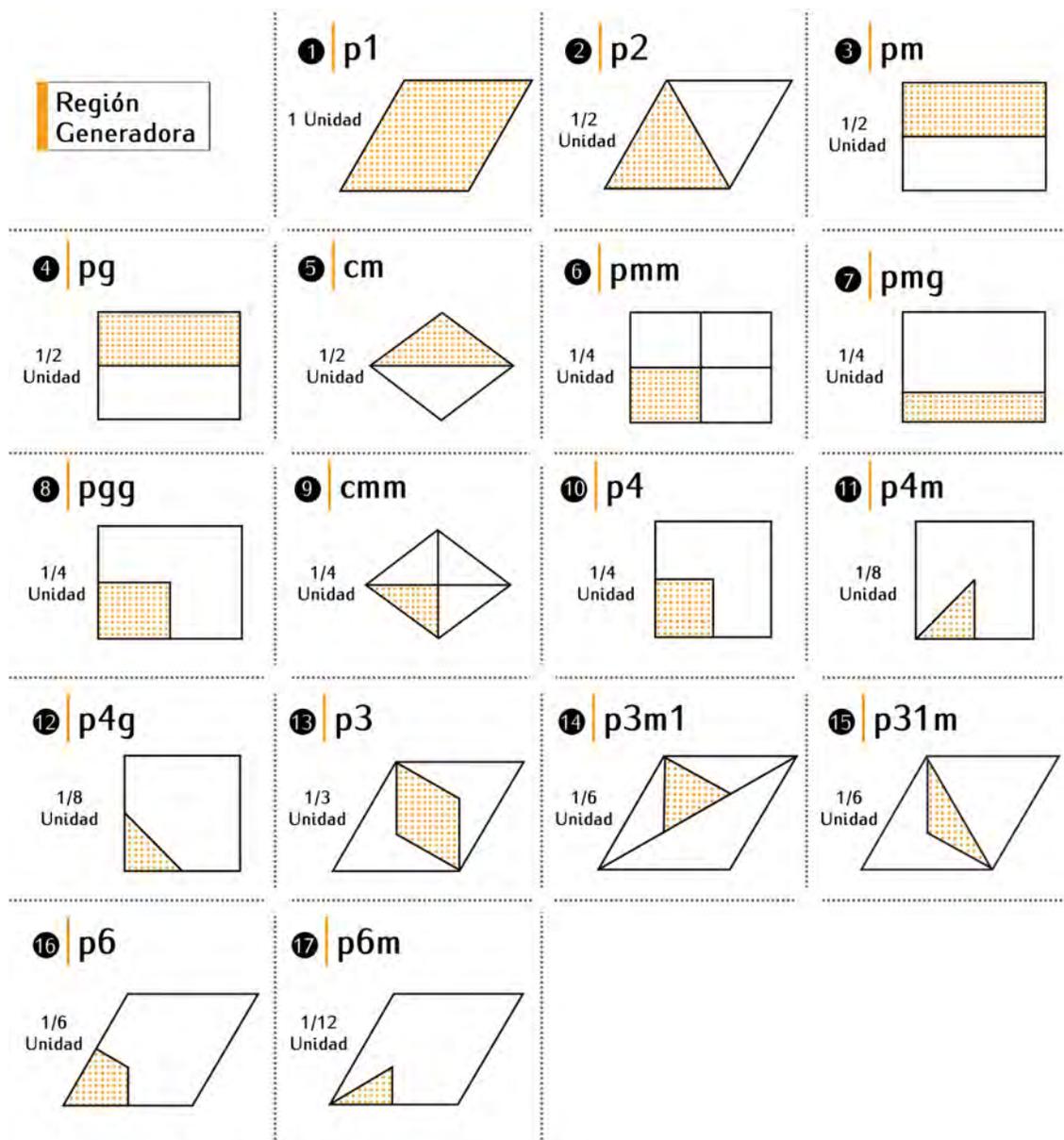


Figura 1.33: Regiones generadoras de los 17 grupos cristalográficos

¿Porque 17 grupos?

Como ya se mencionó anteriormente, en 1891, el cristalógrafo E. S. Feodorov, demostró que sólo existen básicamente 17 grupos cristalográficos, al hacer una clasificación exhaustiva de ellos. Más tarde, en 1897 F. Klein y R. Fricke redescubrieron este resultado. Es de hacer notar que los árabes en plena edad media, conocían ya éstos 17 grupos y los empleaban en la decoración de sus mezquitas, castillos y fortalezas.

De igual manera que con los frisos, se hacen todas las combinaciones posibles de simetrías que demuestran que solo existen 17 grupos.

1.3.6. Clasificación de los grupos de simetría y su construcción

Las teselaciones en el plano forman las estructuras matemáticas denominadas grupos. Éstas se representan en 17 grupos cristalográficos bidimensionales y se realizan sin variar las dimensiones del área de las mismas, por lo tanto, la figura inicial es igual y geoméricamente congruente a la final.

A continuación se presenta un análisis, clasificación y construcción de cada uno de los 17 grupos:

- $p1$: Este tipo de grupo es el más sencillo ; se genera por un paralelogramo (cualquiera de los cinco tipos de retícula), su región fundamental es una unidad. Solo tiene simetrías de traslación (Figura 1.34).

Construcción del grupo $p1$:(Figura 1.35).

1. Se realiza un diseño dentro de la región fundamental.
2. Se genera el motivo o patrón de repetición (1 unidad del paralelogramo).
3. Se aplica la primera traslación.
4. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.



Figura 1.34: Grupo de simetría $p1$ (color)

Tipo p1 | p celda primitiva
1 orden de rotación

Simbología:
 Contorno Celda Primitiva

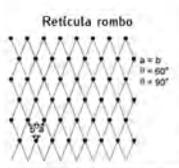
Reticula: Paralelogramo

Reticula cuadrangular



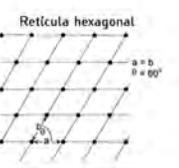
$a = b$
 $\theta = 90^\circ$

Reticula rombo



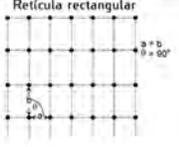
$a = b$
 $\theta = 60^\circ$
 $\theta = 120^\circ$

Reticula hexagonal



$a = b$
 $\theta = 120^\circ$

Reticula rectangular



$a \neq b$
 $\theta = 90^\circ$

Reticula paralelogramo



$a \neq b$
 $\theta \neq 90^\circ$

Isometrías:

Traslación 

Región Generadora

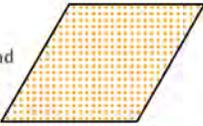
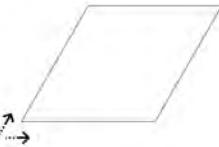
1 Unidad 

Diagrama:



Características

Las únicas simetrías son traslaciones

Construcción

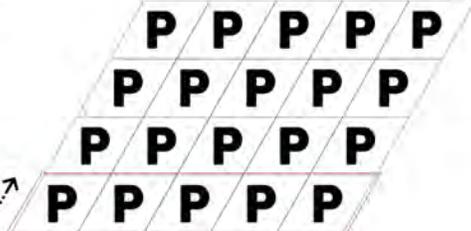
1



2



4



3



Figura 1.35: p1

- $p2$: Se genera por una retícula de paralelogramo (cualquiera de los cinco tipos de retícula). Tiene simetrías de orden dos (180°) y traslación. Su región generadora corresponde a $1/2$ unidad del paralelogramo (Figura 1.36).

Construcción del grupo $p2$:(Figura 1.37).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/2$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica un giro de 180° tomando como punto de rotación el centro del paralelogramo.
3. Se aplica la primera traslación.
4. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

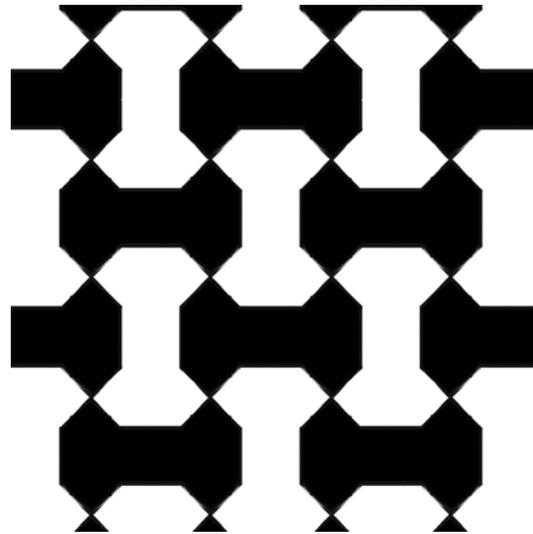


Figura 1.36: Grupo de simetría $p2$

Tipo p2 | p celda primitiva
2 orden de rotación 180

Simbología:
 — Contorno Celda Primitiva ◆ Centro de rotación de orden 2 (180°)

Reticula: Paralelogramo

Reticula cuadrangular

$a = b$
 $\alpha = 90^\circ$

Reticula rombo

$a = b$
 $\alpha = 60^\circ$
 $\beta = 120^\circ$

Reticula hexagonal

$a = b$
 $\alpha = 120^\circ$

Reticula rectangular

$a \neq b$
 $\alpha = 90^\circ$

Reticula paralelogramo

$a \neq b$
 $\alpha \neq 90^\circ$

Isometrías:
 Traslación | Rotación 180°

Región Generadora
 1/2 Unidad

Diagrama:

Características
 El grupo p2 contiene centros de rotación de orden 2 (180°)

Construcción

- 1
- 2
- 3
- 4

Figura 1.37: p2

- pm: El grupo pm tiene simetrías de reflexión y traslaciones. Su retícula es rectangular y su región generadora es $1/2$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.38).

Construcción del grupo pm:(Figura 1.39).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/2$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión respecto a un eje horizontal o vertical ubicado a la mitad del paralelogramo generando el motivo o patrón de repetición.
3. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
4. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

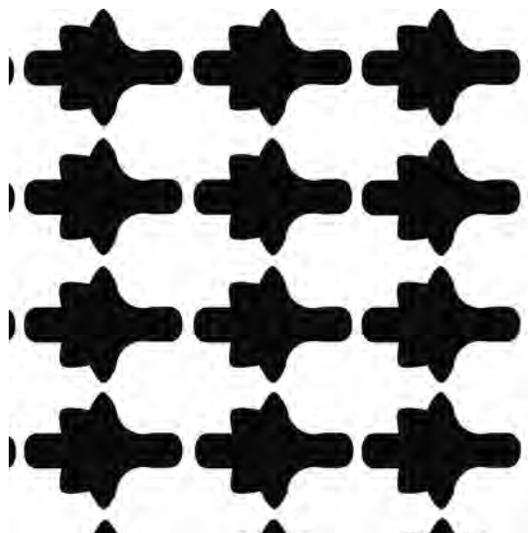


Figura 1.38: Grupo de simetría pm

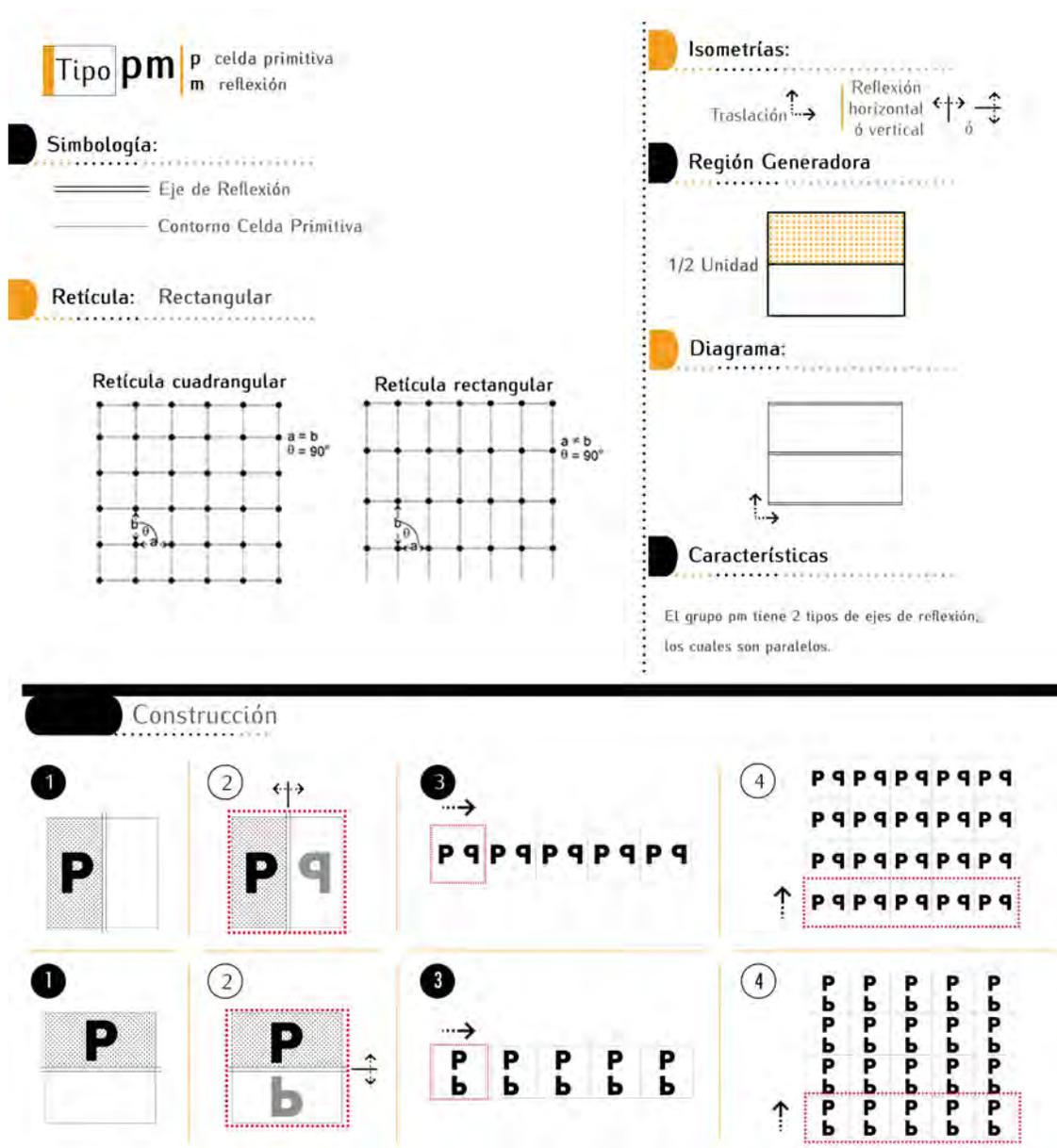


Figura 1.39: pm

- pg: El grupo pg tiene simetrías de deslizamiento y traslación. Su retícula es rectangular y su región generadora es 1/2 de unidad del paralelogramo (Figura 1.40).

Construcción del grupo pg:(Figura 1.41)

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a 1/2 unidad del paralelogramo.
2. Se aplica un deslizamiento respecto a un eje horizontal o vertical ubicado a la mitad del paralelogramo generando el motivo o patrón de repetición.
3. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
4. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

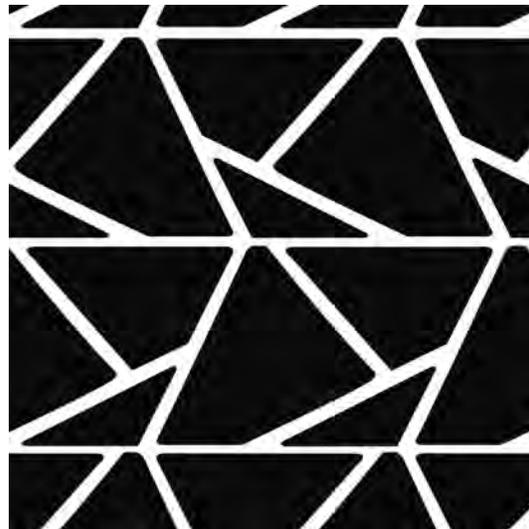


Figura 1.40: Grupo de simetría pg

Tipo pg | p celda primitiva
g deslizamiento

Simbología:

----- Eje de Deslizamiento
 _____ Contorno Celda Primitiva

Retícula: Rectangular

Retícula cuadrangular

$a = b$
 $\theta = 90^\circ$

Retícula rectangular

$a \neq b$
 $\theta = 90^\circ$

Isometrías:

Traslación \leftrightarrow | Deslizamiento horizontal ó vertical $\leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$

Región Generadora

1/2 Unidad

Diagrama:

Características

El grupo pg contiene ejes de deslizamiento y son paralelos.

Construcción

1

2

3

4

1

2

3

4

Figura 1.41: pg

- **cm**: El grupo **cm** tiene ejes de reflexión, los cuales son paralelos; deslizamiento y traslación. Su retícula es rómbica y su región generadora es $1/2$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.42).

Construcción del grupo **cm:**(Figura 1.43)

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/2$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión respecto a un eje horizontal ubicado a la mitad del paralelogramo.
3. Se aplica un deslizamiento al producto generado por la reflexión. El eje de deslizamiento se encuentra entre los dos ejes de reflexión paralelos adyacentes.
4. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

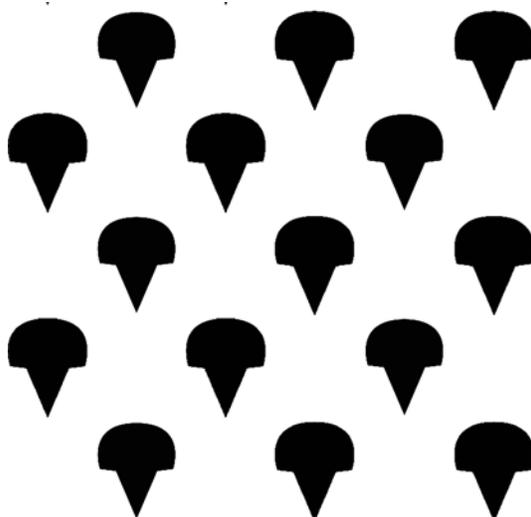


Figura 1.42: Grupo de simetría **cm**

Tipo Cm c celda centrada
m reflexión

Simbología:

- ==== Eje de Reflexión
- Eje de Deslizamiento
- _____ Contorno Celda
- Contorno Celda Centrada

Retícula: Rómbica

Retícula rombo

$a = b$
 $\theta = 60^\circ$
 $\theta = 90^\circ$

Isometrías:

Traslación \rightarrow | Reflexión \leftrightarrow | Deslizamiento \rightarrow

Región Generadora:

1/2 Unidad

Diagrama:

Características

Este grupo tiene ejes de reflexión y deslizamiento; todos paralelos.

Construcción

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Figura 1.43: cm

- pmm: El grupo pmm tiene reflexiones en dos direcciones perpendiculares (horizontal y vertical) y centros de rotación de orden 2 (180°) ubicados en las intersecciones de los ejes de reflexión, además de tener traslación. Su retícula es rectangular y su región generadora es $1/4$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.44).

Construcción del grupo pmm:(Figura 1.45)

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/4$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión respecto a un eje vertical a la mitad del paralelogramo.
3. Se aplica una rotación de orden dos (180°) a partir del centro de rotación ubicado en la intersección del eje de reflexión vertical y horizontal del paralelogramo.
4. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

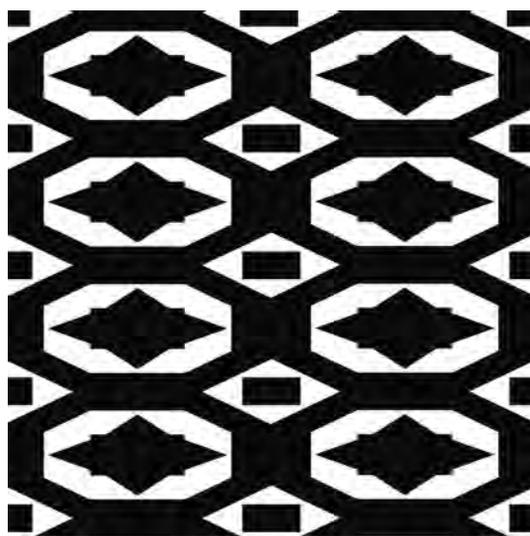


Figura 1.44: Grupo de simetría pmm

Tipo pmm

- p celda primitiva
- m reflexión
- m reflexión

Simbología:

- ===== Eje de Reflexión
- ◆ Centro de rotación de orden 2 (180°)
- ▭ Contorno Celda Primitiva

Retícula: Rectangular

Retícula cuadrangular

$a = b$
 $\theta = 90^\circ$

Retícula rectangular

$a \neq b$
 $\theta = 90^\circ$

Isometrías:

Traslación \leftrightarrow | Reflexión \leftrightarrow | Rotación 180° \curvearrowright

Región Generadora

1/4 Unidad

Diagrama:

Características

El grupo pmm tiene reflexiones en dos direcciones perpendiculares y centros de rotación de orden dos (180°) ubicados en las intersecciones de los ejes de reflexión.

Construcción

1

2

\leftrightarrow

3

4

$\dots \rightarrow$

5

Figura 1.45: pmm

- pmg: El grupo pmg tiene centros de rotación de orden dos (180°) y reflexión en una sola dirección. Su retícula es rectangular y su región generadora es $1/4$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.46).

Construcción del grupo pmg:(Figura 1.47).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/4$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión respecto a un eje horizontal.
3. Se aplica una rotación de orden dos (180°). El centro de rotación se encuentra en la intersección de los vértices dentro del paralelogramo.
4. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.



Figura 1.46: Grupo de simetría pmg

Tipo pmg

- p celda primitiva
- m reflexión
- g deslizamiento

Simbología:

- ==== Eje de Reflexión ◆ Centro de rotación de orden 2 (180°)
- Eje de Deslizamiento
- Contorno Celda Primitiva

Retícula: Rectangular

Retícula cuadrangular

$a = b$
 $\theta = 90^\circ$

Retícula rectangular

$a \neq b$
 $\theta = 90^\circ$

Isometrías:

Traslación

Reflexión

180°
Rotación

Deslizamiento

Región Generadora

1/4 Unidad

Diagrama:

Características

- El grupo pmg tiene centros de rotación de orden dos (180°) y reflexión en una sola dirección.
- Tiene deslizamientos cuyos ejes son perpendiculares a los ejes de reflexión. Los centros de rotación se encuentran en los ejes de deslizamiento.

Construcción

1

2

3

4

5

Figura 1.47: pmg

- pgg: El grupo pgg tiene centros de rotación de orden dos (180°) y deslizamiento. Su retícula es rectangular y su región generadora es $1/4$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.48).

Construcción del grupo pgg:(Figura 1.49).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/4$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica un deslizamiento respecto a un eje horizontal.
3. Se aplica una rotación de orden dos (180°). El centro de rotación se encuentra en la intersección de los vértices dentro del paralelogramo.
4. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
5. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.



Figura 1.48: Grupo de simetría pgg

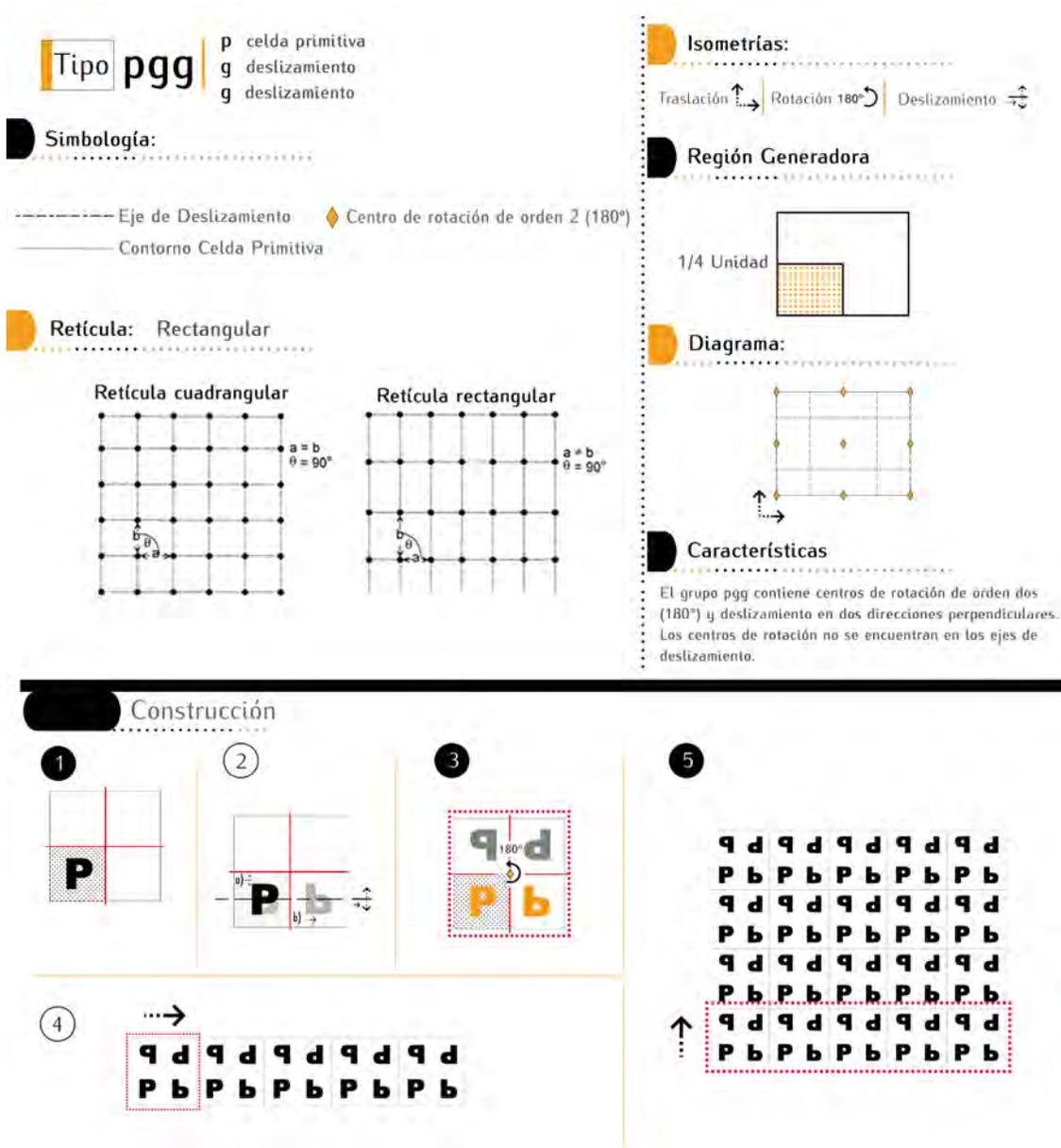


Figura 1.49: pgg

- **cmm**: El grupo **cmm** tiene reflexiones en dos direcciones perpendiculares y rotación de orden dos (180°). Su retícula es rómbica y su región generadora es $1/4$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.50).

Construcción del grupo **cmm:**(Figura 1.51).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/4$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una rotación de orden dos (180°) ubicada a la mitad de una de las aristas del paralelogramo donde se genero el diseño.
3. Se aplica una reflexión respecto al eje vertical.
4. Se aplica una rotación de orden dos (180°). El centro de rotación se encuentra en la intersección de los vértices dentro del paralelogramo.
5. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

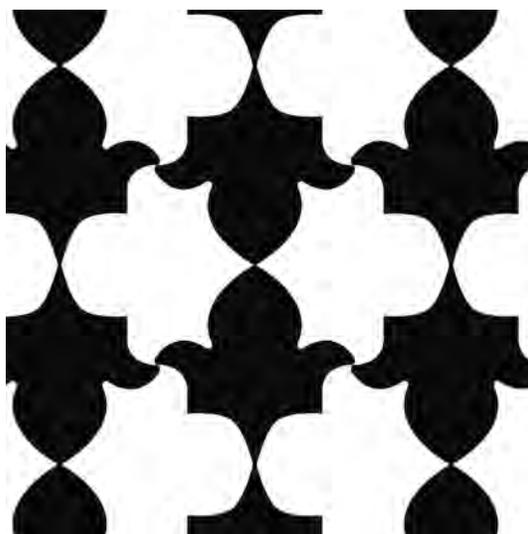


Figura 1.50: Grupo de simetría **cmm**

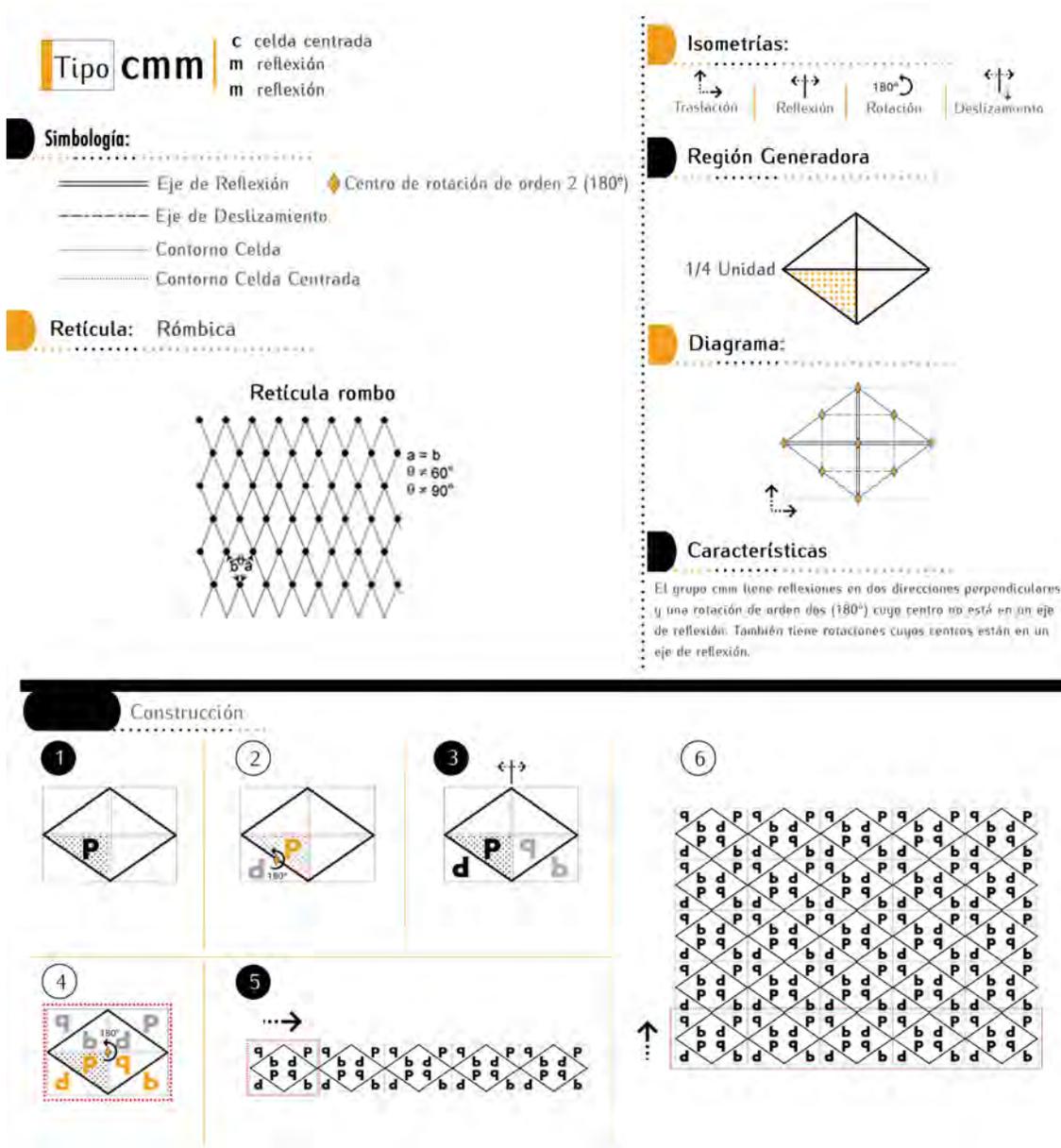


Figura 1.51: cmm

- $p4$: El grupo $p4$ tiene rotaciones de orden 4 (90°) y de orden 2 (180°). Su retícula es cuadrangular y su región generadora es $1/4$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.52).

Construcción del grupo $p4$:(Figura 1.53).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/4$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación ubicado en la intersección de los vértices dentro del paralelogramo.
3. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
5. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

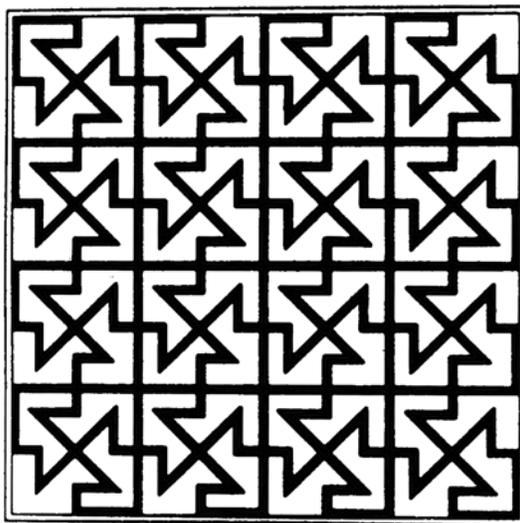


Figura 1.52: Grupo de simetría $p4$

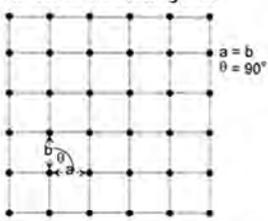
Tipo **p4** | p celda primitiva
4 orden de rotación 90°

Simbología:

— Contorno Celda Primitiva ◆ Centro de rotación de orden 2 (180°)
■ Centro de rotación de orden 4 (90°)

Retícula: Cuadrangular

Retícula cuadrangular



$a = b$
 $\theta = 90^\circ$

Isometrías:

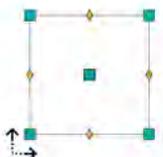
Traslación \uparrow \rightarrow | Rotación 180° \curvearrowright | Rotación 90° \curvearrowright

Región Generadora



1/4 Unidad

Diagrama:

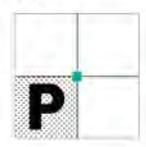


Características

El grupo p4 tiene centros de rotación de orden 4 (90°) y centros de rotación de orden 2 (180°).

Construcción

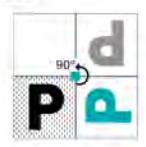
1



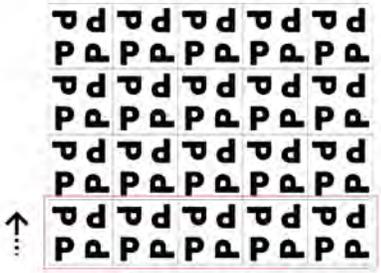
2



3



6



4



5



Figura 1.53: p4

- $p4m$: El grupo $p4m$ tiene rotaciones de orden 4 (90°) y reflexiones en cuatro direcciones distintas formando ángulos de 45° de modo que los cuatro ejes pasan por los centros de rotaciones. Su retícula es cuadrangular y su región generadora es $1/8$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.54).

Construcción del grupo $p4m$:(Figura 1.55).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/8$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión sobre el eje a 45° .
3. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
5. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
6. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
7. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.



Figura 1.54: Grupo de simetría $p4m$

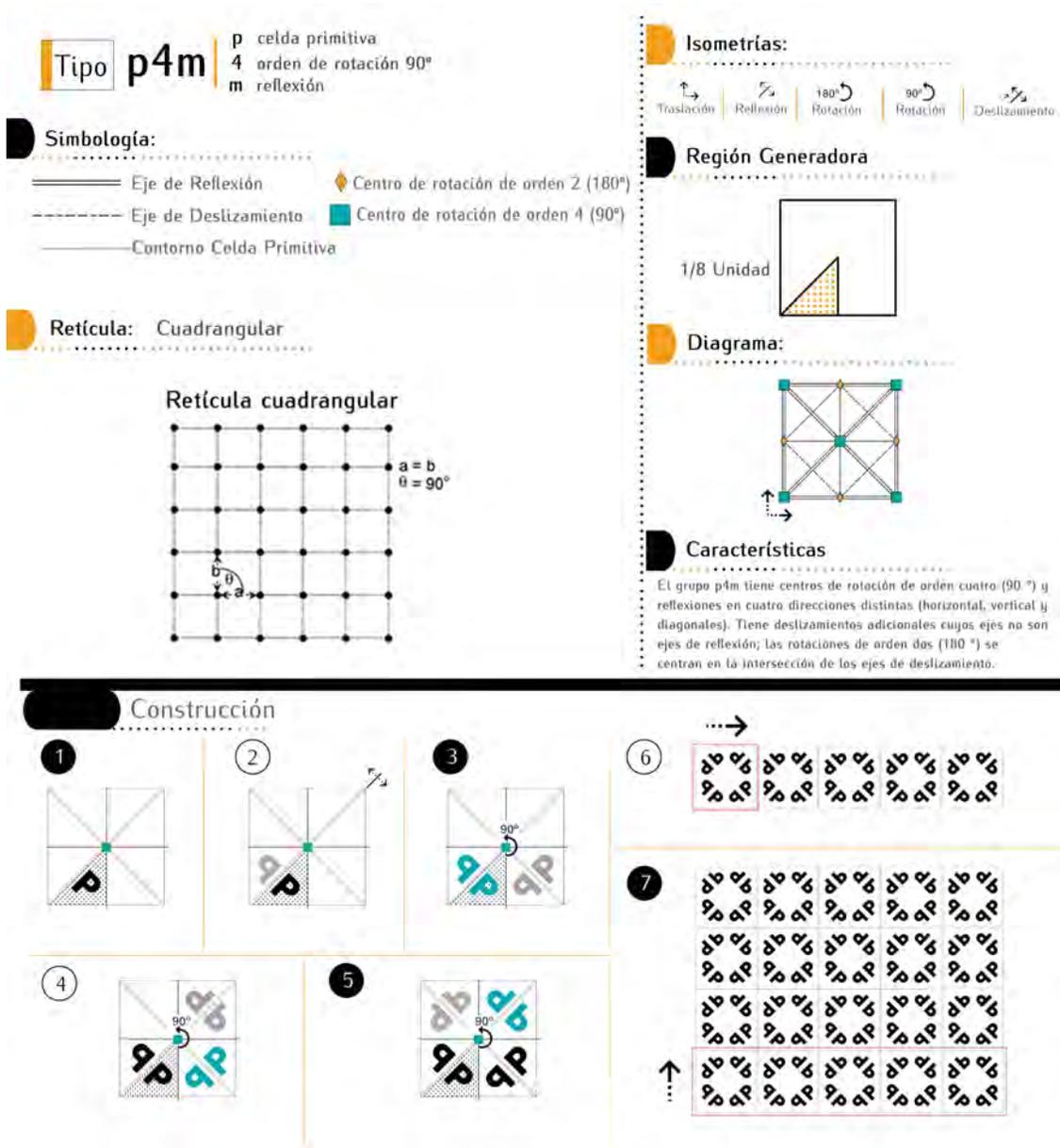


Figura 1.55: p4m

- $p4g$: El grupo $p4g$ tiene rotaciones de orden cuatro (90°), tiene reflexión en dos direcciones perpendiculares que son la imagen reflejada de cada uno y rotaciones de orden dos (180°). Tiene ejes de deslizamiento paralelos a los ejes de reflexión y también en un ángulo de 45° . Su retícula es cuadrangular y su región generadora es $1/8$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.56).

Construcción del grupo $p4m$:(Figura 1.57).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/8$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión sobre el eje a 45° .
3. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
5. Se aplica una rotación de orden cuatro (90°) a partir del centro de rotación.
6. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
7. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

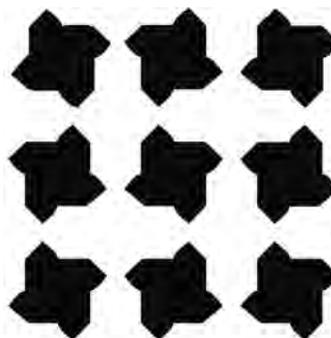


Figura 1.56: Grupo de simetría $p4g$

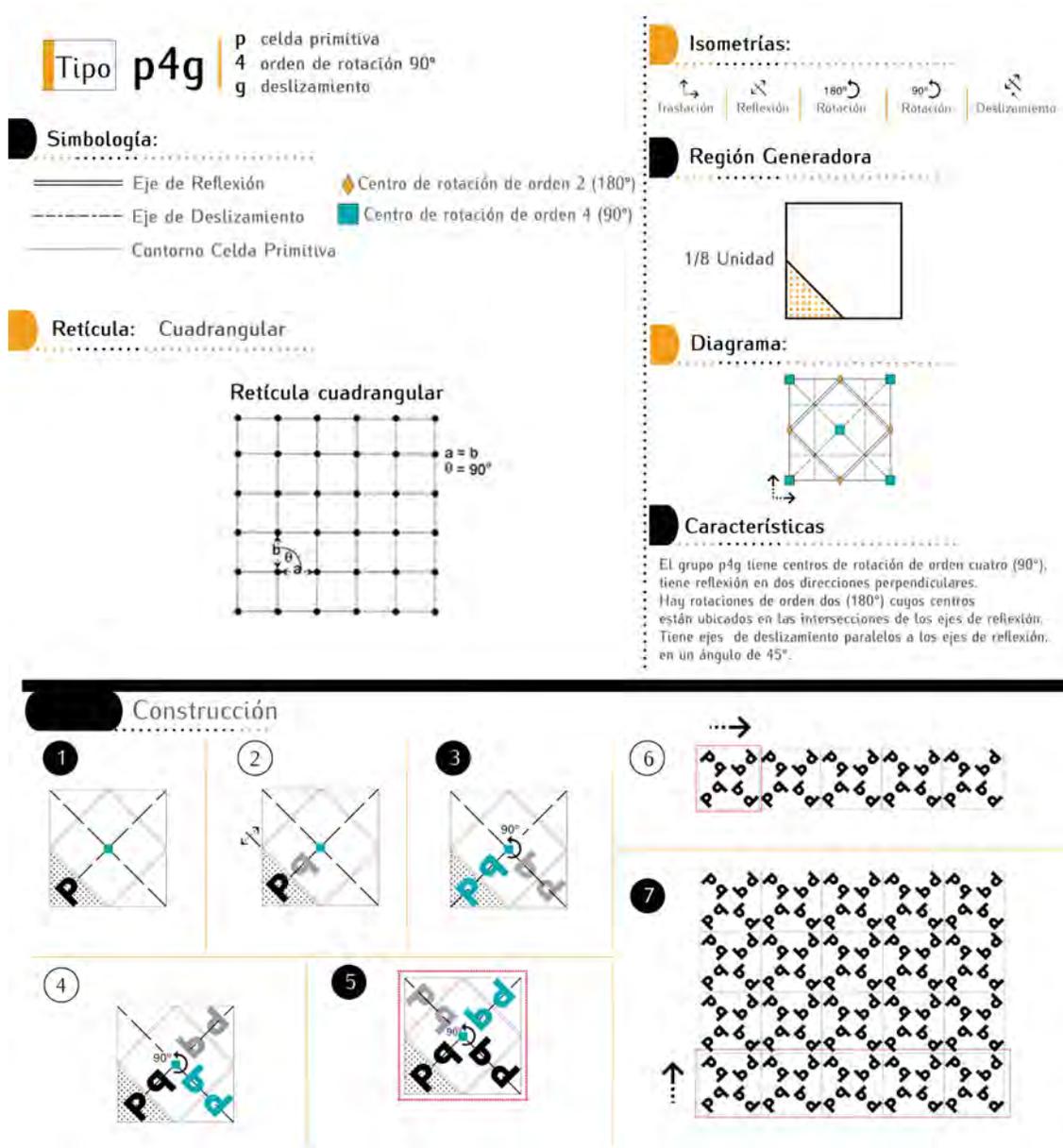


Figura 1.57: p4g

- $p3$: El grupo $p3$ tiene rotaciones de orden tres (120°). Su retícula es hexagonal y su región generadora es $1/3$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.58).

Construcción del grupo $p4m$:(Figura 1.59).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/3$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices de uno de los dos triángulos equiláteros que componen la retícula hexagonal).
3. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del otro centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices del otro triángulo equilátero que compone la retícula hexagonal).
5. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
6. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
7. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

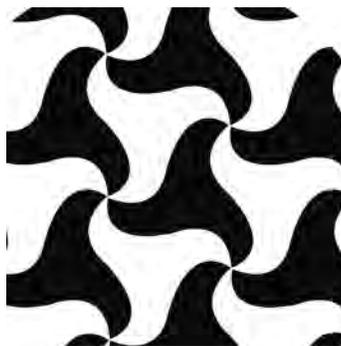


Figura 1.58: Grupo de simetría $p3$

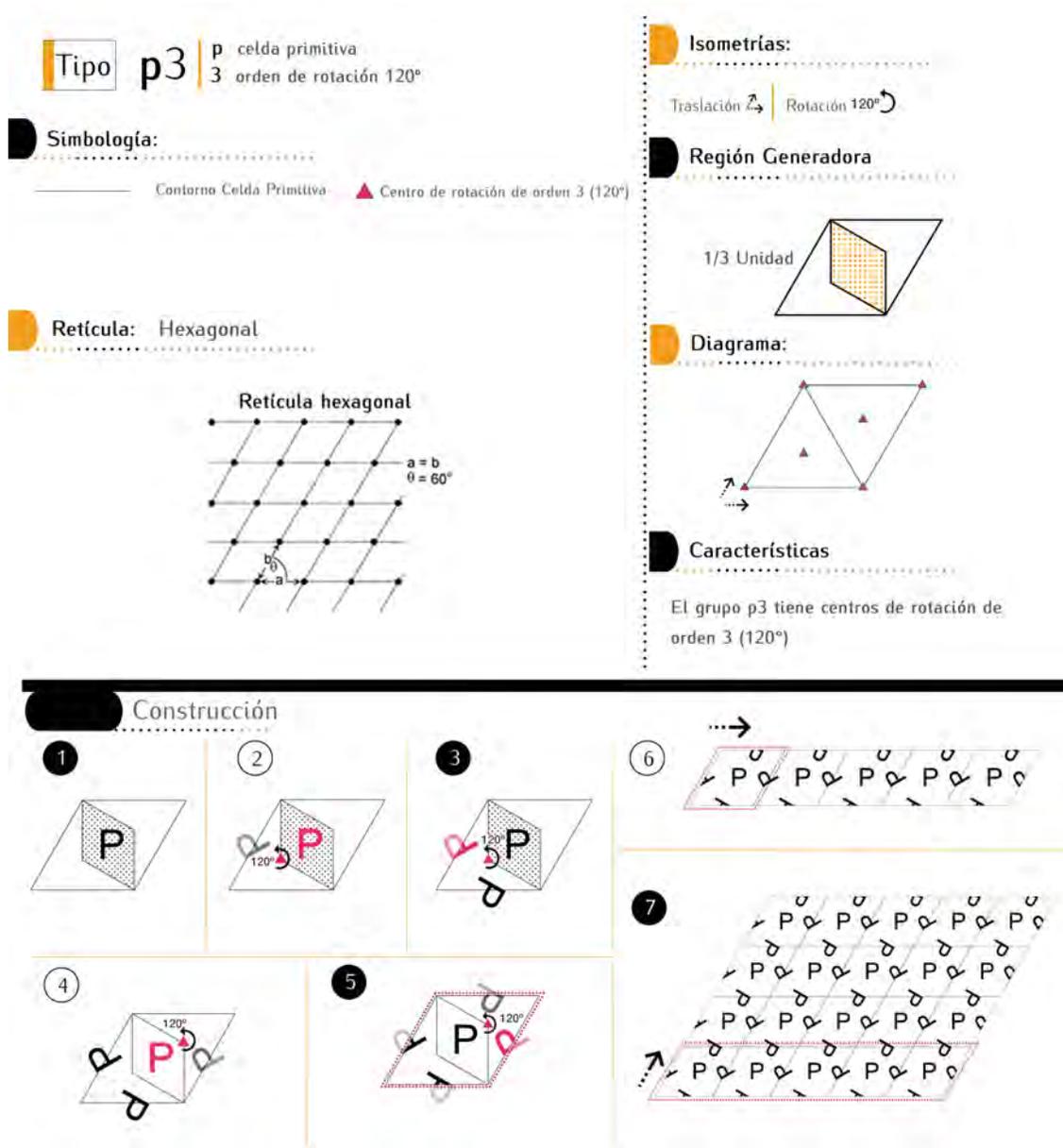


Figura 1.59: p3

- $p3m1$: El grupo $p3m1$ contiene reflexiones, cuyos ejes forman ángulos de 60° y rotaciones de orden tres (120°). Su retícula es hexagonal y su región generadora es $1/6$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.60).

Construcción del grupo $p3m1$:(Figura 1.61).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/6$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión sobre la diagonal mayor del paralelogramo.
3. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices de uno de los dos triángulos equiláteros que componen la retícula hexagonal).
4. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
5. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del otro centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices del otro triángulo equilátero que compone la retícula hexagonal).
6. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
7. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
8. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

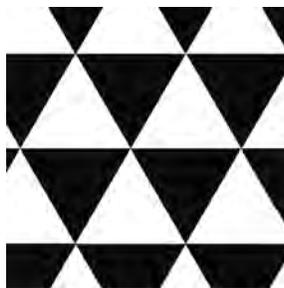


Figura 1.60: Grupo de simetría $p3m1$

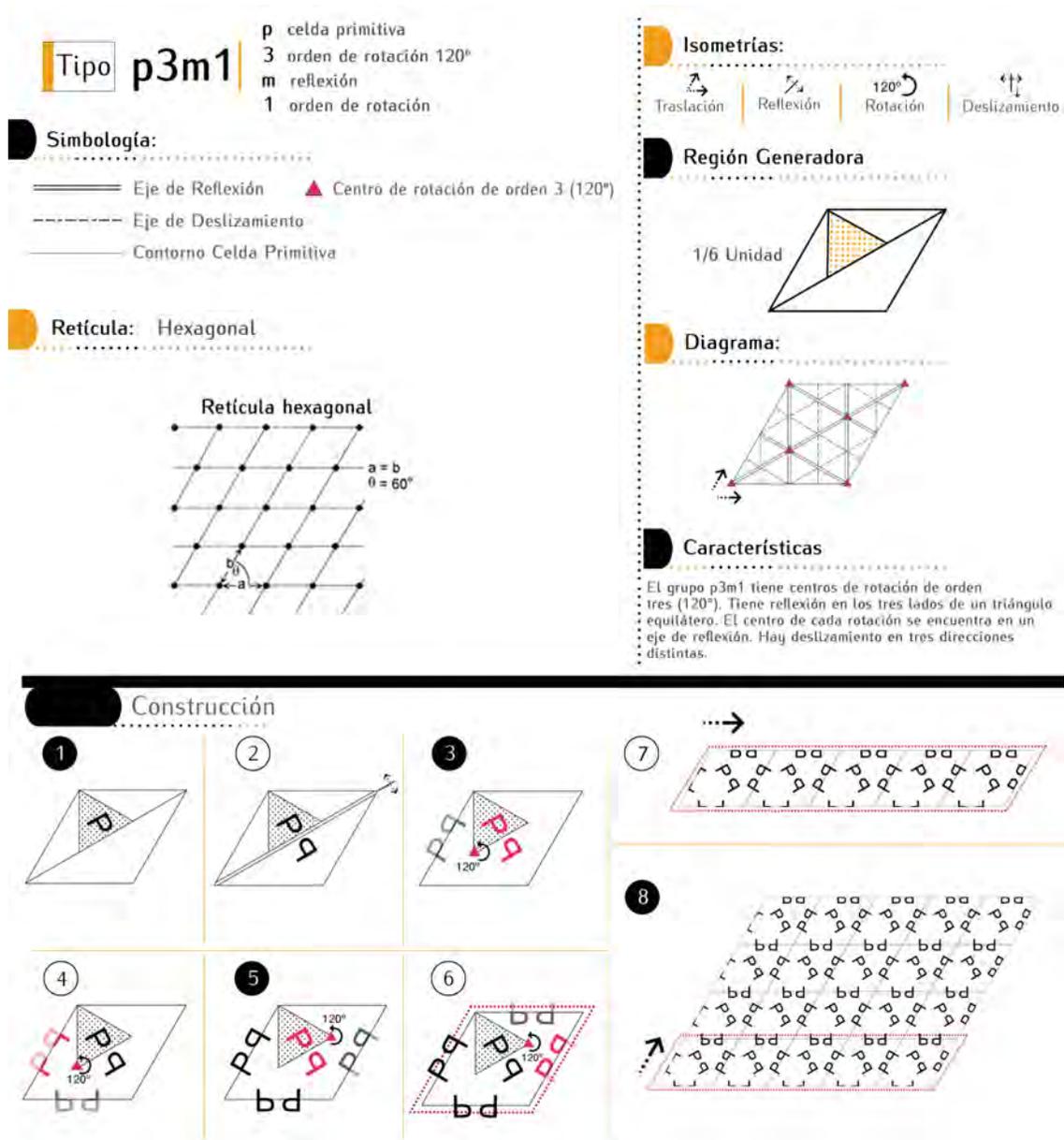


Figura 1.61: p3m1

- $p31m$: El grupo $p31m$ contiene reflexiones y rotaciones de orden tres (120°). Su retícula es hexagonal y su región generadora es $1/6$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.62).

Construcción del grupo $p31m$:(Figura 1.63).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/6$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices de uno de los dos triángulos equiláteros que componen la retícula hexagonal).
3. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una reflexión sobre la diagonal menor del paralelogramo.
5. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

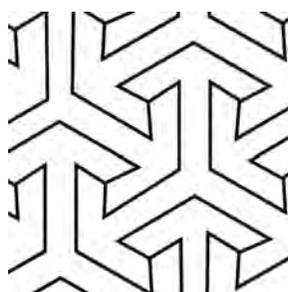


Figura 1.62: Grupo de simetría $p31m$

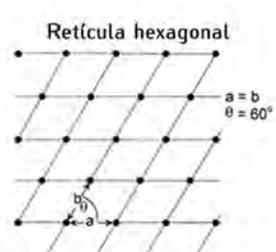
Tipo **p31m**

- p celda primitiva
- 3 orden de rotación 120°
- 1 orden de rotación reflexión
- m reflexión

Simbología:

- Eje de Reflexión
- - - Eje de Deslizamiento
- Contorno Celda Primitiva
- ▲ Centro de rotación de orden 3 (120°)

Retícula: Hexagonal



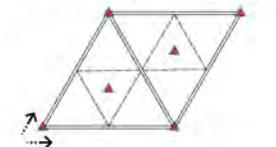
Isometrías:

- Traslación
- Reflexión
- 120° Rotación
- Deslizamiento

Región Generadora



Diagrama:



Características

El grupo p31m tiene centros de rotación de orden tres (120°).
Tiene reflexión en tres direcciones distintas.
Hay deslizamientos.

Construcción

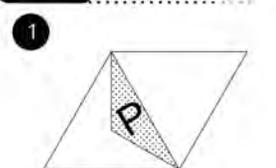
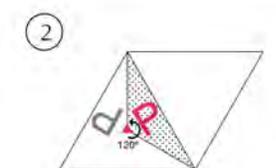
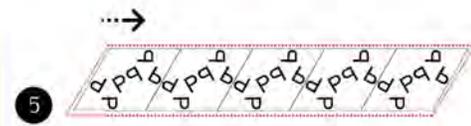
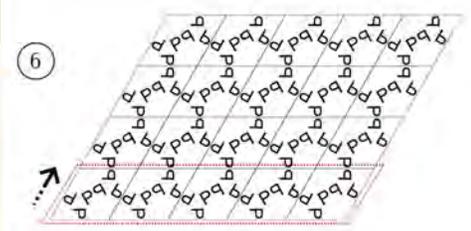
1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

Figura 1.63: p31m

- $p6$: El grupo $p6$ contiene rotaciones de orden seis (60°), de orden tres (120°) y de orden dos (180°). Su retícula es hexagonal y su región generadora es $1/6$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.64).

Construcción del grupo $p6$:(Figura 1.65).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/6$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices de uno de los dos triángulos equiláteros que componen la retícula hexagonal).
3. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
4. Se aplica una rotación de orden dos (180°) a partir del centro de rotación ubicado en la diagonal menor del paralelogramo.
5. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
6. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.



Figura 1.64: Grupo de simetría $p6$

Tipo **p6** | p celda primitiva
6 orden de rotación 60°

Simbología:

— Contorno Celda Primitiva ◆ Centro de rotación de orden 2 (180°)
 ▲ Centro de rotación de orden 3 (120°)
 ● Centro de rotación de orden 6 (60°)

Retícula: Hexagonal

Retícula hexagonal

$a = b$
 $\theta = 60^\circ$

Isometrías:

Traslación \rightarrow | Rotación 180° \curvearrowright | Rotación 120° \curvearrowright | Rotación 60° \curvearrowright

Región Generadora

1/6 Unidad

Diagrama:

Características

El grupo p6 tiene centro de rotación de orden seis (60°), de orden tres (120°) y de orden dos (180°).

Construcción

1. Se muestra un triángulo equilátero con una celda primitiva 'P' sombreada en una de sus esquinas.
2. Se muestra el triángulo con la celda 'P' y su imagen rotada 120°.
3. Se muestra el triángulo con la celda 'P' y sus imágenes rotadas 120° y 240°.
4. Se muestra el triángulo con la celda 'P' y sus imágenes rotadas 120°, 240° y 360° (180°).
5. Se muestra una fila de celdas 'P' y 'd' (donde 'd' es la imagen rotada 180° de 'P').
6. Se muestra la teselación completa formada por la repetición de la fila anterior.

Figura 1.65: p6

- $p6m$: El grupo $p6m$ contiene rotaciones de orden tres (120°), de orden 2 (180°) y de orden 6 (60°). Intersecan seis ejes de reflexión que forman ángulos de 60° . Su retícula es hexagonal y su región generadora es $1/12$ de unidad del paralelogramo (Figura 1.66).

Construcción del grupo $p6m$:(Figura 1.67).

1. Se realiza un diseño dentro de la región generadora que corresponde a $1/12$ unidad del paralelogramo.
2. Se aplica una reflexión sobre la diagonal mayor del paralelogramo.
3. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación (ubicado en la intersección de los vértices de uno de los dos triángulos equiláteros que componen la retícula hexagonal).
4. Se aplica una rotación de orden tres (120°) a partir del centro de rotación.
5. Se aplica una rotación de orden dos (180°) a partir del centro de rotación ubicado en la diagonal menor del paralelogramo.
6. Se forma el motivo o patrón de repetición.
7. Se aplica la primera traslación al motivo o patrón de repetición.
8. Se aplica la segunda traslación en la otra dirección del vector.

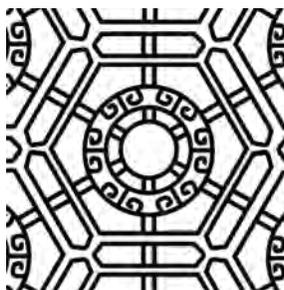


Figura 1.66: Grupo de simetría $p6m$

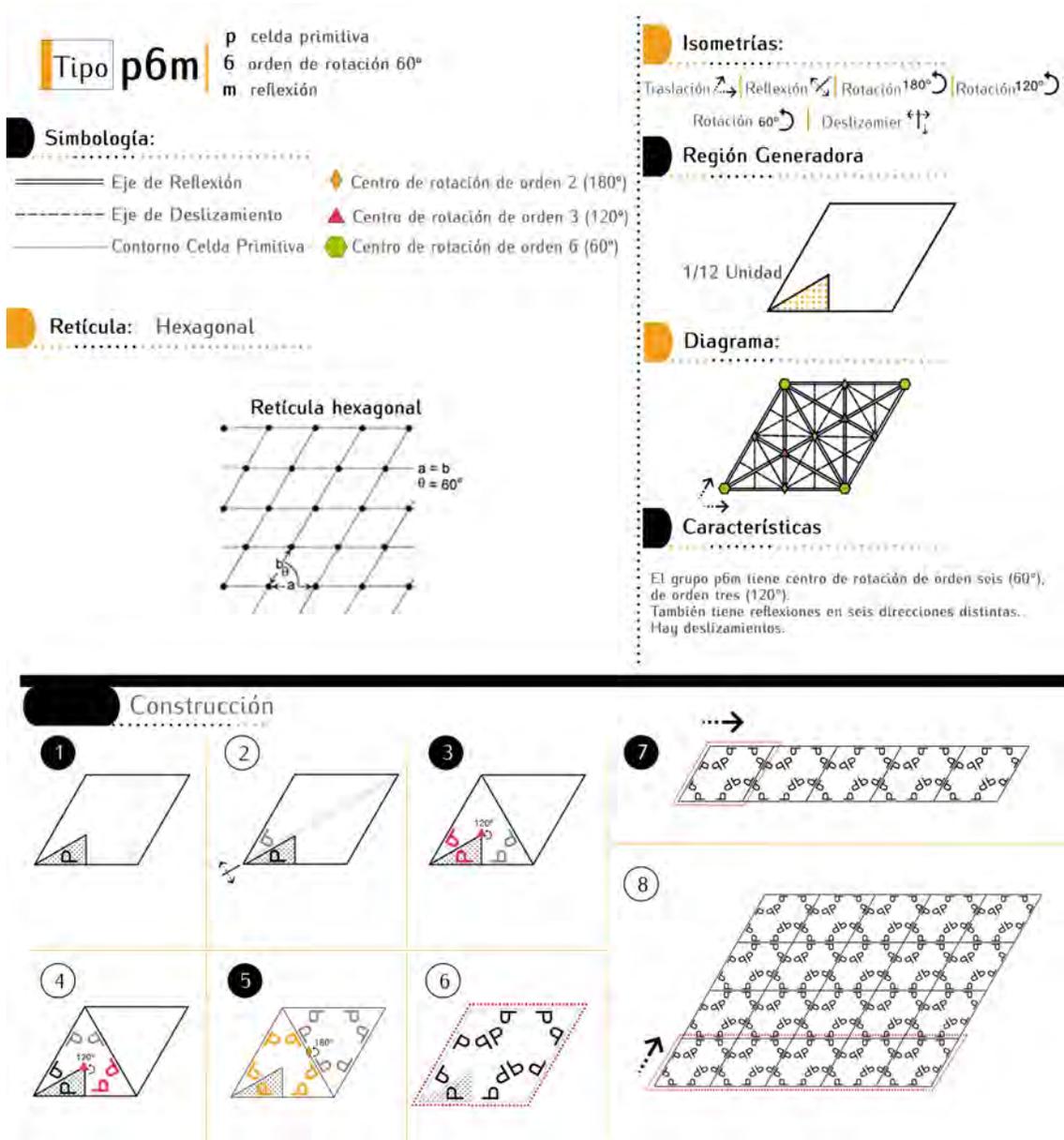


Figura 1.67: p6m

Tabla 1.6: Tabla resumen de los 17 grupos cristalográficos

N°	Tipo	Reticula	Orden de rotación	Reflexión	Deslizamiento	Región generadora
1	p1	Paralelogramo	1	no	no	1 unidad
2	p2	Paralelogramo	2	no	no	1/2 unidad
3	pm	Rectangular	1	sí	no	1/2 unidad
4	pg	Rectangular	1	no	sí	1/2 unidad
5	cm	Rómbica	1	sí	sí	1/2 unidad
6	pmm	Rectangular	2	sí	no	1/4 unidad
7	pmg	Rectangular	2	sí	sí	1/4 unidad
8	pgg	Rectangular	2	no	sí	1/4 unidad
9	cmm	Rómbica	2	sí	sí	1/4 unidad
10	p4	Cuadrangular	4	no	no	1/4 unidad
11	p4m	Cuadrangular	4	sí	sí	1/8 unidad
12	p4g	Cuadrangular	4	sí	sí	1/8 unidad
13	p3	Hexagonal	3	no	no	1/3 unidad
14	p3m1	Hexagonal	3	sí	sí	1/6 unidad
15	p31m	Hexagonal	3	sí	sí	1/6 unidad
16	p6	Hexagonal	6	no	no	1/6 unidad
17	p6m	Hexagonal	6	sí	sí	1/12 unidad

SEGUNDA PARTE

"La geometría solucionará los problemas de la arquitectura"

Le Corbusier

CAPÍTULO 2

CONEXIONES ENTRE EL DISEÑO ARQUITECTÓNICO Y EL DESARROLLO MATEMÁTICO

Existe una gran conexión entre el diseño arquitectónico y el desarrollo matemático. La intención de este capítulo es analizar esta relación y cómo la matemática es fundamental en el trabajo arquitectónico para incrementar su potencialidad.

Ambas áreas del conocimiento, han tenido una aplicación directa desde su concepción hasta su creación, en este apartado se pretende explicar cómo la arquitectura ha aprovechado no sólo las técnicas matemáticas, sino también las ideas. Un recorrido desde ejemplos clásicos a modernas formas arquitectónicas generadas por medio de softwares gracias a los avances tecnológicos.

2.1. La geometría del arquitecto

En nuestros días, ha desaparecido la figura del arquitecto que reúne al artista, al geómetra y al calculista. Hoy los cálculos se dejan para el ingeniero; el geómetra ha desaparecido de este escenario y son protagonistas el arquitecto que diseña los planos y el responsable de que el constructor realice exactamente lo que fue previamente proyectado, es decir, el Arquitecto Técnico. Esta organización es del todo eficaz, pero resta una oportunidad a la unidad del resultado. El criterio generalmente aceptado es el de la adaptación al fin, que comprende la solidez.

Existen dos vías de elección para el arquitecto al momento de hacer su proyecto; primero, si el diseñador no tiene conocimiento geométrico, si no reflexiona sobre las proporciones; podrá ejecutar diseños bien resueltos, pero también, se puede complicar en un solo detalle con su proyecto. La segunda es el que compone geoméricamente, valiéndose de una técnica y un análisis consciente, porque esta geometría lo guiará de manera automática a un resultado aceptable, pero si trabajan con moldes bien proporcionados, transmitidos por conceptos geométricos, el resultado será con un mayor potencial.

La Geometría tiene un papel determinante en los aspectos más creativos del proyecto. Por lo tanto, es de suma importancia la relación entre la parte artística y la científica, al momento de desarrollar un proyecto para así aumentar sus potencialidades.

CAPÍTULO 2. CONEXIONES ENTRE EL DISEÑO ARQUITECTÓNICO 90 Y EL DESARROLLO MATEMÁTICO

La Geometría es el estudio del espacio; la Arquitectura, en el más amplio sentido de la palabra, es la creación en el espacio por medio de la construcción. Las dos disciplinas son virtualmente inseparables, excepto por una diferencia: la Geometría puede existir sin la Arquitectura, pero la Arquitectura no puede existir sin la Geometría. Es necesario analizar el espacio, conocerlo a fondo y organizarlo en forma idónea.

Para formular su esquema, el arquitecto deberá emplear un medio de representación preciso y fiable. Este medio se lo proporciona la geometría descriptiva, y sobre todo, la geometría euclidiana, que es la geometría base del arquitecto al tratar la economía del espacio, aunque también puede recibir ayuda de otra geometría, la geometría proyectiva.

En la arquitectura el modo de expresión es gráfico y éstos tienen gran importancia porque el proyecto se pueden representar y simular por medio de softwares. Es complicado proponer soluciones si no se conoce la geometría de una estructura. Para el matemático la forma es una ecuación; para el arquitecto es además proporción, espacio habitable y armonía.

La Geometría y la Arquitectura son creaciones distintas. La Geometría, que es matemática, se ocupa en efecto del espacio abstracto, mientras que la Arquitectura, que es técnica y arte, se ocupa del espacio concreto, del espacio en relación al hombre, a su presencia como observador, a su dimensión como beneficiario de ella; es por ello que las dos son una conjunción en el proyecto.

Pero entonces, ¿para qué sirve tematizar el conocimiento matemático en el ámbito arquitectónico? Sirve esencialmente para comunicarlo e introducir un conocimiento, brinda la posibilidad de hacer evolucionar un método. Lo que obtiene es un mayor y más preciso control sobre el proyecto, sumado a una consciencia para poder difundir métodos matemáticos de proyectos más elaborados y mejor solucionados.

En el diseño y la Arquitectura, la aplicación de una estrategia para una estructura eficiente es una geometría diseñada correctamente; las herramientas que el conocimiento de la geometría nos proporciona, brindan un óptimo desarrollo multidisciplinario.

Si bien la matemática no resuelve el proyecto arquitectónico, ayuda a entenderlo y razonarlo mejor y por lo tanto se potencializa.

2.2. Arquitectura y matemática: Potencial de la creatividad

En este apartado se presentan algunas relaciones entre el trabajo arquitectónico y el matemático para poder entender las implicaciones entre las disciplinas y como a lo largo de la historia, la matemática ha jugado un papel primordial, proporcionando una mayor potencialidad para el desarrollo del proyecto y como facilita la comprensión quitando los paradigmas que hacen ver este proceso complicado de entender.

Descartes, en 1620, considera a las Matemáticas como modelo de la ciencia, su primer libro trata de "Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la Geometría", dando nacimiento a la Geometría Analítica.

Quizá fueron Palladio y Miguel Angel los últimos arquitectos que utilizaron conscientemente en sus composiciones las proporciones nacidas de la armonía pitagórico-platónica.

Una de las superficies matemáticas aplicadas en arquitectura es el paraboloides hiperbólico, utilizada por Félix Candela. Según este arquitecto, "De todas las formas posibles que se le pueden dar a un cascarón, la más fácil y práctica de construir es el paraboloides hiperbólico". Candela es una de las figuras fundamentales de la arquitectura del siglo XX en cuanto al desarrollo de nuevas formas estructurales de hormigón armado. Él afirmaba que el hormigón armado no solo era muy similar al material de los cascarones naturales, sino que tiene la ventaja adicional de poder resistir esfuerzos de tracción.

Otro ejemplo de la utilización de la matemática es Gaudí, con una de sus obras más representativas, la Sagrada Familia, la obra se conoce por la invención estructural proveniente del arco catenario. Gaudí marca un cambio en la construcción de catedrales, pues al conocerse el arco catenario, el cual puede sostenerse por sí solo, ya las catedrales no necesitan de elementos que sostengan el tamaño y la luz que necesitan estas grandes estructuras.

Es importante considerar un tema muy visto en arquitectura que es la Sec-

ción dorada desde dos enfoques: un uso consciente y un uso inconsciente:

A fines del siglo XX y principios del siglo XXI hubo artículos académicos (principalmente de matemáticos) que desafiaron los puntos de vista establecidos sobre el uso de la sección áurea en arte, diseño y arquitectura y la aparente falta de rigor académico que lo sustenta; algunos de ellos son, Roger Fisher[16] y George Markowsky.[35]

El primer caso, en el cual la arquitectura se ha aproximado a las relaciones áureas, se remonta a los griegos. Entre el 447 y el 432 a.C., el Partenón dedicado a Atenea, la diosa protectora de Atenas, se erige en la parte más elevada de la Acrópolis.

Se ha conjeturado a menudo que los antiguos griegos empleaban conscientemente la sección áurea en arquitectura y escultura. Estudiosos han afirmado que las proporciones del Partenón son evidencia de un uso deliberado de la sección áurea en la arquitectura griega. A menudo, en textos relevantes, la fachada y los elementos de la fachada están circunscritos por rectángulos de oro (con lados en la proporción de 1.6180).

Con respecto a la verdadera presencia del número áureo sobre la composición de la fachada, hay opiniones discordantes, y muchas de éstas tienden a marcar que la sección dorada sólo es fruto de interpretaciones forzadas posteriores. Parece, sobre todo, que algunas partes de la fachada no están del todo contenidas dentro del rectángulo dorado que la circunscribe.

Existen diferencias entre un estudio y otro. Huylebrouck y Labarque[28], presentaron un caso que contradecía la detección de rectángulos de sección dorada en la fachada este del Partenón (Figura 2.1). Gazalé [21], observó que al parecer, hasta el momento de los Elementos de Euclides, no se cumplían las propiedades matemáticas de la sección áurea.

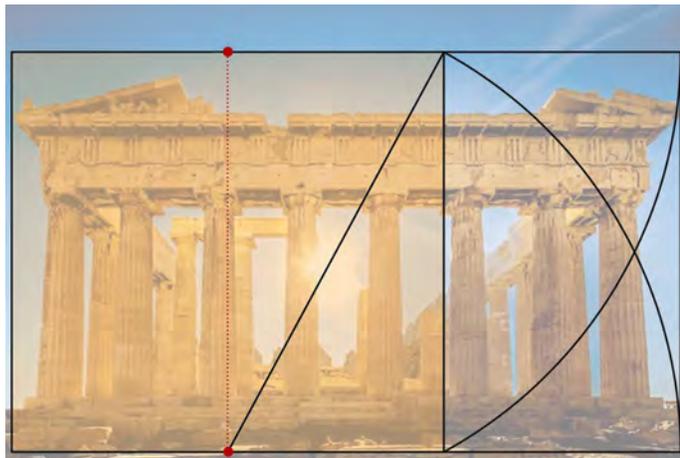


Figura 2.1: Fachada este del Partenón

Después de la construcción del Partenón (447-432 AC), es importante destacar que Euclides trató la sección áurea como cualquier otra medida geométrica y no le asignó ningún significado especial [21]. De modo que podría ser que la conexión percibida entre la sección dorada con la arquitectura y escultura griega antigua no tenga fundamento, al no estar respaldada por mediciones reales.

Los artículos de Fischler [14][15] y Markowsky, [35] presentaron un fuerte desafío a las afirmaciones donde mencionan que la sección áurea fue comúnmente utilizada por los constructores y artistas antes del comienzo de la era moderna. A pesar del peso académico de estos estudios y la solidez de los argumentos ofrecidos, el catálogo de publicaciones que reivindican la detección de medidas de sección dorada en arte, arquitectura y diseño del pasado siguió creciendo, al menos hasta la primera década del siglo XXI. El uso consciente de la sección áurea es lo que está implícito en gran parte de la literatura relevante, más que la selección de dimensiones, proporciones o medidas de composición particulares basadas simplemente en el juicio artístico y estético.

Aunque es escasa la evidencia convincente para el uso de la sección áurea en el arte, el diseño y la arquitectura y los análisis anteriores son débiles, no deben descartarse los posibles beneficios de los sistemas propuestos por ciertos observadores. Artistas y diseñadores del siglo XX aplicaron las medidas asociadas a su trabajo. El trabajo de Le Corbusier [30] y Hambidge [23] es el segundo ejemplo a tratar de la sección dorada desde un punto de vista consciente y es de particular interés.

Charles Edouard Jeanneret (conocido como Le Corbusier), arquitecto del siglo XX, desarrolló una regla de diseño conocida como *El Modulor*; un sistema basado en el uso de dos series numéricas una conocida como serie roja y otra como serie azul. En el libro titulado *The Modulor*, Le Corbusier explicó que su sistema se basaba en la figura humana (un hombre de 1.83 m) y también en una serie de secciones doradas relacionadas y los números de Fibonacci.

Un punto importante es que la intención de Le Corbusier no era proponer un conjunto restrictivo de reglas que se cumplieran estrictamente, más bien presentar un marco flexible que pudiera ser doblado, manipulado o ajustado, particularmente en circunstancias donde la adherencia estricta va contraria al juicio intuitivo del diseñador. [30]

Un aspecto importante del sistema de diseño El Modulor de Le Corbusier es que se basa en las proporciones humanas, una perspectiva de diseño que se remonta a la época de Vitruvo, ingeniero y arquitecto romano, así como a varios pensadores del Renacimiento Italiano como Luca Pacioli (cuyo tratado Divina Proportione fue ilustrado por Leonardo da Vinci). Le Corbusier, también presentó una serie de rectángulos en proporciones relacionadas con sus dos series numéricas.

Por último, es importante destacar el trabajo realizado por Mauritis Cornelis Escher [12] relacionado con la matemática, es sin duda un ejemplo del cual se debe hacer mención, su arte es único. Instantáneamente reconocibles por millones de personas en todo el mundo, sus obras reflejan una relación entre el arte y la matemática. El mundo de Escher, explora temas como el infinito y la paradoja, la geometría imposible y las perspectivas deformadas, rebosa imaginación y está ejecutado con una precisión inusitada y una precisa atención al detalle.

Cuando el artista visitó la Alhambra, en España, se despertó en él una fascinación por los mosaicos, los cuales copió y en base a estos desarrolló

gran parte de su obra. Estas ideas se manifestaron en una técnica que bautizó como "división regular del plano"; que le confiere una estructura rítmica a sus dibujos; durante diez años, el tema de partición regular de la superficie constituyó un reto para él; en su segunda visita, copió durante varios días los ornamentos de la Alhambra.

Escher leyó libros sobre ornamentos así como tratados matemáticos, hasta que encontró lo que buscaba. Había aplicado profusamente estos descubrimientos a sus dibujos de ciclos y metamorfosis. La historia completa de la lucha contra esta materia intrincada y difícil fue tal, que el mismo reconoce en cierta ocasión que no tuvo que inventar, fueron las propias leyes de la partición periódica las que inventaron por él.

2.3. Modularidad en diseño y arquitectura

El diseño modular subdivide el proceso de diseño en etapas, cada una enfocada a un módulo. Los módulos se producen de forma independiente, son autónomos y pueden incluirse en la solución de un diseño más grande. Lipson, Pollak y Suh [34] presentaron un interesante trabajo relacionado con la modularidad en la evolución biológica y destacaron la posible aplicabilidad a los métodos de diseño de ingeniería.

En el ensayo, Structure in Nature, Pearce[41] encapsuló el concepto de modularidad refiriéndose a sistemas de diseño con algunos componentes que podrían combinarse de diversas maneras, para producir una gran variedad de

formas. La modularidad se refiere al grado en que un conjunto de partes dentro de un diseño se puede separar y recombinar con una mezcla y combinación de componentes. En otras palabras, a partir de unos pocos elementos básicos (o módulos), es posible una gran variedad de estructuras (o soluciones). Otra característica de la modularidad es que los componentes se pueden agregar y restar. El concepto es aplicable solo con pequeños grados de variación en una amplia gama de contextos y puede detectarse en entornos naturales y creados por el hombre. En la naturaleza, la modularidad puede referirse a la expansión de un organismo celular a través de la adición de unidades estandarizadas como es el caso de las células hexagonales del panal. La modularidad ofrece un gran potencial para la innovación en arte y diseño y es común en: el diseño de productos, superficies, arquitectura, interiores, muebles, así como también en ingeniería.

Arquitectos notables del siglo XX, como Frank Lloyd Wright, Le Corbusier y Buckminster Fuller aplicaron este concepto. La modularidad apunta a una colección de componentes funcionales interrelacionados que se pueden organizar o reorganizar con rapidez y eficiencia, como bloques de construcción para niños. De hecho, los ladrillos Lego, utilizados por generaciones de niños en gran parte del mundo, son un claro ejemplo del concepto.

La modularidad en el diseño [9] combina las ventajas de la estandarización (especialmente el alto volumen y los bajos costos de fabricación resultantes) con las ventajas asociadas con la personalización (dando a cada consumidor la creencia de que él / ella está recibiendo algo único).

2.3.1. Modularidad en el Arte Decorativo

La modularidad permite reconfigurar, eliminar o agregar partes constituyentes. En las bellas artes esto puede tomar la forma de juntar unidades o módulos estandarizados para formar composiciones más grandes y complejas. Las obras de arte que permiten la alteración a través de la reorganización de piezas de componentes, datan del Renacimiento europeo. Ejemplos que abarcan el concepto en mayor medida se pueden encontrar en el siglo XX entre los llamados constructivistas modulares; fue un estilo de escultura que surgió durante las décadas de 1950 y 1960, basado en el uso de módulos cuidadosamente seleccionados que permitían combinaciones intrincadas y en algunos casos numerosas alternativas. El desafío para el artista era determinar las posibilidades combinatorias de las partes componentes. Las formas similares a pantallas, utilizadas en contextos arquitectónicos para dividir el espacio, filtrar la luz y agregar interés estético, fueron desarrollos importantes.

La modularidad también se consideró un aspecto importante del arte minimalista de la década de 1960. Los artistas participantes incluyeron a el escultor Tony Smith, quien comenzó su carrera como diseñador arquitectónico y estuvo profundamente influenciado por el trabajo de Frank Lloyd Wright, un destacado defensor de la modularización en la arquitectura.

2.3.2. Modularidad en Diseño y Arquitectura

Es en los ámbitos del diseño y la arquitectura donde el concepto ha tenido mayor influencia. La modularidad puede ofrecer una reducción en los costos y flexibilidad en el diseño final. Como se mencionó antes, la modularización en la era moderna ofrece la posibilidad de fabricar productos a partir de unidades estandarizadas, en configuraciones aparentemente únicas. Esta singularidad es el resultado de la selección personalizada de los componentes y la creencia de que los ingredientes seleccionados se combinan de forma única para cumplir con las especificaciones exactas dictadas por el consumidor.

La modularidad también ha entrado en el ámbito arquitectónico de otras maneras. El diseño arquitectónico, implica considerar partes constituyentes de un edificio como módulos, que pueden agregarse o subrogarse a voluntad. Por ejemplo, una unidad de oficina o apartamento residencial se puede crear según las especificaciones del cliente y puede incluir los números, formas y tamaños deseados de salas adaptadas a las necesidades y presupuesto del cliente. Invariablemente, los componentes modulares (paredes, pisos, techos, etc.) se fabrican en línea de montaje, en una instalación de tipo fábrica y se entregan y ensamblan en el sitio previsto. Una vez ensamblados, los edificios de tipo modular son en gran medida indistinguibles de las construcciones convencionales construidas en el sitio, pero son invariablemente más baratas de construir y de comprar.

Otro ejemplo de modularidad, a menudo citado por historiadores de la arquitectura, es Hanna Honeycomb House, conocida como Hanna House, di-

señada por Frank Lloyd Wright, que utiliza módulos en forma de hexágono que dan al plano la apariencia de un panal. La construcción modular permitió que el edificio se expandiera y se adaptara durante un período de veinte años a medida que cambiaban las necesidades y demandas de los residentes.

Otras características potenciales de la modularidad en la arquitectura incluyen el uso eficiente del espacio disponible y la economía en el uso de los materiales.

2.3.3. Partición eficiente

La partición eficiente es la división del espacio disponible en celdas de igual tamaño. De modo que el problema de la partición podría establecerse así: ¿Cuál es la forma más eficiente de dividir el espacio bidimensional con una red de celdas de igual tamaño?

Se ofrece una prueba de la conjetura clásica de nido de abeja: cualquier partición del plano en regiones de igual área tiene un perímetro al menos igual al del hexágono regular [47].

Es de conocimiento común que el círculo, más que cualquier otra figura plana, encierra la mayor área para un perímetro fijo; sin embargo, si se permite que los círculos cambien su forma a hexágonos, se puede crear una forma más eficiente de dividir una superficie en unidades iguales de área. Estas celdas hexagonales (Figura 2.2) combinan la estructura mínima (la longitud total de la pared) con el área fija. [41].

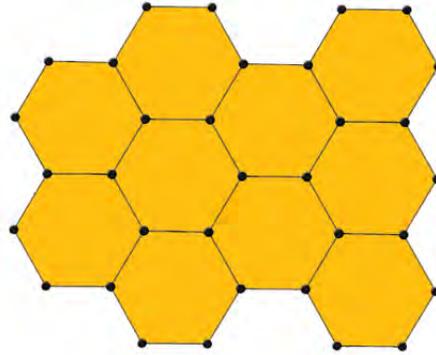


Figura 2.2: Partición del plano en celdas hexagonales

En el contexto tridimensional, la esfera contiene el mayor volumen. Éstas, no ofrecen la partición más eficiente del espacio. Sin embargo, si se permite que la esfera expanda su superficie para llenar ese espacio vacío, puede formar un dodecaedro rómbico (Figura 2.3) que es más eficiente que la esfera en la partición del espacio, pero hasta la fecha, no se sabe que figura tridimensional es la más eficiente para cubrir el espacio.

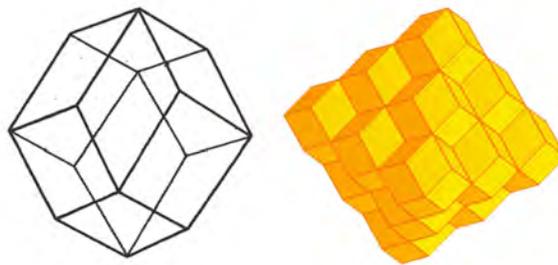


Figura 2.3: Dodecaedro-rómbico

Estas consideraciones de utilización del espacio son de particular importancia para los arquitectos y diseñadores de interiores.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS ESTRUCTURAL EN LA ARQUITECTURA

3.1. Análisis geométrico: Un método consistente

El conocimiento de los principios, conceptos y perspectivas geométricos que sustentan la estructura y la forma en el diseño y la arquitectura tiene su origen en varias culturas antiguas, incluyendo Egipto dinástico, Asiria, la India antigua y China, así como la Grecia clásica y Roma. Desde la época de Euclides (300 ac), la geometría ha sido la herramienta elegida por arquitectos, constructores, artesanos y diseñadores. La comprensión de varios principios geométricos básicos ha ofrecido a generaciones de profesionales una vía para abordar y resolver problemas relacionados con la estructura y la forma.

Tal comprensión también ha sido valiosa en el análisis visual de diseños y otros productos de esfuerzo creativo.

Las artes, la arquitectura y la matemática tienen intereses comunes, en cuanto a la forma y su estructura, en las representaciones, la geometría y la manera como los objetos encajan y se relacionan mutuamente, se proporcio-

nan, se equilibran. Estas vinculaciones han conducido a que se ponga énfasis en estos temas y ver la relación que existe entre cada una de las disciplinas para lograr una unidad y sentido.

El desarrollo del arte de los mosaicos, alcanzó su clímax en la España del siglo XIII, cuando los árabes aplicaron sus conocimientos en geometría al elaborar los diseños decorativos de la Alhambra de Granada; la inclinación hacia los diseños provino del Segundo Mandamiento, que les impedía dibujar personas o animales; su creatividad se decantó hacia la caligrafía y los dibujos geométricos, en los que alcanzaron cotas de belleza y complejidad difícilmente superables.

Muchos siglos antes de que fueran estudiadas las estructuras de los mosaicos, los artistas árabes desarrollaron sistemas empíricos para generar mosaicos en el plano con el fin de decorar su palacio en honor a su Dios.

Los creadores de estos mosaicos no podían conocer el teorema de clasificación de Fedorov, y por lo tanto desconocían cuantos grupos de simetrías podían usarse para rellenar el plano, por eso resulta impactante sus conocimientos de geometría.

Gracias al trabajo de restauración de Antonio Molina Gualda se logró determinar los grupos que aparecen en la Alhambra de Granada, de lo cual resulta que en el Palacio están presentes 13 de los 17 grupos [37].

3.2. Teselaciones espaciales y búsqueda de formas

Los Juegos Olímpicos de Beijing 2008 proporcionaron grandes oportunidades a las firmas internacionales de arquitectura, ingeniería y construcción para demostrar su capacidad en diseño y gestión de proyectos. Teniendo en cuenta las nuevas tecnologías, los nuevos materiales y los diseños innovadores adoptados en los proyectos olímpicos, junto con la complejidad del diseño y la construcción, así como los antecedentes culturales diversificados de los equipos de proyecto, había muchos retos para el diseño y la construcción de estos proyectos. Como tal, se pueden aprender muchas lecciones de los proyectos exitosos. Por ejemplo, el Centro Acuático de Beijing, China.

Es un pabellón deportivo en el que se celebraron las competencias de natación de los Juegos Olímpicos de 2008. Por su diseño semeja un enorme cubo de hielo, por lo que se le conoce como Cubo de Agua.

La obra fue ganada tras un concurso en julio de 2003 por el consorcio formado por el China State Construction and Engineering Corporation (CSCEC) y los grupos australianos PTW Architects y Ove Arup. Es una obra diseñada por el Arquitecto John Pauline. Es un conjunto arquitectónico cuya construcción tuvo una duración de cuatro años, fue construido en una superficie de $80000 m^2$. Tiene 6700 toneladas de acero y 1300 toneladas de varillas.

Para su construcción hubo muchas dificultades científicas y técnicas que tuvo que superar el equipo de trabajo, en esta ocasión le daré particular énfasis

fasis en la estructura.

Pappus de Alejandría, se aventuró en afirmar que los hexágonos regulares son los polígonos que, a un área fija (podemos decir 1) tienen el menor perímetro y cubren todo el plano, en otras palabras, creía que la figura "más eficiente" que cubre completamente el plano son los hexágonos regulares. Esta aseveración quedó como una conjetura durante siglos, se le denominó la "Conjetura del panal". Fue hasta 1999 que el matemático Thomas Hales probó que efectivamente el hexágono regular es la figura "más eficiente" en el plano. Ahora la aventura continúa, preguntémosnos ahora ¿Cuál es la figura poliédrica (figura cerrada en el espacio con caras planas poligonales) que a un volumen fijo tiene la menor área y cubre todo el espacio? Lord Kelvin conjeturó a finales del siglo XIX que sería un octaedro truncado (Figura 3.1).

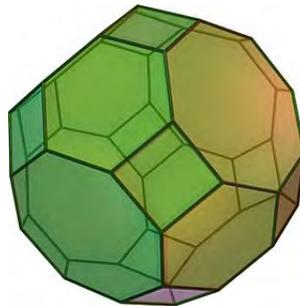


Figura 3.1: Octaedro truncado

Sin embargo, Kelvin no logró demostrar que era la "mejor" figura, lo que llevó a tener ahora la conjetura de Kelvin.

108 CAPÍTULO 3. ANÁLISIS ESTRUCTURAL EN LA ARQUITECTURA

En 1993 una pareja de estudiosos de las espumas, el físico Denis Weaire y su estudiante de doctorado Robert Phelan, encontraron un contraejemplo a la conjetura de Kelvin, es decir, mostraron un par de figuras (un dodecaedro irregular con caras pentagonales (blanco) y un tetracaidecaedro, poliedro de 14 caras, dos hexágonos y doce pentágonos irregulares (amarillo), que en conjunto cubre completamente el espacio y que a igualdad de volumen, tienen menor área que el octaedro truncado propuesto por Kelvin (Figura 3.2).

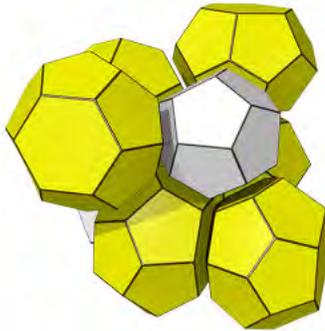


Figura 3.2: Estructura Weaire - Phelan

Actualmente no se sabe si la estructura de Weaire-Phelan es la mejor para el espacio o existe una que tenga menor área en igualdad de volumen, lo que si sabemos es que esta estructura se ha posicionado como un multifacético baúl de sorpresas; una de ellas es que es la estructura utilizada para resolver el Centro Nacional Acuático de Beijing y que hizo que este lugar, gracias a la utilización de esta estructura como base formada por 6700 toneladas de hormigón y acero; mientras que el recubrimiento lo crean membranas traslucidas de ETFE (etileno-tetra- fluoro- etileno) y así se forman las burbujas de jabón (Figura 3.3).

3.3. Las teselaciones en la Arquitectura: de lo decorativo a lo estructural

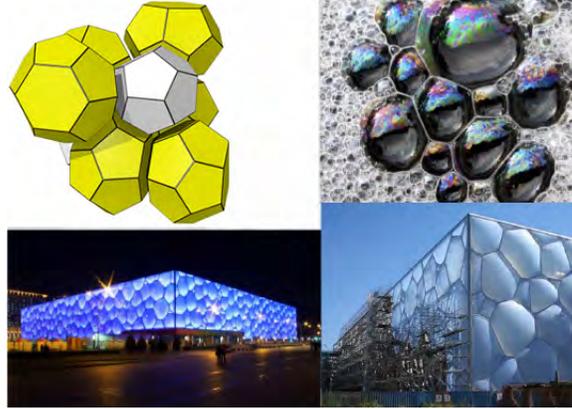


Figura 3.3: Estructura del Centro Nacional Acuático de Beijing

3.3. Las teselaciones en la Arquitectura: de lo decorativo a lo estructural

Llegados a este punto, resulta necesario realizar una reflexión para entender de que manera la arquitectura se nutre de estructuras matemáticas. La arquitectura ha tenido una evolución importante, la cual nos ha permitido analizar sus obras desde tiempo atrás hasta la fecha y cómo se han ido resolviendo los proyectos conforme el avance tecnológico.

Como se hizo mención en párrafos anteriores las teselaciones en el plano están presentes en la arquitectura desde el S.XIII y ayudaron a revestir el espacio de una forma decorativa donde expertos geómetras como son los árabes se anticiparon al estudio de los grupos de simetría que muchos años después los estudiosos iban a llegar a la conclusión de que solo existen 17 maneras

110 CAPÍTULO 3. ANÁLISIS ESTRUCTURAL EN LA ARQUITECTURA

posibles de teselar el plano.

Ahora bien, las teselaciones en el espacio constan de 230 grupos conformados por poliedros regulares e irregulares, uno de ellos utilizado para resolver la estructura de uno de los edificios más resistentes a sismo que es el Centro Nacional Acuático de Beijing, si reflexionamos un poco sobre este tema es importante observar como a través de la tecnología se pudo resolver una estructura tan complicada y que si se siguen estudiando este tipo de estructuras puede cambiar el sentido estructural al momento de diseñar un edificio.

Esto da pauta a conocer a fondo este tipo de temas y explotarlos para poder hacer que un proyecto se resuelva y tenga una solución validada por científicos expertos en el tema y darle potencialidad a cada uno de los proyectos que diseñemos y que los softwares nos sirvan de herramienta para simular complicaciones del proyecto que se vayan presentando.

TERCERA PARTE: HERRAMIENTA DIGITAL

"...Las matemáticas descubren un mundo virtual que representa la realidad y es el arquitecto quien debe interpretar este mundo para encontrar una manera de convertirlo en proyecto construible"

Carmelo Zapulla

CAPÍTULO 4

TECNOLOGÍA DE UN MUNDO EN MARCHA

La tecnología tiene un ritmo de cambios y avances muy acelerado e incluye el desarrollo de todas las disciplinas científicas. Esto ha permitido que cada vez se tomen atajos obviando el conocimiento o bases científicas, por aplicaciones o programas que efectúan el trabajo en forma bastante eficiente a una velocidad sorprendente. Una tendencia de vanguardia en la arquitectura contemporánea es la búsqueda de nuevas expresiones formales y materiales derivadas del uso intenso de tecnologías digitales.

El Movimiento Moderno basado en el conocimiento científico lleva hacia una sociedad y una arquitectura más funcional y tecnológica. La racionalidad en el diseño se está transformando en una obsesión. La inmensa cantidad de herramientas digitales, cada vez más ubicuas, completas y poderosas, parecen confirmar la idea de que la tecnología todo lo puede. La variedad actual de software para arquitectura va desde la simulación energética o acústica hasta el análisis de comportamiento de multitudes, haciendo creer que todas las decisiones de diseño pueden instrumentalizarse y basarse en información

cuantitativa objetiva. [13] [7]

Un ejemplo lo constituye el creciente grupo de edificios con envolventes tapizadas en patrones exuberantes, cuyos discursos típicamente recurren a metáforas científicas o matemática inspirada en la naturaleza: desde autómatas celulares o diagramas de Voronoi,[17] hasta L-Systems o geometrías de fractales. Sin duda, el diseño paramétrico ha sido clave en facilitar la tarea de generar, distorsionar y aplicar patrones para obtener un resultado de alta complejidad visual.

Más allá de la capacidad de cálculo de las herramientas, lo que se argumenta en estos proyectos, es la referencia literal a los algoritmos matemáticos y las operaciones de diseño, con un criterio de neutralidad ajeno al diseñador que permite justificar hasta la más intrincada forma resultante. Otro ejemplo similar son aquellas fachadas generadas a partir de cientos de módulos variados que descansan en el ideal de una funcionalidad perfecta: fachadas climáticas que controlan el sol, el ruido, la luz, el viento, o cualquier otra cosa. [33]

La sustentabilidad y la moral ecológica de fin de siglo pasado, representan el motivo ideal para aludir a criterios de eficiencia, optimización y dominio técnico sobre el medio ambiente. [1] Las herramientas de simulación, cada vez más precisas, aparecen hoy como la fuente de validación científica, y por tanto incuestionable, de la arquitectura. Otro ejemplo se encuentra en los edificios de volúmenes escultóricos que desafían la geometría cartesiana, usualmente con extravagancia. Indudablemente, su existencia se vio facilitada por la masi-

ficación de tecnologías CAM y de fabricación digital. Las formas escultóricas constituyen el resultado de la interpretación contemporánea de las referencias modernas hacia la industria y la construcción.[38]

Para Patrick Schumacher la aspiración modernista de eliminar la arbitrariedad de los procesos de diseño, aparentemente lograda con la racionalidad del diseño paramétrico o la fabricación digital, no es tal: ni el software ni una máquina CNC tienen preferencias estéticas. La búsqueda del placer estético juega un papel significativo en arquitectura, aunque se intente disminuirla, contenerla o simplemente disimularla.¹

[45]

La crítica que despierta la obra de Frank Gehry o Zaha Hadid es caprichosa, innecesaria y excéntrica. Irónicamente, cuando las mismas formas vienen acompañadas de una memoria de inspiración científica o de motivación tecnológica, entonces se entiende como validada. [22]

El Ornamento en madera de Sofía Caro Curso «Tecnologías CAD/CAM en Arquitectura», FAU, Prof. Mauricio Loyola Robert Venturi [49] en los sesenta, Bernard Tschumi [48] en los setenta, James Stirling [46] en los ochenta o Juhani Pallasmaa [40], son algunos casos de que se han rebelado en contra del discurso funcionalista y tecnocéntrico. Estos autores comparten la visión de abordar el problema arquitectónico desde la complejidad, la disyunción y la contradicción, entendiendo que estos conceptos son características funda-

¹Schumacher Patrick. ita: AD Editorial Team. "Zaha Hadid Architects responde a Patrik Schumacher: "No refleja nuestro pasado ni nuestro futuro"

mentales de esta disciplina.

Son los argumentos estéticos, amparados en la visión modernista funcionalista y positivista, los que se mantienen como el único obstáculo para que el ornamento vuelva a posicionarse con fuerza en los discursos arquitectónicos contemporáneos.

Por otra parte, las herramientas digitales son una parte indispensable de los métodos de educación y desarrollo. Las computadoras/laptops con acceso a internet, son necesarias para permitir estar a la vanguardia y acceder a millones de sitios, para conseguir información que ayude a complementar los conocimientos.

Las herramientas son aquellos software o programas intangibles que se encuentran en las computadoras o dispositivos, que pueden ayudar a interactuar más con la tecnología, nos ayuda a comunicarnos y hacer otro tipo de cosas por medio de ella, con el fin de desarrollar competencias, habilidades y ser un apoyo para el aprendizaje; también da paso a la innovación de una búsqueda hacía mejores manejos de estos materiales; sin embargo, para que esto se logre con éxito se necesita tener personal capacitado que saque el mejor provecho posible, para crear ambientes de aprendizaje que se empleen en situaciones reales.

Se usan en la investigación de cualquier tema o área, permiten a los investigadores compartir su información y hacer recopilaciones. Se emplean en el

llenado de algunos documentos que ponen al alcance instituciones gubernamentales, pero también hacen más fácil el manejo de papeleo mediante archivos digitales. Pueden crear bases de datos de cualquier tipo, ayudan a planear, escribir y aprender con otros, a organizar y a tomar conciencia sobre necesidades de información, a administrar tiempo, labores, fuentes, retroalimentación de otros, borradores de trabajos y productos finales [2].

4.1. Claroscuro de las tecnologías en la educación

Uno de los cambios importantes observados como consecuencia directa del desarrollo tecnológico, está en el sistema educativo virtual, y es necesario para las personas que se van integrando a la tecnología. Se requiere aparte del equipo: responsabilidad por el estudio, disposición para el aprendizaje, autodidactismo, autonomía intelectual, capacidad de reflexión, autoformación, la auto-regulación progresiva, crea nuevos procedimientos de investigación, desarrolla el pensamiento constructivo, fomenta actitudes de tolerancia, solidaridad, compromiso y responsabilidad [6][11].

No requiere de infraestructura ni horarios establecidos, reduce costos (traslados, alojamiento, compra de libros, etc.), difunde clases, información o capacitación a cargo de especialistas, posibilita el trabajo individual y grupal, incrementa la interacción en el proceso educativo.

El seguimiento es más riguroso, brinda flexibilidad en tiempos y desplazamientos, no requiere de espacios físicos específicos. Permite armonizar eficaz-

mente el estudio y trabajo. No existe rompimiento del alumno con su ambiente sociocultural. Respeta el ritmo del aprendizaje del alumno. Favorece el desarrollo de la iniciativa, de actitudes y de hábitos educativos. Se adapta a las necesidades, intereses y aspiraciones de los interesados. Promueve la interacción mediante el aprendizaje colaborativo.

Como desventajas: No existe transmisión de valores, tendencia al aislamiento social, la socialización es limitada. No existe intercambio directo de experiencias. Lentitud en el feed-back (Retroalimentación). La corrección de errores de las actividades es muy lenta. Escasa difusión y divulgación para la educación virtual.

4.2. La génesis del diseño geométrico asistido por computadora

La arquitectura entró en una nueva etapa con la inauguración del Museo Guggenheim Bilbao de Frank Gehry [22], en 1997; éste fue el primer arquitecto que, con la utilización de tecnología digital, hizo posible la construcción de un edificio formalmente complejo, cuya construcción habría sido difícil o prácticamente imposible, de no haber contado con la tecnología adecuada.

El Guggenheim de Bilbao, fue creado por un arquitecto que pensaba en términos digitales ya que trabaja con modelos reales (maquetas) y emplea la tecnología a posteriori, escaneando sus maquetas en tres dimensiones para generar la información que permita su desarrollo constructivo. Este edificio es,

por tanto, el primer edificio construido de la era tecnológica.

Greg Lynn, Ben Van Berkel, Alejandro Zaera-Polo y Winny Maas, recorrían escuelas, revistas y simposios predicando un nuevo mundo producido por la tecnología, que desataba entusiasmo entre los estudiantes e incredulidad entre arquitectos de generaciones anteriores, quienes sostenían que generar arquitectura a partir de la especificidad de la computadora era imposible.

Para una arquitectura conceptualmente distinta, se debía pensar en ambas: arquitectura y tecnología; se trató de tener una conciencia clara del concepto de espacio que se intentaba degenerar, transformar, corromper, subvertir, explorar. Gehry, había realizado el Guggenheim sin haber tocado seguramente una computadora, pero abriendo paso a una nueva tecnología. El primer gran edificio del siglo XXI fue realizado por un arquitecto fundamental del siglo XX, Antoni Gaudí [20] cuya arquitectura usó los programas informáticos que han permitido a los arquitectos actuales comprender y construir la arquitectura.

La Revolución Digital es la realidad de nuestra época, la tecnología, aplicada a la arquitectura, permite, origina y es responsable una nueva forma de crear, pensar, diseñar.

La arquitectura digital experimental no rompe con la caja clásica, sino que se olvida de ella. No es una arquitectura irónica. Su génesis son las variables proporcionadas por el ordenador, generando un universo de formas complejas que construyen una distinta forma de aproximación al espacio arquitectónico.

La computadora facilita la experimentación formal. Tal vez por eso podemos afirmar que estamos frente a una revolución que cambiará definitivamente los parámetros y conceptos de la arquitectura tal cual la reconocemos y definimos.

Para imaginar una ciudad reflejo de la cultura digital es preciso echar mano de la ciencia-ficción, no debemos creer que la realidad de revolución digital en arquitectura va a hacerse evidente mientras recorremos la ciudad contemporánea, que sigue construyéndose y creciendo tal y como siempre lo hizo.

La revolución digital opera a otros niveles: no es un acto de reacción contra modelos establecidos, es la materialización de una nueva sensibilidad formal que plantea nuevas formas de ocupación del espacio. Ha sido el ordenador la herramienta que permite poner en orden y en funcionamiento práctico la imaginación.

La arquitectura de los últimos años de la década de los 90 y el inicio del siglo XXI es contingente de emergencia de profesionales preocupadas por plantear experimentos con técnicas, tecnología y procesos de diseño y pensamiento contemporáneos.

Tal como manifiesta Kas Oosterhuis, todo aquello que hace que la arquitectura sea más que una construcción técnica, un alojamiento y una inversión, se encuentra bajo presión en la era digital, no sólo por la propia reevaluación que la arquitectura ejerce sobre sí misma al asociarse a la capacidad de una

nueva tecnología capaz de actuar dotada de inteligencia propia, sino por sus acercamientos y vinculación con ciencias y arte.

El trabajo de Winka Dubbeldam, Franken Architekten, NIO o Paul Andersen, pone de manifiesto la capacidad de la computadora de cooperar con eficiencia en la generación de estructuras formal y conceptual e innovadoras.

4.3. Omnipresencia de la tecnología digital en la arquitectura

Un rasgo central dentro del paradigma de la Sociedad de la Información, es entender los cambios a nivel macro como **estructuras sociales** y a nivel micro en **esferas individuales** es la omnipresencia tecnológica. Esto significa que nuestra existencia está condicionada a una gran cantidad de herramientas, máquinas y artefactos que facilitan la vida, mejoran los procesos, reducen las distancias, permiten el ahorro de recursos, etcétera.

En las últimas décadas, y específicamente desde el desarrollo de la red de redes, la omnipresencia tecnológica se amplificó, desde que Internet fue creado comenzó a expandirse a nivel planetario una nueva cultura, la digital.

La omnipresencia tecnológica implica por un lado que parte de la vida está condicionada en cierta forma a los artefactos, y por otro lado al conocimiento sobre la forma de utilizarlos. En este sentido, Winner, asegura que la mayoría de los integrantes de las sociedades actuales desconocen el funcionamiento

de la tecnología.

Woolgar Steve, señala que las tecnologías están gestando una nueva esfera de comunicación: el florecimiento de la sociedad virtual que complementa a la sociedad real.

Uno de los efectos primarios de la omnipresencia tecnológica se puede observar en las actividades cotidianas. La propuesta de McLuhan Marshall, permite considerar que toda tecnología de la comunicación no tiene efectos sobre las personas por sus contenidos sino mediante la propia tecnología. Desde esta perspectiva las nuevas tecnologías representarían un nuevo reinado sobre las prácticas sociales. Siguiendo la línea de la tecnología como medio, Baudrillard Jean, asegura que los medios de comunicación cumplen la función de neutralizar el carácter vivido de los acontecimientos del mundo, para sustituirlo por un universo múltiple de medios homogéneos que a su vez se significan recíprocamente y donde cada uno remite a otros. En este sentido, Internet es un ejemplo de neutralización de la realidad física al sustituirla por una realidad posible. La omnipresencia tecnológica empuja a las colectividades a configurar sus espacios, convertidos ahora en sitios no-humanos.

La informática ha irrumpido en forma vertiginosa, generando cambios en los modos, formas culturales, laborales y comunicativas hasta ahora tradicionales. Frente a un proceso parsimonioso de adaptación a la innovación tecnológica, en la actualidad asistimos a una revolución que ocurre en el seno de nuestra vida cotidiana.

El reciclaje, la readaptación y ajuste a los requerimientos y demandas impuestas por las nuevas tecnologías obliga, a realizar un enorme esfuerzo formativo destinado a adquirir las competencias instrumentales y cognitivas para el uso de las tecnologías digitales. La alfabetización tecnológica es una condición necesaria, en la actualidad, para que se pueda acceder y conducirse inteligentemente a través de la cultura y tecnología digital, es decir: saber de buscar la información, seleccionarla, elaborarla y difundirla desde cualquier medio.

La gran cantidad de información, no supone necesariamente un uso competente de la misma. Recibimos muchos datos e informaciones, pero no siempre la sabemos transformar en conocimiento (Bartolomé, 2001).

La presentación de la información a través de las nuevas tecnologías se caracteriza por su ruptura con el modelo de organización lineal de la cultura impresa; la imagen, el sonido, el hipertexto revelan una forma distinta de publicarla.

Las estructuras de la formación deben evolucionar a su vez desde la concepción destinada a instruir para una sociedad industrial a la de enseñar en y para una sociedad de la información.

El sistema escolar de los países occidentales nació con una concepción de la enseñanza pensada para dar respuestas de las sociedades industriales

del siglo XIX y XX. La sociedad del siglo XXI, en la que nos encontramos, representa un escenario intelectual, cultural y social radicalmente distinto.

Una tendencia de vanguardia en la arquitectura contemporánea es la búsqueda de nuevas expresiones formales y materiales derivadas del uso intenso de tecnologías digitales. Su consecuencia más evidente es una profusión global de edificios de geometrías no tradicionales en todas partes del planeta.

Aunque el posmodernismo y las tendencias arquitectónicas que le siguieron parecían haber matizado esta visión, el surgimiento de nuevas tecnologías computacionales en esta década ha dejado al descubierto una reaparición explícita del ideario modernista del progreso basado en la técnica. La inmensa cantidad de herramientas digitales, cada vez más ubicuas, completas y poderosas, parecen confirmar la aspiración que la tecnología todo lo puede.

La variedad actual de software para arquitectura va desde la simulación energética o acústica hasta el análisis de comportamiento de multitudes, haciendo fácilmente creer que todas las decisiones de diseño pueden instrumentalizarse y basarse en información cuantitativa objetiva.

4.3.1. Arbitrariedad y Subjetividad en la arquitectura

El síntoma más obvio es la existencia de múltiples rasgos formales comunes, que constituyen un lenguaje de diseño claramente identificable; compartido, validado y replicado por sus creadores. Para Patrick Schumacher, esto es tan

evidente y reconocible que incluso debiera ser considerado como un estilo arquitectónico. La aspiración modernista de eliminar la arbitrariedad de los procesos de diseño, aparentemente lograda con la racionalidad del diseño paramétrico o la fabricación digital, no es tal: ni el software ni una máquina CNC tienen preferencias estéticas.

La popularización de los diagramas de proceso es evidencia de esta necesidad patológica por la explicación racional. La represión modernista de la arbitrariedad ha levantado críticas en reiteradas ocasiones.

Se comparte la visión de abordar el problema arquitectónico desde la complejidad, la disyunción y la contradicción, entendiendo que estos conceptos son características fundamentales de la disciplina. Conciben al sujeto como un agente dinámico, complejo e impredecible que toma decisiones en base a sus creencias, experiencias y dimensión cultural.

Reconocer la subjetividad, asumir la arbitrariedad y liberar las decisiones arquitectónicas de sus ataduras permite abrir camino a nuevas oportunidades.

CONCLUSIONES

La mezcla de distintas herramientas y técnicas de diseño en paralelo con el conocimiento del tema y el uso consciente de la geometría, ofrece la oportunidad de potencializar un proyecto arquitectónico y resolverlo de manera eficaz y adecuada.

Las herramientas digitales no son la solución para el futuro de la formación de arquitectura, sin embargo, son de gran utilidad. Aunque aceleran el proceso de diseño, no sustituye el proceso de realización.

1. Esta investigación permite ver la factibilidad de un trabajo interdisciplinario con un fin común.
2. Refuerza el conocimiento y uso de la geometría en el diseño.
3. Facilita el aprendizaje geométrico a los alumnos en las áreas directamente involucradas: diseño y arquitectura.
4. Brinda un instrumento (APP) de diseño, accesible y económico a la población interesada

5. Se puede lograr la configuración de formas modulares mediante el diseño de frisos y teselaciones.
6. Abre un campo de investigación que se puede explotar en el futuro.

Las limitantes de este proyecto fueron:

1. Falta de interés y difusión de la herramienta.
2. Encontrar un lenguaje común entre las diferentes disciplinas.
3. Requiere probar su efectividad
4. Necesita difusión para su conocimiento, uso y validación.
5. El interés de los probables usuarios para su aplicación.
6. Pérdida de vigencia de acuerdo con los avances tecnológicos.
7. Costo en la adquisición del equipo para su reproducción.
8. Sólo se desarrolló para Ipad, con sistema operativo iOS y posteriormente se tratará de extender al sistema Android y PC.
9. El uso de esta tecnología no sustituye el conocimiento, sólo es un complemento para el aprendizaje.

En cuanto a su proyección se estima:

1. Se abre un camino a la investigación para la configuración de teselaciones en tres dimensiones para su aplicación en arquitectura.
2. Hacerla accesible para sistema Android y PC.

-
3. Ayuda para el desarrollo cognitivo - espacial y lógico- matemático, por lo tanto podría potencializar la creatividad.
 4. Proyección hacia un trabajo integral interdisciplinario
 5. Actualmente se encuentra en exposición permanente de la Sala de Matemáticas en Universum, Museo de las Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.
 6. Se presentó para la Feria de Matemáticas 2018 del Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, Campus Morelia.

ANEXO 1. MUESTREO

Diagnóstico de conocimientos sobre geometría, frisos y teselaciones, en los alumnos de arquitectura de diferentes semestres, en los campus CU, FES Aragón y FES Acatlán

Con objeto de conocer el nivel de conocimientos sobre geometría, frisos y teselaciones de los alumnos de arquitectura en diferentes grados, se aplicó un cuestionario de opción múltiple en tres Facultades: UNAM, FES Aragón y FES Acatlán (Tabla 4.1).

Para sacar la muestra, se aplicó la fórmula de confiabilidad (límite central), se revisó el informe de actividades del 2016 de la Facultad de Arquitectura de la UNAM, quien reportó que se inscribieron 8068 alumnos a la facultad de Arquitectura, de los cuales 7447 corresponden a la Licenciatura en Arquitectura, 296 a la Licenciatura en Diseño industrial y el resto a Arquitectura de Paisaje y Urbanismo.

Se aplicó la fórmula de confiabilidad (límite central) con base en el reporte

anual de la Facultad, que dio por resultado el total de cuestionarios que se tenían que aplicar para tener una confiabilidad del 95% dando un total de 366 alumnos.

El cuestionario consta de 9 preguntas de opción múltiple con cuatro posibles respuestas, para elegir la que consideran correcta (Figura 4.1), (Figura 4.2).

Se entregó a alumnos de Arquitectura en Ciudad Universitaria, FES Acatlán y FES Aragón desde segundo hasta décimo semestre, permitiéndoles el tiempo necesario para responderlo que en promedio fue de diez minutos.



Cuestionario

UNAM
POSGRADO



Carrera : _____ Semestre: _____

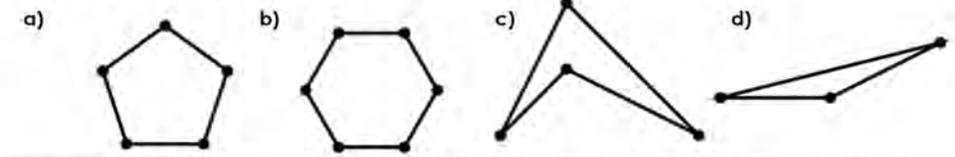
Panel: Ciudad Universitaria FES Aragón FES Acatlán

Instrucciones: Marcar el inciso para cada caso

① Cuando un patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana (o el espacio) y que cumple con dos requisitos: 1. Que no queden espacios y 2. Que no se superpongan las figuras. Estamos hablando de un:

- a) Compuesto b) Teselado c) Rectificado d) Emparejamiento

② Sólo una de las siguientes figuras al repetirla tantas veces como queramos y colocando estas lado a lado y vértice a vértice sin que queden huecos o se encimen NO cubre el plano (o una parte de él) ¿Cuál es?



③ Al siguiente triángulo se le hizo un movimiento del plano ¿Cuál fue?



- a) Traslación b) Rotación c) Reflexión d) Deslizamiento

④ A la siguiente figura se le han aplicado dos movimientos del plano en el siguiente orden, primero la marcada con un círculo y después la marcada con una flecha ¿Cuáles fueron estos movimientos?



- a) reflexión y rotación b) deslizamientos c) rotación y traslación d) ninguna de las anteriores

Figura 4.1: Cuestionario

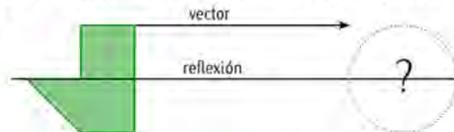


Cuestionario

UNAM
POSGRADO



5) Después de aplicar un deslizamiento o paso como se indica en la figura ¿Cuál será la resultante en el círculo marcado?



- a)
- b)
- c)
- d)

6) Es la cantidad de grupos de frisos que existen:

- a) Infinitos
- b) No se sabe
- c) 17
- d) 7

7) Son ejemplos de frisos

- a)
- b)
- c)
- d) Todos las anteriores

8) Un teselado (o enmosaicado) regular es aquel que esta formado únicamente por polígonos regulares del mismo tipo, como por ejemplo el de puros cuadrados. ¿Con cuál de las figuras siguientes también podemos armar una teselado regular?

- a) Octágonos regulares
- b) Pentágonos regulares
- c) Dodecágonos regulares
- d) Ninguno de los anteriores

9) Una de las siguientes figuras al repetirla tantas veces como queramos y colocando estas cara a cara, lado a lado y vértice a vértice sin que queden huecos o se encimen cubre el espacio (o una parte de él) ¿Cuál es?

- a) tetraedro regular
- b) esfera
- c) cubo
- d) prisma pentagonal

Figura 4.2: Cuestionario

En CU, se aplicaron 120 cuestionario (32.7%), en FES Aragón se aplicaron 51 (13.9%) y 195 (53.3%) en Acatlán, para demostrar el nivel de conocimientos que tienen sobre el tema. En total se aplicaron 366 cuestionarios que equivalen al 100% (Figura 4.3).

Tabla 4.1: Distribución de muestra por campus

Unidad	Número	Porcentaje
C.U.	120	32.7
Fes Aragón	51	13.9
Fes Acatlán	195	53.4
Total	366	100

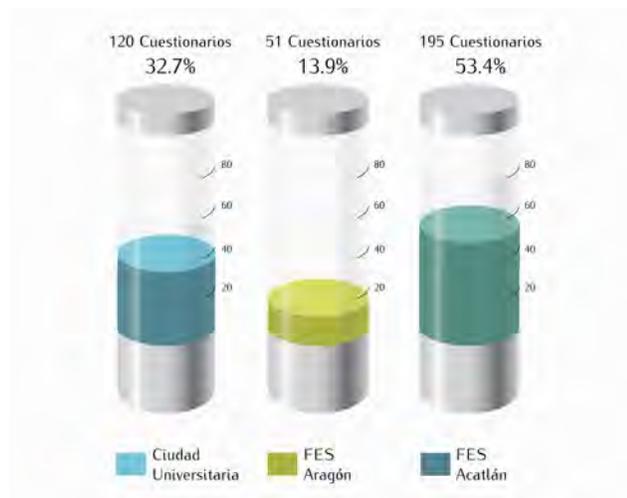


Figura 4.3: Distribución de muestra por Campus

Se buscó abarcar casi todos los semestres, pero no fue posible homologar

el número de cuestionarios en todos los semestres.

Tabla 4.2: Número y porcentaje de alumnos encuestados por semestre y aciertos

Semestre	Número de alumnos	Porcentaje de alumnos
2	46	12.6
3	7	1.7
4	43	11.8
5	7	1.7
6	46	12.6
7	25	6.7
8	86	23.9
9	47	12.9
10	52	14.3
NR	7	1.7
Total	366	100

En la (Tabla 4.2), se observa que el mayor número de alumnos al que se les aplicó el cuestionario fueron del octavo semestre, en consecuencia, los que alcanzaron mejores resultados, obteniendo un resultado menor al 25% de 100% total de las preguntas correctas.

Debido a que el número de alumnos en cada Campus no es el mismo, se aplica la regla de Normalización, es decir, se cuantifico el número de aciertos por campus y se divide entre el total de preguntas aplicadas y se obtienen los resultados presentados en la gráfica (Figura 4.4), donde el porcentaje más alto lo obtuvo la Fes Aragón.

Con este análisis, se puede concluir que el nivel de conocimientos básicos de geometría no son suficientes.



Figura 4.4: Comparación entre cada Campus

ANEXO 2 RESULTADOS: HERRAMIENTA DIGITAL (TESSELART)

TesselArt

La propuesta se desarrolló con el diseño e implementación de una aplicación móvil como herramienta didáctica, coherentemente estructurada, que integra elementos propios de la geometría euclidiana y el pensamiento espacial, con ello se logró la integración de un conocimiento matemático y artístico. Para el desarrollo de esta herramienta se llevo a cabo con un proceso de programación y el estudio de las isometrías, los 17 grupos de teselaciones.

Actualmente, la aplicación se encuentra expuesta en la sala de matemáticas del Museo de las ciencias Universum. También se presentó en la Feria de Matemáticas de Morelia 2018 en el Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM.

El lenguaje de programación que se utilizó para el desarrollo de la aplicación es Objective-C, el cual corre en el sistema operativo iOS. Actualmente este trabajo esta programado para su funcionamiento en iPad.

- Interfaz de la aplicación. En esta figura se muestra el contenido y diseño de las herramientas de la aplicación (Figura 4.7).

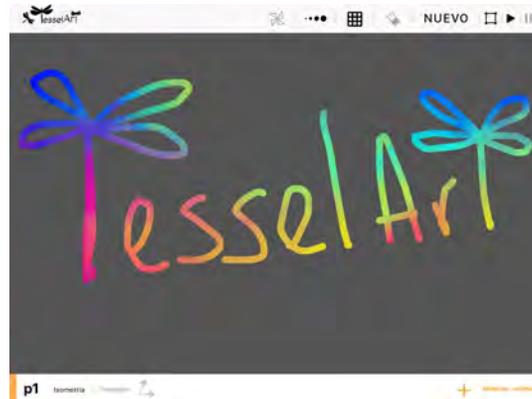


Figura 4.7: Interfaz de la aplicación

- En esta figura se muestra el menú de herramientas y como se despliega la opción de contorno (Figura 4.8).

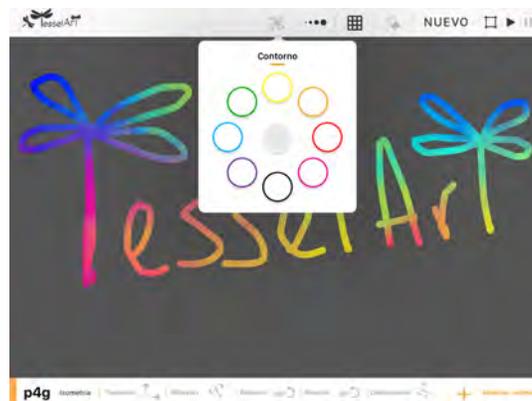


Figura 4.8: Contorno

- En esta figura se muestra el menú de herramientas y como se despliega la opción de grosor de línea para dibujo (Figura 4.9).



Figura 4.9: Grosor de línea para dibujo

- En esta figura se muestra el menú de herramientas y como se despliega la opción de texturas (Figura 4.10).

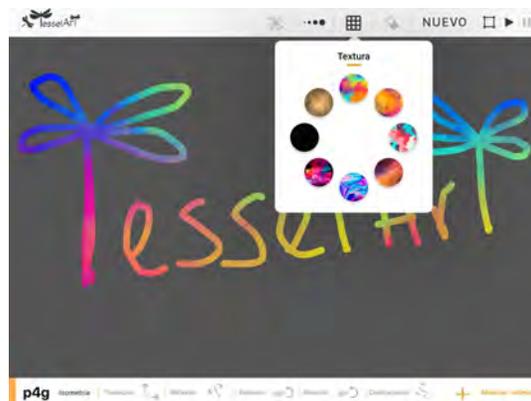


Figura 4.10: Texturas

- En esta figura se muestra el menú de herramientas y como se despliega la opción de reiniciar dibujo (Figura 4.11).

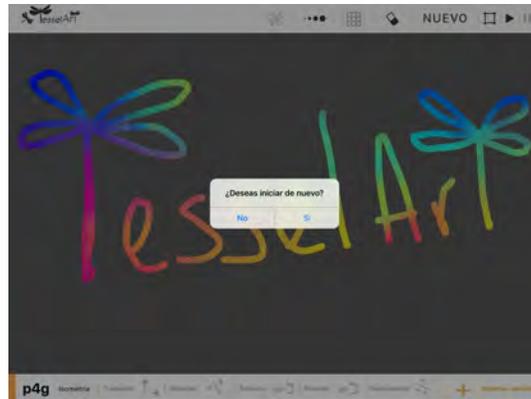


Figura 4.11: Reiniciar dibujo

- En esta figura se muestran los botones de los 17 grupos para la configuración del dibujo que se haya realizado. Se sombrea en tono negro el que se este utilizando y se despliegan las isometrías que utiliza el grupo seleccionado (Figura 4.12)



Figura 4.12: Botones de los 17 grupos

- En esta figura se muestra la región fundamental del grupo seleccionado (Figura 4.13).



Figura 4.13: Región fundamental

- En esta figura se muestra el nombre de las personas que colaboraron en el desarrollo de la aplicación (Figura 4.14).



Figura 4.14: Personas que colaboraron en el desarrollo de la aplicación

Universum

- Actualmente, la aplicación se encuentra expuesta en la sala permanente de matemáticas de Universum, Museo de las Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.



Figura 4.15: Aplicación expuesta en el Museo de las Ciencias, Universum en la sala permanente de matemáticas

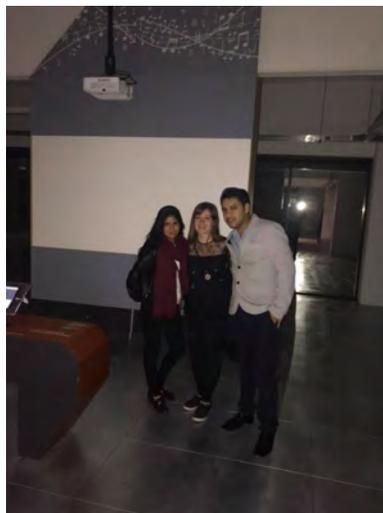


Figura 4.16: Inauguración de la sala permanente de Matemáticas, equipo colaborador de la aplicación



Figura 4.17: Placa del equipo colaborador de la aplicación

Feria Matemática de Morelia 2018

- La aplicación se presentó en la Feria Matemática de Morelia 2018 que organiza cada año el Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM el 14 de abril del 2018 y tuvo un impacto de más de 5000 personas.



Figura 4.18: Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM



Figura 4.19: Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM



Figura 4.20: Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM



Figura 4.21: Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM

REFERENCIAS

- [1] Acosta, D. (2009). *Arquitectura y construcción sostenibles*. DEARQ: Revista de Arquitectura de la Universidad de los Andes, (4), 14-23.
- [2] Alfaro, J.; Limón, B.; Martínez, G.; Ramos, M.; Reyes, J. y Tijerina, G. (2001). *Ciencias del ambiente*. México: Compañía Editorial Continental.
- [3] Alvarado, C. (2005), *Tesis de pregrado: La simetría en el arte a través de la historia*, UNAM, Facultad de Ciencias.
- [4] Agkathidis, A. (2016). *Diseño generativo: Procesos para concebir nuevas formas arquitectónicas*. Barcelona: promopress.
- [5] Balbuena, L, De la Coba, D., García Emma (2000), *Calados, canarios y matemáticos*. Revista Suma 35, España pp.19-27.
- [6] Barriga, F, (2001). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo*; una Interpretación constructivista. México: McGraw Hill. Cap. 2 Constructivismo y Aprendizaje Significativo. Pp. 23-63.

- [7] Boisier, P., M.E. (2010), *Ciencia y la Tecnología en Chile: ¿Para Qué?*. Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT). Gobierno de Chile. 132 págs. www.conicyt.cl. [Links].
- [8] Coxeter, H. (1971) *Fundamentos de Geometría*, México: Limusa Wiley.
- [9] Caporioni, Garlatti, Montini, T. (1971) *Coordinación Modular*, Barcelona: Gustavo Gill.
- [10] Davis, P. J., Hersh, R, Marchisotto, E.A, (1995) *Experiencia matemática*, Nueva York : Springer, 2012
- [11] Del Bosque, F; A. (2005) *Función del Psicólogo en áreas tradicionales y emergentes*. Facultad de Estudios Superiores Iztacala. UNAM, México.
- [12] Ernst, B. (2007), *El espejo mágico de M.C. ESHER*, Sur Corea, Taschen
- [13] Espinoza, P. y Rafael, L. (2006). *Transferencia tecnológica para procesos productivos sustentables en ámbitos rurales*.
- [14] Fischler, R (1979), *The Early Relationship of Le Corbusier to the Golden Number*, Environment and Planning, 6:95-103.
- [15] Fischler, R (1981a), *On the Application of the Golden Ratio in the Visual Arts*, Leonardo, 14/1:31-2.
- [16] Fischler, R (1981b), *How to Find the Golden Number, without Really Trying*, Fibonacci Quarterly, 19:406-10.
- [17] Fortune, S. (1986), *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry*.

- Yorktown Heights, New York, United States, pp.313?322. 1986. ISBN 0-89791-194-6. ACM Digital LibrarySpringerLink.
- [18] Fraleigh, J (1987). *Algebra Moderna*. Trillas, México, 1994.
- [19] García, R. D., (1966). *Arquitectura y artes decorativas*. México, ENA, UNAM.
- [20] Gaudí A.i, (2001). *Gaudí. Hábitat, natura i cosmos (en catalán)*. Barcelona: Lunwerg. ISBN 84-7782-799-0.
- [21] Gazalé, M. J. (1999), *Gnomon*, Princeton: Princeton University Press.
- [22] Gehry, F.; Colomina, B; Friedman, M; William J. ; Ragheb, F. ; Cohen J.L (2001) *Guggenheim Museum Publications de Frank O. Gehry*, ISBN 10: 0810969297 - ISBN 13: 9780810969292 - Guggenheim Museum Pubns.
- [23] Hambidge, J. (1967), *The Elements of Dynamic Symmetry*, New York: Dover
- [24] Hann, M.. (2012). *Structure and form in design. Critical ideas for creative practice*. London: Bloomsbury.
- [25] Hemenway, P. (2005), *Divine Proportion: Phi in Art, Nature and Science*, New York: Sterling.
- [26] Hidalgo, L. (2007), *Temas de Matemáticas para bachillerato: Mosaicos*, Instituto de Matemáticas, UNAM.
- [27] Horne, C.E., (2000), *Geometric symmetry in patterns and tilings*, England : Woodhead.

- [28] Huylebrouck, D., and Labarque, P. (2002), *More than true applications of the Golden Number*, Nexus Network Journal, 2/1: 45-58.
- [29] Kappraff, J. (1991), *Connections: The Geometric Bridge between Art and Science*, New York: McGraw-Hill.
- [30] Le Corbusier (1961), *The Modular*, Francia and A. Bostock, Londres y Bostón.
- [31] Leal, A. (2018), *Hide. Dibujo y lenguaje arquitectónico en México en la década de 1990. Un acercamiento a la revista Arquitectura*, Centro de Investigaciones en Arquitectura, Urbanismo y Paisaje (CIAUP), Facultad de Arquitectura, UNAM, México, 2018.
- [32] Lyndon, R. (1985), *Groups and geometry*, Cambridge University.
- [33] Leff, E. (1994). *Ecología y capital: racionalidad ambiental, democracia participativa y desarrollo sustentable. Siglo XXI*.
- [34] Lipson, H., Holden, K y Butler, J. (2003), *Universal Principles of Design, Gloucester: Rockport*.
- [35] Markowsky G (1992), *Misconceptions about the Golden Ratio*. College Mathematics Journal, 231: 2-19.
- [36] Martin, G.E. (1982), *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, New York: Springer-Verlag.
- [37] Montesinos, J.M (1987), *Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra*, España, Epsilon, p.30.

- [38] Moreno, S. H. (2008). *Introducción al urbanismo sustentable o nuevo urbanismo*. Espacios Públicos, 298-307.
- [39] Niggli, P. (1919), *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums*, Gebrüder Borntraeger, 1919.
- [40] Pallasmaa, J. (2016), *Habitar*, Barcelona, España: Gustavo Gili.
- [41] Pearce, P. (1990), *Structure in Nature is a Strategy for design*, Cambridge, MA:MIT press.
- [42] Pérez, R. (1987), *La Alhambra*, España, Epsilon.
- [43] Ramirez-Galarza, A., Seade, J (2002), *Introducción a la geometría avanzada*, Facultad de Ciencias UNAM, México.
- [44] Roger, L. C. (1980), *Groups and geometry*, New York: Cambridge University.
- [45] Schumacher P. *Urban Policy Manifesto* 02 dic 2016. ArchDaily México. (Trad. Valencia, Nicolás) Accedido el 12 Dic 2017. <<https://www.archdaily.mx/mx/800702/zaha-hadid-architects-responde-a-patrik-schumacher-no-refleja-nuestro-pasado-ni-nuestro-futuro>> ISSN 0719-8914.
- [46] Stirling J. <http://www.pritzkerprize.com/laureates/1981/index.html>, <http://www.cca.qc.ca/en/collection/542-james-Stirling-Michael-wilford-archive>.
- [47] Thomas C. Hales (2002) ,*The Honeycomb Conjecture*, <https://arxiv.org/pdf/math/9906042.pdf>

- [48] Tschumi, B., *Enfoque, Bernard Tschumi*, Tecne Los artículos de TECN-NE se encuentran bajo la licencia Creative Commons.
- [49] Venturi Robert (1972), *Complejidad y contradicción en la arquitectura*, Museo de arte moderno de N.Y: Gustavo Gil.
- [50] Wade, D.. (2017). *Geometría y Arte*. Países Bajos: Librero.
- [51] Washburn D.,K. y Crowe, D.W. (1988), *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*, Univesity of Washington Press.
- [52] Williams, K., Ostwald, M (2015), *Architecture and Mathematics from Antiquity to the future; Volume I: Antiquity to the 1500s*, Callaghan, Australia: Birkhäuser.
- [53] Williams, K., Ostwald, M (2015), *Architecture and Mathematics from Antiquity to the future; Volume II: The 1500s to the future*, Callaghan, Australia: Birkhäuser.
- [54] Zapulla, Carmelo. (2010). *Formas arquitectónicas: un modelo de investigación matemática. Conexiones entre el avance del diseño y el desarrollo científico-matemático*, Tercer Seminario Internacional Architectonics Network. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Equivalencias de la simetría de Identidad.	12
1.2. Simetría de reflexión	13
1.3. Equivalencias de la simetría de traslación	14
1.4. Equivalencias de la simetría de rotación	15
1.5. Simetría de Deslizamiento	15
1.6. Isometrías	17
1.7. Frisos del Palacio de Mitlá, Oaxaca	18
1.8. Traslación con una dirección y una distancia d	19
1.9. Reflexión vertical	20
1.10. Reflexión horizontal	20
1.11. Deslizamiento	21
1.12. Rotación de 180°	21
1.13. Diseño de frisos	22
1.14. Región generadora de los frisos	26
1.15. Friso 1. Clase p111, Templo de Mitlá	27
1.16. Friso 1 (Clase p111)	28

1.17. Friso 2. Clase p112, Alhambra	29
1.18. Friso 2. Clase p112	30
1.19. Friso 3. Clase p1m1, Mitlá, Oaxaca	31
1.20. Friso 3. Clase p1m1	32
1.21. Friso 4. Clase pm11, Alahambra	33
1.22. Friso 4. Clase pm11	34
1.23. Friso 5. Clase p1a1, Mitlá, Oaxaca	35
1.24. Friso 5. Clase p1a1	36
1.25. Friso 6. Taller para Re-crear Matemáticas del IES [5]	37
1.26. Friso 6. Clase pmm2	38
1.27. Friso 7. Taller para Re-crear Matemáticas del IES [5]	39
1.28. Friso 7. Clase pma2	40
1.29. Recubrimiento del plano a partir de un ornamento básico (letra <i>P</i>	42
1.30. Figuras que teselan el plano	44
1.31. Notación de los 17 grupos cristalográficos [27]	47
1.32. Tipos de retículas	49
1.33. Regiones generadoras de los 17 grupos cristalográficos	50
1.34. Grupo de simetría p1 (color)	52
1.35. p1	53
1.36. Grupo de simetría p2	54
1.37. p2	55
1.38. Grupo de simetría pm	56
1.39. pm	57
1.40. Grupo de simetría pg	58

1.41. pg	59
1.42. Grupo de simetría cm	60
1.43. cm	61
1.44. Grupo de simetría pmm	62
1.45. pmm	63
1.46. Grupo de simetría pmg	64
1.47. pmg	65
1.48. Grupo de simetría pgg	66
1.49. pgg	67
1.50. Grupo de simetría cmm	68
1.51. cmm	69
1.52. Grupo de simetría p4	70
1.53. p4	71
1.54. Grupo de simetría p4m	72
1.55. p4m	73
1.56. Grupo de simetría p4g	74
1.57. p4g	75
1.58. Grupo de simetría p3	76
1.59. p3	77
1.60. Grupo de simetría p3m1	78
1.61. p3m1	79
1.62. Grupo de simetría p31m	80
1.63. p31m	81
1.64. Grupo de simetría p6	82
1.65. p6	83

1.66. Grupo de simetría $p6m$	84
1.67. $p6m$	85
2.1. Fachada este del Partenón	94
2.2. Partición del plano en celdas hexagonales	102
2.3. Dodecaedro-rómbico	102
3.1. Octaedro truncado	107
3.2. Estructura Weaire - Phelan	108
3.3. Estructura del Centro Nacional Acuático de Beijing	109
4.1. Cuestionario	130
4.2. Cuestionario	131
4.3. Distribución de muestra por Campus	132
4.4. Comparación entre cada Campus	134
4.5. Icono de la aplicación	136
4.6. Aplicación instalada en iPad	136
4.7. Interfaz de la aplicación	137
4.8. Contorno	137
4.9. Grosor de línea para dibujo	138
4.10. Texturas	138
4.11. Reiniciar dibujo	139
4.12. Botones de los 17 grupos	139
4.13. Región fundamental	140
4.14. Personas que colaboraron en el desarrollo de la aplicación	140

4.15. Aplicación expuesta en el Museo de las Ciencias, Universum en la sala permanente de matemáticas	141
4.16. Inauguración de la sala permanente de Matemáticas, equipo colaborador de la aplicación	141
4.17. Placa del equipo colaborador de la aplicación	142
4.18. Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM	143
4.19. Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM	143
4.20. Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM	144
4.21. Feria Matemática de Morelia 2018, CCM, UNAM	144

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Teorema de las tres reflexiones	16
1.2. Notación de frisos	23
1.3. Método exhaustivo que demuestra que solo existen 7 grupos de frisos	25
1.4. Tabla resumen de los 7 frisos	41
1.5. Notación de los 17 grupos cristalográficos	46
1.6. Tabla resumen de los 17 grupos cristalográficos	86
4.1. Distribución de muestra por campus	132
4.2. Número y porcentaje de alumnos encuestados por semestre y aciertos	133