UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONFLUENCIA DE MAPEOS INDUCIDOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

LUIS JOEL ESPINOSA GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. LEOBARDO FERNÁNDEZ ROMÁN
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CUERNAVACA, MORELOS. NOVIEMBRE 2018

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor de tesis el Dr. Leobardo Fernández Román por su paciencia y apoyo en la elabotación de este trabajo.

Agradezco a mi tutora de maestría la Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez por su apoyo durante mis estudios de posgrado. También por los cursos que me dio, los cuales ayudaron a mi formación como matemático.

Agradezco a las personas que conocí en el Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca. A los profesores y alumnos de posgrado que formaron parte de mi vida durante mi estancia en el Instituto.

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres por su apoyo incondicional y su esfuerzo por ayudarme a continuar con mis estudios.

Índice general

Introducción

La teoría de hiperespacios tiene su origen en los inicios del siglo XX, cuando Felix Hausdorff define una métrica para la colección de los conjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico acotado X, a la cual se le conoce por métrica o distancia de Hausdorff. Más tarde Leopold Vietoris define para la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio X arbitrario una topología, la cual se conoce por topología de Vietoris o topología finita. En el caso de los espacios compactos y métricos, la topología de Vietoris resulta equivalente a la generada por la métrica de Hausdorff. Si denotamos a la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de X por $\mathcal{CL}(X)$, a ésta se le conoce como hiperespacio de cerrados de X, que en el caso de los continuos, es decir, de los espacios compactos, métricos y conexos, si X es un continuo entonces $\mathcal{CL}(X)$ resulta ser un continuo. Además de $\mathcal{CL}(X)$, algunos de sus subespacios también se les conoce como hiperespacios y algunos de los que han sido estudiados son, el hiperespacio de cerrados de a lo más n componentes $\mathcal{C}_n(X)$, el hiperespacio de conjuntos finitos $\mathcal{F}(X)$ y el hiperespacio de cerrados con a lo más n elementos $\mathcal{F}_n(X)$. Tanto $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ resultan ser subcontinuos de $\mathcal{CL}(X)$ si X es un continuo, mientras que $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$.

Dada una función entre continuos $f\colon X \to Y$ definimos a la función entre hiperespacios $2^f\colon \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(Y)$ por la correspondencia $2^f(A) = f(A)$ a la que llamamos función inducida. Una parte importante en la teoría de hiperespacios, es el estudio de las funciones inducidas. Más en particular, dado un subespacio $\mathcal{K}$ de $\mathcal{CL}(X)$ y dos clases de funciones entre continuos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, se estudian todas las posibles relaciones entre los siguientes enunciados:

- $f \in \mathcal{M}_1$,
- $2^f|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{M}_1$,
- $2^f|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{M}_2$.

El caso donde $\mathcal{K}$ es el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, ha sido estudiado en [1], [3], [8]. En este trabajo de tesis nos enfocaremos en estudiar este problema en relación al concepto de confluencia. Los mapeos confluentes fueron introducidos por el matemático polaco Janusz Jerzy Charatonik, al estudiar los mapeos abiertos. Su motivación era saber si la propiedad de que las dendritas se preservan bajo mapeos abiertos se puede extender a los dendroides. Como resultado de este estudio, observó que la propiedad más importante de los mapeos abiertos era que cada componente de la imagen inversa de un subcontinuo del rango se mapea de manera suprayectiva en el subcontinuo. Esta propidad es la que se conoce como confluencia y fue definida formalmente en el artículo *Confluent mappings and unicoherence of continua* [4].

En el Capítulo 1 mostramos algunos resultados preliminares para el desarrollo de esta tesis. La importancia de este capítulo es introducir a los mapeos confluentes en un contexto general dentro de la teoría de continuos y demostrar algunas de sus propiedades básicas. También se enuncia el Teorema de Factorización Monótono-ligero, el cual es de gran utilidad al utilizarlo en los mapeos inducidos. Por último, damos una breve introducción a la teoría de hiperespacios de cerrados, definiendo a la topología de Vietoris y demostrando algunos de los teoremas importantes de esta teoría.

En el Capítulo 2 enunciamos algunos teoremas que relacionan a los mapeos entre continuos $f\colon X \to Y$ con su mapeo inducido $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Más en particular, si $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son clases de mapeos entre continuos, como pueden ser, homeomorfimos, mapeos abiertos, mapeos monótonos, mapeos casi monótonos o mapeos ligeros. Introducimos el problema de determinar bajo que condiciones se pueden resolver los siguientes enunciados:

- $f \in \mathcal{M}_1$ entonces $f_n \in \mathcal{M}_2$.
- $f_n \in \mathcal{M}_1$ entonces $f \in \mathcal{M}_2$.
- $f \in \mathcal{M}_1$ si y sólo si $f_n \in \mathcal{M}_2$.

En el Capítulo 3 hablamos acerca de los homeomorfismos locales en los hiperespacios. En particular caracterizaremos a los mapeos inducidos f_n que cumplen esta propiedad.

En el Capítulo 4 hablamos acerca de los mapeos OM (Open-Monotone) y MO (Monotone-Open) de las funciones inducidas f_n y su relación con los mapeos monótonos. Para esto hacemos uso del Teorema de Factorización Monótono-ligero, con el cual probramos que los mapeos inducidos f_n que cumplen la propiedad OM tienen una factorizacón OM en mapeos que son inducibles. Ya con este resultado, damos una caracterización de los mapeos OM y MO como aquellos que son monótonos para $n \geq 3$ y mostramos con un contraejemplo que lo anterior no es válido para $n = 2$, el cual quedó como pregunta en [8, Pregunta 3.16, p. 375].

En el Capítulo 5 estudiamos la propiedad de confluencia, en particular la relación que hay entre la confluencia de un mapeo f y la confluencia de su mapeo inducido f_n. Luego, caracterizamos a los mapeos inducidos confluentes como aquellos que son monótonos para $n \geq 3$. Para el caso $n = 2$ demostramos que si $f\colon X \to Y$ es un mapeo confluente, garantizamos la confluencia del mapeo $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ si Y es localmente conexo. Por último estudiamos a los mapeos hereditariamente confluentes, es decir, aquellos mapeos cuya restricción a cualquier subcontinuo resulta conflluente para el caso de los mapeos inducidos y damos una respuesta parcial a la pregunta [8, Problema 3.45, p. 387]: ¿Si $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es hereditariamente confluente, entonces f es un homeomorfismo?

Capítulo 1

Preliminares

Dado un espacio topológico (X, T) y un subconjunto A de X, nos referimos a la cerradura y al interior de A como $\overline{A}^X$ e $\mathrm{Int}_X(A)$, respectivamente. Al trabajar en un espacio topológico (X, T) fijo, denotamos a la cerradura y al interior de un subconjunto A de X como $\overline{A}$ e $\mathrm{Int}(A)$ respectivamente, y escribiremos X en vez de (X, T) cuando se tenga claro sobre que topología estemos trabajando. Si $f\colon X \to Y$ y $A \subseteq X$ denotamos *la restricción de f al conjunto A* como $f|_A\colon A \to f(A)$. Decimos que una función $f\colon X \to Y$ es *cerrada* si para todo cerrado A de X se tiene que $f(A)$ es cerrado en Y. A partir de ahora toda función sera suprayectiva y todos los espacios topológicos vistos serán no degenerados.

1.1. Espacios de descomposición

Sea X un espacio y $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_\alpha$ una colección de subconjuntos compactos y disjuntos que cubren a X. Se dice que la colección $\mathcal{C}$ es *semicontinua superiormente*, si para todo α se cumple que, si U es un abierto de X que contiene a C_α, existe un abierto V de X que contiene a C_α y $V \subseteq U$ tal que todo elemento de $\mathcal{C}$ que intersecte a V debe estar contenido en V, es decir, V es una unión de elementos de $\mathcal{C}$. Diremos que un abierto V es *saturado* si es una unión de elementos de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una colección semicontinua superiormente diremos que $\mathcal{C}$ es una *descomposición semicontinua superiormente* para el espacio X.

Teorema 1.1. Si X y Y son espacios compactos y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces la colección $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ es una descomposición semicontinua superiormente.

Demostración. Sea U un abierto en X que contenga a $f^{-1}(y)$ para alguna $y \in Y$. Entonces $X \setminus U$ es compacto y $y \notin f(X \setminus U)$. Como $Y \setminus f(X \setminus U)$ es abierto en Y, entonces por la continuidad de f se sigue que $V = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$ es abierto en X. Es fácil ver que $V \subseteq U$ y que V es una union de elementos de $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$. $\square$

Si $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X, podemos definir al *espacio de descompoición* que denotamos $D(\mathcal{C})$, cuyos puntos son los elementos de $\mathcal{C}$ y donde U es un abierto del espacio $D(\mathcal{C})$, si $\bigcup U$ es un abierto en X. De esta manera podemos definir una función $f\colon X \to D(\mathcal{C})$ donde a cada punto $x \in X$ se le asocia el elemento de $\mathcal{C}$ que lo contiene.

Teorema 1.2. Si X es un espacio compacto y $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X, entonces el espacio de descomposición $D(\mathcal{C})$ es Hausdorff.

Demostración. Sean C_α y C_β elementos distintos de $\mathcal{C}$. Como C_α y C_β con cerrados ajenos y X es un espacio T_4, entonces existen abiertos ajenos U y V en X tales que $C_\alpha \subseteq U$ y $C_\beta \subseteq V$. Como $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente, existen abiertos U' y V' en X tales ques $C_\alpha \subseteq U' \subseteq U$ y $C_\beta \subseteq V' \subseteq V$ y , U' y V' son uniones de elementos de $\mathcal{C}$. Si $f\colon X \to D(\mathcal{C})$ es la función inducida por la descomposición $\mathcal{C}$, entonces $\bigcup f(U') = U'$ y $\bigcup f(V') = V'$, por lo tanto, $f(U')$ y $f(V')$ son abiertos ajenos en $D(\mathcal{C})$ que tienen como elementos a C_α y C_β respectivamente. □

Teorema 1.3. Si X es un espacio compacto y $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X, entonces la función $f\colon X \to D(\mathcal{C})$ inducida por la descomposición $\mathcal{C}$ es continua.

Demostración. Dado un abierto U en $D(\mathcal{C})$ se sigue que $f^{-1}(U) = \bigcup U$ y como $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente se sigue $f^{-1}(U)$ es abierto en X. □

Teorema 1.4. Sea X un espacio compacto y sea $\mathcal{F}$ una descomposición semicontinua superiormente de X. Si $\mathcal{C}$ es la colección de componentes conexas de elementos de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}$ y $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F$ y sea U un abierto en X con $C \subseteq U$. Como X es compacto, entonces $C = \bigcap_{\alpha<\beta} V_\alpha$, donde $\{V_\alpha\}_\alpha$ es una colección anidada de abiertos y cerrados en F que contienen a C. Por la compacidad de X, existe $\alpha_0 < \beta$ tal que $C \subseteq V_{\alpha_0} \subseteq U$. Sea U' un abierto en X tal que $V_{\alpha_0} = U' \cap F$. Como $V_{\alpha_0} \subseteq U'$ y X es normal, existe un abierto W en X tal que $V_{\alpha_0} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U'$ y, por tanto, $V_{\alpha_0} = W \cap F = \overline{W} \cap F$. Sea $\widetilde{W} = W \cap U$. Luego, $C \subseteq V_{\alpha_0} \subseteq \widetilde{W} \subseteq U$. Notamos que $\widetilde{W} \subseteq W$ por lo que, $\overline{\widetilde{W}} \cap F \subseteq \overline{W} \cap F = V_{\alpha_0}$. Ahora definimos al abierto $\widetilde{U} = \widetilde{W} \cup (X \backslash \overline{\widetilde{W}})$ y afirmamos que $F \subseteq \widetilde{U}$. Para esto, si $x \in C$, entonces claramente $x \in \widetilde{W}$. En caso de que $x \in F \backslash C$ hay dos posibilidades; si $x \notin \overline{\widetilde{W}}$ terminamos, y si $x \in \overline{\widetilde{W}}$ entonces $x \in \overline{\widetilde{W}} \cap F \subseteq V_{\alpha_0} \subseteq \widetilde{W}$. En cualquier caso se concluye que $F \subseteq \widetilde{U}$. Como $\mathcal{F}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X, existe un abierto saturado V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \widetilde{U}$. Definimos a $\widetilde{V} = V \cap \widetilde{W}$. Sea $C' \in \mathcal{C}$ y $F' \in \mathcal{F}$ tal que C' es componente de F'. Si $C' \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$, entonces $F' \cap V \neq \varnothing$ y como V es saturado se sigue que $C' \subseteq F' \subseteq V \subseteq \widetilde{U}$. Ahora como C' es conexo, $C' \subseteq \widetilde{W} \cup (X \backslash \overline{\widetilde{W}})$ y $C' \cap \widetilde{W} \neq \varnothing$ entonces $C' \subseteq \widetilde{W}$ y por lo tanto $C' \subseteq \widetilde{V} \subseteq \widetilde{W} \subseteq U$ con $\widetilde{V}$ saturado. Es decir, $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X. □

1.2. Mapeos quasi-interiores

Decimos que una función $f\colon X \to Y$ es *ligera* si $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo para toda $y \in Y$. Una función $f\colon X \to Y$ es *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo

$y \in Y$. Una función $f\colon X \to Y$ es *abierta* si para todo abierto U de X se cumple que $f(U)$ es abierto de Y. Decimos que una función continua $f\colon X \to Y$ es *quasi-interior* en $y \in Y$, si para todo U abierto de X que contenga alguna componente de $f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in \operatorname{Int}(f(U))$. Una función continua es quasi-interior si es quasi-interior en todo punto $y \in Y$. Como veremos en esta sección las funciones quasi-interiores son una clase mas general de funciones que las monótonas y abiertas. Daremos algunos resultados relacionados con este tipo de funciones para más adelante mostrar que toda función quasi-interior se puede descomponer en una factorización de estas.

Definición 1.5. Dada una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, definimos a $\mathbf{Limsup} A_n$ como el conjunto de puntos $x \in X$ tales que existe una sucesión $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $\lim x_{n_k} = x$.

Lema 1.6. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un punto x en un espacio métrico (X, d), si toda subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a x, entonces $\lim x_n = x$.

Demostración. Supongamos por el contrario que x_n no converge a x. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $n_N > N$ de tal manera que $d(x_{n_N}, x) \geq \varepsilon$. De esta manera podemos construir una subsucesión $\{x_{n_N}\}_N$ que claramente no tiene subsucesiones convergentes, lo que es una contradicción ya que $\lim x_{n_N} = x$. Por lo tanto $\lim x_n = x$. $\square$

Teorema 1.7. Una función $f\colon X \to Y$ entre compactos métricos es continua si y solo si

$$\lim y_n = y \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y).$$

Demostración. Supongamos primero que f es continua, $\lim y_n = y$ y $x \in \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n)$. Podemos suponer que existen $x_n \in f^{-1}(y_n)$ tales que $\lim x_n = x$. Como f es continua, $y_n = f(x_n) \to f(x)$, lo que implica que $f(x) = y$ y por tanto $x \in f^{-1}(y)$.

Ahora supongamos que $\lim x_n = x$. Sea $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{f(x_{n_{k_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim f(x_{n_{k_j}}) = y$ para algún $y \in Y$. Renombrando $y_{n_{k_j}} = f(x_{n_{k_j}})$, tenemos por hipótesis que $\mathbf{Limsup} f^{-1}(y_{n_{k_j}}) \subseteq f^{-1}(y)$. Como $\lim x_{n_{k_j}} = x$, y $x_{n_{k_j}} \in f^{-1}(y_{n_{k_j}})$ se tiene que $x \in \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_{n_{k_j}})$ por lo que $x \in f^{-1}(y)$, es decir, $f(x) = y$. Por lo tanto $\lim f(x_{n_{k_j}}) = f(x)$. Como $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ fue arbitraria se concluye por el Lema 1.6 que $\lim f(x_n) = f(x)$ y por tanto f es continua. $\square$

Recordamos que un espacio es *perfectamente normal*, si es normal y todo cerrado es un conjunto G_δ.

Lema 1.8. Sean X y Y espacios métricos compactos. Una función $f\colon X \to Y$ es quasi-interior en $y \in Y$ si y solo si $\lim y_n = y$ implica que $\mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n)$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.

Demostración. Supongamos que f es quasi-interior y $\lim y_n = y$. Sea C es una componente de $f^{-1}(y)$. Como X es perfectamente normal, se tiene que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ donde U_n son abiertos y $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$. Como U_n contiene a C, entonces $y \in \mathrm{Int}(f(U_n))$. Por hipótesis $\lim y_k = y$ y, por tanto, existe una subsucesión $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{k_n} \in \mathrm{Int}(f(U_n)) \subseteq f(U_n)$, por lo que $U_n \cap f^{-1}(y_{k_n}) \neq \varnothing$. Renombramos a $y_n = y_{k_n}$. Ahora tomamos $x_n \in U_n \cap f^{-1}(y_n)$. Observamos que al ser X compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lim x_n = x$. Esto implica por la continuidad de f que $x \in \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y)$. Si suponemos que $x \notin C$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \overline{U_N}$ y, entonces, existe un abierto V de x tal que $V \cap \overline{U_N} = \varnothing$. Como x_n converge a x, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ si $n \geq M$. Tomando a $n > \max\{N, M\}$ se sigue que $x_n \in U_n \subseteq U_N$ y, así, $x_n \in V \cap U_N$ pero esto es una contradicción y, por lo tanto, $x \in C$. En conclusión $x \in \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \cap C$.

Para el recíproco, sean $y \in Y$ y U un abierto que contiene a una componente C de $f^{-1}(y)$. Si suponemos que $y \notin \mathrm{Int}(f(U))$, entonces tomando una base local $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de y se tiene que $U_n \cap Y \backslash f(U) \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in U_n$ tales que $\lim y_n = y$. Como $f^{-1}(y_n) \subseteq X \backslash U$, entonces $\mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \subseteq X \backslash U \subseteq X \backslash C$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $y \in \mathrm{Int}(f(U))$. □

1.3. Funciones confluentes

Otra clase de funciones más general que las funciones monótonas, abiertas e incluso que las quasi-interiores, es la clase de las funciones confluentes. Decimos que un espacio topológico no vacío X es un *continuo*, si es métrico compacto y conexo. Dado un continuo X decimos que A es un *subcontinuo* de X, si A es un subespacio de X y A es un continuo. Decimos que una función $f\colon X \to Y$ es *confluente*, si para todo continuo K de Y y cada componente C de $f^{-1}(K)$ se cumple que $f(C) = K$. Una función $f\colon X \to Y$ es *débilmente confluente*, si para todo continuo K de Y existe una componente C de $f^{-1}(K)$ tal que $f(C) = K$. En esta sección veremos algunas propiedades de las funciones confluentes.

Teorema 1.9. Si $f\colon X \to Y$ es una función confluente, B es un subconjunto de Y y A es la union de algunas componentes de $f^{-1}(B)$, entonces la función $g = f|_A\colon A \to f(A)$ es confluente.

Demostración. Sea K un subcontinuo de $f(A)$ y C una componente de $g^{-1}(K)$. Como $g^{-1}(K) = A \cap f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(K)$, entonces C está contenida en alguna componente C' de $f^{-1}(K)$. Por un lado, como $C \subseteq A$, entonces $\varnothing \neq C = A \cap C \subseteq A \cap C'$ y por otro lado, como $K \subseteq f(A) \subseteq B$, se tiene que $C' \subseteq f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(B)$. Luego, como A es la unión de componentes de $f^{-1}(B)$, al tener que $A \cap C' \neq \varnothing$, entonces $C' \subseteq A$ y, por lo tanto, $C' \subseteq g^{-1}(K)$, es decir, $C' = C$ y $g(C) = f(C) = f(C') = K$. □

Teorema 1.10. Si $f\colon X \to Y$ es una función confluente y $A = f^{-1}(f(A))$, entonces la función $g = f|_A\colon A \to f(A)$ es confluente.

Demostración. Tomando a $B = f(A)$ y aplicando el Teorema 1.9, se obtiene el resultado. □

Teorema 1.11. Si $h\colon X \to Z$ y $g\colon Z \to Y$ son funciones confluentes, entonces la composición $g \circ h\colon X \to Y$ es una función confluente.

Demostración. Sean K un subcontinuo de Y y C una componente de $(g \circ h)^{-1}(K)$. Como $h(C)$ es un continuo y $h(C) \subseteq g^{-1}(K)$, podemos tomar una componente C' de $g^{-1}(K)$ tal que $h(C) \subseteq C'$. Como

$$C \subseteq (h^{-1} \circ h)(C) \subseteq h^{-1}(C') \subseteq (h^{-1} \circ g^{-1})(K) = (g \circ h)^{-1}(K),$$

se sigue que C es una componente de $h^{-1}(C')$. Al ser h confluente, se tiene que $h(C) = C'$ y, como g es confluente, entonces $g(h(C)) = g(C') = K$. □

Teorema 1.12. Si $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to Y$ y $h\colon X \to Z$ son funciones tales que $f = g \circ h$ y f es confluente, entonces g es confluente.

Demostración. Sean K un subcontinuo de Y y C una componente de $g^{-1}(K)$. Si C' es una componente de $f^{-1}(K)$ tal que $h(C') \subseteq C$, entonces por ser f confluente se sigue que $K = f(C') = g(h(C')) \subseteq g(C) \subseteq g(g^{-1}(K)) = K$. □

Teorema 1.13. Toda función monótona es confluente.

Demostración. Primero vamos a demostrar que todo mapeo monótono, cumple que la preimagen de un continuo es un continuo. Sean $f\colon X \to Y$ un mapeo monótono y K un subcontinuo de Y. Supongamos que $A \cup B = f^{-1}(K)$ con A y B cerrados ajenos no vacíos. Luego, $f(A) \cup f(B) = K$. Como $f(A)$ y $f(B)$ son cerrados no vacíos y K es conexo, se sigue que $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$ y tomamos $y \in f(A) \cap f(B)$. Como $f^{-1}(y) \subseteq A \cup B$, con $A \cap B = \varnothing$ y $f^{-1}(y)$ es conexo por hipótesis, entonces sin pérdida de generalidad $f^{-1}(y) \subseteq A$ y por tanto $f^{-1}(y) \cap B = \varnothing$, lo cual es una contradicción al hecho de que $y \in f(B)$. Por lo tanto, $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X. Ya con esto, es claro los mapeos monótonos con confluentes ya que la preimagen de todo subcontinuo de la imagen tiene a lo más una componente. □

Lema 1.14. Si $f\colon X \to Y$ es un función abierta y $A = f^{-1}(B)$ con $B \subseteq Y$ entonces $f|_A\colon A \to B$ es una función abierta.

Demostración. Sea U un abierto en A y sea V un abierto en X tal que $U = V \cap A$. Como f es abierta se sigue que

$$f(U) = f(V \cap A) = f(V) \cap f(A) = f(V) \cap B$$

es abierto en B. □

Teorema 1.15. Toda función abierta es confluente.

Demostración. Sean $f\colon X \to Y$ una función abierta, K un continuo en Y y definamos $g = f|_{f^{-1}(K)}$. Sea C una componente de $f^{-1}(K)$ y supongamos que $f(C) \subsetneq K$, es decir, existe $y \in K$ tal que $y \notin f(C)$ lo que implica que $f^{-1}(y) \cap C = \varnothing$. Sea U un abierto en $f^{-1}(K)$ tal que $C \subseteq U$ y $f^{-1}(y) \cap U = \varnothing$. Por la compacidad de $f^{-1}(K)$, C es la interescción de todos los abiertos y cerrados que lo contienen y, más aún, existe un abierto y cerrado V en $f^{-1}(K)$ tal que $C \subseteq V \subseteq U$. Por el Lema 1.14, g es una función abierta, y claramente cerrada, por lo que $g(V) = f(V)$ es un abierto y cerrado en K y además $y \in K \backslash f(V)$ y $\varnothing \neq f(C) \subseteq f(V)$, pero esto es una contradicción ya que K es conexo. Por lo tanto $f(C) = K$. $\square$

1.4. Factorización de funciones continuas

Decimos que una función $f \colon X \to Y$ tiene una factorización monótona-ligera, si existe un espacio Z y funciones $h \colon X \to Z$ y $g \colon Z \to Y$ de tal manera que $f = g \circ h$, donde h es monótona y g es ligera. Eilenberg [6] probó que es posible dar una factorización monótona-ligera para las funciones continuas entre espacios compactos métricos y, más aún, que esta factorización es única. En esta sección demostramos el teorema de factorización ya mencionado y mostramos su relación con las funciones quasi-interiores.

Recordamos que las *fibras de una función* $f \colon X \to Y$ son los conjuntos de la forma $f^{-1}(\{y\})$ con $y \in Y$. Para simplificar notación, escribiremos $f^{-1}(y)$ en lugar $f^{-1}(\{y\})$.

Teorema 1.16. Si $f \colon X \to Y$ es una función continua entre espacios compactos métricos, entonces $f = g \circ h$ donde $g \colon Z \to Y$ es una función ligera y $h \colon X \to Z$ es una función monótona. Más aún, si existe un función ligera $g' \colon Z' \to Y$ y una función monótona $h' \colon X \to Z'$ tales que $f = g' \circ h'$, entonces existe un homeomorfismo $T \colon Z' \to Z$ de tal manera que $g = g' \circ T^{-1}$ y $h = T \circ h'$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la descomposición del espacio X en fibras de f. Sea $\mathcal{C}$ la descomposición en componentes conexas de elementos de $\mathcal{F}$. Por el Teorema 1.4, $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente. Si consideramos a la función inducida $p \colon X \to D(\mathcal{C})$ y definimos al espacio $Z = D(\mathcal{C})$, entonces afirmamos $h = p$ es monótona, $g = f \circ p^{-1}$ está bien definido y es ligera. Claramente h es continua y monótona por definición. Ahora g está bien definida ya que es constante en las componentes de las fibras de f. Dado un abierto U en Y, $g^{-1}(U) = p(f^{-1}(U))$ y, como $f^{-1}(U)$ es una unión de componentes conexas de fibras, por definición de la descomposición Z, $p(f^{-1}(U))$ es un abierto en Z, luego g es continua. Para ver que g es ligera, sea $y \in Y$ y supongamos que $g^{-1}(y)$ no es totalmente disconexo. Entonces existe una componente $\mathcal{D}$ de $g^{-1}(y)$ que no es degenerada. Por definición de la función g, la componente $\mathcal{D}$ es una colección de compomentes de $f^{-1}(y)$ y por lo tanto existen componentes distintas C y C' de $f^{-1}(y)$ en $\mathcal{D}$. Sean U y V abiertos ajenos en X tales que $C \subseteq U$ y $C' \subseteq V$. Análogamente como en la demostración del Teorema 1.4, existe un abierto $\widetilde{W}$ en X tal que $f^{-1}(y) \subseteq \widetilde{W} \cup (X \backslash \overline{\widetilde{W}})$ con $C \subseteq \widetilde{W} \subseteq U$ y por tanto $C' \subseteq X \backslash \overline{\widetilde{W}}$. Definimos a los conjuntos $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{C} \colon A \subseteq \widetilde{W}\}$ y $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{C} \colon A \subseteq X \backslash \overline{\widetilde{W}}\}$, afirmamos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos en Z. Si $A \in \mathcal{U}$, entonces $A \subseteq \widetilde{W}$. Como $\mathcal{C}$ es una descomposición semicontinua superiormente, existe un abierto saturado $\widetilde{V}$ en X tal que $A \subseteq \widetilde{V} \subseteq \widetilde{W}$ y, por lo tanto, $A \in p(\widetilde{V}) \subseteq \mathcal{U}$. Como $A \in \mathcal{U}$ fue arbitrario, se concluye que $\mathcal{U}$ es abierto. La prueba de que $\mathcal{V}$ es abierto es análoga. Por lo tanto $\mathcal{D} \subseteq f^{-1}(y) \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ con $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos ajenos, pero esto contradice la conexidad de $\mathcal{D}$ por lo que $g^{-1}(y)$ es totalmente disconexo y, así, g es ligera.

Para probar la segunda parte del teorema, primero vamos a demostrar que la descomposición de X en fibras de h es identica a la descomposición de X en fibras de h'. Para esto, sean $z \in Z$ y $z' \in Z'$ tales que $h^{-1}(z) \cap (h')^{-1}(z') \neq \varnothing$. Notamos que el conjunto $K = h^{-1}(z) \cup (h')^{-1}(z')$ es un conexo ya que las fibras de $h^{-1}(z)$ y $(h')^{-1}(z')$ son conexas y su unión tiene intersección no vacía. Si tomamos un elemento $x \in h^{-1}(z) \cap (h')^{-1}(z')$, observamos que $g(z) = g(h(x)) = f(x) = g'(h'(x)) = g'(z')$. Aplicando la función f al conexo K obtenemos las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
f(K) = g(h(K)) &= g(h(h^{-1}(z) \cup (h')^{-1}(z'))) \\
&= g(h(h^{-1}(z))) \cup g(h((h')^{-1}(z'))) \\
&= g(h(h^{-1}(z))) \cup g'(h'((h')^{-1}(z'))) \\
&= \{g(z)\} \cup \{g'(z')\} \\
&= \{f(x)\},
\end{aligned}$$

luego, renombrando a $y = f(x)$, se tiene que

$$z \in h(K) \subseteq g^{-1}(y) \qquad y \qquad z' \in h'(K) \subseteq (g')^{-1}(y)$$

Ahora, supongamos que $h^{-1}(z) \neq (h')^{-1}(z')$. Sin pérdida de generalidad, tomamos $w \in h^{-1}(z) \setminus (h')^{-1}(z') \subseteq K$, entonces $z' \neq h'(w) \subseteq h'(K)$, y por lo tanto z' y $h'(w)$ son dos elementos distintos en el conexo $h'(K)$, pero esto es una contradicción ya que $g^{-1}(y)$ es totalmente disconexo. De esta manera, $h^{-1}(z) = (h')^{-1}(z')$, con lo cual queda demostrado que la partición de X en fibras de h es idéntica a la partición de X en fibras de h' y por lo tanto sus respectivas descomposiciones son idénticas. Así, existe un homeomorfismo $T\colon Z' \to Z$, dado por la regla correspondencia

$$T(z') = z \qquad \text{si y sólo si} \qquad h^{-1}(z) = (h')^{-1}(z').$$

Dada $x \in X$, existen únicos $z \in Z$ y $z' \in Z'$ tales que $x \in h^{-1}(z) = (h')^{-1}(z')$, por lo que $T(h'(x)) = T(z') = z = h(x)$. Por último, dada $z \in Z$, si $T^{-1}(z) = z'$ y tomamos un elemento $x \in h^{-1}(z) = (h')^{-1}(z')$, entonces

$$g'(T^{-1}(z)) = g'(z') = g'(h'(x)) = f(x) = g(h(x)) = g(z).$$

□

Teorema 1.17. Si $h\colon X \to Z$ y $g\colon Z \to Y$ son funciones tales que g es ligera y $g \circ h$ es quasi-interior, entonces g es abierta.

Demostración. Sea U un abierto en Z y $z \in U$. Tomando $y = g(z)$ y C una componente de $h^{-1}(z)$, entonces $C \subseteq h^{-1}(g^{-1}(y))$. Sea C' una componente de $h^{-1}(g^{-1}(y))$ que contenga a C. Como $h(C') \subseteq g^{-1}(y)$, $h(C')$ es conexo y g es ligera, entonces $h(C')$ es degenerado, por lo que $h(C') = z$. Luego, $C' \subseteq h^{-1}(z) \subseteq h^{-1}(g^{-1}(y))$ y por lo tanto C'

es una componente de $h^{-1}(z)$, es decir $C = C' \subseteq h^{-1}(U)$. Como $C' \subseteq h^{-1}(U)$ y $g \circ h$ es quasi-interior, se sigue que

$$y \in \operatorname{Int}(g \circ h(h^{-1}(U))) = \operatorname{Int}(g(U)),$$

es decir, $g(U) \subseteq \operatorname{Int}(g(U))$. $\square$

Lema 1.18. Si $f\colon X \to Y$ es una función, $y \in Y$ y U es un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subseteq U$, entonces $y \in \operatorname{Int}(f(U))$.

Demostración. Sea $\{V_n\}$ base local numerable de $y \in Y$ y supongamos que $y \notin \operatorname{Int}(f(U))$. Entonces, $V_n \nsubseteq f(U)$ para toda n, y podemos tomar $y_n \in V_n \backslash f(U)$ para cada n. Como f es continua y y_n converge a y, por el Teorema 1.7 se tiene que $\mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y)$. Si tomamos a $x_n \in f^{-1}(y_n)$ para cada n, al ser X compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x_n converge a x para algún $x \in X$, por lo que

$$x \in \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n) \subseteq f^{-1}(y) \subseteq U.$$

Pero esto implica que existe $x_N \in U$ y, por lo tanto, $y_N = f(x_N) \in f(U)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y \in \operatorname{Int}(f(U))$. $\square$

Lema 1.19. Toda función monótona es quasi-interior.

Demostración. Se sigue del Lema 1.18. $\square$

Lema 1.20. Toda función abierta es quasi-interior.

Demostración. La prueba se sigue de las definiciones. $\square$

Corolario 1.21. Toda función quasi-interior es confluente.

Demostración. Sea f una función quasi-interior. Por los lemas 1.16 y 1.17, podemos tomar la descomposición $f = g \circ h$ donde g es abierta y h es monótona. Como g y h son confluentes por los lemas 1.15 y 1.13, respectivamente, entonces por el Teorema 1.11 $f = g \circ h$ es confluente. $\square$

Teorema 1.22. Si $h\colon X \to Z$ y $g\colon Z \to Y$ son funciones quasi-interiores, entonces $g \circ h$ es una función quasi-interior.

Demostración. Sea $y \in Y$, U un abierto en X y C una componente $(g \circ h)^{-1}$ tal que $C \subseteq U$. Dado que $h(C)$ es un continuo y $h(C) \subseteq g^{-1}(z)$, podemos tomar una componente C' de $g^{-1}(y)$ tal que $h(C) \subseteq C'$. Más aún, como

$$C \subseteq (h^{-1} \circ h)(C) \subseteq h^{-1}(C') \subseteq (h^{-1} \circ g^{-1})(y) \subseteq (g \circ h)^{-1}(y)$$

por lo que C es una componente de $h^{-1}(C')$. Por el Corolario 1.21, h es una función confluente y se sigue que $h(C) = C'$. Afirmamos que $C' \subseteq \operatorname{Int}(h(U))$. Sean $z \in C'$, $x \in C$ y C_z componente de $h^{-1}(z)$ tales que $h(x) = z$ y $x \in C_z$. Como $C \cap C_z \neq \varnothing$ y

$$C_z \subseteq h^{-1}(z) \subseteq h^{-1}(C') \subseteq (g \circ h)^{-1}(y)$$

entonces $C_z \subseteq C \subseteq U$ y, al ser h quasi-interior, se sigue que $z \in \operatorname{Int}(h(U)$. Como $z \in C'$ fue arbitrario se tiene que $C' \subseteq \operatorname{Int}(h(U)$. Por último, como g es quasi-interior obtenemos que

$$y \in \operatorname{Int}(g(\operatorname{Int}(h(U)))) \subseteq \operatorname{Int}(g \circ h(U)).$$

□

Definición 1.23. Decimos que una función continua $f\colon X \to Y$ es OM (MO)[1], si existen funciones $h\colon X \to Z$ y $g\colon Z \to Y$ de tal manera que $f = g \circ h$, donde h es una monótona(abierta) y g es abierta(monótona).

Teorema 1.24. Para una función $f\colon X \to Y$, las siguientes afirmaciones son equivalenetes:

i) f es quasi-interior,

ii) f es OM,

iii) f se puede representar como una composición $f = g \circ h$, donde h es una función monótona y g es una función ligera y abierta,

iv) Para toda $y \in Y$, $\lim y_n = y$ implica que $\mathbf{Limsup} f^{-1}(y_n)$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.

Demostración. *i*) implica *iii*).
Usando los lemas 1.16 y 1.17 obtenemos el resultado.
ii) implica *i*).
Si $f = g \circ h$ es tal que g es una función abierta y h es un función monótona, en particular son quasi-interiores por los lemas 1.19 y 1.20. Usando el Teorema 1.22 obtenemos que f es quasi-interior.
La equivalencia *i*) si y solo si *iv*) se da por el Lema 1.8. □

Teorema 1.25. Toda función MO es OM.

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ una función MO y supongamos que $f = h \circ g$ donde $h\colon Z \to Y$ es una función monótona y $g\colon X \to Z$ es una función abierta. Como h y g son funciones quasi-interiores por los lemas 1.19 y 1.20, respectivamente, entonces por el Teorema 1.22 f resulta una función quasi-interior. Luego, por el Teorema 1.24, f es OM. □

Ejemplo 1.26. [12, Ejemplo 3.4, p. 104] El mapeo $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definido por la correspondencia

$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3t & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un mapeo OM que no es MO.

[1] Las siglas OM y MO provienen de las palabras en inglés Open-Monotone y Monotone-Open, respectivamente.

Corolario 1.27. Toda función abierta (monótona) es MO y por lo tanto OM.

Demostración. Para todo espacio topológico Z, denotamos a la función identidad por $Id_Z\colon Z \to Z$. Si $f\colon X \to Y$ es una función abierta(monótona), entonces $f = Id_Y \circ f$ $(f = f \circ Id_X)$ y, por lo tanto, f es MO. Por el Teorema 1.25 f tambien es OM. □

Corolario 1.28. Toda función OM es confluente.

Demostración. Por lo teoremas 1.15, 1.13 y 1.11 se obtiene el resultado. □

Ejemplo 1.29. El mapeo $f\colon [-2,2] \to [0,1]$ definido por la correspondencia

$$f(t) = \begin{cases} |t| - 1 & \text{si} \quad 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \leq 1 \end{cases}$$

es un mapeo MO que no es abierto ni monótono.

El Diagrama 1 muestra las relaciones entre las clases de funciones vistas hasta el momento.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{homeomorfismo} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{función abierta} \arrow[r] & \text{función MO} \arrow[d] & \text{función monótona} \arrow[l] \\
 & \text{función OM} \arrow[d] & \\
 & \text{función confluente} \arrow[d] & \\
 & \text{función debilmente confluente} &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1: Relaciones entre clases de funciones

1.5. Hiperespacio de continuos

En esta sección definimos al hiperespacio de cerrados y a ciertos subconjuntos de éste y mostramos algunos teoremas fundamentales básicos en la teoría de hiperespacios que nos serán de gran utilidad para el presente trabajo. Dado un espacio topológico X denotamos a la colección de conjuntos cerrados no vacíos de X como $\mathcal{CL}(X)$ o 2^X. A esta colección se le proporciona una topología a la cual llamamos *topología finita* o *topología de Vietoris*([20], [18] y [19]). Dada una colección finita de conjuntos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ en X, definimos al conjunto

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } K \cap U_i \neq \varnothing \text{ para } i \leq n \right\}.$$

Si los conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos, la colección de conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ forman una base para una topología sobre $\mathcal{CL}(X)$ llamada topología de Vietoris y la colección $\mathcal{CL}(X)$ recibe el nombre de *hiperespacio de cerrados de* X. A partir de esta definición se definen los siguientes subespacios de $\mathcal{CL}(X)$:

$\mathcal{F}_n(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon |K| \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es finito}\}$.

$\mathcal{C}(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es conexo}\}$.

$\mathcal{C}_n(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

$\mathcal{K}(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \text{ es compacto}\}$.

Dado un subconjunto no vacío A de X, definimos a los conjuntos

$$\langle A \rangle^+ = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon B \subseteq A\} \qquad y \qquad \langle A \rangle^- = \{B \in \mathcal{CL}(X) \colon B \cap A \neq \varnothing\}.$$

Teorema 1.30. [7] Dado un espacio X, se tienen los siguientes enuncidados,

i) Si A es cerrado no vacío en X, entonces $\langle A \rangle^+$ y $\langle A \rangle^-$ son cerrados en $\mathcal{CL}(X)$.

ii) Si U es abierto no vacío en X, entonces $\langle U \rangle^+$ y $\langle U \rangle^-$ son abiertos en $\mathcal{CL}(X)$.

iii) Los conjuntos de la forma $\langle U \rangle^+$ y $\langle V \rangle^-$ donde U y V son abiertos no vacíos de X forman una subbase para la topología del Vietoris en $\mathcal{CL}(X)$.

Teorema 1.31. [7, Teorema 1.4, p. 31] Si X es un espacio T_1 y $A, B \subseteq X$ con A y B no vacíos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) Si $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle^+ \subseteq \langle B \rangle^+$.

ii) Si $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle^- \subseteq \langle B \rangle^-$.

iii) $\overline{\langle A\rangle^{+}} = \left\langle \overline{A}^{X} \right\rangle^{+}$.

iv) $\mathrm{Int}(\langle A\rangle^{+}) = \langle \mathrm{Int}_X(A)\rangle^{+}$.

v) $\overline{\langle A_1, \ldots, A_n\rangle} = \left\langle \overline{A_1}^{X}, \ldots, \overline{A_n}^{X} \right\rangle$.

Teorema 1.32. [7, Teorema 3.1, p. 46] Un espacio X es compacto si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto.

Teorema 1.33. [7, Teorema 5.2, p. 59] Para toda $n \in \mathbb{N}$, si X es un espacio T_1, entonces X es conexo si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo.

Teorema 1.34. [7, Teorema 5.3, p. 60] Si X es un espacio T_1, entonces X es conexo si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es conexo.

Teorema 1.35. [7, Teorema 6.7, p. 66] Si X es un espacio compacto y métrico, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es metrizable.

De los teoremas anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.36. X es un continuo si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es un continuo.

Lema 1.37. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}$ un subcontinuo de $\mathcal{CL}(X)$ tales que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n(X) \neq \varnothing$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ tiene a lo más n componentes. Más aún, si $\mathcal{B}$ es cerrado, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que $\bigcup \mathcal{B}$ tiene más de n componentes. Entonces hay $n+1$ subconjuntos no vacíos y separados dos a dos de X tales que

$$\bigcup \mathcal{B} \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}.$$

Sea $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n(X)$ un elemento fijo. Entonces B tiene a lo más n componentes y $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$. Supongamos que $A_1, \ldots, A_m$ son tales que $A_i \cap B \neq \varnothing$, es decir B tiene a lo más m componentes. Ahora sean

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{C \in \mathcal{B} \colon C \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_m\} \\ \mathcal{L} &= \{C \in \mathcal{B} \colon C \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Notemos que $B \in \mathcal{K}$. Vamos a ver que $\mathcal{L}$ es no vacío. Sea $z \in \bigcup \mathcal{B} \cap A_{n+1}$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $z \in C$ y por tanto $C \in \mathcal{L}$. Con esto, observamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Vamos a probar que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ están separados.

Supongamos que existe $D \in \overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{L}$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{Z} = \{K \in \mathcal{CL}(X) \colon K \subseteq \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_m}\},$$

este es cerrado y, además, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$, por lo que $D \in \overline{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{Z}$. Por otro lado, $D \in \mathcal{L}$, por lo que $D \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \varnothing$. De esto se sigue que

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_m} \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \varnothing$$

lo que es una contradicción ya que los conjuntos A_i están separados dos a dos. Por lo tanto $\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{L} = \varnothing$.

La prueba para ver que $\mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{L}} = \varnothing$ es análoga. Por tanto $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ están separados, pero esto es una contradicción ya que $\mathcal{B}$ es conexo. Por tanto $\bigcup \mathcal{B}$ tiene a lo más n componentes.

Para ver que $\bigcup \mathcal{B}$ es cerrado, sea $B = \bigcup \mathcal{B}$ y $x \in \overline{B}$. Para cada vecindad cerrada K de x en X, definimos al conjunto

$$\mathcal{A}_K = \{L \in \mathcal{B} | L \cap K \neq \varnothing\}.$$

Notamos que los conjuntos $\mathcal{A}_K$ son no vacíos ya que, al ser K vecindad de x, entonces $K \cap B \neq \varnothing$ y, por lo tanto, existe $L \in \mathcal{B}$ de tal manera que $L \cap K \neq \varnothing$. Además, $\mathcal{A}_K$ es cerrado y compacto, ya que $\mathcal{A}_K = \langle K \rangle^- \cap \mathcal{B}$, más aún, si K y K' son vecindades cerradas de x tales que $K \subseteq K'$, entonces $\mathcal{A}_K \subseteq \mathcal{A}'_K$. Luego, la colección

$$\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_K | \ K \text{ es una vecindad cerrada de } x\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que existe $L_0 \in \bigcap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}$ y por tanto $x \in L_0$, es decir, $x \in B$. $\square$

Lema 1.38. Para toda $m \in \mathbb{N}$ la función $\mathcal{H} \colon \mathcal{CL}(X)^m \to \mathcal{CL}(X)$ definida por

$$(E_1, \ldots, E_m) \to \bigcup_{i=1}^{m} E_i$$

es continua.

Demostración. Para el caso $m = 2$. Si $E_1 \cup E_2 \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ son los subindices tales que $E_1 \cap U_{\alpha_i} \neq \varnothing$ y $E_2 \cap U_{\beta_j} \neq \varnothing$, entonces $(E_1, E_2) \in \langle U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k} \rangle \times \langle U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_l} \rangle$ y

$$\mathcal{H}(\langle U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k} \rangle \times \langle U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_l} \rangle) \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

La prueba para los casos $m > 2$ es análoga. $\square$

Diremos que una función $f \colon X \to Y$ entre espacios topólogicos es un *mapeo*, si es continua y suprayectiva. Dado un mapeo $f \colon X \to Y$ entre continuos, podemos definir la *función inducida* $2^f \colon \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(Y)$ por la correspondencia $2^f(K) = f(K)$. De esta definición se inducen las funciónes $\mathcal{C}_n(f) = 2^f|_{\mathcal{C}_n(X)} \colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_n(Y)$ y $f_n = \mathcal{C}_n(f)|_{\mathcal{F}_n(X)} \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. A partir de ahora todo espacio topológico será considerado un continuo a menos que se diga lo contrario.

Lema 1.39. Si K es un subcontinuo de X y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\langle K \rangle_n$ y $\langle K \rangle_n^-$ son subcontinuos de $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. Por el Teorema 1.33, $F_m(K)$ es un conexo en $\mathcal{CL}(X)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Usando la función $\mathcal{H}$ del Lema 1.38, obtenemos que

$$\mathcal{H}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_1(K)\right) = \langle K \rangle_n$$
$$\mathcal{H}\left(\mathcal{F}_1(K) \times \prod_{i=1}^{n-1} F_1(X)\right) = \langle K \rangle_n^-.$$

Por lo tanto $\langle K \rangle_n$ y $\langle K \rangle_n^-$ son conexos. Por el Teorema 1.31, v) se sigue que son subcontinuos de $\mathcal{F}_n(X)$. □

Lema 1.40. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Si $C_1, \ldots, C_m$ son subconjuntos cerrados, conexos no vacíos ajenos dos a dos de X, entonces $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es conexo y cerrado en $\mathcal{F}_n(X)$

Demostración. Como cada C_i es conexo, entonces por el Teorema 1.33, $\mathcal{F}_k(C_i)$ es conexo para toda k, por lo tanto, si $n_1, \ldots, n_m$ son enteros positivos tales que $n_1 + \cdots + n_m \leq n$, entonces $\prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{n_i}(C_i)$ es conexo y

$$\mathcal{H}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{n_i}(C_i)\right) \subseteq \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$$

ya que si $B \in \mathcal{H}(\prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{n_i}(C_i))$, entonces $B = \mathcal{H}(A_1 \times \cdots \times A_m)$ con $A_i \in \mathcal{F}_{n_i}(C_i)$ y $B = A_1 \cup \cdots \cup A_m \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_m$. Claramente $B \cap C_i \neq \varnothing$, por lo que $B \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$. Por otro lado, si $B \in \langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$, entonces $B \cap C_i \in \mathcal{F}_{n_i}(C_i)$ donde $n_i = |B \cap C_i|$. Como los C_i son ajenos, se tiene que $n_1 + \ldots + n_m \leq n$ y, por tanto,

$$\mathcal{H}\left((B \cap C_1) \times \cdots \times (B \cap C_m)\right) = (B \cap C_1) \cup \cdots \cup (B \cap C_m) = B,$$

es decir,

$$\mathcal{H}\left(\bigcup_{n_1 + \cdots + n_m \leq n} \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{n_i}(C_i)\right) = \langle C_1, \cdots, C_m \rangle_n$$

y como la imagen continua de un conexo es conexo, se sigue que $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es conexo y cerrado por el Teorema 1.31, v). □

Teorema 1.41. Si $f \colon X \to Y$ es un mapeo, entonces $f_n \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo.

Demostración. Para demostrar la continuidad de f_n solo basta probar que la preimagen de subbásicos es abierta. Sea U un abierto en Y, entonces

$$f_n^{-1}(\langle U \rangle) = \{K \in \mathcal{F}_n(X) \colon f_n(K) \subseteq U\} = \{K \in \mathcal{F}_n(X) \colon K \subseteq f^{-1}(U)\} = \langle f^{-1}(U) \rangle_n$$

y

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(\langle U\rangle^-) = \{K \in \mathcal{F}_n(X) \colon f_n(K) \cap U \neq \varnothing\} =& \{K \in \mathcal{F}_n(X) \colon K \cap f_n^{-1}(U) \neq \varnothing\} \\ =& \langle f^{-1}(U)\rangle_n^- \end{aligned}$$

donde $\langle f^{-1}(U)\rangle^-$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$, ya que $f^{-1}(U)$ es un abierto en X y la continuidad se sigue del Teorema 1.30 *iii*). La suprayectividad es clara. □

Capítulo 2

Propiedades de las funciones inducidas

Las propiedades de los mapeos inducidos $f_n\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ han sido estudiadas en [1], [3], [8]. En particular, dadas dos clases de mapeos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, uno de los principales temas de estudio en la teoría de mapeos inducidos en hiperespacios, es el determinar todas las posibles relaciones entre los siguientes enunciados:

- $f \in \mathcal{M}_1$,
- $f_n \in \mathcal{M}_2$ para alguna $n \in \mathbb{N}$,
- $f_n \in \mathcal{M}_2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este capítulo estudiamos este problema con especial interés en algunas clases de mapeos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ como son las clases de homeomorfismos, mapeos abiertos, mapeos monótonos, mapeos MO, mapeos OM y mapeos confluentes.

En las siguientes secciones veremos algunos resultados ya conocidos sobre el problema ya mencionado donde las pruebas se hacen sin el uso de la métrica.

2.1. Mapeos abiertos y homeomorfismos

.

Teorema 2.1. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo, los siguientes enunciados son equivalentes;

i) f es un homeomorfismo,

ii) f_n es un homeomorfismo para alguna n,

iii) f_n es un homeomorfismo para toda n.

Demostración. *i)* implica *iii)*.
Como f es homeomorfismo, f^{-1} es continua y por tanto f_n^{-1} existe y es continua.
iii) implica *ii)*.

La prueba es inmediata.
ii) implica *i*).
Si $n = 1$, la demostración es inmediata, ya que $\mathcal{F}_1(X)$ es homeomorfo a X y $\mathcal{F}_1(Y)$ es homeomorfo a Y. Si $n > 1$, entonces $g = f_n|_{\mathcal{F}_1(X)} \colon \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_1(Y)$ es un homeomorfismo y por lo tanto existen homeomorfismos $H_1 \colon \mathcal{F}_1(X) \to X$ y $H_2 \colon \mathcal{F}_1(Y) \to Y$ tales que $f = H_2 \circ g \circ H_1^{-1}$. □

Teorema 2.2. $f \colon X \to Y$ es un mapeo abierto si y sólo si $f_2 \colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es un mapeo abierto.

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $\mathcal{F}_2(X)$ y sea $f_2(K) \in f_2(\mathcal{U})$ con $K \in \mathcal{U}$, donde $K = \{p, q\}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{F}_2(X)$, existen abiertos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$ y $K \in \langle U, V\rangle \subseteq \mathcal{U}$. Como f es abierta, existen abiertos $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ en Y tales que $f(p) \in \widetilde{U} \subseteq f(U)$ y $f(q) \in \widetilde{V} \subseteq f(V)$. Afirmamos que $f_2(K) \in \left\langle \widetilde{U}, \widetilde{V} \right\rangle \subseteq f_2(\mathcal{U})$.

Supongamos que $f(p) \neq f(q)$. En este caso podemos suponer además que $\widetilde{V}$ y $\widetilde{U}$ son ajenos. Sea $L \in \left\langle \widetilde{U}, \widetilde{V} \right\rangle$ con $L = \{w, z\}$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \in \widetilde{U}$ y $z \in \widetilde{V}$. Entonces existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $w = f(u)$ y $z = f(v)$. Luego, $f(\{u, v\}) = \{w, z\} = L$, donde $\{u, v\} \in \langle U, V\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $L \in f_2(\mathcal{U})$. El caso en que $f(p) = f(q)$ podemos suponer que $\widetilde{U} = \widetilde{V}$ y la prueba es análoga.

Ahora supongamos que $f_2 \colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es abierta. Sean U un abierto en X y $p \in U$. Por hipótesis, existen abiertos W y V en Y tales que $\{f(p)\} \in \langle W, V\rangle \subseteq f_2(\langle U\rangle)$ en $\mathcal{F}_2(Y)$. Afirmamos que $f(p) \in W \cap V \subseteq f(U)$. Si $y \in W \cap V$, entonces $\{y\} \in \langle W, V\rangle$ y por tanto existe $K \subseteq U$ tal que $f_2(K) = \{y\}$. Tomando $x \in K$ se sigue que $y = f(x)$ con $x \in U$. Por tanto $f(U)$ es abierto en $\mathcal{F}_2(Y)$. □

Teorema 2.3. Si X es conexo, $f \colon X \to Y$ es un mapeo y $f_n \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo abierto para alguna $n \geq 3$, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Para hacer la prueba más general, no supondremos que X es compacto. Vamos a demostrar que si f_n es abierta, entonces f es inyectiva. Supongamos que existen $x, w \in X$ tales que $x \neq w$ y $f(x) = f(w)$. Como f es suprayectiva, existe $z \in X$ tal que $f(z) \neq f(x)$. Sean U y V abiertos ajenos de $f(x)$ y $f(z)$ respectivamente. Por la continuidad de f, existen abiertos ajenos $\widetilde{U}_x$, $\widetilde{U}_w$ y $\widetilde{U}_z$ de x, w y z, respectivamente, tales que $f(\widetilde{U}_x) \subseteq U, f(\widetilde{U}_w) \subseteq U, f(\widetilde{U}_z) \subseteq V$ lo que implica que

$$f(\widetilde{U}_x) \cup f(\widetilde{U}_w) \subseteq U \text{ y } f(\widetilde{U}_z) \subseteq V.$$

Como f_n es abierta, $f_n(\langle \widetilde{U}_x, \widetilde{U}_w, \widetilde{U}_z\rangle)$ es un abierto de $\{f(x), f(z)\}$ en $\mathcal{F}_n(Y)$. Por lo tanto, existe un abierto $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ en $\mathcal{F}_n(Y)$ tal que

$$\{f(x), f(z)\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subseteq f_n(\langle \widetilde{U}_x, \widetilde{U}_w, \widetilde{U}_z\rangle).$$

Ahora, sean $y_1, \ldots, y_{n-1}$ puntos distintos en $\bigcap\{V \cap U_i \colon f(z) \in U_i\} \setminus \{f(z)\}$ y sea $K = \{f(x), y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Entonces $K \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y por tanto existe $L \in \langle \widetilde{U}_x, \widetilde{U}_w, \widetilde{U}_z\rangle$

tal que $f(L) = K$. Luego, para $f(x) \in K$ existen $l_1, l_2 \in L$ distintos tales que $f(l_1) = f(x) = f(l_2)$ ($l_1 \in \widetilde{U}_x$ y $l_2 \in \widetilde{U}_w$). Además, existen $x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$ distintos tales que $f(x_i) = y_i$, ya que $y_1, \ldots, y_{n-1}$ son distintos. Como $f(x_i) = y_i \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, entonces $f(x_i) \notin f(\widetilde{U}_x) \cup f(\widetilde{U}_w)$ y por tanto $x_i \notin \widetilde{U}_x \cup \widetilde{U}_w$. Se sigue que $\{l_1, l_2, x_1 \ldots, x_{n-1}\}$ es un subconjunto de L de $n+1$ elementos lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es inyectiva y se sigue que f_n es inyectiva y abierta, y por lo tanto es un homeomorfismo. Luego, por el Teorema 2.1, f es un homeomorfismo. □

2.2. Mapeos monótonos

Recordamos que un mapeo $f\colon X \to Y$ es monótono si para todo $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo en X. Decimos que un mapeo $f\colon X \to Y$ es *casi monótono* si para todo subespacio conexo V en Y con interior no vacío, se cumple que $f^{-1}(V)$ es conexo en X. Un mapeo $f\colon X \to Y$ es *debilmente monótono* si para cualesquiera subcontinuos propios de P y Q de Y tal que $Y = P \cup Q$ se tiene que $f^{-1}(P)$ y $f^{-1}(Q)$ son conexos en X.

Teorema 2.4. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes,

i) f es monótona,

ii) f_n es monótona para alguna n,

iii) f_n es monótona para toda n.

Demostración. *i)* implica *iii)*.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $B = \{y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{F}_n(Y)$, donde $m \leq n$. Como f es monótona, entonces $C_i = f^{-1}(y_i)$ es conexo para cada i. Por tanto, por el Lema 1.40 el conjunto $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n$ es cerrado y conexo. Es claro que $\langle C_1, \ldots, C_m \rangle_n = f_n^{-1}(B)$.
iii) implica *ii)*.
Es claro.
ii) implica *i)*.
Supongamos que f_n es monótona para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in Y$. Entonces $f_n^{-1}(\{y\})$ es un conexo en $\mathcal{F}_n(X)$. Definimos a $A = \bigcup f_n^{-1}(\{y\})$. Al ser f suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X) \subseteq f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{C}_1(X)$. Por lo tanto A es conexo y es claro que $A = f^{-1}(\{y\})$. Luego, f es monótona. □

Teorema 2.5. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo casi monótono, entonces f es un mapeo casi monótono.

Demostración. Sea K un subcontinuo de Y con interior no vacío. Por el Lema 1.40 $\langle K \rangle_n$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$. Como $\varnothing \neq \langle \mathrm{Int}(K) \rangle_n \subseteq \langle K \rangle_n$ y $\langle \mathrm{Int}(K) \rangle_n$ es abierto, entonces $\langle K \rangle_n$ es un subcontinuo con interior no vacío. Al ser f_n casi monótona, $f_n^{-1}(\langle K \rangle_n)$ es subcontinuo en $\mathcal{F}_n(X)$. Si ahora notamos que $\varnothing \neq f_n^{-1}(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{F}_1(X) \subseteq f_n^{-1}(\langle K \rangle_n) \cap \mathcal{C}_1(X)$, por el Lema 1.37, $\bigcup f_n^{-1}(\langle K \rangle_n)$ es un subcontinuo de X. Por último, como $f^{-1}(K) = \bigcup f_n^{-1}(\langle K \rangle_n)$, se tiene el resultado. □

Lema 2.6. [2] Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo casi monótono con Y localmente conexo, entonces f es monótona.

Demostración. Dado $y \in Y$, al ser Y localmente conexo, si $\{U_n\}$ es un base local de abiertos en Y para y, entonces podemos tomar una sucesión decreciente de abiertos conexos $\{V_n\}$ en Y tales que $y \in V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq U_n$ para toda n, por lo que $\{y\} = \bigcap \overline{V_n}$. Luego, como

$$f^{-1}(y) = f^{-1}\left(\bigcap \overline{V_n}\right) = \bigcap f^{-1}\left(\overline{V_n}\right)$$

y f es casi monótona, entonces $\{f^{-1}\left(\overline{V_n}\right)\}$ es una sucesión decreciente de continuos, por lo que $f^{-1}(y)$ es un continuo. Al ser $y \in Y$ arbitrario se concluye que f es monótona. □

Teorema 2.7. Si Y es localmente conexo, entonces $f\colon X \to Y$ es un mapeo casi monótono si y solo si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es casi monótono para toda n.

Demostración. Si f es casi monótono, por el Lema 2.6, f es monótona y por el Teorema 2.4, f_n es monótona, y por tanto casi monótona.

Dada $n \in \mathbb{N}$, si f_n es casi monótona, por el Teorema 2.5 f es casi monótona. □

Corolario 2.8. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo y Y es localmente conexo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes,

i) f es monótona,

ii) f_n es monótona para alguna n,

iii) f_n es monótona para toda n,

iv) f es casi monótona,

v) f_n es casi monótona para alguna n,

vi) f_n es casi monótona para toda n.

Lema 2.9. Si $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to Y$ y $h\colon X \to Z$ son mapeos tales que $f = g \circ h$ y f es casi monótona, entonces g es casi monótona.

Demostración. Sea K un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como f es casi monótona, $L = f^{-1}(K) = h^{-1}(g^{-1}(K))$ es conexo. Al ser h es continua, se sigue que $h(L) = h(h^{-1}(g^{-1}(K))) = g^{-1}(K)$ es conexo. □

Teorema 2.10. Si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo debilmente monótono para alguna $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces $f\colon X \to Y$ es debilmente monótono.

Demostración. Sean P y Q subcontinuos propios de Y tales que $Y = P \cup Q$. Vamos a demostrar que $f^{-1}(P)$ es conexo. Como $\langle P\rangle_n$ y $\langle Q\rangle_n^-$ son conexos por el Lema 1.39, es fácil ver que $\mathcal{F}_n(Y) = \langle P\rangle_n \cup \langle Q\rangle_n^-$. Si K es una componente de $f^{-1}(P)$, por el Lema 1.40 $\langle K\rangle_n$ es conexo y $\langle K\rangle_n \subseteq f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$. Afirmamos que $\langle K\rangle_n$ es una componente de $f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$. Si suponemos que $\mathcal{C}$ es una componente de $f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$ tal que $\langle K\rangle_n \subsetneq \mathcal{C} \subseteq$

$f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$, entonces existe $\{x,z\}\in \mathcal{C}\backslash\langle K\rangle_n$. Como $\{x,z\}\nsubseteq K$ podemos suponer sin perdida de generalidad que $z\notin K$. Tomando un elemento fijo $x_0\in K$, observamos que $\{x_0\}\in\langle K\rangle_n\subsetneq\mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}(X)\neq\varnothing$. Usando el Lema 1.37 se sigue que $\bigcup\mathcal{C}$ es un conexo que contiene a z y, por lo tanto,

$$K=\bigcup\langle K\rangle_n\subsetneq\bigcup\mathcal{C}\subseteq\bigcup f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)=f^{-1}(P),$$

lo que es una contradicción ya que K es una componente de $f^{-1}(P)$. Así queda demostrado que $\langle K\rangle_n$ es una componente de $f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$. Por hipótesis, $f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$ es conexo, por lo que $\langle K\rangle_n=f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)$. De esto se sigue que

$$K=\bigcup\langle K\rangle_n=\bigcup f_n^{-1}(\langle P\rangle_n)=f^{-1}(P).$$

Luego, $f^{-1}(P)$ es conexo. La prueba de que Q es conexo es análoga. □

2.3. Mapeos ligeros en hiperespacios

Teorema 2.11. Sea X compacto, y sea $f\colon X\to Y$ un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

i) f es ligera,

ii) f_n es ligera para alguna n,

iii) f_n es ligera para toda n.

Demostración. *i*) implica *iii*).
Sean $n\in\mathbb{N}$ y $B=\{y_1,\dots,y_m\}\in\mathcal{F}_n(Y)$ con $m\leq n$. Notamos que $f_n^{-1}(B)=\langle f^{-1}(y_1),\dots,f^{-1}(y_m)\rangle_n$. Si $f_n^{-1}(B)$ tiene un solo elemento, la prueba es inmediata. En caso contrario sean A y C elementos en $f_n^{-1}(B)$ distintos, y supongamos que $x\in A$, $x\in f^{-1}(y_1)$ y $x\notin C$. Por hipótesis $f^{-1}(y_1)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, como $C\cap f^{-1}(y_1)$ es un conjunto finito con $x\notin C\cap f^{-1}(y_1)$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado L en $f^{-1}(y_1)$ tal que $C\cap f^{-1}(y_1)\subseteq L$ y $x\notin L$. Si tomamos a $K=f^{-1}(y_1)\backslash L$, entonces K es un abierto y cerrado en $f^{-1}(y_1)$ tal que

$$(C\cap f^{-1}(y_1))\cap K=\varnothing,\text{ y } x\in K.$$

Ahora definimos a los conjuntos cerrados en $f_n^{-1}(B)$

$$\mathcal{K}=f_n^{-1}(B)\cap\langle K,X\rangle_n$$
$$\mathcal{L}=\langle L,f^{-1}(y_2),\dots,f^{-1}(y_m)\rangle_n$$

y notamos que $A\in\mathcal{K}$ y $C\in\mathcal{L}$. Sea $D\in f_n^{-1}(B)$. Si $D\cap K\neq\varnothing$, entonces $D\in\mathcal{K}$. Si $D\cap K=\varnothing$, entonces $\varnothing\neq D\cap f^{-1}(y_i)$ para toda $i\leq m$ y además

$$D\cap f^{-1}(y_1)\subseteq D\cap(K\cup L)=D\cap L\subseteq L,$$

por lo que $D \in \mathcal{L}$. En cualquier caso $f_n^{-1}(B) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Por último, si suponemos que existe $D \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, entonces como $D \in \mathcal{K}$, existe $x \in D \cap K$ y como $D \in \mathcal{L}$ entonces $D \subseteq L \cup f^{-1}(y_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(y_m)$. Como $K \subseteq f^{-1}(y_1)$ y $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_i) = \varnothing$ si $i \neq 1$ esto implica que $x \in L$, lo cual es una contradicción ya que $K \cap L = \varnothing$. Por lo tanto $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \varnothing$. Luego, $\mathcal{K}$ es un abierto y cerrado en $f_n^{-1}(B)$ de A tal que $C \notin \mathcal{K}$, por lo que $f_n^{-1}(B)$ es totalmente disconexo.
iii) implica *ii*).
Es claro.
ii) implica *i*).
Si f_n es ligera para alguna n, notamos que para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es homeomorfo a $f_n^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{F}_1(X)$. □

Definición 2.12. Un mapeo $f\colon X \to Y$ es *discreto* si $f^{-1}(y)$ es discreto para todo $y \in Y$.

Teorema 2.13. Sea X un espacio T_4 y $f\colon X \to Y$ es un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

i) f es discreto,

ii) f_n es discreto para alguna n,

iii) f_n es discreto para toda n.

Demostración. *i*) implica *iii*).
Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \{y_1, \ldots, y_m\} \in \mathcal{F}_n(Y)$. Por hipótesis sabemos que $f^{-1}(y_k)$ es discreto $k \leq m$, y notamos que $f_n^{-1}(B) = \langle f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_m)\rangle_n$. Afirmamos que $f_n^{-1}(B)$ es discreto. Sea $K \in f_n^{-1}(B)$. Entonces $K = \bigcup_{i\leq m}(K \cap f^{-1}(y_i))$. Como $K \cap f^{-1}(y_i)$ es un abierto en $f^{-1}(y_i)$, entonces existen abiertos V_i en X tales que $K \cap f^{-1}(y_i) = V_i \cap f^{-1}(y_i)$ y $V_i \cap f^{-1}(y_j) = \varnothing$ si $i \neq j$ (X es T_4). Más aún, existen abiertos ajenos $V_1^i, \ldots, V_{k(i)}^i$ en X tales que

$$K \cap f^{-1}(y_i) = \bigcup_{j\leq k(i)} V_j^i \cap f^{-1}(y_i),$$

$V_i = \bigcup_{j\leq k(i)} V_j^i$ y $|V_j^i \cap f^{-1}(y_i)| = 1$. Definimos al abierto

$$\mathcal{V} = \langle V_1^1, \ldots, V_{k(1)}^1, \ldots, V_1^m, \ldots, V_{k(m)}^m\rangle \cap f_n^{-1}(B)$$

Observamos que $K \in \mathcal{V}$. Si $L \in \mathcal{V}$, entonces

$$L = \bigcup_{i\leq m} \bigcup_{j\leq k(i)} V_j^i \cap L = \bigcup_{i\leq m} f^{-1}(y_i) \cap L$$

Si $x \in L$, entonces $x \in V_j^i$ para algunos $i \leq m$, $j \leq k(i)$ y por tanto $x \in f^{-1}(y_i) \cap L$, lo que implica que $x \in V_j^i \cap f^{-1}(y_i)$, por lo que $x \in K \cap f^{-1}(y_i) \subseteq K$, es decir, $L \subseteq K$. Luego, como $|L| = |K|$ se sigue que $L = K$. Así $\mathcal{V} = \{K\}$ y $f_n^{-1}(B)$ es discreto.
iii) implica *ii*).

Es claro.
ii) implica i).
Si f_n es discreto para alguna n, entonces para toda $y \in Y$, $f_n^{-1}(\{y\}) = \langle f^{-1}(y) \rangle_n$. Como $\langle f^{-1}(y) \rangle_n$ es finito, se sigue que $f^{-1}(y) = \bigcup \langle f^{-1}(y) \rangle_n$ es finito. $\square$

Capítulo 3

Homeomorfismos locales en hiperespacios

Decimos que un mapeo $f\colon X \to Y$ es un *homeomorfismo local*, si para cada $x \in X$ existe un abierto U de X con $x \in U$, de tal manera que $f(U)$ es un abierto en Y y $f|_U\colon U \to f(U)$ es un homeomorfismo. En este capítulo, hablamos acerca de los homeomorfismos locales de los mapeos inducidos f_n. Empezamos demostrando algunas propiedades generales de los homeomorfismos locales para despues demostrar que los únicos homeomorfismos locales f_n son los homeomorfismos.

Lema 3.1. Todo homeomorfismo local es un mapeo abierto.

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo local y U un abierto de X. Si $y \in f(U)$ y $x \in f^{-1}(y) \cap U$, por hipótesis existe un abierto V en X de x, tal que $f|_V\colon V \to f(V)$ es un homeomorfismo y $f(V)$ es abierto en Y. Como $U \cap V$ es un abierto de x contenido en V se sigue que $f|_V(U \cap V) = f(U \cap V)$ es un abierto en $f(V)$ y por lo tanto abierto en Y ya que $f(V)$ es abierto en Y. Luego, $f(U \cap V)$ es un abierto de y contenido en $f(U)$. Como $y \in f(U)$ fue arbitrario, se concluye que $f(U)$ es abierto. $\square$

Lema 3.2. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo, entonces f es un homeomorfismo local si y sólo si f es un mapeo abierto y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f^{-1}(y)| = m$ para todo $y \in Y$.

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo local. Primero vamos a demostrar que las fibras de f son discretas. Sean $y \in Y$ y $x \in f^{-1}(y)$, por hipótesis existe un abierto U de x en X tal que $f|_U\colon U \to f(U)$ es un homeomorfismo, por lo que $\{x\} = f^{-1}(y) \cap U$, es decir, $\{x\}$ es abierto en $f^{-1}(y)$. Como $x \in f^{-1}(y)$ fue arbitrario, se concluye que $f^{-1}(y)$ es discreto. Como X es un continuo, se tiene que los subespacios discretos de X son finitos. Ahora, para todo $m \in \mathbb{N}$, si definimos a $\mathcal{A}_m = \{y \in Y\colon |f^{-1}(y)| = m\}$, afirmamos que $\mathcal{A}_m$ es abierto. Para esto, sea $y \in \mathcal{A}_m$ y supongamos que $\{x_1, \ldots, x_m\} = f^{-1}(y)$. Como f es un homeomorfismo local, tenemos que existen abiertos disjuntos U_i de x_i tales que $f|_{U_i}\colon U_i \to f(U_i)$ es un homeomorfismo para cada $i \leq m$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f(U_i) = V$ para cada $i \leq m$. Si definimos a los conjuntos $K = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} U_i)$ y $L = f(K)$, notamos que el abierto $W = V \cap (Y \setminus L)$ contiene a y. Si $z \in W$, como $z \in V$, entonces $f^{-1}(z) \cap U_i$ tiene un solo elemento para cada $i \leq m$, por lo que $|f^{-1}(z)| \geq m$. Por otro lado, como $z \notin L$, entonces $f^{-1}(z) \subseteq X\backslash K = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, lo que implica que $|f^{-1}(z)| = m$. Como $z \in W$ fue arbitrario, entonces $W \subseteq \mathcal{A}_m$, es decir, $\mathcal{A}_m$ es abierto. Ya con esto, observamos que $Y = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_m$ donde $\mathcal{A}_m \cap \mathcal{A}_n = \varnothing$ si $n \neq m$. Al ser Y conexo, se sigue que solo uno de estos conjuntos es no vacío, es decir, $Y = \mathcal{A}_m$ para algun $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, por el Lema 3.1 se tiene que f es abierta.

Para el regreso, sea $x \in X$. Como $f^{-1}(f(x))$ es un conjunto discreto de cardinalidad m, existen abierto ajenos $U_i, \ldots U_m$ tales que $U_i \cap f^{-1}(f(x))$ tiene un solo elemento para cada $i \leq m$. Si definimos a $V = \bigcap_{i=1}^{m} f(U_i)$, entonces V es un abierto en Y, ya que f es abierta. Si definimos a los conjuntos $K = X\backslash(\bigcup_{i=1}^{m} U_i)$ y $L = f(K)$, entonces $W = V \cap (Y\backslash L)$ es un abierto de $f(x)$ en Y. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x \in U_1$. Observamos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y\backslash L) \\ &= f^{-1}(V) \cap (X\backslash f^{-1}(L)). \end{aligned}$$

Si suponemos que $x \in f^{-1}(L)$, entonces existe $z \in K$ tal que $f(x) = f(z)$, es decir, $z \in f^{-1}(f(x)) \cap (X\backslash(\bigcup_{i=1}^{m} U_i))$, lo que implica que $f^{-1}(f(x))$ tiene por lo menos $m+1$ elementos, lo que es una contradicción. Ya con esto, $x \in f^{-1}(W) \cap U_1$. Por último, si $z \in f^{-1}(W) \cap U_1$, como $z \in f^{-1}(W)$, entonces $f(z) \in V$ lo que implica que $f^{-1}(f(z)) \cap U_1$ tiene un solo elemento. Por lo tanto, si $U = f^{-1}(W) \cap U_1$, entonces $x \in U$, $f(U)$ es abierto en Y y $f|_U \colon U \to f(U)$ es un homeomorfismo. □

Corolario 3.3. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes,

i) f es un homeomorfismo,

ii) f_n es un homeomorfismo para alguna n,

iii) f_n es un homeomorfismo para toda n,

iv) f_n es un homeomorfismo local para alguna n,

v) f_n es un homeomorfismo local para toda n.

Demostración. Por el Teorema 2.1, solo basta probar *iv)* implica *i)*. Supongamos que f_n es un homeomorfismo local para alguna n. Si $n \geq 3$, por el Lema 3.1 y el Teorema 2.3 se sigue que f es un homeomorfismo. Si $n = 2$, vamos a probar que f es inyectiva. Por el Lema 3.2, se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_2^{-1}(L)| = m$ para todo $L \in \mathcal{F}_2(Y)$. Sea $y \in Y$. Notamos que

$$\begin{aligned} m = |f_2^{-1}(\{y\})| &= \binom{|f^{-1}(y)|}{1} + \binom{|f^{-1}(y)|}{2} \\ &= |f^{-1}(y)| + \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)|-1)}{2} \\ &= \frac{|f^{-1}(y)|(|f^{-1}(y)|+1)}{2}. \end{aligned}$$

Si consideramos a la ecuación $2m = t^2 - t$, con $t \in \mathbb{N}$, esta tiene solo una solución positiva y como $t = |f^{-1}(y)|$ es solución de esta para todo $y \in Y$, se concluye que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^{-1}(y)| = k$ para todo $y \in Y$. Si tomamos $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$, entonces

$$\begin{aligned} m = |f_2^{-1}(\{y_1, y_2\})| &= |\langle f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\rangle| \\ &= |f^{-1}(y_1) \times f^{-1}(y_2)| \\ &= k^2. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $2k^2 = k^2 + k$ y, por lo tanto, $k = 1$ ya que $k > 0$. Es decir, $|f^{-1}(y)| = 1$ para todo $y \in Y$. $\square$

Capítulo 4

Factorización en hiperespacios

Sabemos del Teorema 1.16 que si $f\colon X \to Y$ es un mapeo entre espacios compactos métricos, entonces podemos hacer una factorización $f = g \circ h$ donde $g\colon Z \to Y$ es un mapeo ligero y $h\colon X \to Z$ es un mapeo monótono, donde Z es un espacio métrico compacto. Más aún, si le pedimos a f ser un mapeo OM, por el Teorema 1.17 podemos garantizar que g es abierta. En el caso de los espacios simétricos es posible dar una descomposición en espacios simétricos y, además, para $n \geq 3$ la propiedad OM resulta ser equivalente a la propiedad de monotonía.

Teorema 4.1. Si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo OM para alguna n, entonces f es OM.

Demostración. Para demostrar que f es OM usaremos las equivalencias *ii*) y *iv*) del Teorema 1.24. Sea $y \in Y$ y $\{y_m\}_m$ sucesión en Y tal que $\lim y_n = y$. Sea C una componente de $f^{-1}(y)$ y $\mathcal{C}$ una componente de $f_n^{-1}(\{y\})$ que contenga a $\mathcal{F}_1(C)$. Por el Lema 1.37, como $\varnothing \neq \mathcal{F}_1(C) \subseteq \mathcal{C}$, entonces $K = \bigcup \mathcal{C}$ tiene a lo más una componente, es decir, K es un conexo en X. Afirmamos que $K = C$.

Para la primera contención, dada $x \in C$, se cumple que $\{x\} \in \mathcal{F}_1(C) \subseteq \mathcal{C}$, por lo que $x \in \bigcup \mathcal{C} = K$. Para la otra contención, dada $x \in K$ existe $L \in \mathcal{C}$ tal que $x \in L$. Como $L \in \mathcal{C} \subseteq f_n^{-1}(\{y\})$, se sigue que $f_n(L) = \{y\}$, por lo que $f(x) = y$ y por lo tanto $x \in f^{-1}(y)$, es decir, $K \subseteq f^{-1}(y)$. Como $C \subseteq K$, C es componente de $f^{-1}(y)$ y K es conexo en $f^{-1}(y)$, entonces $C = K$.

Al ser f_n un mapeo quasi-interior y $\lim\{y_m\} = \{y\}$, entonces por el Teorema 1.24, $\mathbf{Limsup} f_n^{-1}(\{y_m\})$ intersecta a cada componente de $f_n^{-1}(\{y\})$, en particular

$$\mathcal{C} \cap \mathbf{Limsup} f_n^{-1}(\{y_m\}) \neq \varnothing.$$

Sea $A \in \mathcal{C} \cap \mathbf{Limsup} f_n^{-1}(\{y_m\})$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que existen $A_m \in f_n^{-1}(\{y_m\})$ tales que $\lim A_m = A$. Tomando un elemento $x \in A$, Por [7, Lema 6.3, p. 63] para cada m existe $x_m \in A_m$ tal que $d(x_m, x) \leq H(A_m, A)$ y con esto obtenemos

$$\lim d(x_m, x) \leq \lim H(A_m, A) = 0,$$

es decir, $\lim x_m = x$. Luego, como $f_n(A_m) = \{y_m\}$ se tiene que $f(x_m) = y_n$ para toda m, por lo que $x_m \in f^{-1}(y_m)$ para toda m y, así, $x \in \mathbf{Limsup} f_n^{-1}(y_m)$. Por último, como $x \in A \in \mathcal{C}$, entonces $x \in K = C$, con lo que

$$x \in C \cap \mathbf{Limsup} f^{-1}(y_m).$$

Como C es una componente arbitraria de $f^{-1}(y)$, con $y \in Y$ arbitrario, se sigue que f es un mapeo OM. $\square$

Teorema 4.2. $f\colon X \to Y$ es un mapeo OM si y solo si $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es un mapeo OM.

Demostración. Si f es un mapeo OM, existe un mapeo abierto $g\colon Z \to Y$ y un mapeo monótono $h\colon X \to Z$ de tal manera que $f = g \circ h$. Por los teoremas 2.2 y 2.4, g_2 es un mapeo abierto y h_2 es un mapeo monótono y, claramente, $f_2 = g_2 \circ h_2$. El regreso es inmediato por el Teorema 4.1. $\square$

El siguiente teorema es una versión del Teorema de factorización monótono-ligera 1.16, aplicado a los mapeos inducidos f_n que son OM.

Teorema 4.3. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, Si f_n es un mapeo OM para alguna n, $f_n = \widetilde{g} \circ \widetilde{h}$ donde $\widetilde{g}\colon Z' \to F_n(Y)$ es un mapeo abierto y $\widetilde{h}\colon F_n(X) \to Z'$ es un mapeo monótono, entonces existe un continuo Z, un homeomorfismo $\mathcal{T}\colon Z' \to F_n(Z)$, un mapeo abierto $g\colon Z \to Y$ y un mapeo monótono $h\colon X \to Z$ de tal manera que $h_n = \mathcal{T} \circ \widetilde{h}$ y $g_n = \widetilde{g} \circ \mathcal{T}^{-1}$. Más aún, g_n es un mapeo abierto y $f_n = g_n \circ h_n$.

Demostración. Por el Teorema 4.1 f es un mapeo OM, por lo que usando la notación del Teorema 4.2, $f = g \circ h$. Por el Teorema 1.24 podemos suponer que g y $\widetilde{g}$ son mapeos ligeros, por lo que usando los teoremas 2.11 y 2.4, g_n es un mapeo ligero y h_n es un mapeo monótono y, además, cumplen que $f_n = g_n \circ h_n = \widetilde{g} \circ \widetilde{h}$. Ya con esto, usando el Teorema 1.16 se garantiza que existe un homeomorfismo $\mathcal{T}\colon Z' \to F_n(Z)$ tal que $h_n = \mathcal{T} \circ \widetilde{h}$ y $g_n = \widetilde{g} \circ \mathcal{T}^{-1}$. Por último, como la composición de mapeos abiertos es un mapeo abierto, se sigue que g_n es un mapeo abierto. $\square$

Del Teorema 4.3 podemos notar que si un mapeo inducido f_n es OM, entonces no solo podemos dar una factorización por mapeos inducidas $f_n = g_n \circ h_n$, sino que además esta factorización es única salvo homeomorfismos. Para el caso $n \geq 3$, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.4. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, si f_n es un mapeo OM con $n \geq 3$, entonces f_n es un mapeo monótono.

Demostración. Si suponemos que f_n es un mapeo OM, usando la notación del Teorema 4.3, se demostró en particular que g_n es un mapeo abierto y $f_n = g_n \circ h_n$. Si $n \geq 3$, por el Teorema 2.3 se tiene g es un homeomorfismo y usando el Teorema 2.1, obtenemos que g_n es un homeomorfismo. En particular g_n es un mapeo monótono, por lo que f_n es un mapeo monótono. $\square$

Corolario 4.5. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, si f_n es un mapeo MO para $n \geq 3$, entonces f_n es un mapeo monótono.

Demostración. Si f_n es un mapeo MO, entonces por el Teorema 1.25, f_n es un mapeo OM. Usando el Corolario 4.4 concluimos que f_n es monótona. □

El siguiente ejemplo responde negativamente [8, Pregunta 3.16, p. 375].

Ejemplo 4.6. Existe un mapeo $f\colon X \to Y$ de tal manera que f_2 es un mapeo MO pero no es monótono.

Si definimos a $g\colon S^1 \to S^1$ por la correspondencia $g(z) = z^2$, notamos que g es un mapeo abierto y ligero, por lo que g_2 es un mapeo abierto y ligero. Tomamos cualquier homeomorfismo $h\colon S^1 \to S^1$. Si definimos al mapeo $f = h \circ g$, entonces f y f_2 son mapeos MO. Si suponemos que f es monótona, entonces f_2 es monótona y además $h_2^{-1} \circ f_2 = g_2$, lo que implica que g_2 es monótona y por tanto g es monótona, pero esto es una contradicción ya que g es ligera y todo mapeo ligero y monótono es un homeomorfismo.

En vista de los corolarios 4.4 y 4.5, podemos extender el Teorema 2.4 de la siguiente manera.

Teorema 4.7. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, los siguientes enunciados son equivalentes.

i) f es monótona,

ii) f_n es monótona para alguna n,

iii) f_n es monótona para toda n,

iv) f_n es OM para alguna $n \geq 3$,

v) f_n es OM para toda $n \geq 3$,

vi) f_n es MO para alguna $n \geq 3$,

vii) f_n es MO para toda $n \geq 3$.

Demostración. *iii)* implica *v)*. Dada $n \geq 3$, por el Lema 1.19, si f_n es un mapeo monótono, entonces es quasi-interior y, por el Teorema 1.24, se sigue que f_n es OM.
v) implica *iv)*. Es claro.
iv) implica *iii)*. Se sigue del Corolario 4.4 y el Teorema 2.4.
vi) implica *ii)*. Se sigue del Corolario 4.5.
iii) implica *vii)*. Dada $n \geq 3$, como f_n es monótona, se sigue del Corolario 1.27 que f_n es MO.
vii) implica *vi)*. Es claro. □

Capítulo 5

Mapeos inducidos confluentes

En este capítulo estudiamos la propiedad de confluencia de funciones, más en particular, la relación que hay entre la confluencia de un mapeo $f\colon X \to Y$ y la confluencia del mapeo inducido $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$. Además, damos una respuesta parcial a la pregunta [8, Problema 3.45, p. 387]: ¿Si $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es confluente, entonces f es un homeoformismo?

Teorema 5.1. Si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo confluente para alguna n, entonces $f\colon X \to Y$ es un mapeo confluente.

Demostración. Sean K un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(K)$. Como $\mathcal{F}_1(K)$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$ y $\mathcal{F}_1(C)$ es un subconjunto conexo de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(K))$, podemos tomar la componente conexa $\mathcal{C}$ de $f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(K))$ que contenga a $\mathcal{F}_1(C)$. Por el Lema 1.37, $M = \bigcup \mathcal{C}$ es conexo y afirmamos que $M = C$.

Si $x \in C$, entonces $\{x\} \in \mathcal{C}$, por lo que $x \in M$ y, así, $C \subseteq M$. Sea $x \in M$, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$ y, como $A \in \mathcal{C} \subseteq f_n^{-1}(\mathcal{F}_1(K))$, se sigue que $f_n(A) = \{y\}$ para algún $y \in K$, por lo que $f(x) = y$. Como $x \in M$ fue arbitrario, concluimos que $M \subseteq f^{-1}(K)$. Al ser M conexo con $C \subseteq M$ y C componente de $f^{-1}(K)$, entonces $C = M$.

Es claro que $f(M) \subseteq K$. Ahora, dada $y \in K$, como f_n es confluente, entonces $f_n(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_1(K)$, por lo que existe $B \in \mathcal{C}$ de tal manera que $f_n(B) = \{y\}$. Tomando un elemento $x \in B$ fijo, se tiene que $f(x) = y$ y $x \in M$, por lo que $y \in f(M)$. Es decir, $f(C) = f(M) = K$ y, de esta manera, f es confluente. □

El regreso del Teorema 5.1 en general no es cierto, como se puede ver en [8, Ejemplo 3.18, p. 376], donde se prueba que existe un mapeo $f\colon X \to Y$ confluente de tal manera que $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ no es confluente, ni debilmente confluente. En el mismo ejemplo, los espacios X y Y no son localmente conexos, por lo que es válido hacerse la siguiente pregunta: ¿si Y es localmente conexo, el regreso al Teorema 5.1 es cierto? Dicha pregunta tiene una respuesta afirmativa para el caso $n = 2$. Para el caso $n > 2$, el Teorema 5.1 tiene una versión mas fuerte que caracteriza a los mapeos confluentes inducidos f_n como aquellos que son monótonos, aún sin la suposición de que el codominio de f sea localmente conexo, lo que implica que en el ejemplo [8, Ejemplo 3.18, p. 376],

f_n no es confluente para ninguna $n > 1$. Dichos resultados los veremos a continuación. Antes necesitaremos los siguientes resultados.

Teorema 5.2. (del cable cortado)[17, Teorema 5.2, p. 72] Sea X un espacio compacto métrico y sean A y B cerrados en X. Si ninguna componente de X intersecta a A y B, entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados ajenos en X tales que $A \subseteq X_1$ y $B \subseteq X_2$.

Lema 5.3. Si X es un espacio compacto y métrico, $\mathcal{K}$ es un subespacio cerrado y conexo de $\mathcal{CL}(X)$ y $K \in \mathcal{K}$, entonces toda componente de $\bigcup \mathcal{K}$ intersecta a K.

Demostración. Si suponemos que hay una componente C de $\bigcup K$ tal que $C \cap K = \varnothing$, entonces por el Teorema 5.2, existen cerrados ajenos X_1 y X_2 de $\bigcup \mathcal{K}$ tales que $\bigcup \mathcal{K} = X_1 \cup X_2$, $K \subseteq X_1$ y $C \subseteq X_2$. Si definimos a los conjuntos $\mathcal{X}_1 = \{L \in \mathcal{K} | L \subseteq X_1\}$ y $\mathcal{X}_2 = \{L \in \mathcal{K} | L \cap X_2 \neq \varnothing\}$, estos son cerrados por el Teorema 1.30. Claramente son ajenos, lo que contradice la conexidad de $\mathcal{K}$. □

Lema 5.4. [17, Corolario 5.4, p. 74] Dado un continuo no degenerado X, si A es un subcontinuo propio de X y U es un abierto de X con $A \subseteq U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subseteq U$.

Lema 5.5. Para todo subcontinuo propio K de X y $n \geq 2$, si $z \in X \backslash K$, se tiene que $\mathcal{K} = \{\{z\} \cup L | L \in \mathcal{F}_{n-1}(K)\}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$.

Demostración. Como $\{\{z\}\} \times F_{n-1}(K)$ es un conexo de $\mathcal{CL}(X)^2$, por el Lema 1.38, se tiene que
$$\mathcal{H}(\{\{z\}\} \times \mathcal{F}_{n-1}(K)) = \mathcal{K}$$
es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$.

□

Teorema 5.6. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$ y $n \geq 3$, si f_n es confluente, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que f_n es confluente, que f no es monótona, sea $p \in Y$ y P, Q componentes distintas de $f^{-1}(p)$. Tomando $y_0 \neq f(p)$, por el Lema 5.4 existe un subcontinuo no degenerado B de Y tal que $y_0 \in B \subseteq Y \backslash \{f(p)\}$. Tomando una componente R de $f^{-1}(B)$, sabemos del Teorema 5.1, que f es un mapeo confluente, por lo que $f(R) = B$ y, como B es no degenerado, se sigue que R es un subcontinuo no degenerado de X. Si definimos al conjunto
$$\mathcal{L} = \{\{f(p)\} \cup L | L \in \mathcal{F}_{n-1}(f(R))\}$$
entonces $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$ por el Lema 5.5. Fijando un elemento $r \in R$, notamos que el conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{F}_1(P) \times \mathcal{F}_1(Q) \times \mathcal{F}_{n-2}(R)$ es un subcontinuo de $\mathcal{CL}(X)^3$, por lo que usando el Lema 1.38, $\mathcal{B} = \mathcal{H}(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$ que contiene a $\{p, q, r\}$, $f_n(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}$ y $P \cup Q \cup R \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Ahora si $\mathcal{C}$ es la componente de $(f_n)^{-1}(\mathcal{L})$ que contiene a $\{p, q, r\}$, entonces se sigue por lo anterior que $P \cup Q \cup R \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ y afirmamos

que P y Q son componentes de $\bigcup\mathcal{C}$. Para ver que P es componente de $\bigcup\mathcal{C}$, primero notamos que al ser $\mathcal{C}$ componente de $(f_n)^{-1}(\mathcal{L})$, se tiene que $\bigcup\mathcal{C} \subseteq f^{-1}(f(p)) \cup f^{-1}(f(R))$. Ahora, si P' es la componente de $\bigcup C$ que contiene a P y suponemos que $P \subsetneq P'$, al ser P componente de $f^{-1}(f(p))$, si para todo $x \in P' \backslash P$ se tuviera que $f(x) = f(p)$, entonces $P' \subseteq f^{-1}(f(p))$, contradiciendo el hecho de que P es componente de $f^{-1}(f(p))$, y por tanto existe $x_0 \in P' \backslash P$ tal que $f(x_0) \neq f(p)$. Como $P' \subseteq \bigcup\mathcal{C} \subseteq f^{-1}(f(p)) \cup f^{-1}(f(R))$, entonces $x_0 \in f^{-1}(f(R))$. Esto implica que $f(x_0) \in f(P') \subseteq \{f(p)\} \cup f(R)$ con $f(x_0) \in f(R)$, es decir, $f(P')$ es la unión disjunta de los cerrados ajenos $\{f(p)\}$ y $f(R)$, contradiciendo la conexidad de $f(P')$. Por lo tanto P es componente de $\bigcup\mathcal{C}$. La prueba de que Q es componente de $\bigcup\mathcal{C}$ es análoga.

Como $\mathcal{C}$ es un subespacio cerrado y conexo de $\mathcal{CL}(X)$, usando el Lema 5.3, se obtiene que todo elemento $C \in \mathcal{C}$ intersecta a cada componente de $\bigcup\mathcal{C}$, en particular a las componentes P y Q y así todo elemento de $\mathcal{C}$ tiene por lo menos un elemento de P y otro de Q, es decir, es de la forma $\{x, z, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ con $x \in P$ y $z \in Q$. Se sigue que

$$f_n(\mathcal{C}) = \{\{f(p)\} \cup L | L \in \mathcal{F}_{n-2}(f(R))\} \subsetneq \mathcal{L},$$

lo que contradice la confluencia de f_n. Por lo tanto f es monótona. □

De los teoremas 4.7 y 5.6 obtenemos el siguiente corolario, que caracteriza a los mapeos inducidos confluentes para $n \geq 3$.

Corolario 5.7. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, los siguientes enunciados son equivalentes.

i) f es monótona,

ii) f_n es monótona para alguna n,

iii) f_n es monótona para toda n,

iv) f_n es OM para alguna $n \geq 3$,

v) f_n es OM para toda $n \geq 3$,

vi) f_n es MO para alguna $n \geq 3$,

vii) f_n es MO para toda $n \geq 3$,

viii) f_n es confluente para alguna $n \geq 3$,

ix) f_n es confluente para toda $n \geq 3$.

Demostración. La prueba se sigue de los teoremas 4.7 y 5.6 □

5.1. Confluencia de f_2

Hasta ahora hemos caracterizado los mapeos inducidos confluentes para los casos $n \geq 3$. En esta sección hablaremos de la confluencia para el caso $n = 2$ y para esto, primero daremos algunas definiciones y resultados previos acerca del hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$ y los mapeos inducidos $\mathcal{C}_n(f)$, así como su relación con los mapeos inducidos f_n.

Definición 5.8. Dados $K, L \in \mathcal{CL}(X)$, con $K \subsetneq L$, decimos que una función continua $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{CL}(X)$ es un *arco ordenado* de K a L en $\mathcal{CL}(X)$ si $\alpha(0) = K$, $\alpha(1) = L$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ si $s < t$.

Teorema 5.9. [15] Si $K, L \in \mathcal{CL}(X)$ con $K \neq L$, se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes,

i) Existe un arco ordenado de K a L.

ii) $K \subseteq L$ y cada componente de L intersecta a K.

Proposición 5.10. [10] Si un arco ordenado $\mathcal{L}$ en $\mathcal{CL}(X)$ empieza en un elemento de $\mathcal{C}_n(X)$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}_n(X)$.

Corolario 5.11. Si $K, L \in \mathcal{C}(X)$ son tales que $K \subsetneq L$, entonces existe un arco ordenado de K a L en $\mathcal{C}(X)$.

Proposición 5.12. $f\colon X \to Y$ es débilmente confluente si y sólo si $\mathcal{C}_n(f)$ es suprayectiva.

Demostración. Sean $L \in \mathcal{C}_n(Y)$ y $L_1, \ldots, L_n$ componentes de L. Como f es débilmente confluente, existe una componente K_i de $f^{-1}(L_i)$ de tal manera que $f(K_i) = L_i$ para toda $i \leq n$. Se sigue que $f(\bigcup K_i) = \bigcup L_i$, donde $\bigcup K_i \in \mathcal{C}_n(X)$. Para el regreso, sea B un subcontinuo propio de Y. Si tomamos puntos distintos $x_1, \ldots, x_{n-1} \in Y \backslash B$, entonces $L = B \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_{n-1}\} \in \mathcal{C}_n(Y)$. Por ser $\mathcal{C}_n(f)$ suprayectiva, existe $K \in \mathcal{C}_n(X)$ tal que $\mathcal{C}_n(f)(K) = L$. Si $K_1, \ldots, K_n$ son las componentes de K se sigue que existe K_j tal que $f(K_j) = B$. □

Si recordamos que el mapeo

Teorema 5.13. [13, Teorema 3.6, p. 1052] Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, si $\mathcal{C}_n(f)$ es confluente para alguna $n \geq 2$, entonces f es confluente.

Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, como $\mathcal{F}_n(X) \subseteq \mathcal{C}_n(X)$ se tiene que $f_n = \mathcal{C}_n(f)|_{\mathcal{F}_n(X)}$, sin embargo, no es cierto en general que $(\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y)) = \mathcal{F}_n(X)$. Como veremos en el siguiente teorema. Lo anterior es cierto siempre que el mapeo f sea ligero.

Teorema 5.14. Dado un mapeo $f\colon X \to Y$, los siguientes enunciados son equivalentes para toda n.

i) f es ligera,

ii) $(\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y)) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$, *iii*) $\mathcal{F}_n(X) = (\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$,

iv) $\mathcal{F}_n(X)$ es una componente de $(\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$.

Demostración. *i*) implica *ii*). Sea $K \in (\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$. Como $f(K) = \mathcal{C}_n(f)(K) \in \mathcal{F}_n(Y)$ y $K \in \mathcal{C}_n(X)$, podemos suponer que $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ donde $K_i \in \mathcal{C}(X)$ para toda $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(K) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $f(K_i) = \{y_i\}$ y $K_i \in f^{-1}(y_i)$ para toda $i \leq n$. Al ser f ligera, se sigue que K_i es degenerado y, por lo tanto, $K \in \mathcal{F}_n(X)$.
ii) implica *iii*). Es inmediato.
iii) implica *iv*). Como $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo se sigue el resultado.
iv) implica *i*). Supongamos que f no es ligera y que existen un elemento $y \in Y$ y un subcontinuo no degenerado K de X de tal manera que $f(K) = \{y\}$. Notamos que $K \in \mathcal{C}_n(X) \backslash \mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{C}_n(f)(K) \in \mathcal{F}_n(Y)$. Más aún, si L es un subcontinuo de K, entonces $f(L) = f(K) = \{y\}$, por lo que $\mathcal{C}_n(f)(L) = \{y\} \in \mathcal{F}_n(Y)$, es decir, $\mathcal{C}(K) \subseteq (\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$. Como $\mathcal{C}(K)$ es conexo en $(\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$, $\mathcal{C}(K) \cap \mathcal{F}_n(X) \neq \varnothing$. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(X)$ es una componente de $(\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y))$ lo que implica que

$$K \in \mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{F}_n(X) \subseteq (\mathcal{C}_n(f)^{-1})(\mathcal{F}_n(Y)),$$

pero esto es una contradiccón, por lo tanto f es ligera. □

Teorema 5.15. [13, Teorema 3.2, p. 1050] Dado un mapeo confluente $f\colon X \to Y$, si $\mathcal{L}$ es un arco en $\mathcal{C}_2(Y)$, entonces para toda componente $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$ se tiene que $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$.

Demostración. Sean $\mathcal{L}$ un arco en $\mathcal{C}_2(f)(Y)$ y $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{L}$ un homeomorfismo. Sea $\mathcal{K}$ una componente de $C_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$. Si $\gamma(0) \notin \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(0))$ y $\mathcal{K}$ son ajenos, por lo que si una componente de $C_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$ intersecta a $\mathcal{K}$, ésta debe de ser $\mathcal{K}$ y, por lo tanto, no puede intersectar a $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(0))$, por lo que usando el Teorema 5.2 se obtiene que existen conjuntos cerrados ajenos $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ en $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$ tales que $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ con $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(0)) \subseteq \mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_2$. Como $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_2)$ es compacto, existe $t_0 = \text{mín}\{t \in [0,1] | \gamma(t) \in \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_2)\}$ y, como $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(0)) \subseteq \mathcal{K}_1$ entonces $t_0 > 0$. Ahora, sea $K \in \mathcal{K}_2$ tal que $\mathcal{C}_2(f)(K) = \gamma(t_0)$ y para $t < t_0$ sea $K_t \in \mathcal{C}_2(X)$ de tal manera que $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = \gamma(t)$.

<u>Caso 1:</u> Si K es conexo, entonces $\gamma(t_0) = \mathcal{C}_2(f)(K) = f(K)$ es conexo en Y. Sea M la componente de $f^{-1}(\gamma(t_0))$ que contiene a K y para toda $t < t_0$ sea M_t la componente de $f^{-1}(\bigcup \gamma([t, t_0]))$ que contiene a M. Como $\gamma(t_0)$ es conexo y $\gamma(t_0) \in \gamma([t, t_0])$, entonces por el Lema 1.37, $\bigcup \gamma([t, t_0])$ es conexo. Al ser f un mapeo confluente se sigue que $f(M_t) = \bigcup \gamma([t, t_0])$ y, por esto último, existe K_t componente de $f^{-1}(\gamma(t))$ contenida en M_t tal que $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = \gamma(t)$. Por la Proposición 5.12, existe $K_t \in \mathcal{C}_2(X)$ tal que $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = \gamma(t)$ y, más aún, $K_t \subseteq M_t$.

Caso 2: Si K no es conexo, entonces por el Lema 1.37, $\bigcup\gamma([t,t_0]) \in \mathcal{C}_2(Y)$. Definimos a los siguientes conjuntos:

$$M = \bigcup\{C|C \text{ es una componente de } f^{-1}(\gamma(t_0)) \text{ y } C \cap K \neq \varnothing\},$$
$$M_t = \bigcup\{C|C \text{ es una componente de } f^{-1}(\bigcup\gamma([t,t_0])) \text{ y } C \cap M \neq \varnothing\}.$$

Notamos que por definición de los conjuntos M y M_t se tiene por el Teorema 5.9 que existen arcos ordenados de K a M y de M a M_t, por lo que usando la Proposición 5.10 se tiene que $M, M_t \in \mathcal{C}_2(X)$ y, más aún, como $K \in \mathcal{K}_2$, entonces $M \in \mathcal{K}_2$ ya que el arco ordeando de K a M está contenido en $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(t_0)) \subseteq \mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$. Como f es confluente, y las componentes de M_t son las componentes de $f^{-1}(\bigcup\gamma([t,t_0]))$ que interesectan a M, entonces f manda componentes de M_t en componentes de $\bigcup\gamma([t,t_0])$, por lo que $f(M_t) = \bigcup\gamma([t,t_0])$. Luego, como $\gamma([t,t_0])$ es un subcontinuo de $\mathcal{L}$ y $\gamma(t) \in \gamma([t,t_0])$, se sigue de la Proposición 5.3 que $\gamma(t)$ intersecta a cada componente de $\bigcup\gamma([t,t_0])$. Si A y B son las componentes de $\bigcup\gamma([t,t_0])$, y C_A y C_B son las componentes de M_t tales que $f(C_A) = A$ y $f(C_B) = B$, entonces existe una componente A_t de $f^{-1}(\gamma(t) \cap A)$ y una componente B_t de $f^{-1}(\gamma(t) \cap B)$ de tal manera que $A_t \subseteq C_A$ y $B_t \subseteq C_B$. Si definimos a $K_t = A_t \cup B_t$, entonces $K_t \subseteq M_t$, toda componente de M_t intersecta a K_t y $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = f(K_t) = f(A_t) \cup f(B_t) = (\gamma(t) \cap A) \cup (\gamma(t) \cap B) = \gamma(t)$.

Si A y B son las componentes de $\bigcup\gamma([t,t_0])$, entonces existen componentes C_A y C_B de $f^{-1}(\bigcup\gamma([t,t_0]))$ que intersectan a M tales que $f(C_A) = A$ y $f(C_B) = B$, por lo que $f(C_A) \cup f(C_B) = A \cup B = \bigcup\gamma([t,t_0])$, y por lo tanto $f(M_t) = \bigcup\gamma([t,t_0])$. Luego, como $\gamma([t,t_0])$ es un subcontinuo de $\mathcal{L}$ y $\gamma(t) \in \gamma([t,t_0])$, se sigue de la Proposición 5.3 que $\gamma(t)$ intersecta a A y B. En analogía con el Caso 1, existe una componente A_t de $f^{-1}(\gamma(t) \cap A)$ y una componente B_t de $f^{-1}(\gamma(t) \cap B)$ de tal manera que $A_t \subseteq C_A$ y $B_t \subseteq C_B$. Si definimos a $K_t = A_t \cup B_t$, entonces $K_t \subseteq M_t$, toda componente de M_t intersecta a K_t y $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = f(K_t) = f(A_t) \cup f(B_t) = (\gamma(t) \cap A) \cup (\gamma(t) \cap B) = \gamma(t)$.

En cualquier caso, existe $K_t \in \mathcal{C}_2(X)$ tal que $\mathcal{C}_2(f)(K_t) = \gamma(t)$ y toda componente de M_t interesecta a K_t. Ahora sea $\{t_m\}_m$ una sucesión creciente en $[0, t_0)$ convergente a t_0. Por la compacidad de $\mathcal{C}_2(X)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que K_{t_m} converge a $K_0 \in \mathcal{C}_2(X)$. Notamos que si $t < s$, entonces $M \subseteq M_s \subseteq M_t$, y más aún, $K_{t_m} \subseteq \bigcap_{t=1}^{m} M_t$ para toda m, por lo que $K_0 \subseteq \bigcap M_t$. Afirmamos que $\bigcap M_t = M$. Como $M \subseteq M_t$ para toda t, entonces $M \subseteq \bigcap M_t$. Para la otra contención, observamos que para cada t,

$$\bigcap M_t \subseteq \bigcap f^{-1}(\bigcup\gamma([t,t_0])) \subseteq f^{-1}(t_0),$$

además $M_t \in \mathcal{C}_2(X)$ para toda t. De esto se sigue que $\bigcap M_t \in \mathcal{C}_2(X)$. Como toda componente de $\bigcap M_t$ es un conexo en $f^{-1}(t_0)$ que intersecta a K, entonces toda compononente de $\bigcap M_t$ debe estar contenida en una componente de M, por lo que $\bigcap M_t \subseteq M$. Luego, como toda componente de M_t intersecta a K_t se sigue que toda componente de M intersecta a K_0 y $K_0 \subseteq M$ por lo que existe un arco ordenado de K_0 a M en $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\gamma(t_0))$. Como $M \in \mathcal{K}_2$ entonces $K_0 \in \mathcal{K}_2$. Por otro lado, como

$t_0 = \text{mín}\{t \in [0,1] | \gamma(t) \in \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_2)\}$, entonces $\gamma(t_m) \in \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_1)$, lo que implica que $K_{t_m} \subseteq f^{-1}(\gamma(t_m)) \in \mathcal{K}_1$ y, por lo tanto, $K_0 \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ sean ajenos. En conclusión, $\gamma(0) \in \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K})$. Análogamente, $\gamma(1) \in \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K})$ y así $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K})$. □

Corolario 5.16. Dado un mapeo confluente $f\colon X \to Y$, si $\mathcal{B}$ es un subespacio arco conexo de $\mathcal{C}_2(Y)$, entonces para toda componente $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{B})$ se tiene que $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una componente de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Tomando fijo a $A \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{B}$ arco conexo, para cada $B \in \mathcal{B}$, podemos tomar un arco $\mathcal{L}_B$ de $\mathcal{C}_2(f)(A)$ a B, contenido en $\mathcal{B}$. Por el Teorema 5.15, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe una componente $\mathcal{D}_B$ de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L}_B)$ tal que $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{D}_B) = \mathcal{L}_B$ y $A \in \mathcal{D}_B$. De esto se sigue que,

$$\mathcal{C}_2(f)\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{D}_B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{D}_B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{L}_B = \mathcal{B}.$$

Como $A \in \mathcal{D}_B$ para cada $B \in \mathcal{B}$, se tiene que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{D}_B$ es un conexo contenido en $\mathcal{A}$ y cuya imagen es todo $\mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. □

Lema 5.17. [16, Lema 2.2, p. 751] Dado un mapeo monótono $f\colon X \to Y$, existen continuos localmente conexos X_i y Y_i con $i = 1, 2, \ldots$, y un mapeo $F\colon X_1 \to Y_1$ de tal manera que $X_{i+1} \subset X_i$ y $Y_{i+1} \subset Y_i$ para todo i, $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$, $F|_{X_i}\colon X_i \to Y_i$ es un mapeo monótono para cada i y $F|_X = f$.

Lema 5.18. [14, Teorema 3.2, p. 240] Dada $n \in \mathbb{N}$, entonces X es localmente conexo si y solo $\mathcal{C}_n(X)$ es localmente conexo.

Con los resultados ya mostrados en esta sección, ahora podemos dar una respuesta al problema ya planteado al principio del capítulo 5: ¿Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo confluente con Y localmente conexo, entonces $f_2\colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es un mapeo confluente? En el siguiente teorema damos la respuesta.

Teorema 5.19. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo con Y localmente conexo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f es confluente,

ii) f_2 es confluente,

iii) $\mathcal{C}_2(f)$ es confluente.

Demostración. *i)* implica *iii)*. Sean $\mathcal{L}$ un subcontinuo de $\mathcal{C}_2(Y)$ y $\mathcal{K}$ una componente de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$. Como Y es localmente conexo, por el Lema 5.18, $\mathcal{C}_n(Y)$ es localmente conexo y, por lo tanto, existe una sucesión de subcontinuos localmente conexos $\{\mathcal{L}_i\}_i$ de $\mathcal{C}_2(Y)$ tales que $\mathcal{L}_{i+1} \subseteq \mathcal{L}_i$ para toda i y $\mathcal{L} = \bigcap \mathcal{L}_i$. Si $\mathcal{K}_i$ es la componente de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L}_i)$ que contiene a $\mathcal{K}$ para cada i, entonces se sigue que $\mathcal{K}_{i+1} \subseteq \mathcal{K}_i$ para toda i y $\mathcal{K} \subseteq \bigcap \mathcal{K}_i$. Como $\bigcap \mathcal{K}_i \subseteq \bigcap \mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L}_i) = \mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$ y $\bigcap \mathcal{K}_i$ es un subcontinuo y $\mathcal{K}$ es una componente de $\mathcal{C}_2(f)^{-1}(\mathcal{L})$, se sigue que $\mathcal{K} = \bigcap \mathcal{K}_i$. Luego, como los continuos localmente conexos son arco conexos [17, Teorema 8.23, p. 130], entonces $\mathcal{L}_i$ es arco conexo para toda i. Usando el Corolario 5.16, se tiene que $\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_i) = \mathcal{L}_i$ para toda i. Por último, la continuidad de $\mathcal{C}_2(f)$ implica que

$$\mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{C}_2(f)\left(\bigcap \mathcal{K}_i\right) = \bigcap \mathcal{C}_2(f)(\mathcal{K}_i) = \bigcap \mathcal{L}_i = \mathcal{L}.$$

iii) implica *ii*). Por el Teorema 1.16, $f = g \circ h$ donde $g\colon Z \to Y$ es un mapeo ligero y $h\colon X \to Z$ es un mapeo monótono y, de esta manera, $\mathcal{C}_2(f) = \mathcal{C}_2(g) \circ \mathcal{C}_2(h)$. Por el Teorema 1.12, $\mathcal{C}_2(g)$ es confluente. Como g es ligera, el Teorema 5.14 garantiza que $\mathcal{F}_2(Z) = (\mathcal{C}_2(f)^{-1})(\mathcal{F}_2(Y))$, por lo que usando el Teorema 1.10, $g_2 = \mathcal{C}_2(g)|_{\mathcal{F}_2(Z)}\colon \mathcal{F}_2(Z) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es confluente. El Teorema 2.4 afirma que h_2 es monótona y, por lo tanto, confluente por el Teorema 1.13. Por último, el Teorema 1.11 garantiza que $f_2 = g_2 \circ h_2$ es confluente.
ii) implica *i*). Se sigue del Teorema 5.1. □

El Teorema 5.19 nos dice que la confluencia de los mapeos f, f_2 y $\mathcal{C}_2(f)$ es equivalente siempre que el espacio imagen Y sea localmente conexo. Sin la suposición de la conexidad local en el espacio Y, se tiene un resultado parcial pero más general cuya prueba es análoga a las implicaciones *iii*) implica *ii*) y *ii*) implica *i*) del Teorema 5.19; $\mathcal{C}_n(f)$ confluente implica f_n confluente y f_n confluente implica f confluente.

5.2. Mapeos Hereditariamente confluentes en hiperespacios

Definición 5.20. Dada una propiedad $\mathcal{P}$ definida para funciones, decimos que un mapeo $f\colon X \to Y$ es $\mathcal{P}$ si para todo subcontinuo C de X se cumple que $f|_C\colon C \to f(C)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Teorema 5.21. Si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es hereditariamente $\mathcal{P}$ para alguna propiedad $\mathcal{P}$ y algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f\colon X \to Y$ es hereditariamente $\mathcal{P}$.

Demostración. Dado un conexo C de X, notamos que $f_n|_{\mathcal{F}_1(C)}\colon \mathcal{F}_1(C) \to \mathcal{F}_1(Y)$ es idéntica a la función $f|_C\colon C \to f(C)$. Como $\mathcal{F}_1(C)$ es un conexo de $\mathcal{F}_n(X)$ y f_n es es hereditariamente $\mathcal{P}$, entonces $f_n|_{\mathcal{F}_1(C)}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y, por tanto, $f\colon X \to Y$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. □

Teorema 5.22. Si $f_n\colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo hereditariamente monótona para algún $n \geq 2$, entonces $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo.

Demostración. Vamos a probar que f es inyectiva. Supongamos que existen $p, q \in X$ distintos tales que $p, q \in f^{-1}(y)$ para algún $y \in Y$. Sea $y_0 \in Y \backslash \{y\}$. Notamos que al ser X conexo, $X \neq f^{-1}(y) \cup f^{-1}(y_0)$, por lo que existe un elemento $x_0 \in X \backslash (f^{-1}(y) \cup f^{-1}(y_0))$.

Si definimos los conjuntos $\mathcal{A} = \{\{p, x\}\colon x \in X\}$ y $\mathcal{B} = \{\{q, x\}\colon x \in X\}$ y les damos la topología de subespacio de $\mathcal{F}_2(X)$, es claro que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos a X y, por lo tanto, conexos. Más aún, como $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{p, q\}$ se sigue que $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es conexo. por lo que $f_n|_{\mathcal{D}}$ es monótona.

Observamos que

$$f_n|_{\mathcal{D}}^{-1}(\{y, y_0\}) = \{\{p, x\} \colon x \in f^{-1}(y_0)\} \cup \{\{q, x\} \colon x \in f^{-1}(y_0)\}$$

donde $\{\{p, x\} \colon x \in f^{-1}(y_0)\}$ y $\{\{q, x\} \colon x \in f^{-1}(y_0)\}$ son cerrados ajenos y no vacíos. Pero esto es una contradicción ya que $f_n|_{\mathcal{D}}$ es monótona. Luego f es inyectiva. $\square$

Ejemplo 5.23. Tomando al continuo

$$S = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1] \right\}$$

y el mapeo $p \colon S \to [0, 1]$ definido por la correspondencia $p(x, y) = x$, notamos que al ser S un continuo hereditariamente unicoherente[1], se tiene que p es hereditariamente monótono pero no un homeomorfismo. Lo cual tambien muestra que no todo mapeo f que sea hereditariamente monótono cumple que su mapeo inducido f_n sea hereditarimante monótono, por el Teorema 5.22.

Teorema 5.24. Si $f_2 \colon \mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_2(Y)$ es un mapeo hereditariamente confluente, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y) = A \cup B$ donde A y B son cerrados ajenos no vacíos de X. Si C es una componente de $f^{-1}(y)$ contenida en A, por el Corolario 5.11, existe un arco ordenado $\alpha \colon [0, 1] \to \mathcal{C}(X)$ de C a X. Como $\alpha(0) = C \subseteq A \subseteq X \backslash B$, debe existir $s_0 \in (0, 1]$ tal que $\alpha(0) \subsetneq \alpha(s_0) \subseteq X \backslash B$. Si ahora definimos al continuo $K = \alpha(s_0)$, entonces K es un subcontinuo de X de tal manera que

$$B \subseteq f^{-1}(y) \backslash K \qquad y \qquad C \subseteq f^{-1}(y) \cap K \subseteq K.$$

Si suponemos que $K \subseteq f^{-1}(y)$, como $K \cap C \neq \varnothing$ entonces K estaría contenido en la componente C, es decir $\alpha(s_0) = K = C = \alpha(0)$, lo cual no es posible, por lo tanto $K \nsubseteq f^{-1}(y)$. Es decir, K es un subcontinuo de X de tal manera que

$$f^{-1}(y) \nsubseteq K, \qquad f^{-1}(y) \cap K \neq \varnothing \qquad y \qquad K \nsubseteq f^{-1}(y).$$

Si $a \in f^{-1}(y) \cap K$, $b \in f^{-1}(y) \backslash K$ y $c \in K \backslash f^{-1}(y)$, notamos que $f(a), f(c) \in f(K)$ y $f(a) \neq f(c)$. Definimos a los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\{a, x\} | x \in X\} \\ \mathcal{B} &= \{\{b, x\} | x \in X\} \\ \mathcal{C} &= \{\{c, x\} | x \in K\} \\ \mathcal{M} &= \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \end{aligned}$$

[1]Decimos que un continuo es hereditariamente unicoherente, si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es un continuo.

entonces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son subcontinuos de $\mathcal{F}_2(X)$ tales que $\{a,b\} \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ y $\{a,c\} \in \mathcal{A}\cap\mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$.

Si definimos al subcontinuo $\mathcal{K} = \{\{f(c), z\}|z \in f(K)\}$ de $\mathcal{F}_2(Y)$, notamos que $f_2(\mathcal{C}) = \mathcal{K}$ y, como $f(K)$ es no degenerado, entonces $\mathcal{K}$ es no degenerado, por lo que $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $f_2(\mathcal{M})$. Ahora, como

$$(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K}) = (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C})$$

notamos que los conjuntos $(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C})$ y $(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B})$ son cerrados y ajenos, por lo que existe una componente $\mathcal{D}$ de $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K})$ contenida en $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B}$. Luego,

$$f_2(\mathcal{D}) \subseteq f_2(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B}) = \mathcal{K} \cap f_2(\mathcal{B}) = \{\{y, f(c)\}\} \subsetneq \mathcal{K},$$

lo que contradice la confluencia de $f_2|_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$. Por lo tanto f es monótona. $\square$

Teorema 5.25. Si $f_n \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo hereditariamente confluente para $n \geq 2$ y Y es localmente conexo, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f no es inyectiva, es decir, existen $y \in Y$ y $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ con $x_1 \neq x_2$. Por ser Y un espacio no degenerado, existe $y_0 \in Y$ con $y_0 \neq y$. Por la conexidad local de Y, existen abiertos conexo V y W de y_0 de tal manera que $V \subsetneq \overline{V} \subsetneq W \subsetneq \overline{W}$ y $y \notin \overline{W}$. Ahora si tomamos dos puntos $z \in \overline{V}$ y $z' \in W \setminus \overline{V}$, y recordamos que todo continuo localmente conexo es arco conexo ([17, Teorema 8.23, p. 130]), entonces existe un arco $\alpha \colon [0,1] \to L$ en Y de tal manera que $\alpha(0) = z'$ y $\alpha(1) = z$. Notamos que, por la continuidad de α, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $0 < t_0 = \text{mín}\{t \in [0,1] \colon \alpha(t) \in \overline{V}\}$, por lo que tomando $0 < \delta < \text{máx}\{d(x,y)|x,y \in \overline{V}\}$, entonces $V \not\subseteq B\left(\frac{\delta}{2}, \alpha(t_0)\right)$, más aún, existe un abierto regular[2] conexo V_0 de $\alpha(t_0)$ de tal manera que $\overline{V_0} \subseteq B\left(\frac{\delta}{2}, \alpha(t_0)\right)$ y por lo tanto $V \not\subseteq V_0$ y $V \not\subseteq \overline{V_0}$. Luego, si consideramos al arco $\alpha|_{[0,t_0]} \colon [0,t_0] \to L' \subseteq L$, por la continuidad de $\alpha|_{[0,t_0]}$ en t_0 y por ser W abierto, podemos suponer que $L' \cup V_0 \subseteq W$ y además observamos que para todo $t < t_0$, $\alpha|_{[0,t_0]}(t) = \alpha(t) \notin \overline{V}$, por lo que existe un abierto conexo U_t de $\alpha(t)$ en Y, tal que $\overline{U_t} \cap \overline{V} = \varnothing$ y $U_t \subseteq W$. Si tomamos la cubierta abierta

$$\mathfrak{U} = \{V_0\} \cup \{U_t | t \in [0, t_0]\},$$

como $L' \subseteq \bigcup \mathfrak{U}$ y L' es compacto, existen $t_1, \ldots, t_m$ de tal manera que

$$\mathfrak{U}' = \{V_0\} \cup \{U_t | t \in \{t_1, \ldots, t_m\}\},$$

es una cubierta de L', por lo que

$$L' \subseteq \bigcup \mathfrak{U}' = V_0 \cup \left(\bigcup_{t=1}^{m} U_t\right).$$

[2]Se dice que un abierto U de X es regular, si $U = \text{Int}(\overline{U})$.

Si definimos al abierto $U = \bigcup \mathfrak{U}'$, notamos que éste es conexo, ya que $L' \cap B\left(\frac{\delta}{2}, \alpha(t_0)\right) \neq \varnothing$ y $L' \cap U_{t_i} \neq \varnothing$ para toda $i \leq m$ y además $\overline{V} \not\subseteq \overline{U}$.

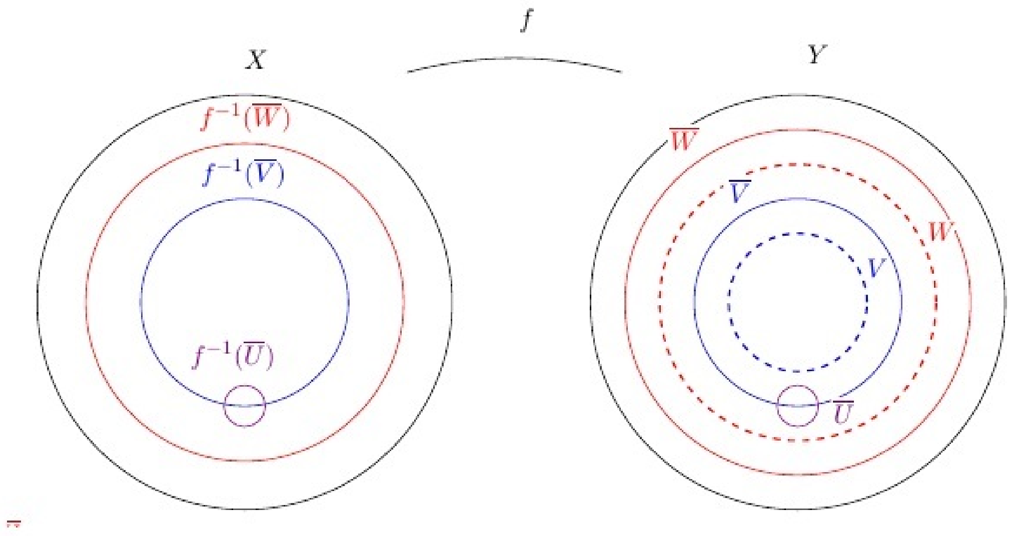

Figura 5.1: Construcción del conjunto U para la demostración del Teorema 5.25.

Como $f^{-1}(\overline{V}) \not\subseteq f^{-1}(\overline{U})$, podemos tomar un elemento $x_0 \in f^{-1}(\overline{V}) \setminus f^{-1}(\overline{U})$. Ahora consideramos a los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{\{x_1, x\} | x \in f^{-1}(\overline{W})\} \\
\mathcal{B} &= \{\{x_0, x\} | x \in f^{-1}(y)\} \\
\mathcal{C} &= \{\{x_2, x\} | x \in f^{-1}(\overline{V})\},
\end{aligned}$$

los cuales son subcontinuos de $\mathcal{F}_n(X)$ ya que f es moñotona por el Teorema 5.24. Notamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x_1, x_0\}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{x_2, x_0\}$, por lo que $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$. Si definimos al continuo $\mathcal{K} = \{\{y, z\} | z \in \overline{U}\}$, es fácil ver que $\mathcal{K} \subseteq f_2(\mathcal{A})$, ya que $\overline{U} \subseteq \overline{W}$ y, por lo tanto, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $f_2(\mathcal{M})$. Como $x_0 \notin f^{-1}(\overline{U}) \cup f^{-1}(y)$ se tiene que $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{B} = \varnothing$, por lo que $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K}) = (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}) \cup (f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C})$, donde $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A}$ y $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}$ son cerrados ajenos ya que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Como $\mathcal{K} \subseteq f_2(\mathcal{A})$ se tiene que $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ y más aún, como $\alpha(t_0) \in \overline{U} \cap \overline{V}$, entonces $f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$ y, por lo tanto, como $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K})$ es disconexo existe una componente $\mathcal{L}$ de $(f_2|_{\mathcal{M}})^{-1}(\mathcal{K})$ tal que $\mathcal{L} \subseteq f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} f_2(\mathcal{L}) &\subseteq f_2(f_2^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}) \\ &= f_2(\mathcal{C}) \cap \mathcal{K} \\ &= \{\{y,z\} | z \in \overline{V}\} \cap \mathcal{K} \\ &= \{\{y,z\} | z \in \overline{V} \cap \overline{U}\} \\ &\subsetneq \{\{y,z\} | z \in \overline{U}\} \qquad (z' \in \overline{U} \backslash \overline{V}) \\ &= \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Es decir, $f_2|_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \subsetneq \mathcal{K}$ y, por lo tanto, $f_2|_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \to f_2(\mathcal{M})$ no es confluente contradiciendo la hipótesis de que f_2 es hereditariamente confluente, por lo tanto f es inyectiva. □

Teorema 5.26. Si $f_n \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo hereditariamente confluente para $n \geq 2$ y Y es conexo por trayectorias, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Sea L una trayectoria en Y. Por el Teorema 5.24, $K = f^{-1}(L)$ es un subcontinuo de X. Luego, si $g = f|_K \colon K \to L$, entonces $\mathcal{F}_n(K)$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(X)$ y por lo tanto $f_n|_{\mathcal{F}_n(K)} = g_n \colon \mathcal{F}_n(K) \to \mathcal{F}_n(L)$ es un mapeo hereditariamente confluente. Como L es localmente conexo, por el Teorema 5.25, se sigue que $g = f|_{f^{-1}(L)}$ es un homeomorfismo.

Para probar que f es un homeomorfismo, si tomamos $y \in Y$ y una trayectoria L que contenga a y, entonces ya probamos que $f|_{f^{-1}(L)} \colon f^{-1}(L) \to L$ es un homeomorfismo. Como $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(L)$, se sigue que $f|_{f^{-1}(y)} \colon f^{-1}(y) \to \{y\}$ es un homeomorfismo, es decir, $f^{-1}(y)$ consta de un solo punto. Al ser $y \in Y$ arbitrario, se concluye que f es un homoemorfismo. □

Con estos resultados nos podemos plantear la siguiente pregunta:

Pregunta 5.27. ¿Si $f_n \colon \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es un mapeo hereditariamente confluente para $n = 2$ y Y es indescomponible, entonces f es un homeomorfismo?

Índice alfabético

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, F. Capulin, D. Maya, F. Orozco-Zitli *Induced mappings on symmetric products of continua.* Topology Appl. 214(2016), 100-108.

[2] F. Barragán, S. Macías, J. F. Tenorio, *More on induced maps on n-fold symmetric product suspensions.* Glasnik Matematički. Vol. 50(70)(2015), 489 - 512.

[3] E. Castañeda-Alvarado, F. Orozco-Zitli, J. Sánchez- Martínez. *Induced mappings between quotient spaces of symmetric products of continua.* Topology Appl. 163(2014), 66-76.

[4] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua.*, Fund. Math. 56 (1964), 213-220

[5] J. J. Charatonik, A. Illanes, S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $\mathcal{C}_n(X)$ of a continuum X.* Houston Journal of Mathematics. 28(2002).

[6] S. Eilenberg, *Sur les transformations continues d'espaces métriqes compacts.* Fund. Math., 22(1934), 292 - 296.

[7] L. J. Espinosa, *Introducción a los hiperespacios de Vietoris.*, tesis de licenciatura, UNAM, 2016, pp. 1-88.

[8] G. Higuera, A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products.* Top. Proc. 37 (2011) pp. 367-401.

[9] J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology.* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1961

[10] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum.* Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

[11] K. Kuratowski, *Topology, vol II.* New York-London-Warszawa, 1996.

[12] A. Lelek, D. R. Read, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions.* Colloquium Mathematicae, Vol. XXIX, 1974.

[13] M. de J. López, S. Macías, *Induced maps on n-fold hyperspaces.* Houston Journal of Mathematics. 33(2007).

[14] S. Macías, *On the hyperspaces $\mathcal{C}_n(X)$ of a continuum X.* Topology Appl. 109 (2001) 237-256.

[15] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: A text with Research Questions.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[16] S. B. Nadler, Jr. *Induced universal maps and some hyperspaces with the fixed point property.* Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 749-754.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[18] H. Reitberger, *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of general topology.* Institut für Mathematik, A-6020 Innsbruck, Austria, 1997.

[19] H. Reitberger, *Leopold Vietoris (1891 - 2002).* November 2002.

[20] L. Vietoris *Bereiche zweiter Ordnung.* Monatsh. f. Math. u. Phys. 32 (1922), 258-280.