



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

GENERACIÓN NUMÉRICA DE MALLAS ESTRUCTURADAS DE CALIDAD Y
ADAPTATIVAS EN REGIONES PLANAS IRREGULARES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA
GUILMER FERDINAND GONZÁLEZ FLORES

TUTOR
DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DR. PEDRO GONZÁLEZ CASANOVA HENRÍQUEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre, Vilma Guadalupe Flores Montero
por todos los años que dedicó a llevar una familia, por velar la educación, el cuidado y
el bienestar de sus hijos. Por ser una mujer buena y una buena madre.
Por ser una flor que perfuma el viento.*

*A mi abuela, Consuelo Montero Canto
por la bondad, la prudencia y la sabiduría que siempre le acompañó y supo esparcir en
sus hijos, la misma con que cobijó a sus nietos.*

Tanto esfuerzo siempre será reconocido en dos mujeres valientes de sonrisa sincera.

Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud en la realización de este trabajo:

Al Dr. Pablo Barrera Sánchez, le agradezco que accediera a ser mi mentor en todos estos años y que juntos hayamos logrado desarrollar proyectos, ideas, reflexiones y sobre todo, moldear el trabajo de otros estudiantes.

Mi agradecimiento a quienes han fungido como sinodales, primero por ser buenos profesores y por compartir conmigo sus experiencias: Francisco Domínguez-Mota, Irma García Calvillo, Humberto Madrid de la Vega y Pedro González Casanova. Deseo mencionar de manera particular al profesor Jesús López Estrada quien realizó un invaluable esfuerzo en la revisión de éste material nutriéndolo con numerosas observaciones y sugerencias, gracias por tu generosidad.

A los profesores Lourdes Velasco Arregui, Jesús López y Pablo les conocí en unos cursos del posgrado que impartieron en Mérida en 1990, cuando aún no finalizaba la carrera. Esos cursos fecundaron en mí el interés por el análisis numérico y el cómputo científico. Agradezco de manera especial a Lourdes el esfuerzo que siempre realiza en sus clases alentando el interés de los alumnos por aprender y descubrir nuevas ideas.

Agradezco a mis hermanos Pier, Amilcar, Vilma y Rossana por los tantos recuerdos compartidos durante la infancia y la vida juntos; y a mi padre Jorge su cariño. Gracias a los sobrinos por sus sonrisas y en especial a Cindy por el vínculo afectivo.

Agradezco a mis tíos Gener y René Flores Montero de quienes aprendí un oficio durante la niñez y adolescencia, gracias por su ejemplo de esfuerzo.

Prefacio

En este trabajo de tesis, estamos interesados en construir mallas estructuradas sobre regiones planas irregulares y nuestros principales intereses son

- 1) Desarrollar métodos automáticos que nos permitan controlar la distribución y el tamaño del área de las celdas, la ortogonalidad en la frontera, y la suavidad de las líneas curvilíneas.
- 2) Generar mallas que se concentren o se dispersen alrededor de una figura interna a la región o incluso en la frontera de la región.
- 3) Estudiar diferentes medidas de calidad para caracterizar la forma geométrica de los elementos de la malla.
- 4) Proponer funcionales discretos para construir mallas de calidad.

Los problemas que abordaremos involucran formalizar parte de la teoría desarrollada hasta el momento, extender los actuales métodos que hemos trabajado y plantear nuevos métodos para resolverlos.

El trabajo descrito en esta tesis se empezó a desarrollar desde hace mucho tiempo atrás ya que soy uno de los más antiguos miembros del grupo UNAMALLA y por lo tanto mis contribuciones están distribuidas en una escala de tiempo más grande.

En 1993, me incorporé al grupo de trabajo del profesor Barrera integrando una biblioteca gráfica a los programas experimentales en FORTRAN para visualizar la evolución del proceso de generación numérica de las mallas. En 1994, participé en el proyecto UNAMALLA 1.0 del profesor Barrera, financiado por la DGAPA, cuya finalidad era el estudio de funcionales discretos y el desarrollo de un sistema automático para la generación numérica de mallas. Durante los siguientes años participé en la depuración y calibración de los códigos y en pruebas de diferentes métodos de optimización de los funcionales discretos desarrollados por aquellos años usando para esto la super computadora CRAY, que en ese entonces era una novedad en la UNAM. De igual manera, durante esos años usamos el sistema de comunicación NEOS *server* (*Network Environment Optimization System*) para realizar la optimización de los funcionales discretos usando módulos de optimización a través de internet, una tendencia en esos años de la cual fuimos primeros participantes latinos. En 1995–1996 apoyé en el desarrollo del sistema TRIANG que trató sobre la generación numérica de triangulaciones óptimas usando

versiones adecuadas de los funcionales previamente estudiados. A finales de los 90's colaboré en el desarrollo del nuevo sistema UNAMALLA 2.0 para PC, véase [33], usando los nuevos funcionales discretos cuasi-armónicos [312, 32]. En este sistema se implementó una versión del método de optimización del Newton puntual el cual está descrito en [131]. Fruto de este trabajo fue el desarrollo íntegro de un sistema unix con bibliotecas gráficas libres que fue parte de mi trabajo de tesis de maestría, véase [146]. Este sistema fue posible usarlo en computadoras PC con Linux, también en workstation SUN y en el sistema IRIX de Silicon Graphics. Este sistema integraba la edición de la frontera de estudio, la construcción de la malla inicial y permitía al usuario visualizar todo el proceso de optimización. Para este sistema usamos los nuevos funcionales de área y de suavidad desarrollados por Tinoco [32, 312, 314]. Ese trabajo de tesis fue presentado en 2003.

A finales de los años 90 colaboré en el desarrollo de la primera versión del sistema UNAMALLA para Matlab. Este sistema fue de gran utilidad para Fco. Domínguez Mota en la prueba y calibración de los métodos que desarrolló en su tesis doctoral [91]. Las herramientas gráficas de este sistema sirvieron para el desarrollo de un sistema de triangulación que desarrolló Luis Carlos Velázquez en 2009 en su trabajo de maestría.

Durante la década 2000-2010 participé activamente en el desarrollo de funcionales que generan y preservan convexidad en las mallas [34, 35], así como de los funcionales discretos que generan mallas de alta calidad en la distribución del área de las celdas, véase [36, 37], en los funcionales discretos para generar mallas cuasi-armónicas adaptativas, véase [38], y en la revisión de los funcionales de área hasta ese momento desarrollados, cuyos resultados fueron publicados en un artículo en la revista SIAM [39].

Durante 2008–2010, colaboré en el diseño de la versión del sistema UNAMalla 4.0 en plataforma independiente que incorpora los funcionales desarrollados por Domínguez-Mota *et al.* [34, 35, 36]. En 2012 colaboré con el profesor Barrera y Javier Cortés para construir mallas cuasi-armónicas hexaedrales [40]. Por esos años recuperamos algunas ideas para mejorar la distribución del área de las celdas [41], las cuales fueron incorporadas en la versión UNAMalla 5.0 liberada en 2013.

En 2013 [41], presentamos en un evento internacional los nuevos funcionales para mejorar la distribución del área de las celdas. En 2014, presentamos los funcionales discretos para la adaptabilidad geométrica, véase [42]. En 2017 presentamos nuevas medidas de calidad para caracterizar cuadriláteros y nuevos funcionales discretos para generar mallas de calidad geométrica, véase [43].

Esta tesis describe parte del trabajo desarrollado y publicado en los últimos cinco años.

Contenido de los capítulos

Debido a la extensión en el tiempo de mis logros es necesario presentar mi trabajo en un contexto adecuado. Por tal razón, el desarrollo de esta tesis es el siguiente:

-
- **Capítulo 1.**
Se plantea la definición de malla estructurada discreta, se plantea el problema de la generación numérica de mallas y tópicos generales.
 - **Capítulo 2.**
Aquí presento un panorama de los métodos discretos que se han usado para la generación numérica de mallas estructuradas y de calidad.
 - **Capítulo 3.**
Se presentan funcionales discretos para mejorar la distribución del área de las celdas de la malla.
 - **Capítulo 4.**
Se presentan los funcionales discretos para adaptabilidad geométrica.
 - **Capítulo 5.**
Se presentan algunas medidas de calidad geométricas para cuadriláteros.
 - **Capítulo 6.**
Se presentan los funcionales discretos que se desarrollaron para mejorar la calidad geométrica de la malla.

Índice general

Prefacio	v
Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xxix
1. Introducción y generalidades	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.1.1. Una malla estructurada discreta	1
1.2. Notación	3
1.3. Mallas estructuradas sobre regiones irregulares	8
1.4. Generación numérica de mallas estructuradas y casi ortogonales	9
1.5. Mallas en regiones con agujeros y estructuradas por bloques	11
1.6. Una Malla adecuada y de calidad	13
1.7. Una malla dinámicamente adaptada	15
1.7.1. Una malla geoméricamente adaptada	16
1.8. Una malla discreta de elementos cuadriláteros	17
2. Un panorama de los métodos discretos para construir mallas	19
2.1. Laplaciano discreto	21
2.1.1. Laplaciano-Isoparamétrico	22
2.1.2. Laplaciano ponderado	24
2.2. Otros Métodos iterativos	28
2.3. Un marco de trabajo para obtener mallas óptimas usando una funcional de energía	32
2.4. Breve revisión de algunos métodos discretos	35
3. Funcionales discretos para mejorar la distribución del área de los elementos de la malla	61
3.1. Funcionales convexos de área	62
3.2. Sobre la ϵ -convexidad de una malla	66
3.3. Sobre la teoría del obstáculo y su regularización	69
3.4. Funcional bilateral de área, Tinoco–Barrera, 1997	82

3.5. Funcional bilateral de área, Domínguez–Barrera, 2007	83
3.6. Funcional bilateral de área, Toulorge <i>et al.</i> , 2013	86
3.7. Un nuevo funcional bilateral de área	87
3.7.1. Una propuesta de uso del funcional bilateral	94
4. Funcionales discretos para adaptividad geométrica	97
4.1. El principio de equidistribución	98
4.2. Sistema de ecuaciones Thompson-Thames-Mastin	100
4.3. Formulación Ryskin y Leal	101
4.4. Funcionales variacionales de adaptividad	105
4.5. Funcional armónico de adaptividad	106
4.6. Sobre las funciones de peso	108
4.7. Funcionales discretos de adaptividad	112
4.7.1. Procedimiento iterativo de adaptabilidad	115
4.7.2. Ejemplos	115
4.8. Adaptividad geométrica basada en la distancia a un objeto	129
4.8.1. Ejemplos	131
4.9. Una forma de construir mallas adaptativas usando una malla de referencia	148
4.9.1. Ejemplos	151
5. Sobre la distorsión de una celda y la calidad geométrica de una malla	173
5.1. Qué es cuadrilátero con mala forma geométrica	176
5.2. Notación	178
5.3. Algunos estimadores de error para la interpolación bilineal usando cua-	
driláteros	180
5.4. Medidas de calidad geométrica para cuadriláteros	183
5.4.1. Algunas medidas de calidad para cuadriláteros basadas en medi-	
das de calidad para triángulos	183
5.4.2. Paralelogramos: Area I 2015	191
5.4.3. Paralelogramos: Area II 2015	194
5.4.4. Paralelogramos: Rannacher y Turek 1992	195
5.4.5. Cuadrados: Lo 1985	196
5.4.6. Cuadrados: Hua 1995	197
5.4.7. Cuadrados: Shape de Knupp 2000	199
5.4.8. Cuadrados: Harmonic mean 2017	200
5.4.9. Rectángulos: Lo 1989	207
5.4.10. Rectángulos: van Rens 1998	209
5.4.11. Rectángulos: Wu 2011	209
5.4.12. Rectángulos: Wada 2008	210
5.4.13. Rectángulos: Remacle 2012	210
5.4.14. Rectángulos: Rectangles 2015	211
5.4.15. Rectángulos: MinRect 2015	212
5.5. Algunas medidas para el <i>aspect ratio</i>	216
5.5.1. <i>Aspect ratio</i> de Robinson	216

5.5.2. Propuesta de Field para calcular el <i>aspect ratio</i> de Robinson	220
5.5.3. Un propuesta para calcular el <i>aspect ratio</i> de Robinson	222
5.5.4. Una nueva forma de calcular el <i>Aspect ratio</i> de un cuadrilátero usando el rectángulo de área mínima	225
5.6. Otras métricas y medidas de calidad	227
5.6.1. Otras métricas de calidad basadas en el ángulo	227
5.6.2. Otras métricas de calidad: métrica de Oddy	228
5.6.3. Otras métricas de calidad: número de condición de Knupp	229
5.6.4. Otras métricas de calidad: taper y skew	230
5.7. Algunas métricas de calidad globales	235
5.7.1. Medidas ADO y MDO para el ángulo	238
5.7.2. Media aritmética y desviación estándar	239
5.7.3. Media geométrica (<i>shape parameter</i> o <i>shape quality</i>)	240
5.8. Ejemplos	241
5.9. Un enfoque estadístico para calificar y cuantificar la calidad geométrica de una malla	251
5.10. Sumario del capítulo	261
6. Suavizamiento de mallas optimizando medidas de calidad	263
6.1. Distorsión total de una malla	263
6.2. Mejora de la calidad geométrica de una malla	265
6.3. Suavizando mallas garantizando la convexidad de las celdas	277
6.4. Un nuevo funcional discreto basado en una medida de calidad para ob- tener rectángulos	277
6.5. Un nuevo funcional convexo discreto para obtener rectángulos	293
Conclusiones	313
Conclusiones	313
Trabajo a futuro	315
A. Algunas medidas de calidad para triángulos	317
A.1. Notación	317
A.2. Algunos estimadores de error por interpolación lineal usando elementos triangulares	318
A.3. El número de condición de un mapeo lineal	325
A.3.1. Caso: triángulo equilátero	325
A.3.2. Caso: triángulo rectángulo isósceles	327
A.4. Sobre la métrica algebraica Garanzha–Reshetnyak	329
B. Mapas de calidad para algunas mallas	333
C. Galería de mallas convexas	373
Bibliografía	467

Índice de figuras

1.1. Una malla como mapeo entre un rectángulo y una región poligonal. . . .	2
1.2. Una región poligonal cerrada y simplemente conexa.	3
1.3. Arreglo matricial para los nodos de una malla estructurada.	4
1.4. Una celda y los nodos alrededor de ella.	5
1.5. Bahía de La Habana como región poligonal irregular.	9
1.6. Una malla cuasi-armónica usando el funcional cuasi-armónico "adaptable". Figura tomada de [312].	10
1.7. Una malla casi-ortogonal usando el funcional convexo de área en combinación con el funcional clásico de ortogonalidad, ver [91].	11
1.8. Una malla estructurada por bloques sobre una barra de combustible nuclear. Figura tomada de [309, 311].	13
1.9. Una malla sobre la bahía de La Habana adaptada usando la función monitor $f(x, y) = \sin(2\pi x - 4\pi y)$. Figura tomada de [38].	16
1.10. Una malla adaptativa cerca de un objeto.	17
1.11. (a) Una malla no estructurada formada por cuadriláteros sobre una llave española. Figura tomada de [221]. (b) Una malla no estructurada formada por cuadriláteros sobre una manopla de acero. Figura construida con <code>Gmsh</code> , véase [139].	18
2.1. Las 4 celdas que rodean al punto $\mathbf{x}_{i,j}$ en una malla estructurada.	22
2.2. (a) Malla obtenida por el esquema Laplaciano. (b) Malla obtenida por el método Laplaciano-Isoparamétrico, ver [148].	23
2.3. Efecto del Laplaciano ponderado en una triangulación formada por 6 elementos.	24
2.4. Una malla en la cual se ha asociado elasticidad a las conexiones de los nodos vecinos a (i, j) . Figura tomada de [272].	25
2.5. Una malla obtenida por el método GAG de Robey sobre el manto freático de la montaña Yucca en Nevada, USA. Figura tomada de [272].	26
2.6. Idea geométrica del esquema Laplaciano sobre una malla triangular	26
2.7. Idea geométrica del esquema de área ponderada sobre una malla estructurada. Figura tomada de [151].	27

2.8. (b) Malla doblada usando el esquema Laplaciano (d) malla convexa obtenida por el método de área ponderada y (f) malla convexa obtenida por el método Laplaciano-Isoparamétrico. Figura tomada de [151].	28
2.9. Región rectangular con una intrusión circular. Figura tomada de [6].	29
2.10. Una malla doblada en la región en forma de L.	30
2.11. Esquema de ocho puntos propuesta por Godunov [144].	30
2.12. Una malla estructurada obtenida por el esquema de Godunov <i>et al.</i> [144]. Figura tomada de [334].	31
2.13. Malla inicial (a) y (b) malla optimizada. Figura tomada de [110].	34
2.14. (a) Malla inicial (b) malla de energía potencial óptima.	35
2.15. Malla óptima alrededor de un <i>crack</i> (b) Malla óptima en la cual las celdas se ajustan a un problema donde gradiente es alto.	37
2.16. Las cuatro celdas alrededor de cada nodo i, j	39
2.17. (a) una malla inicial de nodos aleatorios (b) malla optimizada luego de una iteración (c) malla optimizada luego de 2 iteraciones (d) malla optimizada y convexa luego de 20 iteraciones. Figura tomada de [179].	40
2.18. (a) Una malla inicial del tipo O para un ala de avión NACA 0012 (b) malla óptima por el funcional de suavidad y ortogonalidad de Kennon. Figura tomada de [179].	41
2.19. Una malla adaptada minimizando (2.41), donde W son valores de una función tangente hiperbólica. Figura tomada de [60].	44
2.20. Celdas hexaedrales que rodean al nodo $P(i, j, k)$. Figura tomada de [61].	45
2.21. Una malla de $21 \times 21 \times 4$ de nodos aleatorios. Figura tomada de [61].	45
2.22. (a) Se muestra la malla de $21 \times 21 \times 4$ optimizada luego de 19 iteraciones y luego de 3 más la malla ya es convexa (b) malla optimizada luego de 20 iteraciones y la inmediata abajo se obtuvo luego de 50 iteraciones. Figura tomada de [61].	46
2.23. Una malla sobre la superficie de la cabina de un avión. Figura tomada de [61].	46
2.24. Notación para puntos que conectan con $P_{i,j}$. Figura tomada de [200].	47
2.25. Malla del tipo O alrededor del ala de un avión con frontera exterior rectangular y circular. Figura tomada de [200].	48
2.26. Regularización de Barrera para $1/\alpha$	55
2.27. Una malla obtenida como composición de mapeos. Figura tomada de [16].	57
3.1. Regularización de Domínguez y Barrera para $1/\alpha$	64
3.2. Forma gráfica del obstáculo suave y dinámico para los funcionales convexos de área.	65
3.3. Detalle de (a) una malla convexa G donde $G \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ (b) una malla convexa G donde $G \in \partial\mathcal{M}_0(\Omega)$	66
3.4. (a) Curvas de nivel y (b) superficie $I^h(G)$. Figura tomada de [156].	70
3.5. Regularización propuesta por Ivanenko para $1/\alpha$, $\epsilon = 0.1$	72
3.6. Regularización de Barrera para $1/\alpha$	73
3.7. Regularización de Tinoco para $1/(\omega + \alpha)$	75

3.8. (a) Función $\mathcal{X}_\epsilon(\alpha)$ y (b) Regularización de Kaporin para $1/\alpha$	76
3.9. Regularización de Riemslaugh y Vierendeels para $1/\alpha$	77
3.10. Conforme $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi_\epsilon(\alpha)$ forma un obstáculo para elementos $\alpha \leq 0$	78
3.11. Un función con obstáculo infinito y una infinidad de puntos críticos cerca de $x = 0$	79
3.12. Regularización modificada de Kaporin propuesta por Montenegro.	82
3.13. Forma gráfica del funcional bilateral de Tinoco–Barrera.	84
3.14. Forma gráfica del funcionales bilateral de Barrera–Domínguez.	85
3.15. Un función con obstáculo infinito. Figura tomada de [319].	86
3.16. Forma gráfica del funcional bilateral de área de Toulorge <i>et al.</i>	87
3.17. Idea gráfica de la formación de un obstáculo en $x = 0.1$ usando (3.39).	89
3.18. Una malla ϵ -convexa sobre la región <i>Blue Lagoon</i> y el histograma del área.	89
3.19. Malla óptima sobre <i>Blue Lagoon</i> y el histograma del área.	90
3.20. Idea gráfica de la formación de un obstáculo en $x = 4$ usando 3.42.	91
3.21. Forma gráfica de la nueva funcional bilateral $F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G)$	92
3.22. Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región Blue lagoon.	92
3.23. Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región del mar de Aral de 1985.	93
3.24. Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región del embalse superior de Arkansas.	93
3.25. Gráfica de valores para σ_{eq} iniciando con 1000 y para $\lambda = .07$ para 10 actualizaciones.	95
4.1. Región de estudio Ω y región interna Γ	98
4.2. Una malla 1D transformada por el mapeo $x(\xi) = (e^{-5\xi} - 1)/(e^{-5} - 1)$	99
4.3. Idea gráfica de los puntos de adaptividad ξ_i obtenidos usando como función de peso a la longitud de arco de una función monitor $u(x)$	109
4.4. Un elemento triangular y notación vectorial empleada en la Tabla 4.1.	114
4.5. (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.49): elipse.	117
4.6. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.49) sobre un cuadrado unitario. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 6.	118
4.7. (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.51): parábola.	119
4.8. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.51) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.	120
4.9. (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.52): circunferencia.	121
4.10. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.52) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.	122
4.11. (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.53): seno.	123
4.12. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.53) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.	124

4.13. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.54) sobre un cuadrado. (a) tiempo $t = 0.0$, iteración 1, (b) tiempo $t = 0.0$, iteración 4, (c) tiempo $t = 0.25$, iteración 1, (d) tiempo $t = 0.25$, iteración 4. . . .	126
4.14. Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.54) sobre un cuadrado. (a) tiempo $t = 0.5$, iteración 1, (b) tiempo $t = 0.5$, iteración 4, (c) tiempo $t = 0.75$, iteración 1, (d) tiempo $t = 0.75$, iteración 4. . . .	127
4.15. Mallas adaptativas de 81×81 usando la función monitor (4.49) sobre las regiones: (a) la habana (b) Perú (c) ucha, (d) pato.	128
4.16. Región de estudio Ω y región interna Γ	129
4.17. Forma geométrica de las funciones de control (4.56) para diferentes parámetros de densidad c_a y $\alpha = 1$	130
4.18. Una malla adaptativa alrededor de Γ usando la función de control o adaptividad (4.56) para $\alpha = 10$ y $c_a = 1$	131
4.19. Un acercamiento a la zona de adaptividad.	132
4.20. Mallas adaptativas de 81×81 usando la función monitor (4.57) sobre: (a) malla inicial (b) adaptividad usando $c_a = 1$ (c) adaptividad usando $c_a = 0.1$, (d) adaptividad usando $c_a = 0.01$	133
4.21. Las celdas se han concentrado en una franja a distancia constante de Γ	134
4.22. (a) malla adaptiva en una franja al exterior Γ (b) adaptividad en una franja al interior de Γ	135
4.23. Con el parámetro de escala $\alpha = 10$ obtuvimos dos mallas adaptativas: (a) usando $c_a = 1$ y (b) usando $c_a = 0.1$	137
4.24. Forma geométrica de las funciones de control (4.58) para diferentes parámetros de densidad c_a y $\alpha = 1$	138
4.25. Con el parámetro de escala $\alpha = 10$ obtuvimos dos mallas adaptativas: (a) usando $c_a = 1$ y (b) usando $c_a = 0.1$	139
4.26. Mallas adaptativas de 81×81 sobre un cuadrado unitario usando los pesos (4.59) sobre: (a) $\Gamma =$ elipse (b) $\Gamma =$ parábola (c) $\Gamma =$ circunferencia, (d) $\Gamma =$ función seno.	141
4.27. Mallas adaptativas de 81×81 usando usando los pesos (4.59) donde $\Gamma =$ elipse y sobre las regiones irregulares: (a) la habana (b) Perú (c) ucha, (d) pato.	142
4.28. Mapa del estrecho de Gibraltar.	143
4.29. Una malla adaptativa a la fronteras del estrecho de Gibraltar	144
4.30. Una malla adaptativa por capas cercanas a la frontera del estrecho de Gibraltar	144
4.31. Una malla adaptativa usando un peso fijo en las capas cercanas a la frontera del estrecho de Gibraltar	145
4.32. El embalse superior de Arkansas obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega, \epsilon}(G) + \sigma F_o(G)$, para $\sigma = 0.5$	146
4.33. Detalle cercano a la frontera de la malla de la figura 4.32.	147
4.34. Malla adaptativa ponderando el funcional de ortogonalidad con la elección de pesos (4.60).	147

4.35. Detalle cercano a la frontera de la malla de la figura 4.34.	148
4.36. Malla física, malla lógica y malla de referencia.	149
4.37. (a) Detalle de un mosaico (b) malla de referencia asociada al mosaico. . .	151
4.38. Malla adaptiva de 88×88 que describe un tapete.	152
4.39. Malla adaptiva de 88×88 que representa un tapete, usando el funcional ponderando el área.	153
4.40. Malla de referencia con valores intercambiados con respecto a la Figura 4.37(b).	154
4.41. Malla adaptiva de 88×88 que representa un tapete, usando el funcional ponderando el área y la malla de referencia, Figura 4.40.	155
4.42. Imagen en el canal B del escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán).	157
4.43. Malla adaptativa de 357×300 al escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán), usando el funcional de longitud ponderada. . .	158
4.44. Malla adaptativa de 357×300 al escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán), usando el funcional de área ponderada.	160
4.45. Imagen de la cara del pato Donald	161
4.46. Malla adaptativa de 150×150 sobre la imagen del pato Donald.	162
4.47. Imagen en modo RGB del rostro de Lena (Lena Soderberg) (b) histo- grama de intensidades de los pixeles para esta imagen.	163
4.48. El rostro de Lena en una malla adaptiva de 272×300	164
4.49. Imagen en modo RGB de la pintura <i>Marilyn Diptych (pink)</i> de Andy Warhol (b) Histograma de intensidades.	166
4.50. Malla adaptiva sobre una de las pinturas <i>Marilyn Diptych</i> de Andy Warhol	167
4.51. Una ampliación de la malla adaptiva de Marilyn que contiene un rizo y las cejas.	168
4.52. Imagen en escala de grises de una fotografía antigua de Sergey Ivanenko.	169
4.53. Malla adaptativa de 376×350 sobre una fotografía de Sergey Ivanenko.	171
4.54. Una malla adaptiva de 332×498 sobre una imagen del pronóstico de ve- locidades de la tormenta Manuel y el huracán Ingrid del 15 de septiembre de 2013.	172
5.1. Dos formas para calcular el <i>aspect ratio</i>	174
5.2. Algunas formas de los cuadriláteros.	175
5.3. Un triángulo con mala forma geométrica.	176
5.4. Un cuadrilátero convexo con mala forma geométrica.	177
5.5. Algunos elementos de un cuadrilátero.	179
5.6. Cuatro triángulos a partir de las diagonales de una celda.	179
5.7. Curvas de nivel para la medida de calidad Pebay modified (5.8) que detecta cuadrados.	184
5.8. Curvas de nivel para la medida de calidad (5.9) Frey y George, que detecta cuadrados.	185
5.9. Un trapecio rectángulo en el cual la medida <i>scaled jacobian</i> no cuantifica adecuadamente la distorsión del elemento.	187

5.10. Curvas de nivel para la medida (a) <i>scaled jacobian</i> y (b) la modificación propuesta (5.12).	188
5.11. Curvas de nivel para la medida de calidad (5.13) que detecta cuadrados.	189
5.12. Curvas de nivel para la medida de calidad Area I 2015.	193
5.13. Curvas de nivel para la medida de calidad Area II 2015.	194
5.14. Vectores normales entre lados opuestos del cuadrilátero.	195
5.15. Curvas de nivel para la medida de calidad de Lo (5.21) que detecta cuadrados.	197
5.16. Descomposición de un cuadrilátero en cuatro triángulos.	198
5.17. Curvas de nivel para la medida de calidad de Hua (5.23) que detecta cuadrados.	199
5.18. Curvas de nivel para la medida de calidad Shape de Knupp (5.24) que detecta cuadrados.	200
5.19. Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero.	202
5.20. Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles.	203
5.21. Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando <i>radius ratio</i>	204
5.22. Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando (5.29).	205
5.23. Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando la medida $\mu(T)$ de Cavendish.	206
5.24. Curvas de nivel para la medida de calidad de Lo 1989 (5.31) que detecta rectángulos.	208
5.25. Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de <i>aspect ratio</i> 4.	208
5.26. Curvas de nivel para la medida de calidad Rectangles 2015 (5.33) que detecta rectángulos.	212
5.27. Rectángulo de área mínima que contiene al <i>convex hull</i> de la nube de puntos.	213
5.28. El rectángulo que contiene al cuadrilátero y un lado se puede calcular usando proyección de vectores.	214
5.29. Un cuadrilátero de referencia y los cuatro rectángulos que contienen a ese cuadrilátero y uno de sus lados.	215
5.30. Rectángulo que asocia Robinson a un cuadrilátero.	217
5.31. (a) Cuadrilátero en posición original y rectángulo propuesto por Robinson para calcular el <i>aspect ratio</i> y (b) cuadrilátero que ha sido rotado con respecto a A a 45° y el rectángulo propuesto por Robinson.	218
5.32. Cuatro valores para el <i>aspect ratio</i> de Robinson, por cada lado uno por cada lado: $AR1 = 1.17$, $AR2 = 1.22$, $AR3 = 1.11$ y $AR4 = 1.3$	219
5.33. Un cuadrilátero cuyo <i>aspect ratio</i> de Robinson es 1, pero dista en mucho de ser un cuadrado.	219
5.34. (a) Para el primer sistema coordenado obtuvimos $AR = 1.147$ y para el segundo (b) $AR = 1.166$	221

5.35. Figura esquemática de la medida de calidad de Field para detectar cuadrados.	222
5.36. Rectángulo que mejor se ajusta a cuatro conjunto de puntos uno por cada cara.	223
5.37. Rectángulo que mejor se ajusta a las caras de un cuadrilátero del ejemplo 2. El <i>aspect ratio</i> de Robinson con esta técnica es de $AR = 1.000$	224
5.38. Rectángulo que mejor se ajusta a las caras de un cuadrilátero del ejemplo 1. El <i>aspect ratio</i> de Robinson con esta técnica es de $AR = 1.0802$	224
5.39. Rectángulo de área mínima que contiene al cuadrilátero	225
5.40. Rectángulo de área mínima que contiene al cuadrilátero y rectángulo que asocia Robinson para su <i>aspect ratio</i> para el ejemplo 3.	226
5.41. Rectángulo de área mínima y rectángulo que asocia Robinson para su <i>aspect ratio</i> para el ejemplo 4.	226
5.42. Medidas de <i>aspect ratio</i> , <i>skew</i> y <i>taper</i> de un cuadrilátero que se emplean en NASTRAN.	230
5.43. Ventanas del programa Femap de Siemens [105].	233
5.44. Una ventana del programa FEMAP donde se enlistan las medidas de calidad implantadas en la biblioteca NX NASTRAN, [239].	234
5.45. Una malla de 150×55 sobre el embalse superior de Arkansas obtenida optimizando $0.5 * S_w + 0.5 * AO$ y su histograma de distribución de área.	235
5.46. Una malla distorsionada aleatoriamente a partir de la malla mostrada en la Figura 5.45 y su histograma de distribución de área.	236
5.47. (a) Mapa de valores para la medida de calidad de MinRect 2015 (b) y su histograma (c) Histograma de distribución de los ángulos interiores.	237
5.48. (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.	242
5.49. (a) Histograma de ángulos interiores (b) Histograma de la distribución del <i>aspect ratio</i>	244
5.50. (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.	245
5.51. (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1989 y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de MinRect.	246
5.52. (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.	249
5.53. Ilustración que representa los conjuntos en que ordenamos las posibles formas de los elementos de una malla G	252
5.54. Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_w	253
5.55. Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_w con el funcional clásico de área.	256

5.56. Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_ω con el funcional clásico de área-ortogonalidad.	257
5.57. Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}$ con el funcional clásico de área-ortogonalidad.	258
5.58. Elementos caracterizados para una malla de 35×77 sobre la región strait of Gibraltar obtenida optimizando un funcional discreto con el cual obtenemos elementos cercanos a ser rectángulos y que discutiremos en el siguiente capítulo.	259
5.59. Elementos caracterizados para una malla de 41×41 sobre la región rosa obtenida optimizando un funcional discreto con el cual obtenemos elementos cercanos a ser rectángulos y que discutiremos en el siguiente capítulo.	260
6.1. Recíproco de la medida $\mu(Q)$ como una métrica de la distorsión de una celda. En este ejemplo hipotético, se considera $\mu(Q)$ es continuamente diferenciable; sin embargo, no todas las medidas discutidas en el capítulo anterior tienen esta propiedad.	264
6.2. Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de <i>aspect ratio</i> 2.	267
6.3. Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de <i>aspect ratio</i> 4.	268
6.4. Función objetivo de Zavattieri para $p = 2, 3$ y 4 usando una función que representa una medida de calidad $\mu(Q)$ que contiene un discontinuidad diferenciable.	269
6.5. Función objetivo de Sastry <i>et. al</i> [279].	270
6.6. Patrón de búsqueda que se emplea en el algoritmo PS [247].	271
6.7. En este ejemplo $f(x) = \frac{2}{1+e^{-\beta x}} - 1$ aproxima la derivada de $ x $ conforme $\beta > 0$ es grande.	272
6.8. Esbozo de la métrica de Knupp [192].	274
6.9. Gráfica de la forma de una medida de calidad y el obstáculo logaritmico en (6.16).	275
6.10. Curvas de nivel para la función (6.20).	278
6.11. Curvas de nivel para la función (6.23).	279
6.12. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Ra}(G)$ para $\sigma = 0.5$	280
6.13. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.12.	282
6.14. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{AO}(G)$ para $\sigma = 0.5$	283
6.15. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.14.	285

6.16. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)H_\omega(G) + \sigma F_{Ra}(G)$ para $\sigma = 0.5$	287
6.17. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.16.	289
6.18. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)H_\omega(G) + \sigma F_{AO}(G)$ para $\sigma = 0.5$	290
6.19. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.18.	292
6.20. Diagonales de un cuadríatero y el segmento que une los puntos medios entre ellas.	293
6.21. (4 celdas que rodean al punto $\mathbf{x}_{i,j}$	294
6.22. Curvas de nivel y superficie para $F_{Rd}(Q)$, para $\beta = 1$	295
6.23. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ para $\sigma = 0.99$ y $\beta = 1.0$	296
6.24. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.23.	298
6.25. Dec29, malla de 41×41 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ para $\sigma = 0.99$ y $\beta = 1.0$	299
6.26. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 6.25.	301
6.27. Comparación gráfica de la forma del funcional que propone Garanzha y la que nosotros usamos.	303
6.28. Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)A_\omega(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ con $\sigma = 0.99$ y usando $\alpha^* = \sqrt{2}$	305
6.29. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.30.	307
6.30. Dec20, malla de 41×41 obtenida optimizando $(1 - \sigma)A_\omega(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ con $\sigma = 0.99$ y usando $\alpha^* = \sqrt{2}$	308
6.31. Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 6.30.	310
A.1. Algunos elementos de un triángulo.	317
A.2. <i>Aspect ratio</i> geométrico de Cavendish.	323
A.3. Mapeo lineal entre un triángulo equilátero y otro.	326
A.4. Mapeo lineal entre un triángulo rectángulo isósceles y otro.	328
A.5. Mapeo trilineal entre un tetredro regular y uno en posición general. Figura tomada de [48].	330
A.6. Mapeo trilineal entre un triángulo y un triángulo geodésico. Figura tomada de [130].	331
B.1. Dec28, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_R$ para $\sigma = 0.5$	334
B.2. Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.	335

ÍNDICE DE FIGURAS

B.3. Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.	336
B.4. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.	337
B.5. Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.	338
B.6. Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.	339
B.7. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.	340
B.8. Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.	341
B.9. Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.	342
B.10. Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.	343
B.11. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (<i>mean ratio</i>), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.	344
B.12. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.	345
B.13. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida <i>radius ratio</i> para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.	346
B.14. Dec29, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_R$ para $\sigma = 0.01$.	347
B.15. Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.	348
B.16. Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.	349
B.17. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.	350
B.18. Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.	351
B.19. Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.	352
B.20. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.	353
B.21. Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.	354
B.22. Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.	355
B.23. Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.	356

B.24. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (<i>mean ratio</i>), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.	357
B.25. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.	358
B.26. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida <i>radius ratio</i> para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.	359
B.27. Dec29, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma A_\omega + (1 - \sigma)F_R$ para $\sigma = 0.01$.	360
B.28. Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.	361
B.29. Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.	362
B.30. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.	363
B.31. Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.	364
B.32. Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.	365
B.33. Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.	366
B.34. Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.	367
B.35. Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.	368
B.36. Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.	369
B.37. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (<i>mean ratio</i>), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.	370
B.38. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.	371
B.39. Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida <i>radius ratio</i> para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.	372
C.1. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	374
C.2. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	375
C.3. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	376
C.4. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	377

C.5. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	378
C.6. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	379
C.7. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	380
C.8. Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	381
C.9. Cirunferencia, 41 puntos por lado, obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	382
C.10.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	383
C.11.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	384
C.12.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	385
C.13.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	386
C.14.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	387
C.15.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	388
C.16.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	389
C.17.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$, usando la versión cociente del funcional.	390
C.18.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	391
C.19.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	392
C.20.Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	393
C.21.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	394
C.22.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	395
C.23.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	396
C.24.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	397
C.25.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	398

C.26.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	399
C.27.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	400
C.28.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	401
C.29.Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	402
C.30.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	403
C.31.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	404
C.32.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	405
C.33.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	406
C.34.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	407
C.35.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	408
C.36.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	409
C.37.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	410
C.38.Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	411
C.39.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	412
C.40.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	413
C.41.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	414
C.42.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	415
C.43.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	416
C.44.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	417
C.45.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$, usando la versión cociente del funcional.	418
C.46.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	419

C.47.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	420
C.48.Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	421
C.49.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	422
C.50.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	423
C.51.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	424
C.52.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	425
C.53.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	426
C.54.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	427
C.55.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 0.1$	428
C.56.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 0.1$	429
C.57.England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 0.1$	430
C.58.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	431
C.59.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	432
C.60.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	433
C.61.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	434
C.62.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	435
C.63.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	436
C.64.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	437
C.65.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	438
C.66.Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	439
C.67.Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	440

C.68. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	441
C.69. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	442
C.70. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	443
C.71. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	444
C.72. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	445
C.73. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 0.1$	446
C.74. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 0.1$	447
C.75. Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 0.1$	448
C.76. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	449
C.77. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	450
C.78. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	451
C.79. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	452
C.80. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.	453
C.81. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.	454
C.82. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$	455
C.83. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$	456
C.84. Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$	457
C.85. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$	458
C.86. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$	459
C.87. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$	460
C.88. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$	461

C.89. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional. 462

C.90. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional. 463

C.91. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$ 464

C.92. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$ 465

C.93. Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$ 466

Índice de tablas

4.1. Algunos funcionales geométricos discretos.	113
5.1. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 30×30 mostrada en la Figura 5.48. Para ésta malla obtuvimos ADO=40.74, MDO=74.31.	243
5.2. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 5.50 y 5.51. Para ésta malla obtuvimos ADO=1.29, MDO=85.47.	247
5.3. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 35×77 , mostrada en la Figura 5.52. Para ésta malla obtuvimos ADO=9.06, MDO=70.49.	250
5.4. Tabla de intervalos de aceptabilidad para las medidas de calidad geométrica revisadas y propuestas.	254
5.5. Valores tomados de VEREDICT [292] y NX NSTRAN [239].	255
6.1. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.12. Para ésta malla obtuvimos ADO=10.62 y MDO=85.67.	281
6.2. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.14. Para ésta malla obtuvimos ADO=15.68 y MDO=78.65.	284
6.3. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.16. Para ésta malla obtuvimos ADO=22.03 y MDO=81.04.	288
6.4. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.18. Para ésta malla obtuvimos ADO=13.21 y MDO=76.17.	291
6.5. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.23. Para ésta malla obtuvimos ADO=4.32 y MDO=75.89.	297
6.6. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 , mostrada en la Figura 6.25. Para ésta malla obtuvimos ADO=8.44 y MDO=83.35.	300

ÍNDICE DE TABLAS

6.7. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.28. Para ésta malla obtuvimos ADO=9.12 y MDO=68.86.	306
6.8. Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 , mostrada en la Figura 6.30. Para ésta malla obtuvimos ADO=14.02 y MDO=63.88.	309

Capítulo 1

Introducción y generalidades

1.1. Planteamiento del problema

El problema de la generación numérica de mallas estructuradas se puede plantear a través de construir un mapeo G de la región de estudio Ω hacia el cuadrado unitario B de manera que este mapeo conforme la frontera y sea invertible; con esto, la malla G que provenga de mapear una rejilla en B , cubrirá toda la región y las celdas serán convexas.

1.1.1. Una malla estructurada discreta

Definición 1 Sea B_2 el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Construyamos una rejilla $m \times n$ uniforme sobre B_2

$$U(m, n) = \left\{ \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \right\}$$

donde

$$\partial U(m, n) = \partial B_2 \cap U(m, n).$$

Una malla discreta G de $m \times n$ sobre Ω es un mapeo

$$G : U(m, n) \mapsto \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$G(\partial U) \subset \partial \Omega$$

y

$$\partial G = G(\partial U) = \Gamma_{mn} \subset \partial \Omega$$

1. INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

Aquí Γ_{mn} representa la colección de nodos de la malla que se encuentran sobre la frontera Ω . En ese sentido, la región poligonal Γ_{mn} es una aproximación a Ω .

Nuestro interés es construir una malla $G(m, n)$ sobre Ω que no se doble al transformar una cuadrícula del cuadrado unitario $U(m, n)$ a la región, vea la Figura 1.1.

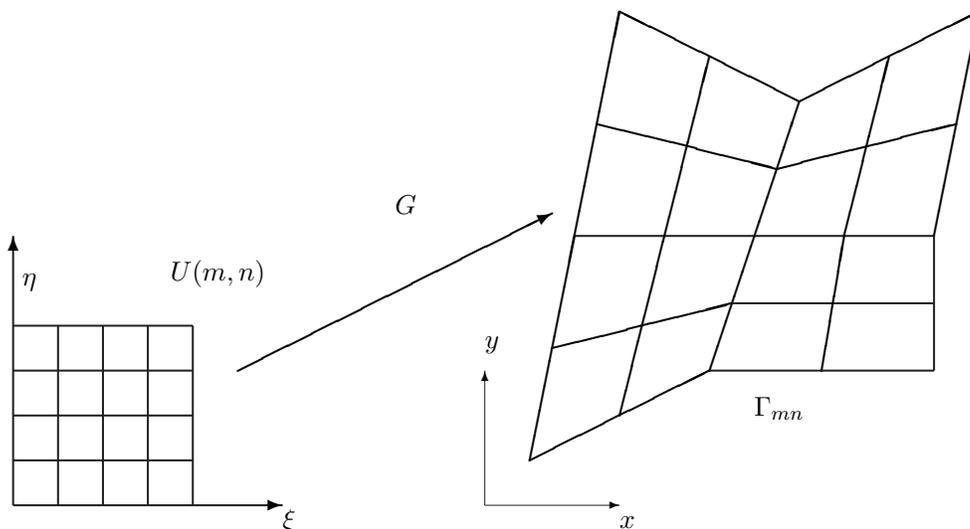


Figura 1.1: Una malla como mapeo entre un rectángulo y una región poligonal.

Si el mapeo G no es invertible, la malla puede estar formada por celdas no convexas, con orientación diferente a B_2 *inverted*, o dobladas (*tangled*); es decir, que los segmentos se intersecten entre sí. En ambos casos la malla no es útil para los cálculos numéricos. En la literatura, los métodos que se describen como en 1.1.1, se conocen como *métodos del mapeo*. La conectividad de las celdas en Γ_{mn} viene heredada de la rejilla en B_2 y esto nos será de gran utilidad para su almacenamiento y fácil acceso a las celdas.

Durante éste y el siguiente capítulo iremos abundando sobre la notación que emplearemos en este trabajo.

Para fines prácticos, pediremos que la región Ω sea una región simplemente conexa (sin agujeros), y sin que la frontera $\partial\Omega$ se autointersecte. Lo usual es que la frontera esté conformada por una región poligonal.

1.2. Notación

Consideremos una región Ω del plano definida por una poligonal Γ compuesta por los vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$, cerrada simple y orientada en sentido positivo, véase la Figura 1.2

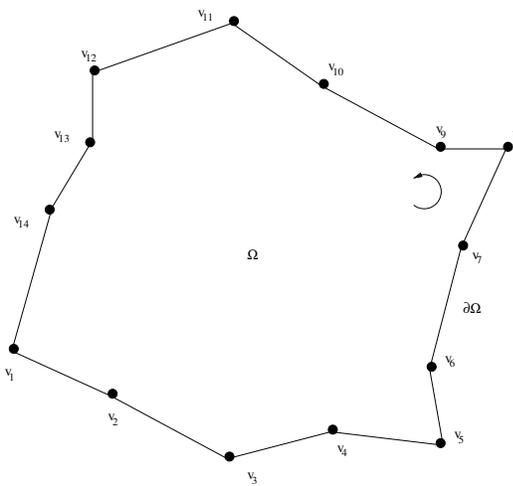


Figura 1.2: Una región poligonal cerrada y simplemente conexa.

Es necesario contar con una notación compacta de la forma en que los nodos de la malla se encuentran conectados formando las celdas. En el capítulo anterior señalamos que nuestro interés es construir mallas estructuradas a partir del método de mapeo, por lo que es inmediato asociar los nodos de la malla, interiores y sobre la frontera, a un arreglo matricial [30]. En la Figura 1.3 se observa un arreglo matricial de los nodos de una malla estructurada de $m \times n$.

Los nodos en la frontera del arreglo matricial serán puntos fijos de la frontera de Ω . Si $\mathbf{x}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ es un nodo interior de la malla, es inmediato identificar los nodos y celdas que rodean a ese nodo de referencia, observe la Figura 1.4

Una vez que hemos realizado la asociación de los nodos de la malla con un arreglo matricial, realizamos la siguiente

Definición 2 (véase Domínguez [91]) Sean m y n números naturales mayores que 2.

Decimos que el conjunto de puntos del plano

$$G = G(m, n) = \{\mathbf{x}_{i,j} | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

con lados

$$L_1(G) = \{\mathbf{x}_{i,1} | i = 1, \dots, m\}$$

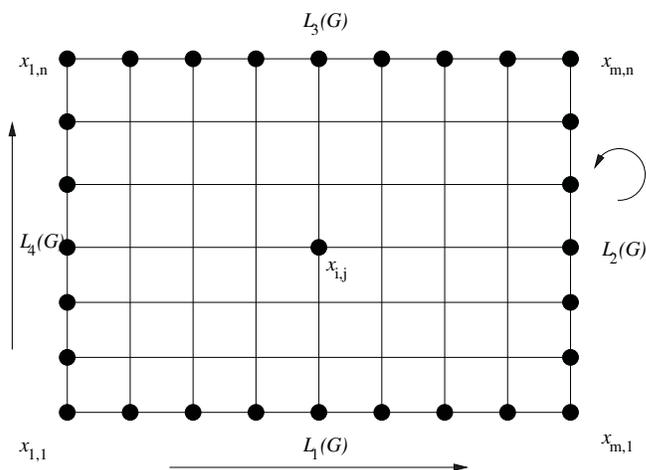


Figura 1.3: Arreglo matricial para los nodos de una malla estructurada.

$$L_2(G) = \{\mathbf{x}_{m,j} | j = 1, \dots, n\}$$

$$L_3(G) = \{\mathbf{x}_{i,n} | i = 1, \dots, m\}$$

$$L_4(G) = \{\mathbf{x}_{1,j} | j = 1, \dots, n\}$$

es una malla estructurada cuyos elementos son cuadriláteros, admisible y discreta de orden $m \times n$ para Ω , si se satisface que

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^4 L_i(G).$$

Decimos además, que la malla G es convexa si cada uno de los $(m-1)(n-1)$ cuadriláteros (o celdas) $c_{i,j}$ de vértices $\{\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j}, \mathbf{x}_{i,j+1}, \mathbf{x}_{i+1,j+1}\}$, con $1 \leq i < m$ y $1 \leq j < n$, es convexo.

Los conjuntos $L_1(G)$, $L_2(G)$, $L_3(G)$ y $L_4(G)$, a los cuales nos referimos como los lados de la frontera de la malla o los lados de la malla, provienen, en su conjunto, de una parametrización de la frontera de la región Ω y salvo se diga lo contrario, serán nodos fijos de la malla.

Es importante observar que la malla G representa una discretización Ω^h de Ω :

$$\Omega^h = \bigcup_{i=1}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{n-1} c_{i,j}$$

de tal forma que

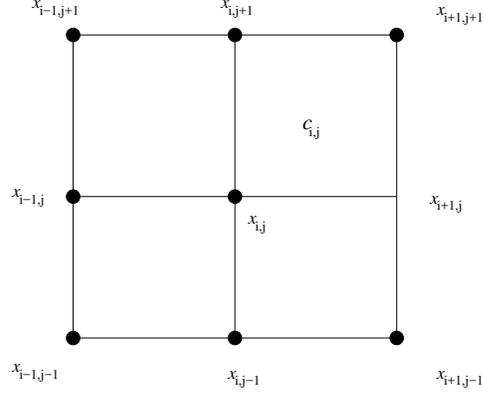


Figura 1.4: Una celda y los nodos alrededor de ella.

$$\Omega^h \longrightarrow \Omega, \quad \text{cuando } N \longrightarrow \infty.$$

Definición 3 (véase [30, 145]) *Un funcional discreto $F(G)$ sobre la malla $G = \{\mathbf{x}_{i,j}\}$ es una función sobre la totalidad de celdas*

$$F(G) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(c_{i,j})$$

donde $c_{i,j}$ es la celda i, j de la malla y

$$f(c_{i,j}) = f(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j}, \mathbf{x}_{i,j+1}, \mathbf{x}_{i+1,j+1})$$

es una función de los vértices que mide alguna propiedad geométrica de la celda. Aquí m, n son el número de puntos horizontales y verticales de las líneas curvilíneas de la malla.

Nuestro objetivo es obtener mallas convexas sobre Ω ; sin embargo, para que la condición de convexidad sea una condición numéricamente estable debe ser independiente de la escala. Dada una malla G de $m \times n$ sea $\bar{\alpha}(G)$ el promedio de las áreas orientadas de todos los triángulos de la malla. Diremos que G es ϵ -convexa si dado $\epsilon > 0$, el área de todos los triángulos de las celdas es mayor que $\epsilon \cdot \bar{\alpha}(G)$. Esta condición es numéricamente estable e independiente de la escala [91] y la revisaremos en el siguiente capítulo.

El conjunto de todas las mallas ϵ -convexas sobre Γ_{mn} lo denotaremos como $\mathcal{M}_\epsilon(\Omega)$. Este conjunto pertenece al espacio euclidiano \mathbb{R}^M , donde $M = 2(m-2)(n-1)$ es el número total de grados de libertad de la malla, el cual es igual al doble del número

1. INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

de sus nodos interiores. Este espacio \mathcal{M}_ϵ es un conjunto cerrado y acotado, su frontera $\partial\mathcal{M}_\epsilon$ es el conjunto de mallas G para las cuales cuando menos para alguno de los 4 triángulos de una celda tiene área igual a ϵ .

Definición 4 Diremos que una malla G de $m \times n$ sobre Ω es ϵ -admisibles, si existe al menos una malla \tilde{G} ϵ -convexa de $m \times n$ sobre Ω tal que $\partial\tilde{G} = \partial G$ y llamaremos $\mathcal{A}_\epsilon(\Omega)$ al conjunto de todas las mallas ϵ -admisibles.

Un ejemplo de malla no admisible es aquella donde una de las celdas de la esquina siempre será no convexa para cualquier dimensión $m \times n$ de la malla, véase Domínguez [91].

Planteamos el problema a resolver

Problema 1 Dada una malla G_0 ϵ -admisible el problema es encontrar G^* ϵ -convexa tal que $\partial G^* = \partial G_0$.

Diremos que una solución de este problema es variacional discreto si es posible obtener una G^* ϵ -convexa como el mínimo de una funcional discreto $F(G)$ y en la forma

$$G^* = \arg \min_{G \in \mathcal{A}_\epsilon(\Omega)} F(G). \quad (1.1)$$

En adelante asumiremos que el conjunto de mallas admisibles $\mathcal{A}_\epsilon(\Omega)$ coincide con el conjunto $\mathcal{M}_\epsilon(\Omega)$ de mallas ϵ -convexas sobre el cual trabajaremos.

Una idea que resulta muy atractiva para calcular la malla, es obtener el mapeo involucrado como óptimo de un principio variacional sobre el conjunto de mapeos invertibles obtenidos o construidos a partir de una extensión de un mapeo entre fronteras. Si partimos de este planteamiento variacional, la forma usual de atacar el problema de construir mallas discretas, es resolviendo numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional del principio variacional con condiciones a la frontera de manera que el mapeo conforme la frontera; es decir, $\partial G = G(\partial U)$. Se sabe que los errores de aproximación de las ecuaciones Euler-Lagrange por diferencias finitas impiden converger los esquemas en diferencias a una malla convexa (Thompson, Thames y Mastin [306, 307], Mastin [225], Steinberg y Knupp 1996 [302], Knupp y Lackzak [188]). Es importante señalar que algunos trabajos emplean métodos Galerkin en la solución de tales ecuaciones. Un método muy empleado es del tipo Bubnov-Galerkin tal y como proponen Allievi y Calisal en 1992 [4], para obtener mallas ortogonales. Pero esto solamente lo logran en regiones simples y usando el funcional clásico de ortogonalidad. La idea de calcular una solución continua al problema del mapeo no es nueva. En 1989 Zochowski y Holnicki [344] propusieron resolver una formulación débil de los principios variacionales clásicos usando elemento finito. Para el caso de elementos formados por cuadriláteros sus resultados fueron mejores que los reportados por Castillo en 1986 [63],

y para el caso de elementos lineales sobre mallas triangulares obtuvieron muy buenos resultados siempre y cuando la matriz de rigidez asociada esté bien condicionada.

Otra idea muy atractiva para resolver el problema variacional es discretizar directamente el funcional del principio variacional sobre mapeos invertibles, por ejemplo, discretizando el funcional de densidad de energía o funcional armónico, véase Ivanenko y Charkhch'yan [156]. Al realizar la discretización, obtendremos una función o funcional discreta $F(G)$ que mide la densidad total de energía de la malla. El problema variacional es ahora un problema de optimización de varias variables donde las incógnitas son los nodos de la malla.

Como señalan Ivanenko y Charkhch'yan, se requiere contar con una malla convexa en todo paso del proceso iterativo. Una extensión de este trabajo fue desarrollada en 1997 por Barrera y Tinoco [312], en el cual el dominio de mallas no convexas se amplía para definir un funcional con las mismas características que el funcional armónico. Simplemente desplazaron el polo del funcional armónico para definirlo sobre celdas no convexas. Observaron que conforme el polo tiende a cero se forma una colección de conjuntos contenidos que en el límite contienen al conjunto de mallas convexas. Esta metodología permite obtener mallas convexas sobre regiones irregulares partiendo al inicio de la optimización con mallas no convexas. Demostraron que en el óptimo se obtienen una malla convexa con propiedades similares al funcional armónico.

Un método muy empleado en la industria aeronáutica de los años 70's y 80's, se basa en identificar el mapeo entre la región de estudio y la región computacional como solución de un sistema diferencial hiperbólico, véase Steger y Sorenson [298]. Estos métodos están basados en formulaciones continuas de soluciones a ecuaciones diferenciales parciales que conjugan la propiedad ortogonalidad y la suavidad de las líneas curvilíneas a través de ecuaciones diferenciales hiperbólica. Otros autores emplean ecuaciones diferenciales elípticas con términos fuentes convenientes con la finalidad de que las líneas curvilíneas del mapeo solución sean suaves y además sea posible controlar la distribución de las líneas curvilíneas en zonas particulares, como puede ser cerca de la frontera que es muy útil en simulaciones numéricas de flujo en el ala de un avión.

En el diseño por computadora, es de gran importancia el uso de una malla como representación discreta de un objeto plano, o en 3D. Hoy en día es muy común que el software comercial utilice, por simplicidad, métodos de interpolación algebraica para construir una discretización del objeto. Estos métodos parten de una representación paramétrica de la frontera de la región de estudio y usan transformaciones algebraicas de estas parametrizaciones fronteras para generar la malla, tal es el un caso del paquete **GridPro**, que emplea diferentes métodos de interpolación. Muchos de estos métodos están basados en métodos clásicos de interpolación que señalan Eiseman y Smith 1982 [99] y Gordon y Thiel [143]. Sin embargo, usando estas métodos no es posible garantizar la convexidad de las celdas incluso en regiones sencillas. Algunos autores como Gilding [142], usan lo que se conoce como funciones *blending* como un peso o deformación de las líneas curvilíneas, permitiéndoles controlar mejor la interpolación. De nueva cuenta, no siempre producen buenos resultados incluso para regiones simples. Gilding y otros autores sugieren usar este método por bloques o secciones de la región de estudio.

Otro método muy atractivo, y que es de nuestro particular interés, se basa en usar formulaciones discretas o directas sobre los nodos o celdas de la malla. Un ejemplo de esto son los métodos discretos de Laplace, o Laplaciano discreto. En estos métodos, la idea es suavizar la malla al reacomodar, *reallocate*, cada nodo interior como un promedio ponderado de los nodos circunvecinos. Para regiones simples esta idea es suficiente, pero para regiones irregulares esto es inviable ya que la malla resultante puede ser doblada o enredada, *tangled*. Algunos autores proponen emplear un método Laplaciano discreto controlando la convexidad y la forma de las celdas. Otros métodos se basan en optimizar local o globalmente alguna medida geométrica de las celdas de la malla: uniformidad en área, suavidad y ortogonalidad. Por ejemplo si nos montamos sobre un nodo de la malla nos gustaría que el área de las celdas alrededor del nodo sea uniforme, o que las líneas que parten del nodo sean casi ortogonales. Esta es una técnica empleada primero por Kennon y Dulikravich en 1985 [178] y posteriormente retomada por Castillo en 1986 [63] y Castillo y Barrera en el mismo año [64], y posteriormente replanteada por Barrera *et al.* en 1991 [28] y 1994 [30].

1.3. Mallas estructuradas sobre regiones irregulares

Entre los métodos antes señalados, son de especial interés aquellos que están basados en la formulación variacional armónica, ver Ivanenko [158, 159, 73], Liseikin [203, 205], ya que la existencia de tales mapeos está probada y garantiza obtener biyectividad sobre una región simplemente conexa independiente de la complejidad o irregularidad de la región de estudio.

Diremos que una *región plana es irregular* si su frontera es una poligonal curva de Jordan con muchos vértices y muchos cambios de concavidad. Esto significa que la curva que define la frontera sea cerrada y no se auto intersekte. Una región de este estilo es aquella que se forma por un lago con salientes o un embalse; no existen lagos en forma de piscinas rectangulares. En la Figura 1.5 se observa la forma de la bahía de La Habana en Cuba.

Por su forma, en este tipo de regiones es muy difícil construir un mapeo algebraico entre fronteras a partir de una interpolación o como solución de alguna ecuación diferencial debido a las condiciones a la frontera. En general no siempre es posible construir una malla convexa usando el método del mapeo, incluso sobre una región simple es posible que no se pueda construir una malla convexa a partir de condiciones a la frontera generales, véase Ivanenko [157] y Tinoco [312].

Una línea de investigación y desarrollo que ha promovido el profesor Barrera dentro del grupo UNAMALLA es diseñar métodos discretos y continuos que nos permitan obtener mallas convexas en regiones irregulares, siempre que esto sea posible. Una forma para abordar este problema, es el trabajo de Tinoco en 1997 [312] al usar funcionales cuasi-armónicos "adaptables".

Los desarrollos recientes con los funcionales convexas de área de Domínguez-Mota [91] están dirigidos en esta dirección y toda nuestra investigación y desarrollo compu-



Figura 1.5: Bahía de La Habana como región poligonal irregular.

tacional en el grupo UNAMALLA tiene como objetivo este tipo de regiones de estudio: regiones planas irregulares.

Por último, debemos señalar que algunos esfuerzos sobresalientes en la generación numérica de mallas estructuradas para regiones irregulares están dirigidos por: el grupo de la Academia de Ciencias de Rusia, Ivanenko, Charach'yan, 1988, 1995, 2002, [156, 158, 164], Azarenok, 2000, 2002, 2012 [11, 12, 16]; el grupo de Investigación del Profesor Barrera (Barrera y Tinoco 1997–99 [312, 313, 314], Barrera, Tinoco, Domínguez y González [35, 37], Barrera, Castellanos, Cortés y González [39], Barrera, Domínguez y González, [41], Barrera, Cano y González, [42]), el grupo de los investigadores Egidi y Maponi que revisan el trabajo del profesor Barrera de 1992-1994, el trabajo de los investigadores formados en la Academia de Ciencias Rusa, Liseikin, 1991, 2001, Ushakova, 2005, Gasilova 2007, Garanzha 2000, 2003, 2008, Coll [82] en 2003, Escobar *et al.*, [101], Montenegro *et al.* [234] y recientemente por los trabajos de los profesores Zhang y Jia 2003, 2008 y 2012. Cada uno desde un punto de vista diferente, revisando y proponiendo soluciones al problema de la generación numérica de mallas sobre regiones irregulares con diferente óptica.

1.4. Generación numérica de mallas estructuradas y casi ortogonales

Existe un particular interés por construir mallas ortogonales, ver Akcelik, Jaramaz y Ghatas [3], y Zhang *et al.* [337, 341], y es que usando mallas ortogonales es posible

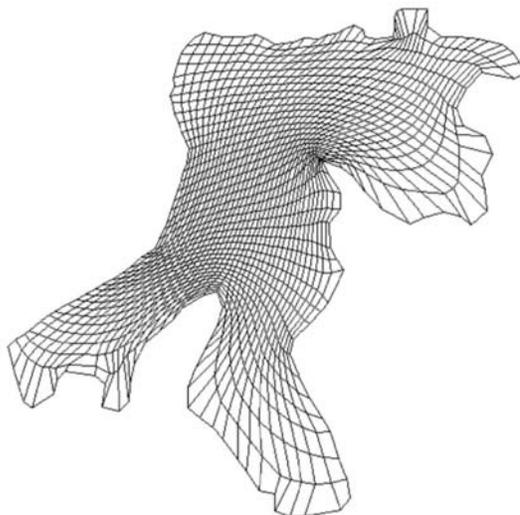


Figura 1.6: Una malla cuasi-armónica usando el funcional cuasi-armónico "adaptable".

Figura tomada de [312].

reducir los términos cruzados xy en la solución de ecuaciones diferenciales parciales por el método del mapeo. Estos autores usan las formulaciones de Riskyn y Leal [265] para construir mapeos conformes para las cuales es necesario definir funciones de distorsión y al usar esta formulación, el trabajo se centra en mostrar que las funciones de distorsión elegidas, además de construir sistemas bien definidos, es posible obtener mallas convexas. Actualmente se están desarrollando algunos enfoques interesantes en esta dirección al usar formulaciones continuas sobre secciones o bloques de la región de estudio como realiza Zhang en 2012 [342] *et. al* usando E.D.P. elípticas y funciones de distorsión.

En 2005, Domínguez-Mota [91] realiza una extensa revisión sobre los métodos numéricos para construir mallas casi-ortogonales, observa que es necesario garantizar la convexidad de las celdas en un proceso automático que involucre la ortogonalidad. En ese trabajo, Domínguez-Mota caracteriza la forma que deben tener los funcionales discretos de área que garantizan y preservan la convexidad de la malla. Adicionalmente, muestran que es posible definir combinaciones de éstos con funcionales discretos positivos que cuenten con propiedades geométricas particulares como la suavidad en las líneas y la ortogonalidad de las celdas. El trabajo de referencia, finaliza mostrando que de existir una malla ϵ -convexa y con propiedades las geométricas deseables, es posible obtenerla como óptimo de una combinación adecuada entre esos funcionales.

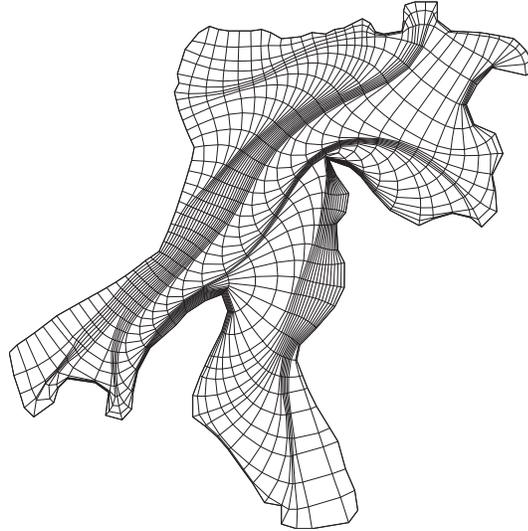


Figura 1.7: Una malla casi-ortogonal usando el funcional convexo de área en combinación con el funcional clásico de ortogonalidad, ver [91].

1.5. Mallas en regiones con agujeros y estructuradas por bloques

Como es sabido, los embalses, ríos, lagunas y en general los cuerpos de agua presentan islas o montículos de tierra que permanecen fijos con el flujo del agua. Siendo estos cuerpos fijos podemos establecer condiciones de frontera interna, como por ejemplo que el flujo no permee hacia el cuerpo o condiciones de velocidad nula; en ambos casos se modela el cuerpo como un obstáculo.

La primera idea que se empleó para realizar una simulación sobre este tipo de cuerpos u objetos fue considerar a la isla como un conjunto de un celdas inactivas dentro de una malla que cubre a toda la región de estudio, incluyendo a esos objetos. Esto se puede lograr generando la malla sobre toda la región y anulando las celdas sobre el obstáculo u objeto. Hoy en día en algunas aplicaciones aún se utiliza esta técnica por ser práctica y económica. Otra forma de modelar los obstáculos es observarlos como una subregión fija dentro de la región de estudio y entonces concentrarnos en generar mallas donde la frontera de estos obstáculos son frontera de los lados de las celdas de la malla. Esto es lo que conocemos como una malla con agujeros: una malla con obstáculos internos donde la frontera de cada obstáculo es frontera interna de la región. Este tipo de regiones se presentan en simulaciones de la aereodinámica, por ejemplo, cuando deseamos resolver una ecuación de flujo sobre el ala de un avión.

1. INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

Si solamente contamos con un agujero y deseamos construir una malla estructurada, la primera idea que podemos emplear es usar un corte de la región entre la frontera externa y la interna para formar una región topológica equivalente a una O o un tubo sin empatar. Con esto tendremos dos sub-fronteras opuestas a saber, la externa y la interna y aquella que nos ha servido como corte y que empleamos como una separación. Con esto construimos una malla de la forma usual: construyendo un mapeo de esta región tratada hacia la región lógica. No es la única idea desde luego, pero si la más empleada por ser sencilla y práctica. El problema se torna complejo cuando tenemos más agujeros u obstáculos internos. Revisando la literatura al respecto, hemos encontrado que esta técnica de corte de la región se puede extender y más aún, esta idea ofrece un amplio margen de usos. Recientemente en el trabajo de Cano de 2011, se atacó este problema partiendo la región como 2 mallas estructuradas usando lo que podríamos decir, un corte transversal de toda la región junto con sus agujeros u obstáculos y mediante un pegado especial la malla completa se puede observar como una malla estructurada sobre toda la región, incluyendo los agujeros, bajo esta idea los agujeros son modelados como celdas inactivas.

Ahora bien, si tomamos de nueva cuenta como referencia los embalses o lagos, es común observar que cuentan con afluentes o ríos secundarios para su descarga o desembocadura. En la simulación del vertido de algún líquido por accidente, es necesario saber cómo afecta lo ocurrido en un embalse a sus afluentes o viceversa dependiendo de dónde provenga el contaminante. Para esto, es necesario que estas secciones formen parte de la malla de simulación. Es de notar que por su complejidad los afluentes pueden ser tratados como regiones conectadas con el embalse ya que cuentan con condiciones de frontera independientes del embalse. La primera idea que podemos emplear es usar mallas estructuradas en cada una de estas secciones conectadas, esto es lo que llamaremos mallas estructuradas por bloques.

La motivación para construir este tipo de mallas la estamos dirigiendo a embalses pero puede ser extendida o empleada para otro tipo de problemas donde la región global sea un pegoste de regiones o subregiones donde, las más de las veces, cada una de ellas representa un región irregular. Es necesario señalar que nuestro interés de construir mallas estructuradas es por la facilidad que presenta la conectividad de una celda con las más cercanas, por lo que, de emplear mallas estructuradas por bloques, un primer problema que debe ser resuelto es que estos bloques estén conectados adecuadamente, sin *overlapping* y sin que alguna arista de la celda conecte con dos o más aristas de otras celdas.

Construir mallas por bloques no es tan simple como pegar adecuadamente las mallas de cada una de las secciones, nos interesa además de la conectividad de las celdas, algunas propiedades geométricas de las celdas y calidad de la malla obtenida. Son varios subproblemas que deben ser planteados adecuadamente antes de abocarnos a desarrollar un sistema dirigido a generar mallas sobre de este tipo de regiones.

Regresando al primer problema planteado: si tenemos una región con agujeros una idea que podemos usar para construir una malla es observar la región como una colección de subregiones o bloques y en cada una de ellas construir una malla adecuada; es decir,

la malla sobre una región con agujeros la podemos construir de manera conveniente como una malla estructurada por bloques, ver Figura 1.8.

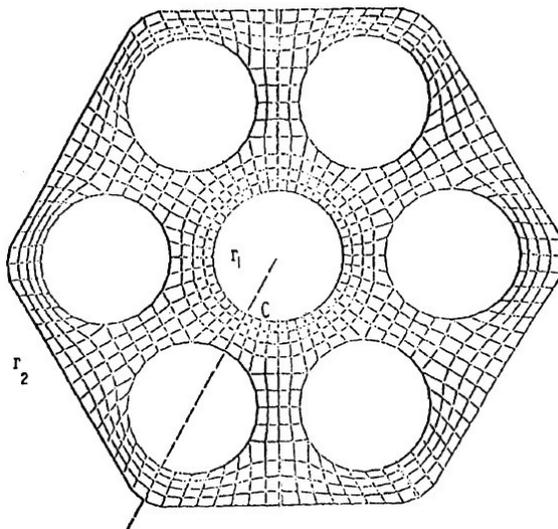


Figura 1.8: Una malla estructurada por bloques sobre una barra de combustible nuclear.

Figura tomada de [309, 311].

1.6. Una Malla adecuada y de calidad

Diremos a *grosso modo*, que una *malla adecuada y de calidad* sobre un dominio Ω y para una cierta Ecuación Diferencial Parcial, E.D.P., es aquella que nos permite una discretización precisa y que al resolverla nos proporciona buenas soluciones numéricas para esa ecuación.

La generación numérica de mallas se basa en representar adecuadamente la región de estudio como una discretización por celdas simples y convexas. Otro aspecto de igual relevancia en la generación numérica de mallas es controlar la distorsión de las celdas con respecto a una forma geométrica ideal: un rectángulo, un cuadrado o un paralelogramo. Así como muchos autores se abocan a diseñar funciones o medidas que permitan identificar la calidad de las triangulaciones y métodos numéricos con los cuales obtener triangulaciones óptimas, quienes trabajamos en la generación numérica de mallas estructuradas nos interesa que la celda cuente con una forma particular: rectángulos, pero de *aspect ratio* pequeño para que la sensibilidad numérica del método no repercuta negativamente en su solución. El *aspect ratio* usualmente se define como razón entre el lado mayor y el lado menor o proporción entre lados y el área.

Babůska y Azis, en 1976 [17], Knupp en 1995 [188], Acosta *et al.* [1], en 2001,

1. INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

y muchos más autores, hacen notar que el método numérico empleado para resolver eficientemente una E.D.P. depende fuertemente de la geometría de las celdas de la malla, en particular de:

- la distribución de los tamaños de los elementos
- la forma de los elementos de la malla.

Por ejemplo, si usamos elementos lineales para un Método de Elemento Finito (M.E.F.), y de contar con elementos de ángulo muy agudo, *slivers elements*, la matriz de rigidez asociada al M.E.F. podría ser muy mal condicionada, por lo que es posible obtener resultados que nada tienen que ver con el modelo numérico a resolver, ver Babuska y Azis [17], Knupp [188] y Schewuck [287]. Para nosotros,

Definición 5 *Una malla de calidad es aquella cuya geometría en su aplicación no enaltece indeseables aspectos numéricos como la aproximación y la sensibilidad numérica entre otros.*

En este trabajo, estamos interesados en abordar el problema de construir mallas estructuradas de calidad controlando la geometría de las celdas.

Para mallas triangulares e híbridas (formadas por triángulos, cuadriláteros, etc.), existen métodos numéricos diseñados para controlar la forma de la geometría de la malla los cuales emplean estimadores *a priori* del error esperado y concentran o modifican el tamaño de las celdas en zonas específicas, esto se logra, las más de las veces, mediante un refinamiento de inserción de nodos y aumento de elementos y posteriormente usando alguna técnica, remover caras o lados; esto es, eliminando elementos de pobre calidad *topological optimization*. Una vez realizado esto, es usual usar un método que permita suavizar las celdas en zonas específicas moviendo los nodos *node position smoothing*, mejorando de nuevo la calidad de la malla.

Uno de nuestros objetivos en este trabajo, es definir medidas de calidad que caractericen la geometría de las celdas y mejorar su calidad por medio de un método de optimización.

1.7. Una malla dinámicamente adaptada

La generación numérica de mallas resulta ser un proceso que consume una parte importante del costo computacional total sobre todo, en problemas de simulación numérica en los cuales se emplea una malla. La generación de mallas estructuradas adaptadas mediante ajuste o movimiento de nodos puede ser usada para incrementar la precisión de la solución numérica en E.D.P. al disminuir el costo del cálculo de la solución. Resulta muy atractivo que dada una malla estructurada de $m \times n$ se pueda adaptar sin incrementar su tamaño ni su conectividad, ya que no aumenta el costo computacional requerido para su uso.

Existen muchos métodos numéricos para generar mallas adaptadas y cada una de ellas está relacionada con el método continuo o discreto con el cual construir la malla. Algunos son métodos algebraicos, y otros métodos emplean ecuaciones elípticas con términos fuente adecuados. Algunas de estas E.D.P. se basan en el principio de equidistribución para mallas unidimensionales el cual nos permite garantizar que para funciones de peso positivo el mapeo es uno a uno. Existen extensiones naturales para dos dimensiones; sin embargo, como señala Ivanenko 1999, salvo para principios variacionales armónicos, no existe una teoría que nos garantice que las mallas obtenidas por extensión del principio de equidistribución a dos dimensiones sea convexa.

Algunos autores como Mastin en 1992 [226] y Thompson en 1982 [310], extienden un principio variacional a formulaciones variacionales ponderadas, como es el caso del funcional ponderado de área, de manera que el peso empleado les permita controlar el tamaño de las celdas en zonas específicas. Sin embargo, resuelven las discretizaciones en diferencias de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a esos funcionales y como ya se ha dicho, usualmente no es posible construir mallas convexas en regiones irregulares resolviendo estas ecuaciones. Es importante señalar, que la elección de la función monitor o de control es clave para el diseño de la adaptividad deseada. En 2000, Soni *et al.* [296], realizan una revisión de los métodos de adaptividad basados en la redistribución de los nodos y señalan, que una forma muy empleada en la práctica para adaptar la malla es usar, como función de control o de adaptividad, una suma booleana entre la norma del gradiente y la norma de velocidad para problemas de flujo, o la norma del gradiente y la norma de la curvatura de la función solución y en general, la norma de alguna función de energía. Dependiendo del problema una buena elección de la función monitor permitirá concentrar la malla en zonas identificadas o previamente establecidas.

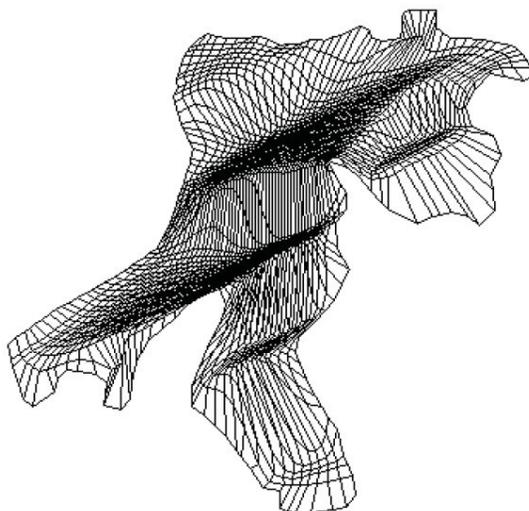


Figura 1.9: Una malla sobre la bahía de La Habana adaptada usando la función monitor $f(x, y) = \text{sen}(2\pi x - 4\pi y)$. Figura tomada de [38].

1.7.1. Una malla geoméricamente adaptada

Para resolver algunas E.D.P. es deseable que la malla se adapte a zonas donde el fenómeno a medir se presente con mayor incidencia como pueden ser cambios en el flujo si se trata de un problema de flujo de la corriente del aire sobre la superficie del agua; o bien, si el flujo se presenta con condiciones de frontera hacia el interior del cuerpo como puede ser las islas o algún objeto inmóvil. En general, es deseable adaptar la malla en zonas específicas donde se espera un comportamiento particular.

Nosotros estamos interesados en extender los métodos discretos que hemos desarrollado para generar mallas adaptadas con propiedades adicionales como son la suavidad y la ortogonalidad. Los métodos y la teoría desarrollada recientemente nos permite asegurar que ya es posible construir una malla estructurada ϵ -convexa en regiones irregulares de manera eficiente. Para nosotros, la adaptividad geométrica consiste en mover la malla o ajustar los nodos hacia la cercanía de un objeto geométrico contenido en el interior de la región de estudio mediante una función de control basada en la distancia dirigida hacia el objeto, de manera que permita concentrar las celdas entorno al objeto.

Para regiones irregulares, que es de nuestro interés, la clave del éxito de la adaptividad geométrica se sustenta en combinar los funcionales geométricos clásicos con los funcionales que garantizan y preservan convexidad.

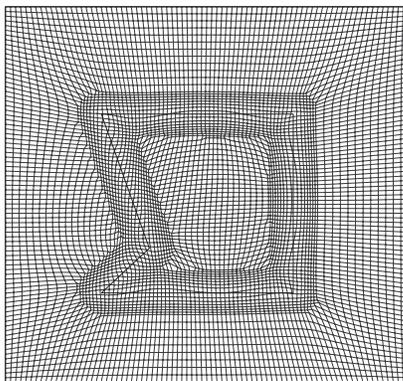


Figura 1.10: Una malla adaptativa cerca de un objeto.

En muchas ocasiones es necesario controlar la forma de los elementos cerca de la frontera, por ejemplo que las celdas sean casi ortogonales. Una forma de lograrlo es usar los funcionales ponderados o de adaptabilidad usando una función de peso basada en la distancia hacia la frontera. Expondremos estas ideas en el Capítulo 3 de este trabajo.

1.8. Una malla discreta de elementos cuadriláteros

Definición 6 (véase George and Frey [138]) Una malla que cubre a Ω es una colección de N elementos simples $\{c_i\}_{i=1}^N$ llamadas celdas que satisfacen

$$\mathbf{P1} \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^N c_i$$

$$\mathbf{P2} \quad \text{Int}(c_i) \neq \emptyset; \quad \forall i$$

$$\mathbf{P3} \quad \text{Int}(c_i) \cap \text{Int}(c_j) = \emptyset, \quad i \neq j$$

La primera condición P1, es directa en el sentido que deseamos que las colección de celdas cubran la totalidad de la región de estudio Ω . La segunda podría no ser necesaria para la definición, pero es conveniente para la utilidad práctica de la malla, que todos los elementos sean no degenerados ni a segmento ni a un punto. La tercera condición establece que los elementos no se sobrepongan o solapen entre sí.

A nosotros nos interesa que los elementos o celdas c_i sean cuadriláteros convexos. Pero para que esos elementos representen una *malla discreta formada por cuadriláteros*, adicionalmente pediremos que

$$\mathbf{P4} \quad \text{dos elementos o celdas } c_i, \text{ compartan a lo más una cara o lado,}$$

P5 dos aristas o lados a lo más tienen un vértice en común.

Dos ejemplos de estas discretizaciones se muestran en la Figura 1.11.

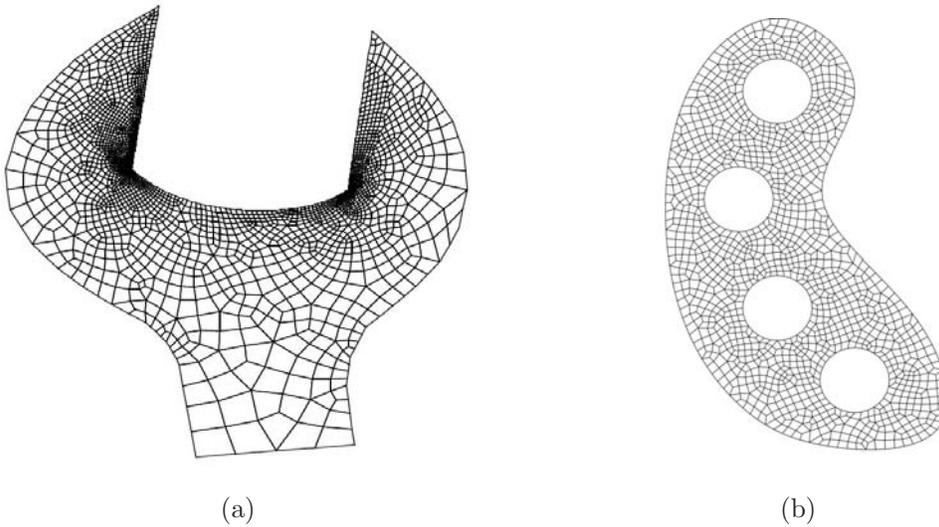


Figura 1.11: (a) Una malla no estructurada formada por cuadriláteros sobre una llave española. Figura tomada de [221]. (b) Una malla no estructurada formada por cuadriláteros sobre una manopla de acero. Figura construida con `Gmsh`, véase [139].

Los métodos que vamos a discutir en este trabajo están orientados a la construcción o suavizamiento de mallas estructuradas, ya que su conectividad nos permite identificar de manera inmediata los nodos y las celdas de la malla. Sin embargo, estos métodos pueden ser fácilmente extendidos a mallas estructuradas por bloques y en regiones con agujeros. De igual manera, todos estos métodos discretos son aplicables a mallas no estructuradas cuyos elementos sean cuadriláteros.

Capítulo 2

Un panorama de los métodos discretos para construir mallas

Es amplia y vasta la literatura disponible sobre la generación numérica de mallas tanto para mallas estructuradas como para no estructuradas. Entre las cuales destacan aquellas formadas por elementos triangulares y tetraedros. La elección de una malla adecuada para la solución numérica de un problema que involucra ecuaciones diferenciales parciales, juega un papel preponderante ya que si la malla está formada por elementos poco distorsionados esto ayuda a reducir el error de aproximación. En el [Capítulo 5](#) discutiremos algunas ideas al respecto. El objetivo de este capítulo es mostrar un panorama de métodos y técnicas que se han empleado para abordar la construcción de una malla. En este panorama revisaremos las aportaciones relevantes de algunos investigadores para comprender la complejidad del problema de la generación numérica de mallas.

Para obtener una malla convexa de calidad e idónea al problema a resolver, lo usual es contar con una primera malla o malla inicial, obtenida por algún criterio de conformación o por interpolación. Usualmente esa malla inicial no es convexa, por lo que un segundo paso es construir una malla convexa a partir de la primera. Una vez que hemos obtenido una primera malla por algún proceso simple, el segundo paso es mejorar la forma geométrica de los elementos. Siguiendo a Mei *et. al* [[229](#)], el mejoramiento de la malla básicamente se puede hacer de dos formas:

clean-up *limpieza de elementos* básicamente consiste en eliminar e insertar nodos así como cambiar la conexión entre los elementos con el fin de eliminar los elementos superfluos. Algunos autores mencionan este procedimiento como *topological optimization* en el sentido de la conectividad de los nodos es removida con la finalidad de obtener una configuración óptima.

smoothing *suavizamiento de elementos* el cual consiste en reposicionar los nodos sin cambiar la conectividad de los elementos.

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

Actualmente se desarrollan métodos que de manera simultánea construyen la malla convexa y de calidad geométrica optimizando una medida de calidad, esos métodos se conocen como *simultaneous untangling and smoothing meshes*. Hablaremos de esto en el siguiente capítulo.

En la literatura, algunos autores reconocen como refinamiento al procedimiento que añade nodos y elementos y otros más lo asocian a la adaptividad o concentración de las celdas sin cambiar su estructura. Nosotros haremos una clara diferencia entre uno y otro concepto. En este trabajo nos abocaremos a métodos que de manera discreta (una formulación basada en nodos y celdas) suavice los elementos de la malla sin cambiar la conectividad de las celdas.

Siguiendo a Mei, Tipper y Xu [229] una forma de clasificar a los métodos discretos para el suavizamiento de una malla es

geometry-based Los métodos geométricos obtienen la nueva posición de los nodos mediante criterios geométricos o de optimización local (por ejemplo, un laplaciano discreto) Herrmann [148], Zhou y Shimada [343] y Vartziotis y Wipper [323], Vartziotis y Papadrakakis [324] y desde luego Balendran [20] y Mei *et al.* [229].

optimization-based Los métodos basados en optimización obtienen los nuevos nodos al suavizar una métrica o medida de distorsión de los elementos, ver Oddy [241], Ivanenko [156], Freitag [111], Garanzha [125], Knupp [190], Shivanna *et al.* [291], Remacle [259] y Ruiz-Gironés *et al.* [274].

physics-based Los métodos basados en la física, básicamente resuelven algún problema físico como por ejemplo, de estructuras mecánicas o de esfuerzos, o campo gradiente para mover los nodos hacia dirección resultante esperada, véase Shimada *et al.* [289], Bossen y Heckbert [52] y Teran *et al.* [305].

hybrid Estos métodos combinan algunos de los arriba mencionados. Algunos de esos métodos vienen descritos en Canann *et al.* [56] y Freitag [113].

Nuestro interés es suavizar mallas optimizando métricas o funciones discretas basadas en propiedades geométricas de las celdas. Para esto, primero continuemos con el planteamiento del problema de construir mallas estructurada $G(m, n)$ sobre Ω a partir de mapear una cuadrícula del cuadrado unitario $U(m, n)$ que describimos en el capítulo anterior.

Con la finalidad de mostrar el estado del arte en la generación numérica de mallas, haremos una breve revisión de los métodos discretos relevantes en la literatura, algunos de ellos son iterativos y otros más provienen de un problema variacional discreto.

2.1. Laplaciano discreto

Uno de los métodos más usados para suavizar una malla es el Laplaciano discreto, véase Lo [215], Field [106], Canann *et al.* [56], y Freitag [113] y recientemente Ohtake *et al.* [240].

La idea detrás de este método es simple: los nodos $\mathbf{x}_{i,j}$ de la malla provienen de un mapeo continuo $\mathbf{x} = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ que satisface una aproximación por diferencias finitas de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \eta^2} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

con condiciones a la frontera fijas:

$$\mathbf{x}(\partial B_2) = \partial \Omega$$

Usando diferencias centrales, la segunda derivada parcial de $x = x(\xi, \eta)$ la podemos aproximar de la forma:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{h^2} [x(\xi + h, \eta) - 2x(\xi, \eta) + x(\xi - h, \eta)],$$

donde h representa un incremento en la dirección ξ . Ahora bien, sobre una malla estructurada la solución por diferencias finitas de la ecuación de Laplace (2.1) se puede escribir como

$$x_{i,j} = \frac{1}{4}(x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1}) \quad (2.2)$$

$$y_{i,j} = \frac{1}{4}(y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1}). \quad (2.3)$$

Como se observa, este esquema representa un promedio entre cuatro nodos vecinos al nodo central $\mathbf{x}_{i,j}$. La malla suavizada se obtiene iterando este esquema hasta lograr convergencia o algún otro criterio de paro.

Uno de los primeros programas computacionales reportados en la literatura que usa el esquema Laplaciano para construir mallas suaves es el sistema SAASII de Jones y Crose [170] publicado en 1968. Este sistema fue muy útil ya que permitía al usuario asignar un factor de relajación para acelerar la convergencia.

Lo atractivo del este método Laplaciano discreto está es su simplicidad de formulación que puede ser extendido a cualquier tipo de geometría de los elementos de la malla: triángulos, cuadriláteros, y mixtos, y fácilmente adaptado para suavizar mallas en tres dimensiones. Sin embargo, se sabe que el esquema Laplaciano no es sensible a la forma, ni a la curvatura y ni al espaciamento de los nodos sobre la frontera, por lo que en regiones simples, podríamos obtener mallas con celdas no convexas e incluso dobladas cerca de la fronteras.

2.1.1. Laplaciano-Isoparamétrico

En 1976, Herrmann y Asce [148] proponen un esquema discreto basado en aproximar localmente el mapeo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

entre la región lógica $B = [0, 1] \times [0, 1]$ y la región de estudio Ω , por medio de polinomios cuadráticos en la forma

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^8 x_{i,m} N_m(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^8 y_{i,m} N_m(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $N_m(\xi, \eta)$ son funciones base de polinomios cuadráticos de Lagrange definidos sobre los 8 nodos cercanos al nodo central $x_{i,j}$, véase [148]. En la Figura 2.1 mostramos, de nueva cuenta, las cuatro celdas que rodean al nodo $\mathbf{x}_{i,j}$.

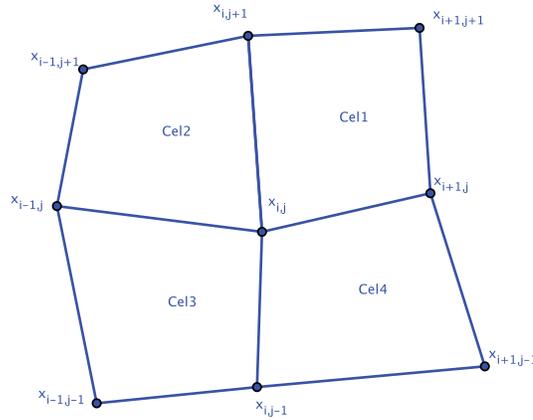


Figura 2.1: Las 4 celdas que rodean al punto $\mathbf{x}_{i,j}$ en una malla estructurada.

Al evaluar la aproximación del mapeo (2.4) en el punto $(0, 0)$, obtenemos el esquema

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \frac{1}{4} [2(x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1}) \\ &\quad - (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1})] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= \frac{1}{4} [2(y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1}) \\ &\quad - (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j+1} + y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j-1})]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A este esquema se le conoce como Laplaciano-Isoparamétrico. En la Figura 2.2 se compara la malla obtenida con este esquema y aquella obtenida con el Laplaciano discreto.

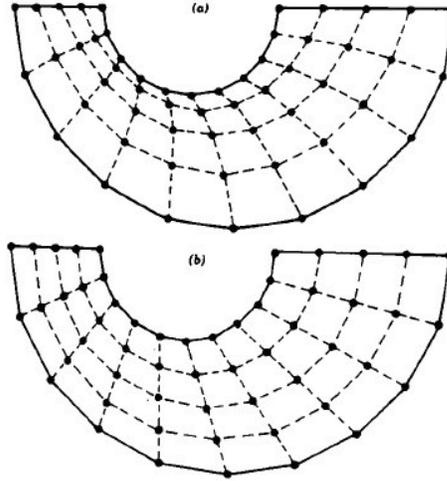


Figura 2.2: (a) Malla obtenida por el esquema Laplaciano. (b) Malla obtenida por el método Laplaciano-Isoparamétrico, ver [148].

Usando este esquema es posible construir mallas no dobladas sobre algunas regiones de la galería de Roache [302], y otras como *plow* y *horse* esto no es posible. En el Capítulo 6, observaremos que usando este esquema, obtenemos cuadriláteros cercanos a ser paralelogramos.

Como hemos visto, el esquema Laplaciano-Isoparamétrico es un esquema basado en 8 puntos. Otro esquema de 8 puntos usado en la literatura esta basado en el promedio de los ocho nodos que rodea a un nodo central de la malla estructurada, este se escribe como:

$$x_{ij} = \frac{1}{8} [x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j+1} \quad (2.7)$$

$$+ x_{i-1,j} + x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j-1}] \quad (2.8)$$

$$y_{ij} = \frac{1}{8} [y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1} \quad (2.9)$$

$$+ y_{i-1,j} + y_{i-1,j-1} + y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1}] \quad (2.10)$$

De nuevo, no hay garantía que por este esquema se obtenga una malla de convexa o no doblada. En algunos textos este esquema se conoce simplemente como Laplaciano de 8 puntos.

Es usual que quienes emplean estos métodos iterativos solamente realicen pocos pasos k de iteración siempre que la malla en el paso $k + 1$ no se doble o deje de ser convexa.

2.1.2. Laplaciano ponderado

El Laplaciano discreto puede ser extendido a cualquier configuración conectada de m nodos vecinos en la forma

$$\mathbf{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} w_k \mathbf{x}_k \quad (2.11)$$

con $0 < w_k$ y $\sum w_k = 1$, esto es, cada nodo se calcula como una representación baricéntrica de los N nodos vecinos al nodo \mathbf{x}_j .

Una interpretación geométrica del esquema Laplaciano clásico es mover cada vértice interior al centroide del polígono formado por los vértices más cercanos a éste. Para el caso del Laplaciano ponderado (2.11), los nodos interiores se mueven hacia las regiones o sub regiones, donde los elementos tienen un mayor peso w_k . Una idea gráfica de este método se aprecia en la Figura 2.3.

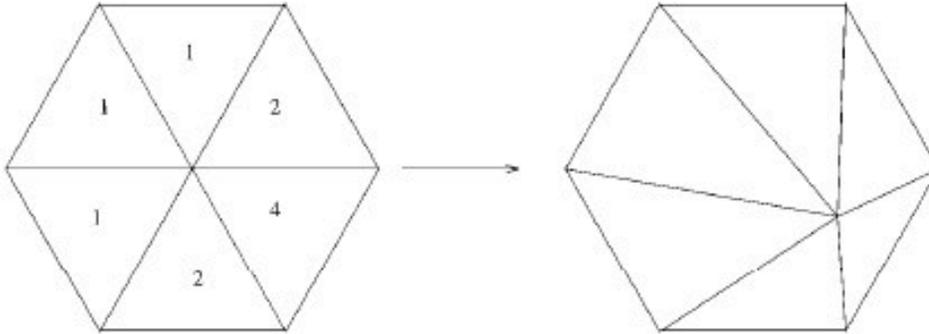


Figura 2.3: Efecto del Laplaciano ponderado en una triangulación formada por 6 elementos.

Una de las primeras versiones del Laplaciano ponderado en la literatura, fue elegir los pesos como la longitud de los lados que conecta el nodo en central con los nodos vecinos

$$\mathbf{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{j \neq k} \frac{l_k}{\sum l_j} \mathbf{x}_k.$$

A los pesos l_k se les conoce como los coeficientes de “elasticidad” asociados a la red. Esta elección tiene la finalidad de corregir las diferentes “tensiones” entre los nodos.

En 1995, Robey [272] describe una forma de calcular los coeficientes l_k para adaptar una malla estructurada en un problema de flujo en un medio poroso. Robey usa el Laplaciano ponderado

$$x_{i,j} = \frac{l_{i-1/2,j}x_{i-1,j} + l_{i+1/2,j}x_{i+1,j} + l_{i,j-1/2}x_{i,j-1} + l_{i,j+1/2}x_{i,j+1}}{l_{i-1/2,j} + l_{i+1/2,j} + l_{i,j-1/2} + l_{i,j+1/2}}, \quad (2.12)$$

$$y_{i,j} = \frac{l_{i-1/2,j}y_{i-1,j} + l_{i+1/2,j}y_{i+1,j} + l_{i,j-1/2}y_{i,j-1} + l_{i,j+1/2}y_{i,j+1}}{l_{i-1/2,j} + l_{i+1/2,j} + l_{i,j-1/2} + l_{i,j+1/2}}, \quad (2.13)$$

y propone calcular los coeficientes de elasticidad l mediante un método geoestadístico y nombra a este método o técnica, como *geostatistical adaptive grid*, véase [272].

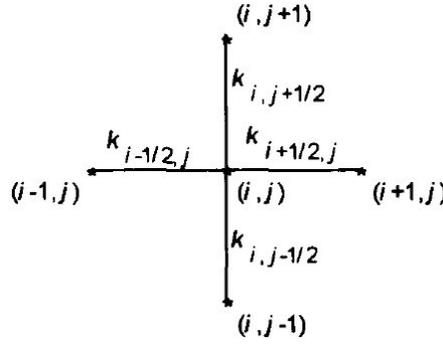


Figura 2.4: Una malla en la cual se ha asociado elasticidad a las conexiones de los nodos vecinos a (i, j) . Figura tomada de [272].

Robey observa que la malla puede ser muy distorsionada y no ser aceptable para la modelación del flujo que desea estudiar, por lo que propone controlar la forma de las celdas controlando su convexidad. Si J es la matriz asociada del mapeo bilineal para una celda el jacobiano del mapeo se escribe como

$$\det(J) = J_0 + J_1\xi + J_2\eta$$

para que el mapeo sea no degenerado debe cumplirse que

$$J_0 - |J_1| - |J_2| > 0$$

siendo

$$J_0 = [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]/8$$

$$J_1 = [(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)]/8$$

$$J_2 = [(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)]/8.$$

En la Figura 2.5 se aprecia una malla convexa obtenida con el método GAG que propone Robey.

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

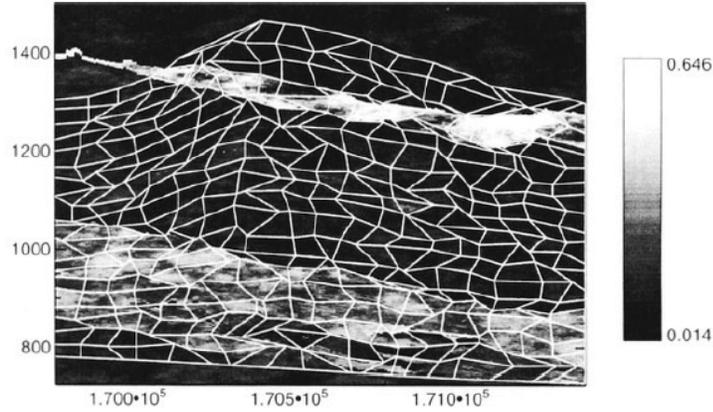


Figura 2.5: Una malla obtenida por el método GAG de Robey sobre el manto freático de la montaña Yucca en Nevada, USA. Figura tomada de [272].

Otro Laplaciano ponderado que es muy empleado es el promedio baricéntrico escrito en términos del áreas de las celdas que rodean a cada nodo

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} \frac{a_k}{\sum a_i} \mathbf{x}_k \quad (2.14)$$

donde a_k es el área del elemento T_k y N es el número de nodos vecinos, observe la idea en la Figura 2.6. Para regiones muy irregulares, debido a la distribución de los nodos, podríamos tener triangulaciones con elementos muy pequeños y elongados.

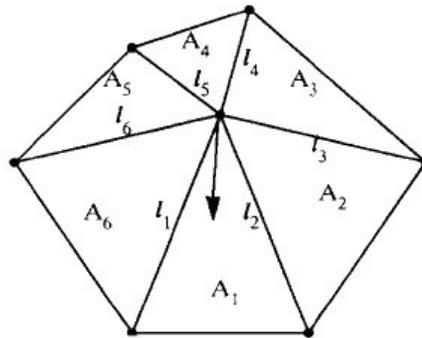


Figura 2.6: Idea geométrica del esquema Laplaciano sobre una malla triangular

A este método en la literatura se le conoce como *Laplaciano ponderado de área*. Para el caso de una malla estructurada formada por cuadriláteros, el Laplaciano ponderado de área se puede escribir como:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{jk} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{\sum_{i=1}^4 A_i} \mathbf{c}_k \quad (2.15)$$

donde A_k es el área de cada uno de los elementos y \mathbf{c}_k es el centroide del elemento k -ésimo elemento o celda, véase la Figura 2.7. En la figura 2.8 puede apreciarse las mallas obtenidas usando el esquema Laplaciano, el de área ponderada y el esquema isoparamétrico.

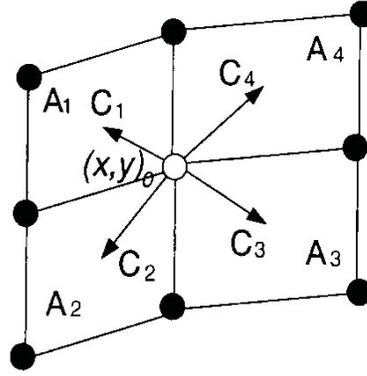


Figura 2.7: Idea geométrica del esquema de área ponderada sobre una malla estructurada.

Figura tomada de [151].

Los detalles de la implementación de este método se pueden consultar en el trabajo de Jones [171] de 1974. En ese trabajo Jones propone otro esquema al que llama *area pull*

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \frac{A_k - A_{j,k+1}}{A_k + A_{k+1}} \mathbf{x}_j \quad (2.16)$$

donde $A_5 = A_1$. Este esquema está propuesto con la idea de forzar que las celdas alrededor del nodo \mathbf{x}_j tengan la misma área. Jones observa que no es suficiente este esquema y propone combinarlo con el Laplaciano clásico.

Recientemente, en 2015, Sun *et al.* [304] revisaron el esquema Laplaciano ponderado de área (2.15) y propone usarlo en la forma:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \mu \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sum_{i=1}^N A_i} \mathbf{c}_k \mathbf{x}_j \right) \quad (2.17)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro de relajación. Usan este esquema en combinación con una métrica de calidad (*scaled jacobian*) en un proceso de suavizado de nodos, con la finalidad de garantizar la calidad y la convexidad de las celdas. Sun *et al.* obtuvieron muy buenos resultados suavizando mallas no estructuradas formadas por cuadriláteros, véase [304].

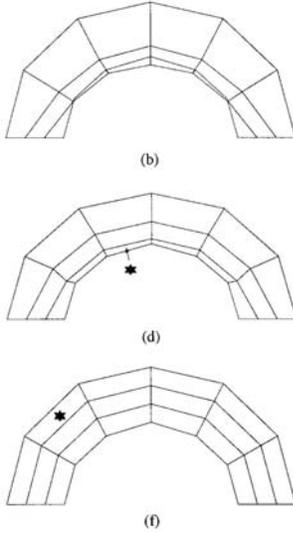


Figura 2.8: (b) Malla doblada usando el esquema Laplaciano (d) malla convexa obtenida por el método de área ponderada y (f) malla convexa obtenida por el método Laplaciano-Isoparamétrico. Figura tomada de [151].

2.2. Otros Métodos iterativos

En general todos métodos iterativos para suavizar mallas se pueden escribirse como

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \rho \left[\frac{1}{N} \sum_{k \neq j} \frac{w_k}{\sum w_i} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \right] \quad (2.18)$$

donde ρ es un término de relajación para controlar la convergencia. La dificultad en todos ellos es encontrar una elección adecuada de valores $w_k > 0$ para la los cuales la malla sea primero convexa y luego sus elementos sean de calidad. No es fácil resolver esto de esta forma.

En 1973, Amsden y Hirt [6] hacen ver que la elección de los pesos w_k puede suponer un esfuerzo adicional muy costoso ya que estos pesos suelen ser definidos por diseño y en problemas particulares. Para mostrar la dificultad, describen como un ejemplo una región de estudio compuesta por un rectángulo y una intrusión formada por un semicírculo. Utilizan el esquema de ocho puntos (2.7)–(2.9) y los pesos de la forma:

$$w_k = 1 + \frac{\alpha}{1 + 20d^2}$$

donde d es la distancia normalizada al círculo:

$$d^2 = \frac{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 - r^2}{r^2}.$$

Observe que w_k es un función de Runge.

Para cada valor de α obtienen un malla diferente que se ajusta o adapta a la frontera circular. En la Figura 2.9(a) se muestra la malla que se obtuvo para $\alpha = 1$, en la Figura 2.9(b) se muestra la malla que se obtuvo para $\alpha = 2$ y la malla que se observa en la Figura 2.9(c) la obtuvo usando $\alpha = 3$. Amsden y Hirt señalan que las mallas obtenidas requirieron 144, 168 y 225 iteraciones respectivamente.

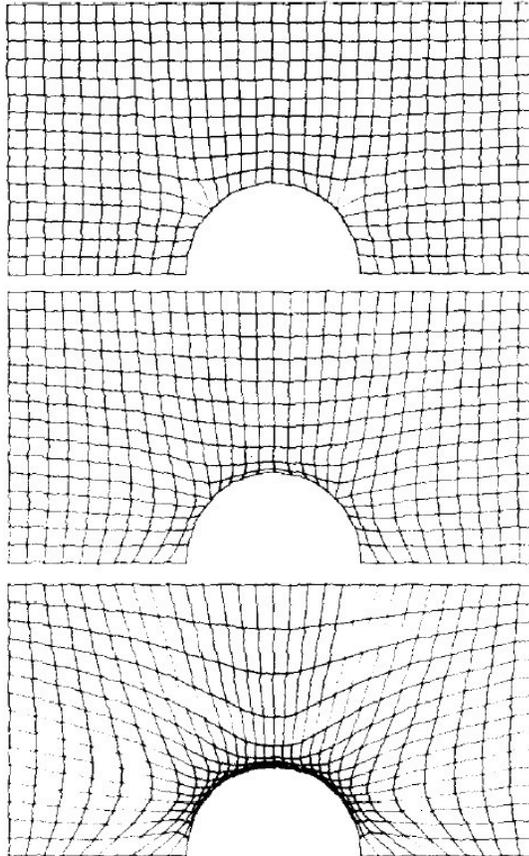


Figura 2.9: Región rectangular con una intrusión circular. Figura tomada de [6].

Observan que el procedimiento iterativo (2.7)–(2.9), se puede tornar muy lento y para un valor de α grande la malla puede resultar doblada.

La propuesta de Amsden y Hirt no puede ser extendida fácilmente a regiones con muchos cambios de concavidad o donde la frontera no sea suave por ejemplo aquella formada “picos” hacia el interior. Un caso de esto es la región en forma de L, ver Figura 2.10.

En 1975, Godunov *et al.* [144] utilizan un esquema diferente a de ocho puntos

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

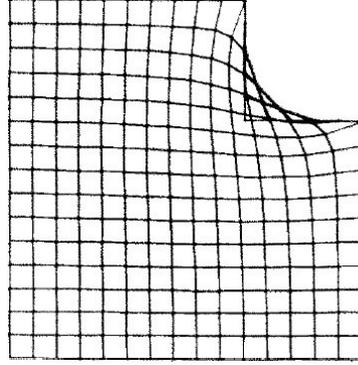


Figura 2.10: Una malla doblada en la región en forma de L.

$$x_{i,j}^k = \frac{1}{\sum_{k=1}^8 w_k} (w_1 x_{i-1,j-2} + w_2 x_{i,j-2} + w_3 x_{i+1,j-2} + w_4 x_{i+1,j-1} + w_5 x_{i+1,j+2} + w_6 x_{i,j+2} + w_7 x_{i-1,j+2} + w_8 x_{i-1,j+1}) \quad (2.19)$$

$$y_{i,j}^k = \frac{1}{\sum_{k=1}^8 w_k} (w_1 y_{i-1,j-2} + w_2 y_{i,j-2} + w_3 y_{i+1,j-2} + w_4 y_{i+1,j-1} + w_5 y_{i+1,j+2} + w_6 y_{i,j+2} + w_7 y_{i-1,j+2} + w_8 y_{i-1,j+1}) \quad (2.20)$$

donde los pesos $w_k > 0$ los eligen usando las ideas de Amsden y Hirt [6], ponderando convenientemente los nodos cercanos a la frontera.

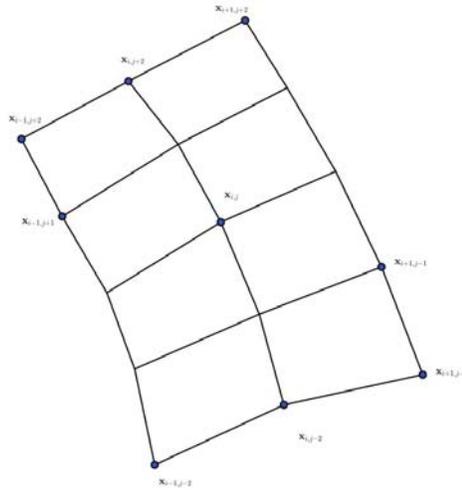


Figura 2.11: Esquema de ocho puntos propuesta por Godunov [144].

Como se aprecia de la Figura 2.12 las celdas pueden ser muy alargadas. En 1976, Yanenko *et al.* [334] plantean un método de mallas móviles en regiones planas con grandes deformaciones en la frontera. Yanenko propone aplicar el esquema que usa Godunov hasta antes de perder la convexidad.

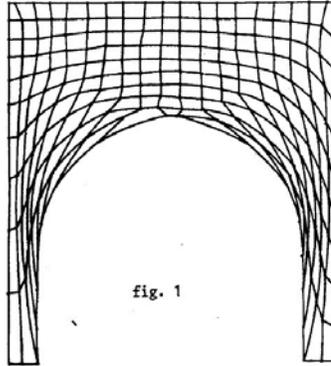


Figura 2.12: Una malla estructurada obtenida por el esquema de Godunov *et al.* [144].
Figura tomada de [334].

Nuestro interés en la revisión de estos esquemas es mostrar que no hay una teoría que nos diga cómo obtener los pesos del promedio baricéntrico para cualquier tipo de malla y en cualquier tipo de región. En todos los casos mostrados es necesario controlar la convexidad y la calidad de las celdas. Por otra parte, Amsden y Hirst [6], señalan que una manera de prevenir el doblar de las celdas es usar el método de Winslow [329, 330] ya que el mapeo armónico garantiza que el mapeo sea inyectivo. Esta idea la comentaremos más adelante.

Es muy común hoy en día a usar un Laplaciano discreto ponderado para el suavizado de la malla pero imponiendo que las celdas satisfagan algún criterio de calidad. Algunos autores como Parthasarathy y Kodiyalam [248], Shephard and Georges [288] y Freitag [113] proponen usar esta idea. En particular Freitag propone usar un método basado en el conjunto activo que depende del seno de los ángulos interiores entre elementos cercanos con la finalidad de evitar ángulos pequeños y grandes.

2.3. Un marco de trabajo para obtener mallas óptimas usando una funcional de energía

Como hemos visto, el desplazamiento de nodos por algún método iterativo debe de ser controlado para: evitar la colisión de nodos, evitar perder la convexidad y para mejorar la calidad de la celdas. En 1976, Felippa [109] propone algunas ideas que deben ser tomadas en cuenta en un procedimiento que involucre el desplazamiento de nodos. Felippa define

Definición 1 *Procedimiento por desplazamiento de nodos (Felippa [109]). Un procedimiento de desplazamiento de nodos, node displacement, es un procedimiento computacional por el cual el algoritmo puede mover nodos de la malla inicial con la finalidad de generar una sucesión G_1, G_2, \dots de mallas mejoradas las cuales progresivamente hacen decrecer los errores de discretización de alguna EDP. El desplazamiento de los nodos a nuevas posiciones puede ser visto como un proceso pseudo dinámico. El movimiento de los nodos está sujeto a ciertas restricciones cinemáticas algunas de las cuales pueden ser expresadas como de igualdad o desigualdad. El problema de la distribución de nodos puede ser formulado como un problema de optimización no lineal.*

La idea que propone Felippa es que los nodos de la malla se reposicionen para formar otra malla que mejor resuelva el problema donde será aplicado. La idea es simple, si consideramos una ecuación diferencial

$$Lu = f$$

donde L es un operador diferencial lineal y si aproximamos su solución mediante el método de Galerkin

$$u = \sum_{j=1}^n \phi_j q_j$$

donde $\phi_j(x)$ son funciones base en un sub espacio adecuado, y los coeficientes q_j son valores reales. El interés es obtener una solución que minimice

$$\text{mín } E(u) = \left(\frac{1}{2}Lu - f, u\right) \quad (2.21)$$

donde (\cdot, \cdot) es un producto interior conveniente. Este es un problema de residuos pesados.

2.3 Un marco de trabajo para obtener mallas óptimas usando una funcional de energía

Observe que funcional de energía $E(u)$ es positivo definido. La idea es optimizar este funcional haciendo variable la posición de los nodos interiores y dejando fijo aquellos que aproximan la frontera original. Este es el criterio de optimalidad que propone Felippa para obtener una malla óptima.

Este es uno de los primeros métodos directos reportados en la literatura, el cual es conocido como (*grid optimization by energy optimization*) un concepto que puede extenderse para problemas de valores propios, en cuyo caso la función de energía es una función de distorsión, véase Ivanenko [164].

El marco de trabajo propuesto por Felippa usando un funcional de energía $E(X)$, donde X representan a un vector de los nodos de la malla, se puede escribir como:

Generación de Mallas óptimas usando una funcional de energía (Felippa [109]).

- 1) La función objetivo es una función de energía total $E(X)$.
- 2) Los nodos de la malla son las incógnitas del problema de optimización.
- 3) Restricciones lineales de la forma $h_j(X) = 0$ corresponden a las restricciones cinemáticas del movimiento de la malla, por ejemplo:
 - a) Los nodos localizados en la frontera o interfaces internas deben permanecer ahí(no pueden salir de la frontera o de la interface).
 - b) Los nodos localizados en las esquinas deben ser fijos.
 - c) Se pueden especificar restricciones adicionales a fin de reducir el número de variables.
- 4) Las restricciones de desigualdad de la forma $g_j(X) \geq 0$ corresponden a a condiciones de restricción sobre la distorsión de la malla. Lo cual usualmente ocurre monitoreando el jacobiano de un elemento (por ejemplo, el volúmen, área o longitud). En particular se debe imponer que el jacobiano del mapeo sea positivo para garantizar que el mapeo sea uno a uno.

Una malla que no garantice la restricción de que el jacobiano sea positivo se dice que no es útil o es inviable, *infeasible*, para su uso ya que puede generar problemas de estabilidad numérica.

En 1977, Felippa [110] propone replantear, en la medida de lo posible, el problema de optimización con restricciones a un problema sin restricciones para poder emplear un método de gradiente conjugado estimando numéricamente las derivadas del funcional. De manera experimental, Felippa encontró que usando el método de Powell se obtienen mejores resultados. En este artículo hace un balance del costo computacional que involucra este esquema para obtener mallas óptimas y sugiere tener en cuenta:

substructuring El proceso debe ser aplicado en regiones particulares. Es decir, propone usar optimización local por zonas o bloques.

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

fast node distribution un esquema que ajuste los nodos a regiones donde se tienen alta distribución de energía mediante un criterio local de optimalidad, básicamente propone usar adaptividad local.

automatic grid refinement refinar la la malla por insercción de nodos donde se concentren altos gradientes de energía.

Un ejemplo que aborda Felippa para ilustrar el uso de este *framework* es construir una malla alrededor de una fisura de un material (pensemos en una pieza de concreto o en alguna placa metálica) ver la Figura 2.13. La función de energía que usa en ese ejemplo es una medida de la deformación del material, véase [110].

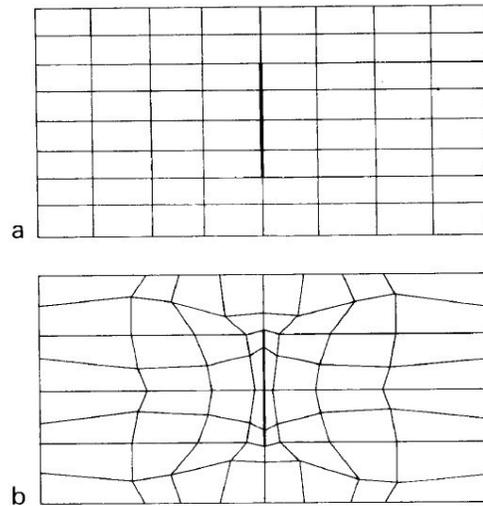


Figura 2.13: Malla inicial (a) y (b) malla optimizada. Figura tomada de [110].

El marco de trabajo que propone Felippa para optimizar mallas fue muy interesante y novedoso en 1976–1977 ya que engloba ideas descritas previamente y lineamientos que se siguen actualmente en el desarrollo de los métodos discretos. Nosotros hemos desarrollado métodos discretos para la generación de las mallas considerando que los nodos de la frontera se consideran fijos incluyendo a las esquinas y la restricción de que la malla sea convexa no la incorporamos como restricciones y ni tampoco como un Lagrangiano adicional a la función objetivo. Esta restricción es incorporada al funcional que optimizamos ya que cuenta un obstáculo infinito sobre las celdas convexas degeneradas a triángulo. Sobre la teoría del obstáculo infinito o *barrier property*, hablaremos de esto en el siguiente capítulo.

2.4. Breve revisión de algunos métodos discretos

Los métodos discretos también se conocen como directos, se basan en minimizar funciones definidas sobre los nodos de las celdas y miden alguna propiedad geométrica de las celdas.

Primero revisaremos cómo se han desarrollado históricamente los métodos discretos, algunos de los cuales aún son usados hoy en día para regiones sencillas.

Uno de los primeros esfuerzos por obtener una malla mediante un procedimiento de optimización fue descrito en 1973 por McNeice y Marcal [228], el cual se basa en resolver un problema variacional que involucra los esfuerzos y la tensión de los elementos de la malla de tal manera que la energía potencial total

$$F_p(u) = \frac{1}{2} u^t K u - u^t p \quad (2.22)$$

de la estructura de los nodos sea mínima. Lo cual ocurre cuando

$$\frac{\partial}{\partial u_i} F_p(u) = 0.$$

En el funcional de energía (2.22), u representa el vector de desplazamiento de los nodos, K es una matriz positiva definida que contiene los coeficientes de rigidez y p es un vector de cargas puntuales. Una revisión de estas ideas se encuentra en Turcke y McNeice [320] y [321]. En la Figura 2.14 se puede apreciar la malla suavizada que obtuvieron Turcke y McNeice usando un funcional de energía particular del tipo (2.22).

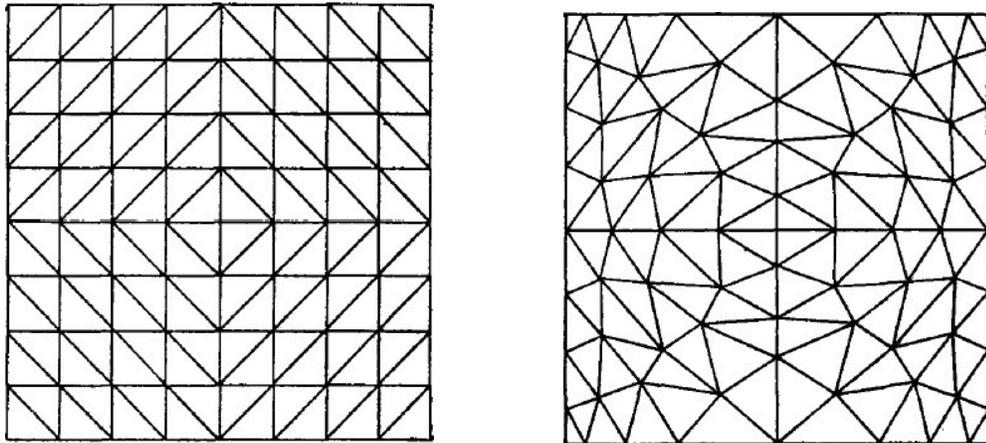


Figura 2.14: (a) Malla inicial (b) malla de energía potencial óptima.

A finales de los años 70, a partir de los resultados de Babūška y Rheiboldt [17] hubo

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

un esfuerzo importante por construir mallas cuya configuración de elementos sea de tal forma que minimice el error de discretización. El trabajo de Felippa [109] en 1976 fue uno de los primeros del cual hemos comentado en la sección anterior.

En 1983, Díaz *et al.* [90], revisan el error de aproximación que se obtiene usando interpolación de elementos lineales. Díaz, al igual que Felippa, propone minimizar el error de aproximación

$$\text{minimice } B^2(u, h) = \sum_{e=1}^{Ne} h_e^\beta |u|_{k+1,e}^2, \quad (2.23)$$

donde $\beta = 2k$, con k el orden de los elementos (lineal o cuadrático) y Ne es el número de elementos. Díaz impone una restricción sobre los elementos:

$$\sum_{e=1}^{Ne} h_e = 1, \quad h_e > 0, e = 1, \dots, Ne, \quad (2.24)$$

Para el caso unidimensional h_e es el diámetro del elemento; es decir, la distancia entre nodos consecutivos.

En el problema (2.23), el vector de diámetros $h = (h_1, h_2, \dots, h_{Ne})$ son las incógnitas. Para el caso bidimensional donde la región de estudio Ω es una poligonal con frontera fija, Díaz propone usar como el diámetro de los elementos el área de cada uno de ellos.

Para el caso bidimensional, el objetivo es encontrar un vector de áreas A_e de los elementos $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{Ne})$ de manera que

$$\text{minimice } B^2(u, \mathbf{A}) = \sum_{e=1}^{Ne} A_e^\beta |u|_{k+1,e}^2 \quad (2.25)$$

restringido a

$$\sum_{e=1}^{Ne} A_e = 1, \quad 0 < A_e, \quad e = 1, \dots, Ne. \quad (2.26)$$

En esta propuesta, Díaz encuentra que el área A_e de los elementos o celdas, deben satisfacer una condición de uniformidad

$$f_e = A_e^\beta |u|_{k+1,e}^2 = \text{constante}, \quad e = 1, \dots, Ne$$

y realiza una observación muy interesante del movimiento de los nodos en función de la solución f_e : la magnitud del movimiento de los nodos es relativa a la magnitud de f_e .

La propuesta de Díaz de minimizar el error de aproximación es interesante y enfocada al área de los elementos fue novedoso en 1983. Planteado de esa forma es fácil obtener una función objetivo donde los nodos deben moverse donde el gradiente de la solución es alto. Díaz obtuvo muy buenos resultados sobre regiones sencillas. Como

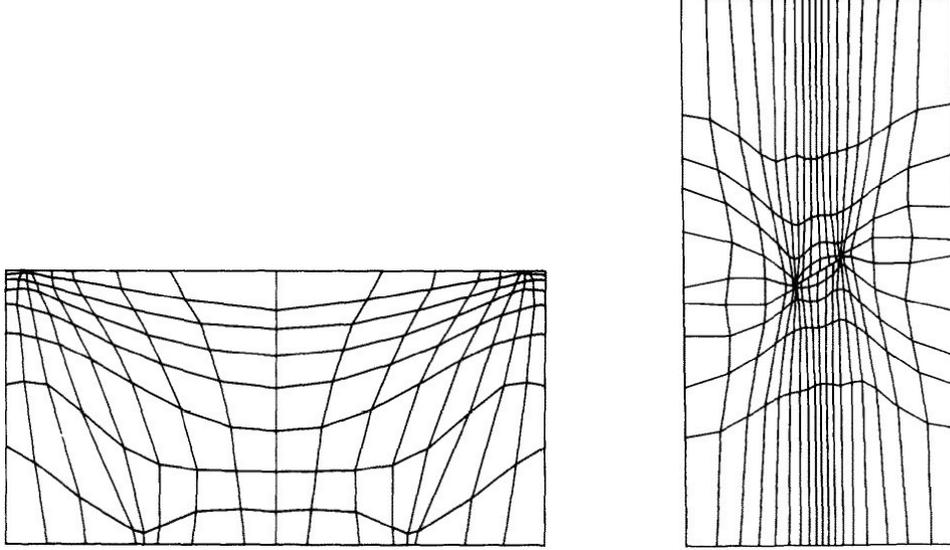


Figura 2.15: Malla óptima alrededor de un *crack* (b) Malla óptima en la cual las celdas se ajustan a un problema donde gradiente es alto.

veremos a continuación la propuesta de controlar el área de los elementos o celdas será usada de diferentes maneras y en diferentes enfoques.

En 1985, Kennon y Dulikravich [178] revisan que la formulación variacional del funcional Winslow

$$I_s(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta \quad (2.27)$$

donde

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi.$$

sujeto a $\mathbf{x}(\partial B_2) = \partial\Omega$.

El problema variacional (2.27) usualmente se resuelve discretizando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Kennon y Dulikravich observan que de discretizar el integrando por un esquema de diferencias finitas y calcular la integral como una suma sobre las celdas (o nodos), en teoría se debería obtener las mismas ecuaciones (discretas) de Euler-Lagrange. Sin embargo, si usamos diferencias centrales, las expresiones obtenidas son fuertemente desacopladas, cosa que no ocurre si usamos diferencias centrales directamente en las ecuaciones de Euler-Lagrange, esto principalmente se debe a que aparecen derivadas de segundo orden.

Para el funcional de área,

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

$$I_v(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} J^2 d\xi d\eta \quad (2.28)$$

si usamos diferencias hacia adelante, el integrando de (2.28) representa el área de un paralelogramo en el punto $\mathbf{x}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$, y con esto la discretización es una suma de cuadrados del área:

$$I_v \approx \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} A_{i,j}^2 \quad (2.29)$$

donde

$$A_{i,j} = \|\mathbf{r}_{i+1,j} \times \mathbf{r}_{i,j+1}\|$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1,j} &= (x_{i+1,j} - x_{i,j})\vec{\mathbf{i}} + (y_{i+1,j} - y_{i,j})\vec{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_{i,j+1} &= (x_{i,j+1} - x_{i,j})\vec{\mathbf{i}} + (y_{i,j+1} - y_{i,j})\vec{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_{i-1,j} &= (x_{i-1,j} - x_{i,j})\vec{\mathbf{i}} + (y_{i-1,j} - y_{i,j})\vec{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_{i,j-1} &= (x_{i,j-1} - x_{i,j})\vec{\mathbf{i}} + (y_{i,j-1} - y_{i,j})\vec{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Kennon y Dulikravich son los primeros que proponen construir mallas optimizando funciones o medidas geométricas que dependa del nodo $\mathbf{x}(i, j)$ y los cercanos a el de la forma

$$\text{mín } F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} g(x_{i,j}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}, x_{i,j+1}).$$

Con la finalidad de que los cambios del área de las celdas alrededor del nodo $\mathbf{x}(i, j)$ sean ‘suaves’, Kennon y Dulikravich proponen minimizar la suma de cuadrados de la diferencia del área de las celdas consecutivas

$$\text{SM}_{i,j} = (A_1 - A_2)^2 + (A_2 - A_3)^2 + (A_3 - A_4)^2 + (A_4 - A_1)^2 \quad (2.30)$$

aquí A_k representa el área de una de las cuatro celdas alrededor del nodo central $\mathbf{x}_{i,j}$. El funcional es de la forma

$$\text{mín } F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} \text{SM}_{i,j} \quad (2.31)$$

En la Figura 2.16 se observa la numeración del recorrido de las celdas en el funcional discreto (2.30).

Es importante señalar que en el funcional discreto (2.31), el área de las celdas es el área de paralelogramos que se forman con 3 nodos (incluyendo el nodo central), no

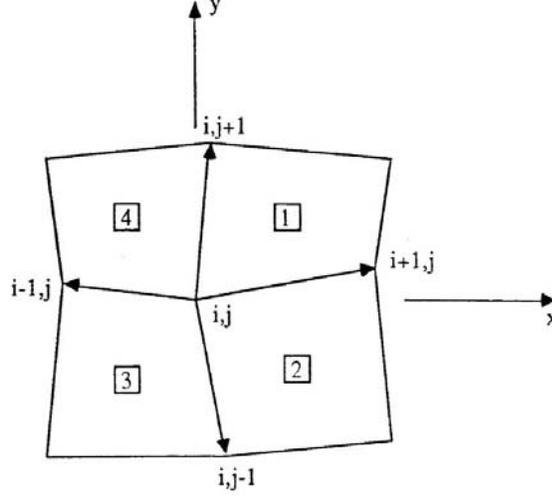


Figura 2.16: Las cuatro celdas alrededor de cada nodo i, j .

el área de cada celda. De cualquiera manera, una malla de área uniforme es un punto crítico de esta función.

En el mismo trabajo, proponen un segundo funcional basado en una medida geométrica. Observan que si las direcciones del sistema coordenado curvilíneo en $\mathbf{x}_{i,j}$ forman un ángulo recto entonces la malla es ortogonal. Por lo que proponen minimizar

$$\text{ORT}_{i,j} = (\mathbf{r}_{i+1,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j+1})^2 + (\mathbf{r}_{i,j-1} \cdot \mathbf{r}_{i+1,j})^2 + (\mathbf{r}_{i-1,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j-1})^2 + (\mathbf{r}_{i,j+1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j})^2 \quad (2.32)$$

Esta última propuesta y la discretización directa del funcional de ortogonalidad

$$I_o(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} [x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta]^2 d\xi d\eta \quad (2.33)$$

por diferencias hacia adelante coinciden, véase [146, 91].

Para construir mallas suaves y ortogonales Kennon y Dulikravich proponen combinar ambos funcionales discretos en una función objetivo sobre todos los nodos interiores de la malla, la función objetivo se escribe como

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha) \text{SM}_{i,j} + \alpha \text{ORT}_{i,j} \quad (2.34)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Resuelven el problema de optimización

$$\text{mín } F(G)$$

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

donde puntos sobre la frontera son fijos. Cuando la dimensión de la malla $m \times n$ es grande y por ende, el número de puntos interiores lo son, el problema de optimización es de gran escala y siendo la función objetivo una suma de cuadrados. Kennon y Dulikravich usan el método de gradiente conjugado de Fletcher-Reeves para optimizar el funcional (2.34). En la Figura 2.17 se observan las mallas inicial y algunas mallas intermedias del proceso de optimización.

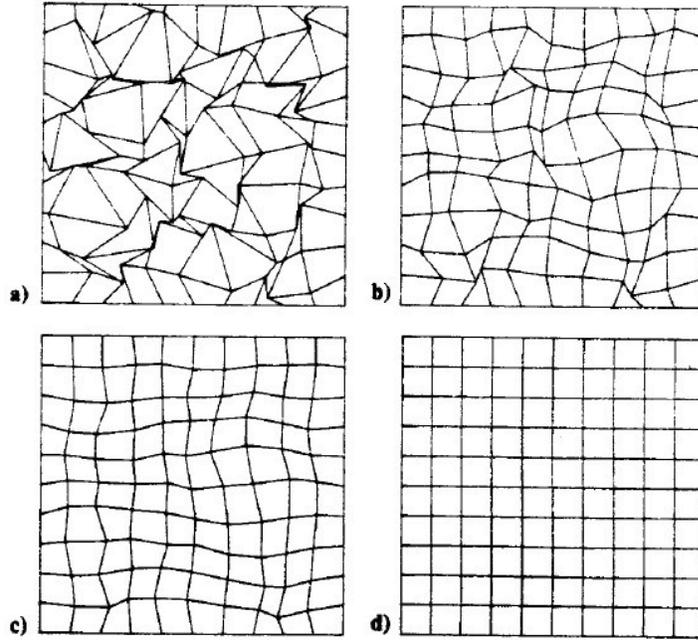


Figura 2.17: (a) una malla inicial de nodos aleatorios (b) malla optimizada luego de una iteración (c) malla optimizada luego de 2 iteraciones (d) malla optimizada y convexa luego de 20 iteraciones. Figura tomada de [179].

En un artículo posterior y del mismo año, Kennon y Dulikravich [180] proponen normalizar los funcionales para que de esta manera tengan el mismo orden de magnitud y sea posible compararlos para realizar una combinación lineal convexa adecuada entre estos funcionales discretos. El nuevo funcional se escribe como

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha) \frac{SM_{i,j}}{\sigma_{\text{máx}}} + \alpha \frac{ORT_{i,j}}{\rho_{\text{máx}}} \quad (2.35)$$

donde

$$\sigma_{\text{máx}} = \max_{i,j} SM_{i,j}, \quad \rho_{\text{máx}} = \max_{i,j} ORT_{i,j}.$$

con la finalidad de que, minimizando (2.35) para un valor pequeño de α , se controle más la uniformidad del área que la ortogonalidad de las celdas o viceversa. En la Figura 2.18

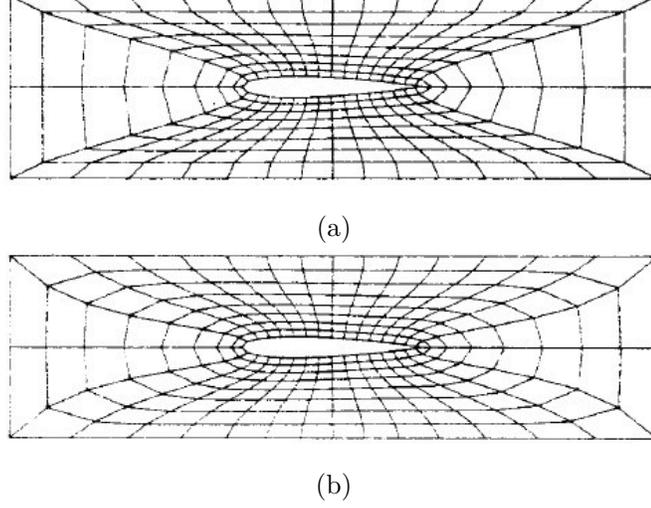


Figura 2.18: (a) Una malla inicial del tipo O para un ala de avión NACA 0012 (b) malla óptima por el funcional de suavidad y ortogonalidad de Kennon. Figura tomada de [179].

En [179], Kennon y Dulikravich observan que, localmente el funcional de longitud

$$I_l(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 d\xi d\eta$$

discretizado por diferencias centrales tiene la expresión:

$$HV_{i,j} = \|\mathbf{r}_{i,j+1}\|^2 + \|\mathbf{r}_{i+1,j}\|^2. \quad (2.36)$$

Como se observa, esta función mide en el cuadrado de las longitudes verticales y horizontales de una celda. En 1991, Barrera y Ojeda [242] demuestran que un punto crítico de

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} \|\mathbf{r}_{i,j+1}\|^2 + \|\mathbf{r}_{i+1,j}\|^2 \quad (2.37)$$

es una malla G^* donde las celdas tienen uniformidad de longitud en ambas direcciones y además, demuestran que la matriz hessiana de $F(G)$ es definida positiva y que la malla G^* que minimiza (2.37) localmente satisface

$$\mathbf{x}_{i,j} = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_{i-1,j} + \mathbf{x}_{i,j-1} + \mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{i,j+1})$$

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

esto es, los ùntos interiores satisfacen el Laplaciano discreto sobre los 4 nodos que conectan al nodo $\mathbf{x}_{i,j}$.

Kennon y Dulikravich proponen modificar la expresión (2.36) funcional de manera que

$$HV_{i,j} = \|\mathbf{r}_{i,j+1}\|^2 + \epsilon^2 \|\mathbf{r}_{i+1,j}\|^2 \quad (2.38)$$

donde $\epsilon > 1$. Esta propuesta la realizan con la finalidad que la elección del parámetro ϵ permita alargar o achicar los segmentos de la celda y con esto una mayor o menor flexibilidad en la forma de los elementos.

En 1991, Barrera y Ojeda [242] proponen, de manera independiente, la misma idea: construir un funcional que pondere las líneas verticales más que las horizontales (o viceversa), con la finalidad de controlar el espaciamiento de las líneas. Barrera y Ojeda obtienen buenos resultados sobre regiones con un solo cambio de concavidad; un ejemplo de estas regiones es la región **Annulus** de la Galería de Roache, véase [302]. En 1997, Castillo y Otto [70] presentan lo que llaman *funcional de longitud discreto generalizado* el cual tiene la misma representación que el funcional ponderado (2.38) propuesto por vez primera por Kennon y Dulikravich en 1986.

La nueva función objetivo $F(G)$ de Kennon y Dulikravich involucra ahora la combinación de los anteriores funcionales y se escribe como

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} [(1 - \alpha)SM_{i,j} + \alpha ORT_{i,j}] + \beta HV_{i,j}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, y $\beta > 0$.

En otro artículo de 1986, Carcaillet, Dulikravich y Kennon [60] siguiendo las ideas de la representación continua del funcional de área ponderado

$$I_v(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} w J^2 d\xi d\eta \quad (2.39)$$

donde $w = w(\xi, \eta)$ es una función positiva, véase [308, 226]; proponen ponderar el valor del área de las celdas en la forma:

$$VOC_{i,j} = W_{i,j} \cdot A_{i,j}^2$$

donde $0 < W_{i,j} \leq 1$ con la finalidad de controlar las celdas de la malla de acuerdo a los valores de $W_{i,j}$, si estos son pequeños la celda se hace grande y donde $W_{i,j}$ sea grande la celda se achica.

Los experimentos que realizan, véase [60], les hacen ver que para obtener mallas adaptativas es más eficiente ponderar el funcional discreto de longitud en la forma:

$$VOC_{i,j} = w_1 \|\mathbf{r}_{i+1,j}\|^2 + w_2 \|\mathbf{r}_{i,j+1}\|^2 + w_3 \|\mathbf{r}_{i-1,j}\|^2 + w_4 \|\mathbf{r}_{i,j-1}\|^2. \quad (2.40)$$

Nosotros llegamos a las mismas observaciones para adaptar geoméricamente la malla es conveniente usar el funcional de longitud, véase [41] y el Capítulo 4.

La elección para los pesos $w_k, k = 1, \dots, 4$ que propone Carcaillet es muy interesante. A cada celda de la malla se le asigna un peso $W_{i,j}$ y los pesos w_k se calculan de forma que

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i+1,j}), \\ w_2 &= \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i,j+1}), \\ w_3 &= \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i-1,j}), \\ w_4 &= \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i,j-1}). \end{aligned}$$

Es fácil ver que nuestra propuesta en [41] coincide con esta elección.

Ahora, la función objetivo $F(G)$ que proponen Carcaillet, Dulikravich y Kennon para construir mallas suaves, convexas y adaptativas es:

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} [(1 - \alpha)\text{SM}_{i,j} + \alpha\text{ORT}_{i,j}] + \beta\text{VOC}_{i,j} \quad (2.41)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$.

En el ejemplo de la Figura 2.19 Carcaillet *et al.* usaron como pesos $W_{i,j}$ a valores de una función tangente hiperbólica, y para evitar ceros en los pesos proponen escalar esos valores en la forma:

$$\tilde{W}_{i,j} = \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma} \cdot \text{máx } W_{i,j} + 1/\sigma$$

donde

$$\sigma = \text{mín}(\sigma_0, \text{máx}_{i,j} W_{i,j} / \text{mín}_{i,j} W_{i,j})$$

y $\sigma_0 > 0$ es un parámetro de protección.

En un artículo posterior, Carcaillet, Dulikravich y Kennon [61] proponen extender los funcionales directos SM y ORT anteriormente descritos a 3D. Para el caso de mallas 3D formadas por celdas hexaedrales proponen usar como medida de suavidad una extensión del funcional de longitud en combinación con una medida de la ortogonalidad, ambos definidos sobre las 8 celdas alrededor de cada nodo, véase la Figura 2.20.

La función objetivo se escribe ahora sobre todas las celdas hexaedrales de la malla 3D en la forma

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^l (1 - \alpha)\text{SM}_{i,j,k} + \alpha\text{ORT}_{i,j,k} \quad (2.42)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Aquí, $m \times n \times l$ es la dimensión de la malla 3D estructurada, Nuevamente, los nodos sobre la frontera son fijos.

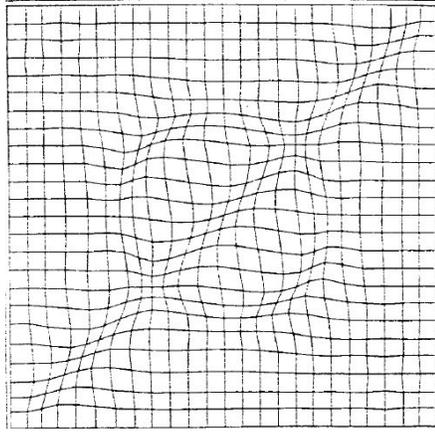


Figura 2.19: Una malla adaptada minimizando (2.41), donde W son valores de una función tangente hiperbólica. Figura tomada de [60].

Un ejemplo que usan para mostrar la efectividad de estos funcionales, es construir una malla de $21 \times 21 \times 4$ sobre un cubo. El procedimiento de minimización de (2.42) inicia con una malla para la cual los nodos interiores son obtenidos aleatoriamente, véase la Figura 2.21.

Algunas gráficas de las capas verticales de la malla durante el proceso de optimización se muestran en la Figura 2.22.

Para curvas y superficies en 3D, Carcaillet, Dulikravich y Kennon observan que la condición de ortogonalidad no siempre puede satisfacerse y para fronteras complejas sugieren un tratamiento adecuado a los nodos de que describen la frontera de la región. Proponen mover los nodos de la frontera en el proceso de optimización, lo que implica una parametrización de las fronteras. Otra idea que proponen es darle un suavizamiento previo la frontera y luego proyectando estos nodos sobre la frontera original, ver [61].

En los experimentos que realizan para mallas 3D observan que para algunos casos sencillos es posible obtener buenos resultados y en otros no, debido a que las celdas usualmente se doblan presumiblemente, a que el funcional de longitud busca uniformidad de los lados. Sospechan que diseñando una medida de suavidad basada en el cálculo adecuado del volúmen de la celdas podría resolver esto.

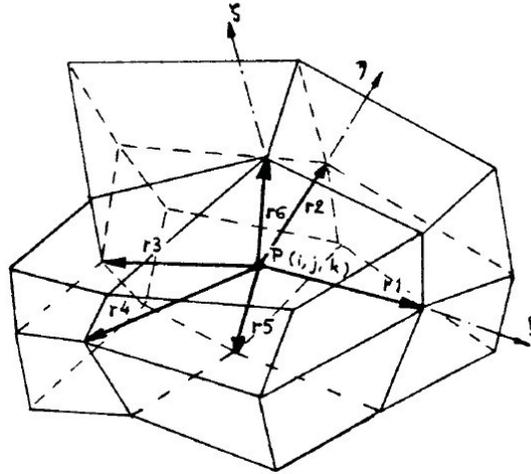


Figura 2.20: Celdas hexaedrales que rodean al nodo $P(i, j, k)$. Figura tomada de [61].

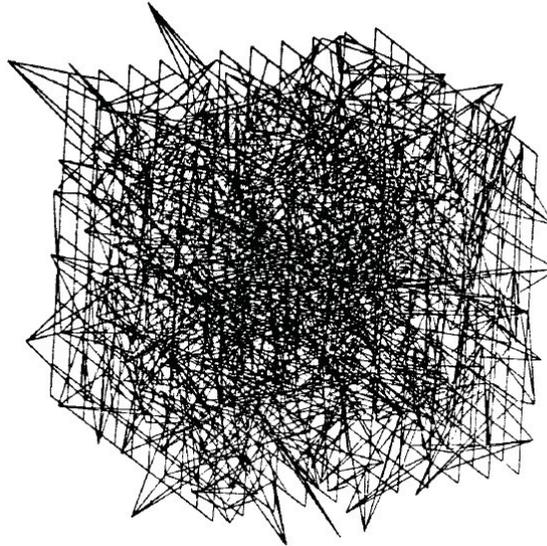


Figura 2.21: Una malla de $21 \times 21 \times 4$ de nodos aleatorios. Figura tomada de [61].

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

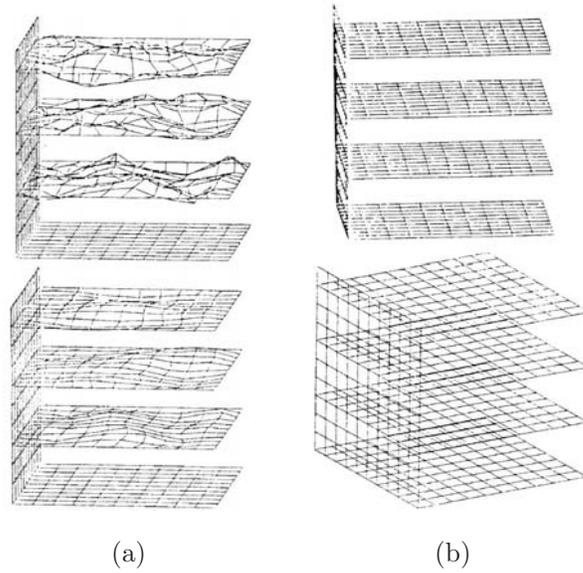


Figura 2.22: (a) Se muestra la malla de $21 \times 21 \times 4$ optimizada luego de 19 iteraciones y luego de 3 más la malla ya es convexa (b) malla optimizada luego de 20 iteraciones y la inmediata abajo se obtuvo luego de 50 iteraciones. Figura tomada de [61].

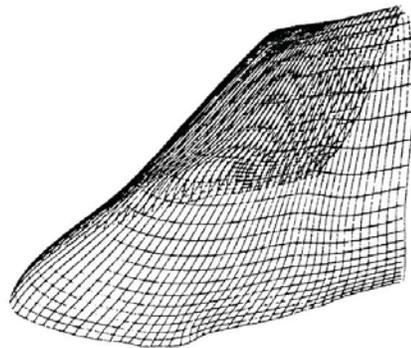


Figura 2.23: Una malla sobre la superficie de la cabina de un avión. Figura tomada de [61].

Las ideas de Kennon y Dulikravich para definir funcionales discretos basados en medidas geométricas o de calidad y buscar en el óptimo de tales funcionales una malla con esas características han sido retomadas por numerosos autores. Uno de ellos son Kumar y Kumar, quienes en 1988 [200] proponen un funcional de ortogonalidad diferente a (2.32). Kumar y Kumar imponen que el vector dirección que sale del nodo central $\mathbf{x}_{i,j}$ en dirección $\mathbf{x}_{i+1,j}$ sea ortogonal al vector “vertical” que se obtiene con los puntos $\mathbf{x}_{i,j-1}$ y $\mathbf{x}_{i,j+1}$ y lo propio para los restantes.

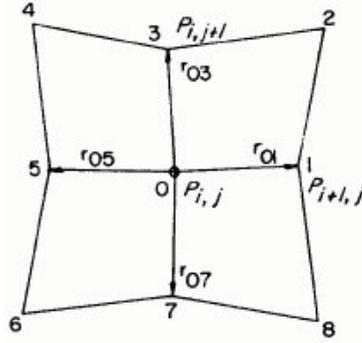


Figura 2.24: Notación para puntos que conectan con $P_{i,j}$. Figura tomada de [200].

Usando la notación de Kumar y Kumar, ver Figura 2.24 localmente, el funcional se expresa como

$$F_{O_{i,j}} = (\mathbf{r}_{03} \cdot \mathbf{r}_{15})^2 + (\mathbf{r}_{07} \cdot \mathbf{r}_{15})^2 + (\mathbf{r}_{01} \cdot \mathbf{r}_{37})^2 + (\mathbf{r}_{05} \cdot \mathbf{r}_{37})^2$$

en combinación con

$$F_{Ob} = g(\eta)(\mathbf{r}_{68} \cdot \mathbf{r}_{07})^2$$

donde $g(\eta)$ permite para controlar la ortogonalidad en la dirección η . La función objetivo de Kumar y Kumar se escribe como

$$F(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} \alpha \text{VOC}_{i,j} + \beta F_{O_{i,j}} + \gamma F_{Ob}$$

donde $\text{VOC}_{i,j}$ es el mismo funcional ponderado de longitud propuesto por Kennon, siendo $0 \leq \alpha$, $0 \leq \beta$, $0 \leq \gamma$ pesos adecuados y $0 < g(\eta)$. En la malla de la Figura 2.25 se aprecia el control de la distribución de las líneas cerca del ala de un avión.

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

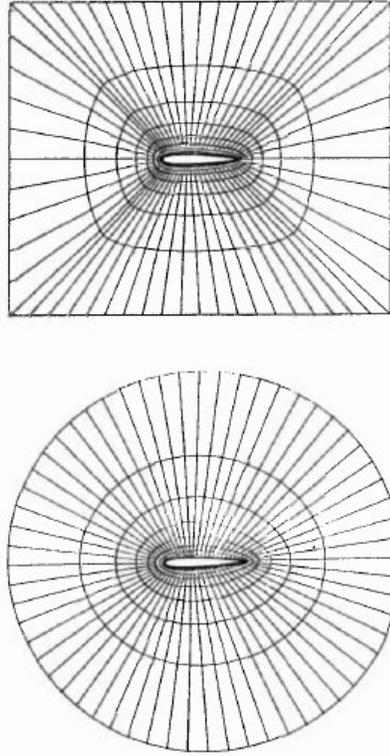


Figura 2.25: Malla del tipo O alrededor del ala de un avión con frontera exterior rectangular y circular. Figura tomada de [200].

Las ideas de Kennon y Dulikravich para aproximar los funcionales continuos por medio de medidas geométricas discretas son revisadas por Castillo en su trabajo doctoral de 1987 [65]. La propuesta de Castillo es resolver un problema de optimización con restricciones. Este trabajo tiene su origen en las ideas que discuten Steinberg y Roache en 1986, véase [299].

En 1986, Steinberg y Roache [299] replantean la formulación variacional de Saltzman y Brackbill desde un punto de vista de la geometría diferencial, obteniendo un problema variacional con restricciones. Observan que en su formulación discreta esto da lugar a un problema de optimización con restricciones. En particular muestran que si $x_i \in [0, 1]$ es una colección de Ne , puntos de manera que $x_{i+1} > x_i$, el problema de optimización

$$\text{mín} \sum_i^{Ne} x_i^2 \quad (2.43)$$

sujeto a la restricción

$$\sum_{i=1}^{Ne} x_i = 1 \quad (2.44)$$

es una malla de nodos igualmente espaciados. Por lo que resulta natural extender el uso de este problema de optimización a mallas en el plano, sobre curvas y superficies en 3D. Esta es la base del trabajo de Castillo.

En 1987, Castillo [65] propone minimizar la suma de los cuadrados del área de todas las celdas de la malla

$$F_A(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} A_{i,j}^2$$

sujeto a la restricción

$$\sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} A_{i,j} = \text{área}(\Omega)$$

Para calcular el área del cuadrilátero, Castillo usa las diagonales $\vec{f}_{i,j}$ y $\vec{e}_{i,j}$ del cuadrilátero en la forma

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{1}{2} \|\vec{f}_{i,j} \times \vec{e}_{i,j}\| \\ &= \frac{1}{2} [(x_{i,j} - x_{i+1,j+1})(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}) - (y_{i,j} - y_{i+1,j+1})(x_{i+1,j} - x_{i,j+1})]. \end{aligned}$$

En [65], Castillo usa las ideas detrás del problema de optimización con restricciones (2.43–2.44) para plantear el funcional discreto de longitud

$$F_L(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} (L_{i,j+1}^h)^2 + (L_{i+1,j}^v)^2$$

el cual es el mismo funcional (2.37) planteado previamente por Kennon y Dulikravich. En la misma línea para obtener celdas casi ortogonales, propone minimizar el funcional de ortogonalidad

$$F_O(G) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} O_{i,j}^2$$

donde $O_{i,j}$ mide el ángulo de la celda $c_{i,j}$ en el punto $\mathbf{x}_{i,j}$. Este funcional discreto coincide con el planteado por Kennon.

Castillo define una función objetivo como combinación lineal de estos tres funcionales discretos a los que llama “vanilla functionals”

$$F(\mathbf{z}) = \epsilon_L F_L(\mathbf{z}) + \epsilon_A F_A(\mathbf{z}) + \epsilon_O F_O(\mathbf{z})$$

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

donde \mathbf{z} es el vector de los nodos interiores.

En 1986, Barrera y Castillo [25] usan el método de gradiente conjugado de Hestenes y Stiefel y muestran que la matriz Hessiana asociada al funcional de área puede ser no positivo definido, y con esto muestran que el funcional discreto de área que propone Castillo puede no tener soluciones de área uniforme. Barrera y Castillo muestran algunos ejemplos en los que la malla obtenida es no convexa.

En 1988, Ivanenko y Charkhch'yan [156] revisan la teoría de los mapeos armónicos entre la región de estudio Ω y B_2 y observan que con este tipo de mapeos se puede garantizar que el mapeo sea inyectivo y sobre, y por consiguiente, la retícula o malla convexa que provenga de B_2 hacia Ω resulta ser convexa. Ivanenko y Charkhch'yan proponen aproximar el funcional de Winslow

$$I_s(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta; \quad \text{donde } J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad (2.45)$$

sobre cada celda de G , por medio de una función bilineal, de la forma

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \mathbf{P} + \mathbf{Q}\xi + \mathbf{R}\eta + \mathbf{S}\xi\eta \quad (2.46)$$

aquí, P, Q, R y S son los vértices de una celda $c_{i,j}$ de la malla. Esta idea es muy simple, observe que $I_s(\mathbf{x})$ se puede escribir como

$$I_s(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{\mathbf{x}_\xi^t J_2 \mathbf{x}_\eta} d\xi d\eta \quad (2.47)$$

con

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Para determinar el mapeo armónico $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta)$, debemos resolver el problema variacional

$$\min_{\mathbf{x}(\partial B_2) = \partial \Omega} I_s(\mathbf{x}). \quad (2.49)$$

Ahora, restrinjamos el mapeo \mathbf{x} a una de las celdas de B_2 . Con esto, podemos reescribir al funcional como una suma de funcionales sobre cada una de las celdas

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} \int_{B_{i,j}} \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{\mathbf{x}_\xi^t J_2 \mathbf{x}_\eta} d\xi d\eta \quad (2.50)$$

Una vez realizado esto, el mapeo solución $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es aproximado sobre cada celda por el mapeo bilineal (2.46). La aproximación al funcional de Winslow (2.50) se escribe como

$$I(\mathbf{x}) \approx \sum_{i,j} \int_{B_{i,j}} \frac{\|\mathbf{r}_\xi\|^2 + \|\mathbf{r}_\eta\|^2}{\mathbf{r}_\xi^t J_2 \mathbf{r}_\eta} d\xi d\eta \quad (2.51)$$

o en forma simplificada

$$I(\mathbf{x}) \approx \sum_{i,j} \int_{B_{i,j}} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.52)$$

donde

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{\|\mathbf{r}_\xi\|^2 + \|\mathbf{r}_\eta\|^2}{\mathbf{r}_\xi^t J_2 \mathbf{r}_\eta}.$$

El segundo paso es aproximar la integral (2.52) por una cuadratura simple que solamente involucre a los cuatro vértices de una celda:

$$I(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{4} (\varphi(0,0) + \varphi(1,0) + \varphi(1,1) + \varphi(0,1)) \quad (2.53)$$

Es fácil ver que la función $\varphi(\xi, \eta)$ solamente involucra a tres de los cuatro vértices de un cuadrilátero y que de manera cíclica se puede escribir como

$$\varphi(0,0) = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2}{\mathbf{a}^2 J_2 \mathbf{b}}; \quad \vec{\mathbf{a}} = \vec{PQ}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \vec{PS}$$

Con todo esto, hemos obtenido una discretización del funcional de Winslow, sobre todos los elementos triangulares de la malla, el cual se puede escribir como

$$I^h(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{4} \frac{\lambda(T_q)}{\alpha(T_q)} \quad (2.54)$$

donde

$$\lambda(T) = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{b}}\|^2; \quad \alpha(T_q) = \mathbf{a}^2 J_2 \mathbf{b}.$$

De esta forma, el problema variacional (2.49) ha sido transformado un problema de optimización

$$\text{mín } I^h(\mathbf{z}) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{4} \frac{\lambda(T_q)}{\alpha(T_q)}$$

no lineal sin restricciones, donde N es el número de elementos triangulares de la malla. En este problema de optimización las incógnitas \mathbf{z} , son los nodos interiores de la malla y los nodos de la frontera son fijos. Esta funcional discreta que hemos obtenido es una discretización del funcional del Winslow.

Ivanenko observaba que, si la función $I^h(G)$ tiene la propiedad de que $I^h(G) \rightarrow \infty$, para $G \rightarrow \partial \mathcal{M}_0(G)$, esto es, si para algún α_q de alguna celda de la malla, esta tiende a cero, siempre que los restantes sean siempre positivos, entonces $I^h(G) \rightarrow \infty$ y con esto prueba que si el conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0(G)$ es no vacío, entonces

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

$$R_x = \frac{\partial I^h(G)}{\partial x_{ij}} = 0, \quad R_y = \frac{\partial I^h(G)}{\partial y_{ij}} = 0 \quad (2.55)$$

tiene al menos una solución G^* la cual es convexa. Otra forma de decir esto, es que de existir, una malla convexa de $m \times n$ sobre Ω , optimizando el funcional discretizado (2.54) podemos obtener una malla suave y convexa.

Cuando un funcional $I^h(G) \rightarrow \infty$ conforme $G \rightarrow \partial\mathcal{M}_0(G)$ se dice que el funcional tiene la *propiedad de obstáculo*. Esta propiedad la revisaremos en el siguiente capítulo.

Para resolver (2.55), es necesario que la malla inicial sea convexa. Ivanenko y Charkhch'yan proponen obtener esa malla inicial al minimizar una función cuadrática truncada

$$I_D(G) = \sum_{q=1}^N (\epsilon - \alpha_q)_+^2 \quad (2.56)$$

para un valor $\epsilon > 0$ conveniente. Aquí

$$f_+ = \max(0, f).$$

En 1989, Barrera, Castellanos y Pérez [27], proponen discretizar el funcional continuo de área

$$I_a(\mathbf{x}) = \int \int_{B_2} J^2 \, dx dy$$

usando las ideas de Ivanenko y Charkhch'yan para la discretización del funcional de suavidad de Winslow y obtienen

$$F_t(G) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 (\alpha_{i,j}^{(k)})^2 \quad (2.57)$$

$$= \sum_{q=1}^N \alpha_q^2. \quad (2.58)$$

El nuevo funcional discreto de área es en el cuadrado área de cuatro triángulos que se forman con las diagonales del cuadrilátero.

En 1991, Barrera, Castellanos y Pérez [28], describen la estructura del vector gradiente y de la matriz Hessiana de (2.58) y concluyen que una malla G^* uniforme en área para elementos triangulares, es un punto crítico para este nuevo funcional discreto. Barrera *et al.* realizan comparaciones con el funcional de área de Castillo y encuentran que este puede producir celdas dobladas o no convexas en regiones de prueba donde el nuevo funcional sí logra obtener mallas convexas. En ese trabajo encuentran que la restricción que impone Castillo

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \text{área}(c_{i,j}) = \text{área}(\Omega), \quad (2.59)$$

no es necesaria si se considera que todas las celdas están orientadas y se calcula el área de las celdas con signo. Para esto, muestran que si los triángulos son orientados, entonces (2.59) siempre se cumple. A partir de este trabajo, en el grupo **unamalla** hemos atacado el problema de la generación numérica de mallas como un problema de optimización sin restricciones.

En 1991, Ojeda [242] publica su tesis de maestría donde describe un sistema para PC que reúne los funcionales discretos que han desarrollado Barrera *et al.* [28], así como algunos de los métodos de optimización de gran escala que se emplean en la academia y en la industria por esos años. Estos métodos directos han sido revisados de nueva cuenta, en la década pasada por Egidi y Maponi 2003, 2005 [96, 97] y Khattri 2006, 2007 y 2009 [174, 175, 176].

En 1990, Steinberg y Roache [300], observan que el funcional de longitud

$$F_1(G) = \sum_{k=1}^{N-1} l_k^2$$

sobre los nodos de una curva no siempre produce una malla no doblada. Este funcional busca que todas las longitudes sobre la curva sean iguales (ellos emplean la longitud de arco). Para mostrar esto Steinberg y Roache construyen una colección de nodos sobre una parábola y comprueban sus resultados.

En 1991, Knupp [185] propone una modificación del funcional de longitud para construir mallas sobre curvas. Primero realiza un análisis del funcional de longitud

$$F_2(G) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-2} (l_i - l_j)^2$$

al que llama *equal-chord functional*, calcula la hessiana del funcional y observa que es semi definido positivo. Usando el ejemplo de la parábola de Steinberg y Roache [300], encuentran que este funcional puede tener varios puntos críticos, por lo que proponen otro funcional

$$F_3(G) = \sum_{i=2}^N (l_{i+1} - l_i)^2$$

(el cuadrado de la diferencia entre elementos consecutivos) como una alternativa. Sin embargo, observan que cuando la malla es de dimensión alta puede presentarse problemas de redondeo numérico y la convergencia puede llegar a ser muy lenta.

En [185], Knupp propone construir mallas planas sobre superficies minimizando el funcional

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

$$F_A(G) = \sum_k \sum_l (A_k - A_l)^2$$

el cual coincide con las ideas de Kennon y Dulikravich. Un punto crítico es una malla con celdas uniformes en área. Knupp señala que el área de una celda sobre superficies debe ser definida adecuadamente ya que las celdas sobre la superficie no son planas. Esta observación ya la había señalado Carcaillet, Kennon y Dulikravich.

Como hemos visto, algunos esfuerzos realizados para construir funcionales discretos están basados en el principio de equidistribución y otros discretizan adecuadamente funcionales variacionales.

En 1988, Pardhanani y Carey [245] proponen que los funcionales de suavidad $I_s(\mathbf{x})$, de ortogonalidad $I_o(\mathbf{x})$ y de área (o volúmen) $I_a(\mathbf{a})$, sean aproximados por un método de elemento finito de Galerkin de manera que

$$x_h(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N x_j \phi_j(\xi, \eta), \quad y_h(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N y_j \phi_j(\xi, \eta)$$

donde $\{\phi_j\}$ son N funciones base de polinomios por pedazos. Las integrales I_s , I_o y I_v son aproximadas por una cuadratura simple y con esto, el problema variacional es transformado a un problema de optimización para el cual los coeficientes de x_j y y_j , $j = 1, \dots, N$ son las incógnitas.

Pardhanani y Carey observan que los resultados son muy similares a los obtenidos usando diferencias finitas. Por ejemplo, si usamos elementos lineales sobre triángulos para el caso del funcional de longitud obtendremos el operador Laplaciano de 5 puntos. Pardhanani y Carey señalan que discretizando este funcional por elementos bilineales se obtendrá un operador de nueve puntos que sin embargo, no corresponde a un operador de diferencias de nueve puntos.

El trabajo de Zochowski y Hoinicki de 1989 es muy interesante ya que propone calcular los coeficientes de una representación lineal de funciones base de tal forma que aproxima a la solución del problema variacional. Un trabajo en esa misma dirección es descrito por B. Saunders en 1993, [281] donde propone un producto tensorial de funciones base B-spline cúbico

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} B_{i,j}(\xi, \eta) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} B_{i,j}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

donde $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$, y $B_{i,j}(\xi, \eta) = B_i(\xi)B_j(\eta)$ donde B_i y B_j son elementos B-spline sobre un conjunto de nodos no decrecientes $\{s_i\}$ y $\{t_j\}$ en $[0, 1]$. Los coeficientes del producto tensorial son las incógnitas del problema de optimización obtenido al minimizar $I_s(\mathbf{x})$, $I_a(\mathbf{x})$ y $I_o(\mathbf{x})$.

Los resultados obtenidos tanto por Zochowski y Hoinicki y Saunders en regiones simples y poco complejas, son interesantes. Sin embargo, no hay ninguna teoría que nos garantice que la malla del mapeo así obtenido sea convexa.

Es en el trabajo de Ivanenko y Charanchyan donde se sientan las bases para el desarrollo de mallas suaves y convexas minimizando funcionales armónicos.

Regresando al trabajo de Ivanenko [156, 157], el funcional discreto

$$I^h(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{4} \frac{\lambda(T_q)}{\alpha(T_q)} \quad (2.61)$$

donde

$$\lambda(T) = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2; \quad \alpha(T_q) = \mathbf{a}^2 J_2 \mathbf{b}.$$

es un cociente que involucra el área con signo del triángulo, por lo que se podría perder la convexidad en algún paso del proceso iterativo de optimización. Ivanenko propone regularizar el funcional de manera que

$$\alpha = \begin{cases} \alpha, & \alpha > \epsilon \\ \epsilon, & \alpha \leq \epsilon \end{cases} \quad (2.62)$$

En 1992, Barrera *et al.* [29] revisan la discretización propuesta de Ivanenko y observan que es necesario realizar una regularización más robusta del funcional debido a que el recíproco de área hace inestable el proceso de optimización no lineal de gran escala. La idea que emplean es empatar $f = 1/\alpha$ por otra función que recorre el polo a $-\epsilon$ y de manera que el empate sea continuamente diferenciable, proponen

$$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha > \epsilon \\ \frac{4\epsilon}{(\alpha+\epsilon)^2}, & -\epsilon < \alpha \leq \epsilon \end{cases}$$

aquí propusieron usar $\epsilon = \bar{\alpha}(G)/2$ como parámetro de regularización. La forma de esta regularización se aprecia en la Figura 2.26

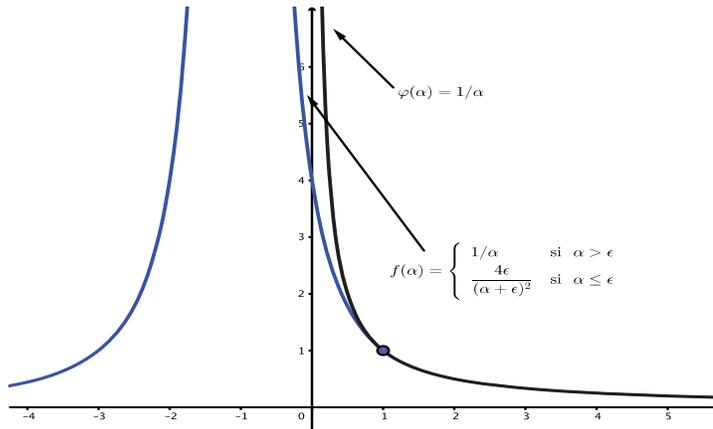


Figura 2.26: Regularización de Barrera para $1/\alpha$.

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

Esta regularización fue muy útil en su momento, ya que permite iniciar el proceso empleando mallas con pocas celdas no convexas y de perderse la convexidad en algún paso iterativo esta se recupera fácilmente.

En 1997, Tinoco [312] retoma el trabajo de construir mallas convexas por medio del funcional armónico y propone una modificación de la forma

$$H_\omega(G) = \sum_q^N \frac{\lambda(T_q) - 2\alpha(T_q)}{\omega + \alpha(T_q)}$$

El cual presenta un obstáculo o polo para $\omega = \alpha_q = \alpha(T_q)$.

La idea original fue trasladar el polor de $\alpha_q = 0$ a $\alpha_q + \omega = 0$. Aquí ω es un parámetro conveniente que se hace tender a cero. Tinoco muestra que las mallas así construidas forman una colección de regiones factibles en que se contraen conforme $\omega \mapsto 0$ a una región donde, de existir, habita una malla convexa. El éxito de este funcional es usar una regularización cuadrática para evitar el polo. De este funcional y de su regularización hablaremos en el siguiente capítulo. Este funcional es combinado con el funcional de área y de ortogonalidad para obtener mallas convexas suaves y casi ortogonales.

Poco tiempo después, en 1999, Garanzha y Kaporin [125] proponen una regularización para el funcional variacional armónico y en la versión discreta encuentran propiedades geométricas idénticas al funcional armónico orginal. En [160, 163], Ivaneko prueba que es posible construir una trayectoria usando una técnica de continuación en el parámetro ϵ (2.62) de manera que la solución converge a un óptimo del funcional (2.61) en número finito de pasos de optimización.

En 2000, Ivanenko [162] propone controlar al tamaño de las celdas usando una funcional de densidad de energía. La construcción de esta funcional es muy simple: construir un mapeo $\mathbf{x} : B_2 \rightarrow \Omega$ como composición de dos mapeos. Primero se construye un mapeo $\mathbf{X} : B_2 \rightarrow \Omega'$ sobre un dominio particular Ω' , usualmente simple, en la cual se define una malla con propiedades geométricas particulares.

La malla resultante es obtenida desde el dominio de \mathbf{X} bajo la el mapeo $\mathbf{x}(\mathbf{X})$. El funcional de energía se escribe como

$$I_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int \int_{B_2} \frac{\text{tra}(G^{-1}g)}{\sqrt{\det(G^{-1}g)}} = \frac{1}{2} \int \int_{B_2} \frac{g_{11}G_{22} - 2g_{12}G_{12} + g_{22}G_{11}}{\sqrt{\det g} \sqrt{\det G}}$$

donde G es el tensor métrico del mapeo \mathbf{X} y g es el tensor métrico del mapeo \mathbf{x} . Ivanenko observa que esta representación difiere del mapeo armónico pero observa que las ecuaciones de Euler-Lagrange de $I_e(\mathbf{x})$ son elípticas y demuestra la existencia de su solución, el cual es un mapeo uno a uno cuando el mapeo entre Ω y Ω' es armónico.

La malla sobre Ω' es lo que en la literatura se conoce como malla de referencia. Usando estas ideas define mallas adaptativas para una función de control y en general propone controlar el tamaño de las celdas usando un mapeo \mathbf{X} conveniente. Este trabajo sería retomado en 2012 por Azarenok para definir mapeos que controlen la ortogonalidad de las celdas cerca de la frontera, véase [16].

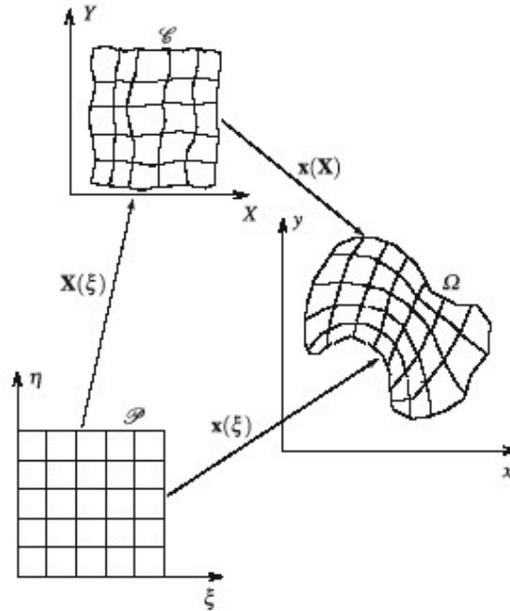


Figura 2.27: Una malla obtenida como composición de mapeos. Figura tomada de [16].

En 2002, Garanzha [129] observa los resultados obtenidos por Ivanenko [160, 162] y es probable que conociera el trabajo de Tinoco de 1997 [312], ya que propone un marco de trabajo para construir una mallas suaves y convexas, el cual consiste en

1. un principio variacional conveniente
2. que cuente con un obstáculo en el conjunto de mallas convexas
3. contar con un procedimiento para contraer las regiones factibles
4. contar con una penalización que permita alcanzar una solución factible
5. una técnica eficiente de optimización

En ese trabajo Garanzha reescribe el funcional armónico generalizandolo en una formulación variacional que involucra una métrica para construir mallas convexas e isoparamétricas, véase [129].

En 2003, Ivanenko [164] continúa desarrollando una teoría basada en funciones de densidad de energía y describe el principio de mínima densidad de energía *minimal principle density energy*, el cual consiste en lo siguiente:

Consideremos una medida de calidad $\mu(C)$ para cada celda o elemento de la malla G . Ahora, defina una transformación lineal de un elemento simple digamos un cubo, hacia la celda C . La densidad de energía del mapeo lineal

2. UN PANORAMA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS PARA CONSTRUIR MALLAS

es definido como el promedio de energía almacenada en el ángulo recto del paralelepípedo de la unidad de volumen en el espacio físico, siempre que el paralelepípedo sea la imagen del cubo en el espacio computacional. El recíproco de la densidad de energía $e(C)$ es una medida de calidad. El máximo de la medida de calidad corresponde al mínimo de la densidad de energía y se alcanza si y sólo si la forma del elemento es la misma que la preestablecida para el elemento (en este caso un cubo).

Bajo esta idea, la suma de cada una de esas energías forman un función de densidad de energía global de la deformación de la malla bajo la medida de calidad usada:

$$E(G) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} e(C_k).$$

Este enfoque propuesto por Ivanenko generaliza el funcional de energía $e(T)$ sobre un triángulo, que obtenemos al discretizar el funcional de Winslow:

$$I^h(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(\Delta_q)}{\alpha(\Delta_q)} = \sum_{q=1}^N e(T_q).$$

Para este caso, la densidad de energía total de deformación de la malla, es un funcional discreto con un obstáculo infinito en el límite del conjunto de las mallas convexas.

Algunas de las medidas de calidad para un triángulo que vamos a analizar en el Apéndice 1, es:

$$\mu(T) = \frac{4\sqrt{3}A}{a^2 + b^2 + c^2},$$

donde a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y A su área. La densidad de energía para un elemento triangular es:

$$e(T) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{A},$$

aquí $e(T)$ es la cantidad de energía contenida en el triángulo al sufrir una deformación a partir de un triángulo equilátero.

Como señala Ivanenko [162, 162] si somos capaces de construir medidas de calidad de forma que la densidad de energía cuente con un obstáculo infinito en las mallas dobladas podemos usarlas para un proceso de optimización garantizando que la malla sea convexa en cada paso.

En 2005 y 2006, Conti y Moranti [80, 81] retoman el estudio de la reparametrización del mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ por medio de un producto tensorial de funciones B-spline cúbicas, véase Saunders [280, 281], pero ahora, proponen minimizar el número de condición del tensor métrico

$$g(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2; \quad g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta; \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2.$$

En ese trabajo proponen otras matrices $M(\xi, \eta)$ que involucran el área, longitud y ángulo de las celdas, y observan que el criterio de optimilidad del número de condición para las matrices propuestas, se satiface para cuadrados, por lo que proponen minimizar el número de condición para constuir mallas suaves y de calidad. Muestran buenos resultados pero solamente en regiones sencillas, ya que en su propuesta no hay forma de garantizar la convexidad de las celdas.

En 2005, Domínguez-Mota [91], se aboca a caracterizar los funciones $F(G)$ que garantizan que en el óptimo se tenga una malla convexa y encuentra que se obtienen por medio de funciones del tipo

$$F_{A,\omega}(G) = \sum_{q=1}^N f(\omega\alpha(T_q)), \quad \omega > 1 \quad (2.63)$$

donde f es cualquier función continua, convexa, decreciente y positiva. Si existe una malla convexa G_0 es una región Ω , estos funcionales tienen las propiedades de *garantizar la convexidad*: para un valor de ω es posible contrar una malla convexa minimizando (2.63) y *mantienen la convexidad*: para un valor de ω es posible contrar una malla convexa que minimice

$$F(G) = (1 - \sigma)F_{A,\omega}(G) + F_c(G)$$

donde $F_c(G)$ es alguna funcional (métrica) positiva de la malla.

El panorama de los métodos discretos lo acabaremos aquí ya que en los siguientes capítulos describiremos el estado actual de los métodos en cada uno de los problemas que abordaremos en este trabajo.

En resumen, a partir del trabajo de Ivanenko, Garanzha y Azarenok, los métodos discretos desarrollados actualmente se basan diseñar métricas o medidas de distorsión que cuenten con un obtáculo en el conjunto de mallas convexas. A partir del trabajo desarrollado por Barrera y Domínguez-Mota, una forma de construir mallas convexas, suaves y de calidad es combinar una funcional convexo de área que garantice y preserve la convexidad de las celdas con una funcional geométrico o métrica de calidad.

Capítulo 3

Funcionales discretos para mejorar la distribución del área de los elementos de la malla

Como hemos señalado en el capítulo anterior, es necesario garantizar que la malla óptima obtenida por algún método discreto sea convexa. Este problema fue abordado eficientemente por Domínguez [91] mediante usando lo que se conoce como los *funcionales convexos de área*, los cuales contienen un *obstáculo suave y dinámico* sobre el conjunto de mallas convexas.

Estos funcionales surgieron como una propuesta para reemplazar el funcional discreto de área

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

por un funcional positivo definido sobre todo valor α y que se comporta como $1/\alpha$.

En este capítulo nos centraremos en dos objetivos: el primero es realizar una revisión de la teoría del obstáculo desarrollada por Ivanenko y la forma en que algunos autores han usado esta teoría en la optimización de funcionales discretos para obtener mallas convexas. El segundo objetivo, es el uso de esta teoría para controlar o mejorar la distribución del área de los elementos de la malla.

Primero, revisemos algunos preliminares descritos en los trabajos [312, 91] y las propiedades que deben tener los funcionales convexos de área, véase [91].

3.1. Funcionales convexos de área

Definición 1 Sea $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de todas las mallas estructuradas admisibles para una región Ω de dimensión $m \times n$, para las cuales los puntos sobre la frontera son prefijados. Definimos

$$\mathcal{M}_\omega = \{G \mid G \in \mathcal{M}(\Omega), \quad \alpha_-(G) > \omega\}$$

donde ω es un número real y

$$\alpha_-(G) = \min_q \alpha_q$$

donde $\alpha_q = 2\text{área}(T_q)$.

Sobre el conjunto \mathcal{M}_ω , es fácil verificar las siguientes condiciones

- 1) si ω_1 y ω_2 satisfacen $\omega_1 < \omega_2$, entonces $\mathcal{M}_{\omega_2} \subset \mathcal{M}_{\omega_1}$,
- 2) si $\omega > \bar{\alpha}(\Omega)$, entonces $\mathcal{M}_\omega = \emptyset$.

Más adelante veremos, aquí $\bar{\alpha}(\Omega) = \bar{\alpha}(G) = \text{constante}$. Esto último lo revisamos en el capítulo anterior, y volveremos a señalarlo más adelante.

De estas propiedades se sigue que el conjunto

$$\mathcal{K} = \{\omega \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}_\omega \neq \emptyset\},$$

es no vacío y acotado por arriba. Ahora si $\sup \mathcal{K} > 0$, entonces el conjunto \mathcal{M}_0 de mallas convexas es no vacío.

A nosotros nos interesa diseñar funcionales discretos $F(G)$ cuyo óptimo (o puntos críticos)

$$G^* = \arg \min_{G \in \mathcal{M}(\Omega)} F(G) \tag{3.1}$$

sea una malla convexa; esto es, $G^* \in \mathcal{M}_0$.

En 2001, Barrera y Domínguez [34] observan que un funcional basado en el área de los triángulos de las celdas cuyo óptimo es una malla convexa debe contar con las condiciones:

1. estar acotado por abajo,
2. la función debe ser convexa y positiva,

3. y que por su forma nos conduzca a un mínimo.

En ese trabajo, Barrera y Domínguez proponen usar una funcional exponencial en la forma

$$f(\alpha) = \exp(-\alpha), \quad (3.2)$$

donde α denota el área de un triángulo.

El funcional discreto que proponen optimizar es

$$F(G) = \sum_{q=1}^N \exp(-\alpha_q) \quad (3.3)$$

en donde $N = 4(m - 1)(n - 1)$ es el total de triángulos en la malla G . Aquí m, n son el número de puntos horizontales y verticales de los líneas curvilíneas de la malla.

En ese trabajo observan que es posible acelerar el proceso de convergencia al ponderar α por un valor $\omega > 0$ por lo que propusieron el funcional

$$F_\omega(G) = \sum_{q=1}^N \exp(-\omega\alpha_q) \quad (3.4)$$

con

$$\omega = \begin{cases} \frac{2}{\alpha_-(G)+1} & \text{si } \alpha_-(G) > -.5 \\ 2000.00 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Cuando ω es grande, el funcional alcanza un valor muy grande sobre las celdas no convexas. Por lo que optimizando (3.4) para un valor ω suficientemente grande podemos obtener mallas convexas. Como es sabido, usar funciones exponenciales no es numéricamente recomendable, pero el trabajo en cuestión motivó un estudio más profundo de las características de los funcionales que garanticen en su óptimo que la malla óptima sea convexa.

En 2003 Barrera y Domínguez [35] propusieron una función muy sencilla para $f = f(\alpha)$ dada por

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 1 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2) + 1, & \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

la cual cuenta con todas la condiciones anteriores. La forma de esta función se aprecia en la Figura 3.1.

Los experimentos realizados por Barrera y Domínguez [35] con diferentes parámetros de ω les llevaron a proponer el siguiente:

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

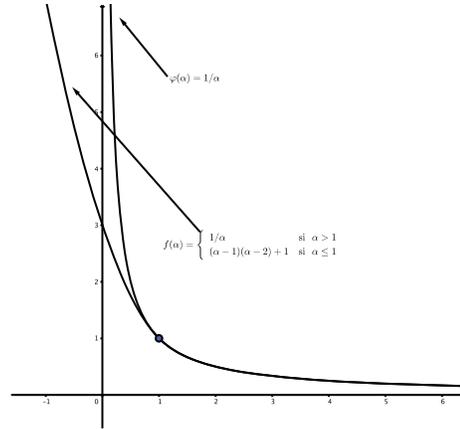


Figura 3.1: Regularización de Domínguez y Barrera para $1/\alpha$.

Teorema 3.1 Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función C^2 convexa, estrictamente decreciente y no negativa de manera que $f(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$, entonces es posible encontrar un valor $\omega \geq 1$ tal que el problema de optimización

$$\min_{G \in \mathcal{M}(\Omega)} S_\omega(G) = \sum_{q=1}^N f(\omega \alpha_q), \quad (3.6)$$

tiene un óptimo sobre el conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0(\Omega)$.

Los funcionales convexos de área de la forma $S_\omega(G)$, tienen un *obstáculo infinito* en la frontera del conjunto de mallas convexas $\partial \mathcal{M}_0$. Esto es, si al menos una de las áreas de los cuatro triángulos de una celda es 0, entonces para un ω suficientemente grande $S_\omega(G) \rightarrow \infty$ [37, 39], lo cual se escribe como

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow \infty \\ G \notin \mathcal{M}_0}} S_\omega(G) = +\infty$$

La forma de este obstáculo suave se observa en la Figura 3.2.

Una interpretación gráfica del obstáculo es que con cada actualización de ω y optimización de (3.6) vamos “empujando” el valor α_q de cada elemento triangular T_q hasta hacerlo positivo y por consiguiente la malla será convexa. El valor $f(0)$ es solamente un “umbral” y será representativo para identificar $(0, f(0))$ como el punto a partir del cual “se endereza” la gráfica de $f(\omega \alpha)$ conforme ω hasta formar el obstáculo, véase la Figura 3.2.

Lo atractivo de esta formulación es que f requiere satisfacer pocas condiciones: C^2 , convexa, positiva, acotada y tener a $y = 0$ por asíntota. Por lo que podemos construir una amplia familia de funcionales con estas características. Una de tales funciones es el funcional exponencial de área (3.2) y otra, la función (3.5).

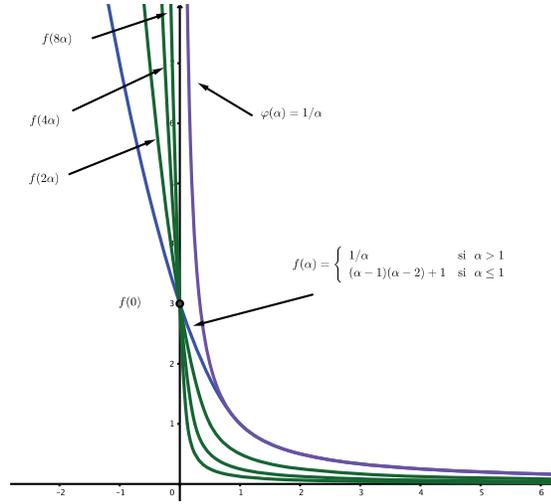


Figura 3.2: Forma gráfica del obstáculo suave y dinámico para los funcionales convexos de área.

En [35], Barrera y Domínguez propusieron un algoritmo computacional muy simple para obtener en pocos pasos una malla convexa. El algoritmo inicia eligiendo el valor de $\omega = 1$ con el cual resolvemos el problema de optimización (3.6). Posteriormente actualizamos ω haciendo

$$\omega = 2\omega,$$

y usamos la malla previamente obtenida como punto inicial para resolver de nuevo el problema de optimización (3.6). Repetimos este ciclo actualizar–optimizar hasta obtener una malla convexa, o bajo algún criterio de paro.

Observe, que a cada malla admisible le podemos asociar un vector \mathbb{R}^N , donde N es el número de triángulos de la malla y los elementos del vector son el área de los triángulos. En el trabajo doctoral de Domínguez–Mota [91] observa que si existen mallas convexas en la región Ω , entonces éstas están contenidas dentro de una región convexa totalmente contenida en el primer hipercuadrante de \mathbb{R}^N . De igual manera, muestra que en cada paso de actualización–optimización el mínimo se acerca más a la región de las mallas convexas \mathcal{M}_0 y demuestra que, de existir una malla convexa, esta se obtiene en un número finito de optimizaciones.

Nosotros hemos llamado a estas funciones como *funcionales convexos de área*, [36].

Las cualidades de los funcionales convexos de área se pueden enumerar

1. *Garantizan la convexidad.* Esto significa que si existe una malla convexa G_0 , entonces existe un parámetro ω , tal que el mínimo \bar{G} del funcional $S_\omega(G)$ es una malla convexa.

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

2. *Mejoran la no convexidad en las mallas óptimas.* El valor de α_- en las mallas óptimas del funcional se incrementa a medida que ω se incrementa.
3. *Mantienen la convexidad.* Si existe una malla convexa G_0 en una región, entonces existe un valor de ω , tal que el óptimo del funcional

$$(1 - \sigma)S_\omega(G) + \sigma F_c(G)$$

es también una malla convexa. Aquí $F_c(G)$ es un funcional positivo que mide alguna propiedad geométrica de G , como longitud, ortogonalidad, etc.

En la Figura 3.3 se muestra un detalle de dos mallas convexas, una de las cuales pertenece a $\partial\mathcal{M}_0$. Esta propiedad la revisaremos más adelante.

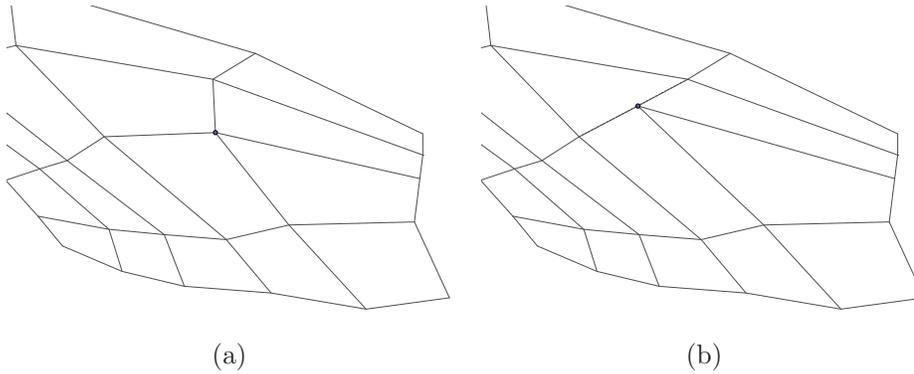


Figura 3.3: Detalle de (a) una malla convexa G donde $G \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ (b) una malla convexa G donde $G \in \partial\mathcal{M}_0(\Omega)$.

3.2. Sobre la ϵ -convexidad de una malla

De nueva cuenta, consideremos como $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de mallas de dimensión $m \times n$ que podemos construir sobre Ω donde los puntos en la frontera son fijos. Para cada malla $G \in \mathcal{M}(\Omega)$ el promedio del área de los triángulos es

$$\bar{\alpha}(G) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \alpha_q \quad (3.7)$$

donde N es el número de triángulos en la malla G . Como se ha mostrado en trabajos previos, véase [30], debido a que hemos seguido un orden de orientación positiva de las celdas y de los triángulos esta cantidad se reduce a

$$\bar{\alpha}(G) = \frac{\text{Area}(\Omega)}{(m-1)(n-1)}, \quad (3.8)$$

cantidad que es independiente de la convexidad y de la forma de las celdas; siempre y cuando todas las celdas tengan la misma orientación de la región. Esta cantidad sólo depende del área de región y la dimensión de la malla por lo que en muchas ocasiones simplemente escribiremos $\bar{\alpha}(\Omega)$ para representar esa cantidad.

Tenemos dos cantidades más que nos arrojan información sobre el área de las celdas, uno es el área más pequeña y el área más grande de todos los triángulos:

$$\alpha_-(G) = \min_q \alpha_q, \quad \alpha_+(G) = \max_q \alpha_q. \quad (3.9)$$

Si la primera cantidad es positiva, solemos decir que la malla es convexa. Sin embargo, en 2005, Barrera y Domínguez-Mota [91] observaron que la condición para determinar la convexidad de malla G

$$\alpha_-(G) > 0, \quad (3.10)$$

es una condición numéricamente inestable ya que, numéricamente podemos satisfacer la condición (3.10) y sin embargo, debido al redondeo, perder ésta de nuevo. Para evitar esto propusieron la siguiente:

Definición 2 Sea $\epsilon > 0$, diremos que una malla G es ϵ -convexa si y solo si

$$\alpha_-(G) > \epsilon \cdot \bar{\alpha}(\Omega) \quad (3.11)$$

En la práctica se ha encontrado que usar $\epsilon = 10^{-5}$ es suficiente para nuestras regiones de prueba, véase el trabajo [37].

Observemos algunas propiedades de $\alpha_-(G)$ como función de una malla G . Consideremos al conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(\Omega)$ en la región Ω . A cada malla $G \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ le asignamos $\alpha_-(G) = \min\{\alpha(\Delta) \mid \Delta \in G\}$, observemos las propiedades de esta función

$$\begin{aligned} \alpha_- : \quad \mathcal{M}_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ G &\longmapsto \alpha_-(G) \end{aligned}$$

a) α_- esta acotada superiormente. Es fácil ver que

$$0 < \alpha_-(G) \leq \bar{\alpha}(G).$$

b) Esta función alcanza su máximo para alguna malla $G \in \mathcal{M}_0$, definimos ese número como

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

$$\epsilon_c = \epsilon_c(\mathcal{M}_0) = \sup_{G \in \mathcal{M}_0} \alpha_-(G)$$

De manera particular es fácil ver que

$$0 < \alpha_-(G) \leq \epsilon_c(\mathcal{M}_0) \leq \bar{\alpha}(\Omega),$$

para cualquier $G \in \mathcal{M}_0(\Omega)$.

Para nosotros, $\epsilon_c(\mathcal{M}_0(\Omega))$ representa un valor de referencia para la dificultad esperada en la generación numérica de mallas ϵ -convexas en la región. Estimar este valor es un problema bastante difícil, ver [37].

Todas las anteriores cantidades dependen de la forma y el tamaño de la región Ω , por lo que pueden fluctuar entre valores muy grandes y muy pequeños. En 2005, Domínguez-Mota en su trabajo doctoral [91], propone que el valor de referencia $\bar{\alpha}(G)$ sea 1. Para lograrlo, sugiere escalar la región Ω de manera que

$$\bar{\alpha}(G) = 1$$

La idea es sencilla, debemos calcular un número $w > 0$ de manera que

$$\bar{\alpha}(w \cdot \Omega) = 1. \tag{3.12}$$

El escalamiento que propone consiste en transformar Ω en Ω' en la forma

$$\Omega' = w \cdot \Omega$$

Es fácil ver que el valor para que w cumpla (3.12) es

$$w = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}}.$$

A partir de ahora, toda vez que trabajemos con una malla G consideraremos que se encuentra escalada de esta forma y para enfatizar esto, dentro de los resultados haremos referencia directa al valor de $\bar{\alpha}(G)$.

Una vez escalada la región Ω , ya contamos con un valor referencial para nuestros indicadores del área:

$$\alpha_-(G) \leq \bar{\alpha}(G) = 1 \leq \alpha_+(G).$$

Nuestro interés se centra ahora en construir mallas ϵ -convexas y para esto usaremos los funcionales convexos de área de Domínguez-Mota.

Teorema 3.2 *Sea $0 < \epsilon \leq 1$. Si f es una función convexa C^2 estrictamente decreciente y acotada por debajo de manera que $f(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$, entonces*

$$S_{\omega,\epsilon}(G) = \sum_{q=1}^N f(\omega[\alpha(\Delta_q) - \epsilon\bar{\alpha}(G)]) \quad (3.13)$$

puede ser usada como función objetivo en el Teorema 3.1 para obtener en el óptimo una malla ϵ -convexa, para $\omega > 0$ suficientemente grande

El resultado anterior nos garantiza que de existir una malla ϵ -convexa es posible obtenerla optimizando (3.13). Ahora bien, combinando éste funcional con funcionales positivos geométricos $F_c(G)$ podemos obtener una malla suave y ϵ -convexa para un valor de $\omega > 0$ suficientemente grande [37, 39].

Los funcionales convexos de área de la forma $S_{\omega,\epsilon}(G)$, tienen un *obstáculo infinito* en la frontera del conjunto de mallas ϵ -convexas $\partial\mathcal{M}_\epsilon$. Esto es, si al menos una de las áreas de los cuatro triángulos de una celda se acerca a ϵ , entonces para un ω suficientemente grande $S_{\omega,\epsilon}(G) \rightarrow \infty$ [37, 39]. En el siguiente apartado revisaremos la teoría del obstáculo y como es usada por diferentes autores la cual como hemos señalado, está presente en la construcción de obstáculo para los funcionales convexos de área.

3.3. Sobre la teoría del obstáculo y su regularización

En 1988, Ivanenko [156] propone discretizar el funcional de Winslow

$$I_S = \int \int_B \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta, \quad (3.14)$$

usando un mapeo bilineal para cada celda de la malla y reemplazando las integrales por fórmulas simple de cuadratura basada sobre los nodos de la cuadrícula. Al hacer esto, se obtiene una funcional discreta de la forma:

$$I^h(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(T_q)}{\alpha(T_q)}. \quad (3.15)$$

Si A, B, C son los vértices del triángulo T_q

$$\lambda(T(A, B, C)) = \|A - B\|^2 + \|C - B\|^2$$

la cantidad

$$\alpha(\Delta(A, B, C)) = (B - A)^t J_2(B - C) = 2\text{área}(\Delta(A, B, C))$$

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

representa una medida del área, donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ivanenko establece que la discretización arriba mostrada $I^h(G)$ tiene la propiedad de que cuando una malla convexa $G \in \mathcal{M}(\Omega)$ se aproxima a la frontera $\partial\mathcal{M}_0(\Omega)$, entonces el valor crece sin límite, esto es

$$I^h(G) \longrightarrow +\infty$$

si

$$G \longrightarrow \partial\mathcal{M}_0(\Omega)$$

lo que le permite concluir que dentro de $\mathcal{M}_0(G)$ existe una malla armónica y convexa [156, 73, 161].

Ejemplo: Para ilustrar el obstáculo infinito, Ivanenko construye un malla de 3×3 sobre un cuadrado. Siguiendo la notación matricial para almacenar los nodos mostrada en el capítulo 2, el problema es encontrar las coordenadas del nodo interior $(x_{2,2}, y_{2,2})$ como óptimo de (3.15). En esta Figura 3.4 se aprecian las curvas de nivel de la discretización I_h y el obstáculo infinito de I^h en $\partial\mathcal{M}_0$. Este conjunto es fácilmente identificable y sus elementos G corresponden cuando el nodo interior de esa malla se encuentra sobre el cuadrado formado por los nodos $(2, 1), (3, 2), (2, 3)$ y $(1, 2)$. En este caso $I^h(G)$ es infinito y cerca de ese cuadrado la función crece mucho. El conjunto de mallas convexas \mathcal{M}_0 es el interior de ese cuadrado unitario.

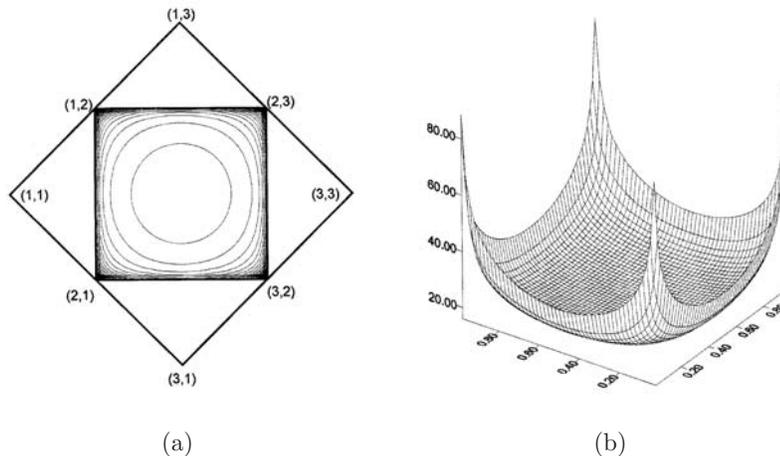


Figura 3.4: (a) Curvas de nivel y (b) superficie $I^h(G)$. Figura tomada de [156].

Ivanenko y Charakhch'yan proponen resolver el residual

$$R_x = \frac{\partial I_h}{\partial x_{ij}} = 0, \quad R_y = \frac{\partial I_h}{\partial y_{ij}} = 0, \quad (3.16)$$

de la discretización I_h usando un método de Newton puntual en la forma

$$\tau R_x + \frac{\partial R_x}{\partial x}(x_{ij}^{l+1} - x_{ij}^l) + \frac{\partial R_x}{\partial y}(y_{ij}^{l+1} - y_{ij}^l) = 0 \quad (3.17)$$

$$\tau R_y + \frac{\partial R_y}{\partial x}(x_{ij}^{l+1} - x_{ij}^l) + \frac{\partial R_y}{\partial y}(y_{ij}^{l+1} - y_{ij}^l) = 0, \quad (3.18)$$

donde τ representa al tamaño de paso y l es un índice para el paso de iteración. Observan que debido a que la forma del funcional es un cociente que involucra el área del triángulo, se podría perder la convexidad de las celdas en algún paso del método de optimización, por lo cual proponen regularizar el funcional de manera que

$$\alpha = \begin{cases} \alpha, & \alpha > \epsilon \\ \epsilon, & \alpha \leq \epsilon \end{cases}$$

donde

$$\epsilon = \max \left\{ \gamma \frac{\text{área}(\Omega)}{N + 0.01}, \epsilon_1 \right\}.$$

Aquí N es el número total de triángulos de la malla, $\epsilon_1 > 0$ es un valor de protección para el valor límite permitido para ϵ y γ es un parámetro que se elige por experimentación. La forma de esta regularización es una función truncada y se muestra en la Figura 3.5.

En ese trabajo Ivanenko y Charakhch'yan, señalan que el tamaño de paso de Newton debe ser controlado de manera que no se pierda la convexidad de la malla y que para empezar el proceso inicial (3.17)–(3.18) es necesario que la malla sea convexa. Para obtener una malla inicial convexa proponen minimizar una versión simple del funcional clásico de área: una suma de los cuadrados del área. Su propuesta es que solamente los valores de α_q menores que un $\epsilon > 0$ sean corregidos. El funcional tiene la forma *Heaviside*

$$I_D = \sum_{q=1}^N (\epsilon - \alpha_q)_+^2 \quad (3.19)$$

donde

$$f_+ = \max(0, f).$$

Ivanenko y Charakhch'yan reportan que al minimizar (3.19) obtienen una malla convexa o cerca de estarlo y una vez que cuentan con una malla convexa optimizan (3.17)–(3.18)

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

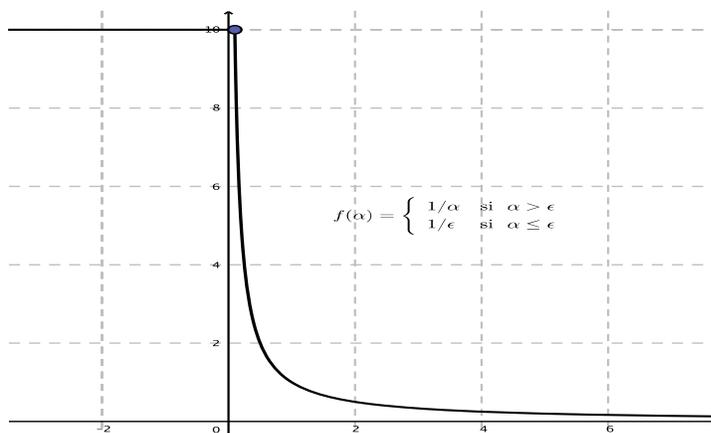


Figura 3.5: Regularización propuesta por Ivanenko para $1/\alpha$, $\epsilon = 0.1$.

para obtener una malla armónica y convexa, [156, 73, 161]. En la literatura el primer paso se conoce como desenredo *untangling* y el segundo como suavizamiento, véase Li *et. al.*, [210], Freitag [115] y Knupp [192].

En un artículo de 1995, Charakhch'yan e Ivanenko [158], señalan que el método arriba descrito resultaba muy costoso para obtener una malla convexa con este funcional. Reportan que para una malla 50×50 sobre la región Bahía de la Habana optimizar (3.19) requirió 1700 iteraciones y un tiempo excesivo para obtener una malla convexa.

En 1992, Barrera *et al.* [29] revisan la discretización propuesta de Ivanenko y observan que es necesario realizar una regularización más robusta del funcional debido a que el recíproco de área hace inestable el proceso de optimización no lineal de gran escala. Para regularizar el funcional proponen usar una función a trozos continuamente diferenciable

$$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha > \epsilon \\ \frac{4\epsilon}{(\alpha+\epsilon)^2}, & -\epsilon < \alpha \leq \epsilon \end{cases}$$

como se observa, el otro pedazo es una función racional donde el polo es de orden dos en $\alpha - \epsilon$. En ese trabajo un valor experimental propuesto para ϵ fue de $\epsilon = \bar{\alpha}(G)/2$. La forma de esta regularización se aprecia en la Figura 3.6.

Esta regularización fue muy útil en su momento, ya que al optimizar el armónico discretizado usando esta regularización es posible iniciar el proceso empleando mallas con pocas celdas no convexas hasta lograr una malla convexa, y de perderse la convexidad en algún paso iterativo esta se recuperaba fácilmente. Sin embargo, el proceso total de construir una buena malla inicial y luego usar este funcional resultaba poco práctico. Por otra parte, el valor crítico ϵ nunca fue estudiando a fondo y lo que es más importante la regularización propuesta contaba de nuevo con un polo lo cual dificultaba la optimización cuando la malla inicial contaba con muchas celdas no convexas, o con

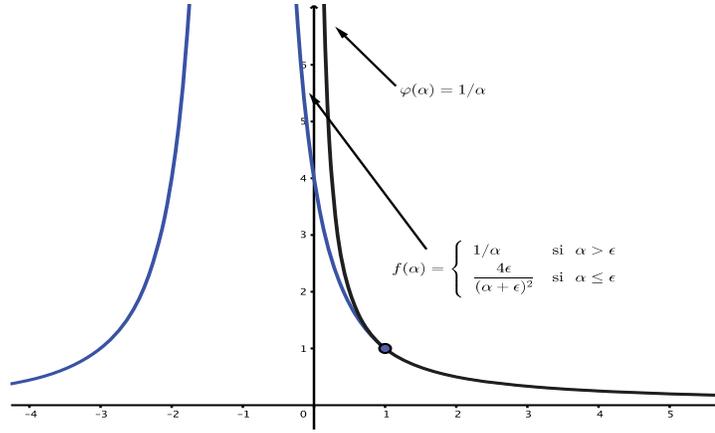


Figura 3.6: Regularización de Barrera para $1/\alpha$.

elementos de área negativa grande. Barrera *et al.* [29], observaron que valor de ϵ debía ajustarse dependiendo de la región, el grosor de la malla y la distribución de los nodos sobre la frontera.

Uno de los resultados interesantes de ese trabajo fue demostrar que el óptimo del funcional armónico discretizado sobre un triángulo es un triángulo rectángulo isósceles, véase [29]. Esto da pie a observar las forma geométrica de las celdas que pueden ser obtenidas usando este funcional. En el Capítulo 5 retomaremos esta característica geométrica cuando tratemos el tema de las medidas de calidad y discutamos que la discretización del funcional armónico (3.15) representa una medida de distorsión de la malla.

Con todo, quedaba latente una pregunta: ¿Es posible formular un funcional robusto cuya malla en el óptimo cuente con las mismas características que el funcional armónico pero que pueda operar sobre un conjunto más amplio de celdas no convexas?

En 1997 Tinoco [312] propone un funcional cuasi armónico basado en mover el polo del funcional armónico discretizado (3.15), permitiendo con esto, optimizar sobre un conjunto más amplio de mallas no convexas. El funcional que propuso Tinoco se escribe como

$$F(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda_q - 2\alpha_q}{\omega + \alpha_q} \quad (3.20)$$

donde $\lambda_q = \lambda(T_q)$ y $\alpha_q = \lambda(T_q)$.

El polo en $\alpha = 0$ de (3.15), se ha movido $\alpha = -\omega$, siendo ω es un escalar elegido adecuadamente. Tinoco observa que para cada ω este funcional tiene propiedades similares al funcional armónico discretizado (3.15) y usando la teoría del obstáculo demuestra que cuando $\omega \rightarrow 0^+$ en el óptimo de (3.20) es una malla convexa.

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

En ese trabajo, Tinoco observa que es necesario regularizar el nuevo funcional (3.20) para que esté definido sobre todo valor α por lo que propone reemplazar el cociente por una función a trozos de la forma

$$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + \omega}, & \alpha > a_0 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c, & \alpha \leq a_0 \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{1}{(\omega + a_0)^3}, \quad b = \frac{-3a_0 - \omega}{(\omega + a_0)^3}, \quad c = \frac{\omega^2 + 3\omega a_0 + 3a_0^2}{(\omega + a_0)^3}$$

eligiendo al punto de empate como $a_0 = -\omega + 0.1\bar{\alpha}(G)$. Ese punto de empate es el parámetro de regularización. El nuevo funcional se escribe como:

$$F(G) = \sum_{q=1}^N (\lambda_q - 2\alpha_q) \hat{f}(\alpha_q) \quad (3.21)$$

Con esta regularización, el funcional regularizado (3.21) es positivo y está definido para todo elemento α .

Para demostrar que este método funciona Tinoco construye una teoría basada en que el conjunto de regiones de mallas factibles y observa que esos conjuntos están contenidos y si $\mathcal{M}_0(G) \neq \emptyset$, usando la teoría del obstáculo, demuestra que es posible obtener una malla convexa y suave minimizando (3.20). Estos funcionales son conocidos en la literatura como k -funcionales de suavidad. Este fue el primer método eficiente para desenredar mallas y suavizarlas a la vez, véase [32].

En ese trabajo, Tinoco observa que lo único que se ha hecho es mover el polo y regularizar convenientemente el funcional armónico discretizado por lo que extiende esta idea a un funcional discreto de área en la forma

$$F_{A_\omega^{-1}}(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\omega + \alpha_q}. \quad (3.22)$$

De nueva cuenta, este funcional se optimiza para cada ω de manera que $\omega \rightarrow 0^+$, véase [313].

Nuevamente, recurre a la teoría del obstáculo para mostrar que es posible obtener una malla convexa minimizando (3.22), véase [313].

Lo interesante de la formulación que realiza Tinoco no radica en haber movido el polo tanto del funcional armónico del recíproco de área, ni haber descrito un algoritmo para construir mallas cuasi-armónicas en un número finito de actualizaciones de ω . El éxito de este trabajo radica en haber definido un funcional que en el límite $\omega \rightarrow 0^+$ se tiene un obstáculo sobre mallas degeneradas y en haber propuesto una regularización conveniente, ya que esto último permite iniciar el procedimiento de optimización usando mallas con muchas celdas no convexas.

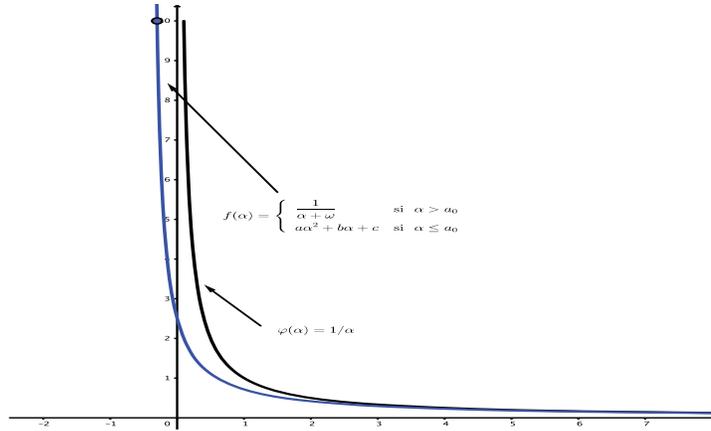


Figura 3.7: Regularización de Tinoco para $1/(\omega + \alpha)$.

La regularización cuadrática propuesta por Tinoco en 1997 ha sido usada en otros trabajos. Uno de ellos es la tesina de Coll [82] de 2003. En este trabajo Coll suaviza mallas formadas por cuadriláteros en 2D y hexaedros en 3D usando la métrica de Oddy [241], la cual mide la distorsión de un cuadrilátero con respecto a un cuadrado. Esta métrica será discutida en el Capítulo 5.

Como hemos visto la teoría del obstáculo resulta ser muy atractiva ya que nos proveen una forma de garantizar que las mallas obtenidas optimizando un funcional con un obstáculo adecuado sean convexas. Dentro de estas funcionales se inscriben las regularización continua propuesta por Tinoco para el funcional cuasi-armónico, así como el funcional recíproco de área y desde luego, los funcionales convexas de área de Domínguez.

Los funcionales hasta ahora discutidos son de la forma

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

los cuales contienen un obstáculo infinito para elementos convexas y requieren ser regularizados para ser usados dentro de un proceso de optimización. En los artículos [125, 126] y [127] Garanzha menciona una regularización hiperbólica para $1/\alpha$ que sugiere L.E. Kaporin. Kaporin observa que

$$\mathcal{X}_\epsilon(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \epsilon^2} \tag{3.23}$$

con $0 < \epsilon \ll 1$, tiene siguientes propiedades:

$$\mathcal{X}_\epsilon \rightarrow \alpha, \text{ para } \alpha \rightarrow +\infty, \quad \mathcal{X}_\epsilon \rightarrow \frac{1}{4} \frac{\epsilon^2}{|\alpha|}, \text{ para } \alpha \rightarrow -\infty$$

por lo que el cociente

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

$$\mathcal{X}_\epsilon^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{X}_\epsilon(\alpha)} \quad (3.24)$$

representa una regularización de $1/\alpha$ de en el sentido de que si $\alpha < 0$ el valor de (3.24) es positivo pero grande y si $\alpha > 0$

$$\mathcal{X}_\epsilon^{-1}(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha}, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

aquí $\epsilon > 0$ representa el parámetro de regularización.

Garanzha observa que esta regularización es conveniente para aquellas funcionales variacionales o discretas en las cuales el jacobiano se encuentra en el denominador. Para el caso discreto α representa el área del triángulo. La forma de la regularización de Kaporin (3.24) se aprecia en la Figura 3.8.

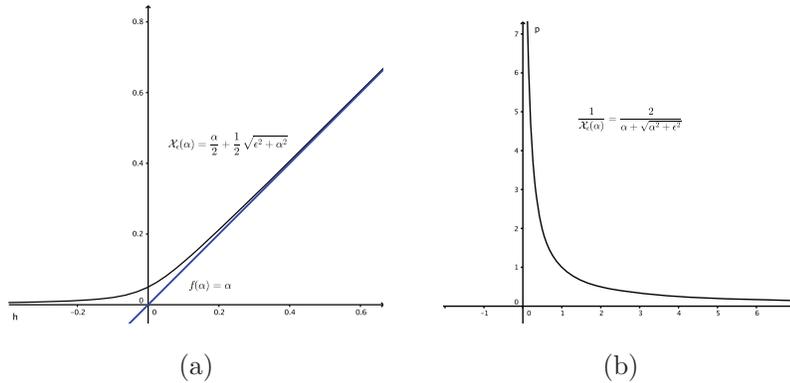


Figura 3.8: (a) Función $\mathcal{X}_\epsilon(\alpha)$ y (b) Regularización de Kaporin para $1/\alpha$.

En 2003, Escobar *et al.* [101] utilizan el número de condición κ_2 del mapeo entre un elemento y el tetraedro regular para suavizar tetraedros y utilizan la regularización de Kaporin, la cual les permite iniciar el proceso de optimización con mallas muy dobladas y desenredarlas, *untangling*, al final del proceso de optimización. Sobre κ_2 hablaremos en el Capítulo 5. En ése artículo, Escobar *et al.* proponen un parámetro de regularización ϵ muy interesante

$$\epsilon \geq \epsilon_{\text{mín}} = \begin{cases} \sqrt{\mu(\mu - \alpha_-)} & \text{si } \alpha_- < \mu \\ 0 & \text{si } \alpha_- \geq \mu \end{cases}$$

donde μ es la unidad de redondeo de la computadora. Esta elección es muy atractiva, pero dependiente de α_- , el área más pequeña de los elementos de la malla. Esto sugiere que el proceso debe actualizarse hasta convergencia o hasta un valor límite α^* conveniente.

La regularización de Kaporin ha sido usada en 2003 por Escobar *et al.* [101, 102], 2008 por López *et al.* [219], en 2009, por Montenegro *et al.* [234], en 2014 por Sastry *et al.* [279] y en 2015 y 2016 por Gargallo-Peiró *et al.* [133, 135]. En todos estos casos, el uso de esta regularización permite evitar la asíntota que aparece en la función objetivo y evitan los elementos de área o volúmen cero o negativa ya que el funcional se hace infinito por lo que usando la teoría del obstáculo, se garantiza que las mallas obtenidas por un proceso de optimización resulten no dobladas. La función objetivo que emplean es se la medida de distorsión *mean-ratio metric* propuesta por Joe [212, 213] en 1994. Sobre las anteriores medidas de calidad y métricas hablaremos en el Capítulo 5.

Otra regularización que revisa Garanzha en [126] es la de Riemsplaugh y Vierendeels [263] de 1996, cuya forma es

$$\varphi_\epsilon(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha > \epsilon \\ \frac{2\epsilon - \alpha}{\epsilon^2}, & \alpha \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.25)$$

Esta regularización es muy interesante ya que a la función $1/\alpha$ se le ha pegado una recta en $\alpha = \epsilon$. Este funcional regularizado es continuamente diferenciable, es convexo, positivo, estrictamente decreciente.

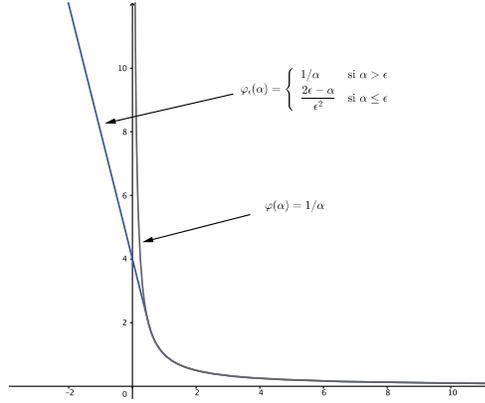


Figura 3.9: Regularización de Riemsplaugh y Vierendeels para $1/\alpha$.

Riemsplaugh y Vierendeels [263] usan esta regularización para evitar que elementos triangulares colapsen o se doblen mejorando por optimización el *aspect ratio* de elementos triangulares. Garanzha [126, 128] señala que para formulaciones variacionales es conveniente usar la regularización de Kaporin ya que es infinitamente suave.

En [37, 39] Barrera *et al.* proponen, de manera independiente a Riemsplaugh y Vierendeels, usar la regularización (3.25) para los funcionales cuasi-armónico

$$H_\epsilon(G) = \sum_{q=1}^N \lambda(T_q) \varphi_\epsilon(\alpha(T_q)) \quad (3.26)$$

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

Barrera *et al.* proponen actualizar el parámetro ϵ de manera que $\epsilon \rightarrow 0$ formar un obstáculo infinito sobre los elementos de área negativa. En la Figura 3.10, se observa cómo se forma éste obstáculo.

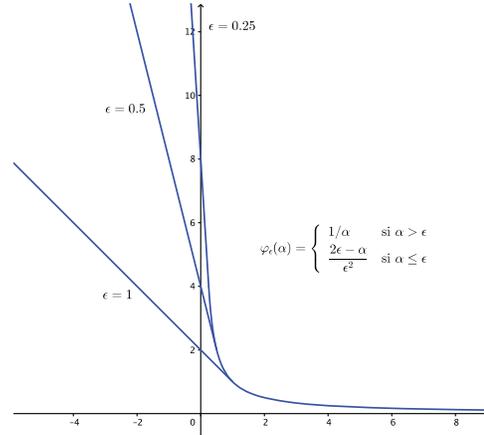


Figura 3.10: Conforme $\epsilon \rightarrow 0$, $\varphi_\epsilon(\alpha)$ forma un obstáculo para elementos $\alpha \leq 0$.

En 2013, Barrera *et al.* [41] usan la regularización (3.25) para construir mallas hexaedrales cuasi-armónicas en 3D.

A nuestro juicio, consideramos que dependiendo del funcional discreto y del método de optimización será conveniente usar la regularización (3.24) o (3.25), u otra regularización, pero en cualquier caso, es crucial la elección del parámetro de regularización ϵ y la técnica empleada para hacer que $\epsilon \rightarrow 0$ para con todo esto, construir un obstáculo sobre aquellos elementos degenerados o de área cero.

Hasta el momento hemos visto que Tinoco, Barrera, Domínguez-Mota y muchos autores más utilizan funcionales que presentan un obstáculo sobre elementos de área cero ya que con la teoría del obstáculo descrita por Ivanenko es posible garantizar que en el óptimo de los funcionales que proponen, la malla óptima sea convexa o no doblada para elementos triangulares o tetraedros.

En 2000, Garanzha [126] sintetiza las propiedades que debe tener un funcional $I_h(G)$, continuo, discretizado o discreto, para contar con la propiedad de obstáculo sobre $\partial\mathcal{M}_0(\Omega)$, la frontera de las mallas convexas. Describamos esas propiedades.

Definición 3 Garanzha [126]. *Se dice que un funcional $I_h(G)$ que sea al menos dos veces continuamente diferenciable y acotada por abajo sobre $\mathcal{M}(\Omega)$ presenta un obstáculo de primera clase en $\partial\mathcal{M}_0$ si*

$$\lim_{d(G, \partial\mathcal{M}_0) \rightarrow 0} I_h(G) = +\infty$$

donde

$$d(G, \partial\mathcal{M}_0) = \min_{G' \in \partial\mathcal{M}_0} d(G, G')$$

y $d(\cdot, \cdot)$ representa la distancia euclidiana.

Esto significa que $I_h(G)$ presenta un asíntota vertical sobre las mallas G para la cuales al menos una de las áreas de los cuatro triángulos de una celda es 0. La presencia de un obstáculo de primera clase garantiza que el funcional tiene al menos un punto estacionario sobre las mallas factibles $\mathcal{M}(G)$, [126, 128]

La discretización $I^h(G)$ del funcional de Winslow, propuesta por Ivanenko y Charkhch'yan [156, 157], tiene un obstáculo de primera clase sobre la frontera el conjunto de mallas convexas $\partial\mathcal{M}_0$.

Ahora bien, no basta con que $I_h(G)$ tenga un obstáculo de primera clase para que la optimización de $I_h(G)$ nos conduzca a una malla convexa. Garanzha propone el ejemplo

Ejemplo. La función

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), \quad \text{sobre el conjunto } \mathcal{M}_0 = \{x, \quad x > 0\}$$

tiene una asíntota en $x = 0$ pero tiene muchos puntos críticos, en una vecindad arbitrariamente pequeña de $x = 0$. En general, este tipo de funciones no son atractivas para usarlas como obstáculo infinito

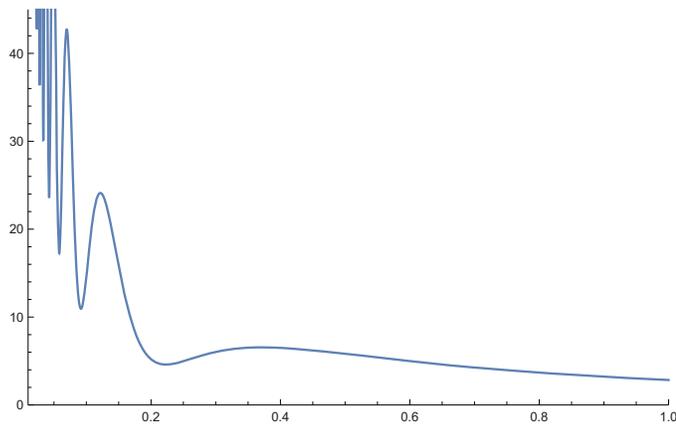


Figura 3.11: Un función con obstáculo infinito y una infinidad de puntos críticos cerca de $x = 0$.

Para evitar un caso como el ejemplo anterior, Garanzha recomienda diseñar funcionales que tengan un obstáculo de segunda clase:

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

Definición 4 Garanzha [126]. *Un funcional $I_h(G)$ que sea al menos dos veces continuamente diferenciable y acotada sobre $\mathcal{M}(\Omega)$ se dice que tiene un obstáculo de segunda clase en $\partial\mathcal{M}_0$ si*

$$\lim_{d(G, \partial\mathcal{M}_0) \rightarrow 0} \|\nabla I_h(G)\| = +\infty$$

Aquí $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^{2N_i} , siendo N_i es el número de nodos interiores de la malla.

Garanzha observa que usando un funcional $I_h(G)$ con un obstáculo de segunda clase es posible encontrar un valor $c > 0$ y una malla G_s punto crítico de $I_h(G)$ de manera que

$$d(G_s, \partial\mathcal{M}_0) \geq c > 0 \quad (3.27)$$

Es decir, la malla G_s es convexa y no pertenece a la frontera del conjunto de mallas convexas; es decir, todos los elementos triangulares tienen área positiva.

Garanzha señala que suele ser muy difícil demostrar la existencia de un obstáculo de segunda clase para funcionales discretizados y la caracterización de estos funcionales es un problema que no está del todo resuelto.

Lo que nos resta señalar es una forma de práctica de construir funcionales $I_{h,\epsilon}(G)$ regularizados por una $\epsilon > 0$ o parámetro de regularización, de manera que en el límite cuenten con una obstáculo. Para esto pediremos que tales funciones $I_{h,\epsilon}(G)$ sean dos veces diferenciables y

$$\lim_{\substack{G \in \mathcal{M}(\Omega) \\ \epsilon \rightarrow 0}} |I_h(G) - I_{h,\epsilon}(G)| = 0, \quad (3.28)$$

$$\lim_{\substack{G \notin \mathcal{M}_0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} I_{h,\epsilon}(G) = +\infty \quad (3.29)$$

$$\lim_{\substack{G \notin \mathcal{M}_0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \|\nabla I_{h,\epsilon}(G)\| = +\infty \quad (3.30)$$

La condición (3.28) es para imponer que la regularización $I_{h,\epsilon}(G)$ se aproxima al funcional original $I_h(G)$ sobre el conjunto de malla admisibles. Las condiciones (3.29) y (3.30) nos dicen que el funcional y la norma del gradiente tienen valores muy grandes sobre el conjunto de mallas no convexas.

En 2000, Garanzha [126] observa que una malla convexa óptima basada en los métodos variacionales con obstáculo se pueden construir considerando que:

- provengan de un principio variacional (basados en alguna métrica),
- el funcional discretizado cuente con un obstáculo en $\partial\mathcal{M}_0(\Omega)$,

- se cuente con una formulación penalizada y un procedimiento que construya soluciones factibles ,
- y se cuente con una método de optimización eficiente.

Desde luego, siempre que exista una malla convexa de dimensiones $m \times n$ sobre Ω .

Los funcionales que desarrollaron Tinoco y Barrera [312] son de segunda clase y representa una familia de funcionales regularizados con obstáculo móvil que tienden al original (el armónico o el recíproco de área). Domínguez [91] describe un procedimiento basado en funciones positivas convexas acotadas por abajo para construir funcionales convexos $S_\omega(G)$ que en el límite cuando $\omega \rightarrow \infty$ se forma un obstáculo. Es fácil ver que el obstáculo es de segunda clase.

$$\lim_{\substack{G \notin \mathcal{M}_0 \\ 1/\omega \rightarrow 0}} S_\omega(G) = +\infty \quad (3.31)$$

$$\lim_{\substack{G \notin \mathcal{M}_0 \\ 1/\omega \rightarrow 0}} \|\nabla S_\omega(G)\| = +\infty \quad (3.32)$$

En 2017, Montenegro *et al.* [220] proponen usar una modificación de la regularización de Kaporin en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{h(x)}$$

donde

$$h(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{(x - \epsilon)^2 + \delta^2})$$

para δ pequeña y $\epsilon \ll \delta$. La función $h(x)$ es muy parecida a (3.23), salvo por el término cuadrático $(x - \epsilon)^2$. La regularización que ahora propone Montenegro se parece mucho a la regularización truncada que propuso Ivanenko en 1988, ver Figura 3.5, ya que para $x \ll 0$, la función $h(x) \approx \epsilon$. La forma de esta regularización se aprecia en la Figura 3.12, para la cual usamos $\delta = 0.00001$ y $\epsilon = 0.01$.

En los artículos Escobar [102], Montenegro, Gargallo-Peiró [133], Roca [273], emplean esta modificación a la regularización de Kaporin para suavizar la malla usando la métrica *mean ratio* propuesta por Joe [212, 213]. En nuestra opinión, si usamos esta última regularización para suavizar una malla G con muchas celdas dobladas usando un método de optimización de gran escala, este podría tornarse lento debido a que el área de los elementos puede ser muy grande y al optimizador le resulte costoso encontrar una dirección de descenso. Una forma de evitar esto es escalando la malla convenientemente. Un escalamiento que ha funcionado se encuentra descrito en el código SUS [103].

La teoría del obstáculo que hemos revisado nos permite diseñar funcionales positivos discretos o continuos con obstáculo en $\mathcal{M}_0(\Omega)$ que nos garantice en su óptimo obtener mallas convexas. Una elección conveniente del parámetro de regularización de manera

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

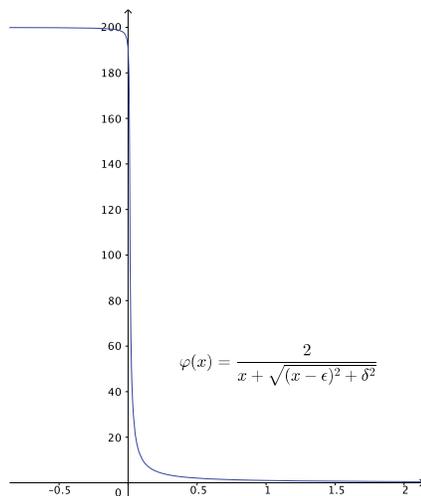


Figura 3.12: Regularización modificada de Kaporin propuesta por Montenegro.

que tienda a cero, nos conduce durante el proceso de optimización a una malla convexa y de calidad geométrica en dominios complejos. Hablaremos de esto en el Capítulo 5.

Recapitulando, el primer objetivo de esta sección ha sido mostrar que si el funcional discreto o continuo tiene por obstáculo a una malla degenerada la teoría nos dice que en el óptimo es posible obtener una malla convexa y el segundo objetivo fue mostrar que se requiere una regularización conveniente del funcional para calcular, en un procedimiento de optimización, esa malla convexa.

3.4. Funcional bilateral de área, Tinoco–Barrera, 1997

Uno de los objetivos de este trabajo es mejorar la calidad de las mallas convexas en el sentido de mejorar la distribución del área de las celdas. Para lograrlo, pediremos que el área de los triángulos α_q se encuentren dentro de un intervalo de calidad de área propuesto:

$$\alpha_q \in [\alpha_l, \alpha_r]$$

con $0 < \alpha_l < \alpha_r$ y usualmente $\alpha_r \geq \bar{\alpha}(G)$.

Uno de los primeros trabajos en el que se plantea la necesidad de mejorar la calidad del área es el funcional bilateral que en 1997 Tinoco [312]. Tinoco revisa la forma del funcional k -área y propone que el obstáculo que compone ese funcional sea móvil hacia un valor $\alpha_l > 0$, de manera que, en caso de existir una malla convexa con

$$\alpha_l < \alpha_-(G) \tag{3.33}$$

sea posible obtenerla minimizando

$$F(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\omega + \alpha(\Delta_q)}, \quad \omega \rightarrow -\alpha_l^+ \tag{3.34}$$

esto es, propone un funcional que controle el área más pequeña de los triángulos y con esto, el área de todos los cuadriláteros. En ese sentido se dice que la malla así obtenida tiene mejor calidad en área.

La forma en que este algoritmo fue implementado es muy intuitiva y consiste en optimizar (3.34) para ω fijo e ir actualizando este valor hasta lograr que $\omega \approx -\alpha_l$, por la derecha, con el interés de que construir un obstáculo en α_l y la optimización de (3.34) nos conduzca en pocas actualizaciones de ω a una malla convexa con $\alpha > \alpha_l$.

Esta idea funcionó bastante bien por lo que se luego se interesan que el área de las celdas no sean grande para esto es, sugieren que el área α de los triángulos no sea mayor que un valor α_r particular. Para esto proponen combinar el funcional anterior con un nuevo funcional donde α_r es un polo por la derecha. El funcional bilateral de área que proponen usar es

$$F(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\omega_1 + \alpha(\Delta_q)} + \frac{1}{\omega_2 - \alpha(\Delta_q)}, \tag{3.35}$$

Los parámetros ω_1 y ω_2 se eligen de manera que se aproximen a $-\alpha_l$ y a α_r respectivamente. Con este funcional se controla de manera simultánea los valores pequeños y grandes de α .

Básicamente el funcional bilateral incorpora los extremos del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$ como obstáculos del funcional de área. Para su implementación numérica eficiente, es necesario regularizar este funcional de manera conveniente.

Ejemplo: Consideremos que el intervalo de calidad de en área es

$$[\alpha_l, \alpha_r] = [0.1, 4.0].$$

Conforme los parámetros ω_1 y ω_2 se aproximen a $-\alpha_l$ y a α_r el funcional (3.35) va formando dos obstáculos, uno en $\alpha_l = .1$ y el otro en $\alpha_r = 4$, ver la Figura 3.13.

En la Figura 3.13 se aprecia gráficamente que a medida en que ω_1 y ω_2 cambian, cambia la forma de la “cazuela” del funcional (3.35) y por consiguiente, cambia la forma de las celdas cuando optimizamos (3.35).

3.5. Funcional bilateral de área, Domínguez–Barrera, 2007

La misma estrategia usada por Barrera y Tinoco para definir un funcional bilateral es usada con los funcionales convexos de área de Domínguez, sólo que ahora los extremos

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

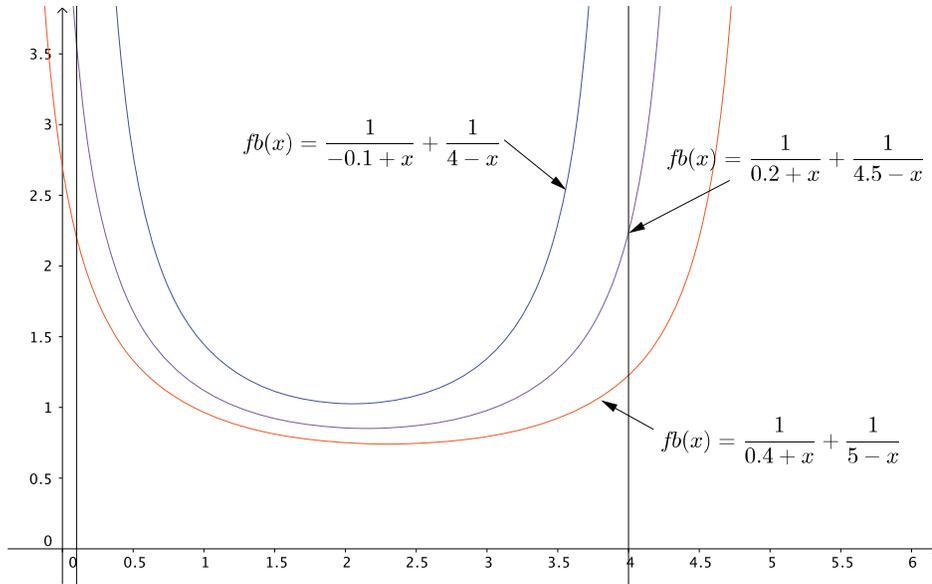


Figura 3.13: Forma gráfica del funcional bilateral de Tinoco–Barrera.

del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$ son incorporados como un obstáculo suave y dinámico, véase [36].

La propuesta que hicieron es usar

$$B_{\omega, \epsilon}(G) = \sum_{q=1}^N \left(f(\omega(\alpha_q - \alpha_l)) + f\left(\frac{\omega}{c}(\alpha_r - \alpha_q)\right) \right) \quad (3.36)$$

donde f es una función como en el teorema 3.1 y $c > 0$ es un parámetro fijo para controlar la rigidez entre ambas fronteras en (3.36).

Con este funcional bilateral se han obtenido resultados muy interesantes, ver [36] ya que conforme $\omega \rightarrow +\infty$ se generan dos obstáculos uno en cada extremo del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$.

La forma de los funcionales se aprecia en la Figura 3.14 donde hemos usado la función convexa f como en (3.5).

Observe que conforme $\omega \rightarrow +\infty$, $B_{\omega, \epsilon}(G)$ es una “cazuela” de fondo plano.

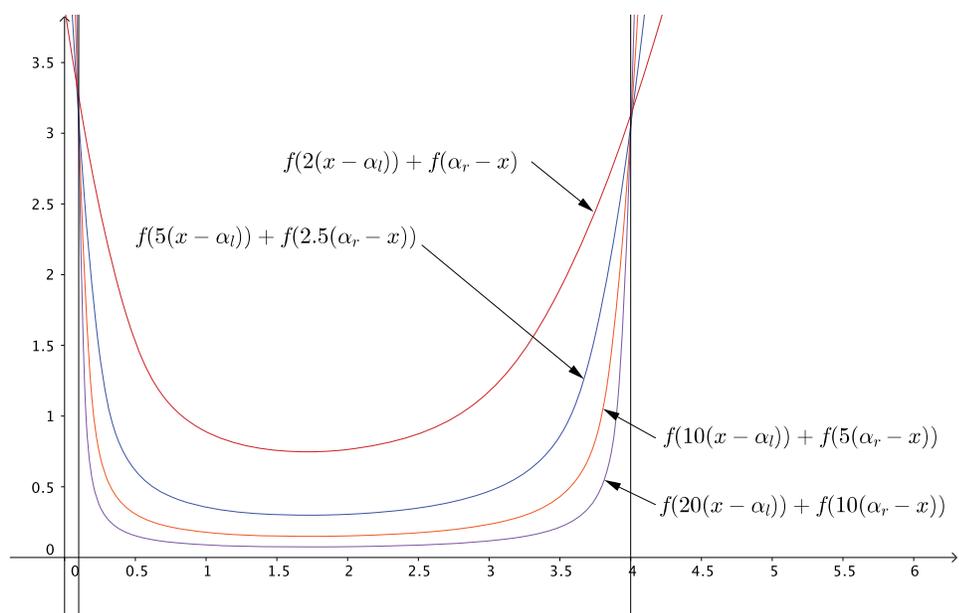


Figura 3.14: Forma gráfica del funcionales bilateral de Barrera–Domínguez.

3.6. Funcional bilateral de área, Toulorge *et al.*, 2013

Un trabajo muy interesante basado en el uso de obstáculos para controlar el tamaño del área de los elementos triangulares, es el de Toulorge *et al.* [319] quienes en 2013 proponen una función con obstáculo de la forma

$$f(x) = (x - 1)^2 + \log \left(\frac{x - \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^2 \quad (3.37)$$

Toulorge *et al.* emplean este funcional sobre el área de los elementos triangulares para evitar que las celdas colapsen o se doblen, y con esto, desenredar, (*untangling*), la malla.

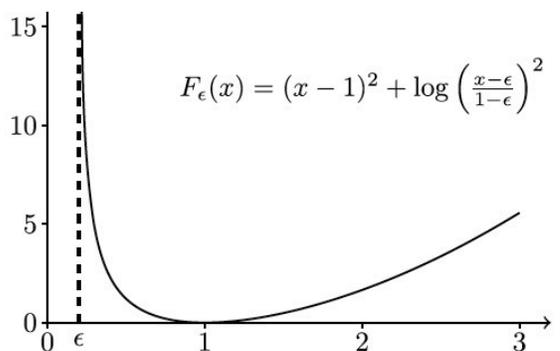


Figura 3.15: Un función con obstáculo infinito. Figura tomada de [319].

Toulorge *et al.* proponen minimizan un funcional basado en el número de condición κ_2 del mapeo lineal y usan esta función para mejorar la calidad del área de los elementos triangulares de la malla, en el sentido de que el área no sea muy pequeña. Una implementación computacional de estas ideas se encuentra en el sistema *Gmsh* [139] para construir mallas no estructuradas en 2D y 3D.

En ese trabajo Toulorge *et al.* también proponen controlar el tamaño de los elementos imponiendo un obstáculo por la derecha y por la izquierda para que el área de las celdas no sean tan pequeñas ni tan grandes. El funcional que usan es de la forma:

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)^2 + \log \left(\frac{\alpha - \alpha_l}{1 - \alpha_l} \right)^2 + \left(\frac{\alpha - \alpha_r}{1 - \alpha_r} \right)^2 \quad (3.38)$$

aquí los valores α_l y α_r son los extremos del intervalo de calidad aceptable. La forma del funcional se aprecia en la Figura 3.16

En 2015, Geuzaine *et al.* [140] extienden el trabajo de Toulorge a elementos curvos y hacen ver que usando el obstáculo por la izquierda es posible garantizar que los elementos curvos obtenidos son válidos en el sentido de que es posible controlar la deformación controlando la curvatura y garantizan que el jacobiano del mapeo sea positivo.

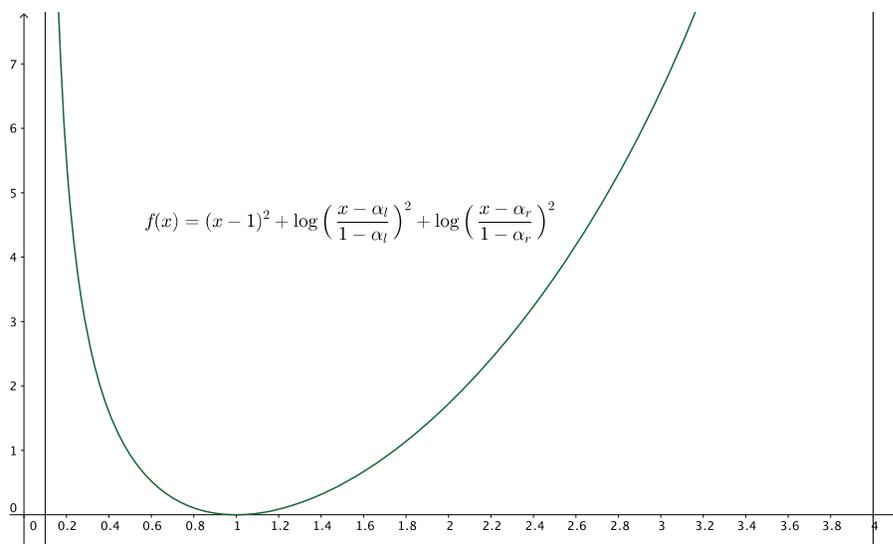


Figura 3.16: Forma gráfica del funcional bilateral de área de Toulorge *et al.*

Por una parte, es necesario señalar que para la implantación en un sistema computacional de este funcional logarítmico, es necesario una adecuada regularización del funcional cuando el área de los elementos esté fuera del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$. Por otra parte, el esquema propuesto por Toulorge y Geuzaine, representa una forma clásica de optimización convexa con restricciones, para la cual las condiciones de que los elementos se encuentren dentro de un intervalo de calidad de área se logra usando funciones de penalización logarítmica, véase Hertog *et al* [149]. En ese artículo Hertog *et al* señalan que esta función de penalización fue introducida por vez primera por Frisch [119] en 1955.

En el Capítulo 5 revisaremos una idea que propone Sastry [279] para obtener una malla convexa y de calidad definiendo un obstáculo logarítmico.

3.7. Un nuevo funcional bilateral de área

Los funcionales bilaterales descritos anteriormente nos permiten controlar, en la medida de lo posible, el área de las celdas. Sin embargo, aún cuando el área de los elementos α se encuentran dentro de un intervalo de calidad de área propuesto:

$$\alpha_q \in [\alpha_l, \alpha_r]$$

las celdas son modificadas y pierden la forma previamente obtenidas. Esto se debe a la forma de las funcionales bilaterales son: funciones convexas que gráficamente representan cazuelas donde el fondo es curvo. En la Figura 3.13 se aprecia la forma del

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

funcional bilateral de Tinoco–Barrera, en la Figura 3.14 la forma del funcional bilateral de Domínguez–Barrera y en la Figura 3.16 la forma del funcional de Toulorge *et. al.*

La cuestión que nos compete ahora, es definir un funcional que solamente modifique las celdas donde el área de sus elementos se encuentren fuera del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$ previamente elegido. En ese sentido, las propiedades geométricas globales de la malla como son la suavidad y la ortogonalidad prevalecen en la malla, dentro del rango para α establecido.

Para esto vamos a proponer una función cuadrática truncada de la forma:

$$f_l(\alpha) = A \left[(\alpha_l - \alpha)_+^2 \right] \quad (3.39)$$

aquí $A > 1$ es un coeficiente que pondera la cuadrática. Observe que la función es cero para los elementos α mayores a α_l .

Ahora bien, de la misma forma en que se construye un obstáculo suave y dinámico para los funcionales convexos de área, podemos construir un obstáculo en $\alpha = \alpha_l$ en la forma

$$F_\omega(G) = \sum_{q=1}^N A \left[(\omega(\alpha_l - \alpha_q))_+^2 \right] \quad (3.40)$$

Con la finalidad de que existir una malla G^* con

$$0 < \alpha_l \leq \alpha_-(G), \quad (3.41)$$

sea posible obtener una malla con esas características optimizando (3.40). La prueba de esto se sigue del Teorema 3.1 debilitando la condición de función $f(\alpha)$ sea estrictamente positiva.

La idea gráfica de este funcional y cómo se va construyendo un obstáculo a medida que ω sea grande, puede observarse en la Figura 3.17.

Ejemplo: Consideremos una malla de 55×45 sobre la región del lago azul y optimizando el funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$ sobre esta región obtenemos una malla con muchas celdas de área pequeña, observe el histograma de la Figura 3.18.

Optimizamos (3.40) con $\alpha_l = 0.2$, la malla obtenida y su histograma de área se aprecian en la Figura 3.19.

Observe que en la malla permanecen globalmente la propiedad de suavidad previa, ya que no se toca la forma de las celdas que satisface $\alpha > \alpha_l$.

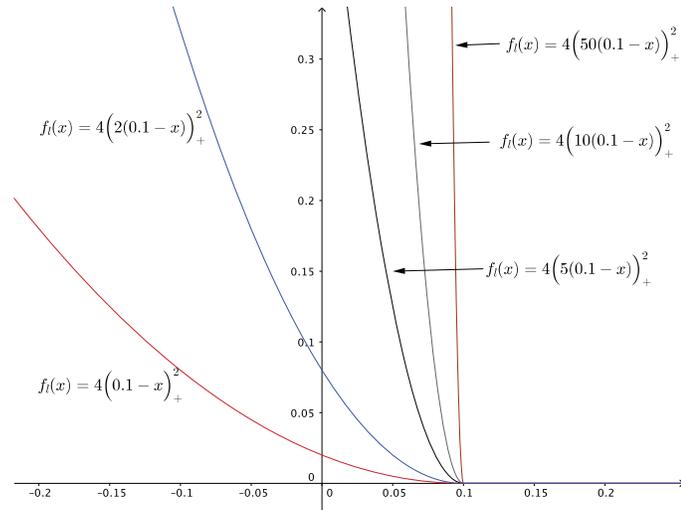


Figura 3.17: Idea gráfica de la formación de un obstáculo en $x = 0.1$ usando (3.39).

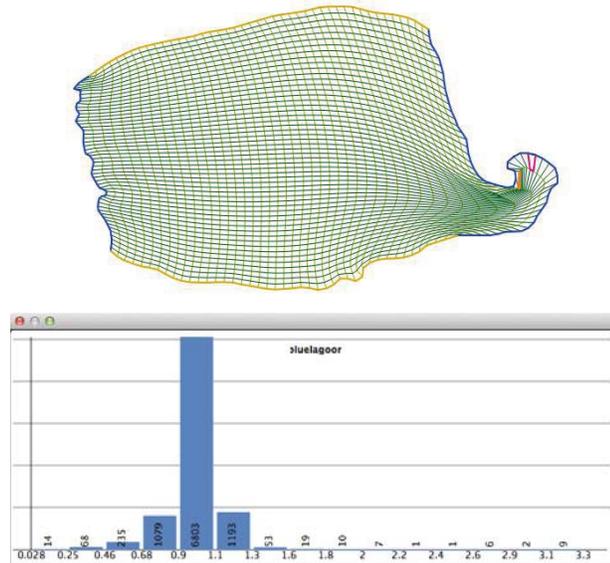


Figura 3.18: Una malla ϵ -convexa sobre la región *Blue Lagoon* y el histograma del área.

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

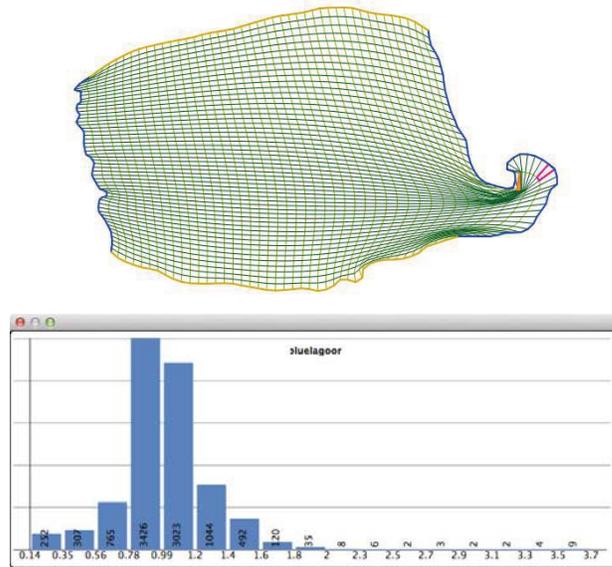


Figura 3.19: Malla óptima sobre *Blue Lagoon* y el histograma del área.

Ahora, para eliminar, en la medida de lo posible, valores relativamente grandes de α_r fijo, sin perder nuevamente, la forma previa se propone la función cuadrática truncada

$$f_r(\alpha) = A_r[(\alpha - \alpha_r)_+]^2, \quad A_r > 0$$

de la cual podemos construir un obstáculo suave y dinámico en $\alpha = \alpha_r$ usando

$$F_{\omega, \alpha_r} = \sum_{q=1}^N A_r[(\omega(\alpha_q - \alpha_r))_+]^2 \tag{3.42}$$

conforme ω sea grande. La idea gráfica de este funcional y cómo se va construyendo un obstáculo a medida que ω sea grande, se observa en la Figura 3.20

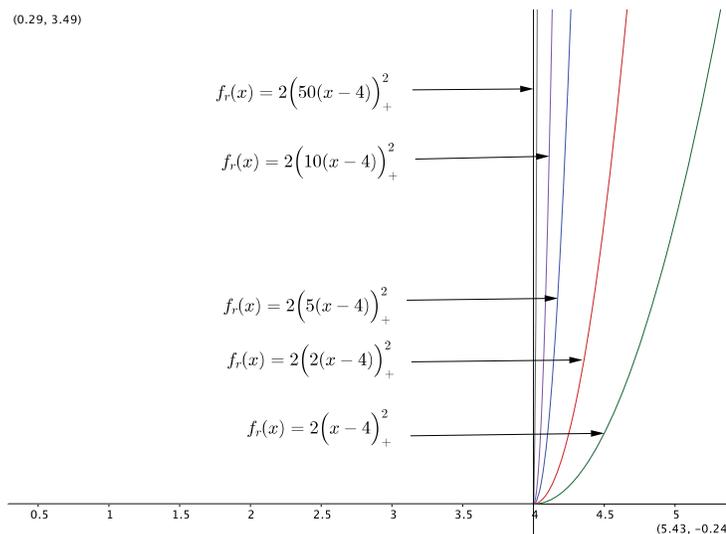


Figura 3.20: Idea gráfica de la formación de un obstáculo en $x = 4$ usando 3.42.

Ahora, combinando (3.40) y (3.42) proponemos un nuevo funcional bilateral

$$F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G) = \sum_{q=1}^N A_l[(\omega(\alpha_l - \alpha_q))_+]^2 + A_r[(\omega(\alpha_q - \alpha_r))_+]^2 \tag{3.43}$$

donde $0 < A_l$ y $0 < A_r$ se eligen para atenuar la formación de los obstáculos. En la Figura 3.21, se aprecia la idea de este funcional: es una cazuela con asiento plano en el intervalo de calidad.

En la Figura 3.22 logramos corregir el área de las celdas en valores mayores a $\alpha_r = 2.0$.

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

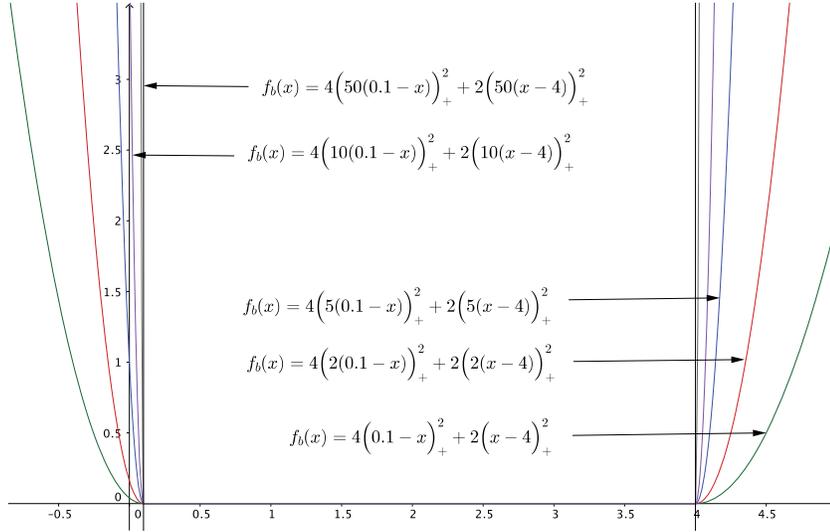


Figura 3.21: Forma gráfica de la nueva funcional bilateral $F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G)$.

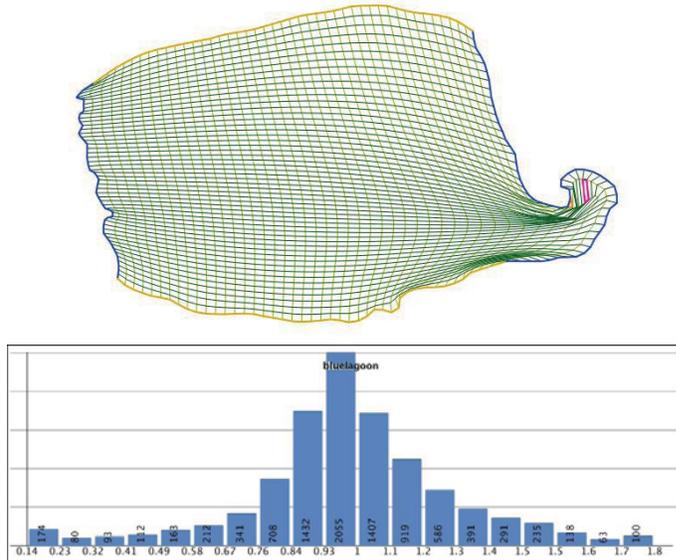


Figura 3.22: Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región Blue lagoon.

El histograma para α de la malla, ver Figura 3.22, nos indica que hemos logrado hacer menos dispersas tanto las celdas con área pequeñas como las celdas de área grande, concentrándolas en un intervalo cercano al deseado y sin perder las propiedades de suavidad de la malla.

Otro ejemplo muy interesante es la malla obtenida sobre la región del Mar Aral en su forma de 1985. En este ejemplo hemos podido agrupar las celdas en un intervalo adecuado y en el histograma de la distribución para α puede observarse una forma de campana.

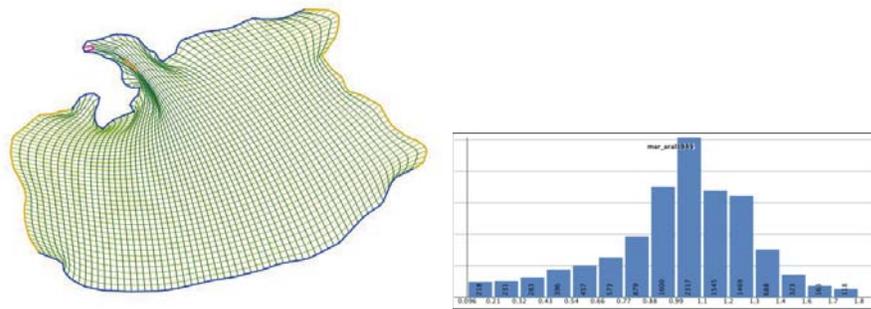


Figura 3.23: Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región del mar de Aral de 1985.

Ahora, para la región que comprende al embalse superior de Arkansas, podemos apreciar el efecto de los postes del intervalo de calidad [0.2 2.0].

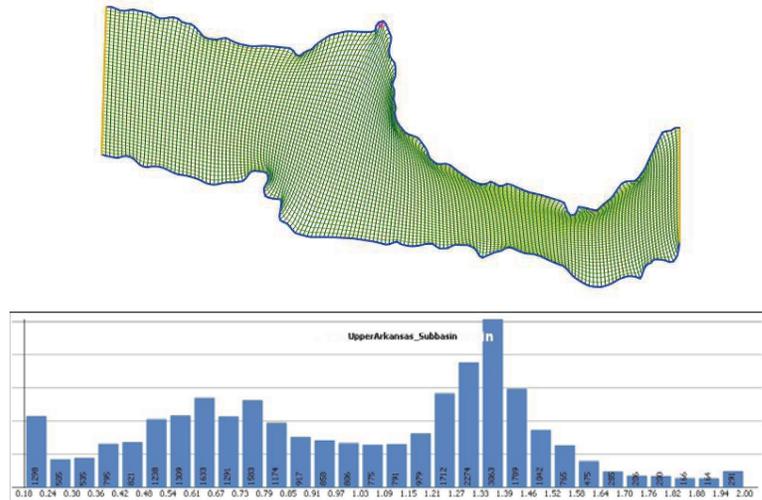


Figura 3.24: Malla óptima y su histograma de áreas, usando el funcional bilateral sobre la región del embalse superior de Arkansas.

3.7.1. Una propuesta de uso del funcional bilateral

El nuevo funcional bilateral $F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G)$ propuesto puede ser usado de dos formas:

- 1) como un generador de mallas convexas donde predominen las propiedades geométricas del funcional clásico $F_c(G)$ pero se controle el tamaño de las celdas,
- 2) y como un corrector o postprocesador para mejorar la distribución del área de los elementos de celdas dentro del intervalo $[\alpha_l, \alpha_r]$.

Para el primer caso, se propone utilizar el funcional bilateral en combinación con alguno de los clásicos $F_c(G)$ de Longitud, Ortogonalidad o Área-Ortogonalidad en la forma

$$F(G) = (1 - \sigma)F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G) + \sigma F_c(G) \quad (3.44)$$

con $0 \leq \sigma \leq 1$. Para esto es necesario normalizar adecuadamente los funcionales.

En la práctica hemos encontrado que al optimizar la combinación (3.44), la convergencia hacia una malla suave y convexa era en muchas ocasiones un tanto errática, ya que por una parte suavizamos la malla y por la otra corregimos el área de las celdas. Esto se observa muy claramente si usamos como funcional clásico $F_c(G)$ al funcional de longitud $F_L(G)$, ya que las celdas que se obtienen con este funcional son alargadas, y en combinación con el bilateral su tamaño en área tiende a ser corregido, por lo que se presenta un efecto errático en el suavizamiento y corrección de la malla a la vez.

Lo anterior se debe principalmente a que el funcional bilateral $F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G)$ es pequeño cuando el área de los elementos triangulares están cerca del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$ en comparación con el funcional $F_c(G)$ el cual es grande. Para equilibrar estos valores introducimos un nuevo parámetro de escala σ_{eq} con la idea de reducir la influencia del funcional clásico cuando estamos cerca de obtener una malla convexa y de calidad.

La propuesta de uso de este funcional con el nuevo parámetro de escala σ_{eq} es

1. partiendo de una malla G inicial, proponga un intervalo de calidad de manera que

$$[\alpha_l, \alpha_r] \subset [\alpha_-(G), \alpha_+(G)]$$

y elija los valores $\sigma_{eq} \gg 1$ y $0 < \lambda < 1$

2. minimice la combinación

$$F(G) = F_{\omega, \alpha_l, \alpha_r}(G) + \sigma_{eq} F_c(G);$$

bajo un criterio de paro del método de optimización de gran escala que desee

3. actualice

$$\sigma_{eq} = \lambda \cdot \sigma_{eq}$$

4. repita el procedimiento 2)–3) hasta lograr la condición

$$\alpha_l \leq \alpha_-(G) \quad \text{y} \quad \alpha_+(G) \leq \alpha_r$$

o bien, $\sigma_{eq} < 0.001$.

En la Figura 3.25 se observa el decaimiento exponencial que experimenta el valor de σ_{eq} en cada iteración.

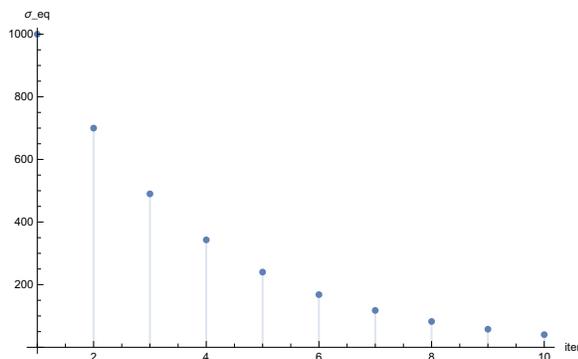


Figura 3.25: Gráfica de valores para σ_{eq} iniciando con 1000 y para $\lambda = .07$ para 10 actualizaciones.

Este esquema permite, para un valor σ_{eq} grande, obtener una malla con las propiedades del funcional clásico $F_c(G)$ y, a medida que σ_{eq} decrece, se reduce la influencia de este y el funcional bilateral área inicia su trabajo por lo que al final del procedimiento solamente se modifican las celdas cuyos elementos están fuera del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$. Con esto, la malla resultante es convexa y de calidad en área y globalmente cuenta con las propiedades geométricas de $F_c(G)$.

El funcional propuesto también puede ser usado como un postproceso o mejoramiento de la calidad de área de la malla de la siguiente forma: si la malla es ϵ -convexa o cerca de estarlo,

1. Proponga un intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$, de manera que

$$[\alpha_l, \alpha_r] \subset [\alpha_-(G), \alpha_+(G)]$$

2. minimice (3.43) hasta que

$$\alpha_l \leq \alpha_-(G) \quad \text{y} \quad \alpha_+(G) \leq \alpha_r$$

o bien, hasta un criterio de paro.

3. FUNCIONALES DISCRETOS PARA MEJORAR LA DISTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE LOS ELEMENTOS DE LA MALLA

El trabajo aquí presentado fue publicado en 2013 [41], y se encuentra implantado en el sistema UNAMalla y a diferencia de los otros métodos aquí mostrados, este funcional no altera la forma de los elementos dentro del intervalo de calidad $[\alpha_l, \alpha_r]$.

Capítulo 4

Funcionales discretos para adaptividad geométrica

La generación numérica de mallas estructuradas adaptativas de $m \times n$ mediante ajuste o movimiento de nodos puede ser usada para incrementar la precisión de la solución numérica en ecuaciones diferenciales parciales y disminuir el costo en los cálculos de la solución, véase los *surveys* de Babūška [19] y Thompson [310].

La generación numérica de mallas es un proceso que consume una parte muy importante del costo computacional total del cálculo de la solución en problemas de simulación numérica en los cuales se emplee dicha malla.

Construir una malla adecuada sobre una geometría complicada o irregular, puede llegar a representar el 80 % del costo total en una simulación.

Para resolver algunas ecuaciones diferenciales es deseable que la malla se adapte a zonas donde el fenómeno a medir se presente con mayor incidencia como pueden ser los cambios de presión en pozos de un yacimiento, o un problema de flujo de la corriente del aire sobre la superficie del agua. Otro problema interesante ocurre cuando el flujo cuenta con condiciones de frontera no permeables hacia el interior del cuerpo, como puede ser una isla o algún objeto inmóvil en el interior y en forma de obstáculo. En este caso la malla se debe adaptar a la frontera del objeto.

En la Figura 4.1 se tiene una pieza metálica discretizada y una falla o fisura en el material. Nuestro problema es construir una malla convexa sobre toda la región pero con el especial interés de que las celdas de la malla se concentren alrededor de la fisura sin perder desde luego, la convexidad de los elementos.

Resulta muy atractivo que dada una malla de $m \times n$ se pueda adaptar sin incrementar su tamaño ni su conectividad, ya que esto no aumenta el costo computacional requerido para su uso. Nosotros estamos interesados en construir mallas estructuradas adaptativas en regiones irregulares por lo que resulta prioritario asegurar que las celdas sean convexas. Los métodos y la teoría desarrollada recientemente nos permite asegurar que ya es posible construir una malla estructurada ϵ -convexa en regiones irregulares de manera económica, ver Domínguez–Mota [91].

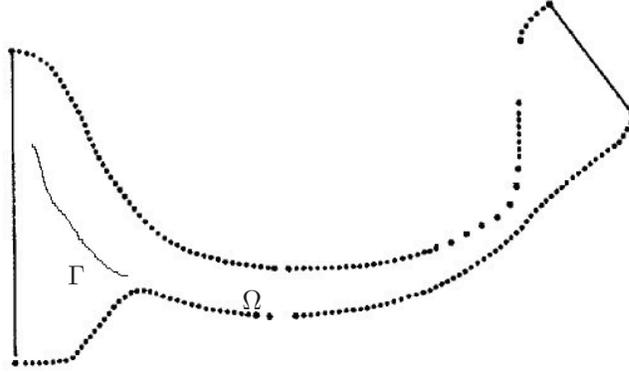


Figura 4.1: Región de estudio Ω y región interna Γ .

En las primeras secciones haremos una breve revisión de algunas formulaciones de la adaptabilidad de mallas mediante el principio de equidistribución, la formulación de Ryskin y Leal y posteriormente describiremos la forma en que proponemos construir mallas adaptativas en regiones irregulares.

4.1. El principio de equidistribución

En una dimensión, casi todos los métodos de generación de mallas adaptativas $x = x(\xi)$ están basados en el principio de equidistribución. Este principio fue introducido por vez primera por de Boor [85] para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores a la frontera. Esto involucra elegir los puntos de la malla de manera que una medida del error de la solución sea uniforme sobre cada intervalo.

El principio de equidistribución en una dimensión se puede escribir como

$$\omega \cdot x_\xi = \text{constante} > 0, \quad \omega(\xi) > 0, \quad \xi \in (0, 1) \quad (4.1)$$

con condiciones a la frontera

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1. \quad (4.2)$$

Aquí $w = w(\xi)$ es una función de peso positiva que sirve para controlar la adaptividad, [311, 154, 164]. Otra forma que a muchos investigadores les interesa abordar este problema de adaptividad es a través de un principio de optimalidad

$$\min \int_0^1 \omega \cdot x_\xi^2 d\xi. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones Euler–Lagrange para este principio de optimalidad son

$$(\omega x_\xi)_\xi = 0, \quad (4.4)$$

véas Thompson [311], Ivanenko [164] y De la Cruz [83] para los detalles.

Ejemplo Es fácil comprobar que

$$x(\xi) = \frac{e^{-5\xi} - 1}{e^{-5} - 1}.$$

es solución a (4.4) con condiciones a la frontera (4.2) y

$$\omega(\xi) = e^{5\xi}.$$

En la Figura 4.2 se aprecia la gráfica de la solución y se observa que una colección de puntos igualmente espaciados en $[0, 1]$ al ser transformados por este mapeo $x(\xi)$ se concentran cerca del punto extremo 1.

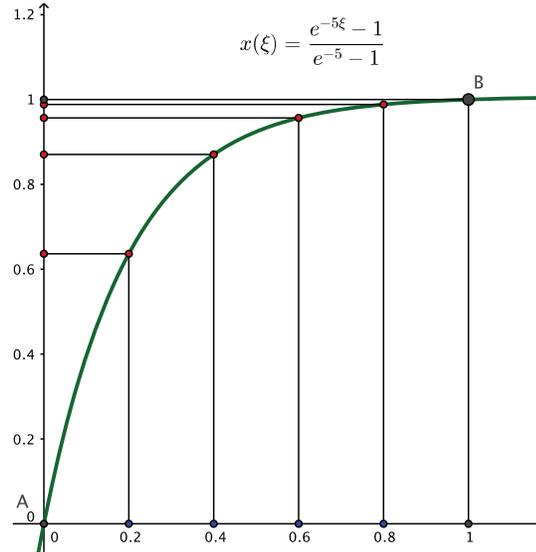


Figura 4.2: Una malla 1D transformada por el mapeo $x(\xi) = (e^{-5\xi} - 1)/(e^{-5} - 1)$.

Cuando la equidistribución se realiza a lo largo de la longitud de arco de una función de control $f(x)$ dada, el principio se puede escribir como

$$x_\xi \sqrt{1 + c_a^2 f_x^2} = \text{constante} > 0, \quad \xi \in (0, 1) \quad (4.5)$$

donde $c_a > 0$ es un parámetro de forma (*shape parameter*) o de adaptividad. En el trabajo de De la Cruz [83], se ha desarrollado en detalle la descripción de esta formulación.

Por una parte, lo interesante del principio de equidistribución (4.1)–(4.2) o (4.5), es que cualquier función $x(\xi)$ que satisfaga esa ecuación es invertible ya que su derivada es

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

estrictamente positiva. Por otra parte, para cualquier función invertible $x(\xi)$ es posible encontrar una función positiva

$$\omega(\xi) = \text{constante}(x_\xi)^{-1}$$

que satisfaga el principio de equidistribución, véase Bobylév *et al.* [49]. Este resultado nos garantiza que la malla adaptada obtenida por el principio de equidistribución sea no doblada.

Una extensión inmediata del principio de equidistribución en dos dimensiones es planteada por Winslow [330], quien propuso usar este principio para cada coordenada y en cada dirección en la forma

$$(w_1 x_\xi)_\xi + (w_2 x_\eta)_\eta = 0, \quad (w_1 y_\xi)_\xi + (w_2 y_\eta)_\eta = 0.$$

con

$$w_1 = w_1(\xi, \eta) > 0, \quad w_2 = w_2(\xi, \eta) > 0.$$

Sin embargo, salvo para muy contadas funciones positivas $w_1 = w_1(\xi, \eta)$ y $w_2 = w_2(\xi, \eta)$ no es posible asegurar que el mapeo así obtenido entre el cuadrado unitario y la región de estudio Ω sea uno a uno, véase [5]. Es decir; no es posible garantizar que la malla así obtenida sea convexa. Algunos investigadores centran sus desarrollos en la solución numérica de sistemas de ecuaciones con funciones de control derivadas de una formulación del principio de equidistribución y, bajo ciertas condiciones, reportan que la malla adaptiva es convexa. Algunos otros prefieren utilizar ecuaciones diferenciales elípticas con términos fuente, como el sistema de ecuaciones Thompson-Thames-Mastin (TTM), véase [306].

4.2. Sistema de ecuaciones Thompson-Thames-Mastin

El procedimiento para transformar el dominio físico al dominio computacional está regido por la ecuación de Poisson. Este mapeo se construye fijando los puntos sobre la frontera del dominio físico

$$\mathbf{x}(\partial B) = \partial\Omega, \tag{4.6}$$

y la distribución de puntos en el interior es determinada al resolver el sistema de ecuaciones

$$\xi_{xx} + \eta_{yy} = P(\xi, \eta) \tag{4.7}$$

$$\eta_{xx} + \xi_{yy} = Q(\xi, \eta). \tag{4.8}$$

Las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ se eligen convenientemente para controlar la distribución de puntos hacia el interior.

El sistema anterior se puede transformar al espacio computacional $\xi - \eta$ intercambiando los roles de las variables dependientes e independientes, esto nos conduce al sistema de ecuaciones

$$g_{11}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{22}x_{\eta\eta} = -J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) \quad (4.9)$$

$$g_{11}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{22}y_{\eta\eta} = -J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) \quad (4.10)$$

donde g_{11} , g_{12} y g_{22} son elementos del tensor métrico g asociado a la transformación \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 & x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} & x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

y J el Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} x_{\xi} & y_{\xi} \\ x_{\eta} & y_{\eta} \end{vmatrix} = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}. \quad (4.12)$$

Si aproximamos las ecuaciones (4.9)–(4.10) por diferencias finitas de segundo orden obtendremos un sistema de ecuaciones no lineal. En 1974, Thompson *et al.* [306] usaron diferencias finitas centrales para aproximar (4.9)–(4.10) y mediante un procedimiento puntual SOR obtuvieron los puntos interiores. Como bien observan en su trabajo, esta idea es ineficiente para mallas de orden $m \times n$ alto. En 1978, Roache [267, 268] propone resolver este sistema usando el método no lineal semidirecto GEM (*General Elliptic Marching*). Sin embargo, las mallas que obtiene no siempre son suaves debido al error de truncamiento. Roache propuso usar los términos P y Q para controlar algunos grados de suavidad en zonas hacia el interior de la región y observó que experimentalmente, para diferentes funciones P y Q se pueden presentar problemas de convergencia [269].

En resumen, la generación numérica de mallas por medio de ecuaciones diferenciales elípticas son muy usadas por la comunidad científica como los mejores métodos o sistemas para construir mallas estructuradas sobre regiones arbitrarias. Resolver las ecuaciones de Thompson-Thames-Mastin (4.9)–(4.10) es un método para calcular la malla adaptativa; sin embargo, los errores de truncamiento pueden hacer inviable este método ya que la malla así obtenida puede ser no convexa [311].

4.3. Formulación Ryskin y Leal

Una de las formulaciones más importantes para obtener mallas ortogonales y adaptativas son las planteadas por Ryskin y Leal [265, 266] quienes en 1984 observan las coordenadas espaciales (x, y) del dominio físico Ω como funciones lineales de la posición de los nodos de la malla con lo cual el gradiente de ambas coordenadas por separado, es constante, esto es

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} x(\xi, \eta) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{grad} y(\xi, \eta) = 0. \quad (4.13)$$

Para este sistema imponen las restricciones

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22}/g_{11} = 1.$$

La primera restricción impone que el sistema sea ortogonal y la segunda es una normalización. Los elementos g_{ij} son términos del tensor métrico (4.11).

Ryskin y Leal señalan, que debido a que la restricción $g_{22}/g_{11} = 1$ hace rígido el mapeo conforme, el esquema en diferencias finitas para (4.13) puede ser mal condicionado, véase [265, 155]. Para compensar esto, proponen usar una función de distorsión en la forma

$$f(x, y) = \frac{h_\eta}{h_\xi}$$

donde h_ξ, h_η son funciones en cada dirección ξ, η , y lo usual es usar

$$h_\xi = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}, \quad (4.14)$$

$$h_\eta = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}. \quad (4.15)$$

Este cociente representa la razón de los lados de una celda en cada dirección, lo cual representa una forma de medir el *aspect ratio* de una celda, véase [265, 77] para los detalles.

El covariante del operador de Laplace en (4.13) se puede escribir como

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right]$$

por lo que de (4.13) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Ryskin y Lean proponen dos formas de calcular la función de distorsión f de manera que sean dependientes de la región. La primera forma consiste en usar una parametrización de las fronteras y obtener f en el interior de la región Ω mediante una interpolación TFI (Transfinite Interpolation). La segunda forma que proponen es un método iterativo en el cual las funciones de distorsión sean calculadas de la malla inicial y cada ciertos pasos de la solución esta información se actualice.

Zhang *et al.* [338] usan un promedio h_ξ y h_η en cada dirección y proponen una función de distorsión donde los factores de escala son una combinación lineal entre h_ξ , h_η y su promedio. También proponen usar diferentes expresiones para f a lo largo de cada dirección basadas en funciones algebraicas: lineales, cuadráticas y exponenciales.

En 2001, Akcelik, Jaramaz y Ghatas [3] realizan un estudio de las posibles formas de definir la función de distorsión englobándolas en:

1. Calcular f sobre las fronteras de Ω y extender hacia el interior por interpolación o resolviendo una ecuación de Laplace.
2. Determinar una clase de funciones admisibles que garanticen la existencia de solución al sistema.
3. Determinar f en todo el dominio.

Algunos autores usan en determinados problemas la primera forma, sobre todo si de antemano estiman el comportamiento deseado y desde luego, siempre que la región de estudio sea simple ya que el sistema, volvemos a señalar, es no lineal. La segunda forma es muy interesante y ha llevado a algunos autores a proponer una familia de funciones de distorsión que bajo ciertas condiciones se garantice la existencia de una solución. Duraiswami y Properetti [92] y Ryskin y Leal [265] demuestran que es posible garantizar la existencia de una solución si la función de distorsión f es separable en la forma $f(\xi, \eta) = \Phi(\xi)\Psi(\eta)$. En el artículo de referencia Akcelik, Jaramaz y Ghatas señalan que algunos autores han logrado construir funciones de distorsión explorando la simetría de la región y usando un método de Bubnov-Galerkin para resolver las ecuaciones diferenciales (4.16)–(4.17).

Las ecuaciones de Ryskin y Leal han sido muy estudiadas para construir mallas casi ortogonales con diferentes funciones de distorsión f con la finalidad de imponer propiedades geométricas a las celdas. En la literatura se mencionan dos formas para obtener estas ecuaciones y algunas modificaciones simples. Por ejemplo, autores como Hung y Brown [155] y Zhang *et al.* [342] señalan que las ecuaciones de Ryskin y Leal (4.16)–(4.17) pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de Thompson [311] usando como términos fuentes a

$$P = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad Q = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \right).$$

En 1996, Eča [95] obtiene las ecuaciones Ryskin y Leal a partir de las condiciones de ortogonalidad

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$$

y al imponer que el mapeo cuente con jacobiano positivo. Observa que con esto se satisfacen las ecuaciones de Beltrami:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -f \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = f \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.19)$$

las cuales pueden ser vistas como generalizaciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Usando ambas ideas se obtiene el sistema (4.16)–(4.17), ver Eča [95] para los detalles.

De las ecuaciones de Ryskin y Leal se puede observar que los elementos h_η o h_ξ pueden ser cercanos a cero y con ello, a parte de las dificultades numéricas que hemos señalado, se obtendría una pobre distribución del *aspect ratio* y un mal condicionamiento para muchos métodos numéricos con los cuales resolver esas ecuaciones diferenciales. Para prevenir que los factores de escala resulten ser cero en alguna parte del dominio. Eča introduce funciones de control del tamaño de h_η y h_ξ como término fuente en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + P_x(h_\xi) + Q_x(h_\eta) = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + P_y(h_\xi) + Q_y(h_\eta) = 0 \quad (4.21)$$

donde las funciones P y Q son básicamente obstáculos para evitar que h_ξ o h_η resulten ser pequeños.

El problema con este método se encuentra en su implementación: las ecuaciones diferenciales son no lineales y los métodos numéricos usualmente no convergen. Esto es particularmente evidente para el caso de mallas adaptativas donde las ecuaciones involucran términos de fuente no lineales como, por ejemplo, la norma del gradiente de la solución. Los algoritmos numéricos empleados son localmente convergentes siempre que el proceso inicie con un estimador cercano a la malla deseable. Lo cual resulta sumamente costoso de implementar y de emplear en aplicaciones generales.

Los métodos variacionales han probado ser muy útiles para construir medidas geométricas de la malla y usados como un principio variacional algunas formulaciones nos permiten asegurar que el óptimo es un mapeo uno a uno, teoría que nos resulta favorable para construir mallas convexas, [226].

En 1999, Kania [172] propuso usar el principio de equidistribución sobre el jacobiano en la forma

$$w \cdot J = \text{constante}. \quad (4.22)$$

Lee, impone la condición de ortogonalidad $g_{12} = g_{21} = 0$ y obtiene un sistema del tipo Poisson en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + P(\xi, \eta) = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + Q(\xi, \eta) = 0, \quad (4.24)$$

donde

$$P(\xi, \eta) = \left(\frac{J_\xi}{J} + \frac{w_\xi}{w} \right) f \cdot x_\xi + \left(\frac{J_\eta}{J} + \frac{w_\eta}{w} \right) \frac{1}{f} \cdot x_\eta \quad (4.25)$$

$$Q(\xi, \eta) = \left(\frac{J_\xi}{J} + \frac{w_\xi}{w} \right) f \cdot y_\xi + \left(\frac{J_\eta}{J} + \frac{w_\eta}{w} \right) \frac{1}{f} \cdot y_\eta \quad (4.26)$$

Este sistema es del tipo Ryskin y Leal cuya diferencia sustancial son los términos fuente P y Q , y desde luego, el uso del principio de equidistribución para el área desde el cual Kania basa este desarrollo. Zhang *et al.* [340], proponen usar el sistema (4.23)–(4.24) con un peso w constante en (4.22) para simplificar los términos fuente.

Existen otras formulaciones basadas en resolver ecuaciones elípticas, ver Matsuno *et al.* [227], Knupp [189], Soni *et al.* [296]. En 1992, Jeng *et al.* [166] proponen controlar la ortogonalidad en la frontera para tener una efectividad en el control de la adaptividad global. Algunas de estas formulaciones están basadas en el principio de equidistribución, ver Ren, [260], Catherall [54]. Todas estas formulaciones resultan muy atractivas; sin embargo, su utilidad ha sido probada solamente en muy regiones sencillas. Para regiones irregulares como lagos o embalses no hay resultados teóricos que garanticen que la malla construida de esta forma sea convexa. En la práctica Zhang, *et al.* [340] proponen usar los sistemas Risky y Leal [265] o el obtenido por Kania [172], sobre regiones irregulares pero usando mallas estructuradas por bloques para controlar la convexidad de la malla.

4.4. Funcionales variacionales de adaptividad

Como se ha señalado en los primeros capítulos de este trabajo, la formulación de los principios variacionales se establecen de una manera intuitiva y están basados en medidas geométricas deseables a observar sobre la malla. El funcional de longitud es una excepción a esto,

$$\int \int_B x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 d\xi d\eta$$

ya que las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio del mínimo son las ecuaciones de Laplace.

En 1992, Mastin [226] señala que para obtener un mapeo entre un rectángulo R y la región de estudio Ω podemos reescribir el funcional de longitud en términos de una composición de funciones en el cual el nuevo funcional integra un parámetro o módulo

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

$M > 0$ asociado con el *aspect ratio* o proporción entre los lados del rectángulo. Este funcional se puede escribir como

$$\int \int_B M(x_\mu^2 + y_\mu^2) + \frac{1}{M}(x_\nu^2 + y_\nu^2) d\mu d\nu$$

Por otra parte, si consideramos dos funciones de escalamiento una para cada una de las variables en la forma

$$\mu = a(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.27)$$

$$\nu = b(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.28)$$

la integral anterior se puede transformar en

$$\int \int_B M \frac{b'(\xi)}{a'(\xi)} (x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{M} \frac{a'(\xi)}{b'(\xi)} (x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta$$

y el mapeo solución contará con distribución diferente para las líneas en cada dirección. Esto se puede interpretar como que la composición provee una malla para la cual se asignan diferentes pesos por escalamiento a cada celda y esos pesos nos permiten adaptar la malla controlando la forma de las celdas.

La idea anterior se puede generalizar de la siguiente forma: si tenemos dos funciones $f(\xi, \eta)$ y $g(\xi, \eta)$ para controlar la adaptividad en cada dirección ξ y η respectivamente, podemos construir una malla adaptativa minimizando

$$\int \int_B M \frac{f(\xi, \eta)}{g(\xi, \eta)} (x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{M} \frac{g(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)} (x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta$$

En ese trabajo, Mastin señala que en esta formulación hay varios aspectos a resolver: las condiciones a la frontera y las funciones de peso de adaptividad y entre ambas cuestiones debe de haber consistencia.

Como hemos discutido con anterioridad, el funcional de longitud no garantiza mallas convexas. Sin embargo, si este funcional lo definimos sobre el espacio físico y realizamos un cambio de variable tendremos un funcional armónico ponderado. En la siguiente sección veremos esta formulación y cómo una simplificación de la misma nos produce celdas con *aspect ratio* determinado.

4.5. Funcional armónico de adaptividad

Si consideramos una medida Q , o métrica sobre el espacio lógico, la medida total de Q sobre toda la malla es

$$I = \int \int_B w(\xi, \eta) Q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.29)$$

y si Q está definida sobre la región física Ω , la medida total es

$$I = \int \int_{\Omega} w(x, y) Q(x, y) \, dx dy. \quad (4.30)$$

Si calculamos la totalidad de la medida sobre el espacio físico (4.29), estaremos midiendo la calidad relativa a la malla igualmente espaciada, y si medimos la calidad sobre la región de estudio (4.30), la integral representa la suma de la calidad de todas las celdas de la malla, y por consiguiente, las celdas más grande tendrán una influencia mayor que aquellas pequeñas véase Warsi y Thompson [327].

El peso w en (4.29) y (4.30) debe ser positivo y dependiendo de su formulación tendrá una acción sobre las celdas o sobre los nodos. Si la función de peso depende de las coordenadas lógicas $w = w(\xi, \eta)$ los pesos están asociados a los nodos de la malla. Si la función de peso depende de las coordenadas físicas, los pesos están asociados a la posición dentro del espacio físico.

Si formulamos el funcional de longitud o suavidad sobre el espacio lógico $B = [0, 1] \times [0, 1]$, en la forma

$$I_s = \int \int_{\Omega} [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2] \, dx dy$$

haciendo un cambio de coordenadas hacia el espacio físico \mathbb{R}^2

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{J} \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{J} \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J}$$

el funcional de suavidad se puede escribir como

$$I_s = \int \int_B \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} \, d\xi d\eta$$

(muchas veces conocido de suavidad porque sus ecuaciones Euler-Lagrange es la ecuación de Laplace).

Este funcional puede ser ponderado usando las ideas discutidas al principio del capítulo en la forma

$$I_s = \int \int_B \frac{w(x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{w}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{J} \, d\xi d\eta$$

para controlar la distorsión de las celdas en cada dirección ξ - η o *aspect ratio* y en general si usamos

$$I_s = \int \int_B \frac{w(x)(x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2)}{J} \, d\xi d\eta$$

podemos controlar el tamaño de las celdas. En González [146] se describe una discretización de este funcional armónico en la cual los pesos w y $1/w$ representan al *aspect ratio* de las celdas en B_2 transformadas por el mapeo armónico.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Una generalización del funcional armónico de adaptividad está detallada en Ivanenko [158, 158, 161], y Liseikin [204, 205]. En esta formulación se considera de manera adicional una superficie $z = f(x, y)$ definida sobre la región de estudio Ω . La idea detrás de esto, es hallar un mapeo uno a uno y sobre de tal manera que el mapeo de la superficie al cuadrado unitario B sea armónico. Eso nos conduce minimizar

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x_\xi^2 + x_\eta^2)(1 + f_x^2) + (y_\xi^2 + y_\eta^2)(1 + f_y^2) + 2f_x f_y (x_\xi y_\xi + x_\eta y_\eta)}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad (4.31)$$

Aquí $z = f(x, y)$ es la superficie sobre la cual se impone que el mapeo sea armónico. Una interpretación geométrica de este funcional es que las funciones de peso $1 + f_x^2$ y $1 + f_y^2$ controlan las líneas ξ y η , componentes de la malla, alargando o concentrando las celdas con respecto a la longitud de arco de la función f , véase [159, 160, 205, 38]

La idea de usar pesos en las formulaciones variacionales no es reciente. En 1982, Brackbill y Saltzman [46] propusieron construir mallas adaptativas minimizando el funcional ponderado de área:

$$I_a = \int \int_B w J^2 \, d\xi d\eta,$$

el funcional ponderado de longitud

$$I_l = \int \int_B w (x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2) \, d\xi d\eta,$$

y el de ortogonalidad

$$I_o = \int \int_B w (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 \, d\xi d\eta.$$

En cada uno de ellos, el peso es no negativo $w > 0$. La elección de los pesos y cómo resolver esas formulaciones variacionales ha dado pie a diferentes métodos para construir mallas adaptativas.

Nosotros usaremos versiones discretas de estos funcionales para controlar alguna propiedad geométrica por zonas. Primero comentaremos algo sobre la forma en que usualmente se eligen las funciones de peso.

4.6. Sobre las funciones de peso

La elección de las funciones de peso w dependen del método en que se realice la adaptividad y la información que se cuente del fenómeno físico a modelar. Por ejemplo, si se cuenta con una función $u(x)$ que es solución del problema físico a modelar, o alguna que monitoree la calidad de la solución como puede ser un estimador de error por aproximación, esa información es útil para definir una buena función de peso.

Usualmente en una dimensión se emplean comúnmente tres funciones de peso

$$w(x) = 1 + \alpha \|u(x)\|^2 \quad (4.32)$$

$$w(x) = \sqrt{1 + \alpha \|u_x\|^2} \quad (4.33)$$

$$w(x) = \sqrt{1 + \alpha \|u_x\|^2 + \beta \|u_{xx}\|^2} \quad (4.34)$$

donde α, β son positivos.

La expresión (4.32) es una de las más empleadas en la literatura, y usualmente se utiliza cuando se cuenta con un estimador $u(x)$ del error de aproximación, de manera que los nodos de las mallas se acerquen donde la magnitud del error es diferente de cero.

La segunda expresión (4.33), es otra función de peso usada en muchas aplicaciones y representa la longitud de arco de la función monitor $u(x)$. La idea detrás es construir una malla cuyos nodos se encuentran equidistante sobre la curva de la función $u(x)$. Una representación gráfica de los puntos obtenidos usando (4.33) se observa en la Figura 4.3.

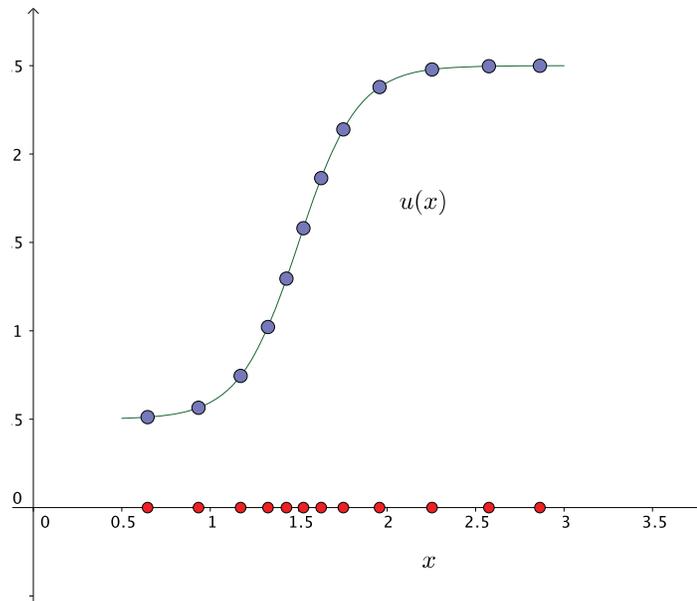


Figura 4.3: Idea gráfica de los puntos de adaptividad ξ_i obtenidos usando como función de peso a la longitud de arco de una función monitor $u(x)$.

En términos generales si la función de peso $w(x)$ está basada en una medida o proporción del gradiente de la solución $u(x)$, lo que se persigue es que la malla se adapte al fenómeno físico donde el gradiente sea grande.

La tercera expresión (4.34) requiere la primera y segunda derivada de $u(x)$ y es usada para incrementar la concentración de los nodos de la malla cerca de los extremos (mínimo o máximo) de $u(x)$.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

El diseño de esas funciones de peso depende de la información *a priori* que se tenga de la aplicación y acorde con el método con el cual se desea resolver la adaptividad. Por ejemplo, usando el principio de equidistribución para dos dimensiones Anderson en 1987 [5] propone un esquema para construir mallas adaptativas usando las ecuaciones elípticas TTM (4.9)-(4.10) y como funciones de control a

$$P = [\xi_x^2 + \xi_y^2] \phi(\xi, \eta) \quad (4.35)$$

$$Q = [\eta_x^2 + \eta_y^2] \varphi(\xi, \eta) \quad (4.36)$$

para las cuales usar

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \quad (4.37)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{w_2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \quad (4.38)$$

que involucra a pesos unidireccionales en la forma

$$w_1 = 1 + A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \quad (4.39)$$

$$w_2 = 1 + A_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \quad (4.40)$$

donde A_1, A_2 son positivos. Aquí, u representa una función o medida asociada al flujo a modelar. Anderson resuelve el sistema elíptico usando un método de direcciones alternativas, obteniendo resultados muy interesantes en regiones sencillas. En 1984, Dwyer [93] y en 1985, Eiseman [100], desarrollaron otros esquemas basados en direcciones alternantes para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de flujo, para estos métodos propusieron elegir los pesos de adaptividad en la forma

$$W_i = 1 + \sum_{j=1}^m \lambda_j M_{ij}. \quad (4.41)$$

Usualmente, los escalares $M_{ij} > 0$ representan una medida de alguna variable física a observar, por ejemplo la norma del gradiente o la magnitud de su segunda derivada. Aquí m es el número de medidas y λ_j es una constante de adaptividad para cada medida.

Los coeficientes de adaptividad λ_j en (4.41) juegan un papel control de adaptividad para la medida M_j . Por ejemplo, si M_j representa una medida del gradiente, usando un valor grande de λ_j , obtendremos un agrupamiento de nodos y celdas formando clusters o zonas de adaptividad. Si el valor de λ_j es pequeño la concentración de las celdas será débil o suave sobre esas zonas.

El término constante a 1 que aparece como sumando en estas formulaciones (4.32)–(4.33), (4.39)–(4.40) y (4.41) es muy útil para la adaptividad, ya que si los valores M_{ij} son cercanos a cero el peso total es $W_i = 1$ y esto nos conduce a una malla uniforme (no hay adaptividad), en la literatura a este valor constante se le conoce como *parámetro de suavizamiento* o de uniformidad.

En 1992, Jeng y Liou [166] de manera experimental proponen una modificación de las funciones de peso (4.41) en la forma

$$W_i = \frac{1}{\Delta S_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j M_{ij} \quad (4.42)$$

donde ΔS_i representa el espaciamiento entre nodos para la i -ésima línea curvilínea. Esta idea la proponen para que en el caso de que las constantes de adaptividad λ_j sean cero, el peso W_i sea el recíproco del espaciamiento y con esto las celdas no se alejen de la forma original; esto es, sean preservadas las propiedades geométricas de la malla previas a su adaptabilidad.

En la literatura existe una basta referencia a cómo usar o definir funciones de peso para la adaptividad de una malla. Soni *et al.* [296] revisan algunas de las propuestas de elección para los pesos W , cada una de ellas dependiendo si deseamos ajustar los nodos o las celdas y en cada caso, si definimos los pesos sobre el espacio físico o lógico. En ese artículo, Soni *et al.* sugieren, que de contar con medidas W_1, W_2, W_3 del gradiente, la velocidad, y la presión de un problema de flujo, es conveniente usar, como pesos de control, a una suma booleana de esas medidas en la forma

$$W = 1 + \frac{W_1}{\text{máx}\{W_1, W_2, W_3\}} \oplus \frac{W_2}{\text{máx}\{W_1, W_2, W_3\}} \oplus \frac{W_3}{\text{máx}\{W_1, W_2, W_3\}}.$$

Como se puede observar, estos pesos se encuentran normalizados. Soni *et al.* señalan que de contarse con medidas que estimen los vórtices del flujo turbulento y choques presentes dentro del fenómeno físico, es posible añadir esas medidas a los pesos de control usando las sumas booleanas.

En 1999, Kania [172] propone que las funciones de peso para adaptividad sean calculadas como combinación lineal de m funciones del flujo en la forma

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m \phi_i \bar{w}_i}{\sum_{i=1}^m \phi_i}$$

donde \bar{w}_i son funciones del flujo adimensionados con un peso ϕ_i . La función de adaptividad o función de peso que propone es

$$g_w = W_0 \phi_0 + \|\nabla W\|^2$$

donde W_0 es el promedio ponderado de área de $\|\Delta W\|^2$ y ϕ_0 se elige convenientemente para la densidad de la adaptividad.

Es interesante hacer notar que dependiendo de la formulación del método adaptativo se proponen en la literatura diferentes pesos o funciones de control para mover los puntos alrededor de la zona de interés.

4.7. Funcionales discretos de adaptividad

Nosotros estamos interesados en construir mallas adaptativas mediante el control de la geometría de las celdas. Para esto usaremos funcionales geométricos discretos ponderados, algunos de los cuales provienen de una discretización de las formulaciones variacionales (4.30) o (4.29). Ahora, para garantizar la ϵ -convexidad de la malla combinaremos esos funcionales discretos con los funcionales convexos de área discutidos en el capítulo 3.

En general, los funcionales geométricos discretos que nosotros usamos son de la forma

$$F_c(G) = \sum_{q=1}^N f(T_q), \quad (4.43)$$

donde T_q es un elemento triangular de la malla, y f mide alguna propiedad geométrica local de las celdas como lo son la suavidad, ortogonalidad, área, etc., ver la Tabla 4.1 y la Figura 4.4. La suma es sobre N el número total de elementos triangulares de la malla.

Siguiendo las ideas de las secciones previas, es natural que esta suma se cambie por una suma ponderada

$$F(G) = \sum_{q=1}^N w_q f(T_q), \quad (4.44)$$

donde los pesos $w_q > 0$ son usados para controlar la característica geométrica de las celdas, por ejemplo, el tamaño de área de los elementos.

Para fines prácticos resulta conveniente expresar el funcional geométrico (4.44) sobre todos los elementos de las celdas c_{ij} por lo que escribimos

$$F(G) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} w_{ij} f(c_{ij}) \quad (4.45)$$

donde m, n es la dimensión de la malla en cada dirección. Por la forma en que hemos escrito (4.45), los pesos actúan sobre cada celda. Una restricción que pediremos a los pesos es que sean estrictamente positivos

$$w_{ij} > 0$$

de otra manera podemos tener problemas de convergencia para obtener una malla ϵ -convexa.

En lo siguiente daremos las pautas para resolver el

Problema 1 *Construir mallas ϵ -convexas con distribuciones predefinidas del tamaño de las celdas usando para esto funcionales discretos pesados.*

El Problema 1 arriba planteado lo abordaremos usando funcionales convexos de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$ en combinación con un funcional ponderado, tal y como se señala en el siguiente

Teorema 4.1 *Sea $\epsilon > 0$, $f_c(T_q)$ función positiva sobre los elementos triangulares y $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$. Dada una malla inicial G_0 , para un valor $\omega > 0$ suficientemente grande es posible encontrar una malla G^* ϵ -convexa, como óptimo de*

$$G^* = \arg \min (1 - \sigma) S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma \sum_{q=1}^N w_q f_c(T_q) \quad (4.46)$$

con $0 \leq \sigma < 1$.

La prueba de este teorema es idéntica a la desarrollada por Domínguez en [91] y esto se debe a que el funcional discreto ponderado (4.44) es positivo toda vez que empleemos pesos positivos $w_q > 0$.

Algunos de los funcionales geométricos discretos que comúnmente usamos están definidos sobre los elementos triangulares T , ver la Tabla 4.1 y la Figura 4.4 para seguir la notación empleada.

funcional de área	$f_a(T) = (\mathbf{a}^t J_2 \mathbf{b})^2$
funcional de longitud	$f_l(T) = \ \mathbf{a}\ ^2 + \ \mathbf{b}\ ^2$
funcional de ortogonalidad	$f_o(T) = (\mathbf{a}^t \mathbf{b})^2$
funcional de suavidad (o armónico)	$f_s(T) = \frac{\ \mathbf{a}\ ^2 + \ \mathbf{b}\ ^2}{\mathbf{a}^t J_2 \mathbf{b}}$

Tabla 4.1: Algunos funcionales geométricos discretos.

En la notación de la Tabla (4.1) empleamos

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como revisamos en la sección previa, usualmente los pesos provienen de alguna función de adaptividad $g = g(x, y)$ definida sobre toda la malla G ; a esta función se le

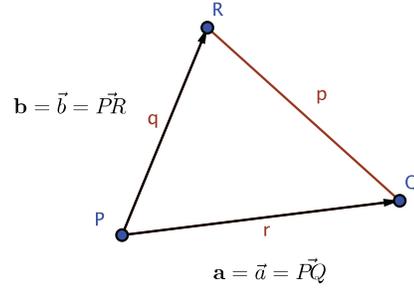


Figura 4.4: Un elemento triangular y notación vectorial empleada en la Tabla 4.1.

conoce como función monitor, función de control de adaptividad de la malla o función de densidad de la malla. La forma de la función monitor g dependerá del proceso a modelar.

Lo usual es que los pesos están en función de los nodos $\mathbf{x}_{i,j}$ en la forma

$$w_{i,j} = 1 + g(\mathbf{x}_{i,j}).$$

El valor constante 1 se usa como suavizamiento o uniformidad de elementos de la malla donde g no es grande. Esta elección de los pesos es usada por Kattri [175, 176], nosotros proponemos usar la función de peso $w_{i,j}$ como el promedio de los valores de g de los 4 vértices de la celda c_{ij} para tener un mejor control en la forma de las celdas. Esto se escribe como

$$g(c_{ij}) = \frac{1}{4} \left[g(\mathbf{x}_{i,j}) + g(\mathbf{x}_{i+1,j}) + g(\mathbf{x}_{i+1,j+1}) + g(\mathbf{x}_{i,j+1}) \right].$$

En algunos casos, puede ser muy costoso evaluar $g = g(x, y)$ sobre 4 nodos, por lo que una segunda propuesta es usar el centroide $\mathbf{C}_{i,j}$ de la celda $c_{i,j}$

$$\mathbf{C}_{i,j} = \frac{1}{4} (\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{i+1,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1}).$$

como representante de toda la celda:

$$g(c_{ij}) = g(\mathbf{C}_{i,j}).$$

Una vez calculados los pesos $w_{i,j}$ procedemos a resolver el Problema de optimización (4.46). Para que las celdas se ajusten a la forma de $g = g(x, y)$ debemos actualizar los pesos y volver a resolver 1. Esta idea viene descrita en siguiente apartado.

4.7.1. Procedimiento iterativo de adaptabilidad

La adaptabilidad por funcionales ponderados es muy atractiva; sin embargo, hemos notado que las celdas de la malla óptima obtenida al resolver (4.46), no siempre se encuentran cercanas a la zona de interés. Esto se debe a que los pesos $w_q = w(c_q)$ que hemos asignado dependen de la malla inicial en el problema de optimización 4.46. Para mejorar la adaptabilidad, proponemos usar un proceso iterativo en el cual se actualizan los pesos.

El procedimiento es simple: contando con una malla ϵ -convexa calculamos los pesos $w_q = w(c_q)$ sobre cada celda c_q de la malla, con estos pesos se resuelve el problema de optimización (4.46) y obtendremos una malla ϵ -convexa donde los nodos se ajustan de acuerdo a los pesos w_q , actualizando los pesos w_q para la nueva malla y se repite el procedimiento hasta satisfacer algún criterio de paro.

Este procedimiento se escribe como

- 1) Para $k = 0$, construya una malla G_k , ϵ -convexa.
- 3) Elija un funcional discreto f_c positivo (ver Tabla 4.1).
- 2) Calcule $w_q = w(c_q)$ para cada celda de la malla G_k .
- 3) Con esos pesos resuelva el problema de optimización

$$G^* = \arg \min (1 - \sigma) S_{\omega, \epsilon}(G) + \sigma \sum_{q=1}^N w_q f_c(T_q)$$

debido a que los pesos $w_q > 0$ y $f_c > 0$, la malla resultante también es ϵ -convexa

- 4) use esta malla óptima para el siguiente paso $k + 1$ de iteración $G_{k+1} = G^*$ y repita 2)–3) hasta satisfacer algún criterio de paro.

La idea de este procedimiento es que los pesos w_q converjan gradualmente a un valor constante para cada celda, y con esto, las celdas de la malla se adaptan gradualmente a la forma de la función monitor.

En la práctica hemos observado que entre seis y ocho iteraciones del procedimiento anterior es suficiente para la mayoría de los ejemplos numéricos empleados.

Veamos algunos ejemplos tomados de la literatura, mostraremos las curvas de nivel y la función superficie para comprender las zonas de adaptividad de la malla. Salvo que se especifique lo contrario, en todos los ejemplos siguientes usaremos el funcional de longitud ponderado.

4.7.2. Ejemplos

En los siguientes ejemplos nos interesa concentrar la malla alrededor de una curva en el plano representada por una ecuación analítica $h(x, y) = 0$. La curva se describe como

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}.$$

Para lograrlo usaremos funciones de control basados en la gaussiana

$$g(x, y) = \alpha \exp(-\beta h(x, y)^2) \quad (4.47)$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son valores fijo elegidos adecuadamente de manera que nos permitan escalar la función y concentrar las celdas de la malla entorno a la curva \mathcal{C} .

La forma elegida para la función monitor (4.47) nos permite asignar el valor fijo de α si $(x, y) \in \mathcal{C}$ y un valor pequeño si $(x, y) \notin \mathcal{C}$. Es fácil observar que conforme $\beta \rightarrow \infty$, $g(x, y)$ estará cerca de ser una función impulso, para los puntos sobre \mathcal{C} y cero fuera de ella. Para nosotros β representa al coeficiente de adaptividad y α es un parámetro de escala.

En otros ejemplos emplearemos la función monitor

$$g(x, y) = \alpha \exp(-\beta |h(x, y)|), \quad (4.48)$$

La diferencia entre usar esta función monitor y (4.47) es la densidad de celdas entorno a \mathcal{C} . Esta densidad será menor usando (4.48) debido a que su superficie tiene un pico no diferenciable en la cima por lo que los valores de $g(x, y)$ se alejan más rápidamente del valor α conforme nos alejemos de la curva \mathcal{C} .

Función monitor 1: elipse

La función monitor o de control

$$g(x, y) = \exp(-50(4(2x - 1)^2 + 9(2y - 1)^2 - 1)^2) \quad (4.49)$$

es usada por Ren y Wang [260] y Barrera *et al.* [37] como función de prueba para los métodos de adaptabilidad que proponen. Esta función se usa para concentrar la malla alrededor de la elipse

$$4(2x - 1)^2 + 9(2y - 1)^2 = 1.$$

En la Figura 4.5 se aprecia la forma de esta función monitor tanto las curvas de nivel como la superficie de la misma.

Es fácil observar, que si usamos un valor de $\beta > 50$ la concentración de los elementos ocurre cada vez más cerca de gráfica de la elipse $4(2x - 1)^2 + 9(2y - 1)^2 = 1$. En general este efecto será así toda vez que usemos como función monitor una función de la forma (4.47); en cuyo caso los pesos son de la forma

$$w(x, y) = 1 + \alpha \exp(-\beta h(x, y)). \quad (4.50)$$

En la Figura 4.6 se observa la evolución del procedimiento iterativo (o adaptativo) descrito en la sección anterior para una malla de 41×41 sobre el cuadrado unitario

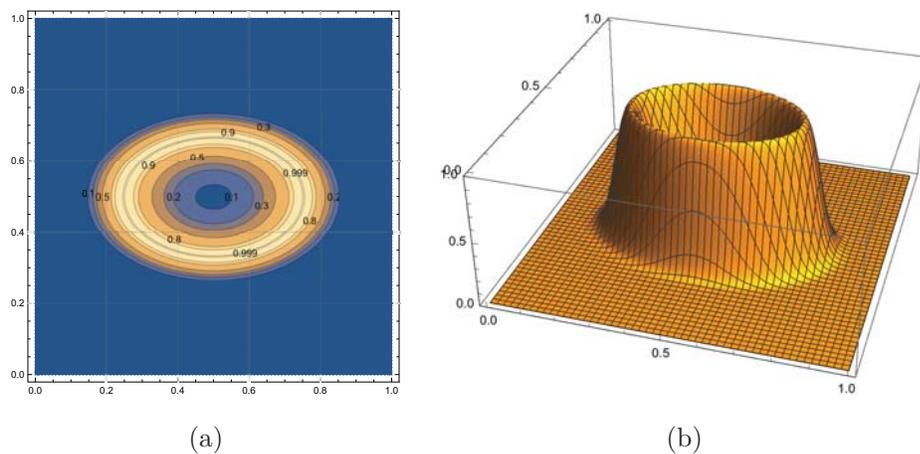


Figura 4.5: (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.49): elipse.

usando como función de pesos a

$$w(x, y) = 1 + 20 \exp(-50h(x, y)).$$

Durante el proceso iterativo, observamos que en la sexta actualización de los pesos $w(x, y)$ se obtuvo convergencia en la adaptividad, en el sentido de que en las siguientes actualizaciones del procedimiento 4.7.1, el método de optimización alcanza el criterio de paro elegido sin reportar ningún cambio cualitativo en la forma de la malla adaptativa.

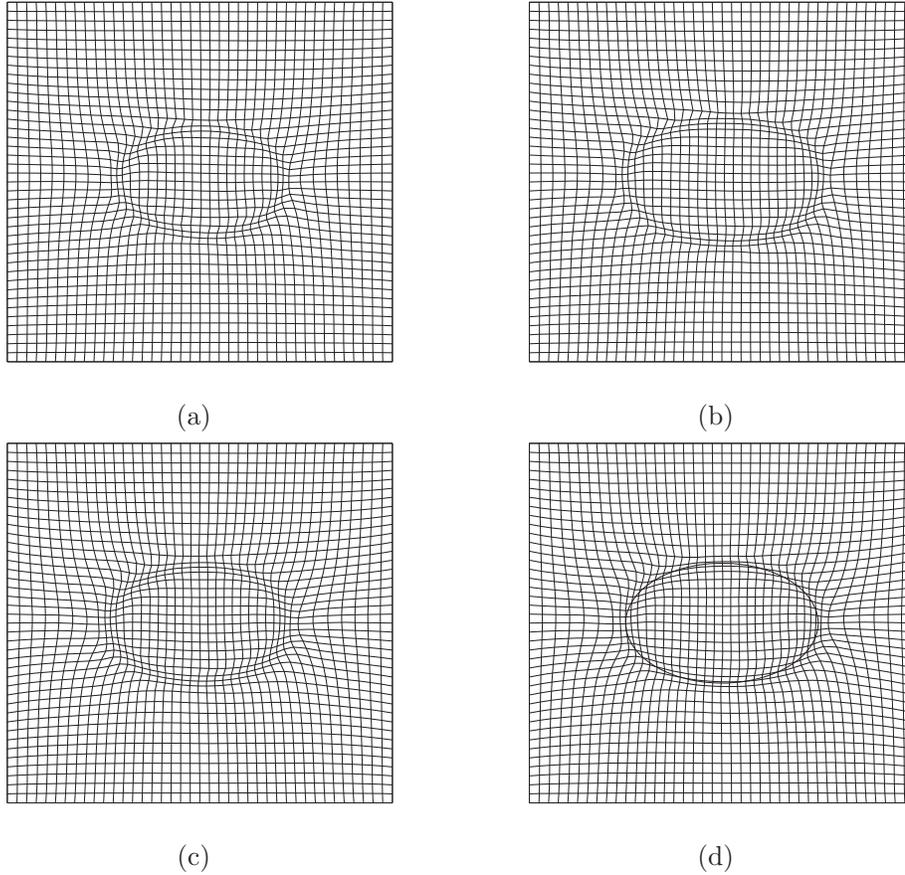


Figura 4.6: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.49) sobre un cuadrado unitario. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 6.

Función monitor 2: parábola

La función monitor o de control

$$g(x, y) = \exp(-50((2y - 1) - (2x - 1)^2 + 0.5)^2) \quad (4.51)$$

es usada por Ren y Wang [260], De la Cruz [83] como función monitor de prueba. Esta función se usa para concentrar la malla alrededor de la parábola descrita por la curva

$$(2y - 1) - (2x - 1)^2 + 0.5 = 0.$$

En la Figura 4.7 se aprecia la forma de la función monitor anterior, tanto por sus curvas de nivel como por la superficie que describe.

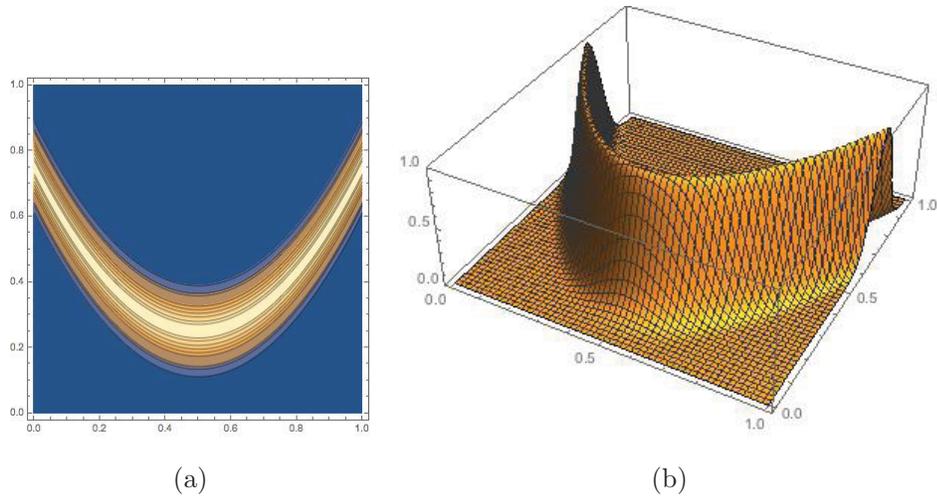


Figura 4.7: (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.51): parábola.

De nueva cuenta, si usamos un valor de $\beta > 50$ la concentración de los elementos ocurre cada vez más cerca de gráfica de la parábola $h(x, y) = (2y-1) - (2x-1)^2 + 0.5 = 0$.

En la Figura 4.8 se observa la evolución del procedimiento iterativo (o adaptativo) descrito en a sección 4.7.1, para una malla de 41×41 sobre el cuadrado unitario usando como función de pesos a

$$w(x, y) = 1 + 10 \exp(-50h(x, y))$$

Para este ejemplo y los restantes observamos que en la cuarta actualización de los pesos $w(x, y)$ ya no se observa ningún cambio cualitativo en la forma de la malla adaptativa.

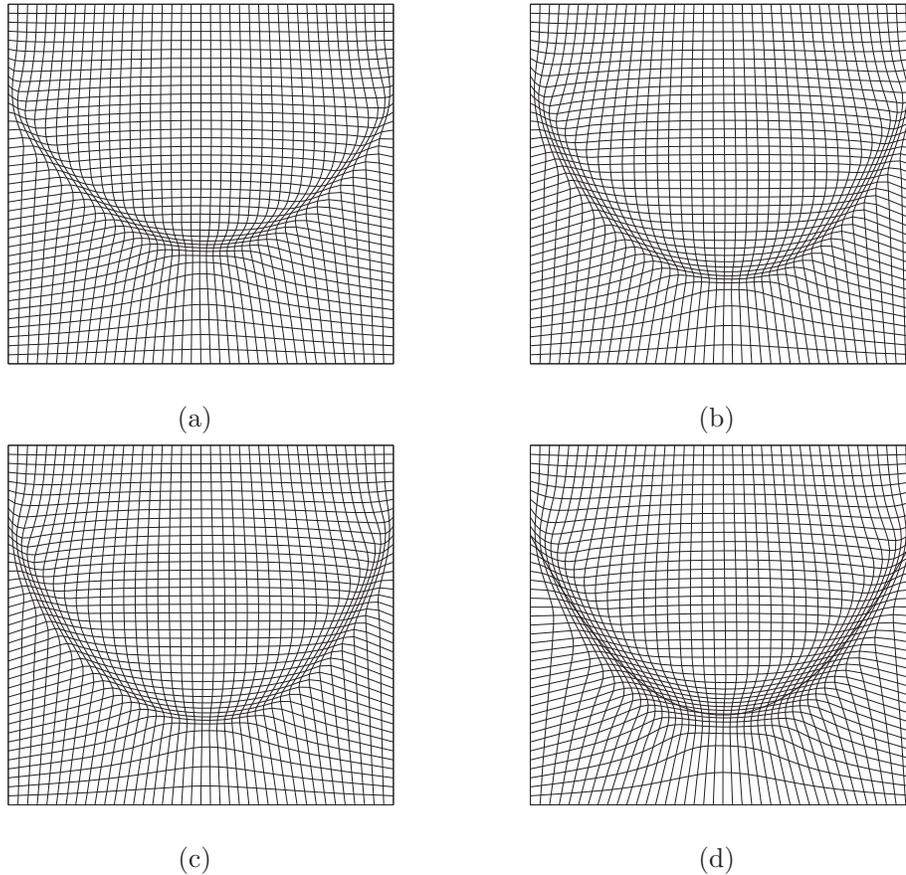


Figura 4.8: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.51) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.

Función monitor 3: circunferencia

La función monitor o de control

$$g(x, y) = \exp(-50|(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 0.25^2|) \quad (4.52)$$

es usada por Huang y Sloan [153], Huang [154], Cao, Huang y Russell [59] como función monitor de prueba para el método de que proponen y es usada para concentrar la malla alrededor de una circunferencia.

En la Figura 4.10 se observa la evolución del procedimiento iterativo (o adaptativo) descrito en la sección 4.7.1, para una malla de 41×41 sobre el cuadrado unitario usando como función de pesos a

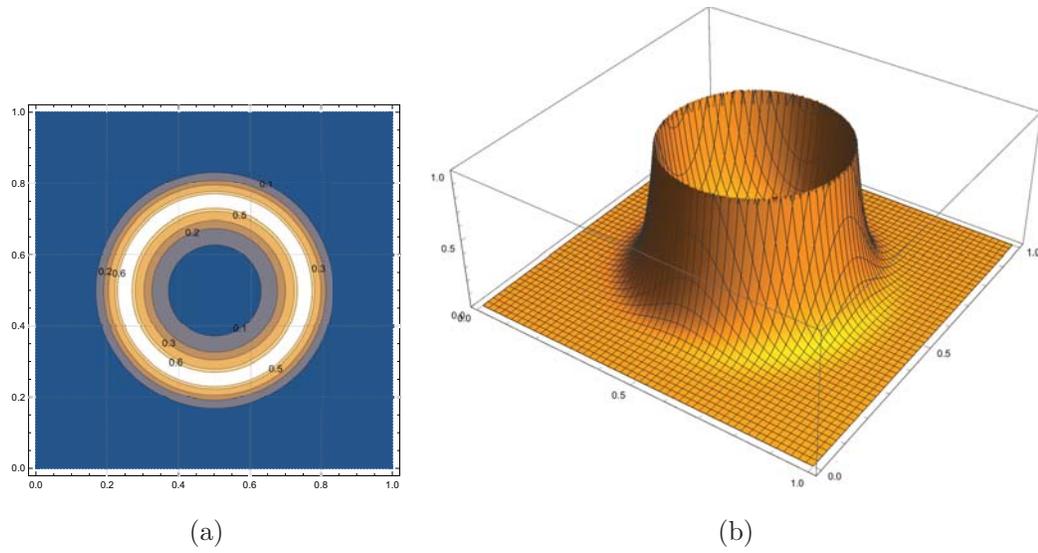
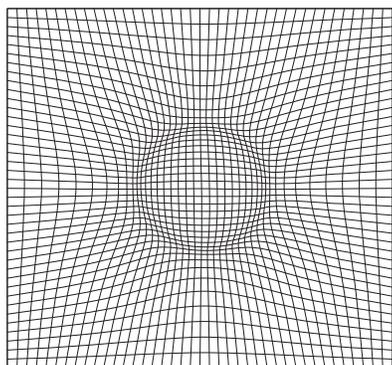
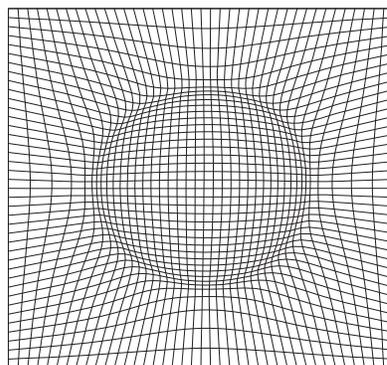


Figura 4.9: (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.52): circunferencia.

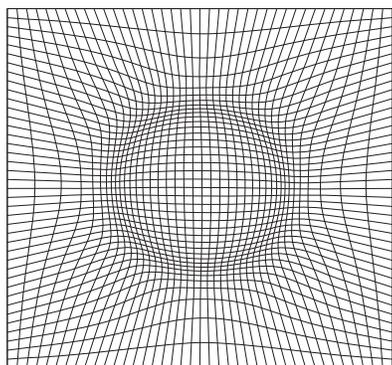
$$w(x, y) = 1 + 10 \exp(-50h(x, y))$$



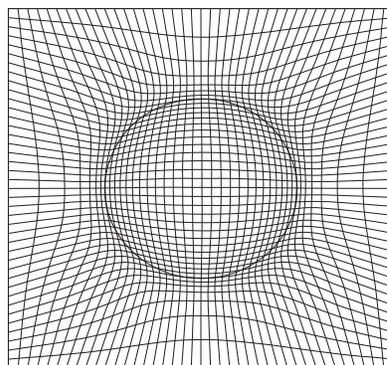
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.10: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.52) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.

Función monitor 4: seno

La función monitor o de control

$$g(x, y) = \exp(-50(y - 0.5 - 0.25 \sin(2\pi x))^2) \quad (4.53)$$

es usada por Cao, Huang y Russell [59] como función monitor de prueba para el método *moving adaptive meshes* que proponen y por Ivanenko [161] para construir mallas armónicas adaptativas. En ambos casos, la malla se concentra alrededor de la función seno;

$$y - 0.5 - 0.25 \sin(2\pi x) = 0$$

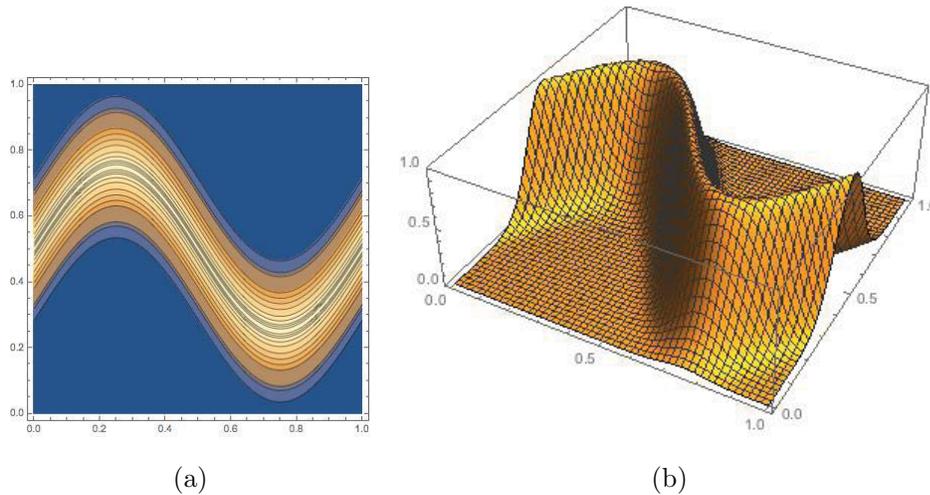


Figura 4.11: (a) Curvas de nivel y (b) superficie de la función monitor (4.53): seno.

En la Figura 4.12 se observa la evolución del procedimiento iterativo (o adaptativo) descrito en la sección 4.7.1, para una malla de 41×41 sobre el cuadrado unitario usando como función de pesos a

$$w(x, y) = 1 + 20 \exp(-30g(x, y)).$$

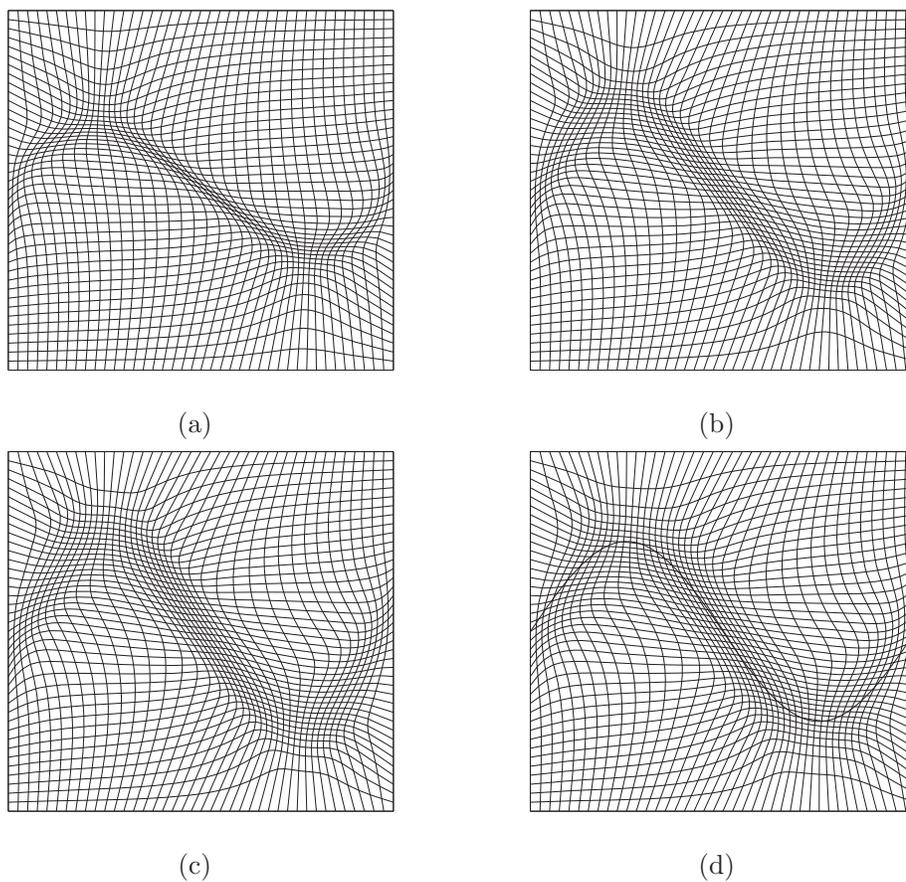


Figura 4.12: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.53) sobre un cuadrado. (a) iteración 1, (b) iteración 2, (c) iteración 3, (d) iteración 4.

Función monitor 5: circunferencia móvil con el tiempo

En 2003, Cao, Huang y Russell propusieron un método de malla móvil, *moving mesh method*, para resolver ecuaciones diferenciales [59]. Uno de los ejemplos que discuten el objeto móvil es un circunferencia en movimiento con respecto al tiempo. El método de resolución que proponen es consistente con la geometría de la malla adaptativa en cada paso del tiempo. El objeto en el tiempo está representado por

$$\rho(x, y, t) = 10 \exp(-50|(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos(2\pi t))^2 + (y - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\pi t))^2 - (\frac{1}{10})^2|) \quad (4.54)$$

El método desarrollado por Cao, Huang y Russell [58], se conoce en la literatura como *geometric conservation law* o GCL.

Para este tipo de problemas es idóneo usar mallas estructuradas adaptivas ya que, como no se requiere añadir ni eliminar elementos y puntos, el costo y la aproximación en el siguiente paso del tiempo se reduce drásticamente al no tener que reiniciar el método de aproximación de la ecuación diferencial, véase [59].

Para calcular los pesos hemos usado el tiempo fijo para $t_0 = 0.0$, $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.5$ y $t_3 = 0.75$ en la forma

$$w(x, y) = 1 + \rho(x, y, t_i).$$

Primero calculamos una malla adaptativa para $t = t_0$, para la cual requerimos 4 actualizaciones de los pesos $w(x, y)$, ver Figura 4.13(b). Para el siguiente paso del tiempo $t = t_1$, usamos la malla adaptativa previamente obtenida como malla inicial y luego de cuatro actualizaciones de los pesos obtuvimos una buena malla adaptativa, ver Figura 4.13(c).

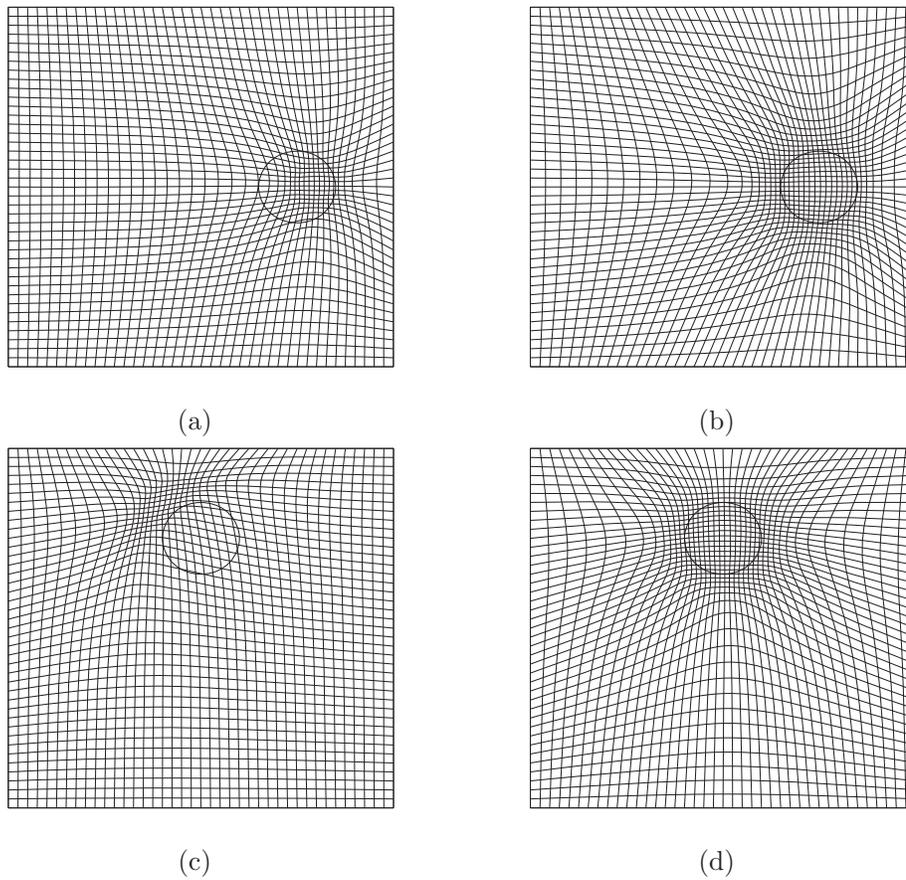


Figura 4.13: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.54) sobre un cuadrado. (a) tiempo $t = 0.0$, iteración 1, (b) tiempo $t = 0.0$, iteración 4, (c) tiempo $t = 0.25$, iteración 1, (d) tiempo $t = 0.25$, iteración 4.

Continuamos con esta idea de usar la malla previamente obtenida y para el siguiente paso del tiempo $t = t_2$ y luego de cuatro actualizaciones de los pesos obtuvimos una buena malla adaptativa, ver Figura 4.14(b). Para el último paso del tiempo, $t = t_3$ usamos la malla adaptativa previamente obtenida como malla inicial y luego de cuatro actualizaciones de los pesos obtuvimos una buena malla adaptativa, ver Figura 4.14(c).

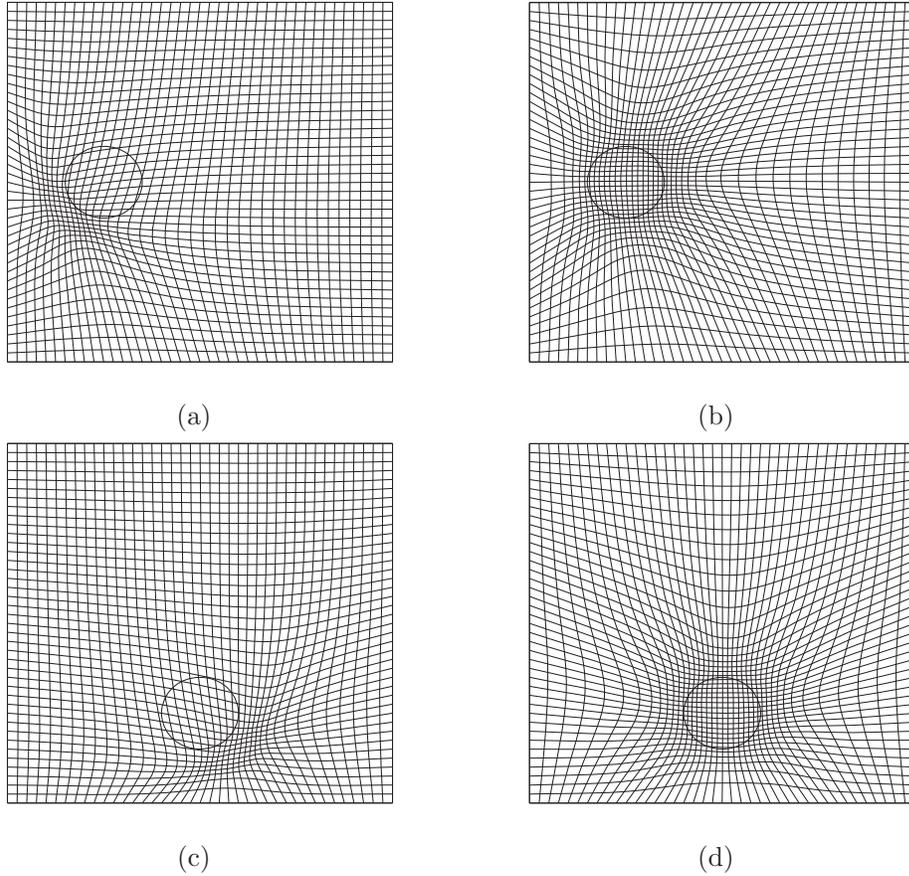


Figura 4.14: Mallas adaptativas de 41×41 usando la función monitor (4.54) sobre un cuadrado. (a) tiempo $t = 0.5$, iteración 1, (b) tiempo $t = 0.5$, iteración 4, (c) tiempo $t = 0.75$, iteración 1, (d) tiempo $t = 0.75$, iteración 4.

En los 5 ejemplos que hemos estudiado, la malla adaptativa se ha obtenido minimizando (4.46) el cual es una combinación lineal convexa entre el funcional convexo de área $S_{w,\epsilon}(G)$ y el funcional de longitud con un valor de $\sigma = 0.9$; esto se hace para que todo el peso de la adaptividad recaiga sobre el funcional de longitud siempre que garanticemos la ϵ -convexidad de la malla.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Para finalizar, en la Figura 4.15 mostramos algunas mallas adaptativas sobre regiones muy irregulares, estas mallas fueron obtenidas reescalando la región al cuadrado unitario y para la adaptividad usamos (4.49) como función monitor.

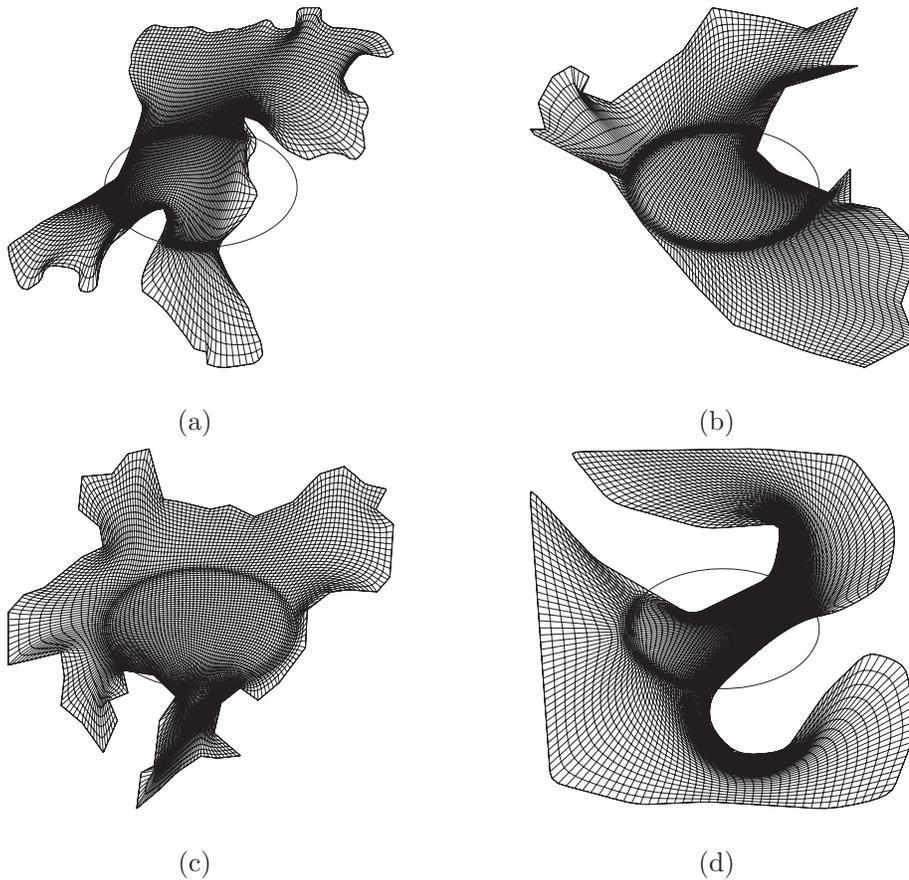


Figura 4.15: Mallas adaptativas de 81×81 usando la función monitor (4.49) sobre las regiones: (a) la habana (b) Perú (c) ucha, (d) pato.

Es aquí donde enfatizamos que es necesario combinar el funcional discreto ponderado con un funcional convexo de área $S_{\omega, \epsilon}(G)$, para garantizar que la malla adaptativa resultante sea ϵ -convexa. En estos ejemplos hemos usado una malla de 81×81 con muy buenos resultados. Hemos de señalar, que para la región de la habana probamos una malla de 41×41 y observamos que no se logró la convergencia del procedimiento de adaptividad, presumiblemente por las condiciones de ϵ -convexidad elegidas y la forma de la región.

4.8. Adaptividad geométrica basada en la distancia a un objeto

Una vez que hemos dado las bases para construir mallas adaptativas usando funcionales discretos, volvamos al primer problema planteado al inicio de este capítulo:

Problema 2 Consideremos una región poligonal $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ y un subconjunto Γ de manera que

$$\Gamma \subset \Omega,$$

nuestro interés es construir una malla ϵ -convexa que se adapte a la forma de Γ .

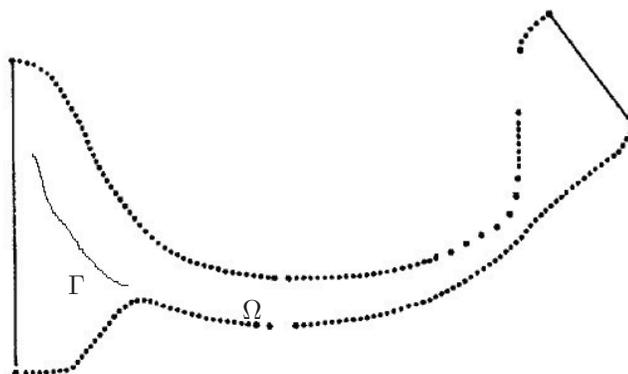


Figura 4.16: Región de estudio Ω y región interna Γ .

Para este tipo de problemas proponemos construir funciones de control basadas en el cálculo de la distancia de un punto al objeto. La distancia de un punto $P = (x, y)$ a Γ , la cual se define como

$$d(P, \Gamma) = \min_{Q \in \Gamma} d(P, Q) \quad (4.55)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ representa la distancia euclidiana.

El conjunto u objeto Γ puede representar:

1. o una región poligonal (abierta o cerrada)
2. un cúmulo de puntos (una colección finita, usualmente dispersa)

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

y desde luego, podemos usar una combinación de ellos para representar al objeto Γ . En cualquier caso, debemos resolver de manera eficiente el cálculo de la distancia al conjunto Γ (4.55).

Para el caso en que Γ representa una región poligonal, este problema de distancia involucra resolver el cálculo eficiente de la distancia de un punto a un segmento y usado adecuadamente podemos construir la distancia a cualquier poligonal.

Contando con la distancia de un punto a un objeto, proponemos una función de control de la forma

$$\varphi(P) = \frac{\alpha}{1 + c_a d(P, \Gamma)^2} \quad (4.56)$$

donde $c_a > 0$ se le conoce como el coeficiente de adaptividad el cual es un parámetro que se elige para controlar la densidad de adaptividad y $\alpha > 0$ es un parámetro de escala dependiente de la región de estudio.

En la Figura 4.17 se observa el comportamiento de la función (4.56) con respecto al coeficiente de adaptividad.

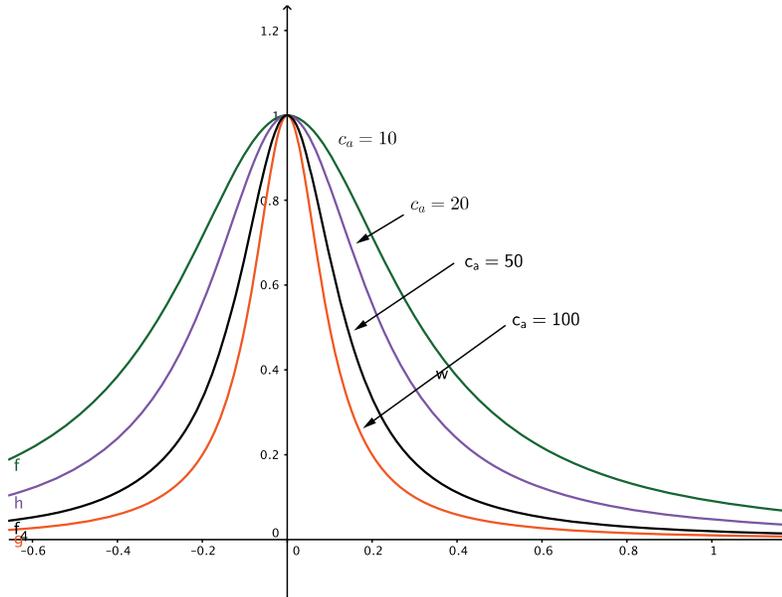


Figura 4.17: Forma geométrica de las funciones de control (4.56) para diferentes parámetros de densidad c_a y $\alpha = 1$.

Si la malla es fina, el costo de calcular (4.55) para cada punto de la malla puede ser alto. Nosotros sugerimos calcular la distancia del centroide $\mathbf{C}_{i,j}$ de la celda $c_{i,j}$ al objeto:

$$w(c_{i,j}) = 1 + \varphi(\mathbf{C}_{i,j})$$

4.8.1. Ejemplos

Ahora pasaremos a describir algunos problemas de adaptividad que hemos resuelto usando la función monitor (4.56) y en base a estos resultados daremos algunas ideas para usar la adaptividad geométrica dependiendo del problema a resolver.

Ejemplo 1: poligonal abierta

Consideremos una placa representada por una región poligonal Ω y una fisura en esta descrita por la poligonal abierta Γ como se aprecia en la Figura 4.16. La colección de puntos que están a igual distancia d de Γ son tubos que lo circundan a Γ .

Para construir una malla adaptativa, primero construimos una malla ϵ -convexa de 55×77 . Luego optimizamos (4.46) para el cual elegimos el funcional geométrico de longitud descrito en la Tabla 4.1. Aquí los pesos fueron calculados usando (4.56) para $\alpha = 10$ y $c_a = 1$. En la Figura 4.18 se aprecia la malla adaptativa obtenida y en Figura 4.19 se observa un acercamiento a la zona de adaptividad.



Figura 4.18: Una malla adaptativa alrededor de Γ usando la función de control o adaptividad (4.56) para $\alpha = 10$ y $c_a = 1$.

Continuaremos planteando diferentes ejemplos de adaptividad y en cada uno de ellos cambiaremos el factor de escalamiento α y el coeficiente de adaptividad c_a para entender su uso.

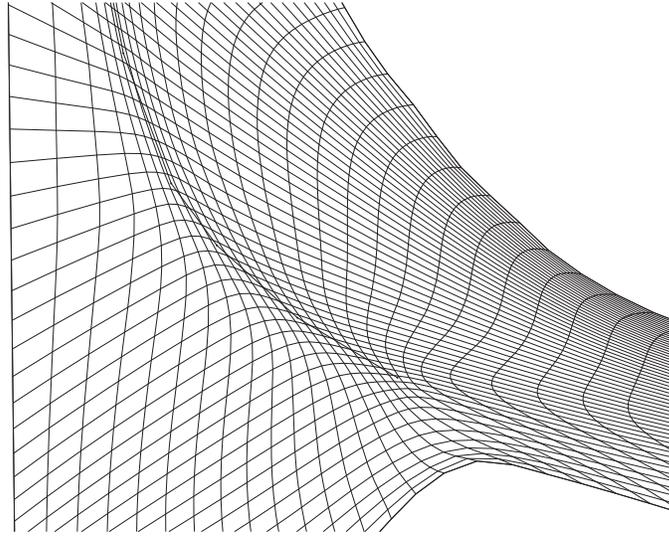


Figura 4.19: Un acercamiento a la zona de adaptividad.

Ejemplo 2: poligonal cerrada y el parámetro de densidad

Para el siguiente ejemplo consideremos por Ω al cuadrado unitario y Γ una región poligonal cerrada interna:

$$\Gamma = \text{Polígono}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_1)$$

donde

$$P_1(0.238095, 0.238095), P_2(0.714286, 0.238095), P_3(0.714286, 0.714286) \\ P_4(0.238095, 0.714286), P_5(0.357143, 0.357143)$$

Nuestro interés es que la malla se adapte alrededor de la poligonal Γ . Este ejemplo nos será de gran utilidad para ilustrar el uso del parámetro de adaptividad c_a .

La teoría nos garantiza que obtendremos una malla ϵ -convexa adaptativa resolviendo el problema de optimización (4.46) para un valor $\omega > 1$ suficientemente grande, pero para facilitar el procedimiento de adaptividad es recomendable iniciar el proceso adaptativo con una malla ϵ -convexa.

Para este ejemplo usaremos la función de pesos

$$w(i, j) = 1 + \frac{1}{0.1 + c_a d(P_{i,j}, \Gamma)^2} \quad (4.57)$$

En la Figura 4.20 se observa la adaptividad alrededor de la poligonal Γ .

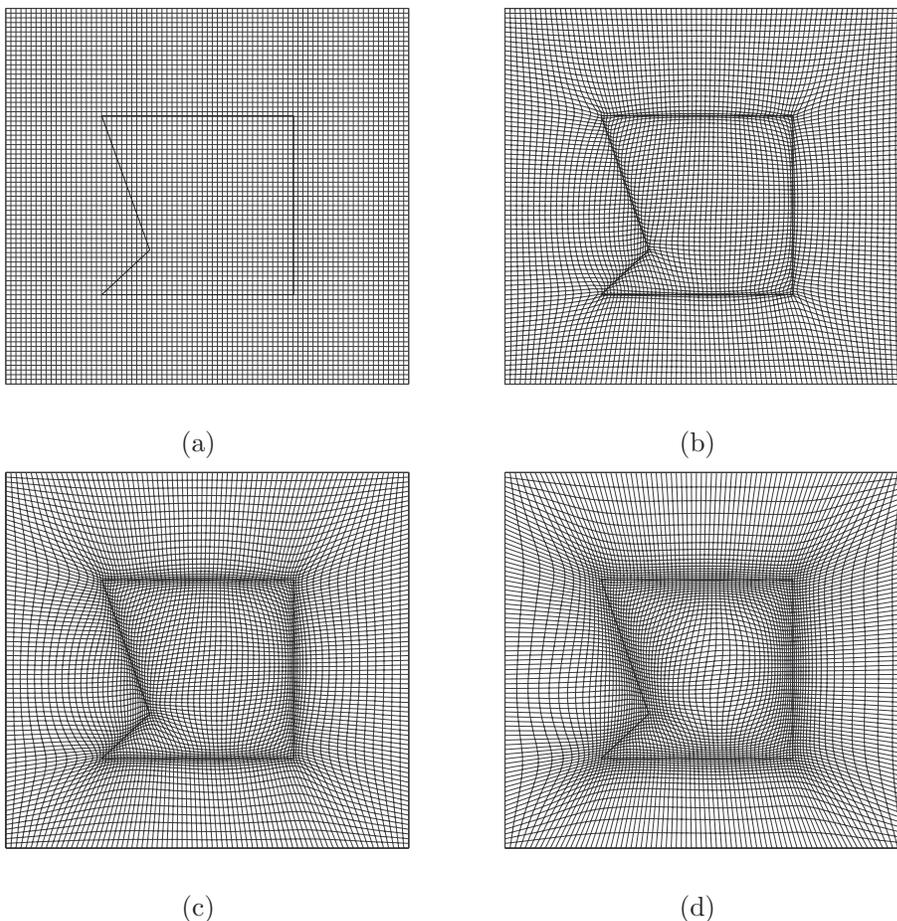


Figura 4.20: Mallas adaptativas de 81×81 usando la función monitor (4.57) sobre: (a) malla inicial (b) adaptividad usando $c_a = 1$ (c) adaptividad usando $c_a = 0.1$, (d) adaptividad usando $c_a = 0.01$.

Este ejemplo ilustra que el parámetro de densidad c_a debe ser calibrado en cada problema, para un valor más pequeño la concentración o densidad de los elementos es mayor alrededor del objeto Γ e inversamente proporcional si la celda está lejos del objeto.

Ejemplo 3: densidad a distancia constante

En algunos problemas de flujo es muy útil que la malla se adapte a distancia constante de un objeto Γ en el interior de Ω . Para este caso, se dice que Γ es un agujero o una isla. Para ilustrar este problema, usaremos de nuevo el cuadrado unitario y como obstáculo usaremos la poligonal Γ del ejercicio anterior.

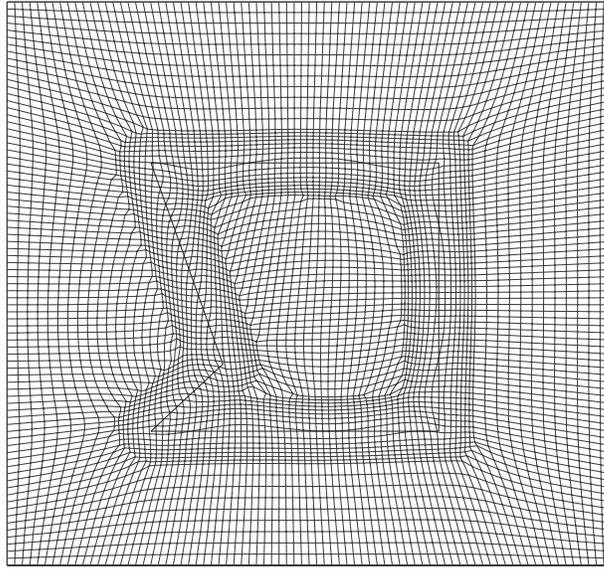
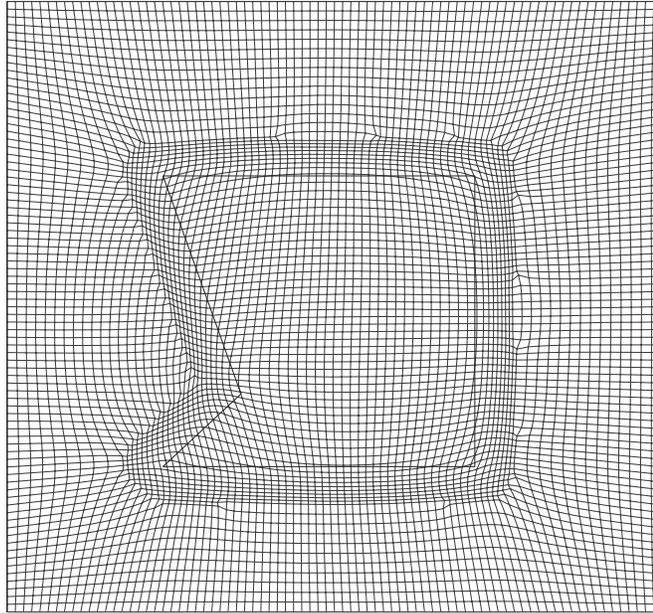


Figura 4.21: Las celdas se han concentrado en una franja a distancia constante de Γ .

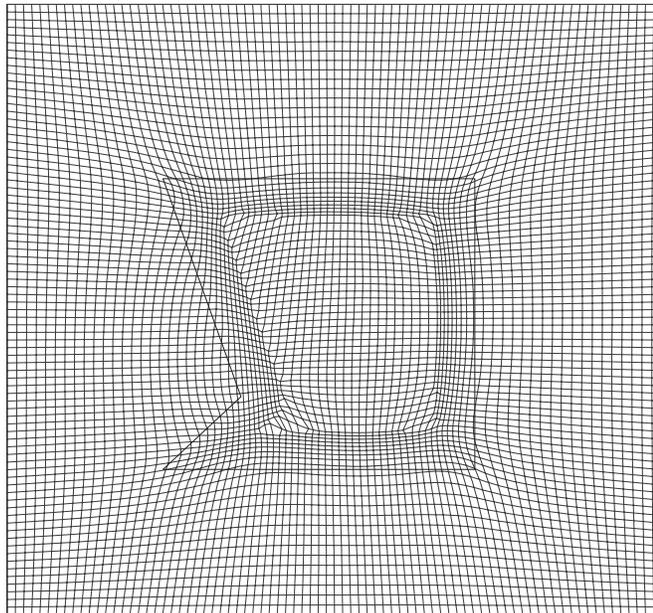
Para lograr esto, hemos truncado la función de adaptividad por una constante a distancia fija de Γ .

Para abordar este problema usaremos distancias dirigidas para de esta forma identificar si nos encontramos dentro o fuera de la región de interés, y mediante una función de densidad como la mostrada en (4.56) podemos concentrar las celdas alrededor de la región interna.

Ahora, si usamos distancias dirigidas, podemos adaptar la malla al exterior del obstáculo Γ o por el contrario, exclusivamente en el interior. En la Figura 4.22 se ilustran estas ideas.



(a)



(b)

Figura 4.22: (a) malla adaptiva en una franja al exterior Γ (b) adaptividad en una franja al interior de Γ .

Ejemplo 3: cúmulo de puntos

En algunas aplicaciones se requiere ajustar la malla a un cúmulo o colección de puntos. Estos puntos pueden representar los pozos de un yacimiento y el interés en ajustar la malla a los pozos para modelar adecuadamente la presión de las fuentes o sumideros del flujo.

El ejemplo que presentamos es simple, usaremos de nueva cuenta Ω como el cuadrado unitario pero ahora Γ representa a una colección de puntos aislados. Nuestro interés es construir una malla que se adapte a esos puntos. Usaremos los puntos del ejemplo 2:

$$\Gamma = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

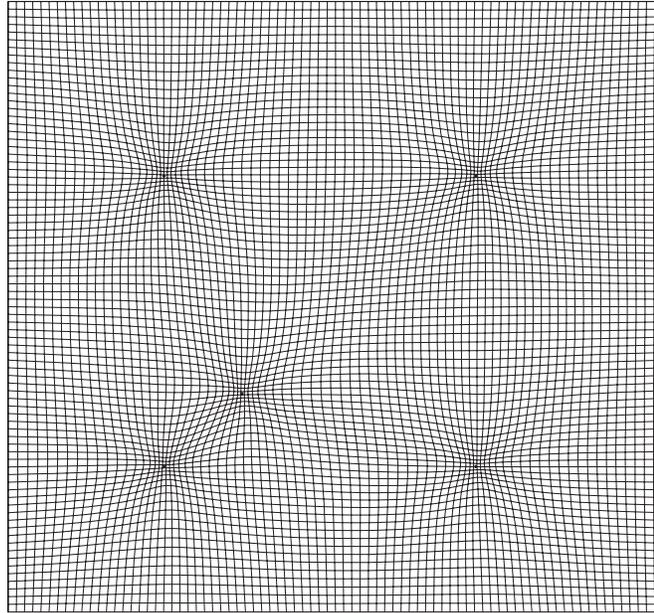
con

$$P_1(0.238095, 0.238095), P_2(0.714286, 0.238095), P_3(0.714286, 0.714286) \\ P_4(0.238095, 0.714286), P_5(0.357143, 0.357143).$$

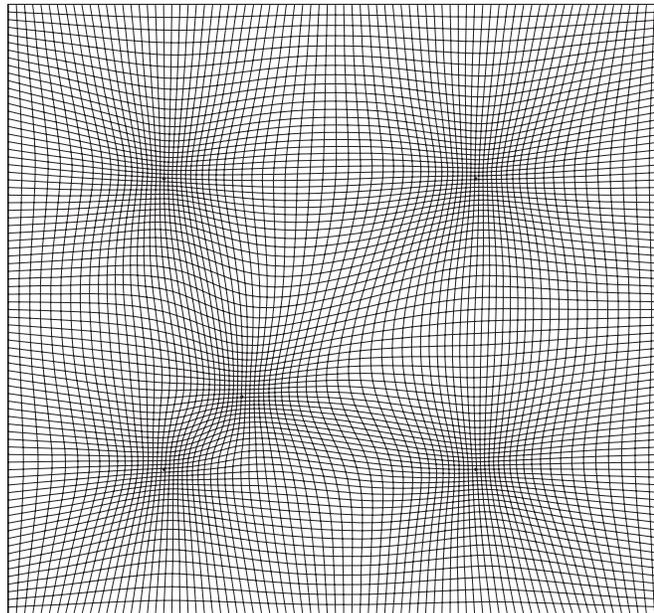
Para este ejemplo usaremos la función de pesos

$$w(i, j) = 1 + \frac{1}{0.1 + c_{ad}(P_{i,j}, \Gamma)^2}$$

y resolveremos el problema de optimización (4.46) con $\sigma = 0.9$. Las mallas adaptativas se observan en la Figura 4.23.



(a)



(b)

Figura 4.23: Con el parámetro de escala $\alpha = 10$ obtuvimos dos mallas adaptativas: (a) usando $c_a = 1$ y (b) usando $c_a = 0.1$.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Otra forma para construir una función de control usando la distancia a un objeto es mediante una función gaussiana de la forma

$$w(i, j) = 1 + \alpha \exp(-c_a d(P, \Gamma)^2) \quad (4.58)$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro de escala y $c_a > 0$ es un parámetro de densidad.

En la Figura 4.24 se muestra la forma de estas funciones para diferentes valores del parámetro de densidad c_a .

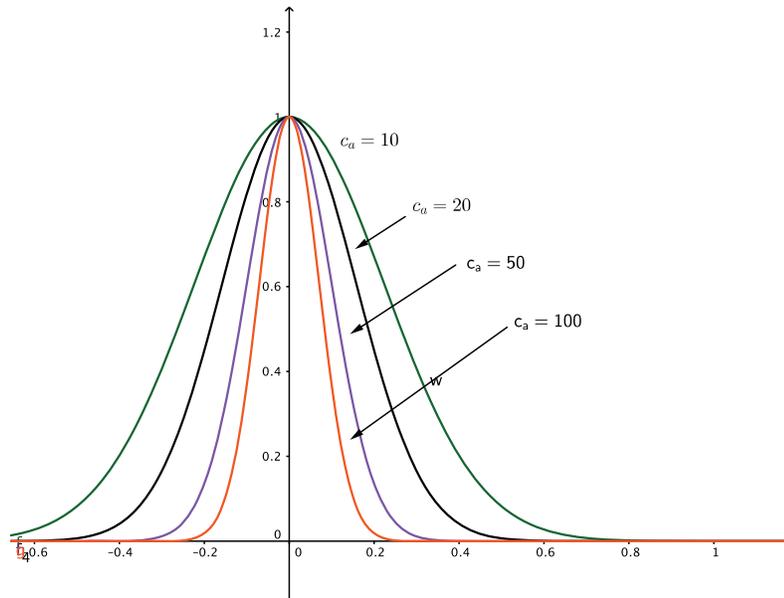
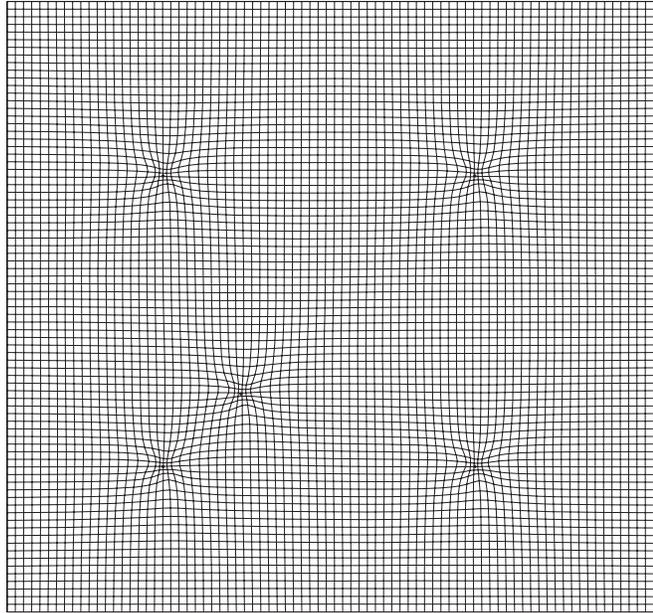
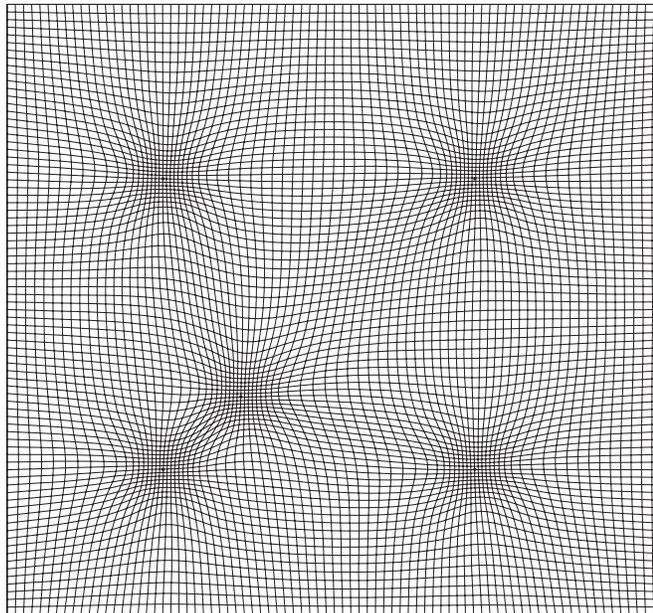


Figura 4.24: Forma geométrica de las funciones de control (4.58) para diferentes parámetros de densidad c_a y $\alpha = 1$.

Para el problema de adaptividad en un cúmulo de puntos hemos probado los pesos (4.58) con muy buenos resultados. En la Figura 4.25 se observan las mallas adaptativas obtenidas para dos valores de c_a .



(a)



(b)

Figura 4.25: Con el parámetro de escala $\alpha = 10$ obtuvimos dos mallas adaptivas:(a) usando $c_a = 1$ y (b) usando $c_a = 0.1$.

Ejemplo 4: adaptividad geométrica sobre curvas

Si para una curva \mathcal{C} en el plano le asociamos una colección de mp puntos que la aproximen adecuadamente, podemos usar la poligonal Γ para construir mallas adaptativas usando una función de control basada en distancias.

En los ejemplos que mostramos hemos usado las 4 curvas de la sección previa

- 1) elipse: $4(2x - 1)^2 + 9(2x - 1)^2 - 1 = 0$
- 2) parábola: $(2y - 1) - (2x - 1)^2 + 0.5 = 0$
- 3) circunferencia: $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 0.25^2 = 0$
- 4) seno: $y - 0.5 - 0.25 \sin(2\pi x)^2 = 0$

y para cada una de ellas construimos poligonales de 90 puntos para representar una aproximación de cada una de ellas.

Para cada uno de los ejemplos que presentamos usamos como funciones de peso a

$$w(i, j) = 1 + \frac{10}{1 + d(P_{i,j}, \Gamma)^2} = 1 + \frac{1}{0.1 + 0.1d(P_{i,j}, \Gamma)^2} \quad (4.59)$$

donde $P_{i,j}$ es el centroide de la celda $c_{i,j}$; y hemos usado el mismo proceso iterativo de adaptividad que consiste en resolver el problema de optimización (4.46) y actualizar los pesos $w(i, j)$ y volver a resolver (4.46). En todos estos ejemplos solamente fueron necesarias entre cuatro y seis actualizaciones de los pesos $w(i, j)$.

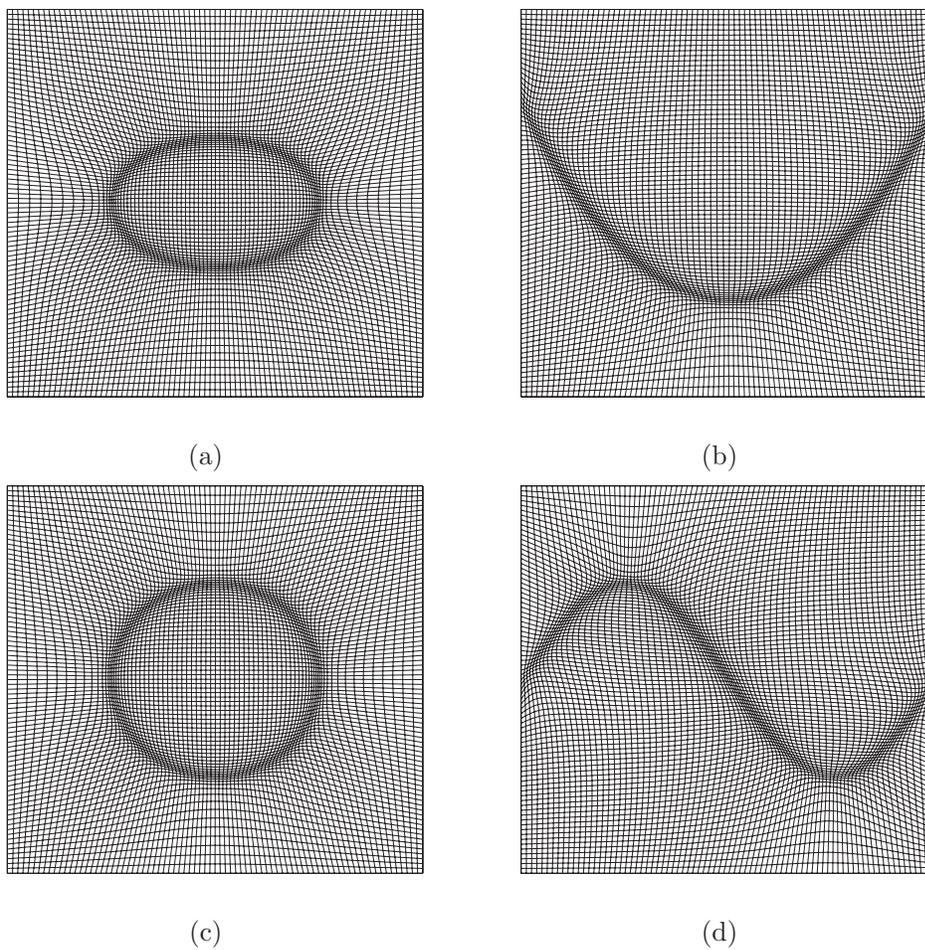


Figura 4.26: Mallas adaptativas de 81×81 sobre un cuadrado unitario usando los pesos (4.59) sobre: (a) $\Gamma =$ elipse (b) $\Gamma =$ parábola (c) $\Gamma =$ circunferencia, (d) $\Gamma =$ función seno.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Sobre regiones irregulares hemos observado que con 10 actualizaciones es suficientes para obtener una buena adaptividad. En los siguientes ejemplos hemos una aproximación a la primera curva elipse.

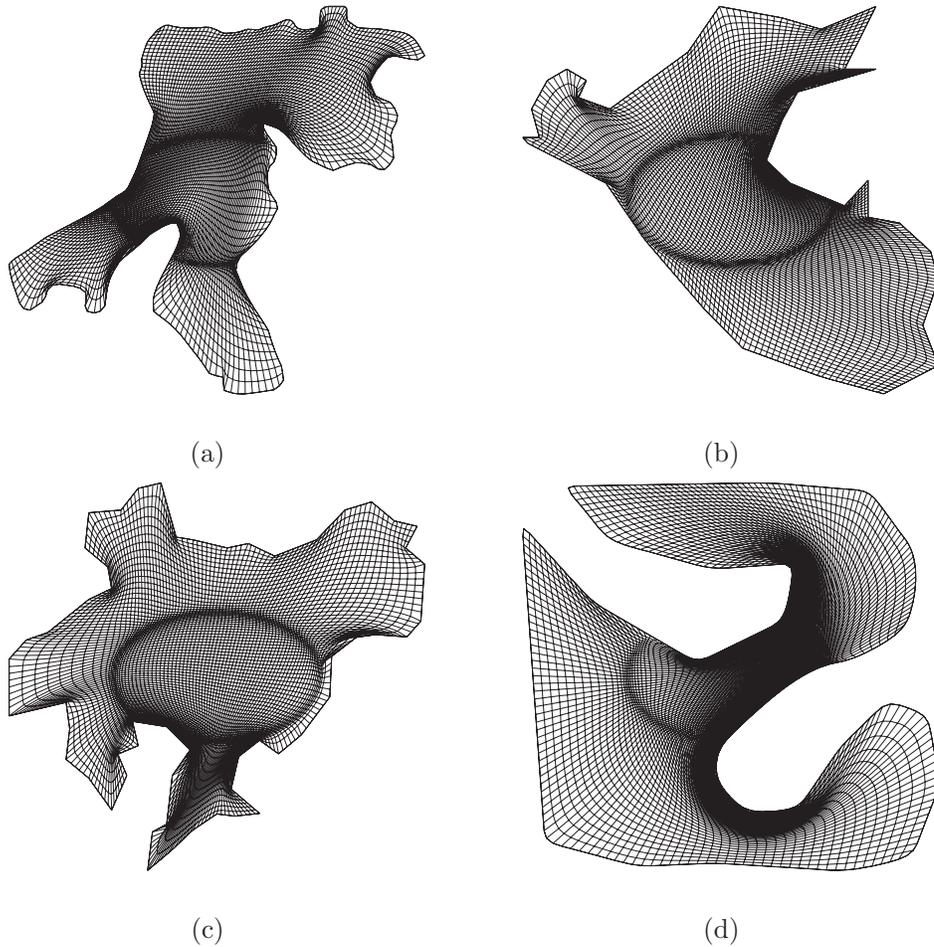


Figura 4.27: Mallas adaptativas de 81×81 usando usando los pesos (4.59) donde $\Gamma =$ elipse y sobre las regiones irregulares: (a) la habana (b) peru (c) ucha, (d) pato.

En estos ejemplos hemos usado una malla de 81×81 con muy buenos resultados de convergencia del procedimiento de adaptividad. De nueva cuenta, señalamos que para la región de la habana usando una malla de 41 no se logró la convergencia del procedimiento de adaptividad, presumiblemente por las condiciones de ϵ -convexidad elegidas, la distribución de los nodos en la frontera y la forma de la región.

Ejemplo 4: adaptividad hacia la frontera de la región de estudio

Continuando con la idea del problema anterior, ahora nos interesa que las líneas de adapten a la frontera de la región. Esto lo haremos de una forma muy simple, la poligonal Γ es la frontera de región de estudio, dicho de otra forma $\Gamma = \Omega$ y usaremos la función monitor (4.56) basada en distancias.

Describamos un ejemplo particular. Usemos como región de estudio al estrecho de Gibraltar que se localiza entre la península de España y la costa de Marruecos.

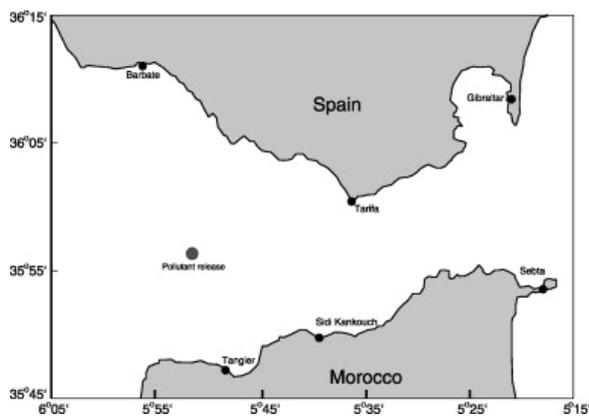


Figura 4.28: Mapa del estrecho de Gibraltar.

De nueva cuenta usamos en procedimiento previamente descrito para la adaptividad geométrica en este caso obtuvimos una suave ϵ -convexa de 77×170 usando la función de control (4.56) para $c_a = 0.1$. En la Figura 4.29 se aprecia la malla adaptativa.

La adaptividad por distancias que estamos proponiendo también se puede realizar por capas de la malla con la finalidad no alterar toda la malla sino solamente en zonas predeterminadas. Tal es el caso de la malla adaptativa obtenida en la Figura 4.30 en la cual para las 10 primeras capas de celdas de la malla usamos la función monitor (4.56).

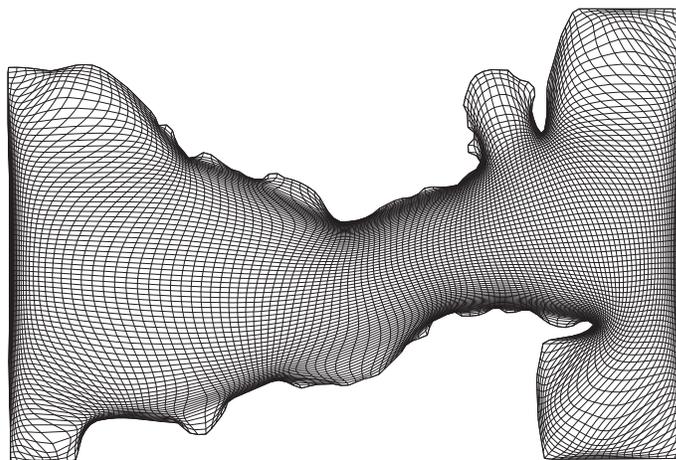


Figura 4.29: Una malla adaptativa a la fronteras del estrecho de Gibraltar

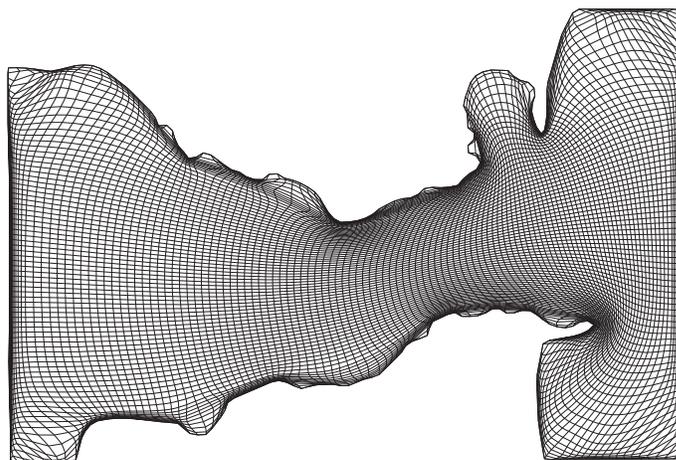


Figura 4.30: Una malla adaptativa por capas cercanas a la frontera del estrecho de Gibraltar

Para finalizar, mostraremos la malla adaptativa que obtuvimos sobre esta misma región usando un peso fijo para las 10 primeras capas de celdas cercanas a la frontera de la región.

$$w(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 10 \leq i \leq m - 10, \quad 10 \leq j \leq n - 10 \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.60)$$

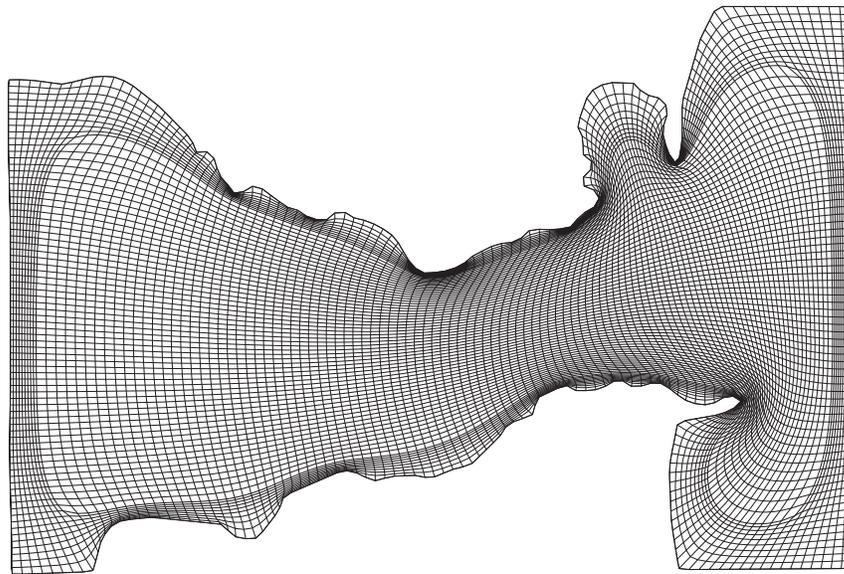


Figura 4.31: Una malla adaptativa usando un peso fijo en las capas cercanas a la frontera del estrecho de Gibraltar

Como es de apreciar, dependiendo del problema a resolver deberemos usar una u otra técnica o metodología y en cada caso, debemos calibrar la función de adaptabilidad.

Ejemplo 5: control de la ortogonalidad cerca de frontera de la región de estudio

En algunas aplicaciones es necesario que las celdas cerca de la frontera sean lo más ortogonales posible. Nosotros hemos construido mallas con esta propiedades usando el funcional $S_{\omega,\epsilon}(G)$ con el funcional de ortogonalidad

$$f_o = (\mathbf{a}^t \mathbf{b})^2$$

y con el funcional de área-ortogonalidad

$$f_{ao}(Q) = (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2)(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2).$$

Una malla con estas características se muestra en la Figura 4.32.

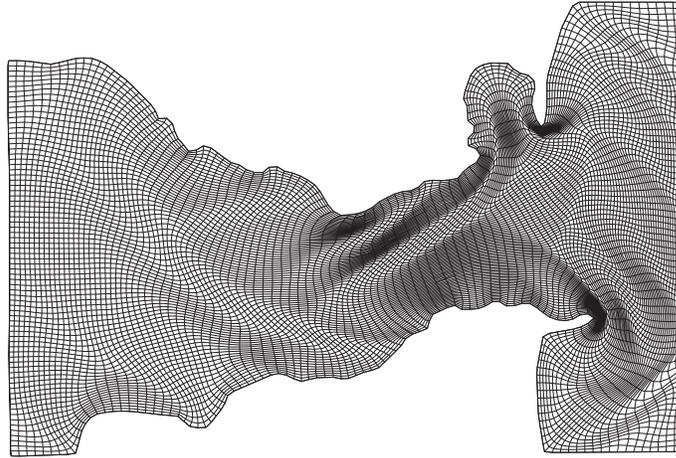


Figura 4.32: El embalse superior de Arkansas obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_o(G)$, para $\sigma = 0.5$.

Sin embargo, como se observa, algunas celdas cercanas a la frontera están muy distorsionadas y lejos de su forma esperada, no son ortogonales, observe la Figura 4.33.

Nuestro interés es que las celdas cercanas a la frontera de la región $\partial\Omega$ sean lo más ortogonales posible. Para resolver esto, usaremos la misma elección de pesos (4.60) que usamos en el ejercicio anterior.

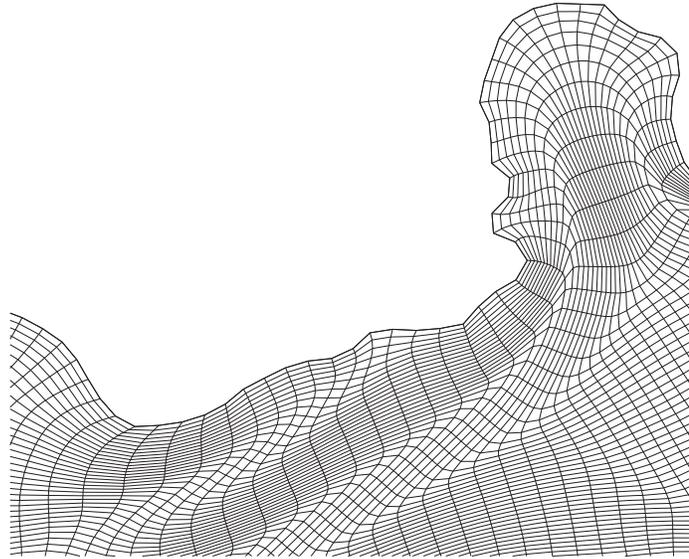


Figura 4.33: Detalle cercano a la frontera de la malla de la figura 4.32.

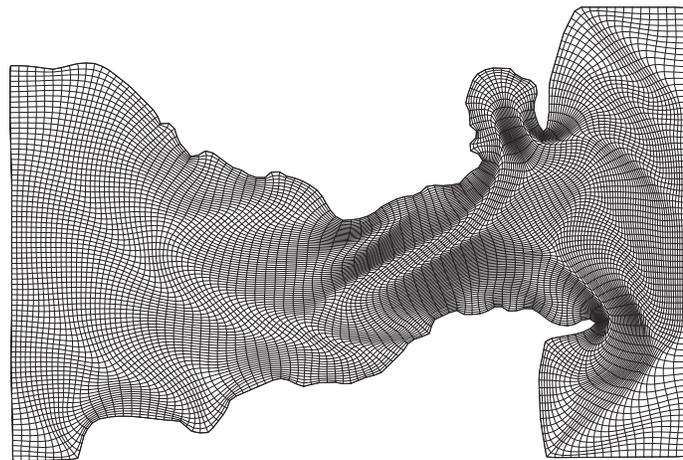


Figura 4.34: Malla adaptativa ponderando el funcional de ortogonalidad con la elección de pesos (4.60).

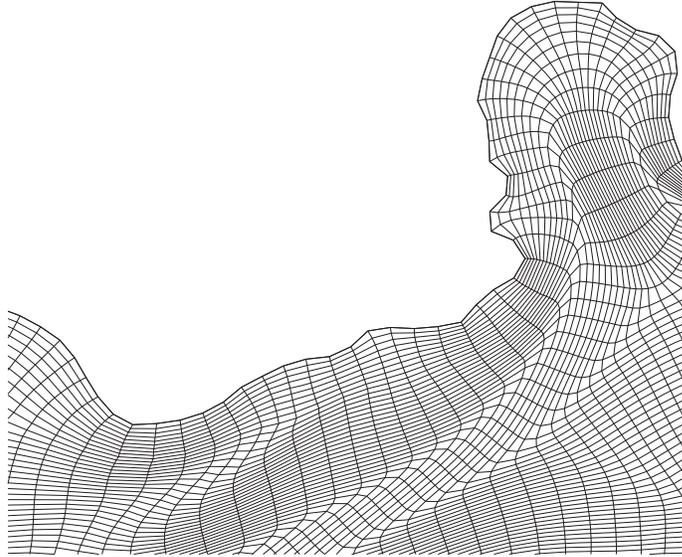


Figura 4.35: Detalle cercano a la frontera de la malla de la figura 4.34.

Observe el detalle de la malla representado en la Figura 4.34. Con esta elección de pesos hemos controlado la ortogonalidad de los elementos en la cercanía de la frontera de la región sin alterar las propiedades globales de la malla hacia el interior de la región.

En los anteriores ejemplos hemos mostrado una forma de usar los funcionales ponderados para adaptar la malla en regiones o subregiones interiores de Ω usando distancias. En la siguiente sección, revisaremos esta forma de adaptividad basada en construir los pesos $w(i, j)$ constantes formando un patrón o malla de referencia.

4.9. Una forma de construir mallas adaptativas usando una malla de referencia

La generación numérica de mallas adaptativas está asociada con el hecho de que las líneas cuenten con un determinado espaciado, o bien que los elementos se aproximen, en nuestro caso, al objeto o a la curva sobre el cual deseamos que se adapte la malla. Para lograr esto, algunos investigadores definen un espacio de referencia sobre el cual diseñar funciones de control. Nakamura fue uno de los primeros investigadores que desarrollaron en 1981 y 1982 [237, 238] el concepto de malla de referencia. En esos artículos propone adaptar una malla mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parabólicas usando para esto funciones de control definidas sobre un espacio de referencia adicional.

En 1986 Steinberg y Roache [299] proponen construir mallas adaptativas por métodos variacionales usando una composición de medidas geométricas. Para esto, definen un espacio de referencia sobre el cual construyen una malla de referencia sobre una región simple (un cuadrado) e imponen que las propiedades de espaciamiento entre las líneas de la malla de referencia se vean reflejados en la malla física, véase la Figura 4.36.

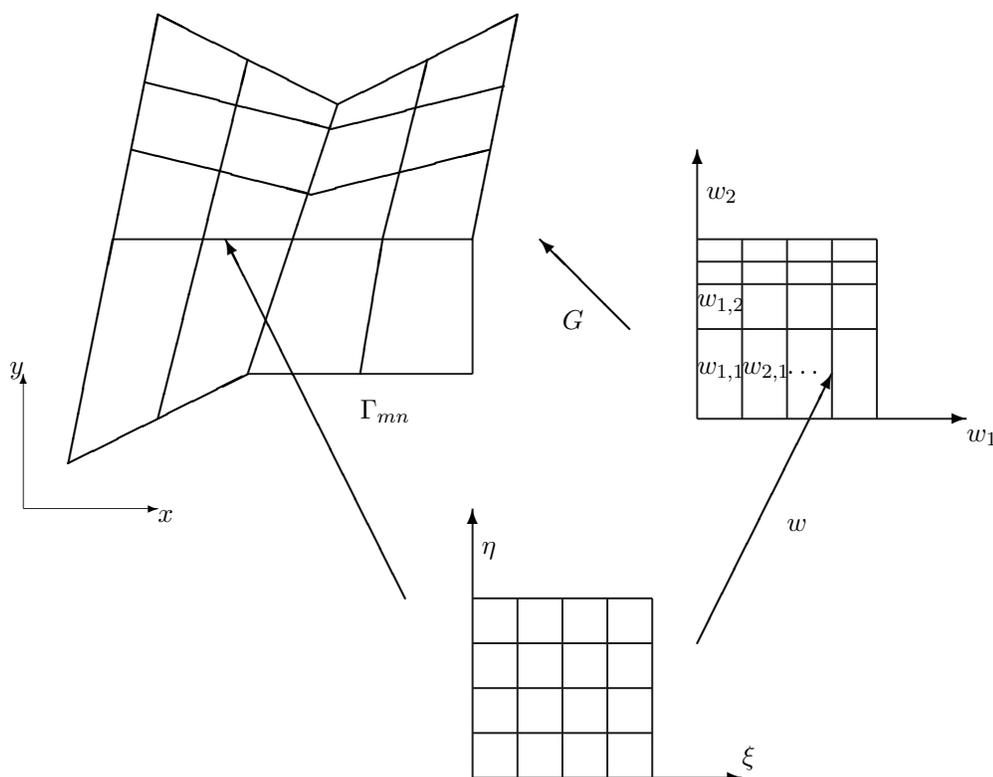


Figura 4.36: Malla física, malla lógica y malla de referencia.

En consonancia con el trabajo de Steinberg y Roache [299], en 1991, Castillo [69] construye mallas adaptativas usando funcionales discretos ponderados. Los pesos los construye usando una función definida sobre los nodos de la malla física. Esa colección de pesos sobre los nodos

$$w_{i,j} = U(x_{i,j}, y_{i,j})$$

donde $U(x, y)$ es una función positiva sobre el espacio físico se le conoce como malla de referencia. Castillo [69] observa que la distribución de los nodos de la malla adaptativa son consistentes con la malla de referencia. Los pesos pueden cambiar en cada iteración o pueden estar fijos.

Siguiendo la formulación (4.44) para construir mallas adaptativas, los pesos están

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

asociados a cada celda, por lo que para nosotros, la colección de pesos $w_{i,j}$ puede ser vista como elementos de una matriz o malla auxiliar o de referencia cuyos valores pueden ser considerados en un dominio de parámetros.

Con lo anterior, los pesos asociados a las celdas se encuentran en un espacio de parámetros

$$w_{i,j} = w_{i,j}(B_{i,j}), \quad i = 1, m - 1, j = 1, n - 1$$

aquí $B_{i,j}$ es una malla no uniforme en el espacio de parámetros. Con lo cual, los funcionales ponderados los reescribimos como

$$F_c(G) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} w_{ij}(B_{ij}) f_c(c_{ij})$$

donde $w_{ij}(B_{ij})$ son valores de una función positiva definida sobre una malla sobre el espacio lógico. Para nosotros la malla de referencia es la colección de pesos cada uno asociado a cada celda, ver la Figura 4.36.

Los pesos serán de utilidad para contar un mayor o menor incidencia de la propiedad geométrica f_c sobre cada celda $c_{i,j}$. En los siguientes ejemplos vamos a considerar que los pesos son positivos y que están escalados en la forma

$$0 < w_{i,j} \leq 1$$

las celdas $c_{i,j}$ con la propiedad se concentran en zonas donde los pesos $w_{i,j} \approx 1$, y en la zonas para las cuales el valor de los pesos es cercano a ser mín $w_{i,j}$ la propiedad f_c será uniforme.

4.9.1. Ejemplos

Describamos una colección de ejemplos para mostrar la utilidad de la adaptividad mediante usando una malla de referencia con pesos prefijados.

Ejemplo 1: patrón de referencia

El primer ejemplo consiste en replicar un patrón de referencia sobre toda una malla. Para ejemplificar esto, se tiene un mosaico o detalle de tapiz como se muestra en la Figura 4.37(a) y nuestro interés es llenar ese patrón sobre un espacio rectangular como lo sería el piso de una casa. La malla de referencia se construye sobre una matriz de dimensión pequeña a la cual le asignamos valores 0.2 y 1.0 como se muestra en la Figura 4.37(b).

Para este ejemplo, hemos asignado el valor $w_{i,j} = 1.0$ sobre el detalle a resaltar del mosaico: las líneas que describen los rombos y las líneas que los separa, véase Figura 4.37(a) y la matriz de valores Figura 4.37(b).

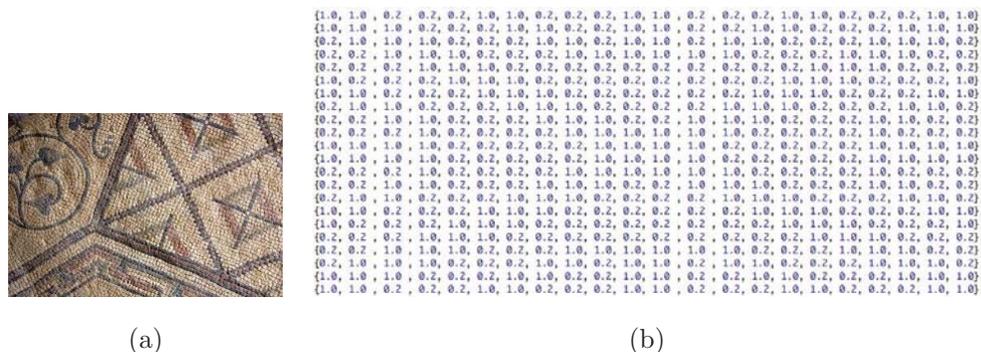


Figura 4.37: (a) Detalle de un mosaico (b) malla de referencia asociada al mosaico.

La matriz de valores Figura 4.37(b) la replicamos a lo largo de una matriz de celdas embonando adecuadamente los pesos. La matriz de valores es de 22×22 , la replicamos 4 veces para cubrir una nueva matriz de pesos $w_{i,j}$ de 87×87 . Con esta matriz de pesos vamos a construir una malla adaptativa de 88×88 resolviendo el problema de optimización (4.46) usando el funcional de longitud. La malla adaptativa obtenida es un tapiz o tapete que observa en la Figura 4.37.

Este ejemplo es muy interesante para entender lo siguiente: nosotros hemos ponderado el funcional de longitud, para que las celdas sean flexibles y se ajusten a las zonas de interés. Pero si ahora ponderamos el área de las celdas solamente, también obtendremos una malla adaptativa representando al tapete, esta se observa en la Figura 4.39.

Sin embargo, las líneas no se ajustan a la forma ya que la adaptividad de esta forma hace que las celdas con peso grande traten de ser más grandes que para un peso

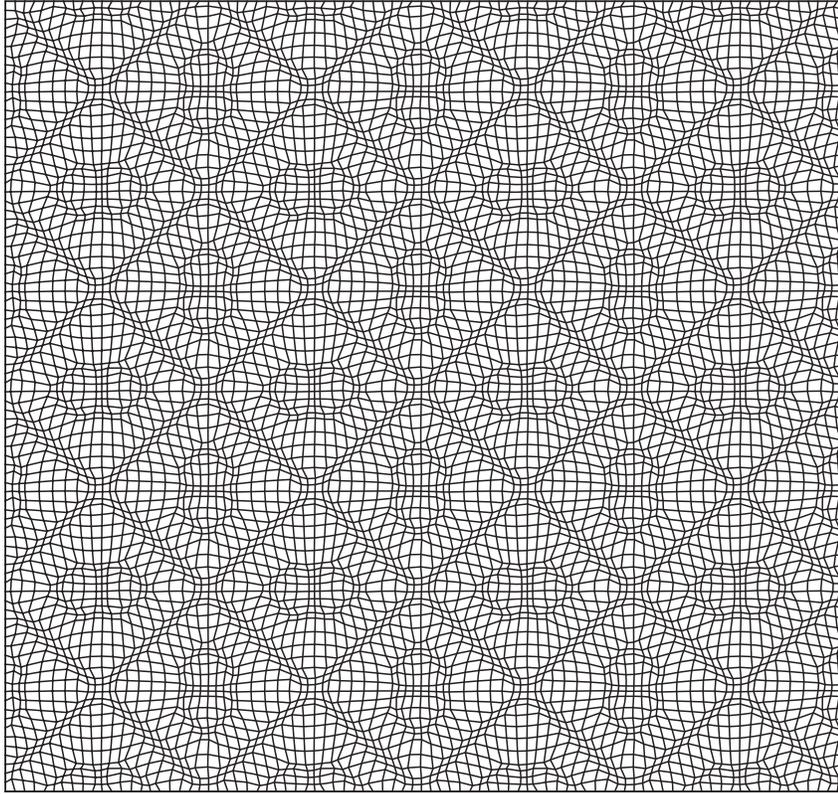


Figura 4.38: Malla adaptiva de 88×88 que describe un tapete.

pequeño. Para lograr lo contrario: que las celdas sean pequeñas en la zona que deseamos adaptar, debemos usar una matriz de complementos, donde sea grande que sea pequeña y viceversa, para esto intercambiamos los valores de la malla de referencia. La malla adaptativa de la Figura 4.41 se ajusta a la forma deseada.

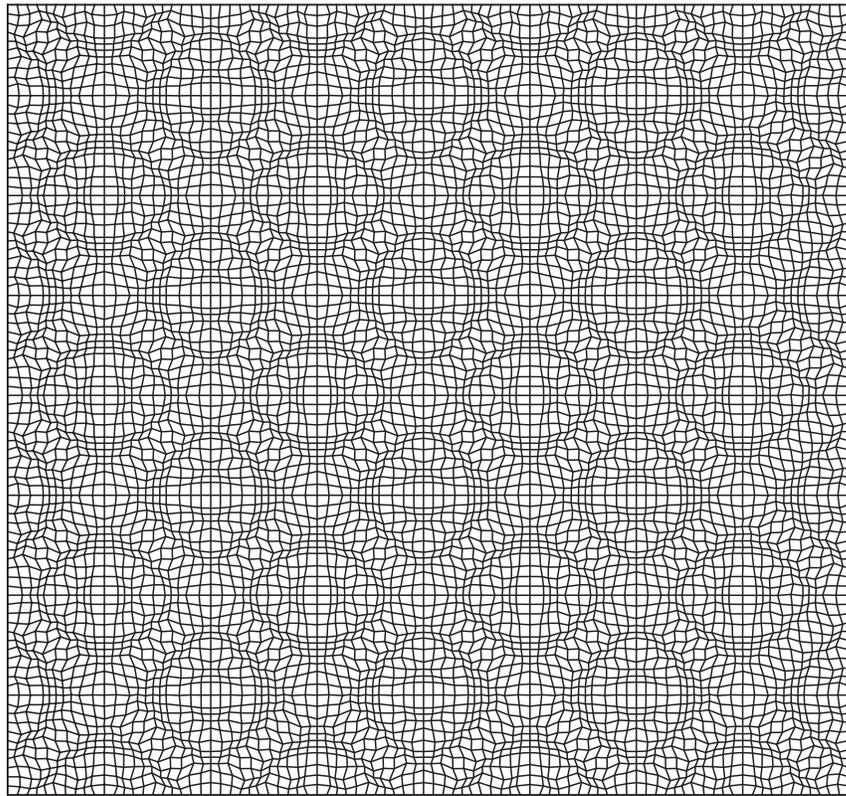


Figura 4.39: Malla adaptiva de 88×88 que representa un tapete, usando el funcional ponderando el área.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

```

{.20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20}
{.20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20}
{1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, .20, .20, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0}
{1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0}
{1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20}
{.20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20}
{1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20}
{1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0}
{1.0, 1.0, 1.0, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, 1.0, 1.0}
{.20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20}
{.20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20}
{1.0, 1.0, 1.0, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, 1.0, 1.0, 1.0}
{1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0}
{.20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20}
{.20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20}
{1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0}
{1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0}
{1.0, .20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, .20, .20, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20, 1.0}
{.20, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, .20}
{.20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20, 1.0, 1.0, 1.0, .20, .20}

```

Figura 4.40: Malla de referencia con valores intercambiados con respecto a la Figura 4.37(b).

Observe que al usar el funcional de área ponderado, hemos perdido la suavidad de las líneas curvilíneas y las zonas de ajuste las celdas son casi rombos. Esto se debe a que los elementos óptimos del funcional de área son paralelogramos, siendo el rombo es uno de tales elementos. En el siguiente capítulo ampliaremos esta observación sobre la forma geométrica de los elementos de la malla.

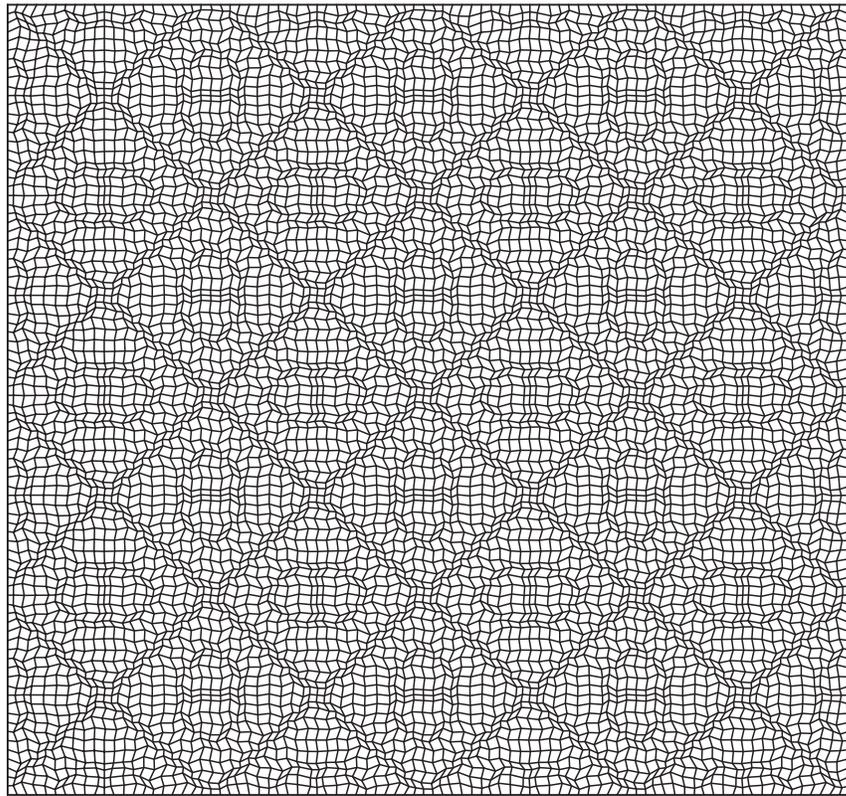


Figura 4.41: Malla adaptiva de 88×88 que representa un tapete, usando el funcional ponderando el área y la malla de referencia, Figura 4.40.

Ejemplo 2: pixeles de una imagen

Los modelos de color son los estándares para la representación de los colores. Las imágenes digitales, las impresiones, las pinturas, etc., se rigen por un modelo de color. Los tres más usados son los llamados RGB (red-green-blue), CMYK (cyan, magenta, yellow y key) y el *small* RGB, o sRGB. El modelo RGB está formado por los tres componentes de colores primarios aditivos y como mínimo un componente de sincronismo. Los componentes de color son las señales rojo, verde y azul; siendo transmitidos cada uno independiente y aislado del resto, véase [331]. El modelo CMYK se basa en la absorción de la luz en el cual, el color que presenta un objeto corresponde a la parte de la luz que incide sobre éste y que no es absorbida por el objeto [332]. En términos prácticos este modelo se basa en la mezcla de pigmentos.

El modelo RGB asigna un valor de intensidad a cada píxel que oscila entre 0 (negro) y 255 (blanco) para cada uno de los componentes RGB de una imagen en color.

Para nosotros, una imagen en el modelo RGB es una colección de tres matrices de pixeles cuyos elementos oscilan entre 0 y 255 representando la intensidad del color. Por ejemplo, un pixel de color azul podría tener un valor B de 250, un valor G de 30 y un valor R de 10.

Nuestro interés es usar las intensidades de los pixeles como funciones de peso para la adaptividad. Lo primero que haremos con una imagen en modelo de color RGB será convertirlo a escala de grises. Para esto, lo usual es realizar promedio baricéntrico de los tres canales del modelo RGB en la forma

$$GS(i, j) = 0.2989 * R(i, j) + 0.5870(i, j) * G(i, j) + 0.1140 * B(i, j) \quad (4.61)$$

ese promedio se conoce como *luminosity method*, véase [331]. Ahora escalemos esos valores a $[0, 1]$ para eso simplemente hagamos $GS(i, j) = GS(i, j)/255$. La matriz ya se encuentra en escala de grises normalizado.

Una imagen en escala de grises se describe primordialmente por el color negro o los pixeles cercanos a 0. Para usar directamente la matriz en escala de grises de pixeles como pesos en el funcional ponderado (4.46) debemos *invertir* las intensidades de los pixeles, para esto haremos

$$gs(i, j) = 1 - GS(i, j)$$

Con esto, las intensidades oscuras tendrán un valor cercano a 1. A partir de ahora, consideraremos que $g = g(i, j)$ es una matriz de valores de las intensidades en escala de grises ya invertidos.

Una vez realizado esto, vamos a escalar esos valores a $[0, 1]$ como pesos para la adaptividad discreta. Sin embargo, por lo señalado en el inicio de la sección, no debemos usar el valor 0 como peso en el problema de optimización (4.46) ya que podríamos obtener dificultades numéricas de convergencia en la adaptividad.

En este trabajo y con base a la experiencia obtenida en los ejemplos anteriores, usaremos la matriz de pesos para la adaptabilidad en la forma

$$w(i, j) = 1 + \alpha g_s(i, j). \quad (4.62)$$

El valor constante nos será útil para la uniformidad de las celdas donde los pixeles sean cercanos a cero y $\alpha > 0$ es un parámetro de escala. El uso de la expresión (4.62) nos permitirá obtener elementos suaves o uniformes ahí donde los valores $g(i, j)$ estén cercanos a cero. Dicho de otra forma la malla será uniforme en forma ahí donde el color de la imagen original esté cercano a ser blanco.

En los ejemplos que discutiremos, mostraremos el uso de estas ideas y elección de pesos que proponemos en diferentes imágenes. Interpretaremos los resultados y daremos algunas ideas de uso de la escala de grises de una imagen como malla de referencia para una malla adaptativa.

Una de las imágenes más simples es aquella representada por uno sólo de los canales RGB, por ejemplo, la imagen en el canal B del escudo de la UADY, el cual se aprecia en la Figura 4.42.



Figura 4.42: Imagen en el canal B del escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán).

Usando los valores invertidos de esta canal en escala de grises y usando los pesos de adaptabilidad (4.62) para $\alpha = 1$, obtuvimos la malla adaptativa que se observa en la Figura 4.43.



Figura 4.43: Malla adaptativa de 357×300 al escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán), usando el funcional de longitud ponderada.

Ahora usando los valores directamente del canal B de la imagen, y usando el funcional ponderado de área para la adaptabilidad, obtuvimos la malla adaptativa que se observa en la Figura 4.44.

Como se observa con ambas estrategias obtenemos una malla adaptativa a la intensidad de los pixeles, sin embargo la malla adaptativa usando el funcional ponderando de área produce cuadriláteros cercanos a ser cuadrados, rectángulos, rombos y en general paralelogramos. En particular puede observarse que cerca de la letra C de YUCATÁN pareciera que la imagen se encuentra defectuosa, pero esto no es así. Los elementos cercanos a esa letra resultaron ser rombos en diferentes direcciones, por lo que la malla resultante se aleja de la forma esperada. No es conveniente usar el funcional ponderado de área para construir mallas adaptativa.



Figura 4.44: Malla adaptativa de 357×300 al escudo de la UADY (Universidad Autónoma de Yucatán), usando el funcional de área ponderada.

Ahora usemos una figura con pocos colores como la del Pato Donald que se muestra en

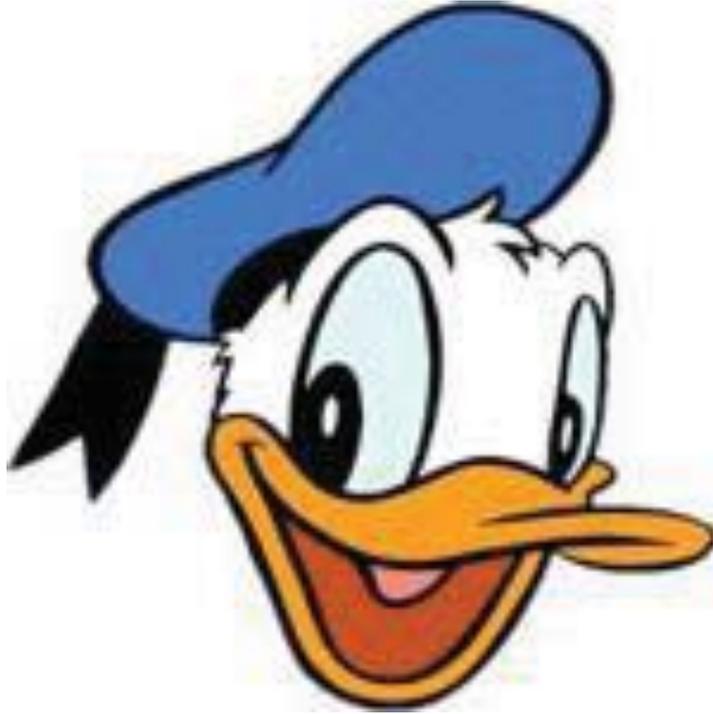


Figura 4.45: Imagen de la cara del pato Donald

En la Figura 4.46 se observa una malla adaptativa de 150×150 sobre la imagen del Pato Donald. Para esta figura usaremos como pesos a (4.62) con $\alpha = 1$.

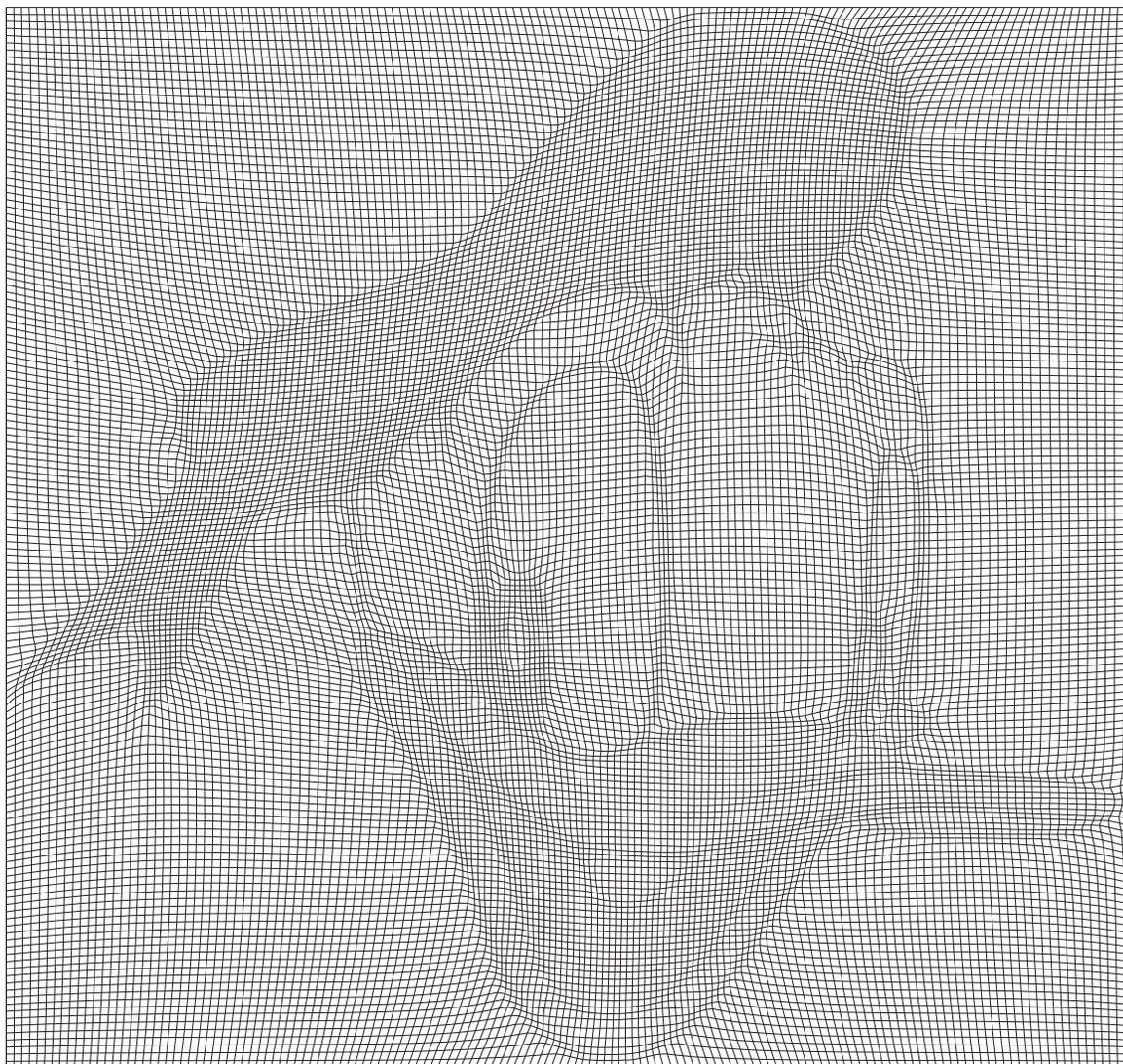
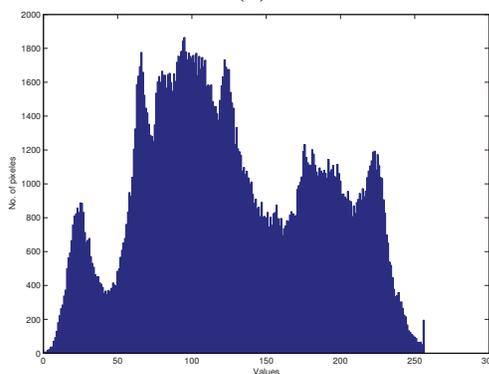


Figura 4.46: Malla adaptativa de 150×150 sobre la imagen del pato Donald.

El rostro de Lena (Lena Soderberg) es una de las imágenes más empleadas como prueba de algoritmos de compresión de imágenes ya que contiene un gran cantidad mezclas de detalles, de zonas planas y de textura. En la Figura 4.47 mostramos la imagen en escala RGB y un histograma de las intensidades de los pixeles.



(a)



(b)

Figura 4.47: Imagen en modo RGB del rostro de Lena (Lena Soderberg) (b) histograma de intensidades de los pixeles para esta imagen.

Como se observa del histograma de intensidades, son pocos los pixeles de color negro y blanco, por lo que esta imagen es útil para adaptar una malla muy uniforme a aquellos colores dominantes como el azul.

Usando por pesos la imagen Figura 4.47 en escala de grises y normalizados, obtuvimos una malla adaptativa de 272×300 la cual se muestra en Figura 4.48.



Figura 4.48: El rostro de Lena en una malla adaptiva de 272×300 .

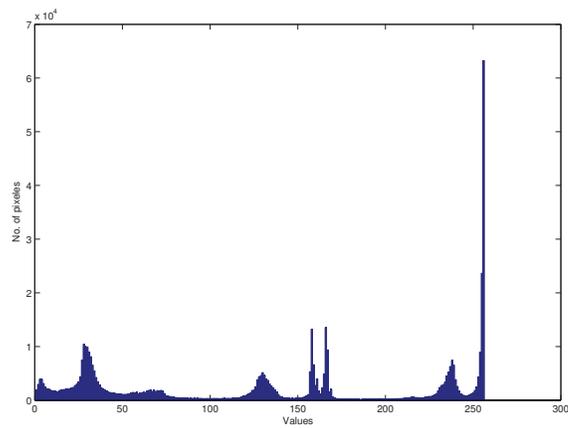
Usemos una imagen de la serigrafía pop art *Marilyn Diptych*, ver Figura 4.49, para ilustrar algunos problemas que se pueden presentar si convertimos cualquier imagen en escala de grises y la usamos para adaptividad.

Esta serigrafía se conoce simplemente como Marilyn Monroe (pink) y en ella predominan los colores amarillo y rosa como fondo. Si cambiamos a escala de colores, resulta que el amarillo se convierte a blanco ya que el amarillo en el modelo RGB tiene un valor B de 255, un valor G de 255 y un valor R de 0. Ahora bien, luego de convertir la imagen a escala de grises (4.61) e invertir los colores, resulta que al pixel de color amarillo se asigna un peso 0. Por otra parte, los colores rosa y negro dominantes se le asocian pesos w a 1. Como hemos discutido a lo largo de las últimas secciones, la malla se adaptará a las zonas de mayor intensidad como por ejemplo los ojos, los labios y el fondo de esta imagen. Pero en la zona del cabello, las celdas serán grandes, vea la Figura 4.50.

La malla adaptativa obtenida se ajusta a las zonas oscuras (las celdas son pequeñas) y en las zonas claras las líneas se alejan ahí (las celdas son grandes). Es por esta razón que la malla adaptativa aparece una retrato de marylin “hinchado”. En la Figura 4.51, hemos hecho ampliación de la malla adaptativa en la cual se aprecia que los rizos del cabello de Marilyn son celdas grandes y pequeñas en las cejas.



(a)



(b)

Figura 4.49: Imagen en modo RGB de la pintura *Marilyn Diptych (pink)* de Andy Warhol
(b) Histograma de intensidades.



Figura 4.50: Malla adaptiva sobre una de las pinturas *Marilyn Diptych* de Andy Warhol



Figura 4.51: Una ampliación de la malla adaptiva de Marilyn que contiene un rizo y las cejas.

Ahora usaremos una fotografía antigua de Sergey Ivanenko para construir una malla adaptativa usando la escala de pixeles de esta imagen. Como es una fotografía ya antigua, primero fue digitalizada, nosotros la obtuvimos a partir de un archivo PDF, en todo este proceso se han perdido muchos detalles finos de la intensidad de grises. Para realzar algunos rasgos de la fotografía antes de usarla le dimos un tratamiento previo a la imagen acentuando el contraste, ver Figura 4.52.



Figura 4.52: Imagen en escala de grises de una fotografía antigua de Sergey Ivanenko.

Para esta imagen usamos la función de pesos

$$w(i, j) = 1 + 30g(i, j)$$

donde $g(i, j)$ es la matriz de pixeles en escala de grises (de la imagen invertida en color). Resolvimos el problema (1) para $\sigma = .9$. El tamaño de la malla adaptativa es fue 376×350 y se observa en la Figura 4.53.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Como es de esperarse, el contraste ha permitido un cambio de luminosidad en zonas claras y oscuras y esto se refleja en el tamaño de las celdas de la malla adaptativa.



Figura 4.53: Malla adaptativa de 376×350 sobre una fotografía de Sergey Ivanenko.

4. FUNCIONALES DISCRETOS PARA ADAPTIVIDAD GEOMÉTRICA

Para finalizar, mostramos una malla adaptada sobre un mapa de la república mexicana que representa el pronóstico de velocidades de la tormenta y huracán que asolaron la república mexicana en septiembre de 2013.

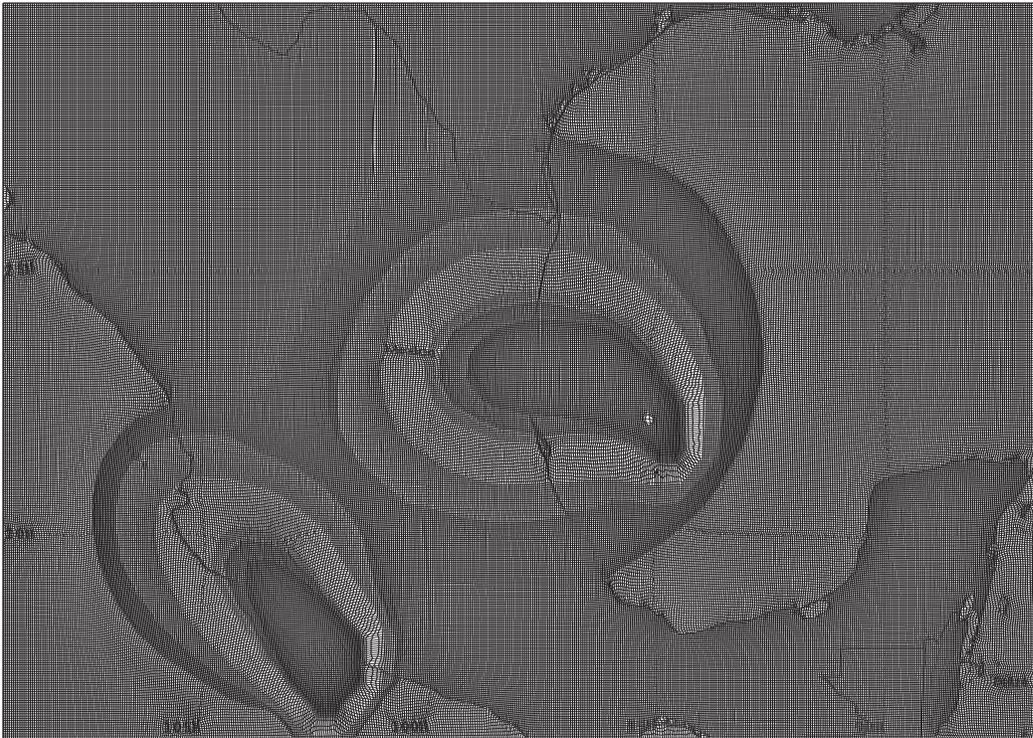


Figura 4.54: Una malla adaptiva de 332×498 sobre una imagen del pronóstico de velocidades de la tormenta Manuel y el huracán Ingrid del 15 de septiembre de 2013.

Hasta aquí, hemos mostrado con ejemplos, la potencialidad de este método para adaptar mallas mediante funcionales discretos ponderados. Hemos descrito un procedimiento iterativo para adaptar las mallas a los objetos internos de una región. Para el caso de las imágenes observamos que es necesario contar con una función de intensidades $g = g(x, y)$ de preferencia continua, que nos permita obtener mejores resultados usando el método iterativo de adaptividad descrito en este capítulo. También, hemos encontrado que para algunos problemas de adaptividad, es preferible usar el funcional de longitud para tener un mejor control de la elasticidad de las celdas y que las líneas de la malla adaptada sean suaves.

Capítulo 5

Sobre la distorsión de una celda y la calidad geométrica de una malla

En 1982, Klopfer [184] señala que uno de los problemas que surgen en la solución numérica de una ecuación diferencial parcial por diferencias finitas es la calidad de la malla empleada. En 1985, Thompson *et al.* [311] mostraron que los errores de aproximación por medio de diferencias finitas en la primera derivada sobre una malla no ortogonal se amplifican a medida que la malla es distorsionada con respecto a una malla idealmente ortogonal. Para polígonos simples en el plano casi siempre podemos construir una malla ortogonal mediante un mapeo conforme, pero en regiones muy irregulares no siempre es posible obtener una malla ortogonal. En 1992, Lee y Tsuei [201] usaron una discretización Godunov de primer orden (que sigue al flujo o mejor conocida como discretización *upwind*) para una ecuación de advección, y encontraron que los errores de truncamiento son afectados por el tamaño de las celdas, la distorsión de los ángulos y también por la dirección del flujo. Recientemente, en 2006 You *et al.* [335] encontraron que la estabilidad numérica en diferencias finitas sobre un problema de flujo advección–difusión puede ser mejorado si la distorsión de la malla está acoplada con un *aspect ratio* predeterminado.

El *aspect ratio* de un elemento triangular tiene varias acepciones, algunos autores hacen referencia a el como la razón entre los radios de los círculos circunscrito e inscrito. Otros autores lo calculan como la razón del lado más grande (a veces llamado diámetro del triángulo) y la altura para ese lado, véase la Figura 5.1.

De manera intuitiva se puede ver que un triángulo de *aspect ratio* grande corresponde a que uno de sus lados sea más grande que los otros y al menos uno de sus ángulos interiores sea pequeño, véase la Figura 5.3. Para cuadriláteros, existen varias expresiones para el *aspect ratio* algunas de ellas son intuitivas, pero deben ser consistentes para el caso en que el cuadrilátero sea un rectángulo.

El método de elemento finito, usando elementos triangulares, ha sido uno de los métodos más populares por su sencillez de formulación y por todos los resultados de convergencia y estabilidad que se han obtenido. En un trabajo sobre modelación y

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

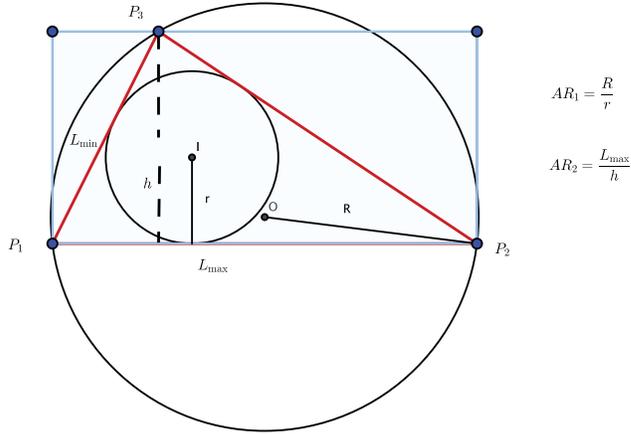


Figura 5.1: Dos formas para calcular el *aspect ratio*

simulación de aguas someras de 2003, Sankaranarayan *et al.* [276] encontraron que los errores de truncamiento para las primeras y segundas derivadas son funciones del ángulo y del *aspect ratio* de manera que se incrementa el error conforme el ángulo decrece o el *aspect ratio* crece. Uno de los trabajos más citados en la literatura entorno a la calidad de una malla triangular, es el trabajo de Babūška y Azis [17] quienes en 1976, sugirieron la necesidad controlar ángulo de los elementos en una malla triangular debido a que la matriz de rigidez asociada al sistema lineal que se obtiene al aproximar una ecuación por elemento finito lineal, puede producir un mal condicionamiento si los ángulos son pequeños y por otra parte muestran que el error de discretización crece si se emplean elementos con ángulo grande. Uno de los trabajos menos conocidos y menos citados en la literatura, anterior al trabajo de Babūška y Azis, es el trabajo de Fried [123] de 1972 quien llega a la misma conclusión: es necesario evitar el ángulo agudo ya que el número de condición de la matriz de rigidez crece. En esta línea, en 1987 Marcum y Gaither [222] observan que elementos con ángulo cercano a 180° usualmente reducen la estabilidad y la convergencia e incrementan significativamente el tiempo CPU requerido.

En este trabajo estamos interesados en dos cosas: la primera es caracterizar la forma geométrica de los elementos de una malla estructurada y la segunda es controlar, en la medida de lo posible, la distorsión de los elementos; es decir, construir mallas formadas por cuadriláteros poco distorsionados y de buena calidad geométrica. Esta última parte será discutida en el capítulo siguiente.

En el Apéndice A, revisamos algunas medidas de calidad para triángulos reportadas en la literatura. Algunas de estas medidas surgen de estimadores de error que se obtienen al usar interpolación lineal, otras provienen de cuantificar la distorsión de un triángulo general con respecto a una forma ideal geométrica: triángulo equilátero o triángulo rectángulo isósceles.

En este capítulo, primero revisaremos algunos conceptos para caracterizar la forma

geométrica de algunos cuadriláteros. Seguidamente revisaremos algunos estimadores de error para elementos formados por cuadriláteros para determinar algunas formas geométricas preferidas para reducir el error por interpolación bilineal. Posteriormente veremos algunos esfuerzos por extender medidas de calidad de triángulos a cuadriláteros. Finalmente, describiremos una colección importante de medidas de calidad para cuadriláteros reportadas en la literatura y proponemos algunas medidas de calidad novedosas para caracterizar la forma geométrica ideal de los cuadriláteros: cuadrados, rectángulos y paralelogramos.

Desde la educación media básica conocemos una clasificación de los cuadriláteros convexos a partir de sus lados y ángulos. Entre los cuadriláteros convexos nos interesan: los cuadrados, los rectángulos, paralelogramos y trapecios. Existen otros como rombos (que son paralelogramos) y otros poco conocidos como los cometa (o papalotes), estos son los romboides, ver la Figura 5.2.

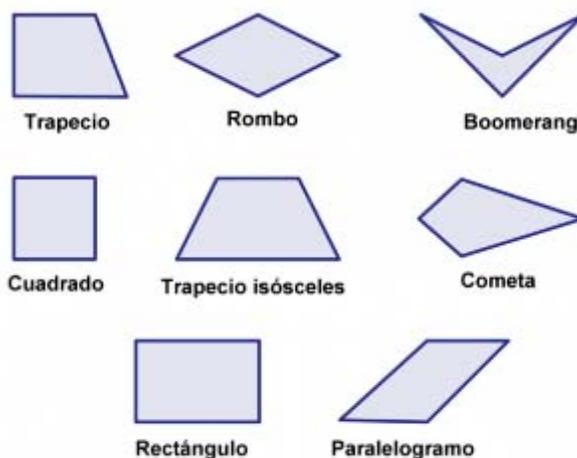


Figura 5.2: Algunas formas de los cuadriláteros.

A partir de sus definiciones, podemos encontrar propiedades que nos permitan clasificar la forma de esos cuadriláteros convexos. Por ejemplo:

- un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si y sólo si sus diagonales se cortan en el punto medio
- un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales miden lo mismo
- un paralelogramo es un rombo si y sólo si sus diagonales son perpendiculares

En el trabajo de Santos [277] se puede consultar algunas de las demostraciones de estos resultados. También contamos con algunas propiedades entre cuadriláteros, por ejemplo: un rectángulo es un paralelogramo donde uno de sus ángulos interiores es de

90° y un rectángulo para el cual, el cociente de sus lados mayor y menor es 1 representa un cuadrado.

5.1. Qué es cuadrilátero con mala forma geométrica

En la introducción revisamos la siguiente

Definición 1 Una malla de calidad es aquella cuya geometría en su aplicación no enaltece indeseables aspectos numéricos como la aproximación y la sensibilidad numérica entre otros.

Algunos métodos numéricos son sensibles a la forma de los cuadriláteros. Por excelencia un cuadrado será un buen elemento, un rectángulo perfecto será muy fascinante y en general, un rectángulo no alargado. ¿Qué forma tienen los cuadriláteros menos disformes? Por una parte, desde el punto de vista numérico, los elementos deben ser convexos y no doblados ya que de lo contrario perderemos consistencia en la discretización y no será posible garantizar una solución confiable. Por otra parte, el método de discretización empleado deben ser de tal manera que el error cometido por discretización sobre la malla sea aceptable, véase [195]. Desde el punto de vista geométrico describiremos algunas ideas sobre la forma preferible de los elementos de la malla.

Se sabe, que **un triángulo con mala forma** es aquel cuyo *aspect ratio* es grande, Cheng *at al.* [76], los clasifican en dos formas: una daga, *dagger* y una espada *blade*. En el primer caso, uno de los lados es pequeño con respecto a los otros que son grandes y para el segundo caso, los tres lados son comparables en longitud pero los vértices están cerca de estar en una línea, véase la Figura 5.3. En la literatura usualmente se conoce a estos elementos como *sliver* o espigas.



Figura 5.3: Un triángulo con mala forma geométrica.

Nosotros observamos, que **un cuadrilátero convexo con mala forma geométrica** no necesariamente tiene un *aspect ratio* es grande. Puede tener una forma simétrica o idónea y no ser geoméricamente “atractiva”. Entre los cuadriláteros con mala forma geométrica identificamos a

- 1) un papalote o *kite*, donde la razón de las diagonales mayor y menor, es mayor a 3,

- 2) un paralelogramo cuyo ángulo menor es menor a 40° ,
- 3) un rectángulo cuya razón de los lados mayor y menor, es mayor a 4,
- 4) un trapecio cuya razón de bases mayor y menor, es mayor a 2,
- 5) un cuadrilátero cercano a ser triángulo,
- 6) y en general un cuadrilátero elongado y de *aspect ratio* grande.

En la Figura 5.4 se muestran algunos cuadriláteros con mala forma geométrica.

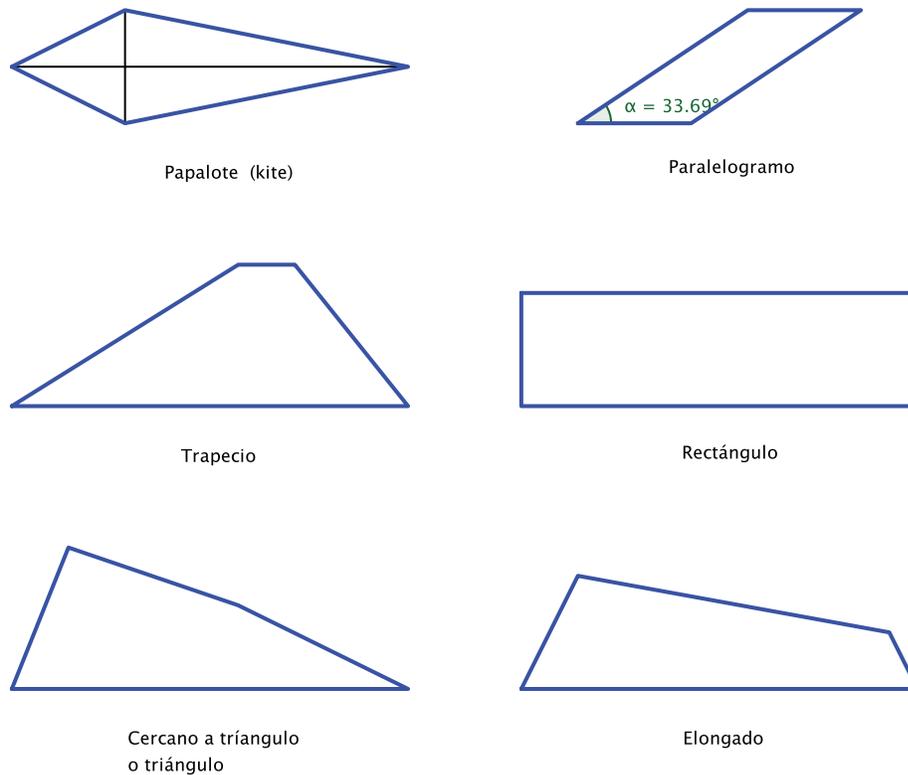


Figura 5.4: Un cuadrilátero convexo con mala forma geométrica.

Puede haber más elementos con mala forma geométrica pero estos son los más representativos y nos permite comprender los objetivos que perseguimos en este capítulo:

- 1) identificar la forma de un cuadrilátero e
- 2) identificar la distorsión de este con respecto una forma particular esperada, por ejemplo a la forma de un cuadrado, un rectángulo o de un paralelogramo.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

La discusión de estas ideas nos permitirá abordar el problema que nos interesa: si tenemos una malla formada por cuadriláteros, cuántos y cuáles están cerca de ser: rectángulos, cuadrados o paralelogramos y cuántos y cuáles están lejos de tener esa forma. Una vez discutido esto, nos interesa asociar un número de calidad o parámetro de forma para toda la malla, lo que se conoce como *shape parameter* o *shape quality*.

Para abordar estos problemas, o subproblemas, definiremos algunas funciones o medidas de calidad para caracterizar las formas geométricas más representativas o ideales de un cuadrilátero.

Siguiendo las características Field–Oddy de una buena medida de calidad para triángulos, discutidas en el Apéndice A, definiremos las características que debe tener una buena medida para cuadriláteros que nos permita caracterizar su forma geométrica y medir su distorsión. Primero debemos hacer una aclaración, diremos que un cuadrilátero es degenerado si éste representa un triángulo o un segmento.

Definición 2 Diremos que una función de valores reales $\mu(Q)$ sobre un cuadrilátero Q es una buena medida de calidad, en el sentido Field–Oddy, si cuenta con la

- 1) habilidad de detectar elementos degenerados ($\mu(Q) = 0$),
- 2) que sea adimensionado (independiente de la escala),
- 3) continua y acotada,
- 4) normalizada (nos interesa que $\mu(Q) \leq 1$).
- 5) Invariante bajo transformaciones rígidas.

Nos abocaremos ahora a construir funciones que representen una buena medida de calidad para cuadriláteros, que nos permitan identificar su forma y en base a esto definir la distorsión de la celda con respecto a una forma geométrica ideal. Casi todas las medidas que revisaremos son invariantes bajo transformaciones rígidas, cuando esto no sea así lo mencionaremos de manera explícita.

5.2. Notación

Describamos la notación que emplearemos en esta sección. Los vértices del cuadrilátero los denotaremos en orientación positiva (dirección contraria a las manecillas del reloj) como P_1 , P_2 , P_3 y P_4 . De la misma forma denotaremos por θ_1 a su ángulo interior en el vértice P_1 y seguiremos esta notación para los restantes ángulos interiores θ_i , vea la Figura 5.5.

Para los lados usaremos los vectores con dirección de la forma

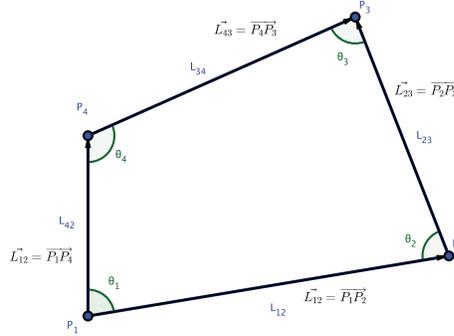


Figura 5.5: Algunos elementos de un cuadrilátero.

$$\vec{L}_{12} = \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \vec{L}_{23} = \overrightarrow{P_2P_3}, \quad \vec{L}_{43} = \overrightarrow{P_4P_3}, \quad \vec{L}_{14} = \overrightarrow{P_1P_4}$$

y las longitudes de los lados las calculamos como:

$$L_1 = \|\vec{L}_{12}\|, \quad L_2 = \|\vec{L}_{23}\|, \quad L_3 = \|\vec{L}_{43}\|, \quad L_4 = \|\vec{L}_{14}\|.$$

Ahora, si usamos las diagonales del cuadrilátero podemos construir cuatro triángulos (vea la Figura 5.6), los cuales definiremos usando la misma orientación que asignamos al cuadrilátero

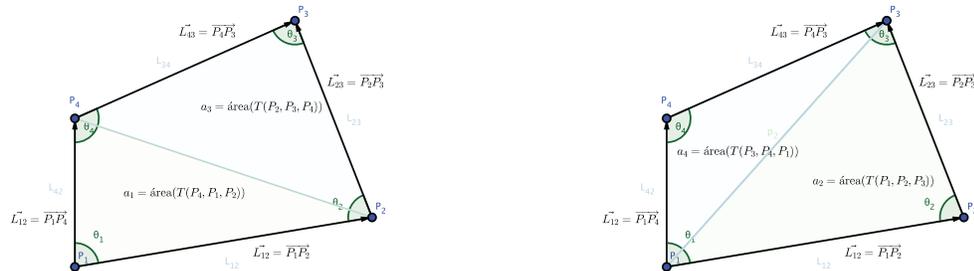


Figura 5.6: Cuatro triángulos a partir de las diagonales de una celda.

$$T_1 = T(P_4, P_1, P_2), \quad T_2 = T(P_1, P_2, P_3), \quad T_3 = T(P_2, P_3, P_4), \quad T_4 = T(P_3, P_4, P_1)$$

Para cada uno de ellos denotaremos al área (con signo) de los triángulo como

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

$$a_1 = \text{área}(T_1), \quad a_2 = \text{área}(T_2), \quad a_3 = \text{área}(T_3), \quad a_4 = \text{área}(T_4),$$

de la notación que hemos empleado en el primer capítulo, tenemos que

$$\alpha_1 = 2a_1, \quad \alpha_2 = 2a_2, \quad \alpha_3 = 2a_3, \quad \alpha_4 = 2a_4.$$

Al haber considerado el área con signo es fácil ver que el área del cuadrilátero, denotada por a_c satisface

$$a_c = a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Otra de las cantidades que usaremos son

$$\begin{aligned} L_{\text{mín}} &= \text{mín}\{L_1, L_2, L_3, L_4\}, \\ L_{\text{máx}} &= \text{máx}\{L_1, L_2, L_3, L_4\}, \end{aligned}$$

para denotar al lado menor y al lado mayor del cuadrilátero, y con esta idea denotaremos

$$\begin{aligned} \theta_{\text{mín}} &= \text{mín}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \\ \theta_{\text{máx}} &= \text{máx}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \end{aligned}$$

los ángulos internos menor y mayor respectivamente. Una cantidad que aparecerá en nuestros cálculos es $d_{\text{máx}}$, el *diámetro* de un cuadrilátero, el cual representa la más grande longitud de las diagonales.

Antes de describir las medidas de calidad, revisemos algunos estimadores de error reportados en la literatura, para la interpolación bilineal sobre cuadriláteros. Esto con la finalidad de determinar si hay una forma geométrica preferida o ideal en el uso de los elementos cuadriláteros.

5.3. Algunos estimadores de error para la interpolación bilineal usando cuadriláteros

En muchas aplicaciones de la ingeniería se prefiere usar elemento finito sobre cuadriláteros, en particular algunos prefieren elementos de orden pequeño (bilineales) por su flexibilidad y simplicidad para formar la matriz de rigidez. Sin embargo, se ha observado que el error de aproximación depende fuertemente de la forma del cuadrilátero.

Sea \mathcal{T} un operador de interpolación sobre el cuadrilátero Q formado por los puntos $P_i, i = 1, 2, 3, 4$, de manera que

$$\mathcal{T}u \in \mathcal{Q}_1, \quad \mathcal{T}u(P_i) = u(P_i), \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4$$

5.3 Algunos estimadores de error para la interpolación bilineal usando cuadriláteros

aquí, \mathcal{Q}_1 representa a los elementos finitos formados por cuadriláteros (de lados rectos valga la redundancia).

Estamos interesados en determinar un estimador del error de interpolación $u - \mathcal{I}u$ para cualquier función $u \in H^2(Q)$, (donde $H^2(Q)$ es un espacio de Sobolev el cual, como se sabe está contenido en el espacio de funciones continuas $C^0(Q)$). Siguiendo la notación de Ciarlet y Raviart [78]

$\|u\|_{m,p}$ representa la norma de u en el espacio de Sobolev $W^{m,p}$; el espacio de las funciones en $L^p(Q)$ y cuyas derivadas de hasta orden m también viven en $L^p(Q)$.

$|u|_{m,p}$ representa la semi-norma de u en $W^{m,p}(Q)$ obtenido al considerar solamente las derivadas de orden m .

Si el índice p es omitido para $p = 2$, en cuyo caso se emplea la notación clásica $H^m(Q) = W^{m,2}(Q)$.

Consideremos ahora \mathcal{Q} como el operador de interpolación de Lagrange. Uno de los primeros estimadores de error para \mathcal{Q} reportados en la literatura fue descrito en 1972 por Ciarlet y Raviart [78] y [79]:

$$|u - \mathcal{Q}u|_1 \leq C d_{\text{máx}} |u|_2 \quad (5.1)$$

Para elementos triangulares C depende solamente del ángulo más grande, pero para cuadriláteros, esto no es así, depende si el Q es cerca de ser un triángulo, un papagayo o *kite*, ver Jamet [165] y Apel [7]. En esta expresión, $d_{\text{máx}}$ es el diámetro del cuadrilátero el cual, debe satisfacer las condiciones

$$\frac{d_{\text{máx}}}{L_{\text{mín}}} \leq \sigma_1 \quad (5.2)$$

y

$$|\cos \theta_i| \leq \sigma_2 < 1 \quad (5.3)$$

donde σ_1 y σ_2 son constantes convenientes (ver Strang y Fix [303]). Las condiciones (5.2) y (5.3) impiden que Q sea un triángulo.

Es fácil ver que un rectángulo es un buen candidato para ser un elemento de calidad ya que minimiza este estimador de error y satisface (5.2) y (5.3) convenientemente. En la literatura las condiciones (5.2)–(5.3) se conocen como *regular shape condition* y son válidas para cuadriláteros no degenerados (a triángulo o segmento).

En 1986, Girault y Raviart [141] obtienen estimador de error (5.1), pero pidiendo que el cuadrilátero satisfaga

$$\frac{d_{\text{máx}}}{\bar{\rho}} \leq \sigma_2 \quad (5.4)$$

donde $\bar{\rho} = 2 \min_i \rho_i$, y ρ_i es el diámetro de los círculos inscritos en cada uno de los triángulo que se forma con las diagonales de Q . Detrás de este condición se encuentra la

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

medida de distorsión geométrica de Cavendish para cada uno de los cuatro triángulos del cuadrilátero, ver Figura 5.1. Por lo que los rectángulos no muy elongados y un cuadrado cumplen con la condición (5.4). El *aspect ratio* permitido para tales rectángulos depende del valor σ_2 elegido.

Algunos autores se interesan por proponer estimadores de error que incluya a aquellos cuadriláteros que estén cerca de degenerar a triángulos. Tal es el caso de Jamet [165], quien considera que si existe una constante σ para la cual el cuadrilátero satisface

$$d_{\text{máx}}/\rho_{\text{máx}} \leq \sigma \tag{5.5}$$

donde $\rho_{\text{máx}}$ es el diámetro del máximo círculo contenido en el cuadrilátero Q , entonces existe una constante $C = C(\sigma)$ que depende solamente de σ de manera que

$$|u - Qu|_m \leq C d_{\text{máx}}^{2-m} |u|_2, \quad m = 0, 1$$

La prueba de este teorema se puede ver en [165]. La condición (5.5) que impone Jamet a los cuadriláteros permite que $d_{\text{máx}}/L_{\text{mín}}$ sea arbitrariamente grande y que el mayor ángulo de Q pueda ser incluso π . Jamet observa que este estimador se cumple para elementos que satisfacen la *regular shape condition* (5.2)–(5.3) al hacer $\sigma = \sigma_1(1 - \sigma_2^2)^{1/2}$.

En 2001, Acosta y Duran [1] muestran que es posible obtener el mismo estimador de error cuando las diagonales del cuadrilátero d_1 y d_2 satisfacen

$$d_2/d_1 \leq N$$

para un valor de $N > 0$ determinado y cuando los cuatro triángulos (que se forman con esas diagonales) satisfacen la condición de ángulo máximo, esto es si los ángulos interiores de los cuatro triángulos son menores que un $\varphi > 0$ dado. Nuevamente los rectángulos y en particular los cuadrados son muy buenos candidatos para este estimador.

Otro estimador reportado en la literatura, es el propuesto por Arunakirinathar y Reddy [10] en la forma

$$|u - Qu|_1 \leq C d_{\text{máx}}^{2-m} |u|_2, \quad m = 0, 1 \tag{5.6}$$

siempre que existan las constantes C, C_0, C_1 , que satisfagan

$$\|DF\| \leq C d_{\text{máx}}, \quad \|DF^{-1}\| \leq C d_{\text{máx}}^{-1}, \quad C_0 d_{\text{máx}}^2 \leq A \leq C_1 d_{\text{máx}}^2.$$

donde A es el área del cuadrilátero.

Como se observa, Arunakirinathar y Reddy imponen como condición que el área del cuadrilátero esté acotado por un factor del cuadrado del diámetro $d_{\text{máx}}$.

Una revisión de las condiciones que debe satisfacer el cuadrilátero para obtener un estimador del error del tipo (5.1) fueron descritas en 2002, por Pinbing y Zhongci [254]. En ese artículo plantean algunos problemas abiertos sobre la forma geométrica que deben tener las celdas para mejorar los estimadores de error. Otra revisión de los estimadores de error para el mapeo bilineal puede ser consultada en el artículo de 2008 de Shipeng *et. al* [290], quienes proponen otras condiciones de regularidad (un poco más elaboradas) que deben satisfacer los cuadriláteros.

Como hemos visto, dependiendo de la aplicación y el método numérico que estemos utilizando es necesario que la celda no se aleje de una forma ideal geométrica para garantizar la estabilidad del algoritmo numérico. Las formas ideales son: un cuadrado, un rectángulo no alargado o un paralelogramo. Es por esto que es necesario identificar la distorsión de una celda con respecto a esa forma ideal geométrica y cuantificar adecuadamente lo que se conoce como el *aspect ratio* de una celda. En lo que sigue describiremos algunas medidas de calidad que nos permitan identificar la forma geométrica de las celdas.

5.4. Medidas de calidad geométrica para cuadriláteros

Primero revisemos algunos intentos para extender medidas que se han estudiado para triángulos a cuadriláteros y analizaremos cuáles son interesantes y cuáles no son atractivas como medidas de calidad.

5.4.1. Algunas medidas de calidad para cuadriláteros basadas en medidas de calidad para triángulos

En 2002, Pebay [249] extiende algunas medidas de calidad para triángulos a cuadriláteros. Una de las medidas para triángulos que revisa es la razón entre el perímetro y el radio del círculo inscrito:

$$\frac{r}{\text{perímetro}(T)} = \frac{r}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{\text{área}(T)}{(l_1 + l_2 + l_3)^2}.$$

Esta razón está relacionada con la medida de calidad para triángulos

$$\mu_7(T) = \frac{12\sqrt{3}\text{área}(T)}{(l_1 + l_2 + l_3)^2}$$

que se discute en la sección A.2.

Pebay propone extender esa medida a un cuadrilátero en la forma

$$\mu(Q) = \frac{16a_c}{\text{perímetro}(Q)^2} = \frac{16a_c}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)^2} \quad (5.7)$$

donde a_c es el área del cuadrilátero. Esta medida identifica en su valor máximo de 1 a cuadrados. Sin embargo, esta medida no identifica cuadriláteros degenerados a triángulos. Esta medida solamente es cero cuando se trata de un segmento, por consiguiente no cuantifica adecuadamente la distorsión de un elemento cercano a ser triángulo.

Ahora bien, si en lugar del área de la celda calculamos $a_{\text{mín}}$ la menor área de los cuatro triángulos,

$$\mu(Q) = \frac{32a_{\text{mín}}}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)^2} \quad (5.8)$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

con

$$a_{\text{mín}} = \text{mín}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

tendremos así una buena medida de calidad.

Ejemplo: Si fijamos los puntos $A(0,0)$, $B(2,0)$, $D(0,2)$ y $C(x,y)$ lo dejamos libre en el plano, $\mu(Q)$ es una función de (x,y) . Las curvas de nivel para esta función se observan en la Figura 5.7.

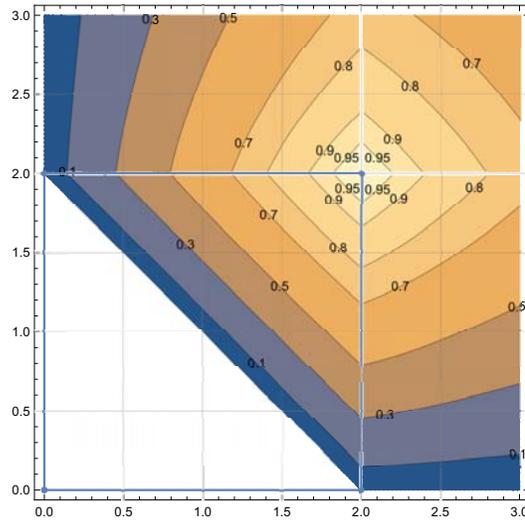


Figura 5.7: Curvas de nivel para la medida de calidad Pebay modified (5.8) que detecta cuadrados.

En la práctica hemos observado que un *rango de aceptabilidad* para que un cuadrilátero sea considerado como cuadrado o cercano a serlo bajo esta medida, es de $[\cdot 9, 1]$.

Otra medida para triángulos muy usada en la literatura es la medida de Cavendish:

$$\mu_2(T) = 2\sqrt{3} \frac{r}{L_{\text{máx}}}$$

y como se discute en la sección A.2, el recíproco

$$AR = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{L_{\text{máx}}}{r}$$

es usado como *aspect ratio*. Es fácil ver $\mu_2(T)$ que se puede reescribir como

$$\mu_2(T) = 2\sqrt{3} \frac{\text{área}(T)}{L_{\text{máx}} \cdot s}$$

donde s es el semi-perímetro del triángulo. En 2000, Frey y George [138] proponen una extensión intuitiva de esta medida para cuadriláteros de la forma

$$\mu(Q) = \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{a_{\text{mín}}}{|q|_2 h_{\text{máx}}} \tag{5.9}$$

donde

$$|q|_2 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2}, \quad h_{\text{máx}} = \text{máx}\{L_{\text{máx}}, d_1, d_2\}$$

aquí d_1 y d_2 son la longitudes de las diagonales del cuadrilátero. Frey y George observan que es posible detectar cuadriláteros degenerados a triángulo y que el valor máximo de $\mu(Q)$ se alcanza en 1 para cuadrados. Esta medida representa una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy. Las curvas de nivel para esta medida fijando 3 puntos como en el caso anterior se muestran en la Figura 5.8

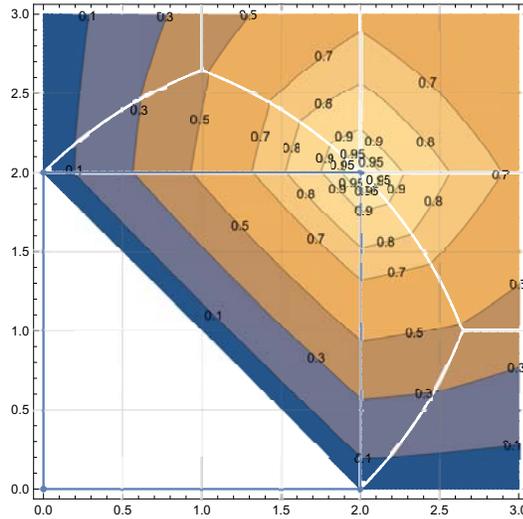


Figura 5.8: Curvas de nivel para la medida de calidad (5.9) Frey y George, que detecta cuadrados.

Hemos observado que al igual con la medida sugerida por Pebay, la medida que proponen Frey y George tienen un *rango de aceptabilidad* de $[\cdot.9, 1]$ para que un cuadrilátero sea considerado un cuadrado o cerca de estarlo.

Una métrica puntual muy empleada en la literatura especializada para medir la calidad de las mallas es el *scaled jacobian*, como su nombre lo indica, se basa en escalar jacobiano J

$$\begin{aligned} J &= \det(\mathbf{x}_\xi | \mathbf{x}_\eta) \\ &= \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

por el tamaño del vector de derivada direccional en cada dirección ξ y η en la forma

$$J_{\text{scaled}} = \det \left(\frac{\mathbf{x}_\xi}{\|\mathbf{x}_\xi\|} \mid \frac{\mathbf{x}_\eta}{\|\mathbf{x}_\eta\|} \right) = \frac{J}{\|\mathbf{x}_\xi\| \|\mathbf{x}_\eta\|}.$$

Observe que sobre un punto \mathbf{p}

$$J_{\text{scaled}} = \frac{J(\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}_\xi(\mathbf{p})\| \|\mathbf{x}_\eta(\mathbf{p})\|} = \sin(\theta(\mathbf{x}_\xi(\mathbf{p}), \mathbf{x}_\eta(\mathbf{p}))),$$

por lo que esta medida solamente mide ortogonalidad.

Una medida basada en el *scaled jacobian*, para un triángulo T de lados L_1, L_2 y L_3 , se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \min \left\{ \frac{\text{área}(T)}{L_3 L_1}, \frac{\text{área}(T)}{L_1 L_2}, \frac{\text{área}(T)}{L_2 L_3} \right\} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\text{área}(T)}{\max \{L_3 L_1, L_1 L_2, L_2 L_3\}}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

el jacobiano en un punto del triángulo, es dos veces su área. La medida (5.10) es una buena medida de calidad en el sentido de Filed–Oddy, ya que es continua, está acotada, es invariante a transformaciones rígidas e independiente de escala y es capaz de detectar elementos degenerados a segmento. Su valor máximo de 1 solamente se alcanza si el triángulo es equilátero, véase [292].

Una extensión de la medida (5.10) para un cuadrilátero Q , de lados L_1, L_2, L_3 y L_4 , se describe en la biblioteca **Verdict** [292] y por Knupp [190], en la forma

$$\mu_1(Q) = 2 \min \left\{ \frac{a_1}{L_4 L_1}, \frac{a_2}{L_1 L_2}, \frac{a_3}{L_2 L_3}, \frac{a_4}{L_3 L_4} \right\} \quad (5.11)$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 es el área de los triángulos obtenidos de las dos diagonales del cuadrilátero.

Esta medida es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, detecta elementos degenerados a triángulo y caracteriza rectángulos en su valor máximo de 1. Un *rango de aceptabilidad* de $[\text{.995}, 1]$ para que un cuadrilátero sea considerado un rectángulo o cerca de estarlo. Un inconveniente computacional de esta medida es cuando dos puntos consecutivos se colapsan, la cantidad $\mu(Q)$ es indeterminada.

Una forma conveniente de extender (5.10) a una medida de calidad sobre cuadriláteros es

$$\mu_2(Q) = 2 \frac{a_{\min}}{\max \{L_4 L_1, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_4\}} \quad (5.12)$$

donde a_{\min} el menor valor de área de los cuatro triángulos. Esta medida modificada es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, detecta elementos degenerados a triángulo y caracteriza rectángulos en su valor máximo de 1.

Nosotros hemos obtenido mejores resultados con (5.12) que con (5.11). Observe el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Considere el cuadrilátero formado por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(6, 0)$ y $P_3(6, 1)$ y el cuarto $P_4(0, 3)$. Este cuadrilátero representa un trapecio rectángulo cuya razón base mayor/base menor = 3. Este trapecio es cerca de ser un triángulo y la medida (5.12) lo determina mejor ya que su valor es cercano a cero; en contra parte, el valor obtenido con la medida (5.11) es grande. Observe la Figura 5.9.

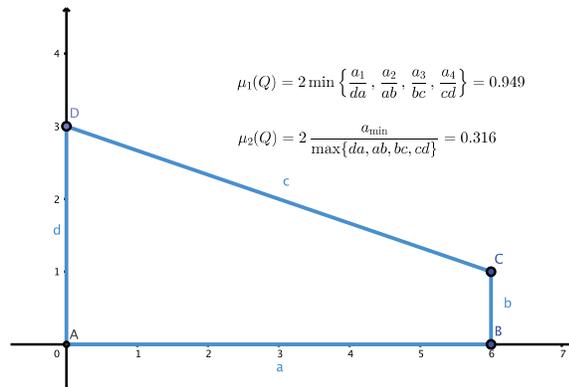
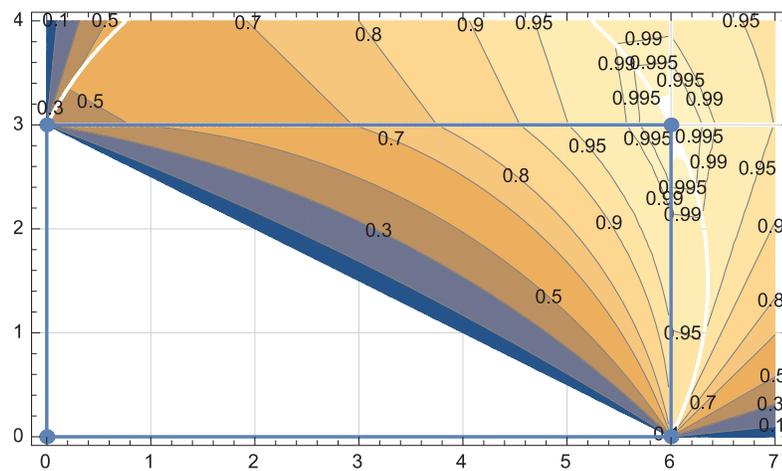


Figura 5.9: Un trapecio rectángulo en el cual la medida *scaled jacobian* no cuantifica adecuadamente la distorsión del elemento.

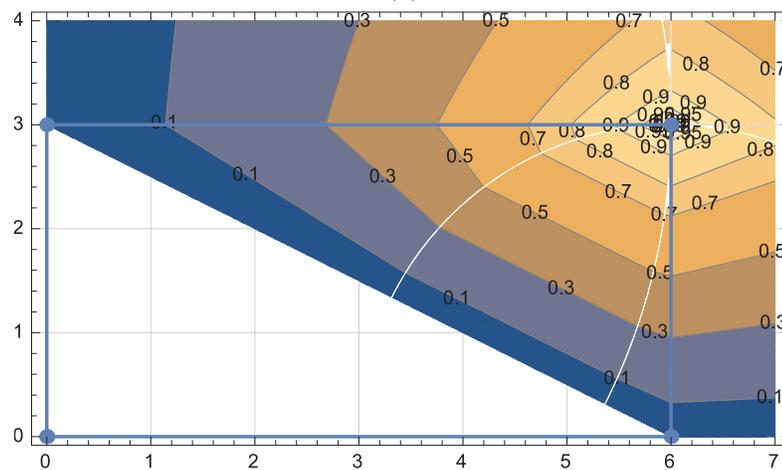
Cuando tanto $P_3(x, y)$ libre en el plano, tanto $\mu_1(Q)$ como $\mu_2(Q)$ son funciones de (x, y) . Las curvas de nivel para estas funciones se observan en la Figura 5.10.

Observamos que las curvas de nivel para $\mu_1(Q)$ se “abren” demasiado sobre la recta $x = 6$. Esta medida nos ofrece una deficiente información de la distorsión del cuadrilátero con respecto a un rectángulo. Usada de ésta forma solamente es para caracterizar ortogonalidad. La medida (5.12) propuesta como *scaled jacobian modified* caracteriza rectángulos y cuantifica mejor la distorsión.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA



(a)



(b)

Figura 5.10: Curvas de nivel para la medida (a) *scaled jacobian* y (b) la modificación propuesta (5.12).

Otra forma de extender (5.11) para cuadriláteros es calculando el valor mínimo de la medida $\mu(T)$ descrita en (5.10) de los cuatro triángulos T_i del cuadrilátero. Esa medida se escribe como:

$$\mu_3(Q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \min \{ \mu(T_1), \mu(T_2), \mu(T_3), \mu(T_4) \}. \quad (5.13)$$

Esta es una buena medida de calidad en el sentido de Field–Oddy, ya que es continua, está acotada, es invariante bajo transformaciones rígidas e independiente de la escala, es capaz de detectar elementos degenerados a triángulo y detecta cuadrados en su valor máximo de 1. La demostración es muy sencilla y se basa en el trabajo de Joe [168], del que hablaremos más adelante.

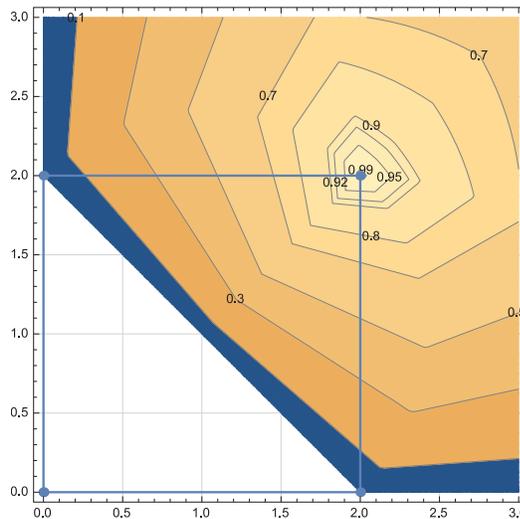


Figura 5.11: Curvas de nivel para la medida de calidad (5.13) que detecta cuadrados.

En 2002, Pebay [249] revisa la medida *edge ratio* para un triángulo:

$$\nu(T) = \frac{\max\{L_1, L_2, L_3\}}{\min\{L_1, L_2, L_3\}}$$

y señala que con la extensión para cuadriláteros:

$$\nu(Q) = \frac{\max\{L_1, L_2, L_3, L_4\}}{\min\{L_1, L_2, L_3, L_4\}}$$

es posible caracterizar paralelogramos, rectángulos y rombos. Sin embargo, como es de observar, no es posible determinar elementos degenerados, ni a triángulos ni a segmentos.

En 1998, Oddy [241] propone medir la distorsión de un cuadrilátero $\delta(Q)$ como el promedio de la distorsión de los cuatro triángulos de un cuadrilátero para alguna medida

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

$\mu(T)$ conveniente. Si $\mu(E)$ es una medida de calidad para un elemento E , $1/\mu(E)$ mide la distorsión de E con respecto a la forma ideal E^* caracterizada por $\mu = \mu(E)$. Con esta idea, la distorsión total de la celda según Oddy es

$$\delta(Q) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\mu(T_1)} + \frac{1}{\mu(T_2)} + \frac{1}{\mu(T_3)} + \frac{1}{\mu(T_4)} \right]. \quad (5.14)$$

Usando esta idea, en 2002, Pebay [249] propone medir la distorsión de un cuadrilátero usando usando la media aritmética del número de condición del mapeo lineal κ_2 (véase el Apéndice A) de los cuatro triángulos del cuadrilátero en la forma

$$\kappa_2(Q) = \frac{1}{4} [\kappa_2(T_1) + \kappa_2(T_2) + \kappa_2(T_3) + \kappa_2(T_4)] \quad (5.15)$$

En ese trabajo, Pebay observa que $\kappa_2(Q)$ tiene un extremo en 2 exclusivamente para cuadrados. Esto último fue primero observado en 1992 por Barrera [29].

Como observación, no podemos usar el promedio de los 4 triángulos para definir una medida de calidad, ya que el promedio de las medidas $\mu(T_i)$ sobre 4 triángulos

$$f(Q) = \frac{1}{4} [\mu(T_1) + \mu(T_2) + \mu(T_3) + \mu(T_4)]$$

no detecta elementos degenerados a triángulos. En cambio, el producto de las medidas $\mu(T_i)$ sobre 4 triángulos:

$$\mu(Q) = \sigma \cdot \mu(T_1) * \mu(T_2) * \mu(T_3) * \mu(T_4) \quad (5.16)$$

sí logra detectar cuadriláteros degenerados a triángulos. La medida $\mu(Q)$ en (5.16) representa una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, siempre que $\mu(T)$ sea buena medida de calidad para triángulos en el sentido Field–Oddy. Aquí σ es un parámetro de normalización conveniente. Más adelante veremos cuáles medidas de calidad $\mu(T)$ son convenientes y qué forma geométrica detectan.

En 2008, Joe [168] hace una revisión de las medidas de calidad para triángulos y sugiere que si se considera los cuatro triángulos que se obtienen de cada diagonal del cuadrilátero, ver Figura 5.6, es posible definir una medida para un cuadrilátero basada en el mínimo de una buena medida $\mu(T)$ para triángulos sobre cada uno de esos triángulos

$$\mu(Q) = s_\mu \cdot \text{mín} \{ \mu(T_1), \mu(T_2), \mu(T_3), \mu(T_4) \} \quad (5.17)$$

aquí s_μ es una constante de normalización dependiente de la medida $\mu(T)$ elegida. Joe revisa la medida de triángulos propuesta por Lo [215]

$$\mu(T) = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\text{área}(T)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$$

con el factor

$$s_\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

y muestra que la medida $\mu(Q)$ alcanza el valor máximo de 1 para cuadrados. Otra de las medidas que usa Joe es la clásica medida para el *aspect ratio* de un triángulo, véase el Apéndice A,

$$\mu(T) = \mu_1(T) = 2\frac{r}{R},$$

esto es, el cociente de los radios de los círculos inscrito y circunscrito, y muestra que la medida (5.17) para

$$s_\mu = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)}$$

alcanza un valor máximo de 1 sobre los cuadrados.

Como es de observar, una medida para cuadriláteros así definida, basada en una buena medida de calidad para triángulos es una buena medida de calidad y puede detectar cuadriláteros degenerados a triángulo. Sin embargo, todas las medidas (5.17) detectan cuadrados si la medida $\mu(T)$ detecta equiláteros en su valor máximo. De la revisión de medidas de calidad para triángulos que hace Shewckuk [287] podríamos elegir alguna de ellas y probar qué tipo de cuadriláteros son capaces de detectar y desde luego identificar cuáles son equivalentes y cuáles son las menos costosas para su cálculo.

De los trabajos realizados por Pebay [249, 253] y Joe [168] se concluye que a partir de una sólo medida de calidad resulta muy difícil identificar las diferentes formas de un cuadrilátero convexo, ver Figura 5.2, y cuantificar adecuadamente su distorsión. Por lo que es necesario construir medidas de calidad que nos permitan caracterizar la forma geométrica ideal elegida para un cuadrilátero: cuadrado, rectángulo, paralelogramo, etc.

Ahora revisaremos algunas medidas de calidad que han sido propuestas en la literatura y otras más que proponemos para caracterizar la forma geométrica de los elementos y discutiremos si cuantifican adecuadamente la distorsión de los elementos,

En las siguientes secciones revisaremos algunas medidas de calidad que se han propuesto sobre cuadriláteros registradas en la literatura y propondremos otras más.

5.4.2. Paralelogramos: Area I 2015

Uno de los primeros funcionales discretos que empleamos a principios de los años 90, es el funcional clásico de área, el cual es la suma del cuadrado del área de los triángulos [28]. En este trabajo Barrera *et al.* mostraron que una malla óptima para ese funcional discreto es aquella para la cual todos los elementos triangulares tienen la misma área. La siguiente medida está basada en la uniformidad del área de los cuatro triángulos de una celda.

Calculemos el área de los cuatro triángulos T_1, T_2, T_3 , y T_4 , que se obtienen con las diagonales de un cuadrilátero, véase la Figura 5.6, siguiendo la notación el área de los triángulos son a_1, a_2, a_3 , y a_4 , respectivamente. Normalicemos esas cantidades con respecto al área del cuadrilátero a_c , con lo cual obtenemos

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

$$g_1 = \frac{a_1}{a_c}; \quad g_2 = \frac{a_2}{a_c}; \quad g_3 = \frac{a_3}{a_c}; \quad g_4 = \frac{a_4}{a_c}.$$

Es fácil ver que

$$g_1 + g_3 = g_2 + g_4 = 1,$$

y, si el cuadrilátero es convexo, todas esas cantidades son positivas con $0 < g_i < 1$.

Una propiedad que vamos a usar es la siguiente:

Teorema 5.1 *Un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si y sólo si*

$$g_1 g_2 = g_3 g_4 = \frac{1}{4}.$$

La demostración es muy sencilla, una condición que está implícita en la demostración es que

$$g_1 = g_2,$$

esto ocurre si y sólo si la base que comparten de los triángulos T_1 y T_2 y su lado opuesto son paralelos. Pero si además pedimos que sean iguales a $1/2$ entonces $g_2 = g_3$ por lo que dos a dos los lados son paralelos. Otra forma de observar esta idea es: un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si y sólo si los cuatro triángulos en que partimos el cuadrilátero tienen la misma área.

Del teorema anterior, una medida de calidad que proponemos para caracterizar paralelogramos es

$$\mu(Q) = 4 \min \{g_1 g_2, g_3 g_4\}. \quad (5.18)$$

La cual es una buena medida de calidad ya que, es continua, acotada, n -dimensional, alcanza su valor óptimo en 1 para un paralelogramo y permite identificar cuadriláteros degenerados a triángulos e incluso con un entrante (es decir no convexos, por ejemplo como los de tipo *boomerang*).

Veamos cómo son las curvas de nivel para esta función. Si dejamos fijos 3 puntos (en forma general) y el cuarto es libre, podemos graficar las curvas de nivel para esta medida

Como se observa de las Figuras 5.12(a) y 5.12(b), las curvas de nivel de $\mu(Q)$ son elongadas cerca del valor máximo, por lo que para caracterizar un paralelogramo usando esta medida de calidad, el valor de $\mu(Q)$ debe ser muy cercano a 1.

Uno de los objetivos que perseguimos en este trabajo, es definir cuándo una celda Q es distorsionada con respecto a una forma geométrica, para esto tenemos la siguiente

Definición 3 *Diremos que una celda Q es distorsionada con respecto a una buena medida de calidad $\mu(Q)$ si el valor $\mu(Q)$ se encuentra fuera de un intervalo de aceptabilidad $[\mu_0, 1]$. Donde $0 < \mu_0$ es un valor cercano a 1.*

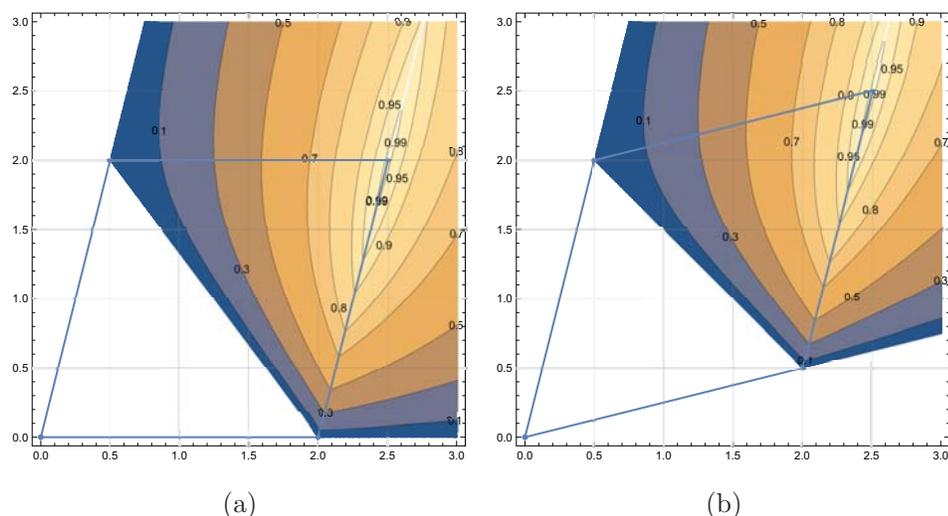


Figura 5.12: Curvas de nivel para la medida de calidad Area I 2015.

Dicho de otra forma, Q se considera distorsionado con respecto a la forma geométrica ideal Q^* que caracteriza la medida $\mu(Q)$, si

$$\delta(Q) = \frac{1}{\mu(Q)}$$

es mucho mayor a 1.

El intervalo de aceptabilidad nos da la pauta para considerar que un cuadrilátero Q tiene, o está cerca de tener, la forma ideal geométrica Q^* que caracteriza la medida $\mu(Q)$.

En los experimentos realizados, para la medida de calidad Area I 2015, proponemos $[\cdot 95, 1]$ como *intervalo de aceptabilidad* para garantizar que el cuadrilátero Q esté cerca de ser un paralelogramo.

Por otra parte, es fácil ver que si

$$(g_1 - g_2)(g_1 - g_4) = 0,$$

el cuadrilátero es un trapecio. Con una normalización adecuada y un corrimiento del cero podríamos definir una medida para caracterizar trapecios. Sin embargo, esta medida de calidad tendría una infinidad de puntos críticos sobre una recta, por lo que resultaría difícil cuantificar la distorsión de un cuadrilátero a trapecio. Por otra parte, deberíamos adecuarlo con otra medida, para que detecte elementos degenerados.

5.4.3. Paralelogramos: Area II 2015

Como se ha visto, para caracterizar un paralelogramo basta que $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1/2$. Por lo que proponemos primero ordenar el área normalizada de los triángulos del cuadrilátero en la forma $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4$ y definimos

$$\mu(Q) = \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} = \frac{a_1 a_2}{a_3 a_4} \tag{5.19}$$

esta función representa una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, ya que, es continua, acotada, a-dimensional. Es fácil ver que la función así definida alcanza el valor de 1 cuando los cuatro cantidades son iguales; y esto como hemos visto, se logra si y sólo si Q es un paralelogramo. Esta medida permite identificar cuadriláteros degenerados a triángulos e incluso con un entrante (es decir no convexos, por ejemplo los de tipo *boomerang*).

Nuevamente, si dejamos fijos 3 puntos (en forma general) y el cuarto es libre, podemos graficar las curvas de nivel para esta medida, la superficie representa un pico o chipote alargado.

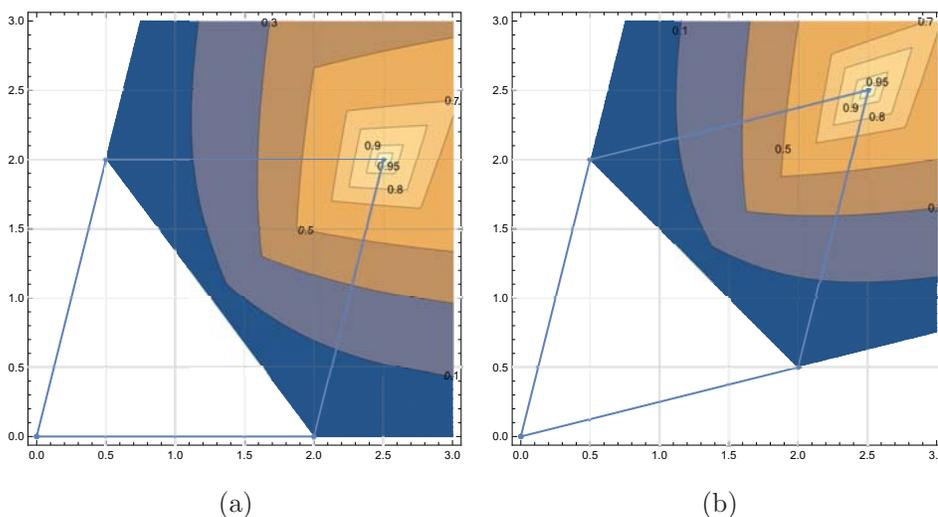


Figura 5.13: Curvas de nivel para la medida de calidad Area II 2015.

Esta medida es mucho más eficiente que la anterior para caracterizar paralelogramos. En la práctica en un intervalo de aceptabilidad $[.9, 1]$ es suficiente para garantizar que el cuadrilátero Q sea cercano a ser un paralelogramo.

Debemos aclarar, que la idea de ordenar las cantidades $g_i = \mu(T_i)$ para luego definir

$$\mu(Q) = \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4}$$

no es nuestra. Fue propuesta por vez primera por Lo [216] en 1989 para caracterizar rectángulos usando una medida $\mu(T)$ conveniente para triángulos, la cual describiremos más adelante.

Es necesario hacer notar que tanto las medidas de calidad Area I como Area II son funciones que no son continuamente diferenciables. Muchas medidas para cuadriláteros que describiremos no lo son.

5.4.4. Paralelogramos: Rannacher y Turek 1992

En 1992, Rannacher y Turek [256] describen una medida basada en los ángulos de los lados opuestos para caracterizar paralelogramos. La idea es sencilla, si ϕ y ψ son los ángulos entre las normales hacia fuera de dos par de lados opuestos, ver Figura 5.14,

$$\phi = \angle(\vec{u}_b^\perp, \vec{u}_t^\perp), \quad \psi = \angle(\vec{u}_l^\perp, \vec{u}_r^\perp)$$

resulta que

$$\mu(Q) = \max\{|\pi - \phi|, |\pi - \psi|\}$$

nos permite caracterizar paralelogramos cuando $\mu(Q) = 0$.

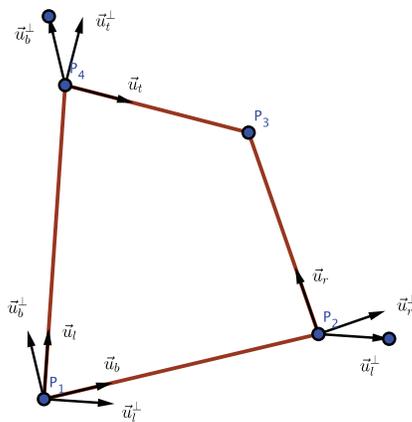


Figura 5.14: Vectores normales entre lados opuestos del cuadrilátero.

Es fácil ver que $0 \leq \mu(Q) \leq \pi$. Esta medida funciona muy bien para determinar si un cuadrilátero es cercano a ser un paralelogramo; sin embargo, aún normalizando a $[0, 1]$, $\mu(Q)$ no es una buena medida de calidad en el sentido de Field–Oddy, ya que no es posible determinar cuadriláteros degenerados a triángulos o segmentos.

Rannacher y Turek usan esta medida para obtener un estimador de error de la forma

$$\|u\|_{W_\infty^2} \leq C d_{\max}(d_{\max} + \mu(Q))$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

en el uso de funciones bilineales. Aquí $d_{\text{máx}}$ representa el diámetro del cuadrilátero Q . En este trabajo, Rannacher y Turek concluyen que para mallas cuyas celdas sean asintóticamente paralelogramos es posible obtener una buena aproximación a la solución usando el M.E.F. [256].

5.4.5. Cuadrados: Lo 1985

La forma usual de construir mallas no estructuradas formadas por cuadriláteros en regiones planas es: primero construir una triangulación óptima en algún sentido sobre la región y luego remover segmentos, o conectar otros nodos, para formar los cuadriláteros. En 1985, Lo [215] propone una técnica para remover segmentos y conectar vértices con la finalidad de que la malla sea de calidad, en el sentido de que los cuadriláteros estén cercanos a ser cuadrados. Para esto lograrlo esto, Lo propone una medida de calidad para un triángulo

$$g_i = g(T_i) = \frac{\text{área}(T_i)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad (5.20)$$

que revisamos en el Apéndice A, y que caracteriza triángulos equiláteros en su valor máximo. Ahora bien, si sobre cada uno de los cuatro triángulos T_i del cuadrilátero calculamos g_i y hacemos

$$\mu(Q) = 8 \min\{g_1, g_2, g_3, g_4\} \quad (5.21)$$

Esta es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy y sobre cuadriláteros convexos tiene su valor óptimo de 1 para un cuadrado. La demostración de esto se puede revisar en el reporte técnico de Joe [168] de 2008. Con esta medida es posible detectar si el cuadrilátero es degenerado a triángulo cuando $\mu(Q) = 0$ e incluso no convexo $\mu(Q) < 0$ (con un entrante del tipo *boomerang*).

Veamos cómo son las curvas de nivel de $\mu(Q)$. Para observar el comportamiento de esta medida consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.15, se aprecian las curvas de nivel de $\mu(Q)$.

La superficie está formada por dos secciones de paraboloides y un plano. Un intervalo de aceptabilidad que proponemos para caracterizar cuadrados bajo esta medida es $[.95, 1]$.

Debido a que la medida $\mu(Q)$ no es una función suave, no es posible usarla directamente para mejorar la malla por medio de un método basado en el gradiente, es necesario usar un método no estándar. En el siguiente capítulo tocaremos el tema del mejoramiento de la calidad de una malla optimizando medidas de calidad.

Un extensión de la medida (5.20) fue hecha por Liu y Joe en 1994, véase [211], para caracterizar tetraedros regulares basado en el número de condición del mapeo trilineal. A ésta extensión Liu y Joe le llaman *mean ratio* debido a que el número de condición es la razón de la media geométrica y la media aritmética de los valores propios de la matriz asociada al mapeo trilineal, véase [211, 212]. La medida de calidad *mean ratio* se

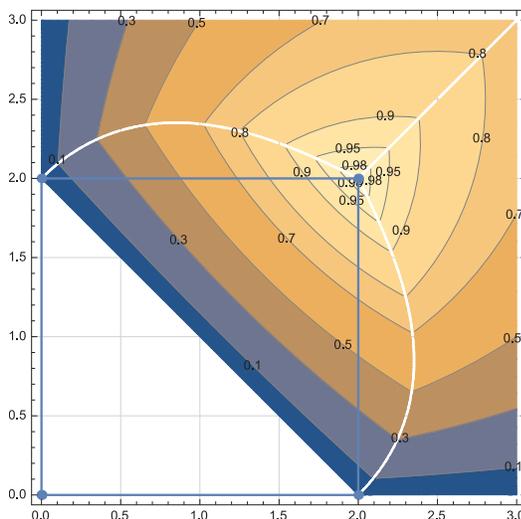


Figura 5.15: Curvas de nivel para la medida de calidad de Lo (5.21) que detecta cuadrados.

puede usar para caracterizar hexaedros regulares, véase el trabajo de Knupp [190, 191], de Escobar *et al.* [101], de Munson [236], de Montenegro [234], de Gargallo-Peiró *et al.* [132], de Ruiz-Girones [274]. En general, una extensión a un n -dimensional simplex viene descrita en la tesis de Liu [211]. Actualmente, una extensión de esta medida se ha empleado para cuantificar la distorsión de elementos curvos y mejorar su forma, véase Gargallo-Peiró *et al.* [133, 134, 135].

Como observación final, con una implementación adecuada de $\mu(Q)$ podríamos identificar cuadriláteros no convexos invertidos e incluso con orientación negativa. Pero es suficiente que la medida detecte la forma degenerada a un triángulo ya que si la medida de calidad tiene un valor negativo para elementos no convexos, bastaría truncarla a cero: no nos interesa los valores negativos de $\mu(Q)$. Una forma hacer esto es sustituir

$$\text{área}(T) = \frac{1}{2}(\text{área}(T) + |\text{área}(T)|) = (\text{área}(T) - 0)_+ \quad (5.22)$$

5.4.6. Cuadrados: Hua 1995

En 1995, Hua [152] en su trabajo de tesis doctoral (en chino) revisa la medida de calidad sobre un triángulo T

$$g = \frac{\vec{a}^t J_2 \vec{b}}{a^2 + b^2} = \frac{2\text{área}(T)}{a^2 + b^2}$$

con $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Como hemos revisado en el Apéndice A, esta medida es el recíproco del número de condición del mapeo lineal entre un triángulo cualquiera y un triángulo

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

rectángulo. Hua propone usar la media geométrica del valor de esta medida sobre los 4 triángulos del cuadrilátero. Para ilustrar la medida, diremos que el cuadrilátero Q está formado por los vértices A, B, C y D cuyos lados son a, b, c y d como se muestra en la Figura 5.16.

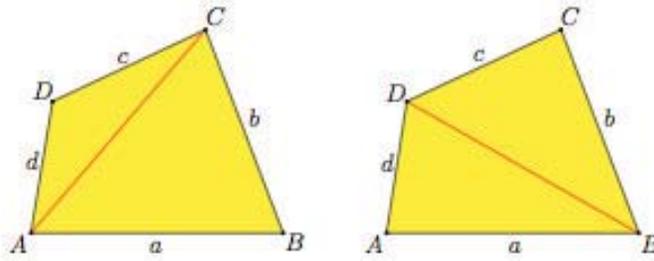


Figura 5.16: Descomposición de un cuadrilátero en cuatro triángulos.

La medida que propone Hua se puede escribir como

$$\mu(Q) = 2\sqrt[4]{g_1 g_2 g_3 g_4} = 2\sqrt[4]{\frac{\|a \times d\|}{a^2 + d^2} \cdot \frac{\|b \times a\|}{b^2 + a^2} \cdot \frac{\|c \times b\|}{c^2 + b^2} \cdot \frac{\|d \times c\|}{d^2 + c^2}} \quad (5.23)$$

donde $\|a \times d\|$ representa dos veces el área (con signo) del triángulo $T(A, B, D)$.

Hua observa que el valor 1, óptimo de $\mu(Q)$, se logra solamente cuando Q es un cuadrado. Esta medida representa una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy para cuadriláteros ya que: es continua, acotada, invariante bajo transformaciones rígidas e independiente de escala. En el óptimo con valor 1 permite identificar cuadrados y nos permite identificar cuadriláteros degenerados a triángulos e incluso con una implementación adecuada podríamos identificar cuadriláteros no convexos: con un entrante, invertidos e incluso con orientación negativa.

Veamos cómo son las curvas de nivel de $\mu(Q)$. Para observar el comportamiento de esta medida consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.17 se aprecian las curvas de nivel.

Esta medida es continuamente diferenciable, por lo que esta medida o una función conveniente de ella podría ser candidata para suavizar mallas, véas la subsección sobre la métrica de Oddy. Un rango de aceptabilidad para que Q pueda ser considerado un cuadrado bajo esta medida es $[\.99, 1]$, debido a que la superficie $z = \mu(Q)$ es casi plana y sus curvas de nivel son casi círculos cerca del óptimo.

En la literatura hemos encontrado que esta medida es muy utilizada por algunos autores para verificar que los métodos que sugieren para suavizar mallas cuentan con la calidad deseada: que sean cuadrados o cerca de estarlo. Uno de estos trabajos es de 2013 de Mei *et. al* [229] quienes proponen que los vértices de Q se encuentren sobre los diámetros de un mismo círculo. Este método es una modificación de un método de Balendran [20] desarrollado en 1999. En el método modificado de Balendran es necesario

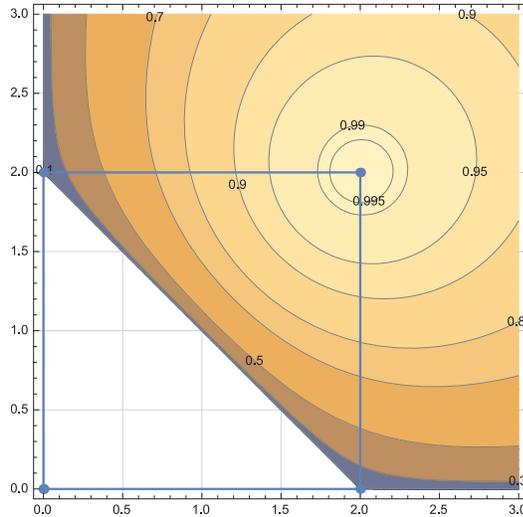


Figura 5.17: Curvas de nivel para la medida de calidad de Hua (5.23) que detecta cuadrados.

resolver un sistema lineal de 8 ecuaciones en cada paso iterativo lo cual puede resultar poco eficiente.

5.4.7. Cuadrados: Shape de Knupp 2000

Otra de las medidas basadas en el número de condición del mapeo lineal κ_2 es la medida definida por Knupp [190]:

$$\mu(Q) = 2 \min \left\{ \frac{\|a \times d\|}{a^2 + d^2}, \frac{\|b \times a\|}{b^2 + a^2}, \frac{\|c \times b\|}{c^2 + b^2}, \frac{\|d \times c\|}{d^2 + c^2} \right\} \quad (5.24)$$

Esta medida es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy ya que es continua, está acotada, detecta cuadriláteros degenerados (incluyendo no convexos), en el óptimo de valor 1 se obtiene un cuadrado y es invariante bajo transformaciones rígidas.

Para observar el comportamiento de las curvas de nivel para esta medida consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$ y $P_3(0,1)$ y el cuarto $P_4(x,y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.18 se aprecian las curvas de nivel.

Como se observa, las curvas de nivel para esta medida son casi círculos cerca del óptimo, por lo que el tamaño del intervalo de aceptabilidad debe ser pequeño. En la misma línea que la medida de Hua, un intervalo de aceptabilidad que se sugiere para esta medida es $[\.99, 1]$.

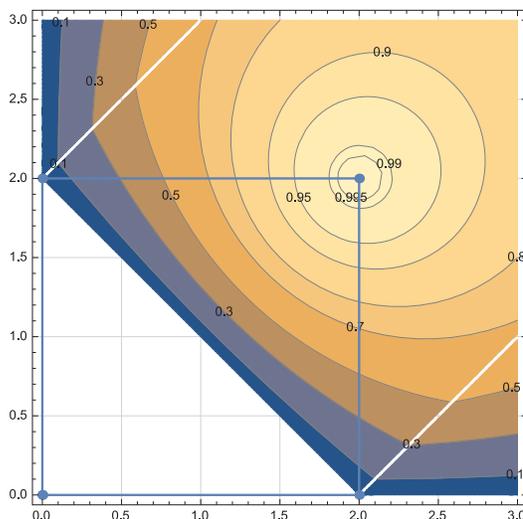


Figura 5.18: Curvas de nivel para la medida de calidad Shape de Knupp (5.24) que detecta cuadrados.

5.4.8. Cuadrados: Harmonic mean 2017

Si $\mu(T)$ es una buena medida de calidad para un triángulo, véase el Apéndice A, la media armónica de los valores de esta medida sobre los cuatro triángulos T_i del cuadrilátero

$$\mu(Q) = \sigma \frac{4}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu(T_i)}} \quad (5.25)$$

representa una buena medida de calidad para cuadriláteros, ya que hereda las propiedades de la medida $\mu(T)$: es continua, acotada, es invariante bajo transformaciones rígidas, es a-dimensionado e invariante bajo escala. El valor σ es un parámetro de normalización.

Para fines prácticos, es recomendable reescribir (5.25) en la forma

$$\mu(Q) = \frac{4\sigma\mu(T_1)\mu(T_2)\mu(T_3)\mu(T_4)}{\mu(T_2)\mu(T_3)\mu(T_4) + \mu(T_1)\mu(T_3)\mu(T_4) + \mu(T_1)\mu(T_2)\mu(T_4) + \mu(T_1)\mu(T_2)\mu(T_3)} \quad (5.26)$$

para evitar el cero en el cociente cuando algún triángulo degenera a segmento. Una vez reescrita como (5.26), esta medida detecta elementos degenerados a triángulos.

La idea detrás de esta medida es muy simple. Si $\mu(T)$ es una medida de calidad para un triángulo T , $1/\mu(T)$, mide la distorsión de T con respecto a la forma ideal T^* (triángulo equilátero o rectángulo isósceles, etc.). Usualmente $1/\mu(T)$ corresponde a la energía acumulada en el triángulo al ser deformado, véase [164]. Ahora bien, la

distorsión total del cuadrilátero se puede escribir como el promedio de la distorsión de todos los elementos triangulares del cuadrilátero en la forma

$$\delta(Q) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\mu(T_1)} + \frac{1}{\mu(T_2)} + \frac{1}{\mu(T_3)} + \frac{1}{\mu(T_4)} \right] \quad (5.27)$$

Siguiendo a Ivanenko [164], usualmente el máximo valor de una medida de calidad corresponde a la mínima densidad de energía acumulada sobre la celda. Por lo que el recíproco de $\delta(Q)$ debe representar una medida de calidad para el cuadrilátero Q . El recíproco de $\delta(Q)$ es la media armónica de los valores $\mu(T_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

La medida que proponemos (5.25) es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy para cuadriláteros siempre que $\mu(T)$ sea una buena medida de calidad para triángulos en el sentido Field–Oddy. Lo que resta es señalar la forma geométrica ideal Q^* que es posible detectar usando (5.25).

Primero hagamos algunas observaciones numéricas con diferentes medidas de calidad $\mu(T)$ para triángulos. Usemos la medida propuesta por Lo [215] en 1985 y revisada por Bhatia y Lawrence en 1990 [44]:

$$\mu_5(T) = 4\sqrt{3} \frac{\text{área}(T)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}, \quad (5.28)$$

Esta medida está asociada al número de condición del mapeo lineal, véase el Apéndice A.

Si sobre cada triángulo T_i del cuadrilátero calculamos el valor $\mu_5(T_i)$ y a estos valores calculamos la media armónica (5.25), obtendremos una buena medida de calidad para cuadriláteros, ya que, como hemos dicho, todas las propiedades deseables para una buena medida de calidad son heredadas de las propiedades de $\mu_5(T)$. En (5.25) hemos usado la constante de normalización $\sigma = 2/\sqrt{3}$. Esta medida detecta cuadrados en su valor máximo de 1, detecta elementos degenerados a triángulo cuando su valor es 0, es suave, es adimensionada, cuasi convexa, y es independiente de movimientos rígidos.

Para observar el comportamiento de las curvas de nivel para esta medida consideremos de nueva cuenta, los cuadriláteros Q formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. Las curvas de nivel para $\mu(Q)$ son casi círculos, observe la Figura 5.19.

Para esta medida sugerimos usar un intervalo de aceptabilidad de $[.99, 1]$.

La métrica $\delta(Q)$, el recíproco de la medida $\mu(Q)$, ha sido empleada por Knupp [190] y por Ruíz-Gironés *et al.* [274] para medir la distorsión de un cuadrilátero.

Ahora bien, si usamos por medida de calidad para un triángulo al recíproco del número de condición para el mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles, véase la sección A.3,

$$\mu(T) = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{\text{área}(T)}{a^2 + b^2} = \frac{\|a \times b\|}{2(a^2 + b^2)},$$

la media armónica de esta medida sobre los cuatro triángulos también representa una buena medida de calidad para cuadriláteros. En la Figura 5.20 se aprecian sus curvas

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

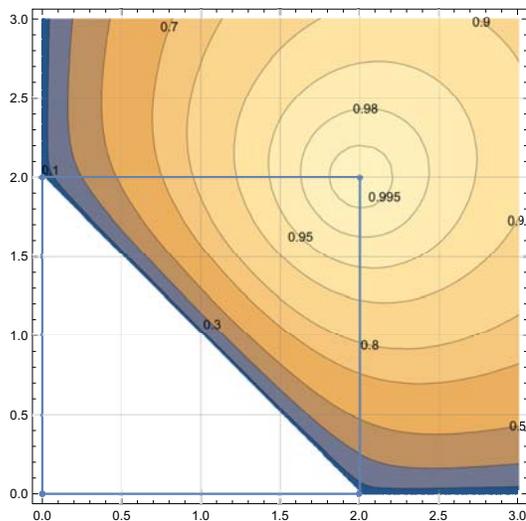


Figura 5.19: Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero.

de nivel. Hemos usado la misma familia de cuadriláteros de los ejemplos anteriores en las que tres vértices son fijos, para observar $\mu(Q)$ como función de dos variables.

De nueva cuenta, los atributos de esta medida de calidad para triángulos son heredados para $\mu(Q)$. En esta ocasión, para (5.26) hemos usado la constante de normalización $\sigma = 2$. Esta medida detecta cuadrados en su valor máximo de 1. Para esta medida sugerimos usar de nueva cuenta un intervalo de aceptabilidad de $[\.99, 1]$.

Ahora bien, si usamos la clásica medida de calidad *radius ratio*, el cociente de los radios de los círculos inscrito y circunscrito de un triángulo T , véase el Apéndice A,

$$\mu(T) = 2 \frac{r}{R} = 16 \frac{A^2}{l_1 l_2 l_3 (l_1 + l_2 + l_3)}$$

la media armónica de esta medida sobre los cuatro triángulos también representa una buena medida de calidad para cuadriláteros en el sentido Field–Oddy y detecta cuadrados en su valor máximo. Nuevamente, los atributos de esta medida de calidad para triángulos son heredados para $\mu(Q)$.

Para observar las curvas de nivel, de nueva cuenta consideremos los cuadriláteros Q formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.21 se aprecia la forma de las curvas de nivel.

Para esta medida de calidad, usamos la constante de normalización $\sigma = 4/(2 + \sqrt{2})$, de manera que en el valor máximo de $\mu(Q)$ de 1, detecta cuadrados y es capaz de detectar elementos degenerados a triángulo cuando su valor es 0. Por la forma de las curvas de nivel, ver Figura 5.21, nosotros sugerimos usar un intervalo de aceptabilidad

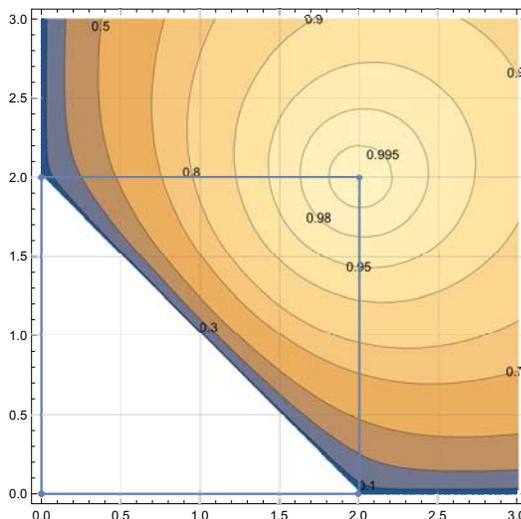


Figura 5.20: Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles.

de [.99, 1].

Otra medida de calidad para triángulos que hemos probado con mucho éxito es

$$\mu(T) = \frac{4\sqrt{3} A_T}{9 R^2} = \frac{64\sqrt{3}}{9} \frac{A_T^3}{l_1^2 l_2^2 l_3^2} \quad (5.29)$$

la cual es una buena medida de calidad para triángulos y en su valor óptimo de 1 detecta triángulos equiláteros. Esta medida es ampliamente discutida por Shewchuk en [287].

Nuevamente, si usamos como medida la media armónica de los valores $\mu(T_i)$ sobre los cuatro triángulos T_i , la medida (5.26) representa una buena medida de calidad y caracteriza cuadrados en su valor máximo.

Consideremos los cuadriláteros Q formados por los vértices, $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$ y $P_3(0,1)$ y el cuarto $P_4(x,y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.22 se aprecia la forma de las curvas de nivel para $z = \mu(Q)$.

Nuevamente, los atributos de esta medida de calidad para triángulos son heredados para $\mu(Q)$. Por la forma de las curvas de nivel, para esta medida sugerimos usar un intervalo de aceptabilidad de [.99, 1].

Una vez que hemos experimentado con diferentes medidas de calidad para triángulos, podemos formular el siguiente:

Teorema 5.2 *Si $\mu(T)$ es una buena medida de calidad para triángulos en el sentido Field–Oddy de tal manera que un triángulo rectángulo isósceles tiene la menor energía*

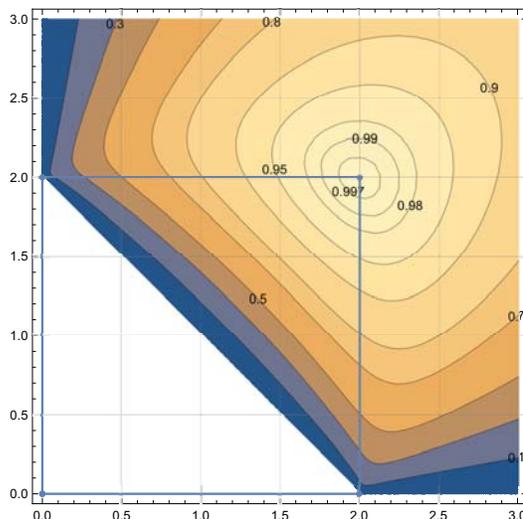


Figura 5.21: Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando *radius ratio*.

contenida entre todos los triángulos rectángulos, entonces la media armónica (5.25) de los valores $\mu(T_i)$ de los 4 triángulos T_i del cuadrilátero, es una buena medida de calidad para cuadriláteros en el sentido Field–Oddy y caracteriza cuadrados en su valor máximo.

La demostración es sencilla, los 4 triángulos de Q deben ser congruentes para tener la misma energía y formar el cuadrilátero. De ahí se sigue que los triángulos deben ser triángulos rectángulos o no forman un cuadrilátero. Ahora bien, si la menor energía contenida para triángulos rectángulos sólo ocurre cuando son triángulos rectángulos isósceles, entonces $\mu(Q)$ solamente detecta cuadrados en su valor máximo.

Como es de esperar, algunas de estas medidas pueden no ser suaves si la medida para triángulos no lo es. Un ejemplo de esto ocurre cuando usamos la medida geométrica de Cavendish para un triángulo, véase el Apéndice A,

$$\mu(T) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{A}{l_{\text{máx}}^2}. \quad (5.30)$$

Esta medida no es suave por lo que la media armónica de $\mu(T_i)$ tampoco lo es. Para observar el comportamiento de las curvas de nivel para esta medida consideremos de nueva cuenta, los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$ y $P_3(0,1)$ y el cuarto $P_4(x,y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. En la Figura 5.23 se aprecian las curvas de nivel. Observe las líneas blancas que corresponde a los puntos donde la medida no es continuamente diferenciable.

Para finalizar, si dos medidas de calidad para triángulos $\mu_1(T)$ y $\mu_2(T)$ son buenas medidas de calidad en el sentido Field–Oddy y son equivalentes, entonces las medias

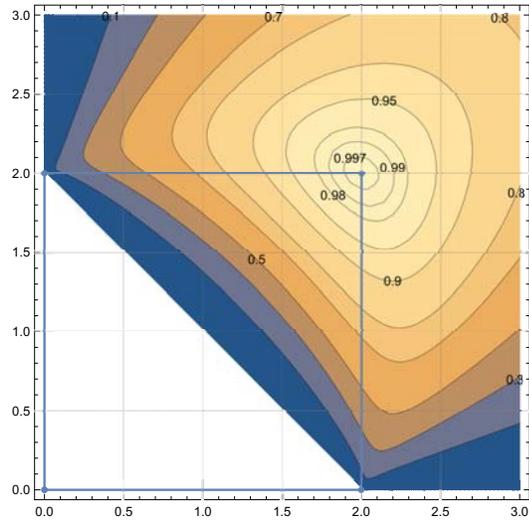


Figura 5.22: Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando (5.29).

armónicas $\mu_1(Q)$ y $\mu_2(Q)$ basadas en estas medidas son equivalentes. Con todas ellas detectamos cuadrados en su valor máximo y la diferencia sustancial será el costo de su implantación. La medida $\mu(Q)$ que presentamos generaliza la medida que hoy en día conocida como *mean ratio* para cuadriláteros ya que es posible usar casi cualquier medida de calidad $\mu(T)$ para triángulos.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

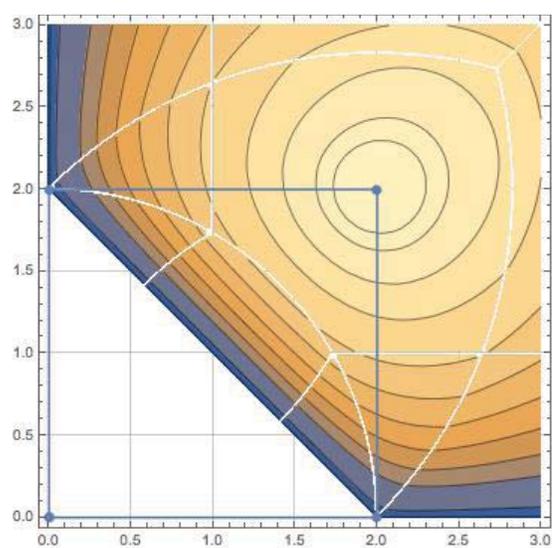


Figura 5.23: Curvas de nivel para la medida Harmonic mean usando la medida $\mu(T)$ de Cavendish.

5.4.9. Rectángulos: Lo 1989

En 1989, Lo [216] revisa la medida sobre triángulos $T(p, q, r)$ que propuso en 1985 [215]

$$g = 4\sqrt{3} \frac{\text{área}(T)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$$

donde l_i es la longitud de los lados del triángulo. Esta medida tiene su valor máximo de 1 para triángulos equiláteros. Lo propone calcular cada uno de esos valores sobre los cuatro triángulos T_i que se forman de un cuadrilátero, ver Figura 5.6, pero ordenándolos de manera que

$$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4$$

y propone como medida para un cuadrilátero el cociente

$$\mu(Q) = \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4}. \quad (5.31)$$

Lo observa que el valor óptimo de 1 solamente se alcanza para rectángulos. Para demostrar esto, es necesario observar que la única forma para que (5.31) sea 1, es que los cuatro valores g_i sean iguales. Debido a que todos los triángulos comparten un lado, la única forma que esto ocurra es que sean congruentes y por consiguiente formen un rectángulo.

Esta es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, ya que es continua, a -dimensional, acotada, invariante a movimientos rígidos, y es posible identificar cuadriláteros degenerados a triángulos e incluso es posible identificar si son no convexos (cuadriláteros con una sola entrante).

Nuevamente, es necesario recalcar que la medida de calidad que usa Lo para triángulos es el recíproco del número de condición $\mu(T) = 1/\kappa_2(T)$ para el mapeo lineal entre un triángulo equilátero y otro general, discutida en la subsección A.3, del Apéndice A.

Para observar el comportamiento de esta medida consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. Las curvas de nivel de esta medida se aprecian en la Figura 5.24.

Esta medida es usada en 2004 por Menendez Díaz *et al.* [230] para comprobar que el método para suavizar mallas que proponen es eficaz: produce cuadrados (esta medida caracteriza rectángulos). El método de Menéndez Díaz *et al.* es muy sencillo, proponen que el punto medio de una diagonal sea el centro de un círculo que contenga a los otros dos vértices, repite esta idea con la otra diagonal en forma simultánea por lo que resuelve un sistema de 8×8 para un parámetro o *shape factor* ρ determinado que representa el diámetro del círculo donde deben de estar los vértices. Este suavizamiento de las celdas conocido como *suavizamiento geométrico*, lo realizan cambiando cada cierto número de iteraciones para un *shape factor* ρ fijo, hasta que la malla presente una calidad $\mu(Q)$ aceptable.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

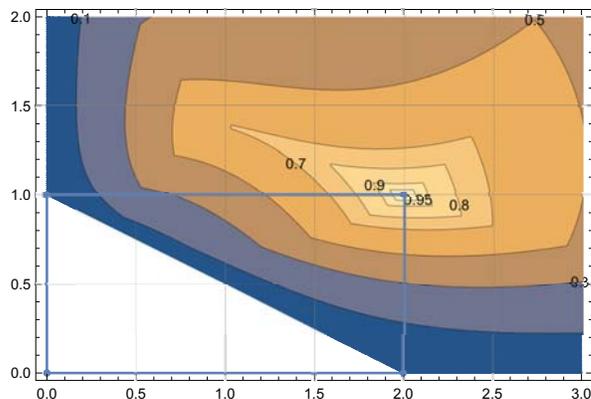


Figura 5.24: Curvas de nivel para la medida de calidad de Lo 1989 (5.31) que detecta rectángulos.

En 2007, Park *et al.* [246] construyen de manera automática mallas no estructuradas formadas por cuadriláteros a partir de una triangulación, usan la medida de Lo (5.31) para decidir la forma de reconectar nodos de la malla.

En los experimentos que hemos realizados hemos encontramos que esta medida tiene más puntos críticos. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0, 0)$, $P_2(4, 0)$ y $P_3(0, 1)$ y el cuarto $P_4(x, y)$ lo dejamos libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables la medida de Lo (5.31), la cual es una función de dos variables. La forma de las curvas de nivel de la superficie $\mu(Q)$ nos hacen ver que hay otro punto crítico, diferente al esperado (4, 1), véase la Figura 5.25.

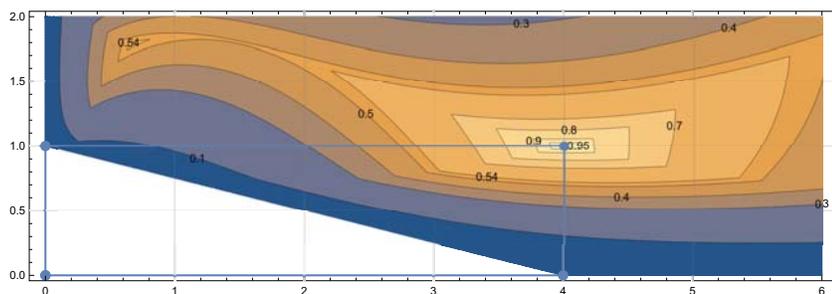


Figura 5.25: Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de *aspect ratio* 4.

Por la simetría del problema estimamos que el punto P'_4 que se obtiene al reflejar P_1 sobre la recta P_2P_3 es un candidato a ser óptimo local. En conclusión, si usamos esta medida dentro de un proceso de optimización local para mejorar la calidad de las

celdas podríamos obtener un punto crítico para esta medida y sin embargo la celda se encuentre lejos de ser un rectángulo. En el siguiente capítulo revisaremos de nueva cuenta esta medida para el mejora de calidad de una malla.

La función cociente que propone Lo es muy interesante y nosotros hemos usado esa función en este trabajo para caracterizar paralelogramos. La metodología de Lo puede ser aplicada a casi cualquier medida $\mu(T)$ del triángulo, en cuyo valor óptimo de $\mu(Q)$ tendrá el mismo valor $g_i = \mu(T_i)$. Sin embargo, no necesariamente caracterizamos un cuadrilátero para el cual el óptimo de $\mu(T)$ se logre, sólo identificaremos cuando las cuatro cantidades son iguales. Por ejemplo, si usamos $\mu(T) = 1/\kappa_2$ el recíproco número de condición del mapeo lineal entre un triángulo rectángulo isósces y otro en posición general, discutida en la subsección A.3, del Apéndice A

$$g_i = \frac{2\text{área}(T_i)}{a^2 + b^2} = \frac{\vec{a}^t J_2 \vec{b}}{a^2 + b^2}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y reordenamos de manera que $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4$ y definimos de $\mu(Q) = g_1 g_2 / g_3 g_4$, el valor máximo de 1 se logra cuando todas la cantidades g_i son iguales; lo cual solamente ocurre para paralelogramos.

5.4.10. Rectángulos: van Rens 1998

Algunas medidas para caracterizar cuadriláteros se basan en el cálculo de los ángulos interiores. Una de estas medidas de calidad es descrita en 1998 por van Rens *et al.* [322], quienes proponen calcular los ángulos interiores θ_k y define

$$\mu(Q) = \prod_{k=1}^4 \left(1 - \left| \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_k}{\frac{\pi}{2}} \right| \right)$$

Esta es una función continua, a-dimensional donde $0 \leq \mu(Q) \leq 1$. Es fácil ver que $\mu(Q) = 0$ si el cuadrilátero está deformado a un triángulo, y $\mu(Q) = 1$ cuando se tiene un rectángulo.

En ese artículo van Rens *et al.* proponen un algoritmo para construir mallas no estructuradas formadas por cuadriláteros a partir de una triangulación previa. El algoritmo que proponen garantiza que los cuadriláteros obtenidos son cercanos a ser rectángulos controlando el *aspect ratio*. Observe que esta medida no es posible identificar si el cuadrilátero es no convexo.

5.4.11. Rectángulos: Wu 2011

Como hemos señalado, algunos autores parten de una malla de triángulos para formar mallas de cuadriláteros reconectando nodos usando un criterio de calidad de los cuadriláteros y posteriormente suavizan las celdas. Tanto para garantizar la calidad como para suavizar las celdas emplean medidas basadas en características geométricas de los elementos. Wu [333] trabaja en esta dirección y propone en 2011 una medida de

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

calidad para caracterizar rectángulos, esta medida también está basada en el cálculo de los ángulos interiores. Wu usa metodología de Lo [216]: ordena los ángulos interiores de forma que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_4$ y propone la medida

$$\mu(Q) = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_3\theta_4}.$$

Wu observa que esta es una medida de calidad que alcanza su óptimo con valor 1, lo cual se logra sobre rectángulos. Sin embargo, esta no es una buena medida en el sentido de Field–Oddy, ya que no es posible detectar cuadriláteros degenerado ni en triángulos ni en segmentos.

Wu propone en su trabajo combinar esta medida con una medida simple del *aspect ratio* y propone optimizar la combinación de ambas para construir mallas formadas por cuadriláteros de gran calidad: cercanas a ser cuadrados.

5.4.12. Rectángulos: Wada 2008

Otra medida que hemos encontrado basada en los ángulos internos del cuadrilátero, es aquella que formulan Wada, Hayashi y Kikuchi [325]

$$\mu(Q) = 1 - \frac{1}{2\pi} \left(|\theta_1 - \frac{\pi}{2}| + |\theta_2 - \frac{\pi}{2}| + |\theta_3 - \frac{\pi}{2}| + |\theta_4 - \frac{\pi}{2}| \right)$$

es básicamente un promedio normalizado de la desviación del ángulo con respecto a $\pi/2$. Una norma basada en los ángulos interiores. Al igual que la medida propuesta por Wu para rectángulos, esta no es una buena medida calidad, pero es útil para identificar si los ángulos interiores de Q que están cerca de $\pi/2$, por lo que $\mu(Q)$ permite caracterizar rectángulos.

5.4.13. Rectángulos: Remacle 2012

En 2012, Remacle *et al.* [258] describen el algoritmo *Blossom–Quad* para construir una malla no estructurada formada por cuadriláteros a partir de una triangulación previa y proponen usar una medida basada en el ángulo interior

$$\mu(Q) = \max \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \max_k \left\{ \left| \frac{\pi}{2} - \theta_k \right| \right\}, 0 \right\}$$

para determinar la calidad de los de los elementos. Se observa que la medida es 1 cuando se tiene un rectángulo lo que en la literatura llaman *perfect quadrilateral* y 0 si alguno de los ángulos es mayor o igual de π ; esto es, cuando se tiene el cuadrilátero degenerado a triángulo o es no convexo. Esta medida es una buena medida de calidad para cuadriláteros. Remacle *et al.* utilizan una función de costo para minimizar los elementos que no son deseables y con ello implementan un algoritmo que les garantiza, en términos estadísticos, que la malla construida con su algoritmo es adecuada. Esta medida esta basada en una medida más elaborada propuesta por Borouchaki y Frey [51]. Para esta medida sugerimos usar un intervalo de aceptabilidad de $[\cdot 925, 1]$.

5.4.14. Rectángulos: Rectangles 2015

Como hemos revisado, algunas medidas para caracterizar rectángulos están basada en medir los ángulos interiores. Otra forma de lograrlo es pedir que Q sea un paralelogramo y que el mayor de sus ángulos interiores sea recto. Esto es, usamos una medida que relate la forma de Q con una que imponga una condición particular para un rectángulo.

Nuestro interés es caracterizar de manera geométrica a los rectángulos. Un resultado muy conocido en la literatura es el siguiente:

Teorema 5.3 *Sea Q un cuadrilátero de vértices A, B, C y D cuyos lados son a, b, c y d como se muestra en la Figura 5.16. El cuadrilátero Q es un rectángulo si y sólo si el área del cuadrilátero se escribe como*

$$a_R = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \quad (5.32)$$

La prueba de este teorema puede consultarse en Josefsson [169]. Lo interesante de este teorema es que podemos contar con una expresión analítica para el área del rectángulo ideal cercano a Q . Esta expresión nos permite comparar el cuadrado del área de Q para identificar que tan lejos se encuentra Q de ser un rectángulo.

Siguiendo la prueba del teorema, es fácil ver que el área a_c de cualquier cuadrilátero convexo satisface

$$2a_c \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

y que la igualdad solamente se alcanza si Q es rectángulo. Usando esta idea proponemos como medida de calidad a

$$\mu(Q) = \frac{4a_-}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}} \quad (5.33)$$

donde

$$a_- = \text{mín} \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

es la menor área de los cuatro triángulos en que podemos dividir Q por sus diagonales. Esta es una buena medida en el sentido de Field–Oddy, ya que es continua, está acotada, es invariante a rotaciones y es posible identificar cuadriláteros degenerados (a triángulo) así como identificar si el cuadrilátero es no convexo). Esta medida alcanza su valor máximo de 1 para rectángulos.

Para por observar el comportamiento de esta medida consideremos los cuadriláteros formados por los vértices, $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$ y $P_3(0,1)$ y el cuarto $P_4(x,y)$ lo dejamos

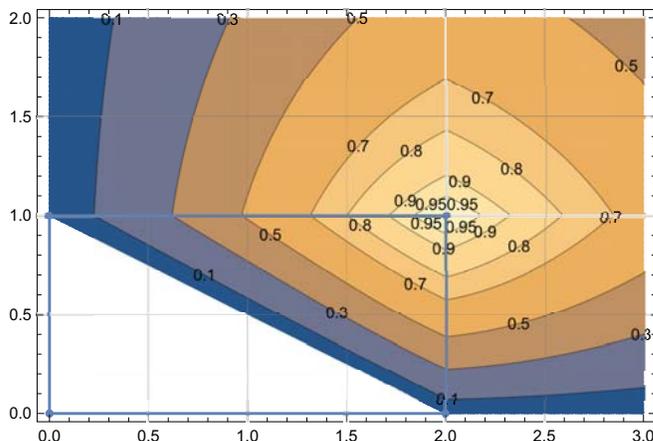


Figura 5.26: Curvas de nivel para la medida de calidad Rectangles 2015 (5.33) que detecta rectángulos.

libre, de esta manera $\mu(Q)$ es una función de dos variables. Las curvas de nivel de esta medida se aprecian en la Figura 5.26.

Por la forma que presentan las curvas de nivel, esta medida permite caracterizar con eficacia los cuadriláteros cercanos a ser rectángulos y su cálculo es muy sencillo. Un intervalo de aceptabilidad para considerar que el cuadrilátero está cerca de ser un rectángulo bajo esta medida es $[.95, 1]$.

5.4.15. Rectángulos: MinRect 2015

Hasta el momento hemos revisado algunas medidas que caracterizan paralelogramos, cuadrados y rectángulos y hemos señalado algunos intervalos de aceptabilidad para considerar que un cuadrilátero esté cerca de tener la forma geométrica ideal. Fuera de ese intervalo decimos que el cuadrilátero es distorsionado. Sin embargo, no hemos reparado en cómo es o cuál es el cuadrado o rectángulo al que se encuentra cercano el cuadrilátero en cuestión.

Un problema muy interesante en geometría computacional es: dada una nube de puntos calcular el rectángulo de área mínima que los contiene. Se sabe que el rectángulo de área mínima contiene un lado del casco convexo, véase Freeman y Shapira 1975 [122]. Por consiguiente, el problema se puede replantear como: calcular el rectángulo de área mínima que contenga a un polígono convexo, vea la Figura 5.27.

Un algoritmo muy estudiado en geometría computacional para resolver este tipo de problemas es el *rotating calipers* o pinzas de rotación (véase Toussaint, [317] y Pirzadeh, [255]). La idea de este algoritmo es estimar un primer rectángulo para luego ajustar sus dimensiones usando rotaciones con respecto a uno de sus lados de manera que contenga al casco convexo, *convex hull*, y rotar esa caja haciendo coincidir un lado del rectángulo

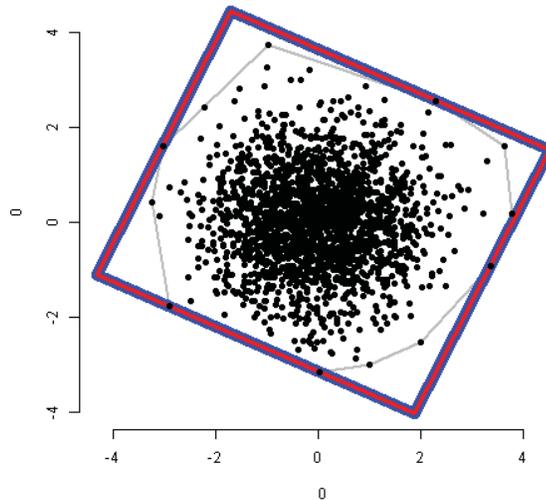


Figura 5.27: Rectángulo de área mínima que contiene al *convex hull* de la nube de puntos.

con otro del casco convexo y reajustar de nuevo el rectángulo.

El casco convexo de una nube de n puntos se calcula en $O(n \log n)$ pasos. El cálculo del rectángulo de área mínima sobre el casco convexo se calcula en $O(n)$ pasos (se calcula un rectángulo por cada lado), ver [317, 255]. Una vez calculado el casco convexo debemos proyectar los vértices sobre uno de los lados de ese polígono y ajustar el tamaño del rectángulo, ver Eberly [94]. Esta idea es muy atractiva para n pequeño ya que el costo del algoritmo es de orden $O(n^2)$.

Nosotros proponemos usar el rectángulo de área mínima para definir una medida de distorsión del cuadrilátero en el sentido de que tan cerca o lejos se encuentra Q de ese rectángulo. Para calcular el rectángulo que encierra al cuadrilátero proponemos usar proyecciones entre vectores de la siguiente forma:

- 1) Para un segmento del cuadrilátero, y desde uno de sus vértices, se forma el vector que contenga al segmento y se proyectan los vectores que se forman con los otros dos vértices.
- 2) con estos vectores se ajusta el tamaño de la base del rectángulo.
- 3) Con los vectores ortogonales a la proyección se determina la altura del rectángulo.
1. Repetir 1)–3) con los otros lados.
- 4 El rectángulo de menor área de los cuatro segmentos es el rectángulo de área mínima.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

La idea geométrica del paso 1 de este algoritmo se observa en la Figura 5.28.

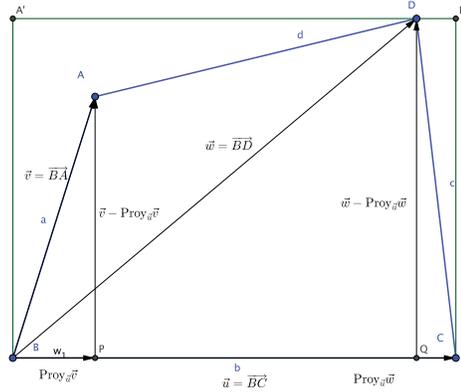


Figura 5.28: El rectángulo que contiene al cuadrilátero y un lado se puede calcular usando proyección de vectores.

Ejemplo: Considere el cuadrilátero formado por los puntos $P(-6, 4)$, $Q(5, -4)$, $R(2, 4)$ y $S(-4, 6)$, sobre cada segmento calculemos el rectángulo que contiene a este lado y a todo el cuadrilátero. En la Figura 5.29 se observan los cuatro rectángulos que se calculan con el procedimiento anterior.

Haciendo los cálculos tenemos que

- para el segmento PQ de longitud $10.8404u$, el área del rectángulo de menor área que encierra al cuadrilátero y contiene a PQ es de $108.4859u^2$.
- Para el segmento QR de longitud $8.4752u$, el área del rectángulo de menor área que encierra al cuadrilátero y contiene a QR es de $126.2199u^2$.
- Para el segmento RS de longitud $6.2706u$, el área del rectángulo de menor área que encierra al cuadrilátero y contiene a RS es de $116.6726u^2$
- Para el segmento SP de longitud $10.2240u$ el área del rectángulo de menor área que encierra al cuadrilátero y contiene a SP es de $108.4859u^2$.

Como hemos dicho, Freeman y Shapira [122] y Eberly [94] muestran que el rectángulo de área mínima de polígono convexo contiene a uno de sus lados. Para el caso de un cuadrilátero, hemos observado que, usualmente, ese rectángulo contiene al lado más grande del cuadrilátero.

En 1993, Lassak [207] demuestra que el área del casco convexo (de la nube de puntos) es menor o igual que el área del rectángulo de área mínima. De esto, se sigue que si a_c es el área del cuadrilátero convexo Q y a_R es el área del rectángulo de área mínima entonces

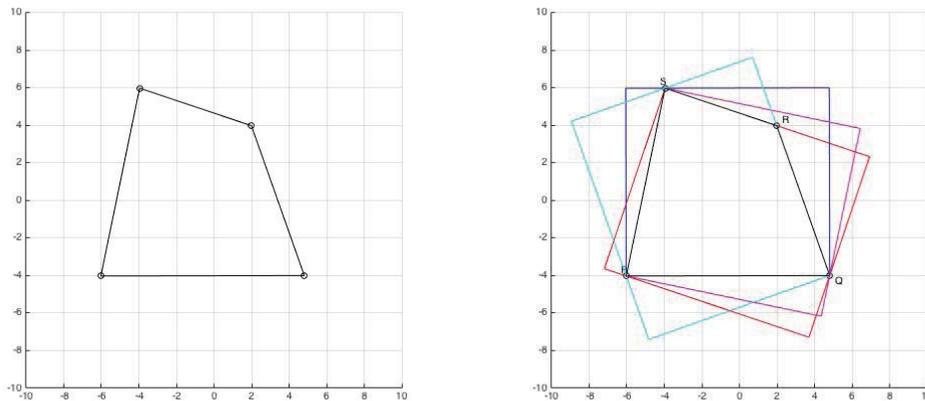


Figura 5.29: Un cuadrilátero de referencia y los cuatro rectángulos que contienen a ese cuadrilátero y uno de sus lados.

$$0 \leq 2a_c - a_R.$$

Ahora bien, si Q es no convexo (con un entrante) $2a_c - a_R < 0$.

Por lo anterior proponemos

$$\mu(Q) = \frac{2a_c - a_R}{a_R}$$

como medida de calidad geométrica para caracterizar rectángulos.

La medida así definida $\mu(Q)$ es una buena medida de calidad en el sentido de Field–Oddy, ya que es continua, acotada invariante a transformaciones rígidas, su valor máximo de 1 solamente para rectángulos y nos permite identificar cuadriláteros degenerados a un triángulo, ya que $\mu(Q) = 0$ solamente cuando Q es un triángulo. Para esta medida sugerimos usar un intervalo de aceptabilidad de $[.9, 1]$.

Otra medida que proponemos usar

$$\mu(Q) = \frac{2a_-}{a_R}$$

donde

$$a_- = \text{mín} \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad a_i = \text{área}(T_i),$$

es el área más pequeña de los 4 triángulos del cuadrilátero. Esta también es una buena medida en el sentido de Field–Oddy con la cual podemos identificar cuadriláteros degenerados a triángulo y cuadriláteros no convexos.

Como observación final, es posible que se obtengan dos rectángulos de área mínima para Q (con diferente *aspect ratio*), cualquiera de los dos será útil para la medida que proponemos.

5.5. Algunas medidas para el *aspect ratio*

Como hemos mencionado en la primeras secciones, el *aspect ratio* o proporción entre los lados de un elemento juega un papel de gran importancia en el estudio del error de truncamiento y estabilidad de la solución numérica tanto para triángulos como para cuadriláteros.

Para el caso de cuadriláteros convexos algunos autores definen el *aspect ratio* como la razón entre los lados mayor y menor del cuadrilátero:

$$AR = \frac{L_{\text{máx}}}{L_{\text{mín}}}.$$

Esta idea es una de la primeras que se ha empleado; sin embargo, es fácil ver que un rombo siempre tendrá *aspect ratio* de 1 y las más de las veces no es un cuadrado. Algunos autores como Pebay [249, 250] prefieren nombrar a esta medida como razón de los lados *edge ratio* y proponen un intervalo de aceptabilidad de $[1, 1.3]$ ver [292].

Otros autores como Wada, Hayashi y Kikuchi [325], definen el *aspect ratio* de un cuadrilátero como la mayor razón entre la suma de los lados opuestos:

$$AR = \text{máx} \left\{ \frac{a+c}{b+d}, \frac{b+d}{a+c} \right\}.$$

Es fácil ver que esta definición de *aspect ratio* también está sobre valuada, en el sentido de que un cuadrilátero con la forma de un papalote, o cometa, también conocido como papagayo, tiene *aspect ratio* de 1 al igual que un cuadrado.

En la literatura hemos encontrado varias definiciones de *aspect ratio*, todas ellas se basan en ser consistentes para el caso en que el cuadrilátero es un rectángulo. También hemos encontrado otras estimaciones que nada tiene que ver con esta propiedad. Por ejemplo, Pebay en 2002 [249] propone medir el *aspect ratio* de un cuadrilátero como

$$AR = \frac{L_{\text{máx}}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}{a_c},$$

donde $L_{\text{máx}}$ es el lado más grande del cuadrilátero y a_c el área del cuadrilátero. Esta idea es consistente para cuadrados pero no lo es para rectángulos. Por lo que no es un *aspect ratio* aceptable.

5.5.1. *Aspect ratio* de Robinson

Una forma de estimar el *aspect ratio* de un cuadrilátero muy empleada en la literatura fue descrita por Robinson [271] en 1987 y se basa en asociar un rectángulo

particular al cuadrilátero convexo: un rectángulo que pase por los puntos medios de los lados del cuadrilátero y sus lados sean paralelos a los ejes coordenados.

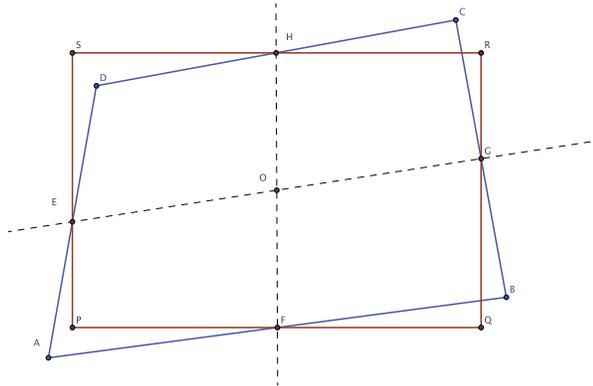


Figura 5.30: Rectángulo que asocia Robinson a un cuadrilátero.

Una vez obtenido este rectángulo, se define convenientemente el *aspect ratio* como la razón entre los lados mayor y menor. Robinson señala que esta idea es usual en ingeniería mecánica y propone una forma práctica de calcular ese rectángulo. Para esto, usa el mapeo bilineal entre el cuadrado unitario y el cuadrilátero convexo:

$$x(\xi, \eta) = e_1 + e_2\xi + e_3\eta + e_4\xi\eta \quad (5.34)$$

$$y(\xi, \eta) = f_1 + f_2\xi + f_3\eta + f_4\xi\eta \quad (5.35)$$

y calcula el *aspect ratio* como una razón entre los coeficientes lineales en la forma:

$$\text{aspect ratio} = \max \left\{ \frac{e_2}{f_3}, \frac{f_3}{e_2} \right\}. \quad (5.36)$$

El rectángulo asociado tiene lados paralelos a los ejes coordenados y pasa por los puntos medios de los lados del cuadrilátero, por lo que esta caracterización es dependiente del sistema coordenado ortogonal elegido. Es una medida invariante a la escala, pero dependiente de rotaciones. Para mostrar esto último, veamos el siguiente

Ejemplo: Para el cuadrilátero formado por los puntos $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(4, 5)$ y $D(2, 4)$ el *aspect ratio* de Robinson es $AR = 1.15$. Si rotamos este cuadrilátero con respecto al punto A unos 45° y el nuevo *aspect ratio* es de $AR = 1.22$.

Es necesario definir una medida para el *aspect ratio* que sea invariante a transformaciones rígidas. Una propuesta que hacemos es, asignar un sistema coordenado ortogonal a uno de los lados del cuadrilátero, por ejemplo, transformando el cuadrilátero al primer cuadrante del plano teniendo a uno de sus lados sobre el eje x . Si usamos esta idea por

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

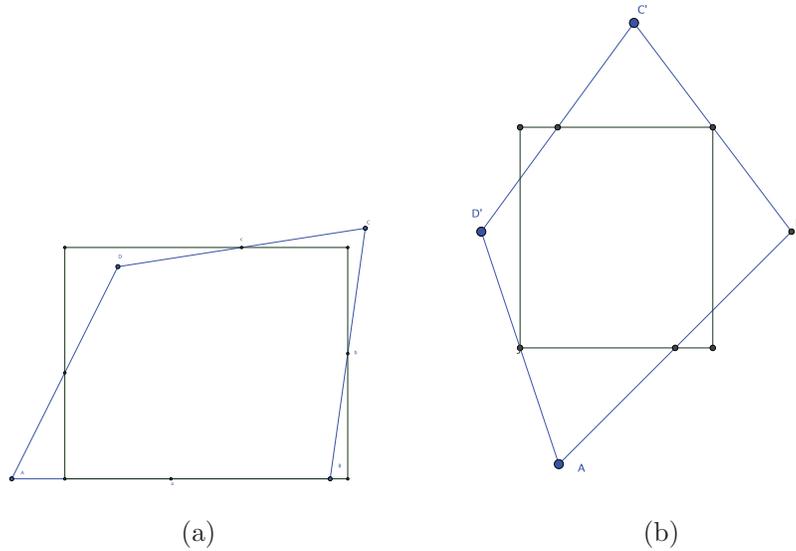


Figura 5.31: (a) Cuadrilátero en posición original y rectángulo propuesto por Robinson para calcular el *aspect ratio* y (b) cuadrilátero que ha sido rotado con respecto a A a 45° y el rectángulo propuesto por Robinson.

cada uno de los cuatro lados del cuadrilátero tendremos un valor de *aspect ratio* por cada lado, véase la Figura 5.32.

En la práctica, se ha observado que el AR entre los cuatro diferentes rectángulos que podemos construir uno por cada lado, difieren como máximo un 7%, por lo que cualquiera de ellos es un estimador razonable. De igual manera, el valor máximo entre ellos e incluso el promedio puede ser de utilizad

El *aspect ratio* de Robinson fue propuesto en 1987 y es una referencia actualmente para muchos investigadores y ha sido implantado en sistemas computacionales para medir la calidad de las mallas. uno estos es el sistema CUBIT [84]. CUBIT es un conjunto de herramientas de software para generación de mallas en dos y tres dimensiones. Entre sus herramientas destacan la preparación de la geometría (modelador de superficies), un pre proceso, y el estado del arte, *state-of-the-art*, de los algoritmos de suavizamiento de mallas. Este sistema cuenta con la biblioteca VERDICT para validar la calidad las mallas obtenidas (triángulos, cuadriláteros tetraedros y hexaedros). Este sistema tiene incorporado un cálculo del *aspect ratio* de Robinson y sus desarrolladores proponen un intervalo de aceptabilidad entre 1 y 4.

Desde un punto de vista geométrico, el *aspect ratio* de Robinson puede ofrecernos poca información de la forma geométrica del cuadrilátero ya que este puede tener *aspect ratio* de 1 y sin embargo, estar lejos de ser un cuadrado, observe el ejemplo que se presenta en la Figura 5.33.

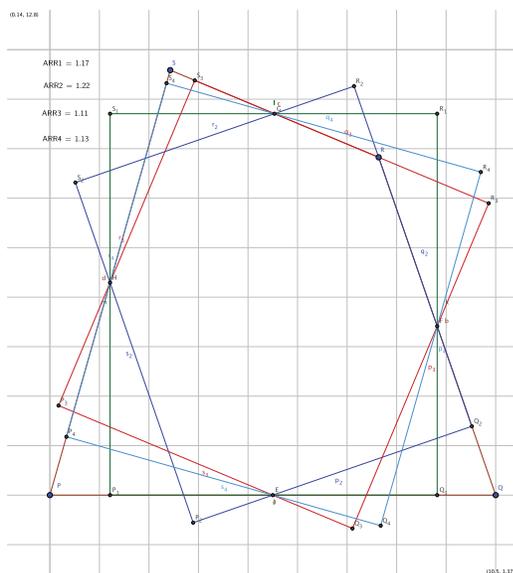


Figura 5.32: Cuatro valores para el *aspect ratio* de Robinson, por cada lado uno por cada lado: $AR1 = 1.17$, $AR2 = 1.22$, $AR3 = 1.11$ y $AR4 = 1.3$.

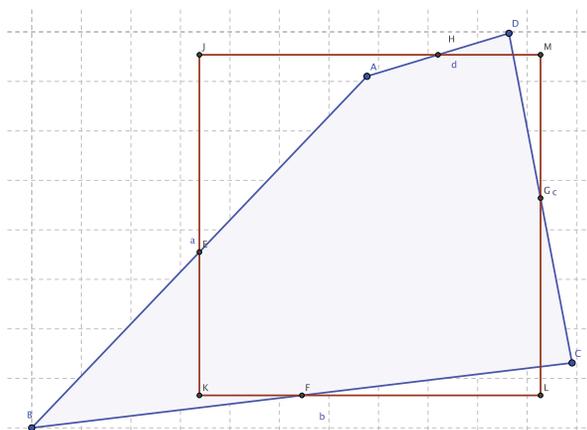


Figura 5.33: Un cuadrilátero cuyo *aspect ratio* de Robinson es 1, pero dista en mucho de ser un cuadrado.

5.5.2. Propuesta de Field para calcular el *aspect ratio* de Robinson

En 2000, Field [108] sugiere usar los ejes principales del cuadrilátero Q para construir un sistema coordenado ortogonal y calcular el *aspect ratio* de Robinson. Los ejes principales de un cuadrilátero Q se obtienen uniendo los puntos medios entre sus lados opuestos vea la Figura 5.34. Describamos la idea de Field y la medida de calidad que adicionalmente propone. Consideremos \vec{u} y \vec{v} los vectores que unen los puntos medios de los lados del cuadrilátero. Para el vector $\vec{u} = (\alpha, \beta)^t$, calculemos \vec{u}^\perp como el vector ortogonal a este en dirección positiva (contrario a las manecillas del reloj):

$$\vec{u}^\perp = (-\beta, \alpha)$$

Lo propio haremos para \vec{v}^\perp . Con \vec{u} y \vec{u}^\perp vamos a construir un rectángulo que pase los puntos medios, para ello usaremos la proyección de \vec{v} sobre \vec{u}^\perp :

$$\text{Proy}_{\vec{u}^\perp} \vec{v} = \frac{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}{|\vec{v}^\perp|^2} \vec{v}$$

la magnitud de ese vector será el tamaño de uno de los lados del rectángulo y el otro lado será $\|\vec{u}\|$, observe la Figura 5.34. Para este caso, podemos definir el *aspect ratio* como:

$$AR1 = \text{máx} \left\{ \frac{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}{|\vec{v}^\perp|^2}, \frac{|\vec{v}^\perp|^2}{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}} \right\} \quad (5.37)$$

Sin embargo, solamente hemos usado uno de los ejes principales para construir un sistema ortogonal. Repitamos esta idea sobre el otro eje principal. Si consideremos ahora \vec{u} y \vec{u}^\perp , el *aspect ratio* para este segundo rectángulo es:

$$AR2 = \text{máx} \left\{ \frac{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}}{|\vec{u}^\perp|^2}, \frac{|\vec{u}^\perp|^2}{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}} \right\} \quad (5.38)$$

Ejemplo 1: Consideremos el cuadrilátero formado por los puntos $A(1, 3)$, $B(10, 3)$, $C(7.64, 9.83)$ y $D(3.43, 11.59)$. En la Figura 5.34 se observa un cuadrilátero y los dos *aspect ratio* que se pueden obtener uno por cada eje principal.

En los experimentos que hemos realizado, ambas cantidades no difieren mucho y podríamos usar el más grande entre ellos como *aspect ratio* de Robinson:

$$AR = \text{máx} \left\{ \frac{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}{|\vec{v}^\perp|^2}, \frac{|\vec{v}^\perp|^2}{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}, \frac{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}}{|\vec{u}^\perp|^2}, \frac{|\vec{u}^\perp|^2}{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}} \right\}$$

La biblioteca VEREDICT [292] emplea como *aspect ratio* de Robinson, la construcción $AR1$ mostrada en (5.37).

La propuesta de Field para estimar el *aspect ratio* es invariante a transformaciones rígidas. Sin embargo, tampoco es posible evitar asignar 1 a cuadriláteros que están lejos de ser un cuadrado.

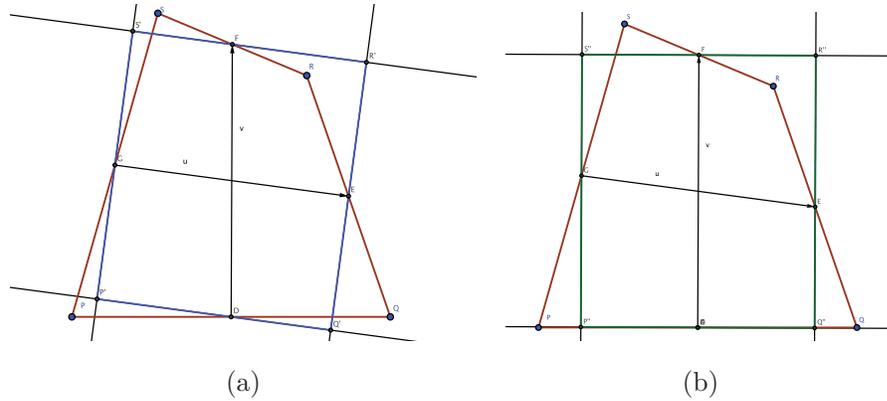


Figura 5.34: (a) Para el primer sistema coordenado obtuvimos $AR = 1.147$ y para el segundo (b) $AR = 1.166$.

En ese trabajo, Field propone comparar la razón entre los lados de los dos rectángulos para formular una medida de calidad para caracterizar cuadrados. Si hacemos

$$\alpha_R = \min \left\{ \frac{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \frac{|\vec{v}|^2}{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}, \frac{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \frac{|\vec{u}|^2}{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}} \right\}$$

$$\beta_R = \max \left\{ \frac{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \frac{|\vec{v}|^2}{\vec{u}^\perp \cdot \vec{v}}, \frac{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \frac{|\vec{u}|^2}{\vec{v}^\perp \cdot \vec{u}} \right\}$$

y

$$\mu(Q) = \frac{\alpha_R}{\beta_R} \tag{5.39}$$

obtendremos que $\mu(Q)$ una buena medida de calidad para cuadriláteros, en el sentido de Field–Oddy, ya que es continua, a-dimensionada, está acotada, alcanza un valor de 0 para un cuadrilátero degenerado a segmento y alcanza el valor máximo de 1 solamente para cuadrados.

En la Figura 5.35 mostramos en forma esquemática cómo se comporta la medida $\mu(Q)$ si fijamos un lado de longitud $a = 2$ para un rectángulo y variamos en x el tamaño del otro lado. La gráfica está formada por un segmento de parábola y un segmento de hipérbola.

La medida de Field (5.39) es muy interesante ya que nos permite detectar cuadrados de manera muy confiable. Es de notar que el recíproco de esta medida puede ser considerada como *aspect ratio*: ya que es consistente con el valor esperado para rectángulos.

$$AR = \frac{\beta_R}{\alpha_R}$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

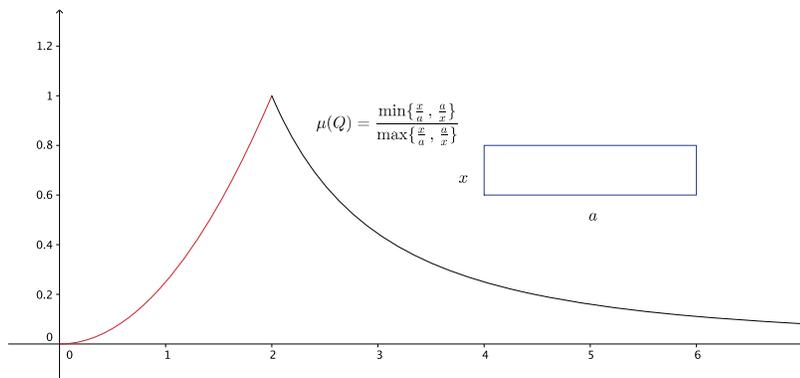


Figura 5.35: Figura esquemática de la medida de calidad de Field para detectar cuadrados.

Esta última propuesta de Field representa una forma atractiva de calcular el *aspect ratio* de Robinson.

5.5.3. Un propuesta para calcular el *aspect ratio* de Robinson

Regresemos a la idea geométrica detrás del *aspect ratio* de Robison: asignar un rectángulo a un cuadrilátero.

Una idea muy interesante es calcular un rectángulo cuyas caras se ajusten 4 colecciones de puntos, en la Figura 5.36 está representada esta idea.

El primer paso es elegir las 4 colecciones de puntos

$$P_i, \quad i = 1, \dots, np, \quad Q_j, \quad j = 1, \dots, nq, \quad R_k, \quad k = 1, \dots, nr, \quad S_l, \quad l = 1, \dots, ns,$$

lo segundo es proponer un modelo de rectas ortogonales dos a dos, por ejemplo de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : \quad c_1 + n_1x + n_2y &= 0 \\ \mathcal{L}_2 : \quad c_2 - n_2x + n_1y &= 0 \\ \mathcal{L}_3 : \quad c_3 + n_1x + n_2y &= 0 \\ \mathcal{L}_4 : \quad c_4 - n_2x - n_1y &= 0 \end{aligned}$$

Cada recta \mathcal{L}_i debe ajustar a una colección de puntos, para nuestro caso será dos por cada recta. El problema de ajuste lineal se puede escribir como

$$\min_{c_i, n_j} \|\mathbf{r}\| = \sum_{i=1}^m r_i^2$$

donde

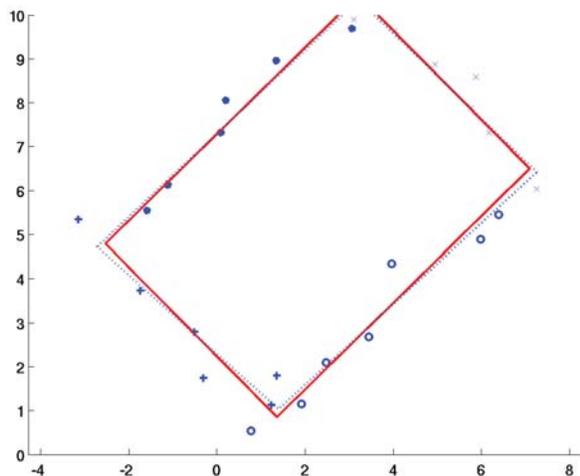


Figura 5.36: Rectángulo que mejor se ajusta a cuatro conjunto de puntos uno por cada cara.

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & xp_1 & yp_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & xp_{np} & yp_{np} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & xq_1 & yq_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1 & 0 & 0 & xq_{nq} & yq_{nq} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & xr_1 & yr_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & xr_{nr} & yr_{nr} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & xs_1 & ys_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 1 & xs_{ns} & ys_{ns}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 c_1 \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 c_4 \\
 n_1 \\
 n_2
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 \vdots \\
 r_{np+nq+nr+ns}
 \end{pmatrix}$$

Para que el problema esté bien definido nos falta una condición adicional y ésta es la ortogonalidad de las rectas:

$$n_1^2 + n_2^2 = 1.$$

El planteamiento de este problema y su implementación en Matlab se puede revisar de las notas del curso para Matlab de Peter Arbenz [8].

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Nosotros proponemos usar este problema para ajustar un rectángulo a un cuadrilátero, de manera que cada recta \mathcal{L}_i del rectángulo ajuste a donde dos vértices consecutivos del cuadrilátero. Es fácil mostrar que el rectángulo así obtenido pasa por los puntos medios del cuadrilátero. Lo interesante de este problema es que la solución nos provee una forma robusta, estable e independiente de rotaciones para calcular un rectángulo que mejor ajuste a los vértices del cuadrilátero y pasa por los puntos medios.

Ejemplo 2: Para el cuadrilátero formado por los puntos $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(4, 5)$ y $D(2, 4)$ el *aspect ratio* de Robinson con esta técnica es de $AR = 1.000$.

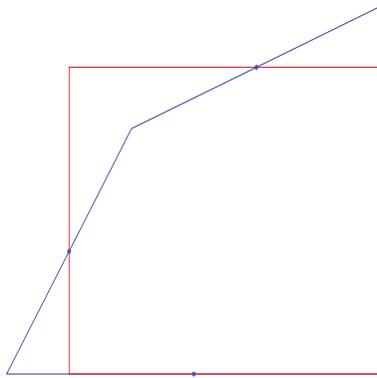


Figura 5.37: Rectángulo que mejor se ajusta a las caras de un cuadrilátero del ejemplo 2. El *aspect ratio* de Robinson con esta técnica es de $AR = 1.000$.

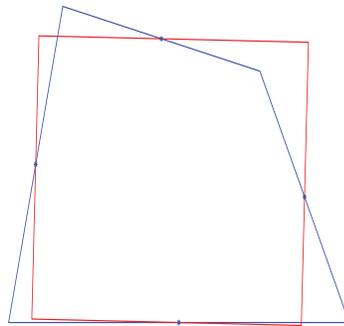


Figura 5.38: Rectángulo que mejor se ajusta a las caras de un cuadrilátero del ejemplo 1. El *aspect ratio* de Robinson con esta técnica es de $AR = 1.0802$.

De nueva cuenta, a menos que garanticemos que el cuadrilátero esté cercano a ser cuadrado o rectángulo el *aspect ratio* de Robinson no es confiable; observe el cuadrilátero

del Ejemplo 1 arriba descrito.

5.5.4. Una nueva forma de calcular el *Aspect ratio* de un cuadrilátero usando el rectángulo de área mínima

Como hemos señalado, las diferentes definiciones de *aspect ratio* reportadas en la literatura, suelen ser consistentes con lo esperado cuando el cuadrilátero es un rectángulo, en cuyo caso el *aspect ratio* es la razón de lado más grande con el más pequeño. De la revisión que hemos hecho observamos que estas diferentes definiciones pueden no ser comparables entre sí y estar sobre valuadas. Esto último significa que es sencillo diseñar cuadriláteros cuyo *aspect ratio* sea 1 y sin embargo estar lejos de ser un cuadrado, ver Figura 5.33.

Asignar un rectángulo al cuadrilátero es una idea muy atractiva desde un punto de vista geométrico ya que nos permite señalar que tan alejados estamos de un rectángulo, y con esto poder cuantificar la distorsión de cuadrilátero con respecto a un rectángulo ideal. Una de las medidas de calidad que hemos propuesto en este trabajo está basada en el rectángulo de área mínima que contiene al cuadrilátero. En la Figura 5.39 se aprecia, un cuadrilátero y el rectángulo de área mínima que lo contiene.

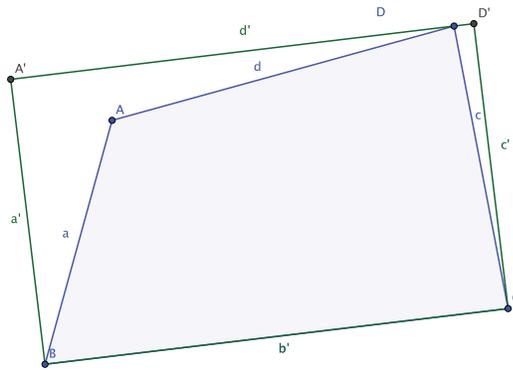


Figura 5.39: Rectángulo de área mínima que contiene al cuadrilátero

Usando el rectángulo de área mínima, definiremos el *aspect ratio* de Q como la razón entre el lado mayor y menor del rectángulo de área mínima para un cuadrilátero.

Ejemplo 3: Para el cuadrilátero formado por los puntos $A(-6.84, 7.5)$, $B(-10, -4)$, $C(11.81, -1.38)$ y $D(9.27, 11.94)$ el *aspect ratio* de Robinson es 1.53 y para el rectángulo de área mínima es 1.62.

Como hemos dicho en esta sección es fácil construir un ejemplo para el cual el *aspect ratio* de Robinson sea 1 sin que el cuadrilátero sea cercano a ser cuadrado. En el siguiente ejemplo comparamos los valores.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

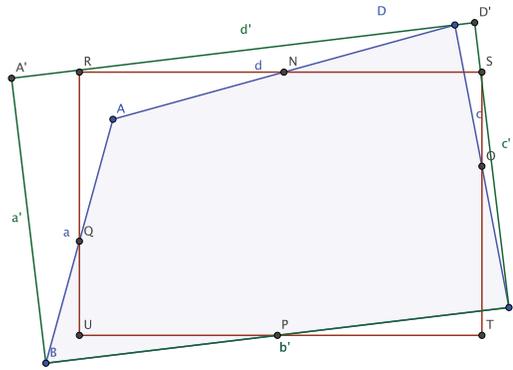


Figura 5.40: Rectángulo de área mínima que contiene al cuadrilátero y rectángulo que asocia Robinson para su *aspect ratio* para el ejemplo 3.

Ejemplo 4: Para el cuadrilátero formado por los puntos $A(3.53, 10.21)$, $B(-10, -4)$, $C(11.81, -1.38)$ y $D(9.27, 11.94)$ el *aspect ratio* de Robinson es 1.00 y para el rectángulo de área mínima es 1.62. La forma de los dos rectángulos se aprecia en la Figura 5.41.

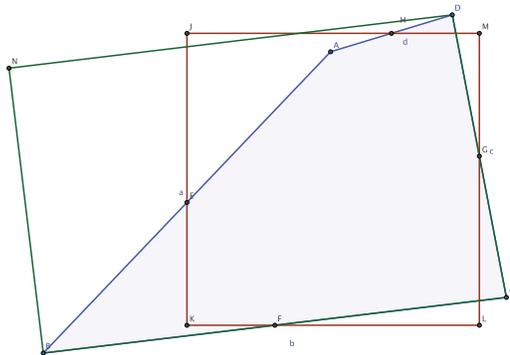


Figura 5.41: Rectángulo de área mínima y rectángulo que asocia Robinson para su *aspect ratio* para el ejemplo 4.

El *aspect ratio* que aquí hemos definido es invariante bajo transformaciones rígidas y de escala. En la práctica se ha observado que de haber dos rectángulos de área mínima para un cuadrilátero, el *aspect ratio* de estos no difieren más de %1, así que cualquiera de ellos es útil para los fines que perseguimos, de nueva cuenta, podemos usar el mayor o el promedio entre ellos.

A diferencia de la definición para el *aspect ratio* de Robinson, el nuevo *aspect ratio* que proponemos tiene un origen geométrico diferente.

5.6. Otras métricas y medidas de calidad

En este trabajo nos hemos enfocado de describir y diseñar medidas de calidad para caracterizar algunas formas geométricas de los cuadriláteros. En la literatura podemos encontrar otras funciones o métricas basadas en propiedades geométricas de los elementos triangulares y de cuadriláteros. La siguiente es una definición dada por Knupp [191] para una métrica (geométrica) de calidad

Definición 4 *Una métrica de calidad es una función escalar de la posición de los nodos que mide alguna propiedad geométrica del elemento.*

Los funcionales discretos que nosotros usamos para construir malla suaves y convexas son métricas de calidad [26, 28, 30]. Para el caso concreto del funcional armónico discretizado [30, 32], esta es una métrica de calidad y sobre una celda es posible caracterizar cuadrados cuando su valor es 8. Otras métricas de calidad lo son el funcional de longitud discretizado y el funcional de ortogonalidad discretizado [186, 30].

En [191], Knupp clasifica las métricas algebraicas dependiendo si son de dominio general (definida sobre cualquier forma posible del elemento), si son versátiles en cuanto a detectar diferentes distorsiones del elemento, si son invariantes bajo rotaciones rígidas, si son independientes de la dimensión; es decir, si son representables en 2D y en 3D, y observa que, de preferencia deben ser a -dimensionadas.

La diferencia sustancial entre las medidas de calidad y las métricas de calidad, básicamente es que las segundas no pueden identificar elementos degenerados a triángulo ni segmento y usualmente sólo ofrecen información si el cuadrilátero está cerca o lejos de tener la forma geométrica ideal. Usualmente las métricas útiles para suavizar mallas por medio de optimización son funciones convexas. Como observación, si $\mu(Q)$ es una buena medida de calidad, recíproco

$$\delta(Q) = \frac{1}{\mu(Q)}$$

es una métrica de calidad.

Para nosotros, una característica idónea para una métrica de calidad es que sean funciones convexas en cuyo óptimo se caracterize la forma geométrica ideal del elemento Q : cuadrado, rectángulo, paralelogramo, etc. En el siguiente capítulo diseñaremos algunas métricas para cuadriláteros que cuyo óptimo sea un rectángulo.

5.6.1. Otras métricas de calidad basadas en el ángulo

Una métrica comunmente empleada y basada en el ángulo más pequeño de los ángulos interiores del cuadrilátero es

$$\theta_{\min} = \min \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \},$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

y otra más es

$$\theta_{\text{máx}} = \text{máx} \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \}.$$

para el ángulo más grande.

En la biblioteca de VEREDICT [292], sus autores definen un intervalo de aceptabilidad para $\theta_{\text{mín}}$ el cual es de $[45^\circ, 90^\circ]$ y para $\theta_{\text{máx}}$ de $[90^\circ, 135^\circ]$. Es necesario señalar que la elección de este intervalo puede ser muy laxa y que un intervalo más estricto para ciertas formas nos permitiría controlar mejor la distorsión del cuadrilátero. Por ejemplo si para un paralelogramo proponemos $\theta_{\text{mín}} \in [80^\circ, 90^\circ]$ o bien, $\theta_{\text{máx}} \in [90^\circ, 110^\circ]$ podemos asegurar que el paralelogramo está poco distorsionado con respecto al rectángulo de área mínima.

5.6.2. Otras métricas de calidad: métrica de Oddy

Algunas métricas de calidad que se reportan en la literatura están basadas en el tensor métrico asociado al mapeo armónico [161] entre la región lógica y la región de estudio. Una de estas métricas es la propuesta en 1988 por Oddy *et al.* [241] la cual se escribe como:

$$D_{\text{Oddy}} = C \otimes C - \frac{1}{n} [\text{tra}(C)]^2$$

donde \otimes es el producto de Kronecker y

$$C = J^t J', \quad J' = \frac{J}{|J|}$$

y J es la matriz jacobiana entre el mapeo del sistema coordenado sobre el elemento, en este caso el cuadrilátero Q , y el sistema de referencia local. Esta cantidad evaluada en un vértice P_1 de la celda puede ser escrita como:

$$D_{\text{Oddy}} = 2(Q_{\text{Oddy}}^2 - 1) \tag{5.40}$$

donde

$$Q_{\text{Oddy}} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2a_T} - 2$$

donde a_T es el área del triángulo asociado al vértice de referencia y l_1 y l_2 son el tamaño de los lados consecutivos al vértice P_1 . Los detalles pueden ser consultados en Oddy [241], Hyun [150, 151], y Serrate y Coll [82].

Una forma de usar esta medida para cuadriláteros es calculando el máximo del valor de (5.40) en las cuatro esquinas. Siguiendo nuestra notación y haciendo $\vec{L}_5 = \vec{L}_1$ tendremos:

$$\nu(Q) = \max_{i \in \{1,2,3,4\}} \left\{ \frac{(\|\vec{L}_i\|^2 - \|\vec{L}_{i+1}\|^2)^2 + 4(\vec{L}_i \cdot \vec{L}_{i+1})^2}{2\alpha_i^2} \right\}$$

por construcción, esta función mide la máxima desviación del tensor métrico C en las cuatro esquinas del cuadrilátero.

Es de notar, que $\nu(Q)$ no es una buena medida de calidad, en el sentido de que no está normalizada, el valor puede crecer de 0 hasta ser muy grande y tampoco es una buena medida en el sentido de que nos permita detectar cuadriláteros degenerados a triángulo o a segmento. Sin embargo, el valor 0 se alcanza solamente para un cuadrado lo cual hace atractivo su estudio.

En 2003, Serrate y Coll [82] proponen una normalización de la medida de Oddy en la forma

$$g(T) = 2 \left(\frac{1}{Q_{\text{Oddy}}^2} - 1 \right) \quad (5.41)$$

y miden la distorsión del cuadrilátero mediante el promedio de las distorsiones en cada vértice

$$f(Q) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 g(T_i). \quad (5.42)$$

Es fácil ver que $f(Q)$ es una función acotada y

$$-1 \leq f(Q) \leq 1$$

donde el valor de 0 se alcanza para rectángulos.

La función (5.42) es empleada para suavizar mallas estructuradas y no estructuradas, véase y [82, 284]. Es de observar que la función objetivo (5.42) requiere de una regularización adecuada para evitar los triángulos de área negativa. Serrate y Coll usan una regularización cuadrática similar a la empleada en 1997 por Tinoco [312]. Esta métrica se encuentra implementada en el *suite* VEREDICT [292].

5.6.3. Otras métricas de calidad: número de condición de Knupp

En 2000, Knupp [190] revisa el número de condición κ_2 del tensor métrico discutido en la subsección A.3.2 del Apéndice A,

$$\kappa_2(T) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{a^2 + b^2}{2\text{área}(T)} = \frac{a^2 + b^2}{\vec{a}^t \cdot J_2 \vec{b}}$$

y propone definir una métrica basada en el número de condición sobre los cuatro triángulos del cuadrilátero en la forma:

$$\delta(Q) = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{a^2 + d^2}{\|a \times d\|}, \frac{b^2 + a^2}{\|b \times a\|}, \frac{c^2 + b^2}{\|c \times b\|}, \frac{d^2 + c^2}{\|d \times c\|} \right\}.$$

Para nosotros, $\delta(Q)$ representa una métrica definida por valor más grande del armónico discretizado evaluado en los cuatro puntos de la celda, véase [30].

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

La métrica $\delta(Q)$ es una función convexa que alcanza su valor mínimo de 1 exclusivamente para cuadrados. Algunos autores usan esta medida por ser un trabajo de referencia de Knupp quien ha desarrollado una amplia teoría de métricas algebraicas para mallas. Esta métrica es el recíproco de la medida de calidad Shape de Knupp, discutida previamente. En el *suite* VEREDICT se encuentra implementada esta métrica y los autores siguen un intervalo de aceptabilidad de [1, 4].

5.6.4. Otras métricas de calidad: taper y skew

Algunas de las medidas que hemos mencionado están implantadas en el sistema NASTRAN (NASA STRuctural ANalysis program) creado en 1965 como un solver de análisis por elementos finitos financiado por el gobierno americano y desarrollado por la NASA con el objeto de realizar cálculos estructurales en proyectos espaciales y aeronáuticos. Hoy en día existen paquetes computacionales comerciales basados en la biblioteca original. Actualmente, la empresa MSC Software distribuye la biblioteca NX NASTRAN la cual es usada en el software FEMAP de Siemens [105].

La biblioteca NASTRAN cuenta con otras métricas y medidas de calidad para un cuadrilátero, uno de ellas es el *aspect ratio* y otra el *Taper*. El *aspect ratio* difiere un poco al que hemos descrito en un sección previa. Aquí es definida como la razón entre la longitud dos vectores normales un vector principal y el ortogonal a la proyección del segundo sobre este

$$\text{aspect ratio} = \frac{a}{b}$$

En la Figura 5.42 se aprecia esta idea. Es necesario observar que se pueden calcular dos, uno por cada eje principal.

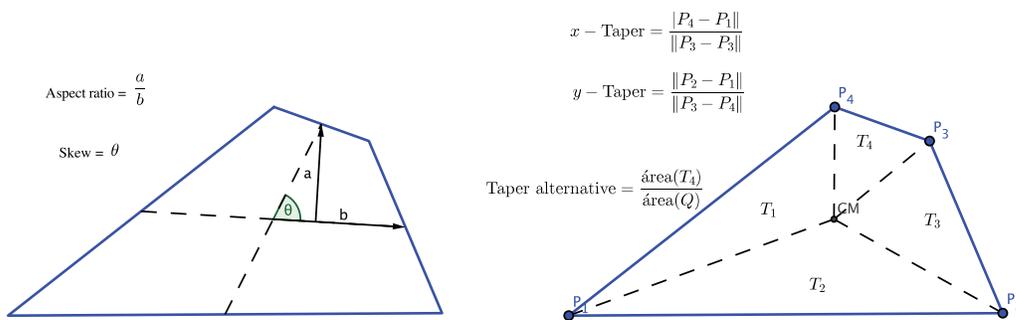


Figura 5.42: Medidas de *aspect ratio*, *skew* y *taper* de un cuadrilátero que se emplean en NASTRAN.

Para un cuadrilátero convexo Q calculamos el centro de masa CM mediante sus

coordenadas baricéntricas homogéneas en la forma:

$$CM = \frac{1}{4}[P_1 + P_2 + P_3 + P_4],$$

la cual también se puede escribir en términos del área de los cuatro triángulos que se forman con el CM y los vértices, véase la Figura 5.42.

Robinson [271] define dos cantidades x -Taper y y -Taper para medir la razón entre las longitudes opuestas del cuadrilátero en cada una de las direcciones, ver Figura 5.42. Para el cuadrilátero de referencia estas cantidades son

$$x - \text{Taper} = \frac{\|P_4 - P_1\|}{\|P_3 - P_2\|}, \quad (5.43)$$

$$y - \text{Taper} = \frac{\|P_2 - P_1\|}{\|P_3 - P_4\|}. \quad (5.44)$$

En el sistema **Femap**, sus autores recomiendan un intervalo de aceptabilidad de $[1, 10]$ y los autores de recomiendan **CUBIT** un valor $[1, 7]$.

El sistema **NX NASTRAN** [239] tiene implementado un Taper alternativo, el cual definen como la razón del área más pequeña de los cuatro triángulos y el área del cuadrilátero; es decir, la coordenada baricéntrica homogénea más pequeña para un cuadrilátero convexo:

$$\text{Taper} = \min \left\{ \frac{\text{área}(T_1)}{\text{área}(Q)}, \frac{\text{área}(T_2)}{\text{área}(Q)}, \frac{\text{área}(T_3)}{\text{área}(Q)}, \frac{\text{área}(T_4)}{\text{área}(Q)} \right\}$$

En el sistema **Femap**, sus autores recomiendan usar este Taper alternativo con un intervalo de aceptabilidad de $[.5, 1]$.

El Skew es una medida del ángulo entre los ejes principales del cuadrilátero, véase la Figura 5.42. Los ejes principales se forman con los vectores que unen los puntos medios entre lados opuestos:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{2}(P_3 + P_4) - \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \\ &= \frac{1}{2}[(P_4 - P_1) + (P_3 - P_2)] \\ \vec{b} &= \frac{1}{2}(P_2 + P_3) - \frac{1}{2}(P_1 + P_4) \\ &= \frac{1}{2}[(P_2 - P_1) + (P_3 - P_4)] \end{aligned}$$

normalizando

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \quad \hat{b} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

y hacemos

$$\mu(Q) = 1 - |\hat{u} \cdot \hat{v}| = 1 - |\cos \hat{\theta}|, \quad \hat{\theta} = \text{ángulo}(\hat{u}, \hat{v})$$

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

la cual es acotada, para un cuadrilátero degenerado a segmento es 0 y para un rectángulo es 1. Un rango aceptable es [.9, 1].

Robinson [271] aparte del *aspect ratio* que señalamos en una sección previa, también propuso una forma de estimar el *skew* y los taper usando para esto el mapeo bilineal:

$$x = e_1 + e_2\xi + e_3\eta + e_4\xi\eta$$

$$y = f_1 + f_2\xi + f_3\eta + f_4\xi\eta$$

esas cantidades las define como

$$\text{Skew} = e_3/f_3 \tag{5.45}$$

$$x - \text{Taper} = T_x = f_4/f_3 \tag{5.46}$$

$$y - \text{Taper} = T_y = e_4/e_2 \tag{5.47}$$

Es fácil observar que para un paralelogramo la razón de los taper es 1, por lo que es necesario usar alguno de los ángulos interiores si estamos interesados en identificar de la distorsión del cuadrilátero con respecto a un rectángulo y si esta distorsión es pequeña entonces el *aspect ratio* nos puede ofrecer una idea de la elongación del cuadrilátero.

Al igual que el *aspect ratio* de Robinson, las cantidades (5.45)–(5.47) son dependientes del sistema ortogonal empleado. Field en 2000, revisa estas cantidades y las expresa de forma invariante bajo transformaciones rígidas, véase [108].

El Taper es una métrica muy útil sobre todo si este es un valor grande, en éste caso la celda es muy distorsionada con respecto a un rectángulo. Para apreciar esto, observe un trapecio con Taper grande.

En la Figura 5.43 se observa una ventana del software Femap de Siemens [105] el cual tiene implementado algunas de las medidas de Robinson, ver Figura 5.44.

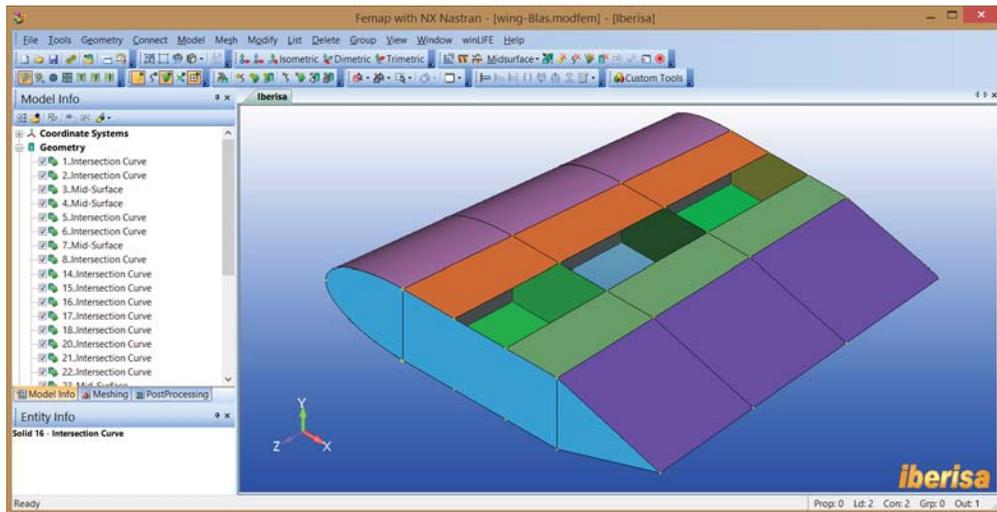
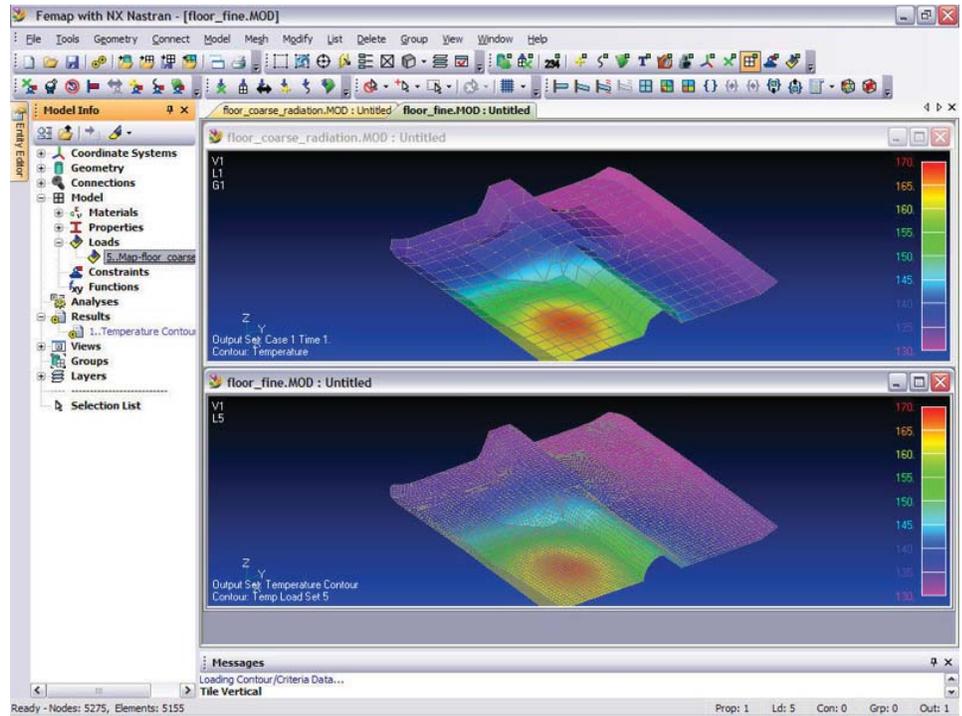


Figura 5.43: Ventanas del programa Femap de Siemens [105].

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

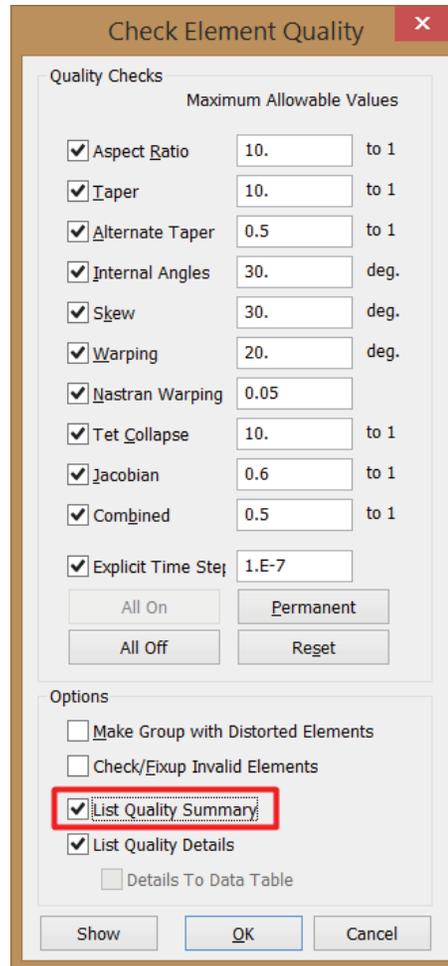


Figura 5.44: Una ventana del programa FEMAP donde se enlistan las medidas de calidad implantadas en la biblioteca NX NASTRAN, [239].

5.7. Algunas métricas de calidad globales

En muchas aplicaciones es necesario identificar previamente la utilidad de una malla a través de la valoración de la calidad de todos los elementos de la malla.

La valoración de la calidad de una malla puede lograrse a través de:

1. una inspección visual o exploratoria,
2. evaluación cualitativa o parámetro de forma,
3. y por análisis estadístico.

Una primera valoración visual puede ser analizando la distribución por histograma de valores de una buena medida calidad elegida $\mu(Q)$ o alguna métrica $\delta(Q)$ representativa de la celda Q como puede ser una medida basada en las longitudes, en los ángulos, o el área de los elementos.

En la Figura 5.45 se muestra una ϵ -convexa malla de 150×55 sobre el embalse superior de Arkansas obtenida usando el la combinación $0.5 * S_{\omega, \epsilon} + 0.5 * AO$, y se muestra el histograma de distribución de área de los elementos triangulares.

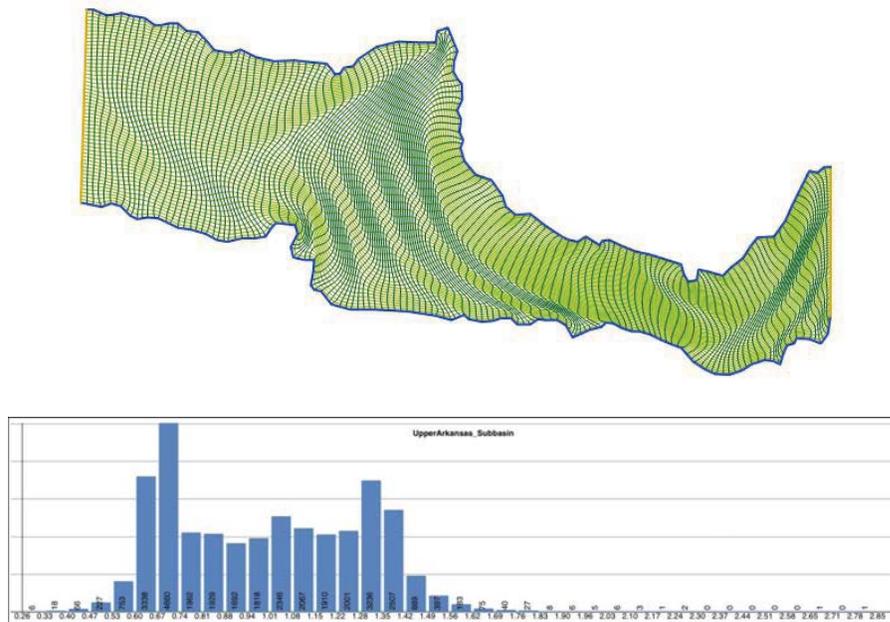


Figura 5.45: Una malla de 150×55 sobre el embalse superior de Arkansas obtenida optimizando $0.5 * S_{\omega} + 0.5 * AO$ y su histograma de distribución de área.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Ahora hagamos un ejercicio, distorsionemos aleatoriamente los nodos de la malla de la Figura 5.45, sin que esta deje de ser ϵ -convexa. El nuevo histograma de distribución de área se observa en la Figura 5.46.

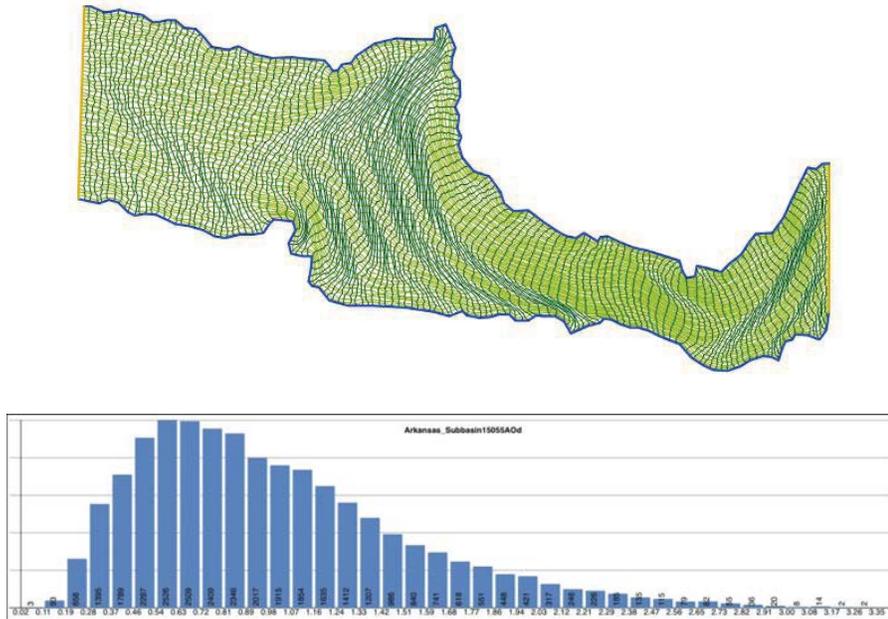
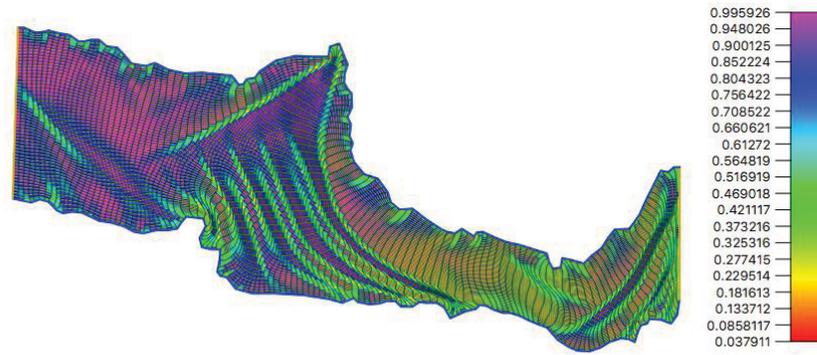


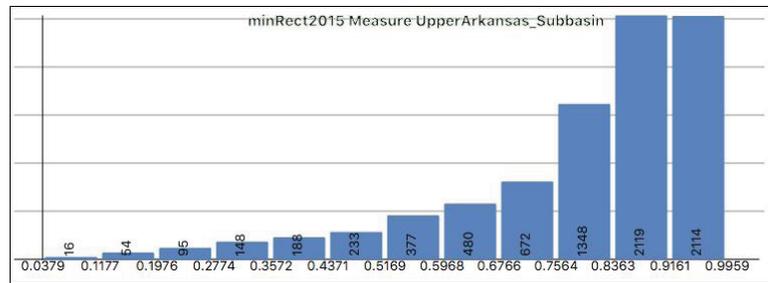
Figura 5.46: Una malla distorsionada aleatoriamente a partir de la malla mostrada en la Figura 5.45 y su histograma de distribución de área.

En la Figura 5.46, se aprecia que la distribución del área de los elementos es suave y sin embargo, las celdas son visiblemente muy distorsionadas con respecto a los elementos originales mostrados en la Figura 5.45. La sola valoración de la distribución del área de los elementos de la malla no es un indicativo de la calidad geométrica de la malla.

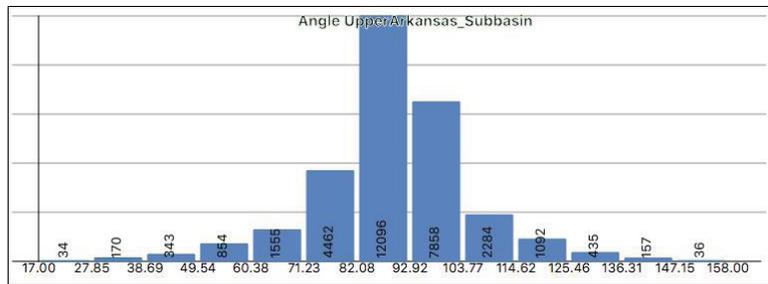
Una segunda valoración visual puede realizarse observando un mapa de colores en una escala de colores dependiente de la calidad $\mu(Q)$ elegida. Esto nos permite identificar visualmente dónde se encuentran concentrados los valores más grandes o más pequeños de $\mu(Q)$ y en base a ésta observación calificar la malla. En la Figura 5.47, se muestra el mapa de colores de las medidas Minrect2015, su histograma de valores y un histograma de los ángulos interiores. Con la información obtenida, podemos señalar que la malla cuenta con muchos elementos cercanos a ser rectángulos y hay un porcentaje no despreciable de elementos distorsionados. Requerimos más información de la distribución de los valores de calidad para determinar si geoméricamente es de buena calidad la malla.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.47: (a) Mapa de valores para la medida de calidad de MinRect 2015 (b) y su histograma (c) Histograma de distribución de los ángulos interiores.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

De la Figura 5.47, se observa que hay muchos elementos cuyos ángulos interiores se encuentran en el intervalo $[80, 110]$, lo cual es bastante aceptable. El mapa de calidad nos muestra las secciones donde se concentran esos elementos y dónde se localizan los elementos de muy mala calidad.

Desde luego, la apreciación visual de la calidad de la malla es dependiente de la medida de calidad $\mu(Q)$ elegida. En muchos artículos es usual calificar la calidad de la malla cuando el menor valor obtenido para una medida $\mu_1(Q)$ es grande; y sin embargo, con otra medida $\mu_2(Q)$ que caracterice la misma forma geométrica, resulte que el valor mínimo sea aún más pequeño que con la anterior. Si la medida de calidad $\mu_1(Q)$ no es capaz de medir adecuadamente la distorsión de los elementos podríamos, bajo éste criterio, sobre valorar la calidad de la malla. Un ejemplo de esto ocurre con la medida de calidad *scaled jacobian*, esta medida de calidad no es útil para medir la distorsión de un elemento.

Para mallas estructuradas sobre regiones irregulares, lo usual es que los elementos de pobre calidad o más distorsionados con respecto a una medida $\mu(Q)$ se concentren en la frontera de estudio $\partial\Omega$, observe los mapas de calidad que se muestran en la Figura 5.47(a). Esto se debe a que los puntos de la frontera son fijos y a menos que le demos un tratamiento previo a la frontera de la región de estudio, como por ejemplo, un suavizamiento y reparametrización, es poco controlable la forma de los elementos.

En lo que resta de esta sección, revisaremos algunas métricas usuales para calificar la calidad geométrica global de la malla por medio de un sólo valor.

5.7.1. Medidas ADO y MDO para el ángulo

Dos medidas de calidad global que reportadas en la literatura son la desviación máxima y la desviación promedio del ángulo de las celdas. El cálculo de éstas cantidades es simple, sobre cada nodo $\mathbf{x}(i, j) = (x(i, j), y(i, j))$ de la malla se calcula el ángulo $\theta_{i,j}$ formado por los vectores tangente en las direcciones x y y . Contando con esos valores, calculamos desviación máxima como:

$$\text{MDO} = \max_{i,j} \{ |90^\circ - \theta_{i,j}| \}$$

y la desviación promedio dada por:

$$\text{ADO} = \frac{1}{(n-1)(m-1)} \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} |90^\circ - \theta_{i,j}|.$$

Es de observar que el valor MDO entre una malla y otra puede diferir en mucho por el cambio de posición de un sólo nodo. En contra parte, la medida ADO nos permite identificar pequeños cambios en sectores o clusters de la malla. Es fácil construir una malla sobre una región simple, para la cual casi todas las celdas sean casi-ortogonales salvo en una pequeña región. Para este caso, puede ser que el valor ADO sea pequeño y en contraste el valor de MDO sea muy grande. En la práctica se considera que una malla

es casi-ortogonal cuando se observa que ADO es cercana a cero y MDO es pequeña, véase [95, 91].

Estas dos medidas globales son muy empleadas en la literatura para verificar que los métodos de generación numérica de mallas que se proponen, cuenten con las características idóneas de ortogonalidad o casi-ortogonalidad. Los trabajos de Eça [95], Domínguez–Mota [91] y Zhang *et al.* [341] usan estas medidas para comparar y calibrar sus resultados.

5.7.2. Media aritmética y desviación estándar

Cuando construimos o suavizamos una malla por algún método o técnica, es de sumo interés saber si la malla obtenida es de calidad, en el sentido de que casi todos los elementos cuenten con una forma geométrica cercana a una ideal: cuadrados, rectángulos de *aspect ratio* cercano a 1, paralelogramos de ángulo interior no mayor a 80° y en general elementos poco distorsionados. Para esto, requerimos una medida de calidad $\mu(Q)$ para identificar la calidad y la distorsión de la celda.

Una vez elegida una medida de calidad $\mu(Q)$ debemos contar con una forma de interpretar la distribución global de los valores:

$$\mu(Q_1), \mu(Q_2), \dots, \mu(Q_N)$$

de las N celdas de la malla. Para una medida de calidad $\mu(Q)$ definimos la *calidad media de una malla G , mean quality*, con respecto a $\mu(Q)$ como:

$$MQ = \bar{\mu}(G) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu(Q_i),$$

donde N es el número total de celdas de G .

Como se sabe, este es un buen estimador insesgado de la media poblacional de la calidad de las celdas $\mu(Q_i)$. Sin embargo, la media aritmética de una colección de datos es susceptible de distorsión por la presencia de puntuaciones extremas, valores extremos y distribuciones sesgadas para $\mu(Q)$, por lo que no es conveniente usarla como por sí sola como un estimador de la calidad global.

Otra medida que nos ofrece información global es la desviación estándar o *mean square error*:

$$MSE = \sigma^2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mu(Q_i) - \bar{\mu}(G))^2}$$

el cual, es un valor que representa los promedios de todas las diferencias individuales de las observaciones respecto a un punto de referencia común, que es la media aritmética. Como se sabe, a mayor valor de MSE le corresponde una mayor dispersión de los valores, en este caso $\mu(Q)$ con respecto a su media MQ .

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Por sí solas estas dos medidas globales para una medida de calidad $\mu(Q)$ no nos ofrecen mucha información de la distribución de la calidad de los elementos. Por lo que debemos combinar ambas para identificar si la dispersión de la calidad de los elementos es alrededor de la media esperada. Usando estas dos medidas de dispersión, diremos que la calidad global de la malla con respecto a la medida μ es muy buena si la media aritmética de los valores $\mu(Q_i)$ para la medida de calidad elegida $\mu(Q)$ es cercana a 1, y la desviación estándar es muy pequeña.

Considere una malla uniforme sobre una paralelogramo. Si usamos una medida $\mu(Q)$ que caracteriza cuadrados, obtendremos que la malla tiene una pésima calidad media y una desviación estándar cero: todas la celdas son de mala calidad para esta medida.

5.7.3. Media geométrica (*shape parameter* o *shape quality*)

La media geométrica de una cantidad de valores x_1, x_2, \dots, x_N se escribe como:

$$\bar{x} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$$

este estimador tiene propiedades muy interesantes, entre las cuales observamos que si todos valores son positivos, $x_i > 0$, se cumple que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética:

$$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Una de la propiedades relevantes de la media geométrica es que resulta menos influyente a los valores extremos que la media aritmética; es decir, si tenemos una distribución de valores cercanos a 0 o a 1, la media geométrica no es cercana ni a 0 ni a 1, digamos que suaviza el efecto de los valores extremos y representa con mayor precisión la concentración global de la muestra.

Por esta razón algunos investigadores, proponen usar la media geométrica

$$\beta = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \mu(Q_i)} \quad (5.48)$$

como una medida de calidad global de la malla para una medida $\mu(Q)$ dada. A esta cantidad usualmente se le conoce en la literatura como parámetro de forma de la malla o *shape parameter*, o simplemente *shape quality*, véase [218].

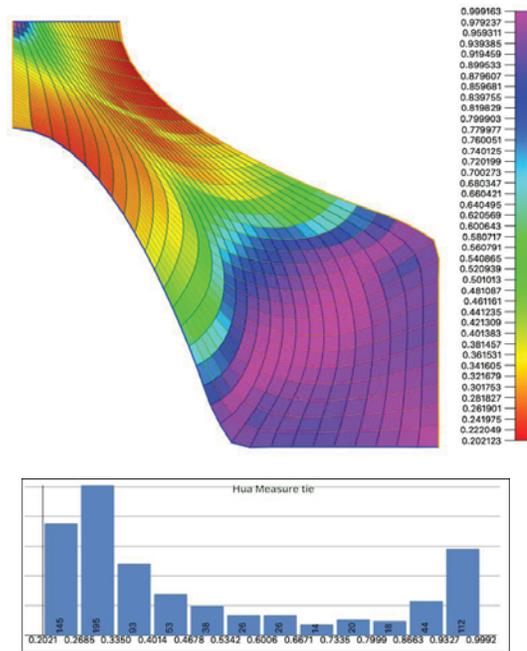
Desde luego, esta cantidad sólo es válida para valores $\mu(Q_i)$ positivos. Si para algún valor $\mu(Q_i)$ es cero, Q_i sería un elemento degenerado a triángulo, y la media geométrica es cero. De haber algún elemento negativo este estimador carece de significado. Por lo anterior, la media geométrica o *shape parameter* solamente debe ser usada si sabemos que la malla es ϵ -convexa.

Discutamos mediante ejemplos, cómo calificar la calidad global una malla.

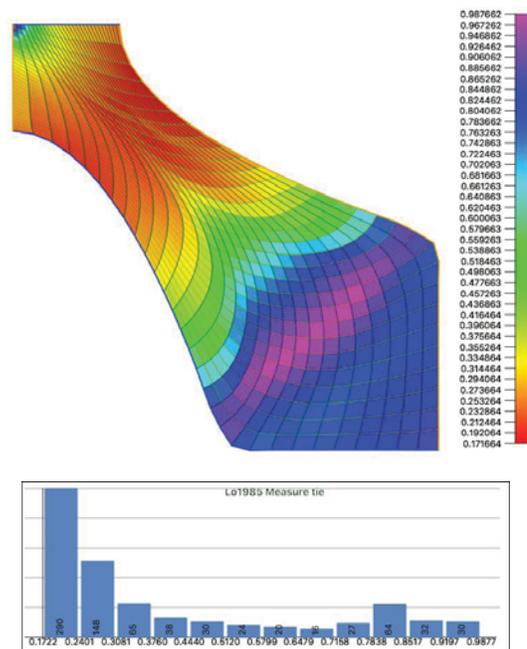
5.8. Ejemplos

Ejemplo 1: La siguiente malla de 30×30 , fue construida optimizando la combinación $0.5 * H_{\omega, \epsilon} + 0.5 * AO$. En la Figura 5.48 se aprecian los mapas de colores e histograma de valores para la medidas de calidad Hua1995 y Lo1985.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA



(a)



(b)

Figura 5.48: (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.

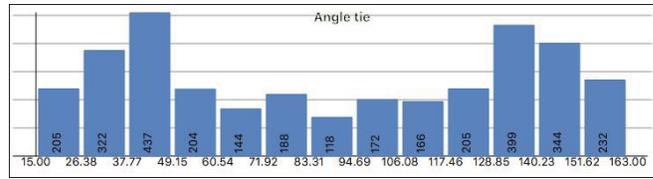
Para esta malla mostramos una tabla estadística de parámetros Mín, valor mínimo de $\{\mu(Q_i)\}$, Máx, su valor máximo, MQ *mean quality*, MSE *mean square error*, SP *shape parameter* para algunas de las medidas discutidas en éste capítulo. Hemos organizado la tabla por la caracterización del tipo de cuadrilátero y el nombre de la medida de calidad.

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.7199	0.9988	0.9376	0.0531	0.9361
	AreaII2015	0.5438	0.9844	0.8272	0.0910	0.8220
Rectángulo	Lo1989	0.1238	0.9754	0.4767	0.1898	0.4319
	ScaledJacobian	0.2704	0.9997	0.6903	0.1997	0.6582
	ScaledJacobianM	0.2277	0.9693	0.6275	0.1850	0.5975
	MinRect2015	0.0305	0.9754	0.5467	0.1856	0.4997
	Rectangles2015	0.2669	0.9837	0.6675	0.1859	0.6389
Cuadrado	Lo1985	0.1717	0.9877	0.4093	0.2476	0.3486
	Hua1995	0.2021	0.9992	0.4994	0.2694	0.4361
	Knupp2000	0.1868	0.9984	0.4792	0.2696	0.4143
	Pebay2002	0.2660	0.9835	0.5317	0.2256	0.4895
	Hmean2017E	0.2016	0.9992	0.4990	0.2695	0.4355
	Hmean2017R	0.2016	0.9992	0.4990	0.2696	0.4356
	Hmean2017rR	0.0941	0.9990	0.4121	0.2993	0.3198

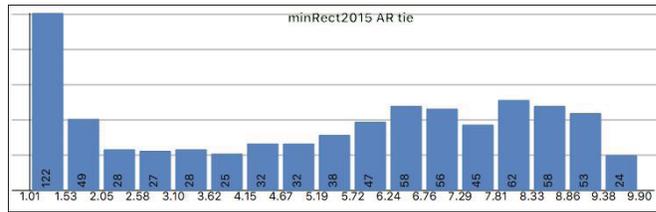
Tabla 5.1: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 30×30 mostrada en la Figura 5.48. Para ésta malla obtuvimos ADO=40.74, MDO=74.31.

De esta tabla se desprende que la calidad global de la malla, en cuanto a elementos cuadrados, es mala, lo propio para rectángulos. Sin embargo, encontramos que la malla globalmente tiene buena calidad geométrica para paralelogramos. Para saber si estos elementos tienen buena forma geométrica, vamos a requerir analizar la distribución de los ángulos interiores y el *aspect ratio*.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA



(a)

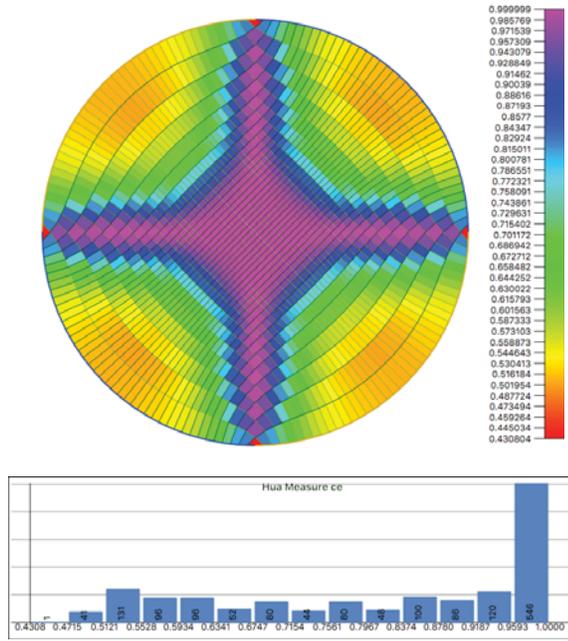


(b)

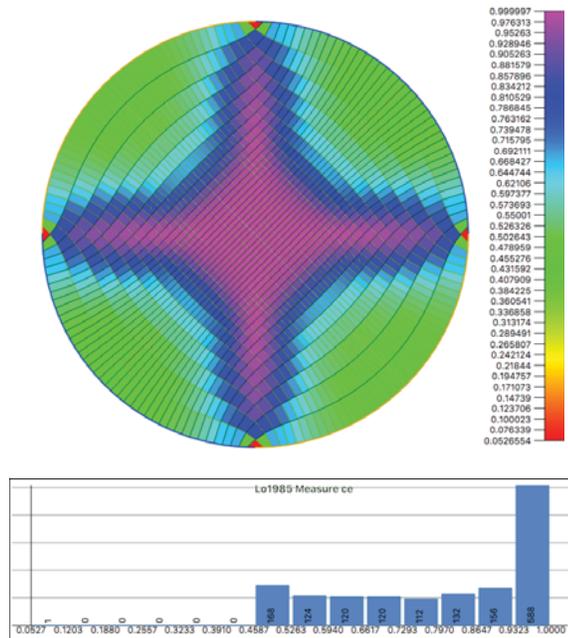
Figura 5.49: (a) Histograma de ángulos interiores (b) Histograma de la distribución del *aspect ratio*.

De los histogramas de ángulo y *aspect ratio* mostrados en la Figura 5.49 se concluye que esta malla tiene, en general, elementos de muy mala calidad. Se observa que algunos son de la forma *kite* o papalote muy alargados, otros elementos son cercanos a ser rectángulos pero alargados y en general celdas enlongadas. Ciertamente, esta es una malla suave, ϵ -convexa, pero de muy mala calidad geométrica.

Ejemplo 2: La siguiente malla de 41×41 , fue obtenida optimizando un funcional que discutiremos en la siguiente sección. Una malla cuyos elementos son rectángulos es un óptimo para éste funcional. En la Figura 5.50, se aprecian los mapas de colores e histograma de valores para las medidas de calidad Hua1995 y Lo1985 que caracterizan cuadrados. En la Figura 5.51, se aprecian los mapas de colores e histogramas de valores para las medidas de calidad Lo1989 y MinRect2015 que caracterizan rectángulos.



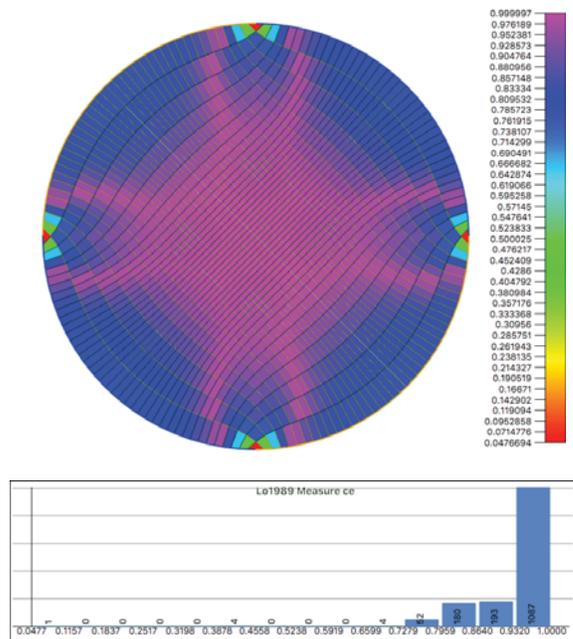
(a)



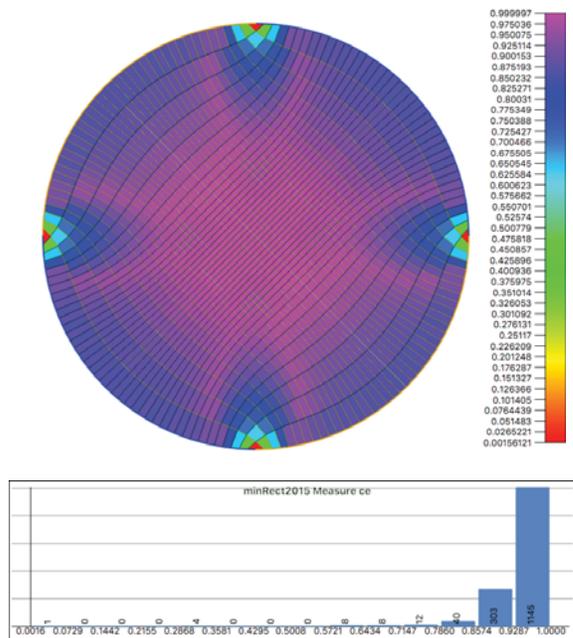
(b)

Figura 5.50: (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA



(a)



(b)

Figura 5.51: (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1989 y su histograma
(b) Mapa de valores para la medida de calidad de MinRect.

Para esta malla mostramos una tabla estadística de parámetros Mín, Máx, MQ *mean quality*, MSE *mean square error*, SP *shape parameter* usando las mismas medidas de calidad de la anterior tabla.

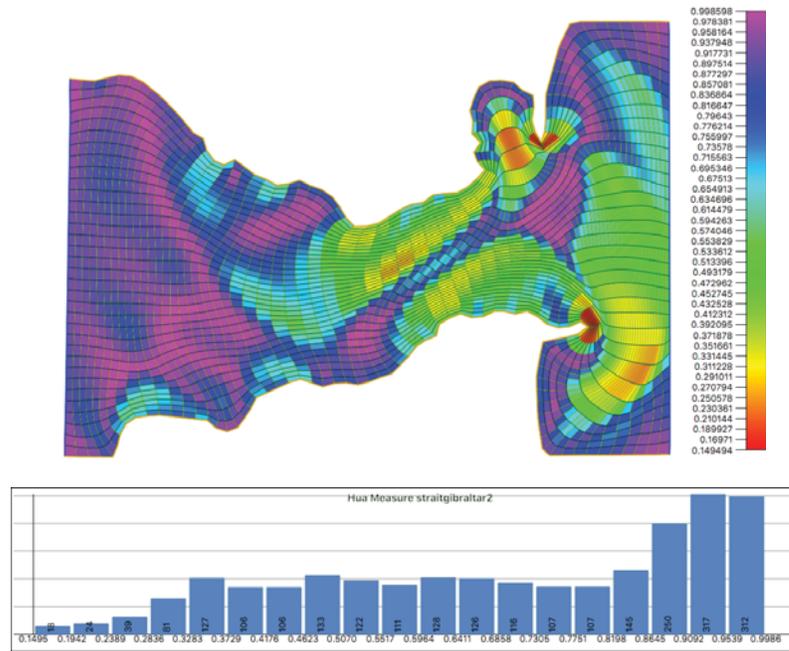
Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI	0.0857	1.0000	0.9695	0.0668	0.9643
	AreaII	0.0448	1.0000	0.9245	0.1002	0.91453
Rectángulo	Lo1989	0.0477	1.0000	0.9359	0.0909	0.9271
	ScaledJacobian	0.0789	1.0000	0.9946	0.0511	0.9903
	ScaledJacobianM	0.0444	1.0000	0.9455	0.0855	0.9368
	MinRect2015	0.0016	1.0000	0.9446	0.0855	0.9284
	Rectangles2015	0.0568	1.0000	0.9681	0.0678	0.9618
Cuadrado	Lo1985	1.0000	0.0527	0.7915	0.1899	0.7642
	Hua1995	0.4308	1.0000	0.8076	0.1801	0.7857
	Knupp2000	0.0789	1.0000	0.7958	0.1911	0.7689
	Pebay2002	0.0580	1.0000	0.8574	0.1370	0.8430
	Hmean2017E	0.2396	1.0000	0.8069	0.1815	0.7843
	Hmean2017R	0.2395	1.0000	0.8067	0.1820	0.7836
	Hmean2017rR	0.0149	1.0000	0.8247	0.1683	0.8012

Tabla 5.2: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 5.50 y 5.51. Para ésta malla obtuvimos ADO=1.29, MDO=85.47.

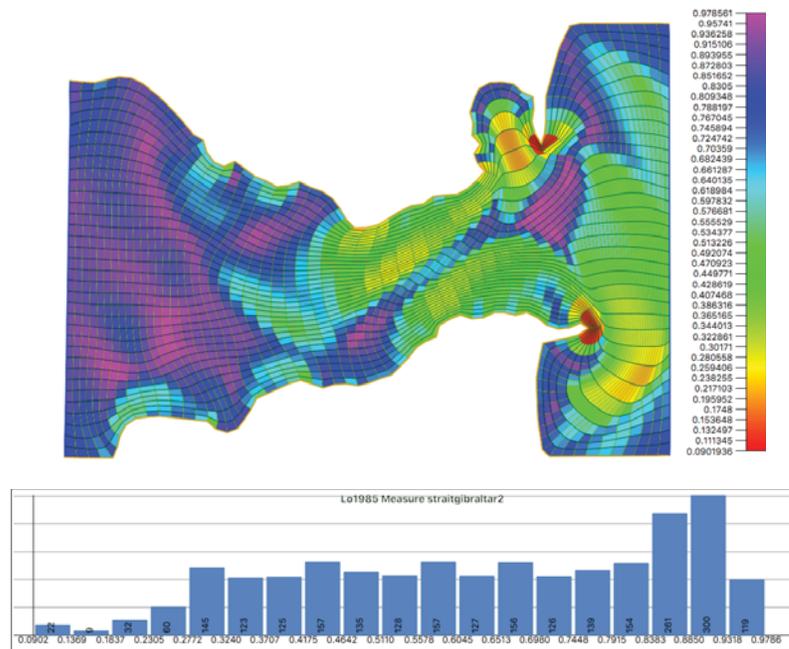
El parámetro ADO indica que hay muchos elementos cercanos a ser ortogonales (rectángulos y cuadrados). La parte de la tabla relativa a las medidas que detectan rectángulos nos da la razón, observe adicionalmente dos mapas de calidad para rectángulos Figura 5.51. Pero también hay elementos cercanos a ser cuadrados ya que el *shape parameter* para las medidas de calidad que detectan cuadrados es, en general, cercano a 0.8. El MDO indica que hay al menos un elemento cercano a ser triángulo, y es así, los elementos en las esquinas son cerca de ser triángulos.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Ejemplo 3: La siguiente malla de 35×77 , fue construida usando un funcional que discutiremos en la siguiente sección. En la Figura 5.52, se aprecian los mapas de colores e histograma de valores para las medidas de calidad Hua1995 y Lo1985 que caracterizan cuadrados.



(a)



(b)

Figura 5.52: (a) Mapa de valores para la medida de calidad de Hua y su histograma (b) Mapa de valores para la medida de calidad de Lo 1985.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.1072	0.9988	0.9020	0.1210	0.8902
	AreaII2015	0.0386	0.9980	0.77886	0.1750	0.7600
Rectángulo	Lo1989	0.0683	0.9919	0.7685	0.1660	0.7428
	ScaledJacobian	0.3340	1.0000	0.9573	0.0745	0.9536
	ScaledJacobianM	0.0822	0.9988	0.8242	0.1537	0.8043
	MinRect2015	0.0407	0.9931	0.7830	0.1638	0.7584
	Rectangles2015	0.1387	0.9994	0.8865	0.1172	0.8761
Cuadrado	Lo1985	0.0902	0.9786	0.6371	0.2205	0.5904
	Hua1995	0.1495	0.9986	0.6988	0.2263	0.6543
	Knupp2000	0.0981	0.9980	0.6673	0.2326	0.6172
	Pebay2002	0.1299	0.9866	0.7262	0.1769	0.6997
	Hmean2017E	0.1446	0.9986	0.6974	0.2274	0.6520
	Hmean2017R	0.1446	0.9986	0.6976	0.2275	0.6522
	Hmean2017rR	0.0862	0.9981	0.7081	0.2184	0.6663

Tabla 5.3: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 35×77 , mostrada en la Figura 5.52. Para ésta malla obtuvimos ADO=9.06, MDO=70.49.

De la tabla de estadística 5.3, se observa que el indicador ADO es pequeño; es decir, que tenemos muchos elementos cuyo ángulo interior está cerca de los 90° . Pero no hay muchos ya que el *shape parameter* para las medidas que caracterizan rectángulos están cerca de 0.8 y la desviación estándar o MSE oscila entre 0.12 y 0.16. De la tabla se desprende que tenemos pocos elementos cercanos a ser cuadrados ya que el SP oscila cerca del 0.6 y el MSE está alrededor de 0.2. Del valor mínimo de todas las medidas de calidad se aprecia que algunos elementos son degenerados a triángulo o cerca de estarlo, lo cual es cierto. Con el histograma de valores para las medidas de Hua y Lo, observamos el porcentaje de elementos altamente distorsionados que cuenta esta malla y con el mapa de colores los ubicamos a muchos de ellos cerca de la frontera de la región.

Para finalizar, mostramos ahora una tabla de intervalos de aceptabilidad para cada una de las medidas de calidad que hemos revisado. Estos intervalos fueron calculados empíricamente a partir de la distorsión aceptable para un elemento ideal.

5.9. Un enfoque estadístico para calificar y cuantificar la calidad geométrica de una malla

De los ejemplos anteriores, observamos que es difícil asociar un único valor a una malla G como indicador global de calidad. Como hemos visto unos indicadores de distorsión ofrecen mejor información que otros. Nosotros creemos que debe combinarse el *shape parameter* para cuadrados o para rectángulos con el hecho de realizar un análisis estadístico de todos los elementos de la malla en el siguiente orden:

- 1) cuántos elementos son cuadrados o cerca de estarlo,
- 2) cuántos elementos son rectángulos o cerca de estarlo,
- 3) entre estos últimos identificar el *aspect ratio*,
- 4) cuántos elementos son paralelogramos y entre ellos cuál es su oblicuidad o *skew*.
- 5) Los restantes elementos diremos que son distorsionados o elongados.

Esto se puede realizar de la siguiente forma: considere tres medidas de calidad $\mu_s(Q)$, $\mu_r(Q)$ y $\mu_p(Q)$ que caractericen cuadrados, rectángulos y paralelogramos, en ese orden. Para cada una de ellas observe un intervalo de aceptabilidad $[\mu_s, 1]$, $[\mu_r, 1]$ y $[\mu_p, 1]$. Construyamos

$$G_s = \{Q \in G \mid \mu_1 \leq \mu_s(Q) \leq 1\} \quad (5.49)$$

el complemento de G_s , $G_s^c = G - G_s$ es el conjunto de los elementos de la malla que no son caracterizados como cuadrados. Ahora construyamos

$$G_r = \{Q \in G_s^c \mid \mu_2 \leq \mu_r(Q) \leq 1; \quad 1 < AR(Q) \leq 5\} \quad (5.50)$$

el conjunto $G_{rs}^c = G - G_r \cap G_s$ es el conjunto de los elementos de la malla que no son caracterizados como rectángulos (ni por cuadrados). Ahora construyamos

$$G_p = \{Q \in G_{rs}^c \mid \mu_3 \leq \mu_p(Q) \leq 1; \quad 50^\circ \leq \theta_{\min} \leq 90^\circ\}. \quad (5.51)$$

Los restantes elementos

$$G_d = G - G_p \cap G_r \cap G_s \quad (5.52)$$

simplemente diremos que son distorsionados.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Entre los elementos G_d podemos encontrar cuadriláteros de *aspect ratio* pequeño pero distorsionados con respecto a un cuadrado o a un rectángulo. También entre los elementos de G_d podemos encontrar paralelogramos de *aspect ratio* mayor a 5 (incluyendo rectángulos), así como elementos elongados lejos de ser rectángulos y lejos de ser paralelogramos.

Al conjunto G_d le podemos seguir aplicando alguna métrica para medir su oblicuidad como *skew* o el *edge ratio* y de esta forma seccionar y reclasificar la distorsión de estos elementos en elementos elongados, altamente distorsionados, con respecto a una medida, o de mala forma geométrica.

En la Figura 5.53 mostramos una ilustración esos conjuntos.

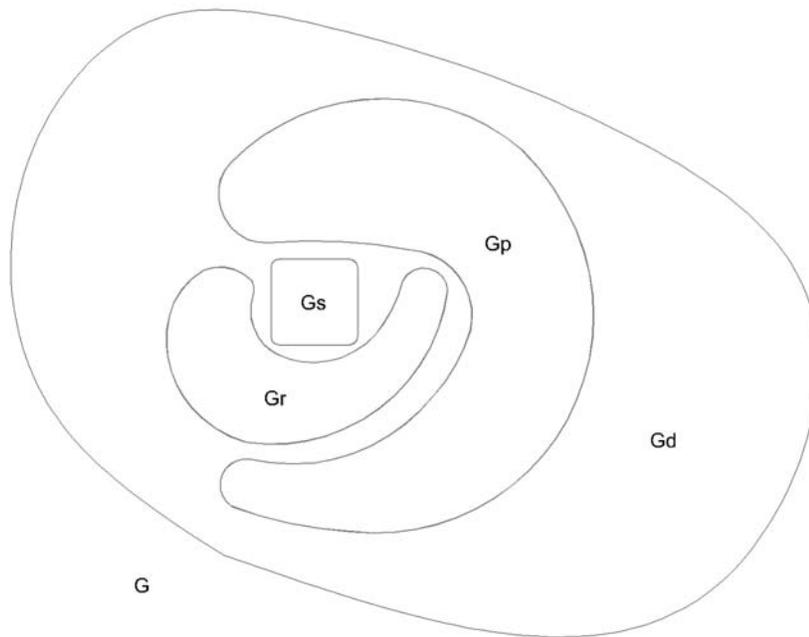


Figura 5.53: Ilustración que representa los conjuntos en que ordenamos las posibles formas de los elementos de una malla G .

Para los siguientes ejemplos, como medida de calidad para caracterizar cuadrados $\mu_s(Q)$ usaremos a HarmincMean2017, con un intervalo de aceptabilidad de $[0.9, 1]$. Como medida de calidad para caracterizar rectángulos $\mu_r(Q)$ usaremos a MinRect2015, con un intervalo de aceptabilidad de $[0.95, 1]$, usaremos el *aspect ratio* del rectángulo de área mínima y como medida de calidad para caracterizar paralelogramos $\mu_p(Q)$

usaremos AreaI 2015 con un intervalo de aceptabilidad de $[0.95, 1]$.

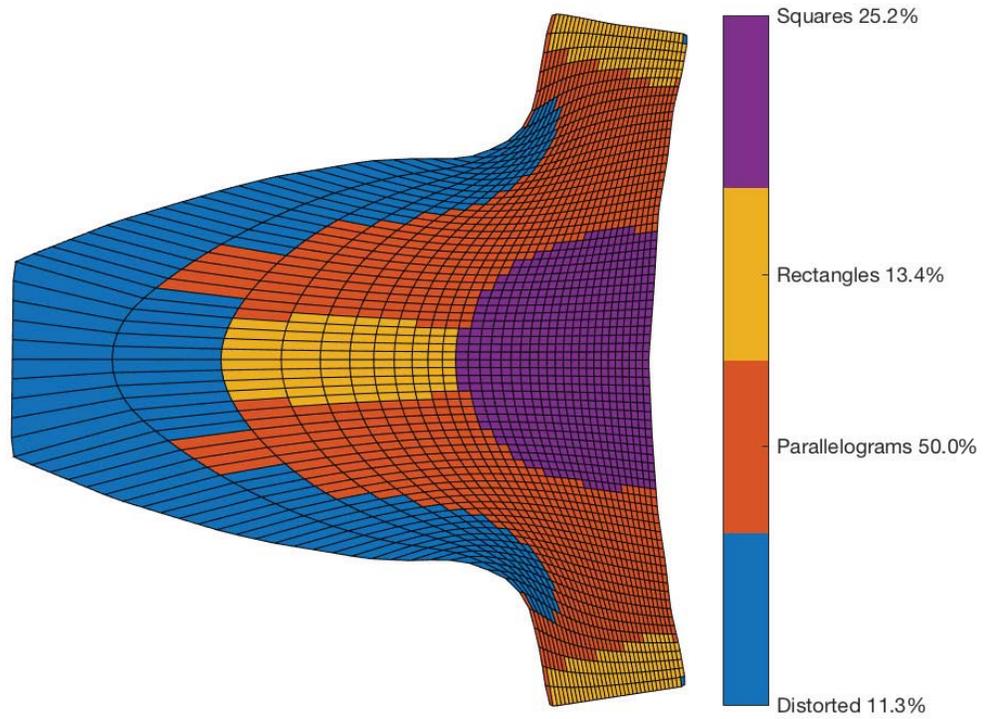


Figura 5.54: Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_ω .

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

Buenas medidas de calidad		
Forma	Nombre y año	Rango de aceptabilidad
Paralelogramos	Rannacher y Turek 1992	[.99, 1]
	Área I 2015	[.95, 1]
	Área II 2015	[.9, 1]
Rectángulos	Lo 1989	[.91]
	van Rens 1998	[.9, 1]
	Scaled jacobian 2000	[.995, 1]
	Scaled jacobian modified 2018	[.9, 1]
	Wuada 2008	[.9, 1]
	Remacle 2012	[.925, 1]
	Wu 2011	[.9, 1]
	Rectangles 2015	[.95, 1]
MinRect 2015	[.9, 1]	
Cuadrados	Lo 1985	[.95, 1]
	Hua 1995	[.99, 1]
	Shape de Knupp 2000	[.99, 1]
	Frey y George 2000	[.9, 1]
	Pebay modified 2016	[.9, 1]
	HarmonicMean 2017	[.99, 1]

Tabla 5.4: Tabla de intervalos de aceptabilidad para las medidas de calidad geométrica revisadas y propuestas.

Nombre	Forma	valor óptimo	Rango de aceptabilidad
ángulo mínimo	Cuadrados	90°	[45°, 10°]
ángulo máximo	Cuadrados	90°	[90°, 135°]
Oddy	Cuadrados	0	[0, 0.5]
Condición de Knupp	Cuadrados	1	[1, 4]
Taper	—	1	[1, 10]
Taper alternativo	—	.25	[.25, .5]
Skew	Rectángulo	1	[.5, 1]

Tabla 5.5: Valores tomados de VEREDICT [292] y NX NSTRAN [239].

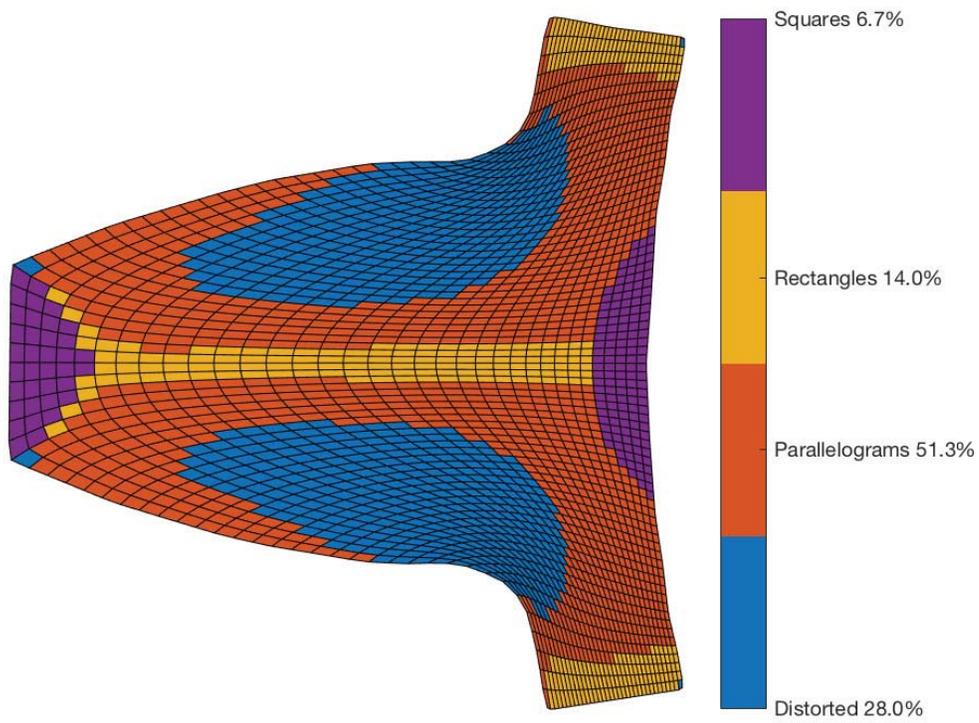


Figura 5.55: Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_ω con el funcional clásico de área.

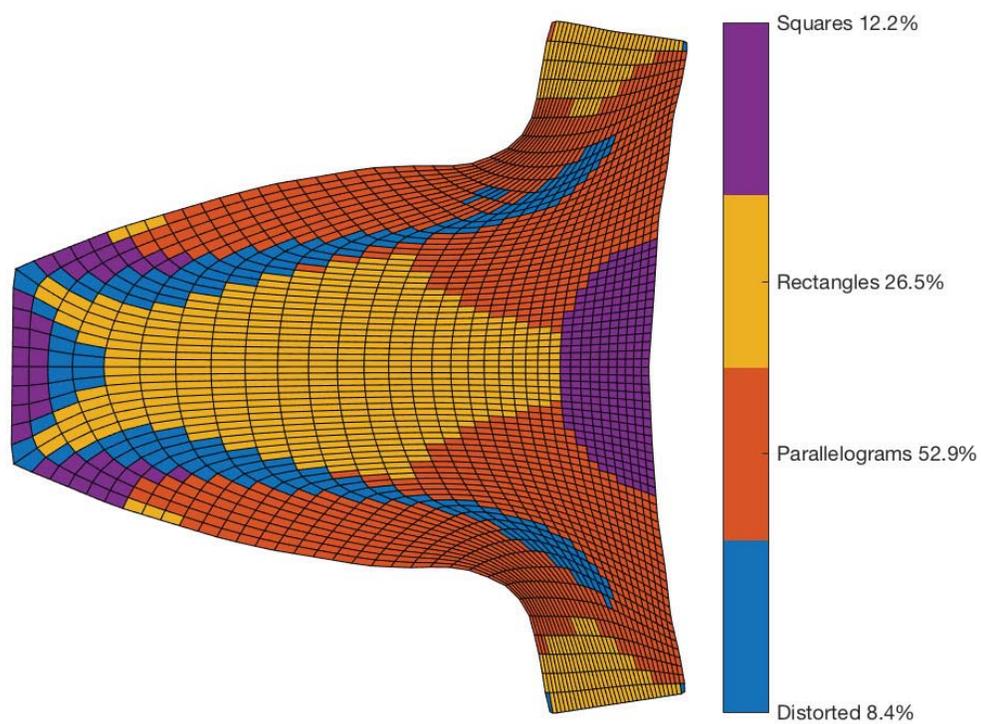


Figura 5.56: Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional cuasi-armónico H_ω con el funcional clásico de área-ortogonalidad.

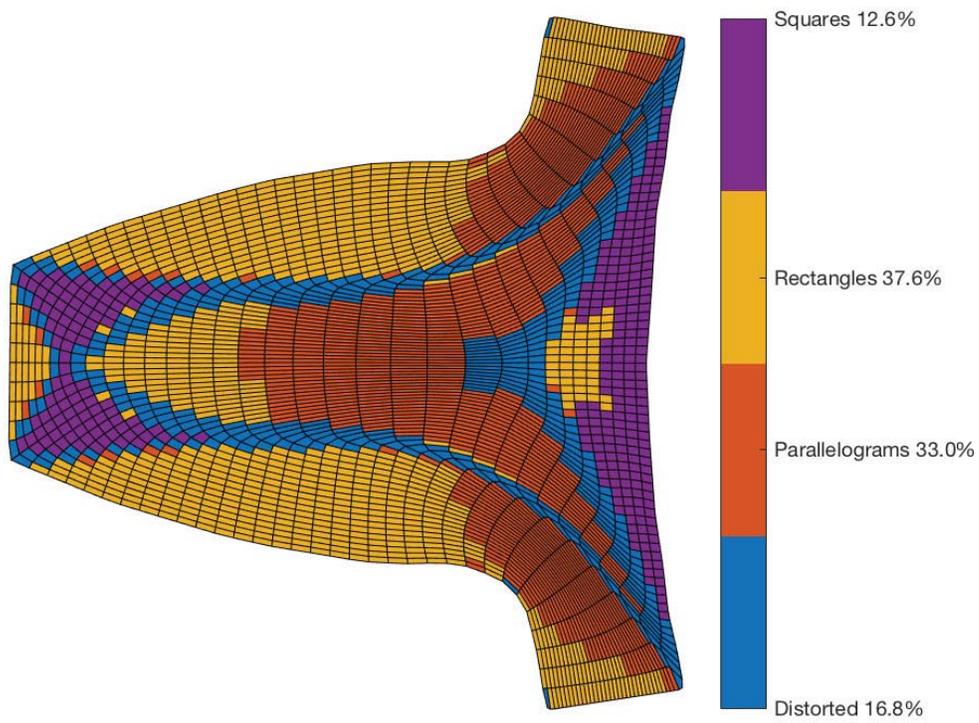


Figura 5.57: Elementos caracterizados para una malla de 77×66 sobre la región gear tooth obtenida optimizando el funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}$ con el funcional clásico de área-ortogonalidad.

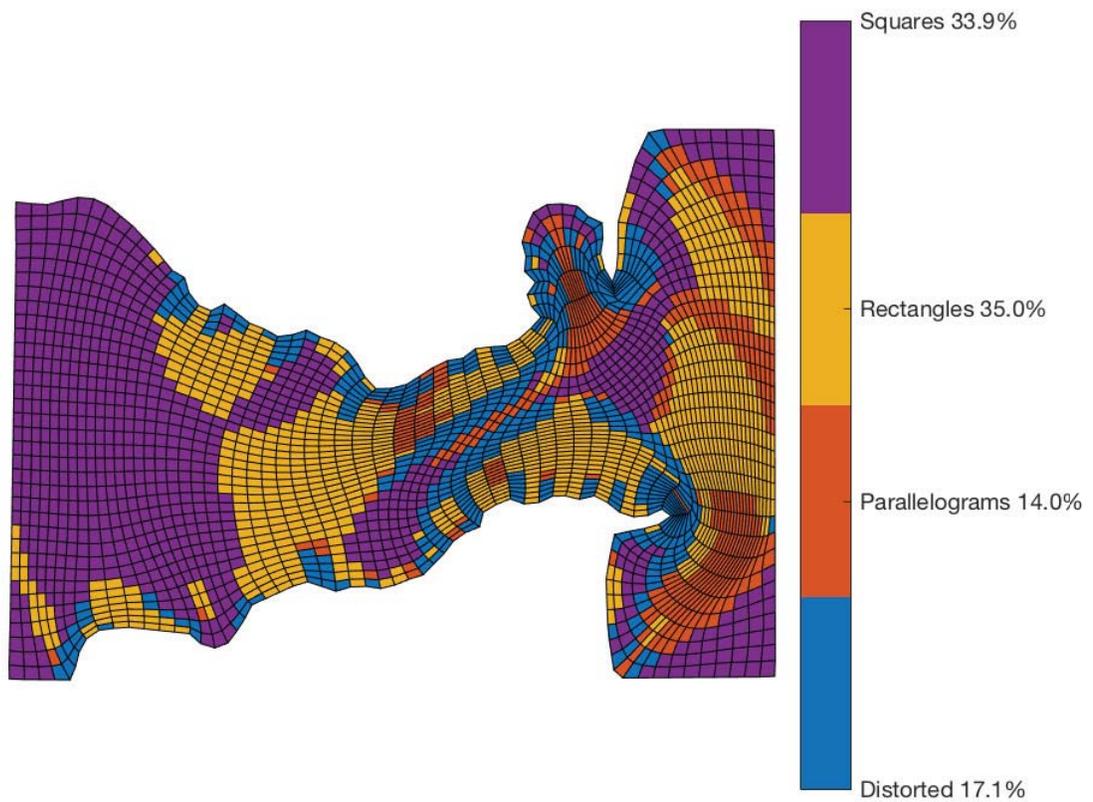


Figura 5.58: Elementos caracterizados para una malla de 35×77 sobre la región **strait of Gibraltar** obtenida optimizando un funcional discreto con el cual obtenemos elementos cercanos a ser rectángulos y que discutiremos en el siguiente capítulo.

5. SOBRE LA DISTORSIÓN DE UNA CELDA Y LA CALIDAD GEOMÉTRICA DE UNA MALLA

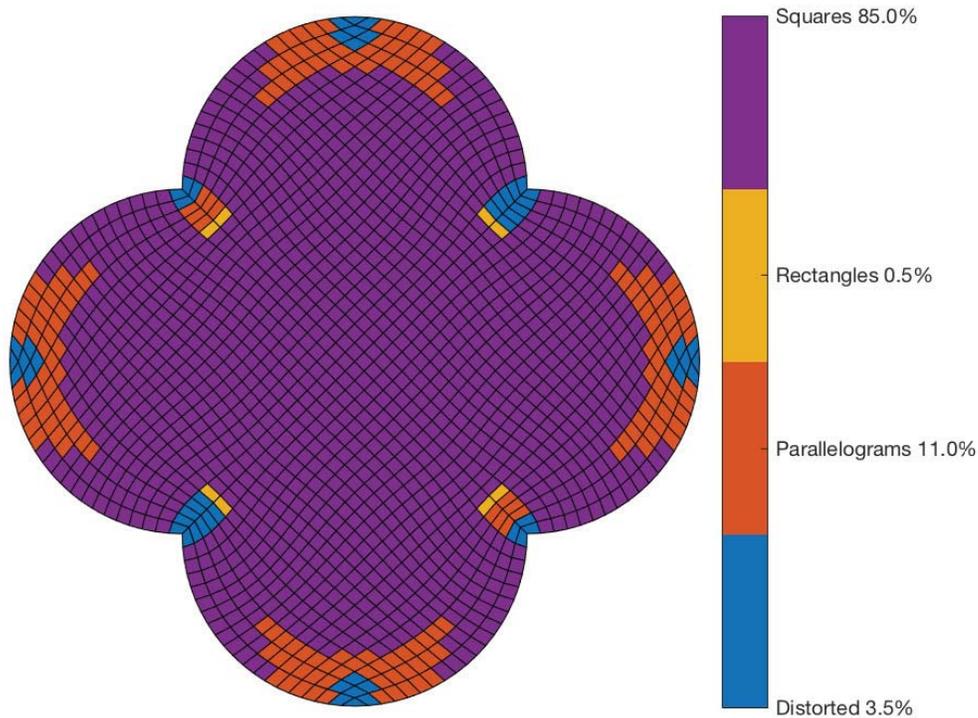


Figura 5.59: Elementos caracterizados para una malla de 41×41 sobre la región rosa obtenida optimizando un funcional discreto con el cual obtenemos elementos cercanos a ser rectángulos y que discutiremos en el siguiente capítulo.

Algunas de las mallas mostradas fueron obtenidas optimizando funcionales que buscan que los elementos sean lo más cercanos a ser rectángulos. La malla obtenida de esta forma cuenta con muchos elementos distorsionados cerca de la frontera. Es probable que con un suavizamiento y distribución de los puntos en la frontera y controlando la forma de los elementos cercanos a la frontera logremos bajar el porcentaje de elementos distorsionados.

Los resultados que se mostramos, dependen de nuestro criterio de aceptabilidad para la medida de calidad elegida.

5.10. Sumario del capítulo

Como hemos señalado, el diseño y la construcción de una malla de calidad es fundamental para el adecuado análisis error por discretización. Una malla formada por cuadriláteros puede incrementar el error de aproximación si la malla

- es gruesa,
- tiene muchos elementos distorsionados o carentes de simetría,
- si la distribución del área de los elementos está muy esparcida,
- si se cuenta con elementos de *aspect ratio* grande.

Una medida de calidad $\mu(Q)$ nos ofrece información si celda tiene la forma geométrica ideal bajo la medida $\mu(Q)$: cuadrado, rectángulo, paralelogramo. Sin embargo, no es suficiente para cuantificar su distorsión. Es necesario combinar medidas de calidad para determinar si la celda está lejos de ser considerada un cuadrado. Por ejemplo, si los ángulos interiores de una celda no difieren mucho de 90° y el *Taper* es cerca del óptimo esperado (para el *Taper* alternativo 1/4) una celda con estas características tiene una forma geométrica cercana a un cuadrado. Ahora bien, si consideremos que Q está cerca de ser un rectángulo y el *aspect ratio* es cercano a 1, podemos decir que la forma geométrica de Q es cercana a un cuadrado.

En este trabajo hemos revisado algunos intentos para formular medidas de calidad para cuadriláteros se basan en extender aquellas que se conocen muy bien para triángulos. Otros esfuerzos se concentran en formular funciones de una medida de calidad sobre los cuatro triángulos del cuadrilátero. En este trabajo hemos propuesto varias medidas de calidad para detectar

paralelogramos Area I y Area II, 2015,

cuadrados Harmonic mean 2017,

rectángulos MinRect 2015, y Rectangles 2015,

y hemos propuesto un intervalo de aceptabilidad para cada una ellas. En este trabajo hemos propuesto un nuevo *aspect ratio* geométrico y una forma eficiente de calcular el *aspect ratio* de Robinson.

Por experiencia, sabemos que los elementos altamente distorsionados para mallas estructuradas sobre regiones irregulares, usualmente se acumulan en la frontera; por lo que es recomendable imponer un control de la calidad geométrica a los elementos de la primeras capas cercanas a la frontera y luego relajar esta condición hacia el interior.

En el siguiente capítulo abordaremos un problema de optimización para construir mallas de calidad donde las funciones objetivo están basadas en medidas de calidad y métricas o funciones convexas convenientes.

Capítulo 6

Suavizamiento de mallas optimizando medidas de calidad

En este capítulo nos abocaremos a construir mallas estructuradas de calidad, mediante la optimización de algunas métricas o funciones basadas en medidas de calidad $\mu(Q)$ para cuadriláteros Q .

Definición 1 Diremos que una función de valores reales $\mu(Q)$ sobre un cuadrilátero Q es una buena medida de calidad, en el sentido Field–Oddy, si

- 1) tiene la habilidad de detectar elementos degenerados ($\mu(Q) = 0$),
- 2) es adimensionado (independiente de la escala),
- 3) continua y acotada,
- 4) está normalizada (nos interesa que $\mu(Q) \leq 1$),
- 5) y es invariante bajo transformaciones rígidas.

En este capítulo usaremos una medida de calidad geométrica $\mu(Q)$, para cuantificar la distorsión de una celda Q con respecto a su forma geométrica ideal Q^* que es caracterizada con $\mu(Q)$.

6.1. Distorsión total de una malla

En general, si $\mu(Q)$ es una buena medida de calidad geométrica para cuadriláteros, una forma de medir la distorsión de un cuadrilátero ϵ -convexo Q con respecto a la forma

geométrica ideal Q^* caracterizada por $\mu(Q)$, es:

$$f(Q) = \frac{1}{\mu(Q)}, \quad \mu(Q) > 0,$$

ya que si $f(Q)$ es mucho mayor que 1, la celda estará lejos de la forma geométrica ideal Q^* : un cuadrado, rectángulo o paralelogramo, en cuyo caso diremos que Q es un cuadrilátero distorsionado con respecto a esa medida.

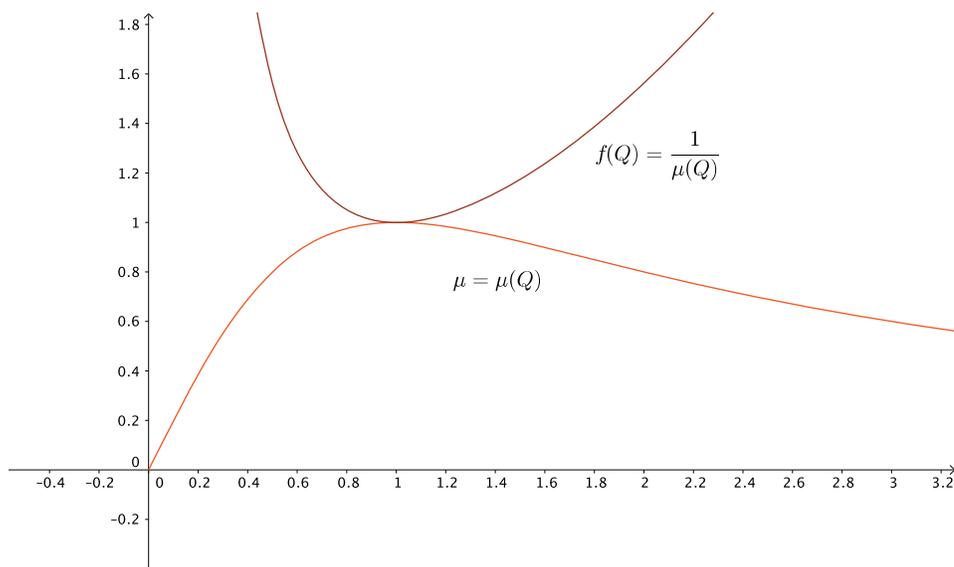


Figura 6.1: Recíproco de la medida $\mu(Q)$ como una métrica de la distorsión de una celda. En este ejemplo hipotético, se considera $\mu(Q)$ es continuamente diferenciable; sin embargo, no todas las medidas discutidas en el capítulo anterior tienen esta propiedad.

Con lo anterior, la *distorsión de la malla*, o *distorsión total de la malla G* se puede medir como el promedio de las distorsiones de todas las celdas:

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{Ne} \frac{1}{\mu(Q_k)} \tag{6.1}$$

aquí Ne representa el número de elementos o celdas de la malla.

Para nosotros, el valor $F(G)$ en (6.1) representa un indicador para la distorsión total de una malla G , pero no es el único indicador o función de distorsión que se emplea en la literatura. Algunos autores como Dari [89], Buscaglia [53] y Knupp [197] usan:

$$F(G) = \max_k \left\{ \frac{1}{\mu(Q_k)} \right\} \tag{6.2}$$

como indicador de la distorsión total y sugieren mejorar la calidad de la malla minimizando esta función. Como es de apreciar, ésta función no es diferenciable y esto es un impedimento para optimizar $F(G)$ por métodos basados en el gradiente.

Otra función para medir la distorsión de la malla es la desviación estándar de la calidad $\mu(Q)$ con respecto al valor óptimo de 1, sobre todos los Ne elementos, véase Chen *et al.* [75]. La función se escribe como:

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{Ne} (1 - \mu(Q_k))^2. \quad (6.3)$$

Por su definición, las funciones (6.1), (6.2) y (6.3) miden la distorsión total de la malla. En general diremos que

Definición 2 Si $F(G)$ es una función que mide la distorsión total de la malla G , diremos que una malla \hat{G} tiene mejor calidad que la malla \bar{G} si

$$F(\hat{G}) < F(\bar{G}). \quad (6.4)$$

En la literatura existen funcionales discretos $F(G)$ que representan una métrica o distorsión de la malla, ver Serezhnikova [286], Ivanenko [162], Garanzha [128], Branets [48], Coll [82], Freitag *et al.* [117], Sarrate [284], Barrera [39], Knupp [197] y Barrera [41], por mencionar algunos trabajos. En la siguiente sección discutiremos cómo mejorar la calidad de una malla G optimizando una función de distorsión total de la malla.

6.2. Mejora de la calidad geométrica de una malla

El problema de mejorar la calidad de la malla se le conoce como *suavizamiento de la malla*. Una forma de realizar éste suavizamiento es:

- usando un método de optimización, véase Ivanenko [156], Klein [183], Garanzha [128], etc.,
- por adaptividad, véase Chalasani *et al.* [72]),
- por reacomodo de los elementos *swapping*, intercambio de conectividad como es el caso para mallas no estructuradas, véase Freitag y Knupp [113] y Joe [167], Wu [333] y Remacle [258], etc.

Nosotros nos concentraremos en el primer caso: suavizaremos la malla optimizando funciones de distorsión basadas en medidas de calidad o alguna métricas de calidad conveniente.

Problema 1 Desde el punto de vista de un problema de optimización, la mejora de la calidad de una malla G se puede plantear resolviendo el problema de optimización:

$$G^* = \arg \min_G F(G), \quad (6.5)$$

donde $F(G)$ es una función de distorsión total de la malla.

Como hemos señalado, la función de distorsión usualmente se usa es:

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{Ne} \frac{1}{\mu(Q_k)}. \quad (6.6)$$

Nosotros nos abocaremos a este problema de optimización (6.5) fijando los nodos de la malla G sobre la frontera y los nodos interiores serán las incógnitas determinar.

El problema 1, es un problema de optimización de gran escala cuando la dimensión $m \times n$ de la malla es grande. Por otra parte, es importante señalar que es necesario que la malla inicial del proceso de optimización G_0 sea ϵ -convexa

$$\alpha_-(G) > \epsilon \cdot \bar{\alpha}(\Omega)$$

para un $\epsilon > 0$ conveniente, y lo sea en cada subsecuente paso de la optimización.

Revisaremos algunas ideas de optimización que aparecen en la literatura para el mejoramiento de una malla, tanto para triangulaciones como para mallas formadas por cuadriláteros; con la finalidad de discutir las ventajas y desventajas de la forma de abordar el problema 1.

No cualquier buena medida de calidad $\mu(Q)$ puede ser usada en el Problema 1 para la mejora de la malla. En 2002, Shewchuk [287] observa que el gradiente de la medida $\mu(T) = 2r/R$, se hace cero para triángulos degenerados o cerca de estarlo numéricamente. Lo propio ocurre si empleamos esta medida para tetraedros. Esto dificulta la utilización de esta medida en un proceso de optimización.

En 2003, Aiffa y Flaherty [2] proponen un algoritmo geométrico para suavizar triángulos (o tetraedros) minimizando una medida de calidad. Emplean una técnica de conjuntos de nivel, *level sets*, para caracterizar los puntos o configuraciones óptimas. En ese trabajo Aiffa y Flaherty señalan que si la medida de calidad tiene curvas de nivel convexas es posible garantizar la convergencia de su algoritmo a un óptimo local, ver Li y Freitag [210].

En el capítulo anterior, describimos los atributos para una buena medida de calidad para triángulos, así como algunos otros que propone Shewchuk [287] y que nos parece interesante que contengan las medidas de calidad para cuadriláteros. Uno de ellos es:

- 7) que el recíproco de $\mu(Q)$ sea una función quasi-convexa sobre el dominio de elementos no doblados *non-inverted elements*.

Este atributo nos dice que para cualquier $c > 0$ el conjunto $\{E : \mu(E) \geq c\}$ es convexo, sobre los elementos no doblados. No todas las medidas discutidas en el capítulo anterior satisfacen con esto. Un ejemplo de medidas de calidad con esta propiedad son: la medida para caracterizar cuadrados de Lo de 1985 y la medida de Hua de 1995. Esta propiedad es ideal para optimizar la medida, ya que si la medida de calidad no es quasi-convexa, esta puede tener puntos críticos sobre elementos de calidad pobre, o bien, el método de optimización empleado puede tornarse lento.

Un ejemplo de una buena medida de calidad cuyas curvas de nivel no son convexas y que puede contar con varios puntos críticos es la medida de Lo de 1989. Esta medida la discutimos en el capítulo anterior y se basa en la medida para triángulos

$$g(T) = 4\sqrt{3} \frac{\text{área}(T)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}.$$

Para cada uno de los cuatro triángulos T_i que obtenemos del cuadrilátero. Estas cantidades $g_i = g(T_i)$ deben ser primero ordenadas de tal forma que

$$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4.$$

La medida propuesta por Lo es

$$\mu(Q) = \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4}. \tag{6.7}$$

Observemos las curvas de nivel para un ejemplo particular:

Ejemplo: Si consideramos el cuadrilátero Q formado por $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$ y el cuarto punto es libre. Las curvas de nivel $f(x,y) = \mu(Q) = \text{constante}$ para esta medida se aprecian en la Figura 6.2.

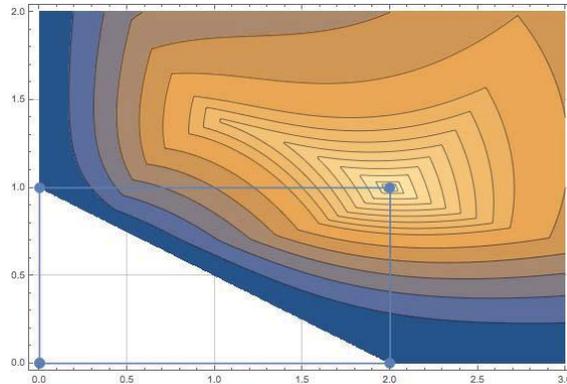


Figura 6.2: Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de *aspect ratio* 2.

Ahora bien, para un cuadrilátero Q con vértices en $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 1)$ y el cuarto punto libre, la forma de las curvas de nivel de (6.7) nos sugiere que hay otro punto crítico, véase la Figura 6.3

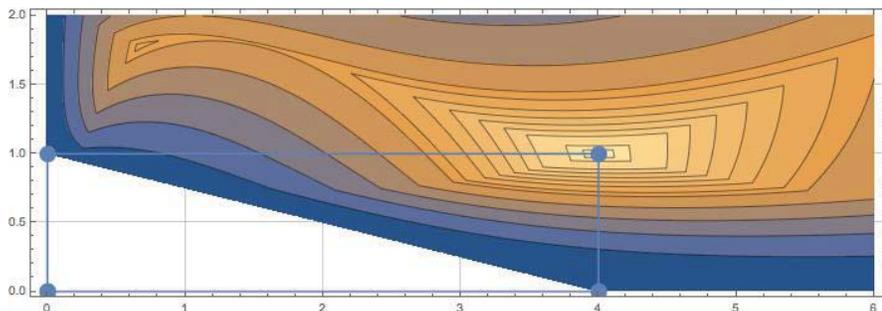


Figura 6.3: Curvas de nivel para la medida de Lo 1989 para un rectángulo de *aspect ratio* 4.

En general, dependiendo de la diferenciabilidad de la medida y de los puntos críticos que contenga, podemos obtener de manera relativamente sencilla una malla con las características idóneas del elemento ideal Q^* que caracteriza la medida de calidad $\mu(Q)$. La elección de una medida de calidad es crucial para el suavizamiento o mejora de la calidad de la malla.

Algunos autores como Sastry *et al.* [278] prefieren abordar el problema de suavizamiento de la malla minimizando la función objetivo

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{Ne} \frac{1}{\mu(Q_k)^2}. \quad (6.8)$$

Nuevamente, éste problema tiene sentido solamente cuando garantizamos que todos elementos Q_k de la malla son orientados y convexos (o no doblados). De no imponer esta restricción, una malla no convexa o con elementos doblados o con otra orientación puede ser punto crítico de (6.8).

En 2002, Freitag *et al.* [116] plantean el problema de optimización con restricciones:

$$\min F(G) = \sum_{k=1}^{Ne} \frac{1}{\mu(T_k)} \quad (6.9)$$

$$\text{s.t. } \text{área}(T_k) \geq \beta, \quad k = 1, \dots, Ne \quad (6.10)$$

para un valor de $\beta > 0$ conveniente y comparan diferentes métodos de optimización para diferentes medidas de calidad $\mu(T)$. Por la forma en que está planteado el problema, Freitag *et al.* aseguran que las celdas además de ser no dobladas el área de todos los elementos esté acotada por un β conveniente. En 2007, Munson [236] revisa el problema

de optimización con restricciones (6.9)–(6.10) para la medida *mean-ratio* propuesta por Liu y Joe en 1994 [213] (ver la medida $\mu_5(T)$ del Apéndice A). En ese artículo, Munson obtiene muy buenos resultados acelerando la optimización al usar preconditionadores de Jacobi por bloques.

Existen varias formas de mejorar la calidad de una malla usando diferentes funciones objetivo. En 1996, Zavattieri *et al.* [336] proponen suavizar la malla minimizando

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{N_e} (1 - \mu(Q_k))^p \quad (6.11)$$

para $p > 1$ entero fijo. La función propuesta por Zavattieri *et al.* es una función de distorsión total de la malla y está basada en la norma l_p , $p \geq 2$ de la colección de valores $\{1 - \mu(Q_k)\}$.

Para el caso de la norma $p = \infty$, minimizar (6.11) corresponde a pedir que todos los valores $\mu(Q_k)$ sean lo más cercano a 1. Un análisis similar se puede hacer para cada p elegido.

Por facilidad de los cálculos, Zavattieri *et al.* recomiendan usar $p = 2$, pero en general conforme $p > 2$ sea grande los elementos de pobre calidad, *worst elements*, dominan la suma. En la Figura 6.4, se esboza la gráfica de $f(Q) = (1 - \mu(Q))^p$ contando con una medida $\mu(Q)$ para algunos valores de $p > 1$.

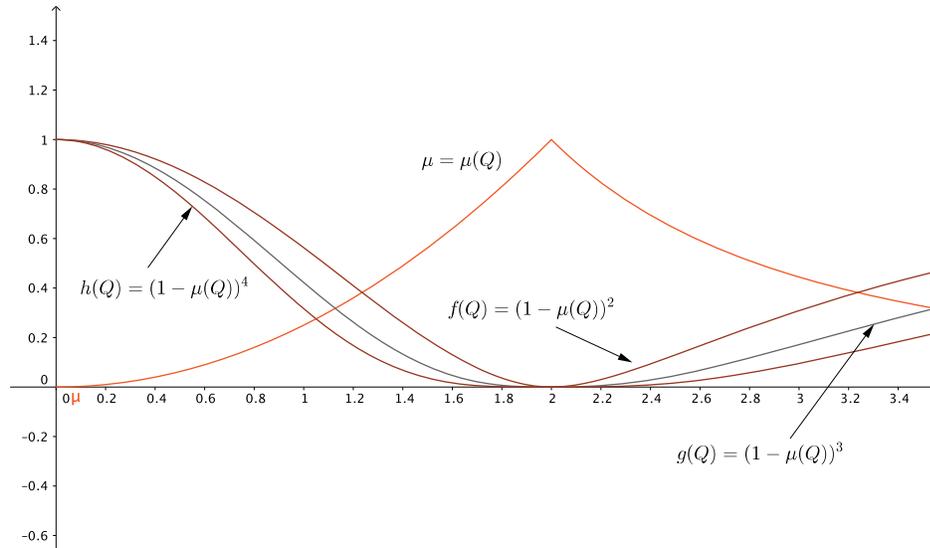


Figura 6.4: Función objetivo de Zavattieri para $p = 2, 3$ y 4 usando una función que representa una medida de calidad $\mu(Q)$ que contiene un discontinuidad diferenciable.

Como observación, la función objetivo (6.11) está normalizada por lo que resulta muy atractivo combinarla linealmente otras medidas y/o funcionales discretos geométricos dentro de un método de optimización de gran escala.

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

En 2003, Chen *et al.* [75] la función objetivo (6.11) para suavizar triangulaciones en el plano minimizando

$$F(G) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} (1 - \mu(T_k))^2$$

donde $\mu(T)$ es una medida de calidad para T , y proponen combinarla con una función de penalización $h(\theta)$ basada en el ángulo mínimo con la finalidad de evitar que las celdas resulten dobladas, en cuyo caso se dice que es una *untangle invalid mesh*.

Regresando al trabajo de Sastry *et. al* [278, 279] basados en la función objetivo

$$F(G) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \frac{1}{\mu(T_k)^2},$$

observan que si $\mu(T)$ es discontinua, el recíproco continúa contando con la discontinuidad diferencial como se aprecia en la Figura 6.5

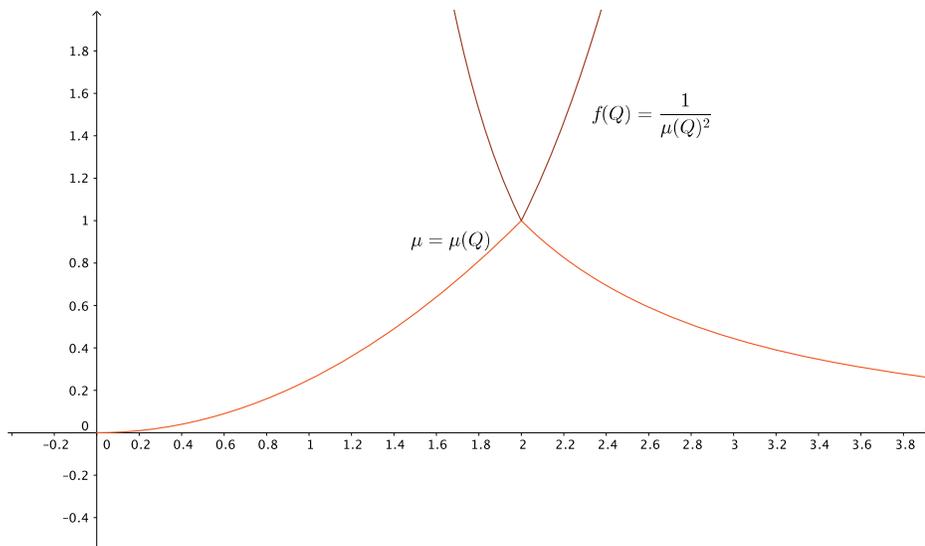


Figura 6.5: Función objetivo de Sastry *et. al* [279].

Por lo que, si la medida de calidad no es suave, es necesario usar un método de optimización diseñado específicamente para funciones que no son suaves.

En 2010, Park y Shontz [247] proponen usar métodos que no requieren de derivadas, los llamados *derivative-free methods*. Estos métodos se basan en la exploración de un patrón esperado de posición de los vértices por los cuales se estima que la función disminuya. El patrón de exploración puede ser una estrella simple como es el caso del método *patter search* PS (ver Figura 6.6) o un simplex como es el caso del método *multidirectional search* MDS. En ambos casos, si el nodo interior se sale de la frontera

de un subregión (la frontera de la región o un *path* establecido), usan una búsqueda en la línea hacia atrás *backtracking linesearch* para evitar que la malla se doble y no sea válida.

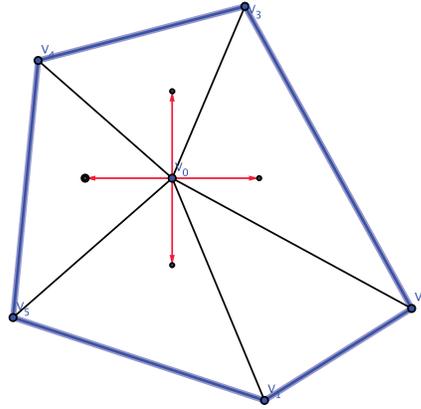


Figura 6.6: Patrón de búsqueda que se emplea en el algoritmo PS [247].

Park y Shontz observan que con estos métodos es posible mejorar la calidad de la malla usando cualquier medida de calidad. Sin embargo, el costo de su implementación es alto. En la práctica Park y Shontz recomiendan usar un esquema PS por su simplicidad. Desde luego éste es un método heurístico, y si en el patrón de búsqueda se encuentra una configuración mejorable, es posible obtener una mejor malla de calidad. Sin embargo, no es posible garantizar que el algoritmo converga a una malla de mejor calidad.

Otro método interesante reportado en la literatura viene descrito en el artículo de 2014 de Sastry *et al.* [279] que ya hemos citado. Ellos usan como punto de partida la medida de calidad para tetraedros *aspect ratio metric*

$$\mu(T) = \frac{\sqrt{2} l_{\text{máx}}^3}{12 \text{ vol}} \quad (6.12)$$

la cual es discontinua. Sastry *et al.* proponen “corregir” la diferenciabilidad que presenta $\mu(T)$ mediante el uso de funciones *sigmoid*. Estas funciones que son usadas de activación en redes neuronales, véase [147].

Sastry *et al.* proponen optimizar, por métodos basados en el gradiente, la función objetivo:

$$\text{máx } F(G) = \sum_k^{Ne} w_{\text{vol}_k} \text{vol}(T_k) + w_{\text{ar}_k} \mu(T_k)^{-1}$$

donde $\text{vol}(T_k)$ es el volúmen el tetraedro y w_{vol_k} y w_{ar_k} son pesos basados en *sigmoid*

functions de la forma

$$w_{\text{vol}_k} = \frac{1}{1 + e^{-\alpha \text{vol}(T_k)}} \quad w_{\text{ar}_k} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \mu(T_k)^{-1}}}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son factores de escalamiento.

Por una parte, los pesos que proponen Sastry *et al.* sirven para amortiguar la calidad de los elementos al asignar un valor grande a los elementos de calidad pobre y otra parte, permite “atenuar” las discontinuidades que se presenten en la derivada de la medida de calidad (6.12) [279].

En la Figura 6.7 se ejemplifica el uso de una función sigmoid para aproximar $g(x) = |x|$.

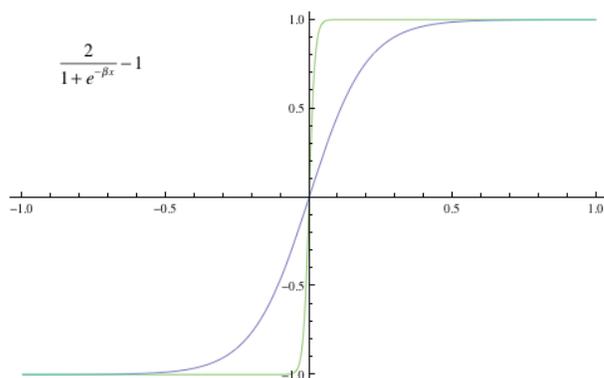


Figura 6.7: En este ejemplo $f(x) = \frac{2}{1+e^{-\beta x}} - 1$ aproxima la derivada de $|x|$ conforme $\beta > 0$ es grande.

Con ésta propuesta, Sastry *et al.* reportan buenos resultados: obtienen elementos *noninverted* y de buena calidad.

A nosotros nos parece interesante el estudio de estas propuestas que están apareciendo en la literatura: usar métodos que no requiere de derivadas y métodos que intentan remover o evitar las discontinuidades, para su experimentación en el suavizamiento de mallas estructuradas usando medidas de calidad que contienen discontinuidades diferenciales.

Como señalamos, las mallas estructuradas sobre regiones planas irregulares cuentan con elementos altamente distorsionados que usualmente se acumulan en la frontera de la región, por lo que es recomendable ponderar el control de la calidad a los elementos en las primeras capas de la frontera para luego relajar esta condición hacia el interior. Para lograr esto, lo usual es ponderar una función de distorsión, por ejemplo

$$F(G) = \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^N w_k \frac{1}{\mu(Q_k)} \tag{6.13}$$

donde $0 < w_k < 1$. Esta idea es un clásico en la literatura, en el primer capítulo discutimos algunas propuestas de su uso para mallas adaptativas.

Usando métricas de calidad o de distorsión ponderadas (6.13), logramos un mejor control de la calidad de los elementos en zonas donde definamos pesos grande y menor control o más libertad en las zonas donde los pesos sean pequeños. Esta idea no es nueva, una propuesta muy interesante es descrita por Liu *et al.* en 2012, véase [214].

En ese mismo año, 2012, Knupp [197] propuso suavizar triangulaciones optimizando

$$F(G) = \frac{1}{N_s} \sum_r \sum_k w_{r,k} \mu_r(T_k). \quad (6.14)$$

Aquí, los de valores $w_{r,k} > 0$ son elegidos para controlar la calidad de los elementos en lugares específicos de la región de estudio y $\mu_r(T)$ son métricas de calidad convenientes. Esta propuesta se le conoce en la literatura como *Target-Matrix Optimization Paradigm* (por sus siglas TMOP), y consiste en emplear algunas de las ideas que hemos descrito anteriormente: es un método directo de optimización, usa métricas o medidas transparentes al tipo de elemento de malla (las medidas que propone emplear son extensibles a diferente elementos: triángulos, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros), y la función objetivo está basada en tres o cuatro métricas de calidad continuamente diferenciables.

Los métricas $\mu_r(T)$ que usualmente emplea Knupp son

$$\mu(T) = \|B_T - I\|_F^2$$

y

$$\mu(T) = \|B_T\|_F^2 - 2\sqrt{\|B_T\|_F^2 + 2\tau} + 2$$

ambas para controlar la forma y tamaño de los elementos y una tercera, de nuevo para controlar de nuevo la forma ideal de los elementos

$$\mu(T) = \|B_T\|_F^2 - 2\tau.$$

Aquí τ es un valor predeterminado para la calidad deseada y $\|\cdot\|_F^2$ es el cuadrado de la norma de Frobenius. La idea esencial detrás del TMOP es usar métricas que involucren a la matriz asociada B_T de la deformación del elemento, usualmente $B_T = AW^{-1}$, ver el Apéndice 1 y [24].

En [197], Knupp hace referencia a un manuscrito privado de 2010, [196], en el cual realiza una revisión de los algoritmos de optimización convencionales y cómo relajar los *solvers* para optimizar convenientemente la función objetivo. En un artículo previo de 2006, Freitag, Knupp *et al.* [117] observan que es conveniente usar un método de newton puntual, un método del tipo *block coordinate descent method*, para optimizar la medida de calidad basada en el número de condición κ_2 también conocida como *mean-ratio metric*, ésta medida la revisamos en el capítulo anterior.

Para iniciar el TMOP es necesario contar con una malla válida (donde todas las celdas sean convexas o no dobladas). Una de las métricas (no es una buena medida) que usa Knupp [192] para evitar que los elementos se doblen es

$$\mu(T) = \frac{1}{2}(|V - \beta| - (V - \beta)) \quad (6.15)$$

donde V es el área (para triángulos) o el volúmen (para tetraedros) del elemento y $\beta > 0$ es un valor prefijado. En la literatura esta medida es referenciada como *untangling mesh quality metric*. En la Figura 6.8 se aprecia la forma de la gráfica de (6.15).

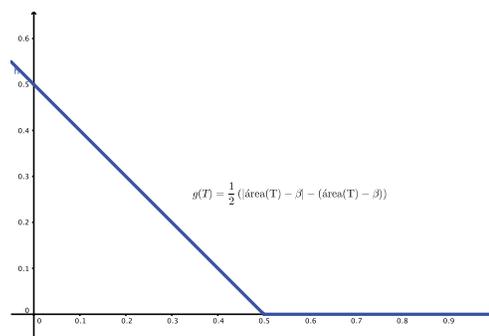


Figura 6.8: Esbozo de la métrica de Knupp [192].

En resumen, el paradigma TMOP (6.14) representa una forma de plantear una función multiobjetivo que combina varias medidas de calidad o métricas.

Combinar diferentes métricas para controlar la forma de los elementos es algo usual en la generación numérica de mallas de calidad. En 1998 de Frey y Borouchaki [118] propusieron una serie de funciones a optimizar como corrección o gradación de una medida sobre los triángulos vecinos y señalaron que es necesario imponer restricciones para evitar el colapso de los segmentos. En 2011, Wu [333], propuso una función objetivo que combina dos o más medidas de calidad y penaliza asignando un valor entero a las celdas no convexas.

En 2013, Kim *et al.* [182] proponen un nuevo marco de trabajo llamado *a multi-objective mesh optimization framework* para mejorar la calidad de una malla formada por tetraedros. En procedimiento, combinan dos o más funciones en una sola función objetivo la cual se resuelve usando uno o varios métodos de optimización multiobjetivo. Una de las funciones que usan es el *invert mean ratio* y la combinan con métricas reportadas en la literatura poco conocidas: *scale-invariant* basada en un cociente del volúmen y el área de las caras del tetraedro y *size-shape* basado en el volúmen, el área de las caras y los lados del tetraedro. En los experimentos realizados señalan que la solución obtenida satisface una condición débil de optimalidad de Pareto [182]. Kim *et al.* emplean la misma métrica de Knupp descrita en (6.15) para evitar que las celdas se doblen durante el suavizamiento de la malla.

Como se sabe, cualquier problema no lineal con restricciones (no lineales) puede ser muy costoso. Lo usual en la literatura, es que las restricciones de convexidad $c_i(T) \geq 0$ sean añadidas a la función objetivo $F(G)$ en un Lagrangiano de la forma

$$L(G; \lambda) = F(G) + \lambda c(G)$$

donde $\lambda > 0$. Aquí $F(G)$ es una métrica de distorsión de la malla G . De esta forma el problema de optimización con restricciones se reformula como un problema sin restricciones. Un ejemplo de esta forma de abordar el suavizamiento de la malla es descrita por Munson [236] quien optimiza κ_2 , o recíproco de la medida *mean ratio*, y una restricción de convexidad.

En 2014, Sastry *et al.* [279] observan que si la calidad de los elementos $\mu_i(T)$ está acotada por abajo por $t > 0$, entonces los elementos son no invertidos, *non inverted or untangling*. Esta condición se puede escribir como

$$0 < t \leq \min_k \mu(T_k)$$

Sastry *et al.* proponen imponer como obstáculo esta cota de calidad a los elementos dentro de la función objetivo; para esto usan una función logaritmo en la forma

$$\text{máx } F(\mathbf{z}, t, \lambda) = t + \lambda \sum_{k=1}^{N_e} \log(\mu(T_k) - t) \quad (6.16)$$

donde t es una cantidad fija que representa la calidad mínima aceptada para las celdas, $\lambda > 0$ es un peso conveniente y \mathbf{z} es el vector de los nodos interiores. A este método le llaman *log-barrier method*.

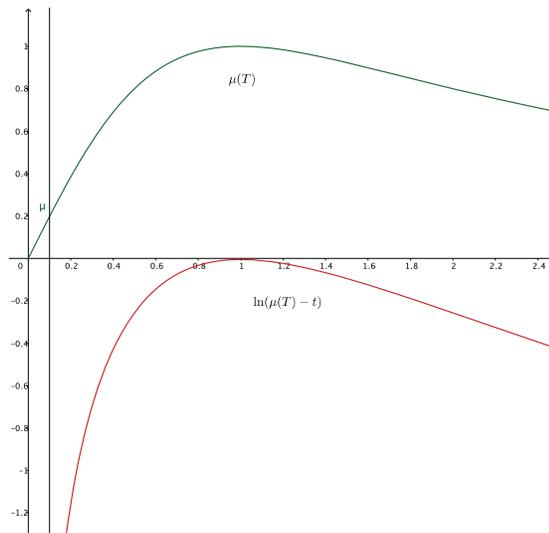


Figura 6.9: Gráfica de la forma de una medida de calidad y el obstáculo logarítmico en (6.16).

Sastry *et al.* comprueban que la solución del problema de optimización con restricciones (6.16) satisface las condiciones Karush–Kuhn–Tucker (KKT), y con esto muestran, que es posible obtener un mejoramiento de la calidad de la malla garantizando la convexidad de los elementos *mesh quality improvement and untangling*.

Como es de observar, esta función objetivo tiene una obstáculo infinito en la frontera de las mallas admisibles y de calidad mayor a t por lo que de existir una malla óptima y con la calidad mayor a t , esta se puede obtener optimizando (6.16).

Para implementar este obstáculo logarítmico (6.16) en un programa computacional, es necesario realizar una adecuada regularización. Por otra parte, el esquema propuesto por Sastry *et al.*, representa una forma clásica de optimización convexa con restricciones,

Por otra parte, el esquema propuesto por Toulorge y Geuzaine, representa una forma clásica de optimización convexa con restricciones, para la cual la condición de calidad de los elementos se logra usando funciones de penalización logarítmica, véase Hertog *et al* [149]. En ese artículo Hertog *et al* señalan que esta función de penalización fue introducida por vez primera por Frisch [119] en 1955.

Otro trabajo muy interesante para suavizar mallas por alguna métrica es de Park y Shontz de 2010 [247], en este trabajo proponen alternar la optimización de una métrica ineficiente con una métrica eficiente para reducir el tiempo empleado en construir una malla de calidad. En este trabajo Park y Shontz proponen un criterio de convergencia (o de aceptabilidad) para la optimización

$$F(G_i) - F(G_c) > 0.95 \left[F(G_i) - F(G_d) \right]$$

donde G_i es la malla de calidad inicial, G_c es la malla obtenida en el paso actual de optimización y $F(G_d)$ es la distorsión esperada. Nosotros coincidimos con este esquema de trabajo: es considerablemente más eficiente obtener una malla suave, convexa y de calidad, si la malla inicial es suave y convexa y estas características se preservan durante el suavizamiento de la malla.

Para finalizar, es necesario señalar que uno de los primeros trabajos que describe la necesidad de garantizar que la malla sea convexa en cada paso de la optimización es el trabajo de Ivanenko [156] de 1988, y uno de los primeros trabajos que garantiza el llamado desenredo de la malla (*untangling*) y la calidad de sus elementos mallas es el trabajo de Tinoco [312] de 1997. Hoy en día el trabajo más citado sobre celdas no dobladas y mejoramiento de la malla es el de Freitag y Plassman [115], un segundo trabajo en ésta línea menos conocido es el desarrollado por Garanzha en 1999 y 2000 [125, 126] y el trabajo desarrollado por Domínguez [91], de los cuales hemos hablado en los capítulos anteriores. El trabajo, de Domínguez será para nosotros el *silver bullet* o bala de plata para garantizar y preservar la convexidad durante el mejoramiento de la calidad de las mallas usando métricas convenientes.

6.3. Suavizando mallas garantizando la convexidad de las celdas

Como hemos visto en secciones previas, para suavizar o mejorar las mallas usando una medida de calidad es necesario garantizar que las celdas permanezcan orientadas y convexas en cada paso de la optimización.

Nosotros proponemos usar los funcionales ϵ -convexos de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$, [35, 39], en combinación con un funcional positivo que mida la distorsión de las celdas: por ejemplo el recíproco de alguna medida de calidad

$$F(G) = S_{\omega,\epsilon}(G) + \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{N_e} \frac{1}{\mu(Q_k)}. \quad (6.17)$$

Optimizando este funcional garantizamos que las mallas son convexas y de buena calidad geométrica.

Observe que la función de distorsión también presenta un obstáculo infinito para las celdas convexas. Es necesario hacer una regularización de esta función para su implementación en un proceso de optimización.

Otra propuesta es considerar la desviación estándar de $\mu(Q)$ con respecto al valor óptimo de 1:

$$F(G) = S_{\omega,\epsilon}(G) + \frac{1}{Ne} \sum_{k=1}^{N_e} (1 - \mu(Q_k))^2 \quad (6.18)$$

En general, siempre que la función de distorsión total de la malla sea positiva, podemos garantizar que para un ω suficientemente grande es posible obtener una malla ϵ -convexa y calidad, ver capítulo 2.

Como hemos señalado a lo largo del capítulo, resulta costoso minimizar una buena medida de calidad con discontinuidades diferenciables. Es preferible diseñar funciones convexas positivas $f(Q)$, o métricas, que midan la distorsión de una celda Q con respecto a una forma geométrica ideal: un cuadrado, rectángulo, un paralelogramo, etc.

En lo que sigue formularemos dos funcionales discretos convenientes para obtener mallas formadas por elementos cercanos a ser rectángulos.

6.4. Un nuevo funcional discreto basado en una medida de calidad para obtener rectángulos

Nuestro interés se centra ahora en construir mallas de calidad formadas por rectángulos. Para esto, se define una métrica o función convexa que mida la distorsión de la celda con respecto a un rectángulo.

En el capítulo anterior, se definió una medida de calidad para caracterizar rectángulos

$$\mu(Q) = \frac{4a_c^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \leq 1 \quad (6.19)$$

donde a_c es el área de la celda Q . Esta medida es continuamente diferenciable y el recíproco

$$f(Q) = \frac{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}{4a_c^2} \quad (6.20)$$

mide la distorsión de Q con respecto a la forma geométrica ideal: un rectángulo. Esta función es positiva y convexa para la cual un rectángulo es punto crítico. Observe el siguiente:

Ejemplo: Considere el cuadrilátero Q formado por los puntos $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(x, y)$ y el cuarto punto $P_4(0, 1)$ y está en el plano. En la Figura 6.10 se aprecian las curvas de nivel de (6.20).

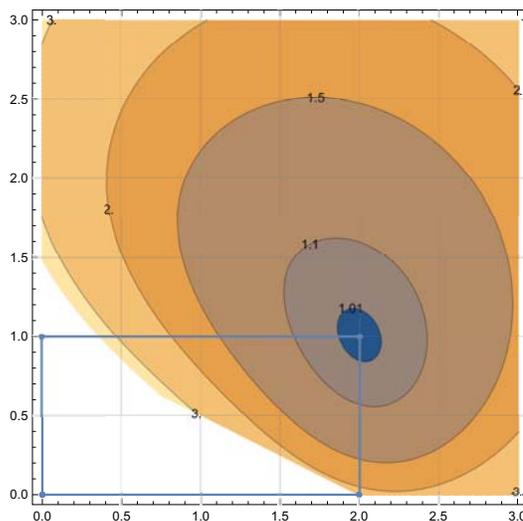


Figura 6.10: Curvas de nivel para la función (6.20).

Con esta función de distorsión podemos construir un funcional discreto $F_{Ra}(G)$ sobre todos los elementos Q de la malla

$$F_{Ra}(G) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} f(Q_k) \quad (6.21)$$

el cual mide la distorsión total de la malla. Observe que éste funcional tiene puntos críticos en celdas dobladas.

Para garantizar la convexidad de las celdas y la propiedad geométrica de que las celdas estén cerca de ser rectángulos, nosotros proponemos combinar el funcional convexo (6.21) con un funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$. El funcional a optimizar tiene la forma

$$F(G) = (1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Ra}(G) \quad (6.22)$$

donde $0 \leq \sigma \leq 1$. Siendo $F_{Ra}(G)$ positivo, la teoría revisada en el Capítulo 3, nos garantiza que optimizando (6.22) para un valor $\omega > 0$ adecuado, es posible obtener una malla ϵ -convexa cuyas celdas estén cerca de ser rectángulos.

Otra forma de escribir un funcional discreto basado en la medida (6.19) es

$$F_{Ra}(Q) = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - 4a_c^2 \quad (6.23)$$

el cual es no negativo y el valor mínimo de cero se alcanza para un rectángulo.

Ejemplo: Considere el cuadrilátero Q formado por los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ y el cuarto punto libre podemos identificar cómo se comporta $f_{Ra}(Q)$. En la Figura 6.11 se puede apreciar las curvas de nivel y la forma de la superficie de $f_{Ra}(Q)$.

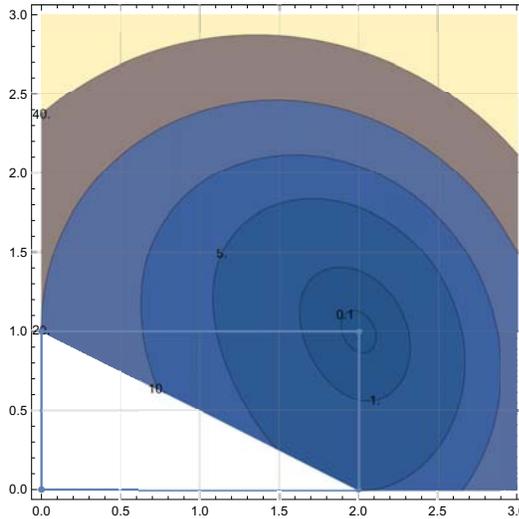


Figura 6.11: Curvas de nivel para la función (6.23).

A diferencia del funcional (6.20), este funcional es dependiente de la escala, por lo que, para combinar el funcional (6.23) con cualquier otro, por ejemplo el funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$, debemos reescalar sus valores.

Hemos usado ambos funcionales y hemos encontrado que sí existe una distinción entre las mallas obtenidas con uno y otro funcional. Esto se debe, presumiblemente, a que con una funcional se amplía el dominio de puntos críticos. Nosotros preferimos la última funcional (6.23) sobre

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

la primera descrita (6.20) debido a que esta última debe ser regularizada para evitar celdas de área cero.

En la Figura 6.12 se aprecia la malla obtenida optimizando (6.22) y en la Tabla 6.1 se aprecian las estadísticas de calidad de esa malla.



Figura 6.12: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1-\sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Ra}(G)$ para $\sigma = 0.5$.

6.4 Un nuevo funcional discreto basado en una medida de calidad para obtener rectángulos

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI	0.0397	0.9999	0.8554	0.11434	0.8379
	AreaII	0.0124	0.9974	0.7424	0.1913	0.7051
Rectángulo	Lo1989	0.0135	0.9961	0.7247	0.1753	0.6936
	ScaledJacobian	0.3340	0.9999	0.9573	0.0745	0.9536
	ScaledJacobianM	0.0822	0.9967	0.8242	0.1537	0.8043
	MinRect2015	0.0150	0.9967	0.7664	0.1633	0.7408
	Rectangles2015	0.0562	0.9982	0.8606	0.1376	0.8449
Cuadrado	Lo1985	0.0430	0.9935	0.4644	0.2818	0.3542
	Hua1995	0.0550	0.9996	0.5167	0.3002	0.4109
	Knupp2000	0.0471	0.9993	0.4949	0.2997	0.3762
	Pebay2002	0.0619	0.9958	0.5614	0.2624	0.4874
	Hmean2017E	0.0548	0.9996	0.5148	0.3009	0.4082
	Hmean2017R	0.0548	0.9996	0.5150	0.3011	0.4083
	Hmean2017r	0.0124	0.9996	0.5271	0.2939	0.4274

Tabla 6.1: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.12. Para ésta malla obtuvimos ADO=10.62 y MDO=85.67.

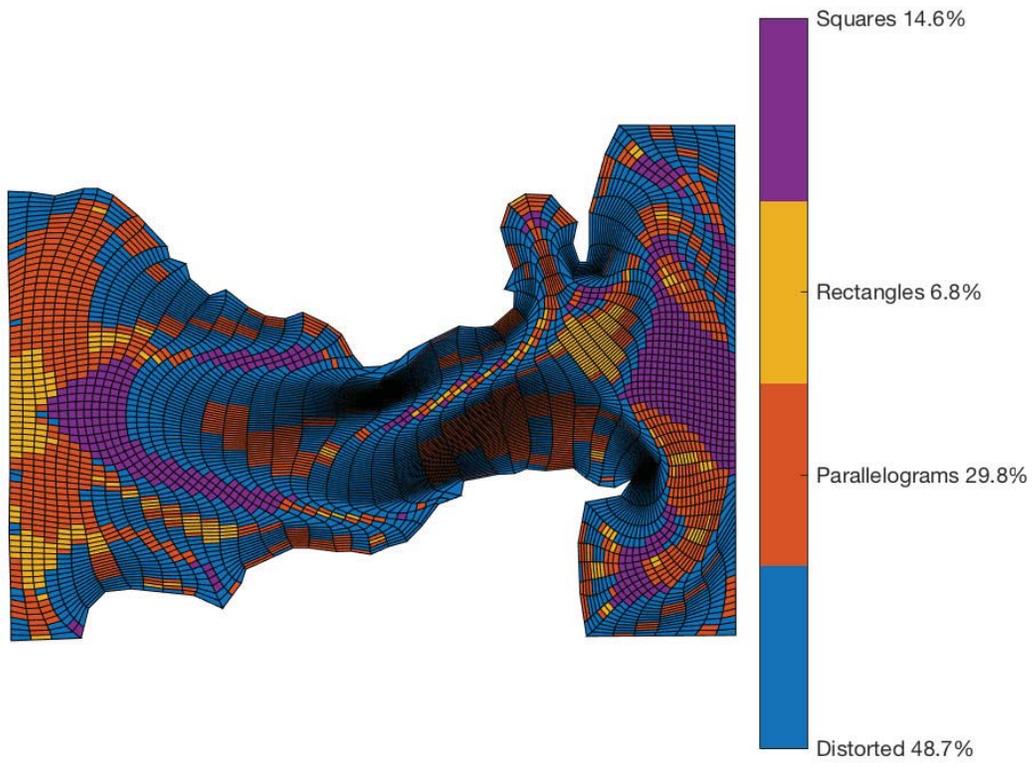


Figura 6.13: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.12.

La función

$$f(Q) = \frac{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}{4a_c^2}$$

se puede interpretar como una normalización del funcional discreto de área-ortogonalidad (AO) propuesto por Knupp en 1992 [186],

$$f_{ao}(Q) = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2).$$

Optimicemos $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{AO}(G)$ para comparar las mallas obtenidas de una y otra forma.



Figura 6.14: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{AO}(G)$ para $\sigma = 0.5$.

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI	0.0804	0.9998	0.8626	0.1316	0.8489
	AreaII	0.0277	0.9949	0.7511	0.1784	0.7209
Rectángulo	Lo1989	0.0287	0.9949	0.6962	0.1855	0.6628
	ScaledJacobian	0.1968	1.0000	0.9028	0.1298	0.8902
	ScaledJacobianM	0.0896	0.9968	0.7701	0.1800	0.7408
	MinRect2015	0.0555	0.9959	0.7381	0.1804	0.7068
	Rectangles2015	0.1496	0.9984	0.8394	0.1496	0.8210
Cuadrado	Lo1985	0.0473	0.9805	0.4368	0.2888	0.3485
	Hua1995	0.0634	0.9985	0.4973	0.2888	0.3998
	Knupp2000	0.0484	0.9976	0.4663	0.2871	0.3672
	Pebay2002	0.0809	0.9887	0.5459	0.2528	0.4783
	Hmean2017E	0.0614	0.9985	0.4656	0.2893	0.3977
	Hmean2017R	0.0614	0.9985	0.4657	0.2894	0.3978
	Hmean2017r	0.0380	0.9981	0.4945	0.2809	0.4009

Tabla 6.2: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.14. Para ésta malla obtuvimos ADO=15.68 y MDO=78.65.

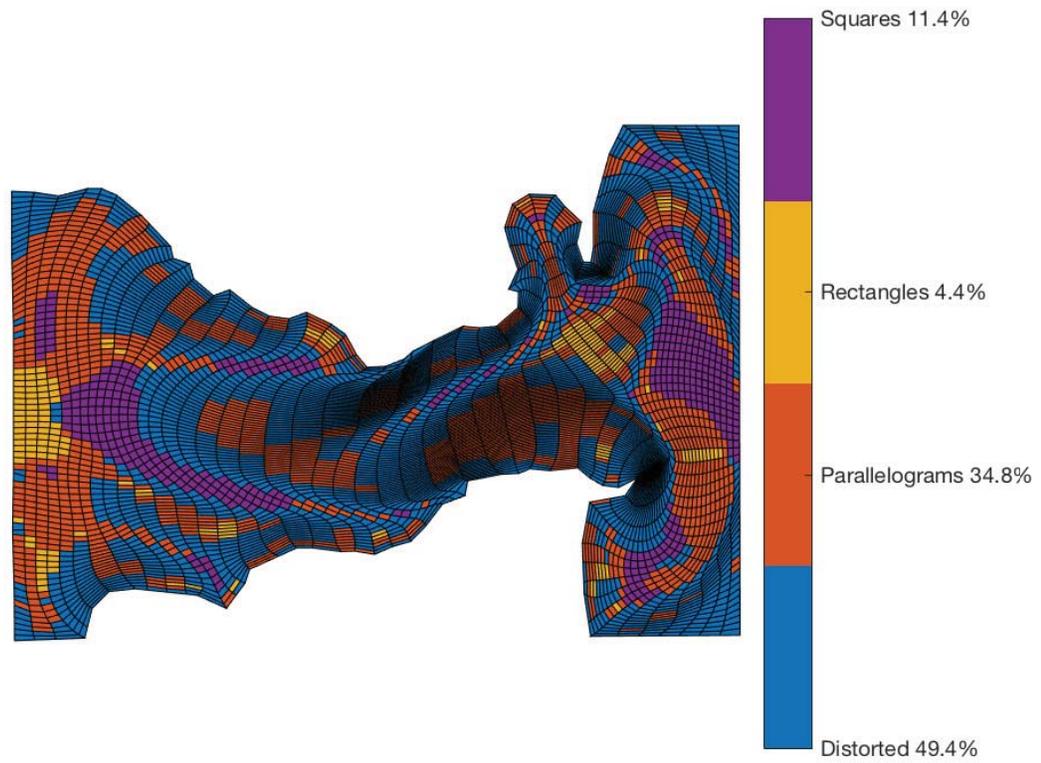


Figura 6.15: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.14.

Es de observar, a partir de las tablas estadísticas de algunas medidas de calidad, Tablas 6.1 y 6.2, que la calidad geométrica de la malla mostrada en Figura 6.14 y obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Ra}(G)$ es superior a aquella que obtuvimos optimizando $S_{\omega,\epsilon}(G)$ con el funcional clásico AO.

En la literatura existe un trabajo publicado en 1989 por Sereznnikova *et al.* [286], en el cual describen el funcional

$$I_{aon} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{g_{11}g_{22}}{J^2} d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x_\xi^2 + x_\eta^2)(y_\xi^2 + y_\eta^2)}{J^2} d\xi d\eta.$$

Este funcional es revisado por Khairullina *et al.* [177] en 1999 y posteriormente por Artyomova *et al.* [9] en 2007 para el suavizamiento de mallas estructuradas por bloques.

El funcional discreto que presentamos es independiente de la formulación continua de los funcionales de área-ortogonalidad de Knupp y Sereznnikova y difiere en mucho de la discretización que se obtiene de ambos funcionales usando el mapeo bilineal [30, 146, 177].

Desde luego, es posible combinar este funcional discreto $F_{Ra}(G)$ con el funcional cuasi-armónico $H_\omega(G)$ discutido en el Capítulo 3 en la forma

$$F(G) = (1 - \sigma)H_\omega(G) + \sigma F_{Ra}(G) \tag{6.24}$$

de tal manera que al ser optimizado este funcional se obtengan mallas cuasi-armónicas y casi cercanas a ser rectángulos.

En la Figura 6.16, se aprecia la malla obtenida combinando $H_\omega(G)$ con el funcional $F_{Ra}(G)$ y la Figura 6.18 ese aprecia la malla obtenida combinando $H_\omega(G)$ con el funcional $F_{AO}(G)$.

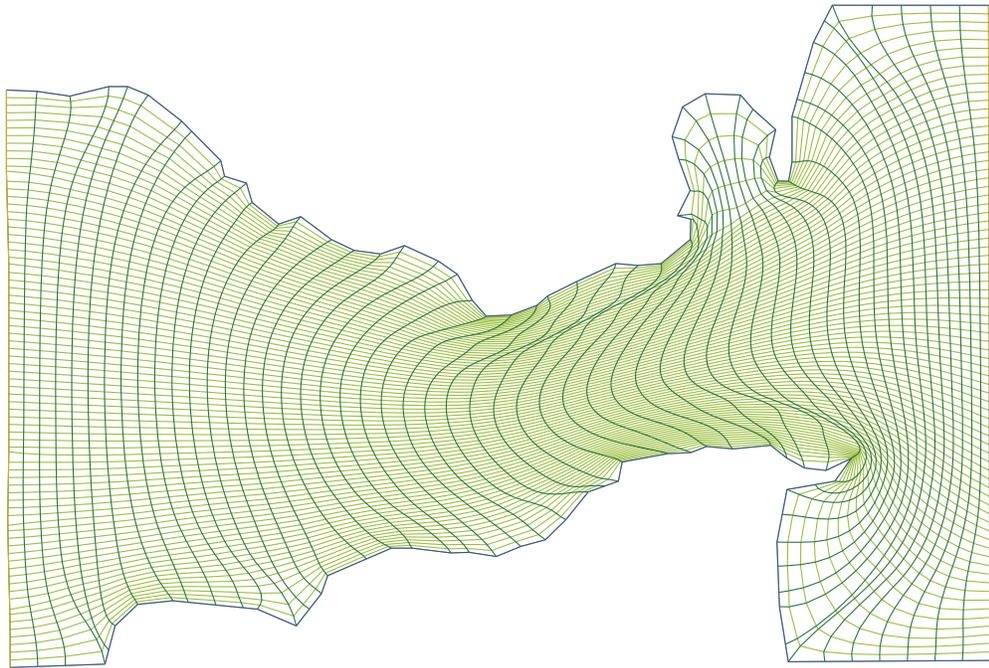


Figura 6.16: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1-\sigma)H_\omega(G) + \sigma F_{Ra}(G)$ para $\sigma = 0.5$.

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI	0.0195	0.9999	0.9059	0.1250	0.8410
	AreaII	0.0057	0.9991	0.8315	0.1724	0.7987
Rectángulo	Lo1989	0.0065	0.9894	0.6915	0.2083	0.6446
	ScaledJacobian	0.1557	1.0000	0.8535	0.1901	0.8228
	ScaledJacobianM	0.0312	0.9994	0.7865	0.2061	0.7448
	MinRect2015	0.0062	0.9909	0.7418	0.1942	0.6988
	Rectangles2015	0.0567	0.9997	0.8219	0.1915	0.7889
Cuadrado	Lo1985	0.0273	0.9903	0.4607	0.2364	0.3919
	Hua1995	0.0715	0.9990	0.5167	0.2450	0.4524
	Knupp2000	0.0289	0.9985	0.4957	0.2488	0.4252
	Pebay2002	0.0451	0.9895	0.5912	0.2292	0.5373
	Hmean2017E	0.0619	0.9990	0.5154	0.2459	0.4502
	Hmean2017R	0.0614	0.9990	0.5152	0.2460	0.4499
	Hmean2017r	0.0224	0.9990	0.5012	0.2642	0.4126

Tabla 6.3: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.16. Para ésta malla obtuvimos ADO=22.03 y MDO=81.04.

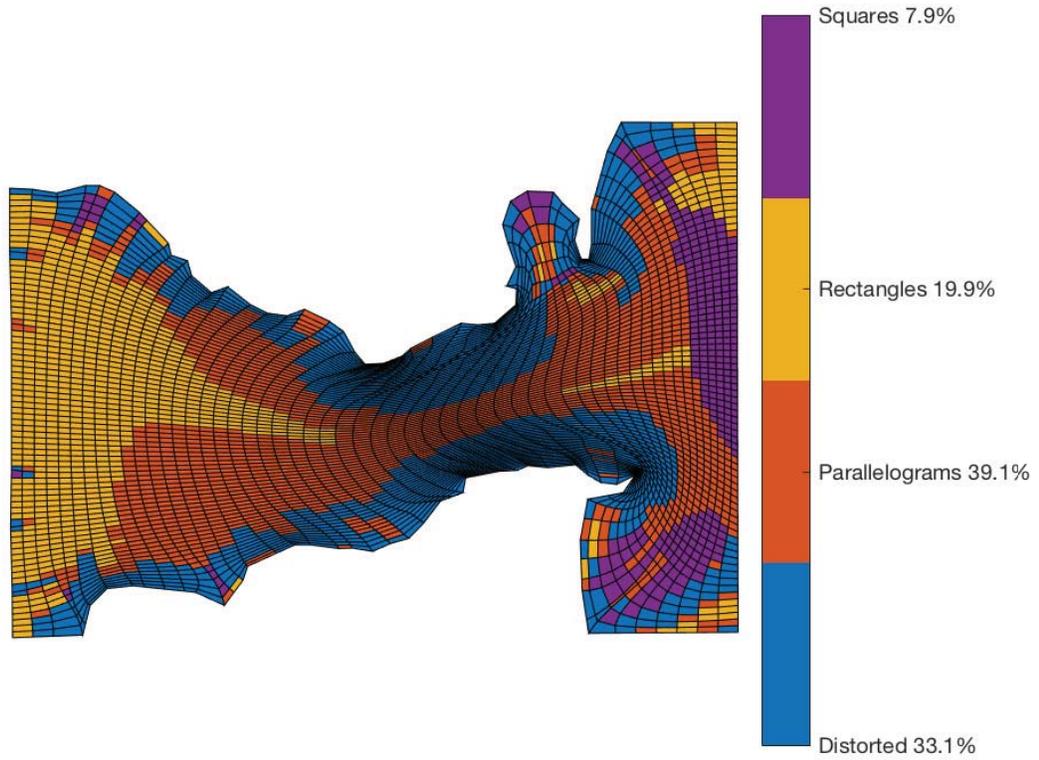


Figura 6.17: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.16.



Figura 6.18: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1-\sigma)H_\omega(G) + \sigma F_{AO}(G)$ para $\sigma = 0.5$.

6.4 Un nuevo funcional discreto basado en una medida de calidad para obtener rectángulos

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI	0.0381	0.9998	0.9169	0.1081	0.9068
	AreaII	0.0117	0.9973	0.8615	0.1510	0.8284
Rectángulo	Lo1989	0.0160	0.9941	0.7597	0.1901	0.7241
	ScaledJacobian	0.2391	1.0000	0.9384	0.0975	0.9318
	ScaledJacobianM	0.0457	0.9965	0.8639	0.1361	0.8478
	MinRect2015	0.0555	0.9942	0.7929	0.1837	0.7607
	Rectangles2015	0.0719	0.9983	0.8999	0.1170	0.8890
Cuadrado	Lo1985	0.0339	0.9897	0.4792	0.2362	0.4162
	Hua1995	0.0830	0.9996	0.5302	0.2573	0.4621
	Knupp2000	0.0365	0.9993	0.5113	0.2588	0.4402
	Pebay2002	0.0591	0.9814	0.6119	0.2208	0.5670
	Hmean2017E	0.0797	0.9996	0.5292	0.2578	0.4607
	Hmean2017R	0.0788	0.9996	0.5292	0.2578	0.4606
	Hmean2017r	0.0297	0.9996	0.5351	0.2485	0.4713

Tabla 6.4: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.18. Para ésta malla obtuvimos ADO=13.21 y MDO=76.17.

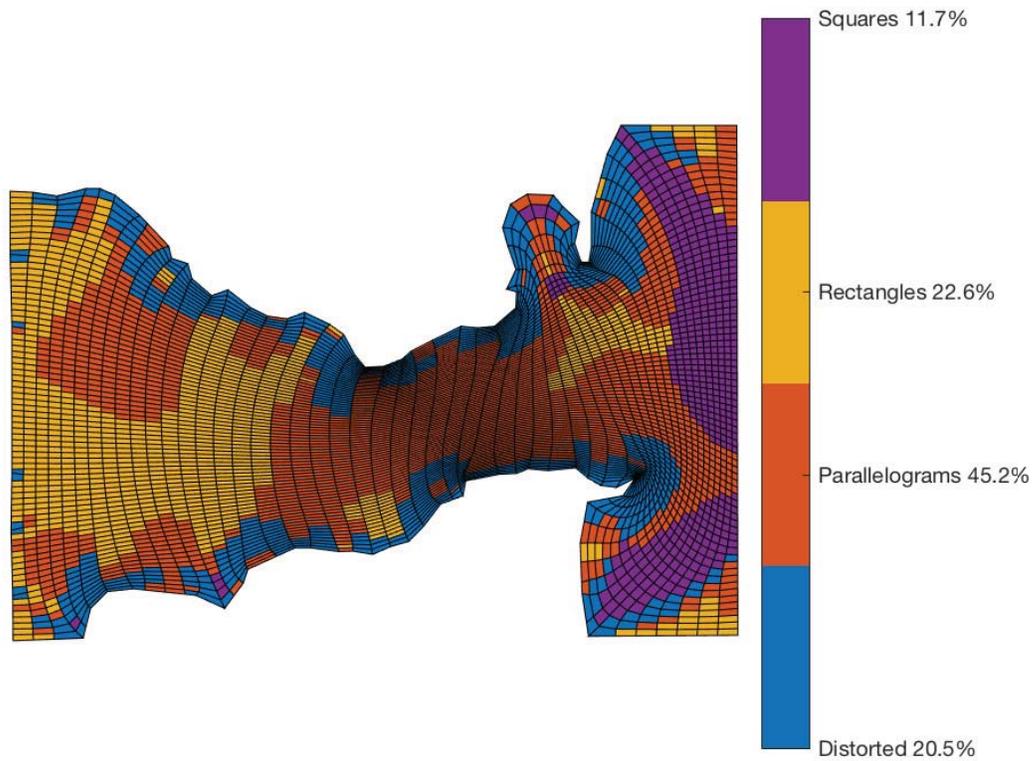


Figura 6.19: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.18.

De las Tablas 6.4 y 6.3, se aprecia que la malla de la Figura 6.18 tiene mejor calidad geométrica que la malla de la Figura 6.16.

6.5. Un nuevo funcional convexo discreto para obtener rectángulos

Como se sabe, un rectángulo es un paralelogramo en el cual sus diagonales miden lo mismo y un cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus diagonales se cortan en el punto medio. En la Figura 6.20 se aprecia las diagonales de una cuadrilátero y los puntos medios entre ellas.

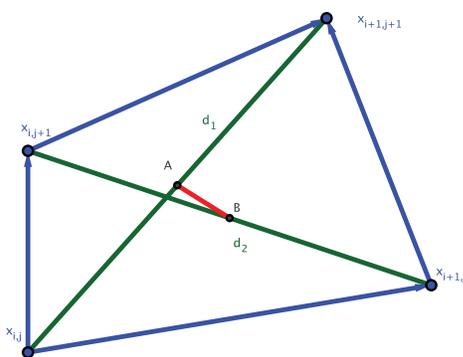


Figura 6.20: Diagonales de un cuadrilátero y el segmento que une los puntos medios entre ellas.

Primero formulemos una función convexa usando distancias para determinar qué tan lejos está un cuadrilátero convexo de ser paralelogramo, para esto usaremos la distancia entre los puntos medios de las diagonales de cada celda.

En una malla estructurada, cada nodo interior está rodeado de 4 celdas como se muestra en la Figura 6.21. Para cada una de las celdas Q_i , calculemos el cuadrado de la distancia entre el punto medio de sus diagonales

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= \left\| \frac{\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i+1,j+1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{i,j+1}}{2} \right\|^2 \\ f(Q_2) &= \left\| \frac{\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i-1,j+1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{i-1,j} + \mathbf{x}_{i,j+1}}{2} \right\|^2 \\ f(Q_3) &= \left\| \frac{\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i-1,j-1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{i,j-1} + \mathbf{x}_{i-1,j}}{2} \right\|^2 \\ f(Q_4) &= \left\| \frac{\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i+1,j-1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{i,j-1} + \mathbf{x}_{i+1,j}}{2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Si fijamos los puntos que rodean $\mathbf{x}_{i,j}$, el mínimo de

$$F(\mathbf{x}_{i,j}) = \sum_{k=1}^4 f(Q_k) \tag{6.25}$$

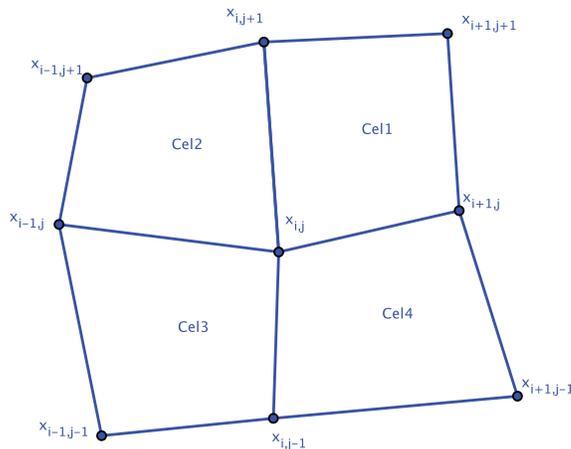


Figura 6.21: (4 celdas que rodean al punto $\mathbf{x}_{i,j}$).

satisface

$$x_{i,j} = \frac{1}{4}[2(x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1}) \quad (6.26)$$

$$-(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1})] \quad (6.27)$$

$$y_{i,j} = \frac{1}{4}[2(y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1}) \quad (6.28)$$

$$-(y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j+1} + y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j-1})]. \quad (6.29)$$

En 2006, Khattri [174] propone el funcional (6.25) sobre cada nodo de la malla obteniendo el esquema directo (6.28)–(6.29) y compara sus resultados con el Laplaciano discreto.

El esquema que obtiene Khattri (6.29), es el esquema Laplaciano-Isoparamétrico que describen en 1977 Herrmann y Asce [148], el cual revisamos en Capítulo 2.

Usando la función (6.25), nosotros proponemos usar el funcional discreto convexo de la forma

$$F_p(G) = \sum_{i,j} \left\| \frac{\mathbf{x}_{i,j} + \mathbf{x}_{i+1,j+1}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{i+1,j} + \mathbf{x}_{i,j+1}}{2} \right\|^2 \quad (6.30)$$

sobre todas las celdas de la malla G . Si garantizamos que las celdas son convexas si optimizamos (6.30) podemos obtener celdas cercanas a ser paralelogramos.

Ahora, bien, si garantizamos que las celdas de la malla G son paralelogramos o cercanas a estarlo, definamos un funcional que permita obtener celdas cercanas a ser rectángulos. Para esto basta medir el cuadrado de la diferencia del cuadrado de las diagonales, lo cual nos lleva al funcional discreto

$$F_d(G) = \sum_{i,j} (\|\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{i+1,j+1}\|^2 - \|\mathbf{x}_{i+1,j} - \mathbf{x}_{i,j+1}\|^2)^2 \quad (6.31)$$

La propuesta que hacemos es combinar el funcional que nos provee paralelogramos (6.30) con el que impone igualdad en las (6.31), en la forma

$$F_{Rd}(G) = F_p(G) + \beta F_d(G) \quad (6.32)$$

donde $\beta \geq 0$. Este nuevo funcional también es positivo y convexo y tiene como punto crítico a una malla formada por rectángulos (incluyendo cuadrados). En valor β permite controlar la flexibilidad de la forma geométrica de los elementos y debe ser elegida dependiendo de la dimensión de la malla y la irregularidad de la región. Por ejemplo, si elegimos un valor de β grande, el óptimo de $F_{Rd}(G)$ puede ser una malla con celdas estén cercanas a ser un trapecio.

Ejemplo: Considere el cuadrilátero Q formado por los puntos $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ y el cuarto punto libre podemos identificar cómo se comporta $F_{Rd}(Q)$. En la Figura 6.22 se puede apreciar las curvas de nivel y la forma de la superficie de $F_{Rd}(Q)$.

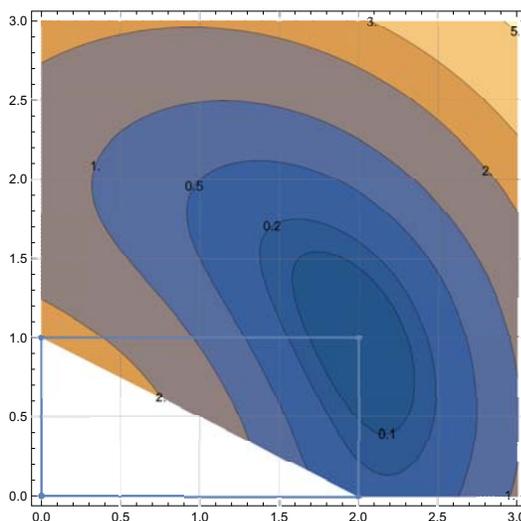


Figura 6.22: Curvas de nivel y superficie para $F_{Rd}(Q)$, para $\beta = 1$.

Recordemos el interés que perseguimos: construir mallas ϵ -convexas, con elementos cercanos a ser rectángulos. Para garantizar la ϵ -convexidad de las celdas y la propiedad geométrica de que las celdas estén cercanas a ser rectángulos, nosotros proponemos optimizar un funcional que combine el funcional (6.32) con un funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$. El funcional propuesto tiene la forma:

$$F(G) = (1 - \sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Rd}(G) \quad (6.33)$$

aquí $0 \leq \sigma \leq 1$. Nuevamente, dado que $F_{Rd}(G)$ es positivo, la teoría revisada en el Capítulo 3, nos garantiza que para un valor $\omega > 0$ suficientemente grande cuando minimizamos (6.33) sobre $\mathcal{M}(\Omega)$, es posible obtener una malla ϵ -convexa cuyas celdas estén cerca de ser rectángulos. En las Figuras 6.23 y 6.25 se observan dos mallas obtenidas con este funcional.



Figura 6.23: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1-\sigma)S_{\omega,\epsilon}(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ para $\sigma = 0.99$ y $\beta = 1.0$.

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.0151	1.0000	0.8691	0.1759	0.8367
	AreaII2015	0.0043	0.9979	0.7775	0.2201	0.7165
Rectángulo	Lo1989	0.0044	0.9996	0.7982	0.2233	0.7363
	ScaledJacobian	0.2438	1.0000	0.9825	0.0596	0.9798
	ScaledJacobianM	0.0528	0.9988	0.8444	0.1656	0.8188
	MinRect2015	0.0517	0.9988	0.8477	0.1618	0.8236
	Rectangles2015	0.0731	0.9994	0.8981	0.1361	0.8819
Cuadrado	Lo1985	0.0130	0.9975	0.5277	0.3124	0.3990
	Hua1995	0.0296	1.0000	0.5517	0.3108	0.4337
	Knupp2000	0.0134	1.0000	0.5302	0.3164	0.4000
	Pebay2002	0.0232	0.9982	0.6123	0.2854	0.5164
	Hmean2017E	0.0233	1.0000	0.5500	0.3123	0.4292
	Hmean2017R	0.0233	1.0000	0.5500	0.3123	0.4293
	Hmean2017r	0.0086	1.0000	0.5734	0.3073	0.4575

Tabla 6.5: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.23. Para ésta malla obtuvimos ADO=4.32 y MDO=75.89.

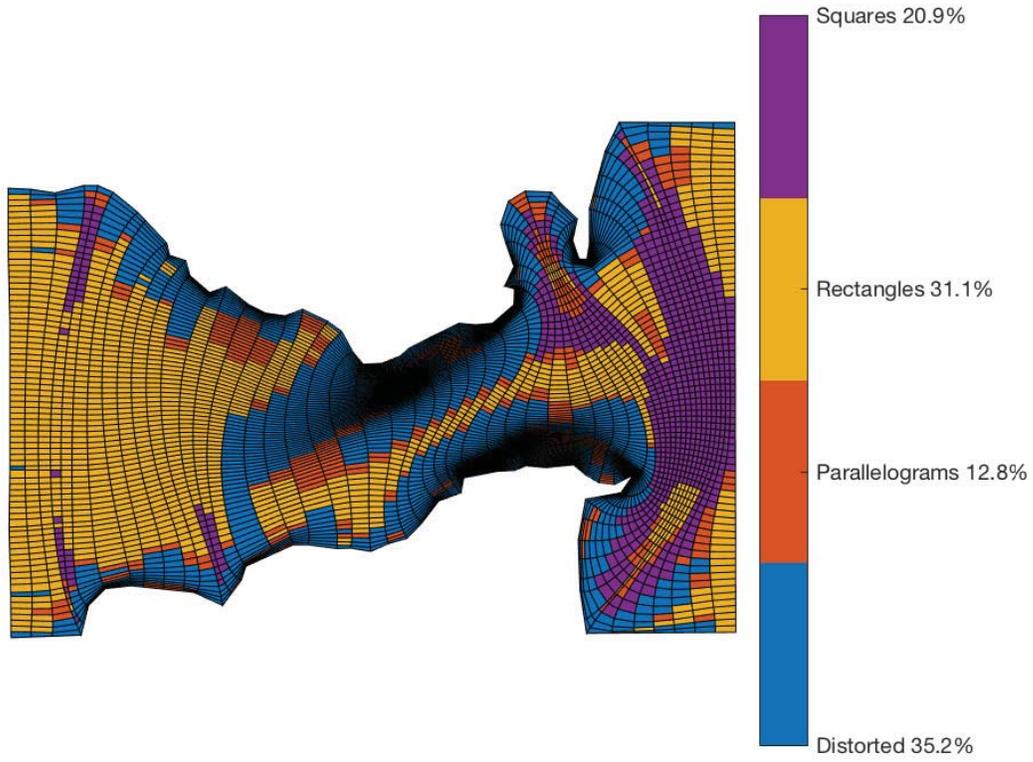


Figura 6.24: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.23.

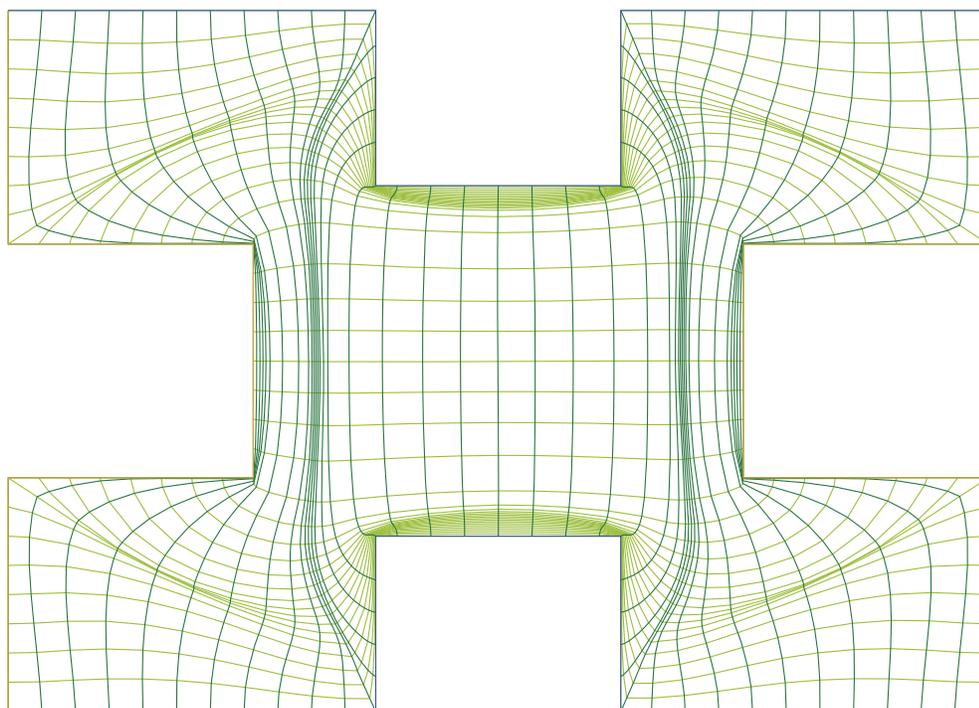


Figura 6.25: Dec29, malla de 41×41 obtenida optimizando $(1 - \sigma)S_{\omega, \epsilon}(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ para $\sigma = 0.99$ y $\beta = 1.0$.

Un valor de σ cercano a 1, proporciona mayor peso al funcional $F_{Rd}(G)$ con lo cual las celdas de la malla óptima G^* serán cercanas a ser rectángulos.

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.0992	0.9995	0.8231	0.2154	0.7768
	AreaII2015	0.0163	0.9973	0.6573	0.2667	0.5593
Rectángulo	Lo1989	0.0164	0.9999	0.6758	0.2704	0.5762
	ScaledJacobian	0.1158	1.0000	0.9415	0.1277	0.9259
	ScaledJacobianM	0.1098	0.9985	0.7408	0.2202	0.6930
	MinRect2015	0.1192	0.9985	0.7376	0.2188	0.6916
	Rectangles2015	0.1225	0.9992	0.8158	0.1927	0.7818
Cuadrado	Lo1985	0.0165	0.9972	0.4526	0.3315	0.2904
	Hua1995	0.0231	0.9999	0.5005	0.3457	0.3402
	Knupp2000	0.0168	0.9999	0.4661	0.3429	0.2968
	Pebay2002	0.0305	0.9946	0.5186	0.3092	0.3896
	Hmean2017E	0.0221	0.9999	0.4971	0.3474	0.3327
	Hmean2017R	0.0221	0.9999	0.4973	0.3475	0.3328
	Hmean2017r	0.0061	0.9999	0.5103	0.3427	0.3457

Tabla 6.6: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 , mostrada en la Figura 6.25. Para ésta malla obtuvimos ADO=8.44 y MDO=83.35.

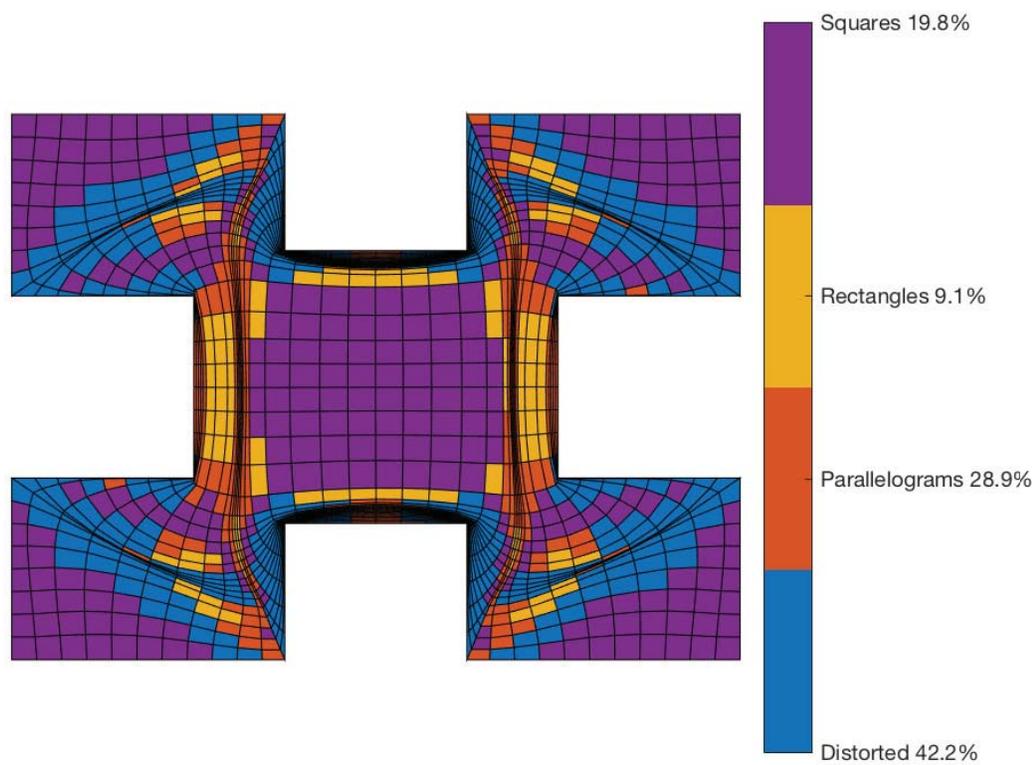


Figura 6.26: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 6.25.

Las mallas obtenidas con éste último funcional pueden contar con celdas cercanas a ser rectángulos pero muy alargados; es decir, de *aspect ratio* grande, y de área pequeña, observe las Figuras 6.23 y 6.25.

Una forma mejorar el *aspect ratio* es imponiendo que el área de las celdas sean más grandes; para lograrlo es necesario controlar la distribución del área de la celdas. En el Capítulo 3, revisamos algunos funcionales bilaterales de área para mejorar la distribución de área de los elementos de la malla, cualquiera de estos funcionales puede ser útil para controlar la distribución del área de las celdas, una combinación de alguno de ellos con este nuevo funcional puede ser suficiente para engrosar las celdas y mejorar el *aspect ratio*.

En 1999 y 2000, Garanzha [125, 126] propone minimizar el funcional

$$F(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^*}{\alpha_q} + \frac{\alpha_q}{\alpha^*} \right] \quad (6.34)$$

para mejorar la distribución del área de los elementos triangulares. Aquí α^* representa al valor alrededor del cual serán distribuidos el área de todos los elementos. Como puede observarse, este funcional tiene un *obstáculo* infinito en la frontera del conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0(\Omega)$, ver Capítulo 3.

En 2002, por Garanzha y Branets [48] para mejorar la distribución del área de los elementos a la vez que mejoran la calidad de las mallas optimizando el número de condición κ_2 . Garanzha y Branets usan un método de Newton local para minimizar (6.34) y reportan muy buenos resultados. Sin embargo, nosotros creemos que globalmente no puede haber mejora de la malla, veamos esto.

En ese Capítulo 2 y 3, observamos que la suma del área de los elementos triangulares es constante

$$\frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \alpha_q = \frac{\text{Area}(\Omega)}{(m-1)(n-1)} = \bar{\alpha}(G)$$

por lo que la suma del término lineal dentro del funcional (6.34) sobre toda la malla es constante:

$$\begin{aligned} F(G) &= \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^*}{\alpha_q} + \frac{\alpha_q}{\alpha^*} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \frac{\alpha^*}{\alpha_q} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \frac{\alpha_q}{\alpha^*} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \frac{\alpha^*}{\alpha_q} + \frac{N}{2\alpha^*} \bar{\alpha}(G) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \frac{\alpha^*}{\alpha_q} + \text{constante} \end{aligned} \quad (6.35)$$

por lo que este funcional no es útil en el mejoramiento global de la malla. Globalmente, el funcional (6.34) es equivalente al funcional recíproco de área mostrado en el Capítulo 3.

Nosotros proponemos usar el funcional

$$F(G) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha^*)^2}{\alpha_q^2} + \frac{\alpha_q^2}{(\alpha^*)^2} \right] \quad (6.36)$$

para controlar la distribución del área de los elementos alrededor de α^* . Este funcional tiene un *obstáculo* infinito en la frontera del conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0(\Omega)$, ver Capítulo 3. La forma gráfica del funcional que proponemos y el que propuso Garanzha se observan en la Figura 6.27.

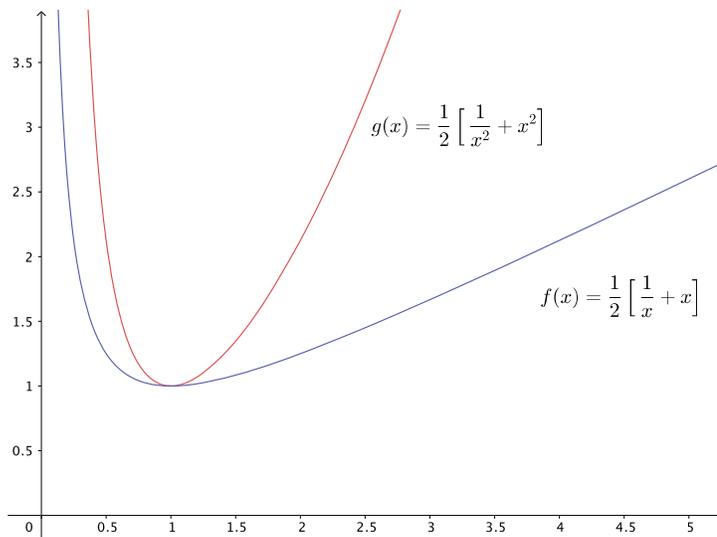


Figura 6.27: Comparación gráfica de la forma del funcional que propone Garanzha y la que nosotros usamos.

Para la implementación de (6.36) es necesario usar una regularización convenientemente para un parámetro de regularización $\omega > 0$, con la finalidad de que la función esté definida sobre cualquier valor de α_q negativo y además conforme $\omega \rightarrow 0$, se forme un *obstáculo infinito* en la frontera del conjunto de mallas convexas $\mathcal{M}_0(\Omega)$, ver Capítulo 3.

Nosotros hemos usado la misma regularización empleada para el funcional cuasi-armónico $H_\omega(G)$, discutido en el Capítulo 3. El funcional regularizado es

$$A_\omega(G) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} \left[(\alpha^*)^2 \varphi_\omega(\alpha_q^2) + \frac{\alpha_q^2}{(\alpha^*)^2} \right] \quad (6.37)$$

donde

$$\varphi_{\omega}(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha > \omega \\ \frac{2\omega - \alpha}{\omega^2}, & \alpha \leq \omega. \end{cases} \quad (6.38)$$

donde $\omega > 0$ es un valor que se inicia con $\omega = 1$ y gradualmente se hace pequeño mediante la actualización $\omega = 0.5\omega$. Minimizando este funcional, el área de las celdas de la malla óptima G^* se encuentran distribuidas alrededor de α^* .

Ahora bien, combinando este es funcional con $F_{Rd}(G)$, proponemos minimizar

$$F(G) = (1 - \sigma)A_{\omega}(G) + \sigma F_{Rd}(G) \quad (6.39)$$

con la finalidad de construir mallas cuyas celdas sean cercanas a ser rectángulos pero no alargados.

En las Figuras 6.28 y 6.30 se observan las mallas obtenidas al minimizar (6.39). Como se aprecia, las celdas ya no están tan delgadas y dependiendo del valor de σ las celdas estarán cerca de ser rectángulos. En las Tablas 6.7 y 6.8 se pueden comparar las estadísticas de diferentes medidas de calidad que arrojan las mallas.

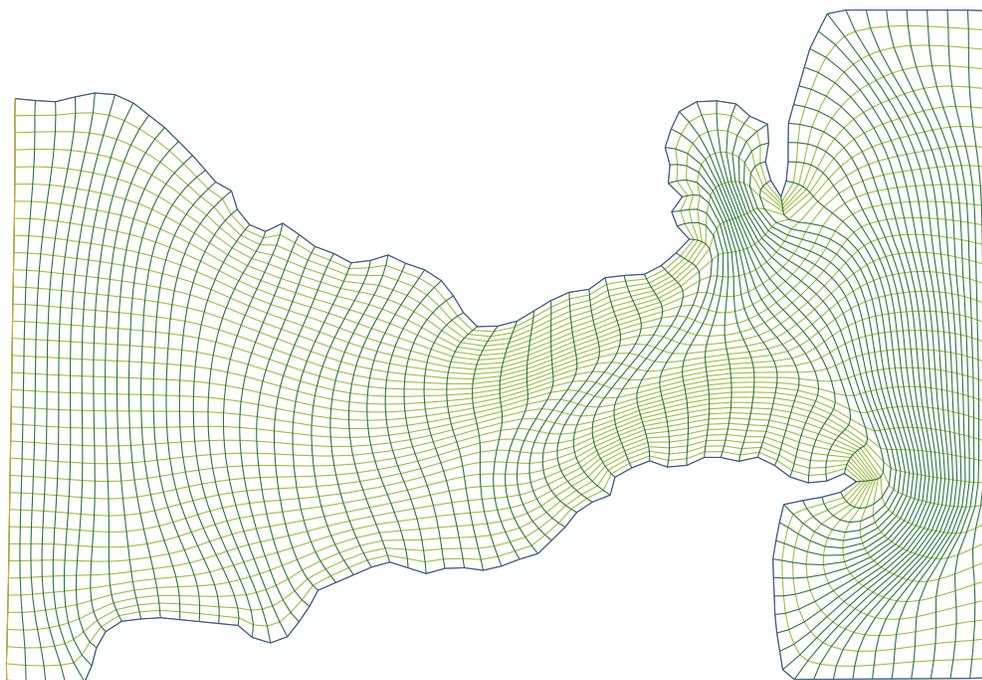


Figura 6.28: Estrecho de Gibraltar, malla de 77×55 obtenida optimizando $(1 - \sigma)A_w(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ con $\sigma = 0.99$ y usando $\alpha^* = \sqrt{2}$.

6. SUAVIZAMIENTO DE MALLAS OPTIMIZANDO MEDIDAS DE CALIDAD

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.1982	1.0000	0.9187	0.1021	0.9110
	AreaII2015	0.0820	0.9990	0.8127	0.1592	0.7908
Rectángulo	Lo1989	0.1242	0.9936	0.7829	0.1589	0.7607
	ScaledJacobian	0.3607	1.0000	0.9593	0.0725	0.9558
	ScaledJacobianM	0.1625	0.9982	0.8467	0.1375	0.8318
	MinRect2015	0.0597	0.9910	0.8003	0.1543	0.7790
	Rectangles2015	0.2542	0.9987	0.9010	0.1036	0.8933
Cuadrado	Lo1985	0.1203	0.9838	0.6608	0.2311	0.6115
	Hua1995	0.1630	0.9993	0.7183	0.2307	0.6728
	Knupp2000	0.1265	0.9986	0.6914	0.2384	0.6406
	Pebay2002	0.1996	0.9941	0.7502	0.1815	0.7237
	Hmean2017E	0.1612	0.9993	0.7172	0.2316	0.6711
	Hmean2017R	0.1611	0.9993	0.7173	0.2317	0.6712
	Hmean2017r	0.1347	0.9989	0.7259	0.2254	0.6826

Tabla 6.7: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 77×55 , mostrada en la Figura 6.28. Para ésta malla obtuvimos ADO=9.12 y MDO=68.86.

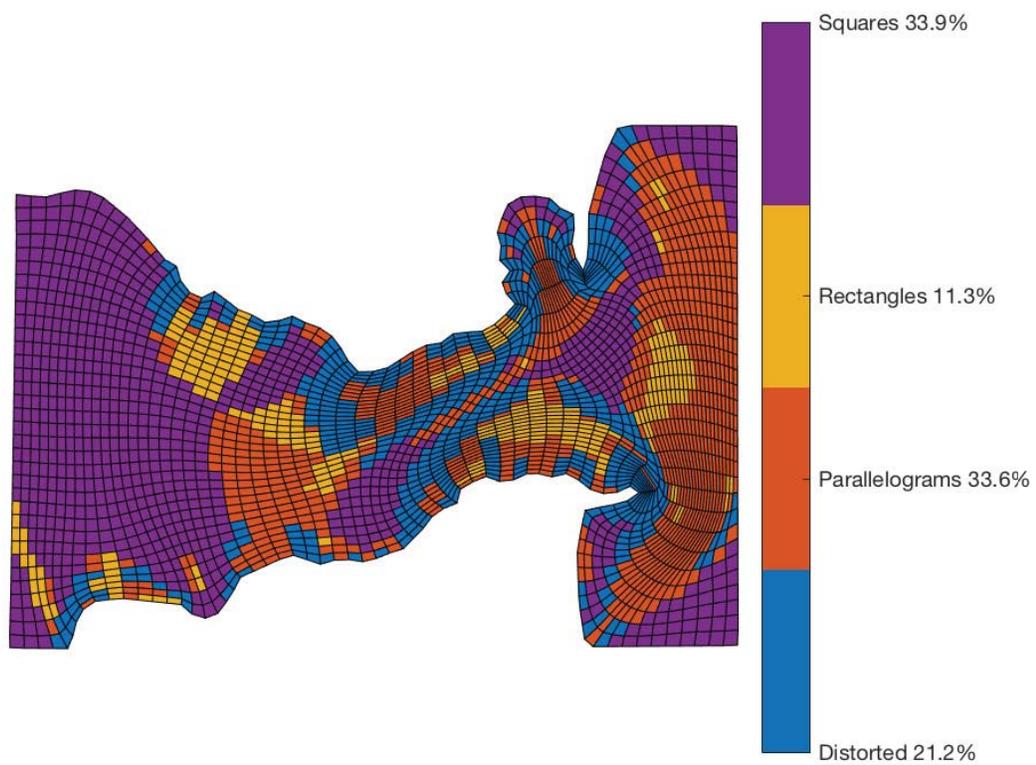


Figura 6.29: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 77×55 mostrada en la Figura 6.30.

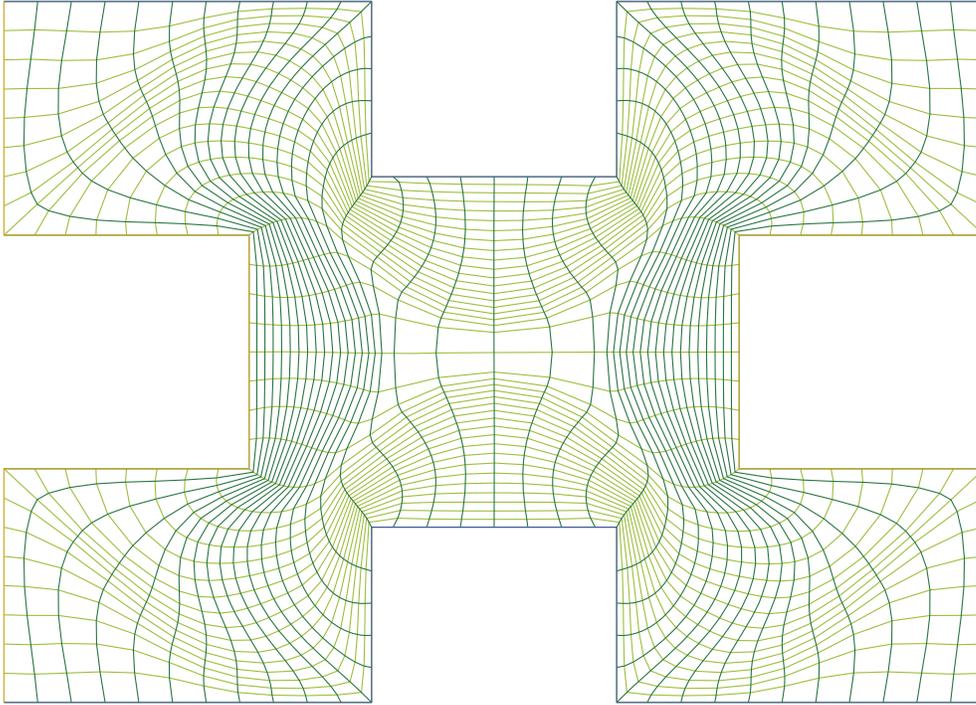


Figura 6.30: Dec20, malla de 41×41 obtenida optimizando $(1 - \sigma)A_\omega(G) + \sigma F_{Rd}(G)$ con $\sigma = 0.99$ y usando $\alpha^* = \sqrt{2}$.

Tipo	Nombre $\mu(Q)$	Mín	Máx	MQ	MSE	SP
Paralelogramo	AreaI2015	0.4099	0.9998	0.8524	0.1374	0.8395
	AreaII2015	0.1585	0.9876	0.6805	0.2014	0.6447
Rectángulo	Lo1989	0.1663	0.9861	0.6471	0.1925	0.6143
	ScaledJacobian	0.4403	0.9996	0.9190	0.1023	0.9121
	ScaledJacobianM	0.2498	0.9757	0.7329	0.1706	0.7092
	MinRect2015	0.1171	0.9725	0.6896	0.1754	0.6636
	Rectangles2015	0.3605	0.9876	0.8184	0.1373	0.8049
Cuadrado	Lo1985	0.0892	0.9806	0.4960	0.2466	0.4290
	Hua1995	0.1220	0.9990	0.5718	0.2688	0.5025
	Knupp2000	0.0931	0.9986	0.5292	0.2736	0.4522
	Pebay2002	0.1597	0.9740	0.5978	0.2160	0.5529
	Hmean2017E	0.1179	0.9990	0.5692	0.2700	0.4988
	Hmean2017R	0.1179	0.9990	0.5695	0.2702	0.4990
	Hmean2017r	0.0989	0.9986	0.5724	0.2589	0.5061

Tabla 6.8: Tabla estadística de diferentes medidas de calidad para la malla de 41×41 , mostrada en la Figura 6.30. Para ésta malla obtuvimos ADO=14.02 y MDO=63.88.

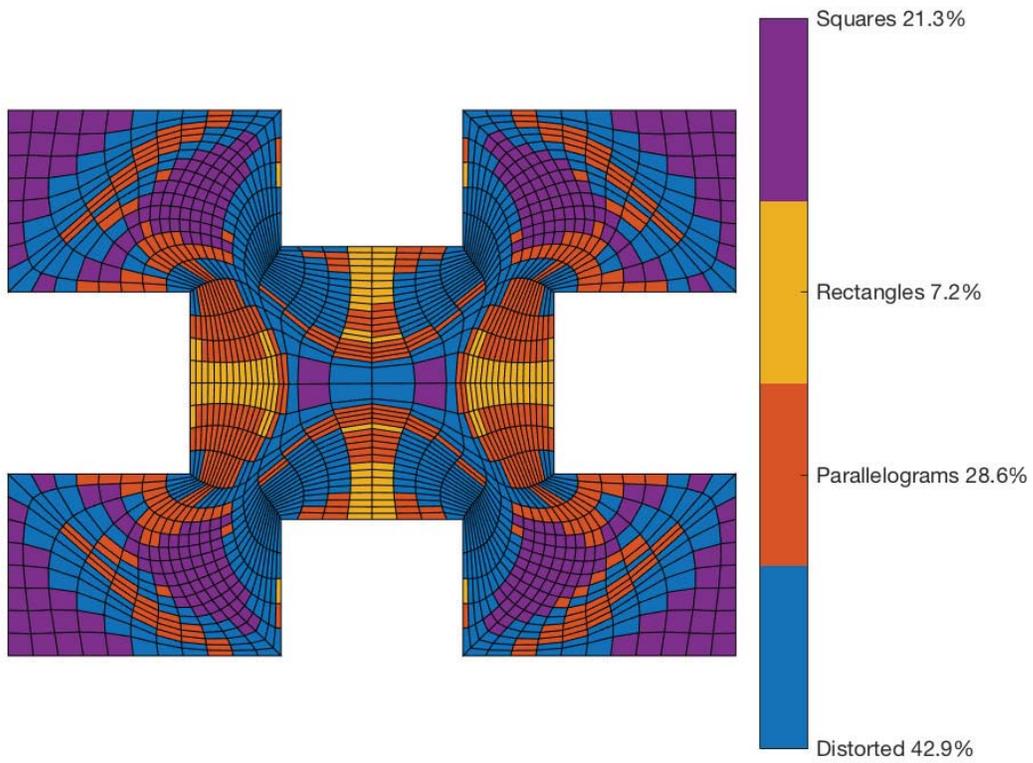


Figura 6.31: Elementos caracterizados usando la metodología discutida en la Sección 5.9, para la malla de 41×41 mostrada en la Figura 6.30.

Como es de esperarse, también podemos combinar $A_\omega(G)$ con $F_{Ra}(G)$, el primer funcional planteado para obtener mallas convexas cercanas a ser rectángulos, y adicionalmente distribuir los valores del área de los triángulos alrededor de α^* . En los experimentos realizados, hemos obtenido buenos resultados eligiendo $\alpha^* = 1$ y $\alpha^* = \sqrt{2}$.

Observe que tanto el funcional $F_{Rd}(G)$ como el funcional $F_{Ra}(G)$ no distinguen la orientación de las celdas, por lo que un punto crítico puede ser un cuadrado con orientación negativa. Por esto, es necesario minimizar convenientemente (6.22) y (6.33) para evitar ese tipo de celdas, una forma de hacer esto es garantizar primero la convexidad y luego mejorar la malla convexa.

También hemos experimentado combinar el funcional cuasi-armónico $H_\omega(G)$ con $F_{Rd}(G)$ para obtener mallas cuasi-armónicas cercanas a ser rectángulos. En el Apéndice C mostramos algunas mallas obtenidas usando esa combinación.

Para finalizar, observe que todos los funcionales que hemos trabajado con anterioridad (discretos o discretizados, ver Capítulos 2 y 3) son funciones sobre triángulos. Los funcionales que ahora presentamos $F_{Rd}(G)$ y $F_{Ra}(G)$ para mejorar la calidad geométrica de los elementos con respecto a un rectángulo, están definidos sobre cuadriláteros.

Conclusiones

Conclusiones

En los dos primeros capítulos discutimos el planteamiento moderno de la generación numérica de mallas estructuradas usando funcionales discretos, para lo cual realizamos una revisión bastante amplia de los métodos reportados en la literatura con la finalidad de hacer ver que los métodos aquí desarrollados pueden incluirse en los diferentes marcos de trabajo o referencia, *frameworks*, propuestos actualmente.

En los subsecuentes capítulos desarrollamos los temas:

Funcionales discretos para mejorar la distribución del área de los elementos de la malla

- Realizamos una revisión de los funcionales discretos bilaterales que se han desarrollado con anterioridad por nuestro grupo de trabajo y por otros investigadores.
- Hemos propuesto un nuevo funcional bilateral discreto que permite mejorar la distribución del área de las celdas más pequeñas y grandes.
- Hemos propuesto un nuevo funcional discreto para controlar la distribución global del área de las celdas.

Los resultados obtenidos fueron descritos en el artículo *A new functional for improving cell area distribution*, véase [41].

Adaptividad geométrica

- Hemos propuesto un funcional geométrico adaptativo basado en funcionales clásicos ponderados, los cuales son combinados con un funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}$ para garantizar y preservar la ϵ -convexidad de la malla.

- Para concentrar las celdas alrededor de un objeto al interior de la región de estudio, definimos una función de control de adaptabilidad, o densidad, basada en el cálculo de la distancia hacia ese objeto. Probamos nuestros resultados usando como objetos geométricos a:
 - curvas implícitas,
 - poligonales abiertas y cerradas,
 - cúmulo de puntos,

y describimos un algoritmo para adaptar dinámicamente la malla.

- Hemos propuesto usar una malla de referencia a la cual asociamos una matriz de pesos. Esa matriz es obtenida a partir de una función de densidad o de adaptación de las celdas. Hemos probado estas ideas usando una matriz de patrones de datos y hemos usado una matriz de la escala de grises de imágenes digitales para obtener mallas adaptadas a las intensidades de los pixeles.
- Hemos usado los funcionales ponderados para controlar la ortogonalidad de las celdas cerca de la frontera de la región de estudio.

Los resultados fueron descritos en el artículo *Geometric adaptive functionals for structured grid generation*, véase [42].

Nuevas medidas de calidad geométrica y *aspect ratio* para cuadriláteros

- Realizamos una revisión de las medidas de calidad geométrica para cuadriláteros que se usan actualmente.
- Hemos propuesto nuevas medidas de calidad geométrica para caracterizar:
 - cuadrados,
 - rectángulos,
 - y paralelogramos
- Una de las medidas de calidad desarrolladas se basa en asociar a un cuadrilátero el rectángulo de área mínima que lo contenga. A partir de esta medida, propusimos un nuevo *aspect ratio* geométrico para cuadriláteros.
- Revisamos los indicadores de calidad global para una malla que se usan en la literatura *minimum value*, *maximum value*, *mean quality*, *mean square error* y *shape parameter* o *shape quality*, y propusimos un enfoque estadístico para calificar y cuantificar la calidad geométrica de una malla.

Parte de los resultados obtenidos fueron descritos en el artículo *New quality measures for quadrilaterals and new discrete functionals for grid generation*, véase [43].

Suavizamiento de mallas usando medidas de calidad

- Realizamos una revisión de las metodologías o técnicas que actualmente se utilizan para suavizar mallas usando medidas de calidad. Hemos identificado las deficiencias de estos métodos y creemos que algunos de ellos son favorables a ser explorados con las nuevas medidas de calidad geométrica que hemos propuesto.
- Propusimos dos nuevos funcionales discretos o métricas que tienen como punto crítico a mallas compuestas por rectángulos. Una de estas funciones de distorsión está basada en una medida de calidad y la otra es una métrica basada en distancias.

Parte de los resultados obtenidos fueron descritos en el artículo *New quality measures for quadrilaterals and new discrete functionals for grid generation*, véase [43].

Trabajo a futuro

A partir de los desarrollos presentados, creemos que algunas líneas que se pueden seguir son:

- Aplicar los desarrollos obtenidos en la solución de algunas ecuaciones diferenciales.
- Construir mallas no estructuradas de calidad y formadas por cuadriláteros a partir de mallas estructuradas.
- Construir mallas estructuradas y no estructuradas controlando la forma geométrica y el tamaño de las celdas.
- Profundizar el estudio de medidas de calidad a elementos formados por tetraedros y elementos hexadraedrales, así como de los elementos curvos, de lados curvilíneos o de dimensión alta.

Apéndice A

Algunas medidas de calidad para triángulos

A.1. Notación

Usemos una notación conveniente para algunos elementos de un triángulo como lo son los lados, los ángulos y el área. El triángulo estará formado por tres puntos o vértices con orientación positiva (orientación contraria a las manecillas de reloj), y que denotaremos como $T = \triangle(P_1, P_2, P_3)$, ver la Figura A.1.

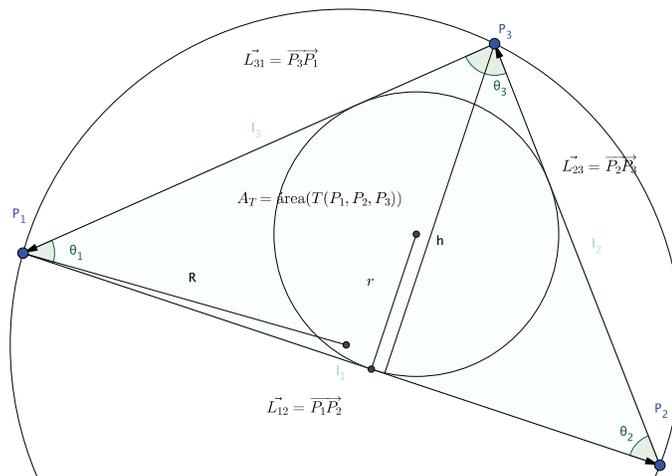


Figura A.1: Algunos elementos de un triángulo.

Con esos puntos o vértices formamos tres vectores:

$$\vec{L}_{12} = \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \vec{L}_{23} = \overrightarrow{P_2P_3}, \quad \vec{L}_{31} = \overrightarrow{P_3P_1}$$

y con esto, la longitud de los lados la escribimos como

$$l_1 = \|\vec{L}_{12}\|, \quad l_2 = \|\vec{L}_{23}\|, \quad l_3 = \|\vec{L}_{31}\|.$$

Un elemento de utilidad es la longitud del lado más grande $L_{\text{máx}}$:

$$L_{\text{máx}} = \text{máx} \{l_1, l_2, l_3\},$$

también requerimos $L_{\text{mín}}$ que representará la a longitud del lado más pequeña:

$$L_{\text{mín}} = \text{mín} \{l_1, l_2, l_3\}.$$

Siguiendo la orientación positiva, los ángulos internos los denotaremos en la forma:

$$\theta_1 = \angle P_2P_1P_3, \quad \theta_2 = \angle P_1P_2P_3, \quad \theta_3 = \angle P_2P_3P_1$$

y al mayor ángulo interno

$$\theta_{\text{máx}} = \text{máx} \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\},$$

y menor ángulo interno

$$\theta_{\text{mín}} = \text{mín} \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}.$$

Otras cantidades que usaremos son r y R el radio de los círculos inscrito y circunscrito respectivamente, ver la Figura A.1.

A.2. Algunos estimadores de error por interpolación lineal usando elementos triangulares

El método de los elementos finitos se basa en construir una triangulación sobre la región de estudio Ω y sobre de esa malla definir una aproximación lineal $f_h = f_h(x)$ a una función $f = f(x)$ sobre Ω . Al realizar esto, obtendremos un error de aproximación. La cota del error de aproximación ha sido analizada a detalle por muchos autores. Uno de ellos es Perronnet [251], quien atribuye a Ciarlet y Raviart el siguiente teorema:

Teorema A.1 *Sea $f = f(x) \in \mathbf{C}^2$ y $f_h = f_h(x)$ una aproximación lineal de f sobre elemento T de una malla $\mathcal{T}_h(\Omega)$, con $f_h(x_j) = f(x_j)$, para los puntos x_j sobre T , entonces*

$$\|f(x) - f_h(x)\|_2 \leq C \frac{L_{\text{máx}}}{\mu(T)} \|f(x)\|_2, \quad x \in T$$

donde

$$\|f(x)\|_2^2 = \left(\int_{\Omega} \|D^2 f(x)\|^2 dx \right),$$

aquí $L_{\text{máx}}$ es la longitud del mayor lado del triángulo y $\mu(T)$ es alguna función del triángulo T en la forma

$$\mu_1(T) = \frac{2r}{R} \tag{A.1}$$

$$\mu_2(T) = 2\sqrt{3} \frac{r}{L_{\text{máx}}} \tag{A.2}$$

$$\mu_3(T) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \tag{A.3}$$

$$\mu_4(T) = \frac{L_{\text{mín}}}{L_{\text{máx}}} \tag{A.4}$$

y C es una constante de normalización asociada a cada una de esas funciones $\mu_i(T)$.

En las anteriores representaciones, r es el radio del círculo inscrito, R el radio del círculo circunscrito, $\theta_{\text{máx}}$ el ángulo mayor del elemento triangular. Lo interesante del teorema anterior es que establece una cota para el error de aproximación dependiente de la distorsión de los elementos triangulares.

Del trabajo de Erroquet, Ciarlet y Raviart, nos queda claro que el efecto de la malla en la solución numérica depende de varios factores, incluyendo entre ellos a la malla misma, el algoritmo numérico y la solución.

Ahora, revisemos la siguiente

Definición 1 Una malla de calidad es aquella para un problema dado no enaltece aspectos numéricos indeseables.

Algunos aspectos numéricos indeseables podrían ser el error de aproximación y la sensibilidad numérica.

Como hemos hecho notar del teorema anterior, el error de aproximación depende de alguna función que involucra, los lados, el área y los ángulos de los elementos. La función o medida $\mu_1(T)$ es una de las más empleadas en la literatura y uno de los primeros que la usa es Mitchell [231] en 1971. Mitchell pide que esta medida que representa el cociente entre el radio del círculo inscrito y el radio del círculo circunscrito sea constante sobre toda la malla triangular, esto ocurre cuando todos los triángulos son equiláteros.

Los triángulos equiláteros son los preferidos por excelencia en todas las aplicaciones y es fácil ver que

$$\mu_1(T) = \frac{2r}{R} = 1$$

si y sólo si, el triángulo T equilátero. En la práctica, algunos investigadores identifican a la razón

$$AR = \frac{R}{r}$$

como el *aspect ratio* del triángulo, la cual es usada como una forma de medir la distorsión relativa a un equilátero.

En 1974, Cavendish [71] se interesa por la medida $\mu_2(T)$ por su simplicidad y propone el recíproco

$$AR = 1/\mu_2(Q) = \frac{1}{2\sqrt{3}}L_{\text{máx}}/r \tag{A.5}$$

como *aspect ratio* del triángulo, ver la Figura 5.1. Esta es una de las primeras expresiones geométricas para el *aspect ratio* que se conoce en la literatura.

En 1991, Dannelongue y Tanguy [88] sugieren usar $\mu_2(T)$ como una medida de distorsión ya que para un problema de Stokes, usando elementos lineales, encuentran que la cota de error de aproximación es $\mathcal{O}(L_{\text{máx}}^2/r)$.

La expresión (A.5) es usada por Ruppert [275] en 1993, como medida de distorsión para identificar la calidad de las mallas óptimas que construye. En 1998, George y Bouchaki [137] extienden esta medida a 3D para caracterizar la calidad de los tetraedros que construyen.

En la práctica es usual que algunos métodos o algoritmos para satisfacer alguna de las medidas de calidad (A.1)–(A.4), incrementen el número de elementos de los triángulos sobre todo en secciones de la región donde la convergencia y estabilidad del método tienen problemas, evitando en la medida de lo posible, triángulos alargados o *skinny triangles*. En la literatura existen muchas medidas de calidad para triángulos, algunas de las cuales son equivalentes entre sí, revisaremos esto más adelante.

Uno de los primeros métodos para construir triangulaciones garantizando la forma de los elementos, fue desarrollado en 1988 por Baker, Grosse y Rafferty [22]. El método que desarrollan evitan que los elementos tengan algún ángulo obtuso y demuestran que ninguno de ellos cuenta con un ángulo menor a 13° . En ese trabajo, observan que ningún triángulo así tiene un *aspect ratio* mayor de 4.6 (usando *aspect ratio* de Cavendish). En 1993, Ruppert [275] introduce una técnica para construir triangulaciones óptimas insertando nodos adecuadamente. La idea es simple: propone añadir puntos que no pertenecen a la triangulación original, en la frontera o en el interior, de manera que los ángulos de todos los triángulos se encuentren entre θ y $2\pi - \theta$. Ésta técnica se le conoce en la literatura como *puntos de Steiner*. Rupert recomienda usar un valor para el ángulo θ entre $\in (0, 20^\circ]$.

Las medidas de calidad para un triángulo o funciones han sido formuladas de manera que el valor óptimo caracterice un triángulo equilátero. Algunas de ellas provienen del análisis de error de truncamiento, por ejemplo (A.1)–(A.2), y cada una de ellas tiene

una interpretación y uso preferencial. Por ejemplo, $\mu_1(T)$ y $\mu_2(T)$, pueden emplearse para identificar si el triángulo es muy elongado o degenerado a segmento y $\mu_3(T)$ es útil para identificar y evitar que los ángulos sean muy grandes.

La habilidad en el diseño de una buena medida de calidad que caracterice la forma ideal del triángulo y permita identificar a los triángulos degenerados (en segmento o un punto) es esencial para construir mallas y estimadores de error adecuados. En 2000, Field [108] señala cuatro características o atributos deseables que debe de tener una *buena medida de calidad* (a *fair measure*) $\mu(T)$ para un elemento T (un triángulo, cuadrilátero, tetraedro, etc.):

- 1) habilidad de detectar elementos degenerados
- 2) que sea a -dimensionado (independiente de la escala)
- 3) acotada
- 4) normalizada ($0 \leq \mu(T) \leq 1$).

La ausencia de dimensión es relevante para los cálculos numéricos y en ocasiones, las medidas así diseñadas nos permiten extenderlas a superficies y sólidos. El atributo de que la medida sea acotada no permite aceptar valores muy grandes y la normalización nos permite comparar valores entre medidas y formas de los triángulos. La habilidad de detectar elementos no degenerados es esencial y está relacionada directamente con el área del elemento. Un elemento de área cero no es útil y un elemento *inverted* (invertido o de orientación contraria a los demás) tampoco lo es.

Una condición más que debe ser incorporada a una buena medida, y que señala Oddy [241] es:

- 5) la medida debe ser invariante bajo movimientos rígidos.

En 2002, Shewchuk [287] escribe un multicitado *unpublished preprint* donde realiza un análisis de las principales medidas para elementos triangulares y observa que es deseable que la medida

- 6) sea una función suave
- 7) que sea una función *quasi-convexa* sobre el dominio de elementos no doblados *non-inverted*.

El atributo 6) es útil para optimizar la calidad de la malla usando un método basado en el gradiente. Esto lo discutiremos en el Capítulo 5. En el último atributo, Shewchuk pide que para $c > 0$ el conjunto $\{E : \mu(E) \geq c\}$ sea convexo, sobre los elementos no doblados. Este atributo sirve para garantizar que el método de optimización empleado sea convergente y no cuente con más puntos críticos.

En ese *preprint* Shewchuk analiza una colección de medidas de calidad y las clasifica en funciones suaves, convexas, invariantes bajo transformaciones rígidas y en general,

si son adecuadas para su uso en un proceso de optimización. Por ejemplo, Shewchuk observa que el gradiente de $\mu_1(T) = 2r/R$, es cero sobre elementos degenerados o son cerca de estarlo, lo cual hace ineficiente esta medida en un procedimiento de optimización, y sin embargo, algunos investigadores la siguen empleando para mejorar la forma de las mallas.

Definición 2 Diremos que una medida $\mu(T)$ es una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, si cuenta con las características que pide Field 1–4 y es invariante bajo movimientos rígidos.

De las medidas $\mu_i(T)$ señaladas anteriormente observe que las dos primeras $\mu_1(T)$ y $\mu_2(T)$ son buenas medidas de calidad, ya que nos permiten identificar elementos degenerados y ambas están definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. La medida $\mu_3(T)$ no satisface la normalización y no asigna un valor de cero o fijo para un triángulo degenerado; esto es, no los detecta. Lo mismo ocurre con la medida $\mu_4(T)$ no detecta triángulos degenerados.

Una de las medidas más usadas para triangulaciones es aquella propuesta por Lo [215] en 1985

$$\mu_5(T) = \frac{4\sqrt{3}\text{área}(T)}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}.$$

Esta medida detecta en su valor óptimo triángulos equiláteros. En 1990, Bhatia y Lawrence [44] observan que las curvas de nivel de $\mu_5(T)$ son círculos por lo cual, esta medida es muy conveniente para usar en un método de optimización sencillo. Como veremos más adelante, esta medida es muy empleada en la literatura actual y una forma de obtenerla es cuantificando la deformación que sufre un triángulo cualquiera apartir de un triángulo equilátero, ver el artículo de Bank y Xu [21] de 1996. En la literatura, algunos autores como Kang y Hanghighi [173] simplemente denominan $\mu_5(T)$ como el *aspect ratio* de un triángulo. Esta medida fue generalizada para detectar tetraedros regulares por Liu y Joe en 1994 [212, 213]:

$$\mu(T) = \frac{12(3v)^{2/3}}{\sum_{i=1}^6 l_i^2}$$

donde v es el volumen del tetraedro y l_i la longitud de sus lados. Esta medida fue obtenida del trabajo de Lo [215], y mide la deformación que sufre un tetraedro cualquiera apartir de un tetraedro regular usando

$$\mu(T) = \frac{3\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{12(3v)^{2/3}}{\sum_{i=1}^6 l_i^2}$$

que representa el número de condición de la matriz M asociada al mapeo trilineal. En ésta representación, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de la matriz $M^T M$, véase el trabajo doctoral de Liu [211].

Una medida cuyas curvas de nivel están formadas por arcos hiperbólicos es

$$\mu_6(T) = \frac{2h}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}$$

Estas dos últimas medidas cuentan con las características idóneas que propone Field; sin embargo, la última medida no cuenta con la característica de ser casi convexa como pide Shewchuk.

Otra buena medida de calidad cuyas curvas de nivel son casi circunferencias es

$$\mu_7(T) = \frac{12\sqrt{3}A}{(l_1 + l_2 + l_3)^2} \quad (\text{A.6})$$

la cual es usada por Watabayshi y Galt [328]. El recíproco de esta medida es usada como función objetivo por Scarlatos y Pavlis [285] para obtener triangulaciones óptimas.

Field y Shewchuk revisan otras medidas reportadas en la literatura y observan si cuentan con estas características y las comparan entre sí.

No todas las medidas reportadas en la literatura están basadas en propiedades geométricas óptimas de triángulos equiláteros, algunas son medidas heurísticas que funcionan muy bien aunque no tienen una representación continuamente diferenciable y deban ser reescaladas para ser consideradas como buenas medidas de calidad. Este es el caso de

$$\mu_8(T) = \left\| \frac{h}{L_{\max}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\|$$

la cual fue introducida por Cavendish [71] en 1974 para identificar y mejorar los elementos de calidad obtenidos en una triangulación, ver la Figura A.2

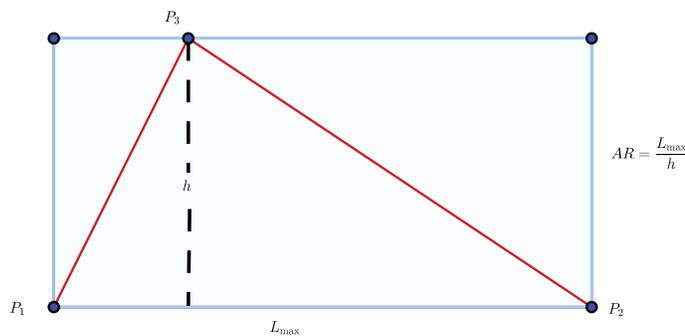


Figura A.2: Aspect ratio geométrico de Cavendish.

Cavendish propuso construir una triangulación inicial basada en el método de *advancing front* de Suhara-Fukuda [104] y propuso esta medida para conectar los nodos durante el proceso de validación de los elementos. La técnica que propuso Cavendish

difiere radicalmente de la prouesta realizada por Fukuda y Suhara. Cavendish define la pobreza de la calidad de los elementos *poorness quality* cuando la cantidad $\mu_8(T)$ es distante de cero. Esta función es una de las primeras medidas reportadas en la literatura donde se emplea el término *aspect ratio* para denotar a la razón de proporciones entre la altura y la base del rectángulo que encierra al triángulo, ver Figura A.2. Si hacemos una modificación a esta función obtenemos

$$\mu'_8(T) = \frac{2h}{\sqrt{3}L_{\text{máx}}}$$

la cual representa una buena medida de calidad en el sentido Field–Oddy, y en su valor máximo de 1 se alcanza solamente cuando el triángulo es equilátero.

Algunas de las anteriores medidas son comparables entre sí, lo cual se dice que son “equivalentes”. Por ejemplo la medida más usada de la literatura

$$\mu_1(T) = 2\frac{r}{R}$$

puede reescribirse en términos de los lados del triángulo y su área. Es fácil ver que

$$r = \frac{2A}{l_1 + l_2 + l_3}$$

y

$$R = \frac{l_1 l_2 l_3}{4A}$$

por lo que

$$\mu_1(T) = \frac{16A^2}{l_1 l_2 l_3 (l_1 + l_2 + l_3)}$$

Aiffa *et. al* [2] y Joe [168] demuestran que las medidas $\mu_1(\tau)$ y $\mu_5(\tau)$ son *equivalentes*, en el sentido que satisfacen

$$\mu_5(T)^2 \leq \mu_1(T) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_5(T) \tag{A.7}$$

y

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1(T) \leq \mu_5(T) \leq \mu_1(T)^{1/2} \tag{A.8}$$

La demostración es muy sencilla y los detalles están descritos en el artículo de Aiffa y el reporte técnico de Joe [168].

Otra forma de escribir la medida $\mu_1(T)$ es

$$\mu_1(T) = 2\frac{r}{R} = \frac{(l_1 + l_2 - l_3)(l_1 + l_3 - l_2)(l_2 + l_3 - l_1)}{l_1 l_2 l_3}.$$

Algunos autores como Field [108] y Persson [252] señalan que si todos los elementos T de la malla satisface $\mu_1(T) > 0.5$, entonces la malla se dice que tiene buena calidad. En el Capítulo 5 revisaremos una forma de medir la distorsión de toda la malla y nos enfocaremos al mejoramiento de la malla disminuyendo su distorsión.

A.3. El número de condición de un mapeo lineal

Nuestro interés en el estudio de las medidas de calidad es identificar la distorsión o deformación de un triángulo con respecto a una forma ideal: equilátero o rectángulo isósceles.

Algunas medidas de calidad están basadas con la cantidad de energía acumulada en el triángulo al ser deformado a partir de su forma ideal geométrica, véase [162, 164]. Una forma de medir esa energía es mediante al número de condición del mapeo lineal entre un triángulo cualquiera y el triángulo ideal. Revisemos los casos que competen cuando la forma del triángulo ideal es un triángulo equilátero y un triángulo rectángulo isósceles.

A.3.1. Caso: triángulo equilátero

Una de las medidas de calidad que ha sido estudiada exhaustivamente es el número de condición del mapeo lineal entre un triángulo equilátero $\triangle ABC$ y un triángulo general $T(P_1, P_2, P_3)$ de coordenadas $P_j(x_j, y_j)$.

Es fácil construir un mapeo lineal entre el triángulo de referencia formado por $Q_1(0, 0)$, $Q_2(1, 0)$ y $Q_3(0, 1)$ y los otros dos triángulos. Estos mapeos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} T_1(q) &= W_1q + c_1 \\ T_2(q) &= W_2q + c_2 \end{aligned}$$

donde W_1 es la matriz asociada al mapeo T_1 , a veces simplemente referenciada como la *edge matrix*

$$W_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

y para el otro mapeo

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Construimos un mapeo lineal biyectivo T_0 entre el triángulo equilátero y $\triangle P_1P_2P_3$ usando T_2 con a transformación inversa de T_1 . La matriz asociada del mapeo se escribe como $W_0 = W_2W_1^{-1}$. Esta idea viene equematizada en la Figura A.3

Ahora bien, nos interesa cuantificar la distorsión del triángulo $T(P_1, P_2, P_3)$ con respecto al triángulo equilátero. Para esto, definimos una norma basada en los valores singulares de W_0 .

Los valores singulares σ de W_0 pueden ser obtenidos a partir de la ecuación característica de $W_0^tW_0$:

$$3\sigma^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\sigma^2 + 16A^2 = 0,$$

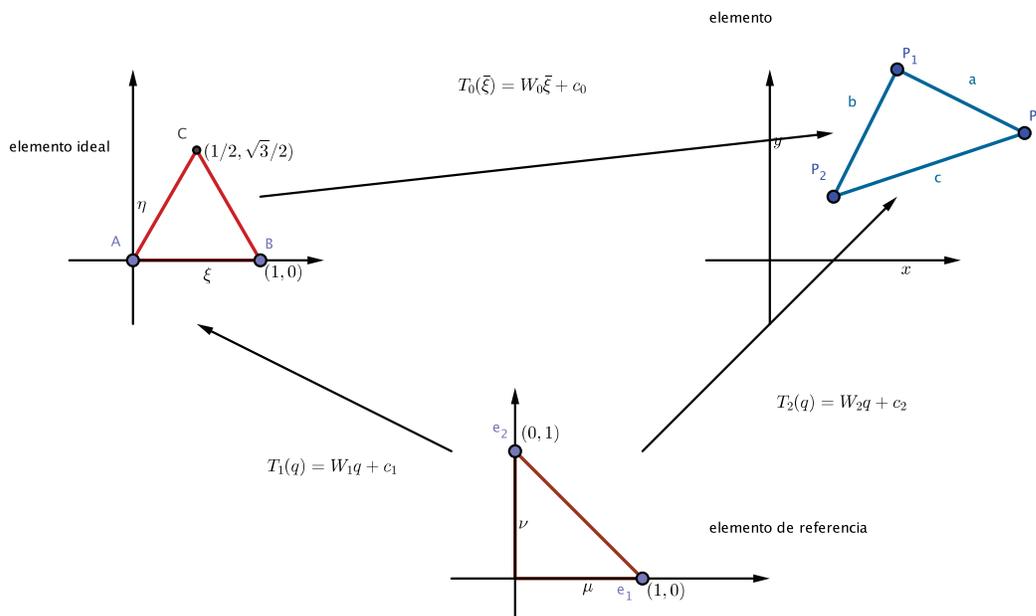


Figura A.3: Mapeo lineal entre un triángulo equilátero y otro.

donde A es el área del triángulo, y a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo. Si σ_1 y σ_2 (con $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$) son dos raíces de la anterior ecuación se cumple que

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

y

$$\sigma_1 \sigma_2 = 4 \frac{A}{\sqrt{3}}.$$

Una medida para cuantificar la distorsión del triángulo ideal T puede ser definida usando el número de condición de la matriz W_0 basado en alguna norma invariante. Por ejemplo, usando la norma Schatten (o norma Schatten–von-Neumann)

$$\|W_0\|_p = (\sigma_1^p + \sigma_2^p)^{1/p}.$$

Para $p = 2$, esta es la norma de Frobenius y si $p \rightarrow \infty$, tendremos la norma espectral. Para $p = 1$, esta representa es traza de W_0 .

Una medida, no normalizada, es el número de condición $\kappa(W_0)$ definido por

$$\kappa_p(W_0) = [(\sigma_1^p + \sigma_2^p)(\sigma_1^{-p} + \sigma_2^{-p})]^{1/p}$$

Usando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, es fácil ver que se cumple

$$\frac{\sigma_1^p + \sigma_2^p}{2} \geq (\sigma_1^p \sigma_2^p)^{1/2}.$$

Por lo que, para el caso particular de la norma de Frobenius, $p = 2$ tendremos que

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}A}. \quad (\text{A.9})$$

El número de condición de este mapeo lineal bajo la norma de Frobenius ha sido estudiada por Bank y Smith en 1996 [21] como un estimador *a posteriori* para adaptar mallas triangulares y por Freitag y Knupp [114] en 1999 para suavizar tetraedros. Otros autores que han revisado esta medida son Bhatia y Lawrence [44] en 1990, Baker [23, 24] en 2000 y 2002; y de nueva cuenta por Knupp [191] en 2001. Knupp es quien más ha fomentado el estudio de esta medida de calidad en años recientes para triángulos y tetraedros. Esta medida se conoce en la literatura como *mean ratio*: la razón de la media aritmética y la media geométrica de los valores propios de W_0 .

Como observación final es posible relacionar el número de condición en alguna de las normas antes señaladas

$$\kappa_1 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} = 2 + \kappa_2$$

y

$$\kappa_\infty = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}\kappa_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2^2 - 4}$$

los detalles se pueden consultar en Baker [23] y Pébay *et. al* [250].

A.3.2. Caso: triángulo rectángulo isósceles

En el caso anterior estuvimos interesados en cuantificar la distorsión del triángulo T con respecto a un triángulo equilátero. Ahora nos interesa saber qué tan cerca puede estar un triángulo T de ser un triángulo rectángulo isósceles.

Si P_1, P_2 y P_3 son los vértices del triángulo T siguiendo las ideas descritas en el caso anterior, podemos construir un mapeo lineal entre el triángulo de referencia $A(0, 1), B(0, 0)$ y $C(1, 0)$ y T . El mapeo lineal entre ellos tiene una representación muy simple:

$$T_0(\tilde{\xi}) = W_0 \tilde{\xi} + c_0$$

donde

$$W_0 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}|\mathbf{b}), \quad c_0 = P_1$$

veéase la Figura A.4.

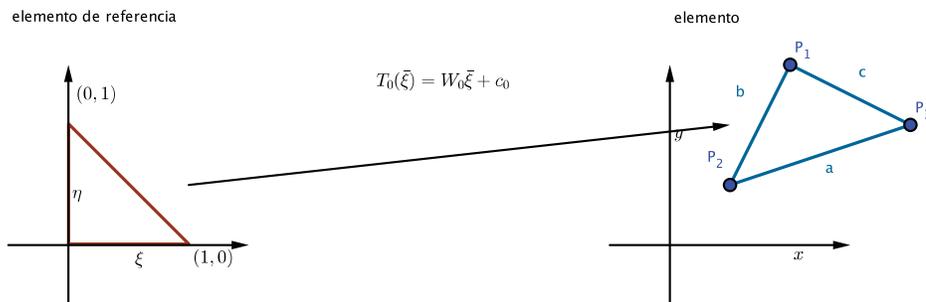


Figura A.4: Mapeo lineal entre un triángulo rectángulo isósceles y otro.

El número de condición asociado a este mapeo en la norma de Forbenius se escribe como

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{a^2 + b^2}{2A}. \quad (\text{A.10})$$

En 1994, Barrera [30] reescribe κ_2 en la forma

$$\kappa_2(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a^t J_2 b} \quad (\text{A.11})$$

donde $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y calcula

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial a} = \frac{1}{a^t b J_2 b} [2a - \kappa_2 J_2 b] \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial b} = \frac{1}{a^t b J_2 b} [2b + \kappa_2 J_2 a] \quad (\text{A.13})$$

y concluye que el punto crítico satisface

$$a = \pm J_2 b$$

y de ahí observa que $\|a\| = \|b\|$ y $a^t b = 0$; es decir, el mínimo para κ_2 ocurre en un triángulo rectángulo isósceles y el valor óptimo para $\kappa_2 = 2$. En los trabajos [145, 312, 146] se pueden consultar los detalles. En 1996, Ivanenko [158] muestra el mismo resultado analizando directamente el tensor métrico. En 2004, Pebay [253] reescribe κ_2 en la forma

$$\kappa_2(l, \theta) = \left(l + \frac{1}{l}\right) \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

donde $l = \|a\|/\|b\|$ y θ es el ángulo en P_1 , y muestra que la matriz hessiana asociada a κ_2 es localmente definida positiva alrededor del punto crítico el cual corresponde a

un mínimo local y demuestra que el único crítico corresponde para $l = 1, \theta = \pi/2$; es decir, cuando T es un triángulo rectángulo isósceles en P_1 .

En ese trabajo, Pebay observa algunos valores que se pueden obtener para κ_2 si el triángulo es rectángulo en P_2 o si este es equilátero, y sugiere usar este número de condición para definir medidas de distorsión para cuadriláteros. Sin embargo, esto fue primero propuesto por Lo en 1985 y 1989, véase [215, 216].

A.4. Sobre la métrica algebraica Garanzha–Reshetnyak

Hasta aquí, hemos discutido que el número de condición de un mapeo lineal (o trilineal para el caso 3D) puede ser usado como indicador de la distorsión del mapeo. Es fácil ver que el número de condición para el mapeo del triángulo isósceles es un caso particular del número de condición el triángulo rectángulo y viceversa.

Otra forma de analizar esa medida de distorsión se remonta al trabajo desarrollado en 1968 por Reshetnyak [262] en el contexto mapeos de deformación, o de distorsión acotada. El concepto de mapeos de deformación acotada fue introducido por Reshetnyak en [261].

En ese trabajo, Reshetnyak muestra que cualquiera de esos mapeos provienen de un extremal de un funcional análogo al funcional de Dirichlet y define un coeficiente de deformación

$$D(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\text{tra}(JJ^T)}}{\sqrt{n} \sqrt[n]{\det J}} \quad (\text{A.14})$$

donde J es matriz jacobiana del mapeo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta)$.

En 2001, Garanzha [47], observa el trabajo de Reshetnyak y define una medida de distorsión

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{1}{n}\text{tra}(JJ^T)\right)^{n/2}}{\det J} \quad (\text{A.15})$$

Para el caso $n = 2$, esta medida se escribe como

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{2 \det J} \quad (\text{A.16})$$

el cual coincide con el integrando del mapeo armónico o funcional de Winslow, y en su forma discretizada es el número de condición (A.10) del mapeo lineal. Para el caso $n = 3$, esa medida de distorsión se escribe como

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{1}{3}\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2 + \|\mathbf{x}_\zeta\|^2\right)^{3/2}}{\mathbf{x}_\xi \cdot \mathbf{x}_\eta \times \mathbf{x}_\zeta} \quad (\text{A.17})$$

el cual coincide con la función de energía usada en 1999 por Ivanenko [161].

Es fácil comprobar que

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{E(\mathbf{x})} = \frac{\det J}{\left(\frac{1}{n}\text{tra}(JJ^T)\right)^{n/2}}$$

tiene las características idóneas de una métrica algebraica definida por Knupp [191].

En 1999, Liseikin [205] prueba que la solución al problema variacional

$$\min H(\mathbf{x}) = \int_B E(\mathbf{x}) \, d\xi d\eta d\zeta \tag{A.18}$$

sujeto a las condiciones de frontera $\mathbf{x}(\partial B) = \partial\Omega$, es un homeomorfismo entre B y Ω . Este funcional ha sido utilizado por Azarenok [14] en 2006 y en 2013 por Barerra *et al.* [40] para construir mallas hexaedrales ϵ -convexas.

En 2002, Branets y Garanzha [48] revisan esta medida de distorsión para el caso del mapeo trilineal entre un tetraedro y un tetraedro regular y extienden esa medida de distorsión entre un tetraedro cualquiera y uno de forma “ideal”, obteniendo

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{1}{n}\text{tra}(AA^T)\right)^{n/2}}{\det A}$$

donde la matriz asociada al mapeo es de la forma $A = H^{-1}S$, siendo H la matriz asociada al mapeo con el elemento ideal.

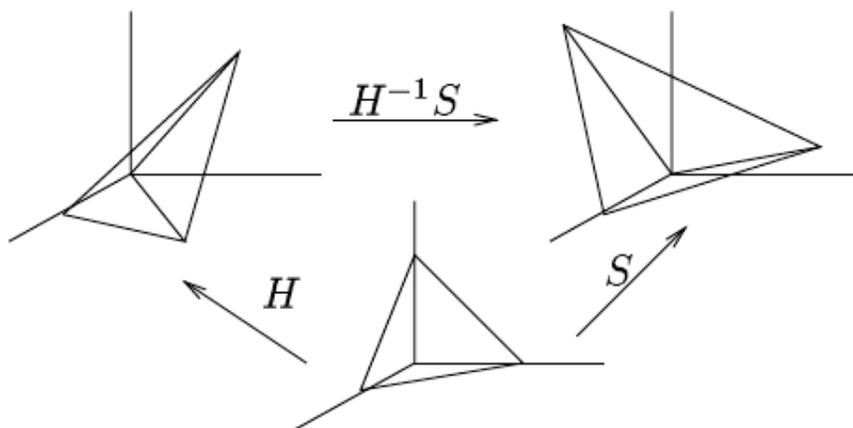


Figura A.5: Mapeo trilineal entre un tetredro regular y uno en posición general. Figura tomada de [48].

En 2004, Garanzha extiende la medida de distori3n a métricas G definidas entre superficies para construir mallas de elementos geodésicos, véase Garanzha [130], observe la Figura A.6.

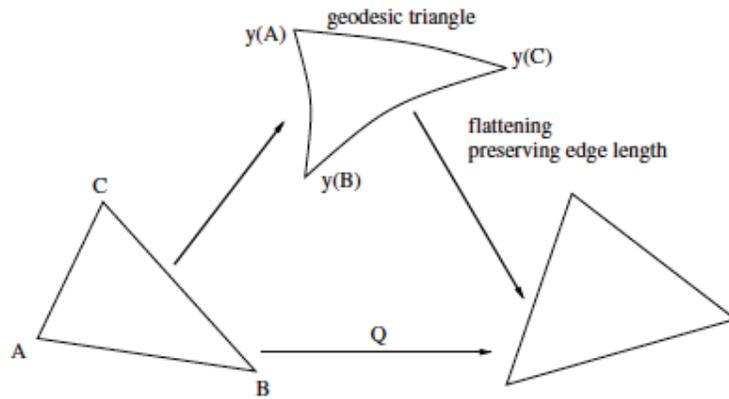


Figura A.6: Mapeo trilineal entre un triángulo y un triángulo geodésico. Figura tomada de [130].

Siguiendo el trabajo de Garanzha, nosotros consideramos que ésta medida de distorsión se puede extender fácilmente a elementos curvos (o de lados curvilíneos) para medir su distorsión. Optimizando $E(\mathbf{x})$ se podrá construir elementos curvos de buena calidad. Nosotros esperamos que los resultados serán comparables a lo que obtienen Gargalló–Peiró *et al.* [132, 133], ya que la medida basada en el *mean ratio* y la medida de distorsión (A.15) para mapeos lineales (entre triángulos) y trilineales (entre tetraedros) son equivalentes.

Apéndice B

Mapas de calidad para algunas mallas

En este apéndice comparamos algunas de las medidas de calidad para cuadriláteros discutidas en el Capítulo 5. Recuerde que cada cuadrilátero o celda Q de la malla se le asocia un valor $\mu(Q)$ en $[0, 1]$. El mapa de calidad de la malla se forma coloreado toda cada celda en un color del mapa de colores `jet`, el cual que va del color rojo (calor) al azul (frío). La escala de colores para las celdas es: la tonalidad rojo se asigna a los valores $\mu(Q) \approx 1$ y degradándose hacia la tonalidad azul cuando $\mu(Q) \approx 0$.

B. MAPAS DE CALIDAD PARA ALGUNAS MALLAS

La malla sobre la cual trazaremos los mapas es:

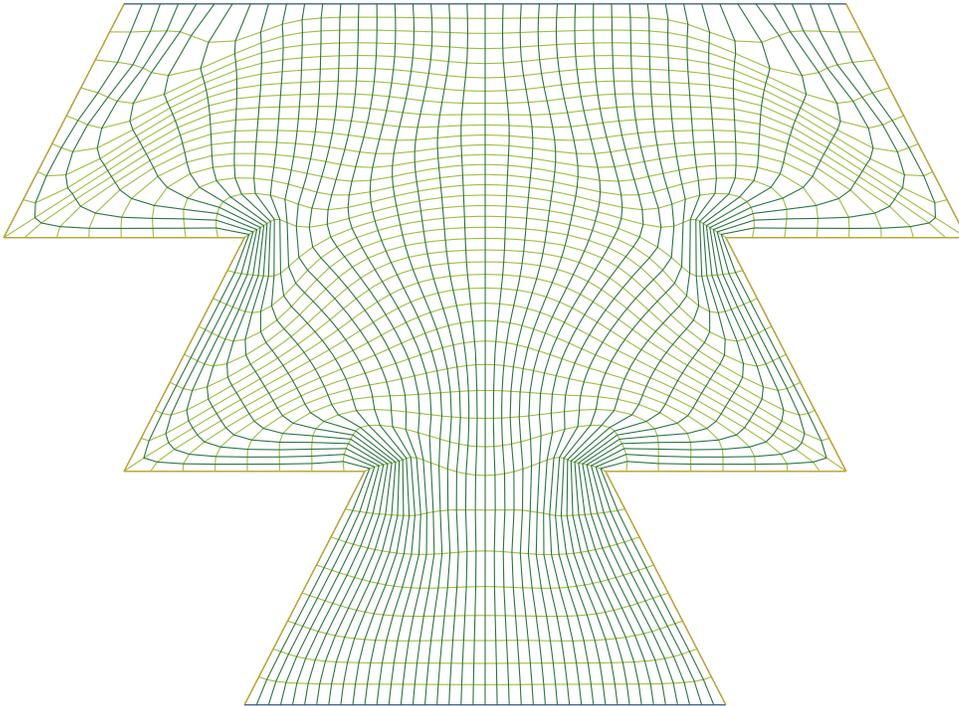


Figura B.1: Dec28, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_R$ para $\sigma = 0.5$.

La malla obtenida es ϵ -convexas, para $\epsilon = 10^{-5}$.

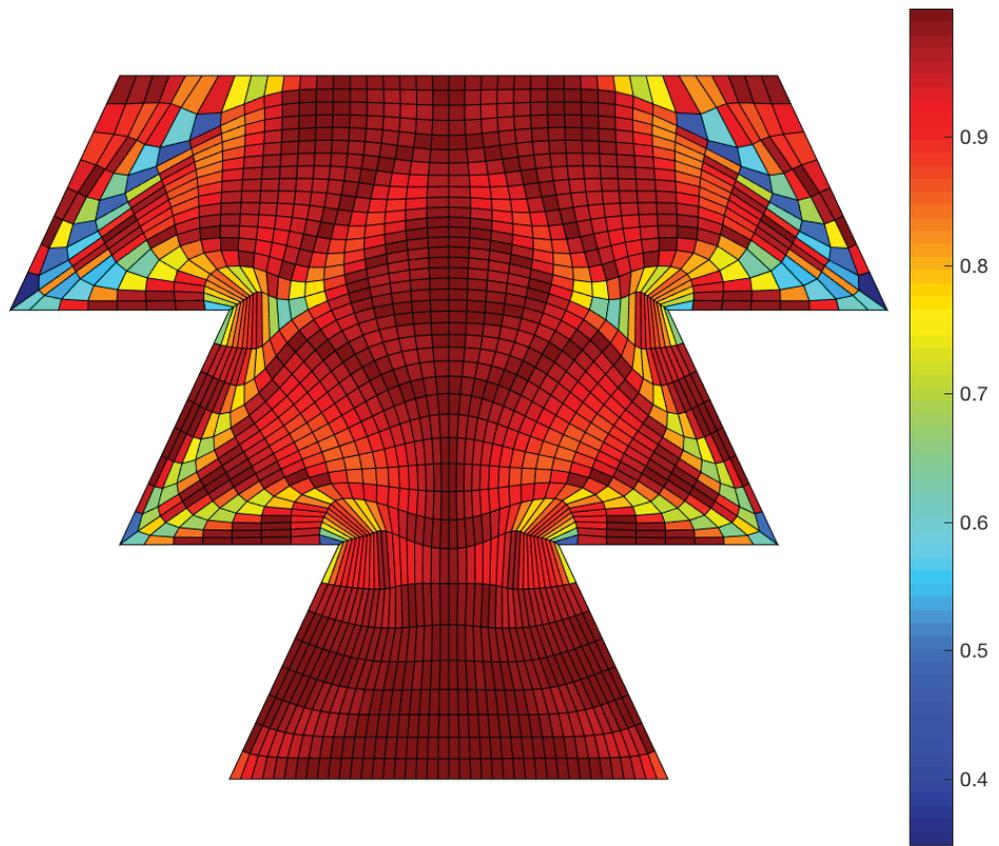


Figura B.2: Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.

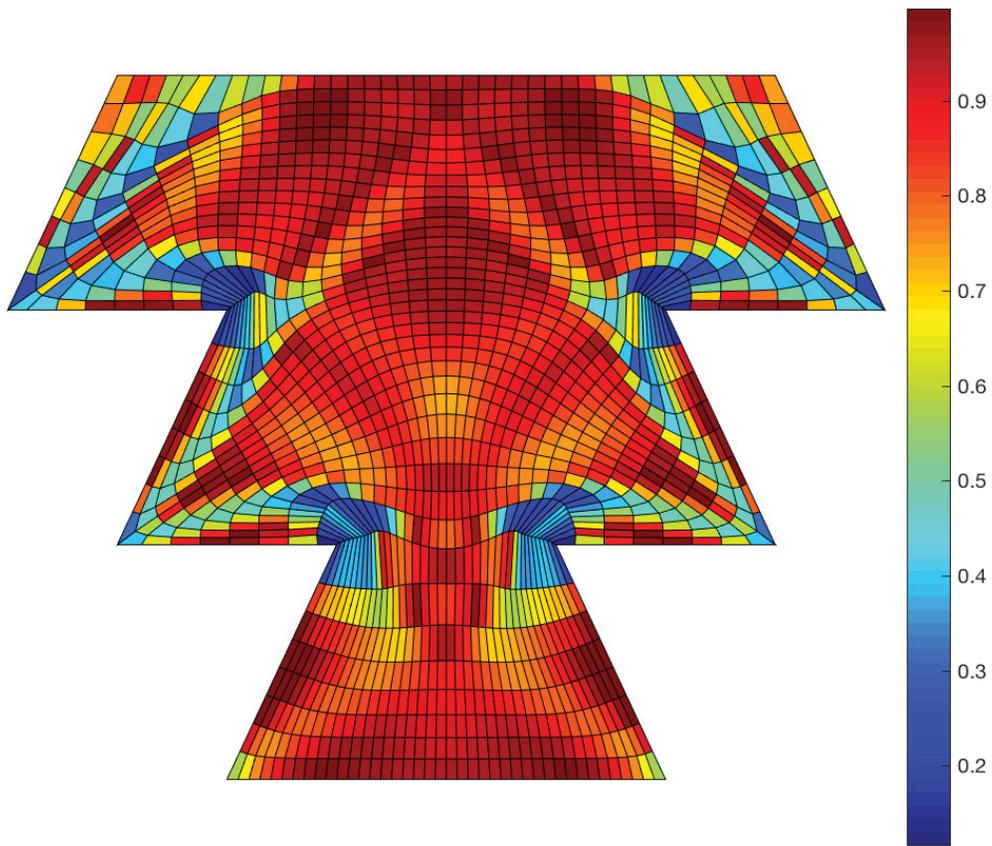


Figura B.3: Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.

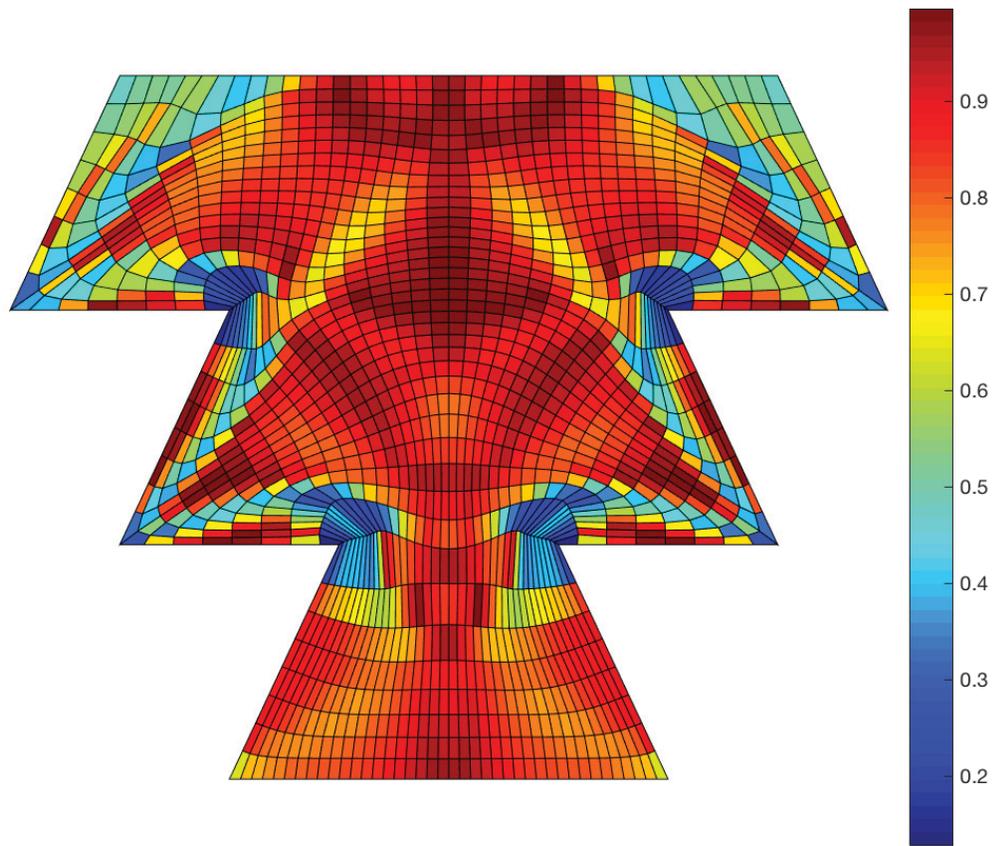


Figura B.4: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.

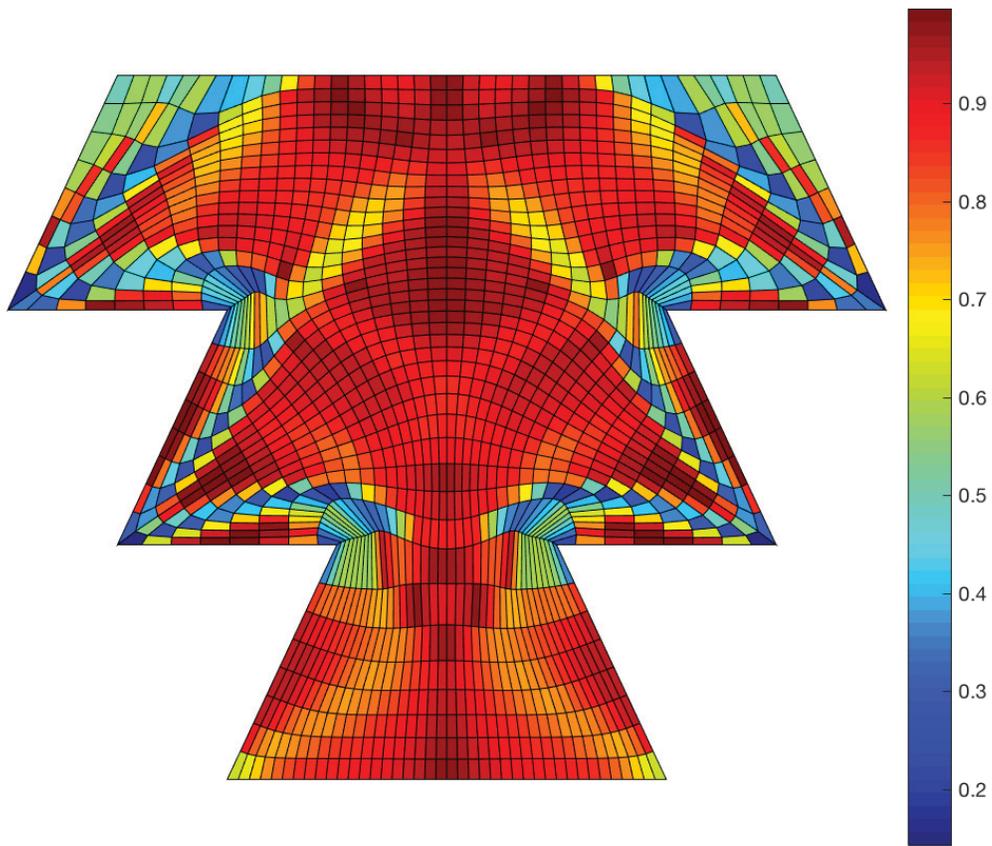


Figura B.5: Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.

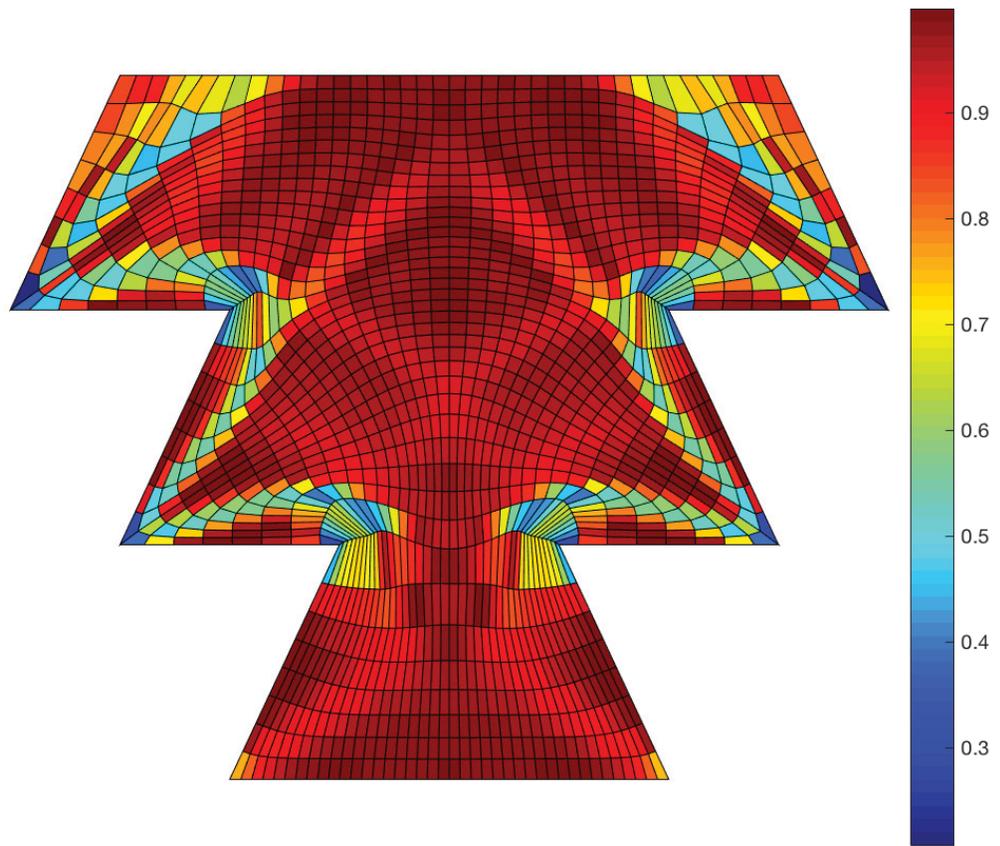


Figura B.6: Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.

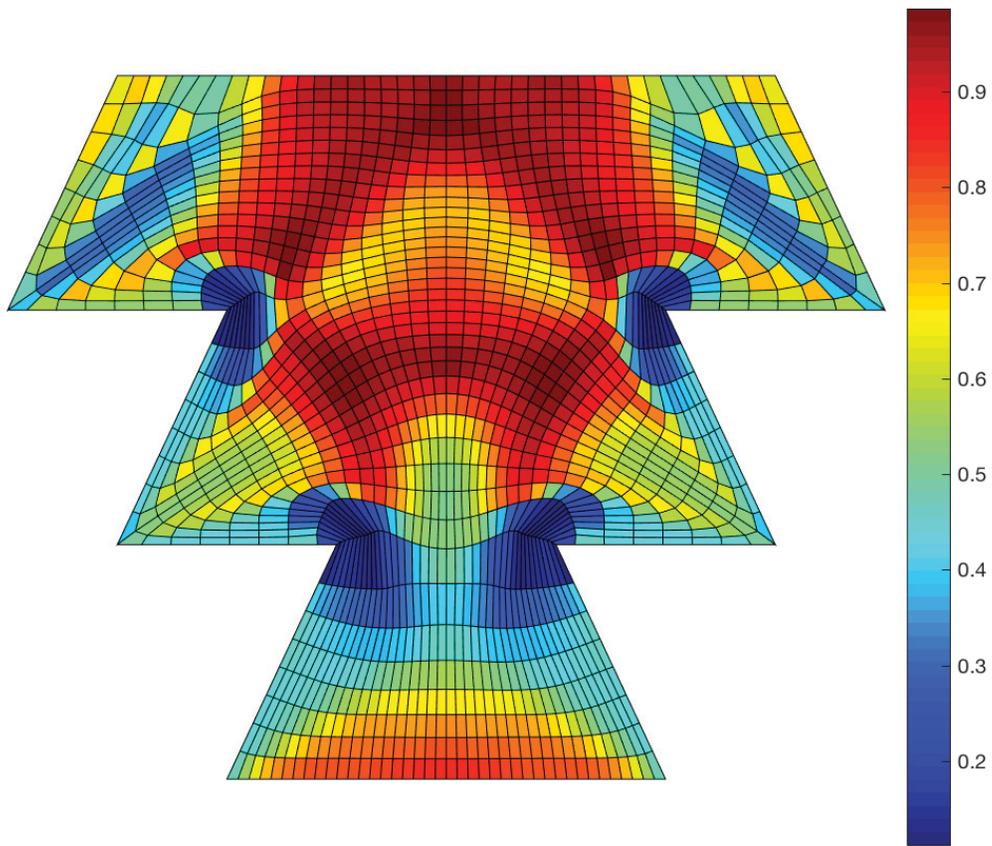


Figura B.7: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.

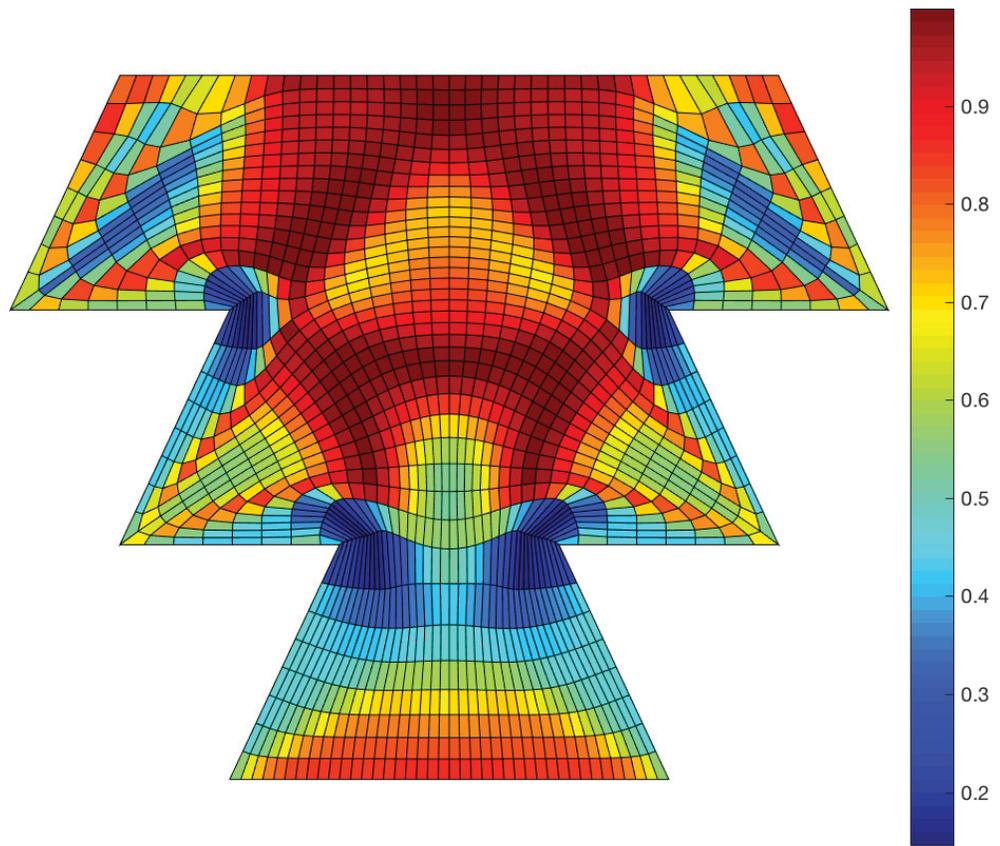


Figura B.8: Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.

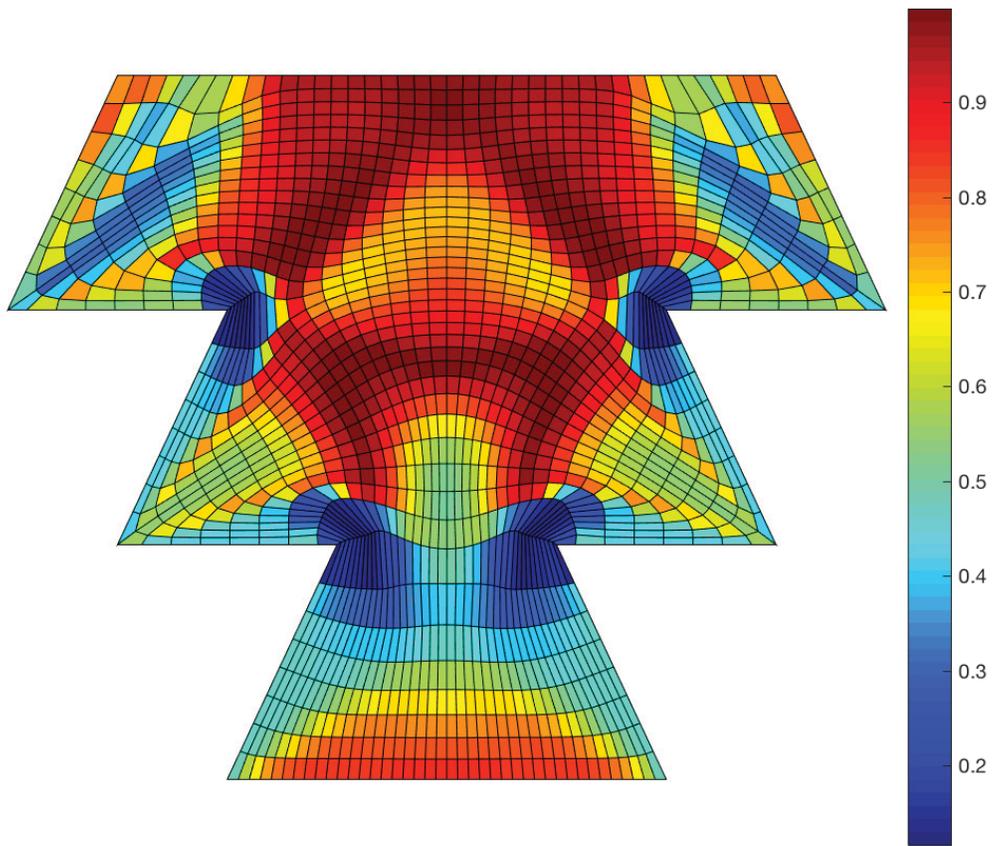


Figura B.9: Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.

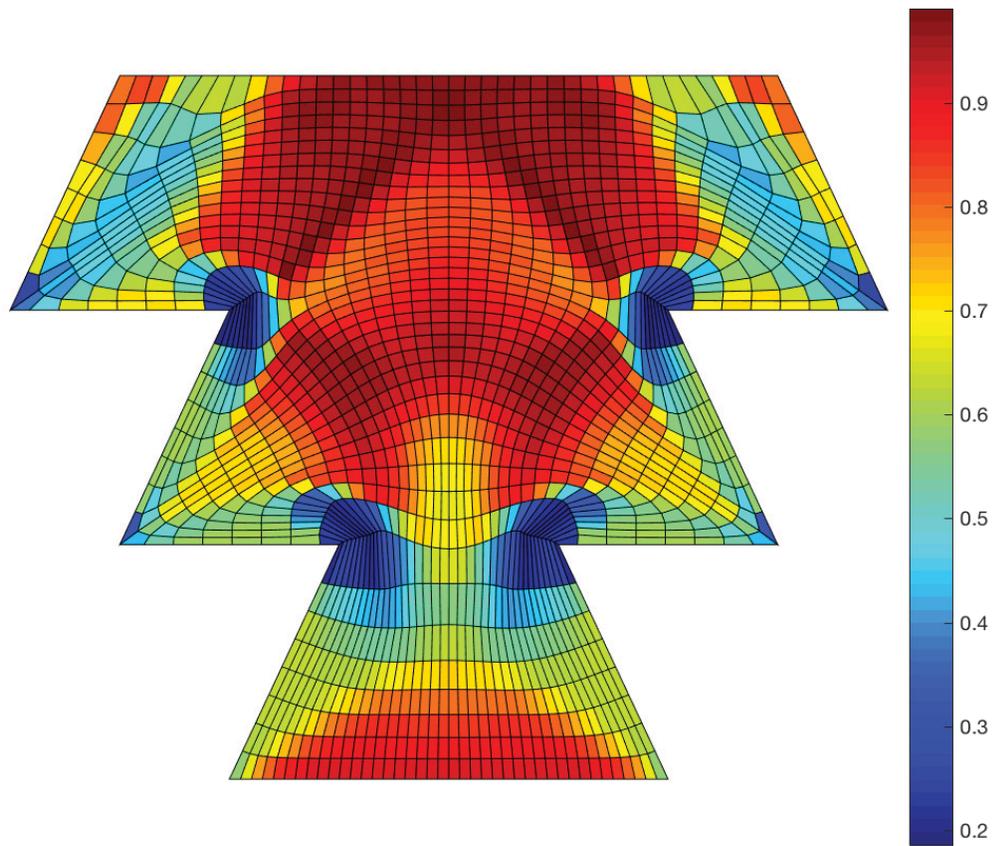


Figura B.10: Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.

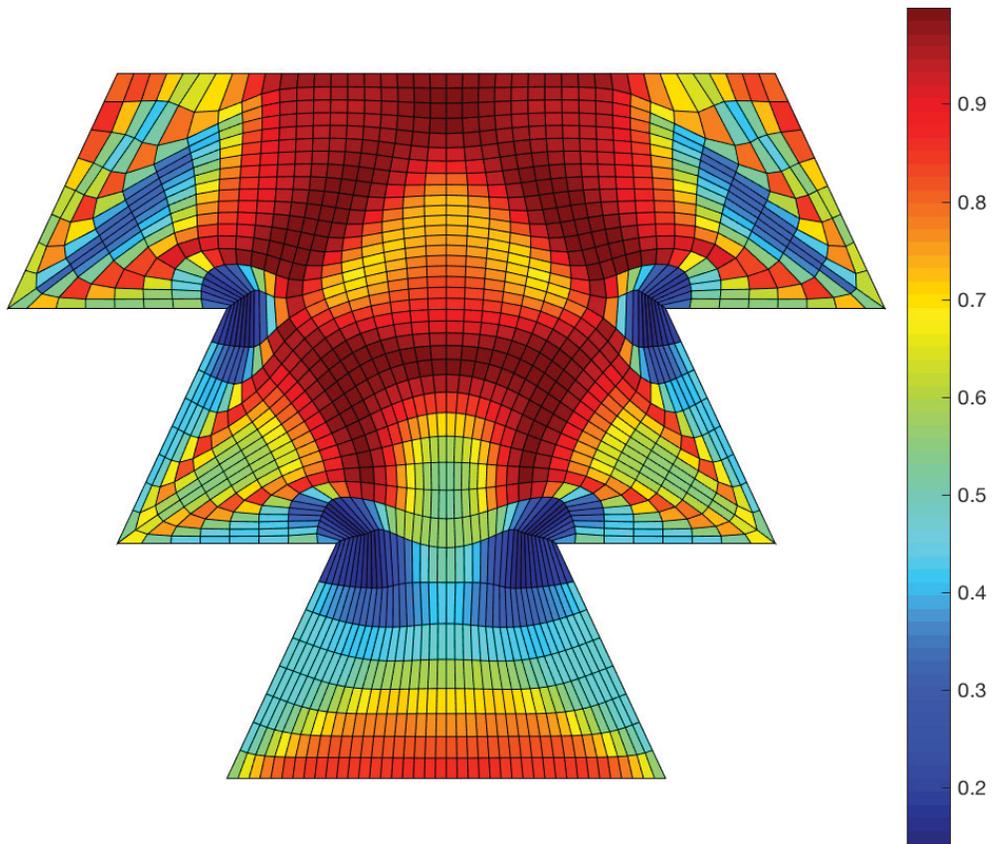


Figura B.11: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (*mean ratio*), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.

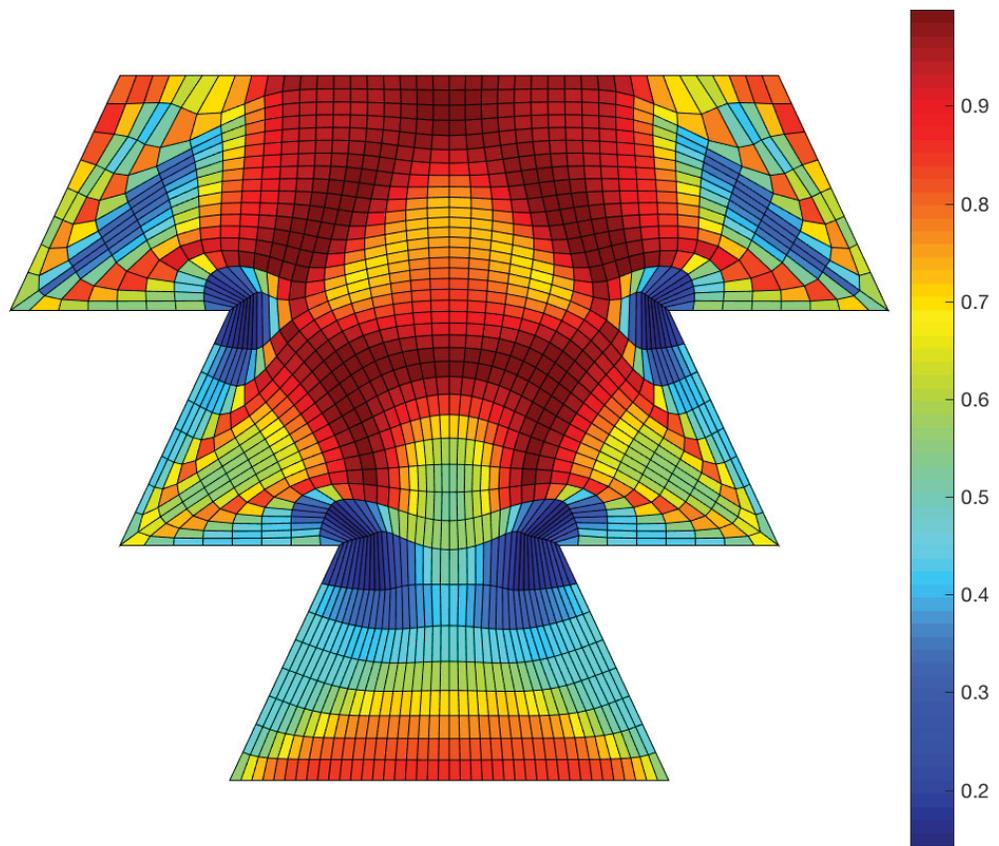


Figura B.12: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.

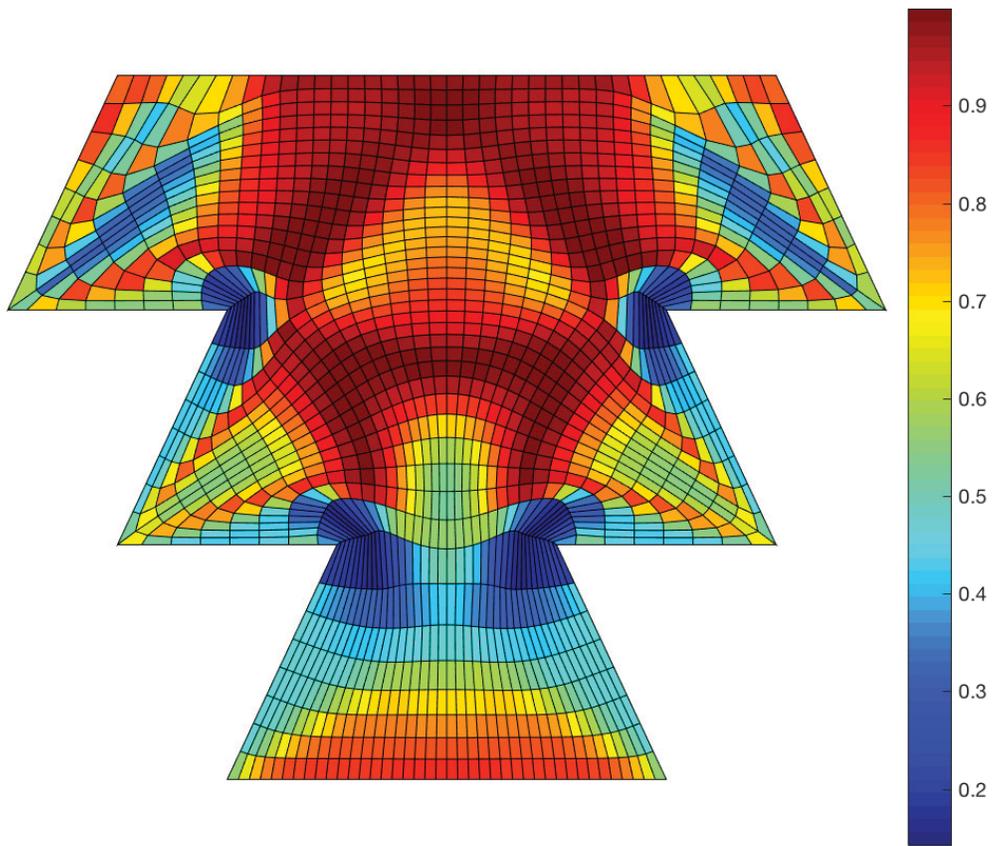


Figura B.13: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida *radius ratio* para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.

La malla sobre la cual trazaremos los mapas es:

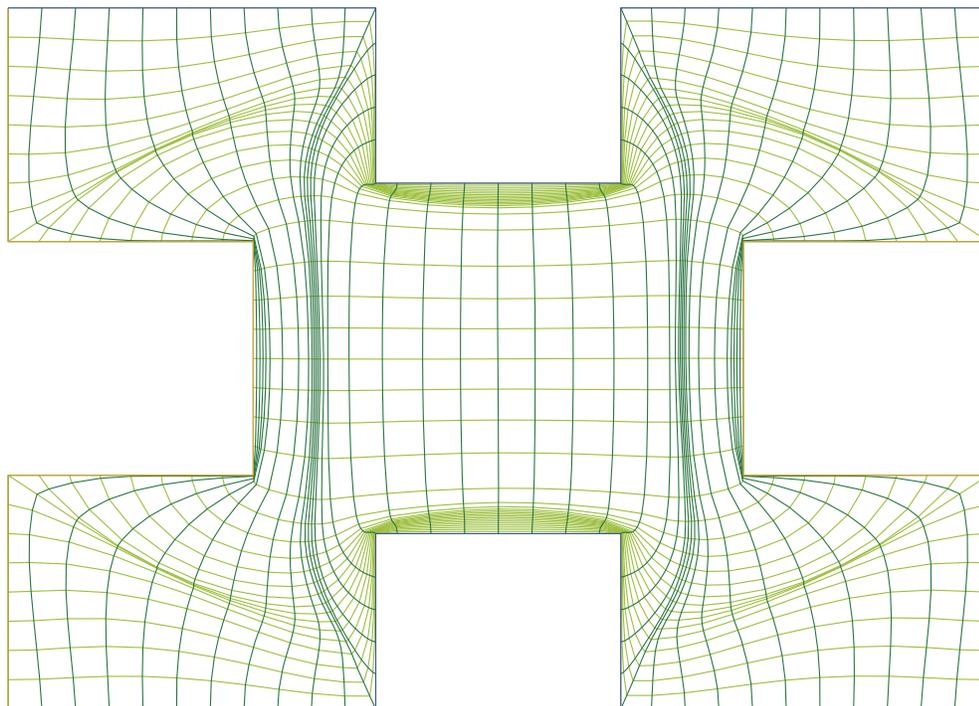


Figura B.14: Dec29, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_R$ para $\sigma = 0.01$.

La malla obtenida es ϵ -convexas, para $\epsilon = 10^{-5}$.

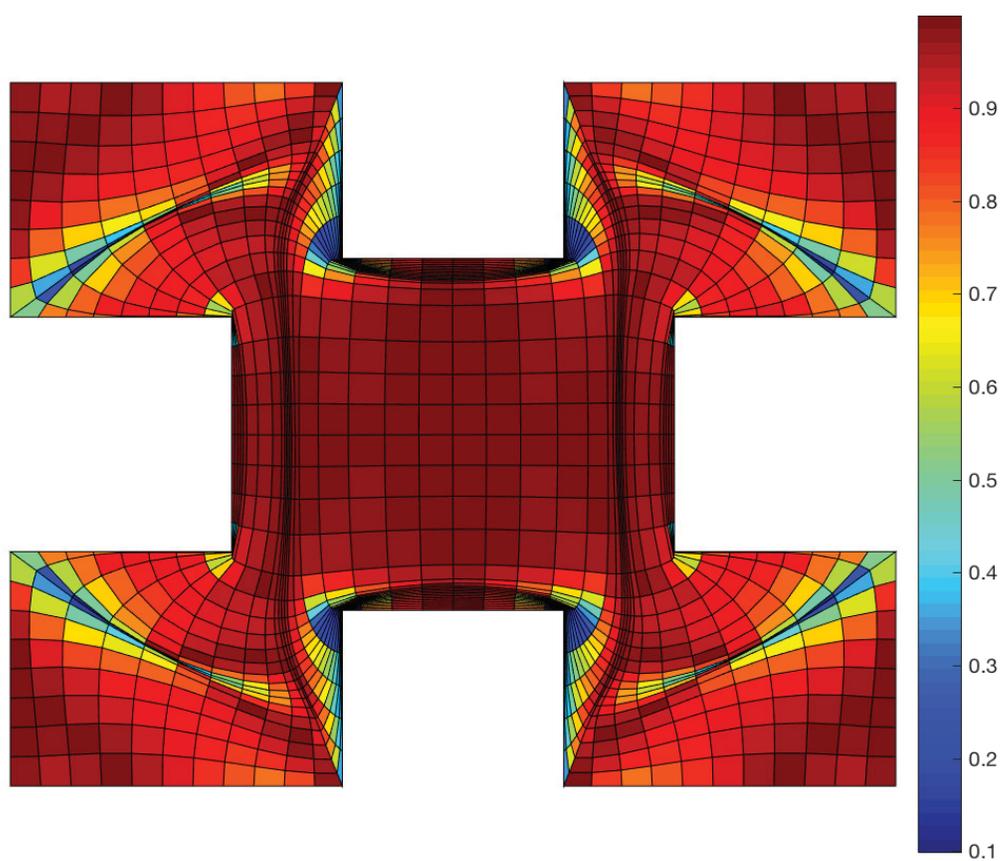


Figura B.15: Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.

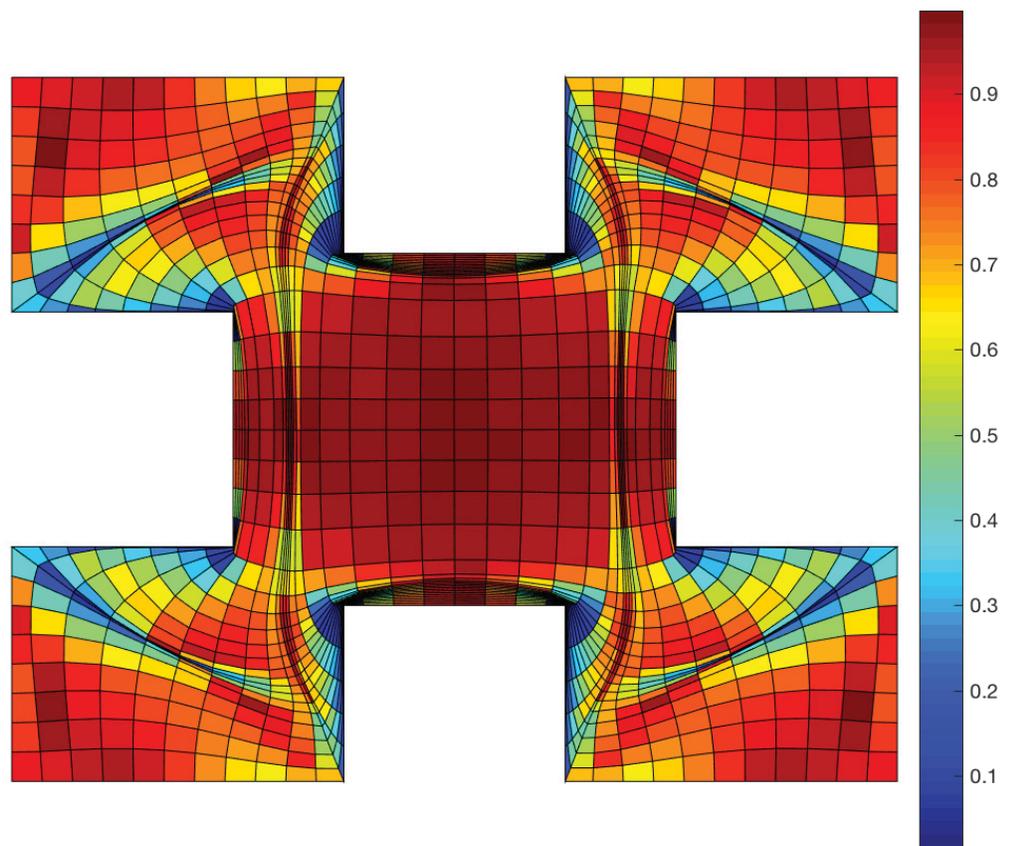


Figura B.16: Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.

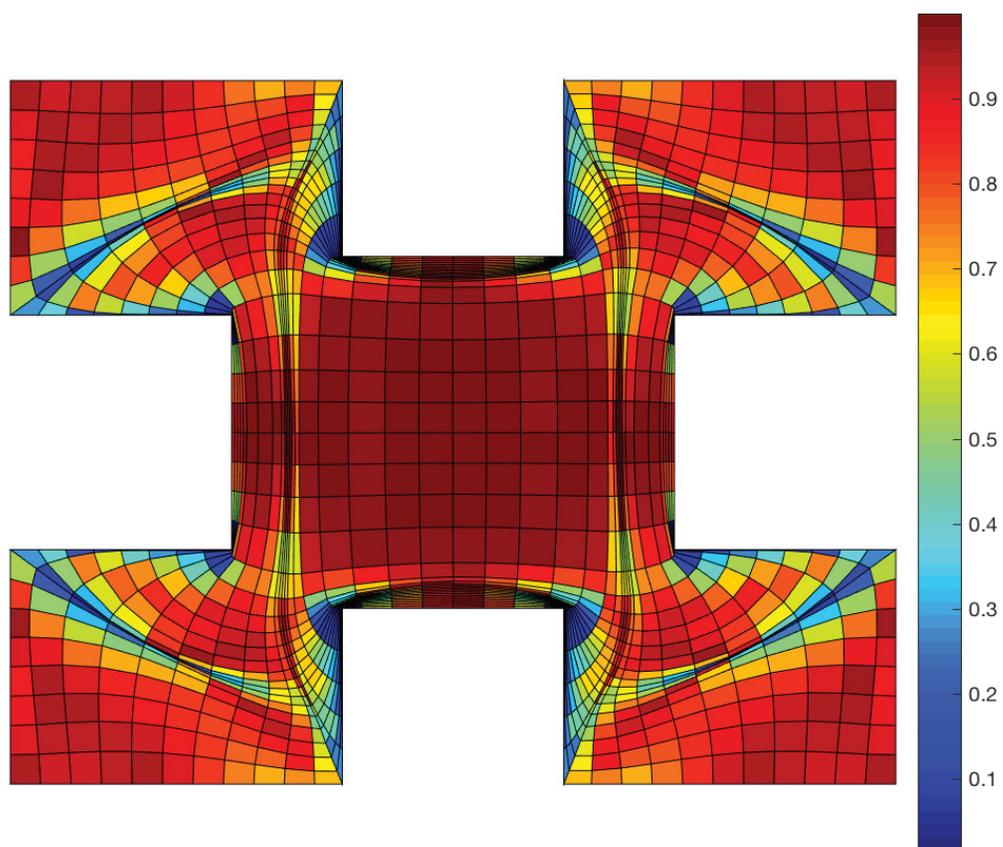


Figura B.17: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.

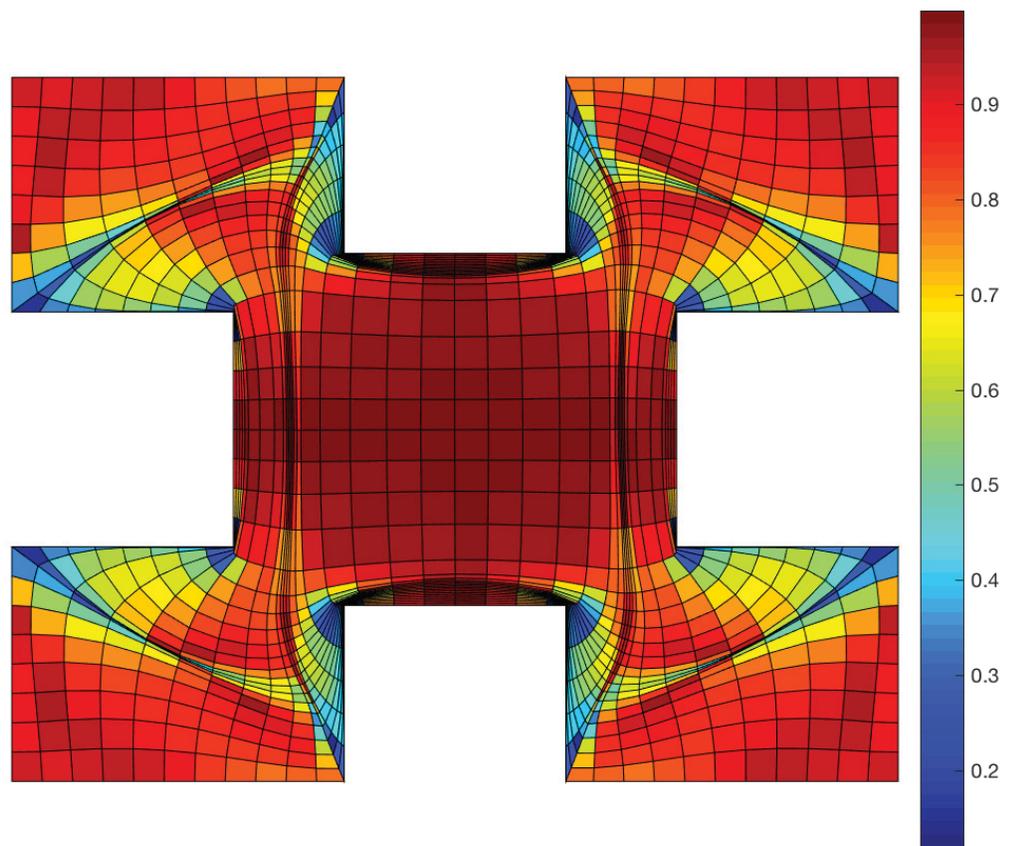


Figura B.18: Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.

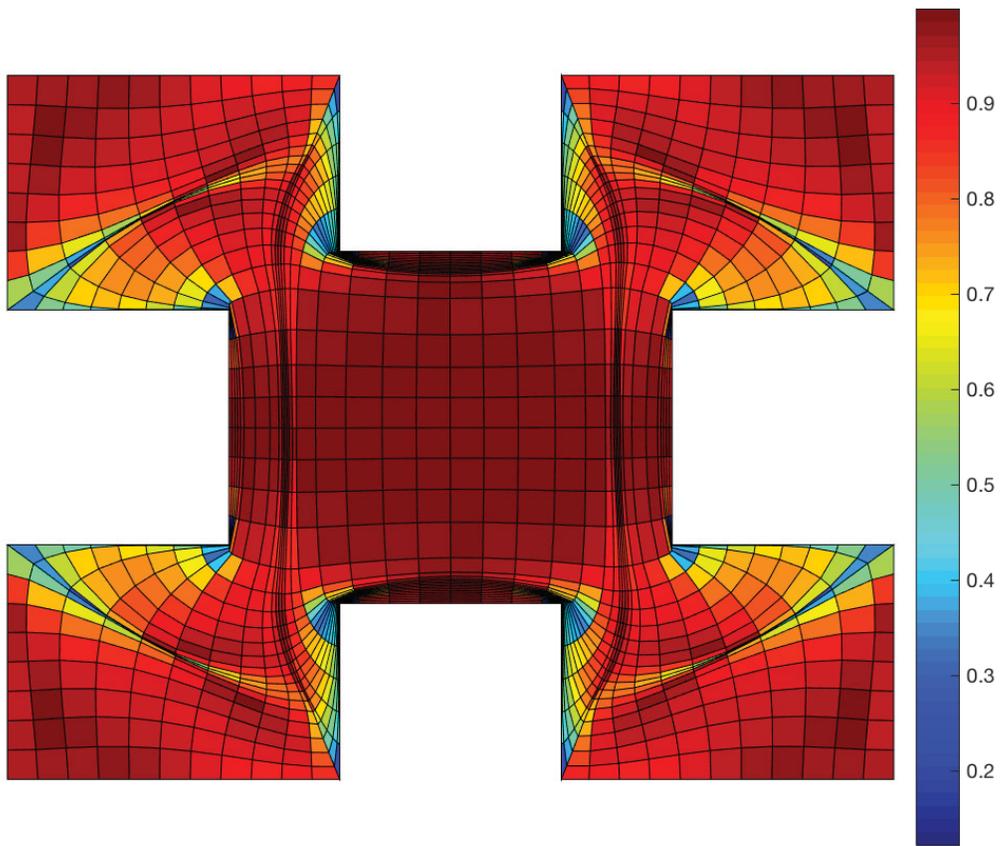


Figura B.19: Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.

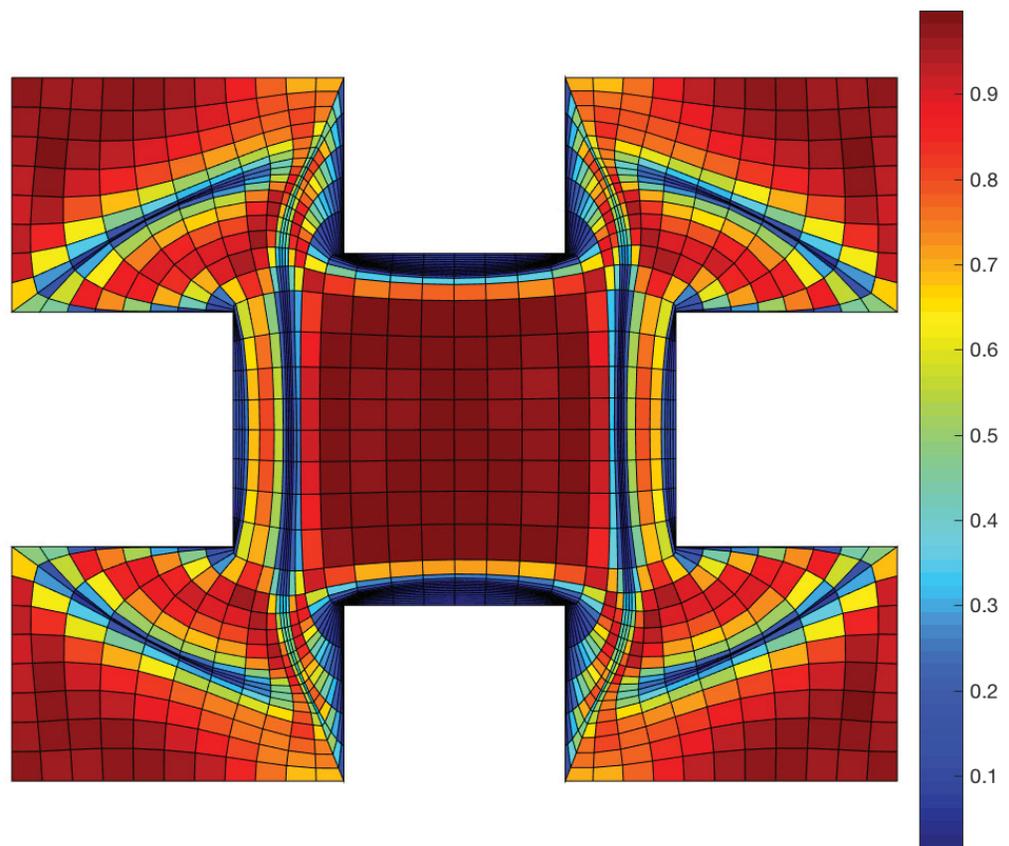


Figura B.20: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.

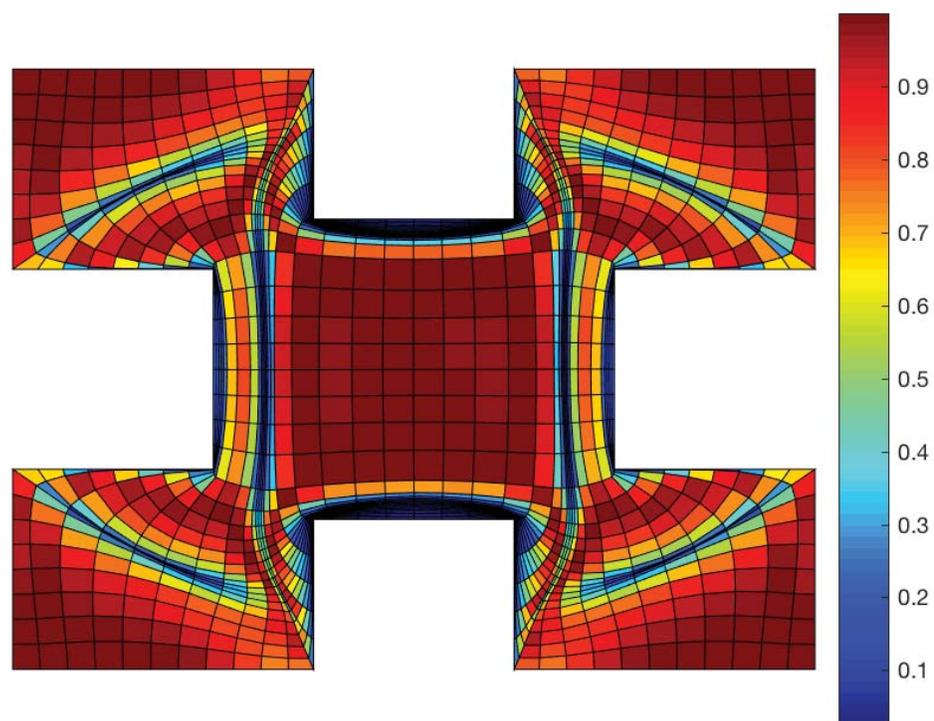


Figura B.21: Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.

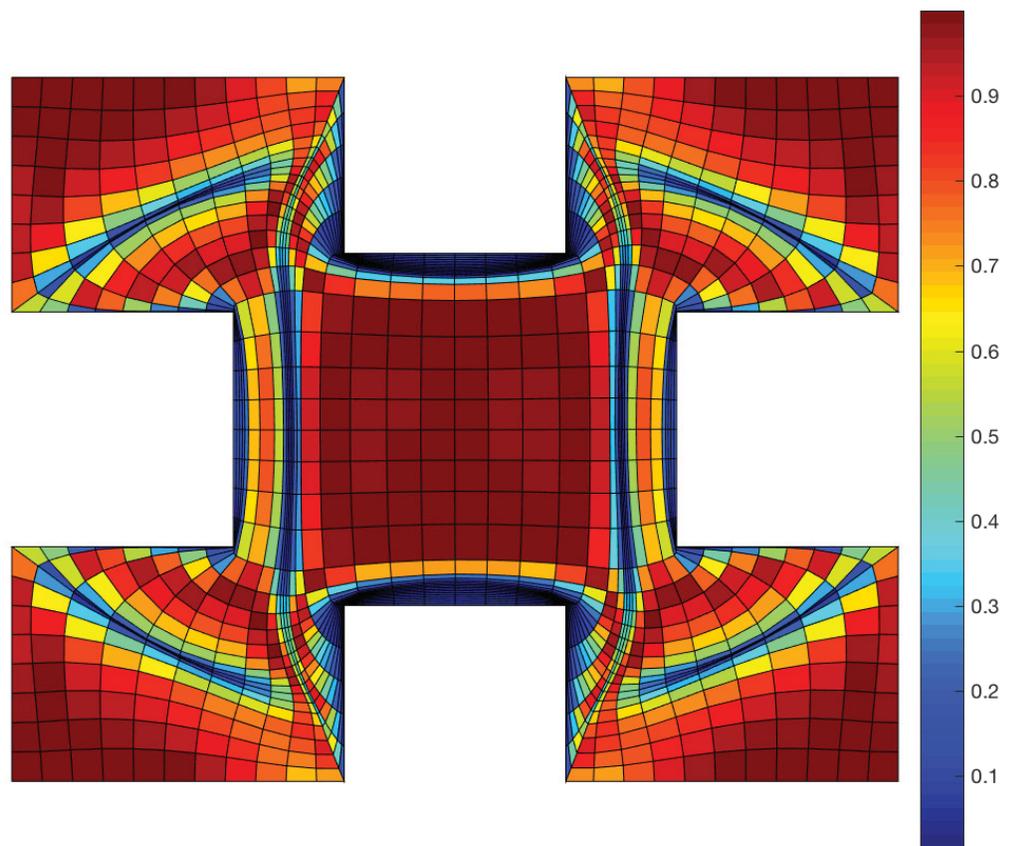


Figura B.22: Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.

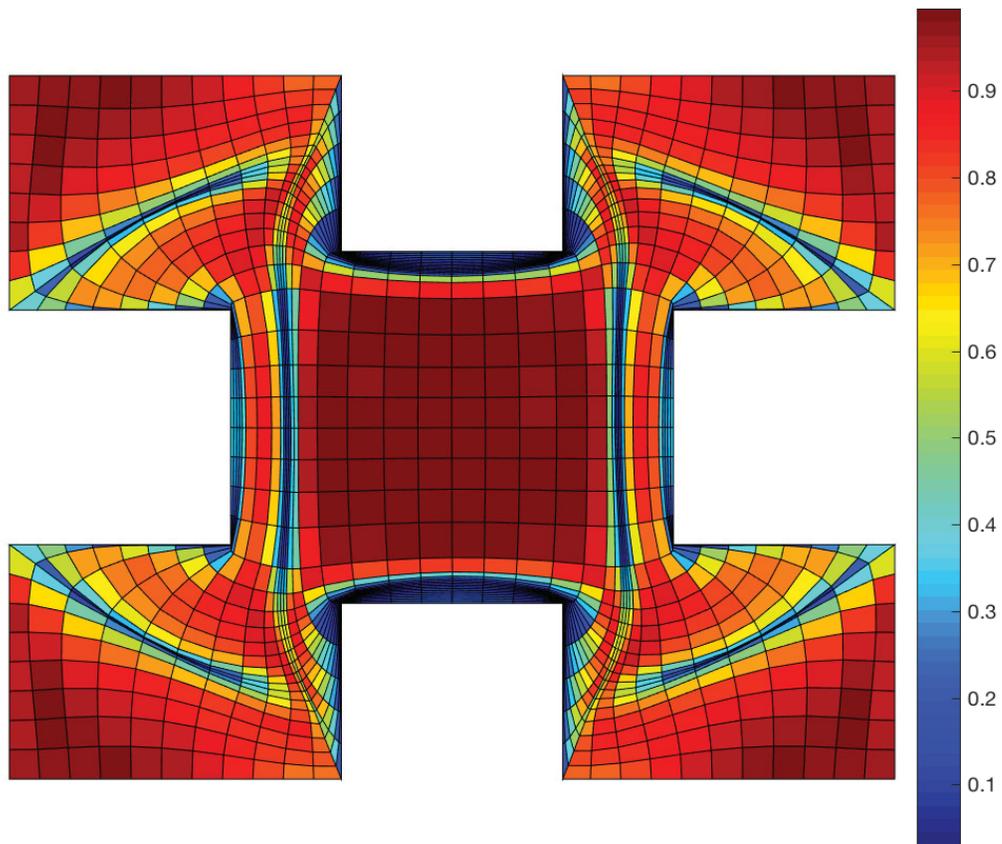


Figura B.23: Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.

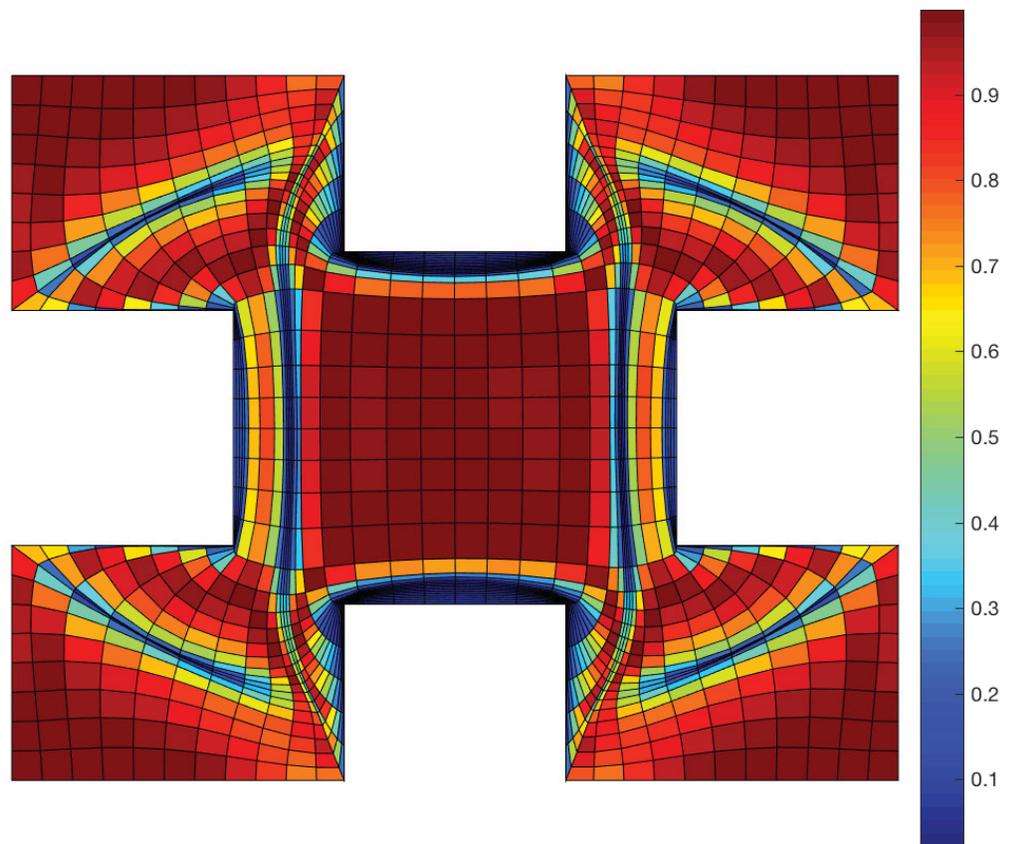


Figura B.24: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (*mean ratio*), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.

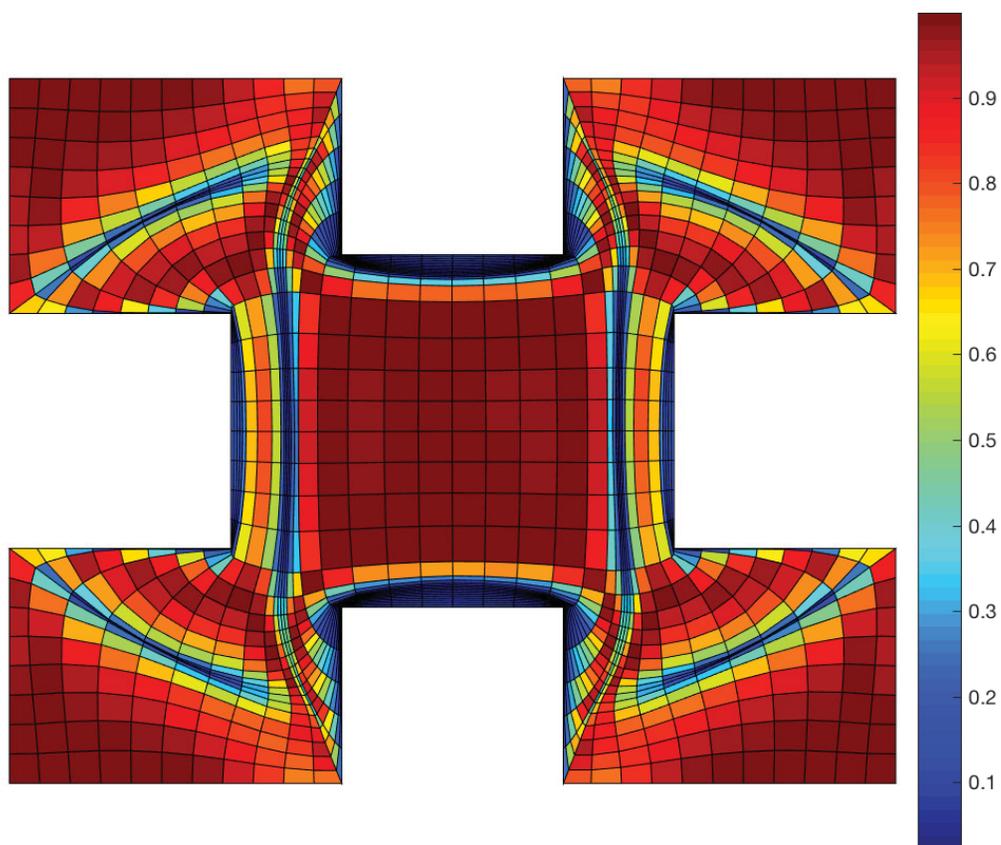


Figura B.25: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.

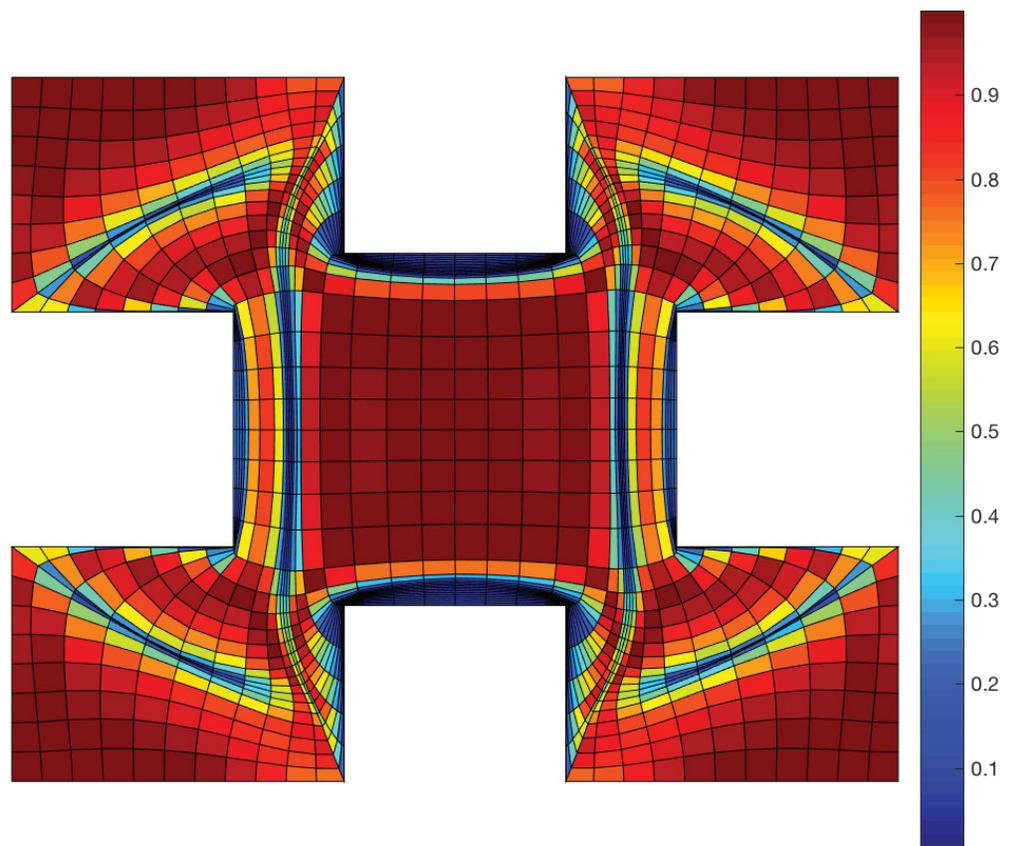


Figura B.26: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida *radius ratio* para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.

B. MAPAS DE CALIDAD PARA ALGUNAS MALLAS

La malla sobre la cual trazaremos los mapas es:

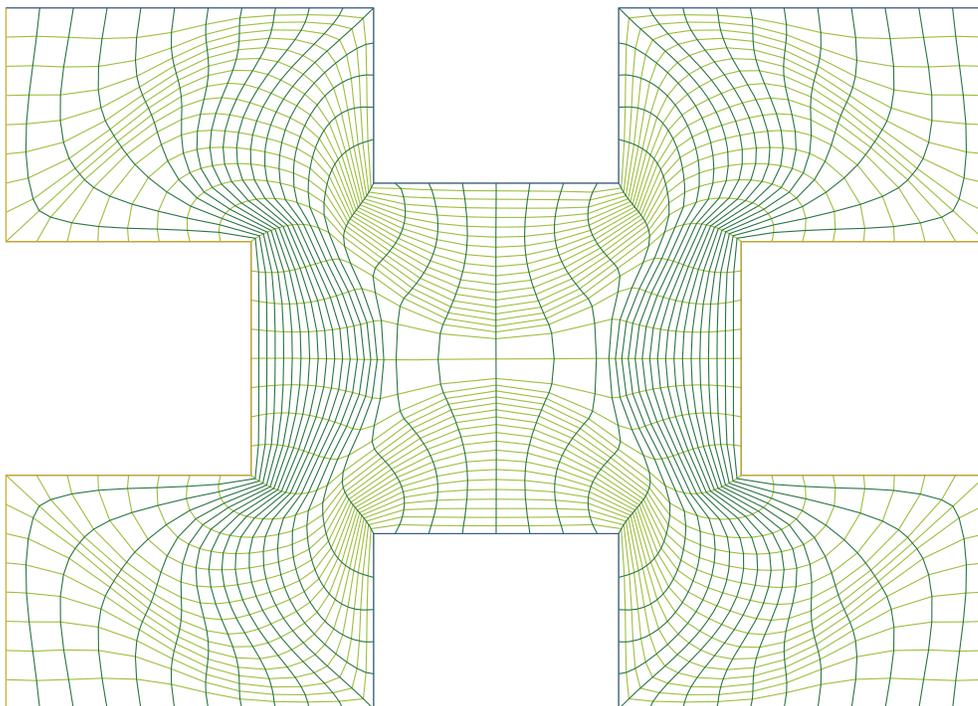


Figura B.27: Dec29, malla de 41×41 , obtenida usando $\sigma A_\omega + (1 - \sigma)F_R$ para $\sigma = 0.01$.

La malla obtenida es ϵ -convexas, para $\epsilon = 10^{-5}$.

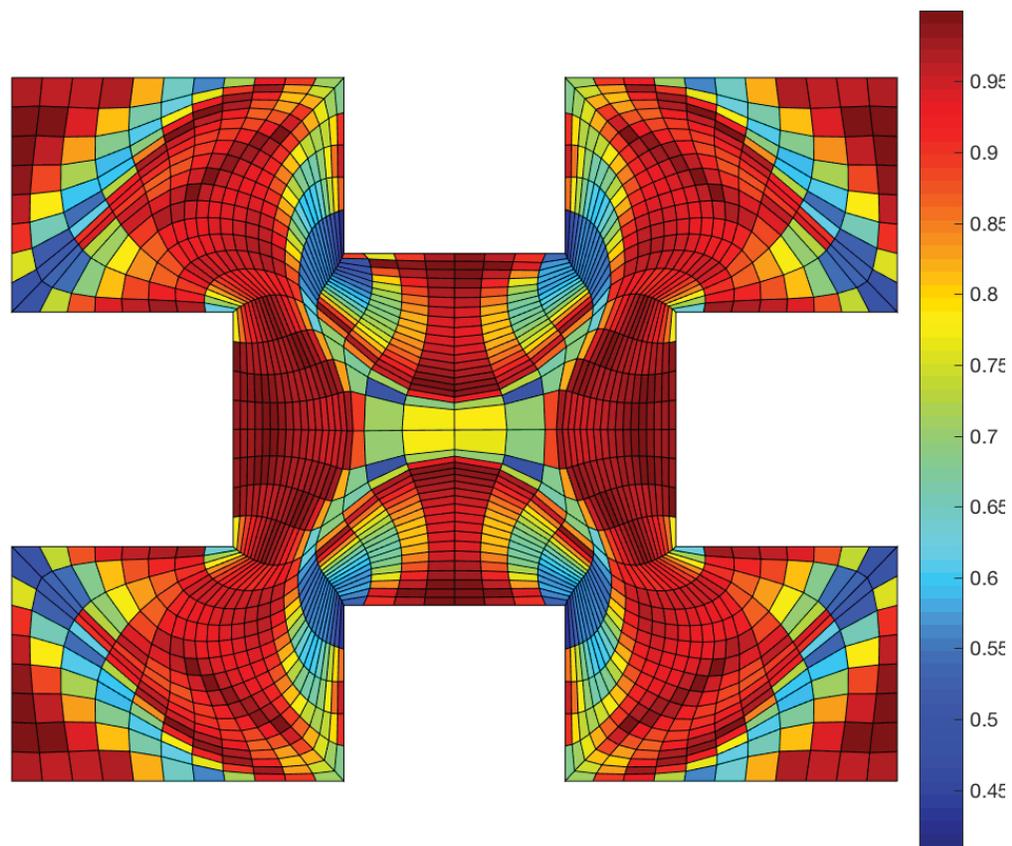


Figura B.28: Mapa de calidad para la medida Area I de 2015, con la cual detectamos paralelogramos.

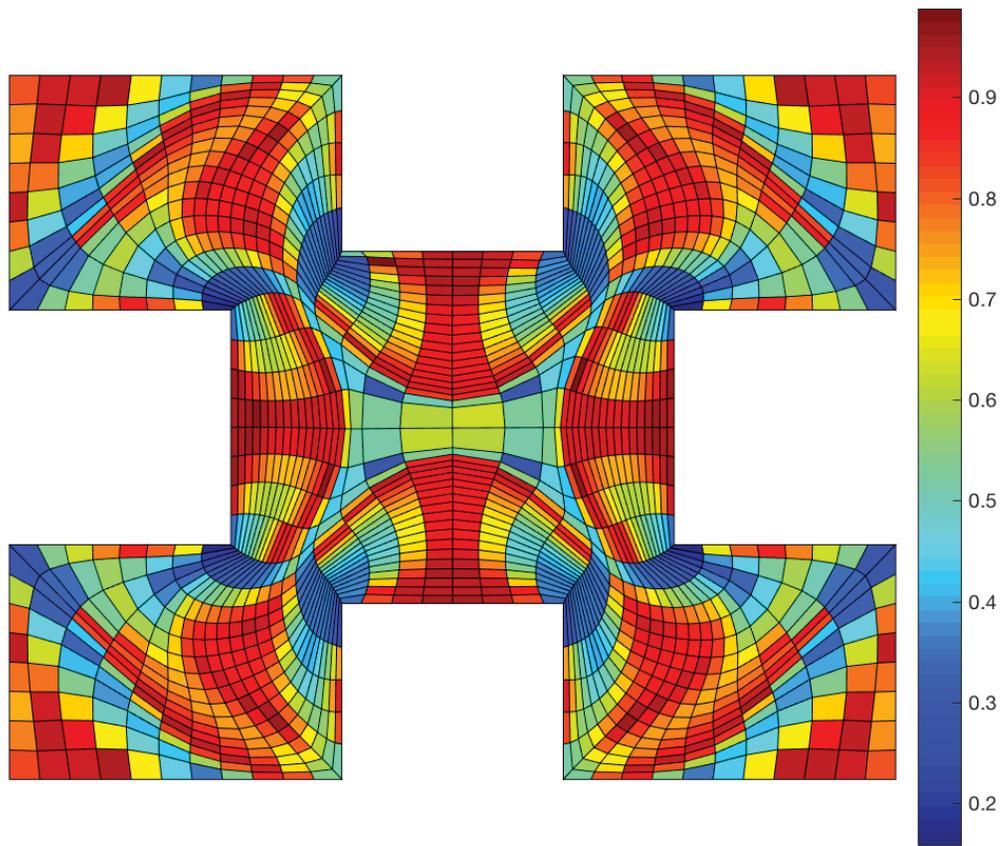


Figura B.29: Mapa de calidad para la medida Area II de 2015 con la cual detectamos paralelogramos.

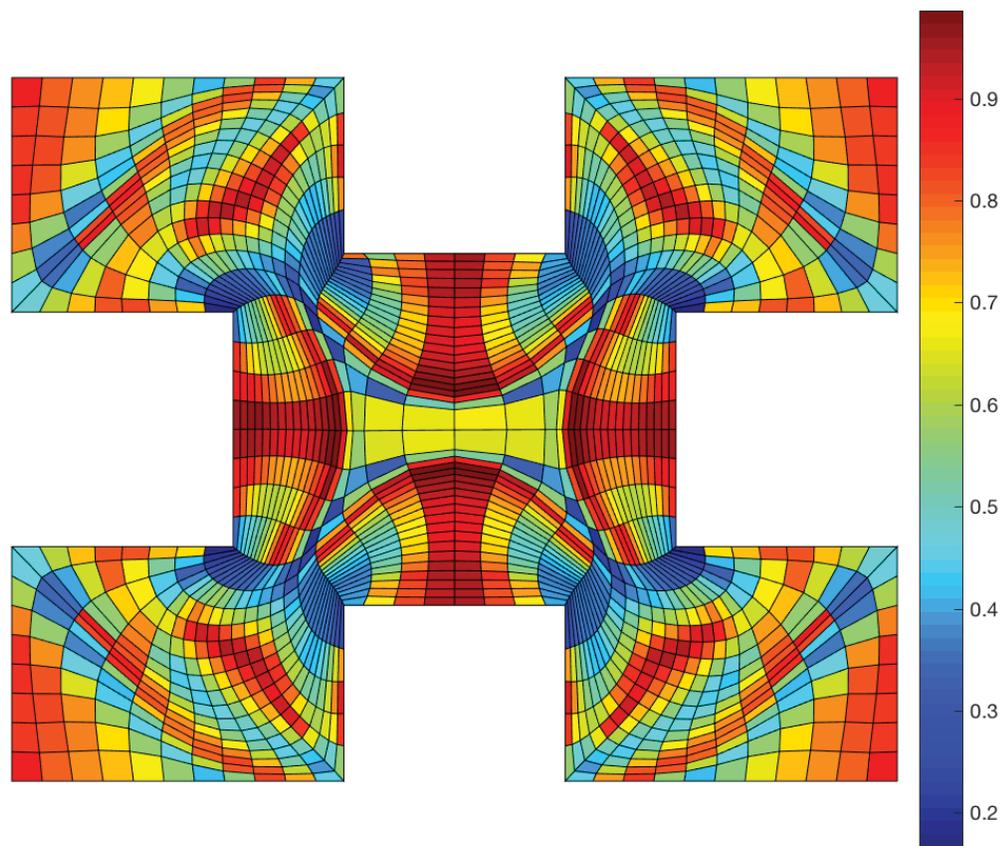


Figura B.30: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1989, con la cual detectamos rectángulos.

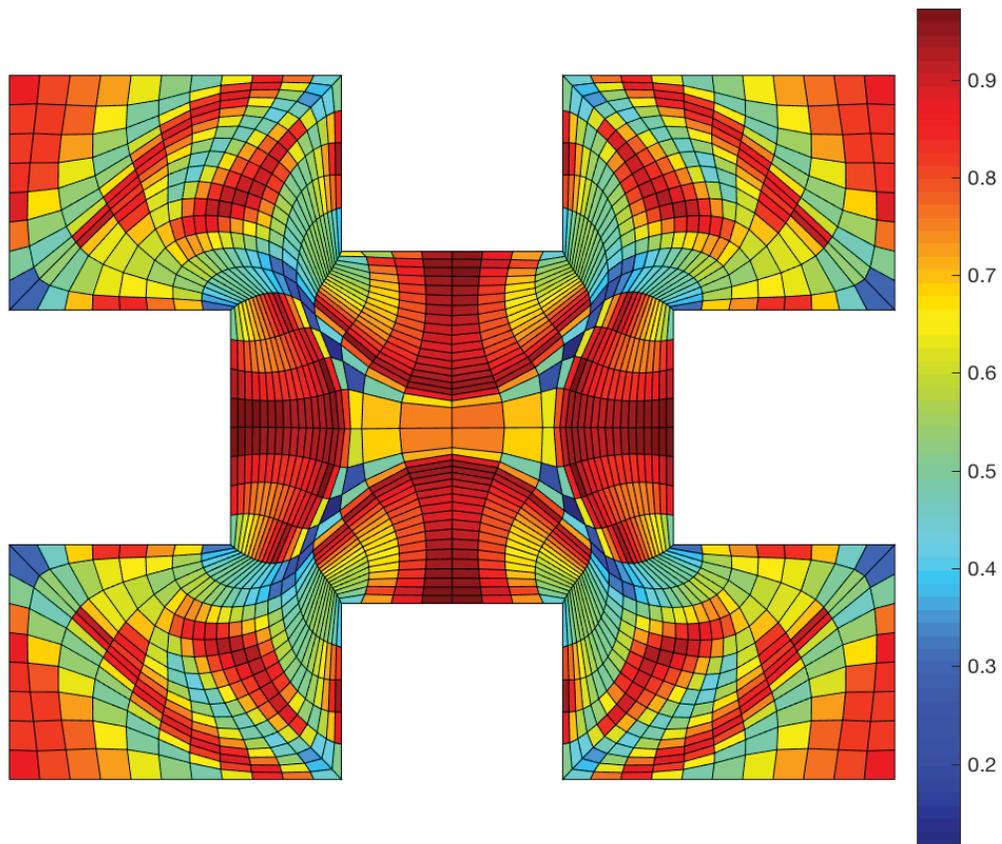


Figura B.31: Mapa de calidad para la medida basada en el rectángulo de área mínima: MinRect2015, con la cual detectamos rectángulos.

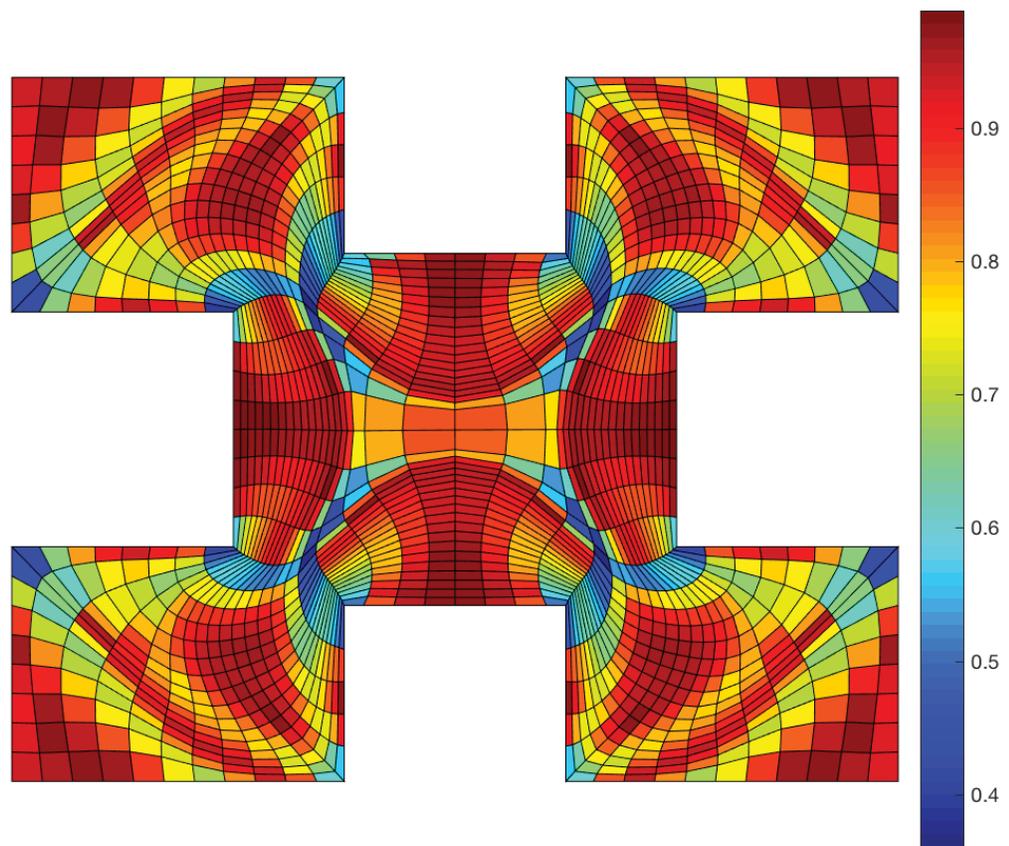


Figura B.32: Mapa de calidad para la medida Rectangles2015, con la cual detectamos rectángulos.

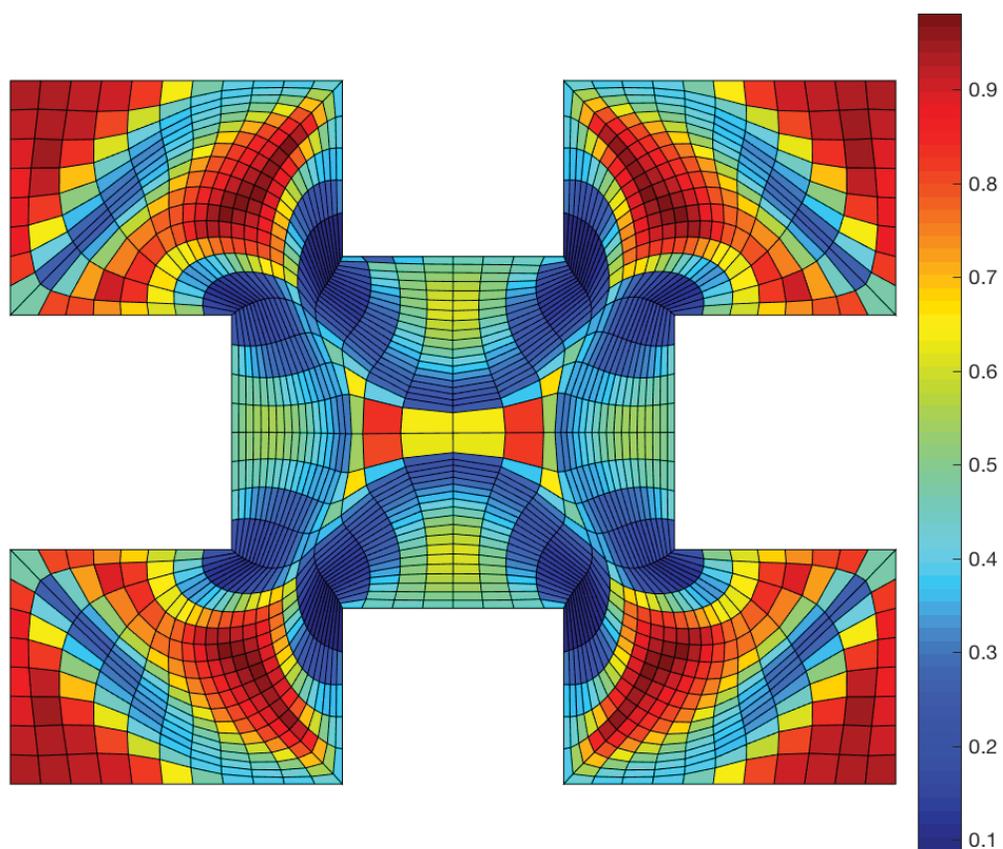


Figura B.33: Mapa de calidad para la medida de Lo de 1985, con la cual detectamos cuadrados.

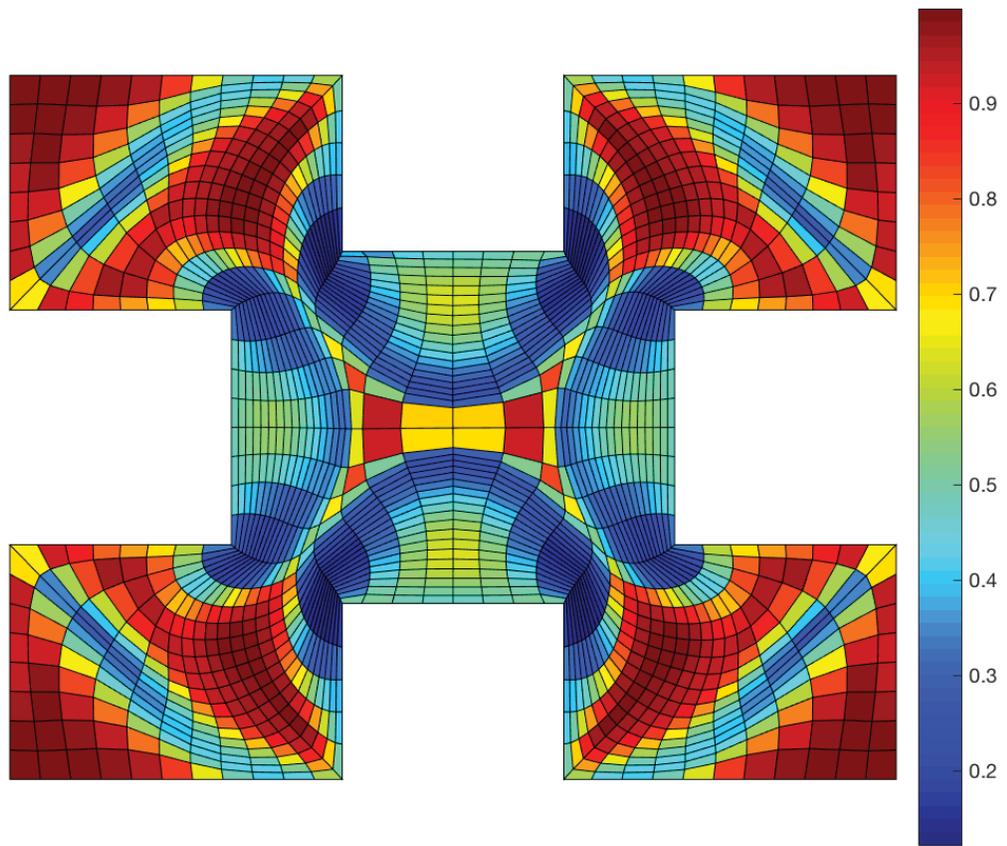


Figura B.34: Mapa de calidad para la medida de Hua de 1995, con la cual detectamos cuadrados.

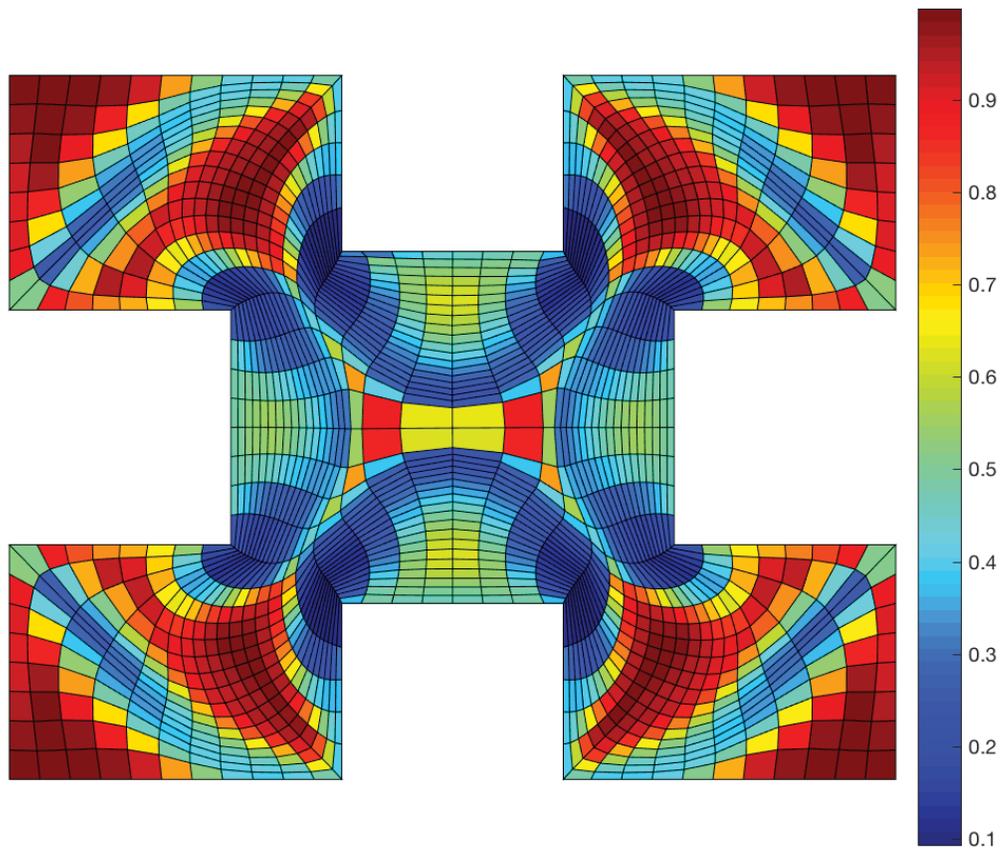


Figura B.35: Mapa de calidad para la medida de Knupp de 2000, con la cual detectamos cuadrados.

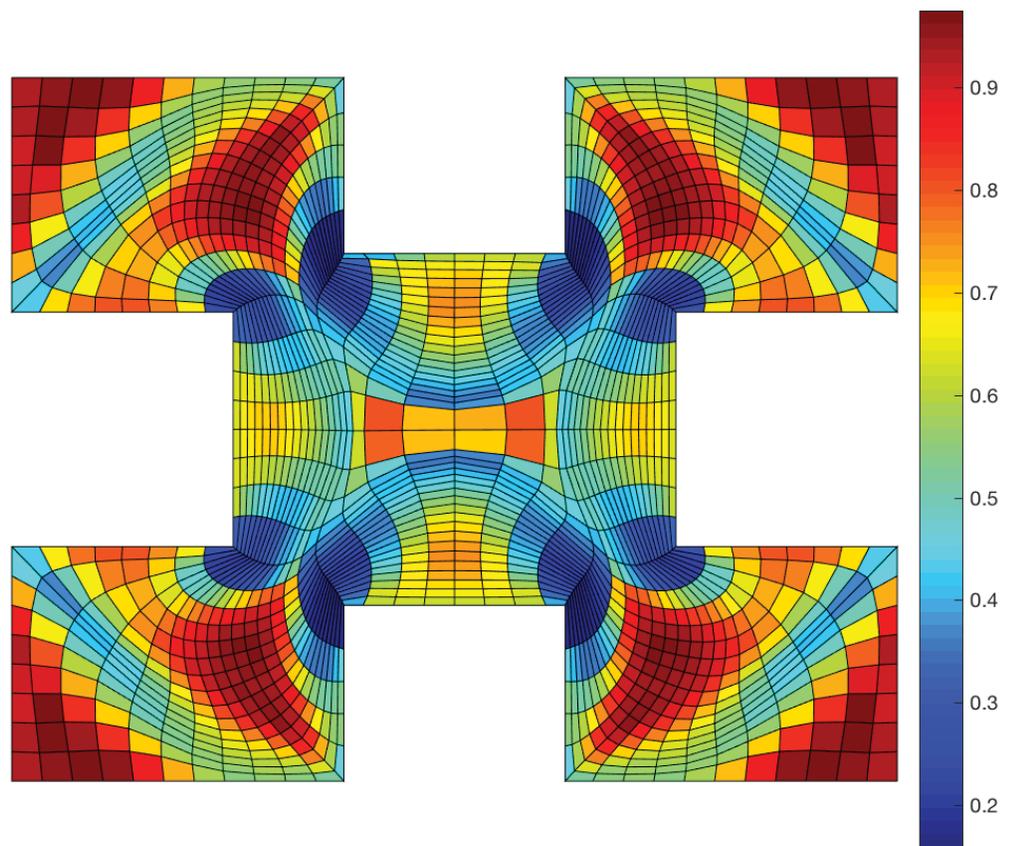


Figura B.36: Mapa de calidad para la medida de Pebay de 2002, con la cual detectamos cuadrados.

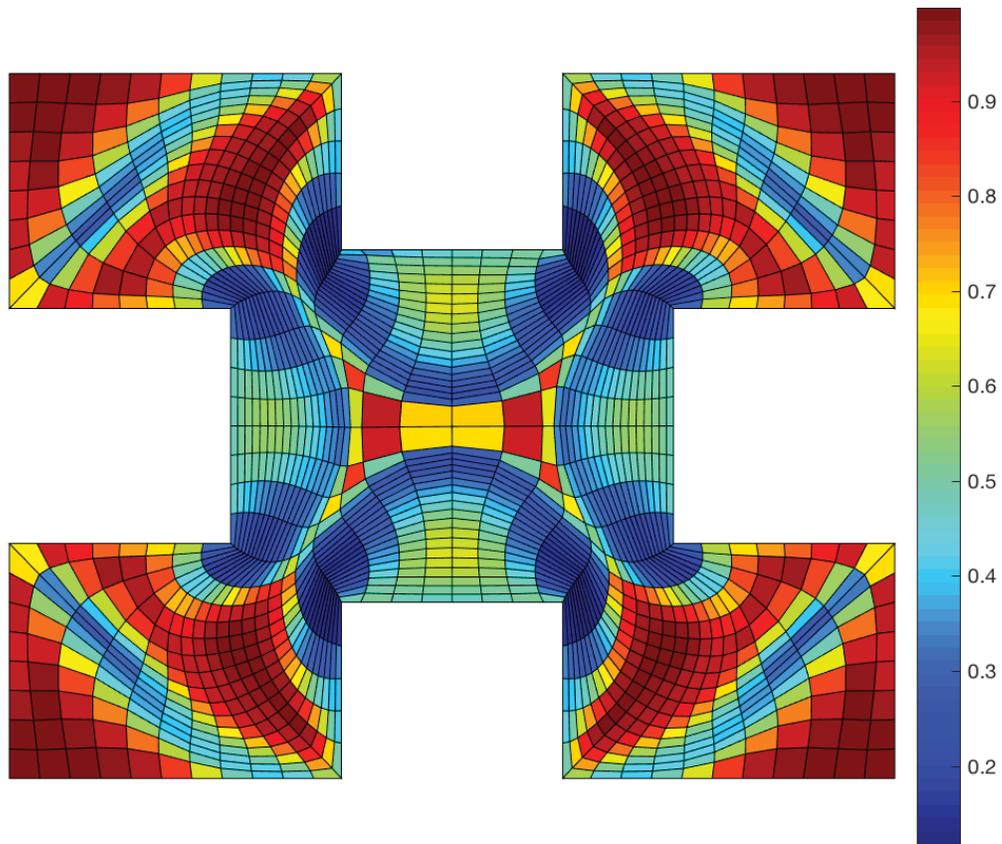


Figura B.37: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017 (*mean ratio*), basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo equilátero. Con esta medida detectamos cuadrados.

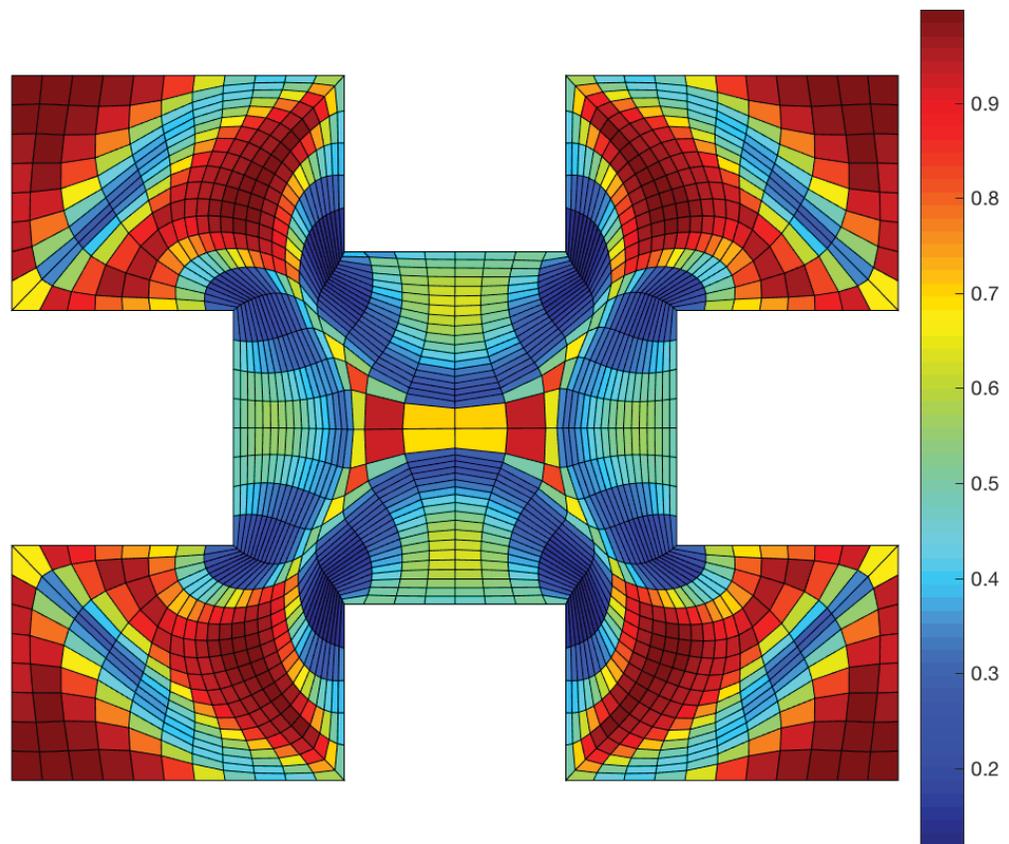


Figura B.38: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en el número de condición del mapeo lineal a un triángulo rectángulo isósceles. Con esta medida detectamos cuadrados.

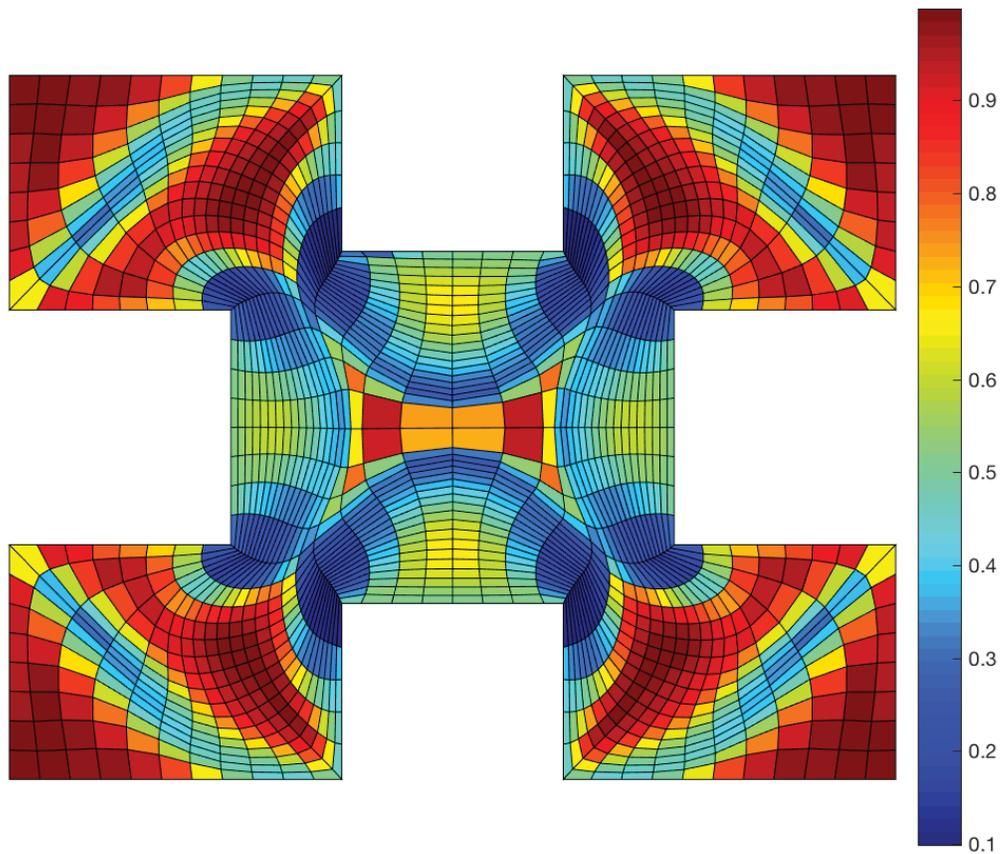


Figura B.39: Mapa de calidad para la medida Harmonic mean 2017, basada en la medida *radius ratio* para triángulos. Con esta medida detectamos cuadrados.

Apéndice C

Galería de mallas convexas

En este apéndice comparamos algunas mallas obtenidas combinando el funcional convexo de área $S_{\omega,\epsilon}(G)$ con el funcional clásico de área-ortogonalidad F_{AO} , [186], y aquellas obtenidas con los funcionales discretos para obtener rectángulos formulados en el Capítulo 5:

El segundo bloque lo forman los funcionales obtenidos usando

$$F(G) = \sigma S_{\omega,\epsilon}(G) + (1 - \sigma)F_{Rd}(G) \quad (\text{C.1})$$

Para un elemento Q , $F_{Rd}(Q)$ es de la forma

$$F_{Rd}(Q) = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - 4a_C^2$$

También comparamos los resultados obtenidos usando el cociente

$$F_{Rd}(Q) = \frac{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}{4a_C^2}$$

El tercer bloque está formado por las mallas obtenidas optimizando

$$F(G) = \sigma S_{\omega,\epsilon}(G) + (1 - \sigma)F_{Ra}(G) \quad (\text{C.2})$$

donde

$$F_{Ra}(G) = F_p(G) + \beta F_d(G)$$

donde F_p es el funcional que busca en el óptimo a elementos paralelogramos y F_d ajusta el tamaño de las diagonales.

A pesar de la irregularidad de las regiones que empleamos, todas las mallas obtenidas son ϵ -convexas, para $\epsilon = 10^{-5}$.

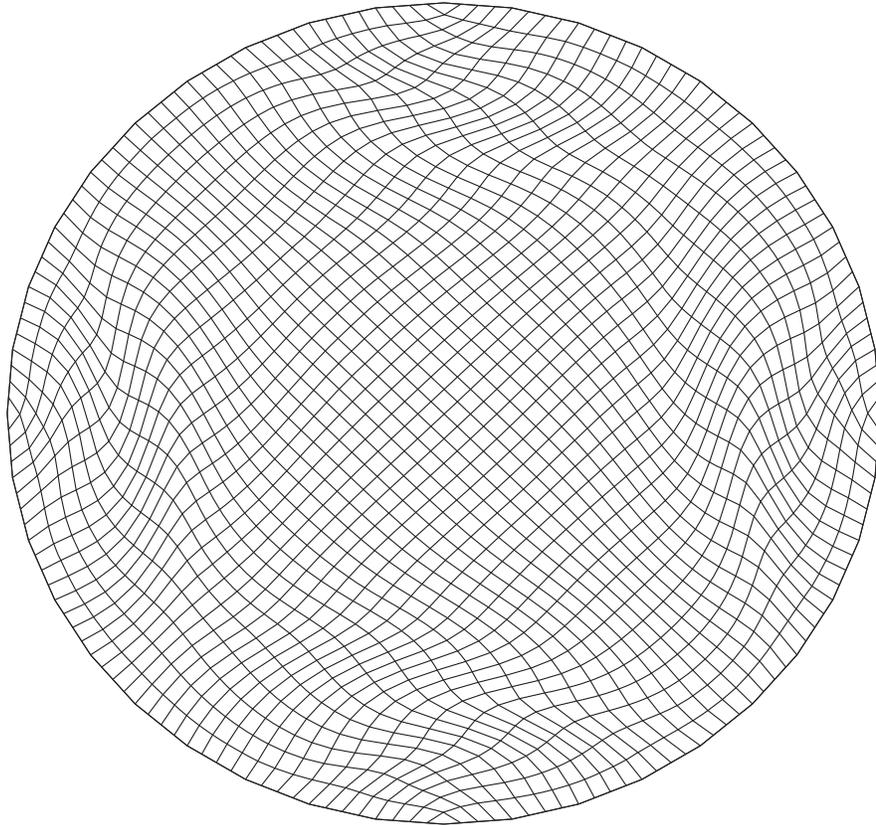


Figura C.1: Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

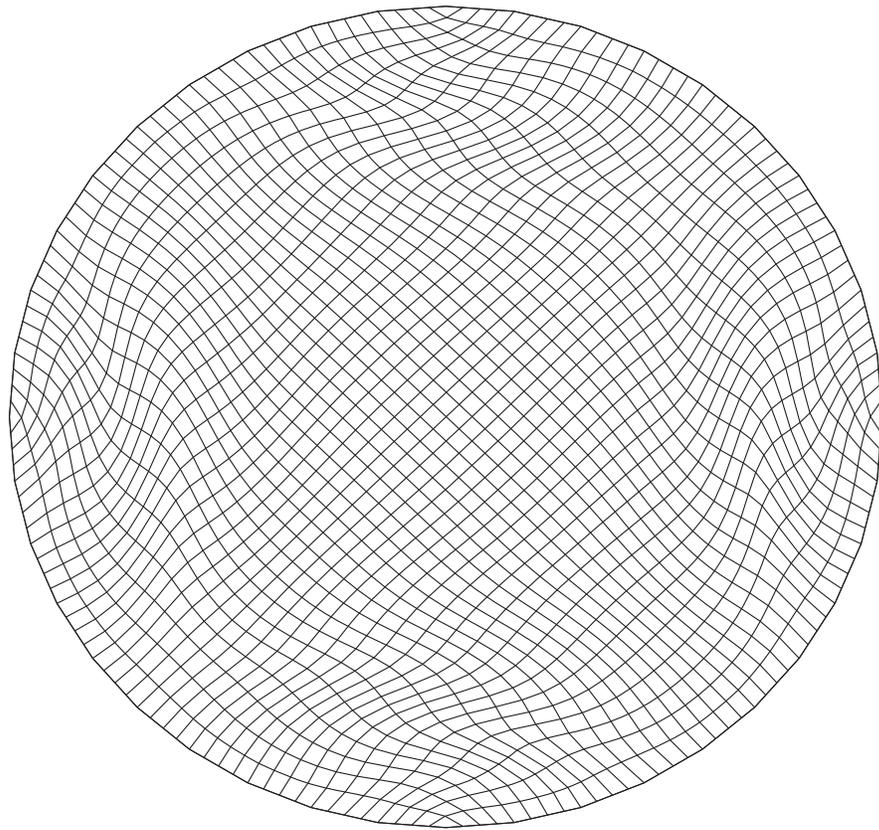


Figura C.2: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

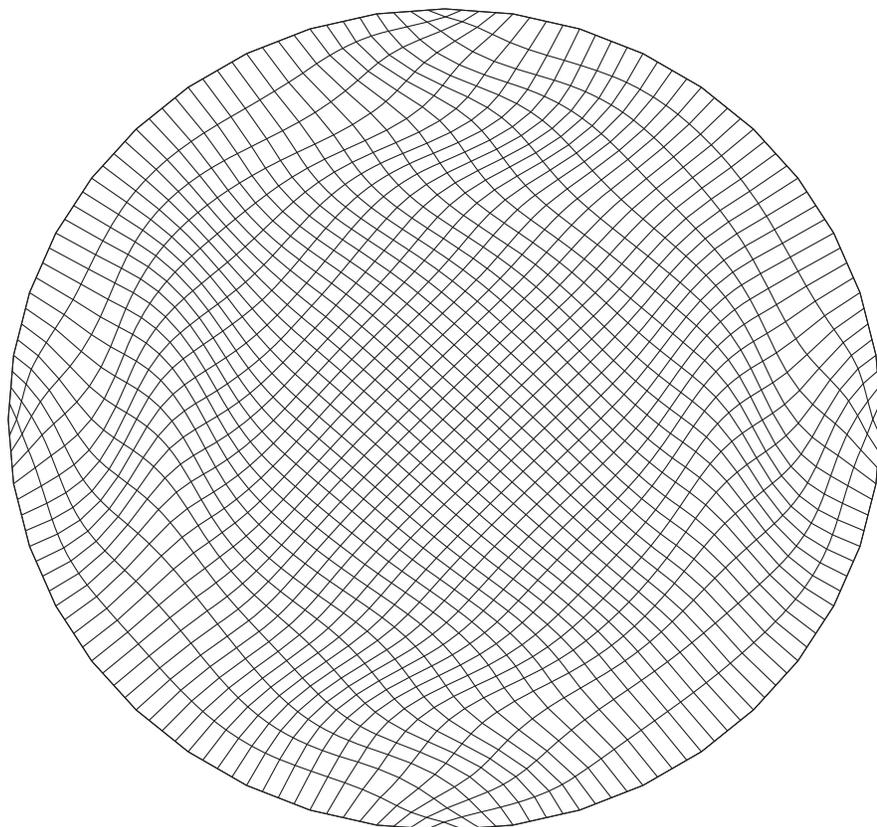


Figura C.3: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

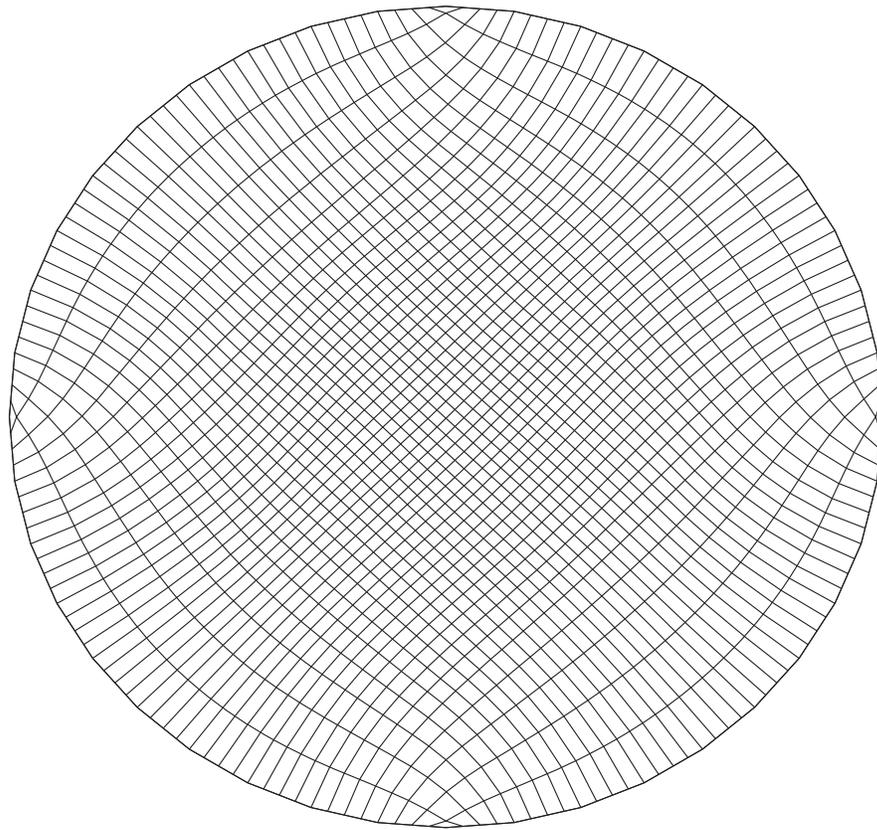


Figura C.4: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

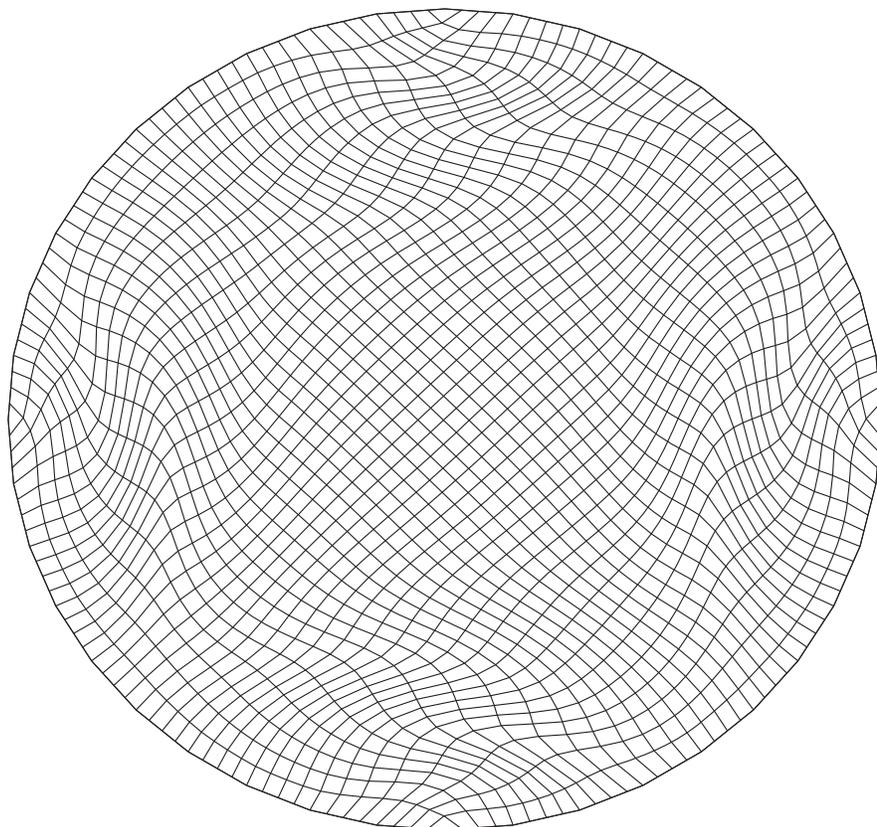


Figura C.5: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

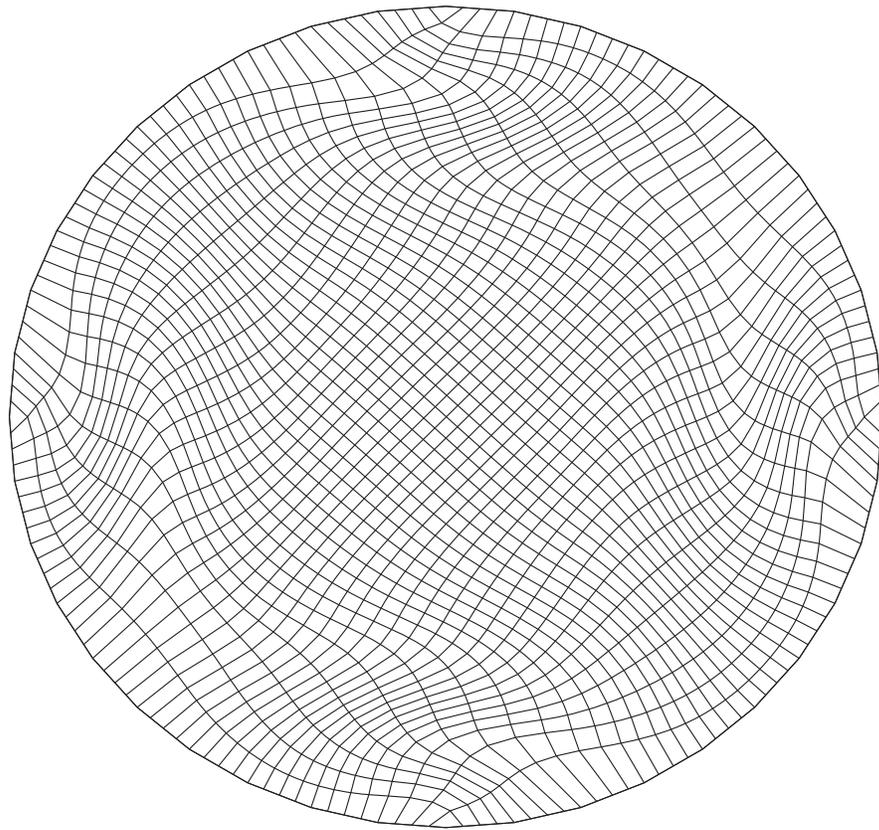


Figura C.6: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

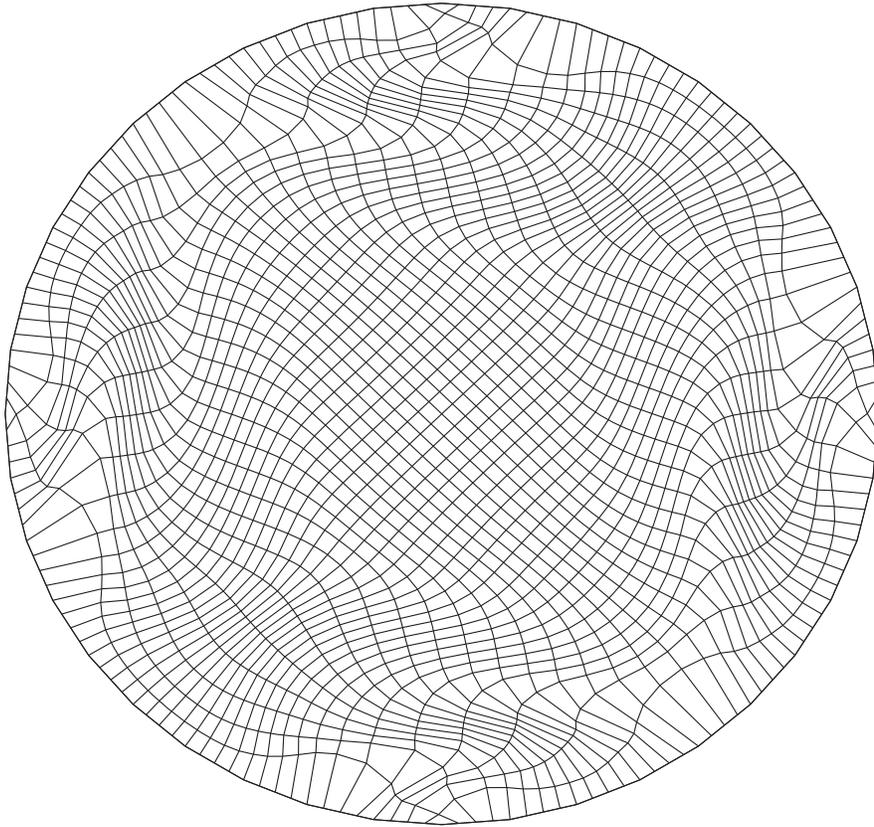


Figura C.7: Cirunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

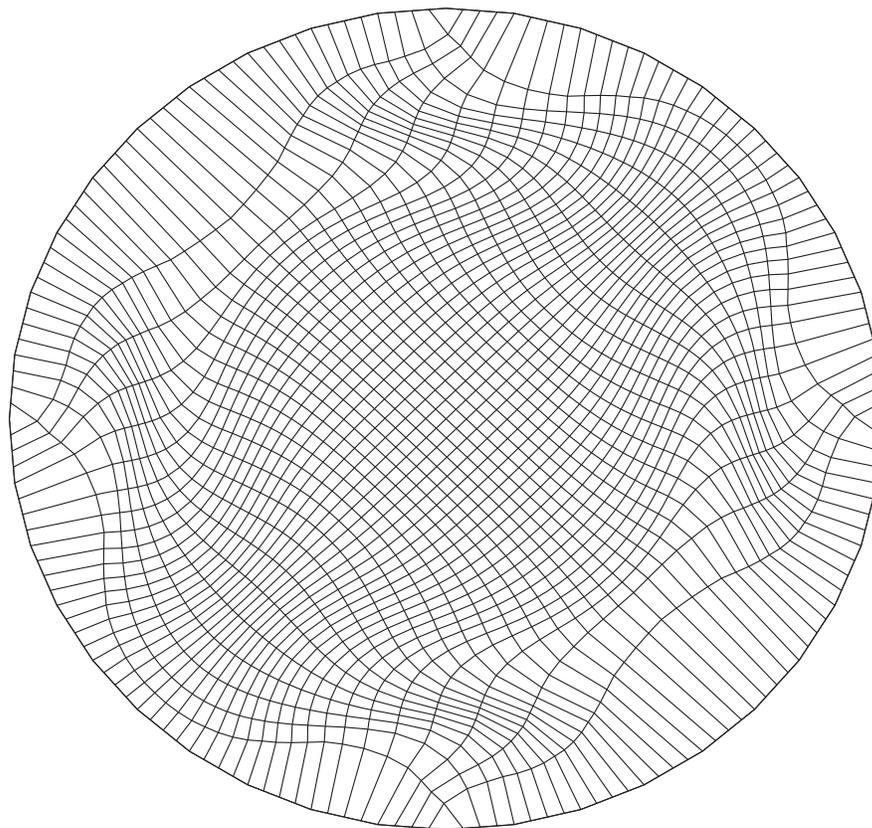


Figura C.8: Circunferencia, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

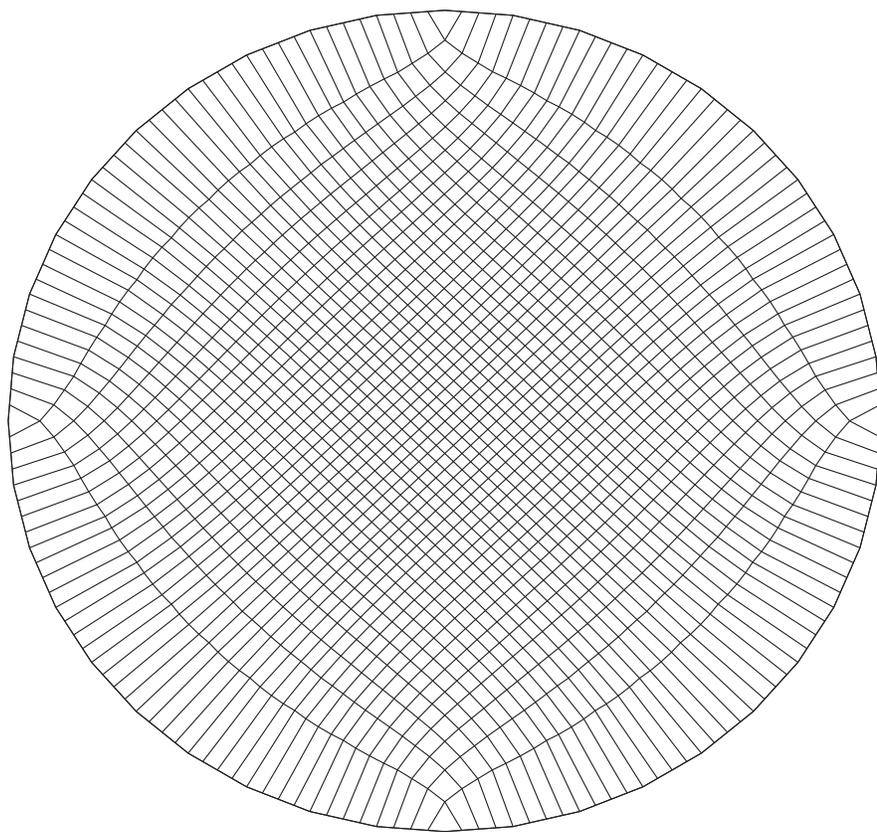


Figura C.9: Circunferencia, 41 puntos por lado, obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

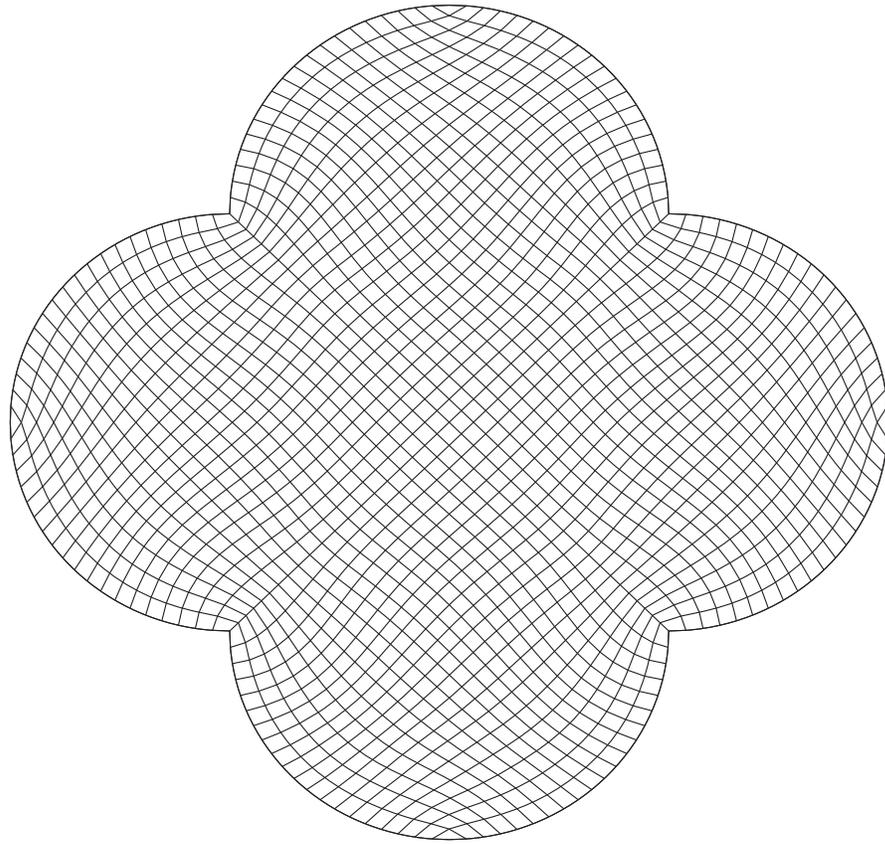


Figura C.10: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

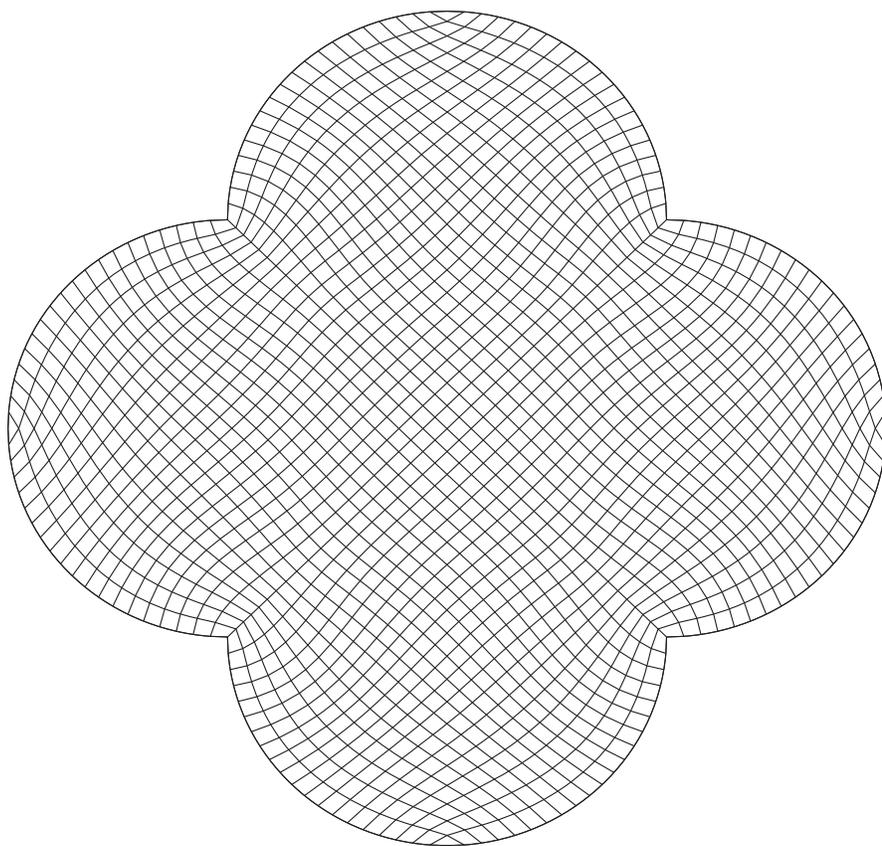


Figura C.11: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

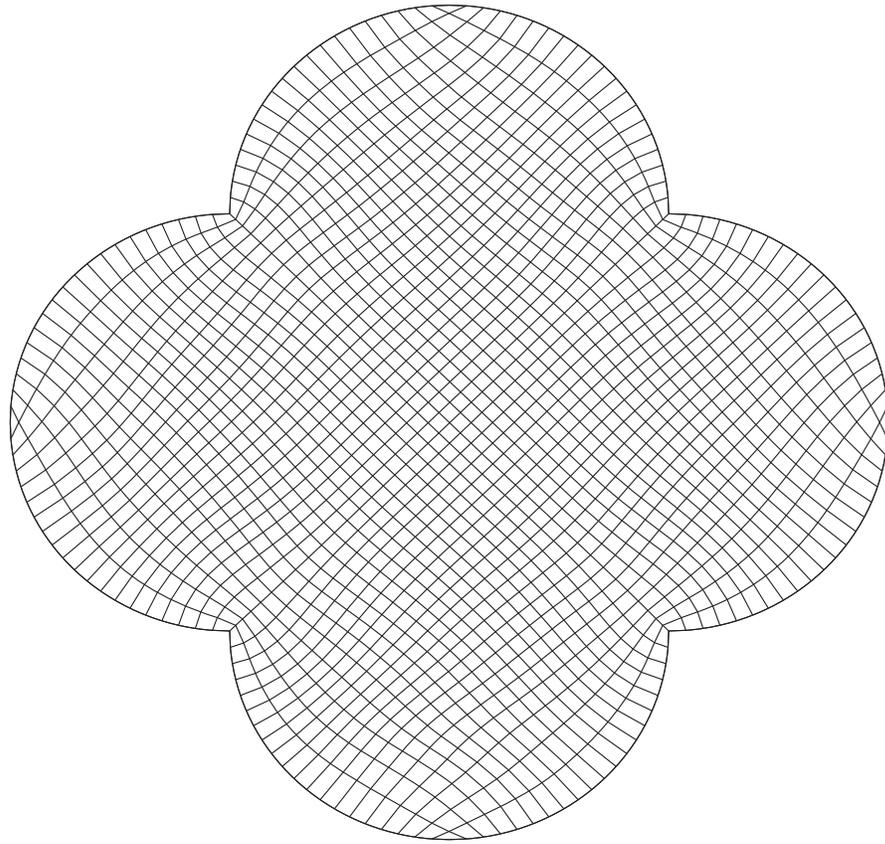


Figura C.12: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

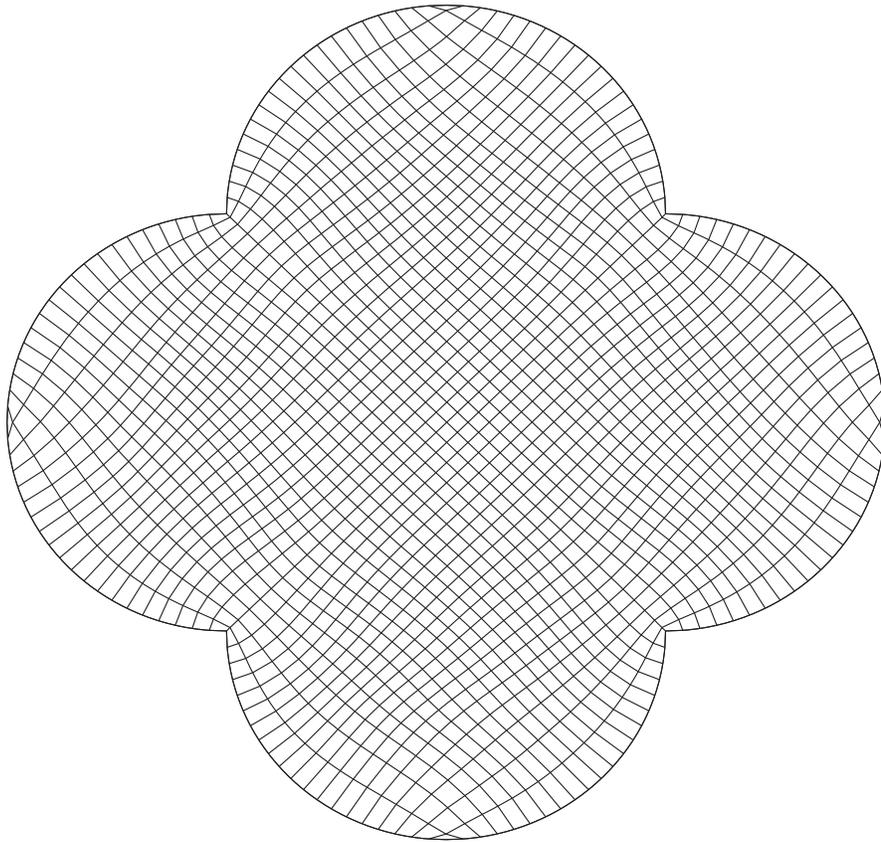


Figura C.13: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

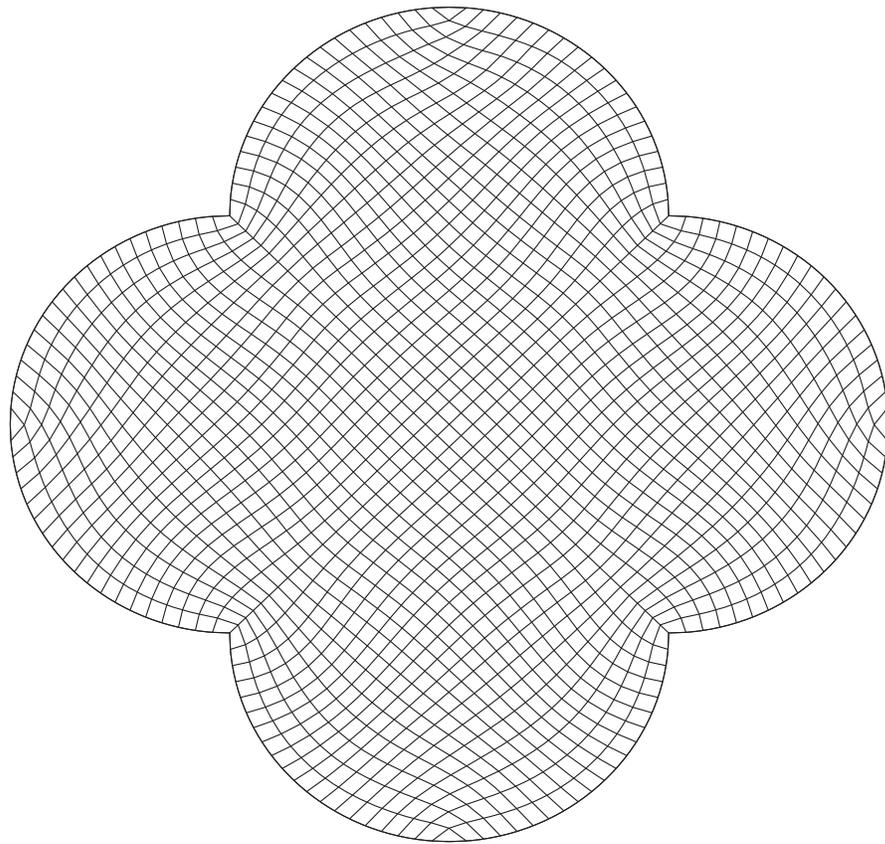


Figura C.14: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

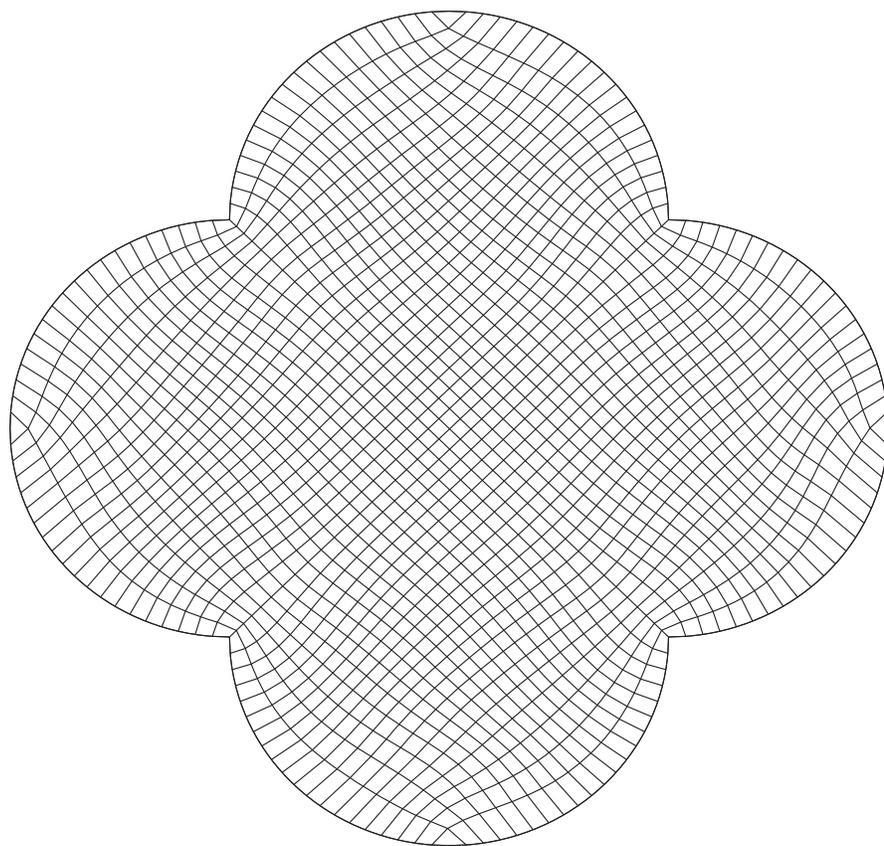


Figura C.15: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

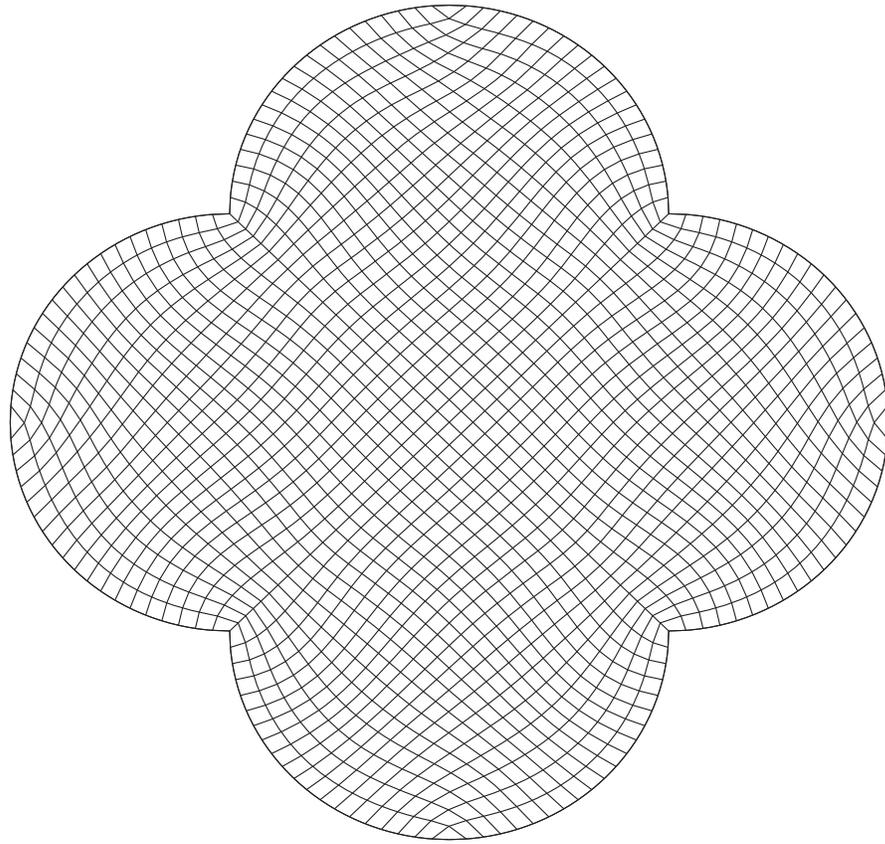


Figura C.16: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

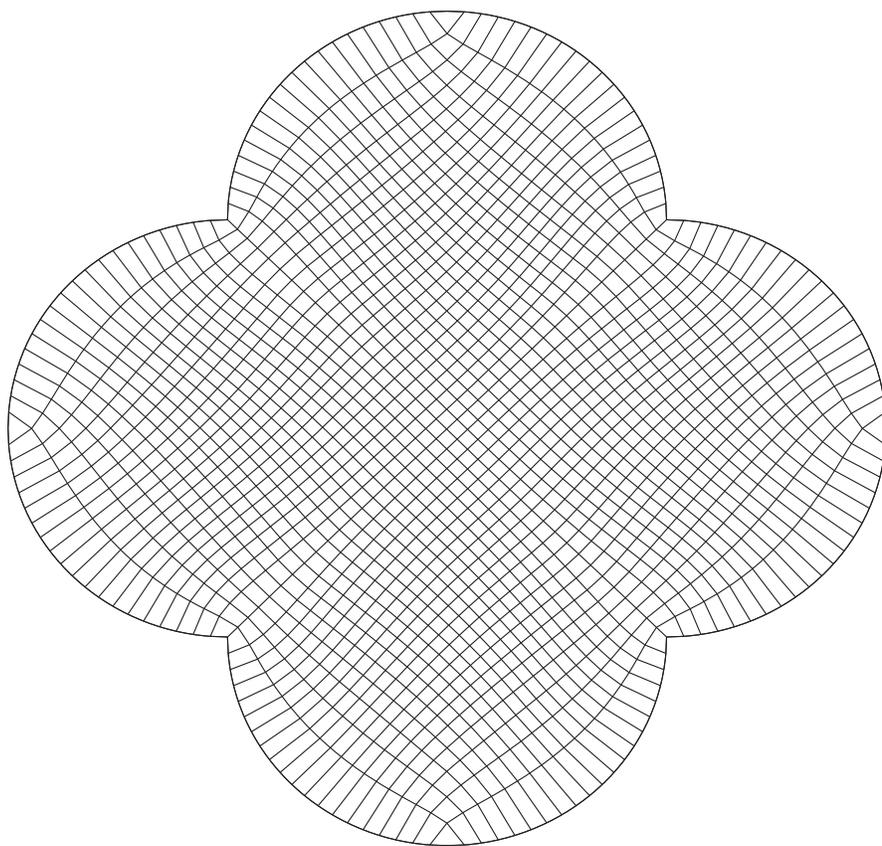


Figura C.17: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega,\epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$, usando la versión cociente del funcional.

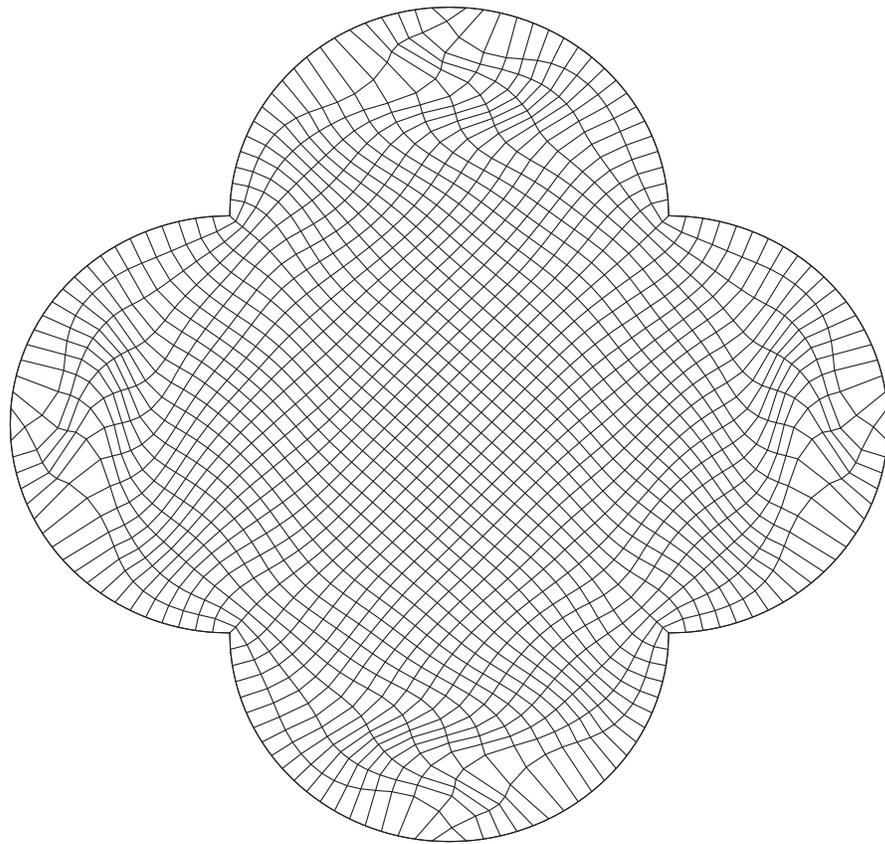


Figura C.18: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

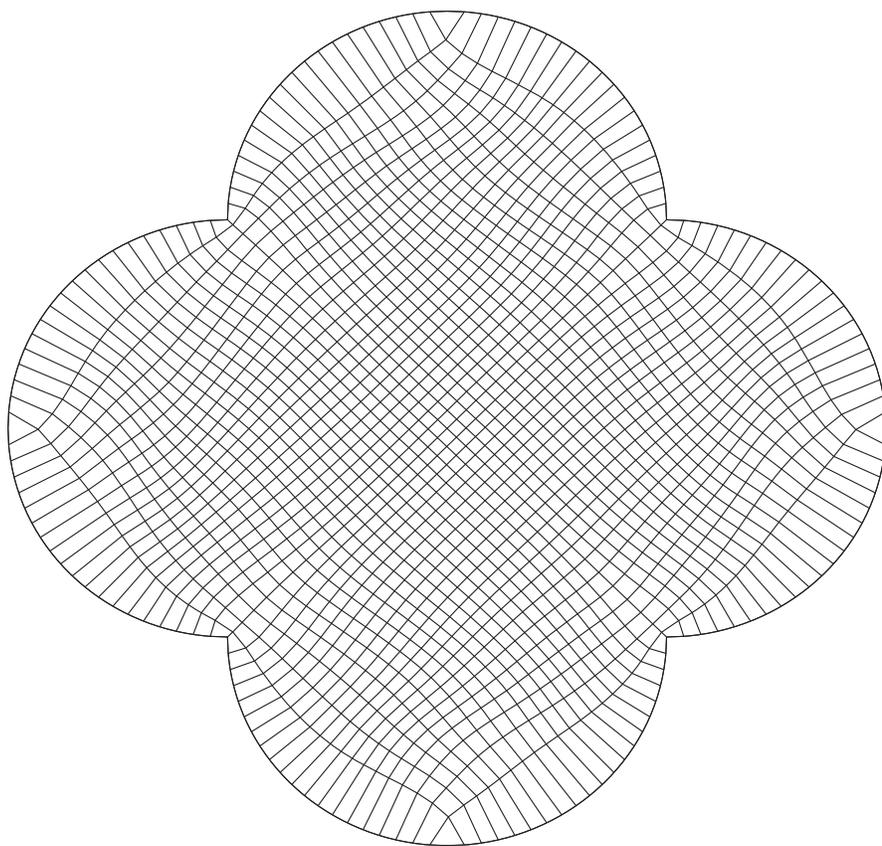


Figura C.19: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

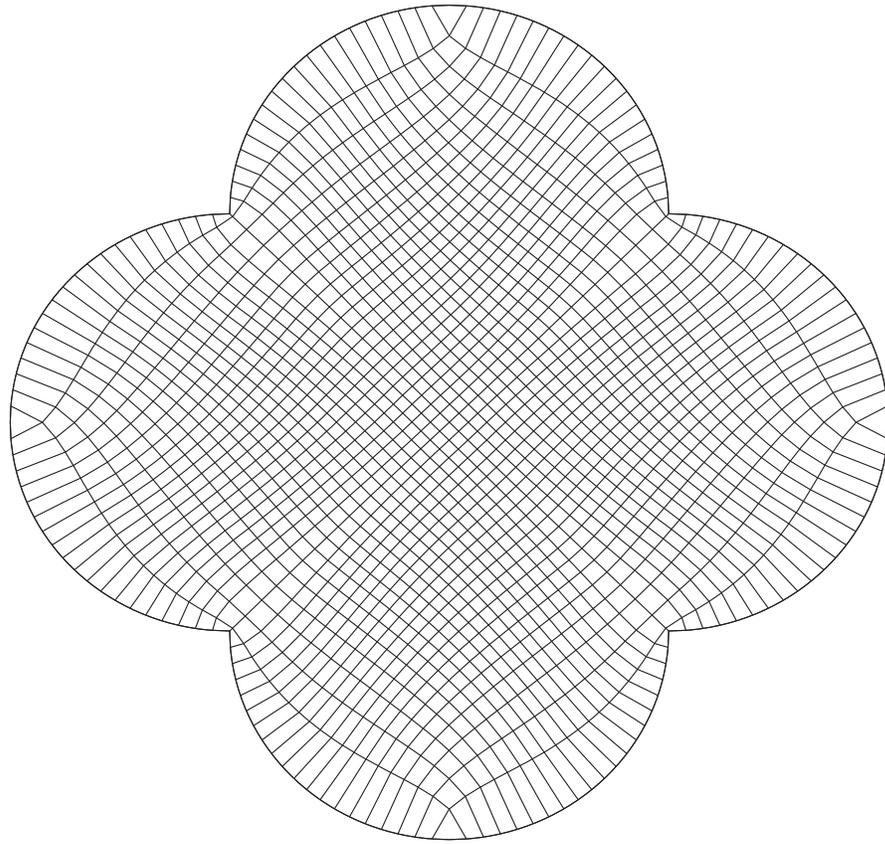


Figura C.20: Rosa, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

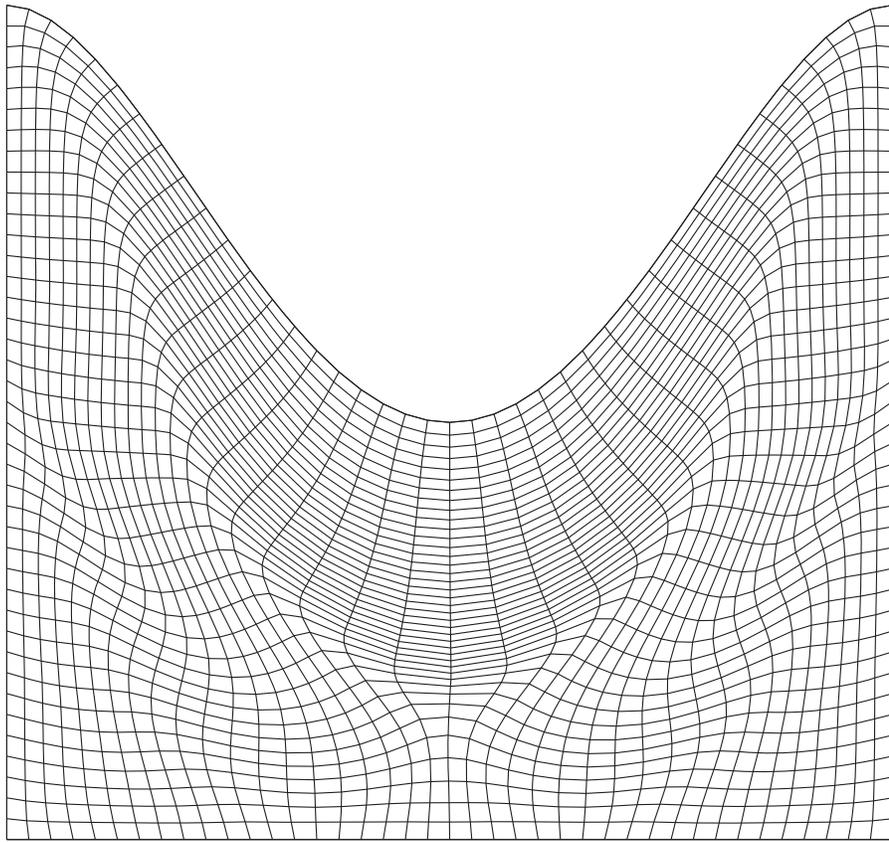


Figura C.21: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

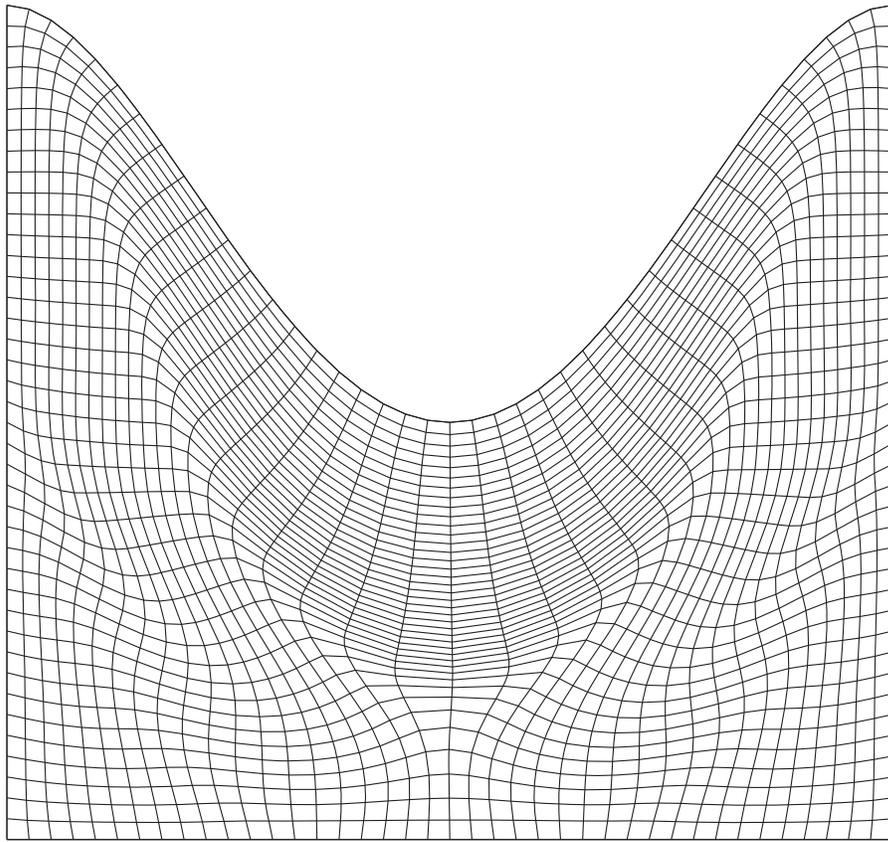


Figura C.22: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

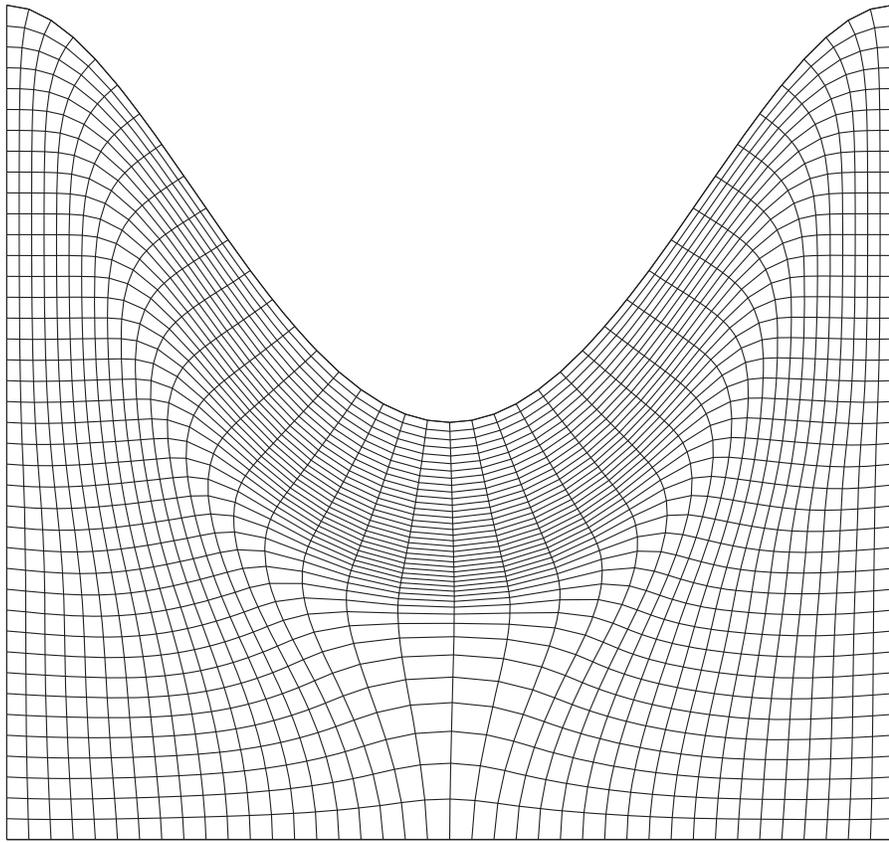


Figura C.23: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

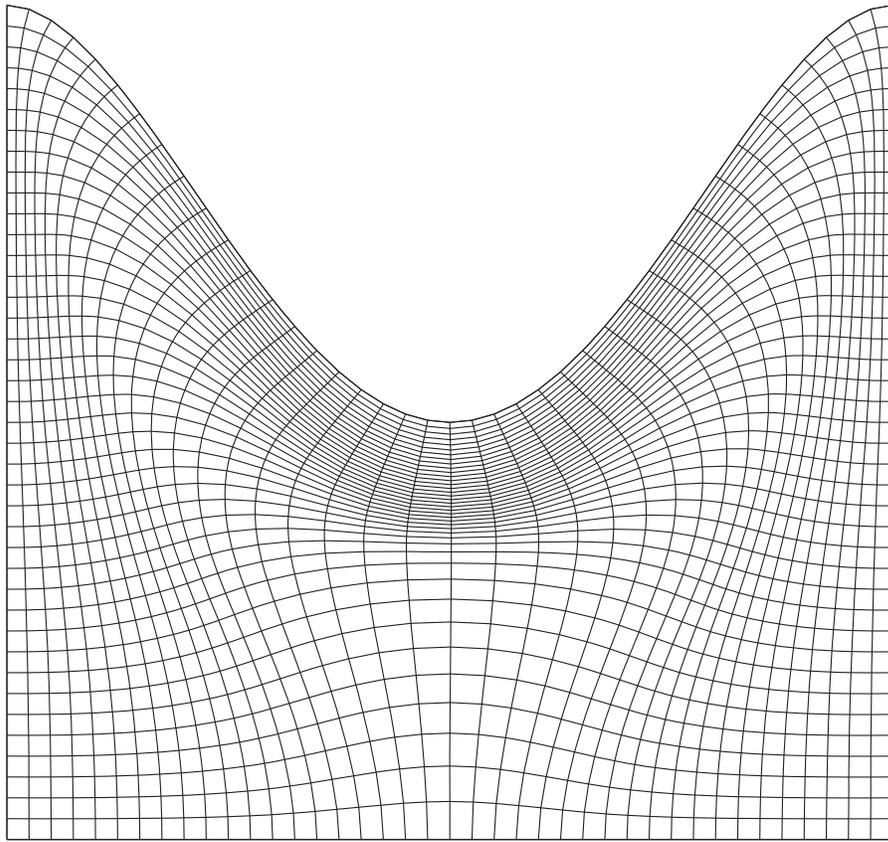


Figura C.24: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

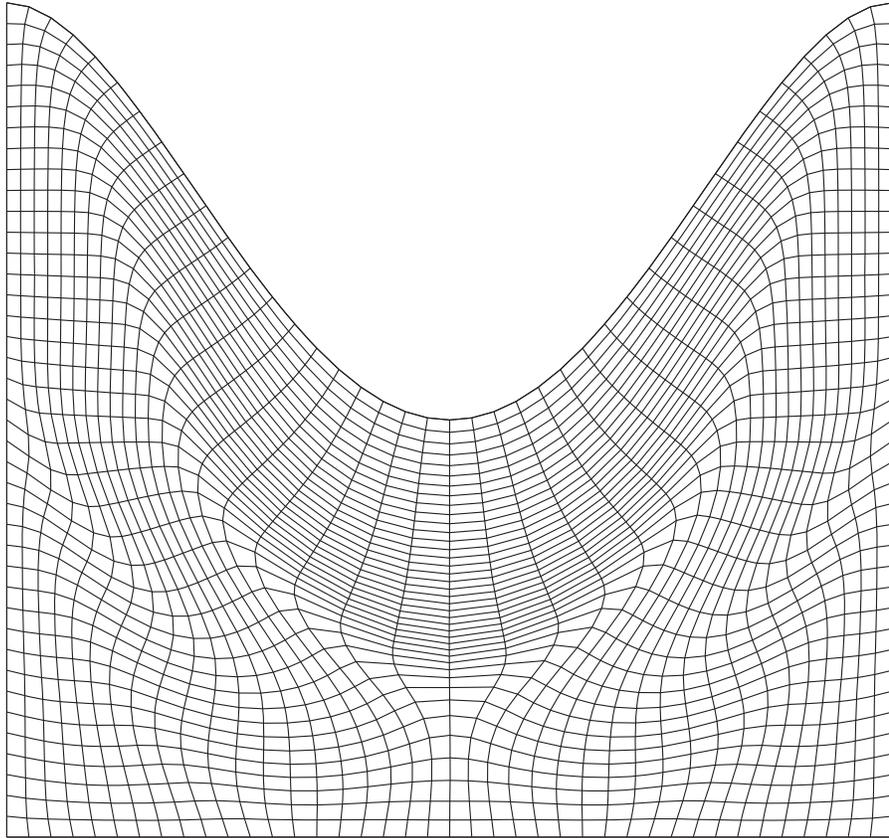


Figura C.25: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

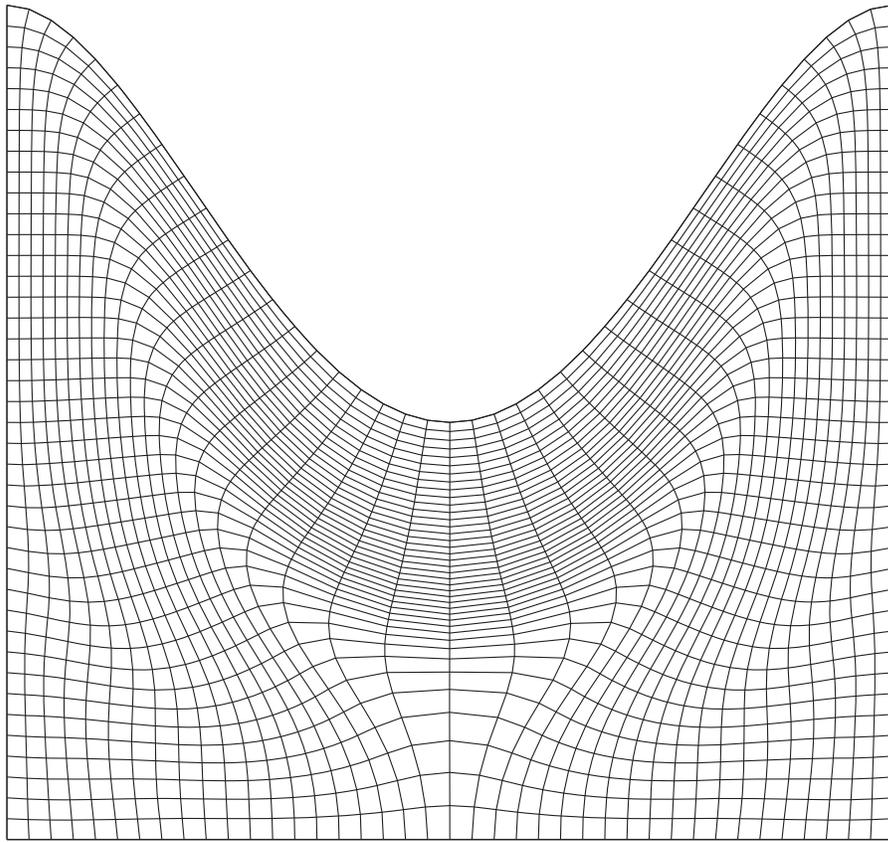


Figura C.26: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

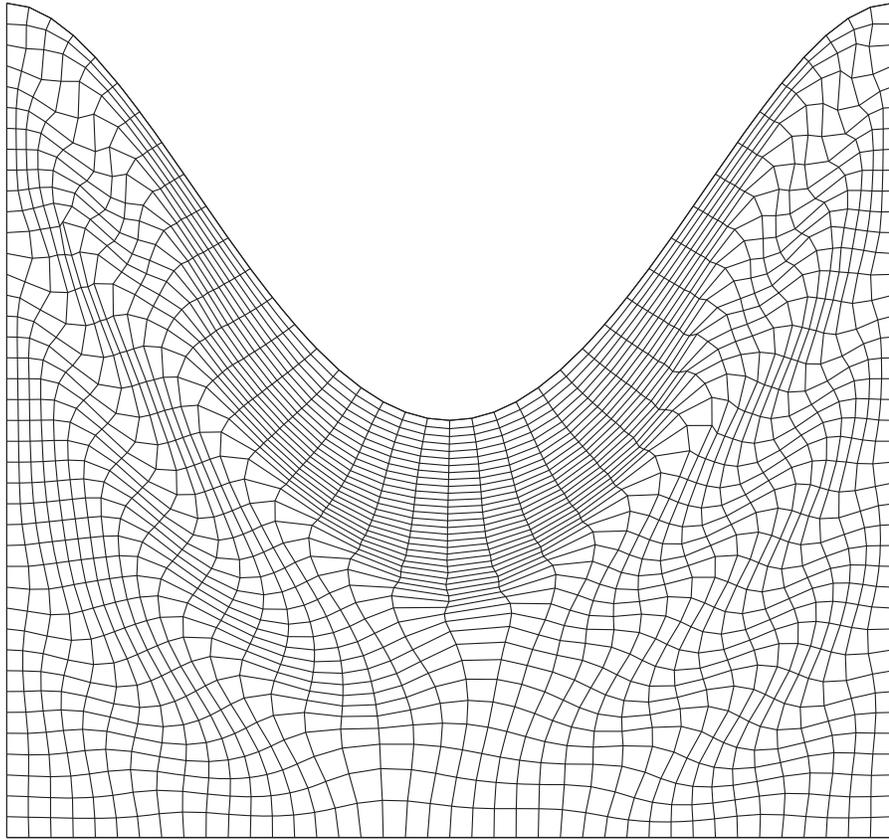


Figura C.27: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

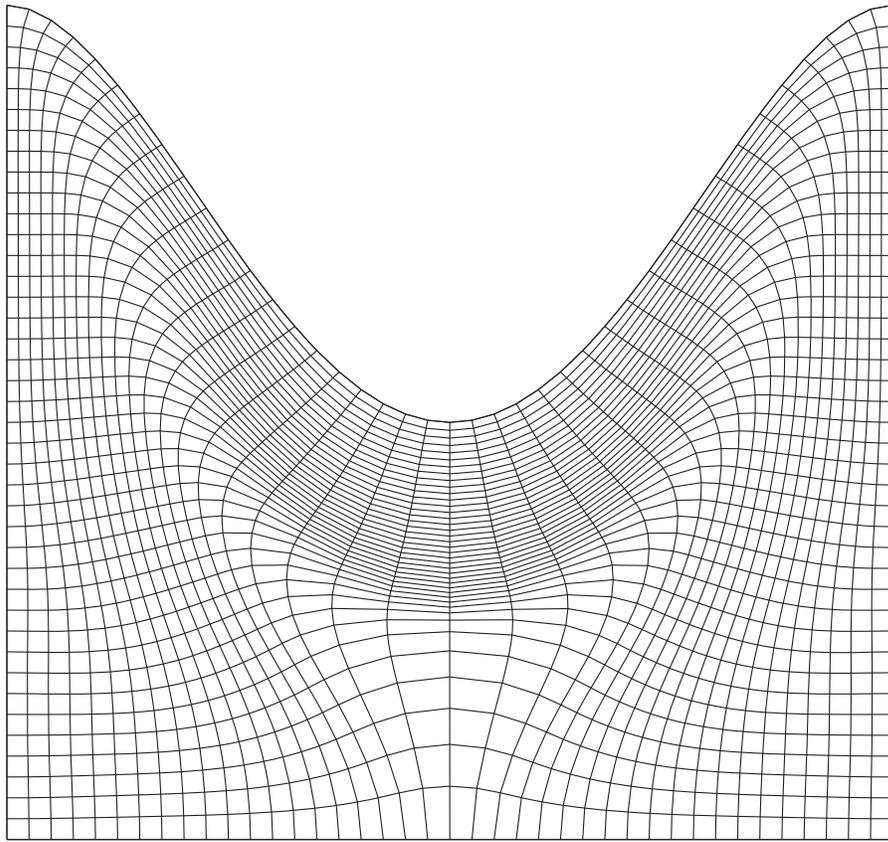


Figura C.28: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

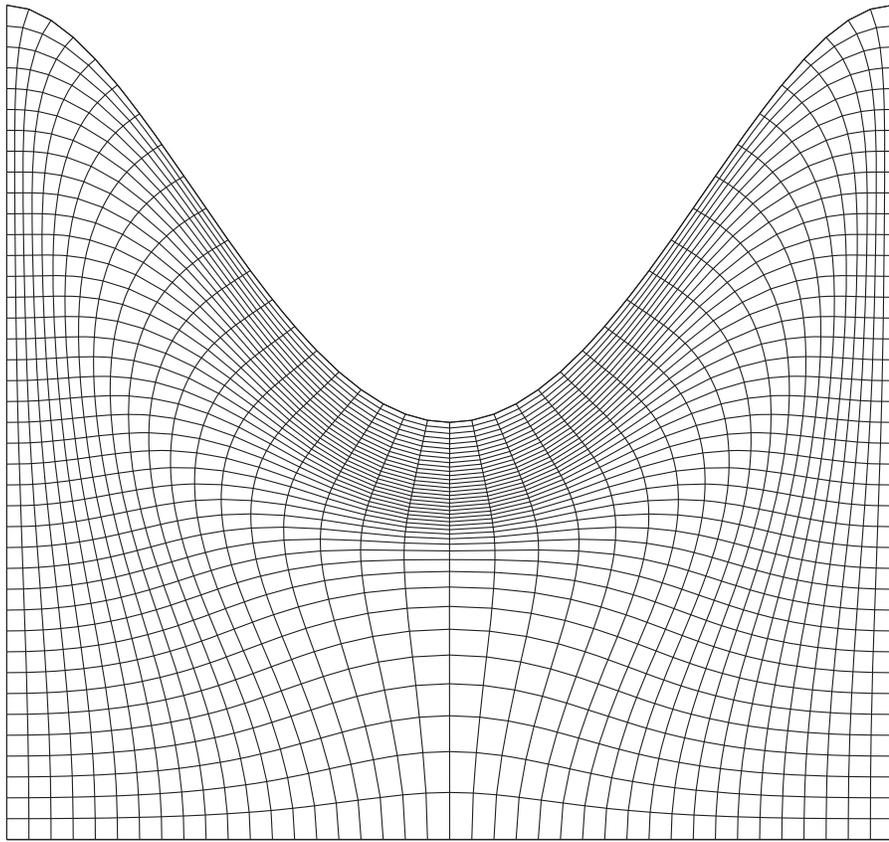


Figura C.29: Domo, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

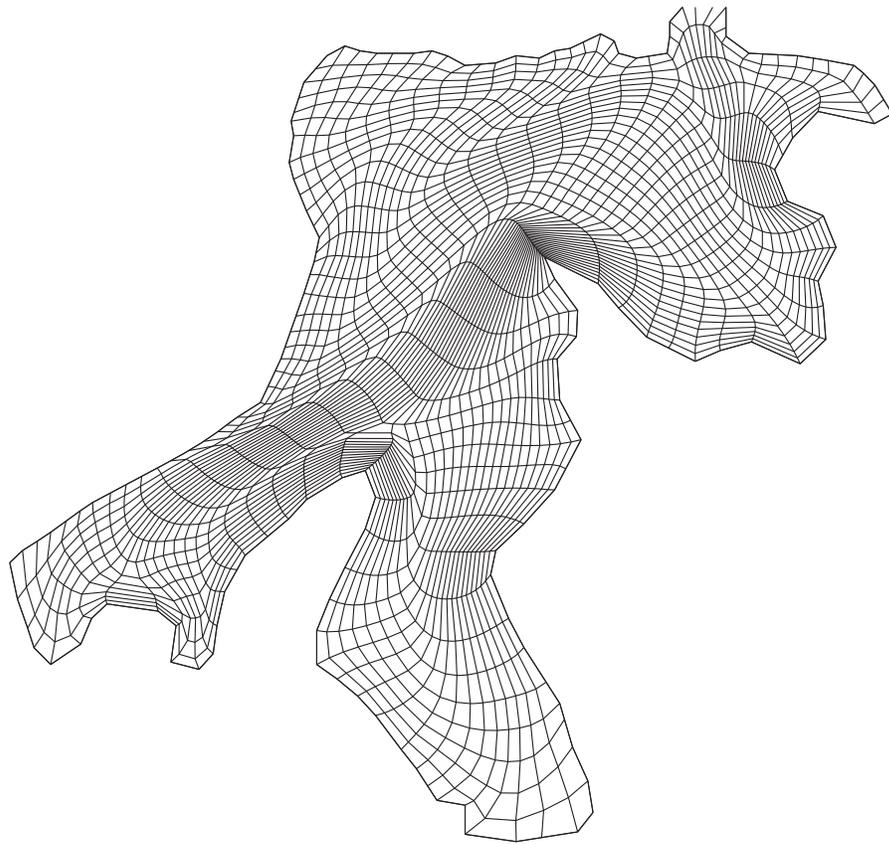


Figura C.30: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

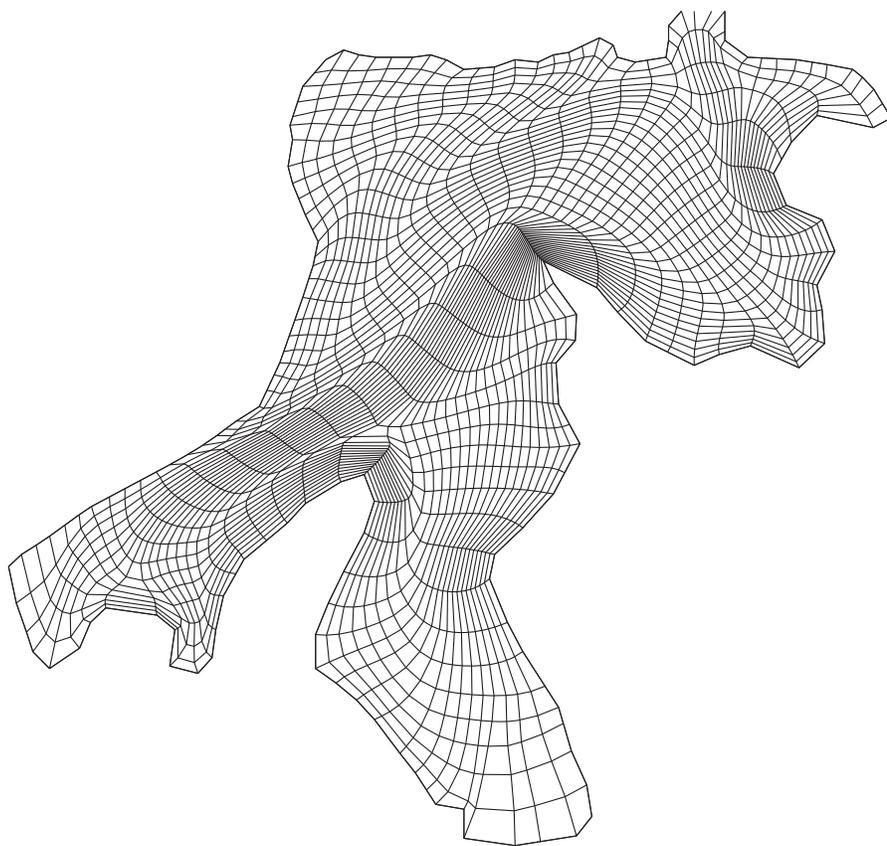


Figura C.31: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

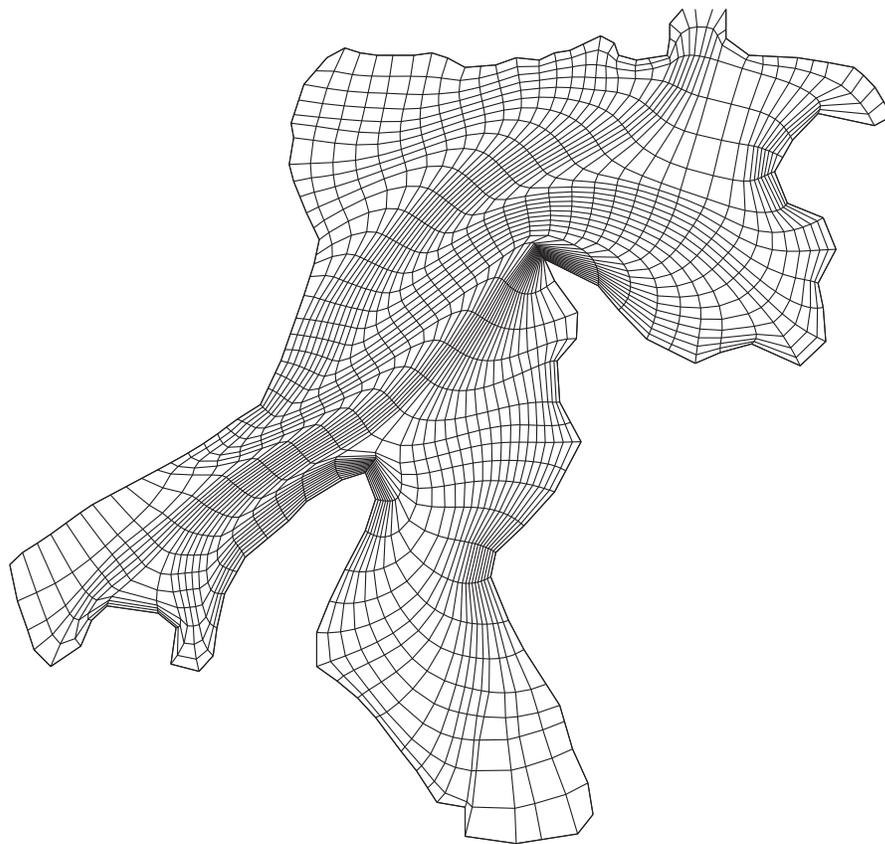


Figura C.32: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

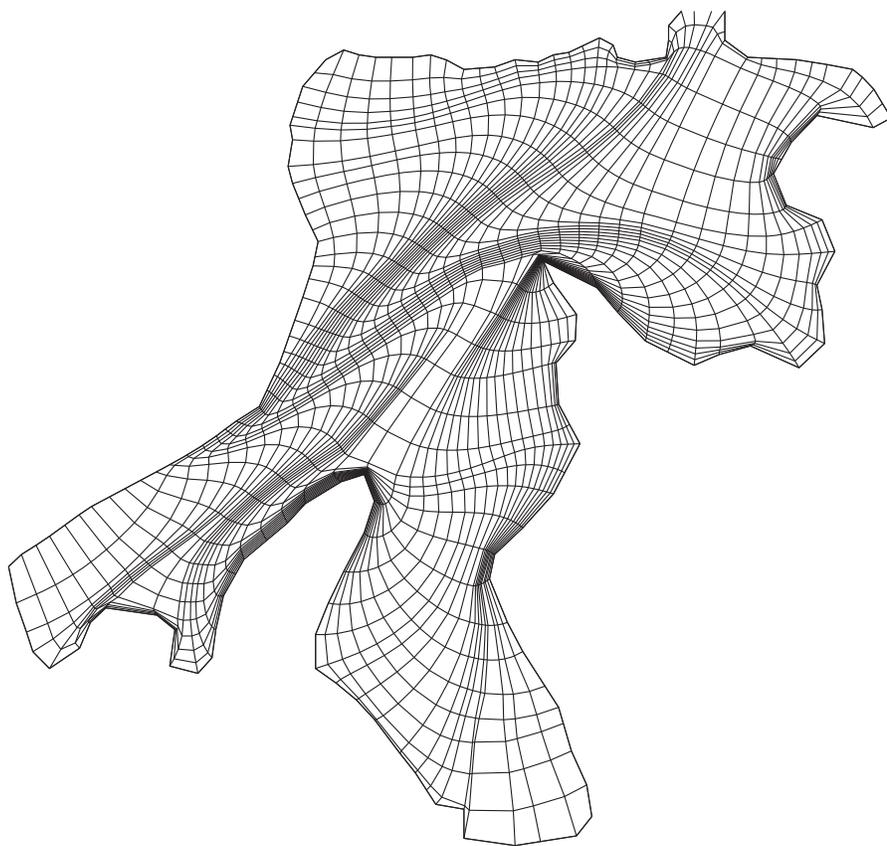


Figura C.33: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

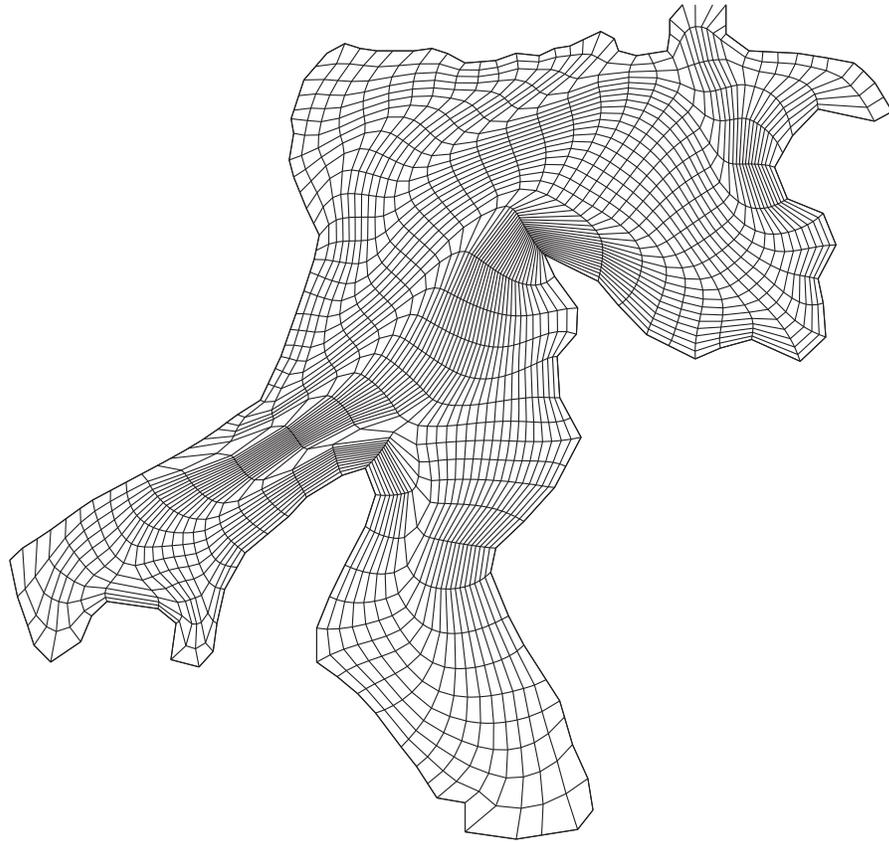


Figura C.34: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

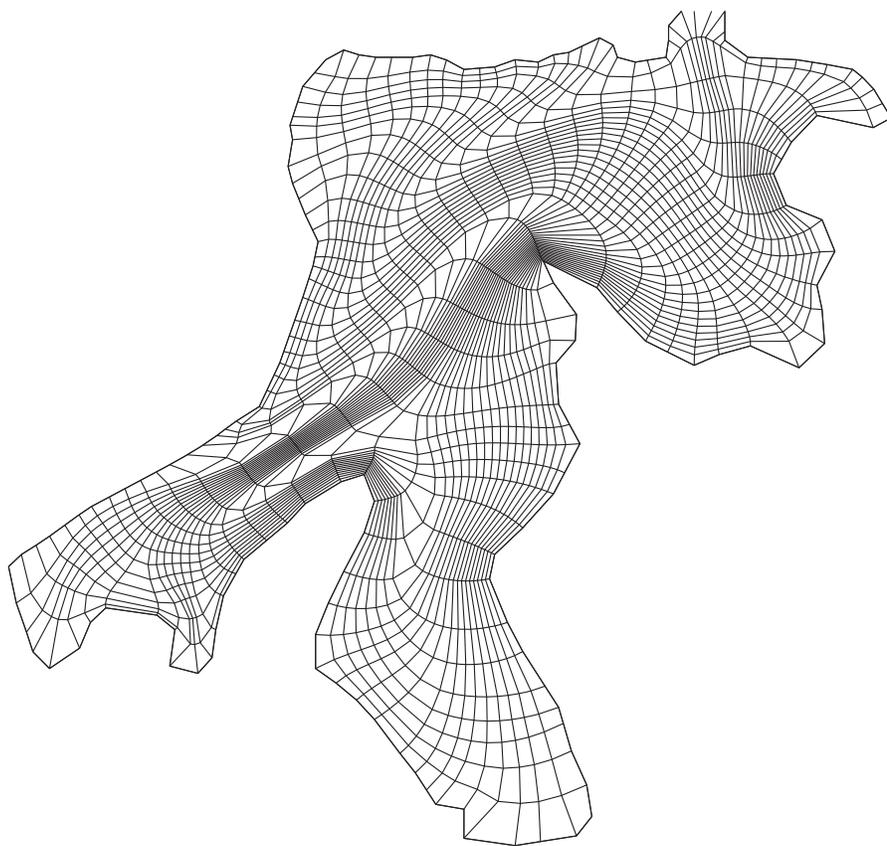


Figura C.35: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

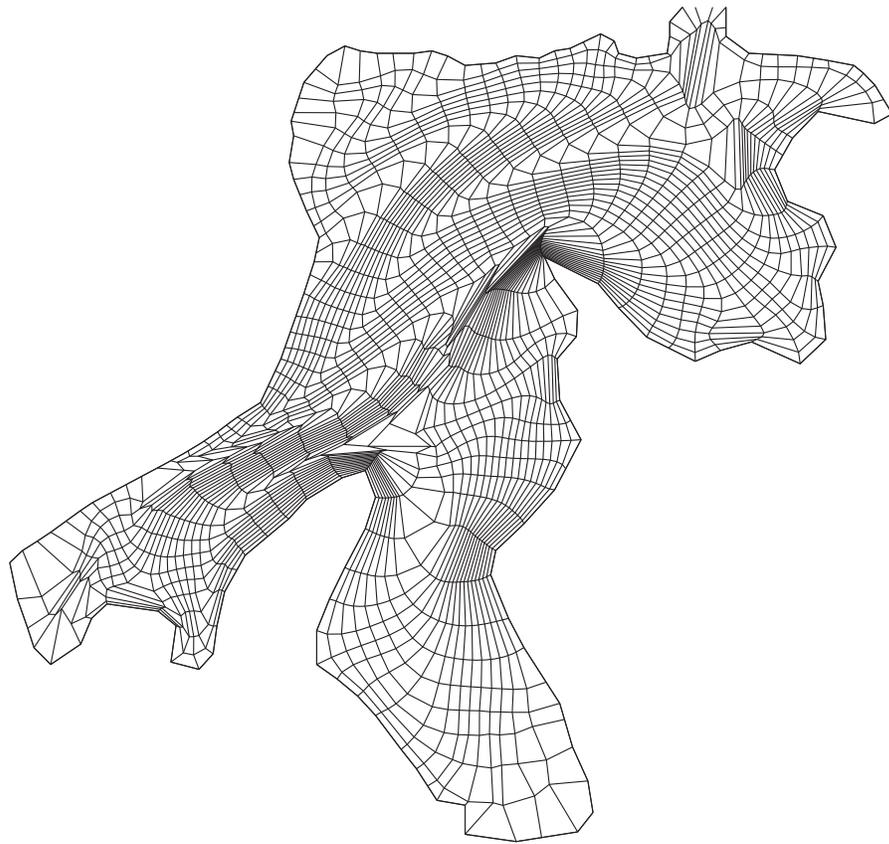


Figura C.36: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

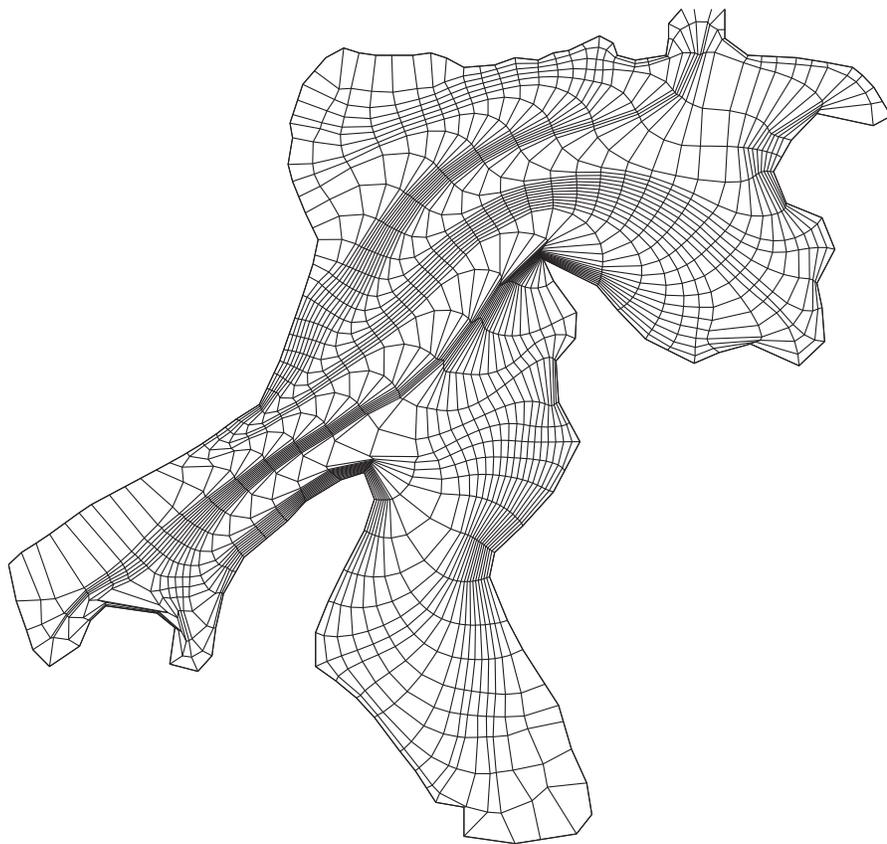


Figura C.37: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

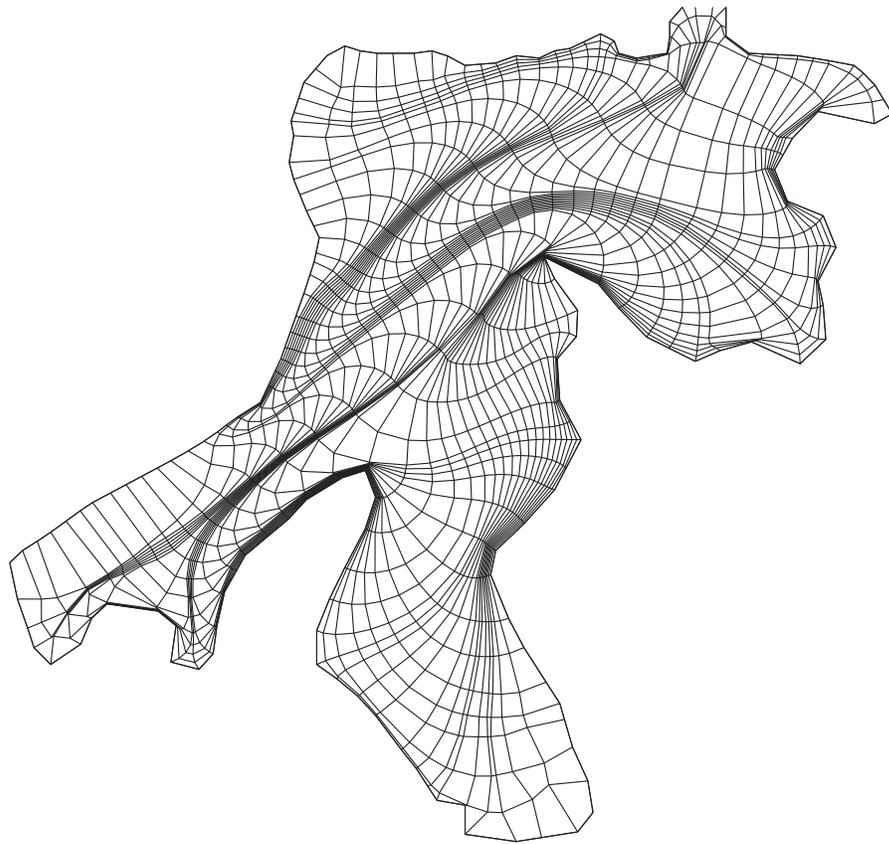


Figura C.38: Habana, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

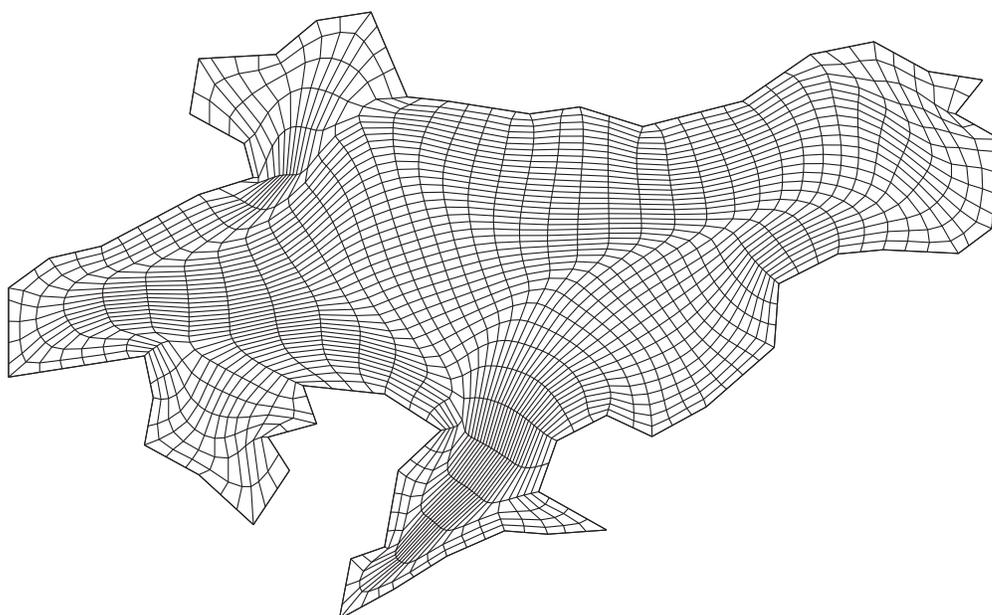


Figura C.39: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

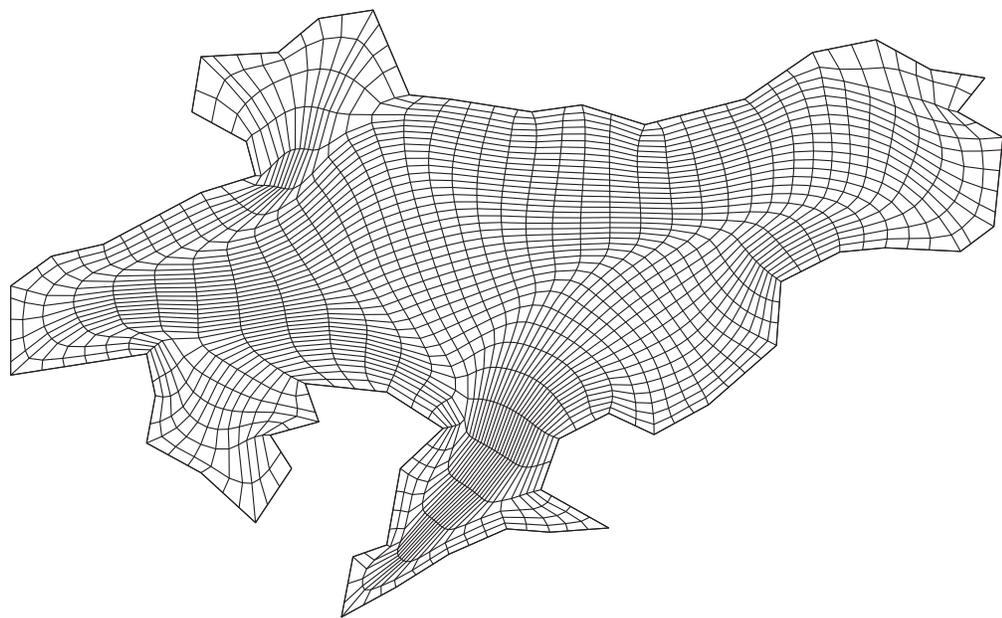


Figura C.40: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

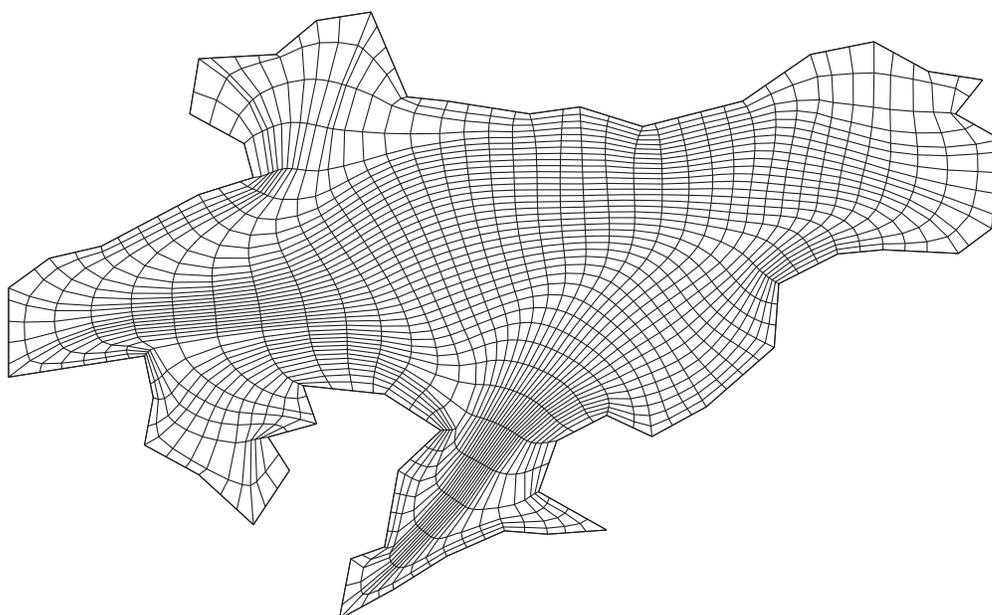


Figura C.41: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

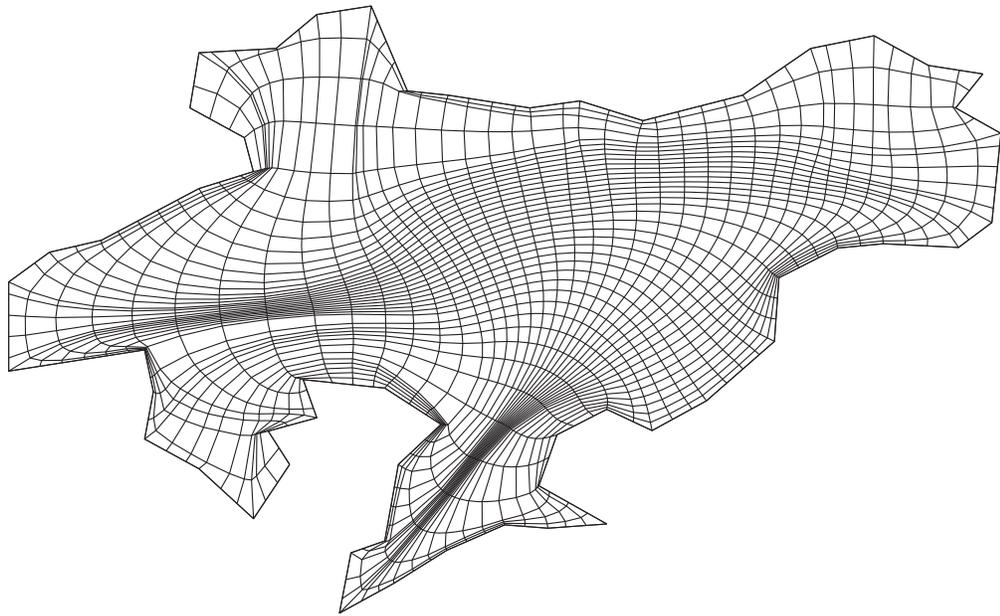


Figura C.42: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

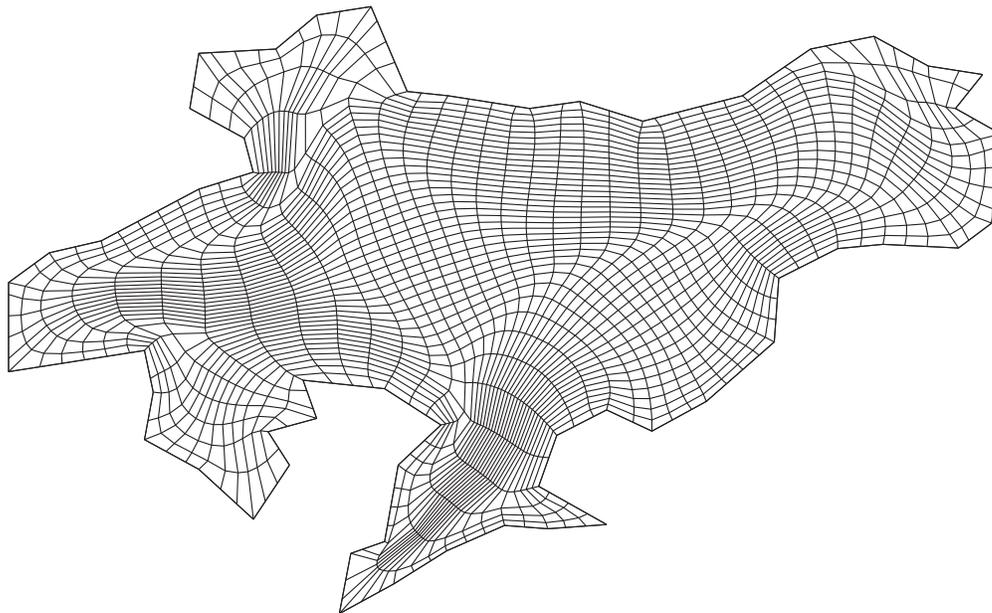


Figura C.43: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

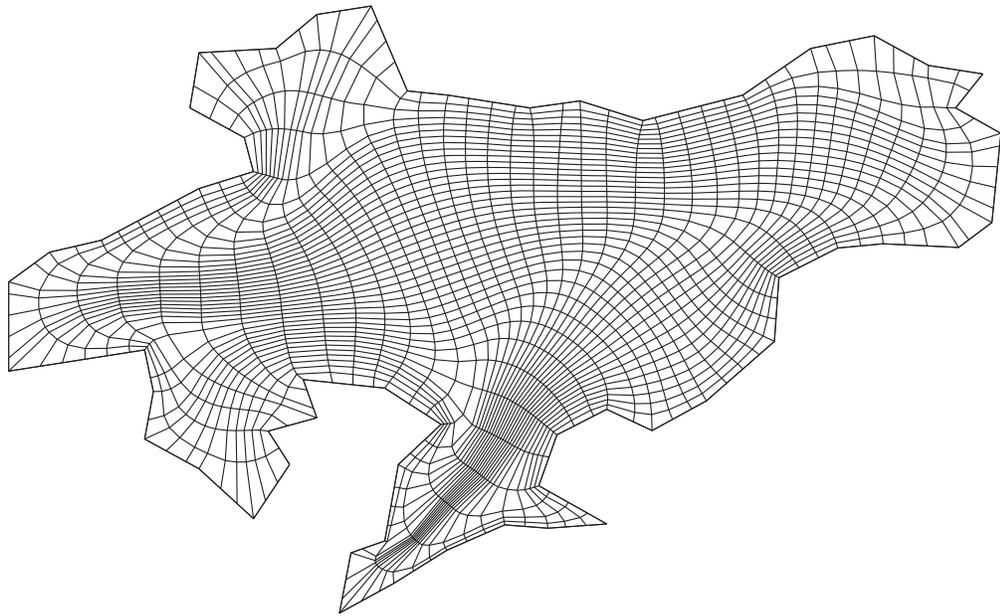


Figura C.44: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

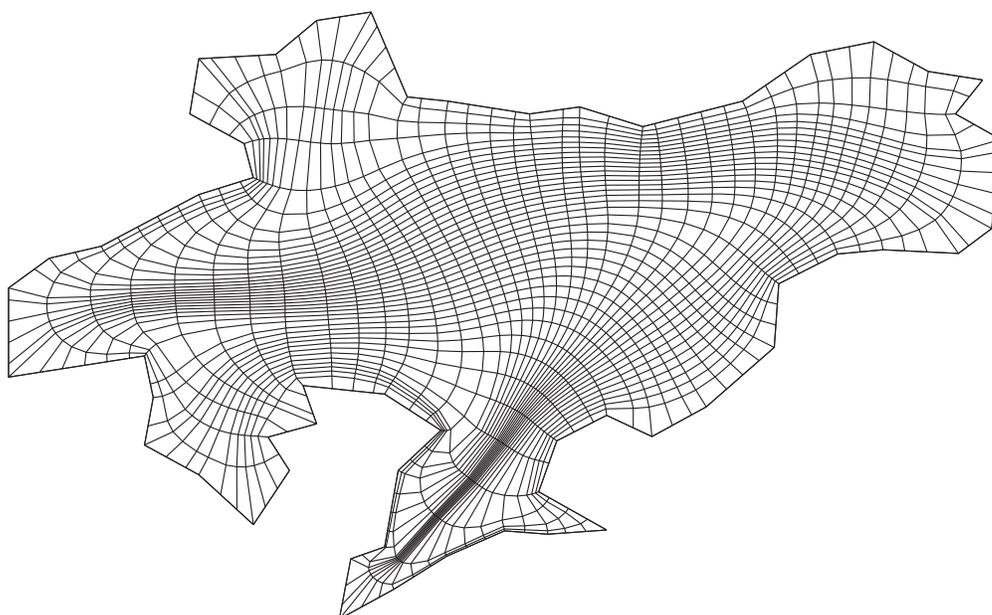


Figura C.45: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$, usando la versión cociente del funcional.

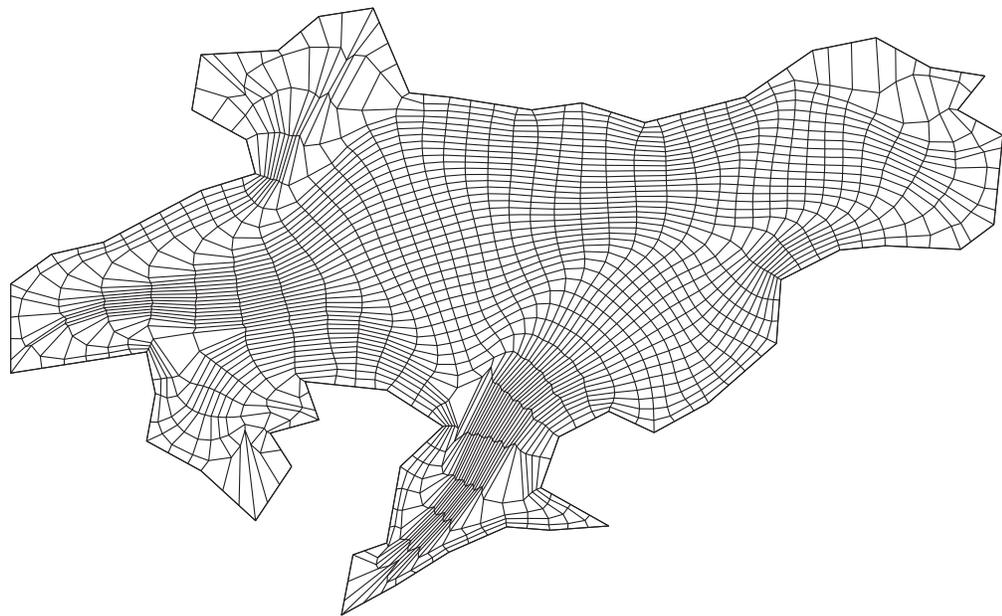


Figura C.46: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

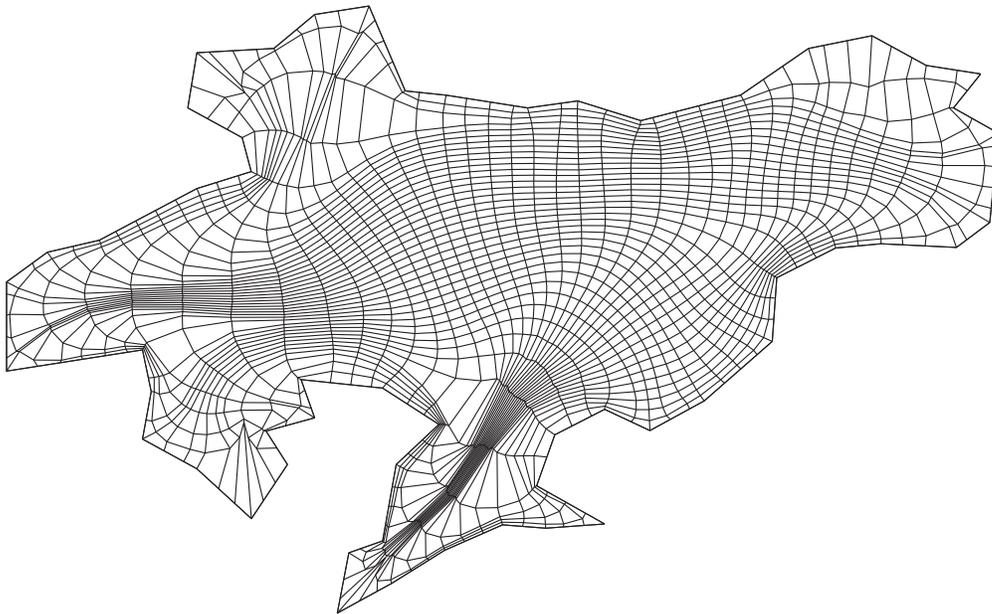


Figura C.47: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

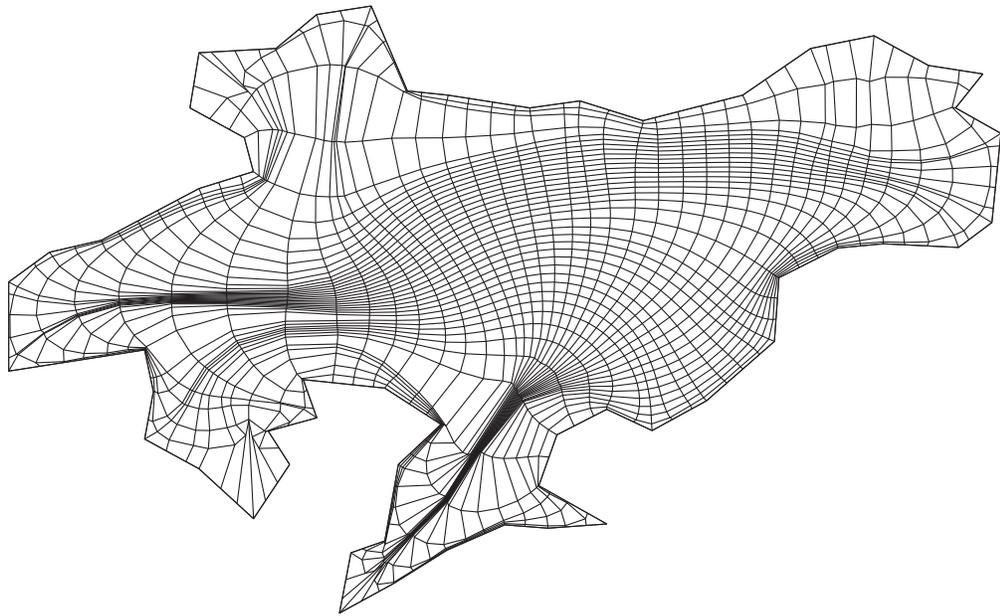


Figura C.48: Ucha, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

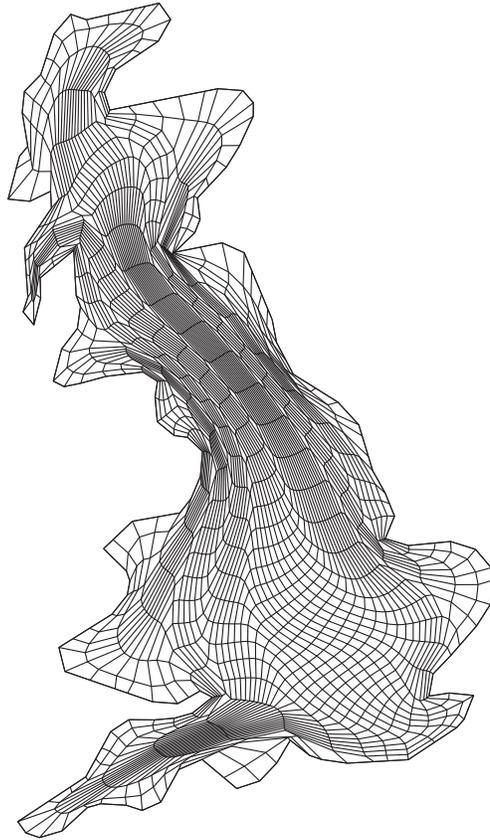


Figura C.49: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

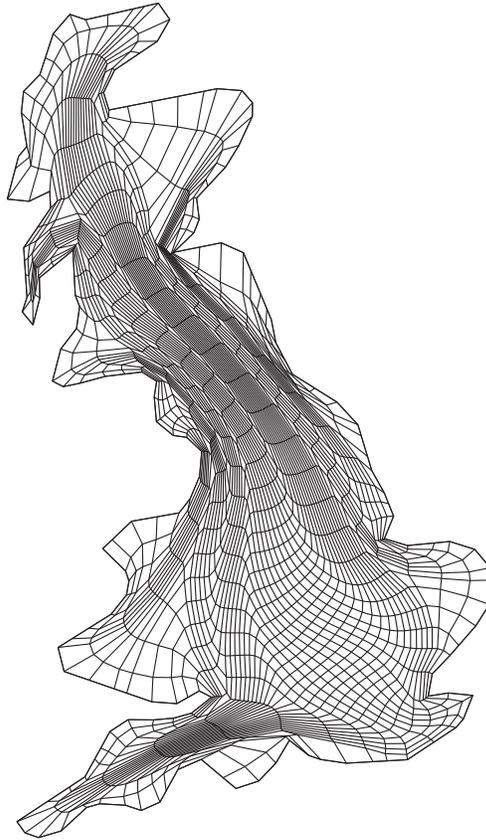


Figura C.50: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

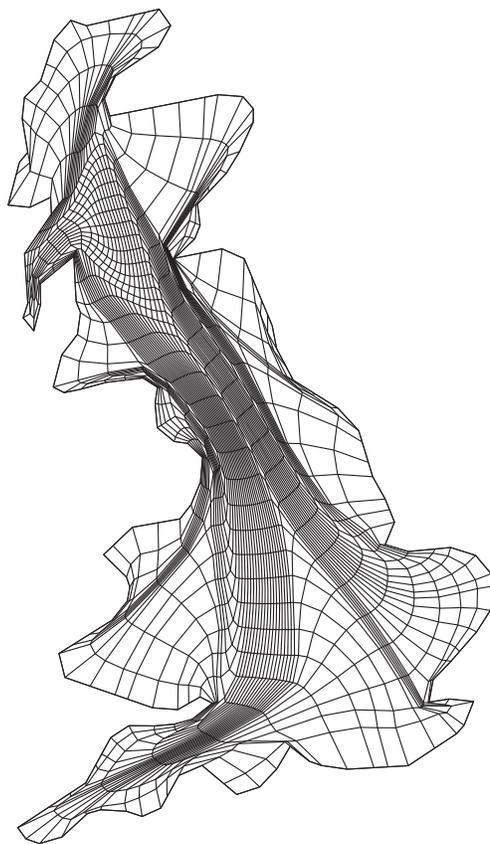


Figura C.51: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

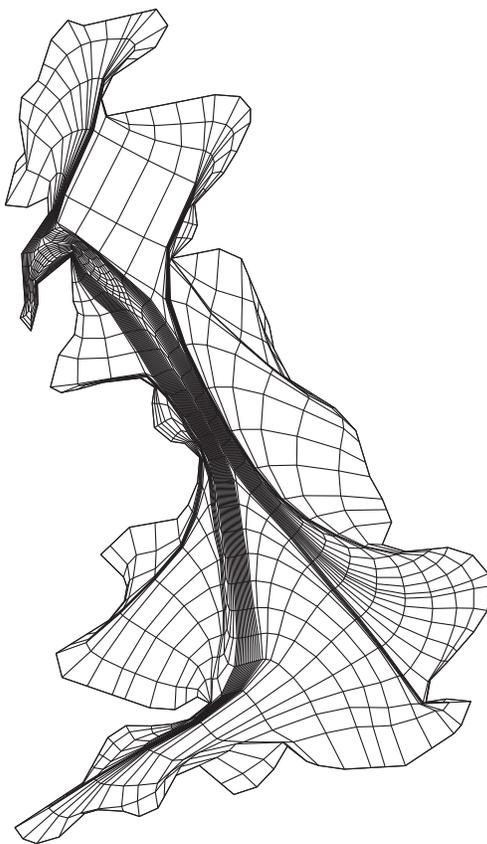


Figura C.52: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

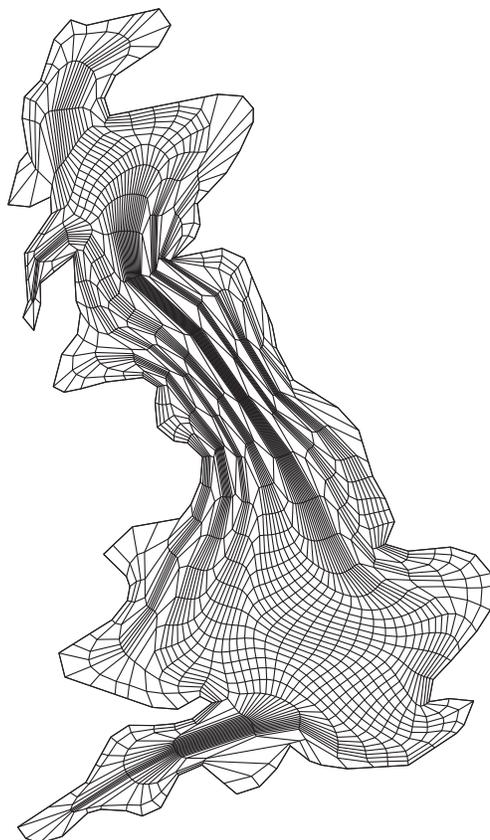


Figura C.53: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

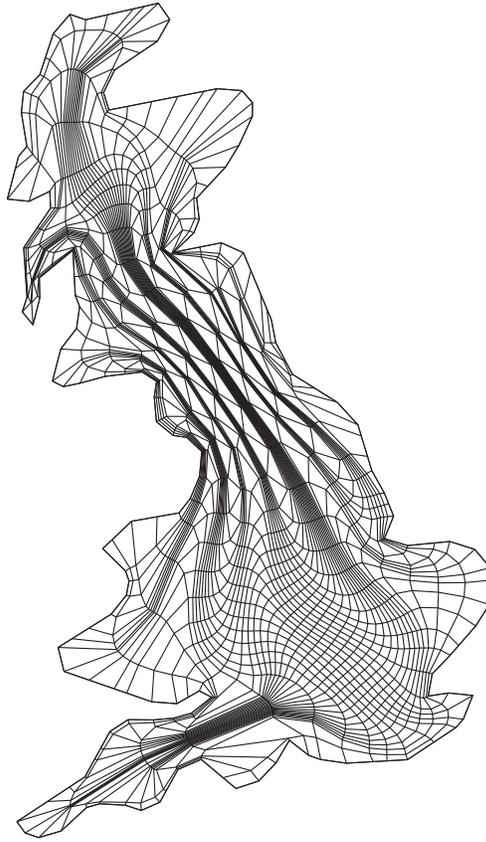


Figura C.54: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

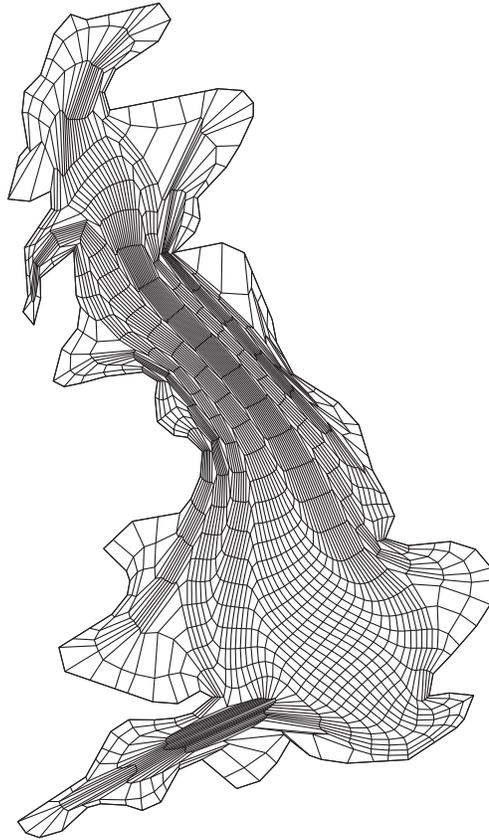


Figura C.55: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 0.1$.

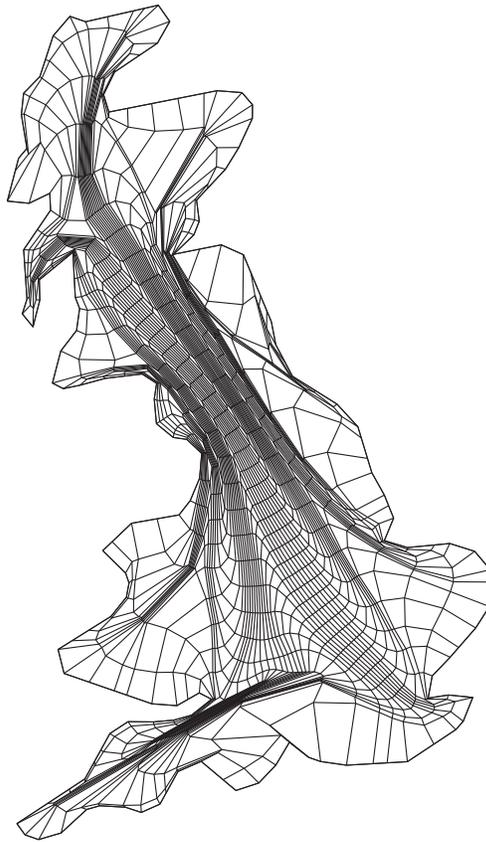


Figura C.56: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 0.1$.



Figura C.57: England, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 0.1$.

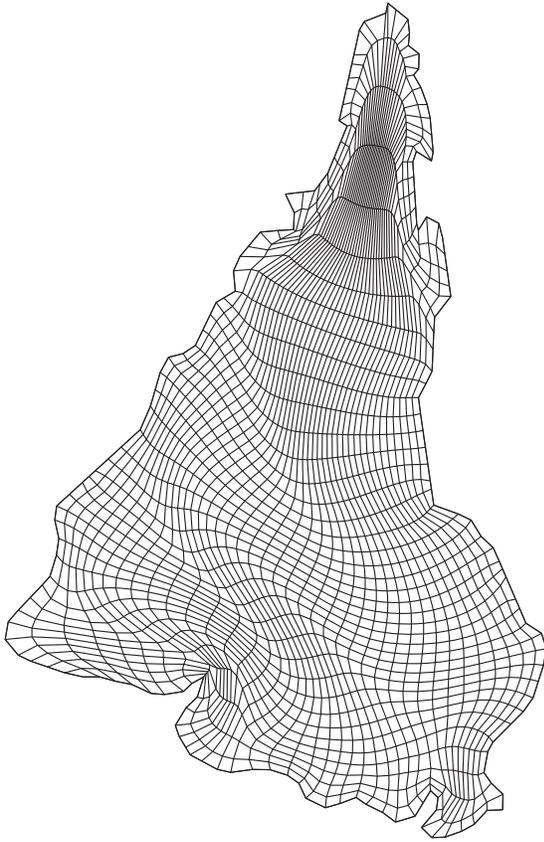


Figura C.58: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

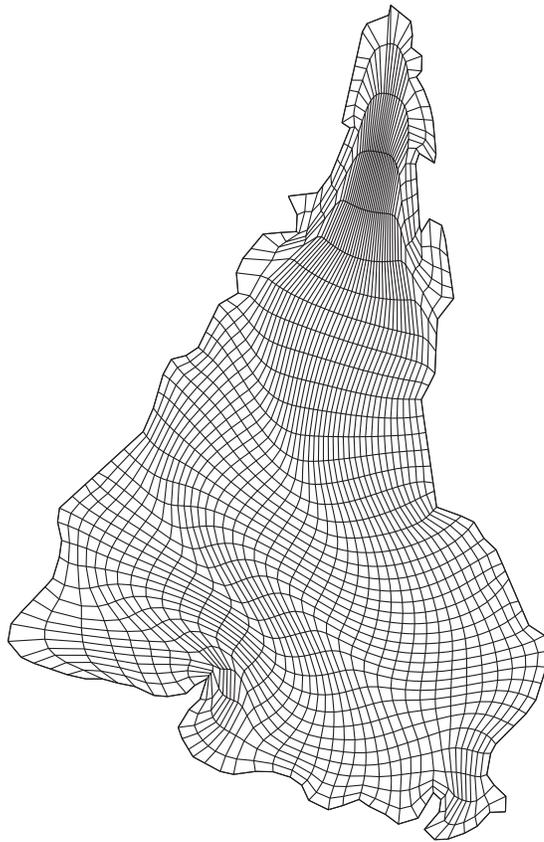


Figura C.59: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

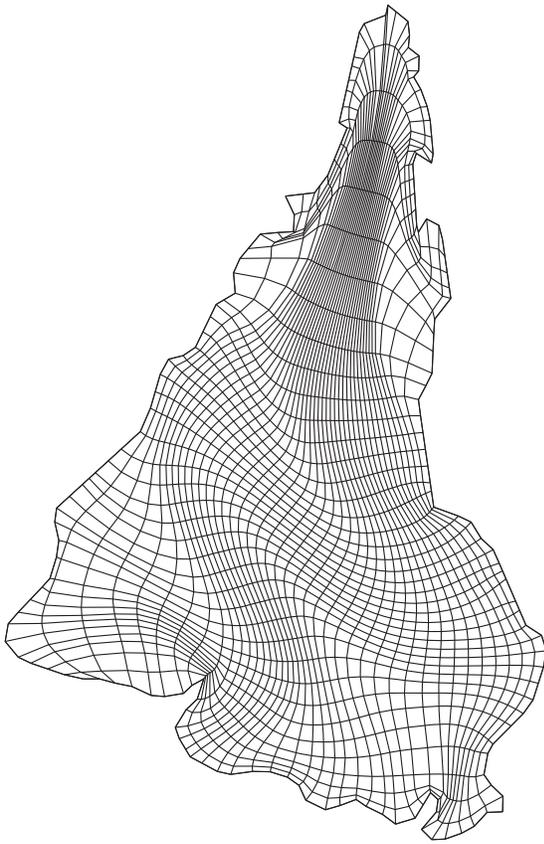


Figura C.60: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

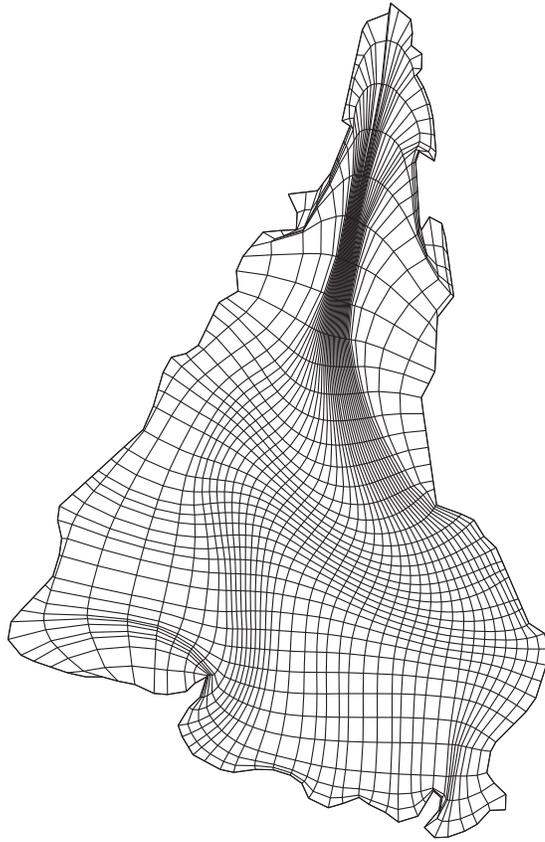


Figura C.61: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

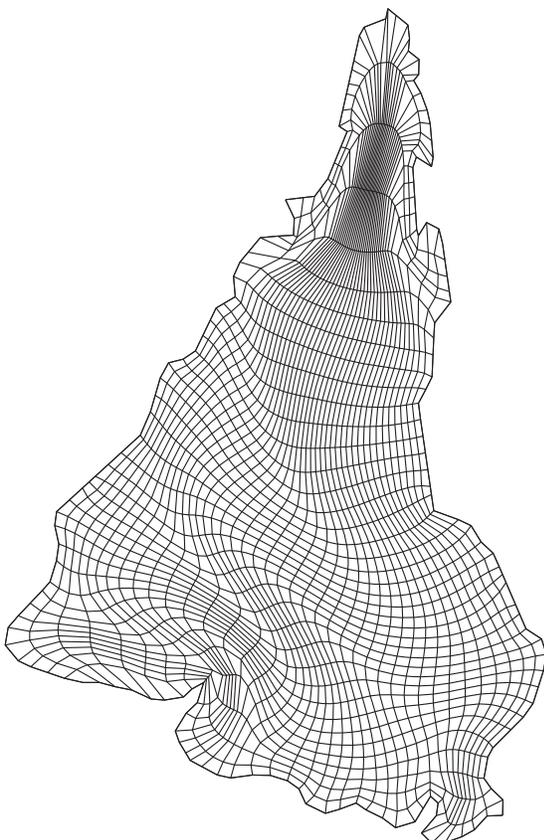


Figura C.62: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

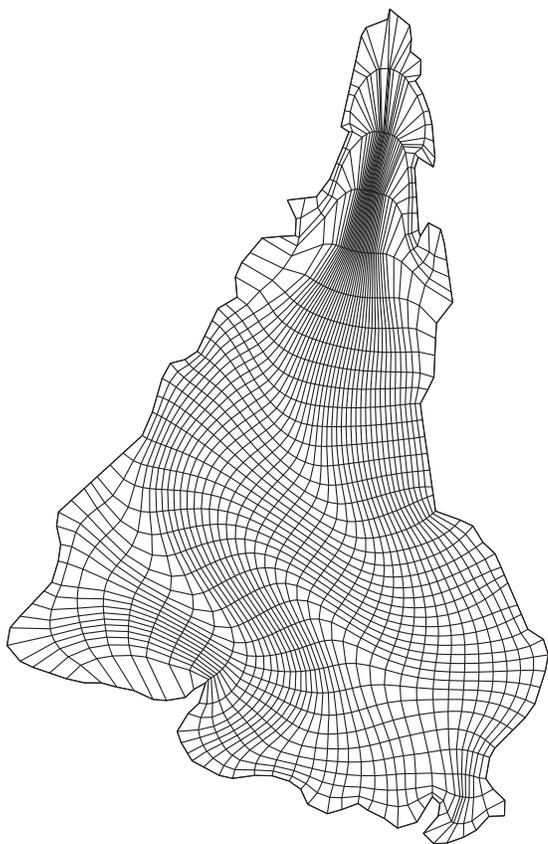


Figura C.63: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

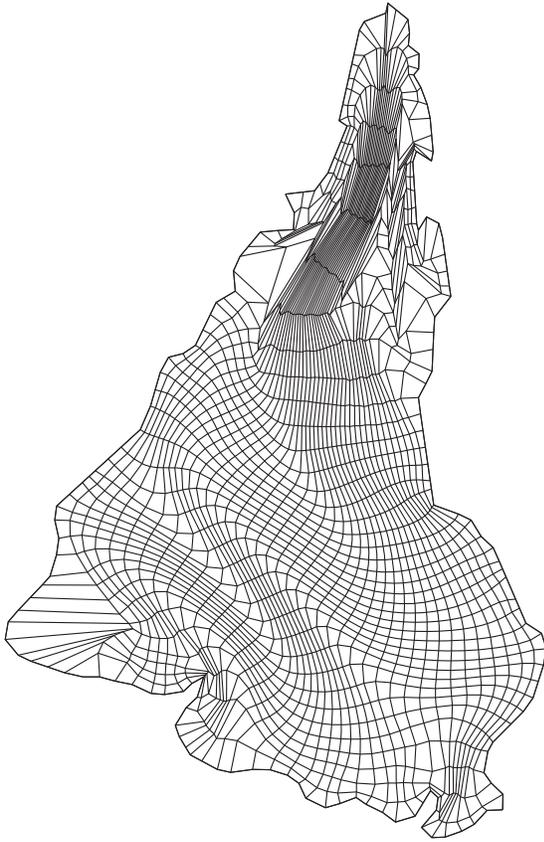


Figura C.64: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.



Figura C.65: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

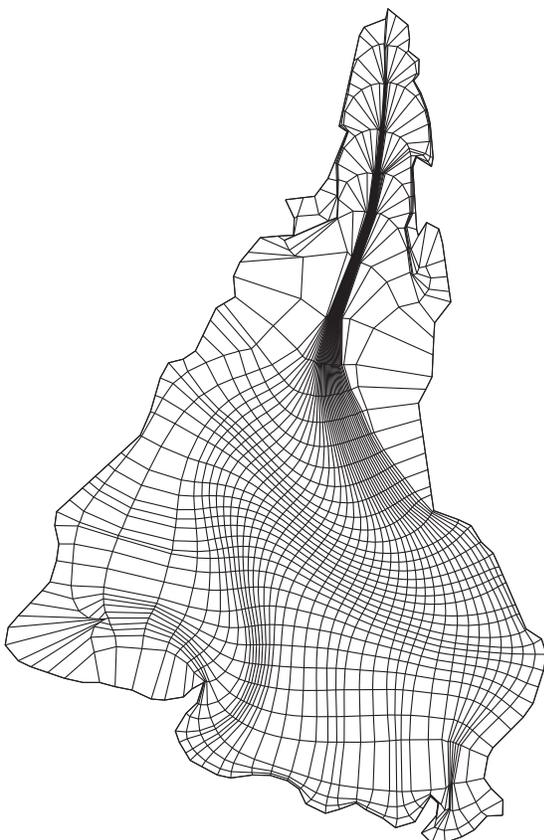


Figura C.66: Sudamérica, malla de 41×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

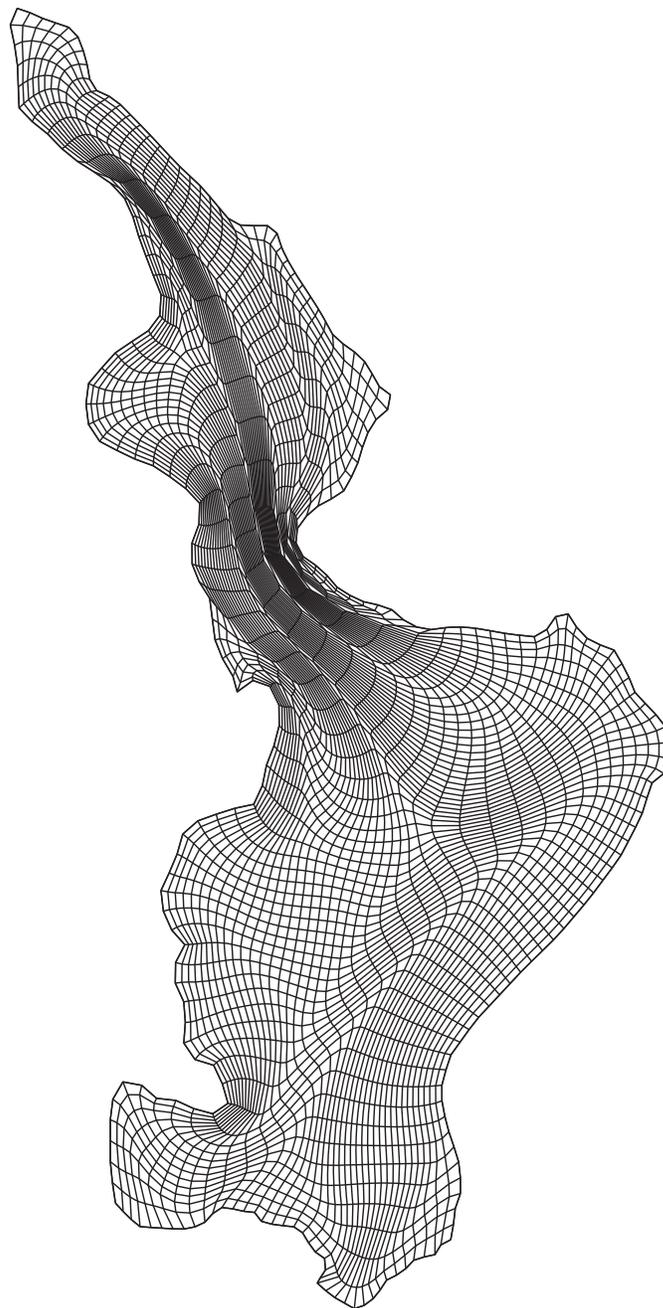


Figura C.67: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

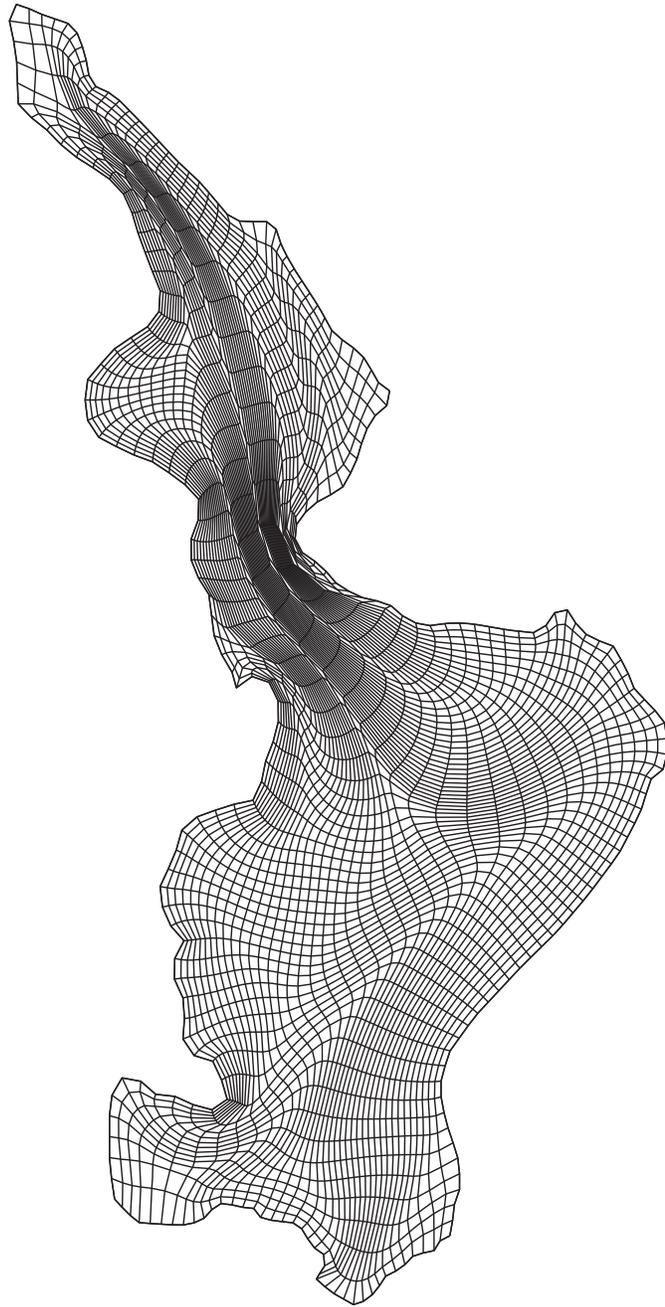


Figura C.68: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

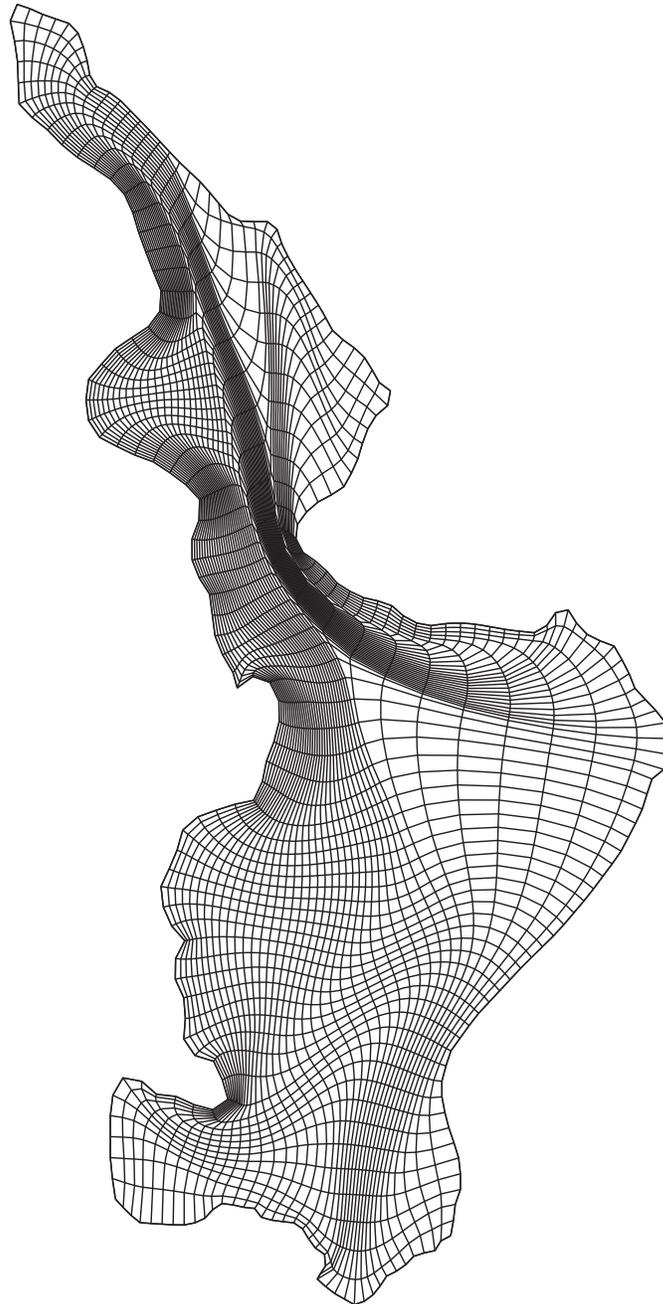


Figura C.69: Jyväskylä, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

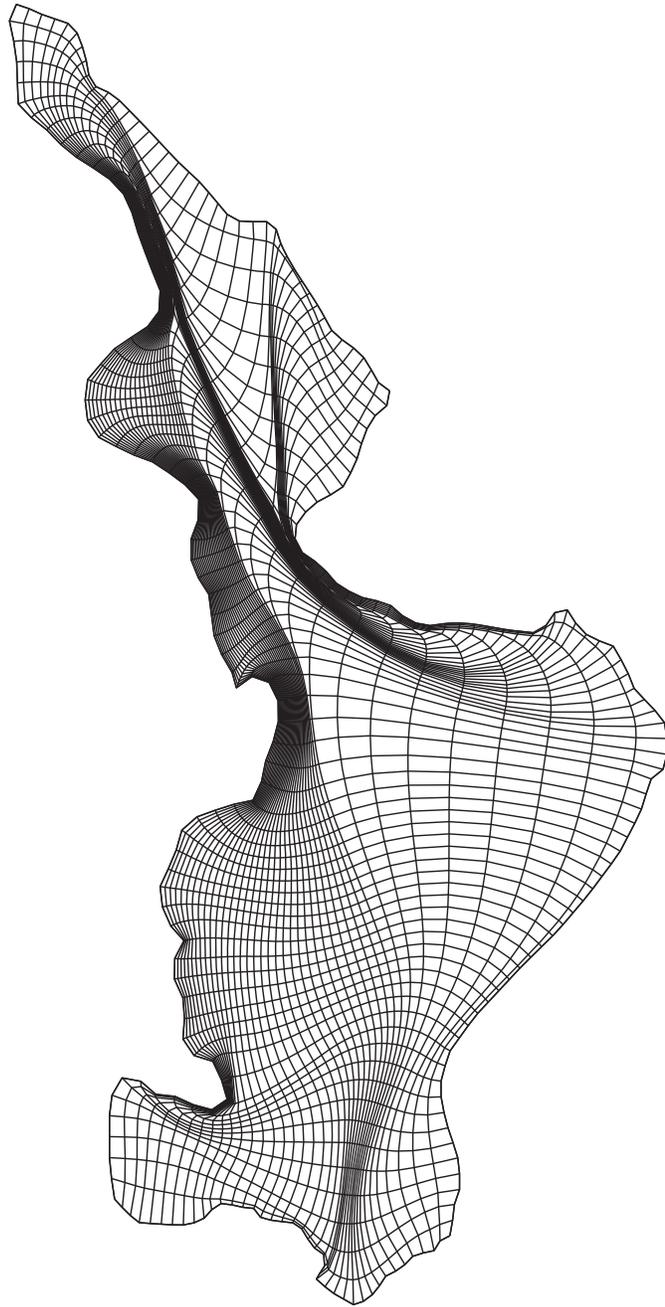


Figura C.70: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

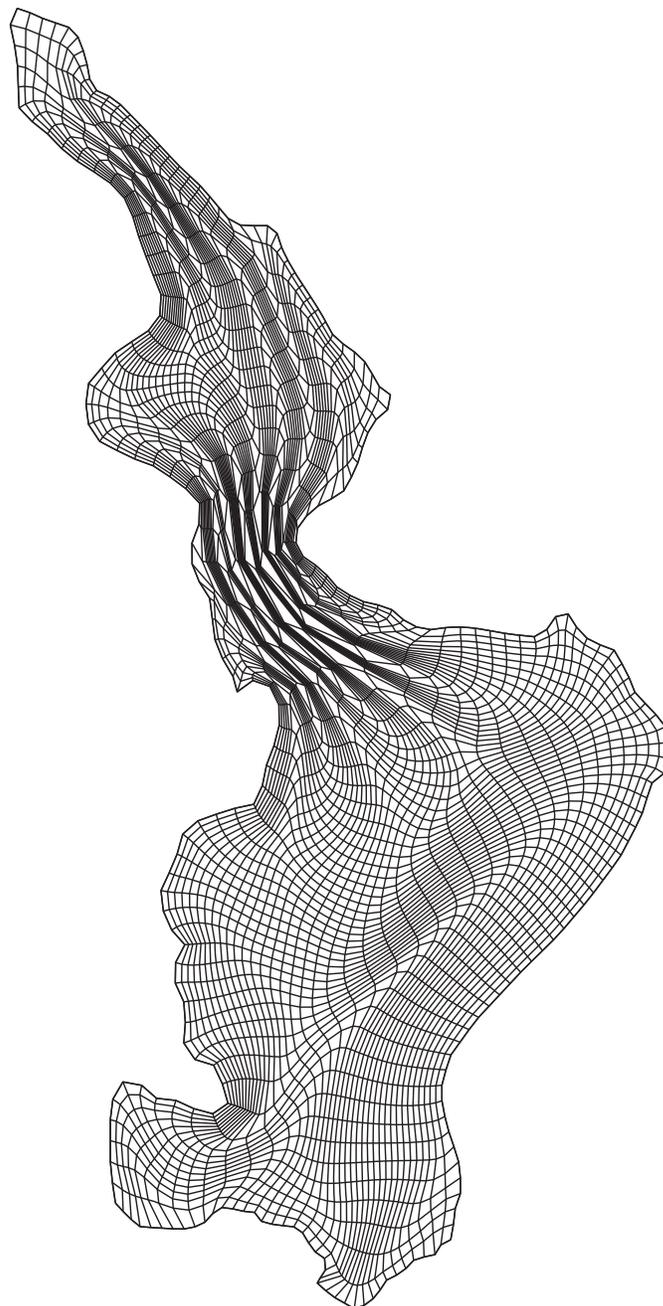


Figura C.71: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

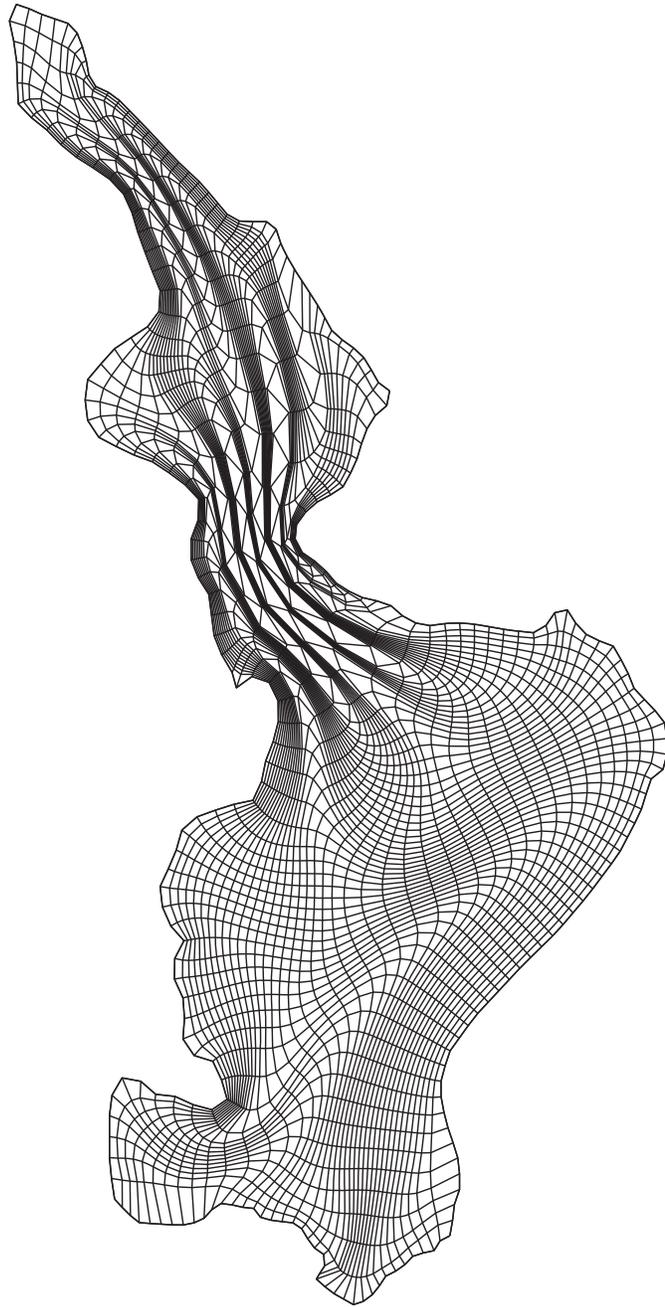


Figura C.72: Jyväskylä, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

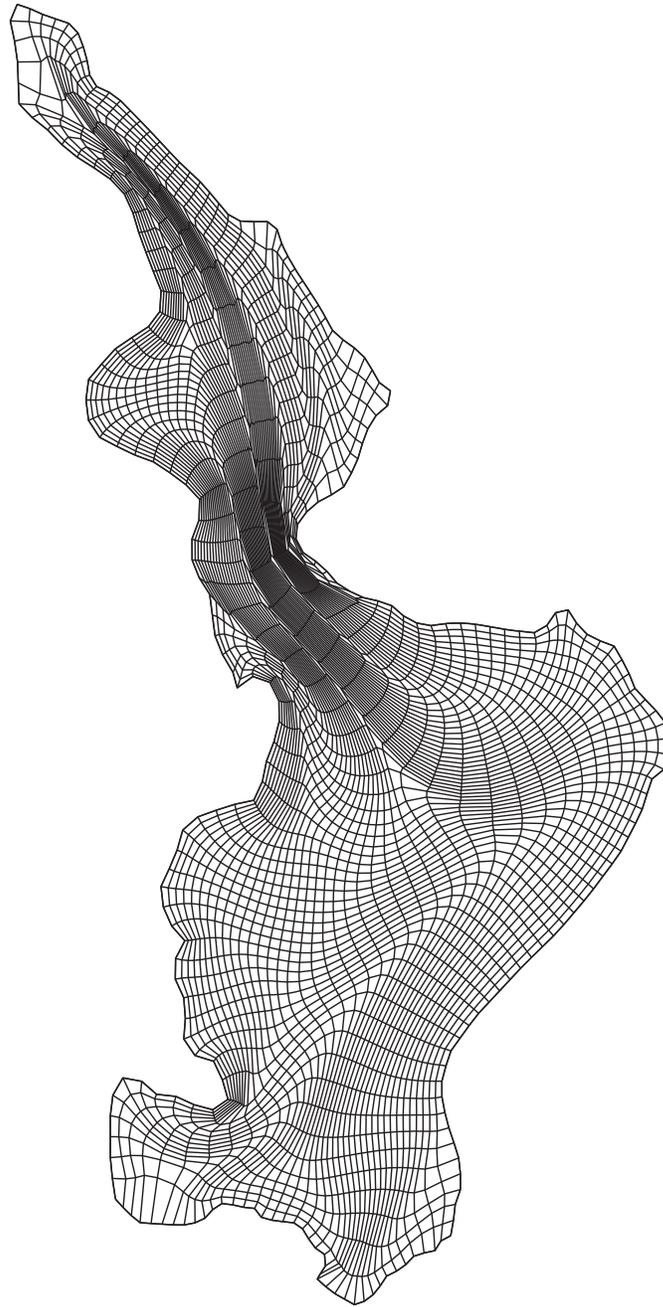


Figura C.73: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 0.1$.

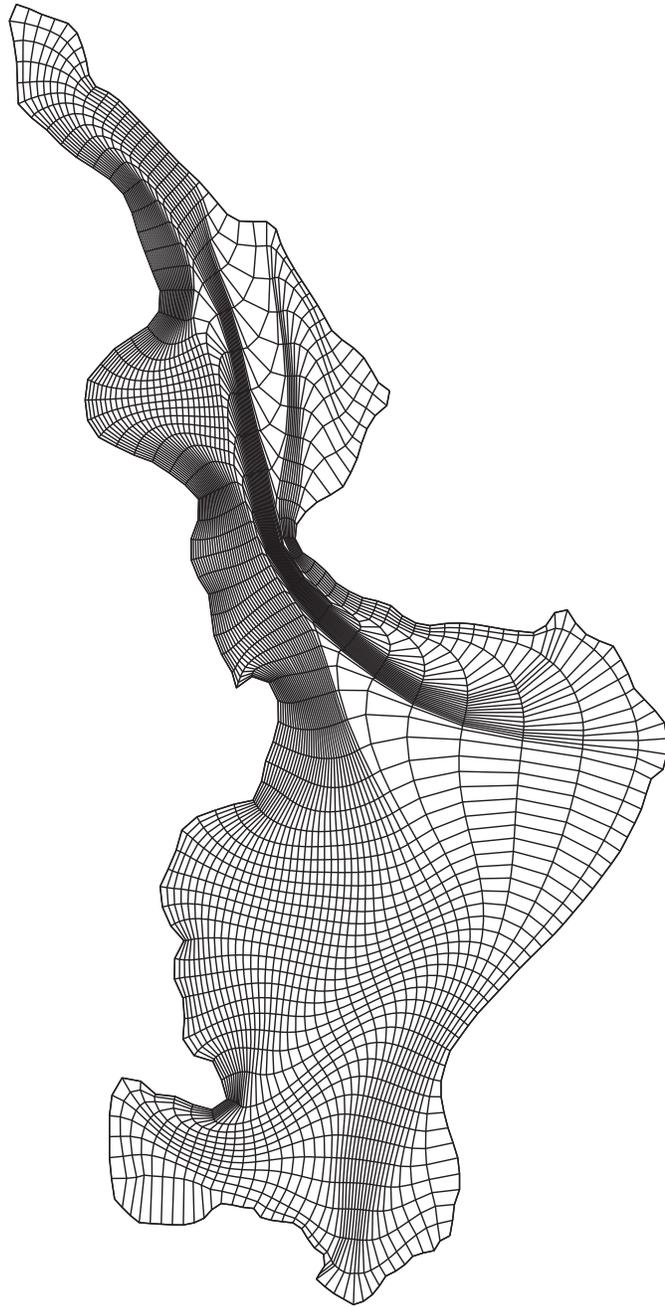


Figura C.74: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 0.1$.

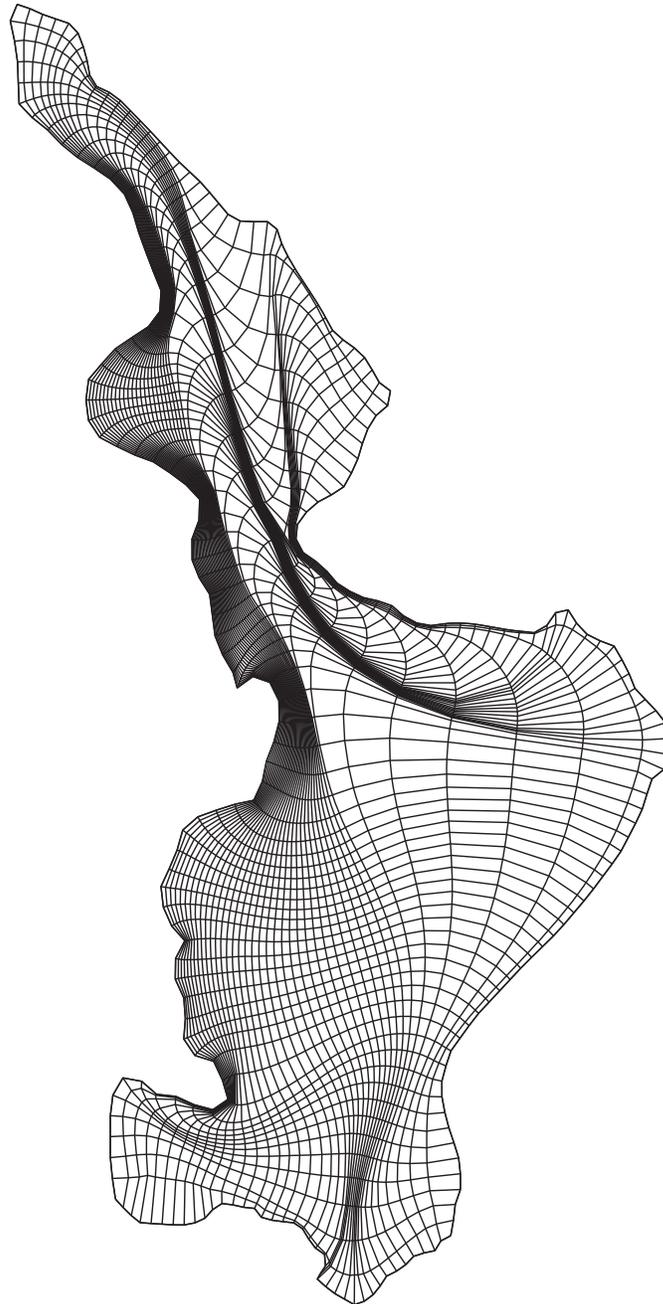


Figura C.75: Jyväsjärvi, malla de 41×82 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 0.1$.

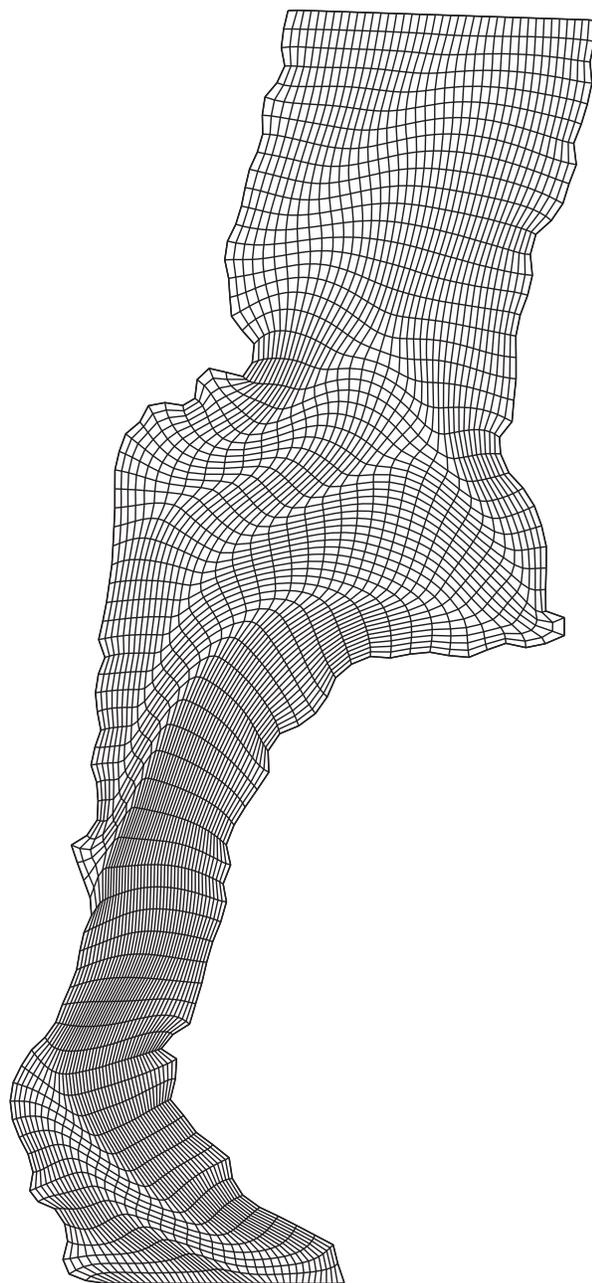


Figura C.76: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

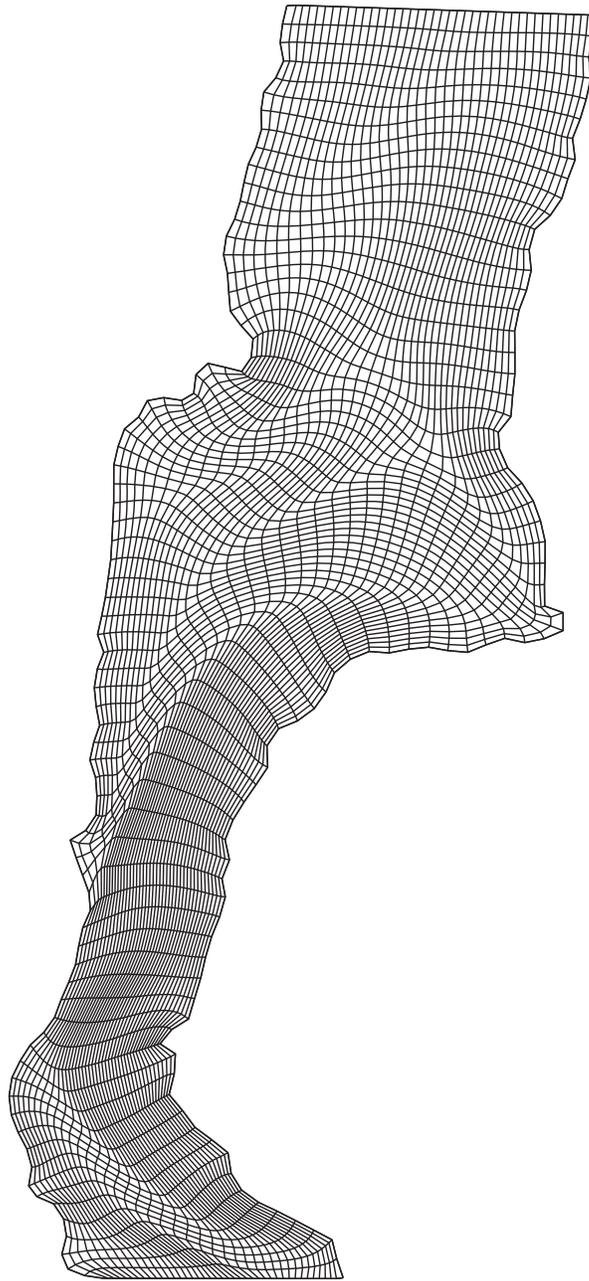


Figura C.77: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

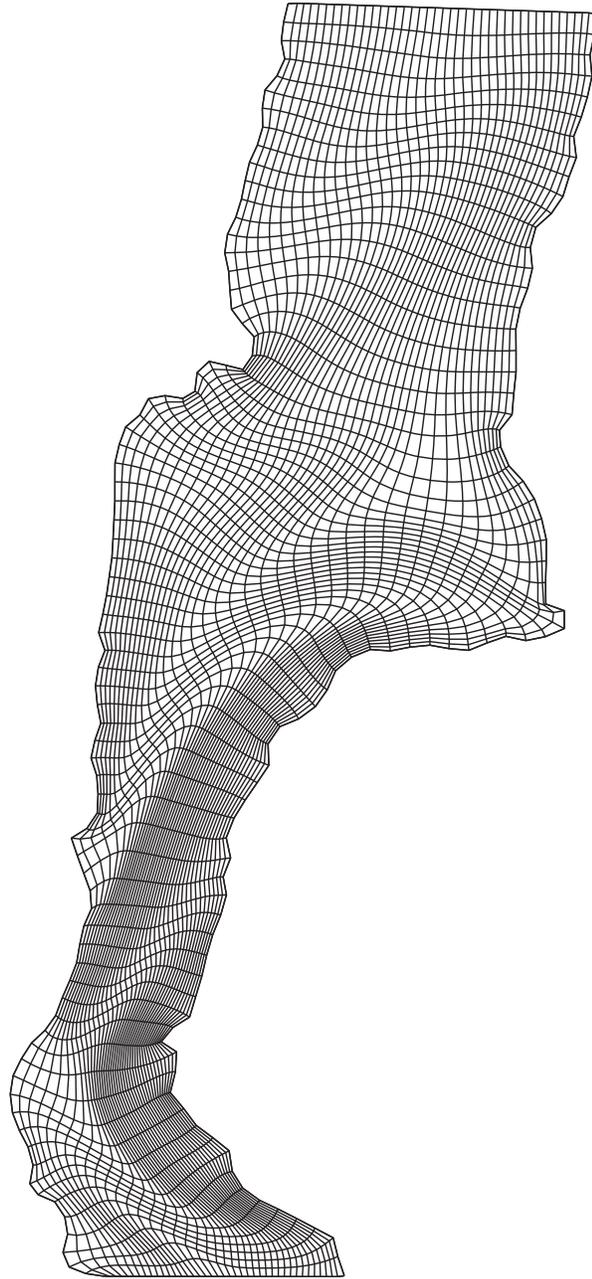


Figura C.78: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

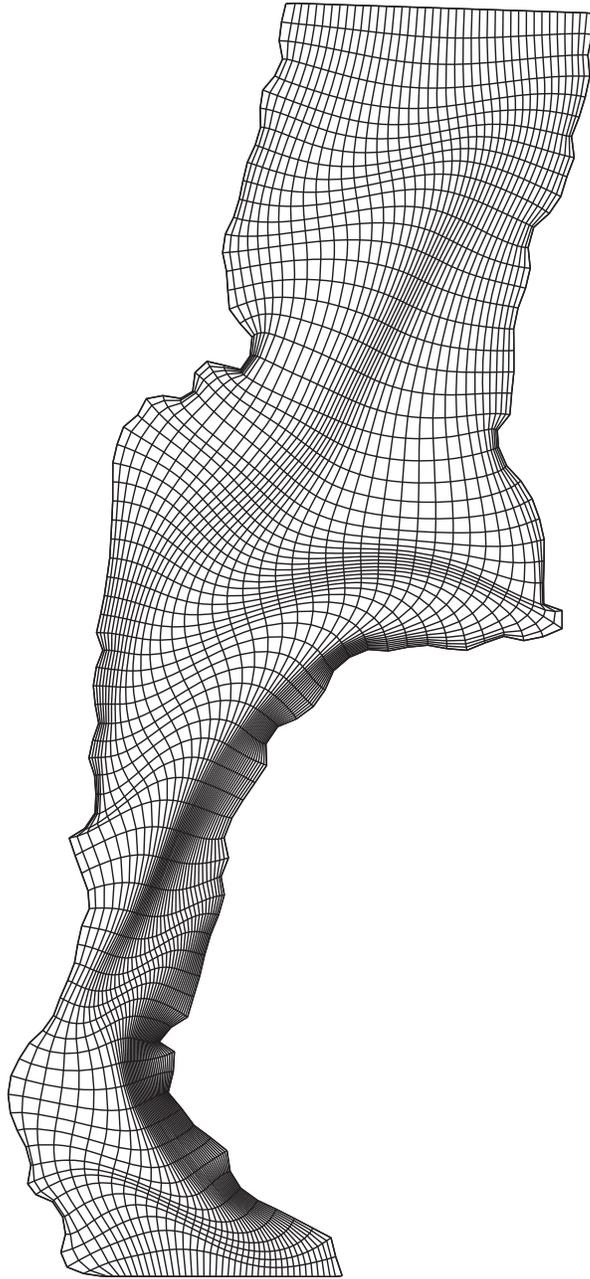


Figura C.79: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

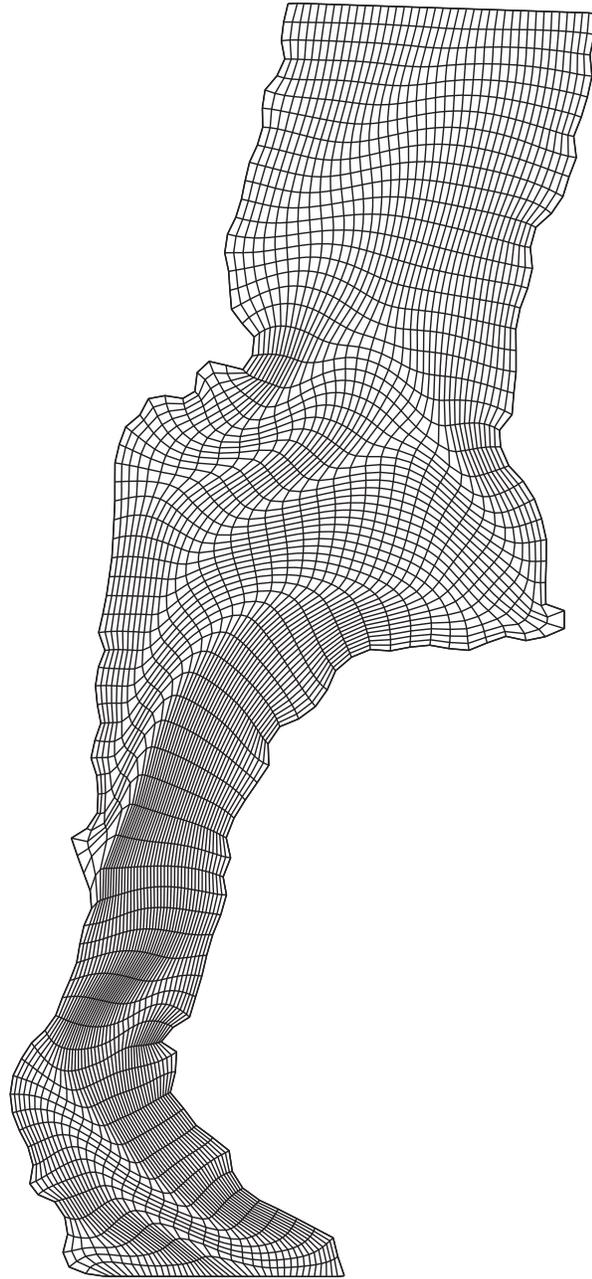


Figura C.80: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

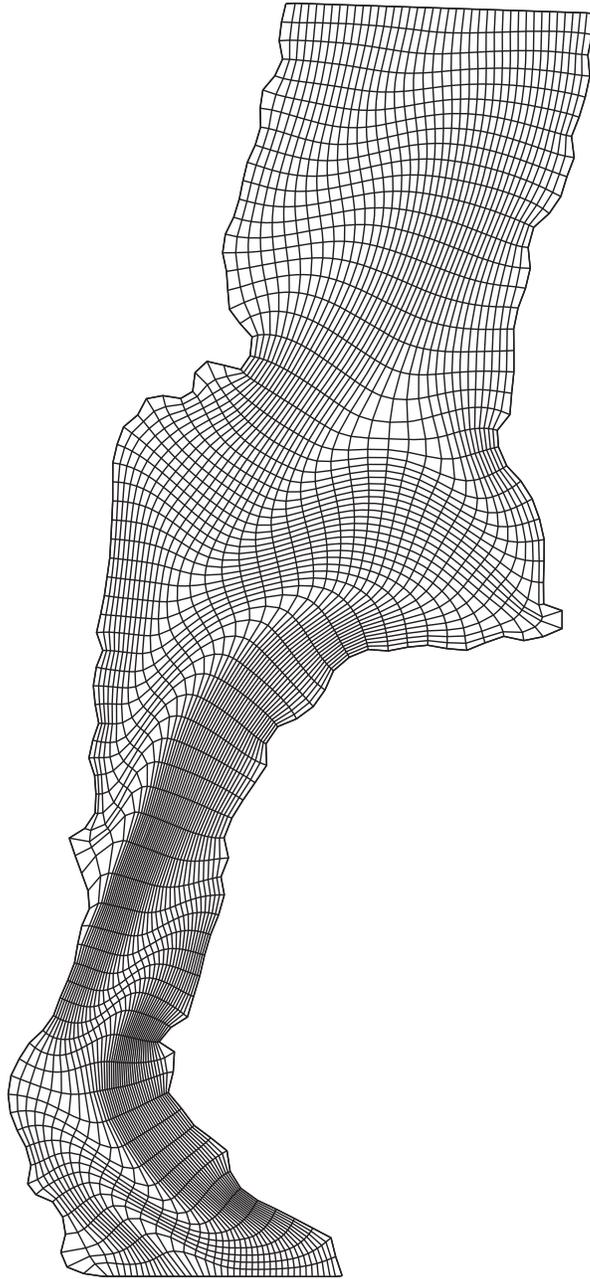


Figura C.81: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

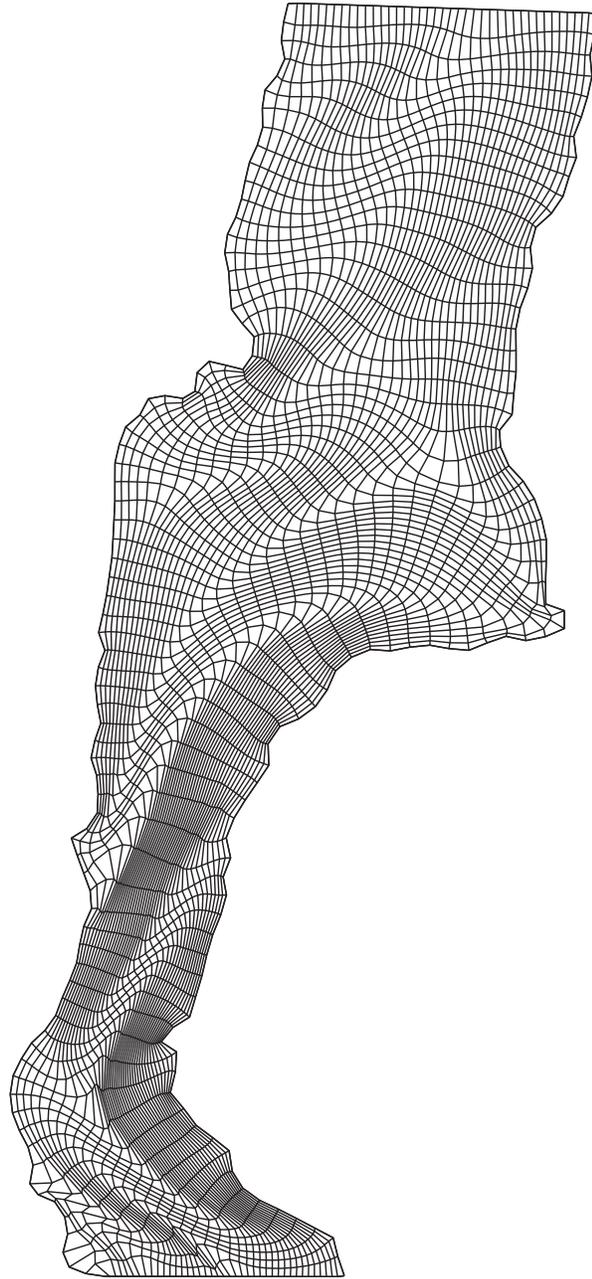


Figura C.82: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

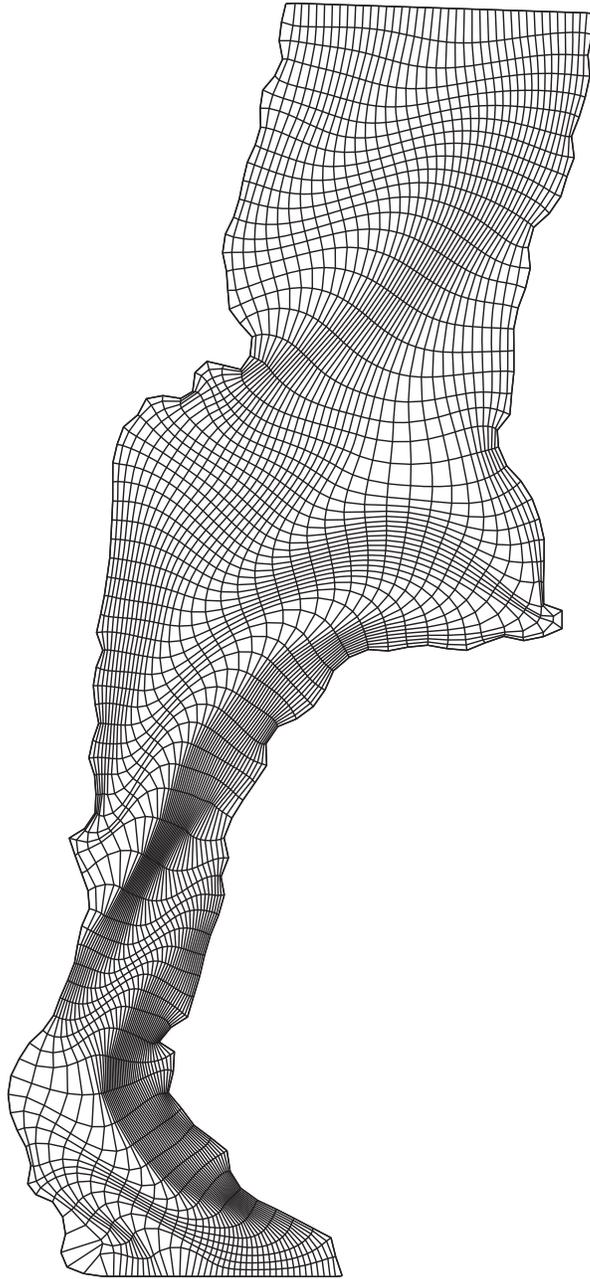


Figura C.83: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

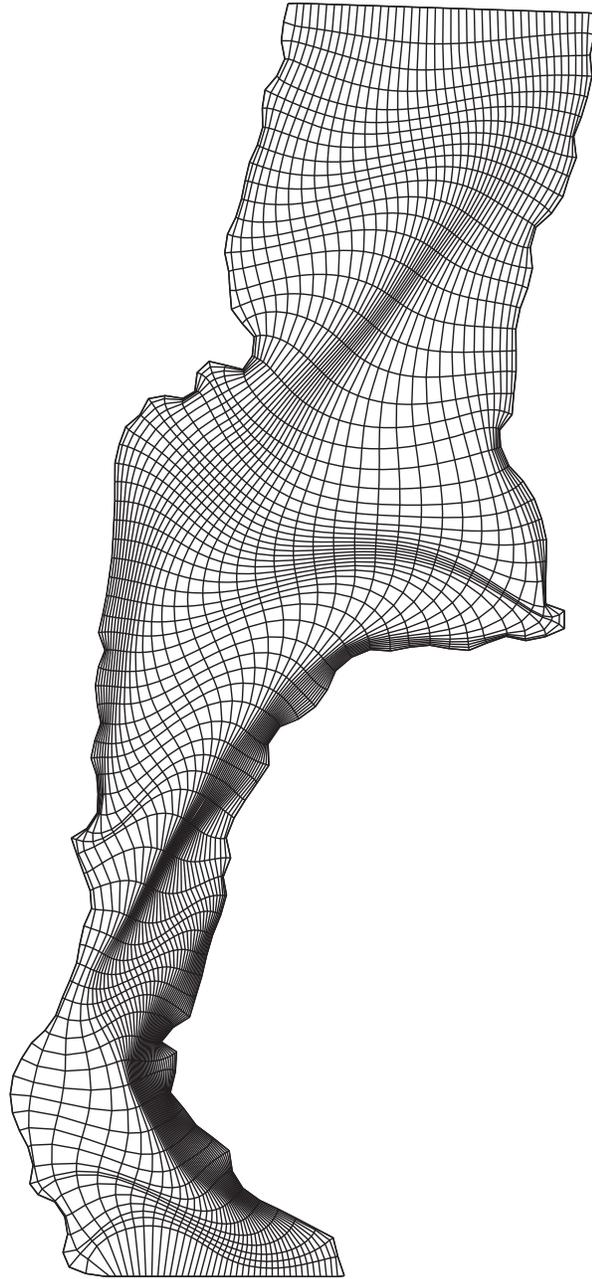


Figura C.84: Upper Arkansas Subbasin, malla de 82×41 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

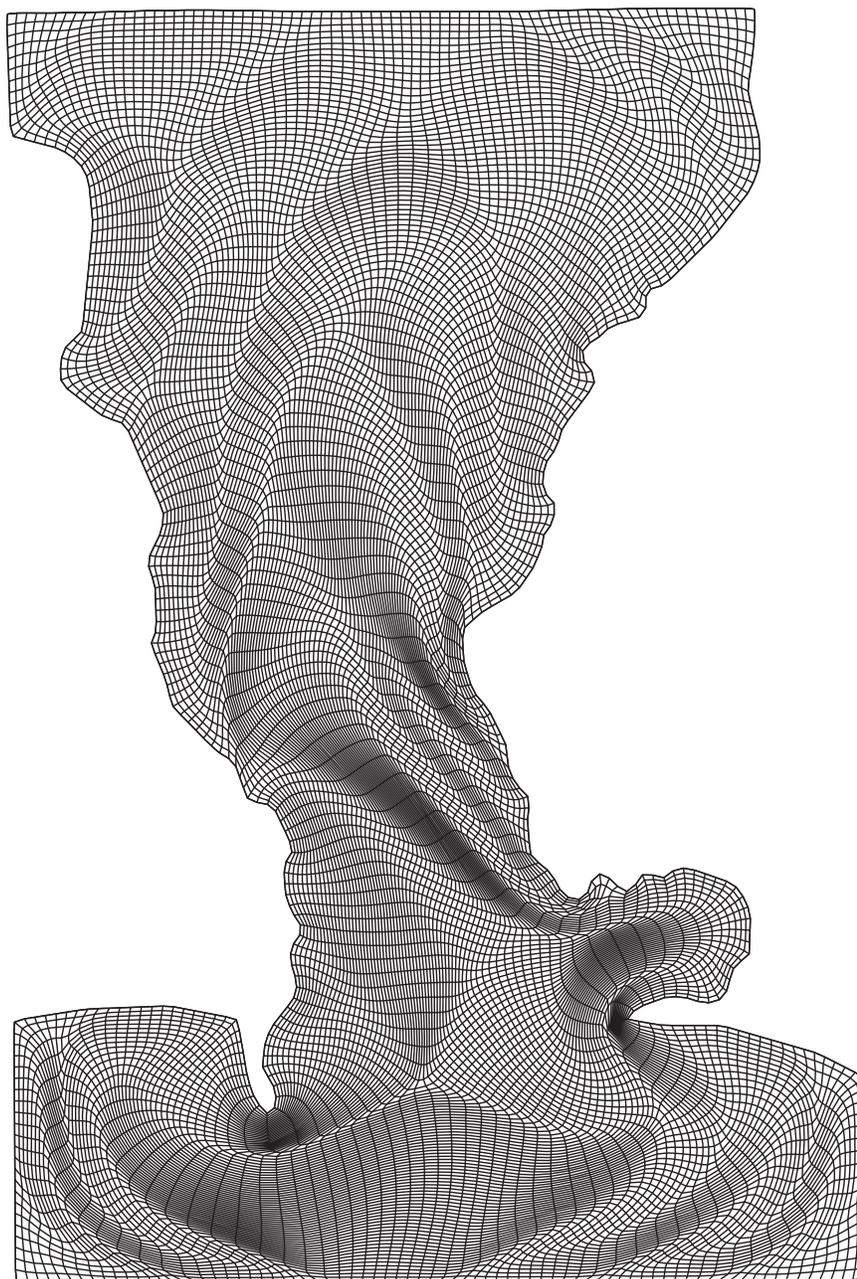


Figura C.85: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{AO}$ para $\sigma = 0.5$.

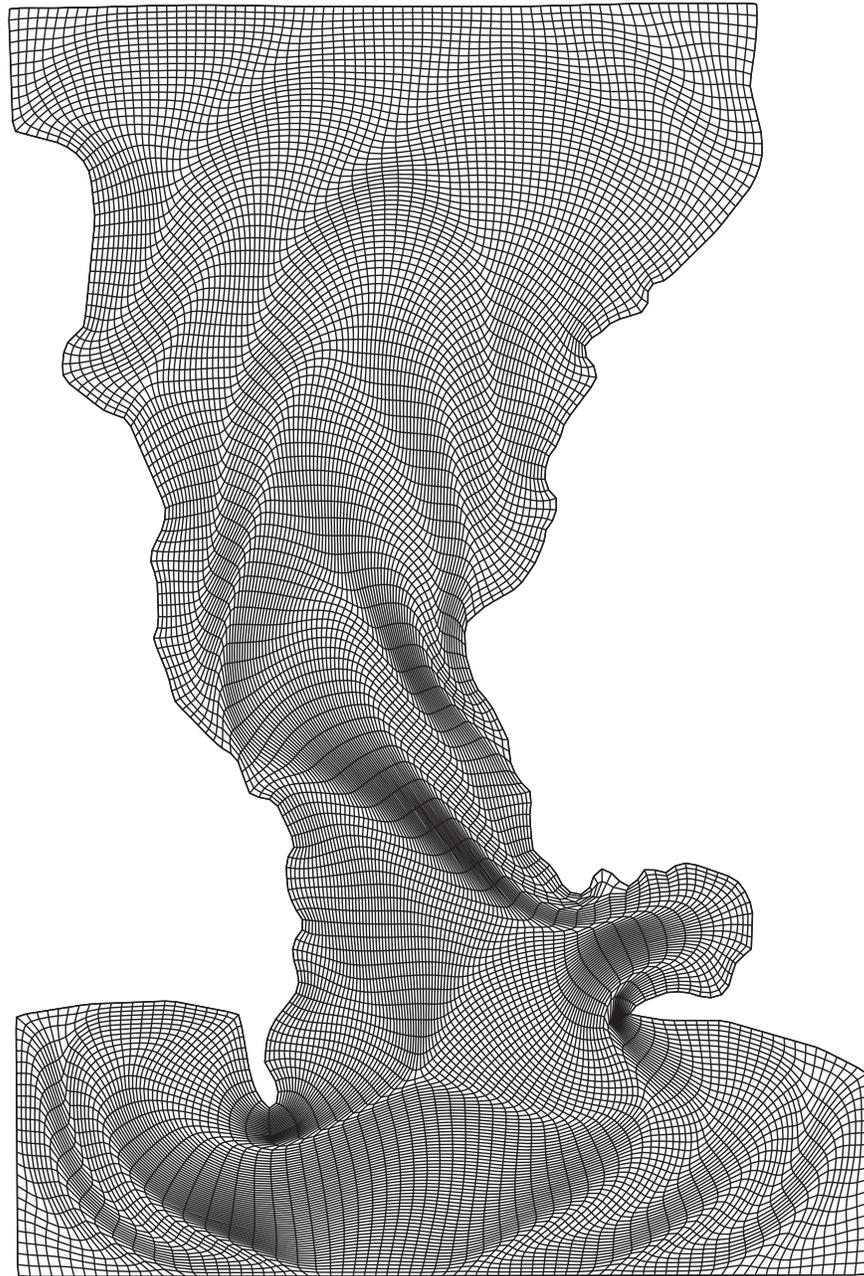


Figura C.86: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$.

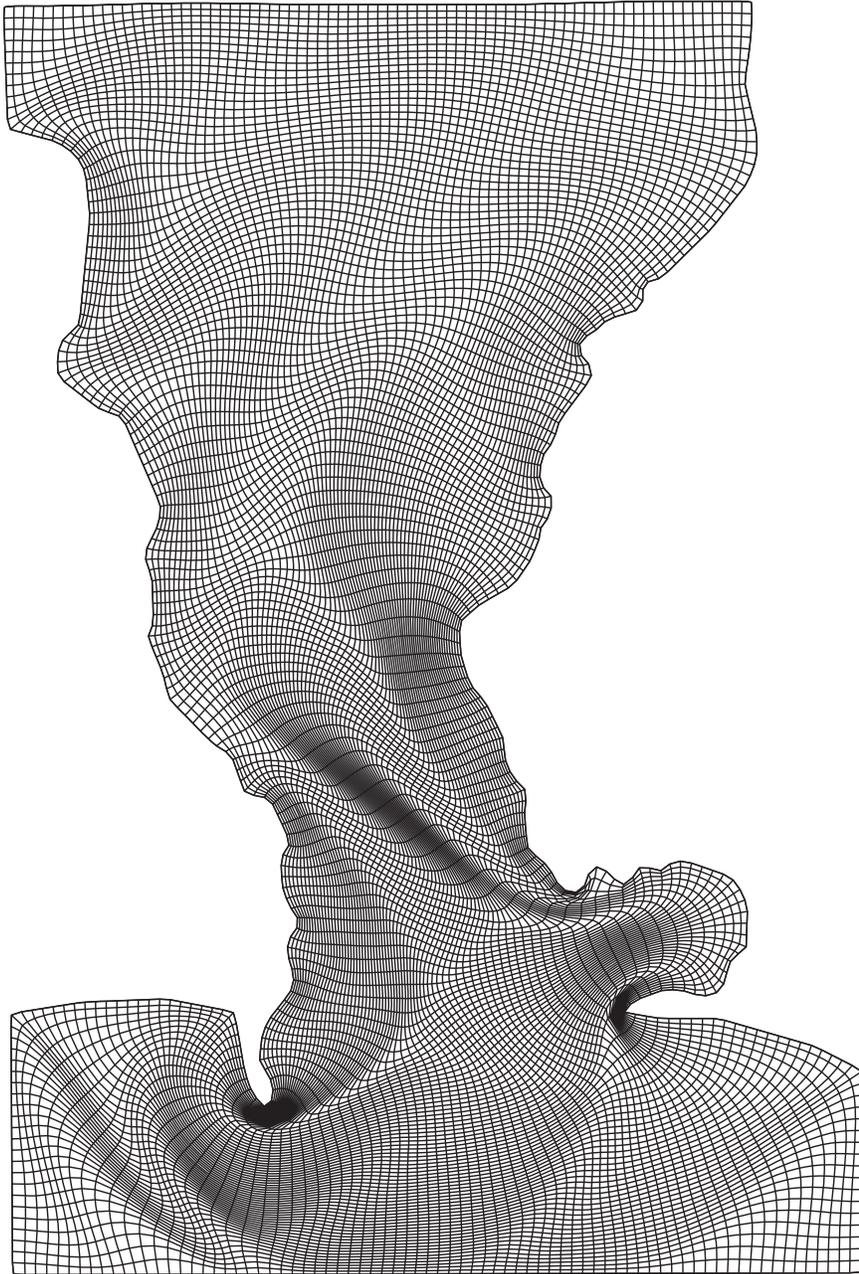


Figura C.87: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$.

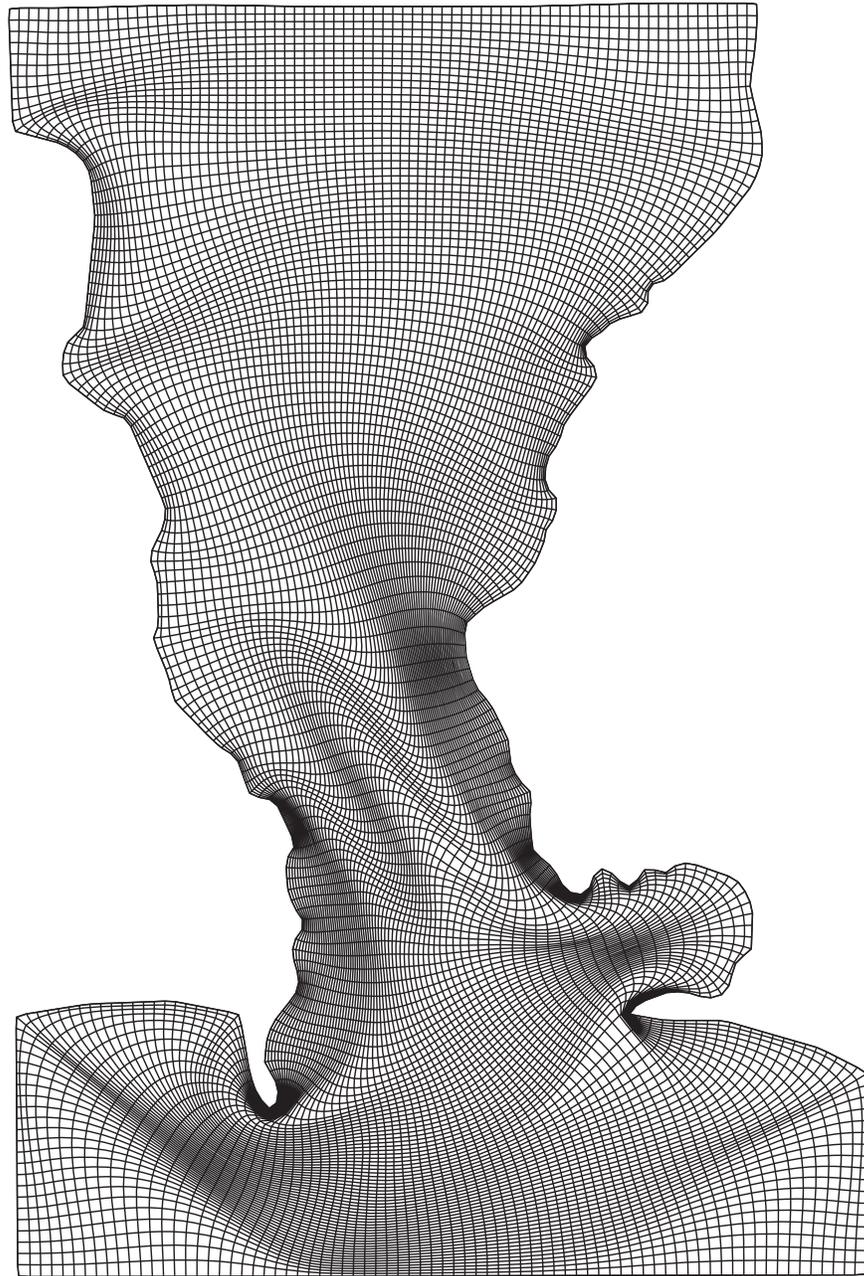


Figura C.88: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.01$.

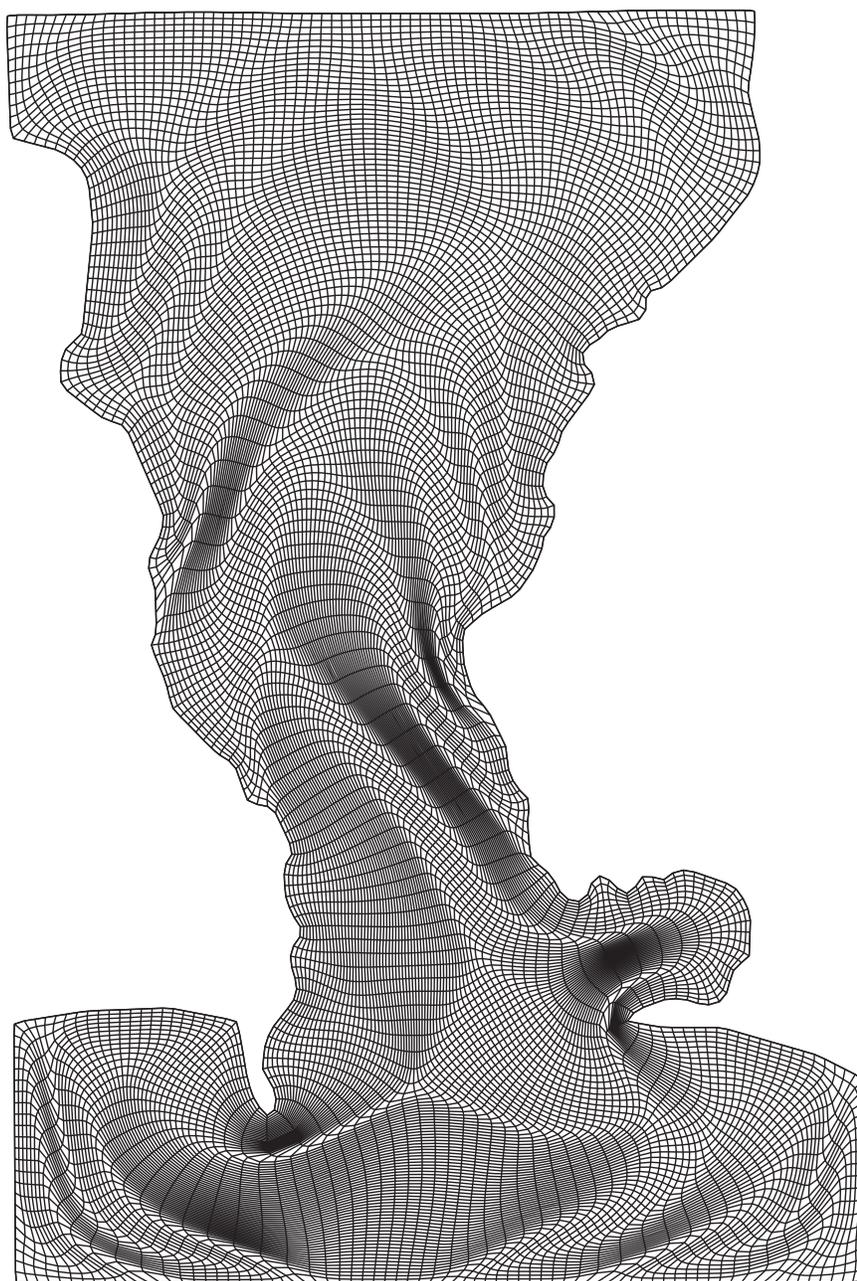


Figura C.89: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.5$, usando la versión cociente del funcional.

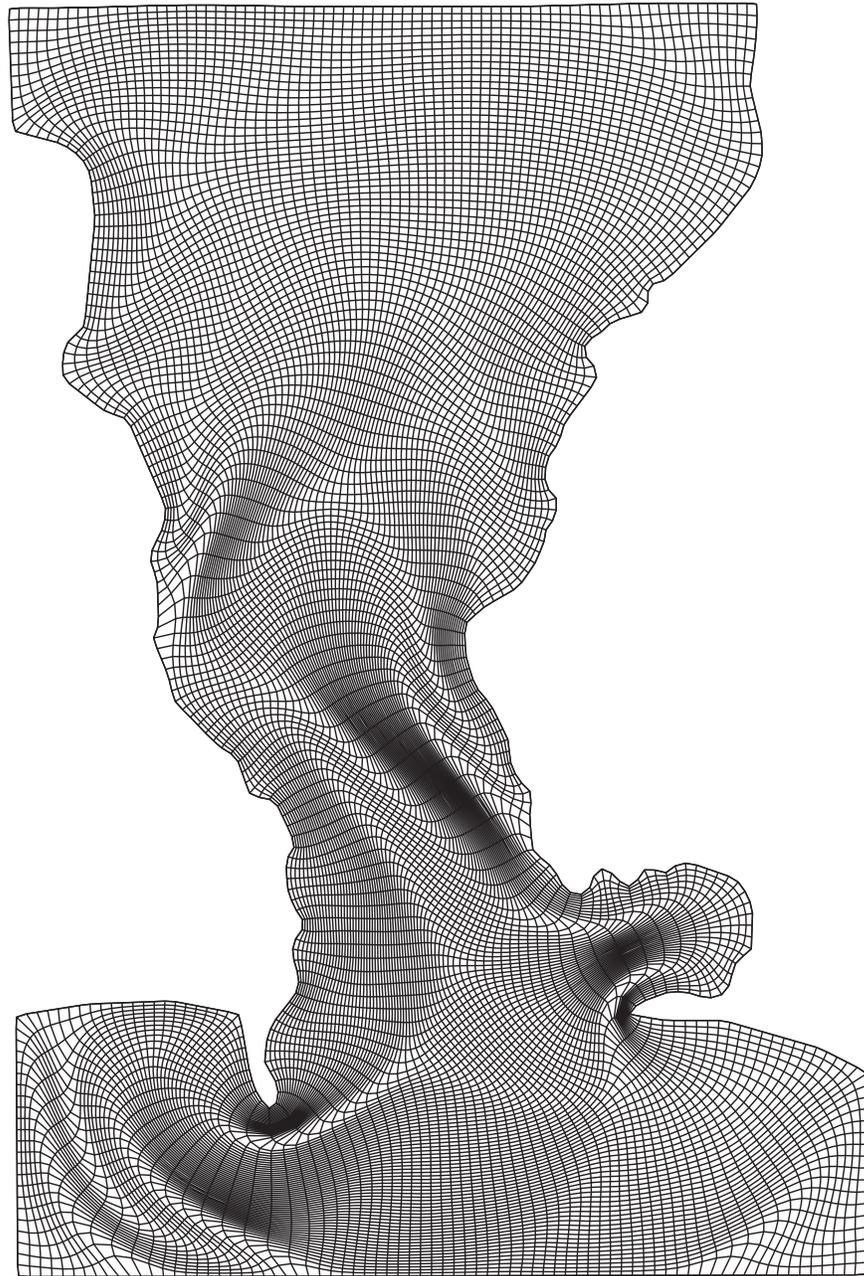


Figura C.90: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Ra}$ para $\sigma = 0.1$, usando la versión cociente del funcional.

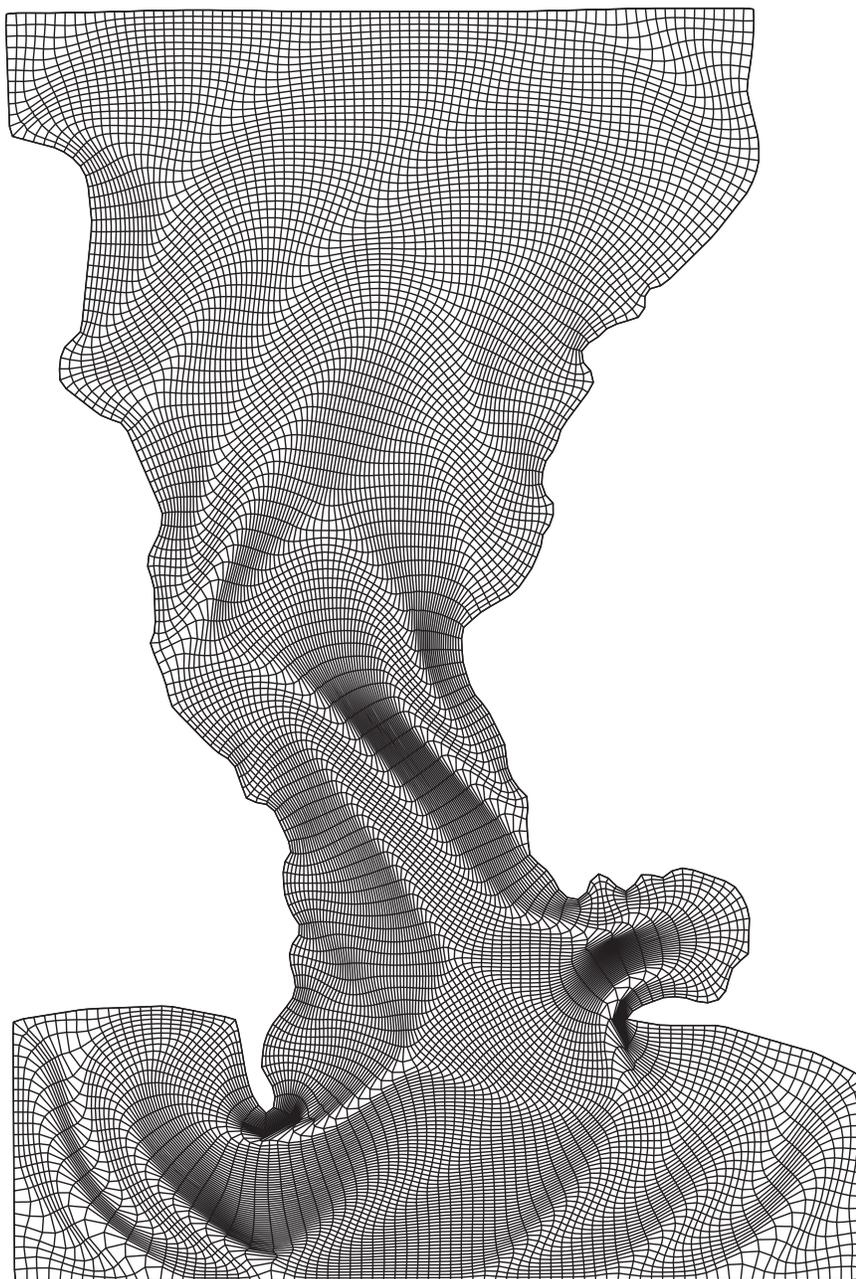


Figura C.91: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.5$ y $\beta = 1.0$.

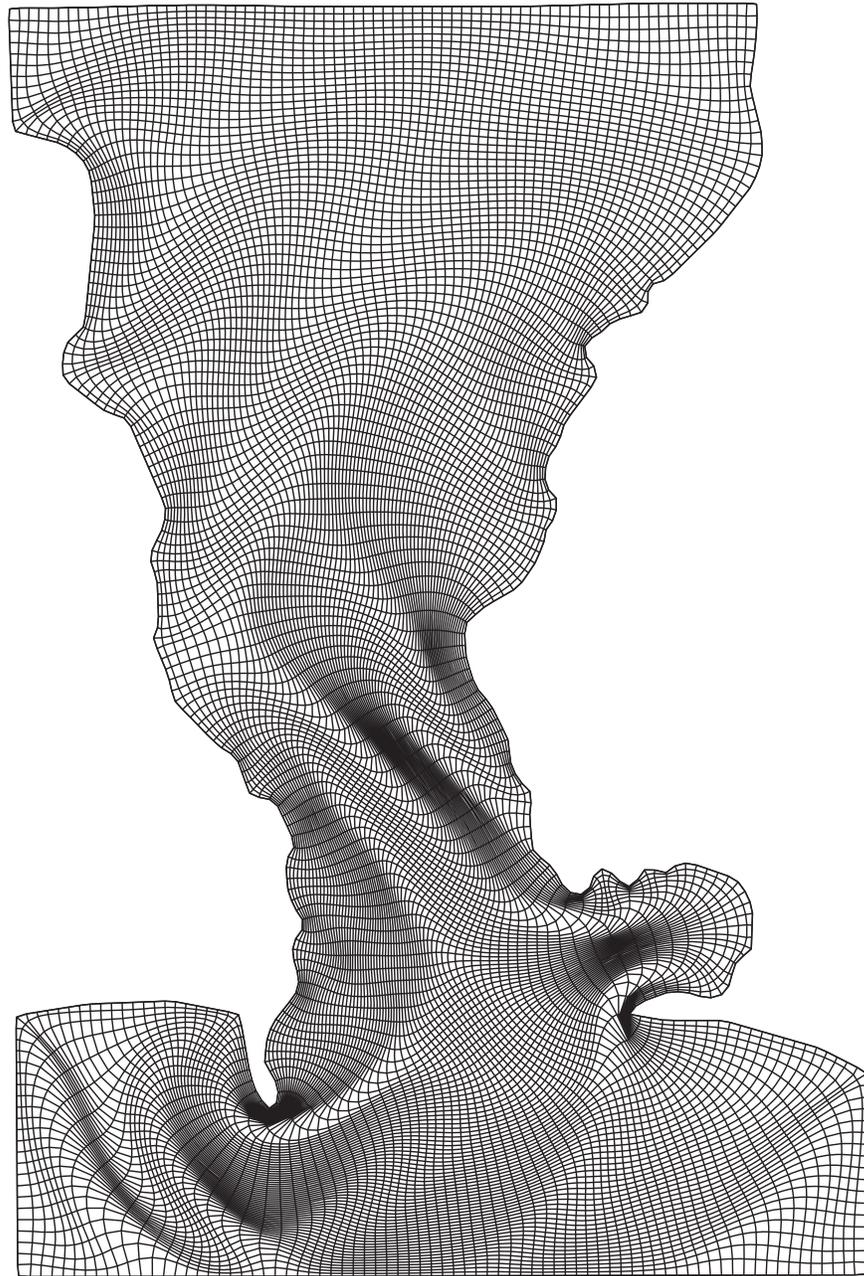


Figura C.92: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma) F_{Rd}$ para $\sigma = 0.1$ y $\beta = 1.0$.

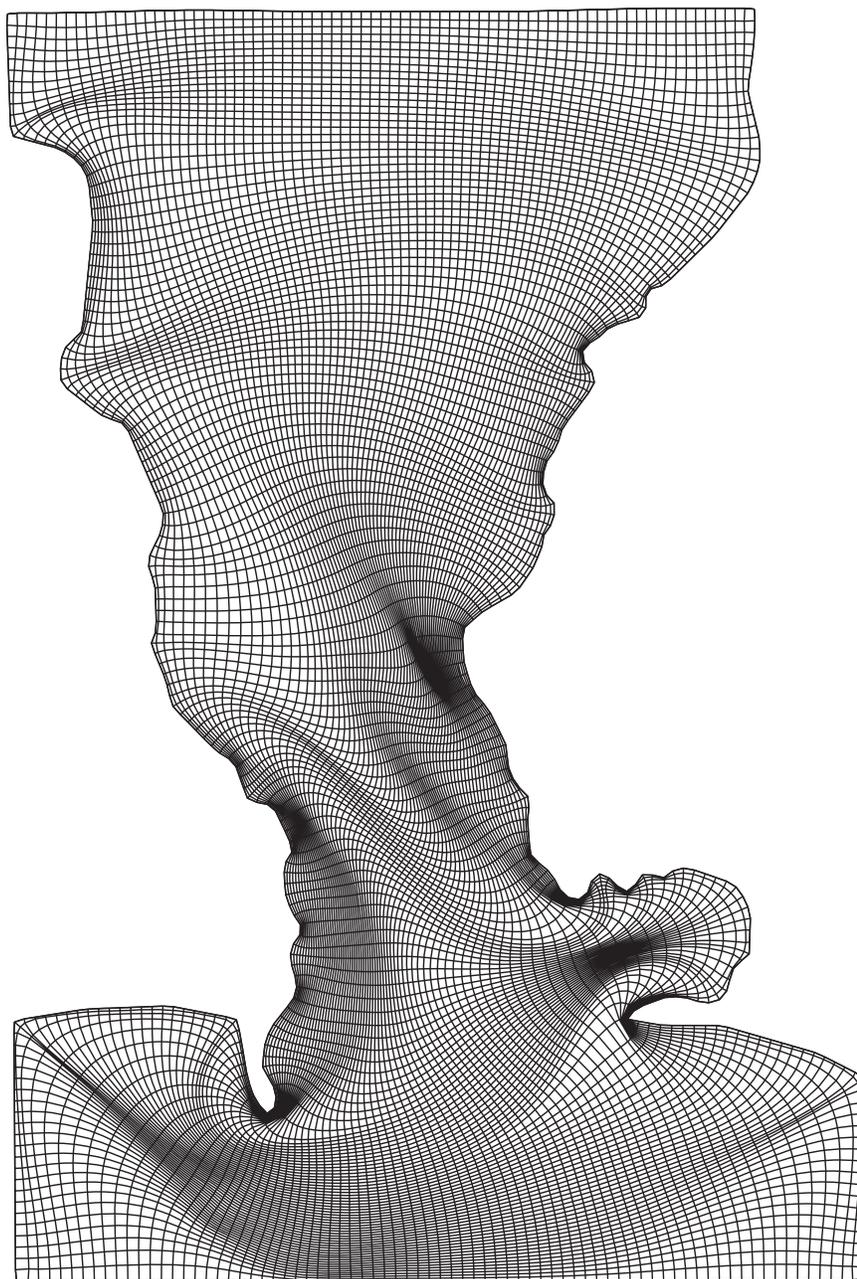


Figura C.93: Strait of Gibraltar, malla de 77×170 , obtenida optimizando $\sigma S_{\omega, \epsilon} + (1 - \sigma)F_{Rd}$ para $\sigma = 0.01$ y $\beta = 1.0$.

Bibliografía

- [1] Acosta, G. and Durán, R. *Error estimates for \mathcal{Q}_1 isoparametric elements satisfying a weak angle condition*, SIAM J. Numer. Anal., **38**, pp. 1073–1088, 2001.
- [2] Aifda, M. and Flaherty, J.E. *A geometrical approach to mesh smoothing*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., **192**, pp. 4497–4514, 2003.
- [3] Akcelik, V., Jaramaz, B. and Ghattas, O. *Nearly orthogonal two-dimensional grid generation with aspect ratio control*, Journal of Computational Physics, **171**, pp. 805–821, 2001.
- [4] Allievi, A. and Calisa, S.M. *Application of Bubnov-Galerkin formulation to orthogonal grid generation*, Journal of Computational Physics, **98**, pp. 163–173, 1992.
- [5] Anderson, D.A. *Equidistribution schemes, Poisson generators and adaptive grids*, Appl. Math. Comp. **24**, pp. 211–227, 1987.
- [6] Amsden, A.A. and Hirt, C.W. *A simple scheme for generating general curvilinear grids*, Journal of Computational Physics, **1**, pp. 348–359, 1973.
- [7] Apel, t. *Anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral finite elements*, Computing, **60**, pp. 157–174, 1998.
- [8] Arbenz, P., *Einführung in Matlab*, URL <https://www.inf.ethz.ch/personal/arbenz/MatlabKurs/node88.html>, sept. 2008.
- [9] Artyomova, N.A., Khairullin, A.F. and Khairullina, O.B., *Generation of curvilinear grids in multiply connected domains of complex topology*, in Advances in Grid Generation, Ed. by O.V. Ushakova, Nova Science Publishers, Inc., New York, pp. 161–187.
- [10] Arunakirinathar, K. and Reddy, B.D. *Some geometrical results and estimates for quadrilateral finite elements*, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., **122**, pp. 307–314, 1995.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Azarenok B.N. and Ivanenko, S.A., *Application of adaptive grids in numerical analysis of time-dependent problems in gas dynamics*, Comput. Math. Math. Phys., **40**, pp. 1330–1349, 2000.
- [12] Azarenok, B.N. *Variational barrier method of adaptive grid generation in hyperbolic problems of gas dynamics*, SIAM J. Numer. Anal. **40**, No. 2, pp. 651–682, 2002.
- [13] Azarenok, B.N. *Application of the Variational Barrier Method in Hyperbolic Gas Dynamics Problems*, Comput. Math. Math. Phys. **43**, pp. 1025–1047, 2003.
- [14] Azarenok, B.N. *A variational hexaedral grid generator with control metric*, Journal of Computational Physics, **218**, pp. 720–747, 2006.
- [15] Azarenok, B.N. *Variational method for adaptive mesh generation*, Comput. Maths. Math. Phys., **48**, No. 5, pp. 786–804, 2008.
- [16] Azarenok, B.N. *2D structured grid generation method producing a mesh with prescribed properties near boundary*, Engineering with Computers, **28**, Issue 4, pp. 409–418, 2012.
- [17] Babůska, I. and Aziz, A.K. *On the angle condition in the finite-element method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **13**, No. 2, pp. 214–226, 1976
- [18] Babůska, I. and Rheinboldt, W.C. *A-posteriori error estimates for the finite element method*, Internat. J. Numer. Meth. Engng., **12**, No. 10, pp. 1597–1615, 1978.
- [19] Babůska, I., Flaherty, J.E. and Chandra J. (eds.), *Adaptive Computational Methods for PDEs*, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [20] Balendran, B. *A direct smoothing method for surface meshes*, in Proceedings of 8th International Meshing Roundtable, pp. 189–193, 1999.
- [21] Bank R.E. and Xu J. *An algorithm for coarsening unstructured meshes*, Numerische Mathematik **73**, pp. 1–36, 1996.
- [22] Baker, B.S., Grosse, E. and Rafferty, C.S. *Non-obtuse triangulation of a polygon*, Discrete & Computational Geometry, June 1988, **3**, Issue 2, pp 147–168, 1988.
- [23] Baker, T.J. *Deformation and quality measures for tetrahedral meshes*, in Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000.
- [24] Baker, T.J. *Mesh movement and metamorphosis*, Engineering with Computers, **18**, pp. 188–198, 2002.
- [25] Barrera, P. and J.E. Castillo *A Large Scale Optimization problem arising from Numerical Grid Generation*, Tech. Rep. Dept. of Math. an Stat. Univ. of New Mexico, 1986.

-
- [26] Barrera, P. y Pérez, A. *Numerical Grid Generation* presentado en el III Congreso de la Sociedad Cubana de Matemáticas, 1988.
- [27] Barrera, P., Castellanos, N. and Pérez, A. *A new functional for grid generation*, 4th Workshop of Numerical Analysis, Mérida, Yuc., 1989.
- [28] Barrera, P., Castellanos, N. and Pérez, A. *A new functional for grid generation*, Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization, pp. 185–197, 1991.
- [29] Barrera, P., Castellanos, N. and Pérez, A. 1993. *Curvilinear coordinate system generation over plane irregular regions*, Vínculos Matemáticos No. 133. Dept. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México.
- [30] Barrera, P., Castellanos, L., y Pérez, A. 1994. *Métodos Variacionales Discretos para la Generación de Mallas*, DGAPA-UNAM, México.
- [31] Barrera, P., González, G., Pérez, A. y Castellanos, L. 1994. *Manual de Usuarios del Sistema UNAMALLA v. 1.0: Generación de Mallas Planas sobre Regiones Irregulares* DGAPA-UNAM, México.
- [32] Barrera, P. and Tinoco J.G. . *Smooth and Convex Grid Generation over General Plane regions* in Mathematics and Computer in Simulation. 1997.
- [33] Barrera, P., García, I. y González, G. 2000. *Manual Operativo del Sistema UNAMALLA v. 2.0 para PC*, Cuadernos de Investigación, **21** Área I, Física-Matemáticas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Coahuila, México.
- [34] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F., *Variational grid generation using exponentials of area*, Proceedings, 10th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pp.111-119, October 7-10, 2001.
- [35] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F., *Robust discrete grid generation on plane irregular regions*, Comput. Math. Math. Phys., **43**, pp. 845–854, 2003.
- [36] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J. Castellanos-Noda, L, Pérez-Domínguez, A. and González-Flores, G.F., *Area functionals for high quality grid generation*, Proceedings of 4o. Congreso Internacional, 2o. Congreso Nacional sobre Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, 2007.
- [37] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F. and Tinoco-Ruiz, J.G., *Generating quality structured convex grids on irregular regions*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, **34**, pp. 76–89, 2009.
- [38] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J. Castellanos-Noda, L, Pérez-Domínguez, A. and González-Flores, G.F., *Adaptive discrete harmonic grid generation*, Mathematics and Computers in Simulation, **79**, Issue 6, pp. 1792-1809, 2009.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [39] Barrera-Sánchez, P., Cortés, J.J., Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F. and Tinoco-Ruiz, J.G., *Smoothness and Convex Area Functional—Revisited*, SIAM J. Sci. Compu., **32**, No. 4, pp. 1913–1928, 2010.
- [40] Barrera-Sánchez, Cortés-Aguirre, J.J., González-Flores, G.F., *Harmonic hexahedral structured grid generation*, Mathematical and Computer Modelling **57**, pp. 2289–2301, 2013.
- [41] Barrera-Sánchez, Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F., *A new functional for improving cell area distribution*, Proceedings of V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, **43**, ISBN: 978-84-941407-6-1, pp. 1310–1321, 2013.
- [42] Barrera-Sánchez, P., García-Cano, G.A. and González-Flores, G.F., *Geometric adaptive functionals for structured grid generation*, Proceedings of 11th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Conference on Computational Mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ISBN: 978-84-942844-7-2, pp. 2590–26103, 2014.
- [43] Barrera-Sánchez, P. and González-Flores, G.F., *New quality measures for quadrilaterals and new discrete functionals for grid generation*, Proceedings of Congress on Numerical Methods in Engineering, ISSN: 978-84-947311-0-5, pp. 594-605, 1388-1399, 2017.
- [44] Bhatia R.P. and Lawrence K.L. *Two-dimensional finite element mesh generation based on stripwise automatic triangulation*, Computers and Structures **36**, pp. 309–319, 1990.
- [45] Birkhoff, G., and Lynch, R.E. 1984. *Numerical Solution of Elliptic Problems*, SIAM, Philadelphia.
- [46] Brackbill, J.U., and Saltzman, J.S. 1982. *Application on Generalizations of Variational Methodos for Generating Adaptive Meshes*, in *Numerical Grid Generation*, J.F. Thompson, ed. Noth-Holland, New York, 865–884.
- [47] Branets, L.V. and Garanzha, V. A. *Global condition number of trilinear mapping. Application to 3D grid generation*, Communications on applied mathematics, ISBN 5-201-09766-9, Computing Centre RAS, Moscow, pp. 45–60, 2001.
- [48] Branets, L.V. and Garanzha, V. A. *Distortion measure for trilinear mapping. Application to 3-D grid generation*, Numer. Linear Algebra Appl. **9** No. 6–7, pp. 511–526, 2002.
- [49] Bobylév, N.A, Ivanenko, S.A. and Kazunin, A.V. *On piecewise-smooth homeomorphic mappings of bounded domains and its applications to the theory of grids*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **43**, No. 6, pp. 772–781, 2003.

-
- [50] Borouchaki, H., Frey, P and George, P. L. *Unstructured Triangular-Quadrilateral Mesh Generation. Application to Surface Meshing*, Proceedings, 5th International Meshing Roundtable, pp. 229–242, 1996.
- [51] Borouchaki, H. and Frey, P. *Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation*, J. Numer. Methds. Engrg., **41**, pp. 915–934, 1998.
- [52] Bossen, F. and Heckbert, P.S. *A pliant method for anisotropic mesh generation*, in Proceedings of 5th International Meshing Roundtable, pp. 63–74, 1996.
- [53] Buscaglia, G.C., and Dari, E.A., *Improving the quality of three-dimensional finite element meshes: an optimization based method*, Proc. PACAM'IV 4th Pan American Congress of Applied Mechanics, 3-6 January 1995, Buenos Aires, Argentina, **3**, pp. 481–486, 1995.
- [54] Catherall, D. *The adaptation of structured grids to numerical solutions for transonic flow*, Int. J. Numer. Methds. Engrg., **32**, pp. 921–937, 1991.
- [55] Canann, S.A., Stephenson, M.B. and Blacker, T., 1993. *Optisoothing: An optimization-driven approach to mesh smoothing*. Finite Elements in Analysis Design, **13**, pp. 185–190.
- [56] Cannan, S.A., Tristano, J.R. and Staten, M.L. 1998. *An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes*, In: Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Labs, pp.479-494.
- [57] Cao, W., Huang, W. and Russell, R.D. *A study of monitor functions for two dimensional adaptive mesh generation*, SIAM, J. Sci. Comput., **20**, pp. 1978–1994, 1999.
- [58] Cao, W., Huang, W. and Russell, R.D. *A moving mesh method based on the geometric conservation law*, SIAM, J. Sci. Comput., **24**, pp. 118–142, 2002.
- [59] Cao, W., Huang, W. and Russell, R.D. *Approaches for generating moving adaptive meshes: location versus velocity*, Applied Numerical Mathematics, **47**, pp. 121–138, 2003.
- [60] Carcaillet, R., Dulikravich, G.S. and Kennon, S.R. *Generation of solution-adaptive computational grids using optimization*. Computer Methods in applied mechanics and engineering **57**, pp. 279–295, 1986.
- [61] Carcaillet, R., Dulikravich, G.S. and Kennon, S.R. *Optimization of three-dimensional computational grids*. J. Aircraft **23**, No. 5, pp. 415–, 1986.
- [62] Castellanos, J.L. *Generación numérica de redes usando Newton Truncado*. Tesis Doctoral, ICIMA, Ministerio de la Ciencia, Tecnología y el Medio Ambiente. La Habana, Cuba, 1994.

BIBLIOGRAFÍA

- [63] Castillo, J.E. *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation I. on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*. J.Hauser and C. Taylor eds., pp. 35–43, 1986.
- [64] Castillo, J.E. and Barrera, P. *A large scale optimization problem arising from numerical grid generation*, Tech. Rep., Dept. of Math. and Statistics, Univ. of New Mexico, 1986
- [65] Castillo, J.E. *On variational grid Generation*. Ph.D. thesis, University of Mexico, Albuquerque, New Mexico, 1987.
- [66] Castillo, J.E., Steinberg, S., and Roach, P.J. 1997. *Mathematical aspects of variational grid generation II*. J. Comp. and Appl. Math. **20**, pp. 127–135.
- [67] Castillo, J.E., 1991. *Mathematical aspects on numerical grid generation*. SIAM Press.
- [68] Castillo, J.E. *Discrete variational grid generation* in *Mathematical aspects on Numerical grid generation*. J.E. Castillo, ed. SIAM Press, pp. 35–58, 1991.
- [69] Castillo, J.E. *An adaptive direct variational grid generation method*, *Computers Math. Applic.* **21**, No. 5, pp. 57–64, 1991.
- [70] Castillo, J.E. and Otto, J.S. *A generalized length strategy for direct optimization in planar grid generation* in *Mathematics and Computer in Simulation*, **44**, pp. 441–456, 1997.
- [71] Cavendish, J.C. *Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method*, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **8**, pp. 679–696, 1974
- [72] Chalasani, S., Thompson, D. and Soni, B., *Topological adaptivity for mesh quality improvement*, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 107–116, 2002.
- [73] Charakhch'yan, A.A. and Ivanenko, S.A., *A variational form of the Winslow grid generator*. *J. Comput. Phys.* **136**, pp. 385–398, 1997.
- [74] Chaudhuri, D., Kushwaha, N.K., Sharif, I. and Samal, A. *Finding best-fitted rectangle for regions using a bisection method*, *Machine Vision and Applications*, **23**, 6, pp. 1263-1271, 2012.
- [75] Chen, Z., Tristano, J.R., Kwok, W. *Combined Laplacian and optimization-based smoothing for quadratic mixed surface meshes*, In: *Proceedings of 12th International Meshing Roundtable*, pp. 361–370, 2003.
- [76] Cheng, S.W., Dey, T.K., Edelsbrunner, H., Facello, M.A. and Teng, S.H. *Sliver exudation*, *J. of the ACM*, **47**, No. 5, pp. 883–904, 2000.

-
- [77] Chikhliwala, E.D. and Yorktsos, Y.C. *Application of orthogonal mapping to some two-dimensional domains*, Journal of computational physics, **57**, pp. 391–402, 1985.
- [78] Ciarlet, P.G. and Raviart P.A. *Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **1**, pp. 217–249, 1972.
- [79] Ciarlet, P.G. and Raviart P.A. *General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^n with application to finite elements*, Arch. Rational Mech. Anal. **46**, pp. 177–199, 1972.
- [80] Conti, C., Morandi, R. and Spitaleri, R.M. *An algebraic-elliptic algorithm for boundary orthogonal grid generation*, Applied Mathematics and Computation, **162**, pp. 15–27, 2005.
- [81] Conti, C., Morandi, R. and Spitaleri, R.M. *An algebraic grid optimization algorithm using condition numbers*, Applied Numerical Mathematics, **56**, pp. 1123–1133, 2006.
- [82] Coll, A. *Mejora de la calidad de mallas para elementos finitos*, Tesis de Maestría, Univ. Pol. Catalunya, 2003.
- [83] de la Cruz, A. *Generación numérica de mallas armónicas-adaptivas y su aplicación a la solución de algunas EDP's*, Tesis de maestría, UNAM, 2005.
- [84] The CUBIT Geometry and Mesh Generation Toolkit, URL <https://cubit.sandia.gov/>, CUBIT 15.3 Released August 23, 2017.
- [85] de Boor, C. *Good approximation by splines with variable knots II*, Springer Lecture Notes Series, **363**, Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [86] Dembo, R.S., and Steihaug, T. *Truncated Newton Algorithms for Large-Scale Unconstrained Optimization*, Math. Prog., **26**, pp. 190–212, 1983.
- [87] Dey, T.K. *Good triangulations in plane*, Technical Report CSD-TR-973, Purdue University, 1990.
- [88] Dannelongue H.H. and Tanguy P.A. *Three-dimensional adaptive finite element computations and applications to nonnewtonian flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **13**, pp.145–165, 1991.
- [89] Dari, E.A. and Buscaglia, G.C. *Mesh optimization: how to obtaining good unstructured 3D finite element with not-so-good mesh generators*, Struct. Optim, **8**, pp. 181–188, 1994.
- [90] Díaz, A., Kikucho, N. and Taylor, J. *A method of grid optimization for finite element methods*, Comp. Methods in Appl. Mech. Engrng., **41**, pp. 29–45, 1983.

BIBLIOGRAFÍA

- [91] Domínguez-Mota, F.J. *Sobre la generación variacional de mallas casiortogonales en el plano*, Tesis de Doctorado, UNAM, México, 2005.
- [92] Duraiswami, R. and Prosperetti, A. *Orthogonal mapping in two dimensions*, Journal of Computational Physics, **98**, pp. 254–268, 1992.
- [93] Dwyer, H.A. *Grid adaptation for problems in fluid dynamics*, AIAA Journal, **22**, Dec. 1984, pp. 1705–1712.
- [94] Eberly, D. *Minimum-area rectangle containing a set of points*, Geometric Tools, LLC, URL <http://www.geometrictools.com/>, 2015.
- [95] Eča, L. *2D orthogonal grid generation with boundary point distribution*, J. Comp. Phys. **125**, pp. 440–453, 1996.
- [96] Egidi, N., Maponi, P., *An efficient version of the direct method for planar grid generation*, Rendiconti di Matematica, Serie VII 23 (2003) 235-256.
- [97] Egidi N., Maponi P., *A class of network optimization methods for planar grid generation*, Applied Numerical Mathematics, v.52 n.4, p.363-379, March 2005.
- [98] Egidi N., Maponi P., *Block decomposition techniques in the generation of adaptive grids*, Math. Comp. Sim., 78, 5-6, pp. 593-604, 2008.
- [99] Eiseman, P.R. *Numerical Grid Generation*, in *Numerical Grid Generation*, J.F. Thompson, ed., North-Holland, New York, pp. 193-226, 1982.
- [100] Eiseman, P.R. *Alternating direction adaptive grid generation*, AIAA Journal, **23**, No. 4, pp. 551–560, 1985.
- [101] Escobar, J.M., Rodríguez, E., Montenegro, R., Montero, G., González-Yuste, J.M. *Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **192**, No. 25, 2775–2787, 2003.
- [102] Escobar, J.M., Montenegro, R., Rodríguez, E., Montero, G., 2011. *Simultaneous aligning and smoothing of surface triangulations*, Engineering with Computers **27**, No. 1, pp. 17–29.
- [103] Escobar JM, Rodríguez E., Montenegro R., Montero G., González-Yuste J.M., *SUS code: simultaneous mesh untangling and smoothing code*, Technote, <http://www.dca.iusiani.ulpgc.es/SUScode/TechNote.pdf>, v. 1.02, 2011.
- [104] Fukuda J. and Suhara, J. *Automatic mesh generation for finite element analysis*, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, (Ed. J. T. Oden, R. W. Clough and Y. Yamamoto), UAH Press, Huntsville, Alabama, 1972.
- [105] Femap Web page <http://www.femcomp.se/femap.html>.

-
- [106] Field, D. *Laplacian smoothing and Delaunay triangulations*, Communications in Numerical Methods in Engineering, **4**, pp. 709-712, 1988.
- [107] Field, D. *Give me a good mesh*, Proceedings of 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, p.3, October 1996.
- [108] Field, D. *Qualitative measures for initial meshes*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **47**, pp. 887-906, 2000.
- [109] Felippa, C.A. *Numerical experiments in finite element grid optimization by direct energy search*, App. Math. Modelling, **1**, pp. 239-244, 1976.
- [110] Felippa, C.A. *Numerical experiments in finite element grid optimization by direct energy search*, App. Math. Modelling, **1**, pp. 93-96, 1977.
- [111] Freitag, L, Jones, M. and Plassmann, P. *An efficient parallel algorithm for mesh smoothing*, in Proceedings of 4th International Meshing Roundtable, pp. 47-58, Sandia National Laboratories, 1995.
- [112] Freitag, L, and Ollivier-Gooch, C. *A comparison of tetrahedral mesh improvement*, in Proceedings of 5th International Meshing Roundtable, pp. 87-100, Sandia National Laboratories, 1996.
- [113] Freitag, L.A. *On combining Laplacian and optimization-based mesh smoothing techniques*, in AMD trends in unstructured mesh generation, ASME 220, pp. 37-43, 1997.
- [114] Freitag, L.A. and Knupp P.M. *Tetrahedral element shape optimization via the Jacobian determinant and condition number*, in: Proc. 8th International Meshing Roundtable, Lake Tahoe, CA, 1999, Sandia Report SAND 99-2288, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, pp. 247-258, 1999.
- [115] Freitag, L.A. and Plassmann P., 2000. *Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement*, Int. J. Num. Meth. Eng., **49**, pp. 109-125
- [116] Freitag, L.A. Knupp P. *Tetrahedral mesh improvement via optimization of the element condition number*. Int. J. Numer. Meth. Eng., **53**, pp. 1377-1391, 2002.
- [117] Freitag, L.A. Knupp P., Munson T., and Shontz, S. *A comparison of two optimization methods for mesh quality improvement*, Engineering with Computers, **22**, pp. 61-74, 2006.
- [118] Frey, P.J. and Borouchaki, H. *Geometric surface mesh optimization*, Comput. Visual Sci., **1**, pp. 113-121, 1998.
- [119] Frisch R. *The logarithmic potential method of convex programming*, Memorandum, Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.

BIBLIOGRAFÍA

- [120] Fletcher, R. *Practical Methods of Optimization 1: Unconstrained Optimization*, John Wiley, New York, 1980.
- [121] Forsythe, G.E., and Wasow, W.R. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, Wiley, New York.
- [122] Freeman, H. and Shapira, R. *Determining the minimum-area encasing rectangle for an arbitrary closed curve*, Comm ACM **18**, No. 7, pp. 409–413, 1975.
- [123] Fried, I. *Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes*, AIAA Journal, **10**, pp. 219–221, 1972.
- [124] Fukuda J. and Suhara, J. *Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis*, in *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, (J. T. Oden, R. W. Clough and Y. Yamamoto, Editors), UAH Press, Huntsville, Alabama, 1972
- [125] Garanzha, V.A. and Kaporin I.E. *Regularization of barrier variational method of grid generation*, Comput. Math. Math. Phys. **39**, pp. 1436–1440, 1999.
- [126] Garanzha, V.A. *Barrier variational generation of quasi-isometric grids*, Report. No. 0007, Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands, 2000.
- [127] Garanzha, V.A. *Barrier method for quasi-isometric grid generation*, Comput. Math. Math. Phys. **40**, pp. 1617–1637 2000.
- [128] Garanzha V.A. *Barrier variational generation of quasi-isometric grids*, Numer. Linear Algebra Appl., **8**, pp. 329–353, 2001.
- [129] Garanzha V.A. *Maximum norm optimization of quasi-isometric mappings*, Numer. Linear Algebra Appl., **9**, pp. 493–510, 2002.
- [130] Garanzha V.A. *Variational principles in grid generation and geometric modelling: theoretical justifications and open problems*, Numer. Linear Algebra Appl., **11**, pp. 535–563, 2004.
- [131] García, I.D. *Métodos de Optimización de Gran Escala y algunas aplicaciones a Funciones Parcialmente Separables*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1999.
- [132] Gargallo-Peiró, A., Roca, X., Peraire, J. and Serrate, J. *Defining quality measures for mesh optimization on parameterized CAD surfaces*, in *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, pp. 85–102. 2012.
- [133] Gargallo-Peiró, A., Roca, X., Peraire, J. and Serrate, J. *Optimization of a regularized distortion measure to generate curved high-order unstructured tetrahedral meshes*, Int. J. Numer. Meth. Engng, **103**, pp. 342–363. 2015.

-
- [134] Gargallo-Peiró, A., Roca, X., Peraire, J. and Serrate, J. *Distortion and quality measures for validating and generating high-order tetrahedral meshes*, Engineering with Computers, **31**, pp. 423–437. 2015.
- [135] Gargallo-Peiró, A., Roca, X., Peraire, J. and Serrate, J. *A distortion measure to validate and generate curved high-order meshes on CAD surfaces with independence of parameterization*, Int. J. Numer. Meth. Engng, **106**, pp. 1100–1130, 2016.
- [136] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V. 1963. *Calculus of Variations*, Prentices–Hall, Englewood, Cliffs, N.J.
- [137] Goerge, P.L. and Borouchaki, H. *Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements*, Butterworth-Heinemann, Technology & Engineering - 413 pages, 1998.
- [138] George, P.L. and Frey, S. *Mesh Generation*, Wiley & Sons, Inc., 848 pages, 2000.
- [139] Geuzaine, C., Remacle, J.-F.: Gmsh website (March 2014), <http://geuz.org/gmsh>.
- [140] Geuzaine, C., Johnen, A., Lambrechts, J., Remacle, J.-F. and Toulorge, T. *The generation of valid curvilinear meshes*, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, **128**, pp. 15–39, Springer, 2015.
- [141] Girault, V. and Raviart, P.A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: Theory and algorithms*, Springer-Verlag, Belin.
- [142] Gilding, B.H, A numerical grid generation technique, Computers & Fluids Vol. 16, 1, pp. 47-58, 1988.
- [143] Gordon, W.J. and Thiel, L.C., Transfinite mappings and their application to grid generation, in Numerical Grid Generation, Thompson, J.F. (eds.), pp.171-192, 1982.
- [144] Godunov, S.K., Belinski, Ivanov, Yu.B. and Yanenko, I.K. *Application of a class of quasi-conformal mapping in the construction of difference grids on regions with curvilinear boundaries*, Zhurnal vych. math. math.fiz. **15**, No. 6, 1975.
- [145] González Flores, G.F. *Generación de Mallas en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, Méx. 1994.
- [146] González Flores, G.F. *Un sistema automático para generar mallas suaves y convexas usando los nuevos funcionales de suavidad*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., Méx. 2003.
- [147] Haykin, S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* (2nd edition). Prentice Hall, ISBN 0132733501, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

- [148] Herrmann, L. and Asce, M. *Laplacian-isoparametric grid generation scheme*, J. Engnrs. Mech. Div. **102**, No. 5, pp. 749–907, 1976.
- [149] Hertog, D.D., Ross, C. and Terlaky, T. *On the classical logarithmic barrier function method for a class of smooth convex programming problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **73**, No. 1, pp. 1–25, 1992.
- [150] Hyun, S. and Lindgren L.E. *Mesh smoothing techniques for graded elements*, NUMIFORM'98, Netherlands, 22-25 June 1998.
- [151] Hyun, S. and Lindgren L.E. *Smoothing and adaptive remeshing schemes for graded element*, Commun. Numer. Meth. Engng. **17**, pp. 1–17, 2001.
- [152] Hua, L. *Automatic generation of quadrilateral mesh for arbitrary planar domains* (in chinese), Ph.D. thesis, Dalian University of Technology, China, 1995.
- [153] Huang, W. *A simple adaptive grid method in two dimensions*, SIAM J. Sci. Comput. **15**, No. 4 pp. 776–797, 1994.
- [154] Huang, W. *Variational mesh adaptation: isotropy and equidistribution*, Journal of Computational Physics **174**, pp. 903–924, 2001.
- [155] Hung, T.K. and Brown, T.D. *An implicit finite-difference method for solving the Navier-Stokes equation using orthogonal curvilinear coordinates*, J. Comput. Phys. **23** pp. 343–363, 1977.
- [156] Ivanenko, S.A., and Charkhch'yan, A.A., *Curvilinear Grids of Convex Quadrilaterals*, Comput. Comp. Maths. Math. Phys. C Vol. 28, No. 2, pp. 126–133, 1998.
- [157] Ivanenko, S.A., *Generation of non-degenerate grids*, Comput. Comp. Maths. Math. Phys. C Vol. 28, No. 5, pp. 141–146, 1998.
- [158] Ivanenko, S.A., *Adaptive curvilinear grids in the finite-element method*, Comp. Maths. Math. Phys. Vol. 35, 9, pp. 1071-1087, 1995.
- [159] Ivanenko, S.A. *Adaptive-harmonic grid generation and its application for numerical solution of the problems with boundary and interior layers*, Comput. Math. Math. Phys., **35**(10), pp. 1203–1220, 1995.
- [160] Ivanenko, S.A. *Adaptive-harmonic grids*, Preprint, Computing Center RAS, 1997.
- [161] Ivanenko, S.A. *Harmonic maps* in Handbook of Grid Generation, CRC Press Inc. 8.1–8.43, 1999.
- [162] Ivanenko, S.A. *Control of cell shapes in the course of grid generation*, Comput. Maths. Math. Phys., **40**, No. 11, pp. 1596–1684, 2000.

-
- [163] Ivanenko, S.A. *Optimality principle for nondegenerate grids*, Communications in applied mathematics series, Grid generation: new trends and applications in real world simulations, edited by S. A. Ivanenko, V. A. Garanzha, Russian Academy of Sciences, Computing Center, Moscow, 2001.
- [164] Ivanenko, S.A., *Selected chapters on grid generation and applications*, Dorodnicyn computer centre of RAS, ISBN 5-201-09812-6, Moscow, 2004.
- [165] Jamet, P. *Estimation of the interpolation for quadrilateral finite elements can degenerate into triangles*, SIAM J. Numer. Anal., **14**, No. 5, pp.925–930, 1977.
- [166] Jeng, Y.N. and Liou, Y.C. *A new adaptive grid generation by elliptic equations with orthogonality at all of the boundaries*, Journal of Scientific Computing, **7**, No. 1, 1992.
- [167] Joe, B. *Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations*. SIAM, J. Sci. Comp. **16**, pp. 1292–1307, 1995.
- [168] Joe, B. *Shape measures for quadrilaterals, pyramids, wedges and hexahedra*. Technical Report ZCS2008-03, 2008.
- [169] Josefsson, M. 2013. *Five proofs of an area characterization of rectangle*, Forum Geometricorum, **13**, pp. 17–21.
- [170] Jones, R.E. and Crose, J.G., *SAAS II, Finite Element Stress Analysis and Axisymmetric Solids with Orthotropic, Temperature-Dependent Material Properties*, Aereospace Corporation, No. TR-0200 (4980)-1, 1968.
- [171] Jones, R.E. *A self-organizing mesh generation program*, Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, **96**, No. 3, pp.193–199, 1974.
- [172] Kania, L. *Elliptic adaptive grid generation and area equidistribution*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **30**, pp. 481–491, 1999.
- [173] Kang, E. and Haghighi, K. *Intelligent Finite Element Mesh Generation*, Engineering with Computers **11**, pp. 70–82, 1995.
- [174] Khattri, S.K., *A New Smoothing Algorithm for Quadrilateral and Hexahedral Meshes*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 3992, Apr 2006, Pages 239–246, URL http://dx.doi.org/10.1007/11758525_32.
- [175] Kattri, S.K., *Grid Generation an adaptation by functionals*, Comp. & App. Math., pp. 235-249, 2007.
- [176] Kattri, S.K., *An effective quadrilateral mesh adaptation*, Applied Mathematics Letters **22**, pp. 369–373, 2009.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [177] Khairullina, O.B., Sidorov, A.F., and Ushakova O.V., *Variational methods of construction of optimal grids*, in Handbook of Grid Generation, Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, and N.P. Weatherill, CRC Press, Boca Raton, pp. 36-1–36-25.
- [178] Kennon, S.R. and Dulikravich, G.S. *A posteriori optimization of computational grids*. AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, January 14-17, 1985, Reno-Nevada, AIAA-85-0483, 1985.
- [179] Kennon, S.R. and Dulikravich, G.S. *Generation of computational grids using optimization*. AIAA Journal, **24**, No. 5, pp. 1069–1073, 1986.
- [180] Kennon, S.R. and Dulikravich, G.S. *Composite computational grid generation using optimization*. First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, 1986.
- [181] Kim, J., Sastry, S.P., and Shontz, S.M., *Efficient Solution of Elliptic Partial Differential Equations via Effective Combination of Mesh Quality Metrics, Preconditioners, and Sparse Linear Solvers*. Proceedings of the 19th International Meshing Roundtable, Suzanne Shontz, Ed. Springer ISBN 978-3-642-15413-3, pp. 103–120, 2010.
- [182] Kim, J., Panitanarak, Th. and Shontz S. *A multiobjective mesh optimization framework for mesh quality improvement and mesh untangling*. Int. J. Numer. Meth. Engng. **94**, pp. 20–42, 2013.
- [183] Klein, R., *Star formation with 3D adaptive mesh refinement: the collapse and fragmentation of molecular clouds*, J. Comput. Appl. Math. **109**, pp. 123–152, 1999.
- [184] Klopfer, G.H. *Analysis of a finite difference grid*. Nasa contractor report 166421, 1982.
- [185] Knupp, P. *The direct variational grid generation method extended to curves*. Appl. Math. and Comp. **43**, pp. 65–78, 1991.
- [186] Knupp, P. *A Robust Elliptic Grid Generator*. J. Comp. Phys. **100**, pp. 409–418, 1992.
- [187] Knupp, P. and Steinberg, S. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press, Inc., 1993.
- [188] Knupp, P. and Luckzak R. *Truncation error in grid generation: A case study*, Num., Method Part. Diff. Eqns. **11**, pp. 561-571, 1995.
- [189] Knupp, P. *Jacobian-weighted elliptic grid generation*, SIAM J. Sci. Comput., **17**, No. 6, pp. 1475–1490, 1996.
- [190] Knupp, P. *Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities*, Int. J. Numer. Meth. Engng., **48**, pp. 1165–1185, 2000.

-
- [191] Knupp, P. *Algebraic mesh quality metrics*. SIAM J. Sci. Comp. **23**, pp. 193–218, 2001.
- [192] Knupp, P. *Hexahedral and tetrahedral mesh untangling*, Eng. Comput. **17** pp. 261–268, 2001.
- [193] Knupp, P., *Algebraic Mesh Quality Metrics for unstructured initial meshes*, Finite Elements in Analysis and Design, **39**, No. 3, pp. 217–241, 2003.
- [194] Knupp, P. *A method for hexahedral mesh shape optimization*, Int. J. Numer. Meth. Eng., **58**, No. 2, pp. 319–332, 2003.
- [195] Knupp, P. M., *Remarks on mesh quality*, In: Proceedings of the 45th AIAA Aerospace sciences meeting and exhibit, Reno, NV, 10 pages, 2007.
- [196] Knupp P. *Tradeoff-coefficient and binary metric construction algorithms within the target-matrix paradigm*. manuscript unpublished, 2010.
- [197] Knupp, P. *Introducing the target-matrix paradigm for mesh optimization via node-movement*. Engineering with Computers **28**, pp. 419–429, 2012.
- [198] Kober, C. and Müller-Hanneman, M. *Hexahedral Mesh Generation for the Simulation of the Human Mandible*, in Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 2000.
- [199] Kober, C. and Müller-Hanneman, M. *A Case Study in Hexahedral Mesh Generation: Simulation of the Human Mandible*, Engineering with Computers, **17**, No. 3, pp. 249–260, 2001.
- [200] Kumar A. and Kumar, N. *A new approach to grid generation based on a local optimisation* in Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics '88, S. Sengupta *et al.*, eds., pp. 177–184, Pineridge Press, Swansea UK, 1988.
- [201] Lee D. and Tsuei Y.M. *A formula for estimation of truncation error of convection terms in a curvilinear coordinate system*. Journal of Computational Physics **98**, pp. 90–100, 1992.
- [202] Lee C.K. and Lo, S.H., *A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh*. Comp. & Structures **52**, No. 5, pp. 847–857, 1994.
- [203] Liseikin V.D., *The construction of regular grids on n-dimensional surfaces*, Zh. Vychisl. Mt. Mat. Fiz. (Russian), **31**, pp. 1670–1683, 1991.
- [204] Liseikin V.D., *The construction of structured adaptive grids - A review*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **36**, pp. 1–2, 1996.
- [205] Liseikin V.D., *Grid generation methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

BIBLIOGRAFÍA

- [206] Liseikin V.D., *A computational differential geometry approach to grid generation*, 2nd edn. Springer, Berlin, 2007.
- [207] Lassak, M. *Approximation of convex bodies by rectangles*. *Geometriae Dedicata* **47**, pp. 111-117, 1993.
- [208] Liao, G. *On harmonic maps* in *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation*, J.E. Castillo, ed. SIAM, Philadelphia, 1991.
- [209] Liao, G. *Variational approach to grid generation*. *Num. P.D.E's*, **8**, pp. 143-147, 1992.
- [210] Li, X.Y., Freitag, L. *Optimization-based quadrilateral and hexahedral mesh untangling and smoothing techniques*, Tech. rep., Argonne National Laboratory, 1999.
- [211] Liu, A. *Quality local refinement of tetrahedral meshes*, Ph.D. Thesis, Department of Computing Science, University of Alberta, 1994.
- [212] Liu, A. and Joe, B. *On the shape of tetrahedra from bisection*, *Mathematics of Computations*, **63**, No. 207, pp. 141–154, 1994.
- [213] Liu, A. and Joe, B. *Relationship between tetrahedron shape measures*, *BIT*, **34**, pp. 268– 287, 1994.
- [214] Liu, HL., Dai, C. Dong, L. and Tan, MG. *A novel mesh quality improvement method for boundary elements*, *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, Article ID 109542, Hindawai Publishing Corporation, 13 pages, 2012.
- [215] Lo, S.H. *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **21**, pp. 1403–1426, 1985.
- [216] Lo, S.H. *Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces*. *Comp. & Structures* **31**, No. 3, pp. 421–426, 1989.
- [217] Lo, S.H. and Lee, C.K. *On using meshes of mixed element types in adaptive finite element analysis*. *Finite Elements in Analysis and Design* **11**, pp. 307–336, 1992.
- [218] Lo, S.H. *Finite element mesh generation*, CRC Press, 2015.
- [219] López, E.J., Nigro, N.M., Storti, M.A. *Simultaneous untangling and smoothing of moving grids*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **76**, pp. 994–1019, 2008.
- [220] López, I.J., M. Brovka, Escobar, J.M., Montenegro, R., Socorro, G.V. *Strategies for optimization of hexahedral meshes and their comparative study*, *Engineering with Computers* **3**, Issue 1, pp. 33–43, 2017.
- [221] Lyra, M., E. de Carvalho, D.K. *A computational methodology for automatic two-dimensional anisotropic mesh generation and adaptation*, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, **XXVIII**, No. 4, pp. 399–412, 2006.

-
- [222] Marcum, D. L. and Gaither, K. P., *Solution adaptive unstructured grid generation using pseudo-pattern recognition techniques*, Proceedings, 13th Computational Fluid Dynamics Conference, 1997, AIAA Paper 1997-1860.
- [223] Mastin, C.W. and Thompson, J.F., *Elliptic systems and numerical transformations*, ICASE Report 76-14, NASA Langley Research Center, 1976.
- [224] Mastin, C.W. and Thompson, J.F. *Elliptic Systems and Numerical Transformations*, J. Math. Anal. App., 62, pp. 52–62. 1978.
- [225] Mastin, C.W. *Error Induced by Coordinate System on Numerical Grid Generation*, J.F. Thompson, ed., pp. 31–40. North Holland, New York, 1982.
- [226] Mastin, C.W. *Linear variational methods and adaptive grids*, Computers Math. Applic., **24**, No. 5/6, pp. 51–56, 1992
- [227] Matsuno, K. and Dwyer, H.A. *Adaptive methods for elliptic grid generation*, J. of Computational Physics, **77**, pp. 40–52, 1988.
- [228] McNeice, G.M. and Marcal, P.V. *Optimization of finite element grids based on minimum potencial energy*. Journal of Engineering for Industry, February 1973, pp. 186–190.
- [229] Mei, G., Tipper, J.C. and Xu, N. *The modified direct method: an iterative approach for smoothing planar meshes*. Procedia Computer Science **18**, pp. 2436–2439, 2013.
- [230] Menéndez Díaz, A., González Nicieza, C. and Álvarez Vigil, A.E. *Improvement of quadrilateral meshes for discretization of tunnels*. Comp. Geotech. **31**, pp. 47–56, 2004.
- [231] Mitchell, A.R., Phillips, G. and Wachspress, E. *Forbidden shapes in the finite element method*. J. Inst. Maths Applics. **8**, pp. 260–269, 1971.
- [232] Moré, J.J. and Thuente D.J. *On line search algorithms with guaranteed sufficient decrease*. Math. and Computer Science Division Preprint MCS-P153-0590, Argonne National Laboratory, Argonne, Ill. USA, 1990.
- [233] Moretti, G. *Grid Generation using classical techniques*. on *Numerical Grid Generation Techniques*. R.E. Smith. ed., pp. 1–35. NASA CP 2166, NASA Langley Research Center, Hampton VA, 1980.
- [234] Montenegro, R., Cascón, J.M., Escobar, J.M., Rodríguez, E. and Montero G. *An automatic strategy for adaptive tetrahedral mesh generation*. Applied Numerical Mathematics, **59**, pp. 2203–2217, 2009.
- [235] MSC Nastran Web page <http://www.mssoftware.com/product/msc-nastran>.

- [236] Munson, T. *Mesh shape-quality optimization using the inverse of mean-ratio metric*. Math. Program., Ser. A, **110**, pp. 561–590, 2007.
- [237] Nakamura, S., and Holts, T.L. *A new solution-adaptive grid generation method for transonic airfoil flow calculations*, NASA, Technical Memorandum 81330, 1981.
- [238] Nakamura, S. *Marching grid generation using parabolic partial differential equations*. Numerical Grid Generation, Thompson, Joe, F., Editor, Elsevier, pp. 775–786, 1982.
- [239] NX Nastran Web page <http://www.iberisa.com/productos/nxnastran.htm>.
- [240] Ohtake, Y., Belyaev, A. and Bogaevski, I. *Mesh regularization and adaptive smoothing*, Computer–Aided design, **33**, pp. 789–800, 2001.
- [241] Oddy A., Goldak J., McDill J.M., Bibby M. *A distortion metric for iso-parametric finite elements*, CSME **12**, No. 4, pp. 213–217, 1988.
- [242] Ojeda, R.B. *Métodos Directos para la Generación de Redes en Regiones Planas*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1990.
- [243] Owen, S. *An Introduction to Unstructured Mesh Generation. Part I: Meshing Algorithms* proceedings on 10th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, URL <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/>, 2001.
- [244] Owen, S. *A survey of Unstructured Mesh Generation Technology*, Department of Civil and Environmental Engineering, Ansys, Inc. <http://www.andrew.cmu.edu/sowen/survey>.
- [245] Pardhanani, A., Carey, G.F. *Optimization of computational grids*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, **4**, pp. 95–1177, 1988.
- [246] Park, Ch., Noh, J.S., Jang, I.S., and Kang, J.M. *A new automated scheme of quadrilateral mesh generation for randomly distributed line constraints*, Computer-Aided Design, **39**, pp. 258–267, 2007.
- [247] Park, J. and Shontz, S.M. *Two derivative-free optimization algorithms for mesh quality improvement*, Procedia Computer Science, **1**, pp. 387–396, 2010.
- [248] Parthasarathy, V. and Kodiyalam, S. *A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing*, J. Finite Element in Analysis and Design, **9**, pp. 309–320, 1991.
- [249] Pébay, Ph.P., *Planar quadrangle quality measures: is ther really a choice?*, Proceedings, 11th International Meshing Roundtable, pp. 53–62, 2002.
- [250] Pébay, Ph.P. and Baker, T.J. *Analysis of triangle quality measures*, Math. Comp., **72**, 244, pp. 1817–1839, 2003.

-
- [251] Perronnet A., *Triangulation par arbre-4 de triangles équilatéraux et maximisation de la qualité*, Tech. Rep. R 92015-Vol. 11 ; fasc. 3, Université Pierre et Marie Curie (Paris), 1992.
- [252] Persson, O., *Mesh size functions for implicit geometries and PDE-based gradient limiting*, Engineering with Computers, **22**, pp. 95–109, 2006.
- [253] Pébay, Ph.P. *Planar quadrilateral quality measures*, Eng. Comput., **20**, pp. 157–173, 2004.
- [254] Pingbing, M. and Zhongci, S. *Quadrilateral mesh*, **23B**, No.2, pp. 235–252, 2002.
- [255] Pirzadeh, H. *Rotating Calipers* Web Site, 1999.
- [256] Rannacher, R. and Turek, S. *Simple nonconforming quadrilateral Stokes element*, Numer. Meth. Partial Diff. Equations, **8**, pp. 97–111, 1992.
- [257] Raut, O. *Least squares fit of a rectangle to a given shape/boundary* Matlab Central File Exchange, 2011.
- [258] Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A. and Geuzaine, C., *Blossom-Quad: a non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum cost perfect matching algorithm*, Int. J. Numer. Meth. Engng, **89**, No. 9, pp. 1102–1119, 2012.
- [259] Remacle, J.-F., Toulorge, Th. and Lambrechts, J., *Robust untangling of curvilinear meshes*, Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable, **89**, No. 9, pp. 71–83, 2013.
- [260] Ren W. and Wang, X.P. *An iterative grid redistribution method for singular problems in multiple dimensions*, Journal Computational Physics, Eds. Jiao, X. and Weill, J.-C., ISBN: 978-3-642-33572-3, pp. 246–273, 2000.
- [261] Reshetnyak, Yu.G. *Estimates of the Continuity Modulus for Various Mappings*, (in Russian) Siberian Math. J., **8**, pp. 1106–1114, 1968.
- [262] Reshetnyak, Yu.G. *Mappings with bounded deformation as extremals of dirichlet type integrals*, Siberian Math. J., **9**, pp. 487–498, 1968.
- [263] Rienslaugh K. and Vierendeels J. *Grid generation for complex shaped moving domains*, in Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Grid Generation in Computation Field Simulation, Starkville, USA, April 1–5, pp. 569–578, 1996.
- [264] Rienslaugh K. and Vierendeels J., Dick, E. *Two-dimensional incompressible Navier–Stokes calculations in complex-shaped moving domains*, A celebration of the sixty-fifth anniversary of Pieter J. Zandbergen: teacher and research leader in applied mathematics, J. Engrg. Math. **34** (1–2) pp. 57–73, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

- [265] Ryskin, G. and Leal, L.G. *Orthogonal mapping*, J. Comput. Phys. **50** pp. 71–100, 1983.
- [266] Ryskin, G. and Leal, L.G. *Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique*, J. Comput. Phys. J. Fluid Mech., **148**, pp. 1–17, 1984.
- [267] Roache, P.J. *Marching methods for elliptic problems: Part 1*, Numerical Heat Transfer, **1**, No. 1, pp. 1–25, 1978.
- [268] Roache, P.J. *Marching methods for elliptic problems: Part 2*, Numerical Heat Transfer, **1**, No. 2, pp. 163–181, 1978.
- [269] Roache, P.J. *Semidirect/marching solutions and elliptic grid generation*, Applied Mathematics and Computation **10-11**, pp. 729–737, 1984.
- [270] Roache, P.J., Salari, K. and Steinberg, S. *Hybrid adaptive Poisson grid generation and grid smoothness*, Communications in Appl. Num. Meths., **7**, pp. 345–354, 1991.
- [271] Robinson, J., *Some new distortion measures for quadrilaterals*, Finite Elements in Analysis and Design **3**, pp. 183–197, 1987.
- [272] Robey, T.H. *And adaptive grid technique for minimizing heterogeneity of cells or elements*, Mathematical Geology, **27**, No.6, pp. 709–252, 1995.
- [273] Roca, X., Gargallo-Peiró, A., Sarrate, J. *Defining quality measures for high order planar triangles and curved mesh generation*, In: Quadros, W.R. (ed.) Proceedings of the 20th International Meshing Roundtable, **90**, pp. 365–383, 2011.
- [274] Ruiz-Gironés, E., Roca, X., Sarrate, J., Montenegro, R. and Escobar, J.M. *Simultaneous untangling and smoothing of quadrilateral and hexaedral meshes using an object-oriented framework*, Advances in Engineering Software, 2015.
- [275] Ruppert, J. *A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*, Proceeding SODA '93 Proceedings of the fourth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms, pp. 83–92, 1993.
- [276] Sankaranarayan, S. and Spaulding, M. L., *A study of effects of grid non-orthogonality on the solution of shallow water equations in boundary-fitted coordinate systems*, J. Comp. Phys., **184**, pp. 299–320, 2003.
- [277] Santos, J.A, *Geometría del cuadrilátero*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2010.
- [278] Sastry, S.P., Shontz, S.M., *Performance characterization of nonlinear optimization methods for mesh quality improvement*, Engineering with Computers **28**, pp. 269–286, 2012.

-
- [279] Sastry, S.P., Shontz, S.M. Vavasis, S.A. *A log-barrier method for mesh quality improvement and untangling*, Engineering with Computers **30**, pp. 315–329, 2014.
- [280] Saunders, B.V. *Algebraic Grid Generation using Tensor Product B-splines*. NASA Contractor Report 177968. NASA Langley Research Center, Hampton VA., 1985.
- [281] Saunders, B.V. *Boundary fitted grid generation using tensor product B-splines*, in Numerical Methods for Fluids Dynamics, (Edited by M.J. Baines and K.W. Morton), pp 309–315, Clarendon Press, oxford, 1993.
- [282] Serrate, J. and Huerta A. *Efficient unstructured quadrilateral mesh generation*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **49**, pp. 1327–1350, 2000.
- [283] Serrate, J. and Huerta A. *An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size*, Communications in numerical methods in engineering **17**, No. 2, pp. 89–99, 2001.
- [284] Serrate, J. y Coll A. *Minimizaci3n de la distorsi3n de mallas formadas por cuadriláteros o hexaedros*, Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. **23**, No. 1, pp. 55–76, 2007.
- [285] Scarlatos L.L and Pavlidis T. *Optimizing triangulations by curvature equalization*, Proceedings Visualization'92. IEEE Computer Science Press, pp. 333–339, 1992;
- [286] Serezhnikova, T.I., Sidorov, A.F. and Ushakova, O.V. *On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications*, Sov. J. Numer. Anal. Math Modelling. **4**, No. 2, pp. 137–155, 1989.
- [287] Shewchuk, J. R. *What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures* unpublished preprint, December 31, 2002.
- [288] Shephard, M. and Georges, M. *Automatic three dimensional mesh generation by octree technique* Int. J. Num. Metds. Engrg. **32**, pp.709–749, 1991.
- [289] Shimada, K., Yamada, A. Itoh, and Itoh, T. *Anisotropic triangular meshing of parametric surfaces via close packing of ellipsoidal bubbles*, Int. J. Comp. Geometry and Appl., 2000.
- [290] Shipeg, M., Serge N. and Zhong-ci, S. *On the interpolation error estimates for Q_1 quadrilateral finite elements*, SIAM J. Numer. Anal. **47**, No. 1, pp. 467–486, 2008.
- [291] Shivanna K., Grosland N. and Magnotta V. *An analytical framework for quadrilateral surface mesh improvement with an underlying triangulated surface definition*, Proceedings of 19th international meshing roundtable, pp 85–102, 2010.
- [292] Simpson, C. Ernst, C.D., Knupp, P., Pébay, P.P. and Thompson, D.C., *The Verdict Library Reference Manual*, Sandia National Laboratories, URL <http://www.vtk.org/Wiki/images/6/6b/VerdictManual-revA.pdf>, April 2007.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [293] Smith, R.E. *Algebraic Grid Generation on Numerical Grid Generation*, J.F. Thompson, ed., pp. 137–170. North Holland. New York, 1982.
- [294] Soni, B.K. and Yang, J.C. *General purpose adaptive grid generation system*, AIAA-92-0664, Aerospace Science Meeting, Reno NV, 1992.
- [295] Soni, B.K., Thompson, J.F. and Weatherbill, N.P. *Handbook of Grid generation*, CRC Press, Inc., 1999.
- [296] Soni, B.K., Koomullil, R., Thompson, D.S., Thornburg, H. *Solution adaptive grid strategies based on point redistribution*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 1183–1204, 200.
- [297] Spekreijse, S.P. *Elliptic Generation Systems in Handbook of Grid Generation*, Thompson, J.F., Soni, B.K. and Weatherill N.P. eds., CRC Press, Inc., 4.1–4.49, 1999.
- [298] Steger, J.L, and Sorenson, R.L., Use of hyperbolic partial differential equations to generate body fitted coordinates, Numerical Grid Generation Techniques, pp. 73-120, NASA Conference Publication 2166, 1980.
- [299] Steinberg, S., and Roache, P.J. *Variational Grid Generation*, Num. Meth. for P.D.E.s., **2**, 71–96, 1986.
- [300] Steinberg, S., and Roache, P.J. *Anomalies in Grid Generation on Curves*, *J. Comp. Physics*, **91**, 255–277, 1990.
- [301] Steinberg, S., and Roache, P.J. *Variational Curve and Surface Grid Generation*, *J. Comp. Phys.*, **100**, 163–178, 1992.
- [302] Steinberg, S., Knupp, P. and Roache, P.J. *Fundamentals of grid generation*, CRC Press., 1994.
- [303] Strang, G. and Fix, G.J. *Analysis of the finite element method*, Prentices Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [304] Sun, L., Yeh, G.T., Lin, F.P. and Zhao, G. *Automatic quadrilateral mesh generation and quality improvement techniques for an improved combination method*, Comput. Geosci. **19**, pp. 371–388, 2015.
- [305] Teran, J., Molino, N., Fedkiw, R. and Bridson, R. *Adaptive physic based tetrahedral mesh generation using level sets*, Engineering with Computers, **21**, pp. 2–18, 2005.
- [306] Thompson, J.E., Thames, F.C., and Mastin, C.W., *Automatic numerical generation of body fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two dimensional bodies*, *J. Computational Physics*, **15**, No. 3, pp. 299–319, 1974.

-
- [307] Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin. C.W. *Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies*, NASA Report CR-2729, 1977.
- [308] Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin. C.W. *TOMCAT - A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies*, Journal of Computational Physics, **24** 24, pp. 274–302, 1977.
- [309] Thompson, J.E. *General curvilinear coordinate systems*, on Numerical Grid Generation, Thompson, J.E. Ed., North-Holland, Elsevier Science, New York, 1982.
- [310] Thompson, J.E. *A survey of dynamically-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations*, AIAA, Technical Report 84-1606, 1984.
- [311] Thompson, J.E., Warsi, Z.U.A., and Mastin, C.W., *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, Elsevier Sciece, New York, 1985.
- [312] Tinoco, J.G. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares*, Tesis de Doctorado, CIMAT, México, 1997.
- [313] Tinoco, J.G. and Barrera, P. *Area functionals in plane Grid Generation in International conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*. International Society of Grid Generation, 1998.
- [314] Tinoco, J.G. and Barrera, P. *Area control in generating smooth and convex grids over general plane regions* Journal of Computational and Applied Mathematics **103**, pp. 19–32, 1999.
- [315] Tinoco, J.G., Barrera, P. and Cortés, A. *Some properties of Area in Numerical Grid Generation* Proceedings, 10th International Meshing Rountable, Sandia National Laboratories, pp. 43-54, October 7-10, 2001.
- [316] Toledo, F. *Métodos Numéricos para Mapeo Conforme con Aplicación a la generación de Mallas*. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1995.
- [317] Toussaint, G. *Solving geometric problems with the rotating calipers* in Proc. IEEE MELECON'83, 1983.
- [318] Toussaint, G. *The Rotating Calipers: An Efficient, Multipurpose, Computational Tool* in Proceedings of the International conference on Computing Technology and Information Management, Dubai, UAE, 2014.
- [319] Toulorge, T., Geuzaine, Chr., Remacle, J.-F., and Lambrechts, J. *Robust untangling of curvilinear meshes*, Journal of Computational Physics, **254**, pp. 8–26, 2013.

BIBLIOGRAFÍA

- [320] Turcke, D.J. and McNeice, G.M. *A variational approach to grid optimization in the finite element method*. Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, England, September (1972).
- [321] Turcke, D.J. and McNeice, G.M. *Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization*, Computers & Structures, **4**, pp. 499–519. 1974.
- [322] van Rens, B.J.E., Brokken, D., Brekelmans, W.A.M., and Baaijens, F.P.T. *A Two-Dimensional Paving Mesh Generator for Triangles with Controllable Aspect Ratio and Quadrilaterals with High Quality*, Engineering with Computers, **14**, pp. 248-259, 1998.
- [323] Vartziotis D. and Wipper J. *The geometric element transformation method for mixed mesh smoothing*, Eng. Comput. **25**, pp. 287–301, 2009.
- [324] Vartziotis D. and Papadrakakis, M. *Improved GETMe by adaptive mesh smoothing*, Computer Assited Methods in Engineering and Science, **20**, pp. 55–71, 2013.
- [325] Wada, Y., Hayashi, T. and Kikuchi M. *Mesh quality improvement for unstructured quadrilateral multigrid analysis*. ICESS **8** No. 4, pp-127–132, 2008.
- [326] Warzi, Z.U.A. *Basic Differential Models for Coordinate Generation on Numerical Grid Generation*. J.F. Thompson, ed., pp. 41–78. North Holland, 1982.
- [327] Warzi, Z.U.A. and Thompson, J.F. *Applications of variational methods in the fixed and adaptive grid generation*, Computers Math. Applic. **9**, No. 8/9, pp. 31–41, 1990.
- [328] Watabayshi G.Y and Galt J.A. *An optimized triangular mesh system from random points*, In Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Hauser J, Taylor C. (eds). Pineridge Press: Swansea, pp. 437–438, 1986;
- [329] Winslow, A.M. *Equipotencial zoning of two-dimensional meshes*, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore California, Report. No. UCRL-7312, 1964.
- [330] Winslow, A.M. *Numerical Solution of the quasilinear poisson equations in a nonuniform triangle mesh*, J. Comput. Phys., **2**, pp. 149–172, 1967.
- [331] Modelo de color RGB <https://es.wikipedia.org/wiki/RGB>, (consultado por última vez febrero 1, noviembre 2017).
- [332] Modelo de color CMYK https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_CMYK, (consultado por última vez febrero 1, noviembre 2017).
- [333] Wu, L. *Realization of quadrilateral mesh partition and optimization algorithm based on cloud data*, J. Computs., **6**, No. 12, pp. 2519–2525, 2011.

-
- [334] Yanenko, N.N., Kroshko, E.A., Liseikin, V.V., Fomin, V.M. V. Shapeev, P., Shitov Yu.A. *Methods for the construction of moving grids for problems of fluid dynamics with big deformations*, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28 – July 2, 1976 Twente University, Enschede, **59** of the series Lecture Notes in Physics pp. 454-459, 1976.
- [335] You, D., Mittal, R., Wang, M. and Moin, P. *Analysis of stability and accuracy of finite-difference schemes on a skewed mesh*, J. Comp. Phys., **213**, pp. 184–204, 2006.
- [336] Zavattieri, P.D., Dari, E.A. and Buscaglia, G.C., *Optimization strategies in unstructured mesh generation*, Int. J. Num. Metds. Engng., **39**, pp. 2055–2071, 1996.
- [337] Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. *2D nearly orthogonal mesh generation*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **46**, pp. 685–707, 2004.
- [338] Zhang, Y.X., Jia, Y.F., Wang, S:S.Y. *2D nearly orthogonal mesh generation with controls on distortion functions*, J. Comput. Phys. **218**, No. 2 pp. 549–571, 2006.
- [339] Zhang, Y., Bajaj, Ch. and Xu, G. *Adaptive and Quality Quadrilateral/Hexahedral Meshing from Volumetric Data*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **195**, No. 9, pp. 942–960, 2006.
- [340] Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. *Two-dimensional adaptive mesh generation*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **54**, pp. 1327–1350, 2007.
- [341] Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. *An improved nearly-orthogonal structured mesh generation system with smoothness control functions*, Journal of Computational Physics **231**, pp. 5289–5305, 2012.
- [342] Zhang, Y., Jia, Y. and Wang, S.S.Y. and Altinakar, M. *Composite Structured Mesh Generation With Automatic Domain Decomposition In Complex Geometries*, Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics **7**, No. 1, pp. 90–102, 2013.
- [343] Zhou T. and Shimada K. *An angle-based approach to two-dimensional mesh smoothing*, In: Proceedings of 9th international meshing roundtable, pp 373–384, 2000.
- [344] Zochowski, A. and Holnicki, P. *Iterative method of variational grid generation*, J. Comp. Appl. Math. 26, pp. 2181-287, 1989.