UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Resolución de problemas para un aprendizaje significativo en conceptos básicos de Estadística.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN EL CAMPO DE CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS

PRESENTA:

PETRA VALLES RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. SERGIO CRUZ CONTRERAS
Facultad de Estudios Superiores Acatlán

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dra. María del Carmen González Videgaray
Mtro. Alfredo Ríos Ramírez

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, Noviembre de 2018

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar, a la Universidad Nacional Autónoma de México, por el apoyo que me ha brindado para realizar la Maestría en Docencia, por ser un espacio de crecimiento profesional y personal, donde las oportunidades de seguir preparándose son interminables.

También quiero agradecer al Dr. Sergio Cruz Contreras por su compromiso y dedicación, por el valioso tiempo dedicado a la dirección de esta tesis, por su verdadera preocupación en la formación de profesionales en la docencia, sobre todo, por la paciencia que me tuvo durante todo el proceso. Muy en especial, agradezco por sus consejos tanto profesionales como personales.

Agradezco a la Dra. Asela Carlón Monroy porque gracias a sus enseñanzas aprendí a amar la Docencia. Puedo asegurar que todos sus conocimientos contribuyeron de manera favorable en mi crecimiento profesional.

Además, quiero agradecer a la Dra. María del Carmen González Videgaray, al Dr. Enrique Ruíz Velasco Sánchez y al Mtro. Alfredo Ríos Ramírez por sus atinadas observaciones y contribuciones para la mejora del trabajo.

A todas las personas que han estado conmigo y que de una u otra forma me han apoyado, infinitas gracias.

Sobre todo, agradezco a quienes han estado apoyándome en todo momento, principalmente, en cada una de mis decisiones, ellos son mi motor para seguir adelante, me refiero a mis Padres: Sr. José Valles Cordero y Sra. Emilia Rodríguez Morales, infinitas gracias por su amor, ejemplo y valores inculcados.

A Tere, Valente, Mariela, Sanjuana y Adriana, quienes son mi complemento, mis compañeros en este andar llamado vida, gracias por siempre estar y por estos sobrinos maravillosos que me han dado.

A Don Lupe y Doña Victoria mil gracias por todas sus enseñanzas. Con ustedes aprendí que el amor eterno sí existe, siempre los llevo en mi corazón. En especial, este trabajo es para ustedes. Abuelitos, sé lo orgullosos que deben de estar…Un abrazo hasta el cielo.

Aún en la estadística descriptiva

“Lo esencial es invisible a los ojos”

(González & Medina, 2015)

RESUMEN

En este trabajo se aborda el problema de construir, por alumnos de bachillerato, conceptos básicos de estadística en el nivel medio superior, tales como: medidas de tendencia central y medidas de dispersión y la resolución de problemas referentes a las medidas de tendencia central y a la toma de decisiones con base en el estudio de la variabilidad existente en los conjuntos de datos. Para aproximarse al problema anterior, se utilizó como referentes teóricos, en lo fundamental, a las directrices contenidas en los Planes y Programas de estudio (2003) del CCH; el Diseño de Ambientes de Aprendizaje de Bransford, la teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel y los Principios y Estándares Curriculares del NCTM y una metodología de tipo cualitativo. Se trabajó inicialmente con un grupo de 42 alumnos: 31 mujeres y 11 hombres de entre 17 y 18 años de edad, durante un semestre escolar con duración de 64 horas de clase, en 32 sesiones de 4 horas semanales. La actividad en el salón de clase se documentó con los materiales producidos por los estudiantes, el registro del profesor y la grabación en video de todas las sesiones de clase.

Durante la experiencia se intentó promover una formación integral como lo establece el Currículum del CCH y, partiendo del Problema del Geiser propuesto por Shaughnessy y trabajando en forma individual, en grupos pequeños y de manera grupal, se puede decir que los alumnos resolvieron exitosamente la tarea ya que fueron capaces de construir las medidas de tendencia central y medidas de dispersión y abordar la resolución de problemas referentes a las medidas de tendencia central y a la toma de decisiones, en donde utilizaron diferentes representaciones, establecieron conexiones, justificaron sus respuestas y fueron capaces de comunicar adecuadamente sus resultados.

ABSTRACT

In this paper is presented an approach for the purpose of building basic statistical concepts for High School Students at the Colegio de Ciencias y Humanidad (CCH) as part of the Universidad Nacional Autonoma de Mexico (UNAM) High School system, such as measures of central tendency and dispersion and resolution of problems referring to measures of central tendency and decision making based on the study of the existing variability given by the data collected. In order to cope with this problem a set or theoretically references were used first and foremost the guidelines presented on the Statistics and Probability Curriculum (2013) at the Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), Bradford's Ambiental Learning Design, Ausubel' Meaningful Learning Theory, The NCTM´standards and principles curriculum and a qualitative methodology. In the beginning, a group of 42 students was selected. It consisted of 31 women and 11 men between 17 and 18 years old, during a 64 hour-semester, divided into 32 sessions, 4 hours each week. The classroom activities were reported with all the materials developed by the students as well as class sessions recorded on video.

All along this experience, the integral formation method of education was promoted as it is established on the CCH's curriculum in accordance with Geyser Problem given by Shaughnessy. Students worked in a small and whole group in order to solve successfully all the exercises so they could work out by themselves the measures of central tendency and dispersion and resolution of problems regarding the measures of central tendency and the decision making, in which they were able to use different mental representations and establish relationships that supported their answers and make known their solutions.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son importantes para comprender nuestro entorno. Los Estándares (NCTM, 2000) hacen referencia a esta importancia cuando mencionan la necesidad de las matemáticas en un mundo cambiante: debemos ser capaces de entenderlas y usarlas.

En particular, se tiene que la variabilidad es la manifestación de cambio de una entidad o fenómeno que se observa en nuestro mundo cambiante, es decir, lo que está variando y, la Estadística es la rama de las Matemáticas que se preocupa por diferenciar los tipos de variabilidad que conforman el cambio que manifiesta un fenómeno.

La enseñanza de la Estadística ha cobrado auge en los últimos años, debido a su importancia en la formación general de todo ciudadano: se desea formar ciudadanos críticos ante toda la información que los medios de comunicación nos presentan y capaces de validar o rechazar información donde están presentes estadísticas, incertidumbre, azar y probabilidades; en consecuencia escuelas y docentes deben atender la enseñanza de la estocástica[1].

Por lo anterior, en la actualidad la enseñanza de la estadística forma parte de algunos planes de estudio de nivel básico, bachillerato, licenciatura y posgrados. Esta labor requiere que como docentes conozcamos a nuestros alumnos y realmente nos interese su aprendizaje; pues, como lo menciona Batanero (2000) ayudar a los niños y jóvenes a comprender progresivamente las ideas estocásticas fundamentales no es una tarea sencilla, ya que es necesario adaptar estas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje significativo.

Debido a que la variación está en el centro de la estadística es muy importante su estudio; Moore (1990) propone cinco ideas fundamentales de la estadística y la variación encabeza su lista, señalando que el pensamiento estadístico es ante todo conciencia de la variabilidad.

[1] Término Europeo que se le da al análisis de la probabilidad y la estadística.

A pesar de la gran importancia que tiene la variabilidad en estadística, Shaughnessy (1997) observó que en la literatura de investigación didáctica sobre el aprendizaje de nociones estadísticas no había informes que dieran cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión y variabilidad.

Por otro lado, algunos resultados de evaluaciones (Informe sobre la gestión directiva 2010-2014 del CCH y Examen diagnóstico académico EDA 2012-2015) nos muestran bajo rendimiento en los aprendizajes de los estudiantes en los cursos de Estadística y Probabilidad I y II.

Aunado a lo antes dicho, la enseñanza tradicional, en la que el profesor es el actor principal, poco ha contribuido para la formación de un ciudadano crítico y capaz de tomar decisiones con base en un análisis de la información.

Por todo lo anterior, en este trabajo se presenta una propuesta didáctica para abordar conceptos fundamentales (medidas de tendencia central y medidas de dispersión) que nos sirven para analizar la variabilidad estadística a nivel medio superior, intentando promover un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Se trabajó con base en la metodología de resolución de problemas a través de un aprendizaje social, regularmente con 41 estudiantes del CCH Vallejo, que cursaban Estadística I en su quinto semestre. A partir de un problema planteado a los estudiantes y con base en las soluciones que ellos dieron, se diseñaron actividades de aprendizaje que permitieron que los alumnos participaran en la construcción de los conceptos fundamentales de la estadística, tales como medidas de tendencia central y medidas de dispersión.

El trabajo está estructurado en cuatro Capítulos. El primero de ellos, dedicado a algunas nociones preliminares para plantear la importancia de la problemática en los conceptos fundamentales que nos sirven para analizar la variabilidad estadística en la enseñanza y el aprendizaje, ubicar el contexto en el cual se formula el objetivo y las preguntas de investigación que guiaron el presente escrito.

En el Capítulo 2, se revisan algunos trabajos realizados por distintos autores acerca de cómo se ha enseñado y aprendido los conceptos fundamentales que nos sirven para analizar la variabilidad estadística; ubicación del tema en el plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades; los contenidos matemáticos que intervienen en el concepto de variabilidad estadística -tanto en su forma especializada en la didáctica de la estadística como en su forma general- y por último, se describe el Marco Teórico que sustenta el trabajo.

En el Capítulo 3, se presenta la metodología seguida durante la aplicación de la propuesta, así como datos generales del grupo participante, instrumentos, examen diagnóstico que se usó para hacer la planeación y procedimientos empleados en la toma, tratamiento y análisis de datos.

Y, finalmente, en el Capítulo 4, se presenta la descripción y el análisis de los datos obtenidos a través de las diferentes tareas que se aplicaron, así mismo, se describen las conclusiones que se desprenden de esta propuesta didáctica acerca de la variabilidad estadística y de los conceptos que intervienen en ella.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE ESTUDIO

INTRODUCCIÓN

Un problema central, pero extremadamente complejo, de toda institución educativa de tipo presencial, es lograr un trabajo eficaz. Entendiendo lo último como aquel mediante el cual se alcanza, de manera satisfactoria, los objetivos educacionales que se plantea. El problema es complejo por la multiplicidad de variables que participan: decisiones políticas, administrativas, académicas, académico-administrativas, recursos materiales y humanos, tradición de la institución, arraigo y pertenencia de la institución a la sociedad, estándares establecidos, criterios de evaluación, gestión académica, etc.

Además de lo anterior, en el logro de los objetivos educacionales de una institución educativa juega un cierto papel el desempeño de los profesores. Sin excluir que estos últimos tienen un lugar importante en el logro de los objetivos, no son, en definitiva, los principales responsables.

El resultado de decisiones: políticas, administrativas, académicas, académico-administrativas, etc.; y de otras variables: recursos materiales y humanos, tradición de la institución, arraigo y pertenencia de la institución a la sociedad, estándares establecidos, criterios de evaluación, gestión académica, desempeño de los profesores, etc. se reflejará en lo que ocurre en el salón de clase: El salón de clase es el lugar por excelencia en donde se materializa una propuesta pedagógica.

De la diversidad de variables que participan en la empresa docente de un centro educativo, en este trabajo sólo estamos interesados en lo que compete, primordialmente, al profesor: planear y coordinar la puesta en práctica del proceso enseñanza-aprendizaje en el salón de clase.

CONTEXTO QUE DA ORIGEN AL PROBLEMA INVESTIGACIÓN

Actualmente se acepta que todo aprendizaje es situado (Lave & Wenger 1991): se da en un tiempo y lugar con participantes específicos, particulares. En consecuencia, el aprendizaje escolar es de naturaleza situado: se da en una institución educativa específica, en un salón de clases determinado, en el cual está presente un profesor en particular y un grupo de alumnos en donde cada uno de ellos es irrepetible.

Por otro lado, el aprendizaje en el salón de clase ocurre en una clase que resulta de la enseñanza y de la filosofía de la enseñanza y del aprendizaje del profesor (Bikner-Ahsbahs & Williams 2009). Consciente o inconsciente, lo que el profesor haga o deje de hacer será consecuencia de su sistema de creencias (Thompson, 1992): por ejemplo, con base en los lineamientos establecidos en los documentos de la institución educativa, el profesor elabora su propio plan de trabajo personal. Más aún, en el nivel superior, cada profesor tiene el derecho de decidir libremente la mejor manera de impartir su clase (Charur, 1993, p. 39). El profesor al ejercer tal derecho, lo hace en términos de sus creencias, que son, en mucho, resultado del nivel de profesionalización con que cuente.

Por lo anterior, un problema vigente en toda institución educativa es el siguiente: ¿Cómo diseñar un ambiente de aprendizaje y llevarlo a la práctica, que sea congruente con los lineamientos que establecen sus documentos fundacionales?

El Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, ejemplo de institución educativa, enfrenta el problema antes mencionado.

En los documentos fundacionales del Colegio de Ciencias y Humanidades, desde la llamada Gaceta Amarilla hasta el documento denominado Sentido y Orientación de las Áreas, pasando por los Planes y Programas de Estudio, se plasma el Modelo Educativo del CCH: la Utopía que es el CCH. Ahí se encuentra una Filosofía y una Sociología de la Educación, una conceptualización de ser humano, de ciudadano y se precisa el perfil de individuo que se desea para todo joven que egrese de sus aulas: útil a la sociedad mexicana y que se realice como persona, como ser humano, como individuo. Naturalmente que los documentos plantean el deber ser, el modelo, el sueño, la Utopía. Pero, como dijera Eduardo Galeano, “la Utopía sirve para caminar”, y así es como ha caminado, por más de cuarenta años, el CCH.

Tal vez el principio pedagógico más importante en que se basa la educación que promueve el CCH sea la búsqueda de una formación integral de sus alumnos, entendida ésta como aquella que considera conocimientos, valores y habilidades, en igualdad de condiciones, sin privilegiar una, en detrimento de otra.

Por todo lo anterior, en el presente trabajo se aborda el siguiente:

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

> Diseñar un ambiente de aprendizaje, y llevarlo a la práctica, que promueva el aprendizaje del Tema: Variabilidad Estadística, y que, además, sea congruente con los lineamientos generales, tanto de carácter pedagógico como disciplinario, que establecen los documentos fundacionales del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

A continuación se aportan argumentos que intentan justificar la importancia del problema de investigación planteado. Tal argumentación se desarrolla en dos vertientes: la disciplinaria, que se propone señalar la importancia de los conocimientos que se desea que los estudiantes aprendan, Variabilidad; y la de carácter pedagógico, que tiene que ver con lograr una enseñanza eficaz de las matemáticas, siempre de acuerdo a los lineamientos que establecen los documentos del Colegio de Ciencias y Humanidades.

IMPORTANCIA DEL TEMA DE VARIABILIDAD PARA LOS CURSOS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD I Y II

Reflexionando un poco sobre qué es la variabilidad, estaremos de acuerdo en que ésta la tenemos presente en todo momento. Imaginemos el mundo invariable, ¿tendría sentido?

La variabilidad es una cualidad que está presente en algunos objetos matemáticos como lo son, una colección o varias colecciones de datos, en muestras o en las distribuciones de probabilidad, pero también se observa en diversos fenómenos naturales aleatorios, tales como: el clima, el tiempo, eclipses e inundaciones, entre otros y todos estos con la cualidad de que se puede hablar de ellos conociendo sus antecedentes e incluso, analizando su comportamiento, se podrían hacer predicciones. A la medida de la variabilidad se le llama variación. Moore (1990) y Wild et al. (1999), colocan a la variabilidad en el centro del pensamiento estadístico.

Por otro lado, en el informe de la comisión especial para la actualización de los Programas de Estudio correspondiente a la materia de Estadística y Probabilidad del CCH de la UNAM (2012), se menciona dentro del enfoque de la materia lo siguiente:

> “Si aceptamos que la Estadística es, entre otras cosas, la ciencia que fundamentalmente estudia la variabilidad, este concepto resulta central en la concepción que se tiene sobre la materia, y consecuentemente sobre los aprendizajes que la concretan en el desarrollo curricular”.

IMPORTANCIA DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA VARIABILIDAD, DE ACUERDO A LOS LINEAMIENTOS QUE ESTABLECEN LOS DOCUMENTOS DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

El Plan de Estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades sostiene la posición de que los estudiantes deben ser actores de su propia formación, de la cultura de su medio, capaces de obtener, jerarquizar y validar información, utilizando instrumentos clásicos y tecnológicos para resolver con ello problemas nuevos.

La visión anterior es opuesta a la que sostiene la enseñanza tradicional, en la que el profesor es el actor principal, es decir: el docente explica los temas, resuelve problemas, plantea preguntas, pone ejemplos, y el alumno sólo escucha y escribe. Esto puede ser un impedimento en que se alcance un aprendizaje como el que se persigue en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

En concordancia con los planteamientos del CCH, el NCTM (2000) menciona que una enseñanza eficaz requiere un entorno de aprendizaje que apoye y estimule. Para ser eficaz se requieren tareas matemáticas útiles para introducir conceptos importantes y para implicar y retar intelectualmente a los alumnos. Las acciones del profesor deben animar al alumno a pensar, preguntar, resolver problemas y discutir sus ideas, estrategias y soluciones. Dicho en otras palabras, el profesor debe fomentar un ambiente de aprendizaje en donde él solo será quien guíe el escenario, donde el alumno debe ser el actor principal en su aprendizaje.

Por experiencia personal, lo anterior está un poco lejos de la presentación tradicional de la variabilidad. La variabilidad, la mayoría de las veces, la trabajamos en el salón de clase únicamente como el producto del análisis en un conjunto de datos que no tienen ningún sentido y son proporcionados por el profesor. No vamos más allá de esta aplicación, es decir, no vemos la existencia de la variabilidad en nuestro entorno para llegar a tomar una decisión, por ejemplo: en el tiempo que esperamos nuestro transporte, en los resultados obtenidos en un examen, en el nivel de contaminación que se tiene en un día cualquiera, en el tiempo que transcurre para trasladarnos de nuestra casa al lugar de trabajo, el precio del petróleo, etc. Cuestiones de este tipo tal vez se le harán más familiares a nuestros estudiantes. Tenemos que intentar fomentar el análisis consciente de la variabilidad existente en nuestra vida cotidiana.

Otro aspecto a considerar es el de las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje. Aquí se pueden analizar desde dos puntos de vista, el psicológico y el de la educación estadística. A continuación se hará una breve descripción de estos dos puntos ya que en el Capítulo 2 se abordaran más a fondo. En primer lugar tenemos las dificultades presentadas al considerar el lado psicológico de los estudiantes, Piaget e Inhelder (1951) postulan que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. Por ello es importante, al diseñar las tareas, considerar los conocimientos que el estudiante posee, y sobre ello ir construyendo los nuevos ya que de no ser así, los pupilos irán aprendiendo nuevos conceptos sin lograr establecer una base sólida.

Además de lo anterior, otro punto es el concerniente a la educación estadística, específicamente a conceptos tales como: medidas de tendencia central y de dispersión. Batanero (2001) menciona que en medidas centrales los alumnos aplican el algoritmo en forma mecánica, sin comprender su significado y que proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Respecto a las medidas de dispersión menciona que un error frecuente es ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones. Es de suma importancia considerar estos errores al momento de diseñar las tareas, poniendo mayor énfasis en la construcción y comprensión de estos conceptos.

Por último, y dándole su debida dimensión, veamos los resultados obtenidos en evaluaciones oficiales del Colegio de Ciencias y Humanidades en las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II (ESTA I-II). Una de ellas es el informe sobre la acreditación en examen ordinario de las materias de ESTA I-II en los ciclos escolares 2010 al 2013. Los números nos muestran que el índice de aprobación anda por encima del 60% para el caso de ESTA I, lo cual no parece ser desalentador. Lo que sí es un tanto preocupante es que en ESTA II ese porcentaje bajó en todos los periodos. El otro resultado es el porcentaje promedio de aciertos obtenidos por los estudiantes en el Examen Diagnóstico Académico (EDA) aplicado durante los períodos 2010 al 2015. Aquí, los resultados obtenidos en ESTA I son más altos que los obtenidos en ESTA II, lo que nos lleva a pensar en que algo no estamos haciendo bien en este segundo curso de Estadística o algo de Estadística I no quedó bien establecido. Haciendo un análisis sobre los Programas de estudio de estos dos cursos podemos encontrar como eje transversal el concepto de Variabilidad, el cual se encuentra presente desde la introducción a ambos programas, como en todo el desarrollo de los dos cursos de estadística y probabilidad, razón por la cual hemos decidido realizar este estudio, en el cual se pretende introducir éste concepto y los fundamentales que intervienen en él.

CONTEXTO QUE DA ORIGEN A LA HIPÓTESIS DE TRABAJO

Si bien los Programas de estudio para el Área de Matemáticas en el CCH, ofrecen propuestas didácticas concretas para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos, por otro lado dan completa libertad para que el profesor elija recursos didácticos que más le parezca adecuados.

Las orientaciones didácticas generales, que aparecen en los documentos del CCH, el profesor las puede concretar recurriendo a los aportes que la Investigación Básica en Pedagogía y en Didáctica de las Matemáticas ha producido. Por ejemplo, una orientación señala que el alumno construirá sus conocimientos. Ante esto, cabe la siguiente pregunta: ¿de qué constructivismo estamos hablando? Los documentos no lo precisan y no tienen por qué hacerlo: el profesor decide si se orienta por el Constructivismo Radical de von Glasersfeld (1990) o por un constructivismo de orientación más social, como el desarrollado por Cobb, .Wood & Yackel, (1991)

En los documentos fundacionales del Colegio de Ciencias y Humanidades, además del perfil de alumno que se pretende potenciar, se caracterizan conceptos como los siguientes: procesos de enseñanza y de aprendizaje, papel del profesor y del alumno durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, conocimiento matemático, etc.; además, se aportan generalidades didácticas para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos. El profesor puede utilizar, de nueva cuenta, los aportes que la Investigación Básica en Pedagogía y en Didáctica de las Matemáticas ha producido para seleccionar, según su criterio, la construcción teórica particular, que compaginen con lo que sustenta al CCH, en puntos como los arriba citados.

En particular, por ejemplo, la investigación en Didáctica de las matemáticas ha identificado, entre otras muchas cosas, las siguientes: algunos aspectos que dificultan el aprendizaje de la variabilidad en estudiantes del bachillerato; las cualidades que tienen el trabajo en grupos pequeños y con el grupo completo y que favorecen a los alumnos, no sólo en la construcción de sus conocimientos sino contribuyen en el desarrollo de algunas habilidades y valores que interesan en el CCH; el potencial que tiene la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático; el valor del constructivismo, en alguna de sus versiones, para intentar lograr aprendizajes con comprensión; los elementos que hay que tomar en cuenta para diseñar un ambiente de aprendizaje escolar que se aparte de la manera tradicional en que se trabaja en el salón de clase, etc.

En resumen, pareciera ser que la investigación básica en Didáctica de las matemáticas y en Pedagogía ha logrado resultados que se juzgan útiles para buscar una cercanía a esa Utopía que es el CCH.

Por lo anterior, es posible formular la siguiente hipótesis de trabajo como base para tener una aproximación a la respuesta al problema de investigación planteado en este trabajo:

HIPÓTESIS DE TRABAJO

> El diseño de una propuesta didáctica y el ambiente de aprendizaje en el que se pone en práctica, con base en principios del social constructivismo pueden favorecer el logro de aprendizaje con comprensión de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística así como robustecer valores y habilidades que caracterizan la propuesta pedagógica del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

El presente trabajo se plantea alcanzar los siguientes objetivos, general y particulares:

OBJETIVO GENERAL

Promover aprendizajes, en contenidos disciplinarios, valores y habilidades, que se aproximen a los que se plantea alcanzar el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Diseñar un ambiente de aprendizaje apoyado y justificado en términos de los resultados de la Investigación básica en Pedagogía y en Didáctica de las Matemáticas y que concuerden con los lineamientos general del Modelo educativo del CCH de la UNAM, tanto en los aspectos disciplinarios como pedagógicos.
- Llevar a la práctica un proceso de enseñanza-aprendizaje centrado en el alumno, la comunidad, los contenidos y la evaluación.
- Promover un aprendizaje significativo del concepto de variabilidad y de todos aquellos que estén estrechamente relacionados con él.
- Llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje que favorezca el desarrollo de habilidades, valores y actitudes que señala el Modelo educativo del CCH de la UNAM.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas de investigación que guían el estudio son las siguientes:

1. ¿Cuáles son las representaciones, que utilizan los alumnos, de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?
2. ¿Cómo comunican, los alumnos, el concepto de variabilidad y los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?
3. ¿Cómo analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos?
4. ¿Cómo utilizan, los estudiantes, la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones?
5. ¿Cómo justifican, los alumnos, sus resultados matemáticos?
6. ¿Cómo son las conexiones matemáticas que establecen los alumnos en el tema de variabilidad?
7. ¿Qué características muestran las interacciones, entre el grupo, los alumnos, el profesor y los contenidos, en el salón de clase?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera, como estructura del Marco Teórico que lo orienta, el modelo propuesto por Hill et. al. (2004, 2008), y que tiene que ver con el concepto "Conocimiento de Contenidos para la Docencia".

De manera muy esquemática, Hill et. al. (2008) proponen que los conocimientos que el profesor de matemáticas debe tener para realizar su trabajo es una amalgama de conocimientos pedagógicos y matemáticos. En la parte pedagógica consideran tres aspectos, todos relacionados con los contenidos matemáticos: lo que establece el Currículum de la institución educativa, lo relacionado con el aprendizaje de contenidos matemáticos por parte del alumno, y lo que tiene que ver con la enseñanza de los mismos contenidos. El aspecto novedoso de este modelo tiene que ver con los propios contenidos matemáticos que el profesor debe saber, ya que en este modelo tales contenidos pertenecen a tres categorías: una categoría, que los autores denominan "conocimiento matemático común" y que se refiere a los conocimientos matemáticos que se adquieren en la escuela y que son comunes a todo aquel que haya estudiado matemáticas y que posteriormente se dedica a las actividades más diversas: Ingeniería, Economía, Ciencias, Etc. ; la segunda categoría de contenidos matemáticos corresponde a aquellos que debe saber toda persona que los va a utilizar para la docencia , "conocimiento especializado" que los hace adecuados para enseñar matemáticas y que no tienen por qué saberlos aquellos usuarios de las matemáticas que no se dedican a su enseñanza y, la última categoría de conocimientos matemáticos es aquella que proporciona a una persona una visión "más amplia de las matemáticas".

La siguiente figura (Hill et. al., 2008, p. 377), resume el modelo propuesto.

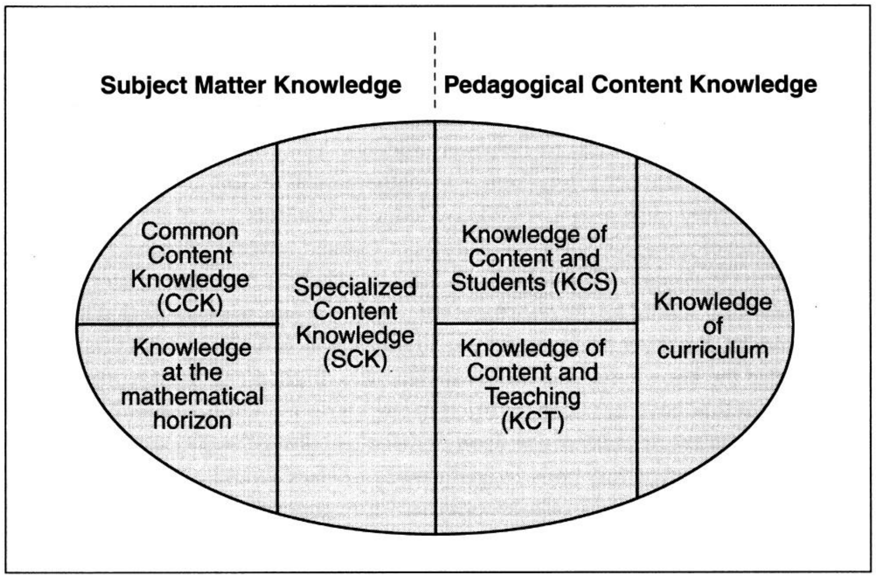


Figure 1. Domain map for mathematical knowledge for teaching.

Como puede verse del esquema, el Conocimiento Matemático para la Docencia, de acuerdo a los autores, está formado de seis dominios, que brevemente se describen a continuación. Primero se hace referencia a la relación existente entre el contenido Matemático y la Pedagogía.

Conocimiento del Currículum. Este conocimiento se refiere a cómo aparece un determinado contenido matemático en el Currículum de la institución educativa: conceptos, métodos, algoritmos, visión de la matemática, estructuración y secuencia de contenidos, etc. Por ejemplo, en nuestro caso, hay que conocer cómo aparecen los contenidos de la Probabilidad y la Estadística en el Currículum del CCH de la UNAM.

Conocimientos del contenido y de la enseñanza. En este caso se refiere a cómo se ha enseñado y se enseña un determinado contenido matemático: actividades de enseñanza-aprendizaje, libros de texto, materiales didácticos, etc. Así, en este trabajo, se trataría de "todo" lo relacionado con la enseñanza de la variabilidad.

Conocimiento del contenido y del estudiante: en otras palabras, el contenido matemático y su aprendizaje. Este dominio hace referencia a toda la relación que hay entre un determinado contenido matemático y el estudiante, es decir con el aprendizaje de dicho contenido por parte del estudiante. En este punto se incluyen aspectos como son las diversas teorías del aprendizaje y su relación con las matemáticas, el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos (conceptos, procedimientos, algoritmos, reglas, teorías, métodos, la demostración, etc.). En general, en este apartado se incluyen todo tipo de influencias que incidan en el aprendizaje de contenidos matemáticos.

Conocimiento común del contenido. Se refiere a los conocimientos matemáticos que se enseñan en los cursos ordinarios de matemáticas y que, en principio, es un conocimiento común a todos aquellos individuos que los estudiaron. Son, digamos, los conocimientos matemáticos que comparten todos los profesionistas con independencia del trabajo que desempeñen. En este trabajo sería lo que sabe cualquier profesionista sobre la Variabilidad, por haber estudiado este contenido en las clases de Probabilidad y Estadística.

Conocimiento especializado del contenido. Este dominio hace referencia de los conocimientos matemáticos propios del profesor de matemáticas y que son necesarios para el desempeño del trabajo de facilitador o mediador entre los saberes matemáticos y su aprendizaje por los estudiantes. Entre estos conocimientos están: las posibles respuestas a un problema matemático, las explicaciones a las diferentes respuestas que se pueden dar a una pregunta o problema matemático, diferentes cuestionamientos a la respuesta dada a una pregunta matemática, las diversas representaciones en que se puede presentar una idea matemática, las distintas justificaciones a una afirmación matemática, las manera en que se comunica una idea matemática, las variadas relaciones que se establecen entre contenidos matemáticos, etc. En nuestro caso estaríamos hablando de todo lo anterior relacionado con el concepto de Variabilidad.

Conocimiento de contenido en el horizonte matemático. Este aspecto se refiere a una visión “amplia” que el profesor debe tener de un determinado contenido matemático: su historia, el papel que ha desempeñado en la cultura matemática, sus relaciones con otras disciplinas, sus fundamentos filosóficos, sociológicos y psicológicos; en general, el lugar que ocupa el contenido matemático en la cultura humana.

Con esta estructura de fondo, en las páginas siguientes se hace una breve revisión de la literatura para los seis apartados anteriores, con el objeto de puntualizar, señalar, algunos principios que servirán para orientar el proceso investigativo dirigido hacia el abordaje del problema planteado en el presente trabajo. En otras palabras, en las páginas que siguen se revisa, con brevedad, algunos trabajos relacionados con la Variabilidad, en los siguientes aspectos: la Variabilidad en el Currículum del CCH de la UNAM, la enseñanza de la Variabilidad, su aprendizaje, los conocimientos comunes y especializados sobre Variabilidad y, enmarcarla en el contexto amplio de las Matemáticas.

CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO

Recientemente la estadística se ha incorporado en forma generalizada al currículo de matemáticas de la enseñanza básica, medio superior y en algunas especialidades universitarias en la mayoría de países desarrollados, esto ha impulsado la investigación y el desarrollo curricular en el campo especifico de la estadística.

Fue necesario esperar muchos siglos para que el problema de la enseñanza de la estocástica fuese visto como un problema de investigación, y ha cobrado un gran auge en los últimos años, esto debido a su importancia en la formación general de estudiantes.

Para aproximarse a la solución del problema de la enseñanza y el aprendizaje de la estocástica fue necesario comprender los obstáculos epistemológicos que enfrenta el alumno. Además, hubo que entender y analizar las concepciones que los docentes tienen sobre su quehacer profesional, así como las posibilidades de los procesos de reconceptualización de la práctica docente.

En esta categoría podemos ver aquellos conocimientos pedagógicos que como docentes debemos poseer. Tenemos que conocer muy bien el currículo bajo el cual nos regimos. En cuanto a los conocimientos sobre el aprendizaje, se refiere a aquel conocimiento que debemos tener sobre la problemática que ha reportado la literatura respecto al cómo aprenden nuestros estudiantes (en nuestro caso, sobre conceptos elementales en Estadística), los errores más comunes que cometen, aquello que se le dificulta, etc. Los conocimientos sobre la enseñanza: aquí se presentan algunas estrategias que propone la investigación en estadística para promover habilidades estadísticas en los estudiantes.

CONOCIMIENTO DEL CURRÍCULO DEL CCH DE LA UNAM

El Plan de Estudios actualizados (1996) y sus métodos de enseñanza, está orientado, tanto en sus contenidos como en su organización, para dotar al alumno de una formación integral básica, que al mismo tiempo que forme individuos críticos, creativos y útiles a su medio ambiente natural y social, los habilite para seguir estudios superiores.

La función social del Bachillerato está destinada a formar en ciencias y humanidades, en conocimientos, habilidades y actitudes, ciudadanos preparados para que continúen sus estudios en nivel de licenciatura o se incorporen a la vida activa, al término del bachillerato.

Este es un Bachillerato de fuentes, puesto que se propone dotar al alumno de los conocimientos y habilidades que le permitan acceder por sí mismo a las fuentes del conocimiento y más en general, a la cultura. Por ello se pone énfasis en el trabajo intelectual del alumno y excluye concebirlo como repetidor del saber del profesor.

El Bachillerato del Colegio concibe al alumno como sujeto de la cultura y no como receptor ni destinatario, por lo que éste no sólo debe comprender los conocimientos que se le ofrecen en la enseñanza, sino también juzgarlos, relacionarlos con su propia experiencia y realidad, adaptarlos, asimilarlos crítica y personalmente y, si fuera el caso, trascenderlos y reelaborarlos o sustituirlos por otros, mejor fundados e innovadores.

El Bachillerato del Colegio es propedéutico, general y único, ya que se orienta a la adquisición de la preparación necesaria para cursar con éxito una carrera profesional.

Se fomenta una formación integral, ya que se impone la necesidad de insistir en los aspectos de formación humana, en habilidades intelectuales, conocimientos en disciplinas básicas, madurez inicial de juicio, valores éticos y civiles que permitan a los alumnos un desarrollo personal y una participación social responsable y positiva.

Este trabajo está sustentado en las grandes orientaciones del Colegio de Ciencias y Humanidades que son: aprender a aprender: que es la apropiación de una autonomía en la adquisición de nuevos conocimientos; aprender a hacer: es la adquisición de habilidades, supone conocimientos y elementos de métodos diversos; aprender a ser: formación del alumno en valores humanos, particularmente en los éticos, cívicos y los de la sensibilidad estética.

Se busca que los egresados del bachillerato sepan pensar por sí mismos, expresarse y hacer cálculos, y posean los principios de una cultura científica y humanística. Deben además saber para qué sirve todo ello y relacionarlo con las diversas situaciones que se les presentan en su vida, es decir, que posean un aprendizaje significativo.

La enseñanza de las matemáticas en el bachillerato debe orientarse de manera tal que permita a los alumnos percibir a esta disciplina como una ciencia en constante desarrollo.

En la propuesta educativa del colegio la matemática es un saber que se construye: sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana.

El sentido del área está determinado por el hecho de que el aprendizaje de la Matemática contribuye de diversas maneras al desarrollo de la personalidad del educando:

- Proporciona elementos necesarios para interpretar aspectos lógicos y numéricos.
- Amplía su repertorio de respuestas ante situaciones distintas.
- Fomenta la independencia intelectual y la toma de decisiones fundadas y razonadas.
- Influye en su comprensión de los rasgos básicos de la revolución científico-tecnológica actual.
- Le ayuda a comprender y utilizar los desarrollos tecnológicos a su alcance.

La Estadística y la Probabilidad se han vuelto requisito indispensable en la vida cotidiana para interpretar una gran variedad de información en diversos campos de estudio. Dada la importancia de que un alumno de nuestro bachillerato tenga dicha formación, en el quinto y sexto semestre del Plan de Estudios del CCH (2003) se incluyen los cursos de Estadística y Probabilidad I y II, siendo optativas, correspondientes al área de Matemáticas.

El objetivo de estos dos cursos es el de brindar a los alumnos conceptos y procedimientos básicos que le permitan continuar su formación matemática, además de adquirir conocimientos de carácter introductorio y propedéutico del estudio de los métodos probabilísticos y estadísticos, también de sus aplicaciones en diversos campos del conocimiento.

El proceso educativo en la materia Estadística y Probabilidad contribuye a la formación de la personalidad del alumno, el desarrollo de sus habilidades intelectuales y la evolución de sus formas de pensamiento mediante la adquisición de conocimientos, valores y actitudes, entre otros:

- El conocimiento y aplicación de los criterios de validez en el campo científico.
- El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo, particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.
- La incorporación de la visión no determinista de los fenómenos aleatorios, que coadyuve a una mejor comprensión de su entorno.
- La valoración del conocimiento científico en diferentes campos del saber.

- La lectura y comprensión de textos diversos, particularmente científicos, escolares o de divulgación.
- La reflexión sobre planteamientos de tipo estadístico de los medios masivos de comunicación.
- La capacidad de aprender de manera autónoma.
- La incorporación de nuevas formas de expresión matemática a su lenguaje y modos de argumentación habituales.
- La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos estocásticos correspondientes al nivel de bachillerato
- El fortalecimiento de la seguridad en sí mismo y de su autoestima, a partir de la correcta aplicación de los conocimientos adquiridos.

Los contenidos estadísticos que se abordan en este trabajo se encuentran presentes en el curso de Estadística y Probabilidad I, específicamente en la introducción y en la primera unidad, ya que son los conceptos que se utilizaran durante todo el desarrollo del mismo, e inclusive, en el segundo curso.

CONOCIMIENTO DEL APRENDIZAJE

Este dominio hace referencia a toda la relación que hay entre un determinado contenido matemático y el estudiante, es decir con el aprendizaje de dicho contenido por parte del estudiante. En este punto se incluyen aspectos como son las diversas teorías del aprendizaje y su relación con las matemáticas.

Utópicamente, un profesor de matemáticas espera que sus alumnos aprendan, con el mayor éxito posible, los aprendizajes que establece el currículo de la escuela donde trabaja. En nuestro caso, esperamos que nuestro trabajo docente contribuya a que un alumno del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, una vez concluido su bachillerato de manera exitosa, sea capaz de Aprender a aprender, Aprender a ser, Aprender a hacer, Aprender a convivir, etc., etc. Lo anterior, como resultado de su actividad en el medio escolar de aprendizaje.

En el medio escolar de aprendizaje están presentes diversas variables. Algunas de ellas, presentes en el medio de aprendizaje de la escuela (Klausmeier y Goodwin, 1977) son: Los objetivos, la Materia de estudio, el Material de enseñanza, la Organización pedagógica, las Características físicas del entorno espacial, las Relaciones –escuela – hogar – comunidad. En última instancia los aprendizajes logrados por un alumno dependerán de tales variables y otras que tal vez no aparecen en la lista anterior.

En este apartado centramos la atención, fundamentalmente, en el alumno que, al final, es el que debe aprender, y más en concreto, fijamos nuestra atención en su aprendizaje. En tal sentido, planteamos las preguntas: ¿Cómo aprende un alumno contenidos comunes a todo el currículo?, ¿Cómo aprende un alumno contenidos matemáticos? Las respuestas que se den a las preguntas anteriores serán una guía fundamental en el presente trabajo.

Con relación a la primera pregunta: ¿Cómo aprende un alumno contenidos comunes a todo el currículo?, Miguel Fernández Pérez (Pérez, 1994), describe 16 Teorías de aprendizaje, que pretenden contestarla.

Con respecto a la segunda pregunta: ¿Cómo aprende un alumno contenidos matemáticos?, Leslie P. Steffe y Pearla Nesher (Steffe, Nesher, Cobb, Goldin, and Greer, 1996) agrupan en tres conjuntos las Teorías de aprendizaje matemático: las perspectivas que tienen su fundamento en la Sociología y en la Antropología, las que se basan en las teorías provenientes de las Ciencias de la cognición y las que surgen del Constructivismo.

Como se ve, hay suficiente material para escoger la respuesta.

Pero, ¿con qué criterio elegimos la "mejor" respuesta? Para ello, nos remitimos a los documentos fundamentales del CCH y, en el documento Programas de Estudio. Área de Matemáticas I-IV (CCH, 2016. p. 5), se dice:

> "…el centro de los programas de matemáticas son los aprendizajes de los alumnos, donde los saberes se construyen, sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la *resolución de problemas*, actividad fundamental para lograr un ser

> analítico, lógico y crítico, donde se pone de manifiesto la comunicación y el diálogo en un ambiente de aprendizaje."

De la cita anterior resaltamos las siguientes ideas: los saberes se construyen, la actividad constructiva es la resolución de problemas y en esta actividad están presentes la comunicación y el diálogo.

Pues bien, sin desechar las distintas teorías de aprendizaje que como profesores tenemos a nuestra disposición, consideramos que aquella proveniente del constructivismo y que hace énfasis en la construcción de los saberes a través de la comunicación y el diálogo es la que mejor se adapta a los fines que el CCH persigue. Nos referimos al constructivismo que tiene su origen en los trabajos de Vigotsky (Vigotsky, 1973, 1988). Esto no significa, en manera alguna, que se demerite o no se reconozca la valía de la teoría del aprendizaje fundamentada en la teoría de Piaget: muy al contrario, se tiene presente la idea explícita de reconocer que es la actividad del alumno, primero de manera externa, práctica y luego de manera interna, cognitiva, lleva a la construcción de la operación.

TEORÍA DEL APRENDIZAJE DESDE LA PERSPECTIVA VIGOTSKIANA

Algo que no se puede dejar de mencionar es que las raíces del trabajo de Vigotsky se hunden en las ideas del Materialismo histórico y del dialéctico: acá es donde cobra cabal sentido. Toda sociedad, en cualquier tiempo y lugar tiene a disposición su cultura: objetos materiales, ideas, costumbres, hábitos, formas de hacer las cosas, creencias, formas de interaccionar entre los miembros de la comunidad, lo que se considera de valor, diferentes medios de comunicación, etc. En particular, una de las formas fundamentales de interacción entre los miembros de una comunidad es aquella que se, o es mediada, por cualesquier medio de comunicación. Y más en particular, las formas de educar a sus miembros: Todos los aprendizajes son de naturaleza histórico-sociales.

Sería por demás pretencioso intentar en este trabajo abordar a profundidad las ideas de Vigotsky y de sus seguidores (Galperin, Talizina), que lo han continuado hasta la fecha: nada más alejado de eso. Señalaremos algunas ideas generales que orientan el trabajo realizado en el salón de clase.

Como se dijo anteriormente, la idea central de una teoría del aprendizaje de tipo constructivista es que todo aprendizaje, del tipo que sea, es construido por el alumno a través de su propia actividad.

Ahora bien, es posible reconocer dos tipos de actividades: las externas y las internas. Es externa toda aquella que se manifieste en una interacción entre el individuo con el medio físico que le rodee, e interna aquella que sea de naturaleza psicológica, mental, cognitiva. De la multiplicidad de actividades externas que se pueden dar estamos interesados sólo en las de naturaleza comunicativa entre los miembros de una comunidad. Ahora bien, las actividades externas e internas se pueden combinar entre ellas: internas con internas, externas con externas, internas con externas en cualquier orden.

Una idea fundamental, derivada del constructivismo Vigotskiano, es que los aprendizajes escolares son la interiorización de actividades externas de carácter comunicativo en donde las formas de expresión lingüísticas son fundamentales. Las formas de comunicación entre los miembros de una comunidad son de carácter interpersonal, las formas de comunicación interiorizadas por un individuo son intrapersonales: son voluntarias, intencionales. Naturalmente, no todas las formas de comunicación humana conducen a aprendizajes de quienes las llevan a cabo: en la escuela debe haber interacciones comunicativas que tengan la finalidad de generar o promover aprendizajes en alguno de los participantes en la interacción: de aquel o aquellos que no saben. Por lo anterior, una actividad que puede conducir a aprendizajes es resolver problemas en comunidad: abre la posibilidad de la discusión, la argumentación, el tomar acuerdos o decisiones, disentir, estar de acuerdo, escuchar al otro, externar ideas, dudas o preguntas, hacer sugerencias, plantear alternativas, etc. Pero no solamente cuando se da la interacción comunicativa entre miembros de una comunidad se da la oportunidad de promover aprendizajes, también ésta posibilidad se presenta cuando un individuo interacciona con cualquier otro producto cultural y lo considera portador de un significado, posible de interpretar: es como dialogar con la propia cultura, ejemplo, cuando se lee o se estudia una representación gráfica, una pintura, un edificio, una vestimenta, etc.

Una vez que se da la interacción comunicativa, interpersonal entre dos o más individuos, puede ocurrir que alguno de ellos de forma intencional y totalmente consciente recree por sí sólo, mentalmente, lo sucedido en la discusión con el propósito de apropiarse de los resultados que juzgue valiosos y, en este punto, quizás sienta la necesidad de repetirse a sí mismo, una y otra vez, intrapersonalmente, toda o parte de la interacción que se dio en el grupo: en este caso se da la posibilidad de que se produzca un aprendizaje en tal individuo: por el hecho de que se dé una interacción comunicativa en que se obtuvo algún resultado nuevo, no hay una implicación mecánica y automática de un proceso de aprendizaje entre los miembros que participan en la interacción comunicativa. En este proceso de interiorización de procesos comunicativos externos juega un papel importante los mecanismos metacognitivos: de esto debe estar totalmente consciente un estudiante.

Por último, otro concepto central en la teoría de aprendizaje fundamentado en el constructivismo Vigotskiano, es el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Hay tareas o problemas que cualquier individuo puede llevar a feliz término por sí mismo, hay otras situaciones que no podrá resolver ni con ayuda de otro individuo capacitado para hacerlo. Cuando acá de habla de ayuda nos referimos a procesos comunicativos que puedan sugerirle al sujeto posibles vías de solución al problema, pero nunca proporcionarle la forma de resolver la situación. Pues bien, la ZDP está definida como el conjunto de situaciones problemáticas que un individuo puede realizar con la ayuda de otro sujeto que sea más experto que él. Esto es importante para el proceso enseñanza-aprendizaje porque define la clase de situaciones problemáticas a plantearle al sujeto que está aprendiendo algo.

EL APRENDIZAJE DE LA ESTOCÁSTICA

Shaughnessy (1997) observó que en la literatura de investigación didáctica no se contaba con informes que dieran cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre las nociones de dispersión y variabilidad estadística: ¿Por qué, siendo la variabilidad un aspecto central en la estadística, había sido ignorada en su enseñanza? A partir de esa fecha se han realizado muchos estudios en este tema: Watson & Moritz

(2000), Reading & Pegg (1996), Shaughnessy, Watson, Moritz & Reading (1999), Watson, Kelly, Callingham, Shaughnessy, (2003) sólo por mencionar algunos ejemplos. Pero no es sólo el concepto de variabilidad el que nos atañe en este trabajo, sino aquellos conceptos que intervienen en una mejor comprensión de la variación existente en un conjunto de datos, tales como: medidas de tendencia central y de dispersión.

Se retoman algunos errores, a manera de conclusiones, a las que llegaron autores que investigaron las nociones que tienen estudiantes al trabajar con medidas de tendencia central, de dispersión y de variabilidad. Nos interesa conocer los errores para poner mayor énfasis en que no se comentan al momento de trabajar estos conceptos con los alumnos.

Carvalho (1998) menciona que los errores cometidos por los alumnos al resolver tareas estadísticas en las medidas de tendencia central son:

- Moda: tomar la mayor frecuencia absoluta;
- Mediana: no ordenan los datos para calcular la mediana, calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas en forma creciente, calcular la moda en vez de la mediana, equivocarse al calcular el valor central;
- Media: hallar la media de los valores de las frecuencias, no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

El cálculo de la mediana es complejo, porque el algoritmo es diferente según tengamos un número par o impar de datos (Cobo & Batanero, 2000).

Un estudio sobre las dificultades de comprensión de los promedios, realizado por Batanero, Godino & Navas (1997) muestra que la población estudiada, profesores de primaria en formación, encuentran dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de promedios, elección de la medida de tendencia central más adecuada en una situación determinada. A la conclusión que llegan estos autores es que la aproximación al estudio de los estadísticos de posición central basada en la definición algorítmica y el cálculo en colecciones de datos descontextualizados, no permite que los alumnos lleguen a una comprensión integral del concepto de promedios.

Cuando se trabaja el algoritmo del cálculo de la media prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Batanero (2001) y Tormo (1993) mencionan que se debe trabajar sobre ideas intuitivas que tienen los alumnos para ayudarles a desarrollar caminos nuevos que les permitan enriquecer los conceptos que ya tienen asimilados.

El estudio de un conjunto de datos no puede reducirse al de sus medidas de tendencia central, ya que distribuciones con media o mediana iguales pueden tener distintos grados de variabilidad. Batanero (2001) menciona que un error frecuente es ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones.

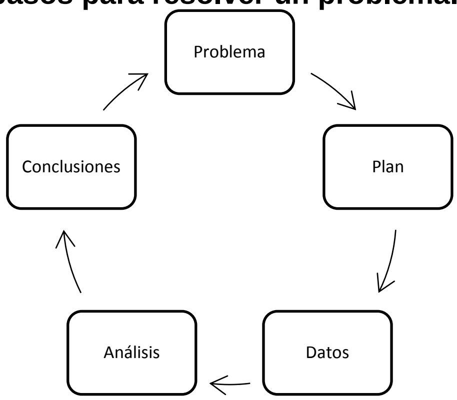
Reading & Shauhnessy (2004) mencionan que los estudiantes pueden conocer el procedimiento para calcular la desviación estándar pero son incapaces de explicar qué mide.

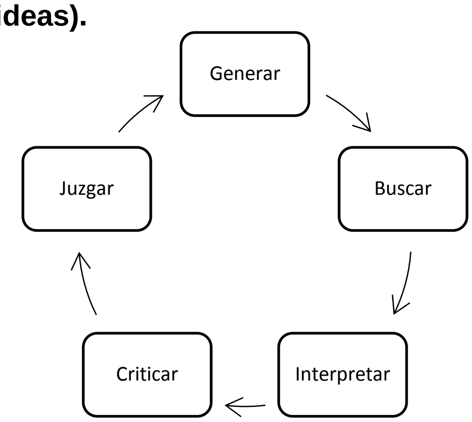
Loosen y cols. (1985) encontraron en su estudio, que los estudiantes equiparan el concepto intuitivo de variabilidad con el de no semejanza, es decir, cuánto varían unos valores respecto a otros, más que cuánto varían los valores respecto a un punto fijo.

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA

La investigación en Educación Estadística ha desarrollado propuestas para la enseñanza de la materia y ofrecer mayores posibilidades para que los estudiantes desarrollen habilidades estadísticas. En este apartado se presentan tales estrategias.

Wild & Pfannkuch (1999) hicieron una investigación sobre cómo piensan y actúan los expertos en estadística cuando trabajan en su profesión. De este estudio surgió un modelo del pensamiento estadístico. Este modelo tiene cuatro dimensiones (ver figura 1), las cuales organizan el conjunto de aspectos que ponen en juego un estadístico cuando resuelve problemas estadísticos.

<table>
<tr>
<td>Dimensión 1. Ciclo investigativo PPDAC (pasos para resolver un problema.

</td>
<td>Dimensión 2. Tipos fundamentales del pensamiento estadístico (esquemas de pensamiento que guían).

Reconocer la necesidad de los datos
Transnumeración
Consideración de la variación
Razonamiento con modelos
Integración de lo estadístico y el contexto
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dimensión 3. Ciclo interrogativo (Procesos de producción y examen de ideas).

</td>
<td>Dimensión 4. Disposiciones (actitudes frente al trabajo estadístico).

Escepticismo
Imaginación
Curiosidad y conciencia
Mente abierta
Predisposición por buscar significados más profundos
Ser lógico
Compromiso
Perseverancia
</td>
</tr>
</table>

Figura 1. Dimensiones del modelo del pensamiento estadístico (Wild & Pfannkuch, 1999).

Estas dimensiones al igual que sus contenidos constituyen una información fundamental para el diseño de tareas y/o currículos que contengan entre sus objetivos fundamentales la formación de habilidades estadísticas y para que el profesor asuma la responsabilidad de promoverlas. Estas dimensiones orientan acerca de cómo utilizar el contenido estadístico de una manera provechosa en la resolución de problemas.

Franklin et al. (2005) proponen un marco conceptual para la educación estadística de niveles preuniversitarios, el cual tiene como objetivo promover el desarrollo de habilidades estadísticas. “Nuestras vidas están gobernadas por números. Cualquier estudiante egresado del bachillerato debe ser capaz de usar el razonamiento estadístico para enfrentarse de manera inteligente con los requerimientos de la ciudadanía, el empleo y la familia, y estar preparado para una vida productiva saludable y feliz” (p.1).

Este marco está organizado en torno a dos nociones centrales: la solución de problemas estadísticos y el papel de la variabilidad en los procesos de solución de problemas estadísticos.

Los procesos de solución de problemas estadísticos involucran cuatro componentes:

1. La formulación de una pregunta,
2. La recolección de los datos,
3. El análisis de los datos,
4. La interpretación de los resultados.

Los autores sugieren que en cada uno de estos cuatro componentes debe intervenir la variabilidad.

El marco conceptual de estos autores orienta sobre cómo organizar los procesos de solución en las situaciones-problema que se consideren socialmente relevantes, y no poner en primer lugar los contenidos que tradicionalmente han sido específicos de la disciplina. Su orientación indica el desarrollo de un pensamiento estadístico como objetivo transversal.

Propuesta de enseñanza mediante proyectos estadísticos. Esta propuesta está basada en el marco curricular de Franklin et al. (2005). El carácter transversal de la propuesta consiste en que un proyecto de investigación estadística pueda realizarse de manera significativa y valiosa en el contexto de cualquier contenido disciplinar.

Un proyecto para la enseñanza es una investigación en la que se trata de responder una pregunta mediante la recogida y análisis de datos dentro de las posibilidades que tienen los alumnos del grado correspondiente.

Una condición para saber si una pregunta es adecuada es cuestionarse si genera un proceso investigativo:

1. La formulación de una pregunta,
2. La recolección de los datos,
3. El análisis de los datos,
4. La interpretación de los resultados.

La pregunta debe contar con las siguientes condiciones:

a) La pregunta o problema deben ser de interés,
b) Los datos deben ser accesibles,
c) Los conceptos, técnicas y razonamientos que genera deben estar al nivel de los estudiantes.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Dentro de esta categoría podemos encontrar los conocimiento matemáticos que como docentes debemos tener; conocimientos especializados son aquellos que nos diferencian de cualquier otro profesionista, en los de contenido común se encuentran aquellos que encontramos en los libros de texto, en este caso, lo que todo profesionista sabe sobre el concepto de variabilidad, y en los de contenido general podemos ver todos aquellos conocimientos que se tiene sobre el concepto general de variabilidad.

CONOCIMIENTO DE CONTENIDO GENERAL

Hacking (1995) menciona que el campo de la probabilidad y la estadística es apenas un adolescente matemático, cuando se compara con la geometría, el álgebra e incluso con el cálculo, esto porque el desarrollo de la estocástica es un fenómeno relativamente reciente que surge de la resolución de problemas de juegos de azar y conteo, que eran de interés a mediados del siglo XVII.

La probabilidad se consideraba como materia de aprobación antes del siglo XVII, en vez de un cálculo matemático. La idea de la evidencia experimental comenzó a ganar respeto en el siglo XVI con Pascal y a través de los trabajos de Huygens (1657).

Mientras que la *scientia* intentaba deducir los efectos a partir de las primeras causas, esta nueva ciencia intentaría inducir las causas a partir de los efectos observados, he aquí el origen de la teoría actual de decisión estadística basada en las frecuencias estables de los eventos aleatorios (Hacking, 1995).

Uno de los conceptos más importantes en la Estadística es el de Variabilidad y nos remontamos a su origen filosófico entendiéndose como el concepto de “cambio”, en el transformismo: Doctrina impulsada por Heráclito (540-470 A.C) donde trata de mostrar que todo cambia y muda conforme a una ley universal.

La Estadística y la Probabilidad la usamos algunas veces sin analizar datos o las posibles respuestas que damos, en especial cuando se trata de considerar la variabilidad existente en conjuntos de valores y/o en observaciones, más bien dicho, pocas veces se considera la variación para analizar los fenómenos, y esto es debido a la falta de cultura numérica que poseemos. Por ejemplo, no estamos conscientes que las estadísticas existentes son gracias a que hay cambios, estos cambios nos hablan de que las variables que se observan tienen variación, de lo contrario, cuando todos los datos son iguales, no tendría caso hacer estadísticas.

Hablando un poco sobre esta falta de cultura numérica, es importante e indispensable, que a los alumnos se les forme una panorámica general del uso de la estadística en su vida cotidiana, con esto ellos tendrán herramientas que les ayuden para la vida, independientemente si pueden o no continuar con una Carrera Universitaria. Es lamentable ver en noticieros, periódicos o escuchar en programas de radio o a personas hablar sobre asuntos estadísticos sin tener idea de lo que están diciendo: recientemente, un candidato muestra una gráfica en la que habla de la disminución del 30% en delincuencia mientras que gráficamente se observa una disminución del 70%, este mal uso o ignorancia puede confundir a aquellas personas que no saben analizar estadísticamente gráficas. Otro ejemplo claro de lo mencionado anteriormente es en un noticiero la persona encargada de dar a conocer el tiempo dijo, la probabilidad de que llueva el sábado es del 50% y también es del 50% de que llueva el domingo, de donde concluye que la probabilidad de que llueva el fin de semana es del 100% (Paulos, 2014), este ejemplo resulta igual de indignante, porque muchas personas hacen sus planes dependiendo del tiempo y si no tienen conocimientos mínimos de probabilidad fácilmente creen este tipo de errores. O como cuando ves a personas que van a comprar un boleto de lotería esperando obtener el premio. Estos tres casos nos dan un claro ejemplo de la ignorancia que muchas personas tienen respecto a temas estocásticos.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO COMÚN

El contenido presente en este apartado se refiere a todo aquel conocimiento que debe tener la persona que estudia Estadística, específicamente se mencionan aquellos que están relacionados directamente con el análisis de la Variación existente en fenómenos.

El contenido Matemático para el estudio de la Variación, se relaciona con cuatro conceptos estadísticos fundamentales:

a) Medidas de tendencia central.
b) Medidas de dispersión.
c) Distribuciones de probabilidad.
d) Intervalos de confianza.

Se repasarán brevemente algunas ideas matemáticas relacionadas con esos contenidos [Mendenhall & Reinmuth (1981); Dominguez & Dominguez (2006); Johnson (2005); Sánchez (2013)].

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Medir la tendencia central de la distribución de un conjunto de datos, es perseguir un sólo número que describa mejor la característica común del conjunto. Las principales Medidas de Tendencia Central, también llamadas centros o promedios, son: la Moda, la Mediana y la Media.

a) La *moda* está definida como el valor con la mayor frecuencia en el conjunto. Puede no haber moda en el conjunto, o puede no ser única.
b) La *mediana* se define como el valor intermedio en un conjunto de datos, cuando éstos están ordenados.
c) La *media* se define como la suma de los distintos datos ponderados por su frecuencia, dividida entre el número total de ellos. Simbólicamente queda establecida como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i f_i$$

Asimismo, es importante considerar algunos aspectos generales de las Medidas de Tendencia Central que pueden surgir debido al conjunto de datos y/o al manejo que se le está dando:

a) Algunas Medidas de Tendencia Central son técnicamente incorrectas, debido a la escala de medición de los datos.
b) Algunas, aunque son correctas, no son útiles.
c) Conllevan pérdida de información.
d) No dan información acerca de la variabilidad de los datos o su dispersión.

Para una distribución de probabilidad, teórica o empírica, la medida de tendencia central es el *Valor Esperado*, el cual se define como la suma de todos los valores ponderados por la probabilidad de cada uno. Simbólicamente queda expresada como:

$$\mu = E(x) = \sum_i x_i P(x_i)$$

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las Medidas de Dispersión, indican el grado en el cual varían o difieren los elementos en una distribución. El objetivo es tener un solo número que represente el estereotipo de la variación y con ello recuperar algo de la información perdida con las Medidas de Tendencia Central. Las medidas de dispersión más comúnmente utilizadas son: el Rango, la Varianza, la Desviación Estándar, la Desviación Media y el Rango Intercuartílico.

a) El *Rango* se define como la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
b) El *Rango Intercuartíclico* es la diferencia entre el primer y tercer cuartíl.
c) La *Varianza* es la medida mayormente utilizada y enseñada a los estudiantes en sus cursos de Estadística. Para un conjunto de datos, se define como el promedio de las desviaciones, respecto a la media, al cuadrado. La expresión matemática para esta medida es:

$$s^2 = V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

Mientras mayor es la Varianza mayor es la variabilidad que existe en el conjunto de datos respecto a su media. Sin embargo, la Varianza como medida de la variabilidad sólo puede ser interpretada apropiadamente a través de la Desviación Estándar.

d) La *Desviación Estándar* para un conjunto de datos, se define como la raíz cuadrada positiva de la Varianza. Su expresión matemática es:

$$s = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i}$$

Para una distribución de probabilidad, la Varianza se define como la suma de las desviaciones con respecto al valor esperado, elevadas al cuadrado y ponderadas por la probabilidad de cada valor. La Desviación Estándar se define, de igual manera, como la raíz cuadrada positiva de la Varianza. Las expresiones algebraicas para estas dos medidas son:

$$\sigma^2 = V(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

y $$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)}$$

e) La *Desviación Media,* para un conjunto de datos, se define como el promedio de las desviaciones absolutas, respecto a la media. Su expresión matemática es:

$$D.M. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right| f_i$$

La Desviación Media también puede ser calculada con base en la mediana en lugar de la media, lo que conduce a la *Desviación Mediana*.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

A partir de lo anterior, para cada distribución podemos especificar dos números:

- La medida de Tendencia Central, la cual describe la posición media; y
- La medida de Dispersión, la cual resume el grado en el cual los elementos en la distribución difieren de la media.

Cuando la distribución de probabilidad o de frecuencias puede aproximarse por una distribución Normal (con forma de campana), como sucede con muchas distribuciones, entonces la media y la desviación estándar pueden relacionarse de una manera que resulta bastante descriptiva acerca de la variabilidad de la distribución. Esta relación se conoce como la Regla Empírica.

La Regla Empírica indica que, para una distribución aproximadamente Normal, con media μ y desviación estándar σ, se tiene que:

- aproximadamente el 68% de los valores está en el intervalo ($\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$)
- aproximadamente el 95% de los valores está en el intervalo ($\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$)
- aproximadamente el 99% de los valores está en el intervalo ($\mu - 3\sigma$, $\mu + 3\sigma$)

Como puede observarse, la regla empírica no sólo proporciona intervalos, sino que éstos tienen asociados un porcentaje, el cual puede ser interpretado como una medida de probabilidad.

INTERVALOS DE CONFIANZA

Para estimar el valor de un parámetro desconocido se tienen dos formas. Una es estimarlo mediante un estadístico muestral (puntual por ser un único valor), pero de esta forma no se conoce qué tan aproximada es esa estimación. La otra forma es construir una estimación por intervalo, también conocida como Intervalo de Confianza, con lo cual se tiene además de la estimación, una medida de probabilidad sobre el error cometido al estimar de esta forma.

Cuando se hace una estimación por intervalo, se especifica un rango de valores entre los cuales se tiene cierta confianza que estará el parámetro.

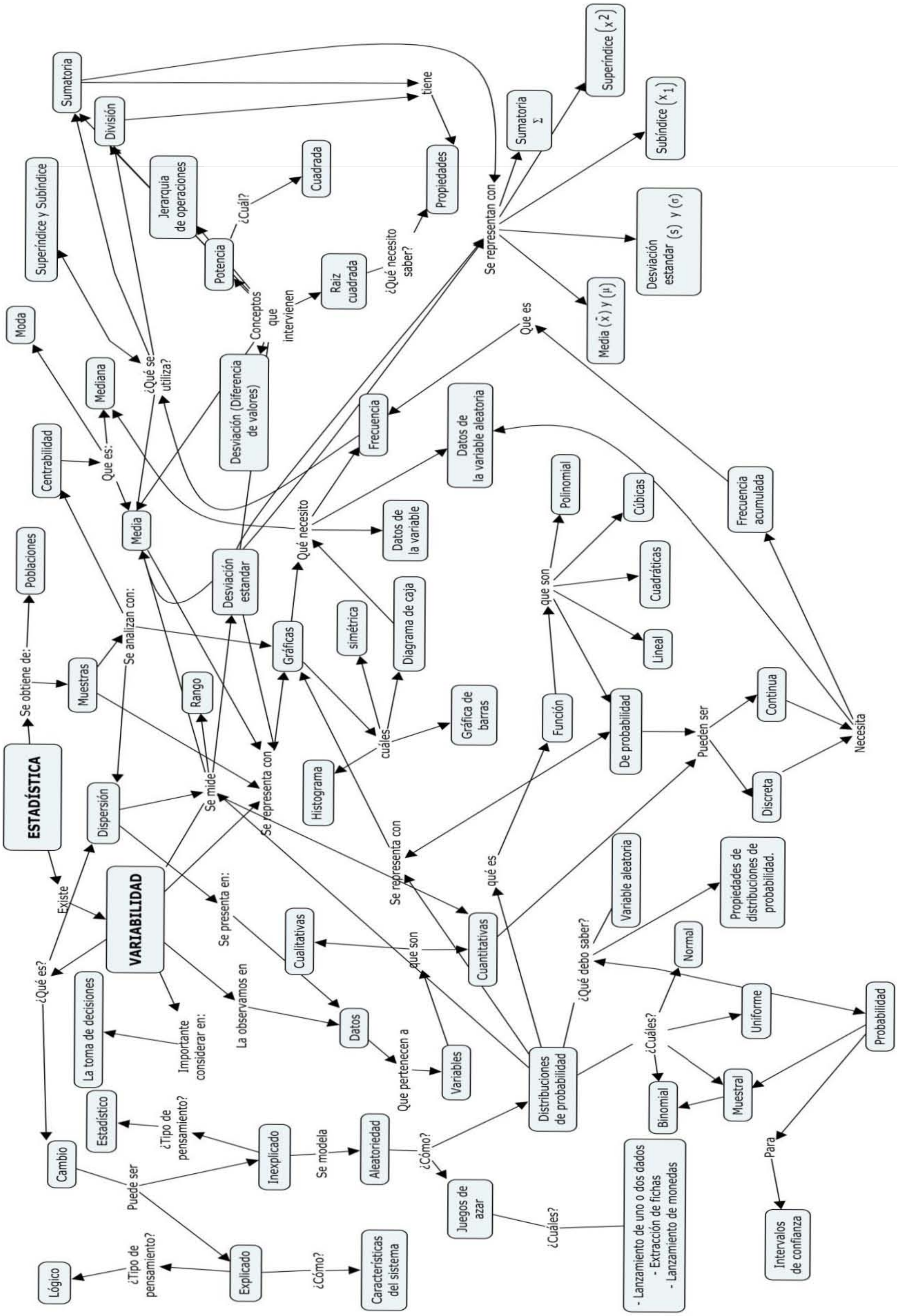
El razonamiento para estimar mediante un intervalo de confianza, el parámetro μ por ejemplo, es:

i. Obtener una muestra y calcular un estimador puntual, en este caso $\bar{x}$.
ii. Utilizar lo que se conoce sobre la forma de la distribución para especificar un intervalo, alrededor del estimador puntual, que probablemente contenga el valor del parámetro: $\bar{x} \pm Z_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Teniendo control sobre esa probabilidad o confianza; en este caso, a través del valor de z_0, llamado valor crítico.

Decir que se tiene, por ejemplo, el 95% de confianza de que el parámetro se encuentra en un cierto intervalo, debe interpretarse como: si se repitiera el estudio 100 veces y en cada una se calculara un intervalo, se esperaría que en 95 de los casos el intervalo incluyera el valor del parámetro.

Por todo lo anterior, se puede concluir que para describir apropiadamente la distribución en un conjunto de datos es preciso contar con al menos dos elementos: la Tendencia Central y la Variación. Pero además, es conveniente una relación entre estos elementos que haga la descripción más completa, por ejemplo, usar intervalos de confianza.

Lo anterior lo podemos ver resumido en el siguiente Red Conceptual:



PROBLEMAS DE ESTOS TEMAS, ENCONTRADOS EN LA BIBLIOGRAFÍA CITADA.

En algunos de los libros podemos encontrar problemas, o ejercicios rutinarios, los cuales no tienen ningún sentido para nuestros estudiantes, ni mucho menos representan un reto para ellos. Pero existen también textos que nos pueden ayudar a fomentar el desarrollo de habilidades en los alumnos. A continuación se presentan algunos problemas planteados en los libros citados anteriormente.

Mendenhall & Reinmuth (1981):

- Los siguientes datos representan el número de interrupciones por día de trabajo debidas a fallas mecánicas en una planta procesadora de alimentos: 2, 3, 0, 5, 4, 3, 1, 3, 5, 2. Calcule la media, la mediana y encuentre el número modal de interrupciones diarias.
- La mayoría de las escuelas de administración norteamericanas requieren que las personas que solicitan admisión presenten el resultado de una prueba diseñada para tal efecto. El promedio de ese examen se ha calculado de 480 con una desviación estándar de 100. La experiencia anterior muestra evidencia de que la distribución de las calificaciones de este examen sigue una distribución de forma parecida a la acampanada. a) ¿Qué porcentaje de las calificaciones se espera encontrar en el intervalo de 380 a 580? b) ¿Qué porcentaje de las calificaciones se espera encontrar en el intervalo de 280 a 680?

Dominguez & Dominguez (2006):

- A continuación se presentan 50 mediciones de lluvia ácida medida en una región determinada. La acidez se mide en una escala de pH, donde 1 es muy ácido y 7 es básico.

3.58	4.05	4.27	4.35	4.45	4.51	4.58	4.62	4.7	5.07
3.8	4.12	4.28	4.35	4.5	4.52	4.6	4.65	4.72	5.2
4.01	4.18	4.3	4.41	4.5	4.52	4.61	4.7	4.78	5.26
4.01	4.2	4.32	4.42	4.5	4.52	4.61	4.7	4.78	5.41

4.05	4.21	4.33	4.45	4.5	4.57	4.62	4.7	4.8	5.48

a) Estima la media y la varianza usando las expresiones para datos agrupados. b) Calcula la mediana y los cuartiles. c) Calcula la media y la desviación estándar y compara estos resultados con los obtenidos en el inciso a. d) Determina los intervalos para la $\bar{x}\ \pm s$; $\bar{x}\ \pm 2s$; $\bar{x}\ \pm 3s$. e) ¿Qué proporción de los datos están en estos intervalos?

Johnson (2005):

- Encuentre la media, mediana, moda, rango medio, rango, varianza y desviación estándar para los datos: 5, 7, 6, 4, 2 y 6.
- Dado el conjunto de datos: 541, 505, 532, 545, 537, 510, 530 y 521, calcúlese la media y desviación estándar.
- Dada la siguiente distribución de frecuencia de edades, *x* en años, de automóviles encontrados en un estacionamiento:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f	4	9	11	8	7	5	4	2	2	0	1

a) Calcúlese la media y desviación estándar. b) Encuentre los intervalos para la $\bar{x}\ \pm s$; $\bar{x}\ \pm 2s$; $\bar{x}\ \pm 3s$.

Sánchez (2013):

- La altura media de los alumnos de un colegio es de 1.40 m. si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1.38 m., 1.42 m., 1.60 m. y 140 m. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

- Un objeto pequeño fue pesado separadamente por nueve estudiantes en una clase de ciencias, utilizando la misma escala. Los pesos (en gramos) anotados por cada uno de ellos se muestran a continuación:

6.1 6.0 6.0 15.9 6.4 6.3 6.3 6.0 6.2

Los estudiantes quieren determinar tan acertadamente como sea posible el peso real de este objeto. ¿Qué valor les propondrías?

- Considera las calificaciones de los siguientes dos alumnos:

Alumno 1	7	7	8	9	9
Alumno 2	6	7	8	9	10

a) Por simple inspección: ¿cuál de los dos conjuntos de datos tiene mayor variabilidad? b) calculen la desviación estándar y verifique que coincide con su respuesta al inciso anterior.

- En una feria se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1

+15 -21 -4 +50 -2 +11 +13 -25 +16 -4

Juego 2

+120 +60 -24 +133 -120 -21 -81 +96 -132 +18

¿Cuál juego le recomendarías jugar a Juan?

Al hacer un análisis de tipo de problema que manejan los autores en sus textos podemos observar claramente aquellos que fomentan una enseñanza tradicional, tal es el caso de los primeros tres autores. En el material de Sánchez (2013) se puede observar el enfoque constructivista que se propicia con este tipo de problemas, lo importante es ver que los estudiantes pueden hacer con datos y a partir de eso se irán haciendo las preguntas adecuadas que darán origen a conocimientos y habilidades nuevas.

CONOCIMIENTO DE CONTENIDO ESPECIALIZADO

El contenido especializado es aquel mismo que tiene toda persona que estudia estadística, pero también debe tener conocimientos de cómo trabajar estos contenidos en el aula. Para ello tomamos de referencia lo que nos dicen Los Principios y Estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). La NCTM (2000) hace hincapié en la necesidad de trabajar aspectos estocásticos en el aula al mencionar que: los estudiantes necesitan saber análisis de datos y otros aspectos relativos a la probabilidad para poder razonar estadísticamente. Son habilidades necesarias para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. Éstos mencionan que para que una enseñanza sea eficaz se deben de trabajar: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

En la resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución los estudiantes deben de hacer uso de su conocimiento previo y al trabajar las soluciones con compañeros de clase obtienen conocimientos nuevos. Los buenos problemas dan la oportunidad de solidificar y ampliar lo que se conoce y si están bien elegidos pueden estimular el aprendizaje. Puede introducirse la mayoría de los conceptos a través de problemas que surjan de su propio entorno.

El razonamiento y la demostración matemática proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos, se preguntan si esos patrones son accidentales o si hay razones para que aparezcan, y conjeturan y demuestran. Para entender las matemáticas, es esencial ser capaz de razonar. Hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento. El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad.

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. Es un camino para compartir y aclarar las ideas. A través de la comunicación las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. Los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdos, llegarán a una mejor comprensión matemática a medida que intentan convencer a sus compañeros sobre los diferentes puntos de vista. Los estudiantes necesitan trabajar en tareas matemáticas que constituyan temas útiles de discusión.

Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Se pueden ver conexiones en la interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas, y en sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte las interrelaciones de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad. Al darle importancia a las conexiones matemáticas se puede contribuir a que los alumnos estén dispuestos a utilizarlas para resolver problemas y no vean las matemáticas como un conjunto de conceptos y destrezas desconectados y aislados. Las experiencias matemáticas en todos los niveles deberían incluir oportunidades de aprender, trabajando en problemas que surjan de contextos no matemáticos.

Para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen. Cuando los estudiantes acceden a representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente. Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticas, para que los alumnos se comuniquen sus enfoques, argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelación.

Estos estándares, llamados de *procesos* ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos. Si tomamos como base éstos, estaremos contribuyendo para lograr una sociedad que tengan la capacidad de pensar y razonar matemáticamente (en nuestro caso, estadísticamente) y una base útil de conocimientos y destrezas.

MODELO DE DISEÑO PARA EL AMBIENTE DE APRENDIZAJE

En este trabajo se intenta utilizar, para el diseño del Ambiente de Aprendizaje, las ideas propuestas por Bransford y sus colaboradores (Bransford et. al., 1999; Bransford et. al. 2000). De acuerdo a estos autores un ambiente de aprendizaje adecuado es aquel en donde se considere un sistema formado por los siguientes elementos: los alumnos en forma individual, el grupo concebido como una comunidad, los contenidos a desarrollar, la evaluación que se aplica. En seguida se explica la importancia de cada uno de estos elementos del sistema, y el tipo de problemas matemáticos que se abordan en clase.

Considerar a cada uno de los alumnos en lo individual porque, al final, son cada uno de ellos los que tendrán que aprender. En este sentido es importante tomar en cuenta, sobre todo, lo previo que los alumnos poseen con relación a lo nuevo que se pretende enseñar: en forma muy pretensiosa sería “todo”, de manera holística, lo que el alumno ha aprendido, bien, regular, mal, etc. y que está relacionado con lo nuevo por aprender. En esto “todo” se incluye sus conocimientos, experiencias, actitudes, valores, habilidades, destrezas, etc. y que, en principio, sirve, para bien o para mal, en el intento de aprender lo nuevo. Lo previo es importante, porque lo nuevo se tendrá que relacionar con él, para integrarse a la red de conocimientos del alumno. Las actividades relacionadas con indagar lo previo que los alumnos poseen son sumamente importantes, entre ellas se incluyen las pruebas diagnósticas.

El grupo es importante, porque desde hace ya bastante tiempo se ha establecido que la manera de relacionarnos con nuestros semejantes son fuente importante de aprendizaje: la comunicación, el intercambio de ideas, la discusión, la argumentación, la cooperación, la ayuda, pero también la competencia insana, son acciones que se dan en colectivo, sobre todo con nuestros pares. Nada será suficiente por trabajar en lograr un ambiente social adecuado para una sana comunicación humana en el salón de clase.

Naturalmente que los contenidos son importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el caso de las matemáticas hay que tener muy en cuenta además, los procesos que definen el pensamiento matemático NCTM (2000): las conexiones entre contenidos matemáticos, las diferentes representaciones en que se puede presentar una idea matemática, la forma en que se comunican los resultados matemáticos, la manera en que se justifican y prueban los resultados matemáticos y, finalmente la manera de resolver problemas. También hay que considerar los propios contenidos matemáticos: conceptos, métodos, algoritmos, teorías, y sus múltiples relaciones entre sí y con otras racionalidades. En este punto es particularmente importante resaltar la estructura que presentan los contenidos matemáticos. Una visión amplia de estos contenidos nos lleva a considerar, utópicamente, las relaciones de los contenidos con la cultura humana.

Refirámonos ahora a la evaluación. Hay que tomar en cuenta los procesos evaluativos, es decir, todo aquello que nos permita tener una aproximación a saber hasta qué punto se han alcanzado nuestros objetivos, y como éstos son múltiples, tanto en número, como en naturaleza, así serán las formas evaluativas. Ahora sabemos que los objetivos educacionales no se alcanzan al mismo tiempo: algunos se logran muy rápido y es posible detectarlos, otros se tardan bastante tiempo, más allá tal vez del tiempo que dura la instrucción y no los podemos ver, pero aun así, hay que intentar registrarlos. La evaluación no es proceso menos, muy al contrario, sólo a través de ella es posible mejorar, enmendar, dar marcha atrás si fuese necesario.

Por último hablemos del tipo de problemas matemáticos que se resuelven en clase (Bransford et. al. 2000). El problema que juega el papel central en el curso es el denominado Problema del Geiser propuesto por Shaughnessy. Cuando por primera vez se resuelve este problema se alcanza un aprendizaje ligado a una situación muy especial, concreta, particular. En una segunda etapa de solución, el aprendizaje que se busca está relacionado a principios y conceptos estocásticos más profundos y generales, que se busca trasciendan lo concreto y particular de la situación inicial.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE LA INDAGACIÓN

INTRODUCCIÓN

Después de haber presentado el problema y las preguntas de investigación que originan este trabajo, así como realizada la revisión básica de algunos referentes teóricos que sustentan el estudio, en este capítulo se describirán los aspectos experimentales del trabajo: la metodología utilizada (marco general), el marco contextual en que se lleva a cabo la intervención didáctica, la recolección de datos, y la manera en que se analizan.

MARCO GENERAL

Debido a que los problemas de enseñanza-aprendizaje son de naturaleza social, la metodología utilizada para el estudio de nuestro problema es de naturaleza cualitativa: se busca aproximarnos a la comprensión, al entendimiento de ciertos hechos y no a la búsqueda de relaciones de tipo causa-efecto. Se intenta encontrar relaciones entre problemas de enseñanza-aprendizaje y aspectos sociales, personales, que nos ayuden a darle sentido a conductas personales y sociales que se observan en el ambiente de un salón de clases.

Los métodos empíricos en la ejecución de la investigación más utilizados en la investigación educacional son: experimento, observación, entrevista, encuesta, sociometría, pruebas pedagógicas y psicológicas. Es recomendable utilizar más de uno para aumentar la objetividad de las interpretaciones dadas a los hechos.

En el procesamiento de la información, el propósito es lograr la interpretación y valoración de la información. En el enfoque clásico de la investigación esta etapa se caracteriza por cuantificación, en los enfoques humanista y social predomina el tratamiento cualitativo de la información, las interpretaciones y las valoraciones.

En este Capítulo se desarrolla la metodología utilizada en el presente trabajo. El problema planteado en el Capítulo I se aborda como un problema de investigación

Educativa y se utiliza como metodología la de la Investigación en la Acción. La importancia de una formación en la investigación, aún elemental, es que abre la vía para que el docente tenga la posibilidad de ser un actor central en la mejora de su quehacer en el salón de clase. En las páginas que siguen se tratan las siguientes cuestiones: Generalidades sobre la Investigación en la Acción, Elementos y procesos que integran el proceso investigativo en sí y que, explícitamente, son los siguientes: Contexto social y físico en que se lleva a cabo la intervención pedagógica, prueba diagnóstica aplicada a la población bajo estudio tomando en consideración los aprendizajes estocásticos que se pretenden alcanzar; Diseño del Ambiente de Aprendizaje tomando en consideración a los alumnos individuales, al grupo visto como una comunidad, los contenidos curriculares a enseñar y los procesos evaluativos a utilizar; Descripción general de la intervención didáctica llevada a cabo.

Generalidades sobre la Investigación en la Acción

La característica fundamental de la metodología que se utiliza en este trabajo es que la operación central que se realiza es el análisis de los datos (Mucchielli, s.f.). Por tal razón se denomina cualitativa. Se buscan hechos, conductas, acciones, expresiones habladas, escritas, simbólicas, etc. que al relacionarlas e interpretarlas a la luz de elementos teóricos de la Educación Matemática nos sirven para alcanzar cierta claridad en torno al problema que este trabajo se plantea.

La indagación se lleva a cabo en el ambiente natural que es un salón de clase normal, en donde ningún elemento que está presente se ha escogido ex - profeso para la intervención didáctica: Los alumnos son los asignados al grupo en forma normal, sin criterio selectivo especial, que no sean aquellos que se utilizan para distribuir a los estudiantes en los diferentes grupos académicos. El profesor es el asignado al grupo, y que por razones de tipo laboral es el que atiende a tal grupo. El salón de clase, con su ubicación y recursos con que cuenta, es el espacio físico que el mencionado grupo académico tiene asignado. El horario de clase y la duración de la misma es el que institucionalmente se tiene asignado. El currículo que se utiliza es el que oficialmente corresponde al planteamiento pedagógico del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM. Por todo lo anterior a la metodología utilizada se designa como naturalista (Taylor y Bogdan, 1986).

Otra característica de la metodología utilizada es que el profesor del grupo realiza a la vez el papel de investigador en este trabajo. Es decir, al llevar a cabo la intervención pedagógica al mismo tiempo el profesor realiza la actividad investigativa. En otras palabras, las acciones que el profesor realiza como coordinar, orientar, ayudar y facilitar en el grupo académico se vuelven objeto mismo de investigación, así como cualquier otro papel que desempeñe el profesor mientras permanezca en compañía de alumnos que forman parte del grupo. Como se sabe, son muchas y diversas las acciones que un profesor realiza frente a un grupo: realiza intervenciones orales: pregunta, contesta, sugiere, aconseja, justifica, llama la atención, evalúa, establece objetivos, explica, instruye, lee, bromea, etc.; interviene de manera escrita: da información, realiza procedimientos, construye representaciones, demuestra, etc.; utiliza diversos recursos didácticos tanto materiales como conceptuales; observa, registra y revisa la actividad de los alumnos, en particular de grupos pequeños, y de todo el grupo; se sitúa en diversos puntos espaciales en el salón de clase: frente al grupo, al lado del pizarrón, etc.; en nuestro caso, realiza actividades propiamente matemáticas, así como de coordinación, instrucción, evaluación, planeación, toma de decisiones, es decir, en general, gestiona procesos de enseñanza-aprendizaje. Pues bien, aunado a todo lo anterior, el profesor también realiza el papel de investigador, como una más de sus acciones en el salón de clase, por tal razón a esta metodología se denomina Investigación en la Acción (de León, et al., 2009). Que el profesor del grupo sea a la vez el investigador es la principal limitación que presenta el estudio: tarea difícil, ardua, complicada, cuestionada y dudosa en sus resultados. El profesor que interviene constantemente en lo que ocurre en el salón de clase y es imposible que por tal hecho no deje de influir y sesgar el desarrollo de la experiencia. De entrada hay que reconocer que no es posible evitar el sesgo que el comportamiento del profesor en el salón de clase induce en el desarrollo de las actividades que tienen lugar en la clase.

El profesor observa, registra datos, elabora y aplica instrumentos para recabar información bajo su propio criterio y acá, es innegable, hay sesgos, porque tal vez “vea” lo que quiere ver y no otra cosa. Sin embargo, aún con todas las limitaciones, este método de indagación ha sido común en el estudio de hechos educativos y se han desarrollado estrategias que buscan disminuir los sesgos introducidos por el hecho de que el mismo profesor sea el investigador. Con el ánimo de disminuir un tanto los sesgos introducidos por el investigador debido a sus intervenciones en el fenómeno bajo estudio se han ideado estrategias como las siguientes: recabar información por diferentes medios como son cuestionarios, entrevistas, video-grabaciones, resolución de problemas y triangular los resultados obtenidos. Se intenta “ver” el mismo hecho con perspectivas diferentes, Por otro lado, se tiene muy en cuenta lo reportado por la literatura referente a problemáticas y ambientes de estudios similares.

A continuación se aclaran algunas acciones propiamente de la metodología que se utiliza: Instrumentos para recabar la información, procesamiento y análisis de la información. Como fuente para avenirse de información, se usan los materiales producidos en el salón de clase y fuera de él, como son: registros de las actividades realizadas por los alumnos, cuestionarios, hojas de trabajo, exámenes escritos aplicados, tareas extra clase, trabajos escritos asignados y cuadernos de notas de los alumnos. Para documentar la forma de trabajo, en el salón de clase se video graban todas las sesiones de clase. También se contará con la bitácora de clase en donde el profesor – investigador registra, durante la clase e inmediatamente después de cada clase, con el mayor detalle posible, lo ocurrido en el salón, sesión tras sesión. La información recabada será procesada para facilitar su análisis. El procesamiento consistirá en la lectura detallada, atenta y cuidadosa de diversos materiales producidos por los alumnos para que, con base en las preguntas de investigación sean seleccionados, clasificados, parafraseados, darles otra representación y se facilite la categorización para llevar a cabo el análisis de tal información. Con base en las categorías construidas se hará una transformación de la información original para representarla en forma de esquemas, diagramas, tablas, matrices o cuadros que faciliten visualizarlas en conjunto, establecer relaciones y comparaciones y así facilitar más su análisis. Los videos obtenidos se ven y escuchan repetidas veces para poder decidir episodios cuya parte oral se transcribe a texto para después analizarlos junto con la imagen. El análisis de los resultados se lleva a cabo, fundamentalmente, a la luz de los referentes teóricos elegidos. Si bien la información recolectada durante un semestre de actividad académica es, sin duda, copiosa y muy interesante y valiosa, se tiene cuidado en considerar sólo aquella que se juzgue útil para llegar a una aproximación al problema planteado en el trabajo. En tal sentido, la información que se analiza está clasificada en tres categorías: referente a alumnos en particular, al trabajo en grupos pequeños y al grupo en su conjunto. En especial, en cuanto a los alumnos en particular y al trabajo en grupos pequeños, el análisis de la información se realiza utilizando como referente teórico los cinco procesos que propone la NCTM (2000) como características para el pensamiento matemático: las conexiones establecidas entre contenidos matemáticos, las representaciones matemáticas utilizadas, la forma en que se comunican los resultados, la manera de justificar los resultados y, en especial, la forma en que se resuelven los problemas planteados. Si bien el análisis de la información será de tipo cualitativo, la presentación de la información se hace, algunas veces, utilizando estadística Descriptiva Elemental, pues con ello se permite una visión de conjunto, a veces, más adecuada.

Es importante mencionar que la forma de trabajo que se registra en esta propuesta didáctica se realizó con otros 4 grupos de Estadística 1, mismos que la profesora atendía. Con estos 4 grupos la dinámica de trabajo fue un poco más rápida que la llevada a cabo con el grupo que aquí se reporta, sin embargo, el haber piloteado la forma de trabajo permitió realizar ajustes en cuanto a los tiempos, tipo de preguntas, prevenir posibles obstáculos en la aplicación que se reporta.

MARCO CONTEXTUAL

POBLACIÓN BAJO ESTUDIO

La población estudiada fue un grupo de quinto semestre del CCH, Plantel Vallejo, subsistema de Bachillerato de la UNAM, integrado inicialmente por 42 alumnos: 31 mujeres y 11 hombres, con una edad promedio de 17 años. El grupo se atendió durante el semestre 2017-1 -por la autora que realizó la investigación de este trabajo- en un horario de 9 a 11 de la mañana, los días lunes y viernes. Se eligió este grupo por la pertinencia de tiempos, ya que de lunes a viernes había la oportunidad de diseñar las tareas conforme los resultados obtenidos los días lunes, esto se menciona más ampliamente más adelante, en este Capítulo; otra razón por la que se ha elegido al grupo es la hora de la clase, debido a que la mayoría de ellos hacen más de una hora en trasladarse de su casa a la escuela y era más probable que estuvieran todos, o al menos la mayoría, en su segunda clase.

Otro dato importante es conocer la carrera profesional que han elegido estudiar los alumnos, para considerarla al momento de planear las tareas, motivo por el cual se ha recabado esta información, la cual se presenta en la siguiente tabla:

Carrera	# de estudiantes
Actuaria o Medicina	1
Administración	2
Artes Visuales	2
Ciencias de la Comunicación	3
Contador Público	1
Dentista	1
Derecho	1
Enfermería y Obstetricia	1
Geonomía y Derecho en Comercio	1
Ing. En Computación	1
Ing. Química	1
Medicina	13
Medicina Veterinaria y Zootecnia	1
Música Instrumentista	1
Psicología	6
Químico Farmacéutico	2
Relaciones Internacionales	3
Trabajo Social	1

Como podemos observar en datos anteriores, la carrera con mayor preferencia por parte de la población en estudio es la de medicina.

DESCRIPCIÓN DEL LUGAR EN QUE SE LLEVÓ A CABO LA IMPLEMENTACIÓN

Todas las sesiones de esta experiencia se llevaron a cabo en una aula que mide 11.6 x 6.20 m; en general con veinticuatro mesas de dimensiones de 0.40 x 1.20 m, y entre 46 y 48 sillas. Cada mesa es para dos personas. Se cuenta con dos pizarrones, ambos blancos, de medidas 2.4 x 1.20 m de ancho y altura, respectivamente. Las ventanas tienen vidrios opacos, por lo que no hay distractores que afecten visualmente desde el exterior; sin embargo, no sucede lo mismo con los distractores auditivos.

El tamaño del salón permite la movilidad, tanto para formar equipos con distintas distribuciones del mobiliario, como para formar una mesa redonda amplia para realizar discusiones grupales.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL SALÓN DE CLASE. GENERALIDADES SOBRE EL CURSO. SESIONES 1 Y 2.

Las sesiones 1 y 2 se destinaron para cuestiones generales del curso: la presentación de los estudiantes y profesora; conocer las expectativas que se tiene sobre el curso, tanto de los alumnos como de la profesora; dar a conocer las reglas socio-matemáticas con las que se guiará el curso al igual que la forma en que serán evaluados los estudiantes y por último, conocer el programa de Estadística y Probabilidad I del CCH.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL SALÓN DE CLASE. PRUEBA DIAGNÓSTICA. SESIONES 3 Y 4.

El examen diagnóstico fue presentado en dos partes (Ver Anexo 1), ya que se consideró que era información en la que tal vez los estudiantes se tardarían más de 2 horas. Por eso se optó por trabajarla en la sesión 3 y 4.

EXAMEN DIAGNOSTICO APLICADO A LA POBLACIÓN BAJO ESTUDIO.

Como ya se ha mencionado anteriormente, es indispensable partir de los conocimientos previo que poseen los estudiantes, para ello se realizó un examen diagnóstico (ver anexo 1) a 41 estudiantes, este mismo examen se aplicó al final de la experimentación.

Resultados generales del examen diagnóstico

Calificación	# de estudiantes
5	15
6	22
7	3
8	1
9	0
10	0
Total	41

Los cuestionamientos en este examen se han clasificado con base en las preguntas de investigación, dicha clasificación se muestra en el **Anexo 2**.

CONCLUSIONES DEL EXAMEN DIAGNOSTICO

Algunas observaciones generales que podemos resaltar en la prueba diagnóstica son: Los estudiantes confunden las medidas de tendencia central, es decir, no tienen claro cuál concepto corresponde a tal proceso, por ejemplo, confunden la media con la mediana, o a la media con la moda; no tienen idea de lo que es una desviación estándar, algunos de ellos la asocian con “tomar otro camino”; sí tienen una idea de lo que es el concepto de variabilidad, sin embargo, no la consideran al momento de realizar análisis de datos. Los estudiantes muestran disponibilidad para aprender, lo cual es una gran ventaja para el proceso de aprendizaje. Los resultados generales no son muy buenos ya que oscilan entre el 5 y 8, sin embargo, tienen conocimientos previos que se pueden aprovechar para construir conocimientos significativos.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL SALÓN DE CLASE. "OLD FAITHFUL" SESIÓN 5.

En la sesión 5 se aplica el problema que hemos llamado "Old Faithful", en el que los estudiantes lo han resuelto utilizando conocimientos previos.

Se parte del problema:

De Kamilokardona - Trabajo propio, GFDL, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5639368

El Old Faithful es uno de los géiseres más conocido del parque nacional de Yellowstone, ubicado en los Estados Unidos, principalmente en el estado de Wyoming, aunque se extiende por Montana e Idaho. Ahí se encuentran casi la mitad de géiseres activos de todo el mundo. Entre ellos el Old Faithful que expulsa agua cada determinado tiempo durante un periodo aproximado de 5 minutos y alcanza alturas de 55 hasta 75 metros. Durante tres días consecutivos se observó el tiempo (en min.) en que tardaba en hacer erupción y los resultados son:
Para el primer día: 51,82,58,81,49,92,50,88,62,93,56,89,51,79,58,82,52,88; para el segundo día: 86,78,71,77,76,94,75,50,83,82,72,77,75,65,79,72,78,77; y para el tercer día: 65,89,49,88,51,78,85,65,75,77,69,92,68,87,61,81,55,93.

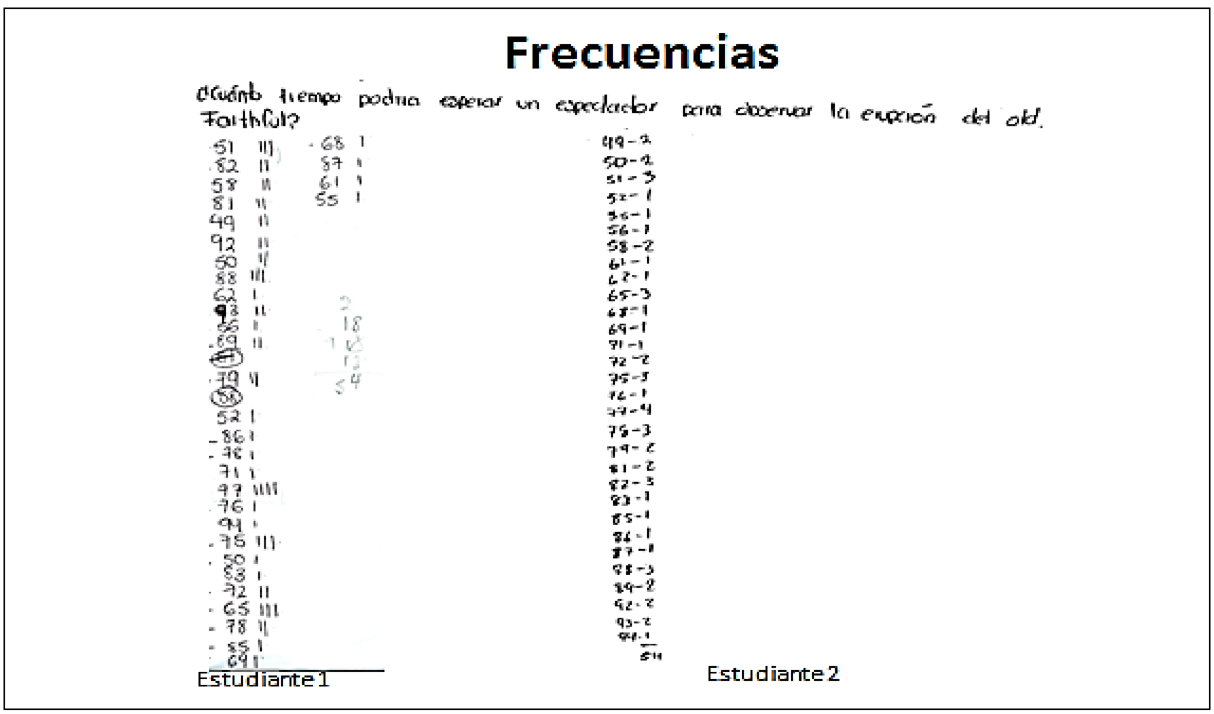
¿Cuánto tiempo podría esperar un espectador para observar la erupción del Old Faithful?

Lo importante de este trabajo es que, aparentemente, sin tener nociones de Estadística, los estudiantes dan respuesta al problema de Geiser utilizando conceptos estadísticos. Estos conceptos se retoman para las planeaciones de las siguientes sesiones.

Tal como lo menciona Novak (1978) un aprendizaje significativo se puede conseguir trabajando con los conocimientos que el alumno ya posee, y es lo que se pretende conseguir con este trabajo. Para ello, se trabaja con los diferentes contenidos estadísticos que se encontraron en las respuestas de los estudiantes, estos se presentan en la siguiente tabla:

Concepto
Frecuencia y tabla de distribución de frecuencias
Media o media aritmética
Media ponderada
Moda
Mediana
Media, mediana y moda
Rango
Introducción al concepto de desviaciones
Conceptos de dispersión
Intervalo

A continuación, se muestran ejemplos de los resultados obtenidos por los alumnos al problema del Geiser.



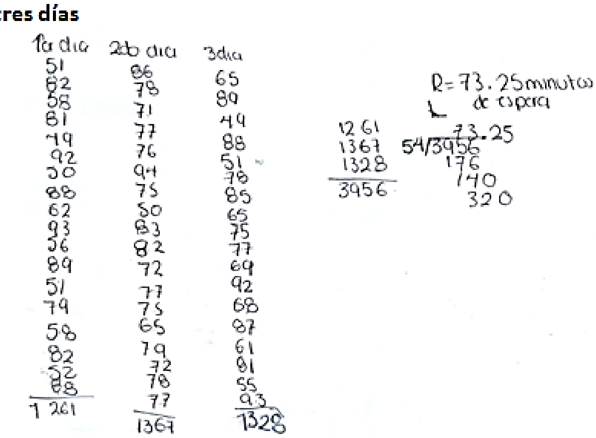
Media o Media aritmética

- Por día
(promedio de promedios)

Estudiante 3

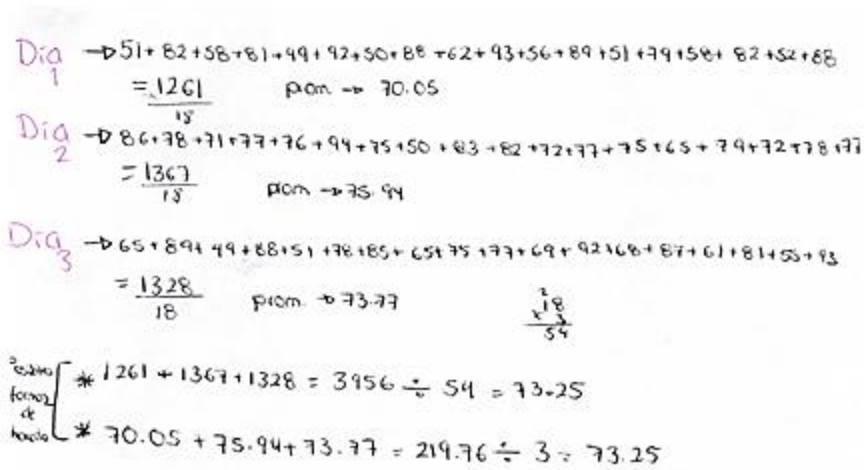
Media o Media aritmética

- **De los tres días**



Estudiante 4

Media o Media aritmética


Dia 1 → 51+82+58+81+49+92+50+88+62+93+56+89+51+79+58+82+52+88

= 1261/18   prom → 70.05

Dia 2 → 86+78+71+77+76+94+75+50+83+82+72+77+75+65+79+72+78+77

= 1367/18   prom → 75.94

Dia 3 → 65+89+49+88+51+78+85+65+75+77+69+92+68+87+61+81+55+93

= 1328/18   prom → 73.77   18 x 3 = 54

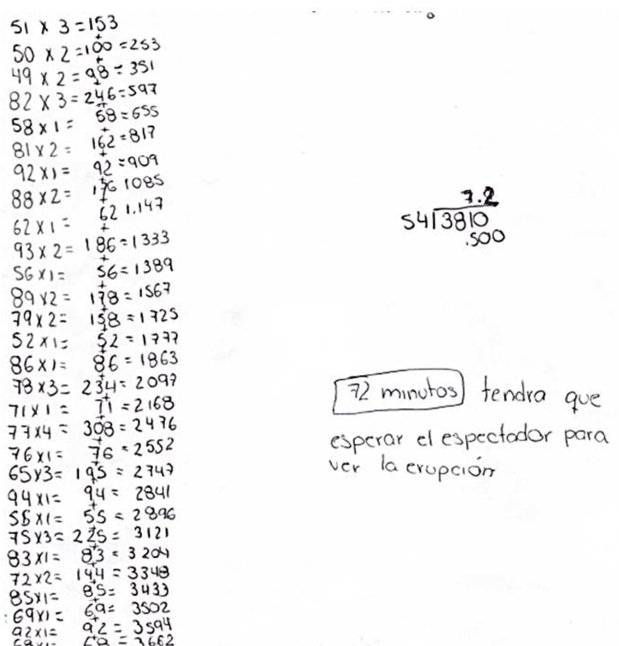
2 formas de hacerlo

* 1261 + 1367 + 1328 = 3956 ÷ 54 = 73.25

* 70.05 + 75.94 + 73.77 = 219.76 ÷ 3 = 73.25

Estudiante 5

Media Ponderada

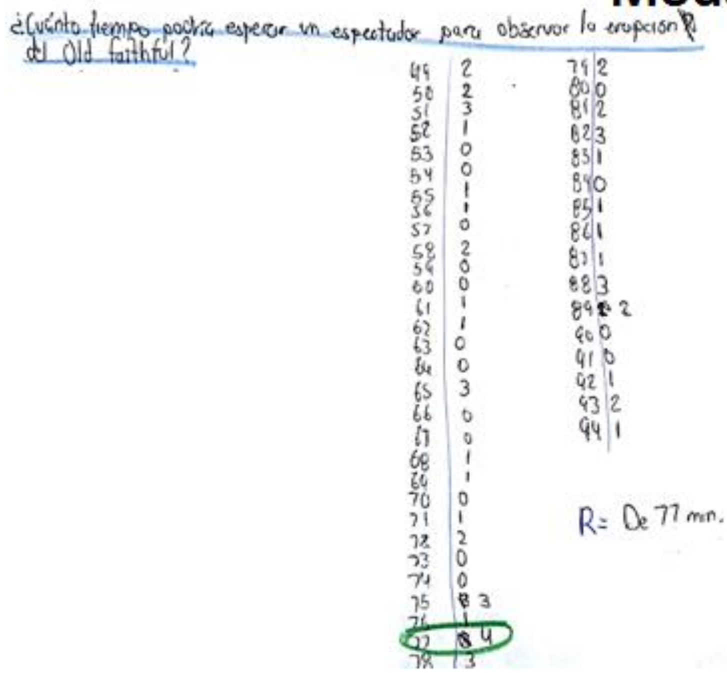

51 x 3 = 153
50 x 2 = 100 = 253
49 x 2 = 98 = 351
82 x 3 = 246 = 597
58 x 1 = 58 = 655
81 x 2 = 162 = 817
92 x 1 = 92 = 909
88 x 2 = 176 1085
62 x 1 = 62 1.147
93 x 2 = 186 = 1333
56 x 1 = 56 = 1389
89 x 2 = 178 = 1567
79 x 2 = 158 = 1725
52 x 1 = 52 = 1777
86 x 1 = 86 = 1863
78 x 3 = 234 = 2097
71 x 1 = 71 = 2168
77 x 4 = 308 = 2476
76 x 1 = 76 = 2552
65 x 3 = 195 = 2747
94 x 1 = 94 = 2841
55 x 1 = 55 = 2896
75 x 3 = 225 = 3121
83 x 1 = 83 = 3204
72 x 2 = 144 = 3348
85 x 1 = 85 = 3433
69 x 1 = 69 = 3502
92 x 1 = 92 = 3594
68 x 1 = 68 = 3662
87 x 1 = 87 = 3749
61 x 1 = 61 = 3810

54 | 3810 = 7.2   .500

72 minutos tendra que esperar el espectador para ver la erupción

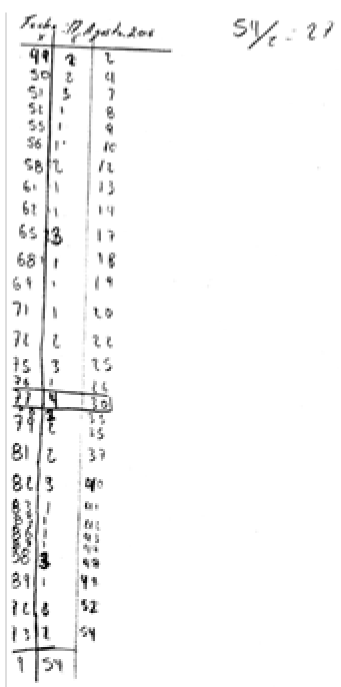
Estudiante 6

Moda



Estudiante 7

Mediana



Estudiante 8

Rango

¿Cuanto tiempo podria esperar un
espectador para observar la
erupción del old Faithful?

①
Primer dia: 49 - 93 → 44min   50 - 94 → 44 min   49 - 93 → 44 min

Tendran que esperar 44 minutos para poder
... es el tiempo que hay

Estudiante 9

Intervalo

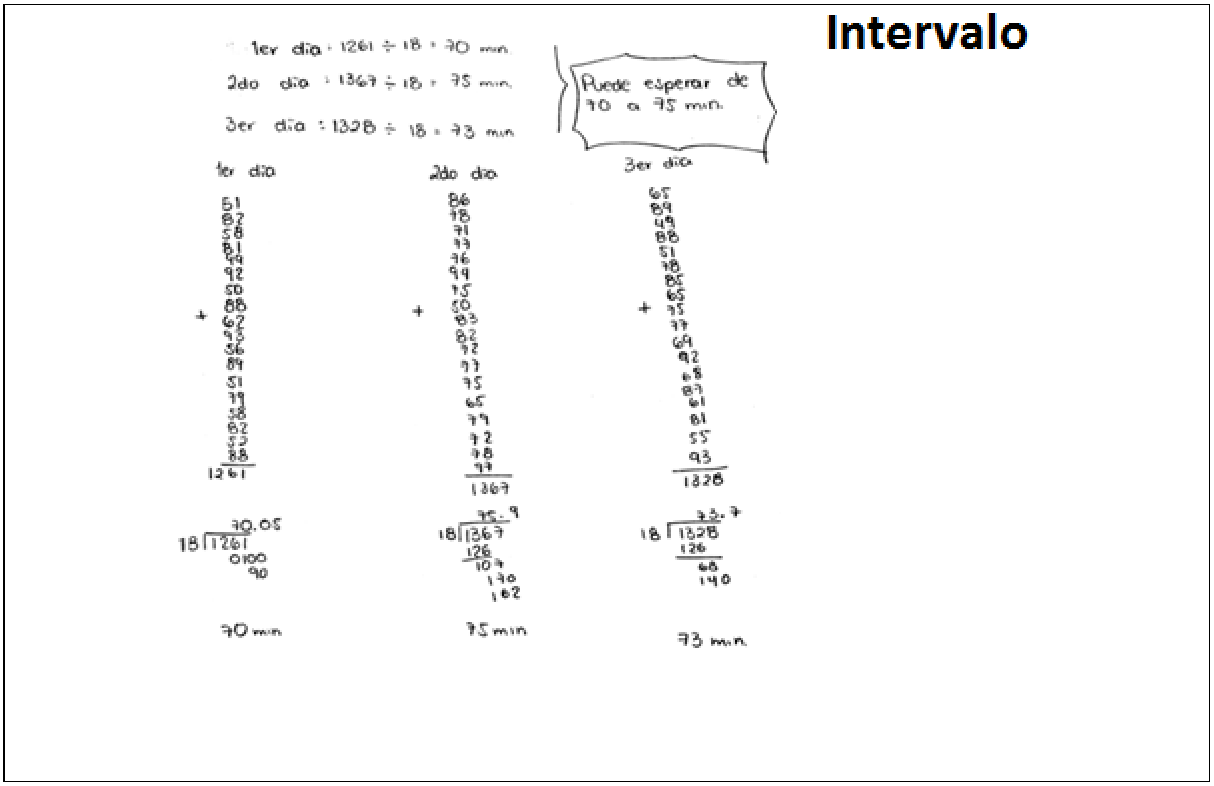
¿Cuanto tiempo podria esperar un espectador para
observar la erupcion del old faithful?

1 d: 49, 50, 51, 52, 52, 56, 58, 58, 62, 79, 81, 82, 82, 88, 88, 89, 92, 93.
2 d: 50, 65, 71, 72, 72, 75, 75, 76, 77, 77, 77, 78, 78, 79, 82, 83, 86, 94
3 d: 49, 51, 55, 61, 65, 65, 68, 69, 75, 77, 78, 81, 85, 87, 88, 89, 92, 93

min. 49
max. 94

R= se debe esperar entre 49 a 94 min.

Estudiante 10



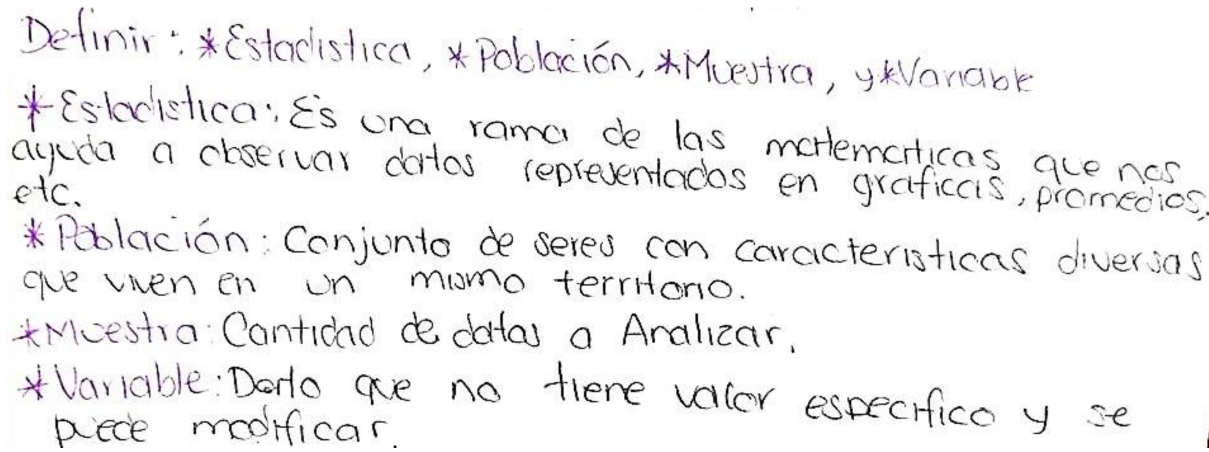
Con base en los resultados del examen diagnóstico y del problema del Geiser se procede a diseñar la planeación de las sesiones 6 en adelante, esta planeación se puede ver en el ANEXO 3.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL SALÓN DE CLASE. CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ESTADÍSTICA. SESIONES 6 A LA 9.

En las sesiones 6 a la 9 se han formalizado los conceptos de estadística, población, muestra y variables, esto con base en las ideas que surgieron de los alumnos, pero con la guía de su profesora.

En primer lugar, se le pide a los alumnos escriban en su cuaderno la idea que ellos tienen de lo que es la Estadística, Población, Muestra y Variable.

Posteriormente, se les dice que formen equipos de a lo más seis integrantes y que discutan entre ellos sus ideas para así formar las definiciones en equipo. Algunas de las definiciones se muestran a continuación:



Definir: *Estadistica, *Población, *Muestra, y *Variable

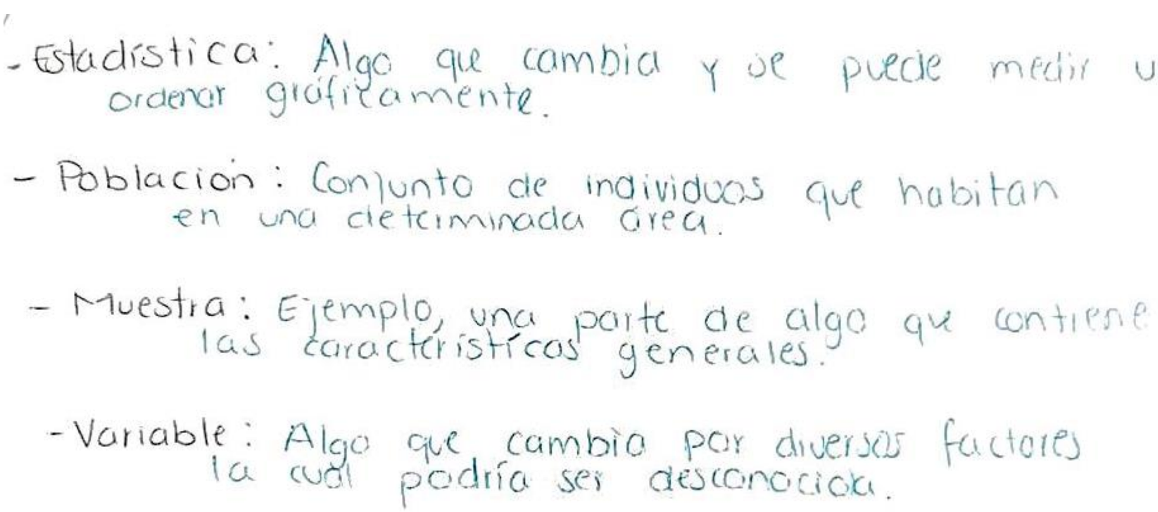
*Estadistica: Es una rama de las matematicas que nos ayuda a observar datos representados en graficas, promedios, etc.

*Población: Conjunto de seres con caracteristicas diversas que viven en un mismo territorio.

*Muestra: Cantidad de datos a Analizar.

*Variable: Dato que no tiene valor especifico y se puede modificar.

Equipo 1



- Estadística: Algo que cambia y se puede medir u ordenar gráficamente.
- Poblacion: Conjunto de individuos que habitan en una determinada area.
- Muestra: Ejemplo, una parte de algo que contiene las características generales.
- Variable: Algo que cambia por diversos factores la cual podría ser desconocida.

Equipo 2

Estadistica: Conounto de datos enfocados en cualquer ambito donde los resultados pueden variar.

Población: Conounto de individuos que habitan en una misma región

Muestra: Pequeña porción de un todo. que tiene los datos más importantes.

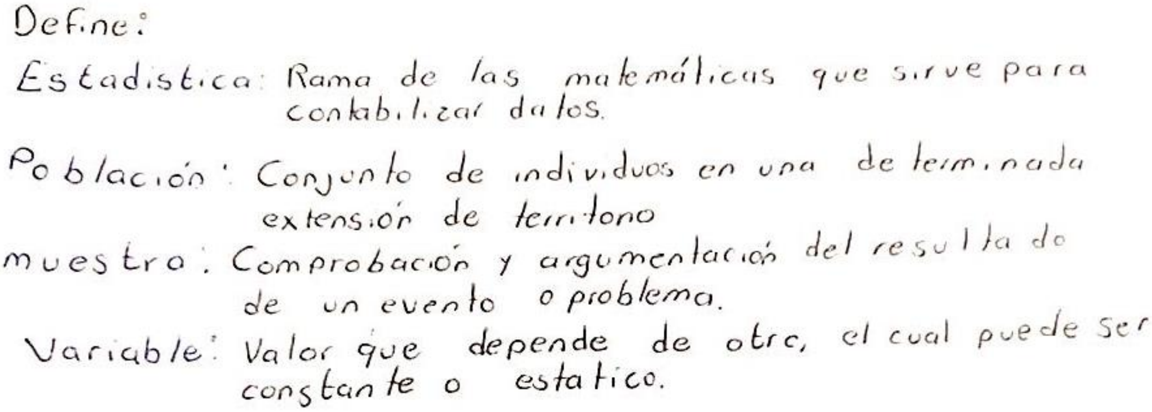
Variable: Son los resultados que no son constantes

Equipo 3

DEFINE:

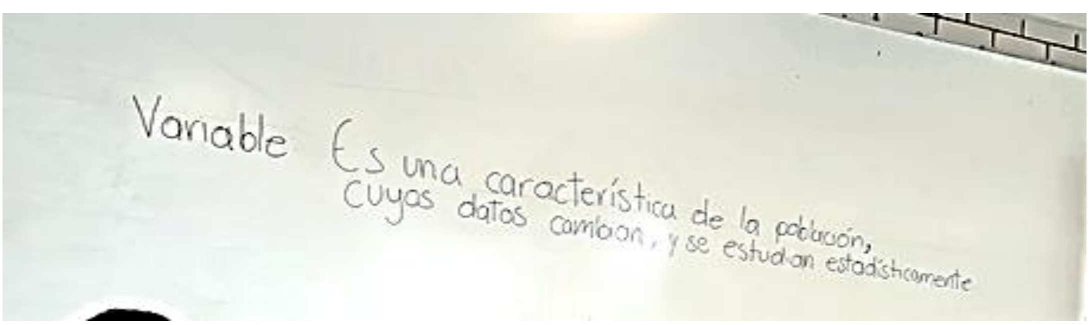
- Estadistica:
  + Resultados y totales de una gráfica, encuestas y agrupación de datos.
- Población:
  + agrupación de personas, cosas o fenómenos.
- Muestra:
  + Conjunto de posibles resultados.
- Variable:
  + Valor indefinido de un número, cuando algo no es constante. (número indefinido de un valor.)

Equipo 4


Define:
Estadística: Rama de las matemáticas que sirve para contabilizar datos.
Población: Conjunto de individuos en una determinada extensión de territono
muestra: Comprobación y argumentación del resultado de un evento o problema.
Variable: Valor que depende de otro, el cual puede ser constante o estatico.

Equipo 5

En un tercer momento, se pide que un integrante de cada equipo lea las definiciones que han formado entre ellos, para luego consensar las definiciones grupales, éstas se muestran en las siguientes imágenes:



En seguida se retoman las definiciones que aparecen en las imágenes anteriores:

Estadística: Rama de las Matemáticas que recopila datos, los organiza, analiza, representa y proporciona uno o más resultados para llegar a una conclusión.

Población: Conjunto de especies u objetos específicos que están presentes en un área determinada para ser estudiados.

Muestra: Es parte representativa de la población que se analiza para conocer las características de la misma.

Variable: Es una característica de la población, cuyos datos cambian y se estudian estadísticamente.

En la siguiente sesión se trabaja con estas definiciones. Se les pide a los estudiantes que formen equipo y que propongan tres ejemplos donde identifiquen cuál es la población, la muestra y la variable a estudiar. Los ejemplos dados por los estudiantes se recopilan en la siguiente tabla:

3 Ejemplos por equipo donde identifican la población, la muestra y variable.				
NÚM. EJEMPLO	POBLACIÓN	MUESTRA	VARIABLE	EQUIPO
1	Consumidores de tacos	Tacos vendidos en una noche	Tacos vendidos entre un lapso y otro	1
2	pacientes	Parte de pacientes ingresados al día	Razón por la que ingresaron al hospital	
3	CCH	Personas en relación sentimental (5 salones)	Personas con pareja en vallejo, en otro plantel o sin pareja.	
1 Personas vírgenes y castos en el CCH	Alumnos del CCH	Personas a entrevistar	Virginidad y castanidad	2
2 Personas con teléfono inteligente	Grupo 504	Todo el grupo	Personas con teléfono inteligente	
3 Personas que van a la carrera de medicina en el CCH	Alumnos del CCH	Personas a entrevistar	Carrera de medicina	
1 ¿Hay más hombres o mujeres en CCH?	CCH	2 grupos de cada semestre	sexo	3

2 Cuántas Materias reprobadas	Alumnos de tercero y quinto semestre	2 grupos de tercero y 2 de quinto	Materias reprobadas	
3 Tamales vendidos en un día en CCH	Alumnos de CCH y profesores	Los tamales	Número de tamales	
1 ¿Cuántos alumnos deben más de una materia?	Estudiantes del CCH Vallejo	3 grupos de tercer semestre y 3 de quinto	Materias reprobadas	4
2 ¿Cuántos alumnos de CCH meten carrera técnica?	Estudiantes del CCH Vallejo	Alumnos que cursan tercero y quinto semestre	Carreras técnicas	
3 ¿Cuántos tienen prepa sí?	Estudiantes del CCH Vallejo	Alumnos primero, tercero y quinto semestre (2 grupos de cada uno)	Prepa sí por promedio	
1 Cuántas personas escuchan determinada estación de radio	radioescuchas	Delegación Cuauhtémoc	Programa de radio a tal hora	5
2 Cuántos menores de edad entran a un antro en la CDMX	Los que están en el antro	Un antro de ahí	Menores de edad	
3 Número de materias reprobadas en quinto semestre	Alumnos de quinto semestre	3 grupos determinados	Materias reprobadas	
1 Materias reprobadas	Estudiantes de CCH Vallejo	4 grupos de tercer semestre y 4 de quinto	Número de materias reprobadas	6
2 Comunidad homosexual	Estudiantes de CCH Vallejo	Todo el plantel	Los homosexuales	
3 Discapacidad física	Estudiantes de CCH Vallejo	Todos los alumnos de primer año	discapacitados	
1	Alumnos de quinto semestre de CCH Vallejos turno matutino	3 grupos	Cuántos alumnos cursaron una carrera técnica y la terminaron	7
2	Alumnos de CCH Vallejo turno matutino	2 grupos de primero, tercero, quinto semestre cada uno	Alumnos que cuentan con el apoyo de prepa sí	
3	Alumnos de quinto semestre de CCH Vallejo turno	3 grupos	Alumnos que viven en el estado de México	

	matutino			
1 Promedio de alumnos de quinto semestre	Alumnos de quinto semestre	5 grupos	Promedio de calificación	8
2 Cantidad de niños que consumen papas fritas	Niños	10 niños de cada grado de primaria	consumo papas fritas	
3 Raiting de una caricatura	Niños entre 6-12 años	50 niños	raiting	
1 ¿Qué género musical les gusta a los estudiantes de CCH Vallejo	Estudiantes de CCH Vallejo	Alumnos de quinto semestre (5 grupos)	Géneros musicales	9
2 ¿Cuánto tiempo tardan en llegar de su casa a la escuela los alumnos del grupo 504?	Grupo 504	40 alumnos	Tiempo	
3 Registro de asaltos en el Municipio de Chalco al día	Municipio de Chalco al día	Colonia Unión de Guadalupe	Asaltos al día	
1	Alumnos de CCH Sur	Alumnos que van para el área de ciencias de la salud	Alumnos que desean ser doctores	10
2	CCH	CCH Azcapotzalco, Vallejo y Sur	Cantidad de basura	
3	Profesores de CCH Vallejo	Filosofía	Creencia en Dios	

Esta actividad se realiza con el propósito de que los estudiantes se familiaricen con las definiciones de los conceptos fundamentales en estadística.

También se retomó el concepto de fenómeno, dando los alumnos una variedad de fenómenos con el comportamiento similar al del geiser “Old Faithful”. Esto se hizo con el propósito de que los estudiantes pudieran relacionar este tipo de fenómeno con su entorno y que estuvieran conscientes de que el estudio de éstos se lleva a cabo mediante estadísticas. Algunos de los fenómenos descritos por los estudiantes se presentan a continuación.

Fenómenos similares al Geiser	
Tipo de fenómeno	Descripción
1) Transporte público (metro)	Tiempo de llegada
2) Movimiento de las olas	Altura de las olas
3) Erupción volcánica	Cada cuanto tiempo hace erupción.
4) Pesca	Comparar la cantidad de peces en primavera y en invierno.
5) Lluvia	El tiempo que tarda en llover
6) Ventas	El número de ventas que hay en un restaurante cada día, boletos en el metro,
7) Semáforo	Un semáforo descompuesto cambia las luces en periodos de tiempo irregulares.
8) Fabricación	Cantidad de dulces fabricados cada día durante una semana.
9) Hospedaje	La cantidad de personas que se hospedan en un hotel en el día de san Valentín.
10) Marea	Cada cuanto tiempo sube la marea en un determinado periodo.
11) Mortalidad	La tasa de mortalidad que hay en una zona específica en un día, semana, mes o año.
12) Natalidad	La tasa de natalidad que hay en una zona específica en un día, semana, mes o año.

Estas 4 sesiones han sido elementales para construir los conceptos fundamentales en Estadística, esto con base en los conocimientos previos que los estudiantes poseen.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL SALÓN DE CLASE. CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. SESIONES 10 A LA 31.

De la sesión 10 a la 31 se trabaja con base en las respuestas encontradas en el problema del Old Faithful fue que se planeó el desarrollo del curso. En estas respuestas se pudieron observar la mayoría de los conceptos básicos de estadística 1, es por ello que se retoman para de esta forma introducir y/o formalizar dichos conceptos. Dentro de estas sesiones se encuentran 3 que no corresponden a los conceptos a desarrollar pero importantes para los fines de la propuesta. En la sesión 13 se retomó las definiciones de variables, las cuales no habían quedado claras en los alumnos; en la sesión 18 se discutió el reporte de la película “21 Black Jack” y en la sesión 23 se comentó grupalmente el resumen de la lectura de “el surgimiento de la probabilidad” de Ian Hacking.

Durante la aplicación de la propuesta se fomentó el interés de los estudiantes por conocer el origen de la probabilidad así como su aplicación en contextos de juegos de azar. Esto con el análisis de los primeros cuatro capítulos del libro “El surgimiento de la probabilidad” de Ian Hacking y con la película “21 Black Jack”.

Al inicio del curso (agosto) se les informo a los estudiantes de estas tareas, dándoles la referencia del libro para que empezaran con su lectura, y se les encargo un resumen para entregar dentro de tres meses (noviembre) y en la fecha establecida además de su entrega se realizó una sesión plenaria donde se hizo un análisis de la lectura. Respecto a la película, se les pide un reporte para entregar dentro de dos meses (octubre), el día de la entrega se comentó en una sesión plenaria aspectos que les parecieron importantes del filme. Se les aviso de estos trabajos dando un tiempo considerable para la realización de ellos.

Con el texto de Hacking se pretende promover la lectura de textos científicos o de divulgación, tal y como lo sugieren los programas de estudio de Estadística y Probabilidad I y II (2003) en el apartado de contribución de la materia al perfil del egresado. Además, nos pareció interesante ya que tiene un enfoque filosófico y es en quinto semestre justamente cuando los estudiantes comienzan con el estudio de la filosofía, logrando así compaginar su curso de estadística con el de filosofía.

Por otro lado, la película se propuso con el objeto de despertar el interés en los estudiantes por la probabilidad, ya que se desarrolla mediante una trama interesante y divertida para ellos. Asimismo, los filmes, siendo considerados como un arte plástica reciente, influyen en la sensibilidad estética de los miembros de la comunidad.

LOS ASPECTOS FUNDAMENTALES QUE SE REALIZARON EN ESTA PROPUESTA SON LOS SIGUIENTES:

- Construcción de definiciones de conceptos estadísticos;
- Resolución de problemas;
- Fomentar habilidades y valores.

Respecto a la forma de trabajo: los alumnos construían definiciones de conceptos estadísticos: Como se dijo anteriormente, se les presenta una diapositiva con el tratamiento realizado por uno de los estudiantes, se les da la oportunidad de que participaran de manera voluntaria 6 o 7 alumnos, posteriormente se bautiza al proceso realizado por el estudiante que se presenta en la diapositiva, luego, se reúnen en grupos pequeños para elaborar su definición del concepto, al final de esta actividad, se da la palabra a uno de los integrantes de cada equipo para que lean su definición y en forma grupal se establece la definición que se utilizará en el transcurso de las clases.

Acerca de la resolución de problemas: los estudiantes resuelven el problema, primero de forma individual, posteriormente, trabajan el mismo problema en equipos pequeños y al final en forma grupal. De esta manera los alumnos pueden identificar algunas deficiencias en sus procesos y llegar a comprender cuál es la mejor opción de respuesta.

Los valores que se fomentan en el desarrollo de la propuesta son analizados a la luz del comportamiento de cada uno de ellos, estos son: respeto, tolerancia, confianza en sí mismo, compromiso, puntualidad, responsabilidad, honestidad.

Las habilidades que se promueven en el desarrollo de la propuesta son analizados a la luz de las acciones, tales como: reflexión, comunicación oral y escrita, observación, lectura y conjeturar.

La estructura general de la planeación de las sesiones se puede ver en el Anexo 2.

DESCRIPCIÓN DE UNA CLASE TÍPICA DURANTE LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

1. Saludo: La profesora entra al salón y saluda.

Observa la asistencia y espera unos minutos a que llegue el resto de ellos, por lo regular no tardaban más de 15 minutos después de las 9.

2. Inicio: Introducción a la sesión.

En esta etapa se trabaja retomando lo visto en las sesiones anteriores. Se les pregunta a los estudiantes que se vio la sesión anterior al igual que las anteriores a ésta. El objetivo es que los alumnos tengan presente y vayan comprendiendo todo lo que se está trabajando. El orden de las participaciones al inicio del curso era voluntario, dando orden a las participaciones, se les piden que levante la mano aquel que quiere participar y se les va dando la palabra en el mismo orden en que levantan la mano. Después de observar que había estudiantes que no participaban, se optó por hacer directamente las preguntas a aquellos que no tenían mucha participación voluntaria, logrando en poco tiempo la participación de todos estos alumnos que se cohibían al inicio.

Esta fase también se ocupó para trabajar la tarea extra-clase, en caso de que la hubiera.

3. Desarrollo: Descubrir conceptos.

En esta fase se trabaja de manera individual y en equipo.

El trabajo que aquí se desarrolla es tal cual como se describe en el capítulo 3. En primer lugar, se les presentara una diapositiva, con una imagen escaneada que corresponde a la respuesta otorgada por algún estudiante del grupo, se les dará 5 minutos para que observen y traten de entender el proceso que ha realizado el compañero en su respuesta.

Posteriormente, se les da la mitad de una hoja blanca y se les pide, que de manera individual, escriban lo que han observado en la respuesta de su compañero, esta hoja se entrega a la profesora.

En seguida, se reunen en equipos de 5 o 6 integrantes para discutir lo que han observado en la diapositiva, y en conjunto llegar a un acuerdo el cual escribiran en la mitad de una hoja blanca.

4. Cierre: Formalización de conceptos.

Esta etapa se desarrolla de manera grupal. Se organizan las mesas del salón, de tal forma que quede una mesa redonda (rectangular), esto para facilitar la discusión grupal y de tal manera que el campo visual de cada uno de los alumnos sea lo más amplio posible.

Se les pide, que por equipo vayan leyendo lo que han escrito y de ahí se sacará la idea general, esta idea, correspondera a la definición de los conceptos. Uno de los compañeros pasará al pizarrón y escribirá lo que de manera grupal le digan, al final, la profesora sólo le dará nombre a esta definición.

CAPITULO 4. ANALISIS Y CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es que se promueva un aprendizaje con comprensión tal como lo mencionan los documentos oficiales del Colegio de Ciencias y Humanidades, por ello se pretende alcanzar un aprendizaje significativo donde el alumno es el constructor y actor principal, es por eso que se parte de los conocimientos previos que el estudiante posee para construir las definiciones de los conceptos básicos de Estadística, tales como: frecuencia, medidas de tendencia central y medidas de dispersión, partiendo de las respuestas obtenidas en el problema del Geiser mencionado en el capítulo 3. Aunado a estas construcciones, se trabaja con problemas relacionados con las medidas de tendencia central y con la toma de decisiones, los cuales involucran las medidas de dispersión para ser resueltos. Es en este capítulo donde se llevará a cabo el análisis de los resultados del trabajo realizado por los estudiantes

CONSTRUCCIÓN DE DEFINICIONES DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

Se parte del problema del Old Faithful.

De Kamilokardona - Trabajo propio, GFDL, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5639368

El Old Faithful es uno de los géiseres más conocido del parque nacional de Yellowstone, ubicado en los Estados Unidos, principalmente en el estado de Wyoming, aunque se extiende por Montana e Idaho. Ahí se encuentran casi la mitad de géiseres activos de todo el mundo. Entre ellos el Old Faithful que expulsa agua cada determinado tiempo durante un periodo aproximado de 5 minutos y alcanza alturas de 55 hasta 75 metros. Durante tres días consecutivos se observó el tiempo (en min.) en que tardaba en hacer erupción y los resultados son:

Para el primer día: 51,82,58,81,49,92,50,88,62,93,56,89,51,79,58,82,52,88; para el segundo día: 86,78,71,77,76,94,75,50,83,82,72,77,75,65,79,72,78,77; y para el tercer día: 65,89,49,88,51,78,85,65,75,77,69,92,68,87,61,81,55,93.

¿Cuánto tiempo podría esperar un espectador para observar la erupción del Old Faithful?

Justifica tu respuesta.

Los diferentes tratamientos que hacen los estudiantes sobre los datos dan origen a la construcción de los conceptos básicos de estadística.

La manera en que se presentan las respuestas individuales es nombrando a los Estudiantes como A, B, C, etc., Siendo independientes de cada concepto, es decir, el Estudiante A del concepto 1 no necesariamente es el Estudiante A del concepto 2.

Respecto al nombramiento de los equipos se lleva a cabo de la siguiente manera: Equipo 1-1, Equipo 2-1, Equipo 3-1, etc., aquí únicamente cambia el primer número, el cual corresponde al número de equipo, el segundo número corresponde al número del concepto que se esté analizando, esto es, equipo 1 del concepto 1, equipo 2 del concepto 1 y así sucesivamente, haciendo la misma aclaración que en el análisis individual, el Equipo 1-1 no necesariamente es el Equipo 1-2 (equipo 1 del concepto 2).

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO “FRECUENCIA”

El primer concepto que se analiza es el de frecuencia, se presenta al grupo la figura 1 en una diapositiva y la profesora pregunta: ¿Qué es lo que está haciendo el Estudiante 1 y el Estudiante 2?

Con esta pregunta se espera que los alumnos analicen de manera individual lo que se les presenta en la diapositiva. Cuando se les pide a los estudiantes que analicen, se espera que ellos observen detenidamente, es decir, que vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen patrones numéricos, que realicen comparaciones, que reconozcan formas de ordenar y contar datos, que establezcan similitudes y diferencias entre las diferentes representaciones.

Para ello se les da un tiempo aproximado de 10 minutos.

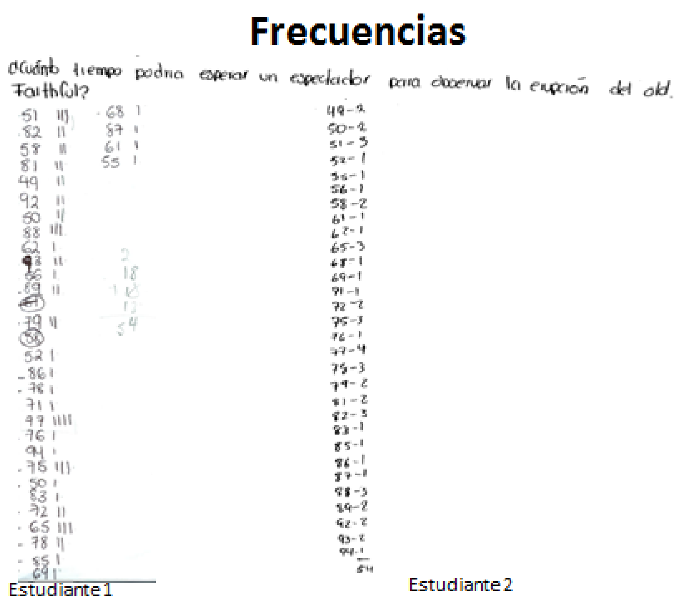


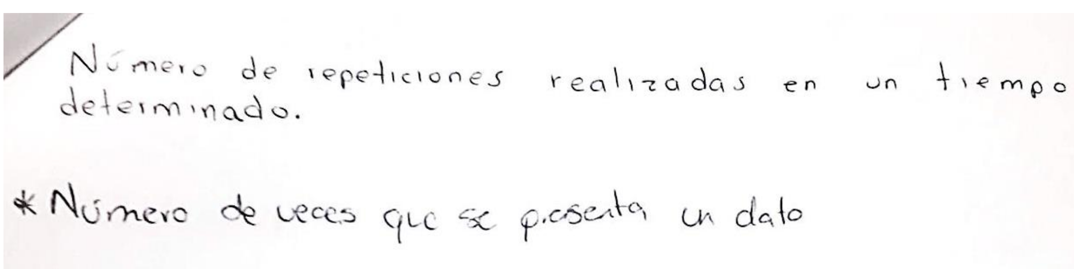
Figura 1

Pasado este tiempo, la profesora procede para llevar a cabo la intervención individual. Para ello vuelve a realizar la pregunta ¿Qué es lo que está haciendo el Estudiante 1 y el Estudiante 2? Y pide a los estudiantes que levanten la mano para participar. Algunas de las respuestas que se obtuvieron se rescatan de los videos grabados en la sesión, las cuáles son:

> *Estudiante A:* Los Estudiantes 1 y 2 pusieron los números de cuantas veces se repetía cada valor y también los ordenan de menor a mayor.
>
> *Estudiante B:* Pusieron la moda de los 3 días.
>
> *Estudiante C:* El estudiante 1 está muy confuso porque no están ordenados, el Estudiante 2 si ordena los datos. Pero los dos hacen los mismo, observan cuantas veces se repite cada valor.
>
> *Estudiante D:* Los dos hacen lo mismo. pero la forma en que los representan es diferente, el Estudiante 1 va contando y pone palitos, el Estudiante 2 cuenta y pone el número de veces que apareció ese valor.

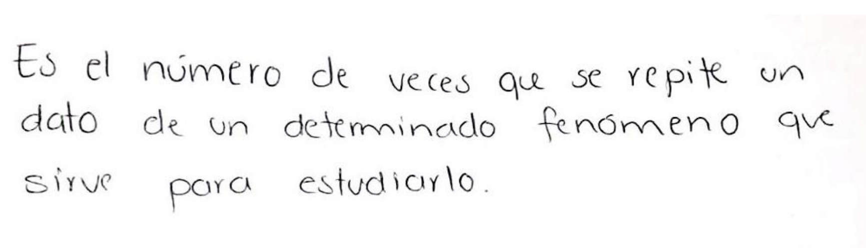
Después de escuchar las intervenciones de los alumnos respecto a lo que hacen los Estudiantes 1 y 2, en la presentación de la diapositiva la profesora da el nombre a ese concepto, al cual le llama frecuencia.

En seguida se les pide a los estudiantes que formen equipos de 5 o 6 integrantes cada uno y formen su definición del concepto frecuencia con base en el trabajo que hizo cada uno de los integrantes del equipo y con lo que ya han escuchado en las intervenciones individuales.
Algunas respuestas obtenidas de los equipos se presentan a continuación:


Número de repeticiones realizadas en un tiempo determinado.

* Número de veces que se presenta un dato

Equipo1-1


Es el número de veces que se repite un dato de un determinado fenómeno que sirve para estudiarlo.

Equipo2-1

Cantidad de veces que se repite uno o varios datos.

Equipo3-1

El número de veces que se repite un dato de cualquier fenómeno o suceso.

Equipo4-1

Después, se pide a un integrante de cada equipo que lea la definición que han construido y que de manera grupal elijan aquella o aquellas que les parecen más adecuadas para retomar y con base en ellas construir la definición grupal.

Posterior a esta interacción, los alumnos han llegado a un consenso y eligen una de las definiciones proporcionadas por el quipo 1, porque para todos, es ésta la más completa y fácil de recordar.

Definición grupal de Frecuencia: Número de veces que se presenta un dato.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO “MEDIA ARITMÉTICA”

El siguiente concepto que apareció en las respuestas de los alumnos es el de media o media aritmética, este concepto fue tratado de dos maneras diferentes, y debido a la importancia del concepto es que se analizarán las dos.

Se presenta la diapositiva con el proceso del Estudiante 3 (figura 2) y se les pide a los alumnos que observen lo que hizo su compañero, para esto se les da aproximadamente 10 min.

Cuando se les pide a los estudiantes que observen, se espera que ellos analicen detalladamente, es decir, que vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no, que identifiquen las operaciones que está realizando el Estudiante 3, que interpreten como está sumando y dividiendo.

Tratamiento 1

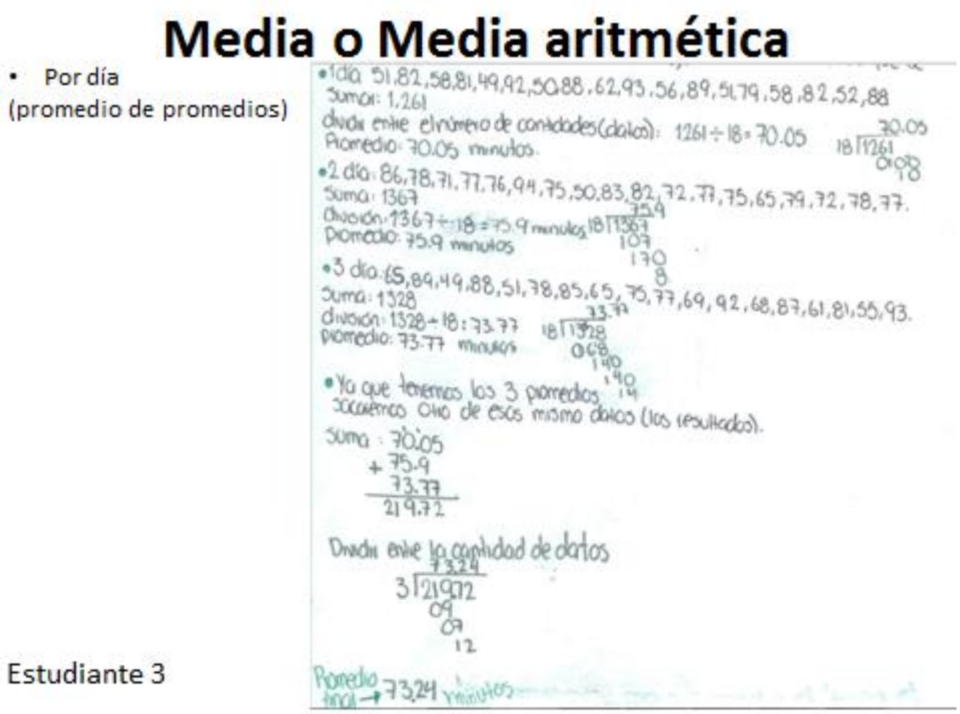


Figura 2

Posteriormente se les pregunto a los alumnos, de manera individual-directa ¿Qué fue lo que hizo el Estudiante 3?

Algunas de las respuestas individuales que se obtuvieron se rescatan de los videos grabados en la sesión, las cuáles son:

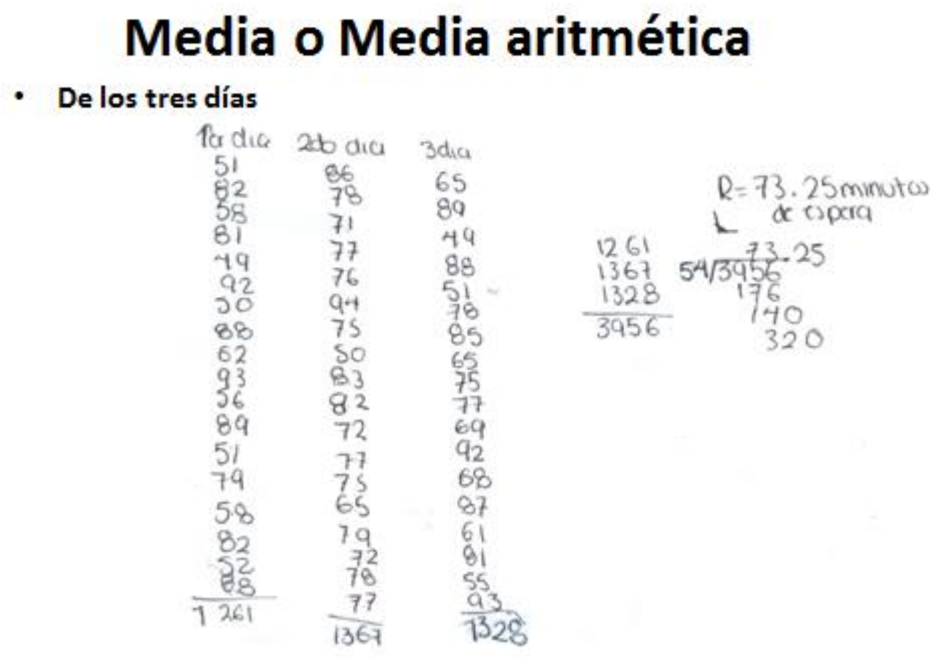
> *Estudiante A:* Como que se fue más directamente a la suma de los datos y a la división, no obtuvo una tabla de distribución, los anoto directamente. Como que tuvo la rapidez de sacar un promedio y lo junto todo.
>
> *Estudiante B:* yo pienso que lo explica un poco más detallado, porque puso los pasos a seguir, primero hizo la suma, después hizo la división y luego hizo el promedio, y así con los tres días y luego saco un promedio total. Como que los pasos están más detallados.
>
> *Estudiante C:* Saca primero el promedio de cada uno de los días y después junta los tres y saca uno solo.

Luego de analizar lo que hace el Estudiante 3, en la presentación de la diapositiva la profesora da el nombre a ese proceso, al cual le llama media o media aritmética, para continuar con el proceso del Estudiante 4.

TRATAMIENTO 2 PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO "MEDIA ARITMÉTICA"

Se les presenta la diapositiva con la imagen de lo que hizo el Estudiante 4 y se le pide a los alumnos que observen lo que hizo su compañero, para esto se les da aproximadamente 10 min.

Cuando se les pide a los estudiantes que observen, se espera que ellos analicen detalladamente, es decir, que vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no, que identifiquen las operaciones que está realizando el estudiante 4, que interpreten como está sumando y dividiendo, que realicen comparaciones entre lo que hace el Estudiante 4 con lo que hace el Estudiante 3, que establezcan similitudes y diferencias entre las dos representaciones.



Estudiante 4

Posteriormente, la profesora pregunta directamente a algunos estudiantes ¿Qué hizo el Estudiante 4? Obteniendo (de las videograbaciones) las siguientes respuestas:

Estudiante A: sumó todos los números e hizo el promedio, ya que hizo el promedio lo dividió entre los números y de ahí saco sus propias conclusiones.

Estudiante B: primero sumar lo del primer día, lo del segundo día y lo del tercer día, y de ahí que le salió 3956 lo dividió entre 54 porque es la suma de todos los datos, porque en cada día son 18 datos, y después lo dividió y de ahí le salió su promedio.

Estudiante C: sumó por día los valores y de ahí se hicieron uno y luego lo dividió entre todos los datos que son 54.

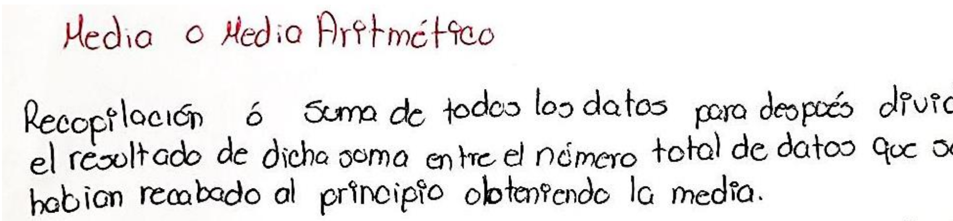
Estudiante D: yo pienso que está haciendo lo mismo que el estudiante 3, nada más que el estudiante 4 no saca el promedio de cada uno, sino que suma todo y hasta el final ya divide entre el número total de datos para sacar un promedio.

Profesora: ¿Entonces el estudiante 4 hizo lo mismo que el estudiante 3?

Estudiante E: yo lo que digo es que el estudiante 4 se fue más directo, no fue tomando todos los promedios de cada día como el estudiante 3, sino que se fue más directo a sumar todos los datos y a dividirlos entre el número de datos que había.

Estudiante F: la única diferencia que hay entre los dos estudiantes es que el estudiante 3 sacó el promedio por día y de ahí sacó el promedio total y el estudiante 4 saco un promedio.

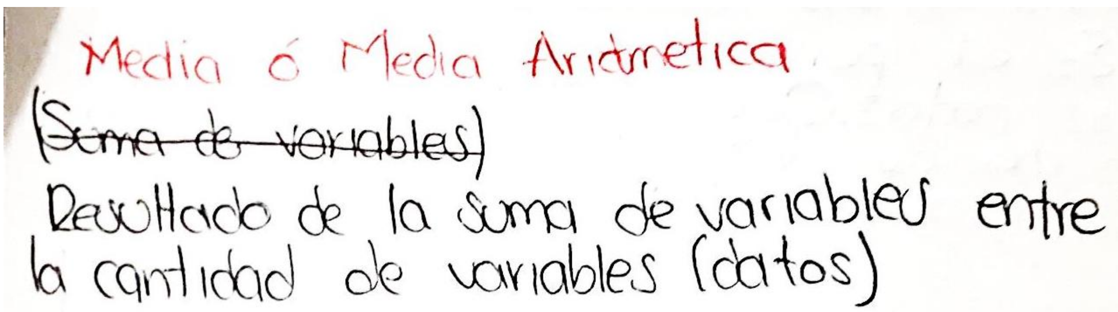
Después de analizar lo que hacen los Estudiantes 3 y 4, se les pide a los alumnos que formen equipos y redacten su definición del concepto media aritmética. Algunas respuestas de los equipos se presentan a continuación:



Media o Media Aritmético

Recopilación ó Suma de todos los datos para despúes dividir el resultado de dicha suma entre el número total de datos que se habian recabado al principio obteniendo la media.

Equipo1-2

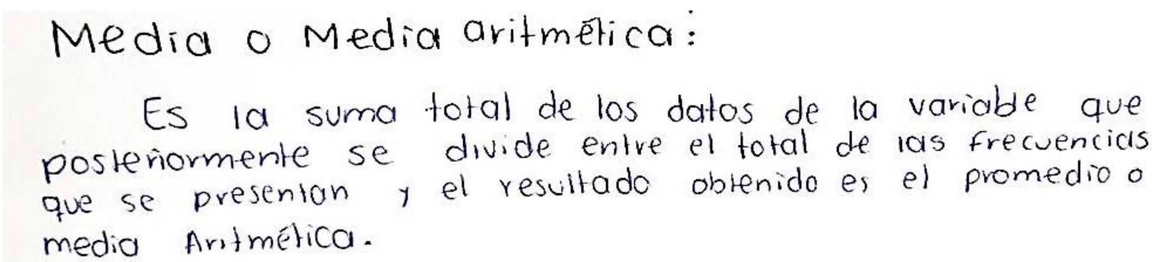


Media ó Media Aritmetica

~~(Suma de variables)~~

Resultado de la suma de variables entre la cantidad de variables (datos)

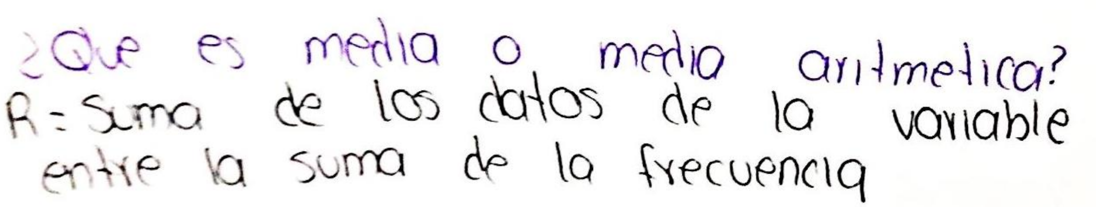
Equipo2-2



Media o Media aritmética:

Es la suma total de los datos de la variable que posteriormente se divide entre el total de las frecuencias que se presentan y el resultado obtenido es el promedio o media Aritmética.

Equipo3-2



¿Que es media o media aritmetica?

R= Suma de los datos de la variable entre la suma de la frecuencia

Equipo4-2

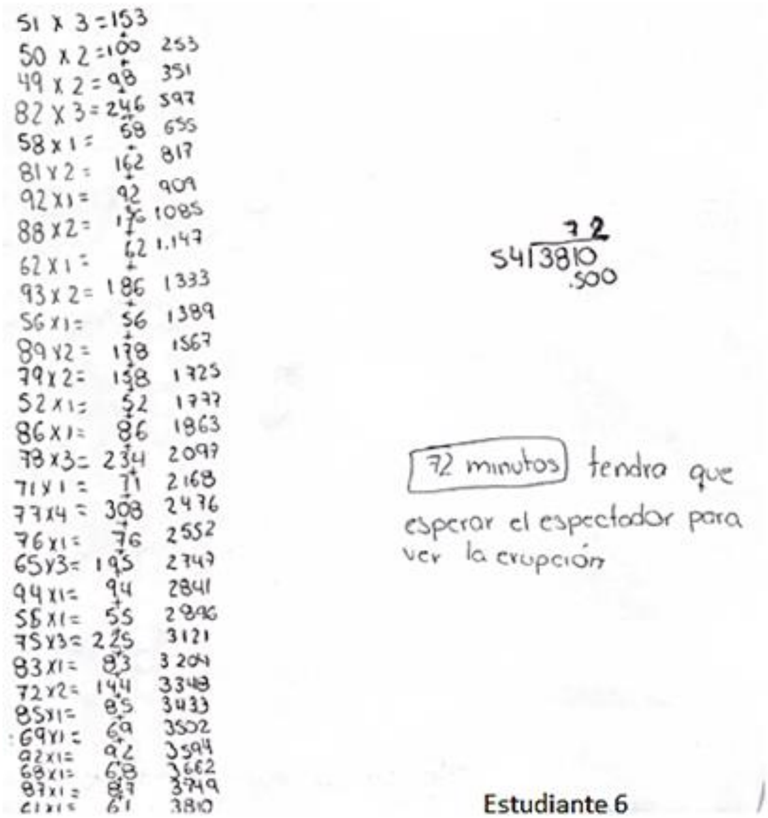
Para realizar una definición grupal, la profesora pide a un estudiante de cada equipo que lea la definición que a la que han llegado. Cuando terminan todos los equipos de leer la profesora se da cuenta que en la definición únicamente están considerando el proceso, pero no lo que es una media o media aritmética. La profesora decide guiarlos para que los estudiantes piensen en lo que representa una media o media aritmética, para ello, hace las siguientes preguntas a todos los estudiantes: En tus calificaciones, ¿Qué hace ese valor que llaman promedio (media)? ¿Por qué toman sólo un valor y no todas tus calificaciones? Después de esto, los estudiantes participaron ordenadamente contestando las preguntas y formando de manera grupal su propia definición. Estas preguntas fueron la pauta para que los alumnos dijeran que la media es un valor que representa (entendiéndolo como un valor representativo) y equilibra a un conjunto de datos.

Definieron el concepto con sus propias palabras de la siguiente manera:

"*La media o media aritmética es el resultado que representa la síntesis de varios datos; es el punto de equilibrio de todos los datos y se calcula a través de la suma de los datos dividido entre el número total de datos*".

Como una representación especial de la media, se analizó la media ponderada, esto se pudo llevar a cabo gracias al tratamiento de los datos, que uno de los estudiantes realizó, ya que utilizó el desarrollo correspondiente a la media ponderada.

Se analiza esperando que los alumnos vean la representación que utiliza el Estudiante 6, es decir, que observen que este estudiante agrupa los datos iguales y los contabiliza, para luego multiplicar el dato por el número de veces que se repite, posterior a ello, va realizando la suma, al final, divide esta suma entre el total de datos que hay. Es decir, que logren identificar, la agrupación de términos iguales, la operación de multiplicación que ahí aparece, la frecuencia absoluta y la acumulada.



Se hace el análisis de forma grupal logrando que los alumnos identifiquen el proceso que ha hecho el Estudiante 6, pero se aclaró con los alumnos que era solo el proceso, ya que el Estudiante 6 se equivocó al sumar los datos, esto los alumnos lo identificaron pero no era el propósito al presentar la diapositiva. Este momento se llevó a cabo con la participación voluntaria de algunos alumnos.

De esta manera, los alumnos observaron las ventajas de utilizar la media ponderada, algunas de estas ventajas a las que llegaron son:

- Ahorrarse trabajo.
- Ahorrarse tiempo.

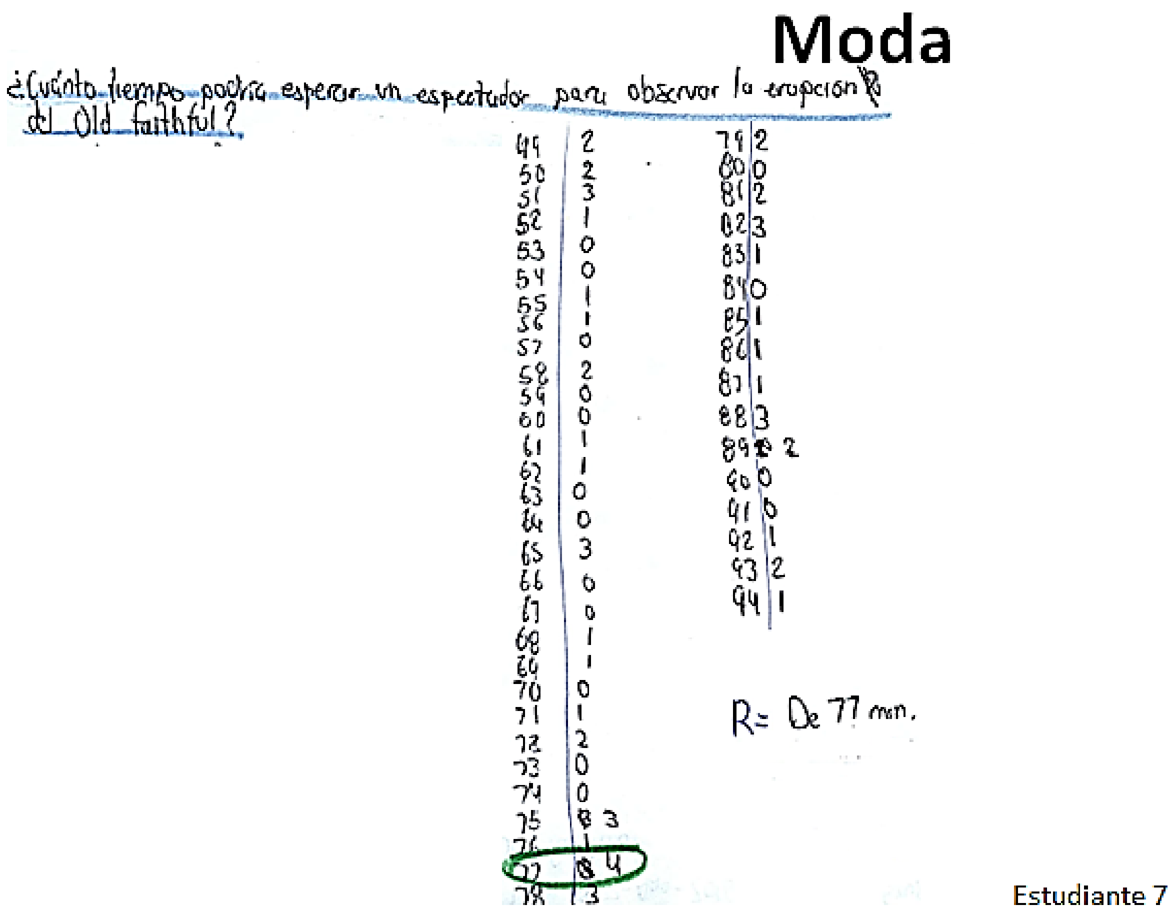
También encontraron algunas desventajas, tales como:

- Pueden equivocarse con el divisor, en vez de tomar el total de las frecuencias, pueden tomar el total de datos diferentes que aparecen.
- Para el dividendo, pueden tomar únicamente el total de datos diferentes que aparecen.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO “MODA”

El tercer concepto que apareció en los tratamientos de los alumnos es el de moda. Se presenta la diapositiva y se les hace la siguiente pregunta a los estudiantes, ¿Qué es lo que realiza el Estudiantes 7? La profesora pide a los estudiantes que analicen el proceso de éste estudiante, para ello les da un tiempo de 10 minutos.

Cuando se les pide a los estudiantes que analicen, se espera que ellos observen detalladamente, es decir, que vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no, que identifiquen las operaciones que está realizando el Estudiante 7, que piensen por qué el Estudiante 7 ha encerrado ese dato, es decir, ¿qué significa esto?

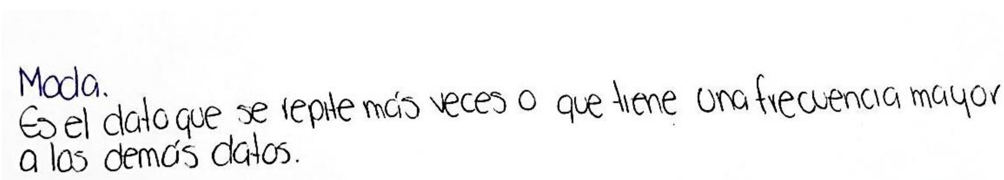


Después, la profesora pregunta a ciertos alumnos ¿Qué hizo el Estudiante 7? Obteniendo (de las videograbaciones) las siguientes respuestas:

> *Estudiante A:* el Estudiante 7 encerró el dato que tiene mayor frecuencia.
>
> *Estudiante B:* el 77 es el dato que apareció más veces.
>
> *Estudiante C:* según yo es la mediana, porque el 77 es el que más se repite.
>
> *Estudiante D:* es la moda, porque el 77 es el que aparece más veces.

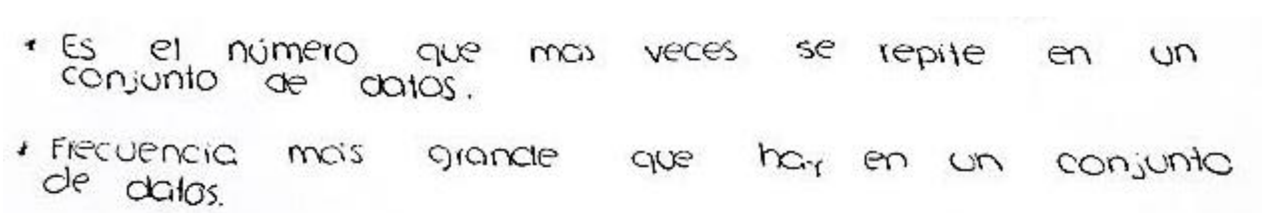
Al escuchar las respuestas de estos estudiantes se puede observar que el proceso está claro, lo que no recuerdan bien es el nombre de este concepto, eventualmente lo confunden con el de mediana.

Luego de escuchar a algunos alumnos, se bautiza a este tratamiento con el nombre de moda, el cual se muestra en la diapositiva y la profesora pide a los estudiantes que en equipos escriban la definición del concepto, esto con base en lo observado en la lámina. Algunas definiciones logradas por los equipos son:

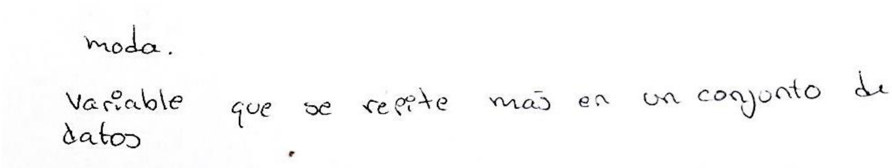


Equipo1-3

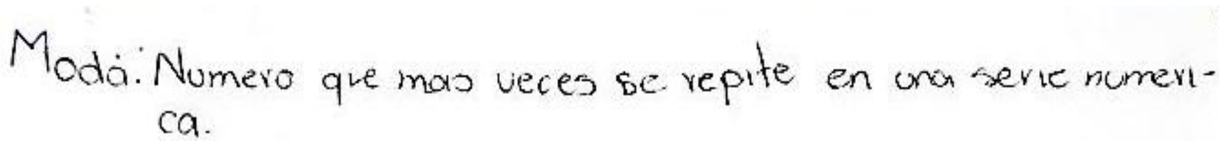
Equipo2-3



Equipo3-3


moda.
Variable que se repite más en un conjunto de datos.

Equipo4-3


Modá: Numero que mas veces se repite en una serie numerica.

Equipo5-3

Las definiciones proporcionada por los equipos 1 y 2 fueron más apropiadas según los estudiantes. Esto lo mencionan al momento que se hace la discusión grupal. El equipo 3 y 5 consideran que la moda tiene que ser un número, es decir, su definición no da lugar para la variable cualitativa. Mientras que el equipo 4 utiliza como indistinto el término variable, cuando en realidad se referían a los datos de la variable.

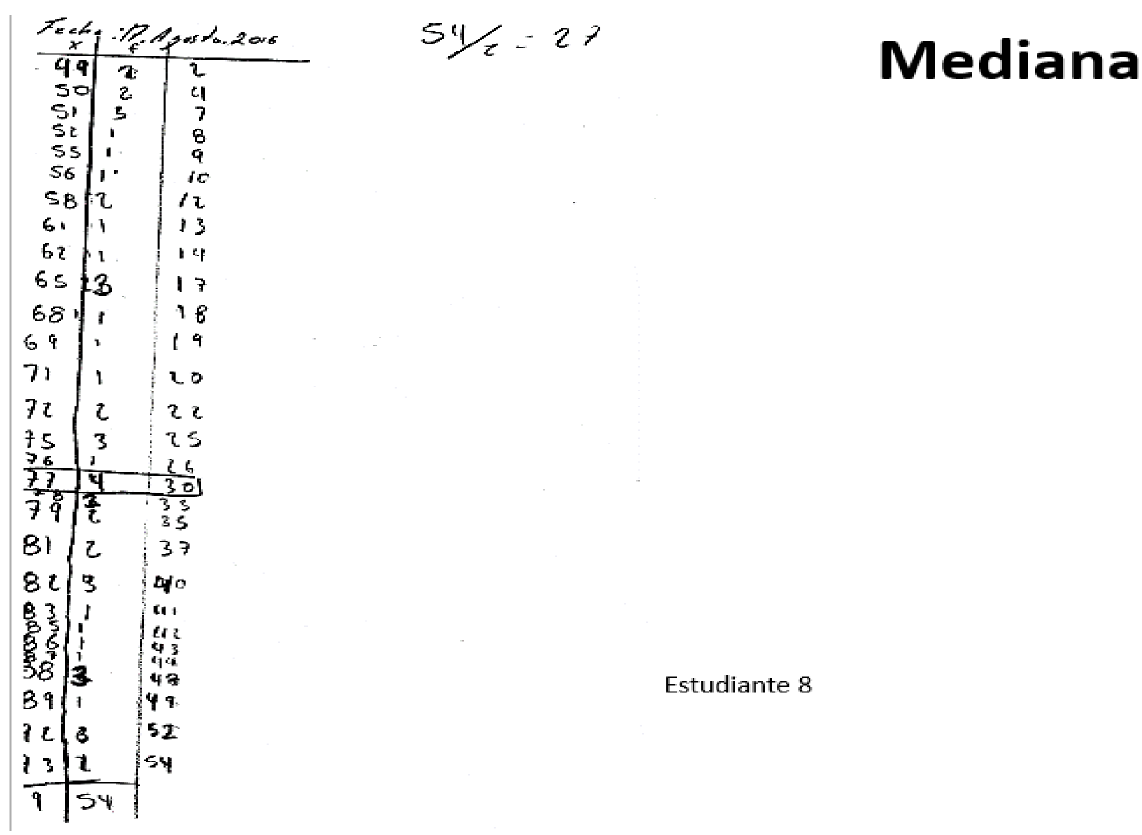
Para la definición grupal pasa una alumna al pizarrón a escribir la definición del concepto, llegan a ésta mediante un consenso grupal, después de analizar las definiciones de cada uno de los equipos. Definieron el concepto de moda con sus propias palabras de la siguiente manera:

“*Es el dato con la frecuencia más alta*”

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO "MEDIANA"

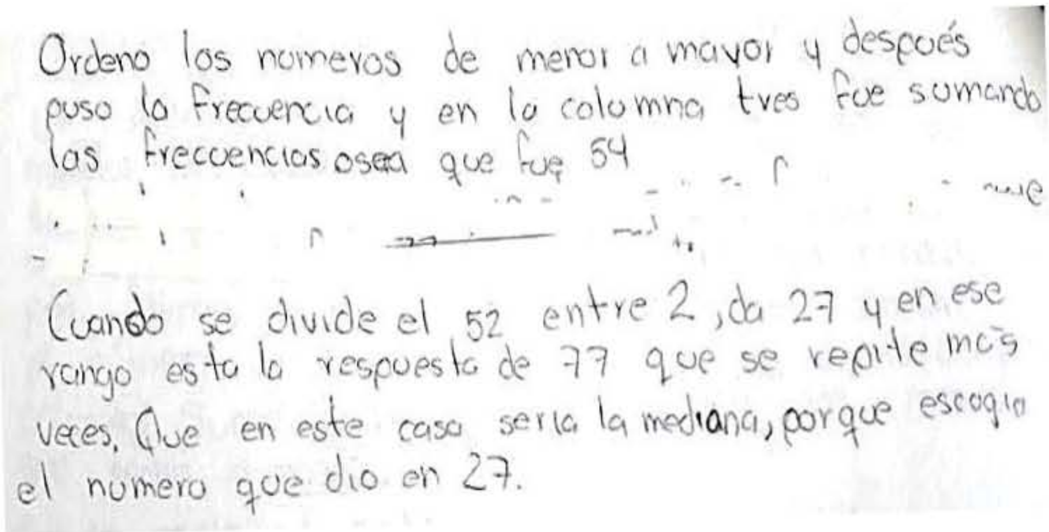
El siguiente concepto que utilizaron algunos de los estudiantes en el tratamiento de los datos al dar respuesta al tiempo de espera del Geiser, es el de Mediana. Se presenta la diapositiva y se les hace la siguiente pregunta a los estudiantes, ¿Qué es lo que realiza el Estudiantes 8? La profesora pide a los estudiantes que analicen el proceso de éste estudiante, para ello les da un tiempo de 10 minutos.

Al analizar se espera que los alumnos vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no, que identifiquen las operaciones que está realizando el Estudiante 8, que observen que este Estudiante agrupa los datos iguales y los contabiliza, que va sumando las frecuencias, que utiliza tres columnas para separar los procesos, que observen la operación que hace y por qué la hace, que traten de interpretar el por qué esta encerrando esos datos.



Posteriormente se les proporciona a los alumnos la mitad de una hoja blanca para que de manera individual escriban lo que han observado. Algunas de las conclusiones a las que llegaron los alumnos se muestran a continuación.

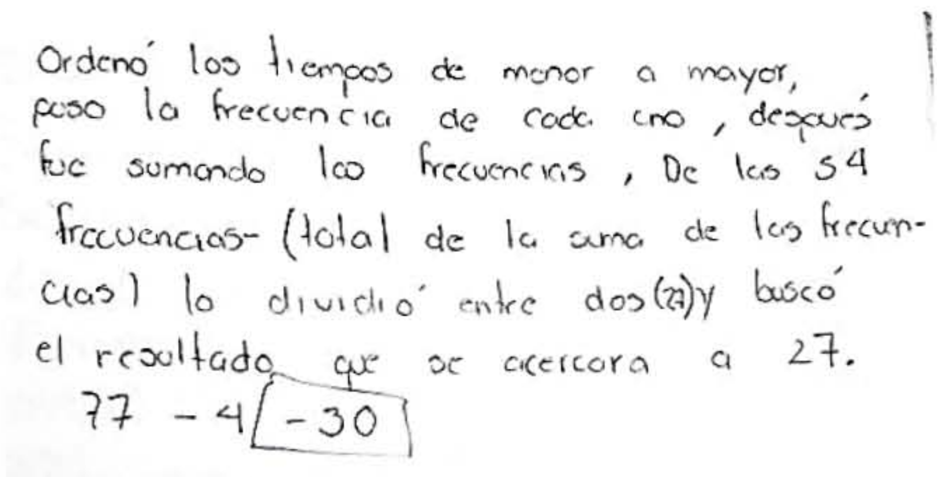
Estudiante A:



Ordeno los numeros de menor a mayor y después puso la Frecuencia y en la columna tres fue sumando las frecuencias osea que fue 54

Cuando se divide el 52 entre 2, da 27 y en ese rango esta la respuesta de 77 que se repite más veces. Que en este caso sería la mediana, porque escogio el numero que dio en 27.

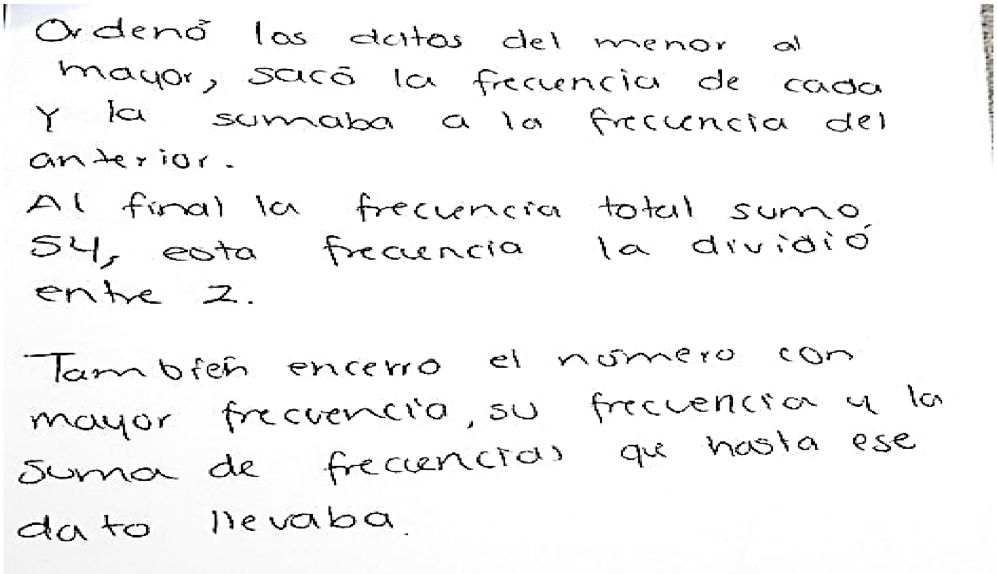
Estudiante B:



Ordenó los tiempos de menor a mayor, puso la frecuencia de cada uno, después fue sumando las frecuencias, De las 54 frecuencias (total de la suma de las frecuen-cias) lo dividió entre dos (27) y buscó el resultado que se acercara a 27.

77 – 4 $\boxed{-30}$

Estudiante C:

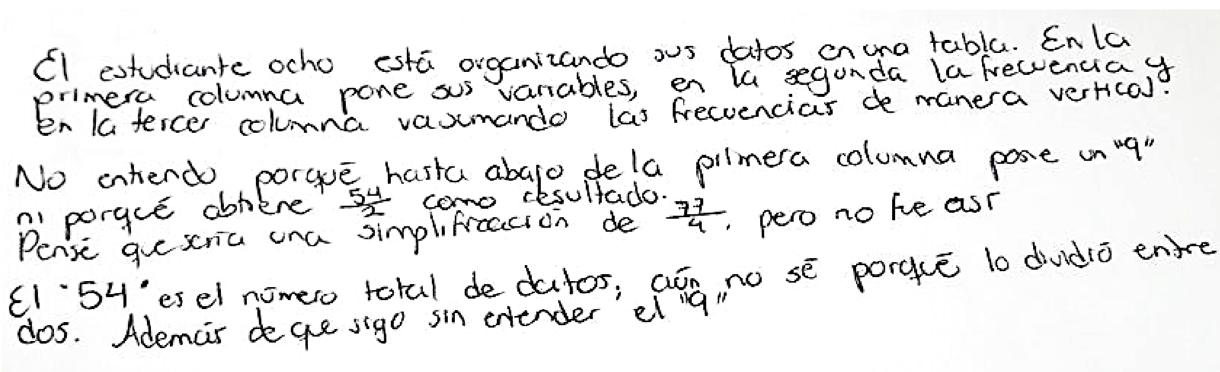


Ordenó los datos del menor al mayor, sacó la frecuencia de cada Y la sumaba a la frecuencia del anterior.

Al final la frecuencia total sumo 54, esta frecuencia la dividió entre 2.

También encerro el número con mayor frecuencia, su frecuencia y la suma de frecuencias que hasta ese dato llevaba.

Estudiante D:



El estudiante ocho está organizando sus datos en una tabla. En la primera columna pone sus variables, en la segunda la frecuencia y en la tercer columna va sumando las frecuencias de manera vertical.

No entiendo porqué hasta abajo de la primera columna pone un "9" ni porqué obtiene $\frac{54}{2}$ como resultado. Pensé que sería una simplificación de $\frac{77}{4}$, pero no fue así

El "54" es el número total de datos, aún no sé porqué lo dividió entre dos. Además de que sigo sin entender el "9"

En el trabajo individual podemos observar que los Estudiantes A y B identificaron el proceso de la mediana, plasmando así en su escrito, mientras que el estudiante C describe lo realizado por el estudiante 8 sin reconocer el concepto que estaba de fondo, ya que hace mención al concepto de moda. El estudiante D centra su atención en los valores finales de la tabla, perdiendo de vista el proceso realizado para identificar la posición de la mediana, es decir, no logra filtrar lo importante del proceso de aquello que no es significativo.

Después de realizar el trabajo individual, la profesora muestra el nombre del concepto (mediana) en la diapositiva y pide a los estudiantes que formen equipos y escriban la definición del concepto, esto con base en lo observado en la lámina. Algunos procesos identificados por los equipos son las que se muestran a continuación:

El equipó observó que el estudiante sólo sacó la moda y ordenó los números para realizar una suma total y saber el total de datos,

Equipo1-4

Primero el estudiante 8 organiza sus datos en una tabla y lo hizo de la siguiente manera; en la primera columna puso las variables de menor a mayor (x), en la segunda columna nombro a la columna de las frecuencias (f), y anotó las frecuencias de las variables, y en la tercer columna sumó las frecuencias en forma vertical.

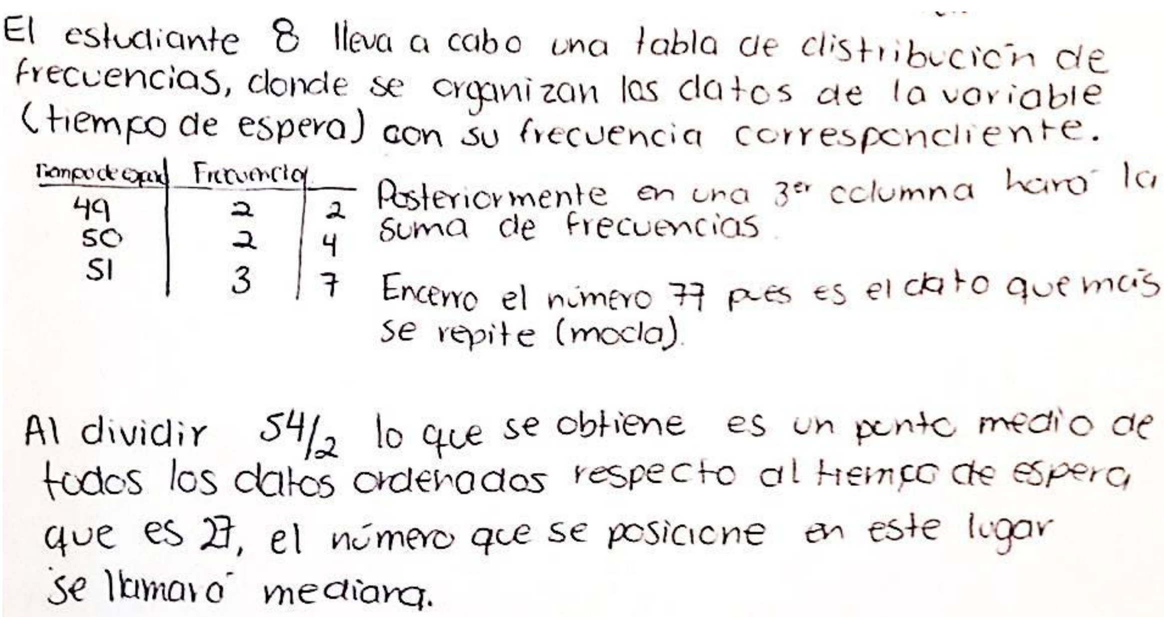
Lo que nosotros descubrimos, que en el scan del ejercicio. le falta un dos en donde se encuentra el 9, porque son 29 variables y en las últimas de estas, que son 92 y 93 parecen 72 y 73.

Ahora bien, el estudiante 8 lo que hizo fue sacar la media, para hacerlo tomó el total de (varia) frecuencias (54) y lo dividió entre 2, obteniendo 27. Después se fue a la columna de la suma, y como no tenía un 27 como tal (de 26, se saltaba a 30 al sumar 4), tomo el valor 77, que abarcaba las "posiciones" 27 a 30 al sumar.

Equipo2-4

Primero ordeno los números de ~~mayor~~ menor a mayor, en la segunda columna puso las frecuencias de cada dato, en la tercer columna fue sumando las frecuencias y fue anotando el número, al final le dio la suma de las frecuencias y a el resultado lo dividio entre 2 y le dio 27 entonces busco el numero que estuviera más cercano a 27 y ese fue 30.

Equipo3-4


El estudiante 8 lleva a cabo una tabla de distribución de frecuencias, donde se organizan los datos de la variable (tiempo de espera) con su frecuencia correspondiente.

Tiempo de espera	Frecuencia	
49	2	2
50	2	4
51	3	7

Posteriormente en una 3er columna hará la suma de frecuencias.

Encerró el número 77 pues es el dato que más se repite (moda).

Al dividir 54/2 lo que se obtiene es un punto medio de todos los datos ordenados respecto al tiempo de espera que es 27, el número que se posicione en este lugar se llamará mediana.

Equipo4-4

En el trabajo realizado por algunos equipos podemos observar que el equipo 1 sólo identifica la moda en el proceso realizado por el estudiante 8. En el equipo 2 no queda claro si reconocen la mediana, ya que mencionan de manera adecuada el proceso, sin embargo, hacen referencia a la media. El 3 hace mención al proceso realizado, es decir, identifica claramente que fue lo que hace el estudiante 8, pero la redacción del equipo no es muy clara. El equipo 4 logra identificar de manera adecuada todo el proceso realizado y al momento de comunicarlo de manera escrita lo hacen de forma eficaz.

Posteriormente, se lleva a cabo una discusión grupal, donde un integrante de cada equipo da a conocer la definición que han construido, luego pasa una alumna a plasmar en el pizarrón la definición que va construyendo el grupo, consensando cada una de las palabras que utilizarán. Definiendo el concepto de mediana con sus propias palabras de la siguiente manera:

“*Es el dato que se encuentra a la mitad de su conjunto de datos previamente ordenados de mayor a menos o viceversa*”

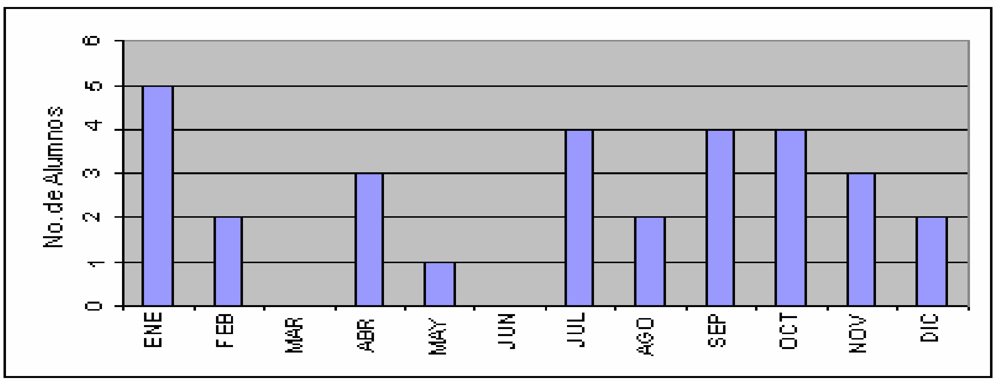
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

En este apartado del trabajo, se presenta el análisis de algunos problemas que se abordaron, los cuales requieren de una interpretación adecuada para ser resueltos. Esta resolución es a través del uso de los conceptos vistos hasta ahora, los cuales son: media, mediana, moda.

MES DE CUMPLEAÑOS

Situación-Problema

A los alumnos de un grupo se les preguntó el mes en que cumplían años cada uno de ellos, estos datos fueron graficados como se muestra a continuación:



¿Cuál es la variable que se está analizando?

¿Qué tipo de variable es?

A) ¿Cuántos alumnos fueron entrevistados?

B) ¿En qué mes hubo más cumpleaños?

C) ¿Cuál es la moda?

Es importante señalar que para el trabajo individual no se les presentan las dos primeras preguntas, estas aparecen hasta el trabajo en equipos.

Trabajo individual

Este problema tiene como finalidad, conocer el nivel de lectura de los datos que presentan los estudiantes. En el primer inciso los estudiantes deben leer los datos, mientras que en los otros dos deben leer entre los datos.

Para hablar de estos niveles se considera el trabajo realizado por Curcio (1987) en el que describe cuatro niveles distintos de lectura, de los cuales cada uno requiere mayor comprensión que sus antecesores. Para fines de este problema, sólo se están considerando los primeros dos. Los cuatro niveles se presentan a continuación:

1. El primer nivel es de leer los datos: el lector logra identificar los datos individuales del conjunto y con ello puede responder las siguientes dos preguntas: ¿El dato *x* pertenece a la gráfica? ¿Cuál es la frecuencia del dato *x*?
2. El segundo nivel es de leer entre los datos: el lector puede percibir relaciones entre los datos que le permiten relaciones relevantes entre los datos que le permiten responder preguntas como: ¿Cuál es el valor mínimo? ¿Cuál es el valor máximo? ¿Qué dato tiene mayor frecuencia? Este nivel incluye comparar e incluso identificar en la gráfica valores como la moda, mediana y media, la estimación de las medidas de dispersión también está en este nivel.
3. El tercer nivel es de leer más allá de los datos: el lector realiza predicciones e inferencias a partir de los datos sobre información que no se reflejan directamente en la gráfica.
4. El cuarto nivel es de leer detrás de los datos: un lector en este nivel, además de hacer inferencias o predicciones, también puede valorar la calidad de una gráfica y la validez y fiabilidad de los datos que representa.

En la tabla 1 se muestran las respuestas obtenidas por los 41 estudiantes a los que se les aplicó el problema en forma individual.

Respuestas individuales		
Inciso	**Respuesta**	**Número de estudiantes que dan esa respuesta.**
A	30 alumnos	41
B	Enero	41
C	Enero	16
	2 y 4	12
	Julio, Septiembre y Octubre	7
	4	4
	Julio, Septiembre y Octubre; Febrero, Agosto y Diciembre	2

Tabla 1

Para los incisos A y B no hubo variación en las respuestas individuales de los estudiantes. Además, lograron dar las respuestas correctas, lo que nos dice que logran leer correctamente los datos. En el inciso A los alumnos no tuvieron dificultad en identificar el número de entrevistados, esto lo hicieron realizando la suma de las frecuencias que obtuvieron cada uno de los datos de la variable, es decir, suman la frecuencia que tiene cada una de las barras de la gráfica. Para el inciso B era un poco más evidente la respuesta, sólo tuvieron que identificar el dato con mayor frecuencia y ese corresponde al mes en el que hay más cumpleaños, el cual corresponde al de enero.

En el inciso C, 16 de los 41 estudiantes logran identificar la moda correctamente en el problema, la cual corresponde a “Enero”, mientras que el resto de ellos presentan una confusión respecto a la definición, ellos toman la moda como la frecuencia que más se repite, dando así las diferentes respuestas mostradas, esto es debido al tratamiento que se le ha dado a los datos, ya que no están familiarizados con la identificación de la moda en una representación gráfica, lo que nos muestra que los alumnos tienen dificultad con la lectura entre datos.

Trabajo en grupos pequeños

Para el trabajo en grupos pequeños los estudiantes integraron nueve equipos.

Las respuestas a la pregunta *¿Cuál es la variable que se está analizando?* Que dieron los equipos fueron las siguientes:

Siete de los nueve equipos coinciden que la variable que se está analizando es “mes de cumpleaños” mientras que dos de los equipos dicen que la variable es “número de cumpleaños”

Las respuestas a la pregunta *¿Qué tipo de variable es?* Que dieron los equipos fueron las siguientes:

Ocho de los nueve equipos están de acuerdo en que la variable que se está estudiando es cualitativa ordinal, mientras que un equipo dice que es cuantitativa discreta. Al menos la respuesta de este equipo concuerda con su respuesta anterior ya que fue uno de los que dijeron que la variable es el “número de cumpleaños” y siendo esta la variable de estudio para ellos entonces si corresponde a la clasificación que han dado.

En la tabla 2 se muestran las respuestas obtenidas por los nueve equipos en lo que corresponde a los incisos A, B y C.

<table>
<tr><th colspan="3">Respuestas por equipo</th></tr>
<tr><th>Inciso</th><th>Respuesta</th><th>Número de equipos que dan esa respuesta.</th></tr>
<tr><td>A</td><td>30 alumnos</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>Enero</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">C</td><td>Enero</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2 y 4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Julio, Septiembre y Octubre; Enero</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4 y enero</td><td>1</td></tr>
</table>

Tabla 2

En las respuestas dadas, podemos observar que en el inciso A todos los equipos logran hacer una adecuada lectura de datos, dando la respuesta correcta. En el B, también los 9 equipos realizan una correcta lectura entre datos, identificando el dato con mayor frecuencia. En el inciso C, 4 equipos realizan una apropiada lectura entre datos, señalando correctamente el dato que corresponde a la moda, mientras que los otros 5 siguen mostrando dificultad con la lectura entre datos, ya que dan como respuestas a “la frecuencia que más se repite”, es decir, tienen problema con identificar la moda presentada en forma gráfica.

En la imagen 1 podemos observar la forma en que los estudiantes se apoyan para resolver el problema, durante el trabajo en equipo.

Imagen 1

Trabajo grupal

Para la tercera forma de trabajo, correspondiente a la grupal, los resultados obtenidos se han rescatado de videograbaciones que se hicieron. Un integrante por equipo pasa al pizarrón a escribir sus respuestas. Después que las han escrito todos los equipos, empiezan a explicarlas. Todos concuerdan en los dos primeros incisos, pero se dan cuenta que en el inciso C hay variedad en sus respuestas. Algunas de las discusiones se presentan a continuación:

Estudiante 1: Yo digo que debe de ser Julio, Septiembre y octubre porque son los meses que se repiten el mismo número de veces (4 veces cada uno).

Estudiante 2: Pero entonces también debe de ser Febrero, Agosto y Diciembre porque estos tres también se repiten el mismo número de veces (2 veces cada uno).

Estudiante 1: Pero el 4 es más grande que 2, por eso yo digo que es Julio, Septiembre y octubre.

Estudiante 3: Es enero porque es el mes que más veces aparece.

Estudiante 1: Enero aparece sólo una vez, por lo que no puede ser la moda.

Estudiante 2: Entonces también puede ser el 2 y 4.

Estudiante 1: No, porque la moda debe de ser de los datos, no de la frecuencia.

Estudiante 2: ¿Maestra, puedo pasar a explicarle en el pizarrón?

Maestra: Sí, pasa.

Estudiante 2: Si les preguntas a cada uno cuál es el mes en que cumplen años y ya anotas cada respuesta, y te das cuenta que la moda es enero porque hay más niños que cumplen años en ese mes, a diferencia de los demás donde sólo aparecen dos, cuatro y así es que nos damos cuenta que la moda es enero porque se repite más veces.

Estudiante 1: ¡ah sí! Es enero.

En la imagen 2 y 3 podemos observar al estudiante 2 en el momento en que intenta ayudar a sus compañeros que tienen dificultades en identificar la moda del conjunto de datos.

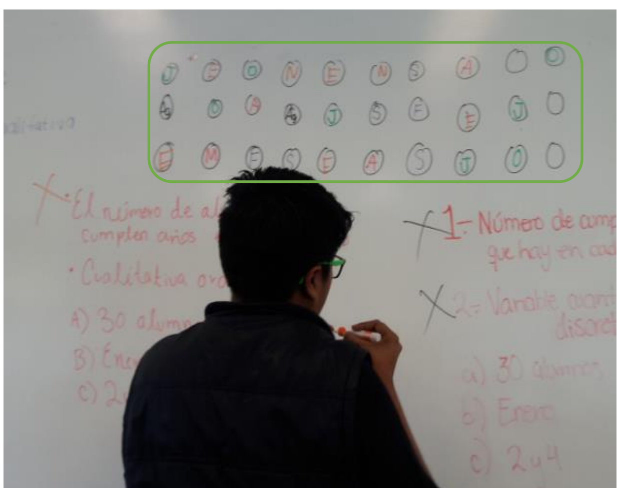


Imagen 3

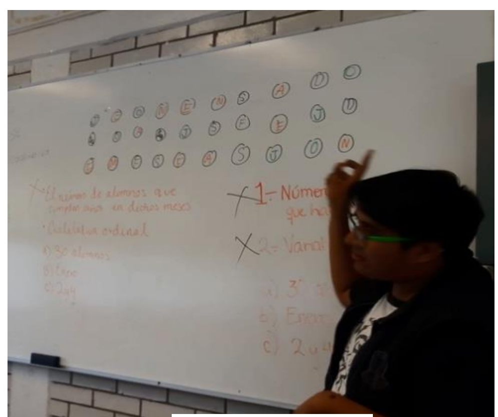


Imagen 2

La imagen 4 nos muestra el momento en el que se está llevando a cabo la discusión grupal del problema.

Imagen 4

Al igual que el estudiante 1, había otros que defendían su respuesta ya fuera Julio, Septiembre y Octubre o 2 y 4, pero lo que hace el estudiante 2, al utilizar otro tipo de representación, es presentar los datos como ellos están acostumbrados a verlos, de manera desordenada, sólo así fue que se convencieron que la moda es el mes de enero, llegando a la conclusión que la moda es el dato que tiene la frecuencia más alta, no el dato con la frecuencia que más se repite.

En general, se puede observar que algunos estudiantes muestran dificultades al realizar lectura entre datos, específicamente, al identificar la moda en la representación gráfica de los mismos.

El segundo problema aplicado fue el siguiente:

AUMENTO DE SALARIOS

Situación-Problema

La unión de empleados del Fondo del Seguro del Estado desea plantear al Gobierno Federal una petición de aumento de salarios para quienes laboran en horario nocturno. Para esto, se hizo un estudio de los salarios anuales de 10 empleados nocturnos y se obtuvo la siguiente información:

$16,400	**$16,000**	**$12,000**	**$31,000**	**$14,600**
$15,000	**$15,900**	**$13,000**	**$16,200**	**$12,500**

a) Calcula la media, la mediana y la moda.

b) ¿Cuál crees que sea un buen estimador (media, la mediana y la moda) del salario típico de los trabajadores?

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.

c) ¿Cuál resultado (media, la mediana y la moda) favorece a la gerencia?

Justifica tu respuesta.

El problema está formado por tres incisos. El inciso A tiene como propósito fomentar la automatización operativa de los conceptos de media, mediana y moda. Con los incisos B y C se pretende introducirlos en la toma de decisiones ante problemas sociales, teniendo valores extremos, es decir, cuando existen valores desviados de manera significativa del resto de ellos.

La tabla 3 nos muestra las respuestas obtenidas en el problema, resuelto de forma individual.

Respuestas individuales		
Inciso	**Respuesta**	**Número de estudiantes que dan esa respuesta.**
A	Media = 16,260	37
	Mediana = 15,450	32
	Mediana = 15,000 y 15,900	4
	Mediana = 5	1
	Moda = No hay	37
B	Media = 16,260	27
	Mediana = 15,450	8
	Moda	1
	16,000 y 16,400	1
C	Media = 16,260	3
	Mediana = 15,450	30
	Moda	2
	15,900	1
	12,000 y 12,500	1

Tabla 3

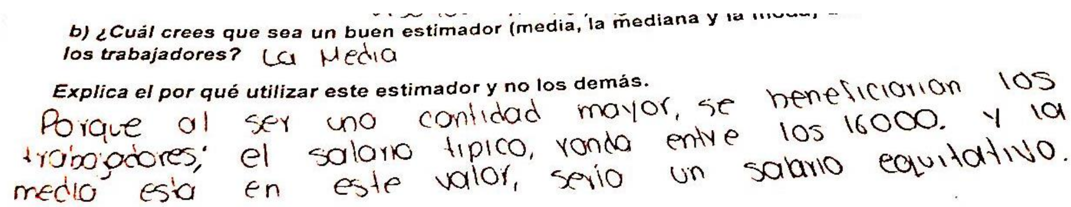
Trabajo individual

El problema se aplica a 37 estudiantes en forma individual.

Para el inciso A, en el cálculo de la media y moda no presentan dificultad, ya que la media la obtienen de manera adecuada; identifican claramente que no hay moda en el conjunto de datos; respecto a la mediana, 32 de los estudiantes la calculan correctamente, mientras que 4 dan como respuesta a los dos datos centrales después de ordenarlos, es decir, no obtienen la media aritmética de éstos, y otro estudiante da como respuesta a la posición central de los datos, divide el total de datos que es 10 entre 2, dando como 5 por resultado.

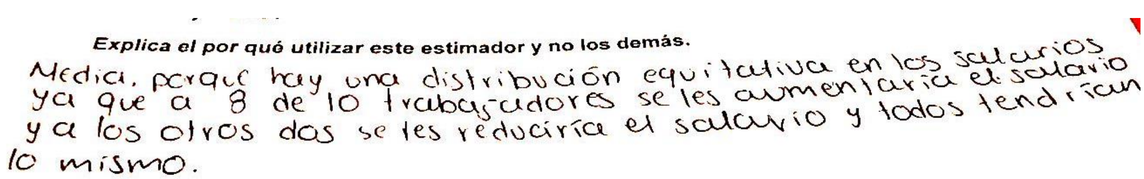
En el inciso B, 27 de los 37 alumnos dan la media como respuesta, siendo esta equivocada, ya que al tener un dato atípico la media se ve seriamente afectada y deja de ser el mejor valor representativo para el conjunto de datos. En este caso la mejor respuesta es la mediana ya que esta no se ve afectada por este tipo de datos.

Pareciera ser que al desconocer los estudiantes el funcionamiento de los aumentos salariales, ellos consideran que si se toma a la media como un buen estimador del salario, este valor será el que se pagará a todos los trabajadores, tal como lo muestran los siguientes ejemplos:


b) ¿Cuál crees que sea un buen estimador (media, la mediana y la moda)
los trabajadores? La Media

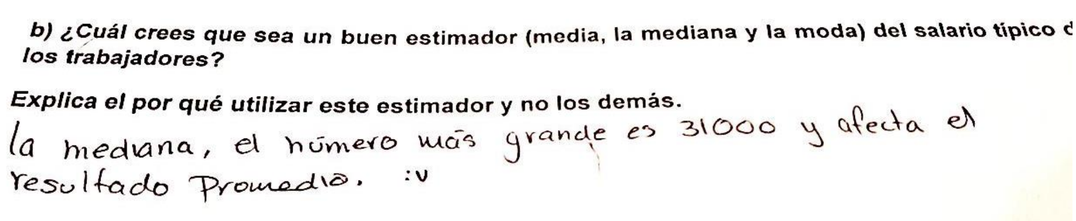
Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.
Porque al ser una cantidad mayor, se beneficiarían los
trabajadores, el salario típico, ronda entre los 16000. y la
media está en este valor, sería un salario equitativo.

Ejemplo 1


Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.
Media, porque hay una distribución equitativa en los salarios
ya que a 8 de 10 trabajadores se les aumentaría el salario
y a los otros dos se les reduciría el salario y todos tendrían
lo mismo.

Ejemplo 2

8 de los estudiantes optaron por la mediana al considerar que el valor extremo afecta mucho el valor de la media y al no haber moda el mejor estimador sería la mediana:


b) ¿Cuál crees que sea un buen estimador (media, la mediana y la moda) del salario típico d
los trabajadores?

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.
la mediana, el número más grande es 31000 y afecta el
resultado promedio. :v

Ejemplo 3

b) ¿Cuál crees que sea un buen estimador (media, la mediana y la moda) del salario típico de los trabajadores? Mediana

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.

Porque de los tres valores es el que más se acerca tanto a valores inferiores como a los superiores dando una cantidad más cercana a lo que gana un trabajador típico.

Ejemplo 4

Pero al igual que los estudiantes que eligieron la media, estos dan su respuesta considerando que este valor de la mediana será el nuevo salario.

Trabajo en grupos pequeños

Sólo 31 estudiantes asistieron a clase el día que se trabajó el problema en grupos pequeños, formando 7 de ellos, donde cada uno estaba conformado de tres a seis integrantes (1 equipo de tres integrantes, 3 de cuatro, 2 de cinco y 1 de seis).
La tabla 4 muestra las respuestas por incisos proporcionadas por cada uno de los equipos.

Respuestas por equipo		
Inciso	**Respuesta**	**Número de equipos que dan esa respuesta.**
A	Media = 16,260	7
	Mediana = 15,450	7
	Moda = No hay	7
B	Media = 16,260	6
	Mediana = 15,450	1
C	Media = 16,260	0
	Mediana = 15,450	7

Tabla 4

En el inciso A no se presenta variación en las respuestas, obteniendo todos los equipos la correcta, de lo que podemos inferir que no existe dificultad en el manejo de operaciones involucradas en los conceptos.

En el inciso B, 6 de los 7 equipos proporcionan una respuesta incorrecta y sólo 1 equipo da la correcta. Algunas de las respuestas dadas se presentan en los siguientes ejemplos:

b) ¿Cuál crees que sea un buen estimador (media, la mediana y la moda) del salario típico de los trabajadores?

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.

Media, porque hay una distribución equitativa en los salarios ya que a 8 de 10 trabajadores se les aumentaría el salario y a los otros dos se les reduciría el salario y todos tendrían lo mismo.

Ejemplo 5

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás.

Porque al ser una contidad mayor, se beneficiarian los trabajadores; el salario tipico, ronda entre los 16000. y la medio esta en este valor, serio un salario equitativo.

Ejemplo 6

Explica el por qué utilizar este estimador y no los demás. Mediana, por que es aprox. la mitad del valor más grande del conjunto de datos y es el más cercano a todos los demás valores.

Ejemplo 7

En los ejemplos 5 y 6 podemos observar de manera explícita que los equipos eligen la media como el mejor estimador debido a que de esta manera se estaría dando el salario de una manera equitativa, y consideran que es este valor el que se les otorgara a cada uno de los trabajadores. En el ejemplo 7 se observa la respuesta del único equipo que contestó acertadamente, viendo al conjunto de datos como un todo, y no individualizados como lo trabajan los otros dos equipos.

Para el inciso C, los 7 equipos que se formaron dan por respuesta a la mediana, siendo ésta incorrecta.

Trabajo grupal

Para el trabajo grupal, la profesora pide a una estudiante anotar los resultados del inciso A en el pizarrón (Ver imagen 5), esto después de observar que eran los mismos en todos los equipos. Luego pide al estudiante A que comente de qué trata el problema.

Imagen 5

> *Estudiante A:* Trata de unos trabajadores que buscan que se les pague de una manera más justa y hacen una petición haciendo un análisis de los salarios.

La profesora pregunta si alguien más quiere agregar algo. En vista de que nadie quiso participar, al parecer no ha quedado muy claro el contexto del problema, la profesora procede a analizar la información presentada y a discutirla con los estudiantes, hasta lograr que quede un poco más clara la información. Entre las preguntas que se les hace a los alumnos para una mejor comprensión del problema es: ¿El aumento es proporcional a cada uno de los salarios? O ¿se da un aumento fijo para todos? ¿En qué consiste el aumento salarial? ¿Alguien de ustedes trabaja? Debido a que sólo un estudiante trabaja y no dio argumentos suficientes para la comprensión de en qué consiste un aumento salarial, la profesora aclaró este proceso (Ver imagen 6).

Imagen 6

Aclarado el contexto del problema, se inicia el análisis grupal de las respuestas que proporcionaron los grupos pequeños.

Para el inciso A, se pregunta si alguno de los equipos tuvo una respuesta diferente a las que están en el pizarrón, a lo que todos afirmaron que tenían las mismas respuestas, con esto nos pudimos percatar de que los alumnos no han tenido dificultad en realizar los procesos operativos de los conceptos: media, mediana y moda.

Para el inciso B, que es el referente al mejor estimador del salario de los trabajadores, se presentan algunos diálogos obtenidos de videograbaciones realizadas durante la discusión.

Estudiante A: Yo digo que es la media porque se utilizan todos los datos para obtener el salario.

Estudiante B: Porque entre más alto mejor para los empleados.

Estudiante C: Nosotros también dijimos que la media porque creímos que se refería que era un estimado de cuanto deberían de ganar para que fuera equitativo, pero como ya vimos que debe de ser proporcional al de cada uno pues ya no quedaría.

Profesora: Pero para este inciso lo que te pedía era cuál de estos tres valores representaría mejor al salario real de los trabajadores.

Estudiante D: Nosotros pusimos que es la mediana – Intervención del estudiante E, del mismo equipo al que pertenece el estudiante D –.

Estudiante E: ¡Ah! Es que dicen todos que la media que porque se toman en cuenta los diez datos, ¿y en la moda no se toman en cuenta los diez datos? ¿o en la mediana? Entonces ellos cuando están usando la media dicen que 16, 260 que porque le conviene a los trabajadores, pero ahí no te pregunta qué le conviene a los trabajadores, ahí está preguntando cuál es el general, o sea, un aproximado de lo que ganan los trabajadores, no cuál le conviene a los trabajadores.

Estudiante D: Yo siento que la mediana porque esta entre el salario más alto y el más bajo y es el valor que más se aproxima a todos.

Profesora: y ¿por qué la media no?

Estudiante D: porque se aleja más, por ejemplo del dato más bajo. Además o digo que la mediana porque se acerca más al salario real de todos, no como dicen mis compañeros que la media porque ese es el que ellos creen que debe ser porque es más grande.

Profesora: Observan por ahí un valor de 31,000 ¿cierto?

Estudiantes: ¡Sí!

Profesora: ¿Cómo es ese valor con respecto a los otros?

Estudiantes: más grande, muy grande, muy diferente.

Profesora: Entonces, tal vez, ese salario no es de uno de los trabajadores, tal vez es del gerente o de alguien más, alguien que está por encima de los trabajadores.

Estudiante F: Entonces ese salario no es real y afecta demasiado el promedio.

Profesora: De las tres medidas de tendencia central, la media es la que se ve muy afectada por los valores extremos, entonces, en estos casos, la media no nos conviene.

Estudiante B: ¡Entonces la mejor medida de tendencia central que representa a los salarios es la mediana!

En este inciso la principal confusión fue que los estudiantes estaban considerando el mejor valor representativo pero para lo que debieran ganar los trabajadores, no para representar al salario ya existente. Gracias a los estudiantes E y F el resto de los alumnos logró comprender la esencia de los datos y fue una buena pregunta para introducirlos en la discusión de los valores atípicos y como estos afectan a un conjunto de datos.

Para el inciso C, en el que nos pregunta cuál de los tres valores (media, mediana y moda) favorece a la gerencia. Este inciso se analiza en la siguiente sesión (Ver imagen 7).

Imagen 7

Estudiante A: Pues nosotros dijimos que la mediana porque así la gerencia le pagaría menos a sus trabajadores.

Estudiante B: Nosotros pusimos que la mediana, pero después de analizar bien el contexto del problema, que fue lo que hicimos la clase pasada, ahora creo que el que le conviene más a la gerencia es la media. Porque por ejemplo, si yo soy el gerente, y si me presentan una cantidad mayor yo no siento que ustedes estén tan mal y les ofrezco una cantidad menor porque yo creo que no necesitan tanto. Es que yo lo estoy viendo desde un punto de vista más social, tiene que tener conforme a los trabajadores pero perder poco.

Estudiante C: ¡Ah entonces sí! ¡La media es la que conviene más a la gerencia!

Profesora: ¿Están todos de acuerdo?

Estudiantes: ¡Sí!

Para este último inciso fue más ligera la discusión grupal, debido a que los estudiantes ya habían comprendido el contexto del problema y además ayudó el haber analizado a fondo el inciso B, ya que éste les amplio el panorama. La intervención tan temprana del estudiante B ayudó a sus compañeros a captar la idea de la pregunta muy fácilmente, por lo que no hubo necesidad de discutirlo mucho, rápidamente todos los estudiantes apoyaron la respuesta del estudiante B.

Conclusión general del problema: Un aspecto importante que no se consideró es la familiarización con el tema de aumento salarial, lo cual causa confusión al momento de la toma de decisiones.

El tercer problema resuelto es el siguiente:

PESO DE OBJETO PEQUEÑO

Situación-Problema

Un objeto pequeño se pesó con un mismo instrumento, separadamente por nueve estudiantes en una clase de ciencias. Los pesos obtenidos por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.15 6.2

Los estudiantes quieren determinar tan acertadamente como sea posible el peso real de este objeto.

¿Qué valor les propondrías?

¿Por qué?

Trabajo individual

Los resultados obtenidos por los estudiantes para la pregunta ¿Qué valor les propondrías? se muestran en la siguiente tabla.

Respuesta Individual	Número de estudiantes que dan esa respuesta.
Media = 6.14	3
Mediana = 6.2	1
Mediana o moda = 6.2	18
Moda = 6.2	14
Valores entre 6 y 6.15	1

Tabla 5

En la tabla podemos observar que casi el 49% de los estudiantes han seleccionado como a la mediana o moda como mejor valor representativo para el conjunto de datos, y lo toman como indistintamente ya que es el mismo, mientras que aproximadamente el 38% ve únicamente en este valor a la moda y cerca del 3% toma el valor de la mediana, y con este mismo porcentaje aparece una respuesta considerando un intervalo. Un dato muy importante de resaltar es ese 8% que ha elegido a la media, ya que han obtenido este valor descartando el valor extremo que es 15.3, sumando el resto y dividiéndolo entre sólo 8 datos. Al dar los tres estudiantes esta respuesta se puede considerar que lo están pensando de acuerdo a lo que la literatura ha llamado como: *señal en presencia de ruido*[2] y con base en este concepto, los estudiantes se dan cuenta de que ese valor extremo no pertenece al grupo de datos por lo que si lo quitan no afectaría en nada al valor real.

[2] De acuerdo a esta perspectiva, cada observación es una estimación de un valor desconocido pero específico. Se aplica a un conjunto de números donde cada uno de éstos es una medida de ese valor desconocido; el promedio de estos puntajes es interpretado como una aproximación al valor real (Konold & Pollatsek, 2002).

Algunas de las justificaciones se presentan en los siguientes ejemplos:

6.2, porque es el valor que más se repite, es decir es la moda, eso quiere decir que más alumnos midieron lo mismo, por lo tanto es más probable que ese sea el valor correcto.

Ejemplo 8

6.2 gramos

Porque la mediana es 6.2 y la moda tambian es 6.2 por lo que yo opino que el peso que tiene un poco más probabe que sean 6.2 gramos, creo

Ejemplo 9

¿Por que?

6.0, 6.0, 6.1, 6.15, 6.2, 6.2, 6.2, 6.3, 15.3

$\bar{x} = 7.16$

$\tilde{x} = 6.2$

$\hat{x} = 6.2$

Tomando en cuenta las tres medidas de tendencia central el valor que propongo es el 6.2g., pues existen 9 datos de los cuales solo uno se eleva al doble y de esa manera altera la media, por lo cual esta no es.

Sin embargo el 6.2g se representa con la mediana y la moda pues es el dato de 3 alumnos que coinciden de 9.

Ejemplo 10

¿Por qué?

Porque descarté el valor de 15.3 y dejé los otros ocho valores y saqué la media aritmética y me salió 6.1.

Ya que si el problema pide el peso real lo más acertadamente posible del peso del objeto siento que 15.3 es como un distractor o un error porque la mayoría de los datos no son mayores a 7.

Ejemplo 11

El ejemplo 8 hace referencia únicamente al valor de la moda, mientras que en el ejemplo 9 podemos observar que se está considerando este mismo valor que es el 6.2 pero lo está tomando tanto como moda como mediana. En el ejemplo 10 se puede ver que la justificación es más amplia, esto nos da una idea del pensamiento aleatorio que se está utilizando: primero piensa en todas las posibilidades, luego ese valor extremo le ayuda a descartar la media como un buen valor representativo y entonces se da cuenta de que el valor de la moda y mediana es el mismo y lo ve como más probable. En el ejemplo 11 se puede ver esa comprensión del contexto que se ha tenido, ese valor extremo lo considera como sólo un dato que está haciendo ruido, sin embargo, le queda claro que si lo desecha no afecta al obtener la media, esto es un proceso muy interesante para resaltar, ya que llegar a esa decisión es uno de los principales propósitos de este trabajo, que el estudiante analice y con base en buenos argumento tome decisiones adecuadas.

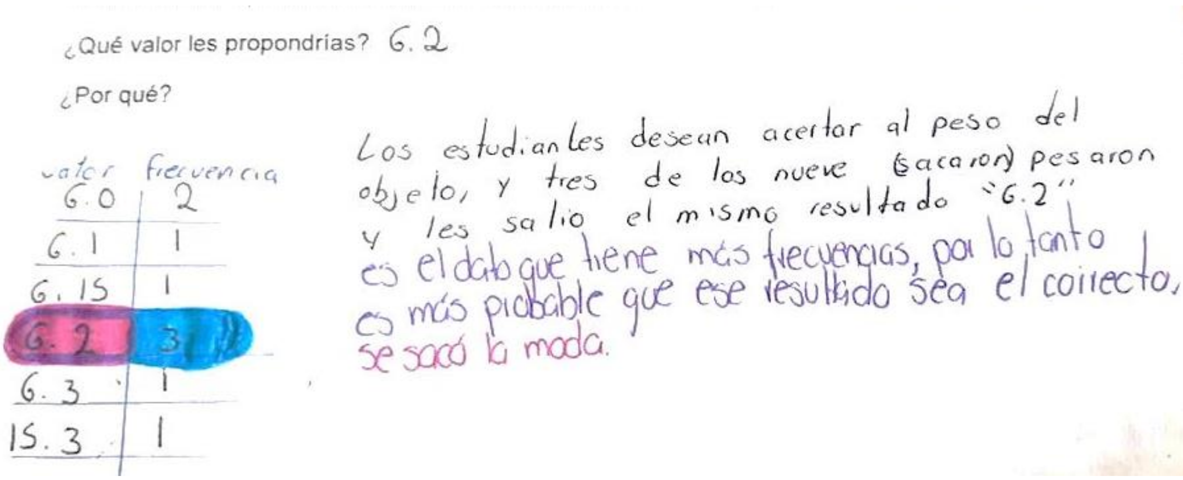
Trabajo en grupos pequeños

Los resultados obtenidos por los equipos para la pregunta ¿Qué valor les propondrías? se muestran en la siguiente tabla.

Respuesta por equipo	Número de equipos que dan esa respuesta.
Media = 6.14	1
Mediana o moda = 6.2	4
Moda = 6.2	4

Tabla 6

A continuación se muestran algunos ejemplos de justificación que dan los equipos:



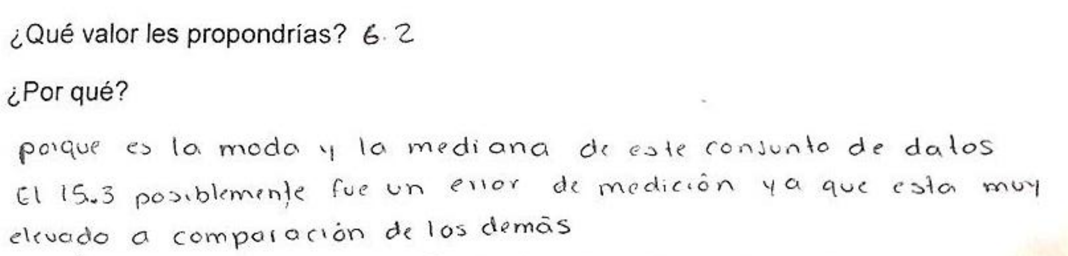
¿Qué valor les propondrías? 6.2

¿Por qué?

valor	frecuencia
6.0	2
6.1	1
6.15	1
6.2	3
6.3	1
15.3	1

Los estudiantes desean acertar al peso del objeto, y tres de los nueve (sacaron) pesaron y les salio el mismo resultado "6.2" es el dato que tiene más frecuencias, por lo tanto es más probable que ese resultado sea el correcto, se sacó la moda.

Ejemplo 12

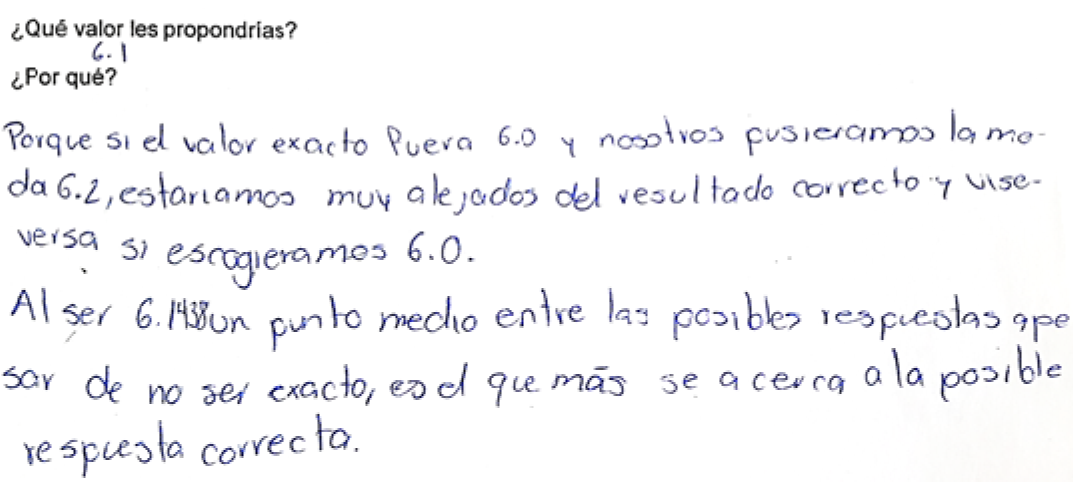


¿Qué valor les propondrías? 6.2

¿Por qué?

porque es la moda y la mediana de este conjunto de datos El 15.3 posiblemente fue un error de medición ya que esta muy elevado a comparación de los demás

Ejemplo 13



¿Qué valor les propondrías?
6.1
¿Por qué?

Porque si el valor exacto fuera 6.0 y nosotros pusieramos la moda 6.2, estariamos muy alejados del resultado correcto y viseversa si escogieramos 6.0.
Al ser 6.1438 un punto medio entre las posibles respuestas apesar de no ser exacto, es el que más se acerca a la posible respuesta correcta.

Ejemplo 14

En el ejemplo 12 podemos ver que el equipo elige la moda como mejor valor representativo para el peso del objeto, pero no lo está viendo como mediana. Con la representación de datos que hicieron (tabla de distribución de frecuencia) nos podemos dar cuenta que ellos lo único identifican es aquel dato con mayor frecuencia, y es posiblemente está misma representación la que no les ayuda a identificar el dato central.

El equipo del ejemplo 13 relaciona el valor 6.2 con la moda y con la mediana, también observan el valor extremo y realizan una conclusión adecuada.

Mientras que en el ejemplo 14 el equipo, descarta ese valor extremo y con los datos restantes calcula la media (6.1438). Antes de realizar esto hacen una aceptada deducción.

Después de analizar las respuestas de los equipos, nos dimos cuenta de que para la mayoría de ellos les resultó complicado deshacerse del valor extremo y se decidieron por la moda o mediana. Con esto nos quedó la preocupación de que algunos estudiantes se fueran con la idea de que la moda era un mejor valor representativo, esto debido a que en ocasiones este valor puede ser un límite (ya sea inferior o superior) dentro de un intervalo de datos y cuando esto pasa entonces la moda no es una buena opción, es por eso que se replanteo el conjunto de datos, modificándolo, para analizarlo.

A continuación se muestra la modificación que se hizo, le hemos llamado extensión del problema:

Extensión del problema

6.2 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.0 6.15

Los estudiantes quieren determinar tan acertadamente como sea posible el peso real de este objeto.

¿Qué valor les propondrías?

¿Por qué?

Los resultados obtenidos por los equipos para la extensión se muestran en la tabla 7.

Respuesta por equipo	Número de equipos que dan esa respuesta.
Media = 6.119 (descartando 15.3)	2
Mediana =6.15	4
Moda = 6.0	3

Tabla 7

En la extensión del problema, el valor de la moda lo hemos colocado en el límite inferior del intervalo de datos. Comparando estos datos con los de la tabla 6 podemos ver que un equipo ya no ha seleccionado la moda y optó por descartar el valor extremo, eligiendo como valor representativo a la media. Con estos valores obtenidos era más fácil observar que el de la media (descartando el valor extremo) y el la mediana eran muy próximos, por lo que era más factible elegir uno de ellos.

Trabajo grupal

Posterior al trabajo en equipo, se realiza la discusión grupal. Para llevarla a cabo se le pide a un representante de cada equipo que pase al pizarrón y anote sus respuestas, el de la primera versión y el de la extensión, tal como se muestra en las imágenes 8 y 9.

Imagen 9

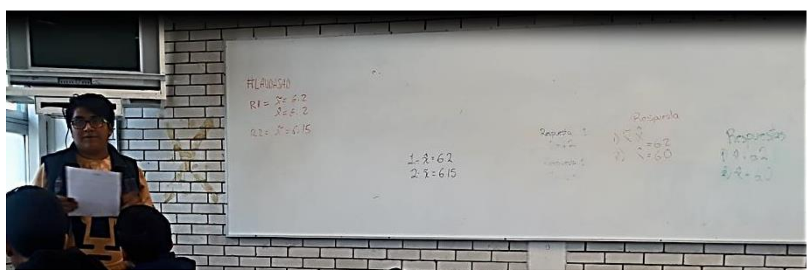


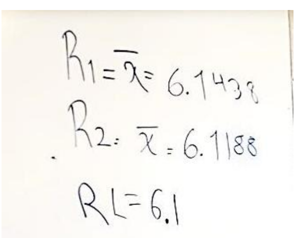
Imagen 8

La profesora pide a un estudiante que platique en que consiste el problema. Posteriormente, comienza cada equipo a explicar el porqué de sus respuestas. Se retoman algunos diálogos obtenidos de la videograbación y se muestran a continuación:

Estudiante A: En el primer problema elegimos la mediana que es 6.2 y luego vimos que la moda nos ayudaría a verificar nuestra respuesta ya que es el mismo valor. En la extensión decidimos también por la mediana que es 6.15.

Estudiante B: Nosotros pusimos que el valor para el primer caso es 6.2 porque es lo que daba la moda, y también era el que nos daba en la mediana, entonces por eso lo elegimos. En el segundo caso tuvimos varias respuestas, pero igual escogimos la moda porque es el que más se repite, y esa fue como nuestra respuesta decisiva.

Estudiante C: Bueno, nosotros tenemos dos respuestas para las dos respuestas (ver ejemplo 15). Tenemos una respuesta que es RL que significa que es la respuesta lógica (está cerca de todos los valores). Básicamente nuestra respuesta lógica es el 6.1. ¡Vaya! Lo que nosotros hicimos en los dos problemas, tanto en el original como en la extensión fue calcular la media pero descartando el valor de 15.3, esa es como nuestra justificación, digamos, matemática para nuestra respuesta lógica.



Ejemplo 15

Estudiante D: Es que tú (estudiante D) no estás tomando en cuenta ese valor extremo que es 15.3, pero si la profesora nos lo está dando es por algo, no entiendo por qué no lo tomas. Porque cuando calculas un promedio debes de tomar todos los valores por más extremo que sea alguno de ellos.

Estudiante E: -integrante del mismo equipo que el Estudiante C- Es que nosotros vimos a ese valor de 15.3 como un distractor, por eso lo quitamos, porque ese valor no tiene nada que ver con los otros valores. Y como lo vimos la clase pasada que la media es tan sensible a valores extremos que se va a ver afectada si tomamos estos valores, por eso decidimos no tomarlo.

Estudiante F: Es que nosotros también vimos ese valor como raro, porque todos obtienen como que pesos similares y ese 15.3 está muy alejado y dijimos que el estudiante se equivocó al tomar ese peso y entonces nosotros también descartamos ese valor ya en la extensión del problema, en el primero elegimos la moda pero luego ya vimos esto que te estoy diciendo.

Estudiante G: Yo digo que sí es correcto que quitemos valores extremos entonces sí está bien utilizar la media, pero que el Estudiante C no diga eso de la respuesta lógica, que lo deje sólo en el valor de la media y que deje los dos valores que obtiene, porque con esa respuesta lógica está uniendo los dos conjuntos de datos y no debe hacer eso porque son diferentes, son dos diferentes problemas.

Profesora: entonces ¿con que respuestas nos quedamos?

Estudiante F: Yo digo que con el valor de la media (descartando el 15.3) o la mediana, en los dos problemas son muy cercanos.

Los estudiantes se mostraron un poco confusos con el proceso utilizado por el equipo del estudiante C, sobre todo porque no sabían si era posible descartar alguno de los datos. La profesora pidió que volvieran a leer el problema y lo analizaron otra vez, hizo hincapié en que se trataba de pesar el mismo objeto con un mismo instrumento y les pregunta si ese valor de 15.3 era un posible resultado y entonces se dieron cuenta todos de que este valor no podría ser un peso ya que los ocho restantes no tenían mucha variación, fue entonces que comprendieron que al desechar ese valor extremo no afectaba al peso real del objeto.

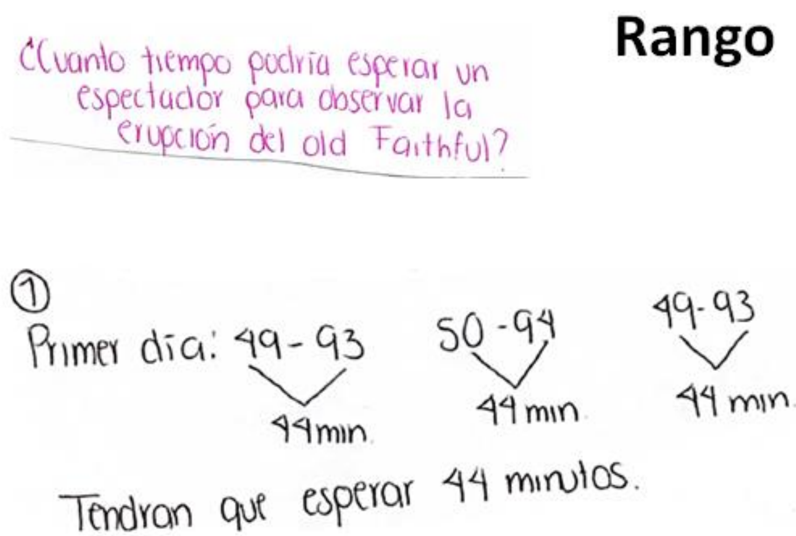
Llegamos a la conclusión de que es importante analizar el conjunto de datos y el contexto al que representan, de esta manera podremos darles un mejor tratamiento, pero sobre todo, es importante incluir este tipo de problemas que nos llevan a tener discusiones grupales que favorecen a los estudiantes.
También consideramos que debemos detenernos a analizar la interpretación que tiene la media en un conjunto de datos y sobre todo, realizarle diferentes tratamientos.

Por otro lado, si lo que queremos investigar es el concepto que eligen nuestros estudiantes para resolver un problema entonces evitar conjuntos de datos donde un mismo valor represente a dos medidas de tendencia central.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO "RANGO"

El siguiente concepto que utilizaron algunos de los estudiantes en el tratamiento de los datos al dar respuesta al tiempo de espera del Geiser es el de Rango. Se presenta la diapositiva y se les hace la siguiente pregunta a los estudiantes, ¿Qué es lo que realiza el Estudiantes 9? La profesora pide a los estudiantes que observen y analicen el proceso de éste estudiante, para ello les da un tiempo de 10 minutos.

Al analizar se espera que los alumnos vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no y en qué orden los está colocando, que reconozcan las operaciones que está realizando el Estudiante 9, que fundamenten la respuesta que está dando este Estudiante.

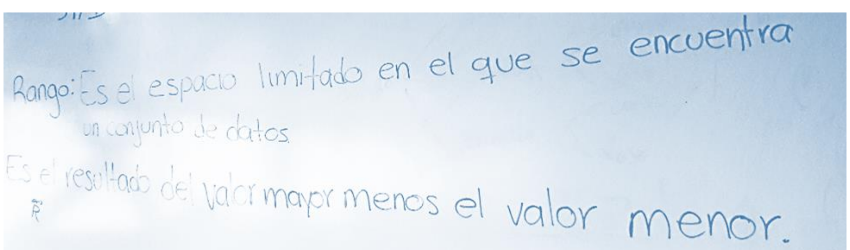


Estudiante 9

La definición de este concepto se obtiene únicamente de forma grupal (por cuestiones de tiempo). Después de los 10 minutos que la profesora les dio a los estudiantes para que analizaran, procede a la discusión grupal. Pregunta de manera general ¿qué hizo el Estudiante 9? Y algunas respuestas se obtienen de la grabación obtenida y se transcriben a continuación:

> *Estudiante A:* El Estudiante 9 da como respuesta 44 ya que por día lo que hace es tomar el valor más pequeño y el más grande, en este caso el 44 es el valor que hay para llegar del valor más chico al más grande. Y como en los tres días le dio el mismo resultado que es 44 por eso lo toma.
>
> *Estudiante B:* En las tres series de datos lo que hace es ordenarlos, como que vio cuál era el menor y cual el mayor en cada una de las series, y entonces vio cual era la diferencia que tiene por ejemplo el 49 al 93 y dijo que era 44 min. y lo mismo hace en las otras series y como obtiene lo mismo por eso es que da esa respuesta.
>
> *Estudiante C:* Es el resultado del valor mayor menos el menor.
>
> *Estudiante D:* Es la diferencia numérica entre el valor mayor y el menor en un conjunto de datos.

Después de que la mayoría de los estudiantes dio a conocer su análisis se pudo observar que ya tenían una idea general de lo que es el rango, la profesora muestra el nombre de este concepto y se procede a elaborar la definición grupal, para ello pasa un estudiante a escribir lo que sus compañeros le decían, consensando cada palabra que iban sugiriendo, logrando así su propia definición, la cual se muestra en la siguiente imagen:



“Rango: Es el espacio limitado en el que se encuentra un conjunto de datos. Es el resultado del valor mayor menos el valor menor”.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA TOMA DE DECISIONES UTILIZANDO CONCEPTOS ESTOCÁSTICOS

En este apartado del trabajo, se presenta el análisis del resto de los problemas que se abordaron, los cuales requieren de un análisis más minucioso para ser resueltos, es decir, donde se tome en cuenta las diferentes representaciones y heurísticas utilizadas por los estudiantes, Su enfoque es esencialmente la toma de decisiones ante situaciones que involucran un análisis adecuado del contexto y los datos, esto mediante las medidas de dispersión, específicamente, rango y desviación estándar.

Se trabajó con tres problemas, donde los estudiantes debían elegir un mejor juego (entre dos conjuntos de datos); un mejor tratamiento (entre tres conjuntos de datos); y un mejor desempeño académico (entre tres conjuntos de datos), en cada uno de estos problemas se debe seleccionar aquel conjunto de datos que represente la mejor opción, con ello, se pretende introducir el papel del *riesgo* en la toma de decisiones, es decir, se desea que los estudiantes analicen lo que es el riesgo en lugar de centrarse en analizar aquel conjunto de datos que aparentemente conducen a una ganancia.

Durante el proceso de resolución, los estudiantes realizan diferentes análisis para dar una respuesta, son éstos los que nos ayudan a realizar una categorización en los procesos de: *representaciones, conexiones, justificaciones y comunicaciones. S*e presentan estos tres problemas y su análisis, pero antes hablaremos un poco de otro estándar de procesos importante en nuestro trabajo, se trata de la resolución de problemas.

La resolución de problemas, junto con representaciones, conexiones, justificaciones y comunicación dan trascendencia a las formas de adquisición y uso de contenidos, en nuestro caso, los de estadística. La resolución de problemas es la metodología en la que se justifica el enfoque didáctico del CCH y por ende, el de nuestro trabajo.

Existen varias formas de resolver problemas, pero debe darse a los alumnos la libertad de explorar en lugar de guiarlos directamente hacia el método o métodos de solución que como profesores queremos. Con las exploraciones que los estudiantes realicen se pueden desarrollar matemáticas interesantes (NCTM, 2000).

En NCTM (2000), mencionan que con la resolución de problemas se pueden construir conocimientos nuevos a partir de los previos, pueden ser problemas matemáticos o de otros contextos, se pueden aplicar y/o adaptar diferentes estrategias para resolverlos. A la letra encontramos:

> La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de solución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos previos y, a través de esos procesos, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas […] para aprender resolución de problemas en matemáticas, los alumnos deberían de adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares que les servirán fuera de clase. La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. (p.55)

Por estas razones, es que se ha incluido a la resolución de problemas como parte medular de este trabajo, partiendo de lo que los estudiantes conocen para, con base en ello, construir y/o formalizar nuevos conocimientos y de esta manera fomentar un aprendizaje significativo.

Se presenta el análisis realizado en tres problemas que se trabajaron con los estudiantes, utilizando básicamente la metodología de resolución de problemas con el fin de identificar representaciones, conexiones, comunicaciones y justificaciones realizadas por los estudiantes en su proceso de solución.

Los problemas se les plantean a los estudiantes en tres momentos, individual, equipo y grupal. En los dos primeros se les pide explícitamente que utilicen otra representación para los datos, esto debido a que en la prueba piloto, con otros grupos, no utilizaban representaciones diferentes a la que se les da, y esto limitaba a los estudiantes para realizar un análisis más rico de los datos. Estos problemas están enfocados en la toma de decisiones con base en el análisis de los datos, algo con lo que los estudiantes no están muy familiarizados y es por eso que no están conscientes de que las diferentes representaciones pueden ayudar en la resolución de los mismos.

PROBLEMA: EL MEJOR JUEGO

El primer problema tiene como propósito que los estudiantes analicen dos conjuntos de datos con el fin de que elijan el mejor de ellos, esta decisión está basada en la comparación de medidas de tendencia central y del rango de los datos. Se les pide a los alumnos que utilicen otra representación diferente a la que se les presenta (lista de datos) ya que suponemos que ésta le ayudará a realizar un mejor análisis, al mismo tiempo, se desea observar que tipo de representación se les ocurre ya que en lo que va de las sesiones no se ha trabajado de manera explícita el tema de Graficas. Consideramos importante que los alumnos representen los datos de la manera que para ellos sea más fácil explorarlos, es decir, fomentar el uso libre de recursos. Los dos conjuntos de datos tienen la misma media, por lo que este dato no les aporta mucha información, entonces tendrán que buscar otra forma de analizarlos. Una de ellas es la interpretación adecuada de las gráficas u obteniendo los rangos de cada conjunto de datos e interpretarlos de manera apropiada considerando el contexto del problema.

A continuación, se presenta el problema al cual hemos llamado “el mejor juego” y el análisis correspondiente a los procesos de solución.

Situación-Problema

En una feria se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1

+15	**-21**	**-4**	**+50**	**-2**	**+11**	**+13**	**-25**	**+16**	**-4**

Juego 2

+120	**+60**	**-24**	**+133**	**-120**	**-21**	**-81**	**+96**	**-132**	**+18**

AL REVERSO DE LA HOJA, REGISTRA LOS DATOS DE CADA JUEGO USANDO OTRA REPRESENTACIÓN.

¿Cuál juego le recomendarías jugar a Juan?
Explica tu respuesta.

Esta tarea la realizaron 36 estudiantes de manera individual. Respecto a las respuestas obtenidas en cuanto al juego que los estudiantes prefirieron, 34 de ellos eligieron el juego 1; 2 estudiantes el juego 2; mientras que 1 estudiante dice que cualquiera de ellos, que ambos tienen la misma posibilidad de ganar ya que los dos tienen el mismo rango, lo que pasó fue que se confunde, suma los datos y obtiene el mismo valor el cual es 49 y toma éste como rango.

Para el trabajo en equipo, se logran conformar 8, de los cuales todos ellos eligen el juego 1, sus justificaciones son en esencia la misma, se van por aquel juego que tiene el menor riesgo de perder, es decir, al comparar las perdidas entre un juego y otro, eligen aquel donde las pérdidas son menores.

En la siguiente tabla se muestra una categorización de los procesos utilizados por los estudiantes. Es importante señalar que algunos de los procesos no cumplen con la formalidad del proceso en sí, sin embargo, les hemos llamado así por la similitud que existe. No olvidemos que se está trabajando con el uso libre de recursos, utilizando únicamente los conocimientos previos.

<table>
<tr><th>Procesos</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Representaciones</td><td>Geométrica
– Gráficas:
➢ Barras
➢ Puntos
➢ Pastel
➢ Cuadrados

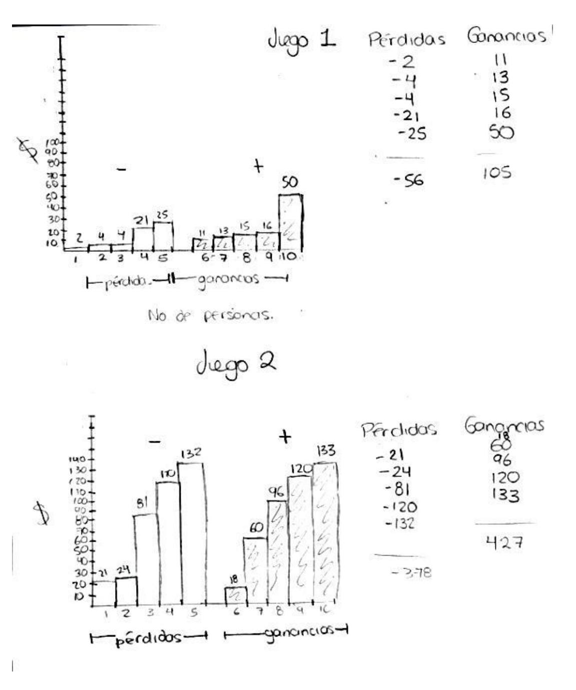
Aritmética
– Recta numérica
– Estadística:
➢ Medidas de tendencia central
– Media
– Mediana
– Moda
➢ Medidas de dispersión
– Rango</td></tr>
</table>

	➢ Tablas de distribución
Conexiones	Aritméticas: ➢ Suma ➢ Porcentaje ➢ División
Comunicación	➢ Escrita ➢ Oral
Justificación	Con base en: ➢ El valor de la mediana ➢ Las gráficas ➢ Posibilidades de ganancia ➢ El riesgo de perdidas

Tabla 8

A continuación, se presentan algunos ejemplos para mostrar los procesos de solución de los estudiantes, los cuales se mencionan en la tabla 8. Estos ejemplos son del trabajo individual y en equipo.

En el ejemplo 16 se presenta el trabajo de un estudiante.



¿Cuál juego le recomendarías jugar a Juan? El juego 1.

Explica tu respuesta

Porque en éste juego las ganancias en total fueron el doble que las pérdidas, sin embargo también se juega con cifras pequeñas, así no podría perder mucho dinero.

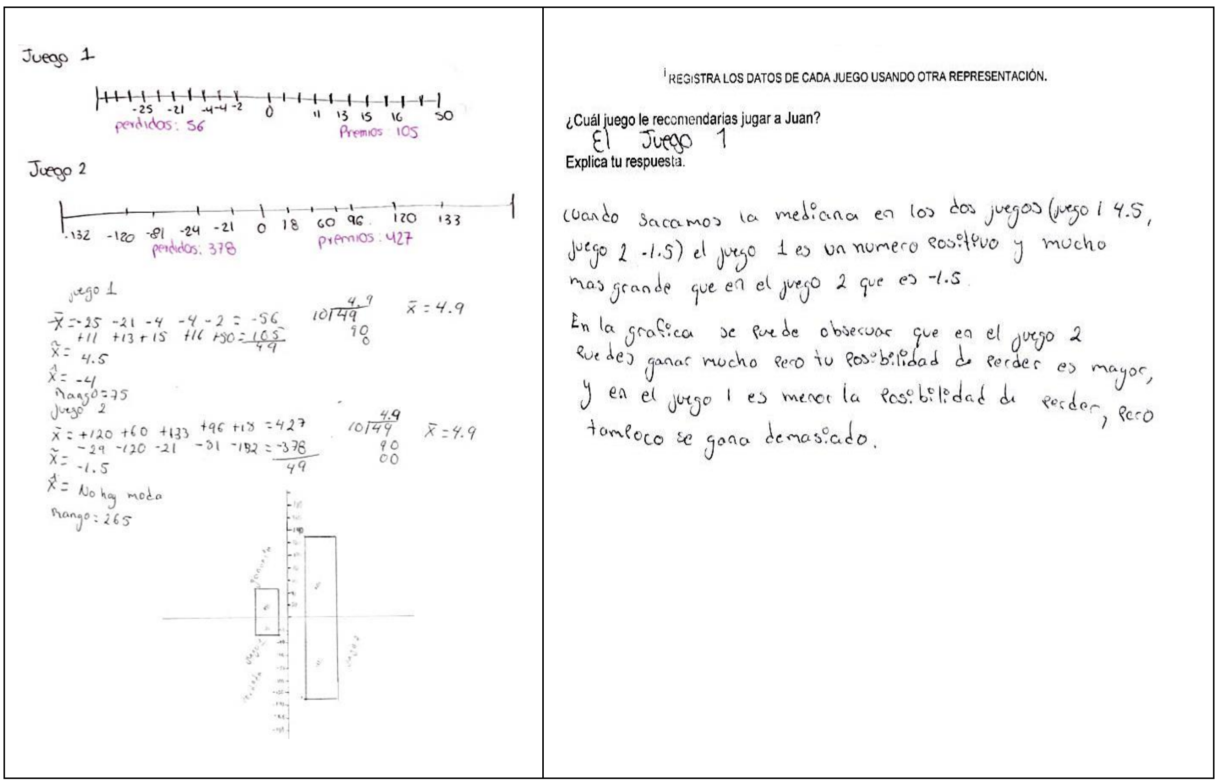
Y en el juego 2 se juega con mayor cantidad de dinero y las ganancias son aproximadamente $100 pesos más que las pérdidas, cuando en el juego 1 se gana el doble que las pérdidas

Ejemplo 16

El estudiante utiliza una representación gráfica de barras. Opta por utilizar dos gráficas diferentes, las cuales representan a cada uno de los juegos y dentro de cada gráfica presenta las pérdidas y ganancias por separado. Realiza conexiones con la operación “suma” y de manera escrita comunica su justificación, la cual está basada en las posibilidades de la ganancia y el riesgo en las perdidas.

En la justificación no está claro qué fue lo que le ayudó a realizar esas conclusiones, pareciera que se inclinó más por la conexión aritmética que realiza, sumando las ganancias y las perdidas en ambos juegos, sin embargo, la representación gráfica que ha utilizado también es un buen apoyo.

El ejemplo 17 corresponde al trabajo de uno de los equipos.



Ejemplo 17

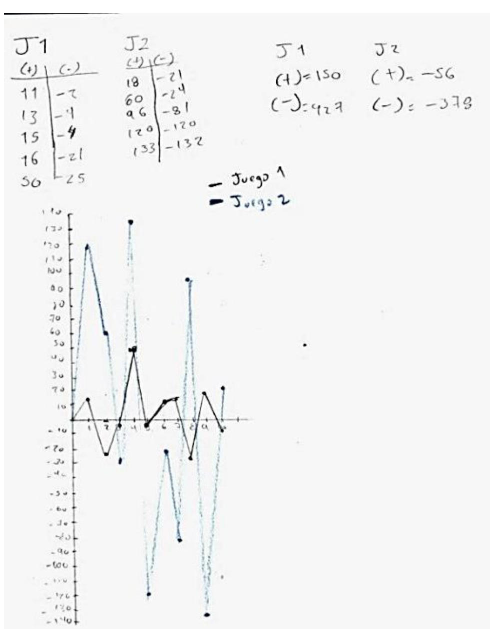
Los estudiantes utilizan varias representaciones, correspondientes a geométricas y aritméticas. Geométricamente utilizan una gráfica con barras, al lado izquierdo de eje vertical (el cual representa a las ganancias y pérdidas) presentan al juego 1 y al juego 2 al lado derecho, por encima del eje horizontal colocan las ganancias y las perdidas por debajo. Las barras que representan las ganancias y pérdidas vienen dadas por la suma total de cada una de éstas, tanto en el juego 1 como en el 2.

Sin importar si este tipo de representación es correcta o no, podemos observar que es muy adecuada para los fines del problema, ya que permite comparar de ambos juegos y con base en esta comparación tomar una adecuada decisión.

Podemos ver que la primera idea de los estudiantes fue representar los datos en una recta numérica, la cual lleva implícita el concepto de rango, sin embargo, al parecer, esta representación no les ayudó, ya que no supieron interpretarla, por eso optan por obtener las medidas de tendencia central y el rango. Las conexiones utilizadas corresponden a “sumas” y “divisiones”, comunicándose de manera escrita al momento de realizar su justificación, la cual está hecha con base en la mediana, posibilidades de ganancia y el riesgo en las perdidas.

En la justificación podemos observar que lo que les ayudó a tomar la decisión es el valor de la mediana en cada juego y la gráfica de barras. Al parecer, no pudieron realizar una buena interpretación de la recta numérica ni del valor del rango.

En el ejemplo 18 se presenta un trabajo individual.



¿Cuál juego le recomendarías jugar a Juan?

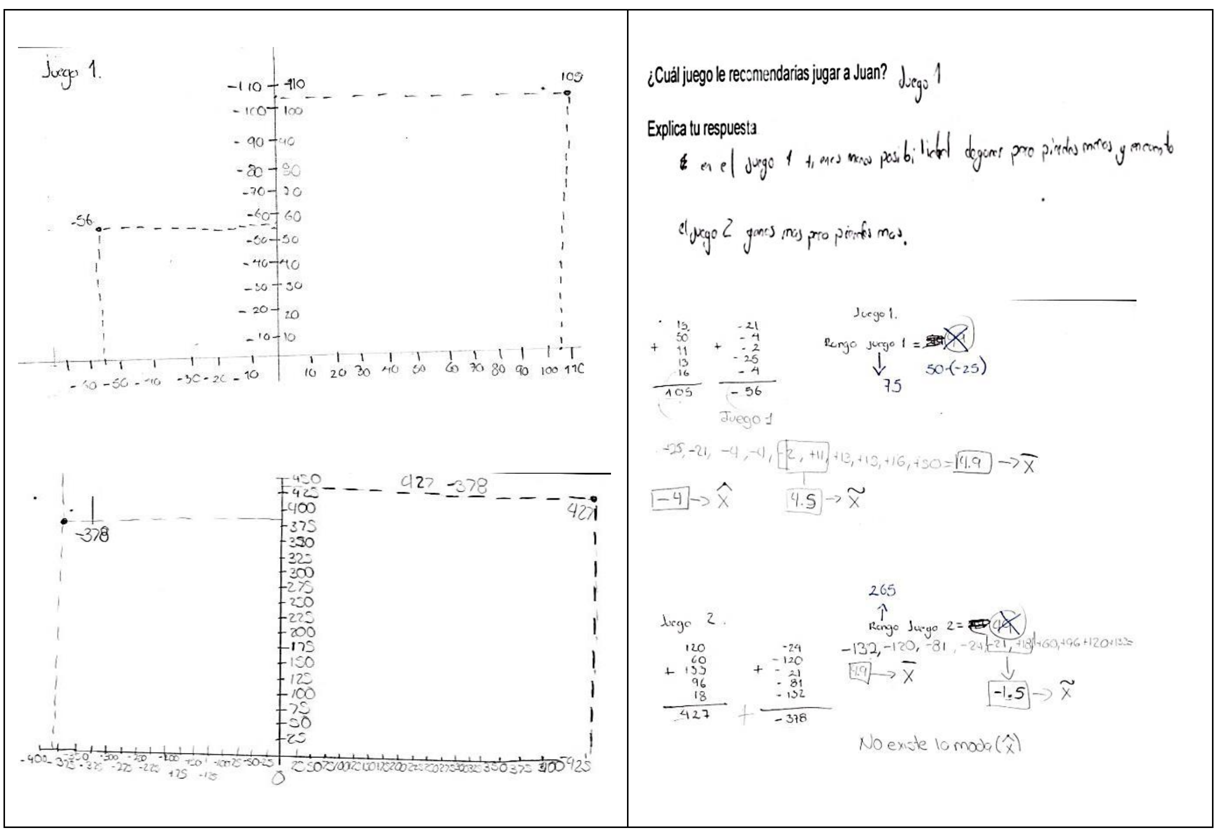
Explica tu respuesta. El juego 1

Anque los ganancias no son tan altas como en el juego 2, tiene pérdidas con un valor mínimo, ya que en el 2 si gana o si pierde sera con un valor máximo pero en el 1 hay un porcentaje más alto de ganar.

Ejemplo 18

El estudiante del ejemplo 18 utiliza representaciones aritméticas y geométricas. Aritméticamente utiliza tablas donde presenta los datos de cada juego, los agrupa por pérdidas y ganancia y los suma. Geométricamente utiliza una representación gráfica de puntos y los une con líneas, algo parecido a los polígonos de frecuencia. En el eje horizontal representa a cada jugador(los etiqueta con los números del 1 al 10 según como aparecen en el problema), y en el vertical la ganancia o pérdida. Realiza las gráficas en un mismo plano, esto le permite realizar una comparación visual más adecuada. En la justificación de su respuesta no aparece de manera explícita cuál de las representaciones le ayudó a tomar una decisión, sin embargo, parece que fue la gráfica ya que en ésta se puede apreciar el riesgo en las pérdidas de cada juego, estas se pueden observar por debajo del eje horizontal, y si se comparan ambas representaciones se ve como las perdidas en el juego 2 son más grandes que en el juego 1, y es justo ésta la justificación que comunica.

El ejemplo 19 muestra el trabajo de un equipo.

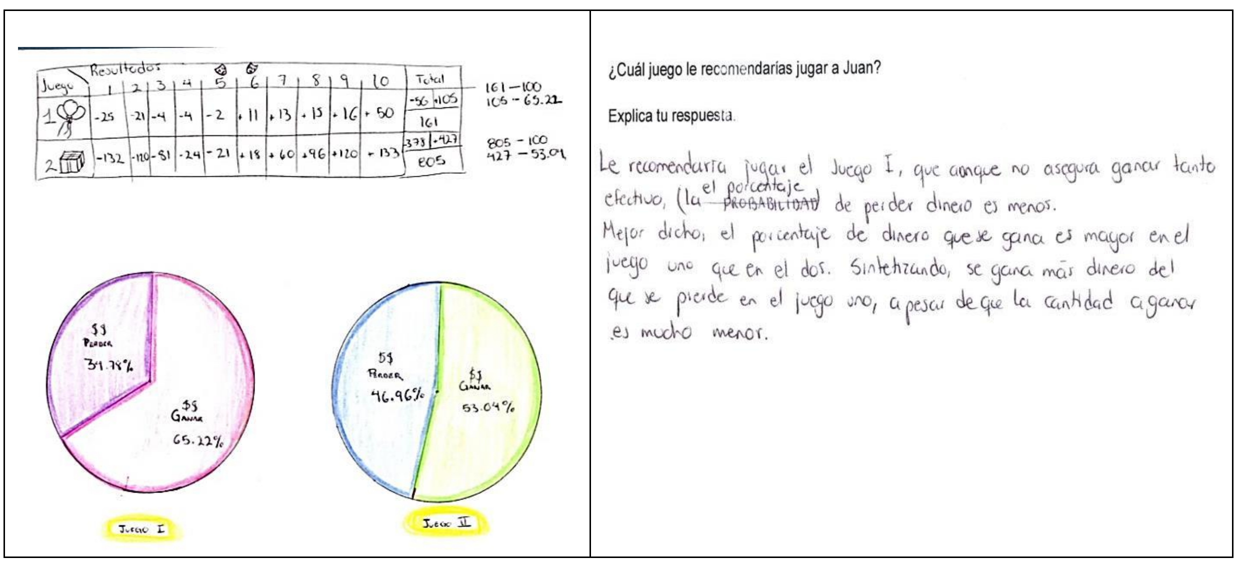


Ejemplo 19

El trabajo de los estudiantes del ejemplo 19 es una clara muestra de la grandiosa imaginación que poseen nuestros alumnos cuando se les permite trabajar con sus propios recursos. Suman las ganancias y pérdidas de cada juego y las representan con cuadrados, donde el valor del lado es la suma de ganancias o pérdidas. En un primer cuadrante representan las ganancias y en el segundo las perdidas. Su justificación está sustentada en el riesgo de pérdidas, es decir, aquel en el que las perdidas sean menores, aunque también analizan las ganancias. A pesar de que obtienen las medidas de tendencia central y el rango en cada juego, no realizan interpretaciones de estos valores, parece ser que fue la gráfica la que les ayudó en su decisión, la cual la letra dice, “En el juego 1 tienes menos posibilidad de ganar pero pierdes menos y en cuanto el juego 2 ganas más pero pierdes más”.

Consideramos que este tipo de representación gráfica es una excelente forma para realizar comparaciones entre conjuntos de datos, ya que visualmente es fácil de interpretar.

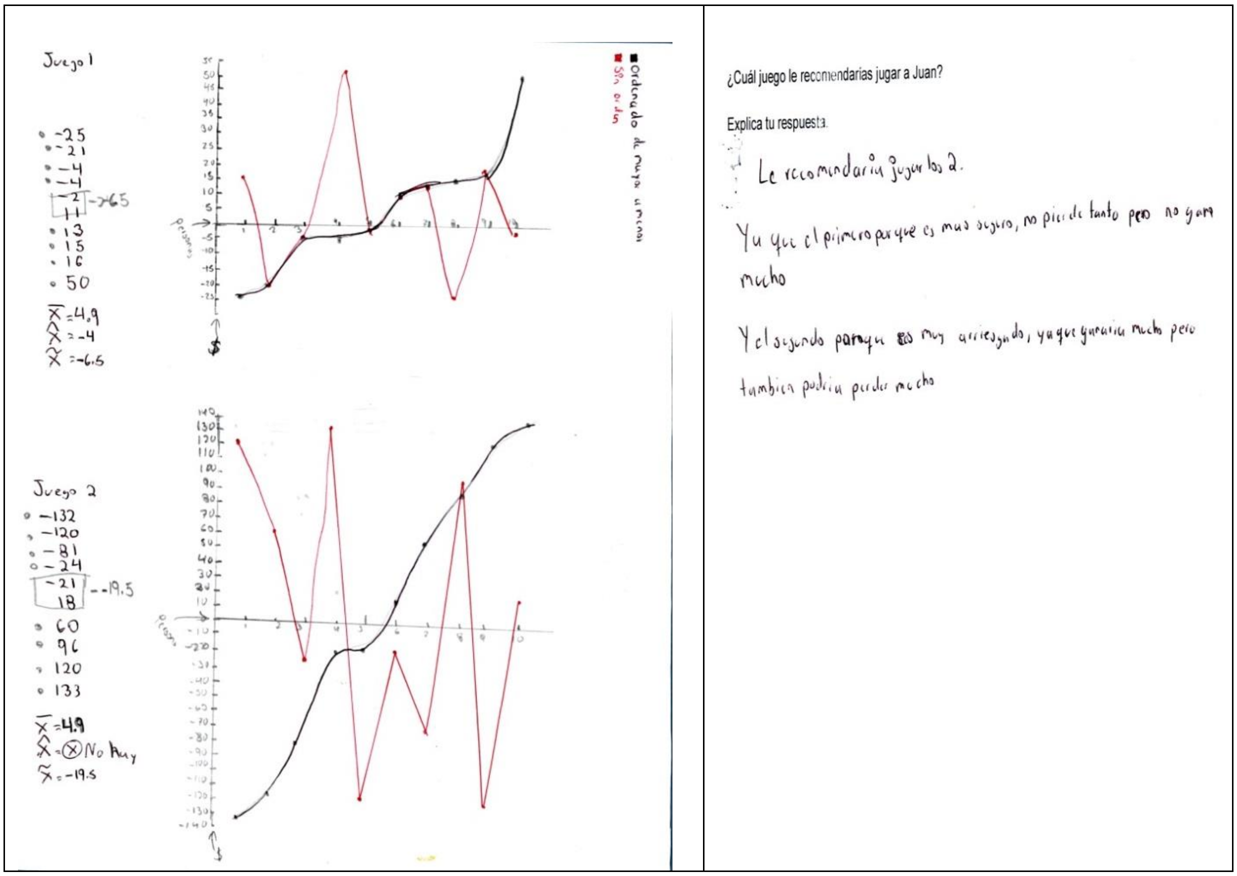
El ejemplo 20 es el trabajo realizado de manera individual.



Ejemplo 20

El estudiante del ejemplo 20 representa los datos de los juego utilizando tablas y gráfica de sectores. En la tabla organiza los valores de los juegos ordenándolos de menor a mayor y etiquetando el número de jugador (1 al 10). Ha llamado a una columna “Total” en ésta suma las ganancias y pérdidas por separado, luego suma el valor absoluto de éstas. Estas sumas las utiliza para obtener sus porcentajes correspondientes y son éstos los que utiliza para realizar la gráfica de sectores. Para realizar su justificación, el estudiante se centra más en las posibilidades de las ganancias, donde efectivamente, tal como lo menciona él, las posibilidades de ganar son más altas en el juego 1.

En el ejemplo 21 se presenta el trabajo realizado de forma individual.



Ejemplo 21

El estudiante del ejemplo 21 utiliza representaciones gráficas y aritméticas. Obtiene las medidas de tendencia central para cada juego y gráficamente utiliza puntos y los une, algo parecido a las gráficas de polígonos; en una de las gráficas ordena los valores de menor a mayor y así es que los presenta, en la otra lo hace tal cual aparecen en el problema, esto lo hace para ambos juegos.

En su justificación menciona que Juan puede jugar los dos juegos y realiza una adecuada interpretación de los datos, ya que en el primer juego menciona que es seguro, no pierde mucho pero tampoco gana mucho. Y en el juego 2 se estaría arriesgando mucho, pero que puede ganar mucho también.

Este tipo de respuestas, pareciera ser, que el estudiante le da igual cualquiera de los dos juegos, sin embargo, está consciente de lo que puede pasar en cada uno de ellos, es decir, está consciente del riesgo que hay en el juego 2, pero aun así lo jugaría, y no por ello está mal.

En la discusión grupal los equipos presentan sus diferentes heurísticas, explicando a sus compañeros lo que realizaron para llegar a tomar una decisión.

Algunas imágenes de este momento se presentan a continuación.

Imagen 10

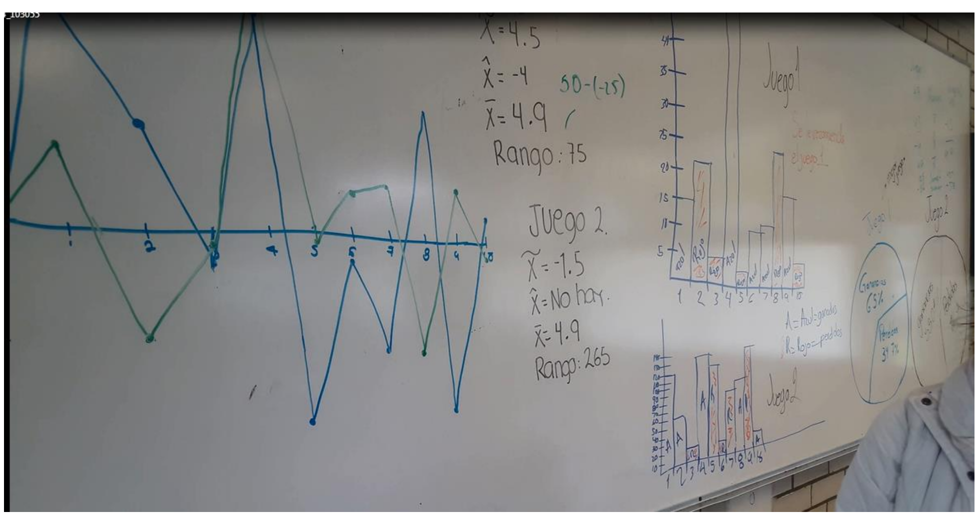


Imagen 11

Imagen 12

Las respuestas obtenidas en este problema muestran la riqueza en la imaginación que tienen nuestros estudiantes cuando se les permite utilizar sus propios recursos, es decir, que representen los datos de la manera que a ellos les parece más adecuada para realizar una buena interpretación de los mismos, sin decirles cómo es que queremos que lo hagan. Esta forma de trabajar nos parece muy enriquecedora, sobre todo al momento de que cada equipo presentó su trabajo al grupo, es aquí donde los estudiantes observan las diferentes representaciones, algunas de ellas diferentes a la que están presentando y atractiva a su percepción. La discusión grupal resulta ser pertinente porque es un espacio adecuado para que los estudiantes presentes sus heurísticas y al mismo tiempo, para apropiarse de nuevas.

PROBLEMA: EL MEJOR TRATAMIENTO

En el segundo problema se plantea una situación de tratamiento médico, en la cual se les presenta a los alumnos tres tratamientos para que elijan el mejor de ellos.

Con este problema nos planteamos dos propósitos, uno de ellos de manera explícita, el que los estudiantes analicen tres conjuntos de datos, de modo que seleccionen el más adecuado para el paciente, pero, por otro lado, de forma implícita, está el hacerles conciencia de la responsabilidad que tienen aquellos estudiantes que han decidido estudiar medicina (13 alumnos) ya que la vida de sus pacientes está en riesgo si se hace una mala interpretación de datos. Los datos están dados de tal forma que los tres tratamientos tienen la misma media, de modo que este dato no les ayuda a elegir alguno de ellos, en los tratamientos 2 y 3 el rango es el mismo mientras que en el 1 el rango es diferente y mucho más grande, entonces los estudiantes tendrán que interpretar estos rangos con base en el contexto del problema.

En seguida, se presenta el problema al cual hemos llamado “el mejor tratamiento” y el análisis correspondiente a los procesos de solución.

Situación-Problema

Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, incurable y mortal, pero que es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por vario años más. Es posible elegir entre tres tratamientos. Las personas tienen diferentes reacciones a las medicinas, para algunas tienen el resultado previsto, mientras que para otras pueden ser más benéficas o más prejudiciales. En las siguientes listas se muestran los años que han vivido varios pacientes que se han tratado con una de las opciones mencionadas; cada dato de las listas corresponde al tiempo que ha sobrevivido un paciente con el respectivo tratamiento.

Tratamiento 1 (Tiempo en años)

5.2	**5.6**	**6.5**	**6.5**	**7.0**	**7.0**	**7.0**	**7.8**	**8.7**	**9.1**

Tratamiento 2 (Tiempo en años)

6.8	**6.9**	**6.9**	**7.0**	**7.0**	**7.0**	**7.1**	**7.1**	**7.2**	**7.4**

Tratamiento 3 (Tiempo en años)

6.8	**6.8**	**6.9**	**7.0**	**7.0**	**7.1**	**7.1**	**7.1**	**7.2**	**7.4**

REGISTRA LOS DATOS DE CADA JUEGO USANDO OTRA REPRESENTACIÓN.

¿Qué tratamiento recomendarías?

¿Por qué?

Este problema lo resolvieron 32 estudiantes de manera individual. 5 de los estudiantes prefirieron el tratamiento 1; 5 el tratamiento 2; y 22 el tratamiento 3.

Posteriormente se formaron 8 equipos, de los cuales 1 seleccionó el tratamiento 1; 2 el tratamiento 2; y 4 el tratamiento 3 y 1 dijo que el tratamiento 2 ó 3. La elección, en la mayoría de los equipos, estaba indecisa entre el tratamiento 2 y 3, ya que ambos tienen la misma media y el mismo rango, pero el dato por el que más equipos seleccionaron el tratamiento 3 es la moda ya que en el tratamiento 2 es de 7 y en el 3 es de 7.1, este 0.1 les ayudo a su selección.

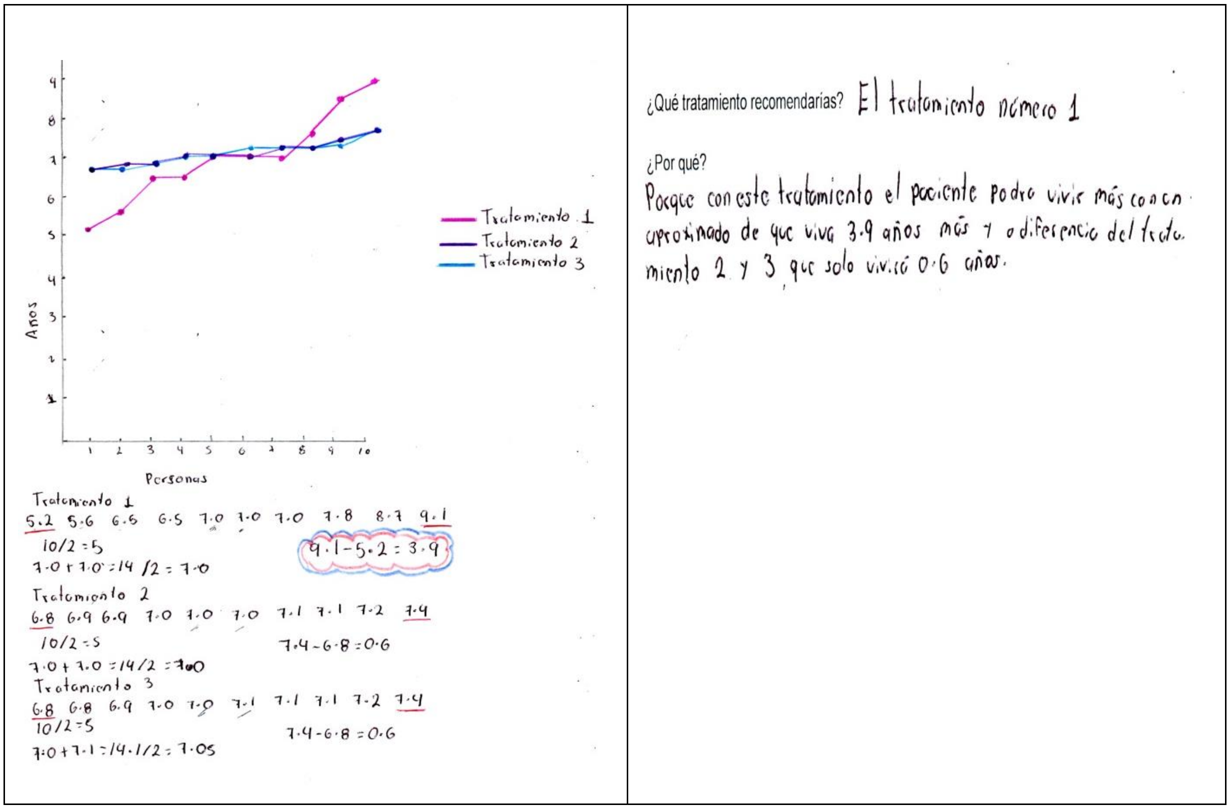
En la tabla 9, se muestra una categorización de los procesos utilizados por los estudiantes, a través de algunos ejemplos.

Procesos	**Ejemplos**
Representación geométrica	Gráficas: ➢ Barras ➢ Puntos ➢ Pastel ➢ Recta numérica
Representación aritmética	Estadística: ➢ Medidas de tendencia central – Media – Mediana – Moda ➢ Medidas de dispersión – Rango ➢ Tablas de distribución
Conexiones	Aritméticas: ➢ Suma ➢ Porcentaje
Comunicación	➢ Escrita ➢ Oral
Justificación	Con base en: ➢ Variabilidad ➢ Las gráficas ➢ Media ➢ Rango ➢ Moda ➢ Posibilidades de vivir ➢ El riesgo de muerte

Tabla 9

En seguida, se presentan algunos ejemplos para mostrar los procesos de solución de los alumnos, los cuales se mencionan en la tabla 9. Estos ejemplos son del trabajo individual y en equipo.

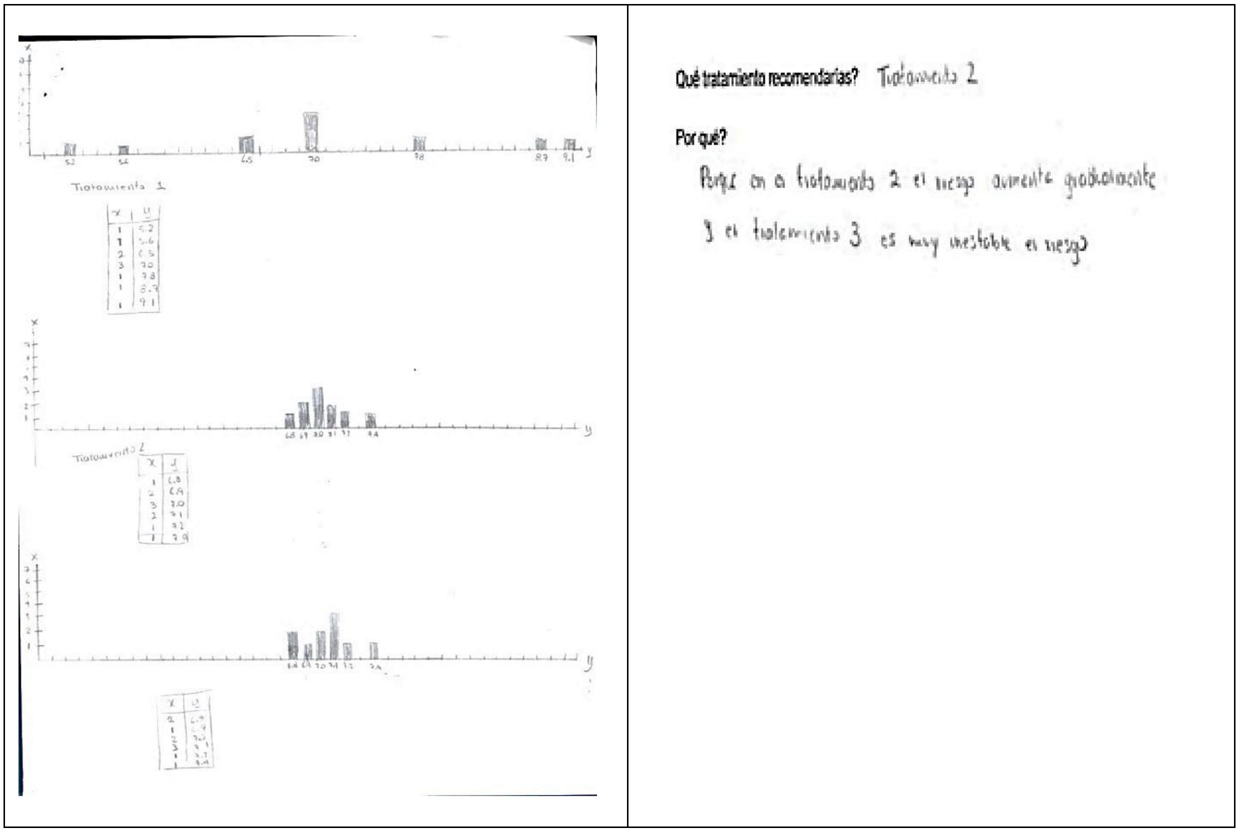
En el ejemplo 22 se muestra un trabajo individual.



Ejemplo 22

El estudiante del ejemplo 22 opta por representar los tres tratamientos en un mismo plano, mediante puntos unidos, donde los datos están presentados de manera ordenada respecto al tiempo de vida en el eje vertical. Obtiene la media, la mediana y el rango en cada uno de ellos, pero es el valor del rango el que le ayuda a tomar una decisión y con base en ello es que realiza su justificación, sin embargo, no analiza el riesgo. Este se puede llevar a cabo mediante la estabilidad en los datos, es decir, entre más inestables sean (su variación es mayor) el riesgo es más grande y por lo tanto, menos conveniente. La interpretación que este estudiante hace para el rango no es adecuada ya que se va por el tratamiento que tiene el rango mayor, es decir, por aquel menos conveniente.

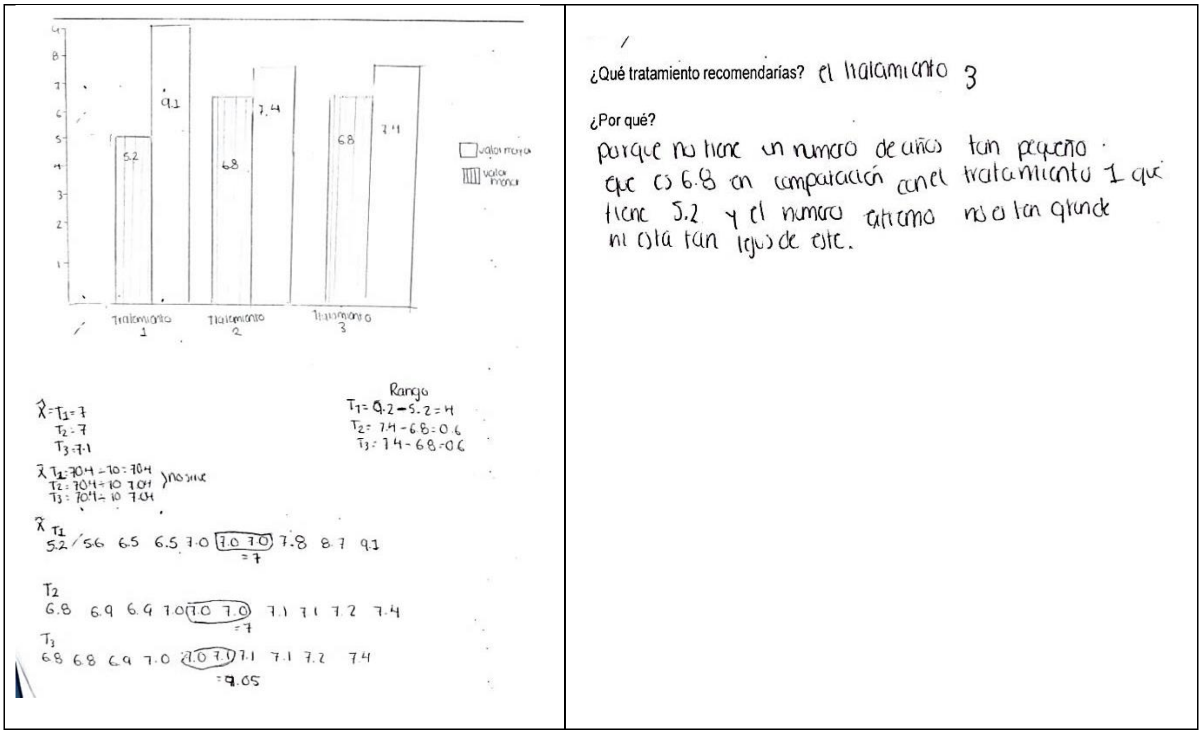
El ejemplo 23 se presenta un trabajo individual.



Ejemplo 23

El estudiante del ejemplo 23 representa los datos utilizando barras con base en una tabla de distribución de frecuencias, la cual le fue muy útil para realizar la interpretación de los datos, ya que en su justificación menciona que elegiría el tratamiento 2 “porque en el tratamiento 2 el riesgo aumenta gradualmente y el tratamiento 3 es muy inestable” con esto se puede ver el análisis que hace de la variabilidad existente respecto al riesgo que se presentan los tratamientos 2 y 3. Tal vez, por esta inestabilidad que menciona en el tratamiento 3 es la misma razón por la que el tratamiento 1 ni lo alude.

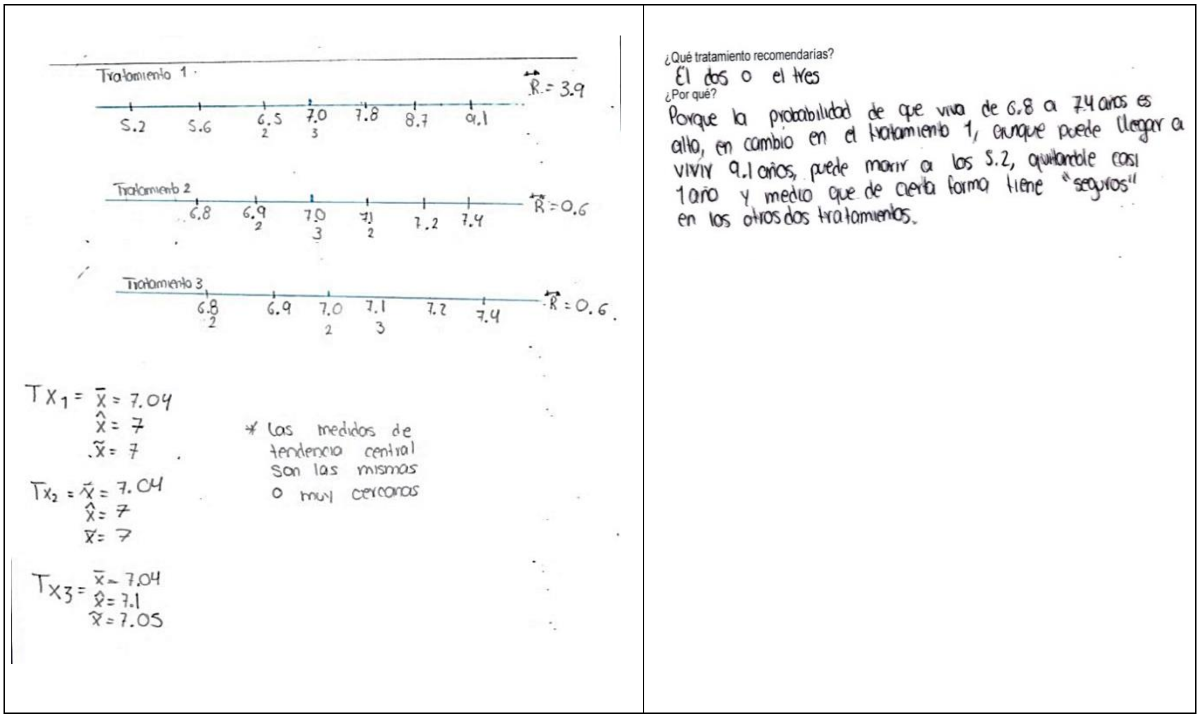
En el ejemplo 24 se presenta un trabajo realizado de manera individual.



Ejemplo 24

El estudiante del ejemplo 24 representa los datos con barras, donde cada una de ellas muestran el valor más pequeño y el más grande en cada uno de los tratamientos. Es decir, gráficamente se podría analizar el rango en cada tratamiento. También obtiene las medidas de tendencia central y el valor del rango. Podemos ver como el estudiante se da cuenta de que el valor de la media no le ayuda a tomar una decisión. En su justificación se observa que opta por analizar los valores extremos en el tratamiento 1 y 3, haciendo una adecuada interpretación, sin embargo, no considera el tratamiento 2, tal vez porque entre el tratamiento 2 y el 3 existe una diferencia muy pequeña, al parecer esa diferencia la encontró en el valor de la moda y la mediana, ya que estos valores son un poco más altos en el tratamiento 3.

El ejemplo 25 muestra uno de los trabajos individuales.



Ejemplo 25

El estudiante del ejemplo 25 realiza una representación gráfica del rango que existe en cada uno de los tratamientos y obtiene las medidas de tendencia central en los tres casos, analizando éstos valores se da cuenta de que son los mismos (en el caso de la media) o muy cercanos (en la mediana y moda). Al momento de realizar su justificación analiza el riesgo en el caso del tratamiento 1 con respecto al 2 o 3. Recomienda el tratamiento 2 o 3 ya que para él son muy parecidos y no tiene forma de realizar un mejor análisis, por lo que opta por recomendar cualquiera de esos dos.

En este problema es difícil tomar una decisión entre el tratamiento 2 o 3 ya que sus comportamientos son muy similares, la única forma de tomar una buena decisión es analizar la variabilidad existente entre estos datos, pero esta variación sólo se puede llevar a cabo con otro concepto más conveniente que el rango, el cual es, la desviación estándar, o con una gráfica adecuada como las que muestra el estudiante en el ejemplo 23.

En la discusión grupal los equipos presentan sus diferentes heurísticas, explicando a sus compañeros lo que realizaron para llegar a tomar una decisión.

Este problema fue el preámbulo para un estudio más delicado en los conjuntos de datos, se trata del concepto de desviación estándar, ya que ni la media ni el rango les puede servir para tomar una buena decisión.

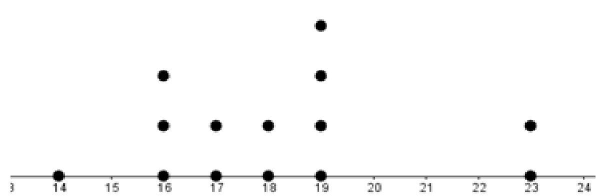
Posterior al concepto de rango, era necesario construir el resto de las medidas de dispersión, las cuales se llevaron a cabo mediante la guía de la profesora.

Comienza esta construcción con la siguiente tarea:

En equipo, propón tres ejemplos (sin contexto), con tres colecciones de datos cada uno, donde, en cada ejemplo, cada colección debe de tener las siguientes características.

1) El mismo número de datos.
2) La misma media.
3) El mismo rango.
4) Mismo intervalo.

5) Representa cada colección como se presenta la siguiente:



Los requisitos pedidos para esta tarea son con el propósito de que los estudiantes concluyan que aun teniendo el mismo número de datos, la misma media, el mismo rango y el mismo intervalo, la desviación estándar es diferente y que entre más datos se encuentren cerca de la media su desviación será más pequeña y que también en su representación gráfica pueden observar esto. Se les pide tres ejemplos para seleccionar sólo uno de ellos y con él trabajar, esto para tener opciones de elegir ya que en la aplicación piloto con otros grupos se les pidió solo un ejemplo y en algunos equipos el ejemplo que proponían no cumplía con todos los requisitos y por lo tanto, no era adecuado.

Es importante mencionar que previo a esta tarea se llevó a cabo la activación de conocimientos previos. En esta actividad los estudiantes recordaron como trabajar en el plano de coordenadas cartesianas, ubicando puntos en él y calculando distancias entre pares de puntos, recordando de esta manera cómo es que se obtiene distancia entre dos puntos, también se activó el concepto subíndice y sumatoria, estos últimos sólo los supieron aquellos estudiantes que cursaban la materia de cálculo; era importante trabajarlos ya que posterior a la construcción de los conceptos de dispersión se tenía que llegar a la formalización, obteniendo la fórmula para cada uno de ellos.

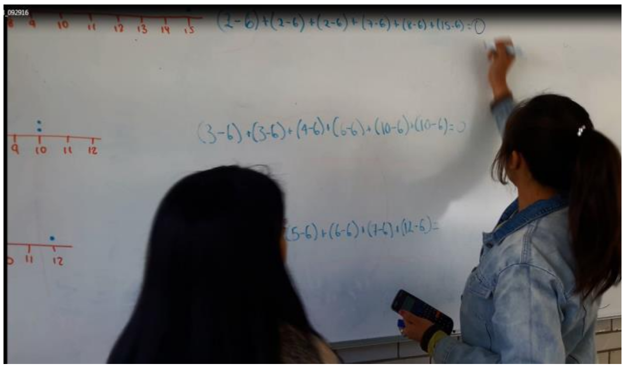
CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS "DESVIACIÓN", "DESVIACIÓN MEDIA", "VARIANZA" Y "DESVIACIÓN ESTÁNDAR"

La profesora pide a uno de los equipos que pase al pizarrón, ya que ellos irán trabajando con su ejemplo y el resto de los equipos lo harán en su cuaderno, con su respectivo ejemplo. Esto por si los compañeros se pierden en alguno de los paso pueden apoyarse en lo que sus compañeros van haciendo en el pizarrón, y de esta manera se puede llevar un mejor control.

Los conceptos de desviación, desviación media, varianza y desviación estándar los estudiantes los construyeron con la guía de la profesora de la siguiente manera:

1) La profesora pide a los estudiantes que para cada colección calculen la suma de las diferencias de cada uno de los datos con respecto a la media.

Una de las indicaciones es que si el valor de la media no es entero, entonces que la trabajen como fracción, no como decimal.



Después que todos los equipos obtuvieron las sumas, la profesora pregunta ¿Cuál es el valor de las sumas? A lo que todos contestan que es cero. Posteriormente se les pregunta a los estudiantes si ¿tienen idea de por qué ese valor es cero? Pero ninguno de ellos supo contestar. La profesora fue guiándolos con el ejemplo que estaba en el pizarrón hasta que los estudiantes observaron que cada valor de la diferencia entre datos que estaban antes de la media aparecía después de ella, y se iban cancelando.

2) La profesora pregunta ¿Qué fue lo primero que hicieron en cada colección?

Estudiante A: calculamos las diferencias entre cada uno de los datos con respecto a la media.

Donde todo el grupo estuvo de acuerdo con el estudiante A. entonces la profesora le pone nombre al proceso que hicieron, llamándole *Desviación.* Entonces construyen la definición del concepto desviación de la siguiente manera:

Desviación: es la diferencia de cada uno de los datos con respecto a su media.[3]

---

[3] Concepto “Desviación”.

Profesora: ¿Cuánto vale la suma de las desviaciones en un conjunto de datos?

Todos los estudiantes dijeron que la suma es cero, entonces la profesora retomo el concepto de media, preguntándoles por su definición, en ese momento se dieron cuenta por qué el concepto de la media se definió como el punto de equilibrio en un conjunto de datos, fue en ese momento que les quedo claro. Se les dice que una de las propiedades de la media o media aritmética es justo la que ellos acaban de obtener, *la suma de las desviaciones en un conjunto de datos siempre es cero*.

3) Mediante una lluvia de ideas, se realiza un análisis de lo que representa una desviación, llegando a la conclusión de que es una distancia entre dos puntos o valores, pero como las distancias deben ser positivas entonces se realiza un proceso para convertir todas las desviaciones a positivas.

La primer propuesta fue que se multiplicaran por menos uno, pero se dieron cuenta que las desviaciones que eran positivas se convertirían en negativas, entonces esa propuesta la descartaron. Una segunda fue la de elevar al cuadrado y luego obtener la raíz, la profesora dijo que harían eso, pero primero encontrarían otra alternativa, ningún estudiante hizo propuestas, fue entonces que se propuso obtener el valor absoluto de las desviaciones, este proceso se tuvo que explicar por parte de la profesora ya que ningún estudiante sabía de la existencia de este concepto; luego se procedió realizar lo propuesto. Ya obtenido este nuevo conjunto de valores, la profesora les dice, ahora tenemos un nuevo conjunto de datos ¿cómo se llaman sus datos? los estudiantes responden que se llaman valor absoluto de las desviaciones, posteriormente, pregunta ¿Cómo podemos analizar un conjunto de datos? Los estudiantes dijeron que obteniendo su media, mediana, moda, rango o graficando, en ese momento la profesora propuso obtener la media de esos datos. Después de obtener esta media la profesora pregunta a los estudiantes qué fue lo que hicieron, a lo que ellos respondieron: “calculamos la media del valor absoluto de las desviaciones”. Entonces la profesora les dice que a eso que ellos acaban de hacer se le conoce como desviación media.

Desviación media: Es la media del valor absoluto de las desviaciones.[4]

4) La profesora pregunta ¿cómo más se pueden hacer positivos los valores? a lo que los estudiantes responden que elevando al cuadrado y luego sacando la raíz.

La profesora propone que primero eleven al cuadrado las desviaciones. Ya que los estudiantes han hecho esto, la profesora les dice: este es nuestro nuevo conjunto de datos, ¿cómo se llaman sus datos? los estudiantes responden que se llaman desviaciones al cuadrado y luego pregunta ¿cómo se pueden analizar los conjuntos de datos? y los estudiantes responden que obteniendo su media, mediana, moda, rango o graficando; a lo que la profesora propone obtener la media de esos datos. Ya que los estudiantes han realizado esta operación, se les pregunta ¿Qué fue lo que hicieron? Ellos responden: sacamos la media de los cuadrados de las desviaciones. La profesora les dice, a ese proceso que hicieron le llamaremos varianza.

Varianza: Es la media de los cuadrados de las desviaciones.[5]

5) La profesora pregunta a los estudiantes, ¿Ahora, como compensamos el hecho de haber elevado al cuadrado mis desviaciones? Ellos responden que sacando la raíz cuadrada.

La profesora pide que al resultado final de la varianza le calculen la raíz cuadrada. Luego pregunta, ¿En este proceso que hicieron? Los estudiantes contestan que lo único que hicieron fue sacar la raíz cuadrada a la varianza y la profesora les dice que a ese proceso se le conoce como desviación estándar.

Desviación estándar: Es la raíz cuadrada a la varianza[6]

Posterior a la construcción de estos conceptos, la profesora asigna la simbología utilizada para representar a cada uno de estos conceptos y les menciona que a todos ellos se les conoce como medidas de dispersión. Después de analizar la esencia de

[4] Concepto “Desviación media”.

[5] Concepto “Varianza”.

[6] Concepto “Desviación estándar”.

la dispersión, se llegó, en forma grupal, a la conclusión de que la desviación estándar mide que tan cerca o lejos están los datos con respecto a la media, es decir, con esto se medía la dispersión en un conjunto de datos y que entre más pequeña sea ésta es porque los datos están muy aglomerados alrededor de la media y entre más grande sea es porque los datos están muy dispersos de la media.

En la siguiente sesión se establecieron las fórmulas para cada uno de los conceptos: media, desviación media, varianza (poblacional y muestral) y desviación estándar (poblacional y muestral). Gracias a que ya se había visto el concepto sumatoria, índice o subíndice y la definición de cada concepto, fue sencillo establecer las formulas, ya que se hizo con base en la definición. Sin embargo, para los estudiantes fue complicado usar la simbología, incluso, en el problema posterior algunos calculan media, desviación media, varianza, desviación estándar pero sin antes escribir la formula, sólo utilizando la definición.

En la siguiente imagen podemos observar como el estudiante plasma la fórmula de la media para posteriormente obtener el valor, sin embargo, para la desviación estándar él no la pone, ya que para él resulta más sencillo obtener su valor sin la necesidad de basarse en la formula.

1- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{x} = \frac{(6+7+7+8+9+9+10)}{7}$ $\bar{x} = 8$

2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{x} = \frac{(6+7+7+8+3+9+10)}{7}$ $\bar{x} = 8$

3- $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{x} = \frac{(6+7+8+8+8+9+10)}{7}$ $\bar{x} = 8$

1- 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10

$$S^2 = \frac{(6-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2}{7-1} = \frac{12}{6} = 2$$

$S^2 = 2$ $S = \sqrt{2}$ $S = 1.4142$

2- 6, 6, 7, 8, 9, 10, 10

$$S^2 = \frac{(6-8)^2+(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2+(10-8)^2}{7-1} = \frac{18}{6} = 3$$

$S^2 = 3$ $S = \sqrt{3}$ $S = 1.7320$

3- 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10

$$S^2 = \frac{(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2}{7-6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$S^2 = \frac{5}{3}$ $S = \sqrt{\frac{5}{3}}$ $S = 1.2909$

De lo anterior podemos concluir que no es necesario que los estudiantes memoricen una fórmula que en ocasiones no saben cómo usar, consideramos que si los alumnos construyen la definición del concepto para ellos será más significativo y podrán calcular cualquier valor, ya sea de la media, varianza, desviación estándar, etc., sin la necesidad de imponerles antes las formulas.

PROBLEMA: DESEMPEÑO ESCOLAR

En el tercer problema los estudiantes deberían elegir uno de tres conjuntos de datos que se les presentaba, cada uno de ellos representa el desempeño escolar de José durante su estancia en la secundaria. Los tres conjuntos tienen la misma media y el mismo rango, sin embargo, hay uno donde su desempeño es mejor, éste es aquel en el que fue más estable, es decir, aquel donde su desviación estándar es menor. Aquí, ya no se les pidió otra representación ni elegir el mejor año escolar, sin embargo, se les pregunta su opinión sobre el desempeño escolar para ver qué hacen los estudiantes al tener conjuntos de datos que son aparentemente iguales.

A continuación, se presenta el problema al cual hemos llamado "desempeño escolar" y el análisis correspondiente a los procesos de solución.

Situación-Problema
José se encuentra cursando su primer año de nivel medio superior y se pone a analizar las calificaciones obtenidas durante los tres años de secundaria, quiere saber cuál fue su desempeño durante su estancia en dicha etapa. Analiza los siguientes datos correspondientes a las calificaciones de José y contesta las preguntas.

1°	**7**	**9**	**6**	**7**	**10**	**9**	**8**
2°	**8**	**9**	**10**	**6**	**7**	**10**	**6**
3°	**8**	**7**	**6**	**8**	**8**	**9**	**10**

¿Qué puedes decir del desempeño académico de José durante su estancia en la Secundaria?

Justifica claramente tu respuesta.

A continuación, se muestra en la tabla 10, una categorización de los procesos utilizados por los estudiantes, observados a la luz de ejemplos.

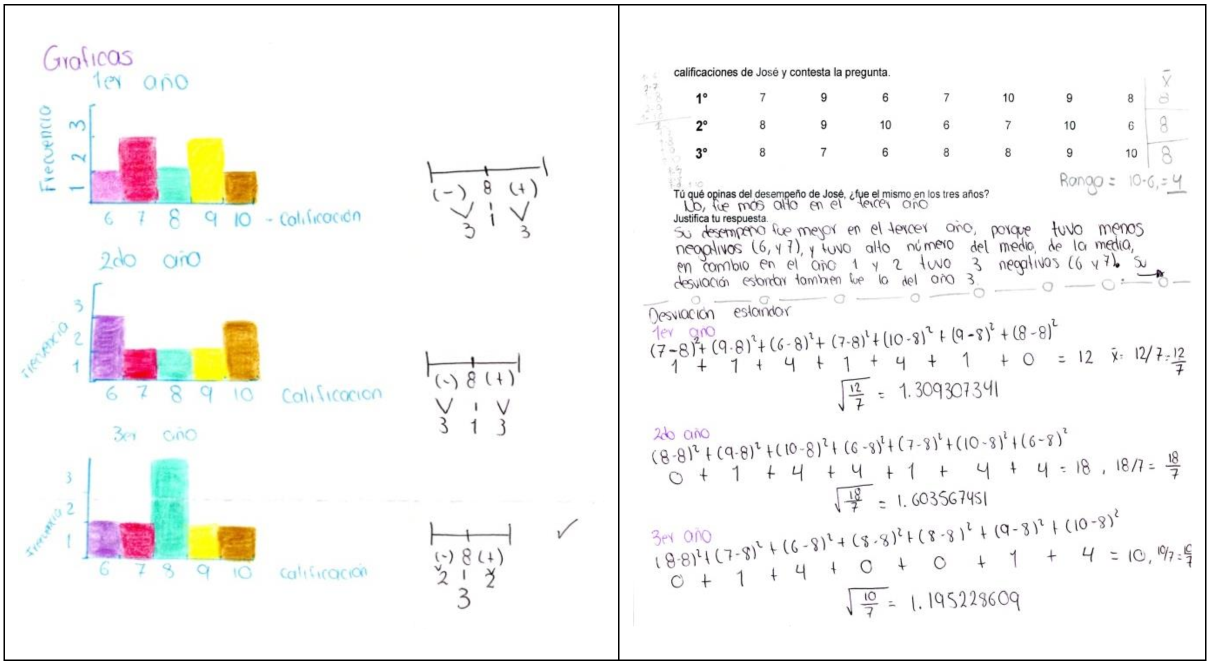
Procesos	**Ejemplos**
Representación geométrica	Gráficas: ➢ Barras ➢ Puntos ➢ Pastel ➢ Recta numérica

Representación aritmética	Estadística: ➢ Medidas de tendencia central – Media – Mediana – Moda ➢ Medidas de dispersión – Rango – Desviación estándar – Desviación media – Varianza ➢ Tablas de distribución
Conexiones	Aritméticas: ➢ Suma ➢ Diferencias ➢ Porcentaje ➢ División ➢ Raíz cuadrada ➢ Potencia
Comunicación	➢ Escrita ➢ Oral
Justificación	Con base en: ➢ Media ➢ Desviación estándar ➢ Gráficas

Tabla 10

En seguida, se presentan algunos ejemplos para mostrar los procesos de solución de los alumnos, los cuales se mencionan en la tabla 10. Estos ejemplos son del trabajo individual y en equipo.

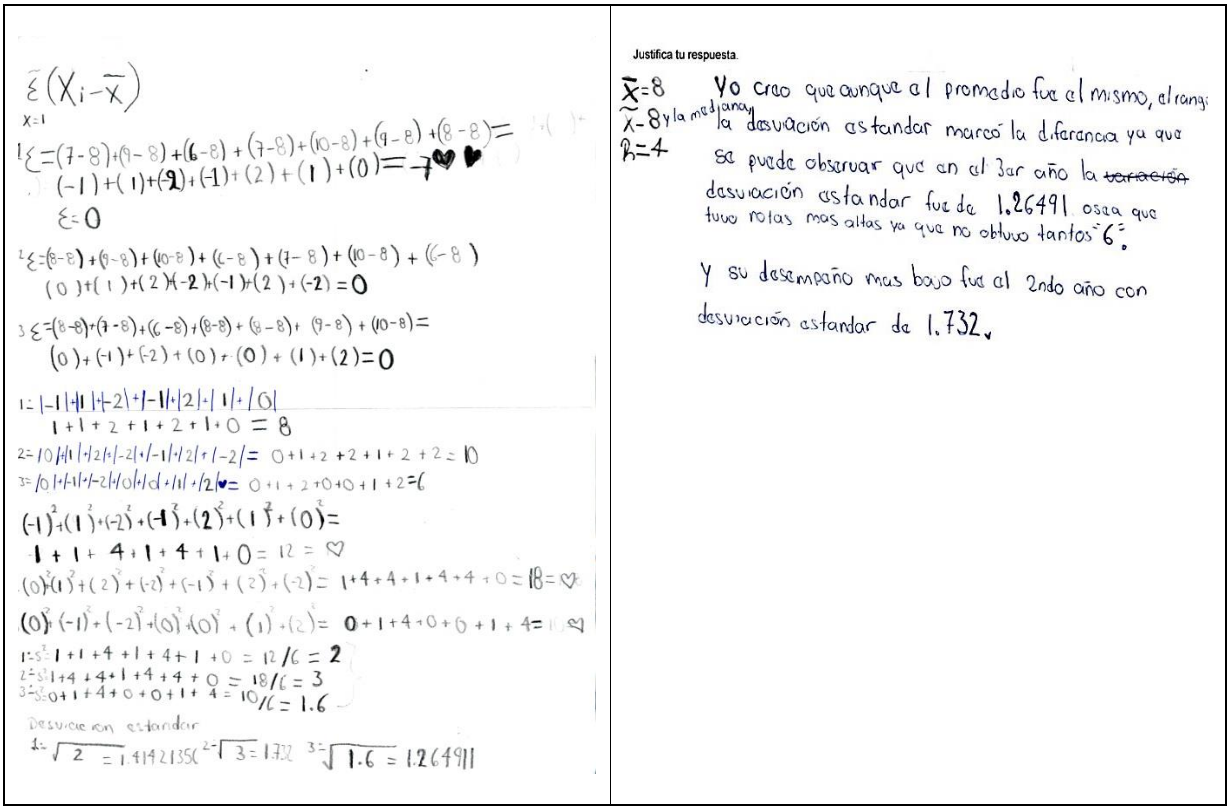
El ejemplo 26 muestra el trabajo individual.



Ejemplo 26

El estudiante del ejemplo 26 realiza una representación gráfica de barras para cada año escolar. Es interesante ver que toma el valor de la media como referencia y cuenta los valores que hay antes y después de éste; con base en está heurística es que justifica su respuesta, es decir, lo que está analizando es la dispersión existente entre los datos y para reafirmar su respuesta, calcula el valor de la desviación estándar en cada caso y efectivamente, toma aquel conjunto de datos que tiene una desviación menor.

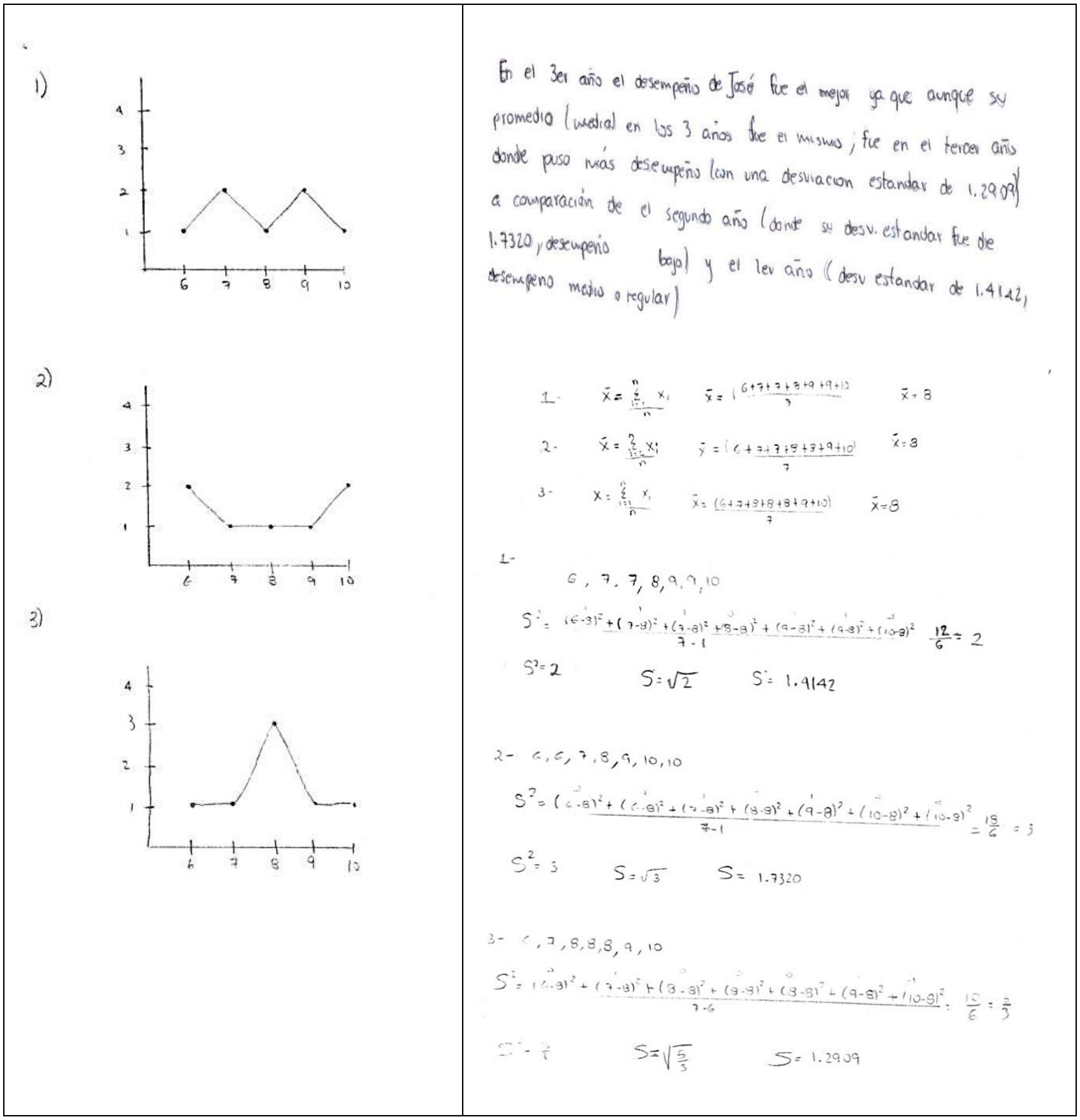
Se muestra un trabajo individual en los procesos del ejemplo 27.



Ejemplo 27

El estudiante del ejemplo 27 utiliza únicamente la representación aritmética calculando la media, mediana, rango, desviación, y desviación estándar, y con base en estos últimos valores es que logra dar una adecuada interpretación del comportamiento de los datos, ya que analiza la dispersión de los datos con base en la desviación estándar, tal como lo menciona en su justificación, la cual dice “yo creo que aunque el promedio, la mediana y el rango fue el mismo, la desviación estándar marco la diferencia ya que se puede observar que en el 3er año la desviación estándar fue de 1.26491 ósea que tuvo notas más altas ya que no obtuvo tantos 6. Y su desempeño más bajo fue el segundo año con desviación estándar de 1.732”.

Trabajo individual en el ejemplo 28.



Ejemplo 28

El estudiante del ejemplo 28 realiza representaciones estadísticas, utilizando gráficas y obteniendo el valor de la media, varianza y desviación estándar para cada año escolar y . A pesar de realizar graficas de puntos (parecidas a la gráfica de polígonos de frecuencia) son los valores de la desviación estándar los que utilizan para realizar un excelente análisis de los datos. en primer lugar, destaca el valor de la media, se da cuenta que es el mismo en los tres años y luego se enfoca en analizar la desviación media, eligiendo el valor más pequeño, el cual corresponde al tercer año, de igual forma, interpreta también la desviación más grande y la correspondiente al primer año escolar.

Todos los estudiantes calculan la desviación estándar y con base en ella es que analizan los datos, llegando a la conclusión de que en el tercer año José tuvo un mejor desempeño ya que su dispersión es menor, por lo tanto fue más sólida. Es importante señalar que en este problema ya no se les pide a los estudiantes que realicen otra representación de los datos, sin embargo, ya se han apropiado de esta heurística y la realizan sin que se le haya pedido.

En la discusión grupal los equipos presentan sus diferentes heurísticas, explicando a sus compañeros lo que realizaron para llegar a tomar una decisión.

Con estos tres problemas se pretende fomentar en los estudiantes el análisis de conjuntos de datos para la toma de decisiones, resaltando la importancia de realizar otras representaciones con el fin de que éstas ayuden en el análisis.

Podemos observar que el uso de recursos propios facilita el manejo de los datos y enriquece el uso de diversas heurísticas, esto cuando se lleva a la discusión grupal. También, es en esta forma de trabajo donde podemos fomentar diversas actitudes y valores, tales como la comunicación oral, el respeto, tolerancia, confianza, seguridad en sí mismo, etc.

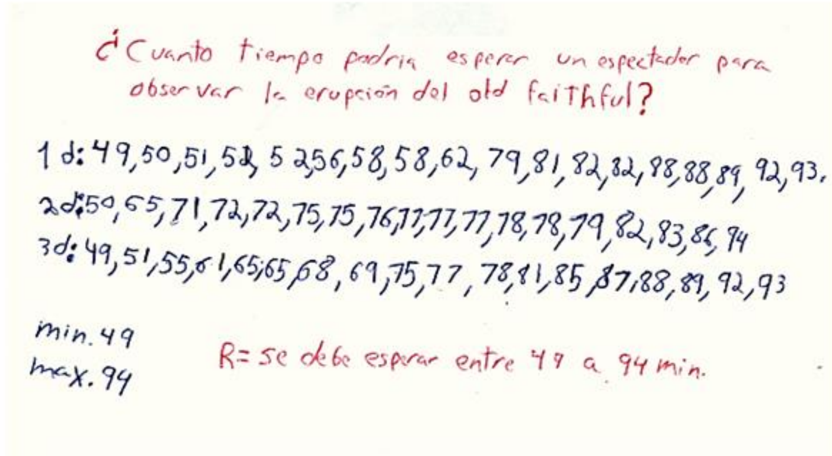
CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO "INTERVALO"

El siguiente concepto que utilizaron algunos de los estudiantes en el proceso de resolución al dar respuesta al tiempo de espera del Geiser es el de Intervalo.

La profesora pregunta al Estudiante A ¿en qué consiste el problema del Geiser? El Estudiante menciona: El problema consiste en dar el tiempo en el que el Geiser vuelve a hacer erupción de tal forma que los espectadores puedan verlo, para eso teníamos que analizar tres conjuntos de datos, que corresponden al tiempo de espera en tres días. Entonces se les pregunta a los estudiantes si recuerdan cuáles han sido las respuestas que han analizado, a lo que los estudiantes responden dando cada una de ellas. La profesora dice a los estudiantes que falta una respuesta más, entonces presenta la diapositiva y se les hace la siguiente pregunta a los estudiantes, ¿Qué es lo que realiza el Estudiantes 10? La profesora pide a los estudiantes que observen y analicen el proceso de éste estudiante, para ello les da un tiempo de 10 minutos.

Al analizar se espera que los alumnos vean y que describan las diferentes representaciones de los datos. Por ejemplo, que identifiquen como se acomodan los datos, si están ordenados o no y en qué orden los está colocando, que reconozcan las operaciones que está realizando el Estudiante 10, que fundamenten la respuesta que está dando este Estudiante.

Intervalo



Estudiante 10

La profesora pregunta ¿Qué hizo el Estudiante 10? Y se obtienen las siguientes respuestas de la videograbación que se realizó en esa sesión.

Estudiante B: saco el valor máximo y el mínimo. Es el Rango.

Estudiante C: Son los límites del rango, pero no es el rango.

Profesora: El estudiante 10 ¿cuántos valores está dando como respuesta’

Estudiante D: dos valores, que son 49 y 94.

Estudiante E: Todos los valores, los 54, porque todos entran en esos límites.

Profesora: ¿Cuál es la diferencia de esta respuesta con todas las que hemos analizado?

Estudiante F*: que las otras respuestas era un solo valor y el Estudiante 10 está dando muchas* posibles respuestas, bueno, todas las posibles que aparecen en el problema.

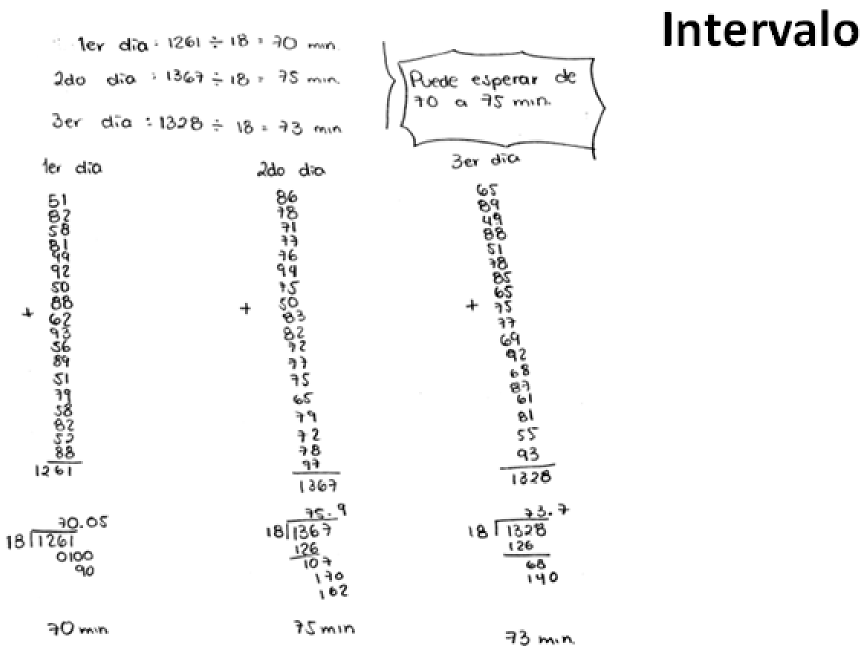
Profesora: A este proceso le llamaremos intervalo. ¿Cómo definiríamos un intervalo?

Estudiante E: Como un espacio.

Estudiante G: como una distancia.

Estudiante B: Como los valores que hay desde el valor mínimo hasta el valor máximo.

Hasta este momento los estudiantes tienen la idea de que el intervalo debe de tomarse entre un valor mínimo y un máximo en un conjunto de datos. Para ello la profesora presenta otra diapositiva con un proceso en el cual dan como respuesta un intervalo. En la siguiente imagen se puede observar.



Estudiante 11

Profesora: El Estudiante 11 nos está dando un intervalo, el cual es de 70 a 75 minutos de espera. Y Pregunta a los estudiantes, ¿Qué es lo que hace el Estudiante 11 para dar está respuesta?

Estudiante B: Calculó la media para cada día y da como respuesta el intervalo que va desde el valor de la media más pequeña hasta la media más grande.

Estudiante E: Los datos que hay entre un par de datos específicos o dos números específicos.

La mayoría de los estudiantes estuvieron de acuerdo con la propuesta del Estudiante E y la definición quedó de la siguiente manera:

Intervalo: Es el espacio o los datos que hay entre dos valores delimitados.

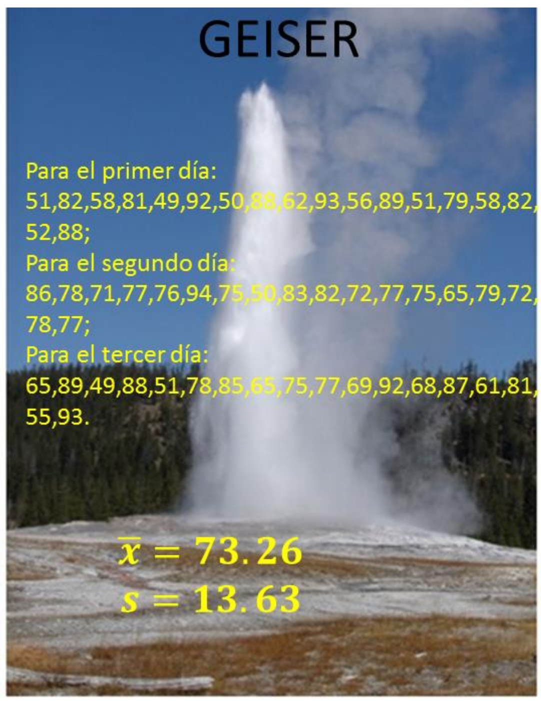
Después de eso se retoman todas las respuestas dadas al problema del geiser y la profesora menciona, todas estas respuestas son correctas, pero ¿Cuál creen que podría ser más adecuada?

Estudiante B: La respuesta que dio el Estudiante 11 porque está dando un intervalo donde considera los valores de las medias cómo límites, y como vimos, la media es el mejor valor representativo en un conjunto de datos.

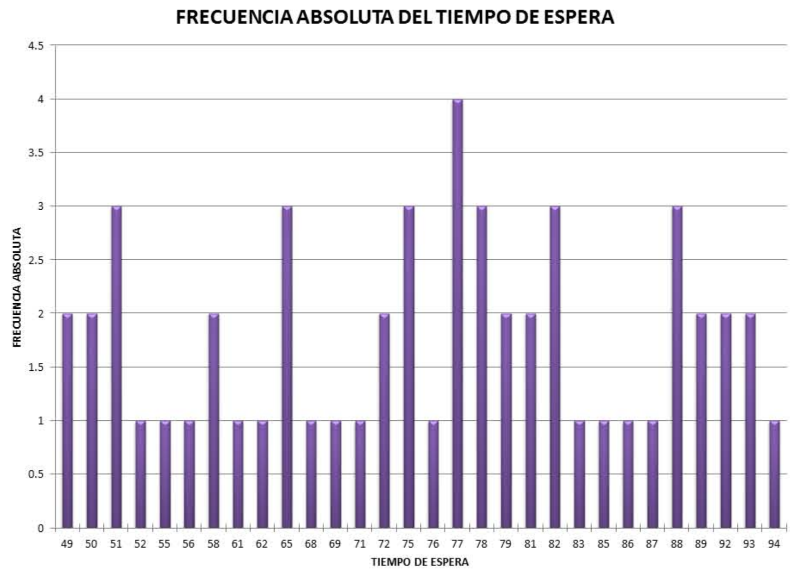
Los estudiantes llegan a la conclusión que lo más adecuado cuando nos piden dar una respuesta a un problema donde los datos corresponden a la variable "tiempo" es mejor dar un intervalo, ya que es importantes siempre considerar la variabilidad existente en femémonos aleatorios.

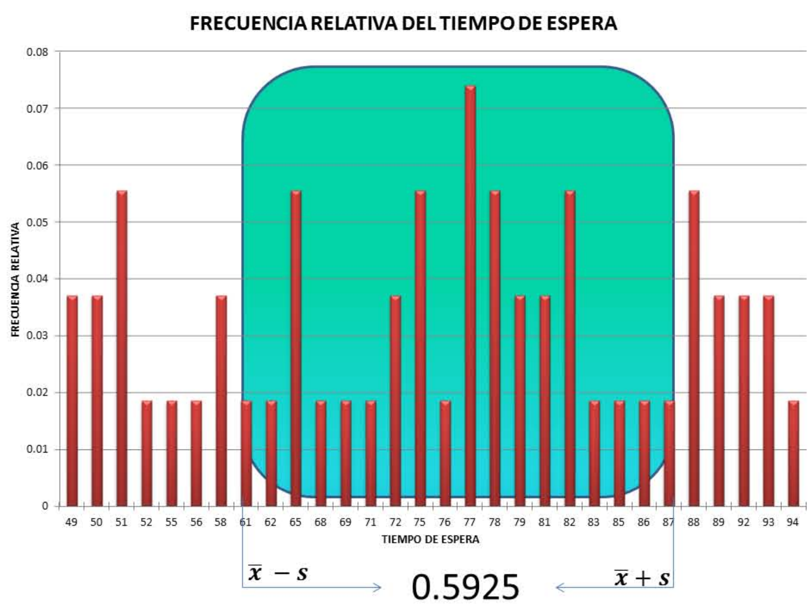
La profesora cierra el problema del Geiser presentando lo que sería una respuesta "más formal", presenta tres diapositivas que lo muestran. Estas diapositivas se presentan en las siguientes imágenes.

TIEMPO (x)	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
49	2	0.037037037
50	2	0.037037037
51	3	0.055555556
52	1	0.018518519
55	1	0.018518519
56	1	0.018518519
58	2	0.037037037
61	1	0.018518519
62	1	0.018518519
65	3	0.055555556
68	1	0.018518519
69	1	0.018518519
71	1	0.018518519
72	2	0.037037037
75	3	0.055555556
76	1	0.018518519
77	4	0.074074074
78	3	0.055555556
79	2	0.037037037
81	2	0.037037037
82	3	0.055555556
83	1	0.018518519
85	1	0.018518519
86	1	0.018518519
87	1	0.018518519
88	3	0.055555556
89	2	0.037037037
92	2	0.037037037
93	2	0.037037037
94	1	0.018518519
TOTAL	54	1



De Kamilokardona - Trabajo propio, GFDL
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5639368


FRECUENCIA ABSOLUTA DEL TIEMPO DE ESPERA
FRECUENCIA ABSOLUTA
TIEMPO DE ESPERA
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5
49 50 51 52 55 56 58 61 62 65 68 69 71 72 75 76 77 78 79 81 82 83 85 86 87 88 89 92 93 94


FRECUENCIA RELATIVA DEL TIEMPO DE ESPERA
FRECUENCIA RELATIVA
TIEMPO DE ESPERA
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08
49 50 51 52 55 56 58 61 62 65 68 69 71 72 75 76 77 78 79 81 82 83 85 86 87 88 89 92 93 94
$\overline{x} - s$
0.5925
$\overline{x} + s$

Un espectador puede esperar de 61 a 87
minutos para ver la erupción del Old Faithful.

La probabilidad de que un espectador
espere de 61 a 87 minutos es de
0.5925

$$\mathrm{P}(61 \leq x \leq 87) = 0.5925$$

Con esto, la profesora hace una pequeña introducción al concepto de probabilidad, relacionándola con las frecuencias relativas y da un intervalo considerando que estén en él más del 50 % de los datos, el intervalo es considerando más y menos 2 desviaciones estándar alrededor de la media.

ANÁLISIS DEL EXAMEN FINAL.

Es importante saber si la propuesta didáctica tuvo impacto positivo en nuestros estudiantes. Para ello, al terminar la experimentación se aplicó un examen final (ver anexo 3), a 39 estudiantes.

Resultados generales del examen final

Calificación	**# de estudiantes**
7	4
8	13
9	14
10	8
Total	39

Las preguntas en este examen se han clasificado con base en las preguntas de investigación, dicha clasificación se muestra en seguida.

Pregunta de investigación 1

¿Cuáles son las representaciones, que utilizan los alumnos, de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?

Preguntas en el examen diagnóstico:

- Escribe la definición (o lo que entiendas) de los siguientes conceptos:

Respuestas obtenidas por los estudiantes:

a) Media:

- Es el resultado que representa la síntesis de varios datos, es el punto de equilibrio de un conjunto de datos. Se calcula con la suma de datos dividida entre el mismo número de estos.
- Es un promedio de un conjunto de datos.
- Es el punto de equilibrio en un conjunto de datos, es la medida de tendencia central más importante.

- Es el punto de equilibrio de un conjunto de datos, Se calcula sumando todos los datos dividiendo entre el número de datos que hay.

b) Desviación estándar:

- Es la raíz cuadrada de la varianza.
- Es la distancia que hay de un dato con respecto a la media.
- Es una medida de dispersión que nos ayuda a ver cómo están distribuidos los datos en el conjunto.
- Cuánto se aleja el dato de la media.
- Es una medida de dispersión.
- Es la raíz cuadrada de la varianza y sirve para ver que tanto se desvían los datos con respecto a la media.

c) Intervalo:

- Es el espacio o los datos que se encuentran entre dos valores determinados. Es el más utilizado y el más recomendado para calcular los fenómenos aleatorios.
- Espacio o los datos que se encuentran entre dos valores delimitados.
- Es el espacio que hay entre un dato y otro.
- Son los datos que hay entre dos valores limitados.
- Te dice que números hay en un conjunto de datos que están delimitados.
- Espacio entre dos valores.
- Son los números o datos que se encuentran dentro de dos números específicos, límite inferior y límite superior.

Pregunta de investigación 2.

¿Cómo comunican, los alumnos, el concepto de variabilidad y los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?

Preguntas en el examen diagnóstico:

- ¿Qué significa para ti el concepto de variabilidad?

Respuestas dadas por los estudiantes:

- Es la característica de la población cuyos datos cambian y se estudian estadísticamente.
- Que a pesar de estar en un mismo grupo siempre presentará características diferentes que lo hacen distinto a los demás.
- Es cuando algo varia, es variable o cambia.
- Que no es constante y tiende a cambiar siempre.
- Es una característica de la población.
- Es algo que existe en todo lo que nos rodea.

- Si tú y tu mejor amiga (o) quedaron de verse en una plaza comercial aproximadamente a las 5 de la tarde el día de mañana, y sabes que ella (o) es puntual, incluso llega antes a sus citas. ¿Cuál de las siguientes ideas aplicarías?

- Llego exactamente a las 5.
- Llego 10 minutos antes de las 5 y la espero 10 minutos después de las 5, si no llega me voy.
- Llego 30 minutos antes de las 5 y la espero 30 minutos después de las 5, si no llega me voy.
- Llego 60 minutos antes de las 5 y la espero 60 minutos después de las 5, si no llega me voy.

¿Por qué has seleccionado esa opción?

Respuestas obtenidas por los estudiantes:

- Considerando intervalos adecuados (10 minutos antes y 10 minutos después o 30 antes y 30 después) tendiendo presente que pueden ocurrir imprevistos.
- Ignoran la variabilidad (exactamente a la hora que quedaron; 4 estudiantes).

- A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6,6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

b) Di lo que puedas acerca de este conjunto de números.

De las respuestas dadas por los estudiantes se identifican algunos procesos realizados que corresponden a conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística, en tales procesos lo que hacen es:

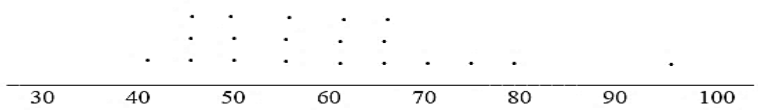
- Identifican el rango.
- Utilizan la frecuencia.
- Utilizan la moda.
- Utilizan la media
- Obtienen la desviación estándar.
- Hacen uso de la mediana.

Pregunta de investigación 3.

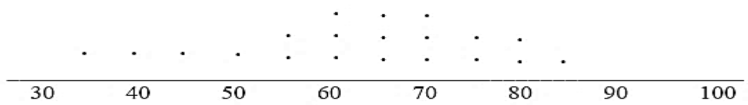
¿Cómo analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos?

Preguntas en el examen diagnostico

➢ Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte estudiantes voluntariamente estuvieron despiertos toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 de la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el gráfico inferior indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen. Examina los dos gráficos con cuidado.



Puntuaciones en el examen del grupo que no durmió



Puntuaciones en el examen del grupo que durmió

¿Escribe a qué conclusión has llegado?

Procesos realizados por los estudiantes:

- Analizan la media.
- Examinan mediante acumulaciones de datos centrales.
- Consideran la desviación.
- Utilizan el rango para realizar un análisis.
- Analizan la mediana.
- Comparan la moda.

➢ A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

b) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

Los estudiantes mencionan que pueden:

- Calcular la media.
- Obtener la moda.
- Obtener mediana.
- Obtener la varianza.
- Calcular la desviación estándar.
- Se pueden graficar.
- Obtener las frecuencias absolutas y relativas.

- Sacar intervalos.
- Representar de diferentes maneras.

➤ Si comparas las siguientes colecciones de números (a y b), ¿Qué puedes decir acerca de ellas?

a) 10, 8, 15, 8, 11, 10, 9, 9, 7, 12, 11, 10, 13, 8, 8, 7

b) 3, 9, 1, 20, 21, 2, 11, 31, 1, 22, 2, 1, 4, 1, 2, 25

Lo que los estudiantes realizan es:

- Comparar rangos.
- Analizaron el valor de la media.
- Compararon desviaciones estándar.
- Obteniendo las medianas y comparándolas.
- Compararon la moda.

Pregunta de investigación 4.

¿Cómo utilizan, los estudiantes, la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones?

Preguntas en el examen diagnostico

➤ Un fabricante de aspirinas ¿Qué es lo que tiene que considerar para qué éstas salgan a la venta?

Respuestas otorgadas por los estudiantes:

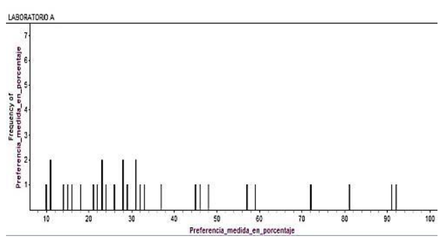
- Control de calidad…la cantidad de sustancia activa.
- Costo y ganancia.
- Tiempo de caducidad.
- La presentación del producto.
- Hacer pruebas de calidad.

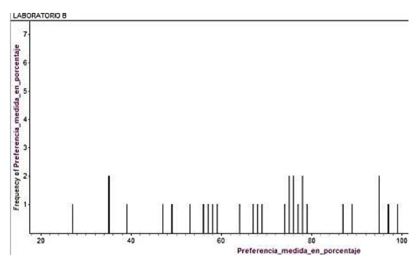
➤ Mario está considerando comprar un boleto de lotería. Tú, ¿Qué aspectos le recomendarías que considere para llegue a tomar una buena decisión?

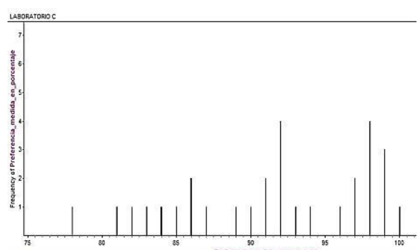
Respuestas otorgadas por los estudiantes:

- Posibilidades de ganar o perder.
- Cuánto va a perder.
- Cuántos boletos hay.
- Considerar el azar.
- Confiabilidad de la institución que organiza.
- Cuántos premios habrá.
- Que compre muchos boletos.

➢ Se entrevistó a 30 personas para saber su preferencia respecto a tres diferentes laboratorios (A, B, C) los cuales elaboran cierto medicamento que ellos consumen. Los resultados se muestran en las siguientes gráficas.







a) ¿Cuál de los laboratorios consideras más confiable?

b) ¿Por qué?

Laboratorio	**A**	**B**	**C**
#Estudiantes	0	5 estudiantes	34 estudiantes
Justificación	-------------	• Es más constante. • Porcentajes más altos. • Porque los resultados son casi iguales.	• Porque el rango esta en los porcentajes más altos. • Porque el mayor número de personas votan por encima del 80% de confiabilidad. • Porque el rango es más pequeño.

Pregunta de investigación 5

¿Cómo justifican, los alumnos, sus resultados matemáticos?

Las justificaciones las podemos observar en el capítulo 4, en los problemas referentes a la toma de decisiones, estas son con base en los siguientes conceptos:

- El valor de la mediana.
- Las gráficas.
- Posibilidades de ganancia.
- El riesgo de pérdidas.
- Variabilidad.
- Media.
- Rango.
- Moda.
- Posibilidades de vivir.
- El riesgo de muerte.
- Desviación estándar.
  Gráficas.

Pregunta de investigación 6.

¿Cómo son las conexiones matemáticas que establecen los alumnos en el tema de variabilidad?

Preguntas en el examen diagnostico

- Menciona al menos tres fenómenos donde puedas observar variabilidad.
  -Temperaturas.
  - Juegos de azar.
  - Velocidad de un carro.
  - Erupciones volcánicas.
  - Altura de las personas.
  - Edades.
  - Peso.

- Tiempo de transporte.
- Esperanza de vida.
- Clima.
- Magnitud de los sismos.

➢ A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

a) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

- Conexiones aritméticas: sumas, divisiones, raíz cuadrada, porcentajes.
- Conexiones estadísticas: media, moda, mediana, rango, desviación media, desviación estándar, gráficas.

Pregunta de investigación 7.

¿Qué características muestran las interacciones, entre el grupo, los alumnos, el profesor y los contenidos, en el salón de clase?

En cuanto a las características observadas durante la aplicación de la propuesta se pueden destacar las siguientes:

➢ Aproximadamente un 98% de alumnos participaban en clase sin temor a ser evidenciados o rechazados. Esto lo que nos dice es que adquirieron confianza en sí mismos.

➢ Se observó una buena relación entre estudiantes y entre profesora con estudiantes, esto creó un buen ambiente de trabajo, sobre todo en el grupal. Se dio una buena relación de compañerismo y con ello se logró un avance entre pares.

➢ Al inicio fue difícil el trabajo en equipo, ya que algunos estudiantes están acostumbrados a trabajar de manera individual, pero después de cinco clases ya lo hacían de manera natural, apoyándose entre sí y haciendo aportaciones al equipo.

➢ Para el trabajo grupal tuvieron que aprender a hablar uno a la vez, escuchar a sus compañeros y entre todos llegar a conclusiones. Al final del curso se vio un avance muy favorecedor, ayudándose entre todos y convenciendo a aquellos compañeros que tenían una idea errónea del concepto que se estaba tratando.

ANÁLISIS REALIZADO ENTRE EL EXAMEN DIAGNÓSTICA Y EL EXAMEN FINAL

Resultados generales del examen diagnóstico y el examen final

EXAMEN DIAGNÓSTICO	
Calificación	**# de estudiantes**
5	15
6	22
7	3
8	1
9	0
10	0
Total	41

EXAMEN FINAL	
Calificación	**# de estudiantes**
7	4
8	13
9	14
10	8
Total	39

El examen, tanto en su fase inicial como en la final, fue calificado, otorgando un valor numérico, esto con base en las respuestas dadas por los estudiantes. Las preguntas fueron clasificadas con base en conocimientos generales, tratamiento en los conjuntos de datos y coherencia en la toma de decisiones.

Como se puede observar, en el examen final se logró un avance considerable respecto a las notas numéricas alcanzando un promedio de 8.6, mientras que en el examen diagnóstico su promedio fue de 5.76.

También, se realiza una comparación (ver anexo 4) entre las respuestas obtenidas en el examen diagnóstico con el examen final, mostrando a continuación lo que se pudo observar para cada pregunta de investigación.

Respecto a la pregunta *¿Cuáles son las representaciones, que utilizan los alumnos, de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?*

En el examen diagnóstico y final se básicamente se han clasificado las representaciones correspondientes a la media, desviación estándar e intervalo.

Respecto a la media, en el examen diagnóstico los estudiantes confunden el concepto con el de mediana o moda, o en el mejor de los casos, la definen como el proceso de sumar los datos y dividirlo entre el total de ellos. En examen final ya tienen claro cuál es su definición, refiriéndose a ella como un valor representativo en un conjunto de datos, así como el punto de equilibrio del mismo y mencionan junto con su definición el cómo es que se calcula.

En cuanto a la desviación estándar, en el examen diagnóstico los alumnos hacen referencia a este concepto como el tomar otro camino. Mientras que en el examen final se refieren a él como una medida de dispersión que nos ayuda a ver cómo están distribuidos los datos y considerando que tanto se alejan éstos de la media, tienen claro que se calcula obteniendo la raíz cuadrada de la varianza.

Acerca del intervalo, en el diagnóstico los estudiantes no tienen claro lo que es, sin embargo, llegan a confundirlo con el rango y en el mejor de los casos se refieren a él como el tiempo que hay entre dos cosas. En cuanto al examen final se refieren a este concepto como el espacio, números o datos que se encuentran dentro de dos números específicos.

Con base en la pregunta *¿Cómo comunican, los alumnos, el concepto de variabilidad y los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?* se puede deducir lo siguiente:

Respecto a cómo definen la variabilidad se puede observar que los estudiantes en el examen diagnóstico la consideran como algo que cambia o que tiene diferentes resultados. En el final hacen referencia a ella como una característica de la población, que a pesar de estar en el mismo grupo son diferentes entre sí, y algo muy interesante es que reconocen que es omnipresente.

En el examen diagnóstico la usan como algo donde hay diferentes opciones, ignorando su presencia. Mientras que en el final consideran intervalos adecuados, sin embargo 4 de los estudiantes siguen ignorando su presencia.

Para el examen diagnóstico, los conceptos fundamentales que utilizan los estudiantes para comunicar la variabilidad son: la media, desviación estándar, la moda y la mediana, esto sin hacer una buena interpretación de ellos. En el examen final usan el rango, media, moda, mediana, frecuencia y desviación estándar, es decir, utilizan más elemento dando significado a cada uno de ellos.

En seguida se muestra lo observado en la pregunta *¿Cómo analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos?*

En el examen diagnóstico algunos estudiantes no observan elementos que les pueden ayudar para su análisis, otros analizan el rango o valores aislados como máximos y mínimos, también consideran acumulaciones de datos centrales, sin embargo, no realizan una adecuada interpretación, lo mismo ocurre cuando se les pide analizar de forma libre un conjunto de datos, obtienen media, porcentajes, sumas, gráficas, moda. En el examen final los alumnos analizan la media, datos centrales, la desviación, rango, mediana y moda llegando a una adecuada interpretación de la variabilidad existente. Cuando se les pregunta cómo pueden analizar datos, los estudiantes hacen referencia a la media, moda, varianza desviación estándar, mediana, gráficas, frecuencias, intervalos y usando diferentes representaciones, en otras palabras, en el examen final los estudiantes cuentan con más recursos para poder analizar conjuntos de datos.

En cuanto a la pregunta *¿Cómo utilizan, los estudiantes, la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones?* Se observa lo siguiente:

En el examen diagnóstico, con referencia a la venta de aspirinas, los estudiantes básicamente están considerando publicidad, población, lugares de venta, reacciones, cantidad de sustancia activa. Mientras en el final se centran en el control de calidad, lo cual nos dice que están conscientes de la variabilidad que puede existir en la sustancia activa.

Con respecto a la compra del boleto de lotería, los estudiantes consideran en el examen diagnóstico, los instintos, lo que ya ha ocurrido, es decir, boleto que ha salido ganador anteriormente sin tomar en cuenta el azar existente en ese tipo de juegos. En el examen final consideran las pérdidas que tendrán, posibilidades de ganar, el número de premios y el comprar varios boletos.

En lo que concierne a la pregunta *¿Cómo son las conexiones matemáticas que establecen los alumnos en el tema de variabilidad?* se tiene lo siguiente:

Referente a los fenómenos donde observan variabilidad, son muy similares en el examen diagnóstico y en el examen final. Donde podemos ver diferencias es en las conexiones aritméticas y estadísticas, ya que en el examen final aparecen una gran variedad de éstas.

CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones generales que se obtuvieron después de llevar a cabo el experimento de enseñanza. Éstas se dan, básicamente, retomando las preguntas de investigación propuestas en el Capítulo 1.

- El concepto de Variabilidad sólo lo representan utilizando lenguaje natural. Se pudo observar que el concepto de media o media aritmética lo representan de forma escrita como el promedio, de manera formal como el punto de equilibrio en un conjunto de datos, aritméticamente como el cociente de la suma de los datos entre el total de ellos y algebraicamente utilizando sumatorias y subíndices. Otros conceptos que aparecen en las respuestas de los estudiantes son el rango, diagrama de puntos, desviación estándar e intervalo.
- Con respecto a cómo comunican los estudiantes el concepto de variabilidad pudimos clasificarlo en tres definiciones, aunque en esencia es la misma idea. La primera de ellas es, “los datos tomados de alguna muestra o población siempre van a ser diferentes, siempre van a estar variando con respecto a lo que se va a analizar estadísticamente”, la segunda nos dice que “es una característica que no se va a encontrar en un estado fijo, es aquello que cambia” y la última de éstas: “significa cambio, toda aquella característica que no permanece fija”.
- Con relación a la manera en que los estudiantes analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos, se observaron los tres casos siguientes: Lo hacen tomando un intervalo donde está incluida la media; considerando un rango y analizando la moda dentro de éste y por último, con base en la media aritmética.
- En relación a cómo utilizan la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones, se lograron observar dos procesos: uno de ellos es que los estudiantes hacen comparación entre valores de rango, varianza, media, mediana y moda. El otro es analizando la media y la desviación estándar, siendo este último valor el que les ayudaba a elegir aquel conjunto de datos con menor variación.

En cuanto al aprendizaje del tema de variabilidad se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los estudiantes justifican sus respuestas realizando conjeturas propias, posteriormente las discuten en equipos para luego defenderlas frente al grupo. Por ejemplo, se les pide que individualmente realicen las sumas de las desviaciones de tres colecciones de datos que se les pide que ellos mismos propongan, ellos obtienen que la suma es igual a cero, lo discuten en equipo y posteriormente se hace una discusión grupal, llegando todos a que la suma de las desviaciones siempre es igual a cero. Esto se pudo haber demostrado, sin embargo, por ser un primer acercamiento al tema se concibió como una prueba empírica, pero suficiente como para ser aceptada como una justificación. Posteriormente la profesora intervino para hacerles saber que está es una de las propiedades de la media aritmética, que está es la razón por la que a la media se le considera como el punto de equilibrio de un conjunto de datos.
- Las conexiones que se pudieron observar en las respuestas de los estudiantes están relacionadas con, aritmética, geometría plana, geometría analítica y algebra.
- Los estudiantes llegan a la conclusión que lo más adecuado cuando nos piden dar una respuesta a un problema donde los datos corresponden a la variable "tiempo" es mejor dar un intervalo, ya que es importantes siempre considerar la variabilidad existente en femémonos aleatorios.

Con relación a las características que muestran las interacciones, entre el grupo, los alumnos, el profesor y los contenidos, concluimos lo siguiente:

- Aproximadamente un 98% de alumnos participaban en clase sin temor a ser evidenciados o rechazados. Esto lo que nos dice es que tenían confianza en sí mismos.
- Se observó una buena relación entre estudiantes y entre profesora con estudiantes, esto creó un buen ambiente de trabajo, sobre todo en el grupal. Se dio una buena relación de compañerismo y con ello se logró un avance entre pares.
- Al inicio fue difícil el trabajo en equipo, pero después de cinco clases ya lo hacían de manera natural, apoyándose entre sí y haciendo aportaciones al equipo.
- Para el trabajo grupal tuvieron que aprender a hablar uno a la vez, escuchar a sus compañeros y entre todos llegar a conclusiones. Al final del curso se vio un avance muy favorecedor, ayudándose entre todos y convenciendo a aquellos compañeros que tenían una idea errónea del concepto que se estaba tratando.
- Con respecto a la comunicación, al inicio del curso pocos eran los alumnos que participaban de manera voluntaria pero, al final, ya eran casi todos los que levantaban la mano para participar.
- De 42 alumnos, el 95% asistió en forma regular, estuvieron en todas las sesiones. Sólo hubo una baja y fue por cuestiones familiares que le impidieron continuar con su bachillerato momentáneamente. Lo anterior muestra un cierto compromiso con su papel de estudiantes.
- Con respecto a trabajar en la resolución de problemas, los alumnos resolvieron problemas no rutinarios, sin decirles cómo resolverlos, analizaron conjuntos de datos para la toma de decisiones, visualizaron procesos para describirlos y posteriormente conjeturar definiciones de éstos.

Con respecto al papel de la profesora se puede mencionar lo siguiente:

- Realizó un proceso de enseñanza fundamentado en los conocimientos previos.

- Cotidianamente, animó a los alumnos a pensar, a preguntar, a resolver problemas, a discutir sus ideas, a discutir sus estrategias, a discutir sus soluciones.
- Asignó tareas estadísticas útiles para implicar y retar intelectualmente a los alumnos.
- Secuenciar coherentemente las lecciones a lo largo de los niveles de enseñanza.
- Fomentó en los estudiantes el aprecio de la estadística como disciplina y creación humana.
- Aunque no sin dificultades, se mantuvo "en la sombra", dejando el papel protagónico a los alumnos.
- Asigno tareas y coordinó actividades tendientes a desarrollar el pensamiento matemático, es decir, cotidianamente hizo énfasis en: la comunicación matemática, la resolución de problemas, el establecimiento de conexiones matemáticas, hacer uso de distintas representaciones matemáticas y su conversión de una en otra y, por último en la elaboración de argumentos de tipo matemático.

Algunas conclusiones generales que encontramos en la aplicación de la propuesta son:

- Sí se puede trabajar con lo que los alumnos saben al inicio del curso. A partir de esto se pueden planear las clases. De esta manera ellos van construyendo y/o formalizando los conceptos estadísticos.
- Algunos estudiantes muestran dificultad al realizar lectura entre los datos, específicamente al identificar la moda en la representación gráfica.
- Cuando los estudiantes construyen las definiciones de los conceptos básicos de estadística, no es necesario que se aprendan las fórmulas.
- Los estudiantes reconocen la omnipresencia de variabilidad al decir que "Es algo que existe en todo lo que nos rodea".
- La propuesta en la forma de trabajo ha dado resultados favorecedores para considerar su aplicación en cursos posteriores y no únicamente de estadística, sino de cualquier materia.

Considerando todos estos aspectos podemos confirmar nuestra hipótesis inicial sosteniendo que el diseño de una propuesta didáctica y el ambiente de aprendizaje en el que se pone en práctica, con base en principios del social constructivismo pueden favorecer el logro de aprendizaje con comprensión de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística así como robustecer valores y habilidades que caracterizan la propuesta pedagógica del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

REFERENCIAS DOCUMENTALES

Abreu, J., Benítez, H., Bracho, F., Bracho, J. (2014). *Consideraciones para la mejora de la Educación Matemática en la UNAM*. Estándares para la Estadística y la Probabilidad. SDI-SUMEM.

Batanero C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.* UNO, 25, 41-58.

Batanero C., Godino, J, D., Green, D. R., Colmes, P. & Vallecillos, A, (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 25 (4), 527-547.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. España: GEEUG.

Bikner-Ahsbahs, A. & Williams, G. (2009). Comparing and contrasting methodologies. A commentary. In: Baruch Schwarz, Tommy Dreyfus and Rina Hershkowitz. (Editors). Transformation of Knowledge Through Classroom Interaction. pp. 261-270. New York: Routledge. Taylor & Francis Group.

Bransford, J. D., Brown, A. L. & Cocking, R. R. (1999). The Design of Learning Environments. In: J. D. Bransford, A. L. Brown & R. R. Cocking (Eds.), *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School (119-142).* Washington, D. C.: National Academic Press.

Bransford, J., Zech, L., Schwartz, D., Barron, B., Vye, N. & the Cognition and Technology Group (CTGV). (2000). Designs for Environments That Invite and Sustain Mathematical Thinking. In: P. Cobb, E. Yackel & K. McClaain (Eds.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom. Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design (275-324).* Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Canada, D. (2006). Elementary pre-service teachers' conceptions of variation in a probability context. *Statistics Education Research Journal,* 5(1), 36-63.

Canada, D.L. (2008). The known mix a taste of variation. *The Mathematics Teacher, 102*(4), 286–291.

Charur, C. Z. (1993). *Habilidades básicas para la docencia*. México: Editorial Patria.

Cobb, P., Wood, T. and Erna Yackel. (1991). A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics. In: Ernst von Glasersfeld. Editor. Radical Constructivism in Mathematics Education. pp.157-176. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Colegio de Ciencias y Humanidades. *Informe sobre la gestión directiva 2010-2014.* Lic. Lucía Laura Muñoz Corona.

Confrey, J. and Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments Through Conjeture-Driven Reseach Design. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). Handbook of Researh Design in Mathematics and Science Education. pp. 231-265. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relation-ships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (5), 382-393.

de León, I. N.; Simons, B. C.; Batista, G. G.; Fernández, F. A.; Dosil, C. G.; Sánchez, M. G.; Aguilera, A. R.; Zmud, A. F. M. y Alfonso, O. V. (2009). Metodología de la investigación educacional. Segunda parte. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Delmas, R., Garfield, J., Coms, A., & Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal,* 6(2), 28-53.

Díaz, J., Batanero, C., & Cañizares, M. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* España.: Editorial Síntesis.

Dominguez, J. & Dominguez, J. A. (2006). *Estadística y probabilidad. El mundo de los datos y el azar*. México.: Oxford.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM. (2016). Documento personal del EDA. Informes de trabajo de profesores de carrera, participantes en el EDA en los periodos 2012 al 2015.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM. (2016). Programas de Estudio. Área de Matemáticas. Matemáticas I-IV. México: Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

Farmer, J. (2008). understanding statistical variation: A response to Sharma. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(1), 59–62.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Schaeffer, R. (2005). *A curriculum Framework for pre K-12 Statistics Education. Informe presentado a la American Statistical Association.*

Gal, I. (2004). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In Graham, A. Jones (Ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 43—70.

Garfield, J. & Ben-zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. International Statistical review, 75(3), 372-396.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in mathematics education*. 19(1). 44-63.

González, M. & Medina, L. (2015). *Alicia en el país de las Estadísticas con R y Excel.* México.: UNAM-FES Acatlán.

Hacking, I. (2005). *El surgimiento de la probabilidad.* Un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística. España.: Editorial Gedisa.

Johnson, R. (2005). *Estadística elemental*. México.: Trillas.

Klausmeier, H. J. y Goodwin, W. (1983). *Psicología Educativa*. México: Harla.

Konold, C. & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. Journal for Research in Mathematics Education, 33(4), 259-289.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Makar, K., & Canada, D. (2005). "Preservice teachers' conceptions of variation." In the *Proceedings from the 24th annual meeting of the International Group for Psychology and Mathematics Education*, Australia.

Mendenhall, W., & Reinmuth, J. (1981). *Estadística para administración y economía*. EE.UU.: Wadsworth International/Iberoamerica.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In: Lynn Arthur Steen. (Editor). On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy. pp. 95-137. Washington, DC: National Academic Press.

Mucchielli, A. (s.f.). *Diccionario de Métodos Cualitativos en Ciencias Humanas y Sociales*. Madrid: Editorial Síntesis.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles for School Mathematics. The Technology Principle. En Jean C. y Sheila G. (Eds.), *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, USA. VA.: NCTM.

Novak, J. D. (1978). El proceso y la efectividad de los métodos de enseñanza. *Perfiles Educativos* (1), 10-31.

Paulos, J.(2014). *El hombre anumérico*. (Llosa, J., Trad.). Barcelona, España.: Tusquets. (Trabajo original publicado en 1990).

Pérez, M. F. (Pérez, 1994). *Las tareas de la profesión de enseñar*. Práctica de la racionalidad curricular. Didáctica aplicable. Madrid: Siglo XXI.

Presentación y Programas de Estudio de Estadística y Probabilidad I y II. http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_estadistica.pdf.

Reading, C. & Shaughnessy, J.M. (2000). Student perceptions of variation in a sampling situation. In the *Proceedings from the 24th annual meeting of the International Group for Psychology and Mathematics Education*, Hiroshima.

Reading, Ch. & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal,* 5(2), 46-66.

Reading, Ch., & Reid J. (2004). Consideration of variation: A model for curriculum development. *Curricular Development in Statistics Education.* Suecia.

Reading, Ch., & Shaughnessy, J. (2004). Reasoning about variation. In Ben-Zvi & Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 201-226)*.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reid, J., & Reading, Ch. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal,* 7(1), 40-55.

Rodríguez, G. P.; Batista, G. G.; de León, I. N. y Inza, M. L. G. (2009). *Metodología de la investigación educacional*. Primera parte. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Sánchez, E. (2013). *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato.* México.: SEP.

Sánchez, E., Inzunsa, S. & Ávila, R. (2009). *Probabilidad y estadística*. México.: Editorial Patria.

Sharma, S. (2007). Exploring pre-service teachers' understanding of statistical variation: Implications for teaching and research. *Australian Senior Mathematics Journal, 21*(2), 31–43.

Shaughnessy, J. & Pfannkuch, M. (2002). How faithful is old faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *The Mathematics Teacher, 95*(4), 252–259.

Shaughnessy, J. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York.: Macmillan.

Shaughnessy, J., & Bergman, B. (1993). Thinking about uncertainty: Probability and statistics. In P. Wilson (Ed.), *Research for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 177-197). New York: Macmillan.

Shaughnessy, M., & Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. ICOTS6.

Steffe, L. P. and Nesher, P. (Editors). (1996). Theories of mathematical Learning. Mahwah, N. J.: LAWRENCE ERLBAUM.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación*. Buenos Aires: Paidos.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In: Douglas A. Grouws. (Editor). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. pp. 127-146. NY: Macmillan Publishing Company.

Vigotsky, L. S. (1973). "*Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar*", en: L. S. Vigotsky, A. R. Luria y otros. Psicología y Pedagogía. Madrid: Akal.

Vigotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

von Glasersfeld, E. (1990). An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical. In: Robert B. Davis, Carolyn A. Maher and Nel Noddings. (Editors). Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. pp. 19-29. Reston Va. NCTM.

Watson, J., Skalicky, J., Fitzallen, N. & Wright, S. (2009). Licorice Production and Manufacturing: All-Sorts of Practical Applications for Statistics. *APMC* 14 (3).

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223–265.

ANEXOS

ANEXO 1. EXAMEN DIAGNÓSTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL: VALLEJO
AREA DE MATEMÁTICAS
Estadística y probabilidad I

Examen diagnóstico-1

Nombre: ____**Grupo:**________

INSTRUCCIONES: Contesta claramente y con pluma cada una de las preguntas.

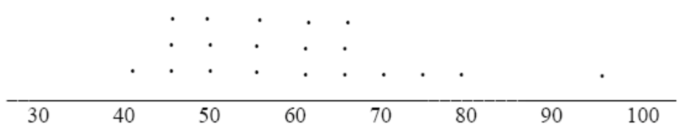
1. Menciona al menos tres fenómenos donde puedas observar variabilidad.
2. ¿Qué significa para ti el concepto de variabilidad?
3. ¿Por qué crees que sean importantes las estadísticas?
4. En el Estado Mexicano existe el INEGI. ¿Qué trabajos se realizan en tal institución?
5. ¿En qué consiste un censo?
6. Menciona cuatro de las enfermedades más recurrentes en nuestro País (México).
7. De las siguientes características físicas ¿Cuál es la más predominante en la población mexicana?
   a) Altura
   b) Obesidad
   c) Color de piel

8. Un fabricante de aspirinas ¿Qué es lo que tiene que considerar para qué éstas salgan a la venta?
9. ¿Acostumbras a leer tu horóscopo astrológico?
   ¿Por qué?
10. Mario está considerando comprar un boleto de lotería. Tú, ¿Qué aspectos le recomendarías que considere para llegue a tomar una buena decisión?
11. Cuando te ocurre algo que ya has soñado anteriormente, ¿Crees que se deba al destino o a la casualidad? ¿Por qué?
12. ¿Tienes experiencia con algún juego de azar?
    [Sí] ¿Cuál o Cuáles?
    [No]
13. ¿En una familia con seis hijos (H=hombre, M=mujer), cuál secuencia es más probable que ocurra?

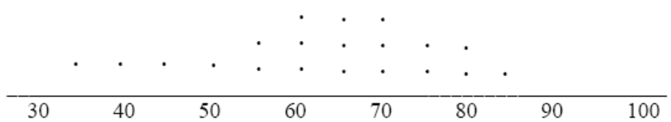
a) HMMHMH

b) HHHHMH
c) HHHMMM.
¿Por qué has seleccionado esa opción?

14. Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte estudiantes voluntariamente estuvieron despiertos toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 de la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el gráfico inferior indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen.
Examina los dos gráficos con cuidado.



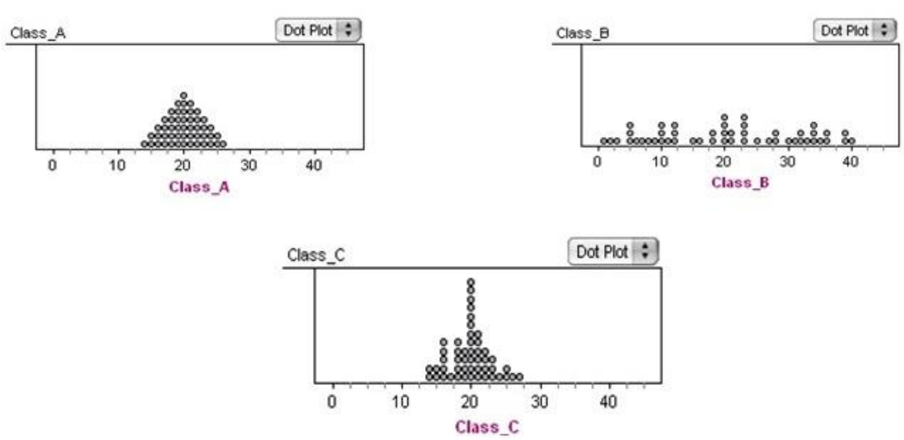
Puntuaciones en el examen del grupo que no durmió



Puntuaciones en el examen del grupo que durmió

¿Escribe a qué conclusión has llegado?

15. Tres grupos A, B y C, realizaron el experimento de obtener una canica de una urna que contiene 3 canicas blancas y 3 canicas negras (40 veces por alumno); una vez obtenida la canica, esta se regresaba a la urna. Cada alumno anotó el número de veces que obtuvo una canica blanca, reunieron los resultados de todo el grupo y los graficaron como se muestra a continuación.



Se cree que algunos resultados fueron inventados y otros son reales. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué piensas de los resultados del Grupo A, son reales o inventados?
[ ] Inventados [ ] Reales

Explica por qué piensas así:

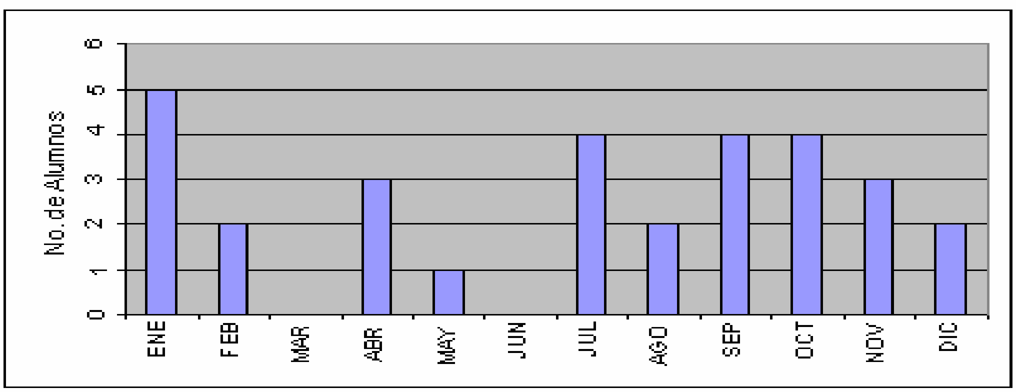
b) ¿Qué piensas de los resultados del Grupo B, son reales o inventados?
[ ] Inventados [ ] Reales
Explica por qué piensas así:

c) ¿Qué piensas de los resultados del Grupo C, son reales o inventados?
[ ] Inventados [ ] Reales
Explica por qué piensas así:

16. ¿Cuál es el promedio diario de niños que asisten a la escuela si se presentan de lunes a viernes los siguientes números de niños: 43, 39, 37, 51 y 50, respectivamente? ***Escribe todas tus operaciones.***

17. Se compran tres cajas de huevos que contienen: C1 = 5 huevos; C2: =7 huevos y C4 = 9 huevos. El precio por docena es de $8, $6 y $4 respectivamente. ¿En cuánto se deberían vender cada huevo de manera que ni se gane ni se pierda? ***Escribe todas tus operaciones.***

18. A los alumnos de un grupo se les preguntó el mes en que cumplían años cada uno de ellos, estos datos fueron graficados como se muestra a continuación.



En cada una de las preguntas, selecciona la respuesta que creas correcta. Para ello analiza detenidamente la gráfica.

A) ¿Cuántos alumnos fueron entrevistados?
a) 10 b) 5 c) 30 d) 60

B) ¿En qué mes hubo más cumpleaños?
a) 4 b) enero c) 3 d) Julio, septiembre y octubre

C) ¿Cuál es la moda?
a) 4 b) enero c) 3 d) Julio, septiembre y octubre

19. Si tú y tu mejor amiga (o) quedaron de verse en una plaza comercial aproximadamente a las 5 de la tarde el día de mañana, y sabes que ella (o) es puntual, incluso llega antes a sus citas. **¿Cuál de las siguientes ideas aplicarías?**

a) Llego exactamente a las 5.
b) Llego 10 minutos antes de las 5 y la espero 10 minutos después de las 5, si no llega me voy.
c) Llego 30 minutos antes de las 5 y la espero 30 minutos después de las 5, si no llega me voy.
d) Llego 60 minutos antes de las 5 y la espero 60 minutos después de las 5, si no llega me voy.

¿Por qué has seleccionado esa opción?

20. Escribe la definición (o lo que entiendas) de los siguientes conceptos:

- **a) Población:**
- **b) Muestra:**
- **c) Variable:**
- **d) Media:**
- **e) Mediana:**
- **f) Moda:**
- **g) Desviación estándar:**
- **h) Gráfica:**
- **i) Azar:**
- **j) Probabilidad:**
- **k) Distribución de probabilidad:**
- **l) Intervalo:**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL: VALLEJO
AREA DE MATEMÁTICAS
Estadística y probabilidad I

Examen diagnóstico-2

Nombre: ____**Grupo:**________

INSTRUCCIONES: Contesta claramente y con pluma cada una de las preguntas.

1. A continuación se te da el siguiente conjunto de datos:

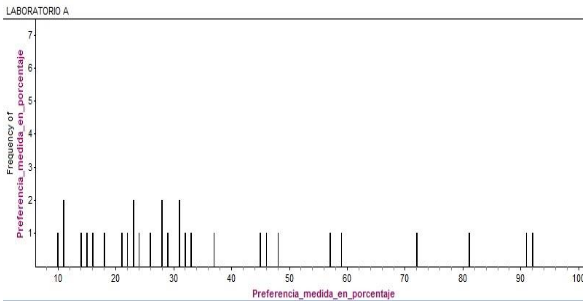
4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

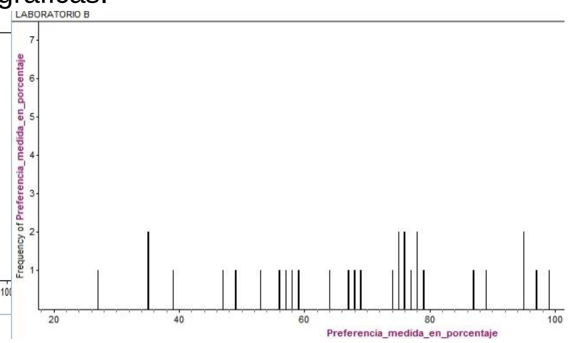
a) Di lo que puedas acerca de este conjunto de números:
b) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

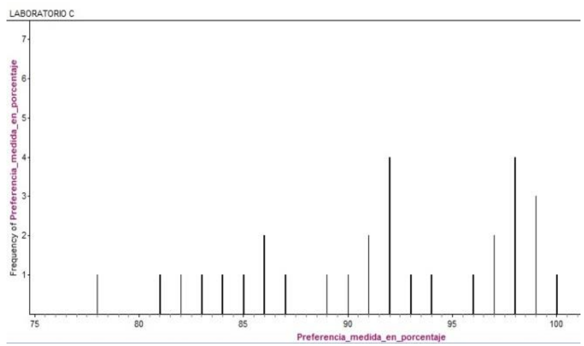
2. Si comparas las siguientes colecciones de números (a y b), ¿Qué puedes decir acerca de ellas?

a) 10, 8, 15, 8, 11, 10, 9, 9, 7, 12, 11, 10, 13, 8, 8, 7
b) 3, 9, 1, 20, 21, 2, 11, 31, 1, 22, 2, 1, 4, 1, 2, 25

3. Se entrevistó a 30 personas para saber su preferencia respecto a tres diferentes laboratorios (A, B, C) los cuales elaboran cierto medicamento que ellos consumen. Los resultados se muestran en las siguientes gráficas.







a) ¿Cuál de los laboratorios consideras más confiable?

b) ¿Por qué?

ANEXO 2. RESULTADOS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO CON BASE EN LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Pregunta de investigación 1.

¿Cuáles son las representaciones, que utilizan los alumnos, de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?

Preguntas en el examen diagnóstico

- Escribe la definición (o lo que entiendas) de los siguientes conceptos:

a) Media:

- La mitad de algo determinado.
- Es el acomodamiento del mayor al menor o del menor al mayor, es el dato que queda justo en medio de la ordenación.
- Suma de todos los datos y dividido entre la cantidad de datos.
- Promedio.
- Tenemos varios datos y el que se repita más esa es la media
- Intervalo que aparece en la mitad de los demás datos.

b) Desviación estándar:

- Un medio que indica que tenemos que ir por otro camino.
- Es el resultado más rechazado o menos votado.
- No tengo idea de que sea.
- Un valor aproximado, pero que es estándar, es decir que se ocupa para todo ese mismo número.
- Estándar es un promedio que se puede desviar en otros números o cantidades.
- El continuo cambio de un resultado.
- Es a la conclusión que se llega por los datos dados.
- Cuando el resultado de la gráfica se desvía de manera inesperada.
- Salida de datos originales a datos más profundizados.
- Un cambio predeterminado.
- Que tanto puede alejarse un dato de lo que nosotros hemos calculado ya que hay variabilidad.

- Desviaciones del resultado promedio.
- La distancia del mayor número al menor.

c) Intervalo:

- Rango o espacio.
- Es la diferencia entre un resultado del otro.
- Algo que se repite después de un determinado momento.
- Es el tiempo que lleva en suceder un algo.
- El tiempo que hay entre dos cosas.
- Son secciones en los que se realiza una acción.
- Un límite entre lo que tengan que estar los datos.
- Algo que se repite.
- Una diferencia entre algunos datos.
- El tiempo que se da entre el efecto estudiado y la gráfica.
- Distancia que hay de un punto fijo a la recta o gráfica.
- Una serie de datos.

Pregunta de investigación 2.

¿Cómo comunican, los alumnos, el concepto de variabilidad y los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?

Preguntas en el examen diagnóstico

- ¿Qué significa para ti el concepto de variabilidad?

Las respuestas de los estudiantes se mencionan a continuación:

- Es algo que cambia.
- Son las opciones que hay de algo, las diferencias, las posibles respuestas.
- Son diferentes resultados.
- Que en una tabulación si sube uno el otro también.
- Que hay diferentes opciones o resultados posibles.

- Mediante la media
- Haciendo uso de la media y la desviación estándar.
- Por medio de la moda.
- Haciendo uso de la mediana.

➢ Si tú y tu mejor amiga (o) quedaron de verse en una plaza comercial aproximadamente a las 5 de la tarde el día de mañana, y sabes que ella (o) es puntual, incluso llega antes a sus citas. ¿Cuál de las siguientes ideas aplicarías?

- Llego exactamente a las 5.
- Llego 10 minutos antes de las 5 y la espero 10 minutos después de las 5, si no llega me voy.
- Llego 30 minutos antes de las 5 y la espero 30 minutos después de las 5, si no llega me voy.
- Llego 60 minutos antes de las 5 y la espero 60 minutos después de las 5, si no llega me voy.

¿Por qué has seleccionado esa opción?

Respuestas dadas por los estudiantes:

- Consideran la variabilidad dando intervalos adecuados (10 minutos antes y 10 después o 30 minutos antes y 30 después) consideran que pueden tener percances.
- Ignoran la variabilidad (llegando exactamente a la hora acordada).

➢ A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6,6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

a) Di lo que puedas acerca de este conjunto de números.

De las respuestas dadas por los estudiantes se identifican algunos procesos realizados que corresponden a conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística, pero sobre todo, se centran en la comunicación de los datos:

- Son número pares e impares
- Hay múltiplos de 3 y de 2
- Van del 4 al 10
- Dan la suma de los datos
- Observan el rango
- Identifican el total de datos
- Identifican las modas
- No tienen alguna secuencia

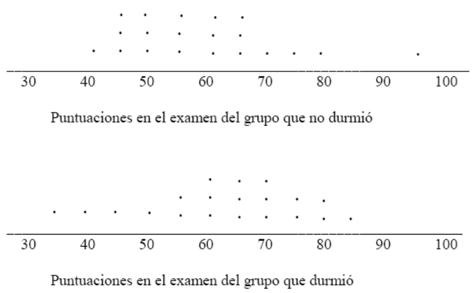
Pregunta de investigación 3.

¿Cómo analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos?

Preguntas en el examen diagnóstico

- Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte estudiantes voluntariamente estuvieron despiertos toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 de la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el gráfico inferior indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen.

Examina los dos gráficos con cuidado.



¿Escribe a qué conclusión has llegado?

Respuestas dadas por los estudiantes:

- No observan elementos que pueden ayudar a realizar un análisis.
- Utilizan el rango para realizar un análisis.
- Analizan datos aislados, como máximos o mínimos.
- Analizan mediante acumulaciones de datos centrales.
- Analizan intervalos específicos, como calificaciones mínimas, intermedias o máximas.

➢ A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

b) Desde el punto de vista de las matemáticas ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

Los estudiantes realizan algunos tratamientos con los datos, éstos se mencionan a continuación:

- Obtienen la moda.
- Suman los datos.
- Obteniendo la media.
- Obteniendo mínimo común múltiplo.
- Sacan porcentajes.

- Grafican los datos.

➢ Si comparas las siguientes colecciones de números (a y b), ¿Qué puedes decir acerca de ellas?

a) 10, 8, 15, 8, 11, 10, 9, 9, 7, 12, 11, 10, 13, 8, 8, 7

b) 3, 9, 1, 20, 21, 2, 11, 31, 1, 22, 2, 1, 4, 1, 2, 25

Los estudiantes realizan los siguientes tratamientos en los datos:

- Obtener las modas.
- Identifican valores máximos y mínimos.
- Sumando los datos en cada colección.
- Sumando los datos en cada colección y comparándolas.
- Obteniendo las medianas y comparándolas.

Pregunta de investigación 4.

¿Cómo utilizan, los estudiantes, la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones?

Preguntas en el examen diagnóstico

➢ Un fabricante de aspirinas ¿Qué es lo que tiene que considerar para qué éstas salgan a la venta?

Los estudiantes opinan que se tiene que considerar:

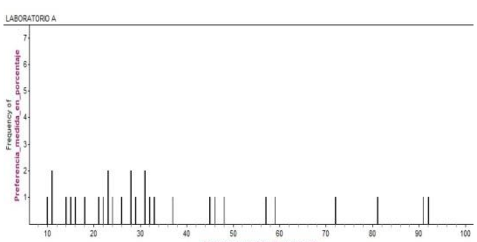
- La cantidad de sustancia activa.
- La publicidad del producto.
- El precio para la población.
- Los lugares de venta.
- Malestares de la población.
- Reacciones que puede causar.
- Su efectividad.

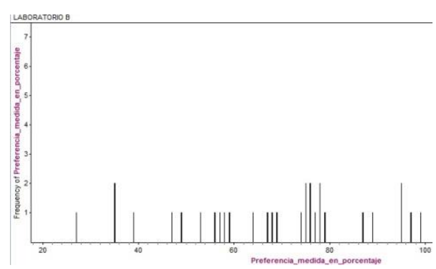
➢ Mario está considerando comprar un boleto de lotería. Tú, ¿Qué aspectos le recomendarías que considere para llegue a tomar una buena decisión?

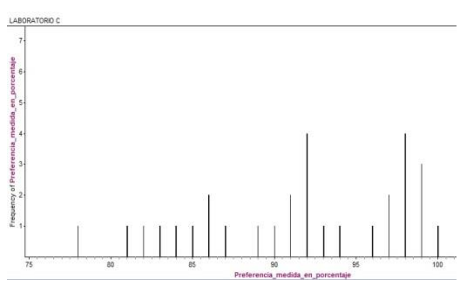
Las respuestas de los estudiantes son:

- Seguir los instintos.
- Comprar más de un boleto.
- Cuánto dinero va a gastar.
- Posibilidades de ganar.
- Tiene las mismas posibilidades de ganar que de perder.
- Que revise cuáles son los números que aparecen más seguido.
- Los números salen al azar y no con un orden o esquema determinado.
- Que no lo haga, porque la mayoría de los juegos están arreglados.
- Que compre uno en donde el sorteo sea de pocos números.

➢ Se entrevistó a 30 personas para saber su preferencia respecto a tres diferentes laboratorios (A, B, C) los cuales elaboran cierto medicamento que ellos consumen. Los resultados se muestran en las siguientes gráficas.







a) ¿Cuál de los laboratorios consideras más confiable?

b) ¿Por qué?

Laboratorio	A	B	C

#de estudiantes	0	4 estudiantes	38 estudiantes
Justificación	----------	• Estadísticamente es mejor. • Hay más gente en el laboratorio B. • Porque hay porcentajes más altos. • Porque los resultados son casi iguales.	• Consideraron el rango. • Porque tiene números más altos en cuanto a preferencia. • Haciendo uso de valores más frecuentes (moda). • Observando intervalos con mayor frecuencia. • Porque el porcentaje de preferencia es 75 o más.

Pregunta de investigación 5.

¿Cómo justifican, los alumnos, sus resultados matemáticos?

Lo observado en las justificaciones de los estudiantes en esta evaluación inicial es que lo hacen con base en:

- La intuición.
- Las creencias.
- Las apariencias.
- Aislamiento de datos.

Pregunta de investigación 6.

¿Cómo son las conexiones matemáticas que establecen los alumnos en el tema de variabilidad?

Preguntas en el examen diagnóstico

➢ Menciona al menos tres fenómenos donde puedas observar variabilidad.

Las respuestas de los estudiantes son:

- Temperaturas.
- Juegos de azar.
- Clima.
- Población.
- En gustos sexuales.
- La llegada de un profesor al salón de clase.
- Cuántos pasos doy de mi casa a la parada del camión.

- El choque de un auto.
- En la economía.
- La velocidad de un carro.
- En el transporte que vas a tomar.
- En un fenómeno natural.
- Razas de perros.
- Los precios de un producto.
- Pronostico del tiempo.

➢ A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

b) Desde el punto de vista de las matemáticas ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

En los tratamientos de los estudiantes se observa que realizan lo siguiente:

- Obtienen la media.
- Obtienen la moda.
- Suman los datos.
- Sacan el mínimo común múltiplo.
- Sacan porcentajes.
- Grafican los datos.

Pregunta de investigación 7.

¿Qué características muestran las interacciones, entre el grupo, los alumnos, el profesor y los contenidos, en el salón de clase?

Como son sus primeras clases de Estadística al momento que se aplica este examen diagnóstico es mínimo lo que se podría decir de las interacciones. Siendo ésta una materia optativa, es poco probable que se conozcan los alumnos entre sí, sin embargo, muestran respeto hacia sus compañeros y hacia la profesora. Manifiestan su interés hacia la clase y son responsables con el horario de clase.

ANEXO 3. PLANEACIÓN DE LAS SESIONES

El diseño de la planeación de las sesiones (cada sesión consta de 2 horas) contiene una breve descripción de lo que se abordó en la sesión, así como los materiales utilizados y la forma en la que se trabajó.

En la siguiente tabla se puede observar la planeación general del curso.

Distribución de las sesiones			
Sesión	**Forma de trabajo**	**Descripción de la sesión**	**Materiales utilizados**
1	Grupal	- Presentación - Se les da a conocer el material que necesitan para el curso. - Se les da a conocer Normas socio-matemáticas. - Se les da las expectativas que se tiene de ellos. - Les doy a conocer la forma en que serán calificados.	1. Les pido que en una hoja de su cuaderno escriban las siguientes preguntas y las contesten (con pluma): ➢ ¿Por qué elegiste la materia de estadística? ➢ ¿Qué sabes de estadística? ➢ ¿Cuáles son las expectativas que tienes del desarrollo del curso de estadística?
2	Equipos y grupal	- Conocer el plan de estudios de Estadística y Probabilidad 1. Por equipos, se les reparte el plan de estudios para que realicen un resumen de la parte que les tocó, luego lo presentan ante todo el grupo.	1. Plan de estudios de estadística y Probabilidad 1. 2. Libreta. 3. Pluma. 4. Pizarrón. 5. Marcadores.
3	Individual	- Prueba diagnóstica.	Se les entrega en papel, la prueba diagnóstica previamente elaborada, para que la respondan. Ver anexo.
4	Individual	- Prueba diagnóstica-parte 2.	Se les entrega en papel, la prueba diagnóstica-parte 2 previamente elaborada, para que la respondan. Ver anexo.
5	Individual y equipo	- Problema del Geiser	Por escrito en una hoja se les presenta el problema “Old Faithful” **Individual** (se les da una hoja donde anotarán: nombre, grupo, fecha, tarea géiser 1, individual ¿Cuánto tiempo podría esperar un espectador para observar la erupción del Old Faithful?

			- Justifica tu respuesta **En equipo** (se les da una hoja donde anotarán: nombres, grupo, fecha, tarea géiser 2, equipo) ¿Cuánto tiempo podría esperar un espectador para observar la erupción del Old Faithful? (ponerse de acuerdo en una respuesta, o si no se pudo establecer un acuerdo, que anoten eso en la hoja) Justifica tu respuesta
6	Individual y grupal. Equipo	- Fenómenos - Definir (lo que ellos creen que es): Estadística, población, muestra y variable.	- Se discute tarea extra-clase. Proponer 3 fenómenos con el comportamiento del fenómeno del geiser. - Hoja blanca para que escriban lo que ellos creen que es cada uno de los conceptos.
7	Grupal	- Generalización de conceptos: Estadística, población, muestra y variable.	La hoja en la que trabajaron en equipo. Pizarrón, marcador y borrador.
8	Grupal	- Generalización de conceptos-parte 2: Estadística, población, muestra y variable.	La hoja en la que trabajaron en equipo. Pizarrón, marcador y borrador.
9	Equipo y Grupal	- Clasificación de las variables.	Hoja donde escribieron 3 ejemplos donde identifican: población, muestra y variable. Pizarrón, marcadores, borrador.
10	Grupal Equipo y Grupal	- Retomando el problema del geiser. - Definir el concepto de frecuencia y tabla de distribución de frecuencia.	Hoja con el problema “Old Faithful” que se les dio en la sesión 5. Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hojas blancas, pluma.
11	Individual y equipo	- Definir el concepto de media.	Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hoja blanca, pluma.
12	Grupal	- Definir el concepto de media.	Hoja en la que escribieron la definición de media en equipo. Pizarrón, marcadores, borrador. Libreta y pluma.
13	Grupal	- Retomar las definiciones de variables. (No habían quedado claras).	Se trabaja con tarea extra clase. Se investigó las definiciones formales de los conceptos de variables. Pizarrón, marcadores, borrador.

14	Grupal Equipo y Grupal	- Analizar la diferencia entre media general y media por día. - Analizar la diferencia entre media general y media por día. Parte 2	Se les pide a los alumnos que contesten la siguiente pregunta: ¿Cuándo la media general es igual a la media por día? Se les pide a los alumnos que contesten la siguiente pregunta: ¿Cuándo la media general es igual a la media por día?- Parte 2 Trabajan con datos que tienen en su cuaderno, son dos ejemplos y el historial académico de cada uno de ellos. Pizarrón, marcadores, borrador.
15	Grupal	- Analizar la diferencia entre media general y media por día. Parte 3	Se les pide a los alumnos que contesten la siguiente pregunta: ¿Cuándo la media general es igual a la media por día?- Parte 3 Trabajan con datos que tienen en su cuaderno, son dos ejemplos y el historial académico de cada uno de ellos. Pizarrón, marcadores, borrador.
16	Grupal	- Media ponderada	Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hoja blanca, pluma. Celular (éste no estaba previsto pero lo usaron para tomar foto a la presentación de la diapositiva)
17	Individual Equipo Individual	- Evaluación de variables. - Moda - Problema del cumpleaños	Hoja de su cuaderno y pluma. Hoja blanca y pluma. Hoja con problema de los cumpleaños de un grupo.
18	Grupal	- Análisis de la película 21 Black Jack	Diferentes puntos de vista de la película que vieron previamente.
19	Equipo y grupal	- Problema del cumpleaños	Hoja con problema de los cumpleaños de un grupo. Ver anexo.
20	Individual y equipo	- Concepto de mediana	Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hoja blanca, pluma. Celular (éste no estaba previsto pero lo usaron para tomar foto a la presentación de la diapositiva)
21	Individual, equipo y grupal	- Característica de media, mediana y moda.	Historial académico. Pizarrón, marcadores, borrador.
22	Individual, equipo y grupal	- Problema del salario.	Problema que se entregó por escrito en hoja. Ver anexo.
23	Grupal Grupal	- Problema del salario-parte 2. - Análisis de la lectura de “el surgimiento de la probabilidad”	Problema que se entregó por escrito en hoja. Reporte por escrito de la lectura de los primero s 3 capítulos de “el surgimiento de la probabilidad” de Ian Hacking.
24	Individual, equipo y grupal.	- Problema de un mismo artículo.	Problema que se entregó por escrito en hoja. Ver anexo.
25	Individual y Grupal	- Concepto de rango.	Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo.

	Individual y Grupal	- Problema del mejor juego	Hoja blanca, pluma. Celular (éste no estaba previsto pero lo usaron para tomar foto a la presentación de la diapositiva) Problema que se entregó por escrito en hoja. Ver anexo.
26	Equipo y grupal.	- Problema del mejor juego.	Problema que se entregó por escrito en hoja.
27	Equipo y grupal.	- Problema de las enfermedades.	Problema que se entregó por escrito en hoja. (extra-clase). Ver anexo.
28	Equipo Grupal	- Distancia entre dos puntos. - Concepto de sumatoria.	Datos sugeridos por los equipos. Trabajar con los datos sugeridos por los equipos en la sesión anterior.
29	Grupal	- Conceptos de dispersión.	Trabajar con los datos sugeridos por los equipos en la sesión anterior.
30	Grupal	- Fórmulas de los conceptos de dispersión. - Importancia de la desviación estándar.	Trabajar con los datos sugeridos por los equipos en la sesión anterior.
31	Grupal	- Intervalo. - Retomando el problema del geiser para dar la respuesta más adecuada.	Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hoja blanca, pluma. Celular (éste no estaba previsto pero lo usaron para tomar foto a la presentación de la diapositiva). Proyector, computadora, presentación en PowerPoint previamente elaborada, con las respuestas de los alumnos seleccionadas para trabajar con ellas. Ver anexo. Hoja blanca, pluma. Plots con la gráfica de barras de los datos del Old Faithful y los intervalos de la regla empírica.
32	Individual	- Examen final.	Se les entrega en papel, la prueba diagnóstica previamente elaborada, para que la respondan al final del curso. Ver anexo.

ANEXO 4. EXAMEN FINAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL: VALLEJO

AREA DE MATEMÁTICAS

Estadística y probabilidad I

Examen Final

Nombre: ____Grupo:________

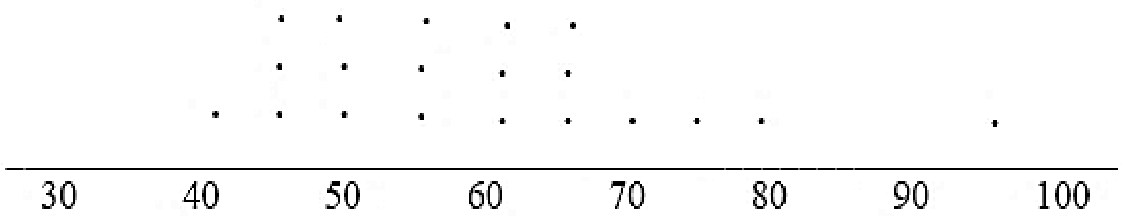
INSTRUCCIONES: Contesta claramente y con pluma cada una de las preguntas.

1. Menciona al menos tres fenómenos donde puedas observar variabilidad.
2. ¿Qué significa para ti el concepto de variabilidad?
3. ¿Por qué crees que sean importantes las estadísticas?
4. En el Estado Mexicano existe el INEGI. ¿Qué trabajos se realizan en tal institución?
5. ¿En qué consiste un censo?
6. Menciona cuatro de las enfermedades más recurrentes en nuestro País (México).
7. De las siguientes características físicas ¿Cuál es la más predominante en la población mexicana?
   d) Altura
   e) Obesidad
   f) Color de piel

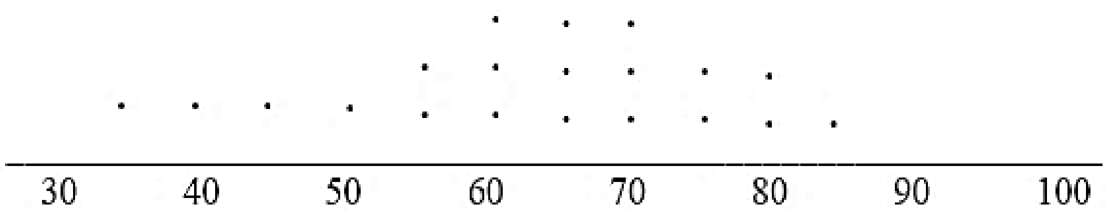
8. Un fabricante de aspirinas ¿Qué es lo que tiene que considerar para qué éstas salgan a la venta?
9. Mario está considerando comprar un boleto de lotería. Tú, ¿Qué aspectos le recomendarías que considere para llegue a tomar una buena decisión?
10. ¿Tienes experiencia con algún juego de azar?
    [Sí] ¿Cuál o Cuáles?
    [No]

11. Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte estudiantes voluntariamente estuvieron despiertos toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 de la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el gráfico inferior indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen.

Examina los dos gráficos con cuidado.



Puntuaciones en el examen del grupo que no durmió



Puntuaciones en el examen del grupo que durmió

¿Escribe a qué conclusión has llegado? Justifícala.

12. ¿Cuál es el promedio diario de niños que asisten a la escuela si se presentan de lunes a viernes los siguientes números de niños: 43, 39, 37, 51 y 50, respectivamente? ***Escribe todas tus operaciones.***

13. Se compran tres cajas de huevos que contienen: C_1 = 5 huevos; C_2: =7 huevos y C_3 = 9 huevos. El precio por docena es de $8, $6 y $4 respectivamente. ¿En cuánto se deberían vender cada huevo de manera que ni se gane ni se pierda? ***Escribe todas tus operaciones.***

14. Si tú y tu mejor amiga (o) quedaron de verse en una plaza comercial aproximadamente a las 5 de la tarde el día de mañana, y sabes que ella (o) es puntual, incluso llega antes a sus citas. **¿Cuál de las siguientes ideas aplicarías?**

a) Llego exactamente a las 5.
b) Llego 10 minutos antes de las 5 y la espero 10 minutos después de las 5, si no llega me voy.
c) Llego 30 minutos antes de las 5 y la espero 30 minutos después de las 5, si no llega me voy.
d) Llego 60 minutos antes de las 5 y la espero 60 minutos después de las 5, si no llega me voy.

¿Por qué has seleccionado esa opción?

15. Escribe la definición (o lo que entiendas) de los siguientes conceptos:

a) **Población:**
b) **Muestra:**
c) **Variable:**
d) **Tipos de variables:**
e) **Media:**
f) **Mediana:**
g) **Moda:**
h) **Varianza**
i) **Desviación estándar:**
j) **Gráfica:**
k) **Azar:**
l) **Probabilidad:**
m) **Intervalo:**

16. A continuación se te da el siguiente conjunto de datos:

4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.

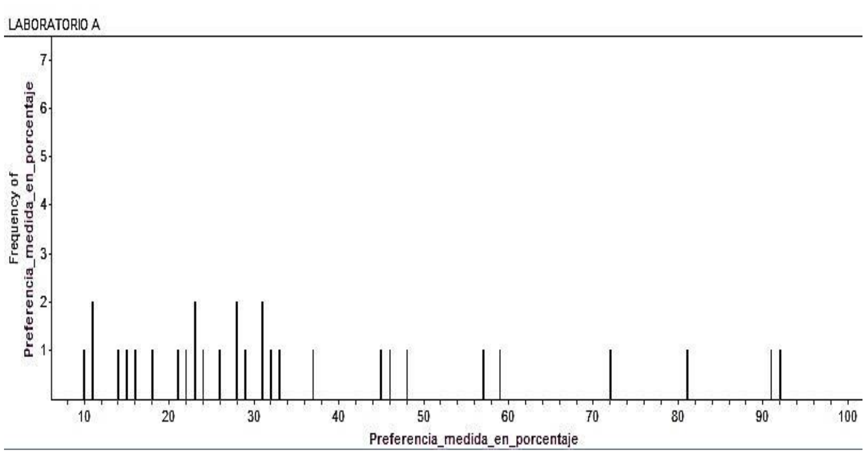
a) Di lo que puedas acerca de este conjunto de números:

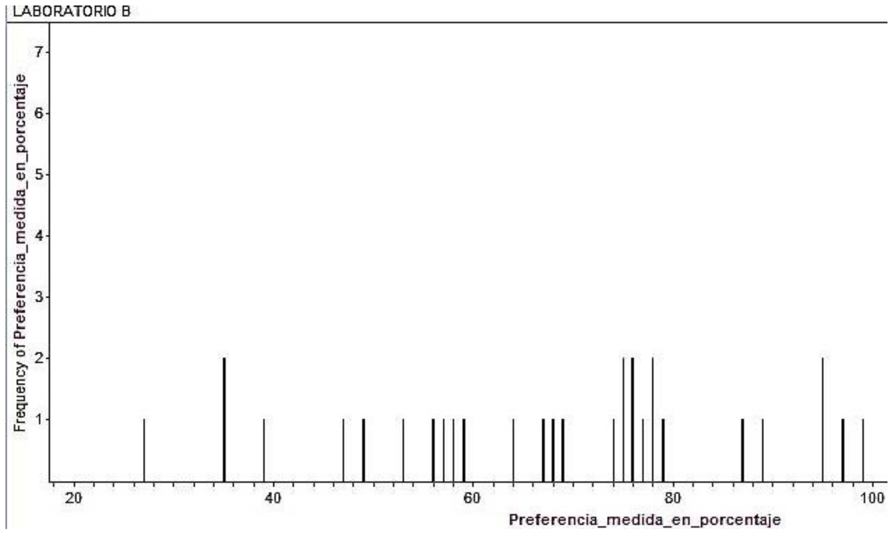
b) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?

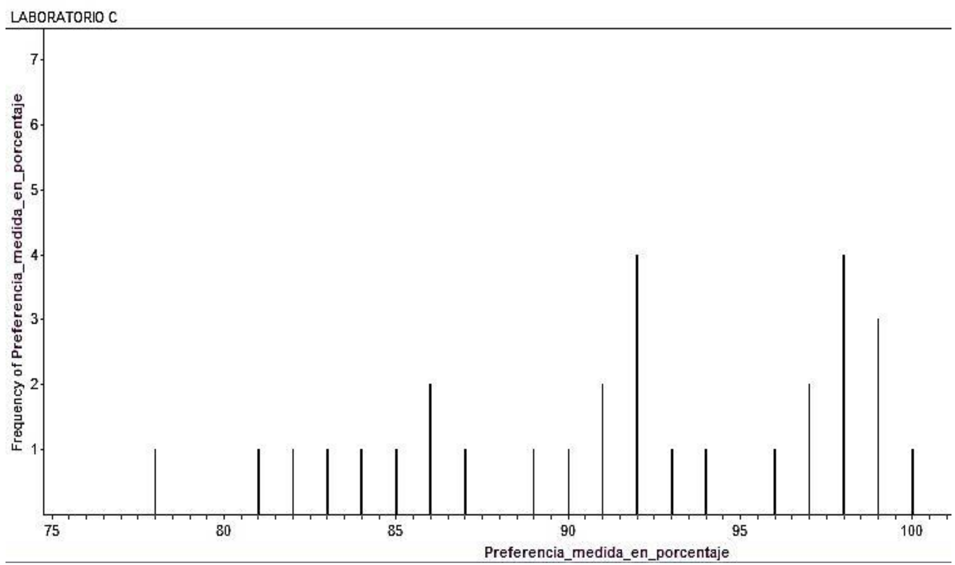
17. Si comparas las siguientes colecciones de números (a y b), ¿Qué puedes decir acerca de ellas?

a) 10, 8, 15, 8, 11, 10, 9, 9, 7, 12, 11, 10, 13, 8, 8, 7
b) 3, 9, 1, 20, 21, 2, 11, 31, 1, 22, 2, 1, 4, 1, 2, 25

18. Se entrevistó a 30 personas para saber su preferencia respecto a tres diferentes laboratorios (A, B, C) los cuales elaboran cierto medicamento que ellos consumen. Los resultados se muestran en las siguientes gráficas.







a) ¿Cuál de los laboratorios consideras más confiable?

b) ¿Por qué?

ANEXO 5. RESULTADOS DEL EXAMEN DIAGNOSTICO VS EXAMEN FINAL

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta de investigación:

1. ¿Cuáles son las representaciones, que utilizan los alumnos, de los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas en el examen diagnóstico:

- Escribe la definición (o lo que entiendas) de los siguientes conceptos:
a) Media
b) Desviación estándar
c) Intervalo.</td></tr>
<tr><td>DIAGNÓSTICO</td><td>FINAL</td></tr>
<tr><td>a) Media:
• La mitad de algo determinado.
• Es el acomodamiento del mayor al menor o del menor al mayor, es el dato que queda justo en medio de la ordenación.
• Suma de todos los datos y dividido entre la cantidad de datos.
• Promedio.
• Tenemos varios datos y el que se repita más esa es la media
• Intervalo que aparece en la mitad de los demás datos.

b) Desviación estándar:
• Un medio que indica que tenemos que ir por otro camino.
• Es el resultado más rechazado o menos votado.
• No tengo idea de que sea.
• Un valor aproximado, pero que es estándar, es decir que se ocupa para todo ese mismo número.
• Estándar es un promedio que se puede desviar en otros números o cantidades.
• El continuo cambio de un resultado.
• Es a la conclusión que se llega por los datos dados.
• Cuando el resultado de la gráfica se desvía de manera inesperada.
• Salida de datos originales a datos más profundizados.
• Un cambio predeterminado.
• Que tanto puede alejarse un dato de lo que nosotros hemos calculado ya que hay variabilidad.
• Desviaciones del resultado promedio.
• La distancia del mayor número al menor.</td><td>a) Media:
• Es el resultado que representa la síntesis de varios datos, es el punto de equilibrio de un conjunto de datos. Se calcula con la suma de datos dividida entre el mismo número de estos.
• Es un promedio de un conjunto de datos.
• Es el punto de equilibrio en un conjunto de datos, es la medida de tendencia central más importante.
• Es el punto de equilibrio de un conjunto de datos, Se calcula sumando todos los datos dividiendo entre el número de datos que hay.

b) Desviación estándar:
• Es la raíz cuadrada de la varianza.
• Es la distancia que hay de un dato con respecto a la media.
• Es una medida de dispersión que nos ayuda a ver cómo están distribuidos los datos en el conjunto.
• Cuánto se aleja el dato de la media.
• Es una medida de dispersión.

• Es la raíz cuadrada de la varianza y sirve para ver que tanto se desvían los datos con respecto a la media.</td></tr>
</table>

c) Intervalo: • Rango o espacio. • Es la diferencia entre un resultado del otro. • Algo que se repite después de un determinado momento. • Es el tiempo que lleva en suceder un algo. • El tiempo que hay entre dos cosas. • Son secciones en los que se realiza una acción. • Un límite entre lo que tengan que estar los datos. • Algo que se repite. • Una diferencia entre algunos datos. • El tiempo que se da entre el efecto estudiado y la gráfica. • Distancia que hay de un punto fijo a la recta o gráfica. • Una serie de datos.	c) Intervalo: • Es el espacio o los datos que se encuentran entre dos valores determinados. Es el más utilizado y el más recomendado para calcular los fenómenos aleatorios. • Espacio o los datos que se encuentran entre dos valores delimitados. • Es el espacio que hay entre un dato y otro. • Son los datos que hay entre dos valores limitados. • Te dice que números hay en un conjunto de datos que están delimitados. • Espacio entre dos valores. • Son los números o datos que se encuentran dentro de dos números específicos, límite inferior y límite superior.

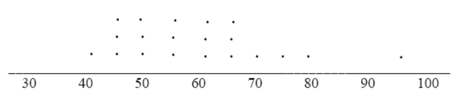
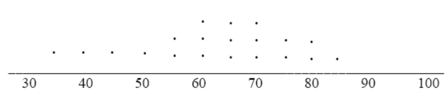
<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta de investigación:
2. ¿Cómo comunican, los alumnos, el concepto de variabilidad y los conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas en el examen diagnóstico:
- ¿Qué significa para ti el concepto de variabilidad?</td></tr>
<tr><td>DIAGNÓSTICO</td><td>FINAL</td></tr>
<tr><td>Como definen de variabilidad:
• Es algo que cambia.
• Son las opciones que hay de algo, las diferencias, las posibles respuestas.
• Son diferentes resultados.
• Que en una tabulación si sube uno el otro también.

Como usan la Variabilidad:
• Que hay diferentes opciones o resultados posibles.

Conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística:</td><td>Como definen de variabilidad:
• Es la característica de la población cuyos datos cambian y se estudian estadísticamente.
• Que a pesar de estar en un mismo grupo siempre presentará características diferentes que lo hacen distinto a los demás.
• Es cuando algo varia, es variable o cambia.
• Que no es constante y tiende a cambiar siempre.
• Es una característica de la población.
• Es algo que existe en todo lo que nos rodea.
Como usan la Variabilidad:</td></tr>
</table>

• Mediante la media • Haciendo uso de la media y la desviación estándar. • Por medio de la moda. • Haciendo uso de la mediana.	• Considerando intervalos adecuados (10 minutos antes y 10 minutos después o 30 antes y 30 después) tendiendo presente que pueden ocurrir imprevistos. • Ignoran la variabilidad (exactamente a la hora que quedaron; 4 estudiantes). Conceptos fundamentales con los que se puede analizar la variabilidad estadística: • Identificando el rango. • Utilizando la frecuencia. • Por medio de la moda. • Utilizando la media • Obteniendo la desviación estándar. • Haciendo uso de la mediana.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta de investigación
3. ¿Cómo analizan la variabilidad existente en un conjunto de datos?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas en el examen diagnostico

- Cuarenta estudiantes universitarios participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte estudiantes voluntariamente estuvieron despiertos toda la noche anterior al examen (grupo que no durmió). Los otros veinte estudiantes (el grupo control) se acostaron a las 11 de la noche anterior al examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante particular. Por ejemplo, los dos puntos encima del número 80 en el gráfico inferior indican que dos estudiantes en el grupo control tuvieron una puntuación de 80 en el examen.
Examina los dos gráficos con cuidado.

Puntuaciones en el examen del grupo que no durmió

Puntuaciones en el examen del grupo que durmió

¿Escribe a qué conclusión has llegado?</td></tr>
<tr><th>DIAGNÓSTICO</th><th>FINAL</th></tr>
<tr><td>• No observan elementos que pueden ayudar a realizar un análisis.
• Utilizan el rango para realizar un análisis.
• Analizan datos aislados, como máximos o mínimos.
• Analizan mediante acumulaciones de datos centrales.
• Analizan intervalos específicos, como calificaciones mínimas, intermedias o máximas.</td><td>Analizan la media.
Examinan mediante acumulaciones de datos centrales.
Consideran la desviación.
Utilizan el rango para realizar un análisis.
Analizan la mediana.
Comparan la moda.</td></tr>
</table>

Preguntas en el examen diagnostico - A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: **4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10 6, 6, 8, 7, 6, 8, 5, 8.** b) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colecciór números?	
DIAGNÓSTICO	**FINAL**
• Obteniendo la media. • Obteniendo la moda. • Sumar los datos. • Sacando el mínimo común múltiplo. • Sacar porcentajes. • Graficar los datos.	• Calcular la media. • Obtener la moda. • Obtener mediana. • Obtener la varianza. • Calcular la desviación estándar. • Se pueden graficar. • Obtener las frecuencias absolutas y relativas. • Sacar intervalos. • Representar de diferentes maneras.

Preguntas en el examen diagnostico - Si comparas las siguientes colecciones de números (a y b), ¿Qué puedes decir acerca de ellas? **c) 10, 8, 15, 8, 11, 10, 9, 9, 7, 12, 11, 10, 13, 8, 8, 7** **d) 3, 9, 1, 20, 21, 2, 11, 31, 1, 22, 2, 1, 4, 1, 2, 25**	
DIAGNÓSTICO	**FINAL**
• Obtener las modas. • Sacando rangos. • Sumando los datos en cada colección. • Sumando los datos en cada colección y comparándolas. • Analizando dispersión en ambas y comparándolas. • Obteniendo las medianas y comparándolas.	• Comparar rangos. • Analizaron el valor de la media. • Compararon desviaciones estándar. • Obteniendo las medianas y comparándolas. • Compararon la moda.

Pregunta de investigación

4. ¿Cómo utilizan, los estudiantes, la variabilidad en la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones?

Preguntas en el examen diagnostico

- Un fabricante de aspirinas ¿Qué es lo que tiene que considerar para qué éstas salgan a la venta?

DIAGNÓSTICO	FINAL
• La cantidad de sustancia activa. • La publicidad del producto. • El precio para la población. • Los lugares de venta. • Malestares de la población. • Reacciones que puede causar. • Su efectividad.	• Control de calidad…la cantidad de sustancia activa. • Costo y ganancia. • Tiempo de caducidad. • La presentación del producto. • Hacer pruebas de calidad.

Preguntas en el examen diagnostico

- Mario está considerando comprar un boleto de lotería. Tú, ¿Qué aspectos le recomendarías que considere para llegue a tomar una buena decisión?

DIAGNÓSTICO	FINAL
• Seguir los instintos. • Comprar más de un boleto. • Cuánto dinero va a gastar. • Posibilidades de ganar. • Tiene las mismas posibilidades de ganar que de perder. • Que revise cuáles son los números que aparecen más seguido. • Los números salen al azar y no con un orden o esquema determinado. • Que no lo haga, porque la mayoría de los juegos están arreglados. • Que compre uno en donde el sorteo sea de pocos números.	• Posibilidades de ganar o perder. • Cuánto va a perder. • Cuántos boletos hay. • Considerar el azar. • Confiabilidad de la institución que organiza. • Cuántos premios habrá. • Que compre muchos boletos.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta de investigación
6. ¿Cómo son las conexiones matemáticas que establecen los alumnos en el tema de variabilidad?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas en el examen diagnostico
- Menciona al menos tres fenómenos donde puedas observar variabilidad.</td></tr>
<tr><td>DIAGNÓSTICO</td><td>FINAL</td></tr>
<tr><td>• Temperaturas.
• Juegos de azar.
• Clima.
• Población.
• En gustos sexuales.
• La llegada de un profesor al salón de clase.
• Cuántos pasos doy de mi casa a la parada del camión.
• El choque de un auto.
• En la economía.
• La velocidad de un carro.
• En el transporte que vas a tomar.
• En un fenómeno natural.
• Razas de perros.
• Los precios de un producto.
• Pronostico del tiempo.</td><td>• Temperaturas.
• Juegos de azar.
• Velocidad de un carro.
• Erupciones volcánicas.
• Altura de las personas.
• Edades.
• Peso.
• Tiempo de transporte.
• Esperanza de vida.
• Clima.
• Magnitud de los sismos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Preguntas en el examen diagnostico

- A continuación se te da el siguiente conjunto de datos: 4, 6, 9, 9, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 9, 6, 10, 6, 6 8, 7, 6, 8, 5, 8.

b) Desde el punto de vista de las matemáticas, ¿Qué puedes hacer con la misma colección números?</td></tr>
<tr><td>DIAGNÓSTICO</td><td>FINAL</td></tr>
<tr><td>• Obteniendo la media.
• Obteniendo la moda.
• Sumar los datos.
• Sacando el mínimo común múltiplo.
• Sacar porcentajes.
• Graficar los datos.</td><td>• Conexiones aritméticas: sumas, divisiones, raíz cuadrada, porcentajes.

• Conexiones estadísticas: media, moda, mediana, rango, desviación media, desviación estándar, gráficas.</td></tr>
</table>