UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

Manual de apoyo para los estudiantes de la licenciatura en Actuaría, referente a la seriación obligatoria de Finanzas (Plan de estudios 2014) de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA

JESÚS NOEL CASTELÁN VITE

ASESOR: ACT. ALDO MAURICIO VARGAS CARRANZA

Santa Cruz Acatlán, Estado de México
Fecha: Octubre 2018

Índice

Introducción

El plan de estudios de la licenciatura en Actuaría, implementado en 2014, resulta ser ambicioso, ya que integra distintas ramas como Probabilidad, Estadística, Seguros, Programación, Economía, Administración, Demografía y Finanzas, las cuales resultan de sumo interés para los estudiantes, dado que su aplicación en el campo laboral es fundamental, lo que ha generado, con el paso de los años, una demanda ascendente.

Adicionalmente, fuentes importantes, dada su investigación y resultados publicados al cierre de 2016[1], comentan que, entre las carreras mejor pagadas en el país, destacan aquellas relacionadas con la Estadística y Finanzas, lo que justifica la demanda comentada anteriormente y resalta el hecho de que en los últimos años los estudiantes de Actuaría han decidido especializarse en el área financiera, ya que esta sugiere un excelente ambiente para desarrollar las habilidades adquiridas a lo largo de su trayectoria universitaria.

Por otra parte, los resultados de una encuesta, aplicada durante el último trimestre de

[1] https://www.forbes.com.mx/las-10-carreras-mejor-pagadas-en-mexico/ Consulta Noviembre 2016

2017 a alumnos de los últimos semestres de la licenciatura en Actuaría de la Facultad de Estudios Superiores (FES) Acatlán, muestran que alrededor del 40 % que cursó las primeras dos materias de la seriación, no cuenta con una base sólida para continuarla, de ahí que esta situación provocaría un posible aumento en el índice de reprobación. Adicionalmente la encuesta señala que, una vez concluida la seriación obligatoria, aproximadamente el 30 % del alumnado considera que la base sobre temas financieros es de bajo nivel.

Entre los motivos que se explican en la encuesta, los alumnos suponen que los objetivos de la seriación no se han alcanzado por falta de interés y/o capacitación tanto de ellos mismos como de los profesores, además de la falta de tiempo para desarrollar y atender un curso completo por ambas partes y una posible falta logística en cuanto al cupo de grupos.

Dadas las situaciones anteriores, surge la necesidad de elaborar y presentar este manual, con el propósito de apoyar a los estudiantes con el contenido y metodologías propuestas en los temarios de la seriación obligatoria de Finanzas, es decir, Matemáticas Financieras I y II, Finanzas Corporativas y Aplicación a las Matemáticas Financieras, desarrollando y ejemplificando la temática relacionada con dichas asignaturas para una comprensión integral del alumnado y un buen desarrollo en la materia que cursaron o se encuentren cursando.

Adicionalmente, la elaboración del manual va encaminada a su uso por parte de los Profesores como bibliografía complementaria en los temarios. De esta forma se conseguirá un desarrollo conjunto de los cursos por parte de dichos profesores y de los alumnos.

Por último, cabe mencionar que, dada la similitud de algunos títulos en la bibliografía propuesta de cada materia, existen tópicos que coinciden (se repiten) entre los temarios, por lo que, a modo de llevar una secuencia lógica y óptima en el entendimiento y desarrollo de los alumnos, dichos temas se abordarán en secuencia (dependiendo de la aplicación a la materia) o solamente en el temario más apropiado.

Objetivo del trabajo

Dar apoyo y soporte, con este manual, a los estudiantes con el fin de comprender y desarrollar de forma complementaria los temas referenciados a la seriación obligatoria de Finanzas de la Licenciatura en Actuaría de la FES Acatlán, es decir, las asignaturas de Matemáticas Financieras I y II, Finanzas Corporativas y Aplicación a las Matemáticas Financieras, logrando un manejo y aplicación integral de los conceptos y metodologías contenidas en los temarios correspondientes.

1. Matemáticas Financieras I

Introducción

Matemáticas Financieras I es la primera asignatura con la cual los estudiantes de la licenciatura se presentan ante la seriación obligatoria del plan de estudios 2014. Dicha situación sugiere que los conceptos y metodologías a estudiar deben ser claros y concisos, con el fin de que el alumnado despierte afición e interés por las Finanzas.

Este capítulo desarrolla los temas de dicha asignatura, los cuales muestran los conceptos básicos de las finanzas, por ejemplo, tasas de interés, valor presente, valor futuro, anualidades, etc. Dichos conceptos son de suma importancia, ya que conllevan una aplicación directa en tópicos de capítulos posteriores, por lo cual es necesario contar con una base sólida al finalizar este apartado.

Primeramente es necesario comprender que las matemáticas Financieras representan el conjunto de conceptos y técnicas cuantitativas de análisis para la evaluación de proyectos de inversión, con el objetivo de tomar una decisión óptima al seleccionar una opción.

La definición anterior indica que realizar una inversión representa colocar recursos financieros en proyectos donde se corre el riesgo de generar pérdidas o ganancias, por ejemplo al invertir en una cuenta bancaria, prestar o pedir prestado recursos con ciertos intereses, levantar y operar una empresa, etc., por lo que es evidente que cada día las personas toman decisiones financieras que impactan significativamente en su economía inmediata y futura, de ahí que resulta necesario analizar de forma adecuada las posibles opciones para hacer rendir estos recursos en el corto y largo plazo.

Dado lo anterior, es importante resaltar un objetivo adicional, el cual es el estudio y entendimiento del valor del dinero en el tiempo, lo que representa una de las bases primordiales de las Matemáticas Financieras.

Como ya se mencionó anteriormente en este primer capítulo se encontrará la base de las Matemáticas financieras desde un poco de historia sobre el origen de las finanzas hasta la aplicación de los conceptos básicos en la amortización y depreciación de activos o bienes, lo cual no dará la pauta al desarrollo de capítulos posteriores.

1.1. Medida del interés

1.1.1. Un poco de historia: El inicio de la teoría

Desde la antigüedad, los seres humanos hemos tenido necesidades básicas en nuestra vida cotidiana, por ejemplo, comer, beber, dormir y respirar.

Por otra parte, existen necesidades que no son básicas, sin embargo son indispensables para vivir durante las etapas del desarrollo humano, de ahí que deben satisfacerse para poder lograr un óptimo desarrollo.

En comento, los seres humanos hemos desarrollado habilidades importantes para satisfacer estas necesidades, por ejemplo, en la antigüedad las personas se alimentaban con frutos y plantas, y con el paso del tiempo surgió la necesidad de obtener otro tipo de alimento, ya que lo anterior no satisfacía por completo dicha necesidad, por lo que se desarrolló un instinto de caza, es decir, los antiguos individuos comenzaron a construir utensilios con el propósito de enfrentarse a distintos animales y así poder satisfacer varias necesidades. La carne era un alimento, las pieles se usaban como vestimenta y los huesos como armas de caza.

Fue así como suplir las necesidades básicas se hizo una prioridad. Las antiguas civilizaciones evolucionaron y de esta forma surgieron aún más necesidades, desde la forma de vestir que ya no implicaba el simple uso de pieles, si no que ahora su uso era más complejo, zapatos, pantalones, playeras, chamarras entre otros objetos, hasta la importancia de tener un lugar cómodo y seguro para vivir, lo que dio el impulso para construir viviendas con espacios específicos para cada necesidad; el espacio destinado para la preparación de alimentos necesitaba tener carbón, leña, un comal, utensilios de cocina, entre otros, mientras que una cama, una silla o algo cómodo en donde recostarse eran necesarios para el lugar destinado al descanso.

Las personas tenían que ser autosuficientes, es decir, tenían que suplir sus necesidades por ellas mismas, hasta el momento en el que las necesidades se volvieron demasiadas y las habilidades que poseía cada persona no eran suficientes para atender dichos requerimientos, por ejemplo, algunas personas eran muy buenas cazando o criando animales pero no tan hábiles confeccionando vestimentas con las pieles de dichos animales; otras que eran muy hábiles en el manejo de las pieles no lo eran construyendo herramientas de todo tipo, otras más sabían construir viviendas, algunas personas eran expertas construyendo muebles de madera, mientras otras lo hacían con metales o algún otro tipo de material. Esta fue la razón principal por la cual las personas comenzaron a intercambiar productos que ellos podían hacer por productos que no tenían. A este intercambio de bienes y servicios se le conoce como trueque.

Así, la sociedad inició preguntándose cuánto de cada cosa se debería dar para tener un intercambio justo, es decir, cuánta carne de animal debía darse para recibir unos zapatos o cuántos zapatos se entregarían para recibir una mesa, por ejemplo.

Los intercambios eran relativamente justos, cada persona entregaba y recibía lo que creía merecer y en medio de esta situación surgió algo parecido a lo que hoy en día se conoce como la oferta y demanda; la sociedad comenzaba a cuestionarse cuánto debía producir y cuánto necesitaba consumir.

Los intercambios comenzaron a generar conflictos, las personas no podían calcular la cantidad de bien o servicio a intercambiar, tomando en cuenta que también era difícil encontrar un oferente o demandante adecuado para realizar el trueque, por lo cual se pensó en un tercer factor que interviniera en dicho intercambio, el cual debía ser un medio de intercambio aceptable y funcional para todos, también debía ser numerable y tenía que mantener un valor a través del tiempo.

Entre los materiales que fungieron como ese tercer factor se encuentran pieles, sal, piedras, maíz, semillas, cacao entre otros. Sin embargo, estos no satisfacían al mismo tiempo las características anteriormente mencionadas. Fue así como apareció el dinero hecho por metales valiosos como: oro, plata, hierro o bronce. El dinero cumplía con todas las características y apuntaba a ser ese tercer factor ideal, ya que facilitaba el intercambio de bienes.

Con ello surge la famosa estructura llamada mercado, es decir, el lugar o estructura en donde participan diversos oferentes y demandantes. Estos mismos participan intercambiando bienes y servicios a un precio específico.

Para que el mercado tenga un funcionamiento óptimo es necesario que intervengan los factores siguientes:

- Demandante: Persona que requiere de un bien o servicio.
- Oferente: Persona que ofrece un bien o servicio.
- Tercer bien: Objeto de valor para ambas partes (Dinero).
- Precios establecidos: Acuerdo generalizado de qué valor tiene cierta cantidad de algún bien o servicio.

Con estos puntos claros y en orden existirá un equilibrio en el mercado y es importante mencionar que todas las personas deben considerar cuánto tienen que consumir y cuánto pueden consumir a través del tiempo para tener un mejor presente y un mejor futuro. Dado lo anterior existen momentos en el tiempo que son de suma importancia.

- Pasado: En donde se conoce los precios, ofertado o demandado, de los bienes y servicios.
- Presente: Se conoce al momento el precio (precio spot) de los bienes y servicios.
- Futuro: Se desconoce el precio al cual los bienes y servicios serán ofertados o demandados.

En ocasiones es complicado realizar un intercambio de bienes y servicios ya que el demandante no tiene a su alcance dinero suficiente u otro tercer factor que sea de valor para ambas partes, además el oferente requiere el dinero al instante; sin embargo, es posible hacer el intercambio, siempre y cuando ambas partes lleguen a un arreglo.

Una opción para llevar a cabo dicho intercambio es por medio de un préstamo, es decir, que el oferente le dé a préstamo el bien o servicio, para que en un futuro la contraparte pueda pagar su deuda; u otra posible opción es que el demandante pida prestado dinero a una tercera persona para poder pagar al momento.

Estas dos opciones son factibles, pero ambas tienen algunas desventajas, por ejemplo, existe el peligro de que el demandante en un futuro no pueda pagar por lo prestado, ya sea el bien o servicio o el dinero. Otra desventaja que existe para el oferente es tener que hacer un sacrificio, dejar de recibir dinero al momento para recibirlo en un futuro, y decimos que resulta una desventaja porque él podría ocupar ese dinero para comprar o invertir en algún otro proyecto, además, con el dinero al momento podría comprar bienes que en un futuro tal vez no podría, esto debido a que dichos bienes podrían subir de precio con el paso del tiempo.

Desde este punto de vista, el prestar dinero, un bien o un servicio no es justo para ambas partes, lo ideal es que el prestador reciba algo a cambio por hacer el sacrificio, es decir, recibir una retribución por haber prestado cierta cantidad de dinero por un determinado tiempo o bien recibir un cierto porcentaje de la cantidad prestada tomando en cuenta que en un futuro no se podrá comprar lo mismo que en el presente.

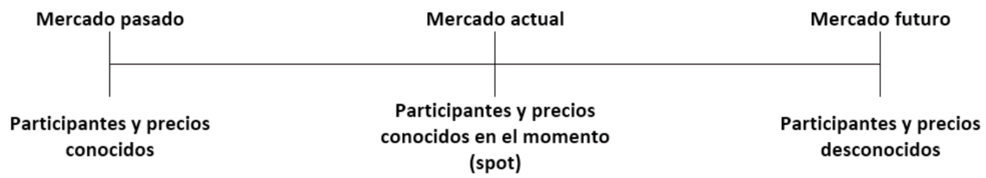
Es muy importante hacer énfasis en este último punto, ya que todos los bienes o servicios sufren modificaciones en su precio a lo largo del tiempo, debido a diversos factores económicos que hacen que los precios aumenten (a esto se le conoce como inflación). Entonces, es posible afirmar que el valor del dinero no es el mismo a través del tiempo, por ejemplo, hace 3 años un paquete pequeño de chicles costaba 50 centavos, hoy ese mismo paquete cuesta 2 pesos y probablemente en 5 años más el precio sea modificado, y cabe mencionar que, no se tiene certeza de cuanto más puede costar.

Ante esta incertidumbre sobre la pérdida de valor del dinero a lo largo del tiempo se deben tomar medidas para mitigar dicho riesgo, es por esta razón que cuando se presta dinero en un futuro se debe obtener más, es decir, tener una retribución o cierto porcentaje adicional como premio. Lo anterior sugiere que el dinero debe producir más dinero con el paso del tiempo, y es aquí donde surge el tan importante concepto de interés, el cual da inicio al desarrollo de la teoría a estudiar.

1.1.2. Introducción al valor presente y futuro

Para comprender de mejor manera los puntos expuestos anteriormente y partiendo de la idea de necesidades de consumo, se analiza la siguiente situación, en la cual son necesarios dos individuos, un bien, la capacidad de consumo de los individuos respecto al bien y como es de esperarse, el tiempo.

Ahora, retomando la inclusión de un mercado donde se ofertan y demandan bienes respecto a uno o varios precios, es posible ubicar esta estructura en una línea de tiempo:



Como puede observarse, en el mercado pasado se ofertaron y demandaron bienes a precios que ya fueron establecidos y han cambiado hasta llegar a los precios del mercado actual, los cuales son conocidos como precios spot. Esto sugiere hacer énfasis, de forma general, en dos momentos en el tiempo, el presente (tiempo 0) y el futuro (tiempo 1).

Por otra parte, tomando en cuenta el consumo de los dos individuos respecto al bien a través del tiempo, estos deben decidir cuánto consumir ahora y cuánto consumir en el futuro. Si M_0 es la cantidad a consumir en el presente (en 0) y M_1 la cantidad a consumir en el futuro (en 1) dado que en el presente se consumió M_0, gráficamente se tiene lo siguiente:

Dado lo anterior existes tres escenarios para elegir el consumo por parte de los individuos:

1. **Escenario trivial.** Consumir lo correspondiente a cada momento del tiempo.
2. **Escenario de mejor presente.** Consumir más ahora y consumir menos en el futuro (no ahorrar).
3. **Escenario de mejor futuro.** Consumir menos en el presente y más en el futuro (ahorrar).

Luego, suponiendo que el segundo individuo cede una parte M de su consumo actual M_0 al primer individuo y descartando el escenario trivial se generan los casos siguientes:

Deseo por un mejor futuro. Como se comentaba, el segundo individuo cede M al primero, lo cual genera dos efectos:

1. Efecto restricción. Se restringe la capacidad de consumo presente del segundo individuo, por lo que su consumo en el futuro debe ser compensado.
2. Efecto Riesgo. Existe el riesgo futuro de que el primer individuo no regrese la cantidad M (riesgo contraparte) al segundo individuo.

Lo anterior implica (y como se comentaba anteriormente) que el primer individuo debe otorgar, además, de devolver la cantidad M cedida en el presente, una cantidad P como premio al segundo en compensación, es decir, el premio P compensa ambos efectos mencionados. De esta forma el diagrama para el segundo individuo puede visualizarse de la forma siguiente:

Luego, comenzando con el álgebra:

$$M_1 + M + P = M_1 + M + \frac{M}{M}P = M_1 + M(1 + \frac{P}{M})$$

$\frac{P}{M}$ representa la proporción o tasa entre el premio y la cantidad a ceder establecida en el presente, o más claro aún, es el porcentaje que representa el premio P en la cantidad M.

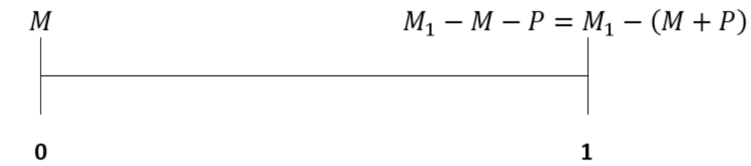
Por otra parte, si la cantidad cedida M fuera toda la cantidad inicial de consumo M_0 en el presente, se tendría que $M = M_0$ y el individuo 2 no tendría consumo alguno en el presente, por lo que todo se absorbería en el futuro (mejor futuro). Después, dado este supuesto y haciendo $\frac{P}{M} = i > 0$, entonces en el tiempo 1 futuro se devuelve al individuo 2 la cantidad M_0 más el premio P, así:

$$M_0 + P = M_0 + \frac{M}{M}P = M_0(1 + \frac{P}{M}) = M_0(1 + i) = VF \text{ ''}Valor\ Futuro\text{''}$$

VF es el valor futuro de la cantidad inicial M_0 tomando en cuenta la tasa porcentual i que representa el premio que se paga en compensación por haber recibido dicha cantidad en el presente (tiempo cero) y devolverla en el futuro (tiempo 1).

Deseo por un mejor presente. En este caso el primer individuo recibe la cantidad M por parte del segundo.

Esta situación implica que este individuo recibe la cantidad M en el presente, por lo que debe devolverla en el futuro al individuo 2 e incluir una cantidad P como premio en compensación a los efectos restricción y riesgo. De esta forma, el diagrama para el primer individuo puede visualizarse de la forma siguiente:



Nótese que el individuo 1 toma de su consumo M_1 futuro las cantidades M y P como pago para el individuo 2. Haciendo un poco de álgebra se tiene en el tiempo 1:

$$M_1 - M - P = M_1 - M - \frac{M}{M}P = M_1 - M(1 + \frac{P}{M})$$

Después, si la cantidad M devuelta y el premio P entregado fueran en conjunto toda la cantidad M_1, se tendría que $M_1 = (M + P)$ y el individuo 1 no tendría consumo alguno en el futuro (mejor presente); de ahí que:

$$M_1 - M - P = M_1 - (M + P) = M_1 - M(1 + \frac{P}{M}) = 0$$
$$\Rightarrow M_1 = M(1 + \frac{P}{M}) = M(1 + i)$$
$$\Rightarrow M = \frac{M_1}{(1 + i)} = M_1(1 + i)^{-1} = VP \text{ ''}Valor\ Presente\text{''}$$
$$(1 + i) \neq 0$$

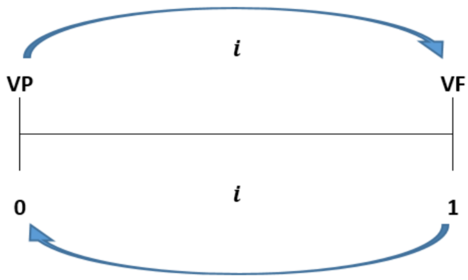
Entonces, el individuo 1 recibe en el tiempo 0 la cantidad $M = VP$ que es el valor presente de la cantidad futura M_1 tomando en cuenta la tasa porcentual i, misma que representa el premio que se paga en compensación por haber recibido dicho valor presente y devolverlo en el futuro.

Por otra parte, si el medio de intercambio y devolución es el dinero, i es llamada tasa de interés, entonces, si el hoy se pide prestada o invierte cierta cantidad M_0 y se establece que por dicha cantidad debe pagarse un interés (premio) de i por ciento sobre esa cantidad, al final debe pagarse o recibir de la inversión el monto $VF = M_0(1 + i)$ y por el contrario, si se quisiera recibir la cantidad M_1 después de haber efectuado un préstamo o inversión considerando un premio de i por ciento, al inicio debió prestarse o invertir el monto de $VP = M_1(1 + i)^{-1}$.

Ejemplo:

- Si se invierten \$100 pesos a una tasa de interés de 5 %, se recibirán $100(1.05) = 105$ pesos.
- Si se pide un préstamo de \$500 pesos a una tasa de 10 % se debe pagar $500(1.10) = 550$ pesos.
- Si se desea acumular \$105 pesos con un interés de 5 %, se debe invertir $105(1.05)^{-1} = 100$ pesos.
- Si se desea recibir \$550 pesos cobrando un interés de 10 %, se debe prestar $550(1.10)^{-1} = 500$ pesos.

Dados los ejemplos anteriores, es posible visualizar la relación del valor presente y el valor futuro, siempre y cuando exista una tasa de interés como premio, es decir:



$$VP = VF(1+i)^{-1}$$

$$VF = VP(1+i)$$

$$VP < VF \quad ; \quad i > 0$$

En particular, si se desea recibir o acumular \$1 peso, entonces $VF = 1$ y $VP = (1+i)^{-1} < 1$.

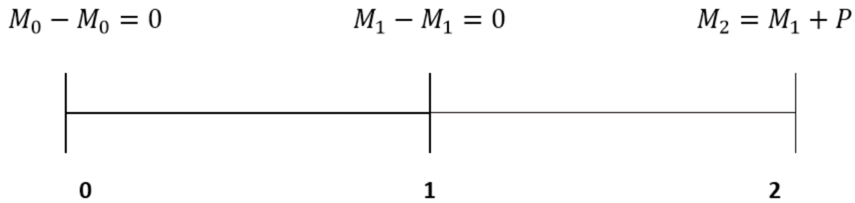
Ahora, ¿qué sucede si se establecen condiciones para pago del premio?, es decir, ¿qué ocurre si se especifica el tiempo de inversión o préstamo (plazo) y la estructura del interés que se genera?

1.1.3. Capitalización simple

Si un individuo presta la cantidad M_0 en el presente para recibir $M_0 + P$ se tiene:

$$M_1 = M_0 + P = M_0 + \frac{M_0}{M_0}P = M_0(1 + \frac{P}{M_0})$$
$$\Rightarrow M_1 = M_0(1 + i) \;\; con \;\; i = \frac{P}{M_0}$$

Luego, suponiendo que en el tiempo 1 se presta la cantidad recibida M_1 para ser devuelta después, digamos en el tiempo 2, a cambio de recibir dicha cantidad más un premio P de la misma magnitud que el primero, se tendrá:



Lo cual puede expresarse como sigue:

$$M_2 = M_1 + P = M_0 + P + P = M_0 + 2P = M_0 + 2\frac{M_0}{M_0}P = M_0(1 + 2\frac{P}{M_0})$$
$$\Rightarrow M_2 = M_0(1 + 2i)$$

Ahora, si se prestara la cantidad M_2 en el tiempo 2 para ser recibida más un premio P al tiempo 3 posterior se obtiene:

$$M_3 = M_2 + P = M_1 + P + P = M_0 + P + P + P = M_0 + 3P = M_0 + 3\frac{M_0}{M_0}P = M_0(1 + 3\frac{P}{M_0})$$
$$\Rightarrow M_3 = M_0(1 + 3i)$$

Siguiendo esta secuencia y nombrando "periodo" a cada tiempo, se tendrá al tiempo n:

$$M_n = M_0 + n\frac{M_0}{M_0} = M_0(1 + n\frac{P}{M_0})$$
$$\Rightarrow M_n = M_0(1 + ni)$$

La cual es la expresión del famoso modelo de interés simple, bajo el cual la cantidad M_0, considerada al inicio, es la misma que se presta o invierte en cada momento del tiempo agregando en cada periodo el premio P correspondiente a la respectiva compensación.

De ahí que M_0 puede ser llamado capital inicial, valor presente de la inversión, principal o valor actual ($M_0 = CP$), y M_n representa el monto acumulado del capital o valor futuro después de n periodos de tiempo. Dado lo anterior, se dice que el monto capitaliza de forma simple y los periodos son conocidos como periodos de capitalización.

Por otra parte, siguiendo la relación entre el valor presente y el valor futuro definida en la sección anterior, es posible establecer ciertas expresiones:

- Valor presente de la inversión o préstamo

$$Si\ M_n = M_0(1+ni) \ \Rightarrow\ M_0 = \frac{M_n}{(1+ni)} = M_n(1+ni)^{-1}$$

- Interés monetario generado en la inversión o préstamo

$$Si\ M_n = M_0(1+ni) = M_0 + M_0ni \ \Rightarrow\ M_n - M_0 = M_0ni = I$$

- Interés porcentual generado por la inversión o préstamo (tasa de interés simple)

$$i = \frac{I}{M_0^n} = \frac{M_n - M_0}{M_0^n} = \frac{M_n}{M_0^n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(\frac{M_n}{M_0} - 1)$$

- Número de periodos de tiempo en la inversión o préstamo

$$n = \frac{I}{M_0^n} = \frac{M_n - M_0}{M_0^i} = \frac{M_n}{M_0^i} - \frac{1}{i} = \frac{1}{i}(\frac{M_n}{M_0} - 1)$$

Ejemplo

El señor Manuel Castelan necesita dinero para poder invertir en su negocio familiar por lo cual pide un préstamo de $1,000.00 a su vecina Guadalupe Vite la cual accede a prestarle el dinero con la condición de que el señor Manuel Castelan debe pagar la deuda bajo un interés simple del 7 % cada año. ¿Cuál es el monto final que deberá pagar el señor Manuel Castelan al final de 4 años?.

Solución

n	M_n	interés
0	$1,000	0
1	$1,070	70
2	$1,140	70
3	$1,210	70
4	$1,280	70

Datos
$M_0 = 1,000$
$t = 4$
$i = 7\,\% = 0.07$

Procedimiento
$M_4 = 1,000(1 + (4)(0.07)) = 1,280$

Ejemplo

Sarahi Leslie recibió $3,500.00 por una inversión que hizo durante 5 años bajo un interés simple del 8 % anual. ¿Cuánto dinero invirtió al principio del plazo?

Solución

Datos
$M_5 = 3,500$
$t = 5$
$i = 8\,\% = 0.08$

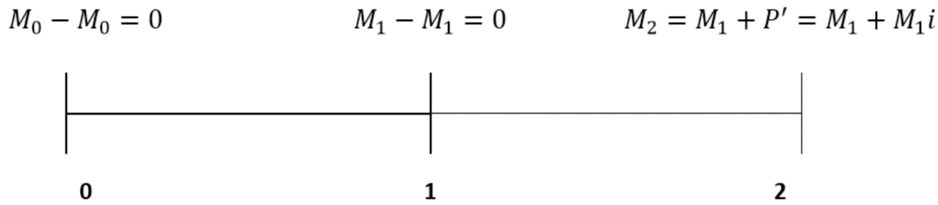
Procedimiento
$M_0 = 3500(1 + (5)(0.08))^{-1} = 2500$

1.1.4. Capitalización compuesta

Si un individuo presta la cantidad M_0 en el presente para recibir $M_0 + P$ se tiene:

$$M_1 = M_0 + P = M_0 + \frac{M_0}{M_0} P = M_0(1 + \frac{P}{M_0})$$
$$\Rightarrow M_1 = M_0(1+i) \;\; con \;\; i = \frac{P}{M_0}$$

Es importante resaltar que en el modelo de interés simple el pago de premios (intereses) se efectúa de forma constante en cada periodo de tiempo, pero por el contrario, si en el periodo 1 se presta la cantidad recibida M_1 para ser devuelta en el periodo 2 a cambio de recibir dicha cantidad más un premio P' equivalente a la tasa de interés i aplicada a este último monto, se tendrá:



Lo cual puede expresarse como sigue:

$$M_2 = M_1 + P' = M_1 + M_1 i = M_1(1+i) = M_0(1+i)(1+i) = M_0(1+i)^2$$
$$\Rightarrow M_2 = M_0(1+i)^2$$

Ahora, si se prestara la cantidad M_2 en el tiempo 2 para ser devuelta más un premio P' equivalente a la tasa de interés i inicial aplicada a este último monto se obtiene:

$$M_3 = M_2 + P' = M_2 + M_2 i = M_2(1+i) = M_0(1+i)^2(1+i) = M_0(1+i)^3$$
$$\Rightarrow M_3 = M_0(1+i)^3$$

Siguiendo esta secuencia, se tendrá al tiempo n:

$$\Rightarrow M_n = M_0(1+i)^n$$

Ahora los intereses se efectúan periodo a periodo sobre la última cantidad prestada, no sobre la cantidad inicial como en el modelo de interés simple, es decir, cada periodo de capitalización los intereses se van acumulando. Este modelo es conocido como interés compuesto o de capitalización compuesta.

Por otra parte, siguiendo la relación entre el valor presente y el valor futuro es posible establecer ciertas expresiones:

- Valor presente de la inversión o préstamo

$$Si\ M_n = M_0(1+i)^n \Rightarrow M_0 = \frac{M_n}{(1+i)^n} = M_n(1+i)^{-n}$$

- Interés monetario generado en la inversión o préstamo

$$M_n - M_0 = M_0(1+i)^n - M_0 = M_0[(1+i)^n - 1]$$

- Interés porcentual generado por la inversión o préstamo (tasa de interés compuesta)

$$Si\ M_n = M_0(1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{M_n}{M_0}} - 1 = (\frac{M_n}{M_0})^{1/n} - 1$$

- Número de periodos de tiempo en la inversión o préstamo

$$Si\ M_n = M_0(1+i)^n \Rightarrow nln(1+i) = ln(\frac{M_n}{M_0}) \Rightarrow n = \frac{ln(\frac{M_m}{M_0})}{ln(1+i)}$$

Ejemplo

El señor Moises Juárez se dedica a prestar dinero a familiares, vecinos y amigos, la única condición que el señor tiene es que toda cantidad prestada debe ser pagada con un interés compuesto del 5 % cada año. Por otra parte, Elizabeth Vite, una vecina suya, necesita $2,000 los cuales pagará dentro de tres años, ¿Cuánto deberá pagar Elizabeth Vite al final del plazo?

Solución

n	M_n	interés
0	$2,000	0
1	$2,100	100
2	$2,205	105
3	$2,315.25	110.25

Datos
$M_0 = 2,000$
$t = 3$
$i = 5\,\% = 0.05$

Procedimiento
$M_3 = 2,000(1 + (0.07))^3 = 2,315.25$

Ejemplo

Ailyn Juárez pidió un préstamo de $5,000 al Banco bajo un interés anual compuesto del 3 % por el cual terminó pagando $5,796.3707 ¿Cuánto tiempo después de pedir el préstamo Ailyn Juárez liquidó su deuda?.

Datos $M_0 = 5000$
$M_n = 5796.3707$

$i = 3\,\% = 0.03$

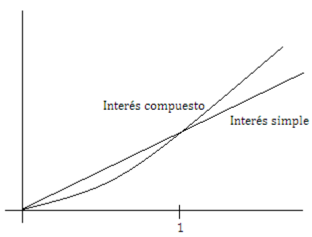
Procedimiento

$$n = \frac{ln(\frac{5796.3707}{5000})}{ln(1.03)} = 5$$

Una vez comprendido cómo funciona la capitalización simple y la compuesta, es importante notar que, cuando $n = 1$, las expresiones de relación entre valor presente y futuro para ambos tipos de capitalización coinciden. Esto indica que es posible hacer una comparación de ambos tipos de interés, pero ¿qué valores puede tomar n? Es claro que n no puede ser negativa o cero, ya que representa una medida de tiempo para invertir, pero es posible que alguna inversión o préstamo se pacte a un plazo menor o mayor que 1 periodo de capitalización. Si se toma M_0=1 peso, entonces:

- Si n=1
$$[1 + (1)i] = (1 + i)^1 = (1 + i)$$
- Si $0 < n < 1$
$$\Rightarrow \; i = i$$
$$\Rightarrow \; in < i \; \Rightarrow \; 1 + ni < 1 + i$$
$$\Rightarrow (1 + i)^n < (1 + ni)$$
En este caso el interés resulta ser mayor que el interés compuesto.
- Si $n > 1$
$$\Rightarrow \; i = i$$
$$\Rightarrow \; in > i \; \Rightarrow \; 1 + in > 1 + i$$
$$\Rightarrow \; (1 + in) < (1 + i)^n$$
Es claro observar que n veces el producto de $(1 + i)$ es mayor que la suma de $1 + ni$

  Para ilustrar de mejor forma las siguientes desigualdades se mostrará gráficamente el comportamiento del interés simple y compuesto.

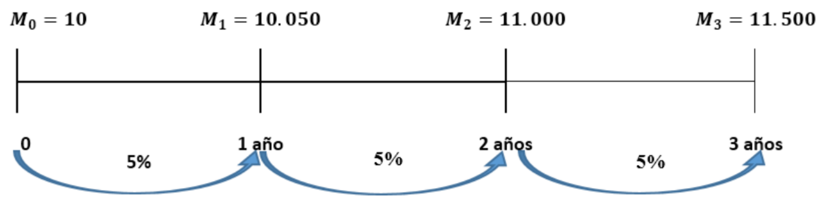


1.1.5. Tasa efectiva y tasas nominales

Además de la introducción de los modelos de capitalización simple y compuesta, se incluyó el concepto de periodo de capitalización como el lapso en el cual los premios son pagados dada una inversión o préstamo. Entonces, se dice que la tasa de interés que se paga como premio aplica en cada periodo de tiempo.

En la práctica financiera el periodo de capitalización más común es un año, es decir, los mercados toman como referencia periodos anuales para expresar de forma general su información. Por ejemplo, considerando periodos de capitalización anuales, si se desea invertir \$10 pesos bajo una tasa de interés de 5 % cada año durante 3 años, se dice que el interés que afecta la operación es de 5 % anual, entonces:

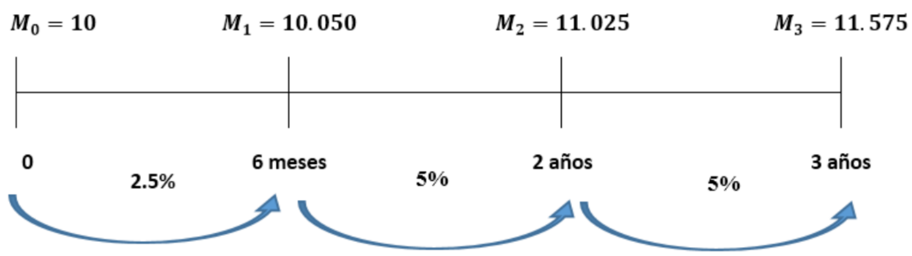
- Bajo interés simple:



$$M_1 = 10 + (10 * 0.05) = 10[1 + (1)0.05] = 10.05$$
$$M_1 = 10.05 + (10 * 0.05) = 10[1 + (2)0.05] = 11.00$$
$$M_1 = 11.00 + (10 * 0.05) = 10[1 + (3)0.05] = 11.50$$

Nótese que los intereses se van acumulando respecto al nuevo monto en cada año.

- Bajo interés compuesto:



$$M_1 = 10(1.05) = 10.050$$
$$M_2 = 10.050(1.05) = 10(1.05)^2 = 11.025$$
$$M_3 = 11.025(1.05) = 10(1.05)^3 = 11.575$$

Nótese que los intereses se van acumulando respecto al nuevo monto en cada año.

Resulta sencillo trabajar cuando los periodos de capitalización son anuales, pero ¿qué sucede cuando no lo son? ¿Los periodos pueden ser menores o mayores a un año?.

Tomando como unidad de referencia un año, es posible definir el concepto de *frecuencia de capitalización* como el número de veces que capitalizan los intereses en dicho año. Por ejemplo, supóngase que en un año completo, una inversión genera intereses cada trimestre, por lo que la frecuencia de capitalización es 4 (en un año hay 4 trimestres) y un periodo de capitalización dura tres meses. De la misma forma, si una inversión gana intereses cada semestre, la frecuencia de capitalización asociada es 2 (en un año hay 2 semestres) y un periodo de capitalización abarca 6 meses. Se concluye que si el año es dividido en n partes, esa es la frecuencia de capitalización.

Por otra parte, cuando los periodos de capitalización abarcan más de un año, el razonamiento es análogo, por ejemplo, si ciertos intereses capitalizan cada dos años, entonces un año resulta ser la mitad de ese periodo, por lo que la frecuencia de capitalización será 1/2. De ahí que, si el periodo de capitalización es mayor a un año, la frecuencia de capitalización representará la fracción que represente un año en dicho periodo. En la tabla siguiente se presentan las frecuencias de capitalización más usuales:

Periodo de capitalización	Frecuencia de capitalización
Semana	52
Mes	12
Bimestre	6
Trimestre	4
Cuatrimestre	3
Año	1
2 año	1/2
3 año	1/3
4 año	1/4
5 año	1/5
10 año	1/10

Nótese que conforme más tiempo abarca un periodo, la frecuencia disminuye.

Regresando al ejemplo de la inversión de \$10 pesos, el premio de 5 % capitaliza cada año y su frecuencia de capitalización es 1, por lo que dicho interés hace mención a una tasa de interés anual pero, como se comentaba, las inversiones y préstamos no siempre se pactan a ese plazo, por lo que es importante definir tasas de interés para las diferentes frecuencias de capitalización.

La idea anterior da pie a las famosas tasas de interés nominales, las cuales son aquellas tasas bajo interés compuesto que capitalizan de acuerdo a la frecuencia de capitalización de la inversión y, como es manejado en el mercado, son expresadas en términos anuales. Dichas tasas nominales anuales son definidas como $i^{(m)}$, donde i es la tasa expresada en términos anuales y m es la frecuencia de capitalización asociada. Cabe mencionar que no debe confundirse al superíndice m como un exponente. Por otra parte, el término nominal es también llamado en el mercado como pagadero, capitalizable o convertible.

Luego, como estas tasas capitalizan de acuerdo a la frecuencia pero están expresadas en términos anuales, basta con dividirlas por su respectiva frecuencia y aplicarlas bajo el modelo de interés compuesto. Esto es para una inversión con m periodos de capitalización dentro de un año:

$$M_m = M_0(1+i')^m = M_0(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

M_m representa el valor futuro del capital M_0 después de m periodos e $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$ es la tasa de interés que afecta sobre el capital en cada periodo. Nótese que está divida entre m porque de esa forma capitalizan los intereses y se tienen m periodos de inversión dentro del año. Esto sugiere que para acumular cantidades a valor futuro y descontar montos a valor presente, la tasa de interés debe estar siempre en la misma unidad de medida que los periodos de capitalización.

Adicionalmente, si la frecuencia de capitalización es m veces en un año pero el plazo de la inversión es de n años, entonces en total se tendrán nm periodos de capitalización y la expresión adecuada es:

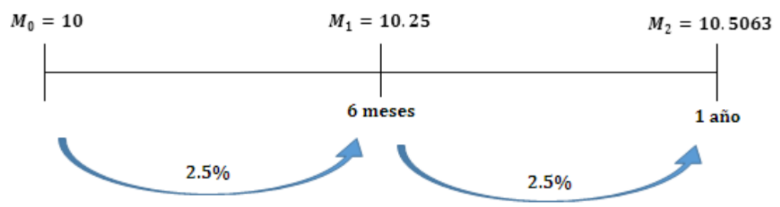
$$M_{nm} = M_0(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{nm}$$

Donde M_{nm} es el monto acumulado de M_0 al final de nm periodos, donde la tasa anual nominal $i^{(m)}$ capitaliza m veces en un año.

Por ejemplo, si se desea invertir \$10 durante un año bajo una tasa de interés del 5 % anual capitalizable cada semestre (nominal cada 6 meses, pagadera semestralmente o convertible al semestre), el año se parte en 2 dada la frecuencia de capitalización y se tiene:

$$m = 2 \;\Rightarrow\; i^{(2)} = 5\,\%\; anual \;\Rightarrow\; i' = \frac{i^{(2)}}{2} = \frac{5\,\%}{2} = 2.5\,\%\; semestral$$
$$\Rightarrow\; M_2 = 10(1+i')^2 = 10(1+\frac{i^{(2)}}{2})^2 = 10(1.025)^2 = 10.5063$$

Lo cual puede observarse en el diagrama de flujo de caja (cash flow):



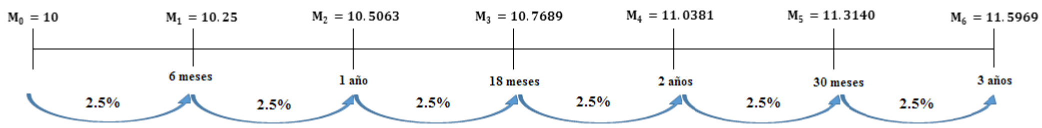
$$M_1 = 10(1+\frac{0.05}{2}) = 10.25$$
$$M_2 = 10.25(1+\frac{0.05}{2}) = 10(1+\frac{0.05}{2})^2 = 10.5063$$

Por otra parte, si la inversión se diera durante 3 años con el mismo capital inicial y la misma tasa anual nominal capitalizable semestralmente se tendría:

$$n = 3\ ,\ m = 2 \ \ \Rightarrow \ mn = 3(2) = 6$$

$$M_6 = 10(1 + i')^6 = 10(1 + \frac{i^{(6)}}{2})^6 = 10(1.025)^6 = 11..5969$$

y el flujo de caja (cash flow) asociado es:



Donde se observa claramente que se tienen 6 semestres (periodos) de capitalización.

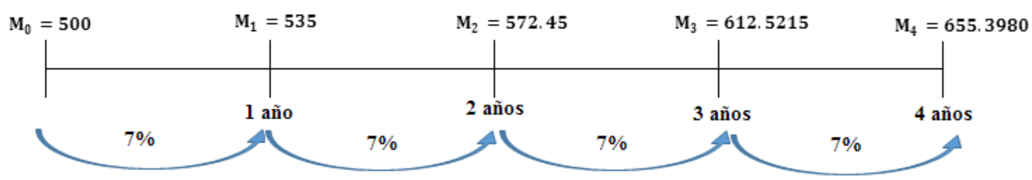
Ahora, es importante comprender el concepto de frecuencia de capitalización y asociarlo a la unidad de referencia de un año, pues ¿qué sucede cuando la frecuencia de capitalización es m=1? Como se comentaba, el premio es una tasa de interés anual que genera intereses cada año y no necesita ser dividida para poder capitalizar, por lo que recibe el nombre de tasa de interés anual efectiva. En el primer ejemplo de esta sección la tasa anual efectiva es de 5 % ya que capitaliza cada año y no es dividida, pues la frecuencia de capitalización es 1, es decir, coincide con el periodo de referencia más común en el mercado.

Ejemplo

¿Qué monto se acumulará después de 4 años si se invierten $500 pesos bajo un interés anual efectivo de 7 %?

$$n = 4 \ \ y \ \ i = 7\,\%$$
$$\Rightarrow \ M_4 = 500(1 + 0.07)^4 = 655.3980$$

El flujo de caja asociado es:



Ejemplo

¿Qué monto se acumulará después de 5 años si se invierten $500 pesos bajo un interés anual nominal capitalizable trimestralmente de 12 %?

Solución

$$n = 5\ ,\ m = 4 \ \Rightarrow nm = 5(4) = 20$$

$$i^{(4)} = 5\,\%\ anual \Rightarrow i' = \frac{i^{(4)}}{4} = \frac{12\,\%}{4} = 3\,\%\ trimestral$$

$$M_{20} = 500(1+i')^{20} = 10(1+\frac{i^{(4)}}{4})^{20} = 500(1.03)^{20} = 903.06$$

Al final de 5 años (20 trimestres) se acumulan \$903.06 pesos.

1.1.6. Equivalencia de tasas de interés

Retomando la idea de que es necesario mantener la tasa de interés y los periodos de capitalización en la misma unidad de medida para llevar cantidades a valor futuro y traerlas a valor presente, se analiza el ejemplo siguiente:

Ejemplo

¿Qué monto se acumulará dentro de 3 meses si se invierten $500 pesos bajo un interés anual efectivo de 5 %?

Nótese que el periodo de capitalización es un trimestre, la frecuencia de capitalización es m=4 y la tasa de interés es anual efectiva pero, como se sabe, esta última no puede ser dividida entre 4 para poder capitalizar los $500 pesos en un periodo de tres meses; de ahí que la idea es hacer que el periodo de capitalización se refleje en términos anuales, pues la tasa efectiva está en esa unidad de tiempo, entonces es claro que un trimestre en términos anuales se expresa como $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ y debe tenerse:

$$M = 500(1.05)^{3/12} = 500(1.05)^{1/4} = 506.1361$$

Como se observa, la tasa de interés y el plazo están en la misma unidad de tiempo, ya que el periodo de capitalización fue adecuado a la tasa, pero ¿es posible adecuar la tasa al periodo de capitalización? Esta pregunta da pie al concepto de equivalencia de tasas.

Una tasa efectiva como su nombre lo indica, representa el interés efectivamente (verdaderamente) cargado o cobrado en un año, por otro lado, las tasas nominales generan intereses varias veces al año, por lo que es natural cuestionarse cuál es el interés efectivamente cobrado anualmente cuando se tiene un inversión o préstamo que capitaliza bajo un tasa con cierta frecuencia de capitalización.

Para conocer dicho interés generado es necesario cambiar esta tasa nominal a una efectiva o, mejor dicho, obtener la tasa efectiva equivalente a la tasa nominal.

Dos tasas son equivalentes si generan el mismo interés en el periodo de referencia. Bajo esta idea, para una inversión es de $1 peso, una tasa efectiva genera en un año el interés $(1+i)$ y una tasa nominal en ese mismo año capitaliza $(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$, por lo que si i e $\frac{i^{(m)}}{m}$ son equivalentes, se tiene:

$$(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

en donde

$$i = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m - 1 \;\; e \;\; i^{(m)} = [(1+i)^{1/m} - 1]m$$

Por lo que se obtiene una tasa en términos de la otra. Así, para el ejemplo anterior, la tasa anual efectiva es 5 % y la tasa anual nominal capitalizable cada trimestre que es equivalente es:

$$i^{(4)} = [(1.05)^{1/4} - 1]4 = 0.04909 = 4.909\,\%$$

Entonces, es posible verificar que la inversión de \$500 pesos arroja el mismo monto acumulado de \$506.1316 pesos bajo ambas tasas, siempre y cuando las variables se encuentren en la misma unidad de tiempo, es decir:

$$M = 500(1.05)^{3/12} = 500(1.05)^{1/4} = 506.1361$$
$$M = 500(1 + \frac{0.04909}{4})^1 = 500(1.0123) = 506.1361$$

Nótese que el exponente en la segunda ecuación es 1, ya que la inversión capitaliza solamente un trimestre y la tasa nominal está en términos de ese periodo de capitalización.

Ejemplo

a) ¿Qué tasa anual capitalizada mensualmente es equivalente al 25 % anual capitalizada trimestralmente?

b) ¿Qué tasa efectiva anual es equivalente al 25 % anual capitalizada trimestralmente?

Solución

a)

$$(1 + \frac{i^{12}}{12})^{12} = (1 + \frac{0.25}{4})^4$$
$$i = i^{12} = 12[(1 + \frac{0.25}{12})^{\frac{4}{12}} - 1] = 0.245 = 24.50\,\%$$

b)

$$(1 + i) = (1 + \frac{0.25}{4})^4$$
$$(1 + \frac{0.25}{4})^4 - 1 = 0.2744 = 27.44\,\%$$

1.1.7. Fuerza de interés

Como se estudió en secciones anteriores, si el periodo de capitalización aumenta, la frecuencia de capitalización, dado un año como unidad de referencia, disminuye, lo cual sugiere preguntarse ¿qué sucede en caso contrario? y la respuesta es clara: evidentemente si la frecuencia se incrementa, el periodo disminuye, pero ¿hasta qué punto?

En la tabla de frecuencias más usuales, la frecuencia de capitalización más alta es m=52 asociada a un periodo de capitalización de una semana; entonces si reducimos dicho periodo a un día, por ejemplo, la frecuencia es m=360 o m=365 dependiendo de cuántos días se considere un año.

La idea es que, efectivamente, se nota el incremento en m cuando el periodo disminuye, pero ¿el periodo más corto de capitalización es de un día? La respuesta es no; de hecho es posible extender la capitalización a cada hora, a cada segundo e inclusive a cada milésima de segundo, de ahí que resulta importante medir la capitalización en cada momento, es decir, una capitalización instantánea.

La idea anterior conduce a pensar en un tipo de interés nominal que capitaliza una infinidad de veces, es decir, si se hace $m \to \infty$ se tiene:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)}$$

Bajo la equivalencia entre tasa efectiva y tasa nominal, estudiada en la sección anterior, se tiene:

$$(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m \;\Rightarrow\; i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m}-1] \;\Rightarrow\; i^{(m)} = \frac{(1+i)^{1/m}-1}{1/m}$$

Entonces el límite se re-expresa de la forma siguiente en términos de la tasa anual efectiva equivalente:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m}-1}{1/m}$$

Luego, haciendo $(1+i)^0 = 1$:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m}-1}{1/m} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m}-(1+i)^0}{1/m}$$

Ahora, analizando la siguiente igualdad:

$$\lim_{m\to\infty} 1/m = 0 = \lim_{h\to 0} h$$

Es posible notar que es correcta, ya que ambos límites convergen a cero, ya sea cuando $m \to \infty$ o $h \to 0$, por lo que es posible re-escalar el límite inicial:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{1/m}-(1+i)^0}{1/m} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+i)^h-(1+i)^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+i)^{0+h}-(1+i)^0}{h}$$

Entonces, el límite está valuado en el punto x=0 y:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+i)^{0+h} - (1+i)^0}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{(1+i)^{x+h} - (1+i)^x}{h}\right]_{x=0}$$

Por otra parte, la definición de derivada es:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y haciendo $f(x) = (1+i)^x$ se tiene:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \frac{df(x)}{dx}|_{x=0} = \frac{d}{dx}(1+i)^x|_{x=0} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{(1+i)^{x+h} - (1+i)^x}{h}\right]_{x=0}$$

Derivando:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \frac{d}{dx}(1+i)^x|_{x=0} = (1+i)^x ln(1+i)|_{x=0} = ln(1+i)$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = ln(1+i)$$

Entonces cuando la frecuencia de capitalización se incrementa a modo que la capitalización sea instantánea, la tasa anual nominal converge al $ln(1+i)$, la cual es llamada fuerza de interés y se denota como δ.

En conclusión la fuerza de interés es $\delta = ln(1+i)$, la cual es la tasa anual nominal que capitaliza instantáneamente, es decir, en todo momento, de ahí que este modelo s es conocido también como de interés continuo.

Como se observa, δ está expresada en términos de la tasa anual efectiva equivalente, por lo que es posible extender la igualdad de la equivalencia de tasas. De esta manera:

$$\delta = ln(1+i) \Rightarrow i = e^{\delta} - 1$$

Y en términos de una tasa anual nominal capitalizable con cierta frecuencia de capitalización m se tiene:

$$i = e^{\delta} - 1 = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1 \Rightarrow e^{\delta} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$$
$$\Rightarrow \delta = ln[(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m] = mln(1 + \frac{i^{(m)}}{m})$$

De igual forma:

$$e^{\delta} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m \Rightarrow i^{(m)} = (e^{\delta/m} - 1)m$$

Y en conclusión, la equivalencia de tasas arroja las expresiones siguientes:

Equivalencia	Expresión
Efectivo a nominal	$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$
Efectivo a continuo	$i = e^{\delta} - 1$
Nominal a efectivo	$i^{(m)} = \left[(1+i)^{1/m} - 1\right] m$
Nominal a continuo	$i^{(m)} = \left(e^{\delta/m} - 1\right) m$
Continuo a efectivo	$\delta = \ln(1+i)$
Continuo a nominal	$\delta = m \ln\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$

Aunado a lo anterior, se visualiza que, para acumular montos a valor futuro en un año, bajo interés efectivo se usa el factor de acumulación $(1+i)$ y bajo interés nominal se usa $(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$ pero para interés continuo ¿cuál es el factor de acumulación?

La idea de que δ es una tasa de interés nominal que capitaliza en todo momento conduce al siguiente límite para n años:

$$\lim_{m\to\infty} (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{nm}$$

Luego, retomando el siguiente límite (demostrado en cursos de Cálculo diferencial e integral):

$$\lim_{m\to\infty} (1+\frac{x}{m})^{nm} = e^{nx}$$

Se deduce:

$$\lim_{m\to\infty} (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{nm} = e^{n\delta}$$

Ya que, como se revisó anteriormente, $i^{(m)}$ converge a δ.

Con el resultado anterior, se concluye que para una inversión a n años bajo un interés que capitaliza en todo momento:

$$VF = VPe^{n\delta} \;\; y \;\; VP = VFe^{-n\delta}$$

Con lo que es posible extender las expresiones para acumulación y descuento de capital:

Tipo de interés	Valor presente/ Valor futuro	Expresión
Efectivo	VP	$(1+i)^{-n}$
	VF	$(1+i)^{n}$
Nominal	VP	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-nm}$
	VF	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{nm}$
Continuo	VP	$e^{-n\delta}$
	VF	$e^{n\delta}$

Con lo cual se extiende la equivalencia de tasas a una triple igualdad, tomando en cuenta que las tasas que son equivalentes generan el mismo interés en un año (periodo de referencia):

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = e^{\delta}$$

De donde se obtiene la tabla de equivalencias mostrada anteriormente.

Ejemplo

Calcula el monto que producirá un capital de \$200 bajo capitalización instantánea durante 8 años con una tasa nominal del 10 %.

Solución

Datos
$M_0 = 200,\;\; t = 8 \;\; y \;\; \delta = 10\,\% = 0.10$

Procedimiento
$200e^{(8)(0.10)} = 445.1081857$

Ejemplo

Calcula cual es el monto que se invirtió bajo capitalización instantánea durante 5 años con una tasa nominal del 7 % de un capital de \$1500.

Solución

Datos
$M_5 = 1500,\;\; t = 5 \;\; y \;\; \delta = 7\,\% = 0.70$

Procedimiento
$1500e^{(-5)(0.07)} = 1057.032135$

Ejemplo

Si el señor Hermilo Vite desea invertir $2000 en una cuenta de banco durante 8 años la cual a final del plazo le pueda dar un monto final de $3000, la pregunta es ¿ Que fuerza de interés le debería dar el banco para que logre juntar el monto final deseado?

Solución

Datos
$M_0 = 2000, \ \ M_8 = 3000 \ \ y \ \ t = 8$

Procedimiento

$2000e^{(\delta)(8)} = 3000$
$e^{(\delta)(8)} = 1.5$
$\delta = \frac{ln(1.5)}{8} = 0.0506 \therefore \delta = 5.06\,\%$

Ejemplo

a. ¿ Cuál es la tasa continua equivalente a un tasa efectiva del 15 %?

b. ¿ Cuál es la tasa nominal capitalizable cada dos meses equivalente a un tasa continua del 20 %?

Procedimiento

a.

$$(1 + i) = e^{\delta}$$

$$ln(1 + 0.15) = 0.1397 = 13.97\,\%$$

b.

$$(1 + \frac{i^{(m)}}{m}) = e^{\delta}$$

$$2(e^{0.20/2} - 1) = 0.21 = 21\,\%$$

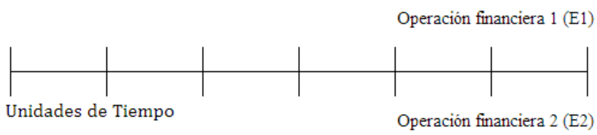
1.2. Ecuaciones de valor

Al enfrentar un problema relacionado a los temas mencionados anteriormente nos encontramos con cuatro puntos importantes a considerar:

1. Monto a invertir
2. Plazo (tiempo)
3. Interés
4. Monto acumulado

Dependiendo de la posición que se tenga frente al problema, se tendrá una perspectiva diferente, es decir, cuánto se debe prestar o cuánto se debe recibir.

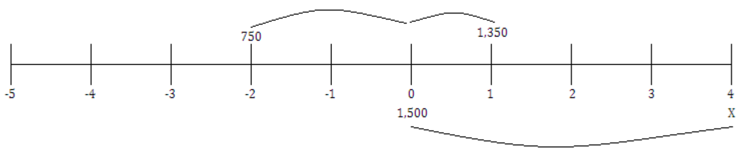
Generalmente, al enfrentar un problema de tipo financiero, es necesario comparar cantidades en momentos diferentes, por lo cual es necesario posicionarse en un punto en el tiempo el cual es conocido como fecha de comparación o punto focal; esto con el propósito de descontar o acumular los flujos de efectivo a modo de hacerlos comparables. Este proceso generará una igualdad en el tiempo, la cual es conocida como ecuación de valor.



En la resolución de problemáticas que generen ecuaciones de valor, es posible notar que generalmente la primera ecuación E1 se refiere a cierta deuda u operación financiera bajo alguna situación, mientras que la segunda ecuación E2 busca replicar dicha deuda u operación proponiendo un plan de pagos y una estructura de interés diferente.

1.2.1. Ecuaciones de valor con capitalización simple

A modo de ejemplificar las ecuaciones de valor usando capitalización simple, se analizan los siguientes problemas. Hoy se cumplen dos meses de que una persona consiguió un préstamo por \$750 con un interés del 24 % anual simple y vencimiento a 5 meses. Tres meses antes de aquella fecha había firmado un pagaré con valor de \$1,350 a un plazo de 6 meses y un interés del 18.6 % anual simple. Hoy hace un abono de \$1,500 y acuerda con su acreedor liquidar su adeudo con otro pago dentro de 4 meses y con intereses del 21.84 % anual simple. ¿De cuánto sería dicho pago?.



Para resolver el ejemplo es necesario escoger un punto focal; se puede elegir cualquier punto en el tiempo pero lo más conveniente es escoger aquella posición en donde se elaboren la menor cantidad de operaciones posibles, en este caso el periodo -2, 0 y 1 son una opción, por lo que se toma el periodo 0 por comodidad y se definen las ecuaciones de la siguiente forma:

$$E_1 = 750(1 + 0.24(\frac{2}{12})) + 1350(1 + 0.186(\frac{1}{12}))^{-1}$$

$$E_2 = 1500 + X(1 + 0.2184(\frac{4}{12}))^{-1}$$

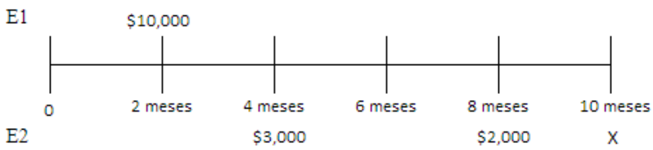
Por lo tanto resolviendo la ecuación $E_1 = E_2$ se obtiene:

$$1500 + X(1 + 0.2184(\frac{4}{12}))^{-1} = 750(1 + 0.24(\frac{2}{12})) + 1350(1 + 0.186(\frac{1}{12}))^{-1}$$

$$X = (2109.395 - 1500)(1.0728) = 653.758$$

Un ejemplo más sobre una ecuación de valor con capitalización simple es el siguiente: Una persona adquiere una deuda de \$10,000.00 para ser pagada dentro de un año. Abona a su acreedor \$3,000.00 al cabo de 4 meses y \$2,000.00 al cabo de 10 meses. Determine cuánto tendrá que liquidar a la fecha de vencimiento si la tasa de interés es del 6 % anual simple.

En este caso se establece como fecha focal la fecha de vencimiento del último pago, el siguiente diagrama ejemplifica la estructura de la ecuación a resolver.



El planteamiento del problema de forma algebraica es el siguiente:

$$E_1 = 10,000(1 + 0.06)$$
$$E_2 = 3,000(1 + (\frac{8}{12})(0.06)) + 2,000(1 + (\frac{2}{12})(0.06)) + X$$

Por lo tanto resolviendo la ecuación $E_1 = E_2$ se obtiene:

$$10,000(1 + 0.06) = 3,000(1 + (\frac{8}{12})(0.06)) + 2,000(1 + (\frac{2}{12})(0.06)) + X$$

Colocando la fecha focal en el último periodo es fácil trabajar con el valor futuro de los pagos y así encontrar el valor de X.

Efectuando las operaciones correspondientes se llega a:

$$10,060 = 3,120 + x$$
$$X = 5,460$$

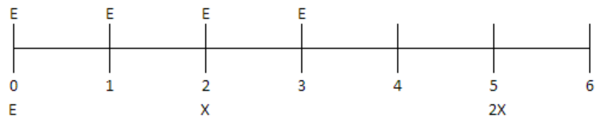
Por lo tanto se concluye que al llegar la fecha de vencimiento la persona deberá pagar la cantidad de \$5,460.

1.2.2. Ecuaciones de valor con capitalización compuesta

La esencia de las ecuaciones de valor es prácticamente la misma, aunque es posible cambiar algunos supuestos, como el tipo de capitalización en las operaciones. La ecuación de valor con capitalización compuesta se ejemplifica en las siguientes situaciones:

Al comprar un auto de lujo cuyo valor es de \$35,000,000, se acuerda pagarlo con un enganche y 3 abonos, todos por la misma cantidad. Los abonos serán hechos de forma mensual cargando un interés del 48 % anual nominal capitalizable cada mes.

Poco después de la compra se hace un nuevo convenio para cancelar el compromiso mediante dos pagos adicionales al enganche, el primero a dos meses de la compra por una cantidad X, y el segundo a 5 meses de la misma fecha por el doble de la primera cantidad. ¿Cuál el valor de los pagos X y 2X.



$$E_1 = 35,000,000 = E + E(1+\frac{0.48}{12})^{-1} + E(1+\frac{0.48}{12})^{-2} + E(1+\frac{0.48}{12})^{-3}$$

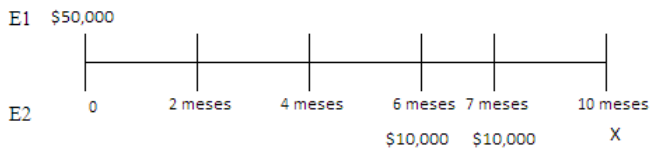
$$E = 9,271,299.604 \ \textit{Con lo que se obtiene el valor del enganche}$$

$$E_2 = 35,000,000 = 9,271,299.604 + X(1+\frac{0.48}{12})^{-2} + 2X(1+\frac{0.48}{12})^{-5}$$

$$X = 1,0017,363.34$$

De igual forma para resolver la siguiente problemática es necesario plantear una ecuación de valor. Una persona solicita un préstamo por \$50,000 por el cual acuerda pagar un interés capitalizable mensualmente del 15.49 %, dicha persona hace el primer pago de \$10,000 6 meses después de pactar la deuda el segundo pago su realizado un mes después por la cantidad de \$10,000, si se desea liquidar la deuda en tres meses ¿cuánto tendría que pagarse al final del plazo?.

El diagrama siguiente ejemplifica la ecuación a resolver.



Por lo tanto las ecuaciones E_1 y E_2 se definen de la siguiente forma.

$$E_1 = 50,000(1+\frac{0.1549}{12})^{10}$$

$$E_2 = 10,000(1 + \frac{0.1549}{12})^4 + 10,000(1 + \frac{0.1549}{12})^3 + X$$

Resolviendo la ecuación $E_1 = E_2$ se obtiene lo siguiente:

$$50,000(1 + \frac{0.1549}{12})^{10} = 10,000(1 + \frac{0.1549}{12})^4 + 10,000(1 + \frac{0.1549}{12})^3 + X$$
$$56,842.27 = 10,526.42 + 10,392.27 + X$$
$$X = 35,923.58$$

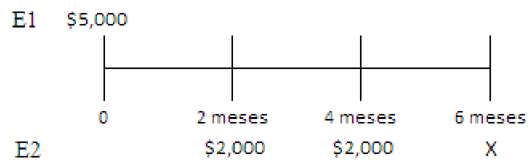
Por lo que se concluye que para liquidar la deuda se debe hacer un último pago de \$35,923.58.

1.2.3. Ecuación de valor con capitalización continua

Ahora, se analiza una problemática de ecuación de valor con una estructura de interés instantáneo:

El señor Roberto Castelan obtiene un préstamo por \$5,000 a una tasa continua de 15 %, comprometiéndose a pagar \$2,000 al cabo de dos años y otros \$2,000 al cabo de cuatro años. ¿Cuánto deberá pagar a los seis años para saldar completamente la deuda?

El diagrama de la ecuación de valor es el siguiente:



La ecuación de valor es la siguiente:

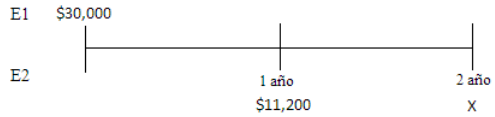
$$E_1 = (5,000)e^{(6)(0.15)}$$
$$E_2 = (2,000)e^{(4)(0.15)} + (2,000)e^{(2)(0.15)} + X$$
$$E_1 = E_2$$
$$(5,000)e^{(6)(0.15)} = (2,000)e^{(4)(0.15)} + (2,000)e^{(2)(0.15)} + X$$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$12,298.0155 = 3,644.2376 + 2,699.7176 + X$$
$$x = 5,954.0603$$

Por lo tanto el pago al año 6 deberá ser de $5,954.0603.

El siguiente ejemplo de igual forma ayudará a desarrollar una ecuación de valor ocupando el interés continuo. La señora Crispina Ángeles realizó la compra de una lavadora de $30,000 la cual quiere pagar con dos pagos el primero de $11,200 dentro de 1 año y el segundo pago por la cantidad X dentro de dos años, si la lavadora tiene una tasa de interés continua del 7 %, ¿cuánto tendría que pagar dentro del segundo año?.



La ecuación a este problema es la siguiente.

$$E_1 = 30,000e^{(2)(0.07)}$$
$$E_2 = 11,200e^{(1)(0.07)} + X$$
$$E_{1=E_2}$$
$$30,000e^{(2)(0.07)} = 11,200e^{(1)(0.07)} + X$$

Realizando las operaciones se llega a lo siguiente:

$$34,508.213 = 12,012.091 + X$$
$$X = 22,496.,122$$

Por lo tanto la señora Crispina Angeles deberá hacer su segundo pago por la cantidad de $22,496.122.

1.3. Anualidades

En la mayoría de los casos, en el instante de adquirir una deuda se establecen condiciones relacionadas a la forma de liquidar el compromiso, las cuales son establecidas por parte del prestador. Una de esas condiciones trata sobre liquidar la deuda realizando varios pagos en intervalos iguales de tiempo.

Este tema es de alta relevancia, pues en la realidad es poco común que las personas liquiden montos altos de deuda en un solo pago; de ahí que se busca financiamiento o inversiones con una estructura de pagos definida, por ejemplo, cuando se solicita un préstamo en el Banco, se compra un automóvil o alguna vivienda, se realiza una serie de pagos cada cierto tiempo durante un plazo previamente establecido.

En términos financieros, a estas series de pagos o rentas que dividen deudas e inversiones, se les conoce como anualidades. Por otra parte, los periodos de pago son establecidos al inicio de la operación y pueden definirse como semanales, mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, anuales, etc.

Existen distintos tipos de anualidades, los cuales pueden clasificarse de acuerdo a sus características:

Según los intereses

- Simples: Cuando el periodo de pago coincide con la capitalización de los intereses.
- Generales: En donde el periodo de pago no coincide con la capitalización de los intereses.

Según los pagos

- Vencida: Los pagos son al final de cada periodo.
- Anticipada: Los pagos son al inicio de cada periodo.

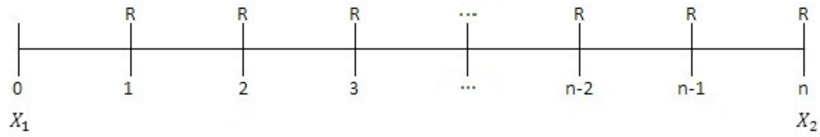
Según la incidencia

- Inmediata: Los pagos son al inicio del pacto.
- Diferida: Los pagos comienzan después del inicio del pacto.

Según el tiempo

- Ciertas: Los pagos se realizan en fechas fijas preestablecidas.
- Contingentes: Los pagos se efectúan en fechas que dependen de un hecho fortuito.

1.3.1. Elementos de una anualidad



X_1: Es el valor actual o capital de la anualidad, es decir, el valor de los pagos (Valor presente).

X_2: Es el monto en el vencimiento o el valor de los pagos en monto acumulado.

n: Número de pagos.

R: Renta o pago periódico

1.3.2. Anualidad Ordinaria (Vencida)

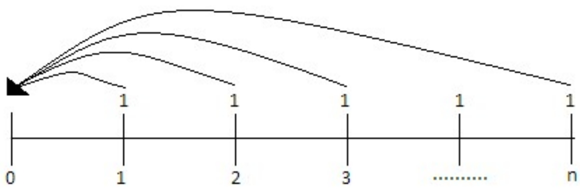
Considere una anualidad donde se hacen pagos de 1 al final de cada periodo por n periodos. Con una tasa de interés i.

Los elementos de una anualidad se puede definir de la siguiente manera.

$a_{\overline{n}i}$: Valor presente de una anualidad que paga 1 al final de cada periodo durante n periodos con una tasa i de interés.

$S_{\overline{n}i}$: Valor acumulado de una anualidad que paga 1 al final de cada periodo durante n periodos con una tasa i de interés.

Para obtener el valor presente de una anualidad vencida es necesario obtener el valor actual de los pagos al tiempo de evaluación como sigue:



Así, el valor presente de la anualidad es:

$$a_{\overline{n}i} = V + V^2 + V^3 + ... + V^{n-1} + V^n$$

Por otra parte, se sabe que la suma de una progresión geométrica con razón $|r| < 1$, n sumandos y primer sumando a_1 está dada por $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Entonces la progresión geométrica del valor presente de los flujos tiene razón $V = (1+i)^{-1}$ y puede re-expresarse de la forma siguiente:

$$a_{\overline{n}i} = V(\frac{1-V^n}{1-V})$$

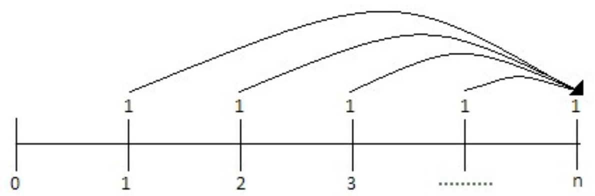
Por lo tanto:

$$a_{\overline{n}i} = V[\frac{1-V^n}{1-(\frac{1}{1+i})}] = V[\frac{1-V^n}{\frac{1+i-1}{1+i}}] = V[\frac{1-V^n}{\frac{i}{1+i}}] = V[\frac{1-V^n}{iV}] = \frac{1-V^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

De forma general, si la anualidad paga un monto R al final de cada periodo, el valor presente está dado por:

$$Ra_{\overline{n}i} = R(\frac{1-V^n}{i}) = R(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i})$$

Después, para calcular el valor futuro de la anualidad vencida, se acumulan los flujos al final del plazo:



$$S_{\overline{n}i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Por otra parte, se sabe que la suma de una progresión geométrica con razón $|r| > 1$, n sumandos y primer sumando a_1 está dada por $a_1(\frac{r^n-1}{r-1})$, entonces la progresión geométrica del valor futuro de los flujos tiene razón $(1+i)$ y puede re-expresarse de la forma siguiente:

$$S_{\overline{n}i} = 1(\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}) = \frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{V^n-1}{i}$$

Después, si la anualidad paga R en lugar de 1, el valor futuro es:

$$RS_{\overline{n}i} = R(\frac{(1+i)^n-1}{i})$$

Ejemplo

El señor Aldo Mauricio compró una pantalla de plasma por la cual pagará $200.00 al final de cada mes durante 4 años, si la tienda en la cual Aldo compró la pantalla maneja un interés del 5 % capitalizable semestralmente, ¿ Cuál será el precio de la pantalla si Aldo decidiera pagarla de contado?

Solución

Datos
$R = 200$

$n = 4(2) = 8$
$i = \frac{0.05}{2} = 0.025$

Procedimiento
$200a_{\overline{8}|0.025} = 200(\frac{1-(1+0.025)^{-8}}{0.025}) = 1,434.027$

Ejemplo

El señor Leonel Martínez quiere empezar el año ahorrando las ganancias de su negocio por lo cual abrió una cuenta en el banco en la cual depositará \$5,000 al final de cada mes, ¿Cuánto dinero tendrá el señor Leonel al final del año si el banco le ofrece una tasa pagadera 12 veces al año del 24 %?.

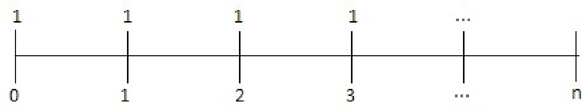
Solución

Datos
$R = 5,000$
$n = 1(12) = 12$
$i = \frac{0.24}{12} = 0.02$

Procedimiento
$5000a_{\overline{12}|0.02} = 5000(\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}) = 52,876.706$

1.3.3. Anualidad Anticipada

En contraste con el modelo de rentas de pagos vencidos, esta anualidad promete pagos al inicio de cada periodo. Si dichos pagos son de 1, se tiene el siguiente diagrama (cash flow):

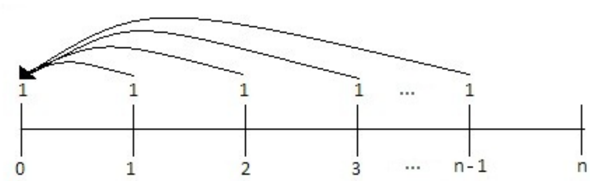


Los elementos de este tipo de anualidad se definen como:

$\ddot{a}_{\overline{n}i}$: Valor presente de una anualidad que paga "1" al inicio de cada periodo durante n periodos con una tasa de interés i.

$\ddot{S}_{\overline{n}i}$: Valor acumulado de una anualidad que paga "1" al inicio de cada periodo durante n periodos con una tasa de interés i.

Para obtener el valor presente de la anualidad anticipada, es necesario descontar todos los pagos al tiempo cero:



Así, el valor presente es:

$$\ddot{a}_{\overline{n}i} = 1 + V + V^2 + V^3 + ... + V^{n-1} + V^{n-1}$$

Lo cual es una progresión geométrica con razón $V = (1+i)^{-1}$, por lo que es posible reexpresar la ecuación:

$$\ddot{a}_{\overline{n}i} = 1(\frac{1-V^n}{1-V}) = \frac{1-V^n}{1-V} = \frac{1-V^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-V^n}{\frac{i}{1+i}}$$
$$= \frac{1-V^n}{i}(1+i) = 1 + (\frac{1-V^{n-1}}{i}) = 1 + (\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i})$$

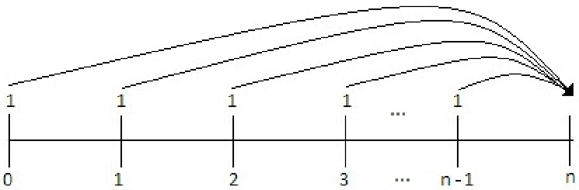
En donde se observa que es posible definir el valor presente de una anualidad anticipada en términos de una anualidad vencida:

$$\ddot{a}_{\overline{n}i} = a_{\overline{n}i}(1+i) \quad o \quad \ddot{a}_{\overline{n}i} = 1 + a_{\overline{n-1}\, i}$$

Luego, si las rentas son R, el valor presente es:

$$R\ddot{a}_{\overline{n}i} = Ra_{\overline{n}i}(1+i) = 1 + Ra_{\overline{n-1}\, i}$$

Por otra parte, para calcular el valor futuro de la anualidad, es necesario acumular los flujos al final del plazo:



$$\ddot{S}_{\overline{n}i} = (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

Lo cual es una progresión geométrica con razón $(1+i)$, por lo que es posible re-expresar la ecuación:

$$\ddot{S}_{\overline{n}i} = (1+i)[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}] = (1+i)[\frac{(1+i)^n - 1}{i}] = (\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}) = (\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}) - 1$$

De donde se observa que es posible definir el valor futuro de una anualidad anticipada en términos de una anualidad vencida:

$$\ddot{S}_{\overline{n}i} = S_{\overline{n}i}(1+i) \quad o \quad \ddot{S}_{\overline{n}i} = S_{\overline{n+1}\,i} - 1$$

Después, si las rentas son R, el valor acumulado es:

$$R\ddot{S}_{\overline{n}i} = RS_{\overline{n}i}(1+i) \quad o \quad R\ddot{S}_{\overline{n}i} = RS_{\overline{n+1}\,i} - 1$$

Ejemplo

Calcular el valor presente de una anualidad anticipada con una renta trimestral de $3,500 durante cuatro años con una tasa del 12 % capitalizable trimestralmente.

Solución

Datos
$R = 3,500$
$n = 8(4)32$
$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$

Procedimiento
$3,500\ddot{a}_{\overline{32|}0.03} = 3,500(\frac{1-(1+0.03)^{-12}}{0.03})(1+.03) = 35,884.1844$

Ejemplo

Calcular el valor de la renta de una anualidad anticipada que paga un valor futuro de $42,227.524 durante un año con una tasa del 15.6 % capitalizable mensualmente.

Solución

Datos
$VF = 42,227.524$
$n = 1(12) = 12$
$i = \frac{,156}{12} = 0.013$

Procedimiento

$42,227.524 = R\ddot{\text{S}}_{\overline{12}|0.013}$

$R = \frac{42,227.524}{\frac{1-(1+0.013)^{-12}}{0.013}(1+_{0.013})} = 250$

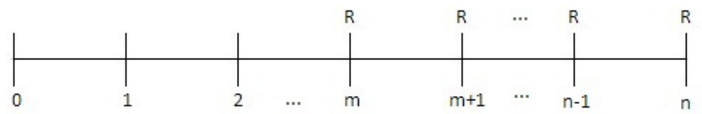
1.3.4. Anualidades diferidas

De forma general se calcula el valor de una anualidad tomando en cuenta que los pagos se realizan al inicio o al final del primer periodo, como se estudió en secciones anteriores.

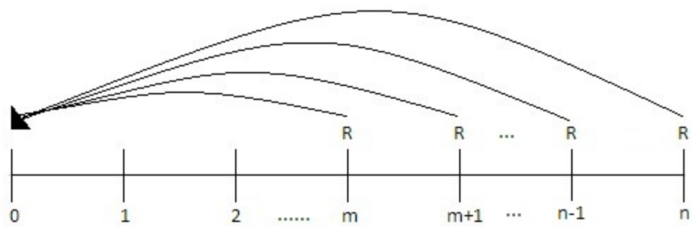
Particularmente es necesario obtener el valor de la anualidad hoy bajo la condición de que el primer pago no necesariamente se realice en el primer periodo. Ejemplos claros de esta situación resultan ser las ofertas en tiendas sobre comprar algún producto hoy e iniciar a pagar después de cierto tiempo.

Este tipo de anualidades son llamadas "diferidas", pues los pagos no comenzarán inmediatamente sino en un plazo posterior, así el plazo de inicio de los pagos o rentas está diferido.

Si se pacta hoy una serie de pagos con plazo de n periodos con la condición de que el primer desembolso comenzará al final del periodo $m < n$, el diagrama Cash Flow de la estructura de pagos adoptaría la forma siguiente:



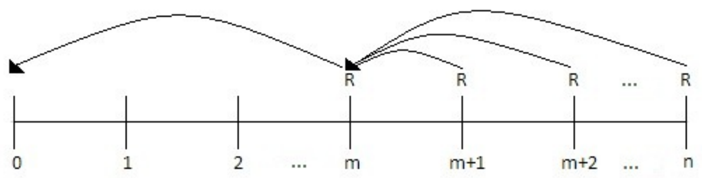
Como es posible anticipar, para calcular el valor presente de dicha anualidad con una tasa de interés i, se necesita obtener el valor presente todos los flujos de efectivo:



$$VP = R(1+i)^{-m} + R(1+i)^{-(m+1)} + R(1+i)^{-(m+2)} + ... + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n}$$

A simple vista este es un cálculo simple pero es importante notar cuantos pagos se hacen del periodo m hasta el periodo n, es decir, el número de pagos realizados en el tiempo es $(n - m + 1)$ pues se toma en cuenta el pago del periodo m. De esta forma es posible visualizar la anualidad diferida como una anualidad anticipada al tiempo m o como una anualidad vencida al tiempo $(m - 1)$

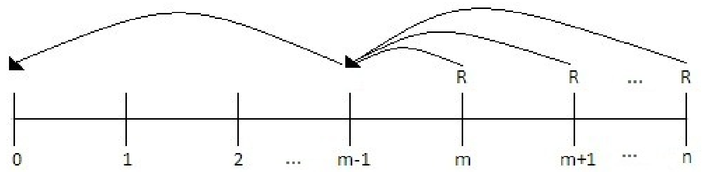
Entonces, si se visualiza el caso como una anualidad anticipada que inicia en el periodo m, se tiene:



$$Ra_{m|n} = R\ddot{a}_{\overline{n-m+1}\, i}(1+i)^{-m} = R\ddot{a}_{\overline{n-m+1}\, i}V^{m}$$

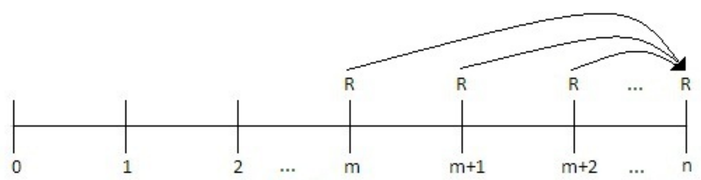
El cual es el valor presente de una anualidad con plazo de n periodos diferida m periodos.

Por otra parte, si se visualiza el caso como una anualidad vencida que inicia en el periodo $(m-1)$, ya que el primer pago se hace en m, se tiene:



$$Ra_{m|n} = Ra_{\overline{n-m+1}\, i}(1+i)^{-(m-1)} = Ra_{\overline{n-m+1}\, i}V^{(m-1)}$$

Luego, obtener el valor futuro al final del plazo de la anualidad resulta sencillo, pues simplemente es necesario acumular los $(n-m+1)$ pagos hasta el periodo n:



$$VF = R(1+i)^{m-n} + R(1+i)^{n-m-1} + R(1+i)^{n-m-2} + ... + R$$

$$RS_{m|n} = RS_{\overline{n-m+1}\, i}$$

El cual es el valor futuro o acumulado de una anualidad con plazo de n periodos diferida m periodos.

Ejemplo

Para ir de vacaciones una agencia de viajes está manejando una promoción la cual consiste en liquidar el viaje en 10 meses, los pagos se deberán hacer un año después de haber contratado el viaje, si el costo del viaje es de \$8,500 y se maneja una tasa del 6 % capitalizable mensualmente ¿Cuál será la cantidad a pagar mensualmente?

Solución

Datos
$VP = 8,500$
$n = 10$
$m = 12$
$i = \frac{0.06}{12} = 0.005$

Procedimiento

$8,5000 = R(\frac{1-(1.005)^{-10}}{0.005})(1.005)^{-12}$

$R = \frac{8,500}{(\frac{1-(1.005)^{-10}}{0.005})(1.005)^{-12}} = 927.428$

Ejemplo

El señor Alexander Hayes adquirió una televisión la cual tiene que pagar en 5 mensualidades de $1,500 dentro de 6 meses con una tasa de interés del 12 % capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el precio que Alexaner pagará por la televisión?

Solución

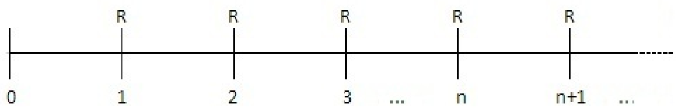
Datos
$R = 1,500$
$n = 11$
$m = 6$
$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$

Procedimiento

$RS_{6|11} = 1,500(\frac{(1+0.01)^{11-6+1}-1}{0.01}) = 9,228.023$

1.3.5. Perpetuidades

Hasta el momento se han estudiado anualidades que prometen pagos hasta cierto plazo, es decir, hasta cierto número de periodos, pero ¿qué sucede cuando los pagos no son finitos?, en otras palabras, ¿qué ocurre si la frecuencia de dichos pagos se extienden por tiempo indefinido? Esta situación da pie al estudio de las "perpetuidades", en donde, como se ha comentado, los pagos tienen un inicio pero no un final definido. Gráficamente se tiene:



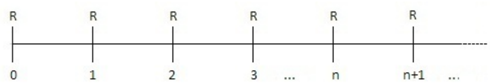
Para obtener el valor presente de una perpetuidad vencida es posible obtener el valor de una anualidad finita y extenderla a un límite:

$$Ra_i = \lim_{n\longrightarrow\infty} Ra_{\overline{n}\,i} = \lim_{n\longrightarrow\infty} R(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}) = \frac{R}{i}$$

El cual es el valor presente de una anualidad vencida con pagos indefinidos.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

Adicionalmente, si los pagos se hacen de manera anticipada indefinidamente, es necesario recurrir a la expresión para anualidades anticipadas:



$$R\,\ddot{a}_i = \lim_{n\longrightarrow\infty} R\,\ddot{a}_{\overline{n}\,i} = \lim_{n\longrightarrow\infty} R(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i})(1+i) = R(\frac{1+i}{i}) = R(\frac{1}{i}+1)$$

El cual es el valor presente de una anualidad anticipada con pagos indefinidos.

Por otra parte, es importante mencionar que no es posible definir el valor futuro o acumulado de una perpetuidad, ya que esta no cuenta con un plazo donde terminen el pago de rentas.

Ejemplo

El señor David Martínez construyó en su casa un local el cual quiere rentar en \$2,000 al mes y ese dinero quiere invertirlo en su cuenta de ahorro la cual le da un interés del 5 % mensual, ¿Cuál será el valor presente de la cuenta de ahorro del señor David?

Solución

Datos
$R = 2,000$

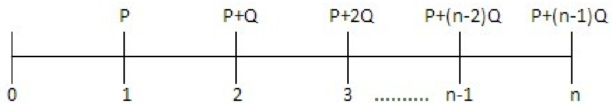
$i = 5\,\% = 0 \cdot 05$

Procedimiento

$2,000 a_{0 \cdot 05} = \frac{2,000}{0 \cdot 05} = 40,000$

1.3.6. Anualidades Variables (gradientes)

Primeramente se considera, durante n periodos, una anualidad vencida, donde el primer pago es P y cada periodo el pago se va incrementando aritméticamente en Q unidades, se visualiza el siguiente diagrama Cash Flow:



Dada la forma en la que se incrementa la serie, se trata de un gradiente aritmético, para el cual, el valor presente (al igual que en los otros tipos de anualidad) se obtiene descontando cada flujo de efectivo hasta le fecha de valuación:

$$VP = P(1+i)^{-1} + (P+Q)(1+i)^{-2} + (P+2Q)(1+i)^{-3} + ...+$$
$$[P+(n-2)Q](1+i)^{-(n-1)} + [P+(n-1)Q](1+i)^{-n}$$

$$VP(1+i) = P + (P+Q)(1+i)^{-1} + (P+2Q)(1+i)^{-2} + ...+$$
$$[P+(n-2)Q](1+i)^{-(n-2)} + [P+(n-1)Q](1+i)^{-(n-1)}$$

Después, rentando ambas igualdades se obtiene:

$$VP_i = P+Q(1+i)^{-1}+Q(1+i)^{-2}+...+Q(1+i)^{-(n-2)}+Q(1+i)^{-(n-1)}+[P+(n-1)Q](1+i)^{-n}$$

$$VP_i = P[(1+i)^{-n}] + Q[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}] + nQ(1+i)^{-n}$$

$$VP_i = P[1-(1+i)^{-n}] + Q[a_{\overline{n}i} - n(1+i)^{-n}]$$

Por lo que, despejando y haciendo $V = \frac{1}{(1+i)}$, el valor presente del gradiente aritmético es:

$$VP = Pa_{\overline{n}i} + Q(\frac{a_{\overline{n}i} - n(1+i)^{-n}}{i}) = Pa_{\overline{n}i} + Q(\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i})$$

Por otra parte, para obtener el valor futuro del gradiente, basta con acumular n periodos el valor presente de esta anualidad:

$$VF = (VP)(1+i)^n = Pa_{\overline{n}i}(1+i)^n + Q[\frac{a_{\overline{n}i}(1+i)^n - nV^n(1+i)^n}{i}]$$

$$VF = PS_{\overline{n}i} + Q[\frac{S_{\overline{n}i} - n}{i}]$$

Dados los resultados anteriores, es importante notar que el pago Q no necesariamente es positivo. Puede ocurrir que en lugar de aumentar la renta inicial, esta irá disminuyendo, por lo que se clasifican los gradientes aritméticos en crecientes y decrecientes de la siguiente forma:

$$VP = Pa_{\overline{n}i} + Q[\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i}] = \begin{cases} (I_A)a_{\overline{n}i} & \text{si } Q > 0 \text{ VP Anualidad creciente} \\ (D_A)a_{\overline{n}i} & \text{si } Q < 0 \text{ VP Anualidad decreciente} \\ a_{\overline{n}i} & \text{si } Q = 0 \text{ VP Anualidad vencida} \end{cases}$$

$$VF = PS_{\overline{n}i} + Q[\frac{S_{\overline{n}i} - nV^n}{i}] = \begin{cases} (I_A)S_{\overline{n}i} & \text{si } Q > 0 \text{ VF Anualidad creciente} \\ (D_A)S_{\overline{n}i} & \text{si } Q < 0 \text{ VF Anualidad decreciente} \\ S_{\overline{n}i} & \text{si } Q = 0 \text{ VF Anualidad vencida} \end{cases}$$

Cabe mencionar que también es posible obtener expresiones para el valor presente y valor futuro para gradientes aritméticos, donde el primer pago se realiza de forma anticipada o de diferida cierto número de periodos. El procedimiento es análogo a los mostrados anteriormente.

Por otra parte, existen casos particulares de este tipo de gradientes, por ejemplo, si el pago inicial y el incremento son una unidad, es decir, si $P = Q = 1$, se trata de una anualidad unitaria. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Ia_{\overline{n}i} = a_{\overline{n}i} + [\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i}] &= \frac{[1 - V^n] + [V + V^2 + V^3 + ... + +V^N] - nV^n}{i} \\ &= \frac{[1 + V + V^2 + ... + +V^{n-1}] - nV^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}i} - nV^n}{i} \end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned} IS_{\overline{n}i} = Ia_{\overline{n}i}(1+i)^n = a_{\overline{n}i}(1+i)^n + [\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i}](1+i)^n &= S_{\overline{n}i} + [\frac{S_{\overline{n}i} - n}{i}] \\ &= \frac{[(1+i)^n - 1] + [(1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i) + 1] - n}{i} \\ &= \frac{[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i)] - n}{i} = \frac{\ddot{S}_{\overline{n}i} - n}{i} \end{aligned}$$

Luego, si el pago inicial coincide con el número de periodos del gradiente aritmético y si dicho pago va decreciendo en una unidad, es decir, si $P = n$ y $Q = -1$, se trata de una anualidad decreciente unitaria y se tiene:

$$Ia_{\overline{n}i} = na_{\overline{n}i} - [\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i}] = \frac{n[1 - V^n] - a_{\overline{n}i} + nV^n}{i} = \frac{n - a_{\overline{n}i}}{i}$$

Después, si se trabaja con un gradiente aritmético con pagos indefinidos (perpetuo):

$$(I_A)a_i = \lim_{n \to \infty} \{Pa_{\overline{n}i} + Q[\frac{a_{\overline{n}i} - nV^n}{i}]\} = Pa_i + Q(\frac{a_i}{i}) = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$$

Ejemplo

Obtenga el valor presente de una anualidad de 3 años con pagos semestrales de los cuales el pago inicial es de \$100.00 y los pagos posteriores incrementan de forma aritmética en \$10.00 dicha anualidad tiene una tasa de interés 10 % capitalizable semestralmente.

Solución

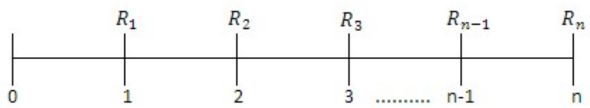
Datos:
$P = 100$
$Q = 10$
$n = 3(2) = 6$
$i = 0.10/2 = 0.05$

Procedimiento

$$VP = 100(\frac{1-(1.05)^{-6}}{0.05}) + 10[\frac{(\frac{1-(1.05)^{-6}}{0.05}) - 6(1.05)^{-6}}{0.05}] = 627{,}249$$

2.3.6.2 Gradiente Geométrico

Además del crecimiento aritmético en los gradientes, es importante estudiar otro tipo de incremento. Para este fin se considera, durante n periodos, una anualidad vencida, donde el primer pago es R_1 y cada periodo el pago se va incrementando en razón de $(1+g)$, donde g es una tasa de crecimiento geométrico. A partir de esta premisa, se visualiza el siguiente diagrama cash flow:



donde:

$R_1 = R_1$
$R_2 = R_1(1+g)$
$R_3 = R_2(1+g) = R_1(1+g)^2$
.
.
.
$R_n = R_{n-1}(1+g) = R_1(1+g)^{n-1}$

Después, para obtener el valor presente de una anualidad geométrica es necesario descontar cada flujo de efectivo, por lo cual el VP estará dado de la siguiente manera:

$$VP = R_1V + R_2V^2 + R_3V^3 + ... + R_{n-1}V^{n-1} + R_nV^n$$
$$VP = R_1V^1 + R_1(1+g)V^2 + R_1(1+g)^2V^3 + ... + R_1(1+g)^{n-1}V^n$$

Multiplicando por $(1+g)$ y dividiendo entre $(1+i)$ ambas partes de la igualdad se obtiene:

$$\frac{VP(1+g)}{1+i}=\frac{R_1(1+g)}{(1+i)^2}+\frac{R_1(1+g)^2}{(1+i)^3}+...+\frac{R_1(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}+\frac{R_1(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

Restando ambas ecuaciones y despejando el valor presente:

$$\frac{VP(1+g)}{1+i}-VP=-R_1(1+i)^{-1}+R_1\frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$VP(\frac{g-i}{1+i})=\frac{R_1}{1+i}[(\frac{1+g}{1+i})^n-1]$$

$$VP=R_1[(\frac{1+g}{1+i})^n-1](\frac{1}{g-i})\begin{cases}(Ig)a_{\overline{n}i} & \text{si } \; g>0\\ (Dg)a_{\overline{n}i} & \text{si } \; g<0\end{cases}$$

Lo cual se cumple si $g\neq i$.

Para el caso en donde $g=i$ se tiene por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{g\longrightarrow i}\frac{\frac{\partial}{\partial g}(\frac{1+g}{1+i})^n-1}{\frac{\partial}{\partial g}(\frac{g-i}{R_1})}=\frac{nR_1}{1+i}$$

Por lo tanto:

$$VP=\frac{nR_1}{1+i}\begin{cases}(Ig)a_{\overline{n}i} & \text{si } \; g>0\\ (Dg)a_{\overline{n}i} & \text{si } \; g<0\end{cases}$$

Para encontrar el valor futuro de los dos casos anteriores, se acumula el valor presente durante n periodos:

$$VF=R_1[(\frac{1+g}{1+i})^n-1](\frac{1}{g-i})(1+i)^n$$

$$VF=R_1[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{g-i}]\begin{cases}(Ig)S_{\overline{n}i} & \text{si } \; g>0\\ (Dg)S_{\overline{n}i} & \text{si } \; g<0\end{cases}$$

Esto si $g\neq i$.

Luego, si $g=i$

$$VF=\frac{nR_1}{1+i}(1+i)^n$$

$$VF=nR_1(1+i)^{n-1}\begin{cases}(Ig)S_{\overline{n}i} & \text{si } \; g>0\\ (Dg)S_{\overline{n}i} & \text{si } \; g<0\end{cases}$$

Ejemplo

Calcular el valor futuro de una anualidad con crecimiento geométrico la cual el primer pago es de \$200.00 y los siguientes pagos trimestrales crecen con una razón de 0.2 durante 2 años con una tasa de interés del 12 % capitalizable cada tres meses.

Solución

Datos
$R_1 = 200$
$g = 0.2$
$n = 2(4) = 8$
$i = 0.12/4 = 0.03$

Procedimiento

$$200[\frac{(1.20)^8 - (1.03)^8}{0.2 - 0.03}] = 3,568.29$$

1.4. Amortización y fondos

Hoy en día, un número considerable de personas mantienen cierto tipo de deuda, por ejemplo, el pago de un crédito personal, crédito automotriz o crédito inmobiliario, por lo cual este tema tiene alta importancia, ya que periodo a periodo se realizan pagos (amortizaciones) a fin de reducir dicha deuda y liquidarla después de cierto número de pagos.

Adicionalmente, un buen control sobre una deuda se relaciona directamente con el desglose de la misma; esto con el objetivo de analizar su comportamiento y la mejor estrategia y/o acciones a seguir para liquidarla de la mejor forma.

Formalmente la amortización es el proceso de liquidación de una deuda y sus intereses por medio de una serie de pagos, ya sean constantes o variables.

Las partes más importantes de una amortización son:

- Saldo insoluto: es el capital que resta por ser amortizado a tiempo n.
- Bono o renta: Es el pago total que se realiza periodo a periodo, el cual se componer de dos elementos:
    1. Amortización: es la parte del pago total en cada periodo que va directo al capital de la deuda.
    2. Intereses: Dado el préstamo que se realizó, en compensación se generan premios (intereses) que se van cobrando periodo a periodo.

Dada la importancia de este tema, en seguida se estudiarán los tres tipos de amortización, más usuales en el proceso de liquidación de una deuda.

1. Amortización gradual: La amortización crece gradualmente y los intereses se reducen.
2. Amortización constante: La amortización es fija y de igual forma los intereses se reducen.
3. Amortización variable: La amortización es creciente o decreciente ya se de forma Aritmética o Geométrica.

1.4.1. Amortización gradual

En el proceso de amortización gradual la deuda se finiquita mediante rentas iguales, en donde los intereses se irán reduciendo periodo a periodo conforme disminuya la deuda. De esta forma, la amortización directa a capital será gradualmente mayor.

Período	Renta	Interés	Amortización	Saldo insoluto
1	R	$I_1 = iS_0$	$A_1 = R - I_1$	$S_1 = S_0 - A_1 = Ra_{\overline{n-1}i}$
2	R	$I_2 = iS_1$	$A_2 = R - I_2$	$S_2 = S_1 - A_2 = Ra_{\overline{n-2}i}$
3	R	$I_3 = iS_2$	$A_3 = R - I_3$	$S_3 = S_2 - A_3 = Ra_{\overline{n-3}i}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	R	$I_n = iS_{n-1}$	$A_n = R - I_n$	$S_n = S_{n-1} - A_n = 0$

Por lo tanto las formulas para obtener cada parte de la amortización son las siguientes:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$I_m = (i)(S_{m-1}) = (i)(Ra_{\overline{n-(m-1)i}})$$

$$A_m = R - I_m = R - (i)(Ra_{\overline{n-(m-1)i}})$$

$$S_m = Ra_{\overline{n-m}}$$

$$\sum_{m=1}^{n} I_m = i\frac{S_0}{n}\sum_{m=1}^{n}[n-(m-1)] = \frac{iS_0}{n}(\frac{n}{2})(1+n) = (i)(S_0)(\frac{n+1}{2})$$

Ejemplo

Se tiene una deuda de \$10,000 y se desea cancelarla en 14 meses con intereses del 30 % anual capitalizable mensualmente, Construya la tabla de amortización gradual para dicha deuda.

Periodo	Renta (R_n)	Interés (I_n)	Amortización (A_n)	Saldo insoluto (S_n)
				\$10,000
1	\$855.37	\$250	\$605.37	\$9,394.63
2	\$855.37	\$234.87	\$620.50	\$8,774.14
3	\$855.37	\$219.35	\$636.01	\$8,138.12
4	\$855.37	\$203.45	\$651.91	\$7,486.21
5	\$855.37	\$187.16	\$668.21	\$6,818.00
6	\$855.37	\$170.45	\$684.92	\$6,133.09
7	\$855.37	\$153.33	\$702.04	\$5,431.05
8	\$855.37	\$135.78	\$719.59	\$4,711.46
9	\$855.37	\$117.79	\$737.58	\$3,973.88
10	\$855.37	\$99.35	\$756.02	\$3,217.86
11	\$855.37	\$80.45	\$774.92	\$2,442.94
12	\$855.37	\$61.07	\$794.29	\$1,648.65
13	\$855.37	\$41.22	\$814.15	\$834.50
14	\$855.37	\$20.86	\$834.50	\$0
Total	\$11,975.11	\$1,975.11	\$10,000	

1.4.2. Amortización constante

En este proceso, la deuda se liquida mediante amortizaciones constantes, a las cuales se le sumarán los intereses pagaderos periodo a periodo, por lo cual la renta o abono total será decreciente en cada periodo.

Período	Renta	Interés	Amortización	Saldo insoluto
1	$R_1 = I_1 + A$	$I_1 = iS_0$	A	$S_1 = S_0 - A_1$
2	$R_2 = I_2 + A$	$I_2 = iS_1$	A	$S_2 = S_1 - A = S_0 - 2A$
3	$R_3 = I_3 + A$	$I_3 = iS_2$	A	$S_3 = S_2 - A = S_0 - 3A$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$R_n = I_n + A$	$I_n = iS_{n-1}$	A	$S_n = S_{n-1} - A = S_0 - nA = 0$

Por lo tanto, las expresiones para cada elemento en la tabla de amortización son:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$I_m = (i)(S_{m-1}) = (i)[S_0 - (m-1)\frac{S_0}{n}] = (S_0)(i)(\frac{n-(m-1)}{n})$$

$$R_m = A + I_m = \frac{S_0}{n} + (S_0)(i)(\frac{n-(m-1)}{n}) = S_0[\frac{1}{n} + i(\frac{n-(m-1)}{n})]$$

$$S_m = S_0 - mA = S_0 - \frac{mS_0}{n} = (S_0)(1 - \frac{m}{n}) = S_0(\frac{n-m}{n})$$

$$\sum_{m=1}^{n} I_m = i\frac{S_0}{n}\sum_{m=1}^{n}[n-(m-1)] = \frac{iS_0}{n}(\frac{n}{2})(1+n) = (i)(S_0)(\frac{n+1}{2})$$

Ejemplo

Se tiene una deuda de \$180,000 la cual se desea liquidar en dos años de forma trimestral con intereses del 25.6 % capitalizable trimestralmente. Sin elaborar una tabla de amortización obtenga la amortización trimestral, los intereses a pagar en el periodo 6, el valor de la renta en el periodo 6, el saldo insoluto en el penúltimo periodo y la suma de los intereses.

Solución

$A_n = \frac{S_0}{n} = \frac{180{,}000}{8} = 22,500$

$I_6 = (S_0)(i)(\frac{n-(m-1)}{n}) = (180,000)(\frac{0.256}{4})(\frac{8-(6-1)}{8}) = 4,320$

$R_3 = S_0[\frac{1}{n} + i(\frac{n-(m-1)}{n})] = (180,000)[\frac{1}{8} + (\frac{0.256}{4})(\frac{8-(3-1)}{8})] = 31,140$

$S_7 = S_0(\frac{n-m}{n}) = (180,000)(\frac{8-7}{8}) = 22,500$

$\sum_{m=1}^{n} I_m = (i)(S_0)(\frac{n+1}{2}) = (\frac{0.256}{4})(180,000)(\frac{8+1}{2}) = 51,840$

1.4.3. Amortización variable

Como se estudió en el tema de anualidades, es posible realizar pagos con un crecimiento aritmético, por lo que, dados estos pagos en un modelo de amortización, la tabla se construye de la manera siguiente:

Período	Renta	Interés	Amortización	Saldo insoluto
1	R_1	$I_1 = iS_0$	$A_1 = R_1 - I_1$	$S_1 = S_0 - A_1 = (I_A)a_{\overline{n-1}i} \longrightarrow R_2$
2	$R_2 = R_1 + d$	$I_2 = iS_1$	$A_2 = R_2 - I_2$	$S_2 = S_1 - A_2 = (I_A)a_{\overline{n-2}i} \longrightarrow R_3$
3	$R_3 = R_1 + 2d$	$I_3 = iS_2$	$A_3 = R_3 - I_3$	$S_3 = S_2 - A_3 = (I_A)a_{\overline{n-3}} \longrightarrow R_4$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$R_n = R_1 + (n-1)d$	$I_n = iS_{n-1}$	$A_n = R_n - I_n$	$S_n = S_{n-1} - A_n = (I_A)a_{\overline{n-n}i} = 0$

Por lo tanto, las expresiones para cada elemento en la tabla de amortización son:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$R_m = R_1 + (m-1)d$$

$$\sum_{k=1}^{m} R_k = \frac{m}{2}(2R_1 + (M-1)d)$$

$$S_m = (I_A)a_{\overline{n-m}i} \longrightarrow R_{m+1}$$

$$I_m = (i)(S_{m-1}) = (i)(I_A)a_{\overline{n-(m-1)}i} \longrightarrow R_m$$

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = (\sum_{k=1}^{m} R_k) - (S_0 - S_n)$$

Ejemplo

Se desea liquidar una deuda durante 7 años y medio, dicha deuda es de \$300,00 además se desea que conforme transcurra el tiempo los pagos incrementen \$1,500, si se tiene una tasa efectiva del 5 % ¿Cómo se visualiza la tabla de amortización?.

Periodo	Renta (R_n)	Intereses (I_n)	Amortización (A_n)	Saldo insoluto (S_n)
0				\$300,000.00
1	\$19,756.72	\$15,000.00	\$4,756.72	\$295,243.28
2	\$21,256.72	\$14,762.16	\$6,494.55	\$288,748.73
3	\$22,756.72	\$14,437.44	\$8,319.28	280,429.45
4	\$24,256.72	\$14,021.47	\$10,235.24	\$270,194.21
5	\$25,756.72	\$13,509.71	\$12,247.01	257,947.21
6	\$27,256.72	\$12,897.36	\$14,359.36	\$243,587.85
7	\$28,756.72	\$12,179.39	\$16,577.32	\$227,010.53
8	\$30,256.72	\$11,350.53	\$18,906.19	\$208,104.34
9	\$31,756.72	\$10,405.22	\$21,351.50	\$186,752.84
10	\$33,256.72	\$9,337.64	\$23,919.07	\$162,833.76
11	\$34,746.72	\$8,141.69	\$26,615.03	\$136,218.74
12	\$36,26.72	\$6,810.94	\$29,445.78	\$106,772.96
13	\$37,756.72	\$5,338.65	\$32,418.07	\$74,354.89
14	\$39,256.72	\$3,717.74	\$35,538.97	\$38,815.92
15	\$40,756.72	\$1,940.80	\$38,815.92	\$0.00
Total	\$453,850.74	\$153,850.74	\$300,000.00	

Por otra parte, es posible que los pagos crezcan como un gradiente geométrico, por lo cual la tabla de amortización se construye como sigue:

Período	Renta	Interés	Amortización	Saldo insoluto
1	R_1	$I_1 = iS_0$	$A_1 = R_1 - I_1$	$S_1 = S_0 - A_1 = (I_g)a_{\overline{n}} \longrightarrow R_1$
2	$R_2 = R_1(1+g)$	$I_2 = iS_1$	$A_2 = R_2 - I_2$	$S_2 = S_1 - A_2 = (I_g)a_{\overline{n-1}} \longrightarrow R_2$
3	$R_3 = R_1(1+g)^2$	$I_3 = iS_2$	$A_3 = R_3 - I_3$	$S_3 = S_2 - A_3 = (I_g)a_{\overline{n-2}} \longrightarrow R_3$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$R_n = R_1(1-g)^{n-1}$	$I_n = iS_{n-1}$	$A_n = R_n - I_n$	$S_n = (I_g)a_{\overline{n-(n-1)}} \longrightarrow R_n$

Por lo tanto, las expresiones para cada elemento en la tabla de amortización son:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$R_m = R_1(1+g)^{m-1}$$
$$I_m = (i)(S_{m-1}) = (i)(I_g)a_{\overline{n-(m-1)}i}$$
$$\sum_{k=1}^{m} I_k = R_k - (s_0 - s_m)$$
$$S_m = (I_g)a_{n-m}$$
$$A_m = R_m - I_m = R_1(1+g)^{m-1} - (i)(I_g)a_{\overline{n-(m-1)}i}$$

Ejemplo

Se adquiere un terreno con un valor de \$145,000. Se dese amortizar la deuda durante 10 años con abonos cuatrimestrales que crecen 5 % sucesivamente. La tasa de interés de la deuda es del 12 % nominal cuatrimestralmente. Sin elaborar una tabla de amortización obtener la renta número 1 y 2 y el saldo en el periodo 27.

Solución

$F = (\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(1+i)^n})(\frac{1}{g-i}) = (\frac{(1+0.05)^{30}-(1+0.04)^{30}}{(1+0.04)^{30}})(\frac{1}{0.05-0.04}) = 33.25355162$

$$R_1 = \frac{S_0}{F} = \frac{145000}{33.25355162} = 4,360.44$$

$R_{12} = R_1(1+g)^{m-1} = 4360.44(1+0.05)^{12-1} = 7,457.83$

$R_{28} = R_1(1+g)^{m-1} = 4360.44(1+0.05)^{28-1} = 16,279.50$

$S_{27} = (R_{m+1})(\frac{(1+g)^{n-m}-(1+i)^{n-m}}{(1+i)^{n-m}})(\frac{1}{g-i}) = (16279.50)(\frac{(1+0.05)^3-(1+0.04)^3}{(1+.04)^3})(\frac{1}{0.05-0.04}) = 47,413.08$

1.4.4. Fondo de Amortización (Sinking Fund)

En general, una deuda puede ser liquidada mediante pagos periódicos (amortización) que se hacen directamente al acreedor, pero puede resultar que a este último, por comodidad, le interese recibir el total de su dinero hasta el término del plazo. Bajo esta situación el deudor se verá en la necesidad de hacer sus depósitos cada cierto periodo en algún banco o institución financiera bajo una tasa de interés. Este proceso da lugar al fondo de amortización.

Formalmente, un fondo es una cantidad de dinero que se acumula con pagos periódicos, que devengan intereses de tal suerte que en cierto plazo se acumula un monto previamente establecido. La diferencia entre los métodos de amortización y la constitución de fondos radica en que, para amortizar una deuda, se visualiza como un valor presente y por el contrario, en la aplicación de fondos, la deuda se visualiza como un monto acumulado.

Una forma de construir el fondo es realizando depósitos constantes, es decir, en cada periodo del plazo se realiza el mismo pago. Entonces, si hoy se tiene una deuda S_0 que se debe pagar después de n periodos y además, por ella existe una tasa de interés i, al final del plazo debe pagarse la cantidad:

$$M = S_0(1+i)^n$$

Si a través de un fondo se desea acumular esta cantidad al final de los n periodos y si este otorga una tasa de interés j, la renta R que debe pagarse al inicio de cada periodo está dada por:

$$R = \frac{M}{\frac{(1+j)^{n+1}-1}{j} - 1}$$

Ya que la cantidad M que se desea acumular en el fondo es:

$$M = R(\frac{(1+j)^{n+1}-1}{j} - 1)$$

Las rentas más los intereses ganados se van acumulando para integrar un monto periodo a periodo y evidentemente el monto final debe ser M. De esta manera se construye la tabla del fondo de amortización.

Periodo	Renta (R_m)	Capital acumulado (C_m)	Interes (I_m)	Monto (M_m)
1	$R_1 = R$	$C_1 = R_1$	$I_1 = (j)(C_1)$	$M_1 = C_1 - I_1$
2	$R_2 = R$	$C_2 = M_1 + R_2$	$I_2 = (j)(C_2)$	$M_2 = C_2 - I_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$R_n = R$	$C_2 = M_{n-1} + R_n$	$I_n = (j)(C_n)$	$M_n = C_n - I_n$

Generalizando las expresiones de la tabla se obtiene lo siguiente:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$M_m = R(\frac{(1+j)^{m+1}-1}{j} - 1) = \widehat{S}_{\overline{m}i}$$

$$R_m = R$$

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = mR$$

$$C_m = R(\frac{(1+j)^m - 1}{j} - 1) + R = R[(\frac{(1+j)^m - 1}{j} - 1) + 1] = R(\frac{(1+j)^m - 1}{j}) = \widehat{S}_{\overline{m}}$$

$$I_m = (j)(C_m) = j\widehat{S}_{\overline{m}i} = (j)(R(\frac{(1+j)^m - 1}{j})) = R[(1+j)^m - 1]$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_m = M_m - \sum_{k=1}^{n} R_k = R[\frac{(1+j)^m - 1}{j} - m]$$

Ejemplo

Para sus vacaciones dentro de 7 meses, un padre de familia crea un fondo de ahorro con depósitos al inicio de cada mes de \$3,600 a una tasa de interés del 8.28 % de interés capitalizable por mes.

a) Hallar el monto acumulado, el cual se busca alcanzar al final de los 7 meses.

b) ¿Cuál es el capital acumulado al inicio del año 5?.

c) ¿Cuáles son los intereses al pagar la renta 3?

d) Hallar el monto de la inversión en el periodo 6.

Solución

$a)3,600[(\frac{(1+0.0069)^{7+1}-1}{0.0069} - 1)] = 25,905.20$

$b)3,600[\frac{(1+0.0069)^{5}-1}{0.0069}] = 18,250.12$

$c)3,600[(1+0.0069)^3 - 1] = 75.04$

$d)3,600[(\frac{(1+0.0069)^{6+1}-1}{0.0069}) - 1] = 22,127.68$

1.5. Depreciación de activos

Toda empresa cuenta con activos que son parte fundamental para el desarrollo de la misma y con el paso del tiempo estos activos van perdiendo su valor debido al uso, al deterioro o desgaste. En otras ocasiones, los activos van perdiendo valor dadas las actualizaciones tecnológicas año con año. Dado lo anterior, existen diversos factores económicos que hacen que los precios cada día se eleven y es por eso que los productos viejos van perdiendo su valor.

La depreciación es la pérdida de valor de un bien a través del tiempo, ya sea por su uso o su obsolescencia.

Los conceptos más importantes para la depreciación son:

- Valor original del bien C_0.
- Valor del bien al tiempo "n" C_n (al tiempo "n" el bien ya es obsoleto y C_n es el valor de rescate o valor de salvamento).
- Valor en libros al tiempo "k" C_k.
- Base de la depreciación $B = C_0 - C_n$

Existen varios métodos para poder calcular la depreciación de un activo.

1. Línea Recta.
2. Suma de los dígitos.
3. Tasa fija.
4. Sinking fund (Fondo de amortización).

1.5.1. Método de Línea Recta

La depreciación por el método de línea recta supone que la depreciación de un activo será la misma durante toda su vida útil.

Fin de año	Depreciación	Depreciación acumulada	Valor en libros
1	$R_1 = R$	$D_1 = R$	$C_1 = C_0 - D_1 = C_0 - R$
2	$R_2 = R$	$D_2 = R_1 + R_2 = 2R$	$C_2 = C_0 - D_2 = C_0 - 2R$
3	$R_3 = R$	$D_3 = R_1 + R_2 + R_3 = 3R$	$C_3 = C_0 - D_3 = C_0 - 3R$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$R_n = R$	$D_n = \sum_{k=1}^{n} R_k = nR$	$C_n = C_0 - D_n = C_0 - nR$

Generalizando las formulas de la tabla se obtiene lo siguiente:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$R_m = R$$
$$D_m = mR$$
$$C_m = C_0 - mR$$
$$R = \frac{C_0 - C_n}{n} = \frac{B}{n}$$

Ejemplo

a) ¿De cuánto será la depreciación anual de una máquina que costó \$150,000 si será utilizada por 6 años y al final se gastarán \$18,600 en su reparación y su cambio por máquinas modernas?

b) Calcular la depreciación acumulada hasta el cuarto año.

c)¿Cuál es el valor en libros del activo al final del quinto año?

Solución

a)$R = \frac{C_0 - C_n}{6} = \frac{150{,}000 - 18{,}600}{6} = 21,900$

b) $D_4 = mR = (4)(21,900) = 87,600$

c) $C_5 = C_0 - mR = 150,000 - (5)(21,900) = 40,500$

1.5.2. Método de Suma de los Dígitos

Sea S_n la suma de los dígitos de los años de 1 hasta n, entonces S_n se define.

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2}$$

Fin de año	Depreciación	Depreciación acumulada	Valor en libros
1	$R_1 = (B)(\frac{n}{S_n})$	$D_1 = R_1$	$C_1 = C_0 - D_1 = C_0 - R$
2	$R_2 = (B)(\frac{n-1}{S_n})$	$D_2 = R_1 + R_2$	$C_2 = C_0 - D_2 = C_1 - R$
3	$R_3 = (B)(\frac{n}{S_{n-2}})$	$D_3 = R_1 + R_2 + R_3$	$C_3 = C_0 - D_3 = C_2 - R$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$R_n = (B)(\frac{1}{S_n})$	$D_n = R_1 + R_2 + ... + R_n$	$C_n = C_0 - D_n = C_{n-1} - R$

Generalizando las expresiones de la tabla se obtiene lo siguiente:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$R_m = (B)(\frac{n-(m-1)}{S_n}) = \frac{(C_0 - C_n)(n-(m-1))}{S_n}$$

$$D_m = \sum_{k=1}^{n} R_k = (\frac{B}{S_2})(\frac{m}{2})(2n-(m-1))$$

$$C_m = C_0 - D_m = C_0 - (\frac{B}{S_2})(\frac{m}{2})(2n-(m-1))$$

Ejemplo

Se compró una camioneta en $220,000. Suponiendo que dicha camioneta tiene 6 años de vida útil y un valor de desecho de $73,000. Elaborar la tabla de depreciación usando el método de la suma de los dígitos.

Solución

Fin de año	Depreciación anual (R_n)	Depreciación acumulada (D_n)	Valor en libros (C_n)
0			$220,000.00
1	$42,000.00	$42,000.00	$178,000.00
2	$35,000.00	$77,000.00	$143,000.00
3	$28,000.00	$105,000.00	$115,000.00
4	$21,000.00	$126,000.00	$94,000.00
5	$14,000.00	$140,000.00	$80,000.00
6	$7,000.00	$147,000.00	$73,000.00

1.5.3. Método de Tasa Fija

El método supone que los activos van perdiendo valor de acuerdo a cierta tasa de interés, la cual es llamada "tasa de depreciación"(d), la cual funciona de la manera siguiente:

1 $C_0(1-d) = C_1$
2 $C_2(1-d) = C_0(1-d)^2$
.
.
n $C_n = C_{n-1}(1-d) = C_0(1-d)^n$

Entonces definimos a R_1 y R_2 como:

$$R_1 = C_0 - C_1 = C_0 - C_0(1-d) = (C_0)(d)$$

$$R_2 = C_1 - C_2 = C_0(1-d) - C_0(1-d) = C_0(1-d)(1-(1-d)) = (C_0)(d)(1-d)$$

De ahí que la tabla de depreciación se construye como sigue:

Fin de año	Depreciación	Depreciación acumulada	Valor en libros
1	$R_1 = (C_0)(d)$	$D_1 = R_1$	$C_1 = C_0 - D_1 = C_0 - R_1$
2	$R_2 = (C_0)(d)(1-d)$	$D_2 = R_1 + R_2$	$C_2 = C_0 - D_2 = C_1 - R_2$
3	$R_3 = (C_0)(d)(1-d)^2$	$D_3 = R_1 + R_2 + R_3$	$C_3 = C_0 - D_3 = C_2 - R_3$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$R_n = (C_0)(d)(1-d)^{n-1}$	$D_n = R_1 + R_2 + ... + R_n$	$C_n = C_0 - D_n = C_{n-1} - R_n$

Generalizando las expresiones de la tabla se obtiene lo siguiente:

Sea $m \leq n$ entonces:

$$R_m = (C_0)(d)(1-d)^{m-1}$$
$$C_m = C_0(1-d)^m$$
$$D_m = \sum_{k=1}^{m} R_k = (C_0)[1-(1-d)^m]$$
$$d = 1 - (\frac{C_n}{C_0})^{\frac{1}{n}}$$

Bajo inflación C_m quedaría $C_m = C_0(1-i-d)^m$

Ejemplo

¿En cuánto deberá vender su automóvil una persona 5 años después de que lo compró en $125,000 si se considera que se deprecia con un porcentaje fijo del 15 % anual?

Solución

$C_5 = C_0(1-d)^m = 125,000(1-0.15)^5 = 55,463.16406$

1.5.4. Método de Fondo de Amortización

En este método existen dos valores para la depreciación, la depreciación anual R que es constante y se deposita en un fondo que se constituye para reemplazar el activo al final de su vida útil; y la depreciación neta que incluye los intereses dados por la tasa de depreciación d y es variable, se acumula y se relaciona directamente con el valor en libros. Bajo este enfoque los intereses se calculan con base en la depreciación acumulada y no con base en el valor en libros.

Además el valor futuro de los n depósitos R es igual al monto acumulado en el fondo para la reposición del activo y debe ser igual, a su vez, a la depreciación total $C_0 - C_n$ (base de depreciación).

Lo anterior representa una anualidad vencida n periodos, es decir, $M = C_0 - C_n = R[\frac{(1+d)^n-1}{d}]$ donde se observa que, como se comentó anteriormente, los intereses están dados por la tasa de depreciación d. Por lo tanto la depreciación anual está dada por:

$$R = \frac{(C_0 - C_n)d}{(1+d)^n - 1}$$

Para construir la tabla de depreciación se considera que, por estar localizada al final del primer periodo, la primera renta R no genera intereses, por lo tanto se tiene:

Fin de año	Depreciación Anual	Intereses	Depreciación Neta	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	-	-	C_0
1	$R_1 = R$	$I_1 = 0$	$DN_1 = R_1 + I_1$	$D_1 = DN_1$	$C_1 = C_0 - D_1$
2	$R_2 = R$	$I_2 = dD_1$	$DN_2 = R_2 + I_2$	$D_2 = D_1 + DN_2$	$C_2 = C_0 - D_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$R_n = R$	$I_n = dD_{n-1}$	$DN_n = R_n + I_n$	$D_n = D_{n-1} + DN_n$	$C_n = C_0 - D_n$

Nótese que la depreciación acumulada en el último periodo es la base de depreciación y que esa columna para cada año k, tomada desde el punto de vista de la construcción del fondo de amortización, puede ser representada como una anualidad vencida k periodos, ya que la renta (depreciación anual) viene de dicha anualidad, es decir, por la construcción de la tabla tenemos para $m \leq n$:

$$D_m = C_0 - C_m = R[\frac{(1+d)^m - 1}{d}] = S_{\overline{m}|i}d$$

$$R_m = R$$

$$\sum_{k=1}^{m} R_k = mR$$

$$I_m = dD_{m-1} = dR[\frac{(1+d)^{m-1} - 1}{d}] = R[(1+d)^{m-1} - 1]$$

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = D_m - \sum_{k=1}^{m} R_k = R[\frac{(1+d)^m - 1}{d}] - mR = R[\frac{(1+d)^m - 1}{d} - m]$$

$$DN_m = R_m + I_m = R + R[(1+d)^{m-1} - 1] = R(1+d)^{m-1}$$

$$C_m = C_0 - D_m = C_0 - R[\frac{(1+d)^m - 1}{d}] = C_0 - S_{\overline{m}i}d$$

Ejemplo

Una escuela adquiere equipo de cómputo en $450,000.

a) Evalúe la depreciación anual con el método del fondo de amortización, considerando que al final de 5 años se recuperan $60,000 por el equipo y la tasa para la depreciación es del 25 % anual.

b) Con los datos anteriores obtenga los intereses del tercer periodo.

c)Calcule la depreciación acumulada del último año.

d) ¿Cuál es la suma de los intereses hasta el tercer año?

Solución

a) $R = \frac{(C_0 - C_n)(d)}{(1+d)^n - 1} = \dfrac{(450,000 - 60,000)(0.25)}{(1+0.25)^5 - 1} = 475,200.23$

b) $I_3 = R[(1+d)^{m-1} - 1] = 475,200.23[(1+0.25)^{3-1} - 1] = 26,730.13$

c) $D_5 = R(\frac{(1+d)^n - 1}{d}) = 475,200.23(\frac{(1+0.25)^5 - 1}{0.25}) = 390,000$

d) $\sum_{k=1}^{3} I_k = R[\frac{(1+d)^m - 1}{d} - m] = 475200.23[\frac{(1+0.25)^3 - 1}{0.25} - 3] = 38,610.19$

1.6. Ejercicios

Interés simple

1. Calcular el interés de un capital de \$10,000 con una tasa de interés del 25 % anual simple en un periodo de 15 meses.
2. Determinar el interés sobre un préstamo de \$3,500 realizado el 4 de abril y con vencimiento el 19 de mayo, si la tasa de interés es de 18 % simple anual.
3. Calcular el monto de un capital de \$150,000 con una tasa de interés de 25 % simple anual en un tiempo de 9 meses.
4. Una empresa firma un pagaré para liquidarlo en un tiempo de 18 meses por la cantidad de \$500,000 con una tasa de interés de 36 % anual simple, ¿Cuál será el capital inicial que recibió al firmar el pagaré?
5. ¿Cuál será la tasa de interés que resulta de recibir un préstamo por la cantidad de \$370,000 pagando un monto de \$410,000 en un plazo de 9 meses?
6. Calcular el tiempo en que un capital de \$80,000 se convierte en un monto de \$160,000 aplicando una tasa de interés de 25 % Anual simple.
7. Un comerciante adquiere un lote de mercancías con valor de \$3,500 que acuerda liquidar haciendo un pago inmediato por \$1,500 y un pago final 4 meses después, acepta pagar 60 % de interés simple sobre el saldo. ¿Cuándo deberá dentro de 4 meses?
8. ¿Cuál es la tasa de interés si un capital se duplica en 595 días?
9. Una inversión realizada hoy por \$1,200 genera al final de un año la suma de \$1,536. ¿Cuál es la suma generada por los intereses? ¿Cuál es la tasa de interés?
10. ¿Cuánto se debe invertir hoy para tener en un semestre la suma de \$8,500 y se ganen intereses de \$480? ¿Cuál es la tasa de interés?
11. Si usted invirtió \$1,500 durante un año, al final del cual le entregaron \$2,000 ¿Cuál fue su rendimiento (tasa)?
12. ¿Cuánto pagará un comerciante por un crédito que le concedió una fábrica de dulces y chocolates, al comprar por \$3,500 a 25 días de plazo, si le cargan una tasa de interés del 3 % mensual? (suponga que un mes tiene 30 días).
13. Un empleado obtiene un préstamo de su empresa por \$4,200 para comprar electrodomésticos y aceptar liquidar el préstamo dos años después. Existe el acuerdo que mientras exista la deuda, pagará intereses mensuales de 2.5 % mensual. ¿Cuánto deberá pagar de intereses cada mes?
14. Una persona compra a crédito una estufa que tiene un precio de contado de \$1,765. Queda de acuerdo en dar una cuota inicial de \$500 y pago final 3 meses más tarde. Si acepta pagar una tasa de interés del 42 % anual sobre el saldo, ¿Cuánto deberá pagar dentro de 3 meses?
15. Una computadora cuesta \$3,250 de contado. Un estudiante está de acuerdo en dar una cuota inicial del 25 % del precio de contado y el resto a 90 días, más un incremento del 15 % sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual paga el estudiante?

16. Luis consigue un préstamo por la suma de \$7,500 a dos años y medio de plazo y una tasa de interés simple de 2.6 % mensual. ¿Cuánto pagará al final del plazo por el préstamo recibido? ¿Cuánto pagará por concepto de intereses?

Interés compuesto y tasas nominales

17. Calcular el valor futuro a interés compuesto de 8 años de un capital de \$6,000 a la tasa de 10 % Anual capitalizado semestralmente.

18. Encontrar la tasa de interés con capitalización trimestral, si un capital se duplica en dos años.

19. Si se invierten \$3,500 ahora esperando obtener \$5,000 en una fecha posterior, ¿Cuándo tiempo se deberá invertir el dinero al fin de ganar al menos el 8 % Anual de interés?

20. ¿Cuánto debe depositarse en un banco si se desea tener un monto de \$10,000 dentro de 3 años a una tasa de 20 % Anual capitalizada semestralmente?

21. ¿Qué cantidad de dinero se poseerá después de prestar \$1,000 al 30 % de interés compuesto anual durante dos años?

22. Hallar el valor futuro de \$200 depositados al 8 %, capitalizable anualmente durante 10 años 4 meses. (Hint: Recuerda que la tasa y el plazo siempre deben estar en la misma unidad de medida)

23. Hace 20 años pedí un préstamo en el banco. Hoy lo liquidé con un pago único de \$10,892.56. La tasa de interés que se cargó durante todo ese tiempo fue de 1 % efectiva mensual. ¿Cuánto dinero le pedí al banco hace 20 años? ¿Cuál es la tasa anual efectiva equivalente? ¿Cuál es la tasa (nominal) anual capitalizable al mes equivalente?

24. Averiguar en cuanto tiempo un capital de \$1,200 se convierte en \$1,763.194 a una tasa de interés compuesto anual del 8 %.

Fuerza de interés

25. Si se invierte un capital de \$5,000 en una cuenta de banco con una fuerza de interés del 5 % ¿En 5 años cuanto sera el monto final?

26. Cuanto tiempo debe pasar para que una inversión de \$10,000 llegue a un monto final de \$23,000 con una fuerza de interés del 8 %.

27. Cual es la tasa de interés anual simple equivalente a una fuerza de interés del 7.5 %.

28. Cual es la tasa de interés anual capitalizables semestralmente compuesta equivalente a una fuerza de interés del 7.5 %.

29. Cual es la tasa de interés anual capitalizable mensualmente equivalente a una fuerza de interés del 7.5 %.

30. Cual fue el monto inicia de \$4,500 con una fuerza de interés del 3.4 %, si dicho capital fue invertido hace 3 años.

Anualidades vencidas

31. Calcular el monto (valor futuro) y el capital (valor presente) de un conjunto de cinco pagos mensuales vencidos de \$850.00, si la tasa de interés es de 24 % con capitalización mensual.

32. En una tienda anuncian que puedes comprar un televisor con abonos semanales de \$185.00, durante un año; considerando que la tasa de interés es de 7.8 % con capitalización semanal, ¿cuál sería el precio de contado que pagarías por ese televisor?

33. Si al momento de iniciar una carrera profesional los padres de un joven depositan \$1,000.00 cada mes durante tres años en un fondo de inversión que paga 7.8 % de intereses y se mantendrá constante, ¿cuánto habrán juntado al final?

34. Determinar el monto y el capital de una serie de pagos bimestrales de \$1,250.00 cada uno, durante dos años y medio, considerando una tasa de interés de 8.59 %.

35. Suponiendo que pediste un préstamo en un banco por una cantidad de \$8,500.00 a una tasa de interés de 28 % nominal mensual y por el cual debes pagar al final de cada mes \$820.30, ¿cuántos pagos debes efectuar para saldar tu deuda?

36. Considerando los datos del ejercicio anterior, pero ahora con un importe de cada pago de \$791.83, ¿cuál es el número de pagos necesarios para saldar la deuda y qué sucede si el número de pagos es fraccionario? (Proponga una estrategia de pago).

37. Imagina que eres el beneficiario de un seguro de vida por el cual recibirás \$3,100.00 mensuales durante los siguientes 10 años, pero que por un problema prefieres recibir la suma de dinero equivalente el día de hoy; con una tasa de interés del 19.35 % convertible de manera mensual. Calcula la suma de dinero que recibirías.

38. ¿Cuánto tiempo tardarías para reunir \$200,000.00 si depositaras al final de cada bimestre \$12,000 en un fondo de inversión que paga el 22.92 %? (después de obtener el tiempo, exprese su respuesta en años meses y días).

39. Calcular la tasa efectiva anual que se está cargando si con 26 abonos semanales de \$65 se paga un teléfono celular cuyo costo es de \$1,500.00. Grafique la ecuación a resolver; luego, use interpolación lineal con un intervalo de la tasa nominal semanal de [0.89 %, 0.94 %]; después corrobore su respuesta utilizando algún método numérico (fije el error ϵ más apropiado).

40. Se está comprando un auto a mensualidades fijas de \$2,300 durante 4 años a una tasa de interés del 13 % capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el precio del auto al momento de hacer el último pago?

41. Con los datos del ejercicio anterior, ¿cuál sería el valor del automóvil si se paga de contado?

42. ¿Cuál es el precio de contado que paga una persona por un televisor si realiza abonos mensuales de \$200 a una tasa de interés del 8 % capitalizable mensualmente por un lapso de un año?

43. Una empresa desea comprar equipo nuevo con un valor de contado de \$350,000. Para ello le ofrecen un plan de pagos trimestrales a una tasa de interés del 10 % capitalizable trimestralmente. Si la empresa desea terminar de pagar el equipo nuevo en dos años entonces, ¿de cuánto deberán ser sus abonos?

44. Un individuo desea reunir dinero para un viaje. El banco le ofrece un plan de abonos semanales de \$350 bajo una tasa de interés. Los abonos se harán por tres meses y se espera tener una cantidad de \$5,000 ¿De cuánto debe ser la tasa de interés nominal mensual para que se pueda juntar el dinero?

45. ¿En cuánto tiempo podrá liquidar una empresa una flotilla de autos que compró con un valor de contado de \$750,000 y por el cual realiza pagos mensuales de \$25,000 a una tasa de interés anual capitalizable mensualmente del 7 %?

46. En el ejercicio anterior no se obtiene un plazo mensual entero; por lo tanto realice algunas estrategias de pago, es decir, haga un ajuste en el plazo para cerrar a meses enteros y obtenga la renta se la flotilla de autos si se liquida en 33 meses. ¿De cuánto es la renta si se liquida dicha flotilla en 34 meses? ¿cuál de estas dos estrategias le conviene más a la empresa y por qué?

Anualidades anticipadas

47. Imagínate dueño de locales en plazas comerciales, Al rentar un local comercial recibes \$1,000.00 al inicio de cada bimestre y éstos son depositados por tu inquilino en una cuenta bancaria que paga el 15 % anual con capitalización bimestral. ¿Cuánto dinero tendrás después de 10 años?

48. Para comprar una bicicleta cuyo precio es de \$2,800.00 se pueden hacer 5 pagos mensuales comenzando al momento de pactar la compra. Si la tasa de interés anual es del 32.4 % nominal mensual, determina el importe de cada pago.

49. ¿Con cuántos abonos “chiquitos” anticipados de \$792.15 se puede comprar un televisor cuyo precio de contado es de \$8,350.00, si la tasa de interés es del 2.45 % mensual?

50. Para resolver sus problemas de dinero, un banco le presta a una persona la cantidad de \$57,496.77 que deberá pagar en un plazo de ocho años. Para liquidar deberá abonar al comienzo de cada año la cantidad de \$6,000.00. ¿Cuál es la tasa de interés que le está cargando el banco? Grafique la ecuación a resolver; luego use interpolación lineal proponiendo un intervalo obtenido a través de la gráfica; después corrobore su respuesta utilizando algún método numérico (fije el error ϵ más apropiado).

51. Se acuerda pagar una hipoteca con 20 abonos trimestrales anticipados de \$450.00 e intereses del 28 % compuesto trimestralmente:
a) Determine la cantidad actual de la hipoteca.
b) Obtenga la renta mensual que sustituye a la trimestral.

52. Supóngase el caso de un contrato de arrendamiento (bajo estos contratos los pagos son anticipados) por un año y medio, en el que los pagos son mensuales por un valor de \$700,000, si las partes del contrato acuerdan que se realice un solo pago al principio del contrato y la tasa estipulada es del 3 % mensual, ¿de cuánto sería el valor de ese pago único?

53. Una persona recibe por concepto de arriendo (mes anticipado), la suma de \$1,000,000 mensuales, y deposita el 40 % en una cuenta de ahorros en una institución financiera, que le reconoce el 2 % de interés mensual. El depósito lo realiza una vez que recibe el valor de la renta. Si el inmueble estuvo arrendado por un año y medio, ¿Cuanto tendrá acumulado en la cuenta al final de los 18 meses?

54. Con una tasa de interés del 12.36 % efectiva semestral, ¿Cuál debe ser el valor de los pagos semestrales anticipados que, hechos por 10 años, amortizarán una deuda de $120,000,000?

Anualidades diferidas

55. En el mes de abril una tienda departamental ofrece una promoción de "compre ahora y pague después". La señora Ramírez compró una computadora a crédito, que recibió el día 2 de mayo y que deberá pagar con 5 abonos mensuales de $2,650.00 a partir del 2 de agosto del mismo año. Si el almacén carga el 36 % (capitalizable de manera mensual) a estas operaciones, investiga cuál es el precio de contado de esta computadora.

56. El día de hoy deposité la cantidad de $73,535.00 en una inversión que paga el 26.04 % (capitalizable al mes) para poder retirar mensualidades de $9,000.00 después de haber transcurrido 5 meses de haber hecho el depósito. ¿cuántos retiros podré realizar?

57. Después de 5 años, y al final de cada año, pensamos invertir $10,000. ¿Qué cantidad tendremos dentro de 20 años si la tasa de interés efectiva que nos otorgan es del 8 % anual?

58. ¿Cuál es el valor actual de una renta semestral de $12,000.00 durante 5 años, si el primer pago se realiza dentro de 2 años y el interés es de 11.5 % semestral?

59. Calcular el valor actual de una renta semestral de $60,000.00, que se pagará durante 7 años, si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y el interés es e 34 % anual capitalizable semestralmente.

60. El 15 de mayo del año 1 se depositaron $15,000.00 en un fondo de inversión, con objeto de retirar 8 mensualidades a partir del 15 de febrero del año 3. Si los intereses que gana el fondo son de 27.48 % capitalizable mensualmente, hallar el valor de cada mensualidad que se podrá retirar.

61. El 12 de enero una persona acuerda pagar una deuda mediante 8 pagos mensuales de $400.00 c/u haciendo el primero el 12 de julio del mismo año. Si después de realizar el quinto pago deja de hacer dos, ¿Cuál será el monto del último pago para saldar completamente su deuda si la tasa de interés es de 3.66 % mensual?

Perpetuidades

62. Hallar el valor actual de una perpetuidad de $5,000.00, cuyo primer pago se hará exactamente al final de los siguientes 6 meses, con tasa nominal del 12 % convertible mensualmente.

63. Los exalumnos de una universidad deciden donarle un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial es de $200,000.00 y la renta anual para el mantenimiento se estima en $35,000.00 ¿Cuál es valor actual de dicha donación, si la tasa efectiva es del 7.00 %?

64. Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos, si el primero corresponde a $1,000,000, son crecientes en un 10 % y la tasa efectiva es del 8 % por periodo. (para ello obtenga una fórmula para obtener el valor presente de un gradiente geométrico haciendo tender a infinito el plazo) ¿En qué caso el límite está definido (converge)? ¿Cuál es la relación entre la tasa de incremento y la tasa de interés?

65. ¿Cuál será el valor inicial equivalente de una serie infinita de pagos mensuales que crecen cada mes en \$300,000, cuyo primer pago es de \$2,000,000 y para el cual se reconoce una tasa del 2.5 % efectivo mensual? (para ello obtenga una fórmula para obtener el valor presente de un gradiente aritmético haciendo tender a infinito el plazo).

Amortización gradual

66. Una deuda de \$15,000 se cancela en 14 meses con intereses del 20 % anual capitalizable mensualmente. Sin utilizar la tabla de amortización:

a) Obtenga la renta mensual
b) ¿Por cuánto son los intereses en el periodo 10?
c) ¿Cuánto vale la amortización en el antepenúltimo pago?
d) ¿Cuál es el saldo insoluto después de la renta 8?
e) En total, ¿Cuántos intereses generó la deuda?

67. Construya la tabla de amortización del ejercicio anterior.

Amortización constante

68. Con el sistema de amortización constante, tasa de interés del 30 % nominal trimestral y plazo de 2 años, ¿Cuál es la amortización trimestral? Y obtenga el cuadro de amortización para un crédito de \$200,000. Sin utilizar la tabla de amortización:

a) Obtenga la amortización trimestral
b) ¿Qué intereses se pagan en el periodo 6?
c) ¿Cuánto vale la renta en el periodo 3?
d) ¿Cuál es el saldo insoluto en el penúltimo periodo?
e) ¿En total, ¿Cuántos intereses generó la deuda?

69. Construya la tabla de amortización del ejercicio anterior.

Amortización con variable aritmética

70. Se tiene una deuda de \$500,000 con intereses del 10 % efectivo semestral. Dicha deuda se liquida en 8 años y medio y cada pago es \$2,000 mayor que el anterior. Sin utilizar la tabla de amortización calcule:

a) La renta número 11
b) El saldo insoluto después del octavo pago
c) Los intereses en la renta número 5
d) La amortización en la penúltima renta
e) Los intereses acumulados hasta después de hacer ocho pagos

71. Construya la tabla de amortización del ejercicio anterior.

Amortización con variable geométrica

72. Se adquiere un terreno con un valor de $100,000. Este se ve amortizando durante 8 años con abonos cuatrimestrales que crecen 7 % sucesivamente. La tasa de interés de la deuda es del 10 % nominal cuatrimestral. Sin utilizar la tabla de amortización obtenga:

    a) La renta número 10?
    b) El capital que liquida la deuda después de hacer el pago 20?
    c) De cuánto son los intereses y la amortización en la tercera renta?
    d) ¿Cuál es el total de intereses que genera la deuda al final del plazo?

73. Construya la tabla de amortización del ejercicio anterior.

Depreciación línea recta

74. Se compra una maquinaria en $121,000. Se estima que ésta tendrá 5 años de vida útil y $13,200 como valor de rescate. Empleando el método de la línea recta:

    a) Obtenga la depreciación anual
    b) Calcule la depreciación acumulada hasta el año 3
    c) ¿Cuál es el valor en libros del activo al final del año 2?
    Considerando inflación anual del 5 %:
    d) Calcule el penúltimo valor del activo con inflación
    e) ¿Cuál es el valor de rescate de la maquinaria?

Depreciación suma de los dígitos

75. Se compró una camioneta en $220,000. Suponiendo que dicha camioneta tiene 6 años de vida útil y un valor de desecho de $73,000; utilizando el método de la suma de los dígitos:
    a) Calcule la depreciación en el año 4
    b) Obtenga la depreciación acumulada en el quinto año
    c) ¿Cuál es el valor en libros al final del año 2?

Depreciación tasa fija

76. Un activo costó $150,000 y después de 8 años tiene un valor de rescate de $25,000. Con el método de la tasa fija calcule:

    a) La sexta depreciación
    b) La depreciación acumulada al cuarto año
    c) El penúltimo valor en libros
    d) Construya la tabla de depreciación y valide los resultados obtenidos

Depreciación Sinking Fund

77. La Escuela de Contaduría adquirió equipo de computación en \$450,000.

a) Evalúe la depreciación anual con el método del fondo de amortización, considerando que al final de 5 años se recuperan \$60,000 por el equipo y la tasa para la depreciación es del 25 % anual
b) Con los datos anteriores obtenga los intereses del tercer periodo
c) ¿Cuál es la depreciación neta del cuarto año?
d) Calcule la depreciación acumulada del último año
e) ¿Cual es la suma de los intereses hasta el tercer año?
f) ¿Cuál es el valor en libros para el segundo año?

1.7. Enlace con el capítulo siguiente

Ya teniendo claro los conceptos básicos de las matemáticas financieras como valor futuro, valor presente, tasa de interés, amortización, depreciación, etc. El siguiente capítulo introducirá a la aplicación directa de dichos conceptos en temas relacionados a los mercados financieros en donde unos de los objetivos principales es el cálculo del valor de instrumentos financieros de deuda y capitales, tales como bonos y acciones respectivamente.

2. Matemáticas Financieras II

Introducción

Las Matemáticas Financieras II es la segunda asignatura de la seriación obligatoria de finanzas en la licenciatura de Actuaría del plan de estudios 2014.

Es importante tomar en cuenta la continuidad de las materias para poder tener un seguimiento en los temas que se desarrollan en esta segunda parte, en el capítulo anterior se desarrollaron conceptos claves en las finanzas como lo son: tasa de interés, tipos de intereses, valor presente, valor futuro, anualidades, amortización, depreciación, entre otros, los cuales se seguirán utilizando para realizar el análisis de esta segunda parte.

Los temas que se desarrollan en este capítulo tienen como objetivo que los estudiantes tengan las habilidades necesarias para distinguir los diferentes tipos de inversiones que existen en el mercado.

Dado lo anterior, es importante que los alumnos conozcan las características de algunos instrumentos financieros que existen en el mercado de deuda y en el mercado de capitales, de igual forma cabe mencionar que el objetivo del acercamiento a estos temas es tener en cuenta el papel que toman los mercados en la asignación de recursos, la intermediación financiera y su influencia en el factor de desarrollo.

Por último se desarrollan metodologías que ayudan a escoger de manera adecuada un proyecto de inversión, dichos temas se basan en el análisis de posibles cambios que pudieran llegar a ocurrir en factores que afecten directamente al capital económico del proyecto y con esto llegar a tomar medidas necesarias para mitigar los riesgos a los cuales se está expuesto.

2.1. Mercado de deuda

El Gobierno y las empresas privadas frecuentemente necesitan financiarse, ya sea para invertir en proyectos o simplemente para seguir realizando sus actividades cotidianas. El Gobierno o toda empresa privada pueden conseguir recursos financieros de diversas formas, pero la opción más común es solicitando un crédito o a través de la emisión de un instrumento de deuda.

El mercado de deuda es el lugar en donde se emiten y negocian los instrumentos de deuda. Aquí se encuentran todos aquellos instrumentos que representan una deuda, que tienen una fecha de vencimiento, un rendimiento el cual está determinado por una tasa de interés y cierto nivel de riesgo.

Este mercado es el más importante en México dada la cantidad de transacciones, cabe mencionar que el Gobierno Federal es de los emisores más grandes de deuda.

2.1.1. Instrumentos de deuda

Los instrumentos de deuda son títulos financieros, es decir, son contratos en los cuales se establece el compromiso de pagar recursos financieros prestados más un valor adicional (intereses) por el préstamo de dichos recursos, en un tiempo determinado. Los instrumentos del mercado de deuda comúnmente se clasifican según:

- Su cotización: Los instrumentos financieros según su cotización se clasifican en "*a descuento*" y "*a precio*", es decir, instrumentos que no pagan intereses intermedios e instrumentos que sí los pagan.
- Su colocación: Los instrumentos financieros según su colocación se clasifican en "*colocación pública*" y en "*colocación privada*", es decir, la diferencia radica en a que sector la población están dirigidos los instrumentos.
- El tipo de tasa: Estos instrumentos se dividen en instrumentos de tasa de interés fija, tasa de interés variable y tasa de interés indexada.
- El riesgo del emisor: La capacidad de pago del emisor puede ser un criterio de clasificación de los instrumentos de deuda. Normalmente, las agencias calificadoras asignan una calificación a los emisores de instrumentos de deuda de acuerdo con su capacidad de pago.

2.1.2. Bonos

En el capítulo anterior se desarrolló la teoría del interés, en donde se estudiaron conceptos como interés simple, interés compuesto, fuerza de interés, anualidades, etc. De igual forma se analizaron algunos ejemplos prácticos de cada tema en particular pero en el mercado existen instrumentos financieros con una complejidad que requiere de una valuación más elaborada.

Los bonos son el primer acercamiento a instrumentos financieros más complejos, en donde se utilizarán los conceptos mencionados anteriormente para realizar la valuación de su precio, de ahí que una de las principales aplicaciones de las matemáticas financieras es la valuación de Bonos.

Formalmente los bonos u obligaciones son instrumentos de deuda utilizados por el gobierno y las empresas para financiarse (el gobierno emite bonos y las empresas emiten obligaciones), es decir, cuando el gobierno o alguna empresa no cuenta con el capital suficiente para poder invertir en algún proyecto se ve en la necesidad de endeudarse pidiendo recursos financieros prestados. En este caso, se pacta una deuda entre ambas partes (prestamista y deudor) en donde se establecen las condiciones para el pago de dichos recursos financieros.

Adicionalmente el deudor se compromete a pagar flujos de efectivo en determinados periodos de tiempo por un precio previamente establecido, así que en este capítulo se estudiaran dos tipos de bonos con ciertas características propias: bonos cuponados y bonos cupón cero. La principal diferencia entre estos instrumentos es que el primero asegura flujos de efectivos en cada periodo de capitalización a diferencia del segundo que solo asegura un pago de flujo de efectivo y este se hace valido al final del plazo.

Para conocer más sobre estos tipos de bonos es necesario comenzar a definir sus características generales y posteriormente desarrollar la teoría de cada uno en particular.

2.1.3. Características de los bonos

Los pagos que ofrece un bono son periódicos en cada fecha de capitalización y reciben el nombre de cupones y son calculados con base a una tasa de interés aplicada al valor de caratula del bono. Este valor de caratula tiene como propósito definir la serie de pagos a realizar en cada fecha cupón, y en general se da por hecho que el valor facial es igual al valor nominal, además de que es común cotizar el valor nominal en \$100 a menos que se indique lo contrario. Este último valor es conocido como valor de redención y en general se efectúa al final del plazo del instrumento, es decir, en la madurez y representa una redención o compensación por el préstamo de la deuda. Por último un bono cuenta un una tasa de interés la cual funciona para descontar los flujos de efectivo, también se dice que dicha tasa es el rendimiento que genera el bono.

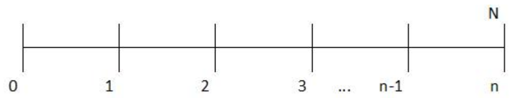
En resumen un bono cuenta con los siguientes elementos:

- Nominal (N): El valor nominal del bono también es conocido como valor de redención.
- Facial (F): El precio facial del bono sobre el cual se calculan los cupones (en algunos casos F=N).
- Tasa cupón (c): La tasa cupón es la que actúa sobre el precio facial para poder obtener los cupones que serán pagados por el bono.
- Cupones (C): Los cupones son los pagos otorgados por el bono y estos se obtienen por medio del producto del precio facial y la tasa cupón ($C = Fc$).
- Rendimiento (r): El rendimiento del bono (YTM por sus siglas en ingles yield to maturity) es la tasa sobre la cual se descuentan los flujos de efectivo para obtener el precio del instrumento en algún punto del tiempo.

2.1.4. Bonos cupón cero o Bonos a descuento puro

Los Bonos cupón cero se caracterizan por su único flujo de efectivo, no pagan intereses, es decir, no pagan cupones sino solo el nominal.

Si se desea obtener el precio del instrumento es necesario calcular el valor presente del único flujo de efectivo.



Por lo que el precio del bono esta dado por:

$$P = NV^n$$
$$P = N(1+r)^{-n}$$
$$P = \frac{N}{(1+r)^n}$$

La tasa con la que se descuenta el flujo de efectivo (rendimientos YTM) para los bonos cupón cero es conocida como "tasa spot"(al día de hoy o al momento).

Una vez desarrollada la fórmula para obtener el precio del bono, es fácil desarrollar las siguientes igualdades.

$$N = P(1+r)^n$$
$$n = \frac{ln(\frac{N}{P})}{ln(1+r)}$$
$$r = \sqrt[n]{\frac{N}{P}} - 1$$

Ejemplo

Calcular el precio de un Bono cupón cero que paga un nominal de \$100 con un YTM del 3 % capitalizable semestralmente y vencimiento de 4 años.

Solución

Datos
N=100
n=4(2)=8
i=$\frac{0.03}{2} = 0.015$

Procedimiento
$P = \frac{100}{(1+0.015)^8} = 88.771$

Ejemplo

Calcular el precio de un Bono cupón cero que paga un nominal de \$1,000 con un YTM del 3 % anual efectivo y vencimiento de 2 años.

Solución

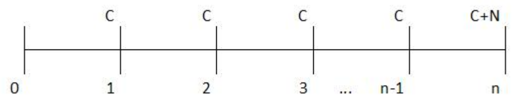
Datos
N=1,000
n=2
i=3 %

Procedimiento
$P = \frac{1{,}000}{(1+0.03)^2} = 942.595$

2.1.5. Bonos cuponados

Los bonos cuponados son instrumentos que aseguran el pago de flujos de efectivo periódicamente, los cuales son determinados por el precio facial y la tasa cupón, durante los primeros $n-1$ periodos y en el último periodo, es decir, en "n" se paga un cupón más el valor de redención.

El bosquejo de un bono cuponado está dado de la siguiente forma:



Así, para obtener el precio del bono es necesario traer a valor presente los flujos de efectivo de la siguiente manera:

Primeramente se calculan los cupones pagaderos:

$$C = cF$$

Entonces el precio del bono es:

$$P = C(1+r)^{-1} + C(1+r)^{-2} + C(1+r)^{-3} + ... + (C+N)(1+r)^{-n}$$
$$P = C[(1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + (1+r)^{-3} + ... + (1+r)^{-n}] + N(1+r)^{-n}$$
$$P = C(\frac{1-(1+r)^{n}}{r}) + N(1+r)^{-n}$$
$$P = Ca_{\overline{n}r} + N(1+r)^{-n}$$
$$P = Ca_{\overline{n}r} + NV^{-n}$$

Ahora realizando el siguiente despeje:

$$a_{\overline{n}r} = \frac{1-V^{n}}{r}$$
$$r(a_{\overline{n}r}) = 1 - V^{n}$$
$$1 - (r)(a_{\overline{n}r}) = V^{n}$$

Suponiendo que $F \neq N$ el precio de un bono está dado por:

$$P = Ca_{\overline{n}r} + NV^{-n}$$
$$P = (cF)(a_{\overline{n}r}) + (N)(1-(r)a_{\overline{n}r})$$
$$P = (cF)(a_{\overline{n}r}) + N + (N)(r)(a_{\overline{n}r})$$
$$P = N + (cF - rN)a_{\overline{n}r}$$

$$\frac{P}{N} = \frac{N + (cF - rN)a_{\overline{n}r}}{N}$$

$$\frac{P}{N} = 1 + (\frac{cF}{N} - r)a_{\overline{n}r}$$
$$P = N + (\frac{cF}{N} - r)Na_{\overline{n}r}$$
$$P - N = (\frac{cF}{N} - r)Na_{\overline{n}r}$$

Sea $g = \frac{cF}{N}$ entonces:

$$P - N = (g - r)Na_{\overline{n}r}$$

Otra fórmula alternativa para obtener el precio de un bono es:

$$P = Ca_{\overline{n}r} + NV^{-n}$$
$$P = cF(\frac{1 - V^n}{r}) + NV^n$$
$$P = \frac{cF}{r} - \frac{cFV^n}{r} + NV^n$$
$$P = \frac{c}{r}(F - FV^n) + NV^n$$

Si $F = N$ entonces el precio de un bono estaría dado por:

$$P = Ca_{\overline{n}r} + NV^{-n}$$
$$P = (cN)(a_{\overline{n}r} + NV^n)$$
$$P = N[(c)(a_{\overline{n}r}) + V^n]$$
$$P = N + (cN - rN)a_{\overline{n}r}$$
$$P = N + N(c - r)a_{\overline{n}r}$$

Fórmula de diferencia de tasas.

$$P - N = (c - r)Na_{\overline{n}r}$$

Otra fórmula alternativa para obtener el precio de un bono cuando F=N es:

$$P = Ca_{\overline{n}r} + NV^{-n}$$
$$P = (cN)(\frac{1 - V^n}{r}) + NV^{-n}$$
$$P = \frac{cN}{r} - \frac{cNV^n}{r} + NV^n$$
$$P = \frac{c}{r}(N - NV^n) + NV^n$$

Fórmula de Makeham

Existen tres posibles situaciones entre el precio de un bono, el valor Facial y las tasas de interés, dichas situaciones son de relevancia en el análisis de los bonos.

Suponiendo que $F = N$, entonces se dice que un bono se compra o vende con premio (bono sobre par) si $P > F$y P-F es llamado premio o prima. En contraste, cuando el precio de un bonos es menor al facial, es decir, $P < F$ se dice que el bono se compra o vende con descuento (bono bajo par) y $F - P$ es el descuento del bono.

Cuando ocurre el primer caso, la fórmula de diferencia de tasas se visualiza de la siguiente forma:

$$P - F = (c - r)Na_{\overline{n}r}$$

Y para el caso contrario se tendrá:

$$F - P = (r - c)Na_{\overline{n}r}$$

Cuando $N \neq F$, entonces la relación queda de forma similar, con la diferencia que se hace la relacion entre el precio y el valor de redención, obteniendo lo siguiente:

Bonos sobre par $P > N$ entonces:

$$P - N = (g - r)Na_{\overline{n}r}$$

Bonos bajo par $P < N$:

$$N - P = (r - g)Na_{\overline{n}r}$$

Por lo tanto las relaciones par quedan de la siguiente forma.

Si $F = N$ entonces:

$$\text{P} > \text{F} \iff \text{r} < \text{c Sobre par}$$

$$\text{P} = \text{F} \iff \text{r} = \text{c A la par}$$

$$\text{P} < \text{F} \iff \text{r} > \text{c Bajo par}$$

Si $F \neq N$ entonces:

$$\text{P} > \text{N} \iff \text{r} < \text{g Sobre par}$$

$$\text{P} = \text{N} \iff \text{r} = \text{g A la par}$$

$$\text{P} < \text{N} \iff \text{r} > \text{g Bajo par}$$

En este caso g es llamada tasa cupón ajustada.

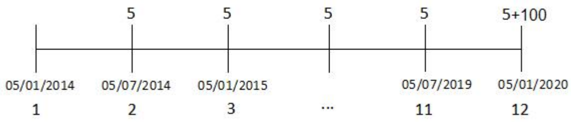
Ejemplo

Un Bono paga cupones semestrales del 10 % anual y paga una redención de \$100. El primer cupón se pago el 5 de Julio del 2014 y la madures ocurrirá el 5 de Enero del 2020.

¿Cuál es el precio del bono en la fecha de emisión, es decir, el 5 de Enero del 2014?.

1. 7 % nominal capitalizable semestralmente.
2. 10 % anual convertible dos veces al año.
3. 13 % anual capitalizable al semestre.

Solución



1. Datos
F=100
N=100
c=$\frac{0.07}{2} = 0.05$
C=$(0.05)(100) = 5$
r=$\frac{0.07}{2} = 0.035$

Procedimiento

$$7.5(\frac{1-(1.035)^{-12}}{0.035}) + 100(1.035)^{-12} = 114.49$$

2. Datos
F=100
N=100
c=$\frac{0.07}{2} = 0.05$
C=$(0.05)(100) = 5$
r=$\frac{0.10}{2} = 0.05$

Procedimiento

$$7.5(\frac{1-(1.05)^{-12}}{0.05}) + 100(1.05)^{-12} = 100$$

3. Datos
F=100
N=100
c=$\frac{0.07}{2} = 0.05$
C=$(0.05)(100) = 5$
r=$\frac{0.13}{2} = 0.065$

Procedimiento

$$7.5(\frac{1-(1.065)^{-12}}{0.065}) + 100(1.065)^{-12} = 87.76$$

Realizando un análisis se obtiene lo siguiente.

Bono	P	F	r	c
1	114.49	100	7 %	10 %
2	100	100	10 %	10 %
3	87.76	100	13 %	10 %

Dado que $F = N$ entonces se observan las relaciones par.

$$\text{P} > \text{F} \iff \text{r} < \text{c Sobre par}$$

$$\text{P} = \text{F} \iff \text{r} = \text{c A la par}$$

$$\text{P} < \text{F} \iff \text{r} > \text{c Bajo par}$$

En el caso del bono 1 que es sobre par o un bono con prima, el premio es:

$$P - F = 114.49 - 100 = 14.49$$

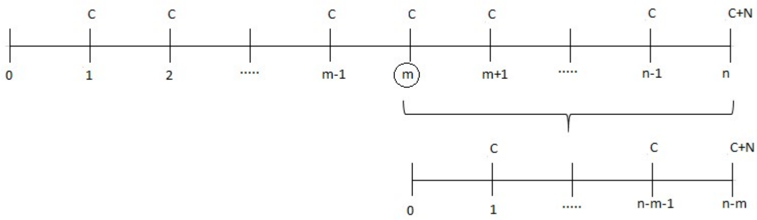
En el caso del bono 3 que es bajo par o un bono con descuentos, el descuento es:

$$F - P = 100 - 87.76 = 12.24$$

2.1.6. Valuación de Bonos en fecha cupón

Hasta este punto se ha obtenido el precio de un bono, es decir, obtener el valor presente de los flujos de efectivo en el tiempo cero, pero en ocasiones no es suficiente este cálculo, ya que al emitir un bono es necesario dar un seguimiento al precio del instrumento en cualquier fecha cupón para poder analizar su comportamiento y determinar si en cierto punto del tiempo es conveniente vender o comprar el instrumento financiero.

El bosquejo del precio de un bono al tiempo ”m” se muestra a continuación:



Y el precio del bono en el tiempo ”m” es:

$$P = Ca\overline{n-m}r + NV^{n-m}$$

Ejemplo

Retomando el ejemplo anterior calcule el precio del bono al día 5 de Julio del 2014 inmediatamente después de haberse pagado el cupón.

Solución
$F = N = 100$
$n = 12$
$m = 7$
$n - m = 5$ $c = \frac{0.10}{2}$
$C = cF = (\frac{0.10}{2})(100) = 5$
$r_1 = \frac{0.07}{2}$, $r_2 = \frac{0.10}{2}$, $r_{3=\frac{0.13}{2}}$

1. $\Rightarrow P_{05/07/17} = 5a_{\overline{5}(\frac{0.07}{2})} + 100V^5$=106.76

2. $\Rightarrow P_{05/07/17} = 5a_{\overline{5}(\frac{0.10}{2})} + 100V^5$=100

3. $\Rightarrow P_{05/07/17} = 5a_{\overline{5}(\frac{0.13}{2})} + 100V^5$=93.76

Haciendo el cálculo para los tres rendimientos diferentes y analizando en las diferentes fechas cupón se obtiene lo siguiente.

r_1) $P_{05/01/14}$=114.45 $P_{05/07/17}$=106.76 $P_{01/01/20}$=100

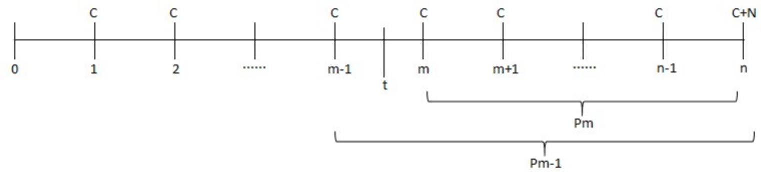
r_2) $P_{05/01/14}$=100 $P_{05/07/17}$=100 $P_{01/01/20}$=100

r_2) $P_{05/01/14}$=87.76 $P_{05/07/17}$=93.76 $P_{01/01/20}$=100

2.1.7. Valuación de Bonos entre fechas cupón

En algunas ocasiones el precio de un bono deben ser calculado entre fechas cupón, pero existe una interrogante sobre los flujos de efectivo pagados, es decir, cuando se hace la evaluación del preció ¿se debe o no tomar en cuenta el primer flujo de efectivo?.

El bosquejo es el siguiente:



El precio del bono en el tiempo "t" considerando el primer cupón será el valor del descuento del precio del bono en el tiempo "m" mas un cupón, es decir:

$$P_t = (P_m + C)(1+r)^{-(\frac{m-t}{d})}$$

En donde $m - t$ es igual a los días entre la fecha cupón y la fecha de valuación y d los días de capitalización de la tasa cupón, es decir, los días que transcurren entre el pago de cupones.

Por lo tanto se define a "T" como:

$T = \frac{m-t}{d}$

Y así

$$P_t = (P_m + C)(1+r)^{-T}$$

Otra forma de calcular el precio del bono en el tiempo "t" será el valor acumulado del precio del bono en el tiempo "$m-1$".

$$P_t = P_{m-1}(1+r)^{\frac{t-(m-1)}{d}} = P_{m-1}(1+r)^{T'}$$

En donde T' esta dado por:

$T' = \frac{t-(m-1)}{d}$

Al precio del bono al tiempo "t" considerando el primer flujo de efectivo (cupón) se le conoce como precio sucio.

$$P_t = P_{st}$$

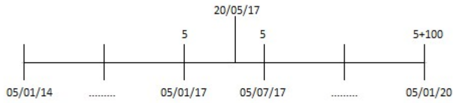
Si no se considera el cupón, el ajuste queda como el precio sucio del bono menos el cupón multiplicado por T' y a este cálculo se le conoce como precio limpio o precio de mercado

$$P_{st} - T'C = P_{lt}$$

Ejemplo

Retomando el ejercicio inicial calcule el precio del Bono al 20 de Mayo del 2017.

$P_{20/05/17}$



Solución

Se sabe que $P_{05/07/17}$ =106.76 entonces:

$P_{20/05/17}$=(106.76 + 5)$(1 + \frac{0.07}{2})^{\frac{-46}{180}}$=110.78 (Precio sucio)

$T' = 1 - \frac{46}{180} = \frac{67}{90}$

$\Rightarrow P_l$ =110.78-($\frac{67}{90}$)5=107.05 (Precio limpio)

2.1.8. Valor en libros de un Bono

En los reportes contables de activos en un periodo de tiempo en particular, un emisor de deuda tienen que designar un valor a los bonos que se poseen en determinado tiempo, ese valor se llama valor en libros y usualmente es tomado como el precio corriente del bono valuado con la tasa de rendimiento original, es decir, la tasa con la cual se pactó el instrumento.

Para efectos contables el interés acumulado del último cupón será considerado como parte separada del valor en libros del bono.

Para los bono que son bajo par (con descuento) o sobre par (con premio) su valor cambia en el tiempo hasta llegar a ser el valor de su redención, es por ello que es importante estudiar un procedimiento que nos permita registrar en libros contables los cambios en el valor de los bonos, lo más usual es elaborar una tabla donde se registren intereses y cambios de valor en los instrumentos.

2.1.9. Amortización de Bonos

Un bono representa una deuda para el emisor y los cupones son los pagos de dicha deuda en los primeros "$n-1$" periodos ya que en el último periodo "n" el pago de la deuda es el cupón más el valor de redención, entonces en total se tendrán "n" pagos y el saldo insoluto de la deuda (lo que se debe) está dado por el precio del bono después de pagar cada flujo de efectivo.

Entonces la amortización de un bono está dada por el desglose del precio del bono en cada periodo.

Periodo	Renta	Intereses	Amortización	Saldo Insoluto
0	-	-	-	$S_0 = P_n$
1	$R_1 = cF = C$	$I_1 = rP_n$	$A_1 = R_1 - I_1$	$S_1 = P_{n-1}$
2	$R_2 = cF = C$	$I_2 = rP_{n-1}$	$A_2 = R_2 - I_2$	$S_2 = P_{n-2}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n-1	$R_{n-1} = cF = C$	$I_{n-1} = rP_2$	$A_{n-1} = R_{n-1} - I_{n-1}$	$S_{n-1} = P_1$
n	$R_n = N + C$	$I_1 = rP_1$	$A_n = R_n - I_n$	$S_n = P_0 - N = 0$

Al saldo insoluto es igual al valor en libros de un bono.

Para un bono las formulas son las siguientes:

Para toda $m \in 1, 2, 3, ..., n-1$ la renta del periodo m es:

$$R_m = C$$

Y para m=n la renta del periodo esta dado por:

$$R_n = N + C \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} R_k = nC + N$$

Los intereses para cualquier periodo, es decir, $m \in 1,2,3,...,n-1,n$ son:

$$I_m = rP_{(n-1)+m} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} I_k = C[n - a_{\overline{n}r}] + N(1 - V^n)$$

La amortización de un bono en el tiempo $m \in 1,2,3,...,n-1,n$ es:

$$A_m = R_m - I_m \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_k = Ca_{\overline{n}r} + NV^n$$

El saldo insoluto o el valor en libros de un bono está dado por:
Sea $m \in 1,2,3,...,n-1,n$

$$S_m = S_{m-1} - A_m$$

Una forma alternativa de obtener el saldo insoluto de un bono es: Sea $m \in 1,2,3,...,n-1$

$$S_m = P_{n-m}$$

Sea m=n entonces:

$$S_m = P_{n-m} - N$$

Ejemplo

Elabore la tabla de amortización de un bono que paga cupones anuales de \$10 durante 5 años con un valor de redención de \$100 y un rendimiento del 8 %.

Solución

Periodos	Rentas	Intereses	Amortización	Saldo insoluto
0	-	-	-	107.99
1	10	8.64	1.36	106.62
2	10	8.53	1.47	105.15
3	10	8.41	1.59	103.57
4	10	8.29	1.71	101.85
5	110	8.15	101.85	0

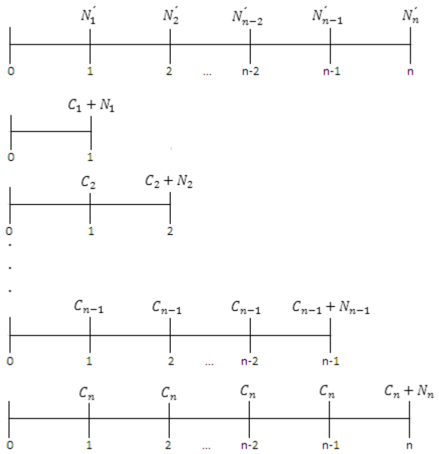
2.1.10. Bonos Seriales y fórmula de Makeham

Un bono emitido puede consistir en una colección de bonos con una variedad de fechas de redención o redención en ciertas fechas, esto significa que el emisor puede escalonar los pagos de redención en lugar de tener una sola fecha con un solo pago.

Estos instrumentos pueden ser tratados como una serie de bonos separados, cada uno con su propia fecha de redención y es posible que la tasa cupón difiera para estas fechas. Además puede darse el caso de que los compradores quieran una diferente tasa de rendimiento para diferentes fechas de maduración.

A este tipo de bonos de les llama ”Bonos seriales”, ya que la redención ocurre en una serie de pagos.

Un bono serial esta compuesto de varios bonos, es decir:



Para cada flujo de efectivo N'_k existe una serie de cupones C_k y se tiene asociado un valor facial F_k y una tasa de rendimiento r_k, entonces los flujos de un bono serial son:

$$N'_k = (\sum_{m=k}^{n} C_m) + N_k$$

Es posible obtener el precio del bono serial calculando el valor presente de los flujos de efectivo N'_k o sumando el precio de los "n" bonos.

$$Pserial = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Utilizado la fórmula de Makeham $P = NV^n + \frac{c}{r}(F - FV^n)$ el precio serial está dado por:

$$Pserial = [N_1V + \frac{c_1}{r_1}(F_1 - F_1V)] + [N_2V^2 + \frac{c_2}{r_2}(F_2 - F_2V^2)] + [N_3V^3 + \frac{c_3}{r_3}(F_3 - F_3V^3)]$$

$$+... + [N_{n-1}V^{n-1} + \frac{c_{n-1}}{r_{n-1}}(F_{n-1} - F_{n-1}V^{n-1})] + [N_nV^n + \frac{c_n}{r_n}(F_n - F_nV^n)]$$

$$Pserial = \sum_{t=1}^{n}[N_tV^t + \frac{c_t}{r_t}(F_t - F_tV^t)]$$

$$Pserial = \sum_{t=1}^{n} N_tV^t + \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{r_t}(F_t - F_tV^t)$$

Si $N_t = F_t$ para toda $t \in N$

$$Pserial = \sum_{t=1}^{n} F_tV^t + \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{r_t}(F_t - F_tV^t)$$

Si para los "n" bonos se utiliza el mismo YTM y la misma tasa cupón entonces:

$$Pserial = \sum_{t=1}^{n} F_tV^t + \sum_{t=1}^{n} \frac{c}{r}(F_t - F_tV^t)$$

$$Pserial = \sum_{t=1}^{n} F_tV^t + \frac{c}{r}[\sum_{t=1}^{n} F_t - \sum_{t=1}^{n} F_tV^t]$$

Sea $K = \sum_{t=1}^{n} F_t V^t$ y $\sum_{t=1}^{n} F_t = F$ entonces:

$$Pserial = K + \frac{c}{r}(F - K)$$

Fórmula de Makeham para bonos seriales

Ejemplo

Se emite un bono serial con madurez de 4 semestres, la redención es pagada cada semestre y es de \$1,000, \$2,000, \$3,000 y \$4,000 respectivamente y cada nominal tiene los atributos siguientes, tasa cupón capitalizable semestralmente del 5 %, 10 %, 15 % y 20 % respectivamente y el rendimiento convertible cada seis meses es del 7 %, 8 %, 15 % y 18 % respectivamente. Calcule el precio del bono serial.

Solución

$F_1 = N_1 = 1,000 \quad c_1 = \frac{.05}{2} = 0.025 \quad r_1 = \frac{0.07}{2} = 0.035 \quad n_1 = 1$

$F_2 = N_2 = 2,000 \quad c_2 = \frac{.10}{2} = 0.05 \quad r_2 = \frac{0.08}{2} = 0.04 \quad n_2 = 2$

$F_3 = N_3 = 3,000 \quad c_3 = \frac{.15}{2} = 0.075 \quad r_3 = \frac{0.15}{2} = 0.075 \quad n_3 = 3$

$F_4 = N_4 = 4,000 \quad c_4 = \frac{.20}{2} = 0.10 \quad r_4 = \frac{0.18}{2} = 0.09 \quad n_4 = 4$

$$\sum_{t=1}^{n} N_t V^t = 1,000(1.035)^{-1} + 2,000(1.04)^{-2} + 3,000(1.075)^{-3} + 4,000(1.09)^{-4} = 8,063.88$$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{r_t}[F_t - F_t V^t] = \frac{0.025}{0.035}[1,000 - 1,000(1.035)^{-1}] + \frac{0.05}{0.04}[2,000 - 2,000(1.04)^{-2}]$$
$$+\frac{0.075}{0.075}[3,000 - 3,000(1.075)^{-3}] + \frac{0.10}{0.09}[4,000 - 4,000(1.09)^{-4}] = 2,093.77$$
$$Pserial = \sum_{t=1}^{n} N_t V^t + \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{r_t}[F_t - F_t V^t] = 8,063.88 + 2,093.77 = 10,157.65$$

2.2. Mercado de capitales

El mercado de capitales es aquel donde se negocian instrumentos a largo plazo, particularmente acciones. Dicho mercado es considerado de alto riesgo, es decir, se maneja alta volatilidad en los precios (muchas veces no es así). El nombre de este mercado se debe a que una acción es parte proporcional del capital social de una empresa.

Los accionistas al poseer acciones se hacen "dueños"de una parte de esta empresa y deciden compartir el riesgo, por lo que el capital accionario está repartido. Si alguno de los accionistas accede a más del 51 % de las acciones emitidas entonces se dice que es el accionista mayoritario y por ende dueño de la empresa.

Las acciones dan el derecho de voz y voto en la junta de accionistas y mientras más porcentaje de acciones se tenga mayor peso se tiene en dicha junta. Por lo general quienes tienen entre el 15 % y 20 % de las acciones tienen una participación importante en el Comité.

El mercado de capitales impulsa el desarrollo económico de cada país y generalmente genera empleos, mida la productividad de un país, aumenta los flujos de dinero,etc.

2.2.1. Tipos de acciones

Acciones preferentes: no necesariamente tienen voz y voto sino que gozan de ciertos beneficios.

- Titularidad

- Pago de dividendos fijos

Acciones comunes u ordinarias: tienen voz y voto y tienen ciertos beneficios.

- Se emiten dividendos pero están antecedidos por los preferentes

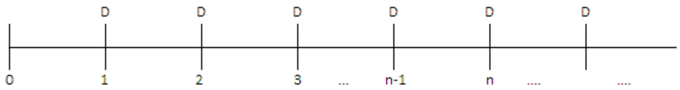
- Responsabilidades limitadas

Acciones seriadas: la empresa emite acciones sobre un capital fijo, mientras el capital se incremente, se van emitiendo acciones con otras series $A_1, A_2, B, C, C_1, D, ...$

Acciones AAA: son acciones que se basan en la calificación de la empresa.

2.2.2. Acciones preferentes

Las acciones preferentes tiene la característica de pagar una tasa fija de dividendos, es decir, el pago de dividendos es conocido. Para poder obtener el valor de una acción preferente se debe calcular el valor presente de sus flujos de efectivo los cuales se dan en forma de perpetuidad.



Entonces el precio de la acción preferente es:

$$P_P = \sum_{t=1}^{\infty} DV^t = \lim_{n \longrightarrow \infty} D(\frac{1-V^n}{k}) = \frac{D}{k}$$

Entonces la tasa de referencia, interés de fondeo o costo de capital de la estrategia de pago es:

$$k = \frac{D}{P_P}$$

El precio de una acción preferente puede visualizarse como la diferencia entre ingresos y gastos, es decir:

$$P_P = I - G$$

I = ingresos brutos para colocar
G = gastos de colocación (emisiones, títulos, comisiones, etc.)

$$P_P = I - G = \frac{D}{k}$$

En la igualad anterior es importancia resaltar que G es deducible de impuesto y además G se podría multiplicar por un factor que considere una tasa de impuestos anual (j), entonces, el precio de la acción será:

$$P_P = I - G(1-j)$$

Bajo un escenario donde se pagan impuestos.

$$P_P = I - G(1-j) = \frac{D}{k}$$

$$P_P = I - G(1-j) = \sum_{t=1}^{\infty} D_t V^t$$

Si existe inflación (i) los flujos ya la incluyen, es por eso que al momento de valuar la acción se debe mitigar ese efecto.

$$P_P = \sum_{t=1}^{\infty} D(1+i)^{-t}(1+k)^{-t}$$

$$k = \frac{\frac{D}{(1+i)}}{P_P} - \frac{i}{1+i}$$

Si hay pagos de impuestos entonces:

$$k = [\frac{D}{I - G(1-j)} - i][\frac{1}{1+i}]$$

Ejemplo

Suponga que la empresa B coloca acciones en el mercado a \$10 y los gastos de emisión después de impuestos son de \$1.50 por acción, el dividendo es de 25 centavos al mes. ¿Cuál es la tasa de referencia anual capitalizable mensualmente? ¿Cuál es la tasa efectiva anual?

Solución

Datos
$I = 10$
$G = 1.50$
$D = 0.25$
$P = 8.50$

$P = \frac{D}{k} \Rightarrow k = \frac{D}{P} = \frac{0.25}{8.50} = 0.0294$

$k = \frac{k^{(12)}}{12} \Rightarrow 12(0.0294) = 0.3529 = 32.29\,\%$

$(1 + \frac{k^{(12)}}{12})^{12} = (1+i) = 41.6\,\%$

Ejemplo

La empresa A emitió acciones preferentes por un valor de \$1,000,000.00 con gasto de emisión incurrido por \$100,000.00, el dividendo anual garantizado es del 5 % del valor nominal de la emisión. Suponga que la empresa siempre tendrá utilidades, por otra parte la empresa considera que la inflación promedio anual será del 10 %, contablemente la tasa de impuestos que se paga es del 50 % anual.

a)Obtener el valor real de la emisión.
b Obtener la tasa de referencia de esta alternativa de financiamiento.

Solución

Datos
$I = 1,000,000$
$G = 100,000$

$j = 0.05$
$i = 0.10$

a)

$$P_P = I - G(1-j) = 1,000,000 - 100,000(1-0.05) = 950,000$$
$$P_P = \frac{D}{k} \;\Rightarrow\; D = 1,000,000(0.15) = 150,000$$

b)
Sin inflación
$$k = \frac{D}{k} = \frac{150,000}{950,000} = 0.1578 = 15.78\,\%$$

Con inflación

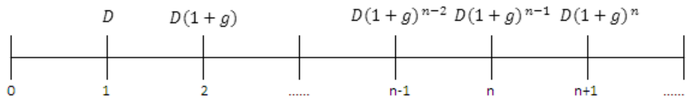
$$k = [\frac{D}{P_P} - i][\frac{1}{1+i}] = [\frac{150,000}{950,000} - 0.10][\frac{1}{1+0.10}] = 0.0526 = 5.26\,\%$$

2.2.3. Acciones comunes

Las acciones comunes se basan en el capital común de la empresa, el cual está basado en las aportaciones de capital. Los accionistas esperan de su inversión una prima por el riesgo del negocio, ya que el futuro de la empresa es incierto y los dividendos son difíciles de estimar, pues estos no son fijos como sucede en las acciones preferentes.

Entre los métodos para valuar estas acciones destaca el de crecimiento geométrico en los dividendos.

Suponiendo que las acciones crecen con una razón g.



El precio de las acciones comunes con crecimiento geométrico es:

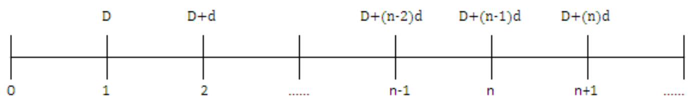
$$P_C = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \lim_{n\to\infty} D[(\frac{1+g}{1+k})^n - 1][\frac{1}{g-k}]$$

$$P_C = \frac{D}{k-g} \Leftrightarrow k > g$$

Si es necesario pagar una tasa de impuestos j entonces:

$$k = \frac{D}{I - G(1-j)} + g$$

Por otra parte, si suponemos que las acciones tienen un crecimiento aritmético, es decir:



El precio de las acciones comunes con crecimiento aritmético es:

$$P_C = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t} = \lim_{\to\infty} D[\frac{1-V^n}{k}] + d[\frac{1-(1+i)^{-n}(1+ni)}{k^2}]$$

$$P_C = \lim_{n\to\infty} (D(\frac{1-V^n}{k}) + \frac{d}{k}[\frac{1-V^n(1+nk)}{k}])$$

$$P_C = \lim_{n\to\infty} (D(\frac{1-V^n}{k}) + \frac{d}{k}[\frac{1-V^n+nkV^n)}{k}])$$

$$P_C = \lim_{n\to\infty} D(\frac{1-V^n}{k}) + \lim_{n\to\infty} (\frac{1-V^n}{k}) + \lim_{n\to\infty} (nV^n)$$

$$P_C = \frac{D}{k} + \frac{d}{k^2}$$

Ahora, si existe una tasa de inflación (i) por periodo, entonces el precio de las acciones con crecimiento geométrico es:

$$P_C = \sum_{t=1}^{\infty} D(1+g)^{t-1}(1+i)^{-t}(1+k)^{-t}$$

Sea $U = [(1+i)(1+k)]^{-1} = [1+(k(1+i)+i)]^{-1} = [1+h]^{-1}$ con $h = k(1+i)+i$, entonces:

$$P_C \sum_{t=1}^{\infty} D(1+g)^{t-1}U^t$$

Si $g > h$ entonces P_C diverge.

Si $g = h$ entonces P_C diverge.

Si $g < h$ entonces $P_C = \frac{D}{h-g} = \frac{D}{k(1+i)+i-g}$

Por lo tanto la tasa de referencia es:

$$k = (\frac{1}{1+i})(\frac{D}{P_C} + g - i)$$

Paras las acciones comunes con crecimiento aritmético se tiene:

$$P_C = \sum_{t=1}^{\infty} [D+(t-1)d](1+i)^{-t}(1+k)^{-t}$$

$$P_C = \sum_{t=1}^{\infty} [D+(t-1)d]U^t$$

$$P_C = \frac{D}{h} + \frac{d}{h^2} = \frac{D}{k(1+i)+i} + \frac{d}{[k(1+i)+i]^2}$$

Ejemplo

Una empresa emite acciones comunes que pagan un dividendo en el primer semestre de \$0.6 por acción, la tasa de referencia es del 20 % anual capitalizable semestralmente, se espera que el dividendo se incremente en \$0.5 por semestre. Calcule el precio de la acción.

Solución

Datos
$D = 0.6$
$d = 0.5$
$k = \frac{0.20}{2} = 0.1$

Procedimiento
$P_C = \frac{D}{k} + \frac{d}{k^2} = \frac{0.5}{(0.1)^2} = 56$

Ejemplo

La empresa A emite acciones comunes por $1,000,000.00, los gastos de colocación son de $50,000.00 y se espera repartir en el primer año $200,000.00 a una razón anual del 5 %, la tasa de impuestos es del 50 % y un 10 % de inflación estimada para los años subsecuentes.

a) Calcular el valor real de la emisión.
b) Calcular la tasa de referencia.

Solución

Datos
$I = 1,000,000$
$G = 50,000$
$D = 200,000$
$j = 0.50$
$g = 0.05$
$i = 0.10$

a)
$$P_P = I - G(1 + j) = 975,000$$

b)
$$k = (\frac{1}{1+i})(\frac{D}{P_P} + g - i) = 0.091415 = 9.1415\,\%$$

2.3. Tasa de rendimiento

2.3.1. Tasa interna de retorno (TIR) y valor presente neto (VPN)

A lo largo de los temas anteriores se han valuado proyectos construidos por diversas series de flujos de efectivo en el tiempo. Estos proyectos pueden tener ya sea un solo pago o diversos pagos distribuidos en el tiempo, como es el caso de las anualidades, bonos, acciones, inversiones, prestamos, etc.

De igual forma se han analizado los resultados obtenidos y se han supuesto variantes en los parámetros de los proyectos, es decir, en el tiempo, tasas de interés, flujos de efectivo, etc. Lo que queda claro hasta este punto es la relación inversamente proporcional que tiene el precio respecto a las tasas de interés, es decir:

$$\text{Si } r \uparrow \Rightarrow P \downarrow$$

$$\text{Si } r \downarrow \Rightarrow P \uparrow$$

Entonces se dice que la tasa con la que se han evaluado los flujos de efectivo es una tasa de rendimiento (retorno), como ya se ha estudiado, dicha tasa es de utilidad para decidir al momento de tomar una decisión sobre una transacción u otra.

Por ejemplo, si se tiene un capital de \$100 y se desea invertir dicho monto, existen dos oportunidades de inversión en el mercado, las cuales son las siguientes:

1. La empresa A ofrece regresar \$130 al final del año si se invierten los \$100.
2. La empresa B ofrece dar \$15 después de 6 meses y 115 al finalizar el año si se invierten los \$100

Analizando ambos proyectos por separado se tiene lo siguiente:

Empresa A

$$100(1+r) = 130 \Rightarrow r = \frac{130}{100} - 1 = 30\,\%\ anual\ efectivo$$

Empresa B

$$100 = 15(1+\frac{r^{(2)}}{2})^{-1} + 115(1+\frac{r^{(2)}}{2})^{-2} \Rightarrow \frac{r^{(2)}}{2} = 0.16125$$

$\Rightarrow r = 30\,\%$ anual capitalizable al semestre , cifra que bajo equivalencia de tasas, resulta en r=32.25 % anual efectivo.

$$(1+r) = (1+\frac{r^{(2)}}{2})^2$$

$$\Rightarrow (1+0.30) = (1+\frac{r^{(2)}}{2})^2$$

$$\Rightarrow 2[(1+0.30)^{1/2} - 1] = 0.3225$$

Ya obtenido el rendimiento (en la misma unidad de medida) de cada proyecto se escoge el proyecto B ya que otorga un mayor retorno, es decir, ofrece un rendimiento anual más alto, a dicha tasa se le conoce como tasa interna de retorno (TIR).

Una transacción financiera en general consta de un número fijo de flujos pagados y un numero de flujos recibidos. La TIR de la transacción es la tasa de interés (rendimiento) que hace que el valor presente de los pagos recibidos sea igual al valor presente de los pagos efectuados. En la práctica, lo más común es obtener la TIR al inicio del proyecto, es decir, en el tiempo cero o al final de la transacción, es decir, en el tiempo n.

El YTM es un ejemplo particular de la TIR ya que al inicio el comprador desembolsa P y a lo largo de la madurez del bono se reciben cupones y al final del plazo una redención.

En tiempo 0 un bono se visualiza de la siguiente forma:

$$Valor\ presente\ flujos\ pagados = Valor\ presente\ flujos\ recibidos$$

$$P = Ca_{\overline{n}}r + NV^n$$

$$YTM = TIR$$

En general, si una inversión L al día de hoy paga flujos de efectivo $C_1, C_2, ..., C_n$ en los tiempos $1, 2, ..., n$ respectivamente y además los flujos de efectivo son positivos, es decir, $C_t > 0$.

Al día de hoy el valor presente de la inversión L es:

$$L = \sum_{t=1}^{n} C_t V^t$$

Debe existir una única solución r que satisface la igualdad, más aún si $L < \sum C_t$ entonces $r > 0$, y si $L > \sum C_t$ entonces $r < 0$, esto por la relación inversa que se comentó al inicio del tema, de ahí que, si en una transacción sucede el segundo caso, entonces no es conveniente emprender dicho proyecto ya que el rendimiento es negativo.

Extendiendo el concepto, se definen los pagos recibidos como $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ y a los pagos desembolsados como $B_0, B_1, B_2, ..., B_n$, de ahí que el monto neto para el inversionista es $C_t = A_t - B_t$, y estos flujos pueden ser negativos o positivos.

Retomando el ejemplo anterior se visualiza el proyecto de la empresa B de la siguiente forma:

$A_0 = 0$	$A_1 = 15$	$A_2 = 115$
$B_0 = 100$	$A_1 = 0$	$B_2 = 0$
$C_0 = -100$	$C_1 = 15$	$C_2 = 115$

Entonces existe un $r^{(2)}$ que satisface:

$$\sum_{t=0}^{2} C_k V^k = 0$$

$$\sum_{t=0}^{2} C_k V^k = C_0 + C_1 V + C_2 V^2 = 0$$

$$\sum_{t=0}^{2} C_k V^k = -100 + 15(1+\frac{r^{(2)}}{2})^{-1} + 115(1+\frac{r^{(2)}}{2})^{-2} = 0$$

Por lo tanto se tiene que $r^{(2)}$=30 % anual capitalizable semestralmente o bien, bajo equivalencia de tasas r=32.25 %. Por lo tanto se concluye que, para un bono que paga un cupón de $15 y valor nominal de $100 bajo un precio a la par, TIR=YTM.

Entonces, si se tiene una transacción que considera n pagos netos entonces la TIR en el tiempo cero satisface:

$$\sum_{t=0}^{n} C_t V^t = 0$$

La expresión $\sum_{t=0}^{n} C_t V^t$ es conocida cono Valor Presente Neto (VPN) o Valor Actual Neto (VAN), ya que expresa el valor presente de los flujos netos de efectivo que caracterizan al proyecto de inversión, de ahí que si VAN =0, entonces la r que satisface la igualdad es la TIR del proyecto.

Suponiendo que se tienen dos transacciones (proyectos) ambas con una tasa de rendimiento r y r' y que además estas son utilizadas para descontar los flujos de efectivo dadas las condiciones del mercado, los proyectos están dados por los siguientes flujos netos $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ y $C'_0, C'_1, C'_2, ..., C'_n$. y el VAN de las transacciones es:

$$VAN = \sum_{t=0}^{n} C_t V^t$$
$$VAN' = \sum_{t=0}^{n} C'_t V^t$$

El mejor proyecto es aquel que tiene un mayor valor actual actual.

Ejemplo: considere los proyectos de inversión anteriores con una tasa de oportunidad del 20 % efectiva anual.

$A_0 = 0$	$A_1 = 130$
$B_0 = 100$	$B_1 = 0$
$C_0 = -100$	$C_1 = 130$

$$P_A = -100 + 130(1.2)^{-1} = 8.33$$

$A_0 = 0$	$A_1 = 15$	$A_2 = 115$
$B_0 = 100$	$B_1 = 0$	$B_2 = 0$
$C_0 = -100$	$C_1 = 15$	$B_2 = 115$

Para el proyecto 2 hay que considerar que los flujos se pagan de forma semestral por lo que la tasa equivalente al 20 % anual efectiva es:

$$r_{(2)} = [(1+r)^{1/2} - 1]2 = 19.09\,\%$$

Entonces:

$$P_B = -100 + 15(1+\frac{0.1909}{2})^{-1} + 115(1+\frac{0.1909}{2})^{-2} = 9.53$$

Por lo tanto conviene invertir en el proyecto B dado de:

$$P_A < P_B$$

En conclusión, una regla sencilla para el análisis es:

- Si $VAN > 0$ entonces el proyecto es rentable y convine invertir.
- Si $VAN < 0$ entonces el proyecto no es rentable y no convine invertir.

2.3.2. Tasa interna de retorno modificada

La TIR es la tasa para la cual el VPN es cero, es decir, VPN(TIR)=0, pero no debe olvidarse que los proyectos de inversión tienen una tasa de oportunidad establecida. Entonces si se fija dicha tasa para los flujos de efectivo que se reciben y se acumulan hasta el final del plazo, es decir, hasta el tiempo n, y este monto total se iguala al acumulado, hasta n, de los flujos desembolsados bajo cierta tasa r_m se tendrá lo siguiente:

$$\sum_{t=0}^{n} A_t(1+r_c)^{n-t} = \sum_{t=0}^{n} B_t(1+r_m)^{n-t}$$

El miembro izquierdo de la igualdad supone que los flujos de inversión recibidos se reinvierten a la tasa de oportunidad del proyecto hasta el final del plazo y el miembro derecho supone la reinversión a la tasa r_m de los flujos desembolsados.

r_m es llamada Tasa Interna de Retorno Modificada (TIRM), y resulta ser un indicador para toma de decisiones más atractivo para los inversionistas, pues analiza los proyectos en términos porcentuales y no en términos de costo como lo hace el VAN.

Si se rescata el ejemplo de la sección anterior, la tasa de oportunidad del proyecto B es 20 % anual efectivo, pero como los flujos son semestrales, bajo equivalencia de tasas, esta tasa de oportunidad tiene un nivel de 19.09 % anual capitalizable semestralmente. Así, acumulando al final del plazo los flujos del proyecto bajo la definición de la TIRM se tiene:

$$100(1+\frac{rm^2}{2})^2 = 15(1+\frac{0.1909}{2}) + 115$$

$$100(1+\frac{rm^2}{2})^2 = 131.423$$

$$\frac{rm^2}{2} = \sqrt{\frac{131.351}{100}} - 1 = 0.1464$$

$$\frac{rm^2}{2} = 0.1464$$

Entonces r_m=TIRM=29.28 % anual capitalizable semestralmente o bien, bajo equivalencia de tasas TIRM=31.43 %.

En conclusión para este proyecto, para efectos de comparación, si la empresa reinvierte a la tasa de oportunidad los flujos recibidos, la contraparte tendría que reinvertir al 31.43 % anual efectivo los flujos pagados por la empresa. Entonces, la contraparte necesita un rendimiento mayor para obtener la misma ganancia que la empresa.

Por lo tanto, como criterio de decisión general, si la TIRM es mayor que la tasa de oportunidad o costo de capital, es conveniente aceptar el proyecto de inversión.

2.3.3. Tasa de retorno ponderada por divisa y tiempo

Suponga que se tiene una cuenta en el banco al inicio del 2014 con $1,000,000 y se depositan $200,000 al final de Febrero y la misma cantidad al final de Agosto y además se hace un retiro de $500,000 al final de Octubre. Por otra parte, el balance al inicio del 2015 es de $1,100,000.

Bajo interés imple, la ecuación es:

$$1,000,000(1+i)+200,000(1+\frac{10}{12}i)+200,000(1+\frac{4}{12}i)-500,000(1+\frac{2}{12}i)=1,100,000$$

$$i=\frac{1,100,000-[1,000,000+200,000+200,000-500,000]}{1,000,000+200,000(\frac{10}{12})+200,000(\frac{4}{12})+500,000(\frac{2}{12})}$$

$$i=\frac{200,000}{1,150,000}=0.1739$$

Entonces la TIR de 17.39 % anual que gana la cuenta después de un año, bajo interés simple, es llamada tasa de retorno ponderada por divisa, en este caso ponderada por peso.

Es posible observar que el numerador representa los intereses netos que genera la cuenta o el fondo durante el año, es decir, es el monto neto que se incrementa la cuenta incluyendo retiros, depósitos e intereses generados. El denominador no es más que el promedio ponderado de los retiros y depósitos, con el tiempo de vencimiento como ponderador.

De forma general, para obtener la TIR ponderada por divisa, es necesario conocer:

a) El balance del fondo al comienzo del año (F)

b) Todos los montos netos dado los por depósitos y retiros ($C_t = A_t - B_t$)

c) El balance al final del año (M)

Entonces los intereses ganados por el fondo son:

$$I=M-[F-\sum_{t=1}^{n}C_t]$$

Y la tasa ponderada por divisa es:

$$r_d=\frac{I}{F+\sum_{t=1}^{n}C_k(1-t)}$$

Si solo se desea aproximar al valor de r_d se podría suponer que la suma neta de los depósitos y retiros $\sum C_k$, los cuales están uniformemente distribuidos a lo largo de un año, están aproximados a ocurrir en medio año, entonces:

$$r_d = \frac{I}{F + \frac{1}{2}\sum C_k}$$

Entonces para el ejemplo anterior, se tiene:

$$r_d = \frac{1,100,000 - [1,000,000 + 200,000 + 200,000 - 500,000]}{1,000,000 + 200,000(\frac{1}{2}) + 200,000(\frac{1}{2}) - 500,000(\frac{1}{2})}$$

$$r_d = \frac{200,000}{950,000} = 0.2105$$

Por lo que la aproximación resulta bastante pobre, pues los retiros y depósitos están alejados de la mitad de año.

Luego, si se conoce el valor de una cuenta o un fondo antes de cada deposito y retiros, es posible obtener las tasas de rendimiento para cada periodo definido por los retiros y depósitos en el transcurso del año. Por ejemplo:

Fecha	Monto	Retiro o Depósito
01/01/09	1,000,000	
27/02/09	1,040,000	
28/02/09		200,000
30/08/09	1,400,000	
31/08/09		200,000
30/10/09	1,580,000	
31/10/09		-500,000
30/12/09	1,100,000	
31/12/09		-200,000
01/01/10	900,000	

Aquí la fecha en que se paga o retira no importa, entonces lo que interesa son las partes en que se divide el año dados los balances que se tengan de la cuenta o fondo. Entonces para un periodo de tiempo menor a un año se tiene:

$$(F_1 + C_1)(1 + i_1) = M_i$$

$$(1 + i_1) = \frac{M_1}{F_1 + C_1}$$

En general se tiene $\frac{M_k}{F_k+C_k}$ para los n periodos.

$$(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)...(1 + i_n) = 1 + r_T$$

$$(\frac{M_1}{F_1 + C_1})(\frac{M_2}{F_2 + C_2})(\frac{M_3}{F_3 + C_3})...(\frac{M_n}{F_n + C_n}) = r_T$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{M_k}{F_k - C_k} = r_T$$

Y r_T es conocida como tasa de retorno ponderada por tiempo o periodo. Entonces, para el ejemplo se tiene:

$(1 + r_1) = \frac{1040}{1000+0}$ =1.04 r_1 =0.04

$(1 + r_2) = \frac{1400}{1040+200}$ =1.129 r_1 =0.129

$(1 + r_3) = \frac{1580}{1040+200}$ =1.274 r_1 =0.274

$(1 + r_4) = \frac{1100}{1580-500}$ =1.0185 r_1 =0.0185

$(1 + r_5) = \frac{900}{1100-200}$ =1 r_1 =0

$$r_T = (\prod_{k=1}^{5} \frac{M_k}{F_k - C_k}) - 1 = [\prod_{k=1}^{5}(1 + r_k)] - 1 = 0.5235$$

2.4. Estructura del plazo de tasas de interés

En el momento que se adquiere una deuda, el deudor está comprometido a pagar intereses y el emisor es quien decide la estructura de los mismos, la cual debe aceptar el deudor si desea la realización del préstamo.

Podría ser que se fije una sola tasa de interés (rendimiento) para toda la madurez de la transacción o bien que se manejen diferentes rendimientos para diferentes plazos.

Esta situación da lugar a la estructura del plazo de tasas de interés y dicha estructura se puede graficarse y así dar lugar a la famosa curva de rendimiento (curva de tasas de interés).

La estructura de plazo cambia día con día dadas las condiciones del mercado. Lo más usual es que inversiones a mayor plazo tengan mayor rendimiento que las inversiones con menor plazo, esta teoría se conoce como estructura de plazo normal o de expectativas puras.

Teóricamente dos instrumentos que tienen el mismo plazo y madurez deberían tener la misma tasa de rendimiento, lo cual en la práctica no es así. La diferencia radica en que existen tasas cupón diferentes y los cupones se pagan en distintos periodos.

Por ejemplo, al tener 2 bonos X y Y con madurez de "n"pero el bono X paga cupones de C_1 trimestralmente y el bono Y paga cupones C_2 semestrales, al final el precio P_X maneja un YTM trimestral y P_Y un YTM semestral, entonces al obtener los rendimientos se dará que $YTM_X \approx YTM_Y$, por lo cual surge una inconsistencia, pues al obtener el YTM anual efectivo equivalente de cada bono, estos no serían iguales.

En conclusión no se obtiene el mismo YTM por los pagos dentro de la madurez y es por eso que se necesita inversiones que no tengan flujos intermedios antes de la madurez, sino hasta el final.

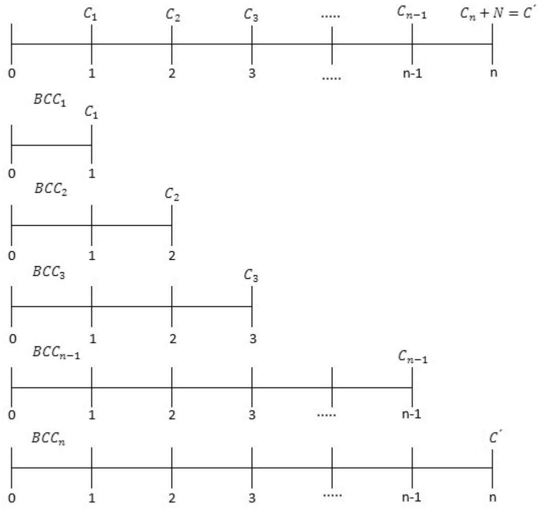
Por lo general, se utilizan los bonos del Gobierno Federal para construir la curva, ya que existe una amplia gama de bonos con vencimientos diferentes y además son negociados en mercados secundarios. El objetivo es obtener una curva que refleje de mejor forma el comportamiento del mercado.

Un bono cupón cero es un bono que no tiene flujos de efectivo intermedios y solo tiene un pago (redención) al final del plazo (madurez). Para un bono cupón cero su YTM puede ser una medida de rendimiento para pagos individuales hechos en una fecha en particular.

Si se desea conocer el precio de cierto instrumento en el mercado que promete n flujos de efectivo durante su plazo, es posible representar dicho precio como la serie de dichos flujos descontados, es decir, como la serie de n precios de bonos cupón cero (BCC). Esto es:

$$VP(flujos) = VP(\sum_{t=1}^{n} BCC_t)$$

Por ejemplo, supongase un bono variable con cupones $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ y un pago de redención en su madurez N, entonces es posible descomponer el instrumento en bonos cupón cero.



Entonces el valor presente de del bono cuponado es:

$$VP(Bono) = VP(\sum_{t=1}^{n} BCC_t)$$

Ejemplo

Considere un bono que paga un nominal de \$100.00 con una tasa cupón del 5 % anual, YTM del 3 % y con un vencimiento de 3 años. Muestre que el valor presente del bono es igual a la suma del valor presente de los bonos cupón cero.

Solución

$$VP(Bono) = 5(\frac{1-(1.03)^{-3}}{0.03}) + 100(1.03)^{-3} = 105.657$$

$$VP(\sum_{t=1}^{3} BCC_t) = \frac{5}{(1.03)^1} + \frac{5}{(1.03)^2} + \frac{105}{(1.03)^3} = 105.657$$

Por lo tanto

$$VP(Bono) = VP(\sum_{t=1}^{3} BCC_t) = 105.657$$

2.4.1. Tasas spot y STRIPS

La estructura de plazo de tasas de interés en un punto del tiempo es el conjunto de tasas para bonos cupón cero para toda madurez, es decir, el conjunto $\{r_0(t)\}_{t>0}$ donde $r_0(t)$ es la tasa efectiva anual o nominal anual en el tiempo cero para un bono cupón cero con madurez t. A la tasa $r_0(t)$ se le conoce como tasa cero o tasa spot.

Si un bono con madurez n es un conjunto de n bonos cupón cero, entonces:

$$P = C_1(1 + r_0(t_1))^{-t_1} + C_2(1 + r_0(t_2))^{-t_2} + ... + (C_n + N)(1 + r_0(t_n))^{-t_n}$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + r_0(t_k))^{-t_k} + N(1 + r_0(t_n))^{-t_n}$$

Y la estructura de plazo es conocida como curva cero o curva spot.

Dado que los bonos pueden separarse en n bonos cupón cero, en algunos mercados es posible negociar dichos bonos cero por separado, a dicha estrategia se le conoce como STRIPS (Separated Trading of Registered Interest and Principal of Securities).

Entonces si el precio de un bono a tasa fija es $\sum C_k(1 + r_0(t_k))^{-t_k} + N(1 + r_0(t_n))^{-t_n} = \sum VP(BCC_k)$ el precio de los STRIPS será:

$$P_1 = P(BCC_1) = C_1(1 + r_0(t_1))^{-t_1}$$
$$P_2 = P(BCC_2) = C_2(1 + r_0(t_2))^{-t_2}$$
$$\vdots$$
$$P_{n-1} = P(BCC_{n-1}) = C_{n-1}(1 + r_0(t_{n-1}))^{-t_{n-1}}$$
$$P_n = P(BCC_n) = (C_n + N)(1 + r_0(t_n))^{-t_n}$$

Los STRIPS son populares para inversionistas que desean recibir un pago conocido en una fecha futura especificada. Convencionalmente en el mercado existen transacciones de STRIPS a diferentes plazos y estos siempre pagan 100 como nominal.

En el mercado se pueden encontrar STRIPS con la misma madurez pero con diferentes tasas spot, entonces, la pregunta que surge es: ¿Qué instrumento debe elegirse?, hay que tomar el instrumento más liquido dadas las condiciones del mercado.

Ejemplo

Considere la siguiente estructura de plazo dada por STRIPS:

Plazo (Años)	Tasa anual cupón cero (nominal capitalizable semestralmente)	Precio STRIP
0.5	8 %	\$96.1538
1	9 %	\$91.5772
1.5	10 %	\$86.3837
2	11 %	\$80.7216

a) ¿Cuál es el precio de un bono cupón cero a 2 años con la curva y un nominal igual a 100?

$$100(1 + \frac{0.11}{2})^{-4} = 80.72$$

b) Calcule el precio de un bono al 5 % anual con madurez de dos años y pagos semestrales.

$$2.5[(1.04)^{-1} + (1.045)^{-2} + (1.05)^{-3}] + 102.5(1.055)^{-4} = 89.59$$

2.4.2. Relación entre tasa spot y YTM de bonos cuponados

Considere la siguiente estructura de plazo de tasas de interés (spot).

Plazo (años)	1	2	3	4
Tasa spot anual efectiva	5 %	10 %	15 %	20 %

Considere los siguientes 4 bonos al 5 % anual con una madurez de 1, 2, 3, 4 y 5 años respectivamente.

Bono 1

$$P = 105(1.05)^{-1} = 100 \text{ entonces se tiene un YTM=5\,\%}$$

Bono 2

$$P = 5(1.05)^{-1} + 105(1.10)^{-2} = 91.54 \text{ entonces se tiene un YTM=9.87\,\%}$$

Bono 3

$$P = 5(1.05)^{-1} + 5(1.10)^{-2} + 105(1.15)^{-3} = 77.93 \text{ entonces se tiene un YTM=14.60\,\%}$$

Bono 4

$$P = 5(1.05)^{-1}+5(1.10)^{-2}+5(1.15)^{-3}+105(1.20)^{-4} = 62.82 \text{ entonces se tiene un YTM=19.12\,\%}$$

Haciendo el análisis entre YTM y tasa spot por madurez se tiene:

Madurez	YTM	Tasa spot
1	5 %	5 %
2	9.87 %	10 %
3	14.60 %	15 %
4	19.12 %	20 %

Se puede observar que dada cierta madurez, el YTM de un bono es menor que la tasa spot para dicha madurez.

$$r_0(1) \leq YTM(n) \leq r_0(n)$$

Ahora suponga un bono a 4 años con una tasa cupón del 10 % anual.

$$P = 10[(1.05)^{-1} + (1.10)^{-2} + (1.15)^{-3}] + 110(1.20)^{-4} = 77.41$$

Entonces se tiene un YTM=18.48 % comparado con la tasa spot $r_0(4) = 20\,\%$ se cumple que mientras mayor es el cupón el YTM disminuye.

$$\uparrow c \Rightarrow \downarrow YTM \Rightarrow \uparrow P$$

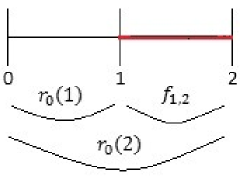
Este fenómeno sucede ya que la estructura de plazos es normal, de igual forma cabe mencionar que el YTM puede visualizarse como un promedio ponderado de las tasas spot, en donde el ponderador se refiere a la incidencia de cada pago en cada periodo.

2.4.3. Tasa Forward

Suponga la siguiente curva de tasas para dos años.

Plazo (años)	1	2
Tasa spot	8 %	9 %

Si se invierte \$1 a un año se tendrá $(1)(1.08) = 1.08$ y si se invierte a dos años se tendrá $(1)(1.09)^2 = 1.1881$, luego si se desea obtener el rendimiento de una inversión a dos años, pero con la condición de invertir a un año y posteriormente otro año más con una tasa de interés futura.



$$(1.08)(1 + f_{1,2}) = (1.09)^2$$
$$f_{1,2} = \frac{(1.09)^2}{1.08} - 1 = 0.1001$$

Por lo tanto se tiene que $f_{1,2}$ es la tasa Forward o tasa futura a un año para el plazo de un año.

Generalizando el concepto de tasas Forward, sea $r_0(n-1)$ la tasa spot en el tiempo $n-1$ y $r_0(n)$ tasa spot para el tiempo n, entonces:

$$(1 + r_0(n-1))^{n-1}(1 + f_{n-1,n}) = (1 + r_0(n))^n$$
$$f_{n-1,n} = \frac{(1 + r_0)^n}{(1 + r_0(n-1))^{n-1}} + 1$$

$f_{n-1,n}$ es la tasa Forward a $n-1$ años a partir de ahora para un plazo de 1 año. De igual forma si se desea obtener la tasa futura a m años a partir de ahora para un plazo de $n-m$ años se tiene:

$$f_{m,n} = [\frac{(1 + r_0(n))^n}{(1 + r_0(m))^m}]^{\frac{1}{n-m}} - 1$$

Ejemplo

Sea la siguiente curva spot para 4 años.

Años	Tasa spot efectiva anual
1	8 %
2	9 %
3	10 %
4	11 %

¿Cuál es la tasa Forward a 2 años para un pazo de 1 año y para un plazo de 2 años, es decir, $f_{2,3}$,$f_{2,4}$?

Solución

$$(1.09)^2(1+f_{2,3}) = (1.10)^3$$
$$f_{2,3} = \frac{(1.10)^2}{(1.09)^2} - 1 = 0.1202$$
$$(1.09)^2(1+f_{2,4})^2 = (1.11)^4$$
$$f_{2,4} = [\frac{(1.11)^4}{(1.09)^2}]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.1304$$

Por lo tanto se tiene que $f_{2,3}$ es del 12.02 % y $f_{2,4}$ es del 13.04 %.

2.4.4. Fuerza de interés como una tasa Forward

Ahora se trabajara con un modelo continuo para desarrollar la teoría de la tasa Forward. Sea δ_1 la tasa anual compuesta continua para un periodo y sea δ_2 la tasa anual compuesta continua para dos periodos, ¿Cuál es la tasa anual compuesta continua que aplica dentro de un periodo para un plazo de un periodo?.

$$e^{\delta_1} e^{f_{1,2}} = e^{2\delta_2}$$
$$e^{\delta_1 + f_{1,2}} = e^{2\delta_2}$$
$$ln(e^{\delta_1 + f_{1,2}}) = ln(e^{2\delta_2})$$
$$f_{1,2} = 2\delta_2 - \delta_1$$

De igual manera sea δ_t la tasa anual continua spot para el plazo t y δ_{t-1} la tasa anual continua spot para el plazo $t-1$ entonces:

$$e^{(t-1)\delta_{t-1}} e^{f_{t-1,t}} = e^{t\delta_t}$$
$$e^{(t-1)\delta_{t-1} + f_{t-1,t}} = e^{t\delta_t}$$
$$f_{t-1,t} = t\delta_t - (t-1)\delta_t$$

Así, para obtener la tasa Forward a m años para un plazo de $n-m$ años se tiene:

$$e^{m\delta_m} e^{(n-m)f_{m,n}} = e^{n\delta_n}$$
$$m\delta_m + (n-m)f_{m,n} = n\delta_n$$
$$f_{m,n} = \frac{n\delta_n - m\delta_m}{n-m}$$

Suponga que se conoce la tasa continua para cualquier plazo, es decir, la fuerza de interés dada por una función $\alpha(t)$ tal que para un plazo t el factor de acumulación este dado por:

$$e^{\int_0^t \alpha(u)\partial u}$$

Al resolver la integral se obtiene la definición del modelo que se estudió en el curso Matemáticas Financieras I:

$$e^{t\delta_t} = e^{\int_0^t \alpha(u)\partial u}$$

Entonces

$$t\delta_t = \int_0^t \alpha(u)\partial u = \int_0^{\frac{t}{n}} \alpha(u)\partial u + \int_{\frac{t}{n}}^{\frac{2t}{n}} \alpha(u)\partial u + ... + \int_{\frac{(n-1)t}{n}}^{t} \alpha(u)\partial u$$

La fuerza de interés puede ser vista como una función que proporciona la tasa Forward para cualquier plazo a partir de ahora definida por f_t, entonces diferenciando la siguiente ecuación se tiene:

$$t\delta_t = \int_0^t f(u)\partial u$$

$$\frac{\partial[t\delta_t]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial_t}\int_0^t f(u)\partial u$$

$$\frac{t\partial\delta_t}{\partial t} + \delta_t = f(t)$$

Por el Teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = f(t)$$

Por lo tanto se llega a la conclusión que la tasa Forward está dada por:

$$f_{m,n} = \int_m^n [\frac{t\partial\delta_t}{\partial t} + \delta_t]\partial t$$

Ejemplo

Considere la curva spot continua dada por $\delta_t = 0.09 - (0.08)(0.94)^t$, se tiene que para δ_1 =0.0148 y para δ_2 =0.019312, por lo tanto la tasa Forward $f_{1,2}$ es $2\delta_2 - \delta_1$ =0.023824, tasa Forward a un año para un plazo de un año. Resolver mediante el modelo diferencial.

Solución

$f_{m,n} = \int_m^n [\frac{t\partial\delta_t}{\partial t} + \delta_t]\partial t$

$$\frac{\partial K^u}{\partial u} = K^u ln(K)u' = -0.08(0.94)^t ln(0.94)$$

Entonces

$$f_{1,2} = \int_1^2 [0.09 - (0.08)(0.94)^t - t(0.08)(0.94)^t ln(0.94)]\partial t$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$f_{1,2} = [0.18 - 0.141376] - [0.09 - 0.0752] = 0.023824$$

2.5. Duración

Adquiriendo bonos en el mercado de deuda y conservarlos hasta la madurez, no se elimina al 100 % el riesgo de en las tasas de interés (riesgo de mercado), ya que cambios en la estructura de tasas propiciarían cambios en el precio de los instrumentos al momento de hacer una valuación. Es por ello que es de suma importancia medir este riesgo.

Sea un bono a tasa fija que paga cupones C cada periodo durante n periodos, para el cual se desea medir el cambio en el precio dada una variación en la tasa de interés.

Entonces sea r el YTM del bono y $P(r)$ el precio del bono como una función que depende del YTM, así el cambio del precio está medido por la derivada de la función $P(r)$ respecto a r.

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{k=1}^{n} K_t(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} -tK_t(1+r)^{-t-1}$$

En donde K_t son los flujos de efectivo, es decir, $K_t = C$ para $t = 1, 2, ..., n-1$ y $K_n = C+N$.

Si se desea obtener el cambio relativo, es decir, la proporción del precio, entonces:

$$DM = \frac{-\frac{\partial P(r)}{\partial r}}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} tK_t(1+r)^{-t-1}}{P(r)}$$

A esta expresión se le conoce como DM (Duración Modificada).

Ahora para obtener el plazo promedio del bono, es decir, el tiempo aproximado para recuperar la inversión P es necesario multiplicar la duración modificada por $(1 + r)$, es decir:

$$D = DM(1+r) = Duracion\ Macaulay$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r) = \lim_{h\to 0}\frac{P(r+h)-P(r)}{h}$$

Se da un cambio pequeño en r, es decir, h $\to$ 0 (h es el cambio en la tasa).

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r) \approx \frac{P(r+h)-P(r)}{h}$$

$$\Rightarrow P(r+h) - P(r) \approx h\frac{\partial}{\partial r}P(r)$$

$$P(r+h) - P(r) \approx -hP(r)\left(\frac{-\frac{\partial P(r)}{\partial r}}{P(r)}\right)$$

Entonces la diferencia aproximada de precio dada la DM es:

$$P(r+h) - P(r) \approx -hP(r)DM$$

Y el cambio relativo dada la DM es:

$$\frac{P(r+h) - P(r)}{P(r)} \approx -hDM$$

El precio aproximado dado el cambio h en r está dado por:

$$P(r+h) \approx P(r) - hP(r)DM$$
$$\Rightarrow P(r+h) \approx P(r)(1 - hDM)$$

Luego suponga un portafolio de n bonos $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ todos con el mismo YTM y con precios $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, entonces la Duración Macaulay de cada bono es:

$$D_k = -(1+r)\frac{\frac{\partial P_k(r)}{\partial r}}{P_k(r)}$$

Y además el valor del portafolio es:

$$P_{portafolio} = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Para obtener la Duración del portafolio se tiene:

$$D_{portafolio} = \frac{-(1+r)\frac{\partial P_{portafolio}}{\partial r}}{P_{portafolio}} = \frac{-(1+r)\frac{\partial \sum_{k=1}^{n} P_k}{\partial r}}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k P_k}{P_{portafolio}}$$

Sea $\frac{P_k}{P_{portafolio}} = w_k$ la participación relativa de cada bono en el portafolio.

Ademas de ser el plazo promedio del bono ponderado por la incidencia de los flujos, la duración puede ser vista como la volatilidad del bono, ya que es una medida que define el cambio del precio dados los movimientos en la tasa de interés.

Un bono con mayor duración implica un mayor riesgo de pérdida ante cambios en la tasa de interés, un ejemplo claro de esto es el siguiente caso. Suponga que se tienen dos bonos al 5 % anual con pagos anuales, los dos bonos con YTM del 5 % anuales y plazos de 5 y 10 años respectivamente, entonces el precio de los bonos es igual a cien, además suponga un cambio de 10 puntos base, entonces la duración del primer bono es de 4.55 y la del segundo es 8.11. Así, el bono dos se verá mayormente afectado por el cambio en tasa.

$P_2(5.10\,\%) = 99.23$ y $P_1(5.10\,\%) = 99.56$

2.5.1. Inmunización de flujos

Una estrategia conservadora seria elegir los bonos con menor duración, de igual forma se puede concluir que los bonos con misma duración se verían afectados aproximadamente igual ante cambios en las tasas de interés. Luego, suponga que se tiene la responsabilidad de hacer una serie de pagos $L_1, L_2, ..., L_n$ con una tasa de interés r y se desea cubrir dichas responsabilidades con ingresos en un cierto punto del tiempo (Inmunizar la deuda).

Sea $A_1, A_2, ...A_n$ los activos disponibles para cubrir las responsabilidades, si r es la tasa de interés, entonces para cubrir la deuda en $t = 0$ se tendrá la primera condición de Redington:

$$\sum_{t=0}^{n} A_t(1+r)^{-t} = \sum_{t=0}^{n} L_t(1+r)^{-t}$$

Por ejemplo, suponga que se tiene una deuda de \$1 pagadero dentro de un año y \$1 dentro de dos años con una tasa r del 10 % anual, entonces:

$L_0 = 0$, $L_1 = 1$ y $L_2 = 1$

$$\sum_{t=0}^{n} L_t(1.10)^{t} = 1.735537$$

¿Cómo se puede inmunizar esa deuda?, trivialmente se pueden hacer pagos de \$1 en $t = 1$ y $t = 2$ y la deuda quedará inmunizada, por otra parte suponga que se tiene al día de hoy \$1.735537 y se invierte en una cuenta que paga intereses del 10 % anual.

Entonces al final del primer año se tiene $1.735537(1.10) = 1.909091$ pero se debe pagar \$1 lo que da un total neto de 0.909091 y al final del segundo año se tiene en la cuenta $0.909091(1.10) = 1$ pero se debe pagar \$1 y la cuenta queda en cero, es decir, se inmunizó la deuda y se puede observar que:

$$\sum_{t=0}^{2} A_t(1.10)^{-t} = \sum_{t=0}^{2} L_t(1.10)^{-t}$$

Se pueden encontrar en el mercado una gama de instrumentos que permitan inmunizar alguna responsabilidad pero, ¿qué sucede cuando hay cambios en la tasas de interés?.

1. Superavit, nos conviene esta situación ya que la deuda sigue cubierta.

$$P_A = \sum_{t=0}^{n} A_t(1+r+h) > P_L = \sum_{t=0}^{n} L_t(1+r+h)$$

2. Deficit, no conviene esta situación ya que no se alcanza a cubrir la deuda.

$$P_A = \sum_{t=0}^{n} A_t(1+r+h) < P_L = \sum_{t=0}^{n} L_t(1+r+h)$$

Es por ello que en la inmunización debe cubrir el riesgo ante cambios en la tasa de interés, por lo que se debe buscar que la volatilidad de las dos estrategias sea igual para que estas cambien de igual manera ante los movimientos en la tasa, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial r}\sum_{t=0}^{n} A_t(1+r)^{-t} = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{t=0}^{n} L_t(1+r)^{-t}$$

Segunda condición de Redington.

$$-(1+r)\frac{\frac{\partial}{\partial r}\sum A_k(1+r)^{-t}}{\sum A_k(1+r)^{-t}} = -(1+r)\frac{\frac{\partial}{\partial r}\sum L_k(1+r)^{-t}}{\sum L_k(1+r)^{-t}}$$

Las duraciones Macaulay deben ser iguales.

$$D(A) = D(L)$$

Lo anterior sucede, ya que dos series de flujos con igual duración tienen aproximadamente la misma variación en los cambios en la tasa de interés. Luego, la duración aproxima pequeños cambios en la tasa pero ¿Qué sucede con un cambio más amplio?. Tercera condición de Redington.

$$\frac{\partial^2 P_A}{\partial r^2} \geq \frac{\partial^2 P_L}{\partial r^2}$$
$$\frac{\frac{\partial^2 P_A}{\partial r^2}}{P_A} \geq \frac{\frac{\partial^2 P_L}{\partial r^2}}{P_L}$$

La segunda derivada es conocida como Convexidad, por lo que, para reducir el riesgo en tasa, resulta eficiente elegir los bonos con menor duración y convexidad.

Todo este proceso es conocido como inmunización de Redington y si se cambia la primera condición a $P_A \geq P_L$ la responsabilidad está completamente inmunizada.

Ejemplo

Suponga que se tiene una deuda de \$10 al mes durante 3 meses y al final del tercer mes se paga \$100 adicionales. Los intereses son del 10 % mensuales, se desea pagar hoy la deuda pero no es posible. ¿Cuáles dos bonos cupón cero a 1 y 3 meses inmunizarían la deuda al 10 % mensual?

Solución

$L_0 = 0$, $L_1 = 10$, $L_2 = 10$, $L_3 = 110$

$$P_L = \sum_{t=0}^{3} L_t V^t = 100$$

$A_0 = 0$, $A_1 = N_1$, $A_2 = 0$, $A_3 = N_2$

I) $\sum_{t=0}^{n} A_t V^t = 100 = A_1(1.10)^{-1} + A_3(1.10)^{-3} = N_1(1.10)^{-1} + N_2(1.10)^{-3}$

II) $\sum_{t=0}^{n} tA_t V^t = (1)(N_1)(1.10)^{-1} + (3)(N_2)(1.10)^{-3} = (1)(10)(1.10)^{-1} + (2)(10)(1.10)^{-2} +$

$(3)(110)(1.10)^{-3} = 273.353719$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que N_1 =14.55 y N_2 =115.5, es decir, el primer bono cupón cero a un año con nominal de 14.55 y el segundo bono cupón cero a tres años con nominal de 115.5 inmunizan la deuda al 10 % mensual.

Al primer año se reciben 14.55 y se pagan 10 entonces se tiene 4.55(1.10)=5 después se pide prestado al 10 % 5 se completan 10 y se paga en ese momento, luego al año 3 se debe 5(1.1)=5.5 y se recibe 115.5, se paga al banco 5.5 y sobran 110 y se paga al final el total de 110 y queda inmunizada la deuda.

2.6. Ejercicios

Mercado de deuda

1. Defina el mercado de deuda. ¿Qué instrumentos se negocian en este mercado? y ¿Cuál es la importancia de emitir deuda?

2. ¿Qué es un intermediario Financiero? Particularmente, ¿Cómo participa este personaje en el mercado de deuda?

3. Defina Rendimiento fijo, Rendimiento variable y Rendimiento indexado. Arroje algunos ejemplos.

4. Defina Riesgo de tasa de interés, Riesgo de inflación y Riesgo de crédito. Arroje algunos ejemplos.

5. ¿Cuáles son los principales elementos de un bono? Defina cada uno de ellos.

6. En general, ¿cuáles son los tres tipos de bonos? Dibuje el perfil de cada uno.

7. Defina precio sucio y precio limpio. ¿Qué otros nombres se les da a dichos precios?

8. ¿Qué significa que un bono sea valuado "sobre par", "a la par" y "bajo par"? ¿Qué relación existe entre el precio del bono, el valor facial y la redención (nominal)? ¿Cuál es la relación entre tasas?

9. ¿Qué es el valor en libros de un bono? ¿Qué significa que un bono sea amortizable?

10. ¿Qué es el rendimiento YTM de un bono? ¿Cuál es su importancia? Mencione el uso que se le da.

11. Defina precio de oferta y precio de demanda. Enseguida explique que es la Tasa Interna de Retorno (TIR) y su relación con ambos conceptos.

12. ¿Qué es un bono serial? ¿Cuál es su descomposición?

13. El 30/03/2014 se emitió un bono al 12 % anual con valor facial de \$100 y redención de \$120. El pago de cupones es trimestral y dicho bono tiene una madurez de 5 años, es decir, vence el 30/03/2019.

    a) Haga un bosquejo del perfil del bono ¿Cuál es el precio del bono en la fecha de emisión bajo los siguientes YTM?
       - 15 % anual capitalizable trimestralmente.
       - 12 % nominal trimestral.
       - 9 % anual capitalizable 4 veces al año.

    b) Valúe el bono en cada fecha cupón (justo después del pago del mismo) para los diferentes YTM dados en a). Construya una tabla donde las filas indiquen las fechas cupón y las columnas los 3 YTM. Dentro de la tabla se ubicarán los precios asociados a las fechas cupón y a las tasas.

    c) Utilice la tabla anterior para graficar el precio del bono para los diferentes YTM dados en a). El eje X debe indicar el plazo del bono y el eje Y el precio. ¿Qué observa al ver la gráfica con las tres curvas? ¿En qué punto se tocan? ¿Por qué? ¿Qué papel desempeña el valor facial respecto al precio del bono?

d) Construya la tabla de amortización para el bono con los diferentes YTM dados en a), es decir, debe obtener 3 tablas de amortización. En cada tabla, ¿qué sucede con los precios del bono conforme se acerca la madurez? ¿Por qué sucede este efecto?

14. Al día de hoy un emisor posee un bono al 8 % anual con cupones semestrales y una redención de $100. La madurez es de 20 años y el instrumento tiene un valor de $70.4.

    a) Dibuje el perfil del bono.
    b) ¿Cuál es el YTM anual capitalizable semestralmente del bono? (use interpolación lineal).
    c) Suponga que el bono fue valuado el 15/01/2000 y es comprado por $112.225 (precio pactado) el 15/01/2005 (justo después del pago de cupón). Encuentre el YTM anual capitalizable semestralmente para el comprador (use interpolación lineal).
    d) ¿Cuál es la TIR que gana el emisor? (use interpolación lineal) ¿Fue conveniente hacer la transacción? ¿Por qué?

15. Un bono serial con cupones semestrales y redención de $2,000,000 es valuado el 15/06/2000. Esta redención se divide en 10 primeras partes de $100,000, iniciando los pagos el 15/06/2005, seguido de 5 partes adicionales de $200,000 cada una, comenzando los pagos el 15/06/2010.

    a) Haga un bosquejo del perfil del bono. ¿Cuál es el precio del bono serial si las tasas generales son: tasa cupón 8
    b) Divida el bono serial en sus bonos individuales, luego dibuje el perfil de cada uno de ellos, obtenga sus respectivos precios y sume los valores para corroborar el resultado obtenido en el inciso anterior.

Mercado de capitales

16. Cierta empresa emite acciones preferentes por un valor de $1,500,000 bajo gastos de emisión de $175,000. Se garantiza (es decir, siempre se paga) un dividendo anual del 13.5 % del valor nominal de la emisión (esto es antes de pagar los gastos de emisión).

    a) Obtenga el valor neto de la emisión. Dado este valor neto ¿Cuál es la tasa de referencia anual para esta alternativa de financiamiento?
    b) Considere una tasa anual de impuestos del 40 %. Ahora ¿cuál es valor real (después de impuestos) de la emisión? ¿Cuál es la tasa de referencia anual de la estrategia de financiamiento de la empresa?
    c) Mantenga fija la tasa de impuestos del inciso anterior y además considere una tasa de inflación anual del 3 %. ¿Cuál es la nueva tasa de referencia anual de la estrategia?
    d) Compare las tres tasas obtenidas. ¿Qué puede comentar al respecto sobre el efecto impuestos y el efecto inflación?

17. Al comienzo de 2012 la empresa emitió acciones preferentes que pagan un dividendo bimestral de $1 bajo una tasa de referencia del 40 % anual capitalizable al bimestre. Desafortunadamente la institución no se encuentra en su mejor momento hablando en

términos de liquidez, por lo que estima pagar los dividendos por dos años completos solamente (2012 y 2013) y, cuando la situación se estabilice, volver a pagar los dividendos al final del mes de abril de 2015.

a) ¿Cuál es el precio de la acción preferente?
b) ¿Cuánto valdría la acción si la empresa pagara los dividendos en tiempo y forma?
c) Compare los precios obtenidos y haga un breve análisis de la situación.

18. Ahora la empresa decide emitir acciones comunes. La emisión se considera nuevamente en \$1,500,000 pero con gastos de emisión de \$85,000. El primer año se espera otorgar dividendos por \$300,000 y cada año se estima que estos crezcan a una razón del 6 % anual.

    a) Obtenga el valor neto de la emisión. Dado este valor neto ¿Cuál es la tasa de referencia anual para esta alternativa de financiamiento?
    b) Considere una tasa anual de impuestos del 45 %. Ahora ¿cuál es valor real (después de impuestos) de la emisión? ¿Cuál es la tasa de referencia anual de la estrategia de financiamiento de la empresa?
    c) Mantenga fija la tasa de impuestos del inciso anterior y además considere una tasa de inflación anual del 3 %. ¿Cuál es la nueva tasa de referencia anual de la estrategia?
    e) Compare las tres tasas obtenidas. ¿Qué puede comentar al respecto sobre el efecto impuestos y el efecto inflación?

19. La institución necesita fondearse, por lo que una vez más emite acciones comunes que pagan un dividendo de \$0.75 por acción el primer semestre y se espera que dicho dividendo crezca \$0.05 cada semestre. Si la tasa de referencia es del 25 % anual capitalizable 2 veces al año, ¿cuál es el precio de la acción común? **Tasa de rendimiento**

20. El proyecto de inversión "A" tiene un flujo de fondos anual que se muestra en la tabla siguiente:

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	\$ -10,000	\$ 3,000	\$ 4,500	\$ 5,500	\$ 6,000	\$ 7,000

    a) ¿Cuál es el valor presente neto del proyecto para una tasa de oportunidad (costo de capital) del 25 % efectivo anual? ¿Es conveniente tomar el proyecto? ¿Por qué?
    b) ¿Cuál es la tasa interna de retorno TIR (rentabilidad promedio) del proyecto? interprete la tasa obtenida.
    c) Como puede observar, los flujos de la tabla del año 1 al 5 son pagos recibidos anuales. Suponga que dichos flujos generan un bono variable cuyo precio de emisión es \$10,000 ¿Cuál es el YTM del bono durante el horizonte (plazo) de 5 años?
    d) Compare las tasas obtenidas en los incisos b) y c). ¿Cómo se explica este resultado?

21. Dos proyectos de inversión mutuamente excluyentes (es decir, independientes entre sí) con una horizonte de 5 semestres, muestran los flujos siguientes:

Semestre	Proyecto A millones de pesos		Proyecto B millones de pesos	
	Recibido	Desembolsado	Recibido	Desembolsado
0	0	280	0	400
1	90	20	200	100
2	120	130	200	38
3	200	50	90	150
4	90	130	400	142
5	260	40	450	150

a) Si la tasa de oportunidad es del 35 % anual efectiva ¿Cuál de los dos proyectos seleccionaría? Explique sus razones.

b) Si únicamente existen estos dos proyectos, adicionalmente a las inversiones convencionales del mercado que determinan la tasa de interés de oportunidad, ¿cuál sería la rentabilidad anual promedio (TIR efectiva anual) de los 400 millones? durante los 5 semestres, es decir obtenga la TIR efectiva anual del proyecto B.

22. Considere los siguientes dos proyectos de inversión, con los flujos (en pesos) que se muestran en el cuadro, el cual incluye el cálculo de los valores presentes netos y las tasas internas de retorno efectivas anuales para cada proyecto y para la alternativa incremental (diferencia entre proyectos). La tasa de oportunidad general que establece el mercado en compensación al riesgo es de 25 % efectiva anual.

Año	Proyecto 1	Proyecto 2	(2-1)
0	-300,000	-300,000	0
1	160,000	140,000	-20,000
2	164,800	151,200	-13,600
3	169,744	163,296	-6,448
4	174,836	176,360	1,524
5	180,081	190,468	10,387
6	185,484	205,706	20,222
7	191,048	222,162	31,114
8	196,780	239,935	43,155
9	202,683	259,130	56,447
10	208,764	279,861	71,097
$VPN(r_c = 0.25)$	322,325.6	332,624.6	10,298.8
TIR	55.4642%	53.2573%	31.4617%

a) ¿Cuál sería su recomendación sobre el proyecto a escoger (1 o 2) si fueran mutuamente excluyentes, es decir, independientes entre sí? Justifique su respuesta.

b) Grafique el valor presente neto de cada proyecto y de la alternativa incremental como una función de la tasa de interés de oportunidad, es decir, en una misma

gráfica deben habitar tres curvas, las cuales se construyen variando el costo de capital r_c (use un intervalo de variación de 0 % al 100 % de 1 % en 1 %).
El "eje X" representará el VPN de los proyectos y el "eje Y" la tasa de oportunidad. ¿Qué relación observa entre las tres curvas construidas? ¿A partir de que tasa de oportunidad deja de ser una mejor opción el proyecto elegido en el inciso a)? ¿A partir de que tasa dejan de ser viables los proyectos 1 y 2?

23. En seguida se muestra el detalle del Balance general que guarda un fondo para un plazo de dos años:

Balance del Fondo		
01-ene-12	$	1,000,000.00
01-jul-12	$	1,310,000.00
01-ene-13	$	1,265,000.00
01-jul-13	$	1,540,000.00
01-ene-14	$	1,420,000.00

Contribuciones	
30-jun-12	$ 250,000.00
30-jun-13	$ 250,000.00
Retiros	
31-dic-12	$ 150,000.00
31-dic-13	$ 150,000.00

a) Calcule la tasa de retorno anual efectiva ponderada por tiempo (por periodo) del fondo para el año 2012.

b) Calcule la tasa de retorno anual efectiva ponderada por tiempo (por periodo) del fondo para el año 2013.

c) ¿Cómo obtendría la tasa de retorno anual efectiva ponderada por tiempo (por periodo) del fondo para el plazo de dos años 2012-2013?

24. Suponga que tiene una cuenta bancaria que inició el año 2013 con 1 millón de pesos e hizo tres depósitos de 300 mil pesos cada uno al final de marzo, mayo y julio. Por otra parte, durante el transcurso del año se miró en la necesidad de hacer dos retiros de 150 mil pesos cada uno a finales de abril y junio. Si al inicio de 2014 la cuenta tuvo un balance de 1 millón 800 mil pesos:

a) ¿Cuál es la tasa de retorno efectiva anual ponderada por la divisa "peso \$"?

b) Obtenga una aproximación de la tasa de retorno efectiva anual ponderada por peso calculada en a) suponiendo que los montos netos dados por los retiros y los depósitos se distribuyen uniformemente alrededor de medio año.

c) Obtenga una aproximación de la tasa de retorno efectiva anual ponderada por peso calculada en a) suponiendo que los montos netos dados por los retiros y los depósitos se distribuyen uniformemente alrededor del mes de mayo; luego compare la aproximación estimada en este inciso con la del inciso b) ¿Cuál resulta ser una mejor aproximación? ¿por qué?

Estructura del plazo de tasas de interés

25. El mercado ofrece la siguiente curva (spot) de rendimiento bajo una capitalización anual efectiva:

Semestre (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_0(n)$ anual	3.0%	3.6%	4.5%	5.2%	?	6.7%	7.3%	8.0%	?	9.1%	10%	?

Como podemos observar, hacen falta las tasas spot para 5, 9 y 12 años. Por otra parte, en el mercado existen dos bonos bastante negociados (líquidos) con las siguientes especificaciones:

Bono	Madurez	Nominal	Tasa cupón anual	Precio
1	5 años	\$100	10%	\$118.93
2	12 años	\$100	10%	\$107.45

a) Valúe el bono 1 utilizando la curva spot dada al inicio. La ecuación que suma los flujos del bono descontados debe ser igual al precio del instrumento; de esta manera dicha ecuación arrojará como incógnita la tasa anual $r_0(5)$. Al obtener dicha tasa colóquela en la tabla.

b) Como no existe un bono con una madurez de 9 años en el mercado no podemos utilizar el método anterior para encontrar $r_0(9)$ anual efectiva. Hasta el noveno año ¿La curva es creciente o decreciente? Utilice la interpolación lineal adecuada para encontrar la tasa requerida y una vez encontrada ubíquela en la tabla.

c) Ahora tenemos la curva completa hasta el año 11 pero hace falta la tasa anual efectiva $r_0(12)$. Pudiéramos interpolar pero en el mercado se encuentra el bono 2. Valúe dicho instrumento utilizando la curva spot donde ya están incluidas las tasas obtenidas en a) y b). La ecuación que suma los flujos del bono descontados debe ser igual al precio del instrumento; de esta manera dicha ecuación arrojará como incógnita la tasa anual $r_0(12)$. Al obtener dicha tasa colóquela en la tabla.

d) Una vez completa la tabla, grafique la curva spot ("eje Y: rendimiento" y "eje X: plazo en años"). Dado el comportamiento de la curva ¿qué nombre recibe? Nota: El método utilizado en los incisos a) y c) es conocido como "Bootstrapping" y utiliza el supuesto de la descomposición de bonos cuponados en bonos cupón cero (lo cual se realizo implícitamente en los incisos comentados).

e) Obtenga el YTM de los bonos 1 y 2. ¿Se corrobora la relación entre el YTM y las tasas spot dada por la siguiente desigualdad?:

$$r_0(1) \leq YTM \leq r_0(n)$$

Luego utilice la curva spot para valuar un bono de 12 años de madurez con una tasa cupón del 15 % anual. Compare este bono con el bono 2. ¿Se corrobora la hipótesis $\uparrow C\% \Rightarrow \downarrow YTM$? Construya tablas como las del ejercicio visto en clase.

f) De la curva spot obtenga las siguientes tasas forward anuales:

$$f_{0,1}, f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,4}, f_{4,5}, f_{5,6}, f_{6,7}, f_{7,8}, f_{8,9}, f_{9,10}, f_{10,11}, f_{11,12}$$

g) La tasa forward (tasa futura) $f_{n-1,n}$ es la tasa relacionada al año n en la curva spot, por lo tanto podemos graficar. En la gráfica de la curva spot incluya la nueva curva forward ("eje Y: tasas forward" y "eje X: plazo en años") y compare ¿Cómo son las tasas forward respecto a las tasas spot? ¿a qué se debe este efecto?

h) Usted tiene planeado invertir mil pesos dentro de un año (plazo futuro). ¿Cuál será el monto acumulado al final del año 10? Utilice la curva forward para determinar dicho monto.

i) Convierta las tasas spot de rendimiento efectivas anuales $r_0(n)$ a su equivalente anual nominal continuo $\delta_0(n)$ utilizando equivalencia de tasas (triple igualdad); por consecuencia tendremos 12 tasas anuales continuas. En la gráfica de la curva spot y curva forward bajo capitalización compuesta (discreta) incluya la curva spot continua dada por las tasas $\delta_0(n)$. ¿Qué diferencia nota entre las curvas spot?

j) De la curva spot continua obtenga las siguientes tasas forward anuales (también continuas):

$$f_{0,1}, f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,4}, f_{4,5}, f_{5,6}, f_{6,7}, f_{7,8}, f_{8,9}, f_{9,10}, f_{10,11}, f_{11,12}$$

k) En la gráfica del inciso i) incluya la curva forward resultante. En la gráfica debe haber 4 curvas en total: dos spot (discreta y continua) y dos forward (discreta y continua) ¿Cómo son las tasas forward continuas respecto de las tasas spot continuas? ¿a qué se debe este efecto?

l) Usted tiene planeado invertir mil pesos dentro de un año (plazo futuro). ¿Cuál será el monto acumulado al final del año 10? Utilice la curva forward para determinar dicho monto, luego compare este resultado con el del inciso h), ¿Qué curva es más factible para ser utilizada? ¿Por qué?

2.7. Enlace con el capítulo siguiente

La finalidad del cálculo del valor de los instrumentos vistos en este capítulo tiene un efecto directo en la toma de decisiones de proyectos de inversión de una empresa o persona, por lo cual es importante el siguiente apartado ya que, con base a lo estudiado en los capítulos 1 y 2, se desarrollarán metodologías para una correcta toma de decisiones que ayuden a incrementar el valor de la empresa o negocio.

3. Finanzas Corporativas

Introducción

Finanzas Corporativas es la tercera asignatura de la seriación y tiene como objetivo aplicar conceptos estudiados en los capítulos anteriores, con el fin de analizar y tomar decisiones respecto a la operativa diaria de las empresas, es decir, tratando de responder interrogantes como ¿cuánto y cómo debe endeudarse una empresa?, ¿cuánto y cómo debe invertir? y ¿cómo deben ser retribuidas las ganancias?.

Para responder estas interrogantes, en primera instancia es necesario tener en cuenta a qué nos referimos con el termino "*empresa*". Como tal, una empresa representa una organización o entidad, ya sea grande o pequeña, dedicada a actividades comerciales, industriales o profesionales. Una empresa realiza actividades por medio de la producción de un bien, la oferta de un servicio o venta de algún producto.

Por otra parte, cada decisión tomada por una empresa conlleva un análisis previo en el cual es necesario la aplicación de las Finanzas Corporativas y además, cualquier operación realizada por una empresa que esté relacionada con dinero implica finanzas.

Las Finanzas empresariales se pueden definir como todas aquellas funciones que son de ayuda a una empresa para generar dinero, es decir, generar ganancias. Cabe mencionar que este es el objetivo principal de una empresa.

Todas las empresas tienen que invertir sus recursos sabiamente tomando en cuenta todos los factores de cada operación que se desee realizar; es necesario encontrar el tipo y la combinación de financiamiento adecuado para financiar cada inversión.

Las Finanzas Corporativas están basadas en tres grandes principios, los cuales reciben el nombre de "los tres pilares de las finanzas".

1. Principio de Inversión
2. Principio de Financiamiento
3. Principio de Dividendos

Las inversiones de la empresa son generalmente denominados "*activos*", a veces estos son clasificados dentro de los activos fijos y activos circulantes.

Para financiar estos activos las empresas pueden aumentar su capital desde dos fuentes:

1. Financiamiento a través de "*deuda*" (debt)
2. Financiamiento con "*acciones*" (equity)

Estas situaciones se estudiarán más adelante.

3.1. El objetivo de la empresa

Ninguna disciplina puede desarrollarse coherentemente en el tiempo sin un objetivo unificado. El crecimiento de la teoría de las finanzas corporativas se remonta a la elección de un único objetivo y el desarrollo de los modelos construidos alrededor de este. El objetivo, en la teoría convencional de las finanzas corporativas cuando se toman decisiones, es maximizar el valor del negocio o empresa. Consecuentemente cualquier decisión que incremente el valor del negocio es considerada como buena, mientras que una decisión que reduzca el valor de la empresa es considerada como mala.

Aunque la elección de un solo objetivo ha proporcionado a las finanzas corporativas un único tema y consistencia interna, esta tiene un costo. En la medida en la que se sigue este objetivo, la teoría financiera corporativa tiene sentido. En la medida que este objetivo es defectuoso, sin embargo, se puede argumentar que la teoría construida es defectuosa también.

Muchos de los desacuerdos entre los teóricos de las finanzas corporativas se dan por diferentes puntos de vista sobre el objetivo correcto de la empresa. Por ejemplo, hay algunos críticos de las finanzas corporativas quienes argumentan que las empresas deberían tener múltiples objetivos donde una variedad de intereses son cumplidos, y hay otros quienes piensan que la empresa tendría que centrarse en lo que ven como objetivos directos y más simples, como ganar una parte del mercado o rentabilidad.

Dada la importancia de este objetivo, tanto para el desarrollo y la aplicabilidad de la teoría financiera de las empresas, es importante que se examine cuidadosamente y abordar algunas de las preocupaciones y críticas que ha cosechado. Se supone que las acciones tomadas por los accionistas por interés propio están en los mejores intereses de la empresa, ya que esta tiene que salir beneficiada; esto depende a veces de la existencia de mercados eficientes, y que a menudo es ciego a los costos sociales asociados a la maximización del valor.

3.2. Los tres pilares de las Finanzas Corporativas

3.2.1. Principio Inversión

Las empresas tienen recursos que deben asignarse entre diversas necesidades, así que la función principal de la teoría de las finanzas corporativas es proporcionar un marco adecuado para que una empresa tome las decisiones adecuadas con el fin de solventar dichas necesidades.

Existen tres tipos de decisiones importantes para una empresa.

Sobre activos y pasivos

- Inventario (¿Qué? y ¿Cuántos mantener?)
- Crédito (¿Cuánto pedir?, ¿Cuánto otorgar?)
- Inversiones (¿Cuánto invertir?, ¿En qué invertir?)

Sobre estrategia

- Mercado (elecciones para entrar)
- Sinergias (adquisiciones, fusiones, etc.)

La teoría de Finanzas corporativas mide el retorno (rendimiento) de una decisión de inversión propuesta y compararla con una tasa mínima aceptable (costo de capital o tasa crítica de oportunidad) que resulta ser el obstáculo para decidir si un proyecto es aceptable o no.

Esta tasa crítica debe ajustarse a niveles más altos para los proyectos más arriesgados y tiene que reflejar la mezcla de financiamiento utilizada, es decir, los fondos de propietarios (capital) o préstamo (deuda). En la discusión entre riesgo y retorno, se comienza este proceso mediante la definición de riesgo y se desarrolla un procedimiento para medirlo. En los modelos de riesgo y retorno, se transforma esta medida del riesgo en una tasa crítica, es decir, una tasa mínima aceptable de retorno tanto para los negocios completos como para inversiones individuales.

Mezcla de recursos

- Fondos de propietarios (capital)
- Préstamos (Deuda)

¿Qué sucede con el riesgo?

Se genera una metodología para medir el riesgo. Esta medida se transforma en una tasa crítica tanto para negocios grandes como para inversiones pequeñas.

¿Qué sucede con el retorno?

Medimos el rendimiento con base en la evaluación de proyectos

- Ganancias contables
- Flujos de efectivo
- Flujos de efectivo ponderados por tiempo
- Costos y beneficios secundarios

3.2.2. Principio de Financiamiento

Todas la empresas están financiadas en última instancia (deuda o capital). Para las entidades que cotizan en bolsa, la deuda puede tomar la forma de bonos y el capital puede tomar forma de acciones comunes. Para las empresas privadas, es más probable que la deuda se dé con préstamos bancarios y el capital con los recursos de los propietarios.

Dado lo anterior, surge la siguiente interrogante: ¿Qué combinación de deuda y capital es adecuada? Los métodos de financiamiento son opciones que existen para las empresas privadas y las empresas que cotizan en bolsa entre deuda y capital. Alrededor de la primera pregunta, surgen otras que es necesario poder analizar.

- ¿La combinación es óptima?(Función objetivo)

- ¿La combinación miniminiza la tasa crítica?

- ¿Qué sucede cuando se varía la combinación? (análisis de sensibilidad)

Una vez definida la mezcla ¿de qué tipo debe ser?

- Largo plazo

- Corto plazo

- Pagos fijos

- Pagos variables

Se considera la combinación existente de deuda y capital y sus implicaciones para la tasa crítica como parte del principio de inversión, dejando abierta la cuestión de si la combinación existente es la adecuada en el principio de financiamiento.

Puede haber limitaciones de reglamentación y de otros tipos sobre la mezcla de financiamiento que una empresa puede utilizar, pero hay un amplio margen para la flexibilidad dentro de estas limitaciones.

Se comienza la discusión de los métodos de financiamiento observando la variedad de opciones que existen para las empresas privadas y las empresas que cotizan en bolsa entre deuda y capital. Después analiza si la combinación existente de financiación utilizada por una empresa es óptima, dada su función objetivo de maximización de valor. Aunque el equilibrio entre los beneficios y los costos de los préstamos se establecen en términos cualitativos en primer lugar, también se observan dos enfoques cuantitativos para llegar a la combinación óptima. En el primer enfoque, se examinan las condiciones específicas en las que la combinación de financiamiento óptima es la que minimiza la tasa crítica. En el segundo enfoque, se analizan los efectos sobre los cuales el valor de la empresa cambia la combinación de financiamiento (análisis de sensibilidad).

Cuando la mezcla óptima de financiamiento es diferente de la existente, se estudian las mejores maneras de llegar desde donde se está ubicando (la mezcla actual) a donde se quiere llegar (el óptimo), teniendo en cuenta las oportunidades de inversión que la empresa tiene y la necesidad de respuestas oportunas, ya sea porque la empresa está bajo un objetivo específico o bajo amenaza de quiebra.

Habiendo descrito la combinación óptima, se dirige la atención al tipo de financiamiento que una empresa debe utilizar, por ejemplo, si debe ser a largo plazo o a corto plazo, si los pagos del financiamiento deben ser fijos o variables, y si son variables, en función de qué deben estar.

Usando la proposición básica de que una empresa minimizará el riesgo de su financiamiento y maximizará su capacidad de utilizar los fondos prestados, es posible hacer coincidir los flujos de la deuda con los flujos sobre los activos financiados; si esto ocurre, se diseña el instrumento de financiamiento perfecto para una empresa. Después, se deben añadir las consideraciones adicionales relativas a los impuestos y los monitores externos (analistas de investigación de capital y las agencias de calificación) y se llega a las conclusiones finales sobre el diseño del fondeo.

3.2.3. Principio de Retribución

A la mayoría de las empresas, sin duda, les gustaría tener un número ilimitado de oportunidades de inversión que generen rendimientos superiores a sus tasas críticas de rentabilidad, pero todas las empresas crecen y maduran.

Como consecuencia, cada negocio que prospera llega a una etapa en su vida, cuando los flujos de efectivo generados por las inversiones existentes son mayores que los fondos necesarios para adquirir una buena inversión. En ese momento, este negocio tiene que encontrar maneras de devolver el exceso de efectivo a los propietarios. En las empresas privadas, esto sólo puede implicar al propietario el retiro de una parte de sus fondos del negocio. En una sociedad que cotiza en bolsa, esto implicar pagar dividendos o recomprar acciones.

En la discusión de la política de dividendos, se introduce la disyuntiva básica que determina si se debe dejar dinero en efectivo en una empresa o fuera de ella. Para los accionistas de las empresas que cotizan en bolsa, se observa que esta decisión depende fundamentalmente de si confían en los directivos de la empresa con su dinero, y gran parte de esta confianza se basa en lo bien que estos gerentes han invertido fondos en el pasado.

Por último, se consideran las opciones a disposición de una empresa para devolver los bienes a sus propietarios (dividendos, recompras de acciones y spin-offs) e investigar cómo escoger entre estas opciones.

3.3. Maximizar el valor de una empresa

3.3.1. El valor de la empresa

La función objeto tiene como meta maximizar el valor de la empresa y este está vinculado con tres decisiones; inversión, financiamiento y dividendos.

¿Cuál es la relación?

Las decisiones y el valor de una empresa están ligados por el valor actual de sus flujos netos de efectivo esperados.

La rentabilidad de un proyecto se mide valuando todos los flujos en valor presente é igualándolos a los flujos desembolsados también en valor presente.

$$\sum_{k=1}^{n} A_k V^k = \sum_{k=1}^{n} B_k V^k$$

La suma de A_k puede considerarse como el activo de la empresa en el momento de valuación y la suma de B_k como el pasivo.

Esta igualdad se da gracias a la TIR (Tasa Interna de Retorno), la cual fue estudiada en el capítulo anterior, pero ¿cuál es la tasa adecuada para descontar los flujos y obtener el valor empresa?

La tasa a utilizar debe reflejar el riesgo de los proyectos de la empresa y la combinación de financiamiento utilizado.

Para proyectos de inversión en el mercado se ofrece una tasa de oportunidad de acuerdo a los proyectos que mantienen un riesgo similar.

El valor presente neto del proyecto da varias opciones

$$VPN > 0$$
$$VPN < 0$$
$$VPN = 0 \longrightarrow TIR$$

Así, cualquier otra tasa que se utilice en la evaluación tiene que reflejar el riesgo del proyecto.

3.3.2. ¿Cómo generar expectativas?

Los inversionistas forman expectativas sobre los flujos de efectivo futuros basándose en los flujos de caja actuales observados y el crecimiento futuro esperado, este crecimiento depende de la calidad de los proyectos de la empresa (sus decisiones de inversión) y la cantidad reinvertida en el negocio (sus decisiones de dividendos).

Las decisiones de financiamiento afectan el valor de una empresa por medio de la tasa de descuento, la cual refleja el riesgo y en general las decisiones que se toman dentro de una empresa.

La definición de valor de la empresa se pone a prueba por las interacciones entre las decisiones de inversión, financiamiento, dividendos y los conflictos que surgen entre accionistas y prestamistas.

3.3.3. Proposiciones Fundamentales

1. La base es la maximización de ciertos principios.
    - El riesgo debe ser recompensado.
    - Los flujos de caja son más importantes que la contabilidad de ingresos.
    - No dejarse engañar por los mercados.
    - Las decisiones que hace una empresa tiene un efecto sobre su valor.
2. Finanzas Corporativas es un todo integrado.
    - No solo es una colección de decisiones.
    - Las decisiones de inversión afectan a las decisiones de financiamiento y viceversa.
    - Existen excepciones pero en casos extraños.
    - Es poco probable que las empresas que ven sus problemas de forma fragmentada puedan llegar a resolverlos.
    - Malas inversiones pronto pueden encontrarse con un problema de dividendos.
3. Las Finanzas Corporativas son importante para todo el mundo.
    - Hay un aspecto financiero corporativo en cada decisión tomada por una empresa.
    - Todo el mundo, a pesar de no ser una empresa, encuentra aplicación para alguno de los componentes de las finanzas.

3.3.4. Toma de decisiones objetiva

Los directivos de una empresa toman las decisiones sobre dónde invertir o como recaudar fondos para una inversión con el propósito de maximizar alguna función o variable (ganancias, crecimiento, riesgo y costo).

Para esto los encargados de tomar decisiones deben tener claro como poder llegar a una decisión objetiva. La mayor fortaleza de las finanzas corporativas y la mayor debilidad es su enfoque en la maximización del valor. Al mantener dicho enfoque, se preservan la consistencia y la coherencia, a fin de desarrollar modelos de gran alcance y la teoría sobre la forma correcta de tomar decisiones de inversión, financiamiento y dividendos. Se puede argumentar, sin embargo, que todas estas conclusiones son condicionadas a la aceptación de la maximización del valor como el único objetivo de la empresa.

El objetivo deberá cumplir con las siguientes características:

- Es claro y sin ambigüedades, un objetivo ambiguo dará lugar a reglas de decisión que varían de un caso a otro y de tomador de decisiones a tomador de decisiones.
- Viene con una medida oportuna que se puede utilizar para evaluar el éxito o el fracaso de decisiones. Objetivos que suenan bien pero que no vienen con un mecanismo de medición son propensos a fallar.
- No borrar los beneficios específicos de la empresa y no dejar a la sociedad en una peor situación.

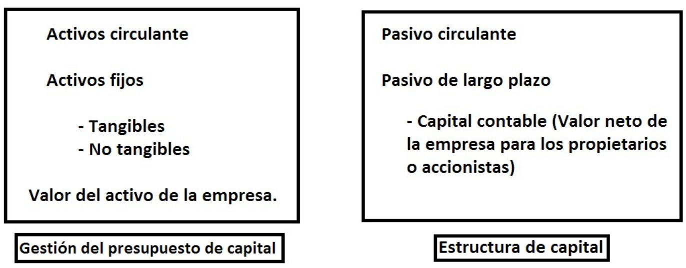
Por otra parte, es posible cuestionar el objetivo global de maximizar el valor empresa y trasladarlo a solo maximizar el valor del capital accionario. En realidad, resulta más eficiente y menos restrictivo este último objetivo, además de que se ajusta perfectamente al funcionamiento y desarrollo de los tres pilares en conjunto.

3.3.5. Formación de una empresa

El proceso para la formación y desarrollo de una empresa es el siguiente:

1. Fijar un objetivo para ofrecer un producto o servicio.
2. Adquirir financiamiento.
3. Invertir en los insumos necesarios para la producción.
4. Una vez producido y ofrecido, se debe obtener una ganancia.
5. Se generan valores (ingreso, utilidades, rentabilidad, etc.).
6. Se retienen utilidades para continuar produciendo e invirtiendo y se retribuye el excedente entre trabajadores y propietarios.

Si se toma una radiografía de la estructura de la empresa en un punto fijo del tiempo es posible analizar su comportamiento. De esta forma se obtiene el Balance General donde se muestra toda su situación financiera.



- Activo circulante: Activos de corto plazo de fácil realización (inventarios, inversiones menores a un año, etc.).

- Activo fijo: Es aquel que debe durar con el tiempo (terrenos, inmuebles, maquinaria, etc).

- Pasivo circulante: Deudas de corto plazo (menores a un año).

- Capital contable de la empresa (Activo - Pasivo): valor neto de la empresa para los propietarios o accionistas.

- Presupuesto de capital: Proceso relacionado con la realización y administración de los gastos encaminados a adquirir activos para la operativa de la empresa.

- Estructura de capital: Estructura que define la proporción de tipos de financiamiento que la empresa utiliza para gestionar el gasto. (pasivo y capital contable).

Del capital contable surgen las acciones que también son una fuente de fondeo para la empresa.

Por otra parte, ya que se ha definido el activo y pasivo de corto y largo plazo, ¿cómo deben administrarse los flujos de efectivo generados en ambos rubros? En ocasiones el flujo de efectivo de las operaciones no es conocido con certeza, por lo que es necesario prever los puntos en el tiempo donde existan flujos pasivos y no activos, con el fin de no incurrir en el riesgo de no poder cubrir esta parte pasiva (riesgo de liquidez).

Esta previsión es fundamental en el corto plazo, pues la operativa inmediata de la empresa depende de que los pasivos de corto plazo sean cubiertos por el activo, pues el remanente positivo podrá ser utilizado en la gestión del presupuesto de capital para generar mayores utilidades, lo que da pie al capital de trabajo contable:

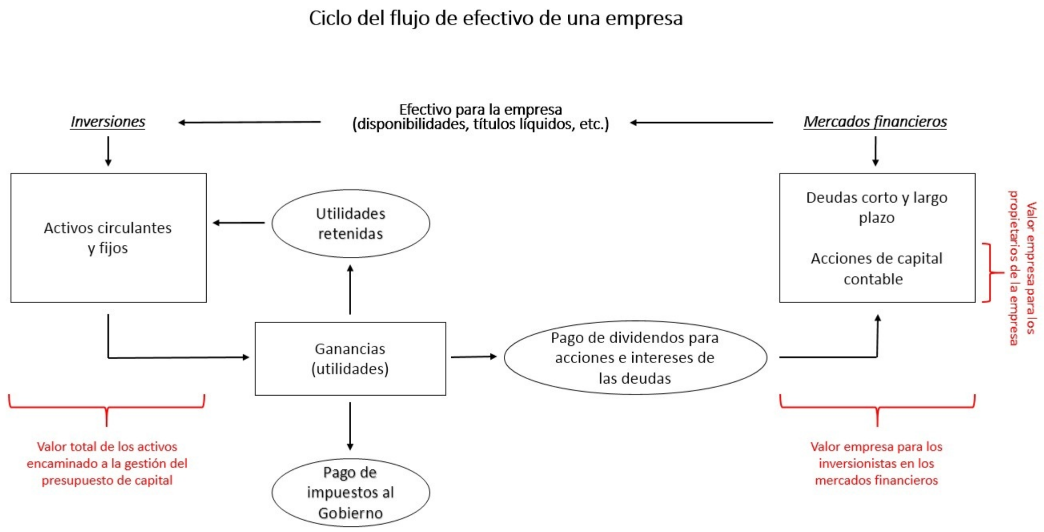
$$\textit{Activo circulante} \; - \; \textit{pasivo circulante} \; = \; \textit{capital de trabajo contable}$$

$$\textit{capital de trabajo contable} \; > \; 0 \Rightarrow \; \textit{se mitiga el riesgo de liquidez en el corto plazo}$$

Dado lo anterior, surge la labor del administrador financiero:

- Adquirir activos que generen mayor valor del que cuestan inicialmente.
- Emitir deuda que genere el mínimo pago de interés.
- Emitir acciones que generen un mayor dividendo para incrementar el valor de las mismas.

Para lograr esta meta es importante analizar el ciclo del flujo de efectivo proveniente de la empresa que fluye hacia los mercados financieros y regresa a ella.



A lo largo del tiempo, si el flujo que genera la operativa es mayor que el flujo que se obtiene de los mercados financieros y cubre la retención de utilidades, el pago de impuestos, dividendos e intereses, entonces la empresa está creando valor, el cual puede ser utilizado en nuevos proyectos y emisión de acciones.

En el diagrama del ciclo del flujo de efectivo, se observan los dos componentes relevantes del Balance General de la empresa. El activo generado dado el aprovechamiento de los recursos financieros en la gestión del presupuesto de capital, el cual debe cubrir las deudas de la empresa; y la estructura de capital que, como se comentó anteriormente, representa la combinación entre la deuda y el capital contable.

Lo anterior lleva a preguntarse, si la diferencia entre el activo y el pasivo resulta ser el capital contable para la empresa (activo-pasivo = capital), ¿por qué ubicar en un mismo rubro (estructura de capital) las deudas y el capital? La respuesta puede inferirse del diagrama, pues el capital neto contable resulta el valor empresa para los propietarios, ya que a los socios de la Junta Directiva y/o accionistas solamente les interesa la ganancia neta generada para el beneficio de estos y la estructura de capital resulta un rubro interesante para los mercados financieros, pues más allá de fijarse en el activo total de la empresa (pasivo + capital = activo), estos estudian los componentes que constituyen la deuda y el capital, pues resulta interesante conocer si la forma en que se fondea la empresa es adecuada y si la utilidad se está generando dado ese fondeo es creciente en cada periodo; esto para concluir si resulta una buena decisión invertir o no en las acciones de la institución, ya que es necesario estudiar el riesgo que se corre al invertir en el capital de una empresa.

Dado lo anterior, es posible definir la siguiente expresión para el valor empresa en los mercados financieros:

$$V = D + S$$

V = Valor de la empresa en los mercados financieros.

D = Debt = Valor total de la deuda (pasivo).
S = Stock =Valor total del capital contable.

Es importante mencionar que en cada periodo de operación la empresa genera flujos de pasivo (pago de intereses) para los acreedores y flujos de capital (utilidad neta) para los propietarios que se reflejan en el Estado de Resultados de la empresa y al conjuntar estos rubros se genera el famoso Flujo de Efectivo por periodo de la empresa, el cual se estudiará con más detalle en el tema de apalancamiento financiero.

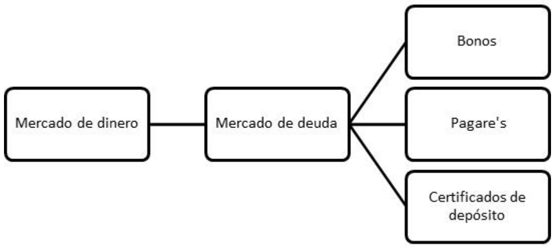
Por otra parte, de la expresión anterior se sigue que:

$$S = V - D$$

S representa, también, el valor de la empresa para los propietarios (socios de la junta directiva y/o accionistas). Nótese que V debe coincidir con el activo de la empresa dados los principios de contabilidad.

3.4. Conjunción y operativa de los tres pilares de las Finanzas Corporativas

3.4.1. Financiamiento con deuda



La emisión de deuda sirve para fondearse y el costo de dicho fondeo es el pago de intereses, y dado que en toda operación financiera existe cierto grado de riesgo, los riesgos del fondeo son:

- Crédito: Que la deuda no se pague.
- Inflación: Pérdida del poder adquisitivo.
- Tasas de interés: Cambio de valor dadas las tasas del mercado.

La deuda puede materializarse en diferentes instrumentos de inversión, como bonos, pagarés, certificados de depósito, etc. Estos instrumentos tienen cierta dinámica pero, en general, es posible tratarlos como bonos en alguna de sus clasificaciones.

Retomando el tema de bonos, estudiado en el capítulo anterior, es de saber se que estos instrumentos representan una serie de flujos de efectivo que se pagan en fechas determinadas previamente establecidas. Los bonos ayudan al financiamiento del gobierno o las empresas (el gobierno emite bonos y las empresas obligaciones, pero por practicidad las obligaciones son referidas como bonos).

Por otra parte, se sabe que los bonos pueden clasificarse en cupón cero o cuponados, donde el cupón se da a tasa fija o variable. Es importante recordar que los principales elementos son el valor Nominal (N), valor facial (F), tasa cupón (c) y el rendimiento YTM (r).

Se analiza el ejemplo siguiente:

Se emiten 100 bonos con un valor nominal de \$100 pesos cada uno y una tasa cupón del 5 % con un vencimiento de 5 años y un interés pagadero anualmente, evaluar los bonos con los siguientes rendimientos.

a) 7 % anual
b) 5 % anual
c) 3 % anual

Solución

Datos
N=100
F=100
n=5
c=5 %=0.05
r_a=7 %=0.07, r_b=5 %=0.05, r_c=3 %=0.03

Procedimiento
$P = Ca\overline{n}r + N(1+r)^{-n}$

a) $[(0.07)(100)][\frac{1-(1+0.07)^{-5}}{0.07}] + 100(1+0.07)^{-5} = 91.7996$

$\Rightarrow$ 91.7996 x 100 = 9179.96

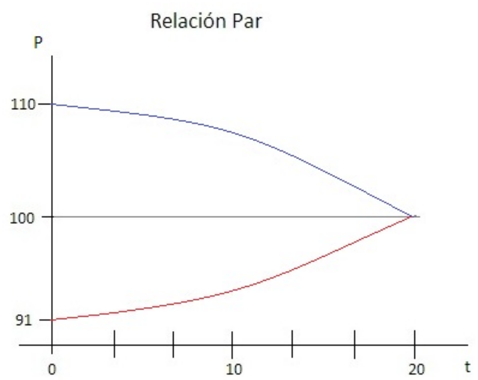
b) $[(0.05)(100)][\frac{1-(1+0.05)^{-5}}{0.05}] + 100(1+0.05)^{-5} = 100$

$\Rightarrow$ 100 x 100 = 10000

c) $[(0.03)(100)][\frac{1-(1+0.03)^{-5}}{0.03}] + 100(1+0.03)^{-5} = 109.159$

$\Rightarrow$ 109.159 x 100 = 10915.9

Si se obtiene el precio de los instrumentos en cada fecha cupón, es posible generar el gráfico siguiente:



Dado lo anterior se observan las relaciones estudiadas en el capítulo anterior:

P > F $\Longleftrightarrow$ r > c Sobre par

P = F $\Longleftrightarrow$ r = c A la par

P < F $\Longleftrightarrow$ r > c Bajo par

Se recuperaron las relaciones par, con el fin de analizar de mejor forma la siguiente situación de inversión:

Se desea invertir en un bono y se cuenta con las siguientes opciones, haciendo un análisis rápido ¿Qué bono es la mejor opción ?.

Bono 1		Bono 2	
Tasa cupon (c)	10 % anual	Tasa cupón (c)	4 % anual
Vencimiento (n)	3 años	Vencimiento (n)	3 años
YTM	5 %	YTM	5 %
Nominal	1,000	Nominal	1,000

Bono 1

c > r ∴ P > 1,000

C=cF=(.10)(1,000)=100

Paga más dinero en el tiempo.

Bono 2

c < r ∴ P < 1,000

C=cF=(.04)(1,000)=40

El precio del bono 2 es menor al precio del bono 1.

Aún no se tiene un criterio claro para saber que bono es más conveniente ya que por una parte uno paga más dinero en cada periodo, pero por otra parte el segundo bono es más barato, lo cual sugiere realizar un análisis más profundo.

Recuperando los conceptos estudiados, en el capítulo anterior, sobre Duración, se obtiene la tabla siguiente para ambos bonos:

Bono 1

t	f_t	f_tV^t	$\frac{f_tV^t}{P}$	$\frac{tf_tV^t}{P}$
1	100	95.2381	0.0838	0.0838
2	100	90.103	0.0798	0.1596
3	1100	950.2213	0.8363	2.5089
	Total	1,136.1624	1	2.7523

Bono 2

t	f_t	f_tV^t	$\frac{f_tV^t}{P}$	$\frac{tf_tV^t}{P}$
1	40	38.0952	0.03917	0.03917
2	40	36.2811	0.0373	0.0746
3	1040	898.39	0.9235	2.7705
	Total	972.76	1	2.8843

t: Periodo.

f_t: Flujo de efectivo en el periodo t.

f_tV^t: Valor presente de cada flujo de efectivo multiplicado por el periodo (tiempo).

$\frac{f_tV^t}{P}$: Porcentaje de participación (incidencia) de cada flujo con respecto al precio del bono.

$\frac{tf_tV^t}{P}$: Periodo de tiempo ponderado por la incidencia de cada flujo descontado en el precio del instrumento.

La suma de los periodos de tiempo ponderados por la participación de los flujos genera la Duración Macaulay del instrumento, esto es el plazo promedio de recuperación de la inversión. Por lo tanto:

$$D = \Sigma_{t=1}^{n}\frac{tf_tV^t}{P} = [\Sigma_{t=1}^{n}\frac{tCV^t}{p}] + \frac{nNV^n}{P}$$

Dado este análisis, se tiene que al plazo promedio del bono 2 es mayor al del bono uno.

Por otra parte, ¿Qué sucederá si existe un cambio en la tasa de interés (YTM) ? supongamos un cambio en una vecindad de 1 % (1 % = 100 puntos base), es decir, 0.5 % a la alza y 0.5 % a la baja.

Bono 1

Variación	YTM	Nuevo precio	Cambio %
+0.5 %	5.5 %	1,121.407	-1.298 %
-0.5 %	4.5 %	1,151.193	+1.3231 %

$\mid \triangle \mid = 2.6211\,\%$ (cambio conjunto)

Bono 2

Variación	YTM	Nuevo precio	Cambio %
+0.5 %	5.5 %	959.531	-1.3607 %
-0.5 %	4.5 %	986.285	+1.3898 %

$\mid \triangle \mid = 2.7502\,\%$ (cambio conjunto)

Nota: el cambio en porcentaje está dado por $\dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1$

Como se comentó en el capítulo anterior, la Duración Modificada (DM), por ser una derivada, mide el cambio en el precio del bono dada una variación en el YTM, pero ¿de qué tamaño es esa variación? Dicho cambio resulta ser de 1 % en conjunto (0.5 % a la alza y 0.5 % a la baja), de ahí que:

$$DM = \frac{-\frac{\partial P}{\partial r}}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t-1}}{P} = \frac{D}{(1+r)}$$

Y la Duración Modificada asociada a los bonos es:

Bono 1

$$DM = \frac{2.7523}{(1.05)} = 2.6211$$

Bono 2

$$DM = \frac{2.8843}{(1.05)} = 2.7502$$

Cifras que coinciden con el cambio conjunto estimado anteriormente. Así la volatilidad de los bonos respecto a la tasa de interés en una vecindad de 1 % es 2.6211 % y 2.7502 % respectivamente.

Cabe mencionar que el resultado de la Duración Modificada se lee en términos porcentuales y no hay necesidad de dividir el resultado entre 100 pues en el cálculo de la derivada, esta se divide por el precio del instrumento, haciendo de la Duración una medida de proporción.

Dado todo el análisis, se concluye lo siguiente:

1. Dado el pago de cupones y el Nominal, el bono 1 genera más dinero en el tiempo.
2. El bono 2 es más barato que el bono 1.
3. El periodo de recuperación de la inversión del bono 1 es menor que el del bono 2.
4. El bono 2 resulta ser más riesgoso ante cambios en el YTM.

Por lo tanto, si se desea invertir, se elegiría el bono 1 y, en contraste, si se busca financiamiento el bono a vender sería el bono 2.

Esto sugiere que, si la estrategia de la empresa es fondearse, esta debe buscar emitir bonos con una duración y precio mayores y que generen menos dinero en el tiempo, pues estos flujos serán pagados por la empresa bajo el concepto de intereses. En conclusión, la estrategia al financiarse es recibir mayor fondeo (dadas las necesidades de la empresa) y pagar lo menos posible por adquirir la deuda.

3.4.2. Financiamiento con capital

El capital de una empresa representa una parte vital en el Balance de la misma, pues, dado que contablemente es el resultado de la parte neta del activo después de considerar la deuda, es considerado como el valor empresa para los propietarios. Es por ello que resulta primordial mantener en el Balance un capital neto positivo, lo cual representa una gestión sana para la empresa, ya que sus activos solventan las deudas que se mantienen.

Después, si la empresa atraviesa un auge, es decir, funciona de manera correcta en la operativa y genera ganancias importantes, el capital se incrementa, por lo que es posible considerar iniciarse en el mercado bursátil. Esto llevaría a la empresa a emitir acciones en una OPI (Oferta Pública Inicial) en la Bolsa.

La situación descrita resultaría atractiva para los inversionistas en el mercado de capitales, pues, dado que se trata de una OPI, la expectativa del mercado sigue una tendencia alcista para el precio de las acciones dado el buen momento que atraviesa la empresa. Esto sugiere que el precio de colocación inicial debe ser justo para el mercado, es decir, no tiene que ser caro respecto a empresas del mismo giro, pues esto podría generar que, en lugar de aumentar la demanda y elevar el precio posteriormente, los inversionistas busquen acciones con un riesgo similar a menor precio, lo que generaría una caída en el precio inicial. Dada esta situación, evitar caídas en el precio de las acciones es fundamental para la empresa, pues estas provienen del capital contable, y si estás reducen su precio, entonces el valor de la empresa se verá afectado negativamente en el Balance.

Las acciones, además de ser una fuente de capital para elevar el valor empresa, funcionan como una alternativa de financiamiento, ya que cada acción funciona como un bono, pues esta promete cupones llamados dividendos de forma indefinida a cambio del recibir el precio, pero ¿cómo funcionan estos dividendos? En el capítulo anterior se estudió la valuación de acciones, pero es importante dar una revisión a dicha valuación desde una perspectiva de negocio. Así, es posible clasificar a estos títulos en dos grupos:

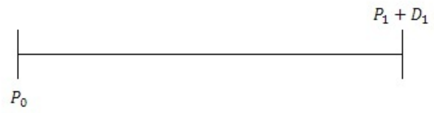
1. Acciones ordinarias o comunes: Este tipo de acciones son de alta relevancia, pues al comprador le da ciertos beneficios en la junta de propietarios (junta de accionistas). Si alguien en dicha junta posee más del 50 % de las acciones ordinarias, se considera como socio mayoritario y prácticamente el dueño de la empresa, por lo que su voz y voto son decisivos.

   Dado lo anterior, se infiere que los poseedores de acciones ordinarias tienen voz y voto en la junta para tomar decisiones en general para la empresa y dada esta importante participación, el pago de dividendos es limitado y se da prioridad a los accionistas preferentes.

2. Acciones preferentes: A los poseedores de este tipo de títulos se les garantiza el pago de dividendos y no necesariamente poseen voz y voto en la junta; esto depende del porcentaje de acciones que maneje y de la relación que tenga con el negocio y la junta.

Debe tenerse en cuenta que al comprar acciones de una empresa, los inversionistas esperan recibir dividendos si no tienen la titularidad que les prometen las acciones ordinarias y además de ello, esperan contar con una ganancia de capital, pues el objetivo de la empresa es hacer aumentar el valor de las acciones, situación que genera tan ansiada ganancia para estos inversionistas.

Recuperando el modelo de valuación de acciones del capítulo anterior, si el precio de la acción es este momento es P_0, la ganancia de capital derivada de esta en el siguiente periodo es $G = P_1 - P_0$, donde P_1 es el precio de la acción en siguiente periodo y el dividendo que promete el título es D_1, entonces se tendrá el siguiente diagrama de flujo de caja:



$$\Rightarrow G = P_1 - P_0$$
$$G_{Total} = (P_1 - P_0) + D_1 = G + D_1$$

¿Cuál es el rendimiento de la operación?

$$r = \frac{G_{Total}}{P_0} = \frac{G + D_1}{P_0} = \frac{D_1 + (P_1 - P_0)}{P_0}$$
$$r = (\frac{D_1 + P_1}{P_0}) - 1$$

Este rendimiento es conocido como "tasa de capitalización de mercado" o "costo de capital propio" o "costo de oportunidad del capital" y es el rendimiento esperado que ofrece el mercado para proyectos de inversión (instrumentos) que cuentan con el mismo riesgo que nuestras acciones.

En términos generales "costo de capital" es el costo del dinero, costo de la inversión o el sacrificio que se hace por la inversión.

En el mercado para evitar el arbitraje, todos los instrumentos con riesgo similar deben manejar tasas de oportunidad similares.

$$\Rightarrow r_1 = (\frac{P_1 + D_1}{P_0}) - 1$$
$$\Rightarrow P_0 = \frac{D_1 + P_1}{1 + r}$$

Entonces el precio justo de la acción es:

$$P_0 = (D_1 + P_1)V$$

Si se vendieran acciones a un precio P_0' tal que $P_0' > P_0$, entonces los inversionistas transferirían sus recursos a otros proyectos o instrumentos con el mismo costo de capital.
Entonces el precio baja y si $P_0' < P_0$, entonces los inversionistas comprarían una cantidad considerable de acciones y si la demanda crece entonces la oferta también y eso obliga a subir el precio hasta ajustarse.

Suponga que los especialistas en los mercados financieros estiman un precio P_2 en el siguiente periodo y un dividendo de D_2, entonces el precio está dado por:

$$P_1 = \frac{D_2 + P_2}{1 + r}$$

Además se define a P_0 de la siguiente forma:

$$P_0 = \frac{D_1 + P_1}{1 + r} = \frac{D_1}{1 + r} + \frac{(\frac{D_2+P_2}{1+r})}{1 + r}$$
$$P_0 = D_1(1 + r)^{-1} + (D_2 + P_2)(1 + r)^{-2} = D_1V + (D_2 + P_2)V^2$$

Generalizando para cualquier periodo n entonces:

$$P_0 = D_1V + D_2V^2 + ... + (D_n + P_n)V^n$$
$$P_0 = D_1V + D_2V^2 + ... + D_nV^n + P_nV^n$$
$$P_0 = (\sum_{k=1}^{n} D_kV^k) + P_nV^n$$

Si los pagos son indefinidos, es decir $n \to \infty$ entonces:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} D_kV^k + \lim_{n\to\infty} P_nV^n$$
$$P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} D_kV^k$$

Fórmula de flujo de efectivo descontado (FED).

Ahora, si se suponen dividendos constantes, es decir, $D_k = D$, entonces:

$$P = \frac{D}{r}$$

Entonces, el modelo FED aplica para el valor presente de cualquier otro activo, ya sea circulante o fijo, es decir, descartamos los flujos de efectivo proyectados dada la tasa de rendimiento (costo de capital) que ofrece el mercado para activos de riesgo equivalentes.

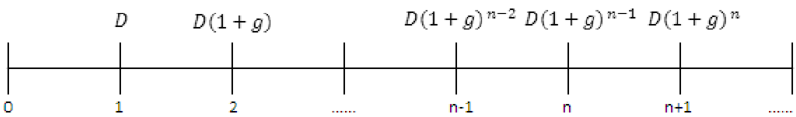
Nótese que el precio de la acción es el descuento de los dividendos por acción y no el descuento de la serie de las utilidades por acción, ya que parte de ellos se utilizan para gestión del presupuesto de capital.

La pregunta que surge es: ¿los dividendos son siempre constantes?, existen supuestos dadas las estimaciones de los expertos y las proyecciones hechas por la empresa de que los dividendos crecen de cierta forma.

Estos crecimientos se consideran de forma geométrica o aritmética, los cuales fueron estudiados en el capítulo anterior. Retomando los modelos se tiene:

Crecimiento geométrico en el dividendo para una acción

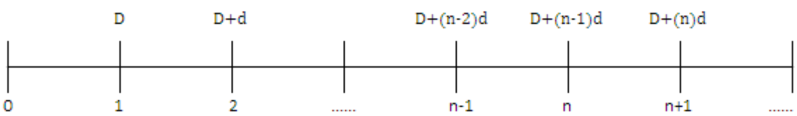
Si el dividendo crece geométricamente en cada periodo a una tasa g, el precio de la acción es:



$$P = \frac{D}{r-g} \Leftrightarrow r > g$$

Crecimiento aritmético en el dividendo para una acción

Si el dividendo crece aritméticamente en cada periodo a una tasa d, el precio de la acción es:



$$P = \frac{D}{r} + \frac{d}{r^2}$$

De donde es posible despejar r resolviendo la ecuación cuadrática.

Ejemplo

Calcule es el precio al día de hoy de una acción que tiene dividendos constantes de \$100.00 y además se estima que en tres años el precio de dicha acción será de \$5,000.00, considere una tasa de capitalización de mercado del 5 % anual.

Solución

Datos
$P_3 = 5,000$
$r = 0.05$
$n = 3$

$$P_0 = (\sum_{k=1}^{3} 100(1+0.05)^{-n}) + 5,000(1+0.05)^{-3} = 4,591.51$$

Ejemplo

Calcule el precio de una acción que paga dividendos con crecimiento geométrico de forma perpetua con una tasa de oportunidad el 8 % y una tasa de crecimiento del 2 %, el primer dividendo es de \$200.00.

Solución

Datos

$D = 200$
$r = 0.08$
$g = 0.02$

$$P_0 = \frac{200}{0.08 - 0.02} = 3,333{,}33$$

3.4.3. Retención de utilidades y crecimiento empresarial

Ya es sabido que el valor de la empresa para los propietarios se basa directamente en el valor del capital accionario de la estructura de capital. Por otra parte, para valuar las acciones es necesario estimar el flujo de efectivo que estas generan, es decir, los dividendos, por lo que es importante aclarar que el pago de estos es extraído de las utilidades de la empresa generadas por el capital, es decir, de las ganancias generadas por la operativa periodo a periodo, lo que nos lleva a concluir que el valor de la empresa es una función de la tasa de crecimiento de las utilidades generadas, de ahí que es necesario estudiar dicho comportamiento.

Supongamos que al inicio de la operación generamos utilidades U_0 y de ellas se utilizan utilidades retenidas U_r para la gestión del presupuesto de capital (inversiones, proyectos, maquinaria, etc.), por lo que en el siguiente periodo dichas utilidades retenidas generarán cierto rendimiento R_r y las utilidades estarán dadas por:

$$U_1 = U_0 + U_r R_r$$

donde U_r R_r de fine el incremento en las utilidades. Luego:

$$U_1 = U_0 + U_r R_r$$
$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_0}{U_0} + \frac{U_r}{U_0} R_r$$

$\frac{U_1}{U_0}$ es la razón de rentabilidad en utilidades y se espera que sea mayor a 1, pues resulta benéfico para la empresa que cada periodo las utilidades crezcan.

Dado lo anterior, si esta razón de rentabilidad supera la unidad, dicho excedente puede analizarse como una tasa de crecimiento para las utilidades de capital, es decir:

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_0} = 1 + g$$

donde g es el excedente mencionado o la tasa de crecimiento para las utilidades. Recuperando las igualdades anteriores y usando álgebra se tiene:

$$\frac{U_1}{U_0} = 1 + g = 1 + \frac{U_r}{U_0} R_r$$
$$\Rightarrow g = (\frac{U_r}{U_0}) R_r$$

de donde se define $\frac{U_r}{U_0}$ como la razón de retención de utilidades, pues mide la proporción de las utilidades retenidas respecto a las utilidades generadas al inicio de la operación de la empresa. De esta manera, si se tiene un crecimiento de g, los dividendos de las acciones de capital deben crecer a esta tasa y, por lo general, se utiliza un modelo de crecimiento geométrico para las estimaciones, pues la expectativa es que los dividendos resulten cada vez mayores.

Por otra parte, al momento de retener utilidades U_0 y U_r son conocidos y el rendimiento R_r que genera la inversión de la retención es revelado hasta el final del ejercicio, por lo que es necesario estimarlo para poder definir el crecimiento esperado g de las utilidades y los dividendos de las acciones.

¿Cómo se estima R_r? En la práctica, dado que este es un rendimiento esperado, puede tomarse en cuenta la expertís de los administradores financieros en el mercado o mediante proyecciones y análisis de sensibilidad para las inversiones de la empresa, aunque con frecuencia se supone que los proyectos seleccionados en el periodo actual tienen un rendimiento anticipado al igual que los demás proyectos venideros, por lo que resulta conveniente utilizar el rendimiento sobre el capital (ROE) histórico que ha presentado la empresa en cierto horizonte de tiempo.

El ROE es el rendimiento sobre la totalidad del capital de la empresa, es decir, el rendimiento sobre la acumulación de los proyectos históricos de la misma y se estima mediante una de las famosas razones financieras:

$$ROE = \hat{R}_r = \frac{Utilidad\ neta}{Capital\ contable\ total}$$

Una interpretación más sencilla del ROE indica la proporción que resulta ser la ganancia neta de la empresa en un ejercicio en términos de su capital total. De esta manera, regresando al modelo de crecimiento, la estimación del crecimiento de los dividendos es:

$$g = (\frac{U_r}{U_0})ROE$$

Por lo que si se retienen utilidades y el precio de las acciones está dado por $P = \frac{D}{r'}$, entonces bajo el crecimiento g de la retención el nuevo precio de las acciones será $P' = \frac{D}{r-g}$, donde se debe tener la restricción $r > g$.

Resulta sencillo concluir que la retención de utilidades es benéfica para la empresa en el sentido de que el precio de las acciones se incrementa, pues $P' > P$ cuando el costo de capital r se va reduciendo gracias al efecto provocado por g, pero la retención de utilidades está limitado a que el nivel de g no debe superar al de r, pues si esto ocurre el precio de las acciones resultaría negativo, lo que implicaría que en lugar de tener capital a favor, se tendrían pasivos que no podrían ser cubiertos por lo pocos recursos de la empresa resultantes de la amplia retención de utilidades.

Dado lo anterior se concluye que, en efecto, la retención de utilidades es benéfica para la empresa siempre y cuando se mantenga en el nivel adecuado y se genere un rendimiento aceptable en las inversiones de la empresa.

Ejemplo

Una empresa acaba de reportar utilidades de \$2,000,000.00 y planea retener el 40 % para invertir en proyectos. El rendimiento histórico sobre el capital contable es de 16 % y se espera mantener en ese nivel en un futuro. Si la empresa emite acciones comunes en el ejercicio bajo un dividendo de \$5.00 y un costo de capital del 8 % ¿Cuánto crecerán las utilidades a lo largo del año siguiente? y ¿Cuánto valdrán las acciones suponiendo dicho crecimiento?.

Solución

Datos
$U_0 = 2,000,000$

$\frac{U_r}{U_0} = 40\,\%{=}.4$

ROE=16 %=.16

g=40 %(12 %)=6.4 %=.064

Procedimiento
P=$\frac{D}{r-g} = \frac{5}{.8-.064}$=312.5

Por otra parte, si en el corto plazo no se retienen utilidades para ser invertidas en proyectos y si el dividendo por acción es constante, el precio de las acciones debe estar definido por:

$$P = \frac{D}{r}$$

De esta forma se observa que todas las utilidades de capital son utilizadas para pagar (retribuir) solamente dividendos a los tenedores de las acciones, por lo que la utilidad por acción (UPA) en este escenario está dada por:

$$UPA = D$$

Y de esta forma:

$$P = \frac{UPA}{r}$$

Lo cual limita el crecimiento de la empresa a largo plazo, pues se ha concluido que debe existir retención de utilidades, pues resulta necesario tomar de las ganancias cierto capital para la gestión del presupuesto de capital (pago de salarios, rotación de inventarios, maquinaria y equipo, proyectos de inversión, etc.) para así dar más valor a las acciones de la empresa. En otras palabras, es necesario que la empresa esté abierta a oportunidades de crecimiento y previamente retener utilidades para tomarlas si dichas oportunidades resultan benéficas.

Supongamos que en el periodo se retienen utilidades para ser invertidas en oportunidades de crecimiento (gestión del presupuesto de capital). Si dichas oportunidades se visualizan en un solo proyecto de inversión deben existir flujos de ingreso y egreso, los cuales al netearlos y analizar su valor conjunto al día de hoy generarán el Valor Actual Neto (VAN) de la oportunidad de crecimiento, es decir, el VAN_{OC}.

Entonces ¿cuál es el precio de la acción considerando las oportunidades de crecimiento?

Si el precio inicial de la acción es P y se considera el VAN_{OC} por acción, el nuevo precio estará dado por:

$$P' = P + \frac{VAN_{OC}}{\#A}$$

Donde $\#A$ es el número de acciones en circulación que mantiene la empresa en su estructura de capital.

Nótese que esta expresión y la obtenida con el ROE consideran por igual el crecimiento empresarial a partir de las utilidades retenidas; la diferencia radica en que la expresión en función del ROE estima desde un inicio el rendimiento que generan las utilidades globales de la empresa sobre su capital total y la expresión en función del VAN_{OC} considera los flujos netos que arrojan los proyectos conociendo desde un inicio su costo de capital. De esta forma el incremento en el precio de las acciones debiera coincidir a valor presente y mantener la relación:

$$P' = P + \frac{VAN_{OC}}{\#A} = \frac{D}{r-g} \; donde \; g = (\frac{U_r}{U_0})ROE$$

Ejemplo

Una empresa espera ganar \$1,000,000.00 dentro de un año sino emprende ningún proyecto a largo plazo, por otro lado existen 100,000 acciones de capital común en circulación y la empresa tendrá la oportunidad de invertir esa utilidad del año siguiente en un proyecto el cual genera ingresos por \$210,000.00 a perpetuidad. Si el costo de capital del proyecto coincide, dado los riesgos en el mercado, con el costo de capital de las acciones en 10 % anual ¿Cuál es el valor de cada acción antes y después de decidir la aceptación del proyecto?

Solución

Datos

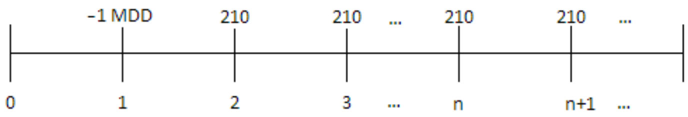
$$U_0 = 1,000,000 \quad \#A = 100,000 \quad UPA = \frac{U_0}{\#A} = \frac{1,000,000}{100,000} = 10 \quad r = 10\,\% = 0.10$$

Procedimiento

Si no se retienen utilidades en el corto plazo se tiene $D = UPA = 10$ y el precio de acción sin considerar algún crecimiento es:

$$P = \frac{D}{r} = \frac{10}{0.10} = 100$$

Por otra parte, se tiene una oportunidad de crecimiento que depende de la retención de \$1,000,000, dentro de un año, cantidad que se visualiza como un egreso para la empresa y que a cambio generará ingresos a perpetuidad de \$210,000 posteriores a dicho egreso. El diagrama de flujo de caja es el siguiente:



De esta forma el VAN al tiempo cero, es decir, el VAN_{OC} es:

$$VAN_{OC} = (-1,000,000 + \frac{210,000}{0.10})(1.10)^{-1} = 1,100,000(1.10)^{-1} = 1,000,000$$

Así el nuevo precio de la acción considerando el crecimiento es:

$$P' = P + \frac{VAN_{OC}}{\#A} = 100 + \frac{1,100,000}{100,000} = 100 + 10 = 110$$

Dada la retención de utilidades, debe tenerse:

$$P\prime = \frac{D}{r - g}$$

De donde $g = r - \frac{D}{P'} = 0.10 - \frac{10}{110} = 0.0091$, es decir, las utilidades crecerán en razón de 0.91 % y dado que se retuvo la totalidad de las utilidades en el primer periodo la razón de retención resulta ser de 100 %, por lo que el ROE implícito es:

$$g = (\frac{U_r}{U_0})ROE$$
$$\Rightarrow \; ROE = (\frac{U_0}{U_r})g = (\frac{1,000,000}{1,000,000})0.91\,\% = 0.91\,\%$$

Lo que coincide con la tasa g de crecimiento dada la retención total de la utilidad.

Nótese que, dados los resultados anteriores, para mantener un precio de $1,100 por acción, la empresa tendría que retener el 100 % de su utilidad en cada periodo y esperar generar 0.91 % de rendimiento por esa retención, lo cual resultaría riesgoso pues este parece ser un rendimiento bajo para una inversión tan ambiciosa; además, podría optarse por buscar en el mercado rendimientos más a tractivos a cambio de una menor retención de utilidades.

3.4.4. Apalancamiento Financiero

Hasta este punto se sabe que la estructura de capital de una empresa es aquella que representa la proporción entre deuda y capital, pero ¿cuál es la estructura óptima?, es decir, ¿cómo deben estar compuestas las proporciones de deuda y capital mencionadas?

El apalancamiento financiero se refiere a que tan endeudada se encuentra la empresa, de ahí que es necesario analizar y definir qué porcentaje de deuda está dispuesta a asumir la empresa para generar mayores utilidades dado el financiamiento obtenido siguiendo la proposición de que la estructura de capital que produce el valor más alto es aquella que maximiza la riqueza para los accionistas.

Se analiza esta situación en el ejemplo siguiente:

Ejemplo

Suponga que la empresa no mantiene deudas en su estructura de capital (no está apalancada), pero se considera emitir deuda para recomprar parte del capital accionario con el fin de mitigar el riesgo de pérdida. Se tienen 400 acciones en circulación (financiadas con capital contable). De esta forma, El Balance General dado por las estructuras de capital actual y propuesta se muestra en seguida:

	Actual	Propuesta
Activos (A)	8,000	8,000
Deuda(D)	0	4,000
Capital contable (S)	8,000	4,000
Interés de la deuda (TAE) (r_D)	.10	.10
Valor del mercado por acción (P)	20	20
Acciones en circulación	400	200

La estructura de capital actual se refiere a una empresa no apalancada (formada solamente por capital accionario).

La estructura de capital propuesta se refiere a una empresa apalancada (formada solamente por capital accionario).

Nótese que ambas estructuras de capital son cerradas, es decir, el capital contable coincide con el valor total de las acciones en circulación. Este efecto se da ya que, al momento de endeudarse, la empresa reduce su capital, pues el activo debe mantenerse, además se comenta que existe una recompra de acciones, lo cual reduce la cantidad de acciones en circulación en el mercado dado este efecto de cerradura.

Por otra parte, dada la investigación en los mercados financieros y la economía del sector, se tienen las siguientes condiciones económicas proyectadas para las utilidades del año en la empresa:

Escenario	Recesión	Esperado	Expansión
Utilidades Brutas (millones de pesos)	400	1,200	2,000

Las utilidades brutas son aquellas que genera la empresa antes de pagar intereses e impuestos, es decir, antes de ser gravadas por estos dos conceptos. Una vez que las utilidades son gravadas se convierten en utilidades netas, las cuales pueden ser ya utilizadas a conveniencia por la empresa.

Después se obtienen algunos indicadores financieros del Estado de Resultados y el ROE de la empresa para ambas estructuras de capital en cada escenario tomando en cuenta la siguiente nomenclatura:

EBI= Earnings Before Interest (Utilidades antes de intereses)
I= Interest (intereses) = Dr_D
EAI= Earnings After Interest (Utilidades después de intereses)=$EBI - I = EBI - Dr_D$
ROE= Return on Equity (rendimiento sobre el capital)= $Utilidades\ netas/Capital$
UPA= Utilidad Por Acción= $Utilidades\ netas/\#A$

Estructura no apalancada (capital 8,000 mdp y 400 acciones en circulación).

Escenario	Recesión	Esperado	Expansión
EBI	400	1,200	2,000
I	0	0	0
EAI	400	1,200	2,000
ROE	0.05	0.15	0.25
UPA	1	3	5

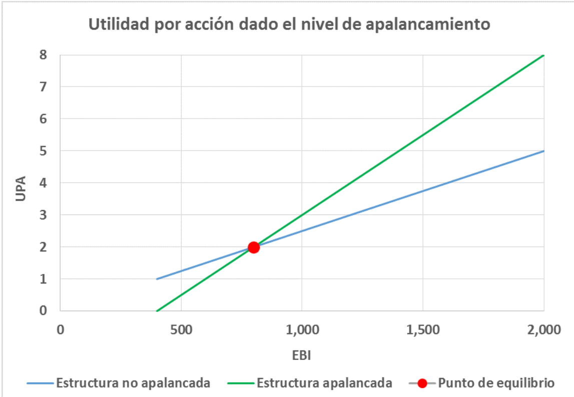
Nótese que EAI=EBI porque no se considera el pago de intereses puesto que no existen deudas en la estructura no apalancada.

Estructura apalancada (capital 4,000 y 200 acciones en circulación).

Escenario	Recesión	Esperado	Expansión
EBI	400	1,200	2,000
I	400	400	400
EAI	0	800	1,600
ROE	0	0.20	0.40
UPA	0	4	8

Nótese que, como la estructura de capital es apalancada, existe deuda que genera intereses pagaderos a los acreedores que hay que gravar de las EBI para obtener la utilidad neta EAI.

El análisis de los indicadores obtenidos en ambos casos es importante para observar el comportamiento del crecimiento financiero de la empresa dado su nivel de apalancamiento, por ejemplo, graficando la utilidad por acción (UPA) respecto a las utilidades generadas al inicio, es decir, antes de intereses (EBI) para su escenario respectivo se tiene:



Es posible observar que el efecto del apalancamiento depende de las EBI. La pendiente de la estructura apalancada resulta más pronunciada porque la empresa maneja un nivel inferior de acciones dada la absorción de deuda, además de que su capital se reduce, de aquí que cualquier incremento en las utilidades conlleva a un mayor incremento en las UPA respecto a la estructura no apalancada.

También se observa que las rectas deben interceptarse en un punto, el cual es conocido como punto de equilibrio, pues sirve como referencia para determinar desde que nivel las UPA resultan mayores si la empresa se encuentra apalancada. Por lo tanto el punto de equilibrio resulta ser un indicador de toma de decisiones para la empresa respecto a cuantas utilidades brutas necesita generar para obtener mayores utilidades por acción, lo que llevará a la empresa a mantenerse por encima del punto de equilibrio si en realidad busca beneficios por endeudarse.

En contraste, si la empresa está apalancada y se ubica debajo del punto de equilibrio, además de estar pagando intereses que reducen su utilidad neta, no estaría explotando la utilidad por cada acción que mantiene en circulación. Resumiendo:

- Si la empresa está apalancada, generará más utilidades por encima del punto de equilibrio.
- Si la empresa no está apalancada, generará más utilidades por debajo del punto de equilibrio.

Por otra parte, nótese que, si se absorbe deuda, las UPA crecen conforme las EBI, pues las acciones se reducen dado el efecto de cerradura comentado anteriormente, de ahí que el apalancamiento financiero resulta benéfico por encima del punto de equilibrio pagando el precio de mantener menos acciones circulando. Al final es posible concluir que el apalancamiento financiero es una estrategia que toma la empresa aceptando el riesgo de generar mayores utilidades para solventar el pasivo adquirido (la deuda es buena siempre y cuando se tenga la solvencia financiera para sobrellevarla).

De forma general, y para complementar el análisis gráfico, se sabe que las UPA para una estructura no apalancada están dadas por:

$$UPA = \frac{EBI}{\#A_{NA}}$$

donde $\#A_{NA}$ es el número de acciones en circulación de la empresa no apalancada. Por el contrario, si la estructura de capital es apalancada se tiene:

$$UPA = \frac{EAI}{\#A_A} = \frac{(EBI - Dr_D)}{\#A_A}$$

donde $\#A_{NA}$ es el número de acciones en circulación de la empresa apalancada. Luego, el punto de equilibrio es aquel donde las UPA son iguales para cualquier estructura de capital dado cierto nivel de EBI:

$$\begin{aligned} \frac{EBI}{\#A_{NA}} &= \frac{(EBI - Dr_D)}{\#A_A} \\ \Rightarrow\ (EBI)\#A_A &= (EBI - Dr_D)\#A_{NA} = (EBI)\#A_{NA} - (Dr_D)\#A_{NA} \\ \Rightarrow\ (EBI)\#A_{NA} - (EBI)\#A_A &= (Dr_D)\#A_{NA} \\ \Rightarrow\ EBI(\#A_{NA} - \#A_A) &= (Dr_D)\#A_{NA} \\ \Rightarrow\ EBI &= Dr_D(\frac{\#A_{NA}}{\#A_{NA} - \#A_A}) \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que la estructura de capital debe ser cerrada y si el precio de la acción es P, es posible desarrollar la expresión para las EBI de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} EBI &= Dr_D(\frac{\#A_{NA}}{\#A_{NA} - \#A_A}) = Dr_D(\frac{\frac{S_{NA}}{P}}{\frac{S_{NA}}{P} - \frac{S_A}{P}}) \\ \Rightarrow\ EBI &= Dr_D(\frac{S_{NA}}{S_{NA} - S_A}) \end{aligned}$$

Pero $S_{NA} - S_A$ es la diferencia que existe entre el capital no apalancado y el capital apalancado reducido, donde es claro que dicha reducción se da por la adquisición de deuda D. Así, contablemente, si el Balance está correctamente cuadrado $S_{NA} - S_A = D$, por lo que las EBI que generan el punto de equilibrio están dadas por:

$$EBI = Dr_D(\frac{S_{NA}}{S_{NA} - S_A}) = Dr_D(\frac{S_{NA}}{D})$$

Nótese que el capital contable no apalancado coincide con el activo A de la estructura de capital, incluso debe coincidir con el activo para cualquier estructura apalancada, por lo que en general $S_{NA} = A$, de ahí que se obtiene la expresión final para las EBI que generan el punto de equilibrio:

$$EBI = (A)r_D$$

Por lo que, retomando el ejemplo, se obtiene:

$$EBI = (S_{NA})r_D = (8,000)10\,\% = 800$$

Después, para obtener las UPA para el punto de equilibrio, basta con sustituir las EBI obtenidas en la expresión correspondiente para cualquier estructura de capital. Por simplicidad, utilizando la expresión para la estructura no apalancada y las igualdades comentadas anteriormente, se tiene:

$$UPA = \frac{EBI}{\#A_{NA}} = \frac{(A)r_D}{\frac{S_{NA}}{P}} = \frac{(A)r_D}{\frac{A}{P}}$$
$$\Rightarrow \; UPA = (P)r_D$$

y, para el ejemplo, las UPA que genera el punto de equilibrio son:

$$UPA = (P)r_D = (20)10\,\% = 2$$

Con lo que, finalmente, el punto de equilibrio está dado por el punto $(EBI, UPA) = (800, 2)$, que coincide con el punto marcado en la gráfica del ejemplo.

De esta forma es posible estimar el punto de equilibrio sin plantear posibles escenarios para las utilidades brutas de la empresa. De ahí que, si la empresa no tiene deudas y decide financiarse, deberá tomar en cuenta que para generar mayores utilidades por acción, dado un pasivo de 4,000, tendrá que generar utilidades brutas mayores a 800.

Adicionalmente, resulta importante analizar las ecuaciones para las rectas no apalancada y apalancada con el fin de estimar cuantas utilidades se necesita generar para obtener cierto nivel de utilidad por acción sea cual sea la estructura de capital de la empresa. Entonces para cualquier nivel de EBI:

Recta no apalancada

$$UPA = \frac{EBI}{\#A_{NA}} = (\frac{1}{\#A_{NA}})EBI$$

Recta apalancada

$$UPA = \frac{(EBI - Dr_D)}{\#A_A} = \frac{EBI}{\#A_A} - \frac{Dr_D}{\#A_A}$$
$$\Rightarrow \; UPA = (\frac{1}{\#A_A})EBI - \frac{Dr_D}{\#A_A}$$

Nótese que las pendientes no apalancada $(\frac{1}{\#A_{NA}})$ y apalancada $\frac{1}{\#A_A}$ definirán el nivel de que tanto podrían crecer las UPA si se producen EBI cada vez mayores. En la gráfica es claro que el beneficio del apalancamiento descansa en que es posible alcanzar, considerablemente, mayores utilidades por acción dado que el costo que se paga es una reducción en el número de acciones en circulación.

Ejemplo

Una empresa mantiene la siguiente estructura de capital libre de deudas, es decir, está financiada únicamente con capital:

Activo (A)	1 millón de pesos
Deuda (D)	-
Capital (S_{NA})	1 millón de pesos
Precio por acción (P)	\$200
Acciones en circulación ($\#A_{NA}$)	5,000

Nótese que la estructura de capital es cerrada.

Por otra parte, si se adquieren pasivos por 300 mil pesos a una tasa de interés anual de $r_D = 5\,\%$, ¿qué nivel deben alcanzar las utilidades brutas para generar mayores utilidades por acción dado el financiamiento obtenido?.

Procedimiento

Dada la adquisición de pasivo, contablemente la estructura de capital debe continuar cerrada, es decir, el capital accionario debe coincidir con el total de acciones en circulación, con el fin de cuadrar el Balance.

De esta forma el capital se reduce en 300,000, entonces:

$$S_A = S_{NA} - D = 1,000,000 - 300,000 = 700,000$$

y $\#A_A = \frac{S_A}{P} = \frac{700,000}{200} = 3,500$

Con lo que la estructura de capital apalancada se muestra a continuación:

Activo (A)	1 millón de pesos
Deuda (D)	300,000
Capital (S_A)	700,000
Precio por acción (P)	\$200
Acciones en circulación ($\#A_A$)	3,500

Luego, el punto de equilibrio está dado por las coordenadas $(EBI, UPA) = (Ar_D, Pr_D)$:

$$EBI = Ar_D = (1,000,000)5\,\% = 50,000$$
$$UPA = Pr_D = (200)5\,\% = 10$$

Entonces el punto buscado es $(EBI, UPA) = (50,000, 10)$, lo que indica que, dado el financiamiento 300,00 pesos, la empresa debe generar utilidades brutas mayores a 50,000 pesos anuales para alcanzar utilidades por acción arriba de 10 pesos. En contraste, si se producen utilidades por menos de 50,000 resultaría preferible para la empresa no adquirir el financiamiento, situación que se observa al graficar con las ecuaciones de las rectas obtenidas anteriormente:

Recta no apalancada

$$UPA = \left(\frac{1}{\#A_{NA}}\right) EBI$$

Recta apalancada

$$UPA = \left(\frac{1}{\#A_{A}}\right) EBI - \frac{Dr_D}{\#A_A}$$

3.4.5. Valor empresa dado el apalancamiento financiero (Proposiciones de Modigliani y Miller)

En la sección anterior se estudiaron los pros y contras del apalancamiento financiero, donde se concluyó que este resulta benéfico para la empresa si se genera el nivel suficiente de utilidades para solventar la deuda adquirida, de donde se sigue que el nivel de apalancamiento depende del apetito de riesgo de la empresa, es decir, a qué precio se desea hacer crecer las utilidades por acción siempre y cuando las utilidades brutas superen el punto de equilibrio.

Esta situación lleva a preguntarse ¿qué estructura de capital vale más?, es decir, ¿una empresa apalancada vale más que una no apalancada?, ¿bajo qué condiciones?.

Modigliani y Miller (MM) establecen que, sin el pago de impuestos, el valor de la empresa siempre es el mismo bajo cualquier estructura de capital, lo que representa la primera proposición de estos estudiosos e investigadores de las Finanzas Corporativas (MM1). Formalmente se tiene:

Proposición MM1: Ninguna estructura de capital vale más que otra para los propietarios de la empresa.

Dado lo anterior, se analiza la situación siguiente, rescatando los escenarios del ejemplo de la sección anterior, bajo la perspectiva de un inversionista que planea adquirir acciones de la empresa mediante dos estrategias posibles:

Ejemplo

Estrategia 1: Comprar 100 acciones de capital contable apalancado.

	Recesión	Esperado	Expansión
UPA	0	4	8
Utilidades x 100 acciones	0	400	800

Costo inicial de la operación= 100(20)=2,000. Se comprar 100 acciones a 20 pesos cada una.

Estrategia 2: Solicitar un préstamo de \$2,000 al 10 % TAE y desembolsar otros \$2,000 para comprar 200 acciones de capital contable no apalancado.

	Recesión	Esperado	Expansión
UPA	1	3	5
Utilidades x 200 acciones	200	600	1,000
Intereses a pagar	200	200	200
Utilidad Neta	0	400	800

Costo inicial de la operación: 200(20) - 2,000 = 2,000. Se compran 200 acciones a 20 pesos cada una y se tiene un pasivo de 2,000.

Nótese que en la primera estrategia, el inversionista no está apalancado y adquiere acciones de la empresa apalancada, mientras que en la segunda estrategia sucede lo contrario, el inversionista se apalanca y compra acciones de la empresa no apalancada.

Dado esto, sea cual sea la estrategia, la utilidad neta es la misma para los posibles escenarios (0, 400 y 800) esté apalancada o no la empresa y el costo inicial para el inversionista coincide esté o no apalancado, por lo que se corrobora lo que se plantea en la proposición MMI, ya que ninguna estructura de capital es mejor que otra. De no ser así se obtendrían mayores utilidades netas en alguna, y de suceder esto con el tiempo las condiciones del mercado ajustarían los parámetros del capital y deuda.

Por otra parte, ¿cuál es valor de la empresa no apalancada y apalancada en los mercados financieros?

	Actual	Propuesta
Activos (A)	8,000	8,000
Deuda (D)	0	4,000
Capital contable (S)	8,000	4,000
Interés de la deuda (TAE) (r_D)	.10	.10
Valor del mercado por acción (P)	20	20
Acciones en circulación	400	200

Rescatando las estructuras de capital de ambas empresa y sabiendo que para los mercados financieros $V = D + S$, se observa que ambos valores empresa resultan ser de 8,000, por lo que se tiene:

$$V_{NA} = V_A$$

donde V_{NA} es el valor de la empresa no apalancada y V_A es el valor de la empresa apalancada.

Si el valor de la empresa apalancada fuera mayor, los inversionistas no comprarían acciones de esta y buscarían fondearse en el mercado y adquirir acciones de capital no apalancado para generar el mismo rendimiento. Con el paso del tiempo, los precios en el mercado se ajustarían.

Dado lo anterior, la proposición 1 de Modigliani y Miller sugiere que el valor de la empresa siempre es el mismo sin importar su estructura de capital solamente si se pagan intereses adicionales al pasivo adquirido.

El apalancamiento solamente es una estrategia que depende del riesgo que está dispuesta a asumir de la empresa para alcanzar cierto nivel de utilidades brutas arriba del punto de equilibrio. Esto se observa en las rectas generadas por el apalancamiento, ya que la recta apalancada es mayor que la no apalancada a partir de este punto mostrando que se tienen mayores rendimientos en buenas épocas donde las utilidades crecen. Así, la pendiente mide el riesgo para los accionistas pues define la sensibilidad del rendimiento sobre el capital (ROE) dados los cambios en el desempeño de la operativa de la empresa.

Se concluye que el capital apalancado implica mayor riesgo, motivo por el cual el rendimiento esperado es más alto, lo cual Modigliani y Miller analizan en su segunda proposición, pues argumentan que el costo de capital está positivamente relacionado con el apalancamiento, pues el riesgo de los tenedores de capital aumenta con la deuda.

Primeramente se define el Costo Promedio Ponderado del Capital (WACC por sus siglas en inglés Weighted Average Cost of Capital) como el costo de la deuda y el costo del capital ponderado por la incidencia de la deuda y el capital en el valor empresa, es decir:

$$WACC = (\frac{S}{S+D})r_s + (\frac{D}{S+D})r_D$$

donde:

D = Debt = Valor total de la deuda (pasivo).

S = Stock =Valor total del capital contable.

r_D= Costo de la deuda (Interés de la deuda).

r_S= Costo del Capital (rendimiento que debe obtener la empresa sobre sus inversiones para que su valor en el mercado permanezca inalterado).

Cabe mencionar que el costo de capital r_S representa también la tasa de descuento de las utilidades empresariales futuras, es decir, los dividendos de las acciones en el modelo FED estudiado anteriormente; es por ello que el administrador financiero debe proveerse de las herramientas necesarias para tomar las decisiones sobre las inversiones a realizar y por ende las que más le convengan a la empresa, para que el costo de capital coincida o rebase el nivel de TREMA establecido por los propietarios.

Es sabido que los dividendos de las acciones están ligados con la utilidad neta de la empresa, de ahí que es posible inferir que existe un paralelismo altamente significativo entre el costo de capital de las acciones y el ROE, pues, como se estudió en secciones anteriores, este último funciona para estimar el precio de las acciones dado cierto crecimiento dada la retención de utilidades.

Retomando la expresión para el WACC, se observa que $(\frac{S}{S+D})$ y $(\frac{D}{S+D})$ funcionan como ponderadores (suman 1) de los costos de la estructura de capital, de ahí que el WACC puede interpretarse como el costo de la misma estructura. Así, en el ejemplo de la empresa no apalancada (NA) y apalancada (A) en el escenario esperado se tiene:

$$WACC_{NA} = (\frac{8,000}{8,000+0})0.15 + (\frac{0}{8,000+0})0.10 = 0.15$$
$$WACC_{A} = (\frac{4,000}{4,000+4,000})0.20 + (\frac{4,000}{4,000+4,000})0.10 = 0.15$$

Nótese que, dada la equivalencia entre el costo de capital y el ROE, se utiliza este último para la estimación del WACC. Así, bajo MM1 el WACC (15 %) se preserva para cualquier estructura de capital, ya que el valor empresa es el mismo. Después, se define r_0 como el costo de capital de una empresa no apalancada:

$$r_0 = \frac{Utilidades\ netas\ de\ la\ empresa\ no\ apalancada}{Capital\ contable\ no\ apalancado}$$

De esta forma, en el ejemplo para el escenario esperado se tiene:

$$r_0 = \frac{1,200}{8,000} = 0.15$$

Así, se concluye que, bajo MM1 y considerando solamente el pago de intereses de la deuda, WACC=r_0, por lo que es posible desarrollar finalmente la segunda proposición de Modigliani y Miller:

$$WACC = r_0 = (\frac{S}{S+D})r_S + (\frac{D}{S+D})r_D$$

$$\Rightarrow\ r_0(S+D) = Sr_S + Dr_D$$

$$\Rightarrow\ r_S = \frac{r_0(S+D) - Dr_D}{S} = \frac{Sr_0 + Dr_0 - Dr_D}{S} = \frac{Sr_0 + D(r_0 - r_D)}{S}$$

$$\Rightarrow\ r_S = r_0 + \frac{D}{S}(r_0 - r_D)$$

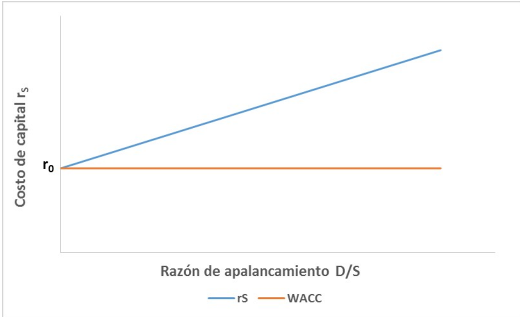
Formalmente se tiene:

Proposición MM2: El costo de capital de una empresa está positivamente relacionado con el apalancamiento financiero dada la siguiente expresión:

$$r_S = r_0 + (r_0 - r_D)\frac{D}{S}$$

De esta manera, el rendimiento esperado del capital es una función lineal de la famosa razón de apalancamiento $\frac{D}{S}$, que define el porcentaje de deuda (apalancamiento) que mantiene la empresa respecto a su capital contable.

Esta ecuación define una recta con pendiente $(r_0 - r_D)$, la cual será más elevada a medida que r_0 supere el nivel del costo de la deuda r_D. Esto sugiere que si la empresa busca financiarse, debe buscar un costo sobre su deuda (pago de intereses) inferior al costo de capital que mantiene actualmente, es decir, $r_0 > r_D$, pues de lo contrario se generaría una pendiente negativa que haría disminuir el nuevo costo de capital r_S, situación que no sería rentable para el negocio. Adicionalmente si se cumple la igualdad $r_0 = r_D$, el costo de capital actual se mantendría, por lo que resultaría indiferente para la empresa financiarse. Gráficamente se tiene:

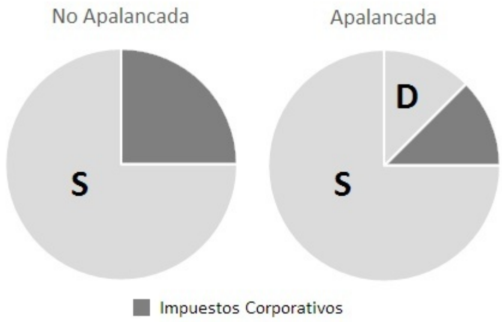


donde puede apreciarse que una empresa no apalancada parte de un costo de capital inicial r_0 y, si $r_0 > r_D$, el nuevo costo de capital r_S aumenta a medida que la razón de apalancamiento crece manteniendo el WACC en el nivel de r_0 solamente si se pagan intereses por el pasivo adquirido, pues el valor empresa debe preservarse.

Lo anterior soporta la idea de que el apalancamiento depende del perfil de riesgo que la empresa está decidida a asumir, pues a pesar de que el valor de la estructura de capital es el mismo, es posible hacer crecer los rendimientos esperados a medida que se genera cierto nivel de utilidades y se adquiere un costo sobre la deuda tolerable para la operativa.

3.4.6. Valor empresa dado el apalancamiento, incluyendo el pago de impuestos

En el tema anterior se estudió que el valor de una empresa es el mismo bajo cualquier estructura de capital solamente si los intereses de la deuda son gravados de las utilidades brutas, pero en la práctica es común considerar en el pago de impuestos, pasivo que una empresa debe asumir esté o no apalancada, ya que, independientemente de eso se tiene que cumplir con las obligaciones fiscales. Gráficamente se tiene:



Si ambos círculos son del mismo tamaño, ¿qué estructura de capital vale más? Inicialmente se sabe que si no se pagan impuestos, las estructuras tienen el mismo valor y, además, si estos son un pasivo, es fácil concluir que la empresa con mayor valor será la que pague un monto menor de obligaciones fiscales.

De esta manera, dado que en la práctica es imposible evadir el pago de impuestos, es posible analizar qué estructura de capital puede generar mayor valor en los mercados financieros, situación donde la adquisición de deuda resulta bastante importante. Se estudia el ejemplo siguiente:

Una empresa mantiene una tasa fiscal corporativa de 35 % TAE y utilidades antes de intereses e impuestos (Earnings Before Interest and Taxes) por 1 millón de dólares. Se proponen dos estructura de capital alternativas: 1) Empresa financiada 100 % con capital accionario (no apalancada) y 2) Empresa financiada con deuda por 4 millones de dólares y costo de 10 % TAE (apalancada).

Tomando en cuenta la nomenclatura siguiente, se analizan conjuntamente los indicadores del Estado de Resultados para ambas empresas en el periodo:

EBT= Earnings Before Interest and Taxes (Utilidades antes de intereses e impuestos)

I= Interest (intereses)= Dr_D

EBT= Earnings Before Taxes (Utilidades después de impuestos) = EBIT-Dr_D

T= Taxes (Impuestos)= $EBTt_C$

EAT= Earnings After Taxes= EBT-T

Estado de resultados	NA	A
EBIT	1,000,000	1,000,000
I	0	400,000
EBT	1,000	600,000
T	350,000	210,000
EAT	650,000	390,000

Nótese que la estructura apalancada (A) además de pagar impuestos también paga intereses, ya que adquiere deuda. De esta forma a las utilidades brutas EBIT se le gravan primero los intereses I para dejar libres estas utilidades de cualquier pasivo para los acreedores y después gravar los impuestos correspondientes para el Fisco. Así, las utilidades netas de la empresa serán aquellas libres de intereses e impuestos, es decir, las EAT.

Por otra parte, es posible deducir las siguientes expresiones para los impuestos pagaderos y las utilidades netas:

$$T = EBTt_C = (EBIT - Dr_D)t_C$$

$$y$$

$$EAT = EBT - T = (EBIT - Dr_D) - (EBIT - Dr_D)t_C$$

$$\Rightarrow \; EAT = (EBIT - Dr_D)(1 - t_C)$$

$$\Rightarrow \; EAT(1 - t_C)$$

Después, observando el estado de resultados, pareciera que la empresa no apalancada tiene mayor valor, pues genera mayores utilidades netas, pero la empresa apalancada resulta mejor amparada en materia de pago de impuestos, pues paga una cantidad considerablemente menor al fisco, es decir, 350,000-210,000=70,000 dólares, entonces ¿qué estructura de capital genera el mayor valor para los mercados financieros?

La respuesta se obtiene retomando lo estudiado en el tema 4.3.5 Formación de una empresa, pues se sabe que el flujo de efectivo de un negocio corresponde , en cada periodo, a la conjunción de los flujos de pasivo (pago de intereses) para los acreedores y los flujos de capital (utilidad neta) para los propietarios reflejados en el Estado de Resultados. Así, el flujo de efectivo FE, en el periodo, para ambas empresas es:

Flujo de efectivo	NA	A
FE	650,000	790,000

Cifras que, dada la definición del flujo de efectivo, se obtienen con la suma $FE = EAT + I$, de donde:

$$FE = EAT + I = EBT(1 - t_C) + Dr_D = (EBIT - Dr_D)(1 - t_C) + Dr_D$$

$$\Rightarrow \; FE = EBIT - Dr_D - EBITt_C + Dr_Dt_C + Dr_D$$

$$\Rightarrow \; FE = EBIT - EBITt_C + Dr_Dt_C$$

$$\Rightarrow \; FE = EBIT(1 - t_C) + Dr_Dt_C$$

donde

$$FE_{NA} = 1,000,000(1 - 0.35) + 0(0.10)(0.35)$$

$$\Rightarrow \; FE_{NA} = 650,000 + 0$$
$$\Rightarrow \; 650,000$$
$$y$$
$$FE_A = 1,000,000(1 - 0.35) + 4,000,000(0.10)(0.35)$$
$$\Rightarrow \; FE_A = 650,000 + 140,000$$
$$\Rightarrow \; FE_A = 790,000$$

Se observa que la empresa apalancada genera un mayor flujo de efectivo en el periodo, situación que resulta benéfica para la empresa en los mercados financieros, pues se sabe que el valor empresa coincide con el valor presente de los flujos de efectivo generados por la operación periodo a periodo. Esto significa que el Flujo de efectivo FE está íntimamente relacionado con el valor empresa S+D pues analizando la primera expresión FE=EAT+I, EAT no es más que las utilidades netas generadas que van hacia el capital S e I resulta ser el monto que va a hacia el pasivo D.

Entonces si el valor empresa se puede expresar como el valor presente de los flujos de efectivo generados periodo a periodo y bajo el supuesto de que la empresa espera generar (como mínimo) el mismo flujo a perpetuidad y mantener (cómo máximo) la misma tasa de impuestos t_C, se debe tener lo siguiente:

$$V = VP(FE)$$

Expresión que representa el valor presente del flujo de efectivo.

Para poder descontar el flujo generado por la empresa, es necesario analizar su descomposición en $EBIT(1-t_C)$ y Dr_Dt_C, pues como se observa, el flujo de la empresa apalancada supera el de la no apalancada en 140,000 dólares, cifra resultante de la segunda expresión de la descomposición, es decir, Dr_Dt_C, o mejor conocida como Protección Fiscal (PF), ya que al momento de pagar intereses la empresa se ahorra (deduce) impuestos en esa magnitud, situación que coincide con lo comentado al inicio respecto a que la estructura de capital que vale más es aquella que paga menos impuestos, sabiendo que se mantiene un nivel específico de deuda. Además $EBIT(1-t_C)$ representa una utilidad (sin impuestos) y Dr_Dt_C representa el ahorro de impuestos dada la adquisición de deuda, por lo que descontar todo el flujo de efectivo con una sola tasa de rendimiento sería inadecuado, pues los dos miembros de la descomposición mantienen riesgos diferentes.

Entonces, ¿cuál es el rendimiento que mide de mejor manera el riesgo del miembro de utilidad $EBIT(1-t_C)$? y ¿cuál es el rendimiento que mide de mejor manera el riesgo dela protección fiscal Dr_Dt_C?

$EBIT(1-t_C)$ es la utilidad neta de la empresa no apalancada y la utilidad bruta de la empresa apalancada gravada de impuestos, por lo que este miembro representa el flujo sobre el capital contable de las dos estructuras, y el costo de capital r_0 debe ser la mejor tasa para descontar, pues, dada MM2, a partir de r_0 el rendimiento sobre el capital se incrementa dado un buen apalancamiento financiero.

Por otra parte, la protección fiscal $PF = Dr_D t_C$ es la parte de los intereses de la deuda que se ahorra la empresa apalancada en la deducción de impuestos, por lo que dicha deducción depende del nivel que alcance la deuda, de ahí que el costo de la deuda refleja de mejor manera el riesgo de PF.

Así, dados los supuestos comentados anteriormente, el valor empresa está definido por:

$$V = VP(FE) = VP(EBIT(1-t_C) + Dr_D t_C)$$
$$\Rightarrow\ V = \frac{EBIT(1-t_C)}{r_0} + \frac{Dr_D t_C}{r_D}$$
$$\Rightarrow\ V = \frac{EBIT(1-t_C)}{r_0} + Dt_C$$

Donde $EBIT(1-t_C)/r_0$ es el valor de la empresa no apalancada y Dt_C es el valor presente de la protección fiscal. Ahora es posible hacer una clasificación:

$$V_{NA} = \frac{EBIT(1-t_C)}{r_0}$$
$$y$$
$$V_A = \frac{EBIT(1-t_C)}{r_0} + Dt_C$$

De donde se establece la MM1:

Proposición MM1 (con impuestos): Dado que la tasa de impuestos es positiva, la empresa apalancada tiene mayor valor en los mercados financieros en proporción a la protección fiscal, pues dicha empresa paga menos impuestos haciendo que su valor se incremente. Esto es:

$$V_A > V_{NA}$$

Luego, dado el pago de impuestos, se genera un nuevo costo t_c para la empresa, el cual, aplicado a la protección fiscal, se transforma en un activo para la empresa apalancada, el cual reduce el pasivo (intereses de la deuda) a pagar en cada periodo, es decir:

$$I - Dr_D t_C = Dr_D - Dr_D t_C$$

Expresión que es posible incluir en el WACC redefiniéndolo, ya que este representa la ponderación de los costos para la empresa:

$$WACC = (\frac{S}{S+D})r_S + (\frac{D}{S+D})r_D - (\frac{Dt_c}{S+D})r_D$$
$$\Rightarrow\ WACC = (\frac{S}{S+D})r_S + (\frac{D}{S+D})(1-t_C)r_D$$

La misma situación ocurre con la expresión dada por la proposición MM2. Obsérvese que, sin impuestos, se cumple:

$$r_S = r_0 + \frac{D}{S}(r_0 - r_D)$$

y dado que, gracias a la protección fiscal, se genera una ganancia que reduce el pasivo de la empresa, el costo neto $(r_0 - r_D)$ se reduce en términos de la tasa fiscal (al igual que en la expresión para el WACC), es decir, $(r_0 - r_D)(1 - t_C)$, por lo que MM2 con impuestos implica:

$$r_S = r_0 + \frac{D}{S}(r_0 - r_D)(1 - t_C)$$

Formalmente se tiene:

Proposición MM2 (con impuestos): El costo de capital de una empresa está positivamente relacionado con el apalancamiento y es reducido en términos de la tasa fiscal corporativa aplicada a la deuda total, mediante la siguiente expresión:

$$r_S = r_0 \frac{D}{S}(r_0 - r_D)(1 - t_C)$$

Esto significa que, aunado al aumento del valor empresa en los mercados financieros, la existencia de impuestos y deducción de los mismos implica una reducción en el costo de capital, por lo que es necesario analizar a qué nivel debe colocarse el interés de la deuda que se desea obtener tomando en cuenta el nivel de la tasa de impuestos que se debe pagar.

Ejemplo

Hoy una empresa se financia solo con capital (está no apalancada) y se espera generar utilidades brutas de 153.85 MDD a perpetuidad. La tasa fiscal corporativa es de 35 % anual (TAE) y todas las utilidades después de impuestos se pagan como dividendos. Se considera una restructuración de capital que le permitirá a la empresa renegociar 200 MDD en deuda con un costo anual del 10 % (TAE).

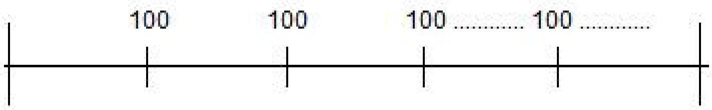
Por otra parte las empresas no apalancadas del mismo giro tienen un costo promedio de capital accionario del 20 % anual ¿Cuál es el nuevo valor de la empresa con la restructuración ?

Solución

Utilidades Brutas

$EBIT = 153.85$

$V_{NA} = \frac{EBIT(1-t_c)}{r_O} = \frac{153.85(1-.35)}{.20} = 500$ MDD



Por otra parte, la protección fiscal en cada periodo y su valor presente son:

$PF = Dt_c r_d = 200(0.35)(0.10) = 7$

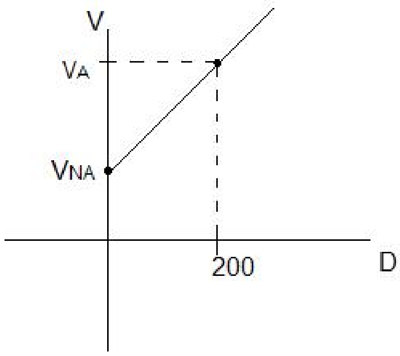
$VAPF = \frac{Dt_c r_d}{r_d} = Dt_c = 200(0.35) = 70$

Con lo que se obtiene el valor de la empresa apalancada:

$V_A = 500 + 70 = 570$

Por lo tanto se corrobora MMI y se observa que si la deuda crece hasta un nivel permitido por la solvencia de la empresa, entonces su valor en los mercados financieros se incrementará:

$$V_{NA} < V_A$$
$$500 < 570$$
$$D \uparrow \Rightarrow V \uparrow$$



Después, es posible utilizar los valores obtenidos para calcular los demás parámetros de la empresa respecto a su Balance y Estado de Resultados:

$V_A = 570$
$V = S + D$
570=S+200
$S = 570 - 200$
S=370 Capital contable de la empresa apalancada.

Así, por $MM2$

$r_s = r_0 + \frac{D}{S}(1 - t_c)(r_0 - r_d)$

$0.20 + \frac{200}{370}(0.65)(0.20 - 0.10) = 0.2351 \approx ROE$

De esta forma se observa lo comentado en el tema anterior, es decir, si r_0 supera el nivel del costo de la deuda, el costo de capital se incrementará:

$r_0 > r_d \Rightarrow r_s \uparrow$ (con y sin impuestos)

$$r_s = \frac{UtilidadNeta}{CapitalContable} = \frac{EAT}{S}$$
$$= \frac{(EBIT - Dr_d)(1 - t_c)}{S}$$
$$S = \frac{EAT}{r_s}$$

Luego:

$S = \frac{(153.85 - 20)(0.65)}{0.2351} = 370$

$WACC = \frac{200}{570}(0.65)(0.10) + \frac{370}{570}(0.2351) = 0.1754$

Entonces, si existe una tasa fiscal por pagar, el WACC se reduce, por lo que se rompe la igualdad con r_0 sin impuestos:

$$WACC < R_0$$

Se observa también que si el WACC se reduce gracias al pago de impuestos, el valor empresa en los mercados se incrementará:

$$WACC \downarrow \Rightarrow V_A \uparrow$$

Además, es posible utilizar la expresión del WACC para corroborar el cálculo del valor empresa:

$$\Rightarrow WACC = \frac{D}{V_A}(1 - t_c)r_d + \frac{S}{V_A}r_s$$

$$V_A = \frac{D}{WACC}(1 - t_c)r_d + \frac{S}{WACC}r_s$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{D(1 - t_c)r_d + (EBIT - r_dD)(1.t_c)}{WACC}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Dr_d - Dt_cr_d + EBIT(1 - t_c) - r_dD + r_dt_cD}{WACC}$$

$$= \frac{EBIT(1-t_c)}{WACC}$$

$$V_A = \frac{153.85(0.65)}{0.1754} = 570$$

Así, con los valores obtenidos, se presenta, para el primer periodo, el Estado de Resultados y Flujo de Efectivo para las empresas apalancada y no apalancada:

	NA	**A**
EBIT	153.85	153.85
I	0	20
EBT	153.85	133.85
T	53.85	46.85
EAT	100	87
FE	100	107

Donde el flujo de efectivo es:

$$FE = EBIT(1-t_C) + Dr_Dt_C$$

$$FE_{NA} = 153.85(1-0.35) + 0(0.10)(0.35)$$

$$\Rightarrow\ FE_{NA} = 100 + 0 = 100$$

$$y$$

$$FE_A = 153.85(1-0.35) + 250(0.10)(0.35)$$

$$\Rightarrow\ FE_A = 100 + 7 + 107$$

De la misma forma, se muestra el Balance General actual para ambas estructuras de capital:

Con impuestos.

	NA	A
Activo	500	500
Protección Fiscal	0	70
Act. Total	500	570
Pasivo	0	200
Capital	500	370

Nótese que la protección fiscal es el monto que la empresa apalancada ahorra por concepto de impuestos, por lo que es considerado como un activo a valor presente.

Sin impuestos

	NA	A
Activo	500	500
Pasivo	0	200
Capital	500	300

Y sin considerar impuestos, se presentan los parámetros para ambas estructuras:

$$r_0 = \frac{Util.Netas}{Capital} = \frac{153.85}{500} = 0.3077$$

$$r_0 = WACC = 0.3077$$

	NA	A
EBI	153.85	153.85
r_dD	0	20
EAI	153.85	133.85

Costo de capital:

$r_s = r_0 + \frac{D}{S}(r_0 - r_d)$

$= 0.3077 + \frac{200}{300}(0.3077 - 0.20)$

$= 0.4461$

$r_s = \frac{133.85}{300} = 0.4461$

$WACC = \frac{S}{D+S}r_s + \frac{D}{D+S}r_d = 0.3077$

3.4.7. Introducción a la Teoría del Portafolio

Al igual que en las secciones anteriores se estudiará el riesgo de inversiones y adquisición de deuda desde una visión bursátil, ya que es común en la práctica que una empresa mantenga un portafolio que, además de instrumentos de deuda, incluya acciones de otras empresas que cotizan en bolsa.

Sea una cotización de precios de una activo durante n días, es decir: $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ entonces el rendimiento al tiempo t está dado por:

$$R_t = ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

De igual forma es de interés conocer el rendimiento esperado, la varianza, la desviación media del activo y la covarianza entre otros activos, es por esto que se definen las expresiones siguientes:

$$E(R) = r = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{n}$$

$$\sigma^2 = Var(R) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(Rt - r)^2}{n-1}$$

$$\sigma = DesvMedia(R) = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{(Rt - r)^2}{n-1}}$$

$$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{it} - r_i)(R_{jt} - r_j)}{n-1}$$

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$\Rightarrow \varphi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

$-1 \leq \varphi_{ij} \leq 1$ es coeficiente de correlación entre el rendimiento de los activos y sirve como criterio para elegir parejas entre varios.

La elección de Activos depende del perfil de riesgo de una empresa o inversionista según sea el caso. Suponga que ahora se eligen n activos para formar un portafolio, entonces el portafolio de inversión está dado de la siguiente forma:

Activos que conforman el portafolio=$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Precio de los activos del portafolio=$P_1, P_2, P_3, ..., P_n$.

Numero de acciones de los activos=$N_1, N_2, N_3, ..., N_n$.

El valor del portafolio está dado por:

$$\$P = \sum_{k=1}^{n} P_k N_k$$

La cantidad invertida en cada activo es $P_k N_k$.
La proporción (peso) invertida e cada activo respecto al valor total del portafolio es:

$$W_k = \frac{P_k N_k}{\$P}$$

$\Rightarrow W_k$ es el porcentaje de dinero de cada activo invertido en el portafolio.

Entonces la definición de portafolio es:

$$P = w_1 A_1 + w_2 A_2 + ... + w_n A_n$$

Lo que representa que el portafolio está compuesto por inversiones w_k de los activos A_k respectivamente. A la matriz W que estará conformada por los diferentes w_k que representan los porcentajes respectivos a cada activo que conforman a nuestro portafolio de inversión.

$$\text{Sea W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathit{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces gracias a estos vectores columna es posible redefinir las expresiones para el rendimiento esperado y varianza mencionadas anteriormente:

$$(W^T)(\mathit{1}) = \sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

lo que significa que los w_k funcionan como ponderadores, pues suman el 100 % de la inversión. Así, el rendimiento esperado del portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos esperados individuales. Esto es:

$$r_p = E(R_p) = E(\sum_{k=1}^{n} w_k R_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k E(R_p) = \sum_{k=1}^{n} w_k r_k$$

y así μ es el vector columna conformado por los rendimientos de los activos.

$$\mu = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r_p = W^T \mu$

Para dos activos se tiene que la varianza de sus rendimientos está dada por:

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2}$$
$$w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\varphi_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

Para n activos se tiene que la varianza del rendimiento conjunto del portafolio está dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sea V la matriz de covarianza entre los rendimientos de los activos, entonces se tiene:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{it} - r_i)(R_{jt} - r_j)}{n-1}$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & . & . & . & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & . & . & . & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & . & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = W^T V W$$
$$\Rightarrow \sigma_p = \sqrt{W^T V W}$$

Una vez definidas estás expresiones matriciales, la elección de un portafolio de inversión depende del perfil de riesgo de la empresa. Si se trata de una empresa con un perfil conservador la mejor opción es elegir un portafolio con un riesgo menor, es decir, menor volatilidad.

Esto nos lleva al problema de minimizar el riesgo en un portafolio.

$$min\sigma^2 = W^T V W$$
$$s.a\ W^T \mathit{1} = 1$$

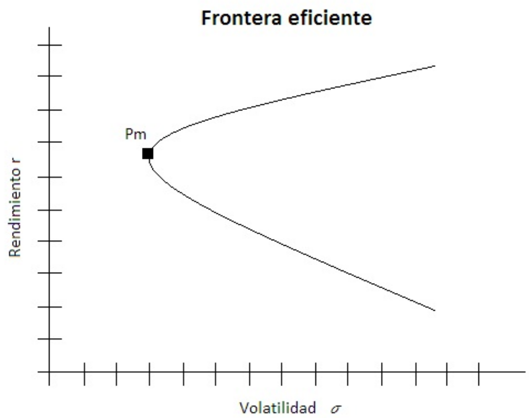
Utilizando multiplicadores de Lagrange es posible optimizar la ecuación. La demostración del siguiente resultado se mostrará en el capítulo siguiente, pues ahí se estudiará a detalle la Teoría del Portafolio.

Dado lo anterior, la combinación W de inversiones que generan el portafolio de mínimo riesgo es:

$$P_m = W = \frac{V^{-1}\|}{\|^T V^{-1}\|} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix}$$

P_m recibe el nombre Portafolio de mínima varianza (riesgo).

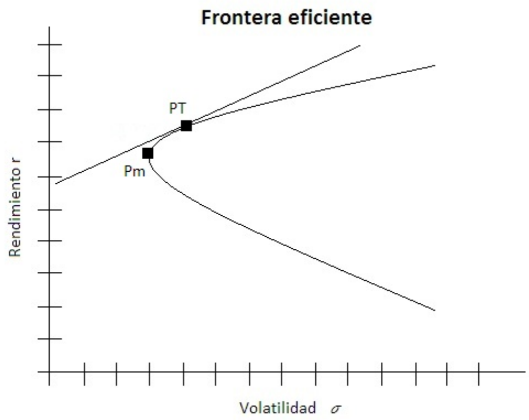
Si se observa la relación de riesgo vs rendimiento de un portafolio, se obtiene la frontera eficiente, que representa las posibles combinaciones de las w, es decir, se observan los diferentes portafolios posibles a crear a partir de los activos seleccionados.



Luego, si se desea incluir un activo libre de riesgo con un rendimiento esperado r_f en el portafolio, entonces la frontera eficiente se trasforma en una recta la cual depende del punto de tangencia y la frontera eficiente.

A este nuevo portafolio se le conoce como portafolio de tangencia o portafolio de mercado y es aquel que, dada una tasa libre de riesgo, todos los inversionistas buscan replicar para generar rendimientos iguales o mayores que el mercado en general (Índice de Precios y Cotizaciones IPC).

Dado lo anterior, es posible elegir combinaciones del portafolio tangente y la tasa libre de riesgo, todo dependerá del movimiento sobre la recta de tangencia (la construcción y aplicación del portafolio de tangencia se estudiarán en el capítulo siguiente donde se detallará la Teoría del Portafolio).



3.4.8. Medidas de desempeño, las betas de mercado y el CAPM

En el momento de construir un portafolio es necesario definir el nivel de riesgo que se desea mantener. Es claro que mientras mayor sea el riesgo, se espera un rendimiento mayor, por lo que, en la frontera eficiente, del punto de mínimo riesgo hacia arriba, se genera una mayor ganancia esperada. El indicador que mide la relación riesgo-rendimiento es el cociente de Sharpe (Sharpe-Ratio) definido en seguida:

Sea $\frac{r_k}{\sigma_k} = m_k$ el cociente de Sharpe, cuyo indicador mide el rendimiento del activo k por unidad de riesgo. De esta forma se espera que dicho cociente rebase la unidad, pues esto implica que el rendimiento esperado supera el nivel de riesgo al que se está expuesto; de ahí que resulta conveniente elegir activos con un cociente de Sharpe alto.

Por otra parte, es posible maximizar este cociente dentro un portafolio definiendo el siguiente problema de optimización:

$$Max$$
$$m_p = \frac{W^t\mu}{1^T V^{-1} 1}$$

Sujeto a:

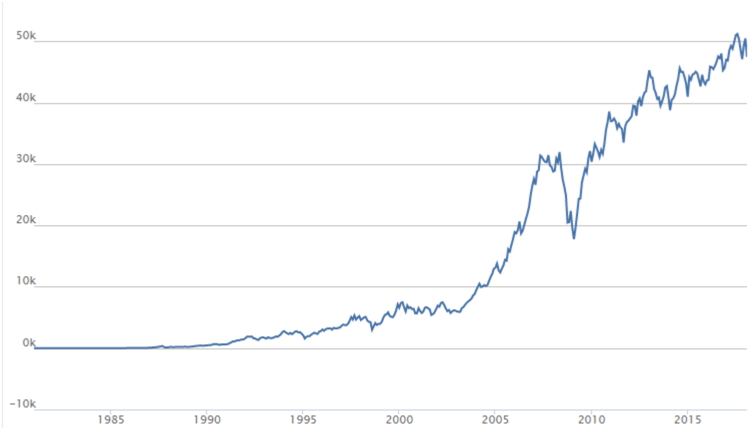
$$W^t 1 = 1$$

Donde la solución (utilizando multiplicadores de Lagrange y mostrada en el capítulo siguiente) es:

$$P_\mu = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = \frac{V^{-1}\mu}{1^t V^{-1}\mu}$$

Por otra parte, una medida adicional de desempeño y de gran importancia es la relación que guarda el rendimiento de los activos con el rendimiento del mercado en general (índice de Precios y Cotizaciones), la cual es definida como β.

El índice de Precios y Cotizaciones (IPC) representa al mercado mexicano, pues es una ponderación de las principales acciones de empresas que representan el sector económico-financiero del país, por lo que es de esperarse que el nivel del IPC vaya a la alza en el largo plazo, situación que refleja que el país mantiene una economía estable.



Lo anterior sugiere que si el IPC va a la alza en el largo plazo, entonces los inversionistas en el mercado buscarán replicar ese comportamiento en rendimiento por medio de acciones que cotizan en bolsa, de ahí que para medir dicha relación se tiene:

$$\beta_k = \frac{Cov(R_k, R_m)}{\sigma^2} = \frac{\sigma_{k,m}}{\sigma_m^2}$$

Donde σ_m^2 es la varianza del rendimiento esperado del mercado, en este caso el IPC y $\sigma_{k,m}$ es la covarianza entre el rendimiento del activo k y el IPC, por lo que, dada esta definición, si $\beta = 1$ el rendimiento del activo k se mueve perfectamente igual que el rendimiento del IPC. Por otra parte, si $\beta < 1$, entonces el rendimiento del activo k se mueve con menor intensidad que el del mercado, inclusive pusiera ser negativo mostrando que se mueven de forma contraria, y por último, si $\beta > 1$ el rendimiento del activo k se mueve con mayor intensidad que el rendimiento del IPC, por lo que dicho comportamiento es el buscado por los inversionistas, así que es recomendable invertir en activos con $\beta > 1$.

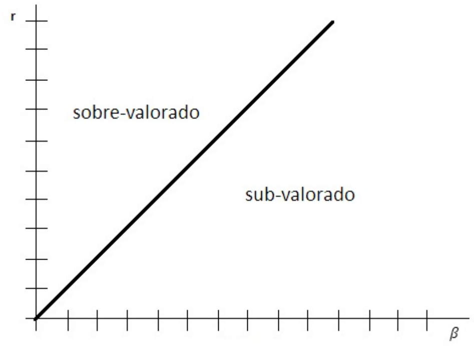
Adicionalmente, dada la definición de β, se reconoce la existencia del mercado Financiero y, por lo tanto, la existencia de los instrumentos financieros con riesgo y sin el mismo, de ahí que las acciones que cotizan en bolsa fungen como activos riesgosos, pero ¿cuál es la relación con los activos libres de riesgo?

El modelo de valuación de activos de capital (Capital Asset Pricing Model-CAPM) sugiere que existe una relación de largo plazo entre el rendimiento esperado de activos riesgosos con la tasa de interés r_f del mercado para realizar inversiones libres de riesgo en conjunto con la relación β de dichos activos con el mercado, es decir:

$$r_k = r_f + \beta_k(r_m - r_f)$$

Donde β_k es la beta del activo k y funge como la prima ganada por el riesgo de invertir en el mercado con rendimiento neto $(r_m - r_f)$.

Analizando la ecuación del CAPM, se observa que esta representa una recta con β abscisa y r ordenada, de tal forma que, dada está definición, los rendimientos deberán ajustarse en el largo plazo a dicha recta si se encuentran sobrevalorados o subvaluados en rendimiento:



Por lo que si un activo se encuentra subvalorado, entonces su rendimiento tenderá a subir en el largo plazo, por lo cual resultaría una buena opción para invertir y, por el contrario, si el activo está sobrevalorado, su rendimiento tenderá a la baja para ajustarse a la recta del CAPM, por lo que sería una buena opción para vender.

Por otra parte, el CAPM resulta una herramienta bastante socorrida por las empresas para estimar su costo de capital r_S (o r_0 si no está apalancada), pues, si la empresa cotiza en bolsa, entonces bajo lo estudiado en los temas de apalancamiento financiero y valor empresa, el valor del capital contable debe coincidir con el valor de las acciones emitidas, ya que la estructura de capital debe ser cerrada, por lo que el rendimiento sobre las acciones debiera coincidir con el rendimiento sobre el capital.

Nótese que si una empresa no cotiza en bolsa podría realizar un ajuste sobre la fórmula del CAPM, dividiendo el componente de riesgo Beta en riesgo operativo y riesgo financiero, donde este último absorbe el efecto de apalancamiento de la empresa. Otra alternativa podría ser utilizar la equivalencia con el ROE, ya que esta razón financiera absorbe el comportamiento de las utilidades si la empresa está apalancada o no.

Suponiendo que la empresa cotiza en bolsa y retomando los conceptos estudiados de la teoría del Portafolio, sea $Port$ la cartera integrada por n series de acciones A_k que haya emitido la empresa en el mercado bajo una proporción w_k, por lo que dicha cartera queda definida como:

$$Port = \sum_{k=1}^{n} w_k A_k$$

De esta forma, al igual que el rendimiento r_P del Portafolio:

$$r_P = \sum_{k=1}^{n} w_k r_r$$

que es una combinación lineal de los rendimientos individuales r_k de las series de acciones, la Beta global β_P de éste se expresa de la manera siguiente:

$$\beta_P = \sum_{k=1}^{n} w_k \beta_k$$

donde β_k es la Beta individual de cada acción en el portafolio emitido por la empresa.

De esta manera, utilizando la ecuación que define al CAPM, es posible obtener el rendimiento esperado del capital r_S del negocio:

$$r_S = r_f + \beta_P (r_m + r_f)$$

Donde, como ya es sabido, r_m es el rendimiento esperado del mercado (IPC mexicano) y r_f es la tasa libre de riesgo para inversiones garantizadas.

Nótese que el nivel que alcanza r_S implícitamente depende del nivel de capital que la empresa tenga emitido en acciones que, a su vez, es un componente de la estructura de capital y por lo tanto depende del nivel de apalancamiento (deuda) que se asuma.

Ejemplo

Se tiene la siguiente propuesta de inversión:

Activo	**Precio**	**Títulos**
1	\$10	20
2	\$20	30

Determinar el valor del portafolio formado por la propuesta y determinar los pesos de inversión w para los activos 1 y 2.

Solución

$$P = (10)(20) + (20)(30) = 200 + 600 = 800$$
$$w_1 = \frac{(10)(20)}{800} = 0.25 \qquad w_2 = \frac{(20)(30)}{800} = 0.75$$

Ejemplo

Se muestran los siguientes parámetros de mercado:

Activos	r **esperado anual**	σ **anual**	ρ **anual**
1	10 %	12 %	0.3
2	15 %	14 %	0.3
IPC	12 %	13 %	NA

Por otra parte, la tasa para inversiones libres de riesgo es $r_f = 7\,\%$ TAE y las correlaciones de los activos 1 y 2 con el IPC de mercado son $\varphi_{1,m} = 0.5$ y $\varphi_{2,m} = 0.7$

a) Obtenga la matriz de covarianzas asociada para los activos 1 y 2 y su respectiva matriz inversa.

b) Utilice diferentes combinaciones de pesos w_1 y w_2 para calcular rendimiento y volatilidad esperados para un portafolio y complete la tabla siguiente:

w1	w2	σ_p	r_p
-100%	200%		
-80%	180%		
-60%	160%		
-40%	140%		
-20%	120%		
0%	100%		
40%	60%		
42%	58%		
60%	40%		
61%	39%		
80%	20%		
100%	0%		
120%	-20%		
140%	-40%		
160%	-60%		
180%	-80%		
200%	-100%		

c) Obtenga el portafolio de mínimo riesgo y el de máximo cociente de Sharpe para los activos 1 y 3, calcule sus rendimientos y volatilidades esperados y ubique ambos portafolios en la Gráfica del inciso anterior. Analice los resultados obtenidos.

d) Obtenga el cociente de Sharpe y las respectivas betas para los activos 1 y 2 y comente qué activo individual resulta una mejor opción para invertir.

e) Dada la tasa libre de riesgo obtenga el rendimiento sugerido por la ecuación del CAPM para los activos 1 y 2. Grafique beta vs rendimiento a fin de generar la recta definida por el CAPM y ubique en dicha gráfica los rendimientos esperados de los activos y comente si se encuentran subvalorados o sobrevalorados en rendimiento.

Solución

a)

$$\sigma_{1,1} = 0.12^2 = 0.014 \qquad \sigma_{1,2} = (0.12)(0.14)(0.3) = 0.005 \qquad \sigma_{2,2} = 0.14^2 = 0.020$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0144 & 0.005 \\ 0.005 & 0.020 \end{bmatrix} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 76.3126 & -19.6232 \\ -19.6232 & 56.0664 \end{bmatrix}$$

b)

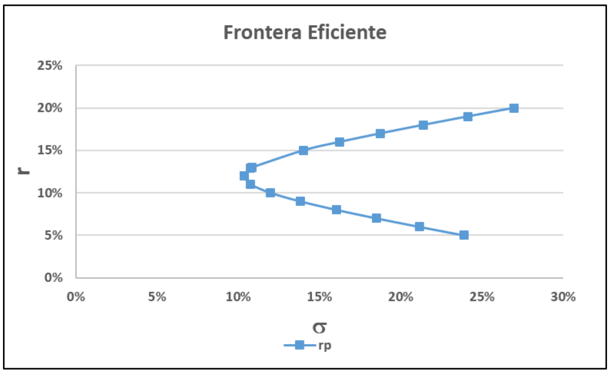
$$w_1 = -100\,\% \quad w_2 = 200\,\%$$

$$\sigma_P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.014 & 0.005 \\ 0.005 & 0.020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.2695 = 26.95\,\%$$

$$r_P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.10 \end{bmatrix} = 0.20 = 20\,\%$$

Siguiendo los mismos pasos para cada w:

w1	w2	σp	rp
-100%	200%	26.95%	20.00%
-80%	180%	24.13%	19.00%
-60%	160%	21.37%	18.00%
-40%	140%	18.73%	17.00%
-20%	120%	16.24%	16.00%
0%	100%	14.00%	15.00%
40%	60%	10.85%	13.00%
42%	58%	10.76%	12.90%
60%	40%	10.36%	12.00%
61%	39%	10.36%	11.96%
80%	20%	10.78%	11.00%
100%	0%	12.00%	10.00%
120%	-20%	13.82%	9.00%
140%	-40%	16.04%	8.00%
160%	-60%	18.50%	7.00%
180%	-80%	21.14%	6.00%
200%	-100%	23.88%	5.00%



c)

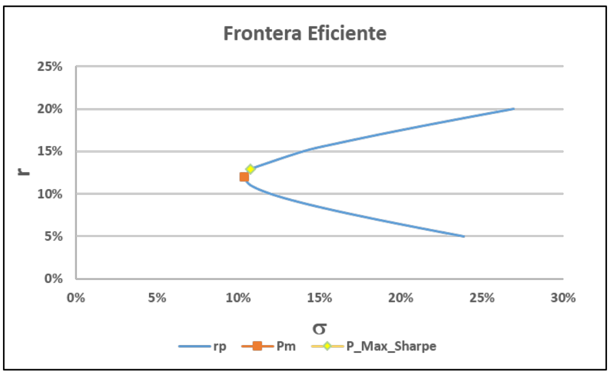
$$V^{-1}1 = \begin{bmatrix} 76.3126 & -19.6232 \\ -19.6232 & 56.0664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.6893 \\ 36.4431 \end{bmatrix}$$

$$1^T V^1 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76.3126 & -19.6232 \\ -19.6232 & 56.0664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 93.1325$$

$$P_m = \frac{V^{-1}1}{1^T V^1 1} = \begin{bmatrix} 0.6087 \\ 0.3913 \end{bmatrix}$$

$$r_{P_m} = W^T \mu = \begin{bmatrix} 0.6087 & 0.3913 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \end{bmatrix} = 0.1196 = 11.96\,\%$$

$$\sigma_{P_m} = \sqrt{W^T V W} = 0.1036 = 10{,}36\,\%$$



d)

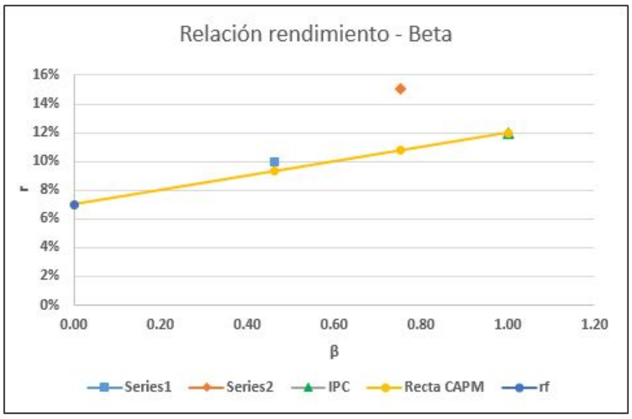
$$m_1 = \frac{r_1}{\sigma_1} = 0.10/0.12 = 0.83 \qquad m_2 = \frac{r_2}{\sigma_2} = 0.15/0.14 = 1.07$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{1,m}}{\sigma_m^2} = \frac{(0.12)(0.13)(0.50)}{0.13^2} = 0.46 \qquad \beta_2 = \frac{\sigma_{2,m}}{\sigma_m^2} = \frac{(0.14)(0.13)(0.70)}{0.13^2} = 0.47$$

Por lo tanto, elegimos el activo 2 para invertir.

c)

Activo	r	βk	r CAPM	Condición rendimiento
rf	7%	0	7%	Igual
1	10%	0.46	0.09	Sobrevalorado
2	15%	0.75	0.11	Sobrevalorado
IPC	12%	1.00	0.12	Igual



Se observa que ambos activos están encima de la recta del CAPM, por lo que su rendimiento esperado está sobrevalorado, lo cual sufiere que dicho rendimiento tenderá a la baja en el largo plazo, por lo que se considerarían los activos para vender en el largo plazo o para comprar a corto plazo.

Ejemplo

Cierto corporativo es dueño de dos marcas de productos que se ofrecen en diferentes mercados: una refresquera y una cementera, por lo cual cotiza en bolsa con ambas marcas. Los parámetros de ambas series de acciones se muestran en seguida:

Rubro	Monto emitido	r esperado anual	σ esperada anual	ρ con el mercado
Refresco (1)	3mdp	15%	12%	0.2
Cemento (2)	5mdp	13%	10%	0.6
IPC (m)	-	17%	20%	1

Por otra parte se sabe que las inversiones libres de riesgo, es decir, garantizadas ofrecen un rendimiento anual de 8 %.

Dada la relación con el mercado (IPC) y las acciones emitidas por la empresa, ¿Cuál es el costo de capital (rendimiento esperado r_S) anual esperado para la empresa en su estructura de capital?

Solución

Primeramente es necesario obtener la relación Beta de cada acción (emitida por el Corporativo) con el mercado (IPC), de ahí que si:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{m,k}}{\sigma_m^2}$$

Entonces

$$\beta_1 = \frac{0.2(12\,\%)(18\,\%)}{18\,\%^2} = 0.12$$
$$\beta_2 = \frac{0.6(10\,\%)(18\,\%)}{18\,\%^2} = 0.30$$

Se observa que los dos tipos de acción no reflejan de intensamente los movimientos del mercado, ya que, a pesar de tener una Beta positiva, la relación en baja (menor al 50 %).

Luego, es necesario conocer el peso que tiene cada marca en la emisión total de la empresa, es decir en los 8mdp. Así:

$$w_1 = \frac{3mdp}{8mdp} = 0.375$$
$$w_2 = \frac{5mdp}{8mdp} = 0.625$$

Por lo que, la emisión en la refresquera representa el 37.5 % del total emitido, mientras que la cementera refleja el 62.5 %.

De esta forma la Beta global para el Corporativo es:

$$\beta_P = w_1\beta_1 + w_2\beta_2 = 0.375(0.12) + 0.625(0.30) = 0.2325$$

Se observa que, de forma total, el capital accionario del Corporativo mantiene una relación positiva con el pero no tan marcada.

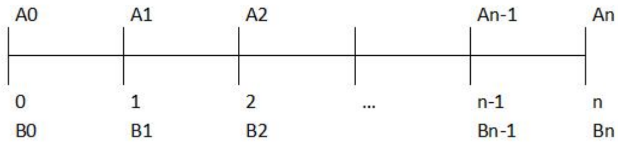
Finalmente se procede a obtener, mediante la expresión del CAPM, el costo de capital esperado r_S para el Corporativo, tomando en cuenta que la tasa libre de riesgo anual es de 8 % anual:

$$r_S = r_f + \beta_P(r_m - r_f) = 8\,\% + 0.2325(17\,\% - 8\,\%) = 0.100925$$

Es decir, el costo de capital (rendimiento sobre el capital) esperado del Corporativo en su estructura de capital es de $r_S = 10.0925\,\%$ anual.

3.4.9. Evaluación de proyectos de inversión

En capítulos anteriores se estudió que un proyecto de inversión es aquel que paga flujos de efectivos de A_k en $k = 0, 1, 2, ..., n$ y requiere desembolsos de B_K en $k = 0, 1, 2, ..., n$. Entonces el flujo neto del proyecto en k está dado por $C_k = A_k - B_k$.



Por lo tanto el valor actual neto (VAN) del proyecto k=0 es:

$$\Rightarrow VAN = \sum_{k=0}^{n} C_k V^k$$

En donde $V = \frac{1}{1+r}$.

En esta expresión para el VAN es importante definir correctamente los elementos que intervienen en ella, es decir, la tasa de interés r y los flujos, C_K.

Primeramente, la tasa r es el costo de oportunidad o costo de capital del proyecto, la cual puede ser una TAE o TIAE y puede definirse como una TREMA si lo que se espera es generar un rendimiento mínimo dadas las condiciones de la empresa, o puede ser la tasa que fija el mercado dado el riesgo de proyectos comparables.

Por otra parte, los flujos C_K son los famosos flujos de caja, y son netos ya que a los ingresos A_K se les disminuye los gastos B_K, definiendo la diferencia como la parte que beneficiará a la empresa (si está invirtiendo) en el momento del tiempo que dicha diferencia neta sea liquidada.

En la construcción de los flujos de caja, es necesario tomar en cuenta que, dentro de la composición de los ingresos A_K, como parte de un proyecto u operativa de la empresa en general, se tienen las utilidades antes de impuestos, las amortizaciones o intereses pagaderos de los deudores de la empresa, las provisiones creadas para reserva de riesgos financieros y los ingresos que no son gravables de impuestos. Por otra parte, dentro de la estructura de los gastos B_K se tienen los gastos que aún no se desembolsan para llevar a cabo el proyecto en ese punto del tiempo, los impuestos y los egresos no afectados por dichos impuestos.

En general, esta estructura se ve generada en el Estado de Resultados de la empresa, pues como ya se estudió anteriormente, a cada entrada de la empresa se le descuenta su respectivo gasto, por ejemplo, a las utilidades (EBIT) se le resta el pago de intereses y los impuestos; y dentro de las EBIT se concentran los rubros descritos en el párrafo anterior para las entradas A_K, por lo que la utilidad neta en ese punto del tiempo K es el flujo de caja neto C_K. Por, ejemplo, en los ejercicios analizados en el tema referente al valor empresa y a las proposiciones MM se debe tener, para cierto punto en el tiempo:

Ingreso / Egreso	Tipo de Flujo
Utilidades antes de impuestos en Intereses (EBIT)	A
- Intereses (I)	B
= Utilidad Antes de Impuestos (EBT)	
- Impuestos (T)	B
= Utilidad después de Impuestos (EAT)	
= Flujo de Caja	C

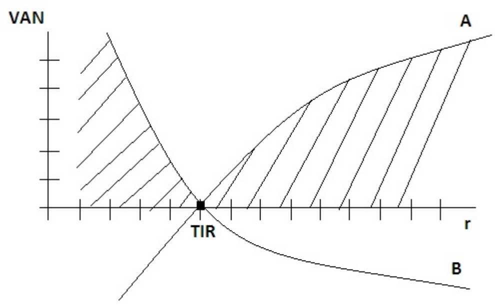
Criterios básicos de aceptación de un proyecto

1. VAN > 0 Aceptamos proyecto.
2. VAN < 0 Rechazamos proyecto.
3. VAN $= 0$ Indiferencia en el proyecto, o cual generará una situación de rechazo.

Si r hace el $VAN = 0$, se dice que r es la TIR (Tasa Interna de Retorno).

Criterio de la TIR

Sean dos Proyectos A y B, entonces se tiene la siguiente relación VAN y rendimiento.



Se puede observar los siguientes casos en los que es factible cada proyecto.

- El proyecto A es factible si r $\uparrow$ y VAN $\downarrow$ entonces r $<$ VAN, es decir, el VAN es mayor a cero.
- El proyecto B es factible si r $\uparrow$ y VAN $\uparrow$ entonces r $>$ VAN, es decir, el VAN es mayor a cero.

Ejemplo

Dado los flujos de efectivo en el tiempo 0 y 1 de los proyectos A y B encontrar el VAN y la TIR de cada proyecto correspondientemente dado un rendimiento del 25 % para ambos proyectos.

	Flujo de efectivo en 0	Flujo de efectivo en 1
A	-10	40
B	-25	65

Solución

VAN de los proyectos

$VAN_A = -10 + \frac{40}{1.25} = 22$
$VAN_B = -25 + \frac{65}{1.25} = 27$

TIR de los proyectos

$TIR_A = -10 + \frac{40}{1+r} = 0$
$\frac{40}{10} - 1 = r$
$r = 3 = 300\,\%$

$TIR_B = -25 + \frac{65}{1+r} = 0$
$\frac{65}{25} - 1 = r$
$r = 1.6 = 160\,\%$

	Flujo de efectivo en 0	Flujo de efectivo en 1	VAN	TIR
A	-10	40	22	300 %
B	-25	65	27	160 %

Se observa que el proyecto con un VAN más alto es el proyecto B y dado que ambos proyectos tienen la misma tasa de oportunidad, debe elegirse el B.

Ejemplo:

Se tienen los dos proyectos siguientes. Analícelos exhaustivamente:

Periodo	**0**	**1**
Proyecto de inversión	-$100.00	$130.00
Proyecto de financiamiento	$100.00	-$130.00

Obteniendo la TIR y el VAN se tiene:

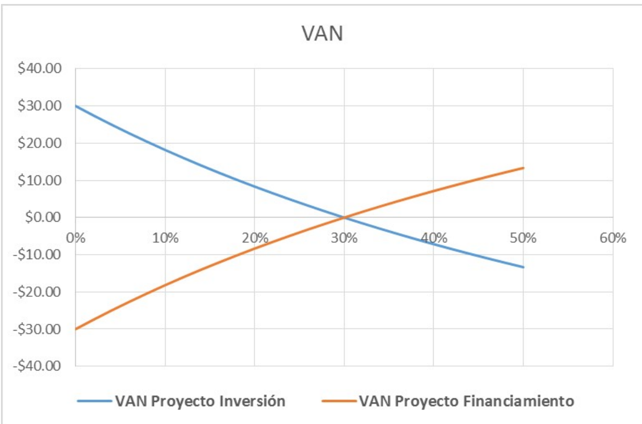
	TIR	**VAN(TIR)**
Proyecto de inversión	30 %	$0
Proyecto de financiamiento	30 %	$0

Se concluye que ambos tienen la misma TIR, las cuales hacen 0 el VAN de ambos proyectos.

Analizando cómo se comporta el VAN con relación a la tasa de oportunidad se tiene:

r	VAN Proyecto Inversión	VAN Proyecto Financiamiento
0%	$30.00	-$30.00
2%	$27.45	-$27.45
4%	$25.00	-$25.00
6%	$22.64	-$22.64
8%	$20.37	-$20.37
10%	$18.18	-$18.18
12%	$16.07	-$16.07
14%	$14.04	-$14.04
16%	$12.07	-$12.07
18%	$10.17	-$10.17
20%	$8.33	-$8.33
22%	$6.56	-$6.56
24%	$4.84	-$4.84
26%	$3.17	-$3.17
28%	$1.56	-$1.56
30%	$0.00	$0.00
32%	-$1.52	$1.52
34%	-$2.99	$2.99
36%	-$4.41	$4.41
38%	-$5.80	$5.80
40%	-$7.14	$7.14
42%	-$8.45	$8.45
44%	-$9.72	$9.72
46%	-$10.96	$10.96
48%	-$12.16	$12.16
50%	-$13.33	$13.33

Luego, graficando r vs VAN:



Nótese que, para aceptar el Proyecto de inversión, debemos mantener una tasa de oportunidad menor a la TIR (30 %), ya que así el VAN es positivo. En contraste, para aceptar el Proyecto de financiamiento debemos mantener una tasa de oportunidad mayor a la TIR (30 %), ya que así el VAN es positivo. Evidentemente hay que percatarse que ningún VAN sea menor que cero.

Método de la alternativa incremental

Dada la opción de los Proyectos A y B para una empresa, si es posible elegir uno o los dos al mismo tiempo, se dice que ambos proyectos son independientes. En contraste, si de los dos proyectos solo se puede elegir uno, dadas las condiciones de la empresa, entonces se dice que los proyectos son mutuamente excluyentes.

Para analizar esta situación es conveniente estudiar el comportamiento de los flujos de efectivo incrementales:

$$Flujos\ netos\ Proyecto\ A: \ C_{AK} = A_{AK} - B_{AK}$$
$$Flujos\ netos\ Proyecto\ B: \ C_{BK} = A_{BK} - B_{BK}$$
$$Incremental\ A - B: \ C_{AK} - C_{BK}$$
$$Incremental\ B - A: \ C_{BK} - C_{AK}$$

Lugo para cierto costo de capital r, si:

$$VAN_{A-B} > 0 \ \ \Rightarrow Elegimos\ el\ Proyecto\ A$$

Esto significa $A > B$, lo que implica que A genera flujos netos de efectivo más atractivos que B.

Por otra parte, si:

$$VAN_{B-A} > 0 \ \ \Rightarrow Elegimos\ el\ Proyecto\ B$$

Esto significa $B > A$, lo que implica que B genera flujos netos de efectivo más atractivos que A.

Ejemplo:

Dados dos proyectos A y B se muestran los flujos de efectivo incrementales:

	Flujo de efectivo en 0	Flujo de efectivo en 1
Alternativa incremental (B-A)	-15	25
Alternativa decremental (A-B)	15	-25

VAN de las alternativas

$VAN_{B-A} = -15 + \frac{25}{1.25} = 5$
$VAN_{A-B} = 15 - \frac{25}{1.25} = -5$

TIR de las alternativas

$TIR_{B-A} = -15 + \frac{25}{1+r} = 0$
$\frac{25}{15} - 1 = r$
$r = .666 = 66.6\,\%$

$TIR_{A-B} = 151\frac{25}{1+r} = 0$
$\frac{25}{15} - 1 = r$
$r = .666 = .666\,\%$

	Flujo de efectivo en 0	Flujo de efectivo en 1	VAN	TIR
Alternativa incremental (B-A)	-15	25	5	66.6 %
Alternativa decremental (A-B)	15	-25	-5	66.6 %

Se elige a B ya que B dado A nos da un VAN positivo.

Ejemplo:

Se tienen los siguientes proyectos de inversión mutuamente excluyentes. La tasa de descuento relevante es del 6 % TAE. ¿Qué proyecto debe elegirse?

Año	**0**	**1**	**2**	**3**
A	-$10,000.00	$10,000.00	$1,000.00	$1,000.00
B	-$10,000.00	$1,000.00	$1,000.00	$12,000.00

Bajo $r = 6\,\%$ el VAN de los proyectos es:

VAN A	$1,163.58
VAN B	$1,908.82

El VAN de B es mayor dada la tasa de rendimiento requerida para los proyectos. Se elige B.

Por otra parte, se analizan los flujos de efectivo incrementales:

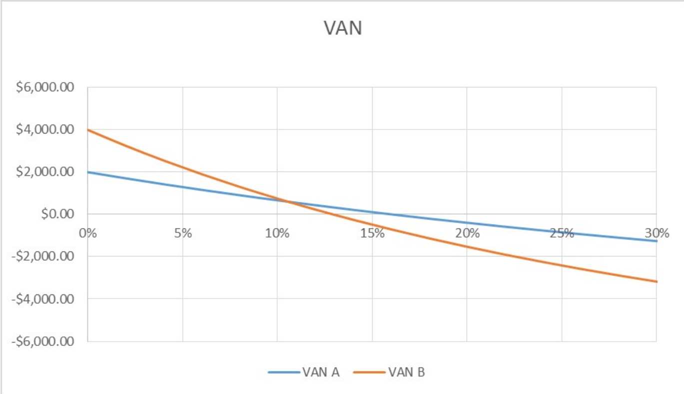
Incremental	**B-A**	$0	-$9,000.00	$0	$11,000.00
	A-B	$0	$9,000.00	$0	-$11,000.00

TIR A-B	10.55 %
TIR B-A	10.55 %

Analizando cómo se comporta el VAN con relación a la tasa de oportunidad se tiene:

r	VAN A	VAN B	VAN B-A	VAN A-B
0%	$2,000.00	$4,000.00	$2,000.00	-$ 2,000.00
2%	$1,707.41	$3,249.43	$1,542.02	-$ 1,542.02
4%	$1,428.94	$2,554.05	$1,125.11	-$ 1,125.11
6%	$1,163.58	$1,908.82	$745.25	-$ 745.25
8%	$910.43	$1,309.25	$398.82	-$ 398.82
10%	$668.67	$751.31	$82.64	-$ 82.64
10.55%	$603.60	$603.60	$0.00	-$ 0.00
12%	$437.55	$231.41	-$206.13	$ 206.13
14%	$216.37	-$253.68	-$470.05	$ 470.05
16%	$4.51	-$706.88	-$711.39	$ 711.39
18%	-$198.61	-$1,130.79	-$932.18	$ 932.18
20%	-$393.52	-$1,527.78	-$1,134.26	$ 1,134.26
22%	-$580.71	-$1,899.98	-$1,319.27	$ 1,319.27
24%	-$760.63	-$2,249.34	-$1,488.70	$ 1,488.70
26%	-$933.70	-$2,577.60	-$1,643.89	$ 1,643.89
28%	-$1,100.31	-$2,886.35	-$1,786.04	$ 1,786.04
30%	-$1,260.81	-$3,177.06	-$1,916.25	$ 1,916.25
32%	-$1,415.53	-$3,451.04	-$2,035.51	$ 2,035.51
34%	-$1,564.79	-$3,709.50	-$2,144.71	$ 2,144.71
36%	-$1,708.86	-$3,953.54	-$2,244.68	$ 2,244.68
38%	-$1,848.02	-$4,184.18	-$2,336.16	$ 2,336.16
40%	-$1,982.51	-$4,402.33	-$2,419.83	$ 2,419.83
42%	-$2,112.56	-$4,608.86	-$2,496.29	$ 2,496.29
44%	-$2,238.40	-$4,804.53	-$2,566.12	$ 2,566.12
46%	-$2,360.23	-$4,990.06	-$2,629.83	$ 2,629.83
48%	-$2,478.23	-$5,166.13	-$2,687.90	$ 2,687.90
50%	-$2,592.59	-$5,333.33	-$2,740.74	$ 2,740.74

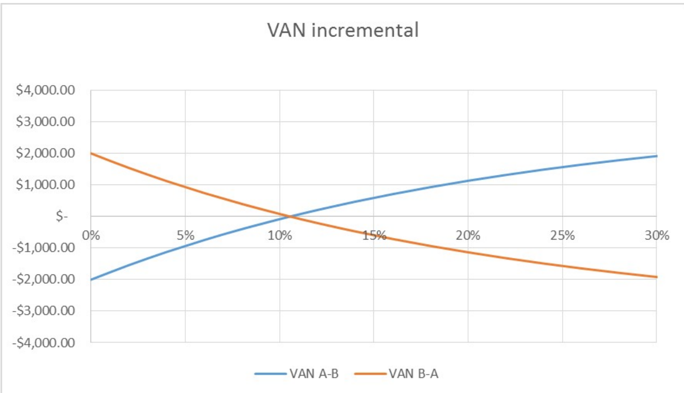
Luego, graficando r vs VAN:



Se observa que el punto r= 10.55 % (TIR incremental) donde se cortan las curvas, es el punto donde el VAN de las alternativas incrementales es cero y el VAN de cada proyecto individual es el mismo, por lo que este punto funciona como referencia.

Entonces, s se toma una tasa de oportunidad menor al punto de corte r=10.55 %, el VAN del proyecto B es más alto y debe elegirse este proyecto. Es por ello que si r = 6 % ¡10.55 % se elige B.

Por otra parte, si se toma una tasa de oportunidad mayor al punto de corte r=10.55 %, el VAN del proyecto A es más alto y debe elegirse este proyecto.

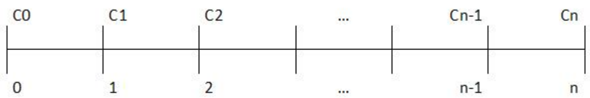


Luego, observando el VAN de las incrementales se nota que para r=6 %, el VAN de B-A es positivo, por lo que debe elegirse B. Entonces, si se toma una tasa de oportunidad menor a la TIR incremental de 10.55 %, el VAN de B-A es positivo, por lo que debe elegirse B para invertir.

En contraste, si se toma una tasa de oportunidad mayor a la TIR incremental de 10.55 %, el VAN de A-B es positivo, por lo que debe elegirse A para invertir. Por ejemplo, si r=14 % el VAN incremental A-B es positivo y se elige A.

Índice de rentabilidad (IR)

Una técnica adicional para resolver si un proyecto de inversión es factible o no es el índice de rentabilidad que esta dado de la siguiente forma. Sea un proyecto con flujos netos de efectivo C_k:



$$C_k = A_k - B_k$$

$\Rightarrow I_R =$VP de los flujos netos de efectivo después de la inversión neta. / Inversión inicial neta.

$$I_R = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k V^k}{C_0} > 1$$

Para proyectos independientes, elegimos el proyecto si:

$$I_R > 1$$

y descartamos si:

$$I_R < 1$$

Ejemplo
Dado los siguientes proyectos calcular el VAN y el índice de rentabilidad de cada proyecto, suponga un rendimiento del 12 %.

Proyectos	t=0	t=1	t=2
1	-20	70	10
2	-10	15	40

Solución

VAN de los proyectos

$VAN_1 = -20 + 70(1.12)^{-1} + 10(1.12)^{-2} = 50.4719$
$VAN_2 = -10 + 15(1.12)^{-1} + 40(1.12)^{-2} = 35.2806$

Índice de rentabilidad de los proyectos

$I_{R1} = \frac{70(1.12)^{-1}+10(1.12)^{-2}}{20} = 3.52$
$I_{R2} = \frac{15(1.12)^{-1}+40(1.12)^{-2}}{10} = 4.52$

Proyectos	t=0	t=1	t=2	VAN	Índice de rentabilidad
1	-20	70	10	50.4719	3.52
2	-10	15	40	35.2806	4.52

El índice de rentabilidad y el VAN del proyecto dos son más altos, por lo que se elige dicho proyecto.

Ahora aplicando el Método de la alternativa incremental.

Proyectos	t=0	t=1	t=2	VAN	Índice de rentabilidad
Incremental (1-2)	-10	55	-30	25.2	2.51
Decremental (2-1)	10	-55	30	-25.2	-2.1

Si los proyectos son mutuamente excluyentes, entonces.

Calculamos la alternativa incremental y si

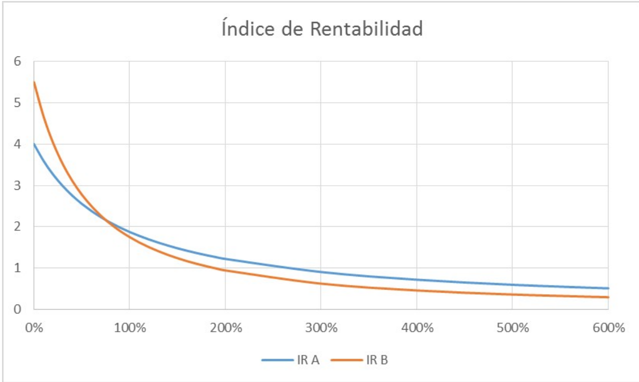
$$I_{RI} > 1; \text{ VAN} > 0$$

Entonces optamos por el proyecto mayor.

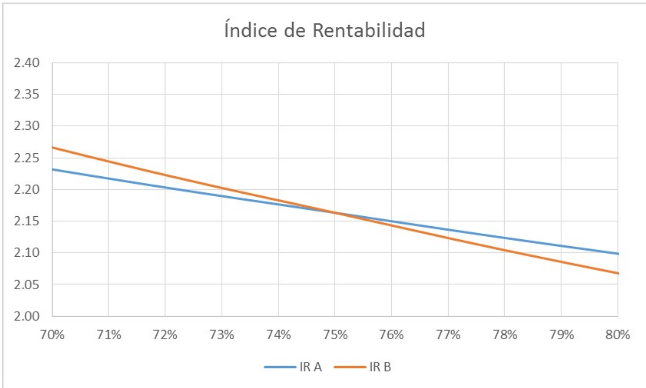
Después, analizando el comportamiento del índice de Rentabilidad en función de la tasa de oportunidad, se tiene:

r	IR A	IR B	IR B-A	IR A-B	VAN A	VAN B
0%	4.00000	5.50000	-2.50000	2.50000	$60.00	$45.00
10%	3.59504	4.66942	-2.52066	2.52066	$51.90	$36.69
20%	3.26389	4.02778	-2.50000	2.50000	$45.28	$30.28
30%	2.98817	3.52071	-2.45562	2.45562	$39.76	$25.21
40%	2.75510	3.11224	-2.39796	2.39796	$35.10	$21.12
50%	2.55556	2.77778	-2.33333	2.33333	$31.11	$17.78
60%	2.38281	2.50000	-2.26563	2.26563	$27.66	$15.00
70%	2.23183	2.26644	-2.19723	2.19723	$24.64	$12.66
75%	2.16327	2.16327	-2.16327	2.16327	$23.27	$11.63
80%	2.09877	2.06790	-2.12963	2.12963	$21.98	$10.68
90%	1.98061	1.89751	-2.06371	2.06371	$19.61	$8.98
100%	1.87500	1.75000	-2.00000	2.00000	$17.50	$7.50
110%	1.78005	1.62132	-1.93878	1.93878	$15.60	$6.21
120%	1.69421	1.50826	-1.88017	1.88017	$13.88	$5.08
130%	1.61626	1.40832	-1.82420	1.82420	$12.33	$4.08
140%	1.54514	1.31944	-1.77083	1.77083	$10.90	$3.19
150%	1.48000	1.24000	-1.72000	1.72000	$9.60	$2.40
160%	1.42012	1.16864	-1.67160	1.67160	$8.40	$1.69
170%	1.36488	1.10425	-1.62551	1.62551	$7.30	$1.04
180%	1.31378	1.04592	-1.58163	1.58163	$6.28	$0.46
190%	1.26635	0.99287	-1.53983	1.53983	$5.33	-$0.07
200%	1.22222	0.94444	-1.50000	1.50000	$4.44	-$0.56
300%	0.90625	0.62500	-1.18750	1.18750	-$1.88	-$3.75
400%	0.72000	0.46000	-0.98000	0.98000	-$5.60	-$5.40
500%	0.59722	0.36111	-0.83333	0.83333	-$8.06	-$6.39
600%	0.51020	0.29592	-0.72449	0.72449	-$9.80	-$7.04

Graficando IR vs r:



Haciendo un acercamiento:



Se observa que el IR de los proyectos es igual cuando r=75 %. Entonces si $r < 75\,\%$ el IR de B es mayor y debiera escogerse B y si $r > 75\,\%$ debiera escogerse A.

Por otra parte, no siempre está demás analizar los flujos incrementales. A partir de este análisis es posible observar que el IR A-B siempre es mayor que el IR B-A y esto se debe a que el VAN de A-B siempre es superior al de B-A, lo que sugiere que A es mejor proyecto de inversión.

Dado lo anterior, se concluye que el IR es un buen indicador pero no el mejor. Al final todo depende de la incidencia de los flujos en cada periodo y en qué nivel de tasa y VAN se encuentran los proyectos.

3.5. Ejercicios

Bonos

1. ¿Cuál es el precio de un bono cupón cero que paga una redención de \$200 dentro de un año bajo un YTM de 10 % anual?.
2. Un bono cupón cero paga su redención dentro de 1 año por un valor de \$100. El YTM es del 11 % capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto vale el bono? ¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente con la que podrías descontar el nominal directamente a un periodo?.
3. Calcula el precio de un bono con rendimiento (YTM) del 7 % anual que promete un cupón anual de \$5 y un nominal de \$100 dentro de 10 años.

4. Un bono al 6 % anual está valuado por \$82.88 con una redención y YTM de \$100 y 8 % respectivamente. ¿Cuál es la madurez del bono? Utiliza interpolación lineal o algún método numérico.

5. Al día de hoy se emite una obligación al 12 % anual con un valor facial de \$90 que paga una redención de \$110 al final de 12 años. Los flujos de efectivo que paga dicha obligación se hacen de manera semestral. ¿Cuál es el precio de la obligación si esta mantiene un rendimiento del 14 % capitalizable semestralmente?.

6. Hoy se emite un bono al 15 % anual con un precio de \$130.61. Después de 7 años se paga una redención de \$120. ¿Cuál es el rendimiento del bono?.

7. Alvin tiene un bono que vale \$319.42, el cual paga cupones cuatrimestrales bajo una tasa del 20 % anual con un valor facial de \$300. La madurez del instrumento es de 5 años. ¿Qué YTM gana Alvin?.

8. Después de 2 años Simón le compra el bono a Alvin en \$280 justo después de haberse pagado el cupón. ¿Cuál es el YTM de Simón?.

9. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 10 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).

10. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 12 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).

11. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 14 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).

12. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 14 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento al 01/01/2015 (precio sucio). ¿Cuál es el precio de mercado (precio limpio) del instrumento al 01/01/2015? (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes que cae la fecha cupón y suponga que cada mes tiene 30 días).

Financiamiento con acciones

13. Al comienzo de 2015 la empresa emitió acciones preferentes que pagan un dividendo bimestral de \$1 bajo una tasa de oportunidad del 40 % anual capitalizable al

bimestre. Desafortunadamente la institución no se encuentra en su mejor momento hablando en términos de liquidez, por lo que estima pagar los dividendos por dos años completos solamente (2015 y 2016) y, cuando la situación se estabilice, volver a pagar los dividendos al final del mes de abril de 2018.

a) ¿Cuál es el precio de la acción preferente?

b) ¿Cuánto valdría la acción si la empresa pagara los dividendos en tiempo y forma?

14. Se espera que las acciones comunes de la Compañía paguen un dividendo de 4 dólares cada mes. Usted es poseedor de un paquete de 500 acciones, por lo tanto recibe el dividendo de cada una, en los periodos establecidos, generando una mayor ganancia monetaria. Por otra parte, usted planea poseer el paquete solo por dos años, esto es, recibir los dividendos al final del plazo e inmediatamente vender los activos.

    Al día de hoy, los especialistas financieros (dadas las condiciones del mercado) estiman que el precio de venta esperado a dos años de las acciones de la Compañía será de 80 dólares. Luego, si requiere un costo de oportunidad del 22 %:

    a) ¿Cuál es el valor de la acción si se supone un dividendo fijo?

    b) ¿Cuál es el valor de la acción si se supone un dividendo creciente en 0.07 dólares cada mes?

    c) ¿Cuál es el valor de la acción si se supone un dividendo creciente en razón 1.25 % cada mes?

15. Una empresa reporta utilidades de 5 mdp este año y planea retener 2 mdp para invertir en la gestión del presupuesto de capital del siguiente año. Se calcula históricamente el rendimiento neto sobre el capital,el cual es del 30 % anual,si se emiten acciones que pagan un dividendo de $9 bajo un costo de capital del 15 % anual.

    a) ¿Cuánto crecerán las utilidades el año siguiente?

    b) Cuánto valdrán las acciones después de tal crecimiento?

16. Calcule el precio por acción del numeral anterior.Luego considere un proyecto en donde se debe pagar 1 mdp dentro de un año y se recibirá a partir del segundo año 210 mil pesos a perpetuidad. Si el costo de capital coincide con el de las acciones comunes, ¿Cuál es el valor de la acción si se decide aceptar esta oportunidad de crecimiento?. Considere un total de 100 mil acciones en circulación.

Apalancamiento Financiero

17. Suponga que su Empresa está financiada al 100 % con capital y está planeando adquirir una parte de sus acciones comunes mediante la emisión deuda corporativa.Como resultado de ello, la Empresa se endeuda por una cantidad de 400 millones de dólares a una tasa anual del 12 %. Por otra parte, la Empresa estima que generará utilidades brutas año con año de 307.7 millones de dólares a perpetuidad. Si la tasa fiscal corporativa anual es del 35 % y el costo de capital accionario para la estructura de capital actual de la Empresa es del 25 % anual:

    a) ¿Cuál es el valor de la empresa no apalancada al día de hoy?

b) Suponiendo que año con año se pagan los mismos intereses sobre la deuda, ¿cuánto vale a perpetuidad la protección fiscal?

c) ¿Cuál es el valor de la empresa apalancada al día de hoy? ¿Cómo es el valor de la empresa apalancada respecto al de la no apalancada?

d) ¿Cuánto vale el capital contable de la empresa apalancada?

e) Dado el resultado del inciso anterior, obtenga el costo de capital de la empresa apalancada. Analice el resultado obtenido y compárelo con el costo de capital de la empresa no apalancada. Introduzca en el análisis MM2 con impuestos. ¿Qué tiene que ver la relación entre R_0 y r_d respecto al incremento del costo de capital r_s?

f) ¿Cuál es el WACC de la empresa no apalancada y el de la empresa apalancada?

18. Considere los siguientes datos.

	Actual	Presupuesto
Activo	\$10,000	\$10,000
Pasivo	\$0	\$5,000
Capital	\$10,000	\$5,000
Interés sobre la deuda	10 %	10 %
Valor de mercado por acción	\$20	\$20
Acciones en circulación	500	250

a) Si se espera tener EBI de \$600 ¿Qué estructura de capital genera mayores UPA?

b) Si se espera tener EBI de \$1,400 ¿Qué estructura de capital genera mayores UPA?

c) ¿Cuál es el punto de equilibrio?

d) Si se espera tener EBI de \$2,000. Calcular el WACC para la empresa (sin impuestos).

e) Calcular el costo de capital para la empresa en función del WACC anterior (sin impuestos).

Teoría del Portafolio

19. Se desea elaborar un portafolio de inversión con tres activos.

Activo	Precio del activos	Numero de acciones	Rendimiento del activo
A	\$5	15	3.2 %
B	\$15	23	7 %
C	\$3	8	1 %

a) Calcule el precio del portafolio.

b) Obtenga las W del portafolio.

c) Defina el portafolio.

d) Estime el rendimiento del portafolio.

20. Suponga que desea construir un portafolio de inversión con solo dos acciones. Usted busca información sobre dos acciones en el mercado, AIR FRANCE y DONONE, si los estimadores dados para cada acción son los siguientes.

	Rendimiento esperado	Desviación estándar	Correlación
AIRE FRANCE	11 %	15 %	0.15
DANONE	7 %	12 %	0.15

a) ¿Cuál es la rentabilidad esperada, varianza y desviación del portafolio de inversión?.

21. El señor Noel desea invertir en dos acciones que se encuentran cotizando en la bolsa mexicana de valores. La proyección de los rendimientos sobre estas acciones solo los siguientes:

Estado de la economía	Probabilidad de ocurrencia	Rendiminento A	Rendimiento B
Recesión	0.25	-2.0 %	5.0 %
Normal	0.60	9.2 %	6.2 %
Auge	0.15	15.4 %	7.47 %

a) Estime el rendimiento esperado de cada acción.
b) Calcule la desviación estándar del rendimiento de cada acción.
c) Calcule la covarianza y la correlación existente entre las dos acciones.

22. Considere la propuesta de inversión dada por la tabla siguientes:

Activo	Acciones	Precio	Rendimiento esperado	Volatilidad	Correlación
A	10	7	9 %	0.12	0.7
B	12	10	10 %	0.15	0.7

a) ¿Cuáles el precio del portafilo?
b) Calcular la proporción de cada activo.
c) ¿Cuál es el rendimiento espera y la volatilidad del portafolio?
d) Construya la frontera eficiente del portafolio. (Recuerda que la frontera eficiente se obtiene a través de todas las posibles combinaciones del vector W).

23. El rendimiento esperado sobre una cartera que combina una activo libre de riesgo y el activo que se sitúa en el punto de tangencia de la frontera eficiente es del 25 %. El rendimiento esperado se calculó bajo los siguientes supuestos. Tasa libre de riesgo del 5 %, rendimiento esperado de la cartera de mercado de los activos libres de riesgo es de 20 % y una desviación estándar de la cartera eficiente de 4 %.

a) ¿Cuál es la beta del activo que se encuentra en la cartera de mercado?
b) ¿Cuál es la desviación estándar del portafolio de mercado?
c) ¿Cuál es la beta del activo B que tiene σ=2 % y una correlación de 0.5 con el mercado?
d) ¿Cuál es el rendimiento del activo B?

Evaluación de proyectos

Considere los siguientes proyectos de inversión y conteste correctamente.

Proyecto	t=0	t=1	t=2
1	-500	240	300
2	-300	400	600

24. ¿Cuál es el VAN de cada proyecto?.

25. ¿Cuál es la TIR de cada proyecto?.

26. ¿Cuál es el índice de rentabilidad de cada proyecto?.

27. ¿Qué proyecto de inversión es el mejor?.

    Considere los siguientes proyectos de inversión y conteste correctamente

Proyecto	t=0	t=1
A	-25	45
B	-80	145

28. ¿Cuál es el VAN de cada proyecto?.

29. ¿Cuál es la TIR de cada proyecto?.

30. ¿Cuál es el índice de rentabilidad de cada proyecto?.

31. Aplique el método de la alternativa incremental para los siguientes proyectos. ¿Qué proyecto de inversión es el mejor?.

    Considere el siguiente proyecto de inversión y conteste correctamente.

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	-$10,000	$3,000	$4,500	$5,500	$6,000	$7,000

32. ¿Cuál es el valor presente neto del proyecto para una tasa de oportunidad (costo de capital) del 25 efectivo anual?.

33. ¿Cuál es la tasa interna de retorno TIR (rentabilidad promedio) del proyecto?.

34. Suponga que el proyecto es un Bono cuyo precio de emisión es de $10,000 ¿Cuál es el YTM del bono durante el horizonte (plazo) de 5 años?.

35. ¿Cuál es el índice de rentabilidad del proyecto?.

3.6. Enlace con el capítulo siguiente

Los tres pilares de las finanzas corporativas nos ayudan a planificar de forma correcta el desarrollo de un proyecto de inversión. Como se mostró en este capítulo hay ciertas metodologías que son de ayuda para tomar buenas decisiones. A partir de esto, el capítulo siguiente profundizará de forma más concreta dichas metodologías y dará una aplicación objetiva al desarrollo de estas.

4. Aplicación a las Matemáticas Financieras

Introducción

En los capítulos anteriores se ha estudiado la teoría de las matemáticas financieras y las finanzas corporativas. Hasta el momento los conceptos han sido claros y se han abordado de forma práctica para facilitar la comprensión al lector. En este capítulo se retoman temas ya estudiados y se introducen nuevas definiciones, con el fin de ofrecer una aplicación más específica en materia financiera sin perder el objetivo de este documento.

Como se comenta, se recuperan algunos temas y se plantean preguntas y nuevos supuestos para poder enriquecer el análisis de cualquier decisión financiera, de igual forma en capítulos anteriores se observa que conforme se va avanzando en los temas, el análisis de los resultados obtenidos en los ejercicios va siendo más profundo, en el sentido de que se busca una mejor interpretación en materia financiera enfocada al mercado real, situación que se busca intensificar en este capítulo, pues el término "Aplicación" lo sugiere.

Adicionalmente, el lector podrá visualizar los posibles escenarios a los cuales se puede enfrentar en la búsqueda de una toma de decisión financiera.

4.1. Instrumentos de Renta Fija

Un instrumento de inversión es un contrato el cual consiste en una serie de diversos flujos de efectivo que prometen un rendimiento con base de una tasa de interés (no siempre son los mismos flujos ni los mismos periodos).

Los instrumentos de Renta Fija son aquellos que se caracterizan por manejar el mismo interés durante todos los plazos y mismos flujos de efectivo.

Los instrumentos de renta fija más conocidos son los Bonos.

4.1.1. Bonos

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, los bonos representan contratos en los cuales un emisor se compromete a pagar ciertos intereses en fechas previamente establecidas a cambio de un pago inicial. Al final del plazo el emisor entrega un premio o redención.

Los Bonos son utilizados por empresas y gobierno para fondearse (Bonos Corporativos y Bonos Gubernamentales).

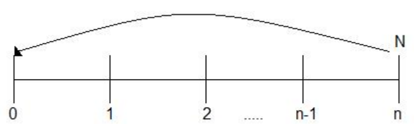
Principales Elementos

- Valor facial (F): Face value o valor de caratula, este es el monto sobre el cual se calculan los cupones.
- Tasa cupón (c): La tasa que define los cupones que se pagan. Por convención esta es nominal capitalizable a menos que se especifique lo contrario.
- Cupones (C): Estos son el producto del precio facial y la tasa cupón $cF = C$.
- Valor Nominal (N): Valor nominal o valor de redención es el monto que se paga (casi siempre) al final del plazo como premio por haber adquirido el bono.
- Plazo del Bono (n): Define cuantos cupones se pagan.
- Rendimiento (r): Es el rendimiento que gana el instrumento, r es el YTM (Yield to Maturity) rendimiento al vencimiento.

Clasificación

Bono Cupón Cero (BCC)

No hay pago de cupones, sólo se paga la redención.



El precio del Bono es el valor presente de sus flujos.

$$P = N(1+r)^{-n}$$

Con interés simple se tendría:

$$P = \frac{N}{1+nr}$$

Ejemplo

Un Bono cupón cero se emite hoy y promete un nominal de \$100 al final de 4 años bajo un YTM del 5 % anual efectivo. ¿Cuál es el precio del instrumento al día de hoy?.

Solución

Datos
N=100
n=4
r=5 %=0.05

Procedimiento

$$P = 100(1+0.05)^{-4} = 100(1.05)^{-4} = 82.2702$$

¿Qué pasaría si la tasa es del 5 % anual capitalizable semestralmente?.

Datos

N=100
n=4 años = 8 semestres
r=$\frac{5\,\%}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

Procedimiento

$$P = 100(1+0.025)^{-8} = 100(1.025)^{-8} = 82.0746$$

Ejemplo

Hoy el Banco de México emite un Cete a un plazo de 28 días bajo un rendimiento del 3 % anual, un nominal de \$10 y capitalizan bajo un interes simple. ¿Cuánto vale el Cete hoy? Nótese que un Cete capitaliza de forma simple.

Solución

Datos
N=10
n=$\frac{28}{360}$

Procedimiento

$$P = \frac{10}{1+0.03(\frac{28}{360})} = 9.9767$$

Ejemplo

Hoy se firma un pagare (BCC) por \$1,000 a plazo de 6 meses. Si el interés que se carga al documento es del 20 % anual capitalizable semestralmente ¿Cuánto se recibe hoy por el pagare?.

Solución

Datos
N=1,000
r=$\frac{0.2}{2} = 0.1$
n=1

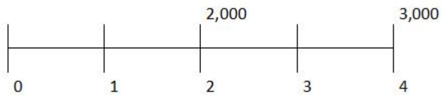
Procedimiento

$$P = 1000(1.1)^{-1} = 909.09$$

Ejemplo

Hoy se firman dos pagares por la cantidad de \$2,000 y \$3,000 cada uno liquidables a 1 y 2 años respectivamente. Cuánto dinero se recibe si el interés cargado a ambos documentos es de:

a) 35 % efectivo anual
b) 35 % anual nominal capitalizable semestralmente
c) 35 % anual instantáneo



Solución

a) Datos
N=2,000 y 3,000
n=1 y 2
r=35 %=0.35

Procedimiento

$$P = 2000(1.35)^{-1} + 3000(1.35)^{-2} = 3127.57$$

b) Datos
N=2,000 y 3,000
n=1 y 2
r=$\frac{35\,\%}{2}$=$\frac{0.35}{2}$=0.175

Procedimiento

$$P = 2000(1 + \frac{0.35}{2})^{-2} + 3000(1 + \frac{0.35}{2})^{-4}$$

$$P = 2000(1.175)^{-2} + 3000(1.175)^{-4} = 3022.49$$

c) Datos
N=2,000 y 3,000
n=1 y 2

δ=35 %=0.35

Procedimiento

$$P = 2000e^{-0.35(1)} + 3000e^{-0.,35(2)} = 2899.13$$

Al emisor de pagarés le resulta conveniente una tasa de interés con menor frecuencia de capitalización, pues de esta forma el documento tendrá mayor valor actual.

Ejemplo

Hoy se subastan Cetes a 182 días con un YTM del 4.5 % anual. ¿Cuánto valen los Cetes hoy? y ¿Cuánto valen un mes después?

Solución

a) Datos
N=10
n=$\frac{182}{360}$
r=4.5 %=0.045

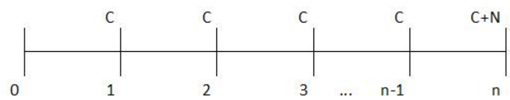
$$P = \frac{10}{1 + 0.045(\frac{182}{360})} = 9.77$$

b) Datos
N=10
n=$\frac{152}{360}$
r=4.5 %=0.045

$$P = \frac{10}{1 + 0.045(\frac{152}{360})} = 9.81$$

4.1.2. Bonos a Tasa Fija

Se pagan cupones fijos con base en cierta tasa cupón c y un nominal N al final del plazo.

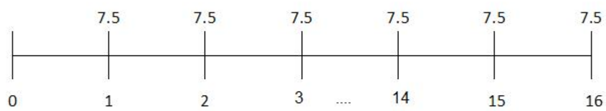


$$P = Ca\overline{n}r + NV^n$$

Ejemplo

¿Cuál es el precio de un Bono al 30 % anual con un valor facial de \$100, YTM del 15 % capitalizable cuatrimestralmente si los cupones se pagan cada trimestre durante 4 años?

Solución



Datos
N=100
F=100
r=$\frac{0.15}{4} = 0.0375$
c=$\frac{0.30}{4} = 0.075$
C=0.075(100)=7.5 n=4(4)=16

Procedimiento

$$P = 7.5(\frac{1-(1+0.0375)^{-16}}{0.0375}) + 100(1+0.0375)^{-16} = 144.51$$

Ejemplo

En el mercado de deuda se encuentra un bono que ofrece un valor de redención de $100 y promete pagar una tasa cupón del 12 % capitalizable bimestralmente, si el instrumento tiene una madurez de 2 años, calcule el precio del bono suponiendo los siguientes rendimientos:

1. YTM del 6 % convertible bimestralmente
2. YTM del 12 % convertible bimestralmente
3. YTM del 18 % convertible bimestralmente

Solución

Datos
F=N=100
n=2(6)=12
c=0.02
$r_1 = \frac{0.06}{6} = 0.01$ $r_2 = \frac{0.12}{6} 0.02$ $r_3 = \frac{0.18}{6} = 0.03$

Procedimiento

1. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.01)^{-12}}{0.01}) + 100(1+0.01)^{-12} = 111.26$

2. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}) + 100(1+0.02)^{-12} = 100$

3. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.03)^{-12}}{0.03}) + 100(1+0.03)^{-12} = 90.05$

Haciendo el análisis de los resultados obtenidos se muestra la tabla siguiente:

No	P	F	r	c
1	111.26	100	6 %	12 %
2	100	100	12 %	12 %
3	90.05	100	18 %	12 %

Se observa que la relación de las tasas YTM y cupón están asociadas entre el precio y el valor facial si F=N.

$\Rightarrow$ De esta forma, se establece el vínculo de las relaciones entre P y F y entre r y c.

$$P > F \Leftrightarrow r < c$$
$$P = F \Leftrightarrow r = c$$
$$P < F \Leftrightarrow r > c$$

Sea $P = Ca\overline{n}r + NV^n$

$$a\overline{n}r = \frac{1-V^n}{r} \Rightarrow V^n = 1 - (a\overline{n}r)(r)$$
$$\Rightarrow P = Ca\overline{n}r + N(1 - (a\overline{n}r)(r))$$
$$= Ca\overline{n}r + N - N(a\overline{n}r)(r))$$
$$\Rightarrow P = N + (C - Nr)a\overline{n}r$$
$$P = N + (cF - Nr)a\overline{n}r$$

Si $F = N$

$$P = F + (cF - Fr)a\overline{n}r$$
$$P = F + F(c - r)a\overline{n}r$$

Fórmula de diferencia de tasas.

$$P - F = F(c - r)a\overline{n}r$$

Ejemplo

Retome el ejercicio anterior y suponga un valor facial de 100 y un valor de redención de 120 y calcule el precio del bono con las tres distintas tasas de rendimiento.

Solución

Solución

Datos
F=100
N=120
n=2(6)=12
c=0.02
$r_1 = \frac{0.06}{6} = 0.01$ $r_2 = \frac{0.12}{6} 0.02$ $r_3 = \frac{0.18}{6} = 0.03$

Procedimiento

1. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.01)^{-12}}{0.01}) + 120(1 + 0.01)^{-12} = 129.004$

2. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}) + 120(1 + 0.02)^{-12} = 115.77$

3. $100(0.02)(\frac{1-(1+0.03)^{-12}}{0.03}) + 120(1 + 0.03)^{-12} = 104.07$

$\Rightarrow F \neq N$ no necesariamente se establece la relación par. Por otro lado, si F=N los cupones son calculados respecto a N.

$$P = cNa\overline{n}r + NV^n$$

por lo que se cumplen las relaciones anteriores.

$\Rightarrow$ Si $F \neq N$, entonces se debe seguir calculando los cupones respecto al nominal *i.e.*

$$P = gNa\overline{n}r + NV^n$$

Por otra parte, esta expresión, utilizando g como una tasa cupón, debe seguir cumpliendo con la fórmula que satisface el precio del bono, entonces:

$$P = cFa\overline{n}r + NV^n$$
$$\Rightarrow cFa\overline{n}r + NV^n = gNa\overline{n}r + NV^n$$
$$\Rightarrow cF = gN$$
$$\therefore g = \frac{cF}{N}$$

g es conocida como tasa cupón ajustada y da pie a las relaciones par si F difiere con N.

Luego, se sabe que:

$$P = N + (cF - rN)a\overline{n}r$$
$$\frac{P}{N} = 1 + (\frac{cF}{N} - r)a\overline{n}r$$
$$P = N + N(g - r)a\overline{n}r$$

Formula de diferencia de tasas incluyendo la tasa cupón ajustada g.

$$P - N = N(g - r)a\overline{n}r$$

Ejemplo

Retomando el ejercicio anterior calcule la tasa ajustada "g" y evalué el bono con los siguientes rendimientos y al final haga conclusiones de las relaciones.

1. YTM del 5 % convertible bimestralmente
2. YTM del 10 % convertible bimestralmente
3. YTM del 15 % convertible bimestralmente

Solución

$$g = \frac{cF}{N} = \frac{(0.02)(100)}{120} = \frac{1}{60}$$

Entonces el precio del bono seria:

1. $(2)(\frac{1-(1+\frac{0.05}{6})^{-12}}{\frac{0.05}{6}}) + 120(1 + \frac{0.05}{6})^{-12} = 131.37$

2. $(2)(\frac{1-(1+\frac{0.10}{6})^{-12}}{\frac{0.10}{6}}) + 120(1 + \frac{0.05}{6})^{-12} = 120$

3. $(2)(\frac{1-(1+\frac{0.15}{6})^{-12}}{\frac{0.15}{6}}) + 120(1 + \frac{0.15}{6})^{-12} = 109.74$

Entonces si $F \neq N$ se concluye que las relaciones par están dadas de la siguiente forma:

$$P > N \Leftrightarrow r < g$$
$$P = N \Leftrightarrow r = g$$
$$P < N \Leftrightarrow r > g$$

Nótese que g resulta ser solamente un indicador para medir los niveles par, sobre par y bajo par de instrumentos si F diferente de N, por lo que la tasa c sigue siendo la tasa cupón original del instrumento, pues a partir de ella se llega al cálculo del precio P.

4.1.3. Bonos como proyectos de Inversión

En el mercado es común comprar y vender Bonos a precios previamente establecidos, la diferencia que existe entre los compradores y vendedores está dada por el precio de oferta o precio de venta (Ask price) y el precio de demanda o precio de compra (Bid price).

La diferencia entre los precios es llamada Spread y su tamaño depende de la liquidez del instrumento.

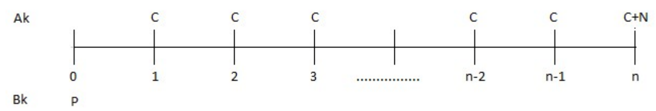
Si los precios de los instrumentos ya están dados en el mercado, entonces la pregunta que surge es: ¿Cuál es el rendimiento que nos ofrece dicho instrumento ?.

Se sabe que un Bono está conformado por algunos valores particulares como lo es el Valor Facial (F), Valor de redención (N), Precio del Bono (P), tasa cupón (c), tiempo de madurez (n) y el rendimiento (YTM).

De igual forma sabemos que el precio del bono está dado por:

$$P = Ca\overline{n}r + NV^n$$

Ahora la pregunta es: ¿Cómo se ve un Bono como proyecto de Inversión?



Retomando lo estudiado en capítulos anteriores, el VAN (Valor Actual Neto) o NPV (Net Present Value) es el cálculo del valor presente de los flujos de caja (Cash Flow) mediante una tasa de interés, en este caso el YTM.

$$VAN = \sum_{k=1}^{n} C_k V^n$$

En donde $C_k = A_k - B_k$

A_k son los flujos recibidos y B_k los desembolsados en el proyecto.

De esta forma, el VAN de un Bono está dado de la siguiente forma.

k=0	k=1,2,...,n-1	k=n
$A_0 = 0$	$A_k = C$	$A_n = C + N$
$B_0 = P$	$B_k = 0$	$B_n = 0$
$C_0 = -P$	$C_k = C$	$C_n = C + N$

$$AN = -PV^0 + \sum_{k=1}^{n-1} CV^k + (C+N)V^n$$

$$VAN = -P + \sum_{k=1}^{n-1} CV^k + CV^n + NV^n$$
$$VAN = -P + \sum_{k=1}^{n} CV^k + NV^n$$
$$VAN = -P + C\sum_{k=1}^{n} V^k + NV^n$$
$$\Rightarrow VAN = -P + Ca\overline{n}r + NV^n$$

Si el $VAN = 0$

$$P = Ca\overline{n}r + NV^n$$

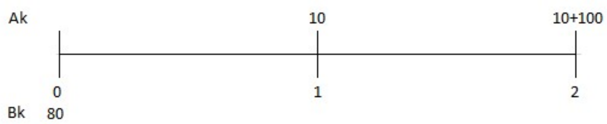
Si el $VAN = 0$ se dice que la tasa a la que están descontados los flujos de efectivo es la TIR y en este caso el YTM es la TIR de nuestro proyecto.

La TIR es la rentabilidad que proporciona un proyecto, nos ayuda a tomar decisiones y en ocasiones esta TIR se compara con una tasa mínima o una tasa de corte.

Se dice que la $TIR(YTM)$ hace justo el precio del Bono, es decir, no existe arbitraje.

Ejemplo

Se desea comprar un Bono en el mercado, cuyo Bid price es de \$80.00 y paga dos cupones anuales al 10 % ¿Qué rendimiento se gana?.



$VAN = -80 + 10V + 110V^2$
$VAN = 0 \Rightarrow 80 = 10V + 110V^2$

V_1 =0.8085
V_2 =-0.8994

$V = \frac{1}{1+r}$ =0.8085
r=$\frac{1}{0.8085} - 1$ =0.2368=23.7 %

Un año después se desea vender el Bono y el Ask price es de \$90.00. ¿Es recomendable la estrategia?, ¿Qué rendimiento gana el Bono ?.

Si el mercado compra el Bono.

$VAN = -90 + 110V$

Si el $VAN = 0$

$90 = 110V$
$V = \frac{90}{110}$

Entonces

$r = \dfrac{11}{9} - 1$ =0.222=22.2 %

Entonces el rendimiento que gana la operación por parte del nuevo comprador es de 22.2 %. Luego, dada la compra al emitirse en instrumento y su venta un periodo después, se genera un nuevo perfil del proyecto con los flujos de efectivo siguientes:

$VAN = -80 + 100V$

Si el $VAN = 0$

$80 = 100V$
$V = \dfrac{80}{100}$

Entonces

$r = \dfrac{10}{8} - 1$ =0.25=25 %

Se concluye que conviene la venta anticipada del bono siempre y cuando haya alguien en el mercado dispuesto a pactar su compra al precio establecido.

4.1.4. Análisis de sensibilidad

Si se busca realizar una venta anticipada de un bono antes del vencimiento es importante medir si resulta conveniente hacerlo, pues dada esta estrategia y lo comentado en el tema anterior, los precios en el mercado cambian constantemente dadas las variaciones en los factores de riesgo inmersos en este.

Lo anterior lleva a preguntarse ¿cuál es el factor de riesgo en el mercado que haría cambiar el precio de un bono? Analizando los factores del instrumento, se sabe que la tasa cupón y la madurez se fijan al momento de pactar el contrato al igual que el valor facial y el de redención, por lo que el factor que está sujeto a cambios en el mercado es la tasa de rendimiento YTM del bono.

Esta situación genera una nueva incógnita: ¿Cómo se mide el cambio en el precio de un Bono dado un movimiento en el YTM?.

Sea r el YTM del Bono y sea $P(r)$ el precio del Bono en función de r, el cambio está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r) = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{t=1}^{n} F_t V^t$$

En donde se sabe que $F_1, F_2, F_3, ..., F_{n-1} = C$ y $F_n = C + N$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\sum_{t=1}^{n} F_t(1+r)^{-t} = -\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t-1}$$

Entonces $\frac{\partial}{\partial r}P(r)$ es el cambio del precio respecto al cambio en el YTM.

Luego, el cambio relativo (%) es:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}P(r)}{P(r)} = \frac{-\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t-1}}{\sum_{t=1}^{n} F_t(1+r)^{-t}}$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial r}P(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-t-1}}{P(r)} = DM$$

DM es la Duración Modificada del bono, indicador que fue estudiado en capítulos anteriores y mide el cambio en el precio del instrumento ante un cambio conjunto del 1 % en el YTM (0.5 % $\uparrow$ y 0.5 % $\downarrow$).

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r) = \lim_{h\to 0}\frac{P(r+h) - P(r)}{h}$$

Se da un cambio pequeño en r, es decir, h $\to$ 0 (h es el cambio en la tasa).

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r) \approx \frac{P(r+h) - P(r)}{h}$$

$$\Rightarrow P(r+h) - P(r) \approx h\frac{\partial}{\partial r}P(r)$$

$$P(r+h) - P(r) \approx -hP(r)(\frac{-\frac{\partial P(r)}{\partial r}}{P(r)})$$

Entonces la diferencia de precio dada la DM es:

$$P(r+h) - P(r) \approx -hP(r)DM$$

Y el cambio relativo dada la DM es:

$$\frac{P(r+h) - P(r)}{P(r)} \approx -hDM$$

Entonces el precio aproximado dado el cambio h en r está dado por:

$$P(r+h) \approx P(r) - hP(r)DM$$
$$\Rightarrow P(r+h) \approx P(r)(1 - hDM)$$

Expresión de donde es posible concluir que si la tasa de interés se incrementa, entonces el precio del bono tenderá a la baja y viceversa.

Ejemplo

Se desea invertir en un Bono con un valor nominal de \$100.00 con una tasa cupón del 5 %, un rendimiento del 20 % anual con un vencimiento de 4 años. Calcular la DM del Bono.

Solución

Datos
N=F=100
C=5
n=4
r=10 %
c=5 %

Procedimiento
$P = 5(\frac{1-(1.1)^{-4}}{0.1}) + 100(1.1)^{-4}$=84.15

$DM = -\frac{[\sum_{t=1}^{4} t(5)(1.1)^{-t-1} + (4)(100)(1.1)^{-5}]}{84.15}$=3.35

Ahora suponga un cambio de 10 pb (puntos base). Aproximar el nuevo precio del instrumento y el cambio relativo dada la DM

10 pb $= \frac{10}{10000} = 0.1\,\% = 0.001$

Precio nuevo.

P(r+h)=P(10 % + 0.1 %)

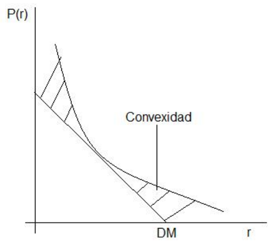
$P(r+h) = 84.15[1 - 0.001(3.35)] = 83.86$

Cambio relativo.

$\dfrac{P(10\,\% + 0.1\,\%) - P(10\,\%)}{P(10\,\%)}$ =-0.001(3.35)=-0.00335=-0.335 %

Nótese que el precio del bono baja porque la tasa de rendimiento se incrementa.

Dado lo anterior, se concluye que el precio del bono es una función decreciente en términos del YTM, por lo que si la primera derivada representa la Duración Modificada, en la siguiente gráfica se observa que la recta pendiente de la DM se ajustará de mejor forma al precio del bono si el cambio h en la tasa es cada vez más pequeño, por lo que la aproximación desarrollada anteriormente perderá precisión si h tiende a la alza, es por ello que será necesario una medida adicional que soporte esta brecha con el fin de no perder precisión. A esta medida se le conoce como Convexidad, la cual se introducirá más adelante.



Retomando la DM, se sabe que:

$$\frac{\sum tF_t(1+r)^{-t-1}}{\sum F_t(1+r)^{-t}} = -\frac{\frac{\partial P(r)}{\partial r}}{P(r)}$$

Multiplicando por $(1+r)$

$$(1+r)DM = \frac{\sum tF_t(1+r)^{-t-1}(1+r)}{\sum F_t(1+r)^{-t}} = \frac{\sum tF_t(1+r)^{-t}}{\sum F_t(1+r)^{-t}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n}[\frac{tF_t(1+r)^{-t}}{P(r)}] = D$$

El ponderador es la partición (incidencia) de cada flujo descontado del Bono al precio total.

$$D = DM(1+r) = \text{Duración Macaulay}$$

D es el plazo promedio del Bono, es decir, el plazo promedio de recuperación del instrumento.

Recordando un poco de la teoría de Cálculo, se tomará un concepto importante para este tema.

Expansión de Taylor

Sea $f(x)$ una función infinitamente diferenciable y definida en el intervalo (a-h,a+h), entonces se tiene lo siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Expansión de segundo orden.

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow f(x) \approx f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2$$

Ahora sea $f = P$ el precio del Bono y sea $x = r+h$ y tomando $a = r$ entonces la expansión de segundo orden para estas variables se visualiza de la siguiente forma:

$$P(r+h) \approx P(r) + \frac{\partial P(r)}{\partial r}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2}h^2$$
$$\Rightarrow P(r+h) - P(r) \approx -h(\frac{\frac{-d\partial P(r)}{\partial r}}{P(r)})P(r) + \frac{h^2}{2}(\frac{\frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2}}{P(r)})P(r)$$
$$\frac{P(r+h)-P(r)}{P(r)} \approx -hDM + \frac{1}{2}h^2 Conv$$

La convexidad (Conv) mejora la aproximación ante una variación mayor en el YTM, por lo tanto ante el riesgo de Mercado (cambio en la tasa de interés) es mejor elegir los Bonos con menor duración y Convexidad.

De igual forma la Convexidad es la derivada de la DM, es decir, mide que tanto cambia la volatilidad del Bono ante un cambio en la tasa.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial P(r)}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}[-\sum_{t=1}^{n} tF_t(1+r)^{-(t+1)}]$$
$$= \sum_{t=1}^{n} t(t+1)F_t(1+r)^{-(t+2)}$$
$$\Rightarrow Conv = \frac{\frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2}}{P(r)} = \frac{\sum t(t+1)F_t(1+r)^{-(t+2)}}{\sum F_t(1+r)^{-t}}$$

Ejemplo

Use los datos del Bono anterior y suponga un incremento en la tasa de 100 pb. Encontrar el cambio relativo del instrumento dado el aumento en la tasa.

Solución

Datos
N=F=100
r=10 %
c=5 %
C=5
n=4
DM=3.35
h= 100pb $= \dfrac{1}{100} = 1\,\%$

Procedimiento

$$Conv = \frac{[\sum_{t=1}^{n} t(t+1)(5)(1.1)^{-(t+2)}] + (4)(5)(1.1)^{-6}}{84.15} = 14.86$$

$$\frac{P(10\,\% + 1\,\%) - P(10\,\%)}{P(10\,\%)} \approx -\frac{1}{100}(3.35) + \frac{1}{2}(\frac{1}{100})^2(14.85) \approx -0.032 = -3.2\,\%$$

Entonces, el precio aproximado del Bono dado el incremento es:

$$P(r+h) = P(r)[1 - hDM + \frac{h^2}{2}Cov]$$

$$P(r+h) = 84.15[1 - (0.01)(3.35) + (\frac{0.01^2}{2})(14.86)]$$

El precio real dado el incremento es:

$$P(r+h) = 5(\frac{1-(1.11)^{-4}}{0.11}) + 100(1.11)^{-4} = 81.385$$

Por lo tanto se concluye que ante cambios más amplios en el YTM, la aproximación de segundo orden con convexidad resulta más precisa que una de primer orden solo con Duración.

Sensibilidad de un Portafolio de deuda

Sea P el precio de un portafolio con n instrumentos con precios $P_1, P_2, ..., P_n$ respectivamente, el precio del portafolio esta dado de la siguiente manera.

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Por otra parte se sabe que la duración modificada de cada instrumento está dado por:

$$DM_k = \frac{\frac{-\partial P_k}{\partial r}}{P_k}$$

Supóngase que todos los instrumentos manejan el mismo YTM o existe un cambio paralelo (de la misma magnitud) en las tasas de mercado:.

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r} P_k$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-\partial P}{\partial r}}{P} = \frac{-\sum \frac{\partial}{\partial r} P_k}{P} = \frac{\sum (\frac{\frac{\partial P_k}{\partial r}}{P_k}) P_k}{P}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$DM_P = \sum_{k=1}^{n} (\frac{P_k}{P}) DM_k = \sum_{k=1}^{n} (w_k) DM_k$$

$$D_P = DM_P(1+r) = (1+r) \sum_{k=1}^{n} w_k DM_k = \sum_{k=1}^{n} w_k D_k$$

Entonces, la segunda derivada del portafolio respecto a r es:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial r^2} P_k$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-\partial^2 P}{\partial r^2}}{P} = \frac{-\sum \frac{\partial^2}{\partial r^2} P_k}{P} = \frac{\sum (\frac{\frac{\partial^2 P_k}{\partial r^2}}{P_k}) P_k}{P}$$

Por lo tanto la convexidad de un portafolio es:

$$Conv_P = \sum_{k=1}^{n} (\frac{P_k}{P}) Conv_k = \sum_{k=1}^{n} (w_k) Conv_k$$

Ejemplo:

Para el siguiente portafolio calcular D, DM y Convexidad.

	Bono 1	Bono 2	Bono 3
Precio	\$100	\$115	\$120
DM	3	3.25	2.75
Convexidad	11.13	14.2	13.5
r	10 %	7 %	8 %
# Activos	10	7	8

Solución:

$$P = (10)(100) + (7)(115) + (8)(120) = 2,765$$

$$w_1 = \frac{1,000}{2,765} = 0.362 \quad w_2 = \frac{805}{2,765} = 0.291 \quad w_3 = \frac{960}{2,765} = 0.347$$

$$D_1 = 3(1 + 0.10) = 3.3 \quad D_2 = 3.25(1 + 0.07) = 3.477 \quad D_3 = 2.75(1 + 0.08) = 2.97$$

$$DM_P = \sum_{k=1}^{3}(w_k)DM = (0.362)(3) + (0.291)(3.25) + (0.347)(2.75) = 2.986$$

$$D_P = \sum_{k=1}^{3}(w_k)D = (0.362)(3.3) + (0.291)(3.477) + (0.347)(2.97) = 3.237$$

$$Conv_P = \sum_{k=1}^{3}(w_k)Conv = (0.362)(11.13) + (0.291)(14.2) + (0.347)(13.5) = 12.846$$

4.1.5. Inmunización Cobertura

Cuando se invierte en un portafolio de deuda, además del riesgo de crédito, el riesgo que se corre es el riesgo de mercado ya que se sabe que si $r \uparrow \Rightarrow P \downarrow$. Por lo tanto además de medir dicho riesgo, se debe mitigarlo, es decir, inmunizarlo, para ello se utiliza el método llamado (cobertura) *Hedging* con base en sensibilidades. La idea es encontrar un portafolio o instrumento el cual mitigue las pérdidas con las ganancias.

Sea $P(r)$ el Precio de un portafolio inicial el cual está en función de r, entonces se sabe que:

$$DM_p = \sum_{k=1}^{n} w_k DM_k$$

Esta igualdad si aplica para diferentes YTM suponiendo que las tasas tienen la misma variación.

$$\Delta r_i = \Delta r_i \forall i, j$$

$$\partial r_i = \partial r_j \forall i, j$$

Por otro lado, sea $Q(r_1)$ el portafolio o *instrumento de cobertura* en función de r_1 ($r \neq r_1$). Sea φ la cantidad a utilizar de $Q(r_1)$, por lo que la posición conjunta está dada por:

$$PC = P(r) + \varphi Q(r_1)$$

Luego supongamos que las tasas varían en la misma proporción.

$$\Rightarrow \partial r = \partial r_1$$

Si se desea anular el cambio de tasas entonce:

$$\frac{\partial PC}{\partial r} = \frac{\partial P(r)}{\partial r} + \frac{\varphi \partial Q(r_1)}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial PC}{\partial r} = \frac{-(\frac{-\partial P(r)}{\partial r})}{P(r)} P(r) - \frac{\varphi(\frac{-\partial Q(r_1)}{\partial r_1})}{Q(r_1)} Q(r_1) = 0$$

$$\Rightarrow -DM_P P(r_1) - \varphi DM_Q Q(r_1) = 0$$

$$\varphi = \frac{-DM_P P(r)}{DM_Q Q(r_1)}$$

Ejemplo

Se tiene un portafolio de \$328.34 con DM =6.76 y un YTM de 5.143 %. En el mercado existe otro portafolio con valor de \$118.79 y DM de 5.49 y YTM de 4.78 %. Suponga un alza en las tasas de 10pb.

Solución.

P=\$328.34	Q=\$118.79
r=5.143 %	r=4.78 %
DM=6.76	DM=5.49

$$\varphi = \frac{-6.76(328.34)}{5.49(118.79)} = -3.41$$

Por lo tanto se necesita vender en corto 3.41 unidades de Q.

Pérdida

$$\begin{aligned} P(r+h) - P(r) &\approx -hDM_P P(r) \\ &\approx (-0.001)(6.76)(328.34) \\ &\approx -2.22 \end{aligned}$$

Ganancia

$$\begin{aligned} P(r+h) - Q(r) &\approx -hDM_Q Q(r) \\ &\approx (-0.001)(5.49)(118.79) \\ &\approx -0.65 \end{aligned}$$

⇒(-3.41)(-0.65)=2.22

Por lo tanto se inmuniza el cambio, pues la pérdida de P es eliminada con la Ganancia de Q.

Entonces si la Pérdida mas la Ganancia es igual a cero entonces se dice que se inmuniza el cambio.

Ahora si inducimos convexidad se necesitará un instrumento o portafolio adicional.

$$\Rightarrow Q_1(r_1) \wedge Q_2(r_2)$$
$$r_1 \neq r_2 \neq r$$
$$\Rightarrow PC = P(r) + \varphi_1 Q_1(r_1) - \varphi_2 Q_2(r_2)$$

Si los cambios en tasa son paralelos entonces $\partial r = \partial r_1 = \partial r_2$

$$-DM_P P(r) - \varphi_1 Q_1 Q_1(r_1) - \varphi_2 Q_1 Q_2(r_2) = 0$$
$$\varphi_1 Q_1 Q_1(r_1) + \varphi_2 Q_1 Q_2(r_2) = -DM_P P(r)$$

Utilizando convexidad.

$$Conv_P P + \varphi_1 Conv_{Q_1} Q_1 + \varphi_2 Conv_{Q_2} Q_2$$
$$\varphi_1 Conv_{Q_1} Q_1 + \varphi_2 Conv_{Q_2} Q_2 = -Conv_P P$$

Se utiliza un sistema de ecuaciones tendríamos la siguiente matriz de sensibilidad.

$$\begin{pmatrix} DM_1 Q_1 & DM_2 Q_2 \\ Conv_1 Q_1 & Conv_2 Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -DM_P P \\ -Conv_P P \end{pmatrix}$$

Introduciendo un tercer portafolio o instrumento $Q(r_3)$ se tendría lo siguiente.

$$P + \varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3$$
$$\Rightarrow \varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3 = -P$$

La matriz de sensibilidad quedaría de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} DM_1 Q_1 & DM_2 Q_2 & DM_3 Q_3 \\ Conv_1 Q_1 & Conv_2 Q_2 & Conv_3 Q_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -DM_P P \\ -Conv_P P \\ -P \end{pmatrix}$$

Nótese que la medición de sensibilidad basta con Convexidad, pero si es del interés del inversionista cubrirse con una tercera posición, bastará con introducir en el sistema una ecuación adicional que dependa del precio de los instrumentos, más allá de utilizar una aproximación de tercer orden, pues como se observó la gráfica del precio de la deuda resulta ser una curva, la cual es posible aproximar eficientemente con convexidad.

Ejemplo:

Hoy el señor Rafael José tiene su capital invertido en un portafolio con las siguientes características:

Precio	**YTM**	**DM**	**Convexidad**
\$30,000,000	6 %	7	25

En el mercado se tienen los siguientes Bonos:

Bono	**Precio**	**YTM**	**DM**	**Convexidad**
1	\$108	7 %	8	30
2	\$118	5 %	3	15
3	\$97.96	5.233 %	8.813	99.081

1. Realizar la cobertura a base de sensibilidad con los Bonos 1 y 2.
2. Realizar la cobertura a base de sensibilidad con los Bonos 1, 2 y 3.

Solución:

La matriz de sensibilidad con el Bono 1 y 2 es:

$$\begin{pmatrix} (8)(108) & (3)(118) \\ (30)(108) & (15)(118) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(7)(30{,}000{,}000) \\ -(25)(30{,}000{,}000) \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por las matrices se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0046 & -0.0009 \\ 0.0085 & 0.0023 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -210{,}000{,}000 \\ -750{,}000{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -277{,}777.78 \\ 84{,}745.76 \end{pmatrix}$$

Supóngase un cambio en tasas de 500pb, calcule el cambio de precio del portafolio y de los bonos 1 y 2.

$$P_P(r+h)-P_P(r) = P_P(-hDM_P+\frac{h^2}{2}Conv_P) = 30{,}000{,}000(-(0.05)(7)+(\frac{0.05^2}{2})(25)) = -9{,}562{,}500$$

$$P_{B_1}(r+h)-P_{B_1}(r) = P_{B_1}(-hDM_{B_1}+\frac{h^2}{2}Conv_{B_1}) = 108(-(0.05)(8)+(\frac{0.05^2}{2})(30)) = -39.15$$

$$P_{B_2}(r+h)-P_{B_2}(r) = P_{B_2}(-hDM_{B_2}+\frac{h^2}{2}Conv_{B_2}) = 118(-(0.05)(3)+(\frac{0.05^2}{2})(15)) = -15.49$$

La inmunización es la siguiente:

$$\varphi_1 * Cambio\ en\ Bono\ 1 = (-277{,}777.78)(-39.15) = 10,875,000$$

$$\varphi_2 * Cambio\ en\ Bono\ 2 = (84{,}745.76)(-15.49) = -1,312,500$$

Entonces, la suma de los cambios anteriores es:

$$\varphi_1 * Cambio\ en\ Bono\ 1 + \varphi_2 * Cambio\ en\ Bono\ 2 = 10,875,000 - 1,312,500 = 9,562,500$$

Por lo que se concluye que dado un movimiento en tasas de 500pb el portafolio queda inmunizado ya que el cambio en el portafolio es de -\$9,562,500, es decir:

$$Cambio\ en\ el\ portafolio + \varphi_1 * Cambio\ en\ Bono\ 1 + \varphi_2 * Cambio\ en\ Bono\ 2$$

$$= -9,562,500 + 10,875,000 - 1,312,500 = 0$$

La matriz de sensibilidad con el Bono 1, 2 y 3 es:

$$\begin{pmatrix} (8)(108) & (3)(118) & (8.813)(97.96) \\ (30)(108) & (15)(118) & (99.0817)(97.96) \\ 108 & 118 & 97.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(7)(30{,}000{,}000) \\ -(25)(30{,}000{,}000) \\ -3{,}000{,}000 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por las matrices se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00234 & -0.00016 & -0.00459 \\ -0.00176 & 0.00002 & 0.01344 \\ -0.00046 & 0.00015 & -0.00092 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -210{,}000{,}000 \\ -750{,}000{,}000 \\ -30{,}000{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -231{,}914.14 \\ -49{,}606.83 \\ 9{,}190.64 \end{pmatrix}$$

Supóngase un cambio en tasas de 500pb, calcule el cambio de precio del portafolio y de los bonos 1, 2 y 3.

$$P_P(r+h) - P_P(r) = 9{,}562{,}500 \quad P_{B_1}(r+h) - P_{B_1}(r) = -39.15 \quad P_{B_2}(r+h) - P_{B_2}(r) = -15.49$$

$$P_{B_3}(r+h) - P_{B_3}(r) = P_{B_3}(-hDM_3 + \frac{h^2}{2}Conv_3) = 97.96(-(0.05)(8.813) + (\frac{0.05^2}{2})(99.081)) = -31.03$$

La inmunización es la siguiente:

$$\varphi_1 * Cambio\ en\ Bono\ 1 = (-231,914.14)(-39.15) = 9,079,438.64$$

$$\varphi_2 * Cambio\ en\ Bono\ 2 = (-49,606.83)(-15.49) = 768,285.77$$

$$\varphi_3 * Cambio\ en\ Bono\ 3 = (9,190.64)(-31.03) = -285,224.41$$

Entonces, la suma de los cambios anteriores es:

$$\varphi_1 * Cambio\ en\ Bono\ 1 + \varphi_2 * Cambio\ en\ Bono\ 2 + \varphi_3 * Cambio\ en\ Bono\ 3$$

$$= 9,079,438.64 + 768,285.77 - 285,224.41 = 9,562,500$$

Por lo que se concluye que dado un movimiento en tasas de 500pb el portafolio queda inmunizado ya que el cambio en el portafolio es de -$9,562,500, es decir:

$$Cambio\ en\ el\ portafolio + \sum_{k=1}^{3} (\varphi_k * Cambio\ en\ Bono\ k)$$

$$= -9,562,500 + 9,562,500 = 0$$

Por lo tanto queda totalmente inmunizado el portafolio dado algún cambio en tasas.

4.2. Estructura de Plazo de tasas de interés

4.2.1. Curva de tasas

Al momento de adquirir una deuda el deudor se compromete a pagar intereses, los cuales son definidos por el prestamista. Estos intereses pueden ser representados por una tasa fija o por diferentes tasas para diferentes plazos.

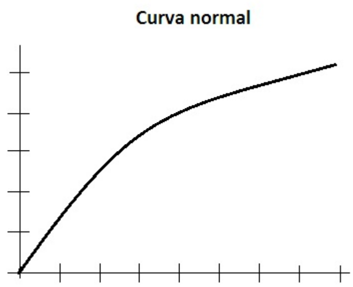
Lo anterior da cabida a la famosa curva de tasas de interés la cual establece una tasa de rendimiento para cada plazo, dadas las variaciones en el mercado para cada día pues las tasas de interés se ven afectadas (Riesgo de Mercado).

Dado lo anterior, y tomando en cuenta lo estudiado sobre este tema en capítulos anteriores, existe una curva para cada día de cotización y va cambiando conforme a las condiciones del mercado, por ejemplo:

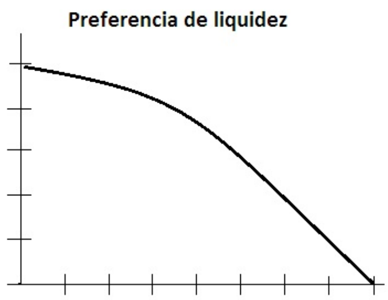
Días	28	91	157	304
07/05/16	10 %	12 %	14 %	16 %
09/05/16	10.2 %	12.2 %	14.2 %	16.2 %

Dado el comportamiento que pueden presentar los rendimientos con el paso de tiempo se han definido diferentes teorías para representarlos:

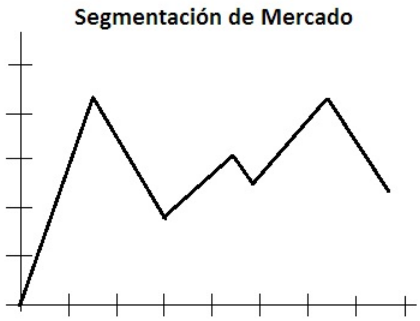
Curva bajo expectativas puras o curva normal: Es común que en el mercado de los inversionistas esperen un mayor rendimiento a mayor plazo que a menor plazo.



Preferencia de liquidez: De igual forma puede esperarse que haya mayor rendimiento en el corto plazo, es decir, mayor liquidez en corto plazo.

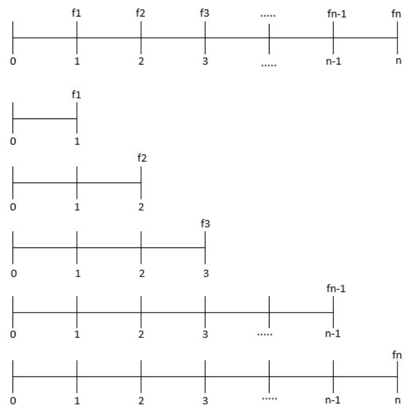


Segmentación de Mercado: en el mercado existen altas y bajas de rendimiento en diferentes periodos.



Dado lo revisado en capítulos anteriores, la curva de tasas debe reflejar el comportamiento del mercado, para ello es necesario buscar instrumentos que reflejen dicho comportamiento.

Teóricamente dos instrumentos con el mismo plazo deberían tener el mismo rendimiento, en la práctica no resulta de esta forma, dada la incidencia de flujos intermedios. Por esto es necesario buscar instrumentos sin dichos flujos. Los instrumentos que respetan esta descripción son los Bonos Cupón Cero (BCC). Todo instrumento que pague flujos intermedios puede descomponerse en BCCs.



$$\sum_{k=1}^{n} V^k f_k = \sum_{k=1}^{n} P_{B.C.C_k}$$

4.2.2. Ley de un solo precio

La ley de un solo precio indica que cualquier instrumento que represente una serie de flujos periódicos puede descomponerse en una serie de Bonos Cupón Cero (BCC). Cada BCC debe tener una tasa de descuento asociada para cualquier V.P (Valor Presente) de los nominales, y es por esto que surge el conjunto $\{r_0(t)\}_{t>0}$ para un plazo t (tasa cero o cupón cero). Los B.C.C más utilizados son los del Gobierno Federal dada su alta liquidez y su bajo riesgo.

Ejemplo

Calcular el precio de un Bono que paga cupones anuales del 10 % con un valor de redención de \$100.00 y con una madurez de 4 años. Utiliza la siguiente curva de tasas para calcular el precio del instrumento.

Año	1	2	3	4
i	5 %	6 %	7 %	8 %

Solución

Datos
F=N=100
n=4
c=10 %=0.10
C=10

Procedimiento
$P = 10(1.05)^{-1} + 10(1.06)^{-2} + 10(1.07)^{-3} + 110(1.08)^{-4} = 107.44$

Ejemplo

Calcular el precio de un Bono que paga cupones semestrales del 10 % con un valor de redención de \$100.00 y con una madurez de 2 años. Utiliza la siguiente curva de tasas para calcular el precio del instrumento.

Semestre	1	2	3	4
i	3 %	4 %	5 %	6 %

Solución

Datos
F=N=100
n=4
c=$\frac{0.10}{2}$=0.05
C=5

Procedimiento
$P = 5(1.015)^{-1} + 5(1.02)^{-2} + 5(1.025)^{-3} + 105(1.03)^{-4} = 107.66$

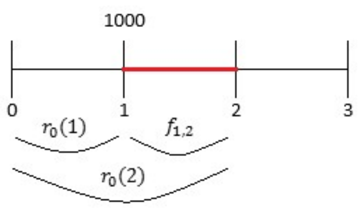
4.2.3. Tasa Forward

Ejemplo

Al igual que en capítulos anteriores se retomará el concepto de tasa forward. Supóngase que se desea invertir durante un año \$1,000 dentro de un año con la siguiente curva de tasas.

Año	1	2	3	4
i	3 %	4 %	5 %	6 %

Solución

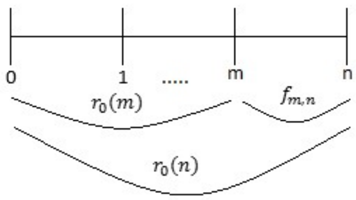


$$(1 + r_0(2))^2 = (1 + r_0(1))(1 + f_{1,2})$$
$$(1 + 0.04)^2 = (1 + 0.03)(1 + f_{1,2})$$
$$\frac{(1.04)^2}{1.03} - 1 = f_{1,2} = 5.009\,\%$$

$f_{1,2}$ es la tasa forward (tasa futura) que aplica dentro de un año para un periodo de un año.

$\Rightarrow 1,000(1 + 0.05009)^1 = 1,050.09$

Generalizando la tasa forward se tiene que $f_{n,m}$ es la tasa futura que aplica dentro de m periodos para un plazo de n-m periodos.



$$(1 + r_0(n))^n = (1 + r_0(m))^m(1 + f_{m,n})^{n-m}$$
$$[\frac{(1 + r_0(n))^n}{(1 + r_0(m))^m}]^{\frac{1}{n-m}} - 1 = f_{m,n}$$

Para interés continuo se tiene:

$$e^{r_0(n)n} = e^{r_0(m)m}e^{f_{m,n}(n-m)}$$
$$e^{r_0(n)n} = e^{r_0(m)m+f_{m,n}(n-m)}$$
$$r_0(n)n = r_0(m)m + f_{m,n}(n - m)$$
$$\frac{r_0(n)n - r_0(m)m}{n - m} = f_{m,n}$$

Ejemplo

Se invierten durante un año $1000.00 dentro de dos años con la siguiente curva de tasa, ¿cuál es el monto que se tiene al final del periodo?.

Año	1	2	3
i	1 %	2 %	3 %

Solución

$f_{2,3} = \frac{3r_0(3)-2r_0(2)}{3-2}$

$3(0.03) - 2(0.02) = 5\,\%$

$1,000e^{0.05} = 1,051.26$

4.2.4. Bootstrapping

En ocasiones resulta que el mercado proporciona estructuras de tasas de interés para ciertos plazos, pero en la práctica ocurre que es necesario estimar el rendimiento para un plazo desconocido en específico. Para resolver esta problemática existen diversos métodos de interpolación y extrapolación pero, en primera instancia, es de vital importancia que la curva de tasas refleje el comportamiento del mercado, lo cual puede resolverse utilizando la metodología de Bootstrapping que utiliza las cotizaciones más líquidas en el mercado para obtener rendimientos para diferentes plazos. En la práctica se utilizan bonos y algunos instrumentos derivados como Futuros y Swaps o tasas de mercado de contado, como tasas de fondeo bancario o tasas overnight.

Suponga que se tiene la curva de tasas de interés $\{r_0(t_n) : t_n > 0\}$ y se desconoce solamente el rendimiento a plazo m. Por otra parte, supóngase también que existe en el mercado un bono cuponado a con madurez n ¿m, precio P y flujos pagaderos F_k, donde F_n contempla el pago de la redención. Utilizando Bootstrapping, la ley de un solo precio indica que el bono puede ser descompuesto en un portafolio de BCC y utilizando la curva de tasas es posible valuar cada BCC de la forma siguiente:

$$P = F_1[1+r_0(t_1)]^{-t_1} + F_2[1+r_0(t_2)]^{-t_2} + ... + F_m[1+r_0(t_m)]^{-t_m} + ... + F_n[1+r_0(t_n)]^{-t_n}$$

Y si solamente se desconoce $r_0(t_m)$ y el precio P está dado por el mercado, es posible despejar la tasa requerida:

$$r_0(t_m) = \left[\frac{F_m}{P - (\sum_{k=1}^{m-1} F_k[1+r_0(t_k)]^{-t_k}) - (\sum_{k=m+1}^{n} F_k[1+r_0(t_k)]^{-t_k})}\right]^{1/t_m} - 1$$

De esta forma se obtiene el rendimiento para cierto plazo m y se preserva la estructura del mercado.

Ejemplo:

Se muestra la siguiente curva de tasas de interés anuales efectivas:

t	$r_0(t)$
1	6 %
2	¿?
3	8.5 %

Por otra parte, existe un bono bastante líquido con las especificaciones siguientes:

Precio	104.26
Cupón	10 % anual
Nominal	100
Pago de cupón	Anual durante 3 años

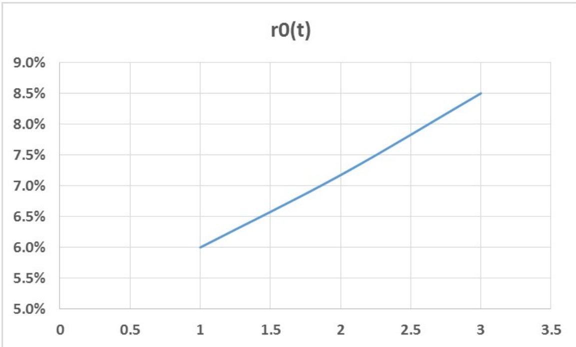
Utilizando Boostrapping para hallar $r_0(2)$ se tiene:

$$r_0(2) = \left[\frac{10}{104.26 - 10[1+6\,\%]^{-1} - 110[1+8.5\,\%]^{-2}}\right]^{1/2} - 1 = 7.173\,\%$$

Por lo que la curva completa es:

t	$r_0(t)$
1	6 %
2	7.173 %
3	8.5 %

La cual se muestra bajo "expectativas puras":



Ejemplo

Se muestra la siguiente curva de tasas de interés anuales con capitalización semestral:

t (semestral)	$r_0(t)$ anual cap/sem
1	5 %
2	6.42 %
3	¿?

Por otra parte, existe un bono bastante líquido con las especificaciones siguientes:

Precio	114.3
Cupón	16 % anual
Nominal	100
Pago de cupón	Semestral durante año y medio

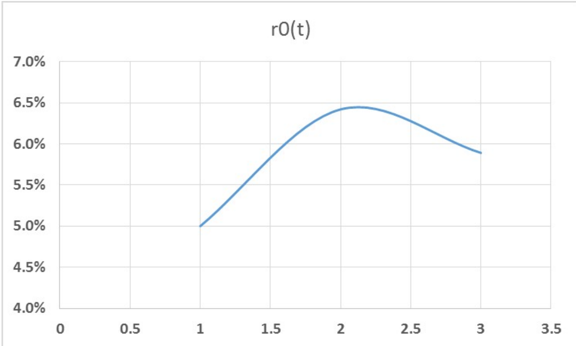
Es de tomarse en cuenta que la capitalización es semestral, por lo que, para la valuación del instrumento, es necesario partir las tasas. Entonces, utilizando Boostrapping para hallar $r_0(3)$ se tiene:

$$\frac{r_0(3)}{2} = \left[\frac{108}{114.3 - 8[1+\frac{5\,\%}{2}]^{-1} - 8[1+\frac{6.45\,\%}{2}]^{-2}}\right]^{1/3} - 1 = 0.02948$$
$$r_0(3) = 0.02948(2) = 5.891\,\%$$

Por lo que la curva completa es:

t (semestral)	$r_0(t)$ **anual cap/sem**
1	5 %
2	6.42 %
3	5.891 %

La cual se muestra bajo "segmentación de mercado":



4.2.5. Interpolación lineal

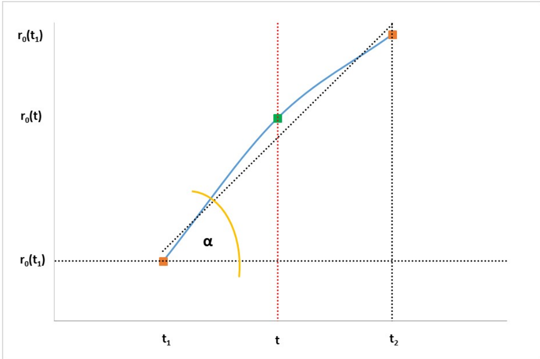
Haciendo un breve resumen, la curva de tasas está construida a partir de tasas spot, las cuales indican el rendimiento para cada plazo. En general, en el mercado se presentan curvas con nodos específicos. Por ejemplo se presenta la siguiente curva de tasas.

t	$r_0(t)$
28	3.82 %
91	3.97 %
182	4.06 %
364	4.15 %

Esta curva proporciona las tasas spot de 0 a 28, de 0 a 91, de 0 a 182 y de 0 a 364. Si se desea obtener tasas de 28 a 91, de 28 a 364 o de 91 a 364 es claro que se trata de tasas futuras, es decir, tasas forward, pero ¿qué pasa si se desea obtener la tasa de 0 a 20, de 0 a 100 o de 0 a 300 o por ejemplo si se desea obtener la tasa forward de 27 a 93?. Para este último caso es necesario conocer las tasas spot de 0 a 27 y de 0 a 93.

En el tema anterior se estudió la metodología Bootstrapping, la cual funciona para obtener las tasas faltantes en la curva siempre y cuando existan instrumentos líquidos que permitan reflejar el comportamiento de la curva en el mercado, pero una vez que se han terminado las posibilidades de instrumentos para aplicar el Bootstrapping es posible recurrir a alguna técnica de interpolación, la lineal por ejemplo.

Sea $r_0(t)$ la tasa spot desconocida dentro de un intervalo $(r_0(t_1), r_0(t_2))$ en donde $r_0(t_1)$ y $r_0(t_2)$ son conocidas , por lo que gráficamente se puede observar:



Marcando una linea recta sobre la curva y utilizando semejanza de triángulos, es fácil deducir que la tangente del ángulo para los dos triángulos generados satisface:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{r_0(t) - r_0(t_1)}{t - t_1} = \frac{r_0(t_2) - r_0(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por lo tanto la tasa spot buscada esta dada por:

$$r_0(t) = (\frac{r_0(t_2) - r_0(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1)) + r_0(t_1)$$

Cabe mencionar que mientras más reducido sea el intervalo sea el intervalo entre $r_0(t_1)$ y $r_0(t_2)$, mejor será la estimación de $r_0(t)$.

Ejemplo

Encontrar la tasa spot de 0 a 70.

Solución

$r_0(28) = 0.0382$
$r_0(91) = 0.0397$

$$r_0(70) = (\frac{0.0397 - 0.0382}{91 - 28}(70 - 28)) + 0.0382) = 0.0392$$

Ejemplo:

Se muestra la siguiente curva de tasas de interés anuales efectivas:

T años	$r_0(t)$ **anual**
1	6 %
2	6.7 %
3	¿?
4	¿?

Por otra parte, existe un bono bastante líquido con las especificaciones siguientes:

Precio	119.17
Cupón	12 % anual
Nominal	100
Pago de cupón	Anual durante 4 años

Nótese que en la curva faltan los dos últimos nodos. Es posible utilizar Bootstrapping con el bono de la siguiente forma:

Dada la valuación con la curva, se tiene:

$$119.17 = 12[1+6\,\%]^{-1} + 12[1+6.4\,\%]^{-2} + ... + 12[1+r_0(3)]^{-3} + ... + 112[1+r_0(4)]^{-4}$$

Por lo que se tiene una ecuación con dos incógnitas $r_0(3)$ y $r_0(4)$ pero es posible suponer a $r_0(4)$ fija e interpolar a $r_0(3)$ en el intervalo ($6.7\,\%$, $r_0(4)$), de la siguiente forma:

$$r_0(3) = r_0(2) + (3-2)(\frac{r_0(4) - r_0(2)}{4-2}) = 6.7\,\% + (\frac{r_0(4) - 6.7\,\%}{2})$$

Expresión que puede sustituirse en el precio del bono para $r_0(3)$:

$$119.17 = 12[1{+}6\,\%]^{-1}{+}12[1{+}6.4\,\%]^{-2}{+}...{+}[1{+}[6.7\,\%{+}(\frac{r_0(4) - 6.7\,\%}{2})]]^{-2}{+}...{+}112[1{+}r_0(4)]^{-4}$$

Por lo que ahora se tiene una ecuación con incógnita $r_0(4)$, para la cual, resolviendo, se tiene $r_0(4)$=6.40 %, por lo que en la interpolación:

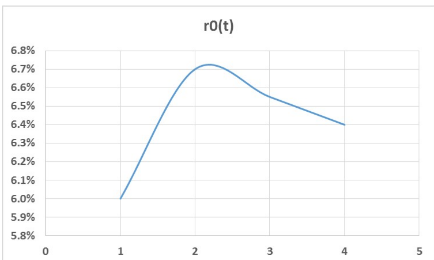
$$r_0(3) = 6.7\,\% + (\frac{6.\,\% - 6.7\,\%}{2}) = 6.55\,\%$$

Nótese que si resulta complicado despejar la tasa requerida dentro de la ecuación del Bootstrapping, resulta de gran ayuda utilizar algún método numérico o computacional.

Así la construcción de la estructura de tasas de interés es:

T años	$r_0(t)$ **anual**
1	6.00 %
2	6.70 %
3	6.55 %
4	6.40 %

La cual se muestra bajo "segmentación de mercado":



4.2.6. Interpolación alambrada

Una técnica alternativa a la interpolación lineal es la interpolación alambrada, la cual utiliza como esencia la equivalencia de tasas estudiada en capítulos anteriores. Recodando la equivalencia para dos tasas anuales capitalizables m y n veces al año se tiene:

$$(1+\frac{r^{(m)}}{m})^{m}=(1+\frac{r^{n}}{n})^{n}$$

Entonces, si deseamos estimar r0(t), dentro del intervalo $(r_0(t_1), r_0(t_2))$ donde t_1 y t_2 están dados en días y considerando un año de 360 días, se debe satisfacer:

$$(1+r_0(t_1)\frac{t_1}{360})^{\frac{360}{t_1}}=(1+r_0(t)\frac{t}{360})^{\frac{360}{t}}$$

Despejando $r_0(t)$:

$$r_0(t)=[(1+r_0(t_1)\frac{t_1}{360})^{\frac{t}{t_1}}-1]\frac{360}{t}$$

De forma similar, para la equivalencia entre $r_0(t)$ y $r_0(t_2)$ se tiene:

$$r_0(t)=[(1+r_0(t_2)\frac{t_2}{360})^{\frac{t}{t_2}}-1]\frac{360}{t}$$

El método de la alambrada promedia entonces ambas igualdades para $r_0(t)$:

$$r_0(t)=(1-\frac{t-t_1}{t_2-t_1})[(1+r_0(t_1)\frac{t_1}{360})^{\frac{t}{t_1}}-1]\frac{360}{t}+(\frac{t-t_1}{t_2-t_1})[(1+r_0(t_2)\frac{t_2}{360})^{\frac{t}{t_2}}-1]\frac{360}{t}$$

Donde los ponderadores $1-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ y $(\frac{t-t_1}{t_2-t_1})$ resultan ser la distancia entre las tasas conocida y no conocida respecto a la distancia entre las tasas conocidas (extremos del intervalo).

Es importante recordar que al encontrar $r_0(t)$, es necesario regresarla a la capitalización original de la curva de tasas inicial (tenor), pues la técnica de la alambrada arroja la tasa anual resultante bajo una capitalización nominal cada t días.

Ejemplo:

Se muestra la siguiente curva de tasas de interés anuales con capitalización semestral (tenor semestral):

t (semestres)	$r_0(t)$ **anual cap/sem**
1	5.0 %
2	¿?
3	6.8 %

Es importante definir los nodos en días:

t (semestres)	$r_0(t)$ **anual cap/sem**
180	5.0 %
360	¿?
540	6.8 %

Utilizando la técnica de la alambrada para hallar $r_0(2) \approx r_0(360)$:

$$r_0(360) = (1-\frac{360-180}{540-180})[(1+5\,\%\frac{180}{360})^{\frac{360}{180}}-1]\frac{360}{360}+(\frac{360-180}{540-180})[(1+6.8\,\%\frac{540}{360})^{\frac{360}{540}}-1]\frac{360}{360}$$

$$r_0(360) = (\frac{1}{2})[(1+5\,\%\frac{1}{2})^2-1]+(\frac{1}{2})[(1+6.8\,\%\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}-1] = 5.876\,\%$$

Pero este rendimiento capitaliza cada 360 días (es una tasa anual efectiva), por lo que es necesario transformarla al tenor de la curva original, es decir, a una capitalización semestral (cada 180 días), por lo que se debe satisfacer:

$$(1+5.876\,\%\frac{360}{360})^{\frac{360}{360}} = (1+r_0(360)\frac{180}{360})^{\frac{360}{2}}$$
$$\Rightarrow\ (1+5.876\,\%) = (1+\frac{r_0(360)}{2})^2$$

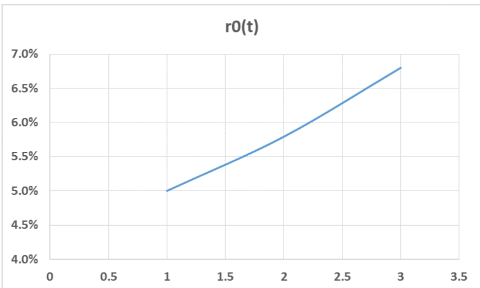
Donde se visualiza de mejor manera que la tasa que se busca tiene capitalización semestral. Al final:

$$r_0(360) = [(1+5.876\,\%)^{\frac{1}{2}}-1]2 = 5.792\,\%$$

Por lo que la curva completa original es:

t (semestres)	$r_0(t)$ **anual cap/sem**
1	5.0 %
2	5.792 %
3	6.8 %

La cual se muestra bajo “expectativas puras”:



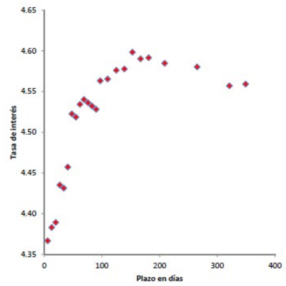
4.2.7. Splines cúbicos

Aunque la interpolación se presentó para obtener tasas para descontar flujos intermedios, esto en ningún modo es limitativo. De hecho, el Bootstrap únicamente obtendrá la tasa para ciertos plazos o nodos.

Uno de los objetivos de la curva es descontar un flujo a cualquier plazo, por ello, será necesario interpolar entre nodos con alguna técnica, que hasta el momento se han tratado la lineal y la alambrada.

Nótese que ambos métodos de interpolación generan curvas segmentadas y en el bootstrap la curva obtenida arrojará tasas que coinciden con observaciones de mercado, situación que puede no ser siempre factible o deseable. Así, otra alternativa es generar una curva que aproxime de la mejor forma las observaciones de mercado.

Considere el siguiente caso:



Un método que ofrece una mejor interpolación es el de los splines, pues ajusta funciones por tramos para generar la curva más "suave" o de menor variación, que cumpla con ciertas restricciones.

Primeramente, es necesario definir un criterio de "suavidad":

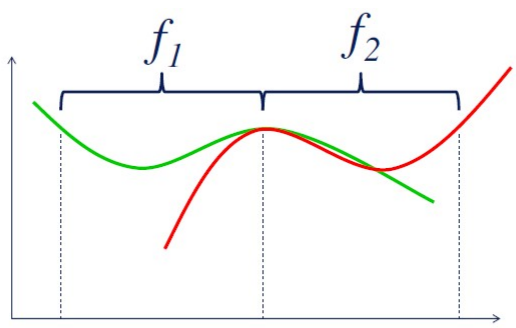
$$S = \int_{x_0}^{x_1} [f''(x)]^2 \partial x$$

Entre más "suave sea la función f, menor será su coeficiente asociado s. Nótese que esto implica que la función más "suave" sin restricciones entre dos puntos es una recta.

Por otra parte, es deseable tener una función continua y diferenciable, por lo que esto impondrá ciertas restricciones sobre el spline que se formará mediante segmentos de polinomios entre cada par de puntos.

En la práctica los spline de grado 3 (cúbico) funcionan de manera adecuada para curvas de tasas spot y al trabajar con tasas forward es preferible utilizar polinomios de grado 4, esto ya que los movimientos de las tasas futuras resultan ser mucho más bruscos que los de las tasas spot.

Luego, el polinomio de tercer grado estará confinado al intervalo sobre el que se ajusta:



Metodología de splines cúbicos

Supóngase que se desea generar una curva utilizando un spline cúbico con $n+1$ observaciones, es decir, $r_0, r_1, r_2, ..., r_n$ en los tiempos $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$.

Entonces, el spline cúbico obtendrá un polinomio para cada segmento $[t_i, t_{i-1}]$.

Las condiciones necesarias para la construcción del spline son las siguientes:

- La curva debe pasar por cada nodo.
- Las primeras y segundas derivadas deben de coincidir entre segmentos.

Entonces, para la construcción de la curva matemáticamente se tendrán $2n$ ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r(t_i) &= a_i + b_i t_i + c_i t_i^2 + d_i t_i^3 \qquad i = 1, ..., n \\ rt - 1 &= a_i + b_i t_{i-1} + c_i t_{i-1}^2 + d_i t_{i-1}^3 \qquad i = 0, ..., n-1 \end{aligned}$$

Después, igualando las primeras derivadas se obtienen $n-1$ ecuaciones

$$b_i + 2c_i t_i + 3d_i t_i^2 - b_{i+1} - 2c_{i+1} t_i - 3d_{i+1} t_i^2 = 0 \qquad i = 1, ..., n-1$$

Igualando las segundas derivadas se tiene:

$$2c_i + 6d_i t_i - 2c_{i+1} - 6d_{i+1} t_i = 0 \qquad i = 1, ..., n-1$$

Finalmente, se obtienen $4n-2$ ecuaciones con $4n$ incógnitas de las cuales para poder completar el sistema de ecuaciones es necesario agregar las siguientes restricciones:

- En el lado izquierdo de la curva, se asume que la segunda derivada es cero

$$2c_1 + 6d_1 t_0 = 0$$

- Del lado derecho se puede hacer alguna de las siguientes dos restricciones:

  1. La curva se supone plana, es decir, primera derivada en cero

  $$b_n + 2c_n t_n + 3d_n t_n^2 = 0$$

  2. La segunda derivada se hace cero

  $$2c_n + 6d_n t_n = 0$$

Ejemplo:

Se tiene la siguiente estructura de tasas de interés:

Segmento	Plazo Días t	$r_0(t)$ anual
0	1	3.0766 %
1	83	3.3719 %
2	356	3.4987 %
3	720	4.2946 %
4	1266	3.4707 %

Nótese que se tienen 5 nodos, lo cual generará 5 segmentos para la curva de tasas, por lo que es posible ajustar 4 polinomios de grado 3 y así obtener tasas de interés para cualquier plazo de 1 hasta 1,266 días.

Dado lo anterior, se deben tener 16 ecuaciones con 16 incógnitas (4 coeficientes por cada polinomio). Dada la metodología planteada anteriormente, de forma matricial se tiene el siguiente sistema (matroide):

		Polinomio 1				Polinomio 2				Polinomio 3				Polinomio 4							
Plazo t		a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	Coef.			
1	Ecuaciones 1-8	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	Polinomio 1		3.0766%
83		1	83	6,889	571,787	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b			3.3719%
83		0	0	0	0	1	83	6889	571787	0	0	0	0	0	0	0	0	c			3.3719%
356		0	0	0	0	1	356	126736	45118016	0	0	0	0	0	0	0	0	d			3.4987%
356		0	0	0	0	0	0	0	0	1	356	126736	45118016	0	0	0	0	a	Polinomio 2		3.4987%
720		0	0	0	0	0	0	0	0	1	720	518400	3.73E+08	0	0	0	0	b			4.2946%
720		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	720	518400	373248000	c			4.2946%
1,266		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1266	1602756	2029089096	d			3.4707%
83	Primera derivada	0	1	166	20667	0	-1	-166	-20667	0	0	0	0	0	0	0	0	a	Polinomio 3	=	0
356		0	0	0	0	0	1	712	380208	0	-1	-712	-380208	0	0	0	0	b			0
720		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1440	1555200	0	-1	-1440	-1555200	c			0
83	Segunda derivada	0	0	2	498	0	0	-2	-498	0	0	0	0	0	0	0	0	d			0
356		0	0	0	0	0	0	2	2136	0	0	-2	-2136	0	0	0	0	a	Polinomio 4		0
720		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4320	0	0	-2	-4320	b			0
1	Ext. Izq	0	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c			0
1,266	Ext. Der	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	7596	d			0

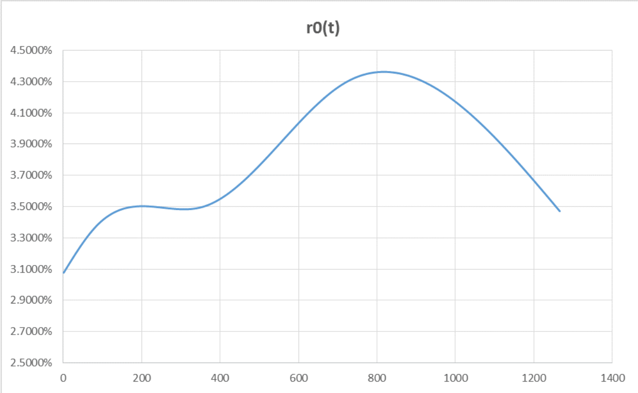
Con solución:

Solución		
0.03072533107	a	Polinomio 1
0.00004068641	b	
0.00000000209	c	
-0.00000000070	d	
0.03013807770	a	Polinomio 2
0.00006191244	b	
-0.00000025365	c	
0.00000000033	d	
0.05258536963	a	Polinomio 3
-0.00012725013	b	
0.00000027771	c	
-0.00000000017	d	
-0.02785137713	a	Polinomio 4
0.00020790298	b	
-0.00000018778	c	
0.00000000005	d	

			Coeficientes de los polinomios spline			
	t Inicial	t Final	a	b	c	d
Segmento 1	1	83	0.03072533107	0.00004068641	0.00000000209	-0.00000000070
Segmento 2	83	356	0.03013807770	0.00006191244	-0.00000025365	0.00000000033
Segmento 3	356	720	0.05258536963	-0.00012725013	0.00000027771	-0.00000000017
Segmento 4	720	1266	-0.02785137713	0.00020790298	-0.00000018778	0.00000000005

Entonces, para obtener el rendimiento para algún plazo dentro del intervalo (1,83) se utilizará el polinomio 1, para plazos de 83 a356 el polinomio 2, de 356 a720 el polinomio

3 y de 720 a 1266 el polinomio 4. Por lo que valuando y graficando se obtiene una curva más suave que la del inicio:



La cual se muestra bajo segmentación de mercado.

4.3. Teoría del Portafolio

En el capítulo anterior se tuvo un acercamiento a la Teoría del Portafolio, en el cual se definieron conceptos de relevancia para analizar a detalle este tema.

Cabe mencionar que la idea es analizar el comportamiento esperado de una cartera o portafolio, dados sus parámetros de rendimiento y riesgo.

Existen dos tipos de análisis para un portafolio, el análisis técnico y fundamental, uno basado en métodos matemáticos y cuantitativos y por otra parte el otro método se basa en una historia, trayectoria y condiciones políticas y económicas.

La teoría del portafolio se basa en un análisis técnico para el desarrollo de una buena inversión, y da respuesta para una correcta toma de decisión al momento elaborar un portafolio.

4.3.1. Medidas Cuantitativas

Vale la pena recordar los siguientes conceptos estadísticos y de probabilidad:

Sea $r_1, r_2, ..., r_n$ una muestra aleatoria.

Entonces el estimador insesgado para la media es:

$$E[\widehat{\theta}] = \theta$$

Estimador de la media:

$$r = \frac{\sum r_k}{n}$$

Estimado insesgado de la varianza y desviación estándar:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (r_k - \overline{r})^2}{n-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (r_k - \overline{r})^2}{n-1}}$$

Covarianza:

$$\sigma_{ij} = \sum \frac{(r_{ik} - \overline{r_i})(r_{jk} - \overline{r_j})}{n-1}$$

Coeficientes de correlación:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$\Rightarrow \varphi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

$-1 \leq \varphi_{ij} \leq 1$ Sirve como criterio para elegir parejas entre activos.

4.3.2. Definición del Portafolio

$$P = w_1A_1 + w_2A_2 + ... + w_nA_n$$

Activos que conforman el portafolio$=A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Precio de los activos del portafolio=$P_1, P_2, P_3, ..., P_n$.

Numero de acciones de los activos=$N_1, N_2, N_3, ..., N_n$.

El valor del portafolio está dado por:

$$\$P = \sum_{k=1}^{n} P_k N_k$$

La cantidad invertida en cada activo es $P_k N_k$.

La proporción (peso) invertida e cada activo respecto al valor total del portafolio es:

$$w_k = \frac{P_k N_k}{\$P}$$

$\Rightarrow w_k$ porcentaje de dinero de cada activo invertido en el portafolio.

¿Qué es el rendimiento?

El rendimiento se visualiza como una expectativa del cambio en los precios de mercado ya sea a la alza o a la baja, si se dice que el rendimiento es una expectativa la pregunta que surge es ¿Cómo estimar el rendimiento?.

Bajo capitalización discreta (compuesta) en un periodo se tiene lo siguiente:

$$P_{t+1} = P_t(1 + r)$$

Entonces P_t es el precio al tiempo t, r el rendimiento generado después de un periodo.

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &= \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 \\ &= \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \end{aligned}$$

Para n periodos se tiene:

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{t+h} &= P_t(1 + r) \\ r &= \frac{P_{t+n}}{P_t} - 1 \end{aligned}$$

Para interés continuo se tiene:

$$\begin{aligned} P_{t+n} &= P_t e^r \\ r &= ln(\frac{P_{t+n}}{P_t}) \end{aligned}$$

Los activos cambian de valor en cada momento, es por ello que el mejor modelo para estimar rendimientos es el continuo.

Ejemplo

P_{t+1} =\$10
P_t =\$9.50

Caso discreto

$r = \frac{10-9.50}{9.50} = 0.052$ =5.2 %

Caso continuo

$r = ln(\frac{10}{9.50})$=0.051=5.1 %

Nótese que la diferencia de la estimación es marginal, pero ahora se tiene lo siguiente:

P_{t+30} =\$20
P_t=\$15

Caso discreto

$r = \frac{20-15}{15}$ =.33=33 %

Caso continuo

$r = ln(\frac{20}{15})$=0.28=28 %

Lo que sugiere que resulta una mejor estimación utilizar el log-rendimiento si los periodos de cotización son cortos, por ejemplo diario o semanal.

Por otra parte, si r es una expectativa entonces puede verse como una variable aleatoria.

Entonces, sea R la v.a que define el rendimiento de un activo.

$$\Rightarrow E(R) = r$$

El mejor estimador para r es la media muestral.

$$r = \sum_{t=1}^{n} \frac{ln(\frac{P_{t+1}}{P_t})}{n}$$

Ahora, ya es de saberse que la volatilidad del activo (riesgo del activo) se caracteriza por el segundo momento de la v.a R.

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_t - r)^2}{n-1}$$

Entonces la volatilidad (riesgo) es:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{(R_t - r)^2}{n-1}}$$

4.3.3. Teoría del Portafolio para n activos

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ activos para constituir una cartera.

$$\Rightarrow P = \sum_{k=1}^{n} w_k A_k$$

Entonces el rendimiento del portafolio es la v.a definida por:

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} w_k R_k$$

Entonces el rendimiento esperado de nuestro portafolio esta dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(R_P) = \widehat{r}_P &= \sum_{k=1}^{n} w_k E(R_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k \widehat{r}_k \\ &= w^T \mu \end{aligned}$$

en donde

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{bmatrix}$$

La volatilidad del portafolio está dado de la siguiente forma:

$$\sigma_p^2 = E[(r_p - \widehat{r}_p)^2] = E[(\sum_{i=1}^{n} w_k r_k - \sum_{j=1}^{n} w_k \widehat{r}_k)^2]$$

$$= E[(\sum_{i=1}^{n} w_k r_k - \sum_{i=1}^{n} w_k \widehat{r}_k)(\sum_{j=1}^{n} w_k r_k - \sum_{j=1}^{n} w_k \widehat{r}_k)]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} w_k (r_k - \widehat{r}_k) \sum_{j=1}^{n} w_k (r_k - \widehat{r}_k)]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_k w_k (r_k - \widehat{r}_k)(r_k - \widehat{r}_k)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_k w_k E[(r_k - \widehat{r}_k)(r_k - \widehat{r}_k)]$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Matricialmente se puede obtener de la siguiente manera:

$$\sigma_P^2 = w^T V w$$

Por lo tanto la volatilidad es:

$$\sigma_P = \sqrt{w^T V w}$$

En donde V es la matriz de covarianzas.

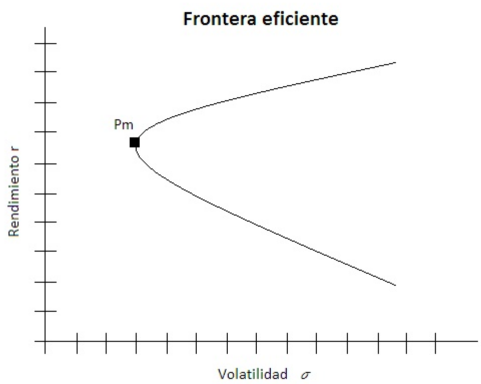
$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & . & . & . & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & . & . & . & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & . & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

4.3.4. El modelo de diversificación de Markowitz y la frontera eficiente

Un modelo de diversificación eficiente es aquel portafolio que maximiza la función de utilidad de un inversionista dentro de un conjunto factible del portafolio. Dicho conjunto es el vector W, el cual está construido por todos aquellos activos que cumplen con dos características importantes:

- Mínimo riesgo entre portafolios de igual rendimiento esperado.
- Máximo riesgo entre portafolios de igual riesgo.

La representación gráfica de este conjunto se le denomina frontera eficiente.



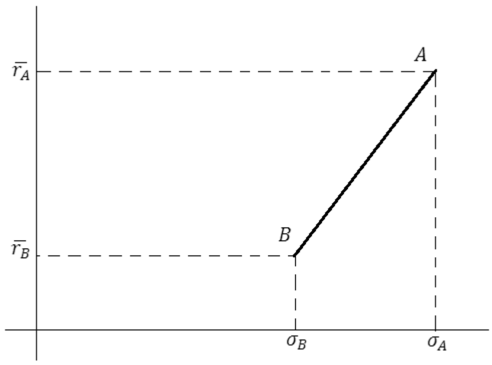
La forma de la frontera eficiente de portafolios depende de la correlación entre los retornos de los activos del portafolio.

Correlación perfectamente positiva

Supóngase que se tiene un portafolio de inversión el cual solo cuenta con dos activos A y B y además cada activo cuenta con una media y una volatilidad respectivamente las cuales cumplen con:

$$\varphi_{A,B} = 1$$

Por lo cual el conjunto factible de A y B cuando $\varphi = 1$ es:

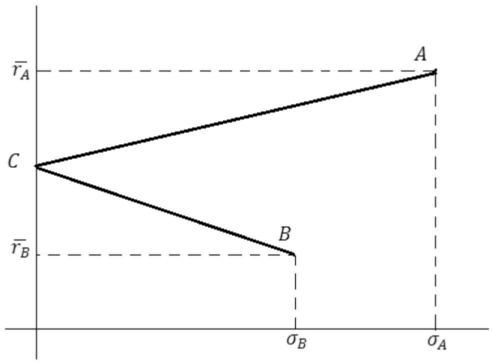


Correlación perfectamente negativa

Para este caso si se tiene un portafolio con dos activos A y B y se cumple la siguiente condición:

$$\varphi_{A,B} = -1$$

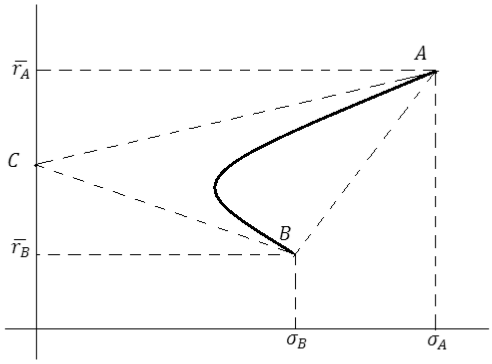
El conjunto factible de A y B cuando $\varphi = -1$ es:



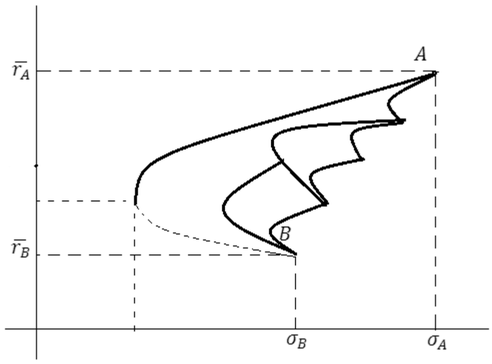
Cuando se tiene una correlación perfectamente negativa se dice que existe una diversificación útil ya que existen portafolios con menor y mayor retorno que el del activo B.

Correlación entre -1 y 1

Por lo regular cuando se tienen dos activos, el valor del coeficiente de correlación siempre se encontrara entre -1 y 1. Todos los portafolios creados a partir de diferentes activos estarán localizados dentro del triángulo comprendido por las dos gráficas anteriormente mostradas, entonces el conjunto factible es aquella hipérbola localizada dentro del triángulo.



Cuando se tiene más de dos activos para formar un portafolio el conjunto factible para formar la frontera eficiente quedará por completo dentro del área del triángulo teniendo una forma de sombrilla, cabe mencionar que el portafolio de mínimo y máximo rendimiento está construido solamente con el activo de mayor y menor retorno esperado ente todos los demás activos.



En general, se obtendrán infinitas combinaciones de activos y portafolios, generando como conjunto factible un área con forma de sombrilla. Los portafolios eficientes corresponderán a la frontera izquierda de dicha área, puesto que representan el mínimo riesgo para cada nivel de rendimiento.

4.3.5. Portafolio de Mínima varianza

El portafolio de mínima varianza es aquel portafolio que tiene el menor riesgo y para obtenerlo es necesario recurrir a los multiplicadores de Lagrange.

$$\text{Min } \sigma_P^2 = w^T V w - \lambda(w^T \mathit{1})$$

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial w} = 2Vw - \lambda \mathit{1} = 0$$

$$Vw = \frac{\lambda}{2}\mathit{1}$$

Sea $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$

$$Vw = \lambda' \mathit{1}$$

Entonces $\exists V^{-1}$

$$\Rightarrow w* = V^{-1}\lambda' \mathit{1} = \lambda' V^{-1}\mathit{1}$$

Sustituyendo w* en las restricciones.

$$\begin{aligned} w^T \mathit{1} &= (\lambda' V^{-1}\mathit{1})^T \mathit{1} = 1 \\ &= \lambda' \mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1} = 1 \\ &\Rightarrow \lambda' = \frac{1}{\mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1}} \end{aligned}$$

Sustituyendo λ' en $w*$

$$\Rightarrow w* = \lambda' V^{-1}\mathit{1} = \frac{V^{-1}\mathit{1}}{\mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1}}$$

Entonces el portafolio de mínima varianza o de mínimo riesgo está dado por:

$$P_m = \frac{V^{-1}\mathit{1}}{\mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{pmatrix} = w*$$

Ejemplo

A	r	σ	$\varphi_{1,2}$
1	5%	7%	0.8
2	7%	9%	

Solución

$\sigma_1^2 = (7\,\%)^2 = 0.0049$

$\sigma_2^2 = (9\,\%)^2 = 0.0081$

$\sigma_{12} = \varphi_{12}\sigma_1\sigma_2 = (0.8)(0.07)(0.09) = 00.00504$

$$V = \begin{pmatrix} 0.0049 & 0.00504 \\ 0.00504 & 0.0081 \end{pmatrix} \; V^{-1} = \begin{pmatrix} 566.89 & -352.73 \\ -352.73 & 342.93 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}\mathit{1} = \begin{pmatrix} 566.89 & -352.73 \\ -352.73 & 342.93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 214.1597 \\ -9.7981 \end{pmatrix}$$

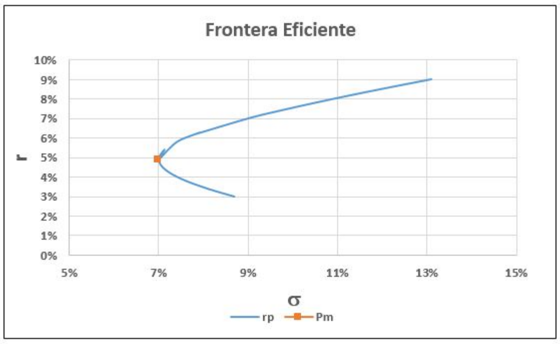
$$\mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1} = (11) \begin{pmatrix} 214.1597 \\ -9.7981 \end{pmatrix} = 204.3616$$

$$P_m = \frac{V^{-1}\mathit{1}}{\mathit{1}^T V^{-1}\mathit{1}} = \frac{1}{204.3616} \begin{pmatrix} 214.1597 \\ -9.7981 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0479 \\ -0.0479 \end{pmatrix}$$

$r_P = w^T\mu = (1.0479 - 0.479)\begin{pmatrix}5\,\%\\7\,\%\end{pmatrix}$=0.049=4.9 %

$\Rightarrow \sigma_P^2 = w^T V w = (1.0479 - 0.479)\begin{pmatrix}0.0049 & 0.00504\\0.00504 & 0.0081\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.0479\\-0.479\end{pmatrix}$=0.004885

$\Rightarrow \sigma_P = \sqrt{0.004885}$=0.06964=6.964 %



4.3.6. Portafolio de mínimo riesgo con rendimiento deseado

$$\text{Min } \sigma_P^2 = w^t V w$$
$$\text{s.a } w^t 1 = 1...(1)$$
$$w^t\mu = R...(2)$$

Incluyendo multiplicadores de Lagrange

$$\text{Min } \sigma_P^2 = w^t V w - \lambda(w^t 1 - 1) - \eta(w^t\mu - R)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial w} = 2Vw - \lambda 1 - \eta\mu = 0$$
$$\Rightarrow Vw - \lambda' 1 - \eta'\mu = 0$$

$\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ $\eta' = \frac{\eta}{2}$

$$\Rightarrow Vw = \lambda' 1 + \eta'\mu$$
$$\Rightarrow w^* = V^{-1}(\lambda' 1 + \eta'\mu)$$

Sustituyendo en (1)

$$[V^{-1}(\lambda' 1 + \eta'\mu)^t]1 = 1$$
$$\Rightarrow (\lambda' 1 + \eta'\mu)^t V^{-1} 1 = 1$$
$$\lambda' 1 V^{-1} 1 + \eta'\mu^t V^{-1} 1 = 1$$

$1^t V^{-1} 1 = A$; $\mu^t V^{-1} \mu = B$

Sustituyendo w^* en (2)

$$w^t \mu = R$$
$$(\lambda' 1 + \eta' \mu)^t V^{-1} \mu = R$$
$$\Rightarrow \lambda' 1^t V^{-1} \mu + \eta' \mu^t V^{-1} \mu = R$$

$1^t V^{-1} \mu = B$; $\mu^t V^{-1} \mu = C$

$$\begin{array}{ccccc} \lambda' A & + & \eta B & = & 1...(1) \\ \lambda' B & + & \eta C & = & R...(2) \end{array}$$

Despejando η de (1) y (2)

$$\eta = \tfrac{1-\lambda A}{B} \; ; \; \eta = \tfrac{R-\lambda B}{C}$$
$$\frac{1-\lambda A}{B} = \frac{R-\lambda B}{C}$$
$$\Rightarrow C(1-\lambda A) = B(R-\lambda B)$$
$$C - \lambda CA = BR - \lambda B^2$$
$$\lambda(B^2 - AC) = BR - C$$
$$\lambda = \frac{BR-C}{B^2-AC} = \frac{C-BR}{AC-B^2}$$

Entonces sustituyendo λ en η

$$\eta = \frac{1-\lambda A}{B} = \frac{1-(\frac{C-BR}{AC-B^2})A}{B} = \frac{AC-B^2-AC+ABR}{(AC-B^2)B} = \frac{AR-B}{C-B^2}$$
$$\Rightarrow w^* = \lambda' \frac{A}{A} V^{-1} 1 + \eta' \frac{B}{B} V^{-1} \mu$$
$$w^* = \lambda A \frac{V^{-1} 1}{\|^t \, V^{-1} 1} + \eta' B \frac{V^{-1}\mu}{\|^t \, V^{-1}\mu}$$

$\frac{V^{-1} 1}{1^t V^{-1} 1} = P_m$ Portafolio de mínimo riesgo.

$\frac{V^{-1} \mu}{1^t V^{-1} \mu} = P_\mu$ Portafolio Máximo cociente de Sharpe.

$$\Rightarrow \lambda' A + \eta B = (\frac{C-BR}{AC-B^2})A + (\frac{AR-B}{AC-B^2})B = 1$$
$$\Rightarrow \lambda' A = z$$
$$\eta' B = 1 - z$$
$$\Rightarrow w^* = zP_m + (1-z)P_\mu$$

Con este portafolio w^* es posible construir la frontera eficiente para más de dos activo.

$$w^*\mu = R$$
$$\sigma_P = \sqrt{w^{*t}V^{-1}w^*}$$

Por otra parte, el portafolio de máximo cociente de Sharpe es aquel que maximiza el cociente $\frac{r_P}{\sigma_P}$ para un portafolio por lo que se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\Rightarrow \quad Max\frac{w^t\mu}{\sqrt{w^tVw}} \qquad s.a \;\; w^t\mathit{1} = 1$$
$$H(w) = \frac{w^t\mu}{\sqrt{w^tVw}} + \lambda(w^t\mathit{1} - 1)$$
$$\frac{\partial H}{\partial w} = \mu(w^tVw)^{-\frac{1}{2}} - w^t\mu(w^tVw)^{-\frac{3}{2}}Vw + \lambda\mathit{1} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial w} = \mu(w^tVw)^{\frac{1}{2}} - w^t\mu(w^tVw)^{-\frac{1}{2}}Vw = -\lambda w^tVw\mathit{1} = 0$$

Multiplicando por w^t

$$w^t\mu(w^tVw)^{\frac{1}{2}} - w^t\mu(w^tVw)^{-\frac{1}{2}}w^tVw = -\lambda w^tVww^t\mathit{1}$$
$$0 = w^t\mu((w^tVw)^{\frac{1}{2}} - (w^tVw)^{\frac{1}{2}}) = -\lambda w^tVww^t\mathit{1}$$
$$\therefore \quad 0 = \lambda w^tVww^t\mathit{1} \quad \Rightarrow \lambda = 0$$
$$\Rightarrow \quad \mu(w^tVw)^{\frac{1}{2}} - w^t\mu(w^tVw)^{-\frac{1}{2}}Vw = 0 \quad ...(1)$$

Despejando w

$$Vw = \frac{\mu}{w^t\mu}(w^tVw) \quad \Rightarrow \quad w = \frac{V^{-1}\mu}{w^t\mu}(w^tVw)$$

Por otra parte de (1) multiplicando por $(w^tVw)^{\frac{1}{2}}$

$$\mu(w^tVw) - w^t\mu Vw = 0$$
$$\mu(w^tVw) = w^t\mu Vw$$
$$V^{-1}\mu(w^tVw) = w^t\mu w$$
$$\mathit{1}^tV^{-1}\mu(w^tVw) = w^t\mu\mathit{1}w = w^t\mu$$

$$\therefore \quad \frac{w^tVw}{w^tV} = \frac{1}{\mathit{1}^tV^1\mu}$$

$$\Rightarrow \quad w^* = \frac{V^{-1}\mu}{\mathit{1}^tV^{-1}\mu}$$

Ejemplo

Calcular el portafolio de Sharpe para los siguientes activos.

Activos	r_k	σ_k	$\varphi_{1,2}$
1	5%	0.08	0.6
2	7%	0.1	

Solución

La matriz de covarianzas asociada a los activos es:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.0048 \\ 0.0048 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de la matriz de covarianzas es:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 244.1406 & -117.1875 \\ -117.1875 & 156.25 \end{bmatrix}$$

Entonces, el portafolio deseado es:

$$V^{-1}\mu = \begin{bmatrix} 244.1406 & -117.1875 \\ -117.1875 & 156.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \\ 5.08 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{1}^t V^{-1}\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 244.1406 & -117.1875 \\ -117.1875 & 156.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = 9.08$$

$$\frac{V^{-1}\mu}{\mathit{1}^t V^{-1}\mu} = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Con el portafolio anterior construya el portafolio con un rendimiento esperado del 10 %, considerando el portafolio de mínima varianza y el máximo coeficiente de sharpe.

Solución:

$$P_m = \begin{bmatrix} 0.765 \\ 0.235 \end{bmatrix} \qquad P_\mu = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

$$A = \mathit{1}^t V^{-1} \mathit{1} = 166.0156 \quad B = \mathit{1}^t V^{-1}\mu = 9.0820 \quad C = \mu^t V^{-1}\mu = 0.5557$$

$$\lambda = \frac{C - BR}{AC - B^2} = -0.0361$$

$$P_R = \lambda A P_m + \eta B P_\mu = \begin{bmatrix} -1.50 \\ 2.50 \end{bmatrix}$$

4.3.7. Frontera eficiente de Markowitz con restricción de venta en corto

Al momento de construir la frontera eficiente de Markowitz y un portafolio optimo es muy común encontrarse con ponderadores negativos, es decir, los valores de algunas w_k pueden ser menores a cero, lo cual se puede interpretar como la necesidad de adquirir unidades negativas, esto se conoce como venta en corto.

Una venta en corto es cuando se toma a préstamo ciertas unidades de un activo para poder venderlas al precio de mercado y posteriormente adquirir dichas unidades a un precio más bajo, es evidente que en medio de este proceso puede existir un riesgo alrededor de los activos, se espera que los activos bajen de precio para poder obtener una ganancia pero de igual forma puede que el precio suba lo cual sería un pérdida, es por eso que se busca que dentro de la frontera eficiente no existan ponderadores negativos.

Entonces la función a maximizar tendrá ahora la restricción de que $w_k \geq 0$

$$\begin{gathered}
\text{Min } \sigma_P^2 = w^t V w \\
\text{s.a } \; w^t \mathit{1} = 1 \\
w^t \mu = R \\
w_k \geq 0
\end{gathered}$$

La solución a este problema no puede ser resulta a través de multiplicadores de Lagrange ya que la nueva condición es una desigualdad, se puede dar solución al problema por medio de cualquier método de optimización para desigualdades. Lo que se busca es un algoritmo que busque de manera iterativa vectores en donde todos los ponderadores sean positivos.

4.3.8. Teoría del Portafolio con activo libre de riesgo

En el mercado existen activos, los cuales garantizan pagos y no son sufren variaciones en sus parámetros de mercado. Por lo tanto son libres de riesgo de crédito y mercado. En México los instrumentos libres de riesgo por excelencia son los Cetes. Sea A_{r_f} el activo libre de riesgo con rendimiento A_{r_f} entonces $E(R_{r_f}) = r_f$ y varianza $\sigma^2(R_{r_f}) = 0$ ya que es libre de riesgo, por lo tanto $\sigma_{r_f} = 0$.

Por otra parte sea P el portafolio original con n activos riesgosos (acciones).

$$\Rightarrow P = \sum_{k=1}^{n} w_k A_k$$

Incluyendo al activo A_{rf} en el portafolio.

$$\begin{aligned}
P_{r_f} &= wA_{r_f} + (1-w)P \\
&= wA_{r_f} + (1-w)\sum_{k=1}^{n} w_k A_k \\
&= wA_{r_f} + \sum_{k=1}^{n}(1-w)w_k A_k = wA_{r_f} + \sum_{k=1}^{n} V_k A_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(R_{P_{r_f}}) = r_{r_f} = w_{r_f} + (1-w)r_P$$

$$\sigma^2(R_{P_{r_f}}) = \sigma_{r_f}^2 = w^2\sigma_{r_f} + (1-w)^2\sigma_P^2 + 2w(1-w)\sigma_{f,P}$$
$$= (1-w)^2\sigma_P^2$$
$$\Rightarrow \sigma_{r_f} = (1-w)\sigma_P$$
$$\Rightarrow (1-w) = \frac{\sigma_{r_f}}{\sigma_P}$$

Sustituyendo en el rendimiento.

$$r_{r_f} = w_{r_f} + (1-w)r_P$$
$$r_{r_f} = (1 - \frac{\sigma_{r_f}}{\sigma_P})r_f + \frac{\sigma_{r_f}}{\sigma_P}r_p = r_f - \frac{\sigma_{r_f,r_f}}{\sigma_P} + \frac{\sigma_{r_f r_p}}{\sigma_P}$$
$$= r_f + (\frac{r_p - r_f}{\sigma_P})\sigma_{r_f}$$

El coeficiente de Sharpe mide el rendimiento neto de los activos por cada unidad de volatilidad.

$$\Rightarrow m = \frac{r_p - r_f}{\sigma_P}$$

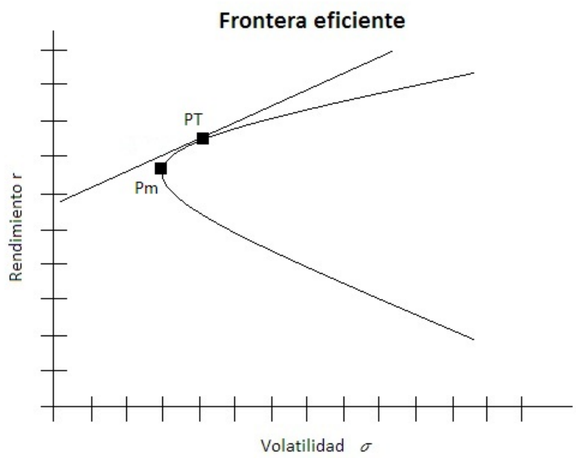
Entonces $r_{r_f} = r_f + m\sigma_{r_f}$ es la recta que define la nueva frontera eficiente, por lo tanto es necesario maximizar la pendiente, es decir, el cociente de Sharpe ajustado, pero ya existe el portafolio de Máximo cociente de Sharpe.

$$P_\mu = \frac{V^{-1}\mu}{\mathit{1}^t V^{-1}\mu}$$

Ajustando μ tenemos $F = \mu - r_f\mathit{1} = \begin{pmatrix} r_1 - r_f \\ r_2 - r_f \\ . \\ . \\ . \\ r_n - r_f \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_T = \frac{V^{-1}\mathit{1}}{\mathit{1}V^{-1}F} = \frac{r_p - r_f}{\sigma_P}$$

P_T es el portafolio de tangencia el cual maximiza el cociente de Sharpe ajustado, donde la existencia del activo libre de riesgo (punto donde se toca la nueva frontera eficiente y la anterior) P_T también es llamado Portafolio de mercado, y es el que todos los inversionistas buscan. Por lo tanto dada la existencia de activos libres de riesgo, los inversionistas tomaran decisiones a lo largo de la recta.



Ejemplo:

Calcule el Portafolio de Tangencia usando los activos del ejemplo anterior, grafique la recta tangente a la frontera eficiente, considere $r_f = 3\,\%$

Solución

Sea $r_f = 0.03$ F es:

$$F = \mu - r_f 1 = \begin{bmatrix} 0.05 - 0.03 \\ 0.07 - 0.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

Entonces, el Portfolio de Tangencia es;

$$V^{-1}F = \begin{bmatrix} 244.1406 & -117.1875 \\ -117.1875 & 156.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 3.91 \end{bmatrix}$$

$$1^t V^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 244.1406 & -117.1875 \\ -117.1875 & 156.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix} = 4.10$$

$$P_T = \frac{V^{-1}F}{1^t V^{-1}F} = \begin{bmatrix} 0.048 \\ 0.953 \end{bmatrix}$$

$$r_{P_T} = w^t \mu = \begin{bmatrix} 0.048 & 0.953 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = 0.069$$

$$\sigma_{P_T} = \sqrt{w^t V w} = \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.9524 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.0048 \\ 0.0064 & 0.0048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0476 \\ 0.9524 \end{bmatrix} = \sqrt{0.00952} = 0.0976$$

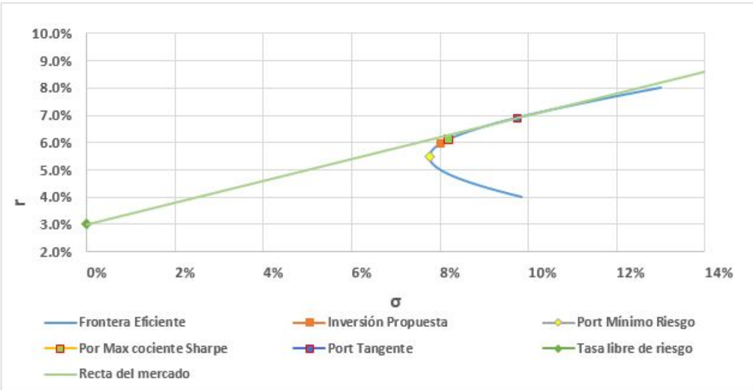
La recta del mercado de capitales teórica es:

$$r_{P_f} = r_f + (\frac{r_{P_T} - r_f}{\sigma_{P_T}})\sigma_{P_f}$$

Los valores para la recta se observa en la siguiente tabla:

σ_{Pf}	r_{Pf}
0.00%	3.000%
2.00%	3.800%
4.00%	4.601%
6.00%	5.401%
8.00%	6.202%
9.76%	6.90%
10.00%	7.002%
12.00%	7.802%
14.00%	8.603%
16.00%	9.403%
18.00%	10.204%
20.00%	11.004%
22.00%	11.804%
24.00%	12.605%

La frontera eficiente con los diversos portafolios creados se observan en la siguiente gráfica.



4.3.9. El CAPM

Ya que se conoce la importancia del portafolio de tangencia, pues es el portafolio de mercado que todos los inversionistas buscan para tomar decisiones, la Teoría del Portafolio hace una analogía del rendimiento de este portafolio con el rendimiento del mercado en general. Para el mercado mexicano el índice principal, como se recordará, es el IPC, por lo cual es posible definir la recta del mercado de capitales de la manera siguiente:

$$\Rightarrow \quad r_P = r_f + (\frac{r_{mercado} - r_f}{\sigma_{mercado}})r_p$$

Entonces, el rendimiento de cualquier portafolio está en función del cociente de Sharpe del mercado, esta es la recta del mercado de capitales.

Además, si existen inversiones a tasa libre de riesgo todos los inversionistas tomaran decisiones a lo largo de la recta de capitales (Teorema de separación) para pedir prestado o invertir a tasa libre de riesgo.

El cociente $\frac{\sigma_P}{\sigma_m}$ mide la volatilidad del portafolio respecto a la volatilidad del mercado.

Pero se tiene una mejor estimación deducida por Sharpe es:

$$\beta = \frac{Cov(r_P, r_{mercado})}{\sigma^2_{mercado}}$$

Así la β captura de mejor manera la relación entre los movimientos del portafolio y los del mercado.

Entonces, la recta de mercado está dada por:

$$r_P = r_f + \frac{Cov(r_P, r_{mercado})}{\sigma^2_{mercado}}(r_{mercado} - r_f)$$
$$r_P = r_f + \beta(r_{mercado} - r_f)$$

Para un activo

$$r_i = r_f + \beta_i(r_{mercado} - r_f) \qquad CAPM$$

Trasladando el problema a la relación rendimiento vs β, se observa la recta de capitales que está definida por β.

Todos los activos del mercado deben estar sobre la recta.

También la β se puede aproximar con una regresión.

$$r_i = \delta_i + \beta_i r_{mercado} + \epsilon_i$$

En donde α es el Alpha de Jensen y mide si hay un rendimiento superior o inferior al que establece el CAPM.

Ejemplo:

Se tienen los siguientes dos activos con sus respectivos parámetros de riesgo-rendimiento:

Activos	rk	σk	ρ12
1	5%	8%	0.6
2	7%	10%	

Por otra parte, se tiene la siguiente relación con el mercado:

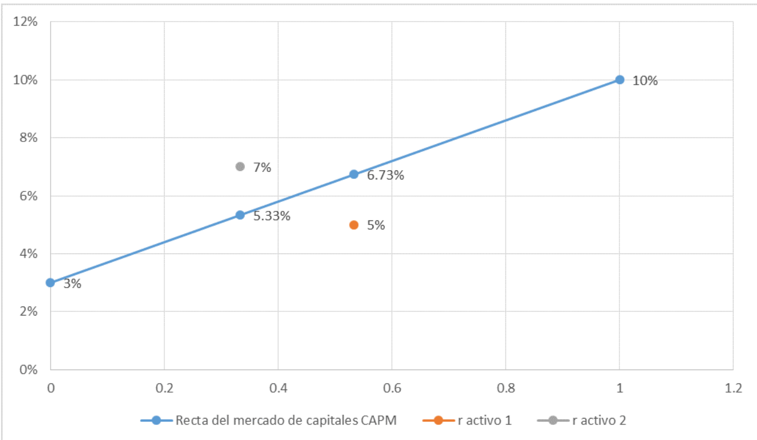
r_m	σ_m	$\varphi_{1,m}$	$\varphi_{2,m}$
10 %	12 %	0.8	0.4

Después la ecuación de la recta del mercado de capitales establecida por el CAPM para activos individuales es:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$$

Por lo que el rendimiento que sugiere el CAPM es:

	β	r_{CAMP}	
r_f	0	3%	
Activo 2	0.33	5.33%	Sobrevalorado
Activo 1	0.53	6.73%	Subvalorado
Mercado	1	10%	



Nótese que, según la propuesta del CAPM, el rendimiento real del activo 2 está sobrevalorado, por lo que este en el largo plazo debe ajustarse a la recta del mercado de capitales para evitar el arbitraje, es decir, el rendimiento del activo tenderá a bajar para alinearse, por lo que este activo representaría un opción de inversión a corto plazo.

En contraste, el activo 1 está subvalorado, por lo cual su rendimiento debe subir en el largo plazo para alinearse. De esta forma este activo representaría una opción de inversión para dicho periodo.

4.4. Introducción a los derivados

Los derivados son instrumentos financieros los cuales su precio está relacionado al precio de un activo llamado subyacente, el derivado juega con el tiempo futuro. Uno de los propósitos de los derivados es la administración de riesgo ya que se dice que los derivados asumen un cierto riesgo con respecto al precio del activo subyacente.

Los derivados son contratos a plazo, es decir, cumplen las siguientes características:

- Contrato de acuerdo OTC (over-the-counter) entre dos partes.
- El precio de entrega se elige de forma que el valor inicial del contrato sea cero.
- No hay intercambio de dinero al momento de pactar el contrato.

Los derivados se clasifican de la siguiente forma según su precio y sus posibles pérdidas:

- Derivados Lineales: Su precio en $t = 0$ es 0 por que es justo para ambas partes. Además siempre la ganancia de una parte es la pérdida de la otra. Por otra parte hay pérdidas y ganancias ilimitadas.
- Derivados no lineales: tienen un precio en $t = 0$ ya que una parte puede resultar beneficiado. La ganancia de una parte no necesariamente es la pérdida de la otra. Las pérdidas y ganancias son limitadas dada la opción de ejercer el contrato

De igual forma los derivados se pueden clasificar según su opcionalidad en el ejercicio, es decir:

- Europeo: solo se ejerce el contrato cuando llega la madurez.
- Americano: Puede ejercerse antes de la madurez.
- Bermuda: Existen fechas establecidas para ejercer el contrato.

Pay-off

El Pay-off de un derivado se define como la función de pago del instrumento, es decir, lo que paga el derivado. Existe una complejidad en el cálculo del Pay-off por lo cual se definen dos casos.

1. Plain vanilla: Pay-off sencillo (Europeo y Americano).
2. Exóticos: Función de pago más elaborado.

4.4.1. Forwards y Futuros

Forward: es un contrato en el cual las dos partes acuerdan un precio futuro para comprar o vender un activo (subyacente) en una fecha futura. Es un contrato lineal, Europeo, plain vanilla.

Futuro: es un caso similar de los forwards solo que este funciona en los mercados estandarizados (mercados regulados).

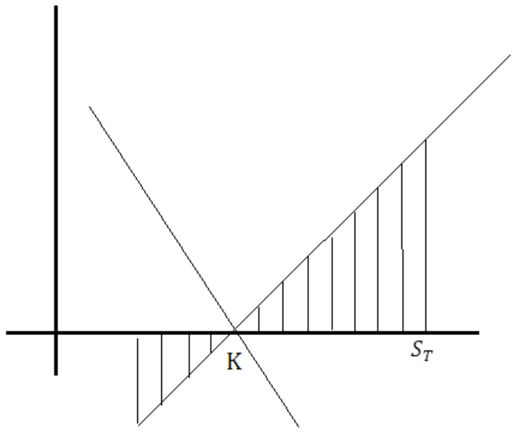
Suponga que se firma un contrato al día de hoy ($t = 0$) para comprar un activo al tiempo $t = T$,además el activo tiene precio spot de S_0 (Precio de hoy spot).

Se dice que se está en una posición larga, es decir, se comprara el activo, en caso contrario se dice que se está en una posición corta, es decir, se va a vender el activo. Por otra parte el precio futuro por el cual se pacta el activo es de K (strike).

Entonces se define el Pay-off del instrumento de la siguiente forma:

$$F = S_T - K$$

S_T es el precio spot del activo subyacente en T. El perfil de siego del Forward sería el siguiente:



Entonces el precio del derivado se puede ver como el valor presente actuarial del pay-off, suponiendo una capitalización continua entonces el precio es:

$$P = \frac{E[F]}{e^{rt}}$$

$E[F]$ es la esperanza de la función de pago.
t es el plazo del contrato.
r es la tasa libre de riesgo.

Desarrollando el precio del Forward se obtiene:

$$P = e^{-rt}E[S_T - K] = e^{-rt}(E[S_T] - K)$$

La esperanza de S_T es el valor futuro de S_0 en el tiempo T con la tasa libre de riesgo asociado, es decir, para que el precio sea justo.

$$E[S_T] = S_0e^{rt}$$

Por lo tanto el precio del derivado es:

$$P = e^{-rt}[S_0e^{rt-K}]$$
$$P = S_0 - Ke^{-rt}$$

Pero al día de hoy el precio del derivado debe ser cero dada la linealidad del contrato, por lo tanto:

$$P = S_0 - Ke^{-rt} = 0$$
$$K = S_0 e^{rt}$$

K es el precio Forward, es decir, el precio de ejercicio, strike que se debe pactar hoy ($t = 0$) para que el contrato sea justo bajo las expectativas del mercado.

Por lo tanto para obtener el precio del derivado en cualquier punto del tiempo t para una posición larga se tiene:

$$P_t = e^{-r(T-t)}[S_t e^{r(T-t)} - K]$$

En el caso de encontrarse en una posición corta se tiene:

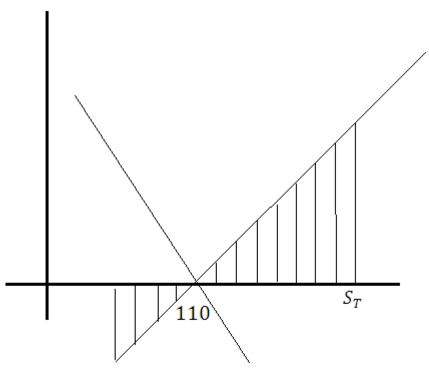
$$P_t = e^{-r(T-t)}[K - S_t e^{r(T-t)}]$$

Ejemplo

En el mercado secundario existe un fwd con un plazo a 2 años para el maíz. El día de hoy el maíz se cotiza en 100 dólares sobre tonelada y el strike del derivado es de 110 por tonelada, suponga que se pacta el derivado hoy para pagar el activo al final del plazo. Grafique el perfil de riesgo del derivado. Luego, suponga que dentro de un año el maíz se coloca en 105 dólares por tonelada,¿cuál es la pérdida o ganancia del derivado después de un año?. Ocupa la curva de tasas y suponga que después de un año las tasas suben 10 pb.

t	1	2	3
$r_0(t)$	5 %	7 %	10 %

Solución



Los datos para resolver el problema son los siguientes:

$S_0 = 100$
K=110
$S_1 = 105$

T=2
t=1

	t	1	2	3
2017	$r_0(t)$	5 %	7 %	10 %
2018	$r_0(t)$	5.1 %	7.1 %	10.1 %

El precio del derivado es:

$$P = e^{-0.051(1)}[105e^{0.051(1)} - 110] = 0.47$$

Por lo tanto se tiene una ganancia virtual de 0.47 dolares.

¿Cuál debió ser el precio fwd justo?

$$K = S_0 e^{rT}$$
$$K = 100e^{2(0.07)} = 115.03$$

Por otra parte, si en el mercado existe un contrato forward sobre el miso subyacente con K'=100, $K > K'$, entonces se dice que el derivado esta subvaluado.

Suponga que existe en el mercado un fwd con precio strike de K' sobre un subyacente con precio spot S_0. El contrato aplica para comprar dicho activo en T. Por otra parte se sabe que el precio fwd es $K = S_0 e^{rT} < K'$ y además el derivado anteriormente evaluado está sobrevalorado dentro de un plazo T, una posible estrategia para obtener una ganancia es:

	0	T
Pacto fwd	0	$K' - S_T$
Copra del activo en cero	$-S_0$	S_T
Pedir prestado	S_0	$-S_0 e^{rT} = -k$
	0	$K' - K$

Dado que $K' < K$ entonces se obtienen una ganancia, el este ejercicio se tiene $K' - K$=115-110=5.

4.4.2. Cobertura de portafolios con Fwds

Suponga que se tiene un portafolio con un solo activo con valor spot S_0 (conocido) y se desea cubrir una posible pérdida después de cierto tiempo T, es claro que el valor de incertidumbre es el precio del activo en el tiempo T, es decir, S_T.

Existen dos posibles escenarios que son de interés.

1. $S_0 > S_T$ escenario de interés ya que se piensa en una posible pérdida.
2. $S_0 < S_T$

Se define a la función de pérdida como:

$$L = S_T - S_0$$

Para realizar una cobertura generalmente se debe tomar una posición contraria a la inicia, es decir;

Posición inicial	Posición de cobertura
corto	largo
largo	corto

Entonces, en el caso inicial de estar en una posición inicial larga se debe pactar un fwd para vender el activo en T con precio de ejercicio K.

$$F = K - S_T$$

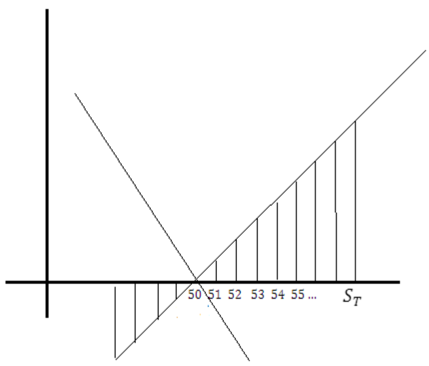
La pregunta que surge es cuando debe valer K para cubrir la pérdida, es decir, a qué precio se pacta el derivado. Sumando ambas posiciones en T se tiene:

$$(S_T - S_0) + (K + S_T) = K - S_0 = 0$$

Por lo tanto $K = S_0$, es así como se elimina la pérdida pero también se anulan las ganancias. La siguiente interrogante que surge es poder encontrar el valor del strike para eliminar las pérdidas y ganar un superavit adicional.

Suponga que se tiene una (OPI) de la empresa A con un valor de \$50.0, a los inversionistas e les hace caro por lo cual la especulación y las expectativas de los expertos en el mercado esperan que el precio caiga, por lo tanto se pretende pactar un fwd para mitigar las pérdidas que pudieran llegar a suceder.

Para cubrir la pérdidas se debe pactar un fwd con $K = 50$ en una posición corta, el perfil de riesgo del instrumento se muestra a continuación.



Y al tiempo T la cobertura se vería de la siguiente forma:

$$(S_T - 50) + (50 - S_T) = 0$$

Por lo tanto se obtiene $S_T < 50$ y por lo tanto $K > 50$ para anular pérdidas y tener un margen positivo.

4.4.3. Swaps (permutas financieras)

Los swaps son derivados lineales, en el cual las partes se dedican a intercambiar flujos de efectivo en periodos previamente establecidos durante un plazo pactado.

Suponga que se tiene una deuda, en la cual se deben pagar intereses cada periodo durante un plazo T, por otra parte se sabe que dichos intereses se pagan a tasa variable. Para poder tener certidumbre sobre lo pactado es posible cambiar la tasa variable por una tasa fija, el derivado que ejecuta lo anterior es un IRS (Interest Rate swap).

El ejemplo anterior es un tipo de swaps, pero existen algunos otros tipos de swaps conocidos, por ejemplo:

- IRS
  - tasa variable - tasa fija
  - tasa fija - tasa variable
  - tasa variable - tasa fija
- CCS
  - peso - dolar
  - dolar - peso
  - euro - dolar
  - dolar - euro

En general los IRS son el intercambio de tasas de interés y los CCS es el cambio entre cualquier tipo de moneda.

En esta sección se revisará de manera general el funcionamiento de los IRS. Para obtener el Pay-off en cada periodo se necesita mostrar la estructura del derivado y posteriormente hacer el análisis del mismo.

Por lo tanto el pay-off en el cada tiempo, es decir, en t por la diferencia de las tasas (spred) por el valor nominal del derivado, sobre el cual se pagan los intereses.

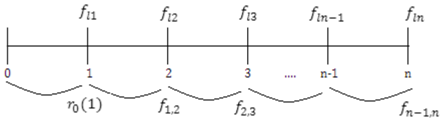
$$F = [f_{lt} - S]N$$

Por lo tanto el precio del swaps está dado por:

$$P = E[\sum_{t=1}^{T}(f_{lt} - S)Ne^{-r_0(t)t}$$

$$P = \sum_{t=1}^{n} E[f_{lt}]Ne^{-r_0(t)t} - \sum_{t=1}^{T} SNe^{-r_0(t)t}$$

El valor esperado de f_{lt} es la tasa forward del periodo t-1 a t asociada a la curva spot, se puede observar el valor esperado de las tasas de la siguiente forma:



Por lo tanto el precio es:

$$P = \sum_{t=1}^{n} f_{t-1,t} N e^{-r_0(t)t} - \sum_{t=1}^{T} S N e^{-r_0(t)t}$$

A la primera suma se le conoce como pata variable y a la segunda suma se le conoce como pata fija, de igual forma surge la interrogante de saber a qué tasa fija S se debe pactar el contrato para que el precio sea justo, haciendo el análisis se obtiene lo siguiente:

$$P = \sum_{t=1}^{n} f_{t-1,t} N e^{-r_0(t)t} - \sum_{t=1}^{T} S N e^{-r_0(t)t} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} f_{t-1,t} N e^{-r_0(t)t} = \sum_{t=1}^{T} S N e^{-r_0(t)t}$$

$$S = \frac{\sum_{t=1}^{n} f_{t-1,t} N e^{-r_0(t)t}}{\sum_{t=1}^{T} N e^{-r_0(t)t}} = \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{e^{-r_0(t)t}}{\sum e^{-r_0(t)t}} \right] f_{t-1,t}$$

S es la tasa swap del derivado, la cual lo hace justo y es el promedio de las tasas fwd con ponderador del valor presente, para poder obtener la tasa swap se debe considerar la curva de tasas que aplica en el mercado al momento de valuar el derivado, esto para descontar los flujos esperados y obtener las tasas fwd implícitas en la curva.

Ejemplo

Suponga que se pacta un contrato en donde se recibimos tasa fija y otorgamos tasa variable en referencia a la curva de tasas dada, el contrato aplica sobre un valor nocional de \$1000 durante 5 años, calcule la tasa swap y compruebe que el precio del derivado es justo en $t = 0$.

t	1	2	3	4	5
$r_0(t)$	5 %	5.5 %	5.75 %	6	7.9 %

Solución

Para poder encontrar la tasa swap es necesario calcular las tasas fwd que se encuentran implícitas en la curva, suponiendo un interés continuo entonces las tasas fwd están dadas por:

$$f_{t-1,t} = \frac{nr_0(n) - mr_0(m)}{n - m}$$

Haciendo los cálculos necesarios se obtienen las tasas fwd.

$f_{0,1}$	$f_{1,2}$	$f_{2,3}$	$f_{3,4}$	$f_{4,5}$
5 %	6 %	6.25 %	6.75 %	15.5 %

$$\sum_{t=1}^{5} e^{-r_0(t)t} = e^{-(0.05)(1)} + e^{-(0.055)(2)} + e^{-(0.0575)(3)} + e^{-(0.06)(4)} + e^{-(0.079)(5)}$$
$$= 0.9512 + 0.8958 + 0.8415 + 0.7866 + 0.6730 = 4.1489$$

$$S = \left(\frac{0.9512}{4.1489}\right)(0.05) + \left(\frac{0.8958}{4.1489}\right)(0.06) + \left(\frac{0.8415}{4.1489}\right)(0.0625) + \left(\frac{0.7866}{4.1489}\right)(0.0675) +$$
$$\left(\frac{0.6730}{4.1489}\right)(0.155) = 0.075$$

Nosotros recibimos tasa fija (swap) por lo tanto se está en una posición larga por lo tanto el precio en cero es.

$$P_0 = P_F - P_V$$

En caso contrario de estar en una posición corta entonces el precio queda de la siguiente forma:

$$P_0 = P_V - P_F$$

Por lo tanto el precio es:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} SNe^{-r_0(t)t} - \sum_{t=1}^{T} f_{t-1,t}Ne^{-r_0(t)t}$$
$$P_0 = \sum_{t=1}^{5}(0.075)(1000)e^{-r_0(t)t} - \sum_{t=1}^{T} f_{t-1,t}Ne^{-r_0(t)t}$$
$$P_0 = 311.16 - 311.16 = 0$$

4.4.4. Valuación de opciones

Las opciones son derivados los cuales tiene la alternativa de ejercer o no el precio de ejercicio al final del plazo. Es decir, la persona al final del plazo puede tomar la decisión que más le convenga.

Las opciones son instrumentos financieros los cuales tienen ciertas características básicas:

- El precio fijo al cual se compra o vende el derivado se le conoce como precio de ejercicio o strike.
- El uso del derecho a comprar o vender el subyacente se le conoce como ejercicio de la opción.
- Como en todo contrato de un derivado, una opción tiene una fecha de expiración, cuando la fecha llega a su vencimiento y el contrato no es ejercido este simplemente expira.

- El strike es negociable entre ambas partes y ademas pueden negociarse las condiciones del contrato.

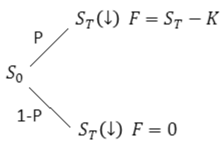
Suponga que se tiene un call Europeo, entonces el Pay-off está dado por:

$$F = Max(S_T - K, 0) = (S_T - K, 0)^+$$

La idea es obtener el precio del derivado, es decir, el valor presente actuarial del Pay-off.

$$P = VP(E[F]) = VP(E[(S_T - K, 0)^+])$$

Siendo S_T una variable aleatoria, ahora cuando se tiene S_0 existen dos posibles sucesos y son que el precio en S_1 suba o baje; de igual forma para S_1 existen dos posibles sucesos independientemente del evento anterior y de la misma manera tenemos dos posibles eventos para cada momento del tiempo hasta llegar a S_T. Suponiendo T=1 se puede ejemplificar lo anterior de la siguiente forma:



P es la probabilidad de que $S_T > S_0$, por lo tanto la esperanza del Pay-off es:

$$E[F] = p(S_T(\uparrow) - K) + q0$$

Bajo los supuestos de un mundo discreto, un plazo como periodo y r la tasa libre de riesgo asociada entonces el precio del derivado es:

$$P = VP(E[F]) = \frac{p(S_T(\uparrow) - K) + q0}{1 + r}$$

En realidad este no es el precio del derivado ya que p y r no se encuentran en la misma unidad de medida, r es una tasa libre de riesgo y p es el riesgo de que el precio del activo suba, es por eso que si se desea ver a p y r en la misma unidad de medida existen dos posibles opciones.

1. Buscar una tasa r' que refleje el riesgo del pago para estar en relación con p y q.

2. Buscar probabilidades libres de riesgo para estar en relación con r.

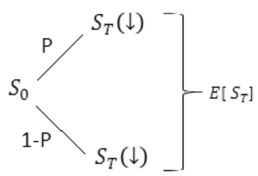
La opción dos resulta ser la alternativa más sencilla, ya que en el mercado es más fácil encontrar curvas spot libres de riesgo, por ejemplo las del gobierno federal.

El problema se traslada a encontrar probabilidades neutrales al riesgo, se puede definir al precio del activo en cero como el valor presente de la esperanza del precio en T.

$$S_0 = \frac{E[S_T]}{1 + r}$$

Entonces la esperanza de S_T se puede definir como una martingala ya que define el precio del forward, el cual hace posible la valuación libre de riesgo, al igual que con los fwds y swaps. Lo anterior se puede observar de la siguiente forma:

$$E[S_T] = S_0(1 + r)$$



Entonces se define a $\overline{p}$ y $\overline{q}$ como las probabilidades neutrales al riesgo las cuales deben satisfacer la martingala, lo que da como resultado:

$$E[S_T] = \overline{p}S_T(\uparrow) + \overline{q}S_T(\downarrow) = S_0(1 + r)$$

$$(1 + r) = \overline{p}\left[\frac{S_T(\uparrow)}{S_0}\right] + \overline{q}\left[\frac{S_T(\downarrow)}{S_0}\right]$$

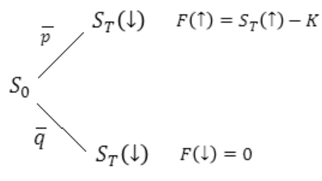
Sea $\overline{p}\left[\frac{S_T(\uparrow)}{S_0}\right]$=u y $\overline{q}\left[\frac{S_T(\downarrow)}{S_0}\right]$=d, entonces $S_T(\uparrow) = S_0u$ y $S_T(\downarrow)d = S_0d$, para poder encontrar los probabilidades libres de riesgo se siguen los siguientes pasos:

$$(1 + r) = \overline{p}u + \overline{q}d = \overline{p}u + (1 - \overline{p})d$$
$$\overline{p} = \frac{(1 + r) - d}{u - d}$$
$$\overline{q} = 1 - \frac{(1 + r) - d}{u - d} = \frac{u - (1 + r)}{u - d}$$

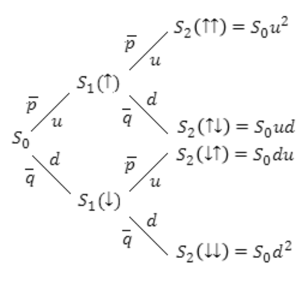
Por lo tanto el precio correcto de la opción es:

$$P = \frac{\overline{p}F(\uparrow) + \overline{q}F(\downarrow)}{1 + r} = \frac{\overline{p}(S_T - K) + \overline{q}0}{1 + r}$$

El bosquejo de una opción para el plazo de un periodo queda de la siguiente forma:



Esta metodología es recursiva y puede extenderse a un número mayor de periodos (nodos del árbol).



Para el caso de dos nodos el precio está dado por:

$$P = \frac{\overline{p}^2 F(\uparrow\uparrow) + \overline{pq}F(\uparrow\downarrow) + \overline{qp}F(\downarrow\uparrow) + \overline{q}^2 F(\downarrow\downarrow)}{(1+r)^2} = \frac{\overline{p}^2 F(\uparrow\uparrow) + 2\overline{pq}F(\uparrow\downarrow) + \overline{q}^2 F(\downarrow\downarrow)}{(1+r)^2}$$

En donde

$$F(\uparrow\uparrow) = (S_0(\uparrow\uparrow) - K, 0)^+ = (S_0 u^2 - K, 0)^+$$
$$F(\uparrow\downarrow) = (S_0(\uparrow\downarrow) - K, 0)^+ = (S_0 ud - K, 0)^+$$
$$F(\downarrow\downarrow) = (S_0(\downarrow\downarrow) - K, 0)^+ = (S_0 d^2 - K, 0)^+$$

Para obtener N periodos la forma general del precio de un put Europeo de forma discreta es:

$$P = \frac{\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \overline{p}^n \overline{q}^{N-n} (S_0 u^n d^{N-n} - K, 0)^+}{(1+r)^N}$$

Y para un call Europeo la formula general es:

$$P = \frac{\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \overline{p}^n \overline{q}^{N-n} (K - S_0 u^n d^{N-n}, 0)^+}{(1+r)^N}$$

Se observa que para un cierto valor m el pay-off comienza a ser positivo siempre y considerando un interés continuo se pueden redefinir de la siguiente forma:

$$P = \frac{\sum_{n=m}^{N} \binom{N}{n} \overline{p}^n \overline{q}^{N-n} (S_0 u^n d^{N-n} - K)}{e^{rN}}$$

$$= \frac{\sum_{n=m}^{N} P[X=n](S_0 u^n d^{N-n} - K)}{e^{rN}} = \frac{S_0 \sum_{n=m}^{N} P[X=n] u^n d^{N-n}}{e^{rN}} - \frac{K \sum_{n=m}^{N} P[X=n]}{e^{rN}}$$

$$= \frac{S_0 \sum_{n=m}^{N} P[X=n] u^n d^{N-n}}{e^{rN}} - \frac{K(1 - F_X(m-1))}{e^{rN}}$$

Se observa que para cierto número m el pay-off es cero, entonces:

$$\Rightarrow\ P = \sum_{n=m}^{N} \binom{N}{n} \overline{p}^n \overline{q}^{N-n} (S_0 u^n d^{N-n} - k) e^{-rN}$$

Por otra parte sea $X \sim Bin(N, \overline{p})$

$$\Rightarrow\ P = (\sum_{n=m}^{N} P[X=n](S_0^n u^n d^{N-n} - k)) e^{-rN}$$

$$\Rightarrow\ P = S_0 \sum_{n=m}^{N} P[X=n] u^n d^{N-n} e^{-rN} - kP(x=n) e^{-rN}$$

$$\Rightarrow\ P[X=n] u^n d^{N-n} e^{-rN} = \binom{N}{n} \overline{p}^n \overline{q}^{N-n} u^n d^{N-n} e^{-rN}$$

$$= \binom{N}{n} (\overline{p}u)^n (\overline{q}d)^{N-n} e^{-rN}$$

$$= \binom{N}{n} (\overline{p}u)^n (\overline{q}d)^{N-n} e^{-rn} e^{-r(N-n)}$$

$$= \binom{N}{n} (\frac{\overline{p}u}{e^r})^n (\frac{\overline{q}d}{e^r})^{N-n}$$

Sea $\frac{\overline{p}u}{e^r} = p^*$ y $\frac{\overline{q}d}{e^r} = q^*$

$$\Rightarrow \; P = S_0 \sum_{n=m}^{N} p^{*N} q^{*N-n} - ke^{-rN} \sum P[X = n]$$

$y \sim B(N, p^*)$

$$\Rightarrow \; P = S_0 \sum_{n=m}^{N} P[y = n] - ke^{-rN} \sum_{n=m}^{N} P[X = n]$$

$$\Rightarrow \; P = S_0(1 - F_y(m-1)) - ke^{-rN}(1 - F_X(m-1))$$

$$\Rightarrow \; P = S_0[1 - Bin(N, p^*, m-1)] - ke^{-rN}[1 - Bin(N, p^*, m-1)]$$

Para call y para put

$$ke^{-rN} F_X(m-1) - S_0 F_y(m-1)$$

u y d en la practica son estimadas con volatilidad $u = e^{\sigma\sqrt{T}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$ suponiendo $\mu = 0$

Ejemplo

Calcule el precio de un call europeo en un modelo binomial de un periodo de tres meses, con p=0.7, d=0.9, u=1.1, usando una tasa de interés anual continua del 5 %, con un precio inicial del activo subyacente del \$100 y strike de \$150.

Solución

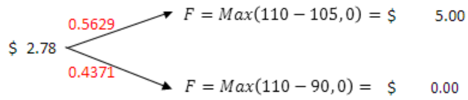
Dato
$S_0 = 100$
$P = 0.07$
$u = 1.1$
$d = 0.9$
$r = 0.05$ $K = 105$

$$\overline{p} = \frac{e^{\frac{0.05}{4}} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.5629$$

$$\overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0.5629 = 0.4371$$

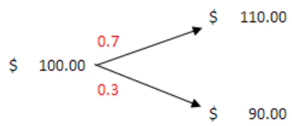
$$P = \frac{(5 * 0.5629) + (0 * 0.4371)}{e^{-\frac{0.05}{4}}} = 2.78$$

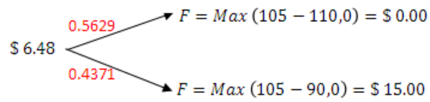
Bosquejo del call europeo para un periodo.



Luego, valuando un Put con los mismos parámetros se tiene:

$$P = \frac{(0 * 0.5629) + (15 * 0.4371)}{e^{-\frac{0.05}{4}}} = 6.48$$





4.4.5. Convergencia de CRR a Black-Scholes

En el cálculo del precio de una opción mediante el modelo Cox-Ross-Rubinstein (CRR) se llega a las siguientes generalizaciones aplicando una distribución Binomial:

$$\begin{aligned} Precio\ para\ un\ Call \quad C_0 &= S_0[1 - Bi(N, p^*, m-1)] - Ke^{-rN}[1 - Bi(N, \overline{p}, m-1)] \\ Precio\ para\ un\ Put \quad P_0 &= Ke^{-rN} Bi(N, p^*, m-1) - S_0 Bi(N, \overline{p}, m-1) \end{aligned}$$

donde

$$m = \left[\frac{ln \frac{K}{S_0 d^N}}{ln \frac{u}{d}} \right] \qquad y \qquad p^* = \frac{\tilde{p} \cdot u}{e^r}$$

Al incrementar los intervalos, se genera un caso límite, en el cual interviene el teorema del límite central generando las siguientes valuaciones:

$$\begin{aligned} Precio\ para\ un\ Call \quad C_0 &= S_0 N(d_1) - Ke^{-r_c T} N(d_2) \\ Precio\ para\ un\ Put \quad P_0 &= Ke^{-r_c T} N(d_2) - S_0 N(d_1) \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln \frac{S}{K} + (r_c + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad y \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Para llegar a estos resultados, a fin de modelar la evolución del rendimiento de un bien es necesario plantear la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t \partial t + \sigma \cdot S_t \partial W_t$$

Si hacemos discreta la función anterior y se asume una distribución binomial se llega a al modelo Cox-Ross-Rubinstein, los elementos de la función son los siguientes:

- S_t: Movimiento Browniano Geométrico.
- ∂W_t: Proceso de Wiener o Movimiento Browniano Estándar.
- μ: Porcentaje de cambio, tendencia o velocidad.
- σ: Porcentaje de volatilidad.

Adicionalmente es necesario hacer referencia al siguiente lema:

Lema de ITÔ

Para $x(t)$ un proceso de ITÔ y $f(x,t)$ una función con segundas derivadas continuas, entonces $f(x(t),t)$ es también un proceso de ITÔ y

$$\partial f(x(t),t) = (a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b(x,t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})\partial t + b(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dW_t$$

Entonces, sea $\partial S_t = \mu S_t \partial t + \sigma S_t \partial W_t$ un movimiento Browniano Geométrico, de ahí que es posible observar que se satisfacen las condiciones de lema de ITÔ y por lo tanto se realizan las siguientes sustituciones

$$x = S \qquad a(x,t)\mu \qquad b(x,t) = \sigma S$$

Realizando las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial lnS}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial S}\frac{1}{S} = -S^{-2} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Sustituyendo en $\partial f(x(t),t) = (a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b(x,t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})\partial t + b(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dW_t$ se tiene como resultado lo siguiente:

$$\partial lnS = [\mu S \cdot S^{-1} + 0 + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \cdot (-S^{-2})]\partial t + [\sigma S \cdot S]^{-1}\partial W$$
$$\Rightarrow \quad \partial lsS = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\partial t + \sigma \partial W$$

Lo que significa que lnS es un Movimiento Browniano con tendencia $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ y volatilidad σ o escrito de forma discreta $\triangle lnS \sim N[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)] \triangle t, \sigma^2 \triangle t$

Entonces, sea S_t un Movimiento Browniano Geométrico, se satisface:

$$\partial S_t = \mu S_t \partial t + \sigma S_t \partial W_t$$

Sea V el valor de una opción sobre el ativo S, como S_t es un proceso de ITÔ de acuerdo al lema de ITÔ:

$$\partial V = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}W$$

Sea $P = V + xS$ un portafolio formado por acciones y opciones en donde x es la cantidad del activo y V representa un opción y además se busca que este portafolio sea de riesgo cero, lo que se conoce como delta cero, es decir, la derivada respecto al subyacente debe ser nula..

Entonces la ecuación diferencial parcial es:

$$\begin{aligned}\partial V &= \mu S\frac{\partial V}{\partial S}\partial t + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\partial W + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t\\ &= \frac{\partial V}{\partial S}\partial S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t\end{aligned}$$

Calculando el rendimiento del portafolio P:

$$\partial P = \partial R = \partial V + x\partial S$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\partial R - x\partial S &= \frac{\partial V}{\partial S}\partial S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t\\ \Rightarrow \quad \partial R &= \left(x + \frac{\partial V}{\partial S}\right)\partial S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t\end{aligned}$$

Para que la derivada (sensibilidad) sea cero, se elimina la sensibilidad al subyacente, es decir:

$$x + \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -\frac{\partial V}{\partial S}$$

Por lo tanto la ecuación es:

$$\partial R = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t$$

La estrategia del portafolio ha hecho que no se corra riesgo ante variaciones en el subyacente. Si no hay arbitraje, al no haber riesgo, su rendimiento debe de ser equivalente a la tasa libre de riesgo.

El rendimiento de t a $t + \partial t$ se puede calcular como interés simple y es:

$$\begin{aligned}\partial R &= rP\partial t\\ \Rightarrow \quad rP\partial t &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\partial t\end{aligned}$$

Además

$$P = V - S\frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de Black-Scholes para opciones Europeas. Al resolver se puede estimar el valor de las opciones.

La solución de esta ecuación para el caso de un Call Europeo con strike de K, fecha de expitación T y valuación en t al precio Spot S se ve como:

$$V(S,t) = S \cdot N(d_1) - Ke^{-(T-t)r}N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

La demostración para obtener el precio de un Put europeo sigue un razonamiento análogo.

Ejemplo

Calcular el precio del ejercicio anterior usando BS, suponga una volatilidad de 0.3

Solución

$S_0 = 100$
K=105
$\sigma = 0.05$
T=1
r=5 %

$$P = 100N(\frac{ln(\frac{100}{105}) + (0.05 + \frac{0.5^2}{2})(1)}{0.5\sqrt{1}}) - 105e^{-1(0.05)}N(0.154032786 - 0.05\sqrt{1}) = 2.05$$

Se observa que el precio es diferente al obtenido mediante el método CRR, esto se debe a que se tiene una mejor precisión en el cálculo, además se toma en cuenta la volatilidad de la opción, cabe mencionar que en este caso entre mayor sea la volatilidad mayor será el precio del instrumento.

4.5. Ejercicios

Bonos

1. ¿Cuál es el precio de un bono cupón cero que paga una redención de \$200 dentro de un año bajo un YTM de 10 % anual?.
2. Un bono cupón cero paga su redención dentro de 1 año por un valor de \$100. El YTM es del 11 % capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto vale el bono? ¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente con la que podrías descontar el nominal directamente a un periodo?.
3. Calcula el precio de un bono con rendimiento (YTM) del 7 % anual que promete un cupón anual de \$5 y un nominal de \$100 dentro de 10 años.
4. Un bono al 6 % anual está valuado por \$82.88 con una redención y YTM de \$100 y 8 % anual respectivamente. Los cupones se pagan al final de cada año. ¿Cuál es la madurez del bono? Utiliza interpolación lineal o algún método numérico.
5. Al día de hoy se emite una obligación (Bono Corporativo) al 12 % anual con un valor facial de \$90 que paga una redención de \$110 al final de 12 años. Los flujos de efectivo que paga dicha obligación se hacen de manera semestral. ¿Cuál es el precio de la obligación si esta mantiene un rendimiento del 14 % capitalizable semestralmente? Obtenga la tasa cupón ajustada y en base a este indicador comente a qué nivel de rendimiento conviene comprar o vender el instrumento.
6. Hoy se emite un bono al 15 % anual con un precio de \$130.61. Después de 7 años se paga una redención de \$120. ¿Cuál es el rendimiento del bono?.
7. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 10 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).
8. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 12 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).
9. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de \$100. Si el YTM es de 14 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento en la quinta fecha cupón (12/01/2015) justo después de haberse pagado el flujo. (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes en que cae la fecha cupón).
10. Para los tres ejercicios anteriores, valúe los instrumentos en cada fecha cupón y elabore una gráfica donde plasme el precio en dichas fechas, mostrando qué sucede con la valuación acercándose a la madurez dadas las relaciones par. Comente sobre éstas relaciones.

11. Se emite un bono al 12 % anual el día 12/03/2014 que paga cupones de manera bimestral. La madurez de dicho instrumento se alcanza el día 12/03/2016 y paga en este punto una redención de $100. Si el YTM es de 14 % anual capitalizable 6 veces al año, obtenga el precio del instrumento al 01/01/2015 (precio sucio). ¿Cuál es el precio de mercado (precio limpio) del instrumento al 01/01/2015? (Hint: El cupón se paga el día 12 del mes que cae la fecha cupón y suponga que cada mes tiene 30 días).

12. Obtenga el precio sucio y el precio limpio de los bonos de los ejercicios 7, 8 y 9 al 01/01/2015.

Análisis de sensibilidad

13. Calcule la Duración Modificada, Duración Macaulay y Convexidad de los bonos de los ejercicios 1 al 7. Luego aproxime el precio, cambio monetario y cambio relativo (porcentual) dado un incremento en el YTM de 10pb.

14. Repita el ejercicio anterior suponiendo un decremento de 10pb en el YTM de cada instrumento.

15. Cubra el bono del ejercicio 4 mediante una inmunización de orden 1, según la expansión de Taylor con el bono del ejercicio 3. Corrobore la cobertura ante un cambio paralelo en las tasas efectivas a la alza de 100pb anuales.

16. Cubra el bono del ejercicio 4 mediante una inmunización de orden 2, según la expansión de Taylor con los bonos de los ejercicios 3 y 6. Corrobore la cobertura ante un cambio paralelo en las tasas efectivas a la alza de 100pb anuales y comente cuál es una mejor aproximación, si la de este ejercicio o la del anterior, ¿por qué?

Curva de tasas y tasas forward

El mercado ofrece la siguiente curva spot al día de hoy de rendimiento bajo capitalización anual efectiva.

Año (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_0(t)$	3.0 %	3.6 %	4.5 %	5.2 %	-	6.7 %	7.3 %	8.0 %	-	9.1 %	10.0 %	-

17. Con interpolacion lineal encuentra las tasas stop al tiempo 5 y 9.

18. Si al día de hoy se quiere invertir $2,500 ¿Cuál es el valor acumuldo a 3,5,7 y 10 años?

19. Si se desea invertir $5,000 dentro de un año durante 4 años.¿Qué tasa se debeusar? ¿Cuál sera el valor acumulado?.

20. Obtener las tasas forward $f_{0,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,3}$, $f_{3,4}$, $f_{4,5}$, $f_{5,6}$, $f_{6,7}$, $f_{7,8}$, $f_{8,9}$, $f_{9,10}$ y $f_{10,11}$.

21. Suponga que que la curva anterior es con un interés continuo, es decir, fuerza de interés. Resuelva los ejercicios 17, 18, 19 y 20.

22. Obtenga la tasa spot al tiempo 12 usando bootstraping usando un bono con una redención de $100, tasa cupón del 10 %, madurez de 10 años y con precio de $107.45.

Teoría del portafolio

23. Dos actividades económicas arrojan las siguientes rentabilidades futuras según el estado de la naturaleza:

Estado de la economía	Probabilidad	Rentabilidad Turismo	Rentabilidad Minería
Recesión	0.3	-0.05	0.45
Normal	0.5	0.08	0.12
Auge	0.2	0.15	-0.1

a) Calcule la esperanza, varianza, desviación estándar, covarianza y correlación de los dos actividades económicas.

b) Suponga que se fusionan dos empresas, una se dedica al turismo y la otra a la minería, ademas suponga que las dos empresas son del mismo tamaño. ¿Cuál es el rendimiento esperado de la Fusión?.

24. Suponga que se quiere invertir en dos acciones, cuyas rentabilidades esperadas son del 15 % y 22 % respectivamente y sus desviaciones esperadas son de 20 % y 24 %. Determine la proporción a invertir en cada una para lograr una cartera con el menor riesgo posible y calcule la rentabilidad esperada y volatilidad de dicha cartera.

a) Si el coeficiente de correlación entre el activo A y B fuese igual a 1 y no se permiten ventas en corto.

b) Si el coeficiente de correlación entre el activo A y B fuera igual a -1, y se permiten ventas en corto.

c) Utilice la fórmula general suponiendo que el coeficiente de correlación es igual a 0.5.

25. Asumiendo 3 activos riesgosos y dado lo siguiente:

Rendimiento esperado

A	B	C
22 %	12 %	18 %

Matriz de Covarianzas

0.41	-0.25	0.21
-0.25	0.86	-0.46
0.21	-0.46	1.04

a) Obtenga la frontera eficiente para los tres activos.

b) Obtener también el portafolio de mínimo riesgo, el portafolio de máximo cociente de sharpe, la tangencia con tasa libre de riesgo de 3 %, la recta del merado de capitales dada la tangencia y n portafolio con 5 % más y 5 % menos rendimiento de tangencia.

26. Suponga que se tiene N títulos en el mercado. El rendimiento esperado de cada título es de 10 %. Todos los títulos también tienen la misma varianza de 0.0144. La covarianza entre cualquier par de títulos es de 0.0064.

a) ¿Cuál será el rendimiento esperado y la varianza de una cartera igualmente ponderada que contenga todos los títulos N? (El peso ponderado de cada título dentro de la cartera es de 1/N).
b) ¿Qué le sucederá a la varianza a medida que crezca el valor de N?
c) ¿Qué característica de los títulos serán más importantes en la determinación de la varianza de una cartera bien diversificada?

27. Obtener la Beta para el activo i.

Año	Indice de mercado	Precio del activo i
t	2800	\$320
t+1	2790	\$330
t+2	2880	\$310
t+3	3100	\$340
t+4	3250	\$350

28. Suponga una tasa libre de riesgo del 8 %. La beta del activo A es de 1.5 y el rendimiento esperado del mercado es de 15 %. ¿Cuál será el rendimiento esperado del activo A?.

29. Suponga que el rendimiento del mercado es de 7.5 % y la tasa libre de riesgo es de 3.7 % y además el rendimiento esperado del activo A es de 14.2 %. ¿Cuál será la beta del activo A?.

30. Considere las siguientes acciones.

Acción	Beta	Rendimiento esperado
A	1.4	25 %
B	0.7	14 %

Suponga que el CAPM se mantiene.

a) ¿Cuál será el rendimiento sobre el mercado?
b) ¿Cuál será la tasa libre de riesgo?

31. Calcule el valor esperado del pago al vencimiento de las siguientes opciones. Recuerde en todo momento, que éste no es el precio de la opción! Las acciones tienen ahora el precio de 2, después de un mes, el valor aumenta a 2.5 con probabilidad p=0.6 o bien disminuirá a 1.8.

a) Considere un call europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es un mes después y cuyo precio strike es de 2.
b) Considere un call europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es un mes después y cuyo precio strike es de 1.9.
c) Considere un put europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es dentro de un mes y cuyo precio strike es de 2.
d) Considere un put europeo sobre esta acción, cuya fecha de vencimiento es dentro de un mes y cuyo precio strike es de 2.2.

32. ¿Qué precio le daría usted a la siguiente opción, dentro de un modelo binomial? La acción tiene hoy el precio de 10; después de un mes, el precio sube a 15 con una probabilidad de p=0.6 y en caso contrario, bajará a 8. Para la simplificación de los cálculos, suponga que los depósitos y los créditos están sujetos a una tasa de interés de 0 %. Analice un call europeo, con precio strike de 15.

33. Calcule con ayuda de la fórmula Black-Scholes, los precios de los siguientes calls europeos:

    a) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad s=0.3, precio strike K=110, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.

    b) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad s=0.3, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.

    c) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad s=0.3, precio strike K=90, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.04, T=1.

34. Calcule con ayuda de la fórmula Black-Scholes, los precios de los siguientes puts europeos:

    a) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad s=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.05, T=1.

    b) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad s=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.09, T=1.

    c) Precio actual de la acción p1=100, tipo de retorno medio de la acción b=0.1, volatilidad=0.2, precio strike K=100, tasa de interés creciente sin riesgo r=0.02, T=1

35. Dados los resultados de los dos ejercicios anteriores, De qué forma es posible que el precio de la opción dependa del precio strike? ¿Qué influencia tiene la tasa de interés sin riesgo sobre el precio de la opción?

Conclusiones

A lo largo de los temas abordados en este manual, se complementó el estudio y la práctica desarrollados en los cursos de la seriación obligatoria de Finanzas impartida en la FES Acatlán, ya que ese es el objetivo de este trabajo, es decir, brindar a los estudiantes de material de apoyo aterrizado al 100 % en los temas que constituyen dichos cursos.

Por otra parte, la aplicación de las finanzas en el campo laboral es de suma importancia, pues cada día el uso de herramientas cuantitativas resulta vital en materia de toma de decisiones para las instituciones, por ejemplo, en el capítulo de "Finanzas Corporativas" se planteó el objetivo principal de toda empresa que es maximizar su valor, entonces, no cabe duda que para toda institución es un reto cumplir este objetivo utilizando para su previsión y administración modelos matemáticos que reflejen de buena manera su situación.

La aplicación de estos modelos necesita contar con una base sólida de conocimientos, los cuales son complementados en los capítulos referentes a "Matemáticas Financieras" I y II, de manera que los estudiantes de la carrera de Actuaría deben estar preparados en este sentido, pues en el momento de salir al campo laboral es relevante contar con habilidades que sean de interés para las empresas, dado que la demanda de trabajo es alta.

Adicionalmente, el capítulo de "Aplicación a las Matemáticas Financieras" funge con la labor de integrar los conocimientos previos para iniciar con una gestión eficientemente las inversiones y deudas de las instituciones, tema íntimamente relacionada con la administración de riesgos, pues en dicho capítulo se otorgan las bases para comenzar con un estudio más detallado de esta materia impartida en el último semestre donde culminan todas las seriaciones.

De esta forma se resalta la importancia de este trabajo, además de que es de esperarse que, además del uso individual por parte de los alumnos, los profesores puedan incorporarlo a la bibliografía de los cursos, inclusive siendo un material de apoyo valioso en Diplomados o cursos especializados en Finanzas.

Bibliografía

- Broverman, Samuel. (2008). Mathematics of investment and credit.USA: Actex publications

- Campbell, John Y. Lo, Andrew W. MacKinlay, Archie Craig.(1996) Theeconometrics of financial markets. New Jersey. Princeton University Press.

- Coss Bu, Raúl. (1996). Análisis y evaluación de proyectos de inversión. D.F, México. Limusa

- Damodaran, Aswath. (2010). Applied corporate finance.New Jersey. Wiley

- Donald.D.W.A.(1996).Compound Interest and annuities certain. Cambridge: University printing house

- Lionel Martellini, Philippe Priaulet and Stéphane Priaulet.(1997). Fixed-Income securities: Valuation, risk management and portfolio strategies (The Wiley finance series). New Jersey University Press, Princeton.

- Palepu, K.G. Healy, P.M. & Bernard, V.L. (2004).Business analysis & valuation. Mason, Ohio: Thomson South-Western.

- Pliska, S.R. (1997). Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. Illinois. John Wiley & Sons.

- Robert & Hellen Cisell.(1999). Mathematics of finance. Boston: Houghton Hifflin Co

- Ross, Stephen, Westerfield, R., Jaffe, Jeffrey. (2001). Finanzas corporativas. México: McGraw-Hill

- Stephen G. Kellison. (1996).The theory of interest 2a.ed.Boston: Mc Graw Hill

- Weston, J.F. (1998).Finanzas en administración. California. McGraw-Hill.