



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

ELECTRODINÁMICA GEOMÉTRICA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO
P R E S E N T A:

ANATOLIO HERNÁNDEZ QUINTERO



DIRECTOR DE TESIS:

**DRA. MARÍA DE LOS ÁNGELES
SANDOVAL ROMERO**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Quintero
Nombre(s)	Anatolio
Teléfono	55 3351 5802
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	411028145
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dra.
Nombre(s)	María de los Ángeles
Apellido paterno	Sandoval
Apellido materno	Romero
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Alipio Gustavo
Apellido paterno	Calles
Apellido materno	Martínez
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ángel
Apellido paterno	Prieto
Apellido materno	Ruíz
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Luis Octavio
Apellido paterno	Silva
Apellido materno	Pereyra
6. Datos del sinodal 4	2. Datos del sinodal 4
Grado	Dr.
Nombre(s)	Yuri
Apellido paterno	Bonder
Apellido materno	Grimberg
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Electrodinámica Geométrica
Número de páginas	140
Año	2018

*A mi madre,
a quien debo varias veces la vida.*

Agradecimientos

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) que, por medio del proyecto con clave IN113718, me brindó su apoyo en la realización del presente trabajo.

Índice general

Introducción	VII
1. Electrodinámica vectorial	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Ley de Gauss y ley de Gauss magnética	7
1.3. Ley de Ampère	11
1.4. Ley de Faraday	15
1.5. Ecuaciones de Maxwell	18
1.6. Transformaciones del campo electromagnético	27
2. Geometría diferencial	33
2.1. Variedades	34
2.2. El espacio tangente	38
2.3. Haces fibrados	43
2.4. Haces vectoriales	45
2.5. El haz tangente	48
2.6. Campos vectoriales	51
2.7. Campos tensoriales	54
3. Formas diferenciales	61
3.1. Formas diferenciales	61
3.2. La derivada exterior	65
3.3. Métricas	68
3.4. Conexiones y derivadas covariantes	72
3.5. Curvatura	78
4. Electrodinámica geométrica	83
4.1. Electrodinámica covariante	84

4.1.1. Ecuaciones de Maxwell covariantes	87
4.2. Electrodinámica geométrica	92
4.2.1. Ecuaciones de Maxwell geométricas	98
Conclusión	105
A. Relaciones vectoriales comunes	109
A.1. Fórmulas vectoriales	109
A.2. Análisis vectorial	110
A.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales	112
B. Electromagnetismo y álgebra geométrica	113
B.1. Álgebra geométrica	114
B.2. Álgebra geométrica del plano euclidiano	118
B.3. Álgebra geométrica del espacio-tiempo	122
B.4. Electromagnetismo à la Maxwell	125
Bibliografía	127

Introducción

Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica (EDC) condujeron naturalmente a la predicción de ondas electromagnéticas (entre ellas la luz), la formulación de la teoría especial de la relatividad, y la unificación de la óptica geométrica, la óptica física, el magnetismo y la electricidad. De hecho, no se exagera cuando se dice que casi todas las descripciones de las interacciones fundamentales de la física se pueden pensar como generalizaciones más profundas de las ecuaciones de Maxwell para una cierta “carga” (piénsese en las ecuaciones de Yang-Mills). Este hecho no sólo tiene importancia en distintos campos de la física, sino que también estas ecuaciones y sus generalizaciones han conducido a descubrimientos matemáticos muy importantes en las últimas décadas (ver el “diccionario” de relaciones entre la teoría de conexiones y las teorías de norma [Yang et al., 1975] y el comentario [Atiyah, 1987] sobre la medalla Fields de 1986).

Por estas razones y porque la Teoría de la Gravitación admite una formulación geométrica que ha resultado muy exitosa en cuanto a la comprensión y a la descripción de las leyes fundamentales que rigen este aspecto de la naturaleza, en esta Tesis se presenta una formulación geométrica de la EDC en espacio-tiempos generales, contribuyendo de este modo a la geometrización de las interacciones electromagnéticas en un nivel elemental e introductorio, recuperando de paso un poco su sentido geométrico original, tal como fue expuesto por J. C. Maxwell en la segunda mitad del siglo XVIII. Esta formulación la llevaremos a cabo a lo largo de cuatro capítulos y dos apéndices, organizados cada uno en varias secciones.

En el [Capítulo 1](#) se expone el electromagnetismo clásico en su forma vectorial como se enseña en los cursos de la Licenciatura en Física. Partimos de los fenómenos propiamente electromagnéticos para poder definir los conceptos

fundamentales del electromagnetismo: la ley de Gauss que relaciona el flujo del campo eléctrico \mathbf{E} a través de una superficie cerrada S con la carga total Q contenida en el interior, $\Phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}) := \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q/\epsilon_0$ y la ley de Gauss magnética que relaciona el flujo del campo de inducción magnética \mathbf{B} a través de una superficie cerrada S con las fuentes magnéticas contenidas en su interior, $\Phi_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) := \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$, además de la ley de Ampère que relaciona el campo de inducción magnética sobre un circuito cerrado con las corrientes que cruzan el interior de este, $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 I$ y la fuerza de Lorentz que modela la interacción de una partícula que se mueve formando una corriente bajo la acción tanto de campos eléctricos como de campos magnéticos, $\mathbf{F} = \int (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl$.

El vínculo entre la electrostática y la electrodinámica se da a través de la ley de Faraday, $\oint_C \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = -d\Phi_{\mathbf{B}}/dt$. Para hacer compatibles estas dos teorías es necesario modificar la ley de Ampère de tal manera que tome la forma $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ para cualesquiera campos electromagnéticos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ y para cualesquiera fuentes $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ y $\rho(t, \mathbf{r})$. Estas ecuaciones aceptan soluciones que satisfacen la ecuación de onda, $\partial_{tt} \mathbf{E} = \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \mathbf{E}$ y $\partial_{tt} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \mathbf{B}$ con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ y son tales que la energía electromagnética total de un sistema en una región V del espacio contenido por una superficie cerrada Σ se conserva, es decir $-dU/dt = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$, para el vector $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Estas ecuaciones se formulan de manera muy natural en el espacio-tiempo de Minkowski, donde las transformaciones que las dejan invariantes son precisamente las transformaciones Lorentz.

En el [Capítulo 2](#) se exponen los conceptos elementales de la geometría diferencial que son necesarios para generalizar el espacio (geométrico) donde se encuentran los campos electromagnéticos, así como dar una interpretación geométrica de las ecuaciones de la EDC. Consideramos un espacio topológico paracompacto y Hausdorff M tal que cada punto $p \in M$ está contenido en algún abierto U_p homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n y consideremos una biyección x entre estos dos abiertos. Al espacio M le equipamos una estructura $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ y definimos un mapeo $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades por medio de sus estructuras, considerando mapeos $y \circ f \circ x^{-1}$ de clase C^r . Dada una variedad M construimos su espacio tangente $T_p M$ en cada punto p , cuyos elementos satisfacen una regla de Leibniz, $v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g)$, para cada par de funciones suaves f, g . En general consideramos un haz fibrado

(E, π, M, F) y nos fijamos en sus secciones suaves $\sigma : M \rightarrow E$. En particular los haces fibrados que nos interesan son los haces vectoriales (E, π, M, V) , donde la fibra V es un espacio vectorial.

Entre los haces vectoriales de mayor importancia consideramos al haz tangente TM de una variedad M donde se puede definir el levantamiento tangente $Tf : TM \rightarrow TN$ para una función $f : M \rightarrow N$ y la diferencial $df(p) : T_pM \rightarrow V$, cuando $N = V$ es un espacio vectorial. Nos fijamos en mapeos suaves de un vector tangente en cada punto de la variedad, $X : M \rightarrow TM$, para construir campos vectoriales tales que $X(p) = X^i(p)\partial_i(p)$. A cada campo vectorial se le asocia un mapeo que nos permite definir la derivada de Lie de una función suave f como $(\mathcal{L}_X f)(p) := X_p f$. Definimos también su pull-back $f^*Y := Tf^{-1} \circ Y \circ f$ y su push-forward $f_*X := Tf \circ X \circ f^{-1}$. Extendemos la derivada de Lie para campos vectoriales definiendo $\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$ y extendemos el concepto de campo vectorial al de campo tensorial como un mapeo multilineal tal que acepta una definición de pull-back natural: $f^*\tau(v_1, \dots, v_s)(p) = \tau(Tf \cdot v_1, \dots, Tf \cdot v_s)$.

En el [Capítulo 3](#) estudiamos los tensores alternantes, $L_{\text{alt}}^k(V; W)$ y consideramos al mapeo de antisimetrización $\text{Alt}^k(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k})$ para definir el producto exterior de dos campos tensoriales alternantes tal que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k_1 k_2} \beta \wedge \alpha$. Definimos un producto interior tal que $i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v \beta)$. Construimos el haz vectorial $L_{\text{alt}}^k(TM)$ que tiene en cada punto $p \in M$ al espacio $L_{\text{alt}}^k(T_pM)$ como fibra típica y es tal que sus secciones suaves aceptan un pull-back de la forma $f^*\eta = b_{\vec{j}} \circ f \partial_L y^{\vec{j}} dx^L$. Definimos recursivamente la derivada exterior de una k -forma como $d(\alpha_I dx^I) := d\alpha_I \wedge dx^I$ y mostramos que la derivada de Lie actúa naturalmente, i. e. $(\mathcal{L}_X df)(Y) = d(\mathcal{L}_X f)(Y)$, para cualesquiera dos campos X, Y . Las tres derivadas que hemos definido están relacionadas por la fórmula de Cartán. Inducimos un producto escalar en el espacio $L_{\text{alt}}^k(V)$ tal que $\langle \alpha | \beta \rangle_g = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \beta \rangle_g$ y demostramos la existencia de un isomorfismo lineal $*$ tal que $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol}$, para todo par de formas diferenciales $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*$. Definimos un operador codiferencial $\delta := (-1)^{\text{ind}(g)} (-1)^{n(k-1)+1} * d *$ y si consideramos un producto escalar dado como $(\alpha | \beta) := \int_M \alpha \wedge * \beta = \int_M \langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol}$, entonces tendremos que la derivada exterior y la codiferencial son operadores adjuntos, $(d\alpha | \beta) = (\alpha | \delta\beta)$. Más aún, el operador de Laplace-Beltrami $\Delta := \delta d + d\delta$ nos permite probar un teorema de descomposición para formas, análogo al teorema de descomposición de Helmholtz.

Un concepto fundamental en geometría diferencial es el de conexión, que desarrollamos hasta donde es pertinente para poder compararlo con el concepto de norma o gauge, mismo que a su vez es fundamental en la EDC. Definimos una derivada covariante o conexión de Koszul en un \mathbb{F} -haz vectorial suave $E \rightarrow M$ como un mapeo $\nabla : TM \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$, con el cual, desde el punto de vista de un marco de referencia (e_1, \dots, e_k) , tenemos que $\nabla_X s = (X^\mu \partial_\mu s^i + X^\mu \omega_{\mu r}^i s^r) e_i$. Si $P_c : E_{c(a)} \rightarrow E_{c(b)}$ denota al mapeo que lleva a $u \in E_{c(a)}$ en $\sigma_{c,u}(b)$, entonces P_c es lineal y tiene la propiedad de que $\nabla_u^f \sigma = \lim_{t \rightarrow 0} [(P(f \circ c)_0^t)^{-1} \sigma(c(t)) - \sigma(c(0))]/t$. Definimos el operador curvatura para un par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ como el mapeo $F(X, Y) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ dado por $F(X, Y)\sigma := [\nabla_X, \nabla_Y]\sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma$. Así, tenemos que la curvatura es una 2-forma valuada en $\text{End}(E)$. Si consideramos el mapeo $F^f(U, V) : \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E)$ dado por $F^f(U, V)\sigma := \nabla_U \nabla_V \sigma - \nabla_V \nabla_U \sigma - \nabla_{[U, V]}\sigma$, entonces la curvatura se puede expresar en términos de transporte paralelo mediante la relación $F(u, v)y = -\lim_{s, t \rightarrow 0} [y_{s, t} - y]/st$, donde $y_{s, t}$ el elemento de E_p que se obtiene transportando paralelamente a y alrededor de una trayectoria cerrada con s, t pequeños.

En el [Capítulo 4](#) se hace uso de las herramientas matemáticas expuestas en los dos capítulos previos para acometer nuestro objetivo principal: dar una interpretación geométrica de la EDC expuesta en el primer capítulo. Trabajar con un (r, s) -haz tensorial $T_s^r(\xi) = (T_s^r(TM), \pi, M, T_s^r(\mathbb{R}^n))$ y sus secciones suaves $\Gamma(T_s^r(TM))$. Primero vemos que la EDC acepta una formulación covariante según el primer postulado de la relatividad especial (RE), con respecto a las transformaciones de Lorentz, para lo cual introducimos el tensor de corriente \underline{j} , el tensor potencial \underline{A} y el tensor electromagnético \underline{F} . Demostramos que las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell devienen en la ecuación tensorial $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$ y las ecuaciones homogéneas devienen en la ecuación tensorial $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$, con la norma de Lorentz dada por $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi j^\nu$. La libertad de norma viene dada como $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \phi$ y la fuerza de Lorentz está dada por $f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$, de donde se sigue que el tensor electromagnético de energía-momento es $T^{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\nu}F_\nu^\rho + \frac{1}{4}\delta^{\mu\rho}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$. Esto demuestra que la EDC es covariante, i. e. es invariante bajo transformaciones de coordenadas (de Lorentz).

Las ecuaciones geométricas de la EDC se deducen rápidamente si demostramos que $\text{grad } f = \sharp df$, $\text{div } \mathbf{X} = *d*(\flat\mathbf{X})$ y $\text{rot } \mathbf{X} = \sharp*d(\flat\mathbf{X})$ y si definimos

adecuadamente productos internos en el espacio de k -formas de Minkowski $\Omega^k(\mathbb{R}_1^4)$, $k = 1, \dots, 4$. Así, dados una función de densidad ρ y una corriente eléctrica \mathbf{j} construimos una 1-forma de corriente \mathcal{J} y dados un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} construimos la 1-forma eléctrica $\mathcal{E} = \flat\mathbf{E}$, la 2-forma magnética $\mathcal{B} = *(\flat\mathbf{B})$ y la 2-forma electromagnética $\mathcal{F} = \mathcal{E} \wedge dx^0 + \mathcal{B}$ que tiene la propiedad de que $\mathcal{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$. A partir de los potenciales electromagnéticos Φ y \mathbf{A} (asociados a los campos electromagnéticos) construimos una 1-forma potencial asociada a estos \mathcal{A} . Demostramos que las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell devienen en la ecuación geométrica $*d*\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}$ y que las ecuaciones homogéneas de Maxwell devienen en la ecuación geométrica $d\mathcal{F} = 0$. La segunda de estas ecuaciones expresa un hecho estrictamente topológico (\mathcal{F} es cerrada), mientras que la segunda ecuación expresa un hecho estrictamente métrico. La ecuación de los potenciales es simplemente $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, que a su vez expresa la libertad de norma. Una ventaja de las ecuaciones geométricas sobre las ecuaciones covariantes y sobre las ecuaciones vectoriales es que no dependen de un observador, sino que son de alguna manera “globales”, porque no están escritas en términos de coordenadas.

El operador $*$ de Hodge nos permite dar versiones duales de las ecuaciones geométricas, y esta es otra razón para llamarlas geométricas, pues el concepto de dualidad es un concepto estrictamente geométrico, tomado de la geometría proyectiva, donde los resultados también tienen cierto carácter “global”. Finalmente demostramos lo que queríamos demostrar: la 1-forma potencial \mathcal{A} es una conexión y la 2-forma electromagnética \mathcal{F} es su curvatura, donde se satisface que $*d*\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}$ para una 1-forma corriente \mathcal{J} dada. Aunque esta formulación geométrica de la EDC parece un mero cambio de lenguaje, en parte porque ya está incluida en sí misma en la propia teoría, casi de la misma forma en que está incluida en sí misma la formulación relativista o la formulación covariante, y parece que no hemos hecho más que develar este resultado, queremos insistir en que esta Tesis no consiste solamente en esto, sino que además consiste en hacer claro que la EDC escrita de esta forma marca una vía para posibles generalizaciones, tanto por la vía de la teoría de conexiones como por la vía de la teoría de norma.

En el [Apéndice A](#) se presentan aquellas relaciones comunes del cálculo vectorial multivariable que resultan útiles a lo largo de todos los capítulos, pero principalmente en el primero y en el cuarto.

En el [Apéndice B](#) presentamos otra formulación geométrica de la EDC que va por un camino distinto de la teoría de conexiones y que es más cercana a la teoría de espinores. La razón de que esta otra formulación geométrica se presente en un apéndice es que cuando me enteré de ella por vía de D. Hestenes, este trabajo estaba casi concluido. Por tanto, en este apéndice se exponen brevemente algunas relaciones comunes del álgebra geométrica, así como el álgebra geométrica del plano \mathcal{G}_2 y el álgebra geométrica del espacio-tiempo \mathcal{D}_4 . Escribimos la métrica del espacio de Minkowski $g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu$, definimos el bivector electromagnético $F := \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ y el bivector corriente $j := \frac{1}{2}j^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$. En estos términos las ecuaciones de Maxwell son $\gamma^\mu \partial_\mu (F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = 4\pi j^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$.

Finalmente, queremos remarcar que todos los resultados expuestos en esta Tesis se encuentran en la literatura adecuada (citada en la bibliografía), desde los más clásicos (antiguos y modernos) hasta los menos comunes, pero sin demostración muchos de ellos. De manera que en gran parte, este trabajo consiste en una presentación de la formulación geométrica de la EDC que pudiera servir como primera referencia para un lector interesado en el tema.

Capítulo 1

Electrodinámica vectorial

En este capítulo se expone de manera muy breve la teoría clásica del electromagnetismo (EMC) y de la electrodinámica (EDC) vectoriales como se puede encontrar en manuales de referencia tales como [Jackson, 1998, Greiner, 1998, Lacava, 2016]. Procuramos exponer sólo los conceptos elementales, en el sentido clásico del término, que nos permitirán llevar a cabo una formulación geométrica de dicha teoría (en cuanto que la electrodinámica envuelve al electromagnetismo), quizá más general y conceptualmente más clara. Asumimos que el lector está familiarizado con el cálculo vectorial multivariable real como se expone por ejemplo en [Buck et al., 1978, Sagan, 1974], por lo cual no nos detendremos a exponerlo aquí, véase por ejemplo el Apéndice A. Simplemente nos limitaremos a enunciar tres teoremas fundamentales del cálculo vectorial que serán de gran utilidad en este primer capítulo. Consideramos además necesario hacer notar al lector que la exposición histórica (no necesariamente lineal) del electromagnetismo no es de ninguna manera puramente ornamental, sino que responde a una necesidad interna de la propia teoría sin la cual no se puede comprender esta.

§1.1. Preliminares

El primer teorema que queremos traer a colación es el *Teorema de Gauss*, de Green o de la Divergencia, el cual relaciona al flujo de un campo vectorial \mathbf{X} suficientemente suave a través de una superficie S cerrada y conexa, con la integral de su divergencia en la región V delimitada por dicha superficie. Intuitivamente se puede concebir como que la suma de las fuentes menos la suma de los sumideros da el flujo saliente neto de una región del espacio.

Teorema 1.1 (Gauss). Si $V \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región compacta con superficie de frontera suave S y si $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario a S que apunta hacia el exterior de S , entonces para cualquier campo vectorial \mathbf{X} con segundas derivadas continuas se tiene que

$$\oint_S \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{X} \, dV. \quad (1.1)$$

El segundo teorema que queremos introducir es el *Teorema de Stokes*, el cual relaciona el flujo de un campo vectorial \mathbf{X} suficientemente suave a través de una curva cerrada y conexa C , con la integral de su rotacional en la superficie S delimitada por dicha curva. Intuitivamente se puede concebir como que la suma de todo el flujo de un remolino que atraviesa una superficie se puede medir recorriendo la frontera de la superficie.

Teorema 1.2 (Stokes). Sea $C \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva suave la frontera de una superficie suave S y sea $\hat{\mathbf{t}}$ un vector unitario tangente a C . Consideremos un campo vectorial $\hat{\mathbf{n}}$ normal a la superficie S tal que el producto vectorial $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia el interior de S . Entonces, para todo campo vectorial \mathbf{X} con segundas derivadas continuas se tiene que

$$\oint_C \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (1.2)$$

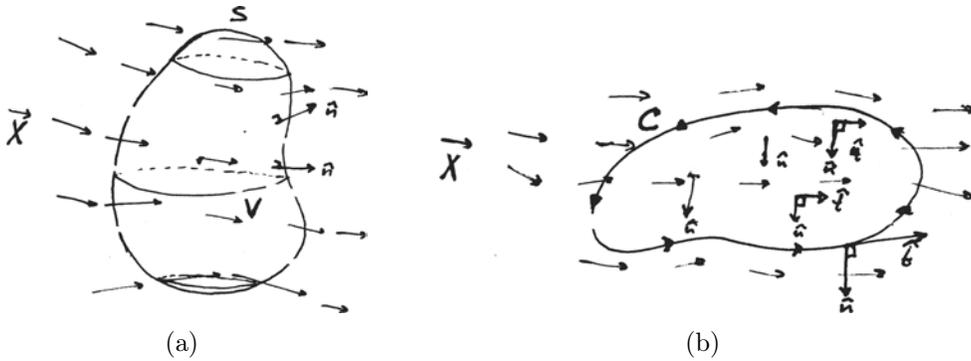


Figura 1.1: (a) Teorema de Gauss y (b) Teorema de Stokes.

Un tercer resultado fundamental es el *Teorema Fundamental del Análisis Vectorial (TFAV)*, el cual afirma que cualquier campo vectorial suficientemente

suave que se desvanece rápidamente se puede descomponer como la suma de un campo vectorial irrotacional (equivalentemente como el gradiente de una función escalar) y un campo vectorial solenoidal (equivalentemente como el rotacional de un campo vectorial) demostrado por H. v. Helmholtz, por lo cual también es llamado *Descomposición de Helmholtz o Representación de Helmholtz*.

Teorema 1.3 (Descomposición de Helmholtz). Sean \mathbf{X} un campo vectorial definido en una región $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con segundas derivadas continuas, S la superficie que encierra a la región V y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector normal unitario a S que apunta hacia el exterior de S . Entonces \mathbf{X} se puede descomponer como

$$\mathbf{X} = -\text{grad } \Psi + \text{rot } \mathbf{Y}, \quad (1.3)$$

donde

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div } \mathbf{X}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

e

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{X}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Con estos tres teoremas preliminares planteados, comencemos la exposición de la EDC, recordando que los fenómenos electromagnéticos no han sido tema de estudio como tales, hasta la época moderna, salvo la óptica geométrica (no tenida como un fenómeno electrodinámico) que es tan antigua como la geometría misma.

De hecho, los fenómenos magnéticos no han sido un tema de estudio sino hasta la Alta Edad Media, por ejemplo en la *Epistola de magnete (1269)* de P. P. de Maricourt (s. XIII) quien descubrió que cada imán tiene dos polos, responsables de la manera en la que se atraen los imanes y responsables de un “magnetismo boreal” y de un “magnetismo austral”. Por otra parte, los fenómenos eléctricos no han sido tema de estudio hasta el siglo XVII, iniciando con el tratado *De magnete, magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure (1600)* de G. Gilberti (1540-1603) quien acuñó el término “eléctrico” y propuso que la Tierra se comporta como un imán gigante.

Durante los siglos XVII y XVIII se realizaron investigaciones tanto en el campo de los fenómenos eléctricos como el campo de los fenómenos magnéticos, dirigidas a reconocer las propiedades básicas de ambos fenómenos. Así, se

comprobó que hay dos tipos de electricidad que fueron llamados “electricidad vítrea” y “electricidad resinosa”, se identificaron los métodos básicos de electrificación y de magnetización entre cuerpos y se desarrollaron dispositivos para contener electricidad como la botella de Leyden y las pilas voltaicas, al mismo tiempo que se reconocía la independencia de los fenómenos eléctricos y magnéticos de los fenómenos térmicos y de los fenómenos químicos, cuando se descubrió que la electricidad se manifiesta en la superficie de los cuerpos mientras que el calor es un fenómeno que se manifiesta dentro de los cuerpos.

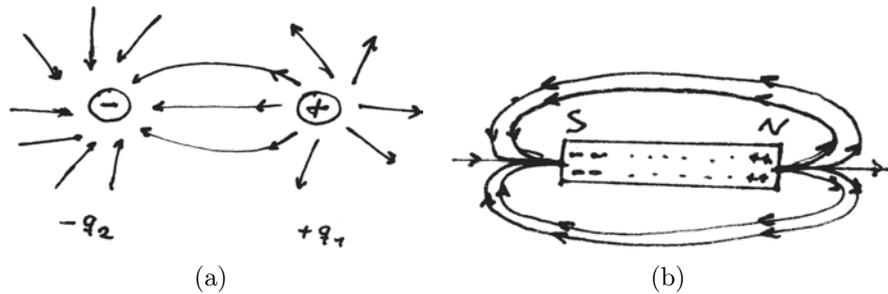


Figura 1.2: (a) Interacción entre dos cargas. (b) Interacción entre dos polos.

Dos hechos importantes descubiertos en el siglo XVIII conviene traer a colación. El primero de ellos es el descubrimiento de la conservación de la carga eléctrica y el segundo es el descubrimiento de que las fuerzas tanto en imanes como en materiales electrizados varía como el inverso de la distancia entre las fuentes. Los trabajos en electricidad y en magnetismo de C. A. Coulomb (1736-1806) son quizá el mejor ejemplo, pues con una balanza de torsión verificó la ley de la fuerza entre objetos cargados y entre objetos imantados, además descubrió que es imposible aislar los polos de un imán. Los trabajos de Coulomb fueron expuestos a lo largo de siete memorias publicadas en *Mém. de l'Acad.*: Las primeras tres memorias se publicaron en 1785, la cuarta en 1786, la quinta en 1787, la sexta en 1788, y la séptima en 1789.

A pesar de todos estos descubrimientos formidables, el estado matemático de la electrostática se encontraba poco desarrollado. De hecho se puede decir que el siglo XIX del EMC se inicia con la matematización y sistematización tanto de la electrostática como de la magnetostática en gran medida por los analistas franceses: J. L. de Lagrange (1736-1813), P. S. Laplace (1749-1827) A. M. Legendre (1752-1833) y S. D. Poisson (1781-1840).

En resumen, se encuentra que en la naturaleza hay dos tipos distintos de cargas eléctricas, las positivas y las negativas, y que cualquier tipo de carga es un múltiplo de la carga elemental e , el valor absoluto de la carga del electrón,¹ y el magnetismo es una manifestación de corrientes eléctricas. Las cargas (los polos) del mismo signo se repelen entre sí y las cargas (los polos) de signos opuestos se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de las cargas (corrientes) e inversamente proporcional a su distancia. Las fuerzas electrostáticas (magnetostáticas) son fuerzas centrales o radiales porque su magnitud sólo depende de la coordenada radial r para un par de cargas (imanes) dadas(os).

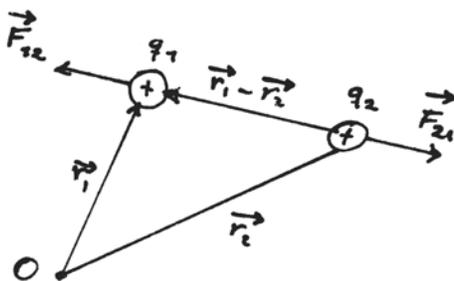


Figura 1.3: Fuerza de Coulomb.

La ley de la fuerza entre dos cargas puntuales fue establecida por Coulomb en sus primeras tres memorias, la cual dice que *en el vacío* (electromagnético) la fuerza \mathbf{F}_{21} sobre la carga puntual q_2 con posición \mathbf{r}_2 , debida a la presencia de la carga puntual q_1 con posición \mathbf{r}_1 está dada por la relación

$$\mathbf{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (1.4)$$

donde la constante k es una constante de proporcionalidad.² A dicha fuerza se le llama *fuerza de Coulomb*. Nosotros aquí escogeremos el sistema de unidades SI y más adelante escogeremos un sistema de unidades más natural a la propia electrodinámica.

¹La carga de los cuarks es de $-e/3$ o de $+2e/3$, pero hasta donde sabemos no se encuentran aislados sino confinados en los hadrones.

²El valor de la constante de proporcionalidad k depende naturalmente del sistema de unidades que se escoja para hacer las mediciones, así tenemos que $k = 1/4\pi\epsilon_0$ en el sistema SI y $k = 1$ en el sistema cgs y en el sistema gaussiano, etc.

Entonces, la ley de Coulomb toma la forma siguiente:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (1.5)$$

donde $\epsilon_0 = 8,564 \times 10^{-12} F/m$ es la *constante de permitividad* del vacío. La fuerza sobre la carga q_1 ejercida por la carga q_2 es $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, de acuerdo a la tercera ley de Newton (válida para el caso estático, pero no así para el caso dinámico en general).

Más aún, se comprueba experimentalmente que la fuerza \mathbf{F} sobre una carga de prueba q_1 ejercida por un sistema constituido por una cantidad finita de cargas q_2, \dots, q_n es la suma vectorial de la fuerza ejercida por cada carga del sistema sobre q_1 , es decir que las fuerzas se superponen entre sí sin afectarse mutuamente y sin ser afectadas por la presencia de las otras cargas:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^n q_i \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1.6)$$

A este hecho experimental importantísimo se le llama *Principio de Superposición* e implica que las fuerzas entre cargas sólo pueden ser fuerzas entre *dos* cuerpos, o sea que las fuerzas electrostáticas son fuerzas binarias porque para una fuerza no binaria, ternaria por ejemplo, el Principio de Superposición deja de tener validez.

Si \mathbf{F} es la fuerza electrostática neta en la carga puntual q localizada en \mathbf{r} , entonces el *campo eléctrico* \mathbf{E} en ese punto del espacio está definido como

$$\mathbf{E} := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{d\mathbf{F}}{dq}. \quad (1.7)$$

Tomamos el límite $q \rightarrow 0$ porque en general el campo eléctrico \mathbf{E} es alterado por la presencia de la carga de prueba q . De esta definición y del Principio de Superposición (que asumiremos como válido de aquí en adelante) se sigue que el campo eléctrico en el punto \mathbf{r} debido a una distribución continua de carga (total) Q , con densidad de carga $\rho(\mathbf{r}') = dQ/dV$, sobre una región V del espacio está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (1.8)$$

De donde vemos que el campo eléctrico de la carga Q es radial hacia el interior de V si $Q < 0$ y hacia el exterior de V si $Q > 0$ (siempre que Q tenga simetría esférica), y más aún, que el campo eléctrico es conservativo, es decir que puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar Φ_e , salvo una constante, y que depende únicamente de la posición donde se mida:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi_e(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

pues para nuestra distribución continua de carga descrita por la función de densidad $\rho(\mathbf{r}')$ usamos la relación (A.19) para calcular el potencial, obteniendo

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \kappa, \quad (1.10)$$

donde κ es una constante arbitraria tal que para una distribución acotada de carga $\kappa = 0$ porque $\Phi_e(\infty) := 0$.

Como el campo eléctrico es conservativo, la integral de línea sobre una trayectoria cerrada es nula, y por el Teorema 1.2 tenemos que el campo eléctrico \mathbf{E} es irrotacional, lo cual es inmediato porque $\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(-\text{grad } \Phi_e) \equiv 0$ (A.7). Esta es la forma local de expresar que el campo eléctrico \mathbf{E} es conservativo.

§1.2. Ley de Gauss y ley de Gauss magnética

La *ley de Gauss* establece que la intensidad del flujo $\Phi_{\mathbf{E}}$ del campo eléctrico \mathbf{E} a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total Q contenida *dentro* de la superficie, dividida por la constante de permitividad:

$$\Phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}) := \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario que apunta hacia afuera en cada punto de la superficie S y las cargas *afuera* de la superficie no contribuyen al flujo, es decir $\Phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}_{\text{ext}}) = 0$, porque la carga es proporcional al número de líneas de flujo del campo que atraviesan a la superficie. Esta ley es una generalización natural de la fuerza de Coulomb, por lo que a veces se llama también ley de Coulomb. Se sigue como corolario el siguiente resultado importante:

Corolario 1.1 (Coulomb). Cerca de la superficie de un conductor con densidad de carga superficial σ y vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$, si \mathbf{E}_1 es un campo

de un lado de la superficie y \mathbf{E}_2 es otro campo del otro lado de la superficie, entonces

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.12)$$

Observación 1.1. Si $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad de carga en una región $V \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya frontera es una superficie S , entonces la carga total Q contenida en esta región está dada por

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.13)$$

De esta observación, podemos obtener una *expresión local de la ley de Gauss* como sigue: De (1.11) y (1.13),

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Por el [Teorema 1.1](#):

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Sustituyendo (1.9) en esta expresión local obtenemos la *ecuación de Poisson* para el potencial eléctrico Φ_e :

$$\Delta \Phi_e = -\rho/\epsilon_0. \quad (1.15)$$

Para una región libre de carga, es decir cuando $\rho = 0$, la ecuación de Poisson deviene en la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta \Phi_e = 0. \quad (1.16)$$

Cuando movemos una carga en un campo eléctrico \mathbf{E} desde un punto a hasta un punto b , la fuerza que actúa sobre ella es $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Entonces el *trabajo* hecho durante dicho movimiento está dado por la integral de trayectoria:

$$W_e = - \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q \int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
&= q \int_a^b \text{grad } \Phi_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q \int_a^b d\Phi_e \\
&= q(\Phi_e(b) - \Phi_e(a)).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

El signo menos surge de considerar como positivo al trabajo hecho en contra del campo. Esta ecuación indica que el trabajo hecho a lo largo de una trayectoria desde el punto a hasta el punto b corresponde a la diferencia de potencial entre estos dos puntos, es decir, el trabajo es independiente de la trayectoria. Para una distribución continua de carga con densidad $\rho(\mathbf{r})$ el trabajo está dado por

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi_e(\mathbf{r}) dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi_e \Delta \Phi_e dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dV. \tag{1.18}$$

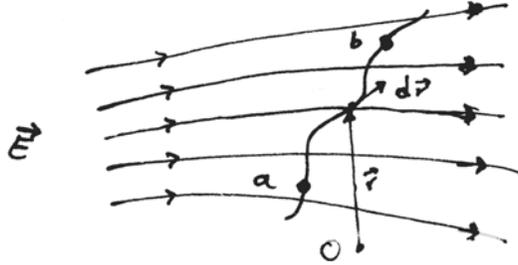


Figura 1.4: Trabajo eléctrico.

La última igualdad viene de notar que $\Phi_e \Delta \Phi_e = \text{div}(\Phi_e \text{grad } \Phi_e) - (\text{grad } \Phi_e)^2$ y de que la integral del primer término se puede convertir a una integral de área por medio del [Teorema 1.1](#) y ubicando la superficie de integración en infinito esta integral se anula. Esta relación representa la densidad de energía del campo eléctrico, que escribimos como $w_{\mathbf{E}} = \epsilon_0 E^2/2$.

La *conservación de la carga* en sistemas aislados es un hecho comprobado experimentalmente un muy diversas instancias (por lo cual le damos el carácter de ley y supondremos que es válida siempre). Entonces la carga Q en una región V del espacio contenida por la superficie S cambia sólo si una corriente eléctrica I fluye a través de S (convenimos en decir que es positiva si sale de V y es negativa si entra en V), es decir $-dQ/dt = I$ donde $I := |\mathbf{I}|$ es la magnitud del flujo de la densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, con \mathbf{v}

la velocidad de las cargas que fluyen a través de la superficie S formando una corriente. Por tanto, tenemos la siguiente relación entre la carga y la corriente:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (1.19)$$

De la ecuación para la carga (1.13) y de la ecuación para la corriente (1.19) se tiene

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Metemos la derivada en la integral del lado izquierdo y usamos el Teorema 1.1,

$$-\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} dV = \oint_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.20)$$

Esta ecuación es llamada *ecuación de continuidad o ley de la conservación de la carga (local)*. En magnetostática todas las derivadas parciales de una corriente son nulas por definición, implicando que $\operatorname{div} \mathbf{j} \equiv 0$.

Otro hecho experimental fundamental es que las líneas del *campo de inducción magnética* \mathbf{B} son siempre cerradas, lo cual es equivalente a decir que no existen “cargas magnéticas” (o monopolos magnéticos).³ Entonces el *flujo magnético*, $\Phi_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$, a través de una superficie cerrada S siempre es nulo:

$$\Phi_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) := \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (1.21)$$

Aplicando el Teorema 1.1 obtenemos una expresión local para esta ley, que a veces recibe el nombre de *ley de Gauss magnética*:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

³La investigación y búsqueda de monopolos magnéticos continúa hoy día, sin poder encontrarlos. Su interés radicaría para nosotros aquí en que con ellos la EDC (las ecuaciones de Maxwell) se puede(n) formular de manera muy simétrica o “dual”.

Equivalentemente,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.22)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que las líneas del campo de inducción magnética son cerradas, es decir que en todo imán necesariamente hay dos polos, como ya lo habíamos observado.

§1.3. Ley de Ampère

Hacia inicios del siglo XIX se tenían varios ejemplos de situaciones donde una corriente eléctrica induce ciertos efectos magnéticos. Así en 1807 H. C. Oersted (1777-1851) anunció su intención de investigar la relación entre magnetismo y electricidad. Su idea feliz llegó durante un curso sobre “Electricidad, Galvanismo y Magnetismo” en el invierno 1819-1820, confirmando que una corriente eléctrica produce un campo magnético. Los primeros análisis matemáticos de este efecto fueron realizados por J. B. Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-841) en *Annales de Chimie*, xv (1820) y en *Journal de Phys.* xci (1820).

Las analogías entre corrientes e imanes se llevaron más lejos aún, especialmente por A. M. Ampère (1775-1836) quien descubrió que dos alambres paralelos por donde fluye corriente eléctrica se atraen si las corrientes fluyen en la misma dirección y se repelen si las corrientes fluyen en direcciones opuestas, apenas una semana después de que llegaran las noticias del descubrimiento de Oersted a la Academia Francesa. Ampère publicó sus resultados reunidos en una de las memorias más celebres en la historia de la física, *Mém. de l'Acad., vi* (1825). Esta memoria reúne y sistematiza la gran mayoría del conocimiento sobre electricidad y magnetismo hasta el momento, de hecho se puede decir que antes de esta memoria no había electromagnetismo como tal. Asimismo Ampère inicia el estudio de la electrodinámica, término que él mismo acuñó, y que le valió el sobrenombre de “Newton de la electricidad”, por parte de J. C. Maxwell (1831-1879).

Al mismo tiempo, se entendía la relación entre calor y electricidad mediante el efecto termoelectrónico (1822) descubierto y estudiado por T. J. Seebeck (1770-1831). Se construyó una teoría completa sobre circuitos voltaicos expuesta en *Die Galvanische Kette mathematisch bearbeitet* (1826) por G. S. Ohm (1787-1854) tomando como modelo la *Théorie analytique de la chaleur*

(1822) de J. Fourier (1768-1830). El trabajo de Ohm realmente une la recién fundada electrodinámica con el electromagnetismo, pero no se tomó en consideración sino hasta la mitad del siglo.

Mientras se desarrollaba la EDC tanto en el plano experimental como en el plano matemático (este último por C. L. M. H. Navier (1785-1836), A. L. Cauchy (1789-1857), K. F. Gauss (1777-1855), G. Green (1793-1841) y G. G. Stokes (1819-1903)), la óptica experimentaba su propia revolución, en particular E. L. Malus (1775-1812) y D. Brewster (1781-1868) investigaron la polarización de la luz, dando nacimiento así a la óptica física (reviviendo la teoría ondulatoria de la luz) en la primera mitad del siglo XIX, y desarrollada brillantemente por T. Young (1773-1829), A. Fresnel (1788-1827) y F. Arago (1786-1853), principalmente, coronando a la teoría ondulatoria de la luz con los experimentos de J. B. L. Foucault (1819-1868) y A. H. L. Fizeau (1819-1896) para medir la velocidad de la luz directamente en aire y en agua en 1850 (probando experimentalmente que la ley de refracción de R. Descartes era errónea).

El descubrimiento de la relación entre corrientes eléctricas y magnetismo llevó a la formulación matemática de las leyes del magnetismo en un cortísimo periodo de tiempo: La fuerza que actúa en un elemento $d\mathbf{l}$ de un circuito donde fluye una corriente eléctrica I en la dirección de $d\mathbf{l}$, ubicado en un campo de inducción magnético \mathbf{B} es

$$d\mathbf{F} = k' I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (\text{segunda fórmula de Ampère}) \quad (1.23)$$

donde k' es una constante de proporcionalidad por determinar.

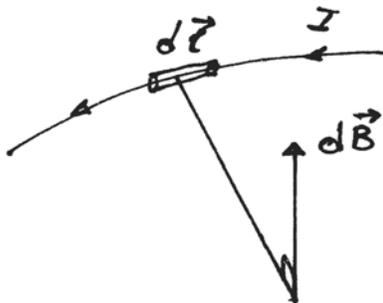


Figura 1.5: Segunda fórmula de Ampère.

De esta relación se deduce que la fuerza en una carga puntual q moviéndose con velocidad \mathbf{v} en un campo de inducción magnética \mathbf{B} es

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{fuerza de Lorentz}) \quad (1.24)$$

Y si además consideramos la presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} , entonces la fuerza de Lorentz está dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Si en lugar de una sola carga fluyen varias cargas formando una corriente continua I , la fuerza de Lorentz está dada por

$$\mathbf{F} = \int (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl, \quad (1.25)$$

donde λ es la densidad de corriente lineal. La contribución al campo vectorial $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en el vacío en el punto \mathbf{r} dada por un elemento de circuito $d\mathbf{l}$ localizado en \mathbf{r}' con una corriente I fluyendo en la dirección de $d\mathbf{l}$ está dada por

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k' \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{primera fórmula de Ampère}) \quad (1.26)$$

Es decir, el campo magnético producido por un elemento de circuito (conductor) es directamente proporcional a la corriente e inversamente proporcional al inverso de la distancia. Esta ley es análoga a la ley de Coulomb y es también conocida como *ley de Biot-Savart*.⁴ Se encuentra que $k' = \mu_0/4\pi$, donde μ_0 es la *constante de permeabilidad* del vacío definida como $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7} H/m$. En el sistema gaussiano $k' := 1/c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Observación 1.2. El campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ de un circuito completo C está dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (1.27)$$

Entonces, la fuerza de un circuito C_1 con corriente I_1 ejercida sobre un circuito C_2 con corriente I_2 viene dada por

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.28)$$

⁴De hecho las leyes de Ampère fueron formuladas matemáticamente por Laplace en 1832, por lo que también suelen llamarse *primera y segunda leyes de Laplace*.

De la ecuación (1.27) se sigue que si integramos el campo magnético de un circuito a lo largo de una trayectoria cerrada C obtenemos la *ley de Ampère*:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 I, \quad (1.29)$$

donde la suma corre sobre todas las corrientes I_i encerradas por el circuito cerrado C . Aplicando el [Teorema 1.2](#) y la ecuación (1.19),

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Equivalentemente,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.30)$$

que es la expresión local de la ley de la segunda ley de Ampère, también llamada *ley de Oerstedt*, que a su vez es el análogo magnético de la ley local de Gauss y es una generalización de la ley de Biot-Savart.

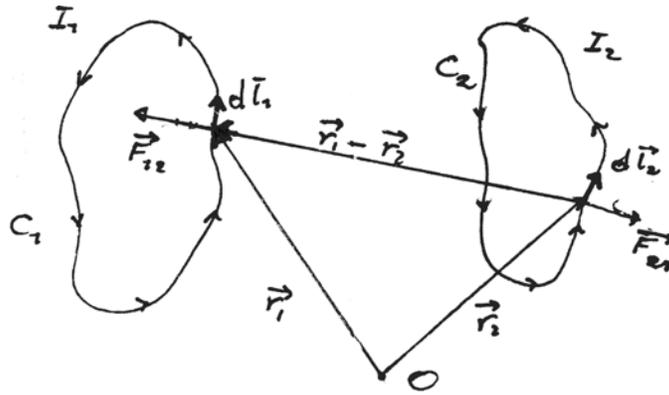


Figura 1.6: Fuerza entre dos circuitos C_1 y C_2 .

Si la densidad de corriente \mathbf{j} se anula en la ley de Ampère local, entonces el campo de inducción magnética \mathbf{B} es irrotacional y por ello se puede escribir como el gradiente de un potencial escalar salvo una constante: $\mathbf{B} = \text{grad } \Phi_m$ (A.7) y como $\text{div } \mathbf{B} = 0$, el campo de inducción magnética \mathbf{B} se puede escribir

también como el rotacional de un potencial vectorial \mathbf{A} , salvo el gradiente de una función escalar: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, donde

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \text{grad } \psi, \quad (1.31)$$

se obtiene resolviendo la ecuación de Poisson, $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$, con la condición extra de que $\text{div } \mathbf{A} = 0$ para asegurar la unicidad del potencial vectorial.

El movimiento de una partícula cargada sometida a un campo magnético es típicamente circular, además una característica muy particular de las fuerzas magnéticas es que no hacen trabajo sobre la partícula cargada sino que solamente pueden alterar la dirección de la partícula, pues

$$W_m = - \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0. \quad (1.32)$$

La densidad de energía del campo de inducción magnética está dada por la expresión $w_{\mathbf{B}} = B^2/2\mu_0$.

Podemos resumir la electrostática y la magnetostática, es decir el estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos cuando el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo de inducción magnética \mathbf{B} no presentan variaciones en el tiempo, en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e &= Q\mathbf{E}, & \mathbf{F}_m &= \mathbf{I} \times \mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0, & \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

§1.4. Ley de Faraday

En 1821 M. Faraday (1791-1867) escribió su *Historical Sketch of Electro-Magnetism*, donde se propuso repetir algunos de los experimentos de investigadores previos y contemporáneos. La primera memoria sobre las investigaciones eléctricas de Faraday data de 1831 publicada como *Experimental Researches in Electricity* (3 vols.), donde afirma que cuando una circuito cerrado es transportado a través de un campo magnético se genera una corriente eléctrica que no depende de las variaciones del campo eléctrico.

Para investigar las leyes de la inducción de corrientes empleó sistemáticamente el método de representar al campo magnético como líneas de fuerza magnética. Este método lo llevó a descubrir un año después que las corrientes producidas por inducción consisten en la producción de una fuerza electromotriz bien definida (un voltaje), descubriendo así el principio fundamental de las corrientes de inducción. Sin embargo la naturaleza experimental del trabajo de Faraday no ofrecía vías evidentes para su formulación matemática, por lo cual su trabajo fue tenido poco en cuenta por los electricistas matemáticos, hasta Maxwell.

La formulación matemática del principio de inducción fue realizada por C. Neumann (1832-1925) en 1845 tomando como modelo el trabajo de Ampère y con base en la regla de E. Lenz (1804-1865), la cual establece que es posible calcular el flujo magnético $\Phi_{\mathbf{B}}$ a través de una superficie arbitraria por un circuito, es decir, la fuerza electromotriz inducida f (un voltaje), está dada por

$$f = -k'' \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}, \quad (\text{Ley de Faraday-Neumann-Lenz}), \quad (1.34)$$

donde f es la integral de línea a largo de una trayectoria cerrada C de un campo eléctrico externo no-conservativo \mathbf{E}_i , es decir $f = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ (un voltaje).

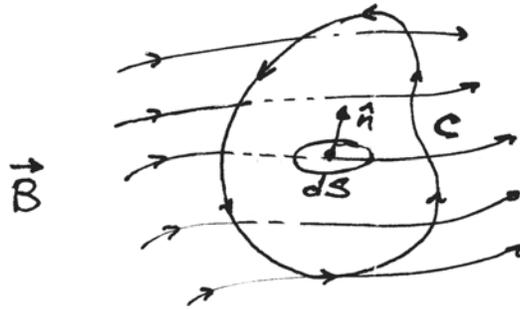


Figura 1.7: Ley de inducción de Faraday.

El signo se fija de acuerdo a la *ley de Lenz*, que establece que las corrientes inducidas en el circuito y el flujo magnético asociado a ellas se dirigen en dirección opuesta a la dirección del cambio del campo eléctrico \mathbf{E}_i . La constante de proporcionalidad se toma como $k'' := 1$ y en el sistema gaussiano

$k'' = 1/c$. Tenemos entonces que,

$$f = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}.$$

Aplicando el [Teorema 1.2](#) y la ecuación (1.21),

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Metemos la derivada del lado derecho,

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Usando (1.28) tenemos la expresión local de la ley de inducción de Faraday.

$$\text{rot } \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Por lo tanto, en general el campo eléctrico externo \mathbf{E} es la superposición del campo irrotacional \mathbf{E}_e debido a la presencia de cargas eléctricas y de un campo eléctrico no-irrotacional \mathbf{E}_i inducido por la tasa de cambio del campo magnético: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_i$.

Notemos que si tomamos la divergencia de la ley de Ampère local (1.30) tenemos por (A.8) que

$$\text{div}(\mu_0 \mathbf{j}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = 0 \quad (1.36)$$

¡Pero vimos que la divergencia de la densidad de corriente \mathbf{j} es nula sólo en los casos en los que la corriente es estática! Para resolver esta falta, Maxwell (1831-1879) sugirió que se reemplazara la densidad de carga ρ en la ecuación de continuidad (1.20) por la expresión para ρ en la ley de Gauss local (1.14), resultando la suma de dos términos vectoriales que siempre tiene divergencia nula:

$$\text{div} \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \equiv 0. \quad (1.37)$$

Sustituyendo la densidad de corriente \mathbf{j} en la ley local de Ampère (1.30) por esta suma, llegamos a la expresión correcta para el rotacional del campo de

inducción magnética en el caso general cuando las corrientes y los campos son variables:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{ley de Amperè-Mawell}) \quad (1.38)$$

donde ambos miembros de la ecuación tienen divergencia nula siempre, tanto en el caso estático como en el caso en que los campos y las corrientes varían con el tiempo. Al término agregado a la densidad de corriente, Maxwell le llamó *densidad de corriente de desplazamiento*, $\mathbf{j}_s = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, la cual está asociada a la tasa de cambio del campo eléctrico \mathbf{E} . Con esta definición, la ley de Ampère-Maxwell queda expresada como $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s)$.

§1.5. Ecuaciones de Maxwell

Mientras Neumann trabajaba para comprender las leyes de las corrientes de inducción como una extensión de la teoría de Ampère, por ejemplo introduciendo el potencial magnético \mathbf{A} , otros investigadores trabajaban en ordenar y unificar toda la electrodinámica. El primer intento en esta dirección vino por parte de W. Weber (1804-1890), amigo y colega de C. F. Gauss (1777-1855), quien basándose en las mismas hipótesis de G. T. Fechner (*Ann. d. Phys. lxxiv*, 1845) sobre corrientes electrostáticas, propuso que la fuerza entre dos cargas $q(x, y, z)$ y $q'(x', y', z')$ que se mueven una con respecto a la otra separadas una distancia r está dada por

$$F = \frac{qq'c^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}.$$

O bien en términos de la energía cinética,

$$K = \frac{qq'c^2}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right\}.$$

La teoría de Weber fue rechazada por H. v. Helmholtz (1821-1894) y por R. J. E. Clausius (1822-1888) por una parte porque esta fuerza violaba el principio de conservación de la energía (lo cual es falso, como el mismo Weber lo demostró, cf. [Whittaker, 1910, cap. 7] y [Darrigol, 2000, cap. 2]) y por otra parte porque esta fuerza implica que existe una velocidad máxima en el Universo, entre otras complicaciones.

Otro intento de unificación de la electrodinámica fue propuesto por B. Riemann (1826-1866) en un curso dictado en Gotinga en 1861 (publicado después de su muerte). Riemann propuso que la energía electrocinética de dos cargas $q(x, y, z)$ y $q'(x', y', z')$ está dada por la expresión

$$K = \frac{qq'}{2rc^2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 \right\}.$$

Una tercera propuesta vino por parte del mismo Clausius en 1877 sugerida por las investigaciones de Helmholtz y de Kirchhoff. Clausius propuso que la energía cinética de dos cargas $q(x, y, z)$ y $q'(x', y', z')$ está dada por

$$K = \frac{qq'}{rc^2} \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial t} - c^2 \right\}.$$

Además de estas tres propuestas,⁵ se publicó la teoría de Maxwell, quien introduce el campo de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , el campo magnético \mathbf{H} , las corrientes de desplazamiento \mathbf{j}_s y considera que cualquier carga en movimiento es equivalente a una corriente, en su obra *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1864), lo que fue mas bien ignorado antes que criticado, por su carácter especulativo. Estas consideraciones de Maxwell conducen a ecuaciones de onda tanto para el campo \mathbf{D} como para el campo \mathbf{H} , de donde se desprende una teoría electromagnética ondulatoria, en particular para la luz. La mayor crítica que recibió este trabajo de Maxwell fue que esta teoría no explicaba la reflexión ni la refracción de la luz, lo cual fue salvado por Helmholtz. Nueve años después, Maxwell publica *A Treatise of Magnetism and Electricity* (1873) (2 vols.), donde desarrolla con mayor extensión las ideas en sus trabajos previos, lo cual fue igualmente poco tenido en cuenta, incluso por su conacional W. Thompson (Kelvin).

⁵La influencia de la ideas de Weber se notó a lo largo de todo el siglo XIX, no solo en el EMC sino también en astronomía. Por ejemplo, se modificó la ley de la gravitación universal agregando un término que involucra a las velocidades relativas de los cuerpos. Así, F. F. Tisserand (1845-1896) propuso $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{h^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{h^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right\}$, donde h es la velocidad de propagación de la gravitación. Si $h = c$ (la velocidad de la luz), entonces hay que corregir la órbita de Mercurio por $+14''/\text{siglo}$. Si se usa la ley de Riemann, entonces tenemos que corregir la órbita de Mercurio por $+24''/\text{siglo}$ y si se combinan las dos leyes, entonces se obtienen los famosos $+38''/\text{siglo}$ del perihelio de Mercurio, Cf. [Whittaker, 1910], cap. 7.

Las propuestas tanto de Weber, de Riemann, de Clausius y de Maxwell para unificar la electrodinámica con el electromagnetismo arrojan predicciones distintas, como es natural, de manera que para eliminar algunas de estas se eligió el método de la experimentación durante el resto del siglo XIX por parte de H. Helmholtz, L. Lorentz, J. Larmor, L. Wiechert y tantos otros, sobreviviendo la teoría de Maxwell. Los experimentos decisivos fueron realizados por H. Hertz (1857-1894) durante la década 1883-1893, confirmando que las ondas predichas por Maxwell existen y tienen todas las propiedades que tiene la luz. Con estos descubrimientos y con el descubrimiento del electrón (J. J. Thomson, 1897) la teoría de Maxwell fue tomando la forma actual resultando completamente distinta de la que propuso Maxwell, aunque con base en los mismos fundamentos, quedando unificadas así la electrodinámica, el electromagnetismo, la óptica geométrica y la óptica física. Quedaban algunos problemas por resolver, sin embargo estos problemas pertenecían más al dominio de la mecánica cuántica, que al propio dominio de la EDC.

Consideremos los siguientes campos vectoriales con coordenadas espaciales x, y, z y coordenada temporal t :

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = (E_1(t, x, y, z), E_2(t, x, y, z), E_3(t, x, y, z)),$$

$$\mathbf{B}(t, x, y, z) = (B_1(t, x, y, z), B_2(t, x, y, z), B_3(t, x, y, z)),$$

$$\mathbf{j}(t, x, y, z) = (j_1(t, x, y, z), j_2(t, x, y, z), j_3(t, x, y, z)),$$

que representan al campo eléctrico, al campo de inducción magnética y a la corriente eléctrica, respectivamente, y consideremos $\rho(t, x, y, z)$ una función escalar que representa la densidad de carga. Decimos entonces que estos tres campos vectoriales y esta función escalar satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío si satisfacen que

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (1.39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss Magnética}) \quad (1.40)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (1.41)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.42)$$

Las ecuaciones de Maxwell son ocho ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas de primer orden (una por la ley de Gauss, tres por la ley de Faraday, una por la ley de Coulomb y tres por la ley de Ampère-Maxwell) para seis variables (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z), en contraste con las 20 ecuaciones que Maxwell propone en [Maxwell, 1865, Maxwell, 1873], por lo cual están sobredeterminadas. En las ecuaciones de Maxwell no aparece el término $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que sí aparece en el trabajo original de Maxwell. Este término se introduce por separado mediante la fuerza de Lorentz (1.24), que debe considerarse también como parte fundamental del electromagnetismo, quedándonos por tanto con 11 ecuaciones.

Las ecuaciones de Maxwell también pueden ser formuladas para materiales diferentes del vacío. Por un lado, tenemos que en presencia de un campo eléctrico externo \mathbf{E} los dipolos atómicos y moleculares de los diferentes materiales se polarizan. Este hecho justifica que definamos al vector de *polarización eléctrica* \mathbf{P} como el momento dipolar promedio por unidad de volumen. Experimentalmente se encuentra que las cargas debidas a la polarización se distribuyen en la superficie de los distintos materiales (dieléctricos) con densidad superficial de carga $\sigma_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, y se distribuyen dentro del material con densidad volumétrica de carga $\rho_{\mathbf{P}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, hecho que a su vez nos permite introducir al *vector de desplazamiento* \mathbf{D} en términos del campo eléctrico externo y del vector de polarización:

$$\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.43)$$

Por otro lado, la magnetización en los distintos materiales puede ser descrita por el vector de *magnetización* \mathbf{M} , que se define como el momento magnético promedio por unidad de volumen, análogo al vector de polarización. Las corrientes microscópicas asociadas a la magnetización generadas por un campo de inducción magnética externo \mathbf{B} fluyen en la superficie del material con una densidad de corriente $\mathbf{j}_{\mathbf{M}s} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, y fluyen dentro del material con una densidad de corriente $\mathbf{j}_{\mathbf{M}v} = \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Introducimos entonces al campo magnético \mathbf{H} en términos del campo de inducción magnética externo y del vector de magnetización:

$$\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (1.44)$$

Las ecuaciones de Maxwell para materiales quedan expresadas en términos del vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y del campo magnético \mathbf{H} de la

siguiente forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Para calcular los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} tenemos que conocer las *relaciones constitutivas* $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. En un medio isotrópico y homogéneo con permitividad μ y permeabilidad ϵ , las ecuaciones de Maxwell se escriben de la misma *forma* que en el vacío pero cambiando ϵ_0 y μ_0 por ϵ y μ , respectivamente. Para medios homogéneos e isotrópicos las relaciones constitutivas están dadas por $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa_e - 1)\mathbf{E}$ y $\epsilon = \epsilon_0 \kappa_e$ donde ϵ es la permitividad del material y κ_e es la constante dieléctrica del material; y por $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{M} = (\kappa_m - 1)\mathbf{H}$ y $\mu = \mu_0 \kappa_m$, donde μ es la permeabilidad del material y κ_m es la permeabilidad relativa del material. Además hay que considerar la *ley de Ohm*, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, que relaciona la corriente inducida en un medio por un campo eléctrico externo. También cabe señalar que para resolver las ecuaciones de Maxwell unívocamente se deben agregar condiciones de frontera adecuadas a cada problema particular.

Como señalamos en la [Sección 1.3](#), del hecho de que la divergencia de un rotacional siempre es nula se sigue que la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ se satisface igualmente si \mathbf{B} es el rotacional de un potencial vectorial \mathbf{A} , i. e. $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Entonces, de la ecuación de Faraday (1.41) se tiene que

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Reordenando,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.46)$$

Del hecho de que la suma de estos dos términos tiene rotacional nulo se sigue que esta suma puede ser menos el gradiente de un potencial escalar Φ .

Entonces en términos de este potencial escalar y del potencial vectorial, el campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.47)$$

El potencial vectorial \mathbf{A} queda determinado de manera unívoca salvo por el gradiente de una función escalar ϕ . De hecho, bajo la transformación

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \phi, \quad (1.48)$$

para alguna función escalar ϕ , el campo $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ queda invariante (es decir $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$) porque siempre se tiene que el rotacional de un gradiente es nulo (A.9). Análogamente, para que el campo eléctrico \mathbf{E} quede invariante (es decir que $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$), el potencial escalar Φ tiene que transformarse como

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (1.49)$$

A estas dos transformaciones se les llama *transformaciones de norma* de los potenciales electrodinámicos. Para determinar los potenciales electrodinámicos \mathbf{A} y Φ tenemos que considerar las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas, de donde obtenemos dos ecuaciones acopladas para \mathbf{A} y Φ y la *condición de Lorentz*,

$$\text{div } \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (1.50)$$

que si no es satisfecha por \mathbf{A} y por Φ entonces puede ser satisfecha por un potencial vectorial \mathbf{A}' y por un potencial escalar Φ' . De aquí se obtiene una ecuación para la función escalar ϕ que puede ser resuelta, en principio. Como esta transformación de norma puede aplicarse siempre, podemos asumir que los potenciales satisfacen la condición de Lorentz siempre y en este caso decimos que elegimos trabajar en/con la *norma de Lorentz*.

Las transformaciones de norma para potenciales que satisfacen la condición de Lorentz nos dan nuevos potenciales que vuelven a satisfacer la condición de Lorentz si el potencial Φ satisface la ecuación de onda con rapidez $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Con la condición de Lorentz las dos ecuaciones acopladas para los potenciales se desacoplan como

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (1.51)$$

y

$$\Delta\Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.52)$$

Algunas soluciones particulares de estas cuatro ecuaciones son los *potenciales retardados*,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \kappa \quad (1.53)$$

y

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \kappa', \quad (1.54)$$

donde κ y κ' son constantes tales que $\kappa = 0$ si $\mathbf{A}(\infty) = 0$ y $\kappa' = 0$ si $\Phi(\infty) = 0$. Mientras que las soluciones homogéneas son ondas que se propagan con rapidez v . A largas distancias sólo las soluciones homogéneas permanecen ya que las soluciones particulares decaen como $1/r$.

Si escogemos la condición $\text{div } \mathbf{A} = 0$, entonces estamos trabajando en/con la *norma de Coulomb, de radiación o transversal* y en este caso el potencial escalar Φ satisface la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon$, que tiene como solución el potencial instantáneo de Coulomb

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV, \quad (1.55)$$

y el potencial vectorial \mathbf{A} satisface la ecuación

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} + \mu\epsilon \text{div} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \quad (1.56)$$

lo cual hace que la información de las fuentes variables no se propague instantáneamente.

Decimos que una función f satisface la *ecuación de onda homogénea de Helmholtz con velocidad v* si satisface que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (1.57)$$

A la suma de las segundas derivadas, $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ la llamamos *laplaciano*. Análogamente, diremos que un campo vectorial $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$

satisface la ecuación de onda, $\Delta \mathbf{X} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} = 0$, si cada una de sus componentes la satisface, es decir si para cada componente X_i se tiene que

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.58)$$

En ausencia de cargas eléctricas ($\rho = 0$) en un material infinito no conductor ($\mathbf{j} = 0$) homogéneo e isotrópico de permitividad $\epsilon = \text{const.}$ y de permeabilidad $\mu = \text{const.}$, no son posibles soluciones nulas para las ecuaciones de Maxwell (1.39)-(1.42).

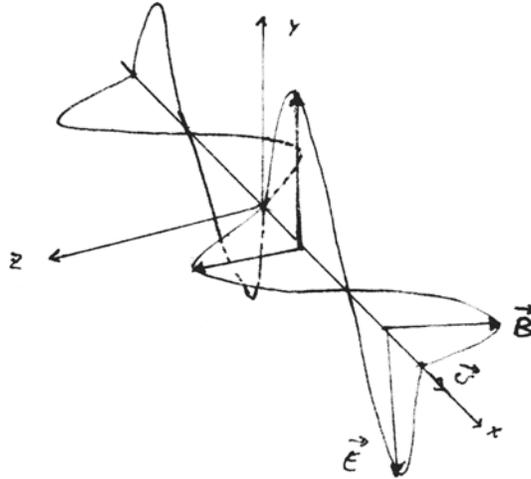


Figura 1.8: Ondas electromagnéticas.

De hecho se encuentran soluciones que representan ondas viajeras, pues en efecto tenemos que el campo eléctrico \mathbf{E} satisface la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu\epsilon} \text{rot } \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{1}{\mu\epsilon} \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\mu\epsilon} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu\epsilon} (-\text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) + \Delta \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

donde hemos usado (A.9) en el último paso.

Análogamente se comprueba que el campo magnético \mathbf{B} satisface la ecuación de onda:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{E})}{\partial t} \\
 &= -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\mu\epsilon} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{\mu\epsilon} (-\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \mathbf{B}.
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

Estas soluciones representan de ondas electromagnéticas que se propagan en el material en cuestión, con rapidez

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_e\kappa_m}} \approx \frac{c}{\sqrt{\kappa_e}} = \frac{c}{n}, \quad (\kappa_m \approx 1) \tag{1.61}$$

donde $n := \sqrt{\kappa_e}$ es el índice de refracción del medio y $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Cuando el campo electromagnético acelera partículas cargadas y las partículas radian ondas electromagnéticas, hay un intercambio de energía y momento entre las partículas y el campo (consecuentemente la tercera ley de Newton no es válida en general, pues no considera la presencia de campos). En sistemas aislados con cargas y campos electromagnéticos la energía total del sistema y el momento total del sistema se conservan.

Consideremos una región acotada V contenida por la superficie cerrada Σ tal que contiene cargas y campos dentro de ella. Si N es el número de q cargas por unidad de volumen y \mathbf{v} la velocidad de estas cargas, entonces la fuerza $d\mathbf{f}$ aplicada por el campo electromagnético sobre las cargas en un elemento de volumen dV está dada por $d\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})NdV$. La potencia por unidad de volumen transferida del campo electromagnético al medio que rodea a las cargas es $\frac{dL}{dVdt} = w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, donde $\mathbf{j} = Nq\mathbf{v}$, y si asumimos un medio isotrópico y homogéneo con densidad de energía $u = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$, entonces la energía electromagnética en la región V está dada por la expresión

$$-\frac{dU}{dt} = \int_V (\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV. \tag{1.62}$$

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de esta relación.

Teorema 1.4 (Poynting). En un sistema aislado en un volumen V contenido por una superficie cerrada Σ que contiene cargas y campos electromagnéticos interactuando entre sí, la energía electromagnética total U se conserva, es decir

$$-\frac{dU}{dt} = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (1.63)$$

donde $\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es el flujo de energía a través de una superficie normal unitaria, llamado *vector de Poynting*.

Localmente el teorema de Poynting se ve como

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.64)$$

Para una onda electromagnética propagándose en dirección $\hat{\mathbf{v}}$, la energía por unidad de tiempo que fluye a través de una superficie unitaria normal a la dirección de propagación está dada por la energía en un cilindro con base unitaria y altura $|\mathbf{v}|$ (la rapidez de la onda), es decir $\mathbf{s} = u\mathbf{v}$, donde u es la densidad de energía en la onda.

§1.6. Transformaciones del campo electromagnético

Los intentos de Maxwell y de Hertz por extender la teoría del campo electromagnético al caso en el que los cuerpos están en movimiento nunca fue del todo satisfactoria. De hecho no lo fue para ninguno de los teóricos del electromagnetismo del siglo XIX quienes modelaban al éter como un sólido elástico, entre otras razones porque los cuerpos en movimiento se pensaban siempre como partes homogéneas del medio que llena todo el espacio (éter), lo cual era inconsistente con la teoría de Fresnel [Whittaker, 1910, caps. 7–8].

Los experimentos destinados a detectar las propiedades del éter electromagnético fracasaron (A. Michelson, 1881, A. Michelson y E. W. Morley 1887, E. W. Morley y D. C. Miller, 1904 y 1905, entre otros), por lo que el dominio del EMC se extendió de tal manera que los propios conceptos de espacio y de tiempo se extendieron, por ejemplo por H. A. Lorentz, (*Archive: Nial. xxv*,

1892) y por H. Poincaré, (*Comptes Rendus*, *cxxiii*, 1891), en la vía de Weber, Riemann y Clausius (en la Europa continental), hasta que se demostró que no es necesario ningún éter para que el campo electromagnético se propague en el espacio (A. Einstein, *Ann. d. Phys*, 17, 1905, considerando la teoría Maxwelliana). La EDC resultó ser la primer teoría relativista de la física.

En contraste con las leyes de la mecánica clásica, las leyes de la EDC, i. e. las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de las ondas electromagnéticas, no son invariantes con respecto a las *transformaciones de Galileo* definidas como sigue: Si dos sistemas de referencia inerciales S y S' son tales que S' se mueve con respecto a S con rapidez constante v en la dirección positiva del eje x y tales que al tiempo $t = t' = 0$ coinciden, entonces los dos sistemas están relacionados mediante las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} t' &= t, & y' &= y, \\ x' &= x - vt, & z' &= z. \end{aligned} \tag{1.65}$$

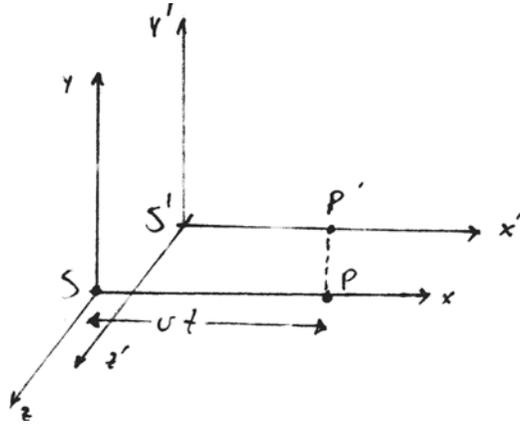


Figura 1.9: Transformaciones de Galileo.

En general, todos los cambios de coordenadas permitidos en la mecánica clásica por las transformaciones de Galileo son de la forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ v_2 & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ v_3 & a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1.66}$$

donde $A = (a_{ij}) \in O(3, \mathbb{R})$, es decir que $A^t A = I_3$.

Ya que todos los experimentos apuntan a la validez de las ecuaciones dinámicas de Maxwell sobre las ecuaciones dinámicas de Newton, se buscan transformaciones que dejen invariantes a las primeras. La búsqueda se resume en los dos postulados de la relatividad especial introducidos en 1905 por A. Einstein, que son:

Post. 1 (Principio de Galileo) Las leyes de la naturaleza y los resultados de todos los experimentos son los mismos en todos los marcos de referencia en movimiento uniforme relativo unos con respecto a otros.

Post. 2 La velocidad de la luz es la misma en todos los marcos de referencia en movimiento uniforme relativo unos respecto a otros y es independiente del movimiento de la fuente relativo al observador.

Es evidente que el segundo postulado de la relatividad especial es un caso particular de Principio de Galileo, pues basta que para dos marcos de referencia la luz tenga velocidad constante e independiente del movimiento de la fuente con respecto al observador para que sea así en todos los marcos de referencia. Las transformaciones buscadas, llamadas *transformaciones de Lorentz*, para dos sistemas inerciales de referencia S y S' tales que S' se mueve con respecto a S con rapidez constante v en la dirección positiva del eje x y tales que al tiempo $t = t' = 0$ coinciden, son las siguientes:

$$\begin{aligned} t' &= -\gamma\beta x + \gamma t, & y' &= y, \\ x' &= \gamma x - \gamma\beta t, & z' &= z. \end{aligned} \tag{1.67}$$

donde $\gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ y $\beta := v/c$.

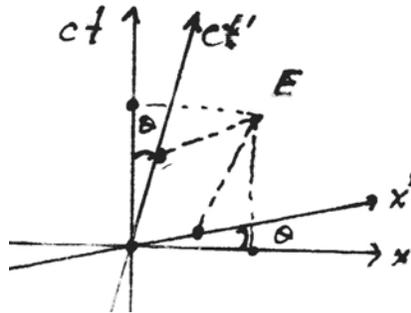


Figura 1.10: Transformaciones de Lorentz.

Estas transformaciones se siguen directamente del primer postulado de Einstein, o equivalentemente, de la invarianza de la cantidad $s^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, por lo que podemos decir que estamos interesados en buscar las transformaciones que dejen a la cantidad s^2 invariante. A todas las transformaciones con esta propiedad se les llama *grupo homogéneo de Lorentz*, porque efectivamente forman un grupo bajo la composición (o equivalentemente bajo el producto de matrices).

Al grupo de transformaciones que dejan invariante a la cantidad $s^2(x, y) = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2$ se le llama *grupo inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré*, el cual contiene traslaciones y reflexiones (en el espacio-tiempo) y a las transformaciones del grupo homogéneo de Lorentz (rotaciones hiperbólicas del espacio-tiempo). A las cantidades invariantes bajo las transformaciones (in)homogéneas se les llama *cantidades escalares* (por ejemplo c , s^2 pero también $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ que de hecho son todos los invariantes del campo electromagnético).

En general, los cambios de coordenadas permitidos en relatividad especial por las transformaciones de Lorentz están dados por matrices A tales que si definimos la matriz

$$L := \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

entonces los cambios de coordenadas satisfacen que

$$A^t L A = L, \quad (1.69)$$

para los cuales se tiene que $\det(A^t L A) = \det L = -c^2$, implicando que $\det A = \pm 1$, para cualquier cambio de coordenadas permitido A .

Si $\det A = +1$, entonces decimos que A es una *transformación de Lorentz propia* y si $\det A = -1$ decimos que A es una *transformación de Lorentz impropia*. Como se necesitan $16 - 6 = 10$ ecuaciones linealmente independientes (por simetría bajo transposiciones), entonces hay seis parámetros libres, es decir que el grupo de Lorentz es un grupo de seis parámetros, que pueden pensarse como tres parámetros para indicar la orientación relativa de los ejes de coordenadas (por ejemplo los tres ángulos de Euler) y tres parámetros

para indicar la velocidad relativa entre los dos marcos de referencia (por ejemplo las componentes del vector $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$).

Definimos al mapeo $g : \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(u, v) := u^t L v$. A este mapeo lo llamamos *métrica de Minkowski* o *métrica de Lorentz* y al espacio \mathbb{R}_1^4 lo llamamos *espacio de Minkowski* cuya métrica es $\text{diag}(-+++)$. Con esta definición, podemos decir que los cambios de coordenadas permitidos en relatividad especial están dados por matrices que preservan la métrica de Minkowski, es decir, una matriz invertible A de 4×4 es una transformación de Lorentz si y sólo si para cualesquiera vectores $u, v \in \mathbb{R}_1^4$ se tiene

$$g(u, v) := g(Av, Au). \quad (1.70)$$

La estructura específica del grupo de Lorentz es $SL(2, \mathbb{C})$ u $O(3, 1)$.

Diremos que un vector $\mathbf{v} = (t, x, y, z)$ en el espacio de Minkowski es *espacia-loide* o *tipo espacio* si $g(v, v) > 0$; es *temporaloide* o *tipo tiempo* si $g(v, v) < 0$; y es *nulo* o *tipo luz* si $g(v, v) = 0$.

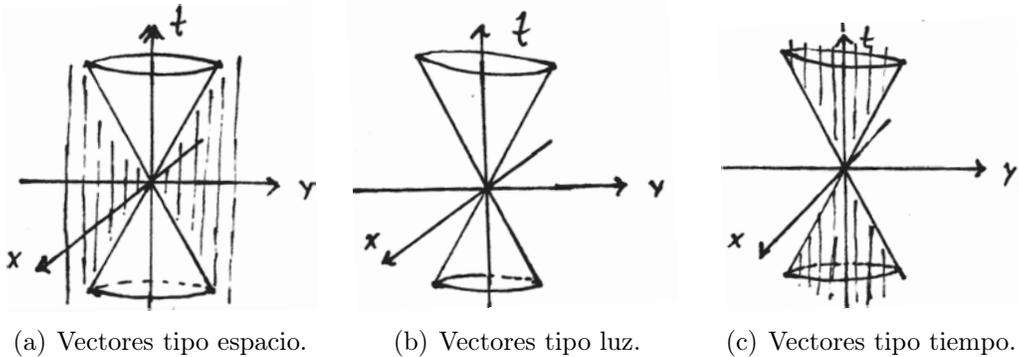


Figura 1.11: Clases de vectores en el espacio de Minkowski.

Deliberadamente hemos escogido un espacio euclidiano (o afín si se prefiere) de tres dimensiones para modelar los fenómenos electromagnéticos, fuera del cual, por ejemplo el operador rot deja de tener sentido. En la EDC hemos tenido que extender las nociones clásicas de espacio y de tiempo en un sólo objeto físico, el espacio-tiempo, con lo cual parece que el espacio de Minkowski es el espacio más natural donde se desenvuelve la EDC, según hemos

visto en este capítulo. La idea de que las ecuaciones de la EDC se ven más naturales en unos espacios que en otros se puede llevar muy lejos con consecuencias muy interesantes. Una manera de desarrollar esta idea es a través de la geometría diferencial. En los siguientes dos capítulos desarrollaremos las herramientas necesarias para llevar a cabo esta tarea.

Capítulo 2

Geometría diferencial

En este capítulo presentamos los conceptos principales de la geometría diferencial como se pueden encontrar en cualquier texto especializado en el tema como por ejemplo [Spivak, 1999, Lee, 2009, Lee, 1997], dando por supuestas definiciones elementales de topología de conjuntos, salvo aquellas que se hagan explícitas por su importancia puntual, además de los resultados e ideas principales del álgebra lineal, tales como el espacio dual de un espacio vectorial y el concepto de espacio cociente. Aunque se pueden dar las definiciones y los resultados necesarios para variedades inmersas en algún espacio euclidiano \mathbb{R}^n , daremos los conceptos de variedades en general, ya que el ambiente \mathbb{R}^n no nos interesa porque el Universo no está inmerso en otro espacio, por definición, y aunque teoremas importantes como el Teorema de Stokes requieren del concepto de variedades con frontera, nos contentaremos con hablar de variedades sin frontera porque asumimos que el espacio donde se desarrolla la electrodinámica no tiene frontera, por definición.

Aunque el desarrollo de la geometría diferencial es en sí mismo muy interesante y algunas veces está ligado con el desarrollo de la física, haremos un cambio cualitativo en la exposición, con respecto al [Capítulo 1](#), para no desviarnos de nuestro objetivo principal. Mencionamos únicamente los trabajos pioneros tanto de L. Euler (1707-11783) como de G. Monge (1746-1818) y los textos fundacionales clásicos *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) de C. F. Gauss y *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) de B. Riemann. Al lector interesado lo remitimos a las referencias siguientes: [Scriba et al., 2015, Kline, 1992, Kolmogorov et al., 1996].

§2.1. Variedades

Comencemos fijando la notación. Por una parte, a los elementos de \mathbb{R}^n los representaremos como n -adas de números reales con los índices escritos como superíndices así: $v = (v^1, \dots, v^n)$. Cuando trabajemos con álgebra matricial a los elementos de \mathbb{R}^n los escribiremos como vectores columna así: $v = (v^1, \dots, v^n)^t$, donde el superíndice t indica la operación de transposición. Por otra parte, a los elementos del espacio dual de \mathbb{R}^n , los escribiremos como vectores renglón y los índices se escribirán como subíndices de esta manera: $w = (w_1, \dots, w_n)$. Con esta convención, un elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$ actúa en un elemento de \mathbb{R}^n por multiplicación de matrices. Como último comentario sobre estas convenciones, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con U un abierto en \mathbb{R}^n (con la topología usual), entonces entenderemos $f = (f^1, \dots, f^m)$ para funciones reales f^1, \dots, f^m . Diremos que f es un C^r -difeomorfismo si existe su inversa y es de clase C^r ,

Definición 2.1. Una *variedad topológica* n -dimensional M es un espacio topológico paracompacto Hausdorff tal que cada punto $p \in M$ está contenido en algún abierto U_p que es homeomorfo a un abierto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

Entonces decimos que una variedad topológica es “localmente euclidiana”. Al entero n se le llama *dimensión* de M , y lo escribimos como $n = \dim M$. Cabe señalar que un espacio localmente euclidiano no necesariamente es Hausdorff, sin embargo nuestro interés principal son las variedades suaves (o de tipo C^∞) sin frontera, que a su vez son variedades topológicas y que por ello tienen la propiedad de Hausdorff. Esto porque queremos definir cuándo una variedad es diferenciable.

Definición 2.2. Sea M un conjunto. Una *carta* en M es una biyección de un conjunto abierto $U \subset M$ sobre un abierto de algún espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

Decimos que la carta toma valores en \mathbb{R}^n o que es una carta real. Una carta $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ se denotará como la pareja (U, x) ; también escribimos $x = (x^1, \dots, x^n)$, donde x^i es la i -ésima función coordenada de la carta (U, x) .

Definición 2.3. Sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de cartas reales en un conjunto M . Decimos que \mathcal{A} es un *atlas* de clase C^r si satisface las siguientes condiciones:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
2. Todos los conjuntos $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ para $\alpha, \beta \in A$ son abiertos en \mathbb{R}^n .
3. Cada vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un C^r -difeomorfismo.

Los mapeos $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ son llamados *mapeos de transición* o *mapeos de cambio de coordenadas*, que naturalmente están definidos para intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$ que evitamos escribir para no sobrecargar la notación. Esto es precisamente lo que nos permitirá hablar de variedades diferenciables. Para un par de cartas (U, x) y (V, y) y el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ escribimos $x = (x^1, \dots, x^n)$ y $y = (y^1, \dots, y^n)$. De esta manera tenemos

$$y^i(p) := y^i \circ x^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p)), \quad (2.1)$$

para cualquier $p \in U \cap V$, o de manera abreviada, $y^i := y^i(x^1, \dots, x^n)$.

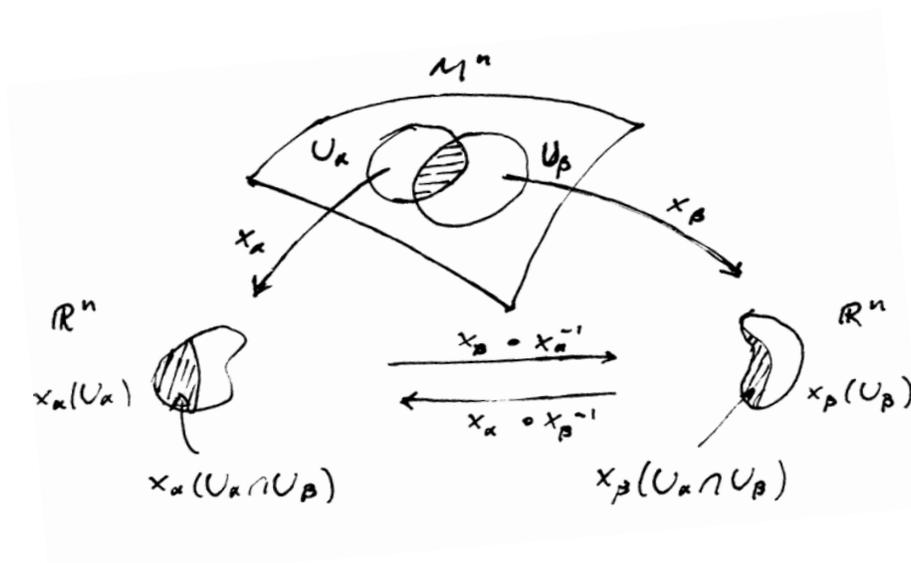


Figura 2.1: Definición de atlas para el conjunto M .

Dados dos C^r -atlas, diremos que son *equivalentes* si su unión es un C^r -atlas. A una clase de equivalencia bajo esta relación de equivalencia se le llama

estructura C^r -diferenciable en M ; si $r = \infty$ diremos simplemente que el C^r -atlas es una *estructura suave*. Notemos que la unión de todos los C^r -atlas es también un atlas, al que llamamos C^r -atlas *máximo* con respecto a la inclusión, y por lo tanto una estructura es un atlas máximo. Una carta en M es *compatible* con un atlas si la unión de la carta y el atlas es de nuevo un atlas.

Se motiva la siguiente definición de variedad diferenciable del hecho de que un C^r -atlas define una C^r -estructura que a su vez induce una topología para M (uniones de los abiertos de las cartas de la C^r -estructura) llamada *topología inducida por la C^r -estructura* (o por el atlas).

Definición 2.4. Una *variedad diferenciable* de clase C^r es un conjunto M junto con una estructura de clase C^r para M tal que la topología inducida por esta estructura es Hausdorff y paracompacta. Si las cartas toman valores de \mathbb{R}^n , entonces decimos que la variedad es de *dimensión* $\dim M = n$. Si la estructura es de clase C^∞ diremos que la variedad M es una *variedad suave*.

Es decir, una variedad diferenciable n -dimensional de clase C^r es una pareja (M, \mathcal{A}) , donde \mathcal{A} es un atlas C^r (real) máximo y tal que la topología inducida por el atlas hace de M una variedad topológica.

En *Differentiable manifolds, Annals of Math. (2) v. 37, 1936, 645-680* H. Whitney (1907-1989) demuestra que para $r > 0$, cada C^r -atlas máximo contiene a un atlas C^∞ . Por esta razón sólo consideraremos atlas de clase C^∞ . También nos referimos a una variedad (M, \mathcal{A}) simplemente como M cuando el atlas \mathcal{A} queda sobreentendido. La siguiente definición nos da un mecanismo que nos permite llevar información de una variedad a otra.

Definición 2.5. Sean (M, \mathcal{A}_M) y (N, \mathcal{A}_N) dos variedades suaves. Decimos que un mapeo $f : M \rightarrow N$ es *de clase C^r* en el punto $p \in M$ si existen una carta (V, y) de \mathcal{A}_N con $f(p) \in V$ y una carta (U, x) de \mathcal{A}_M con $p \in U$, tales que $f(U) \subset V$ y tales que $y \circ f \circ x^{-1}$ es de clase C^r . Si f es de clase C^r en todo punto $p \in M$, entonces decimos que f es *de clase C^r* . A los mapeos de clase C^∞ los llamamos *mapeos suaves*.

Hay que notar que la propiedad de ser C^r es una propiedad local. La forma local de los *mapeos representativos* de f , dado un par de cartas compatibles (U, x) y (V, y) para M y N , respectivamente, con $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, está dada por

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow y(V). \quad (2.2)$$

Notemos que si bien la definición anterior no incluye como hipótesis que f sea continua, la propia definición está hecha de manera tal que implica que una función que sea de clase C^r sea automáticamente continua (puntualmente) y por lo tanto las preimágenes de abiertos son abiertos. Pero si f es de antemano continua entonces podemos verificar que sea C^r -diferenciable usando mapeos representativos con respecto a atlas que no necesariamente son máximos. Esta es una de las razones por las cuales pedimos que los cambios de coordenadas sean difeomorfismos.

Convengamos en denotar al conjunto de todas las C^r -funciones $M \rightarrow N$ como $C^r(M, N)$ y si $N = \mathbb{R}$ entonces simplemente escribimos $C^r(M)$. Si $r = \infty$, escribimos $C(M, N)$ y $C(M)$, respectivamente.

Definición 2.6. Sea (U, x) una carta en una n -variedad M para $p \in U$, con $x = (x^1, \dots, x^n)$. Para $f \in C^1(M)$ definimos una función $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ en U como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f \circ x^{-1}(a^1, \dots, a^i + h, \dots, a^n) + f \circ x^{-1}(a^1, \dots, a^n)}{h} \right], \quad (2.3)$$

donde $x(p) = (a^1, \dots, a^n)$.

En otras palabras, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p)) := \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}(x(p)), \quad (2.4)$$

donde la n -ada (u^1, \dots, u^n) denota las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^n . Recordemos que en la notación clásica, D_i es la i -ésima derivada parcial con respecto a la descomposición $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Por lo tanto si $g : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$, entonces $D_i g(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo lineal que identificamos con la única entrada $\partial_i g(a)$ de la matriz de 1×1 que la representa con respecto a la base canónica de \mathbb{R} , por lo que la definición anterior comúnmente la encontramos en los textos clásicos como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)). \quad (2.5)$$

Con esta definición la regla de la cadena, para dos cartas (U, x) y (V, y) en una n -variedad con $p \in U \cap V$ y una función suave f definida por lo menos en una vecindad abierta de p , está dada por la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p). \quad (2.6)$$

También es evidente que la función $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ es lineal y que satisface la regla del producto de Leibniz. Aprovechando la definición de difeomorfismo que tenemos en \mathbb{R}^n vamos a dar una definición de difeomorfismo para variedades.

Definición 2.7. Sean M y N dos variedades suaves (o de clase C^r). Un homeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que f y f^{-1} son C^r -diferenciables para $r \geq 1$ se llama C^r -difeomorfismo o simplemente *difeomorfismo* si $r = \infty$.

Por lo tanto, diremos que dos C^r -variedades M y N son *difeomorfas* si existe un C^r -difeomorfismo $f : M \rightarrow N$. Si restringimos f al conjunto $U \subset M$, entonces decimos que f es un difeomorfismo local. Por supuesto que el caso $M = N$ está incluido.

§2.2. El espacio tangente

Muchas veces nos interesa adherir un espacio vectorial en cada punto de una variedad. En el caso de la electrodinámica clásica, que se formula de manera natural en el espacio de Minkowski y que en cada punto de esta variedad queremos agregar la información de los campos electromagnéticos y las cargas y corrientes que interactúan entre sí según las leyes de Maxwell, que incorporan al Principio de Superposición.

Recordemos que dada una curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, su vector velocidad (vector tangente) en el punto $p \in \mathbb{R}^n$ es el vector $\left(p, \frac{dx^1}{dt}(p), \dots, \frac{dx^n}{dt}(p)\right)$. En general, si V es un espacio vectorial finito-dimensional, en particular \mathbb{R}^n , entonces V es una variedad suave de manera natural y el *espacio tangente en el punto* $p \in V$ puede tomarse provisionalmente como el conjunto $\{p\} \times V$, que hereda la estructura de espacio vectorial. Escribimos $v_p := (p, v)$ y si v_p es un vector tangente, entonces a v le llamamos la *parte principal* de v_p . Al espacio tangente de una variedad M en el punto p lo denotaremos $T_p M$.

Además, tenemos un isomorfismo natural entre \mathbb{R}^n y $T_p \mathbb{R}^n$ dado por la aplicación $v \mapsto (p, v)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y tenemos un isomorfismo natural entre $T_p \mathbb{R}^n$ y $T_q \mathbb{R}^n$ para cualquier par de puntos p y q dado por $(p, v) \mapsto (q, v)$ que a su vez nos permite ver por qué en \mathbb{R}^n no es necesaria la construcción explícita de vectores anclados en un punto, ya que coinciden excepto en el punto ancla, sin embargo en una variedad arbitraria M esta construcción es absolutamente fundamental y nada trivial.

Consideremos por un instante el espacio ambiente \mathbb{R}^n , es decir, consideremos una subvariedad regular n -dimensional M . Bajo estas hipótesis una curva suave $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es también una curva suave en \mathbb{R}^n y $c'(0)$ es el vector anclado en el punto $p := c(0)$ que es tangente a M . Así, la familia de vectores obtenida de esta manera es un subespacio n -dimensional del espacio tangente de \mathbb{R}^n en el punto p . En este caso especial, este subespacio puede jugar el rol del espacio tangente de M en el punto p .

Dado un vector $v_p := (p, v) \in T_p M$ nos interesa hacer tres observaciones a propósito de este vector. A saber,

1. *Clases de equivalencia de curvas por un punto.* Hay muchas curvas distintas $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $c(0) = p$ que producen al mismo vector tangente v_p . Una relación de equivalencia obvia entre estas curvas se puede definir estableciendo que dos curvas que pasan por el punto p al tiempo $t = 0$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo vector velocidad v_p . Pero podemos pensarlo a la inversa, es decir, que podemos pensar en un vector tangente como una clase de equivalencia de curvas.
2. *Operador derivada direccional.* Un vector tangente puede ser usado para construir un operador de derivada direccional. Si $v_p = (p, v)$ es un vector tangente en $T_p \mathbb{R}^n$, entonces tenemos un operador derivada direccional en el punto p , el cual es un mapeo $C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f \mapsto Df(p)v$. Si v_p es un vector tangente a M queremos un mapeo similar $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Aunque la función f está definida en M , no tenemos la derivada Df , pero podemos tomar nuestra derivada direccional justo como el mapeo $D_{v_p} : f \mapsto (f \circ c)'(0)$, donde $c : I \rightarrow M$ es cualquier curva cuya velocidad en el tiempo $t = 0$ es v_p .
3. *Leyes de transformación para las componentes de un vector con respecto a varias cartas.* Si (U, y) es una carta en M con $p \in U$, invirtiendo obtenemos el mapeo $y^{-1} : V \rightarrow M$, al cual podemos pensar como un mapeo en el espacio ambiente \mathbb{R}^n que parametriza una región de M . Suponiendo que $y^{-1}(0) = p$, tenemos las “curvas coordenadas” $y^i \mapsto y^{-1}(0, \dots, y^i, \dots, 0)$ para $i = 1, \dots, n$. Así, los vectores tangente resultantes, E_i , en el punto p tienen como parte principal las derivadas parciales, $E_i := \left(p, \frac{\partial y^{-1}}{\partial y^i}(0) \right)$. De hecho la familia $\{E_i\}$ es una base para el espacio $T_p M$.

Para otro sistema de coordenadas \bar{y} , con $\bar{y}^{-1}(0) = p$, construimos una base $\{\bar{E}_i\}$ de la misma manera en la que construimos la base $\{E_i\}$. Si $v_p = \sum_{i=1}^n a^i E_i = \sum_{i=1}^n \bar{a}^i \bar{E}_i$, para $a = (a^1, \dots, a^n)$ y $\bar{a} = (\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^n)$, entonces $\bar{a} = D(\bar{y} \circ y^{-1})|_{y(p)} a$, es decir

$$\bar{a}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^j} a^j. \quad (2.7)$$

Estas tres observaciones acerca del vector velocidad o vector tangente v_p motivan, cada una de ellas, una definición formal del espacio tangente de una variedad M en cada punto p , que no requiere del espacio ambiente. Por supuesto que estas tres definiciones son equivalentes entre sí, como puede verse en [Lee, 2009]. Nosotros usaremos aquí la construcción del espacio tangente a través de cartas, pues es la construcción más favorable para escribir la electrodinámica clásica. Veamos primero un resultado necesario para la construcción del espacio tangente.

Proposición 2.1 (Transferencia de estructura lineal). Sean S un conjunto, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios vectoriales n -dimensionales y $b_\alpha : V_\alpha \rightarrow S$ una biyección para cada $\alpha \in A$. Si para cada par $\alpha, \beta \in A$ se tiene que el mapeo $b_\beta^{-1} \circ b_\alpha : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ es un isomorfismo lineal, entonces existe una única estructura de espacio vectorial en el conjunto S tal que cada b_α es un isomorfismo lineal.

Prueba. Sean S un conjunto, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios vectoriales n -dimensionales y $b_\alpha : V_\alpha \rightarrow S$ una biyección para cada $\alpha \in A$. Definimos la suma en S como $s_1 + s_2 := b_\alpha(b_\alpha^{-1}(s_1) + b_\alpha^{-1}(s_2))$ y definimos el producto por escalares en S como $\lambda \cdot s := b_\alpha(\lambda b_\alpha^{-1}(s))$. Estas dos operaciones son independientes del subíndice α , trivialmente, y hacen de S un espacio vectorial. La unicidad de esta estructura de espacio vectorial donde b_α es un isomorfismo lineal se sigue también inmediatamente. \square

Construcción formal del espacio tangente. Sea \mathcal{A} el atlas máximo para una n -variedad M . Para cada punto fijo $p \in M$ consideremos el conjunto Γ_p de todas las ternas $(p, v, (U, x)) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$ tal que $p \in U$. Definamos una relación de equivalencia en Γ_p haciendo que $(p, v, (U, x)) \sim (p, w, (V, y))$ si y sólo si

$$w = D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} \cdot v. \quad (2.8)$$

Es decir que la derivada en el punto $x(p)$ del cambio de coordenadas $y \circ x^{-1}$ “identifica” al vector v con el vector w . Al conjunto de clases de equivalencia Γ_p / \sim se le puede dar una estructura de espacio vectorial como sigue:

Para cada carta (U, x) con $p \in U$ tenemos un mapeo $b_{(U,x)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma_p / \sim$ dado por $v \mapsto [p, v, (U, x)]$, donde $[p, v, (U, x)]$ denota a la clase de equivalencia de $(p, v, (U, x))$. De hecho este mapeo es una biyección. Por la [Proposición 2.1](#) podemos obtener una estructura de espacio vectorial en Γ_p / \sim , cuyos elementos son *vectores tangentes*, es decir definimos $T_p M := \Gamma_p / \sim$. Si $v_p = [p, v, (U, x)] \in T_p M$, entonces decimos que $v \in \mathbb{R}^n$ representa al vector v_p con respecto a la carta (U, x) .

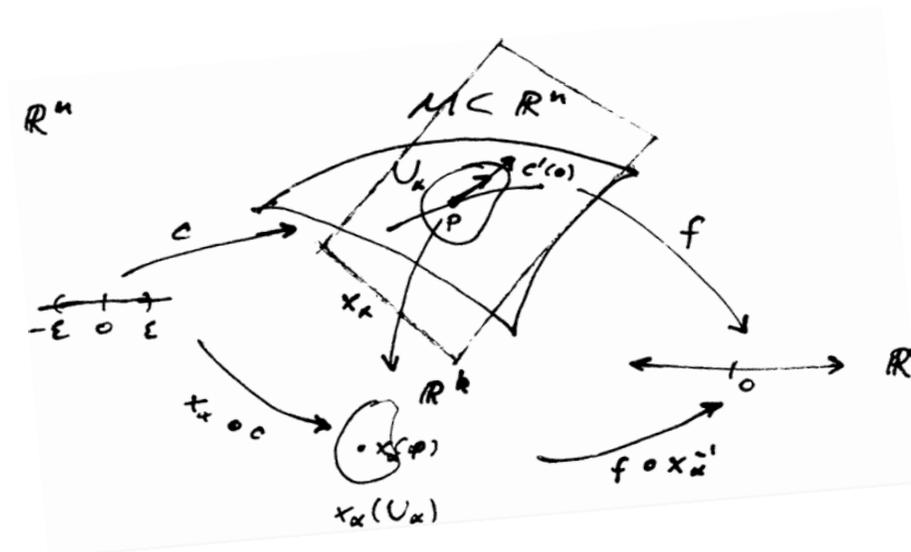


Figura 2.2: Haz tangente.

En términos de coordenadas, tenemos que para un par de cartas (U, x) y (V, y) que contienen al punto p , para la n -ada (v^1, \dots, v^n) que representa a un vector tangente en p con respecto a la carta (U, x) y para la n -ada (w^1, \dots, w^n) que representa al mismo vector tangente en p pero con respecto a la carta (V, y) la ecuación (2.7) toma la forma siguiente

$$w^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{x(p)} v^j, \quad (2.9)$$

donde escribimos el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1}$ como $y^i := y^i(x^1, \dots, x^n)$, para $1 \leq i \leq n$.

De esta ecuación se sigue que para una variedad M , un vector tangente v_p en el punto p es un mapeo lineal $v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de Leibniz: para cualquier par de funciones $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g), \quad (2.10)$$

por lo que podemos decir que un vector tangente en el punto $p \in M$ es una derivada del álgebra $C^\infty(M)$ con respecto al mapeo de evaluación en p , $ev_p(f) := f(p)$, y así lo emplearemos en el [Capítulo 4](#).

Definición 2.8. Definimos al operador $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (2.11)$$

De esta definición se sigue inmediatamente que la n -ada de vectores (derivadas) $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p\right)$ es una base para el espacio $T_p M$ y más aún, para cada $v_p \in T_p M$ se tiene que

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (2.12)$$

Definición 2.9. El espacio dual del espacio tangente $T_p M$ se llama *espacio cotangente*, denotado por $T_p^* M$. Los elementos del espacio cotangente $T_p^* M$ se llaman *covectores*.

La base (inducida) de $T_p^* M$, que a su vez es dual a la base coordenada $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p\right)$ se denota como $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ y por definición cumple que

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) := \delta_j^i, \quad (2.13)$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker: $\delta_j^i = 1$ si $i = j$ y $\delta_j^i = 0$ si $i \neq j$.

Definición 2.10. Sea $f : M \rightarrow N$ un mapeo suave y considérese un punto $p \in M$ con imagen $q = f(p) \in N$. Elijanse cualesquiera cartas $(U, x) \ni p$ y $(V, y) \ni q = f(p)$ tales que para $v_p \in T_p M$ se tiene el representante $(p, v, (U, x))$. Entonces el *mapeo tangente* $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ se define haciendo que el representante de $T_p f(v_p)$ en la carta (V, y) esté dado por $(q, w, (V, y))$, donde $w = D(y \circ f \circ x^{-1}) \cdot v$.

Esta definición determina de manera única al elemento $T_p f \cdot v$ y la regla de la cadena garantiza que está bien definido. Así, la diferencial $df_p(v_p)$ es una versión infinitesimal de la composición $f \mapsto f \circ \gamma$, donde $\gamma'(0) = v_p$.

Definición 2.11. Sea M una variedad suave y sea $p \in M$. Para cada función $f \in C^\infty(M)$ definimos su *diferencial en el punto p* como el mapeo lineal $df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $df(p)(v_p) := v_p f$, para todo $v_p \in T_p M$.

Notemos que $df(p) \in T_p^* M$, por lo tanto tenemos una versión del *Teorema de la Función Inversa* para variedades diferenciables [Spivak, 1999, Lee, 2009].

Teorema 2.1 (Función Inversa, TFIV). Si $f : M \rightarrow N$ es un mapeo suave entre variedades tal que $T_p f : T_p M \rightarrow T_q N$ es un isomorfismo, entonces existe una vecindad abierta O_p de p tal que $f(O_p)$ es un abierto y $f|_{O_p} : O_p \rightarrow f(O_p)$ es un difeomorfismo. Si $T_p f$ es un isomorfismo para todo $p \in M$, entonces la función $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local.

§2.3. Haces fibrados

En esta sección introduciremos el concepto de haces fibrados y desde estos introduciremos a los haces vectoriales como caso particular. Uno de los haces vectoriales más importantes es el haz tangente. Estos objetos serán necesarios para generalizar las ecuaciones de Maxwell. La idea es que a cada punto de una variedad M se le asigna información extra, en nuestro caso, un espacio vectorial que llamaremos fibra (la cual contendrá la información del campo electromagnético) y queremos que estos espacios vectoriales varíen de manera continua cuando variamos continuamente un punto en la variedad. En el caso que nos ocupa todos los espacios vectoriales que constituirán las fibras serán espacios vectoriales euclidianos, \mathbb{R}^n , para algún n natural.

Definición 2.12. Sean F, M, E variedades C^r y sea $\pi : E \rightarrow M$ un mapeo C^r . La cuarteta (E, π, M, F) se llama *C^r -haz fibrado (localmente trivial)* si

para cada punto $p \in M$ existe un abierto U que contiene a p y un C^r -difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

A la variedad E le llamamos *espacio total*, al mapeo π le llamamos *proyección del haz*, a la variedad M le llamamos *espacio base* y a la variedad F le llamamos *fibra típica*. En lo que sigue consideraremos sólo haces fibrados suaves. Al conjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$ se le llama *fibra sobre p* , para cada $p \in M$.

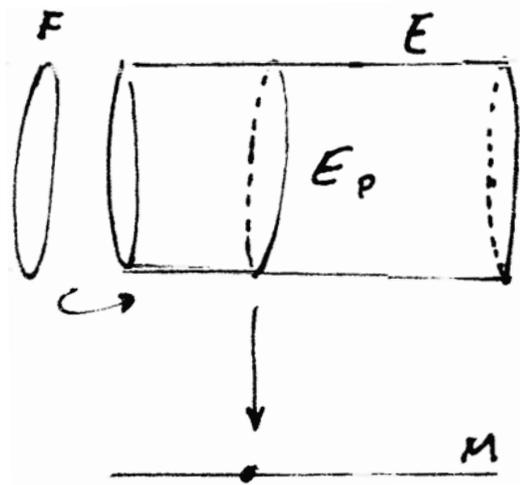


Figura 2.3: Haz fibrado.

Definición 2.13. Definimos una *sección suave (global)* de un haz fibrado $\xi = (E, \pi, M, F)$ como un mapeo suave $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$, es decir que $\sigma(p) \in E_p$. Una *sección suave local sobre un abierto U* es un mapeo suave $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$. El conjunto de secciones del haz fibrado ξ se denota por $\Gamma(\xi)$ o por $\Gamma(E)$.

Es posible que un haz fibrado pueda no tener ninguna sección suave global. Los mapeos $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de la definición de haz fibrado se llaman *trivializaciones locales*. De hecho, estas trivializaciones locales son mapeos de la forma $\phi = (\pi|_{\pi^{-1}(U)}, \Phi)$, donde $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow F$ es un mapeo suave

con la propiedad de que $\Phi|_{E_p} : E_p \rightarrow F$ es un difeomorfismo. Escribiremos simplemente (π, Φ) . Así, tenemos que

$$\phi(y) = (\pi, \Phi)(y) := (\pi(y), \Phi(y)). \quad (2.14)$$

A la segunda componente del mapeo ϕ se le llama *parte principal* de la trivialización local. Una pareja (U, ϕ) donde ϕ es una trivialización local sobre $U \subset M$ se llama *carta del haz (fibrado)* y una familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas del haz (fibrado) tales que la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para M se llama *atlas del haz (fibrado)*, porque efectivamente constituyen un atlas para el haz fibrado ξ inducido a partir del atlas de M .

Definición 2.14. Sean $\xi = (E, \pi, M, F)$ un haz fibrado suave y $f : N \rightarrow M$ un mapeo suave. Una *sección del haz ξ a lo largo de f* es un mapeo $\sigma : N \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = f$. Denotamos al conjunto de secciones a lo largo de f como $\Gamma_f(\xi)$ o como $\Gamma_f(E)$.

§2.4. Haces vectoriales

Vamos a definir formalmente lo que será un haz vectorial. *Grosso modo*, un haz vectorial es un tipo de haz fibrado que representa una familia parametrizada de espacios vectoriales. En general sólo ocuparemos haces vectoriales reales en este trabajo, aunque pudiera ser que ocupemos haces vectoriales complejos. Por esta razón haremos que el campo \mathbb{F} sea el campo \mathbb{R} o bien el campo \mathbb{C} , pues formalmente no hay diferencia entre escribir al campo de los reales o al campo de los complejos.

Definición 2.15. Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita. Un \mathbb{F} -haz vectorial con fibra típica V es un haz fibrado (E, π, M, V) que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada punto $x \in M$ el conjunto $E_x := \pi^{-1}(x)$ tiene estructura de \mathbb{F} -espacio vectorial isomorfa al espacio vectorial fijo V .
2. Cada $p \in M$ está en el dominio de alguna carta del haz (U, ϕ) de tal manera que para cada $x \in U$ el mapeo $\Phi|_{E_x} : E_x \rightarrow V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde $\phi = (\pi, \Phi)$.

A la carta del haz (U, ϕ) se le llama *carta del haz vectorial* o *trivialización local del haz vectorial (sobre U)*.

En ocasiones escribiremos $\pi : E \rightarrow M$ o simplemente $E \rightarrow M$ para referirnos al haz vectorial (E, π, M, V) cuando la fibra V (y la proyección π) esté(n) sobreentendida(s).

Asumiremos que las trivializaciones locales son lineales en las fibras. A una familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas del haz vectorial tales que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta para M se le llama *atlas del haz vectorial* para $\pi : E \rightarrow M$, el cual es heredado por el espacio base M . La definición de haz vectorial garantiza que existe un atlas de este tipo. A la dimensión de la fibra típica V , $\dim V$, le llamamos el *rango* del haz vectorial. Un haz vectorial (E, π, M, V) se llama *trivial* si $E \cong M \times V$.

Como se dijo al inicio de la sección, uno de los haces vectoriales más importantes de una variedad es el *haz tangente*, el cual es el espacio formado por todos los espacios tangentes de M en cada punto de M . Definir el espacio tangente de una variedad inmersa en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n es más o menos sencillo, pero en el caso de una variedad en abstracto, sin considerar su ambiente, las cosas son un poco más complicadas, pues de hecho la definición involucra una noción de derivada que vamos a definir en la [Sección 2.6](#).

Es importante señalar que cada haz vectorial tiene secciones globales, por ejemplo la sección cero que mapea cada $x \in M$ al elemento cero 0_x de la fibra E_x . La imagen de la sección cero se llama a veces *sección cero* y se identifica con la base M . Además, la imagen de cualquier sección global es una subvariedad difeomorfa a la base M , como asegura el siguiente lema.

Lema 2.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un \mathbb{F} -haz vectorial con fibra típica V . Si $v \in \pi^{-1}(p)$, entonces existe una sección global $\sigma \in \Gamma(\xi)$ tal que $\sigma(p) = v$. Más aún, si s es una sección local definida en U y W es un abierto con cierre compacto $W \subset \overline{W} \subset U$, entonces existe una sección $\sigma \in \Gamma(\xi)$ tal que $\sigma = s$ en el abierto W .

Prueba. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un \mathbb{F} -haz vectorial con fibra típica V y supongamos que $v \in \pi^{-1}(p)$. Consideremos una trivialización local $\phi : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p \times F$, donde U_p es una vecindad abierta de p , es decir que $\phi = (\pi, \Phi)$ para $\Phi : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow F$ un mapeo suave con la propiedad de que $\Phi : E_p \rightarrow F$ es un difeomorfismo. De esta trivialización local obtenemos una sección local $\sigma_{\text{loc}} : U_p \rightarrow U_p \times F$ definida cerca de p tal que $\sigma_{\text{loc}}(p) = v$. Extendemos esta sección local por cero en toda la variedad con una función de partición α tal

que $\text{sopp}(\alpha) \subset U_p$ y $\alpha = 1$ en U_p . Entonces $\sigma := \alpha\sigma_{\text{loc}} \in \Gamma(\xi)$ es una sección global tal que $\sigma(p) = \alpha\sigma_{\text{loc}}(p) = v$.

Para la segunda parte del lema consideremos una sección local s definida en un abierto U , es decir $s : U \rightarrow E$ y supongamos que W es un abierto con cierre compacto tal que $W \subset \overline{W} \subset U$. Sea β una función de partición tal que $\text{sopp}(\beta) \subset U$ y $\beta = 1$ en \overline{W} . Entonces βs se extiende por cero a toda la variedad, es decir $\sigma := \beta s \in \Gamma(\xi)$ es una sección global y $\sigma := \beta s = s$ en W , como se quería demostrar. \square

Ya que en electrodinámica hemos elegido una forma de medir, que de hecho está dada por la métrica de Minkowski (2.45), queremos introducir una métrica en una variedad M . Esto se logra introduciendo un producto escalar en las fibras de un haz vectorial.

Definición 2.16. Si $\xi = (E, \pi, M, V)$ es un haz vectorial y $p \in M$, entonces una base de espacio vectorial para la fibra E_p se llama *marco en el punto p* . Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial de rango $k = \dim V$, una n -ada $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de secciones de E sobre un abierto U se llama *marco (local) sobre U* si para todo $p \in U$ la n -ada $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ es un marco en p .

Si elegimos una base fija M para la fibra típica V , entonces una elección de un marco local sobre un abierto $U \subset M$ es equivalente a una trivialización local (una carta de haz vectorial). Una variedad M se llama *paralelizable* si el haz $TM \rightarrow M$ tiene un marco global, es decir si el haz tangente es trivial.

Definición 2.17. Definimos una *métrica riemanniana* en un haz vectorial real $\pi : E \rightarrow M$ como un mapeo $p \mapsto g_p(\cdot, \cdot)$ que asigna a cada $p \in M$ un producto escalar positivo definido $g_p(\cdot, \cdot)$ en la fibra E_p suave, en el sentido de que la asignación $p \mapsto g_p(s_1(p), s_2(p))$ es suave para todas las secciones suaves s_1 y s_2 . Un haz vectorial real junto a una métrica riemanniana se llama *haz vectorial riemanniano* $\xi = (E, \pi, M, V, g)$. Una variedad suave M con una métrica riemanniana definida en un haz vectorial con base M se llama *variedad riemanniana*, (M, g) .

Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial de rango k con una métrica riemanniana definida en él, es conveniente asumir que se elige un producto interno fijo y una base ortonormal distinguida en la fibra típica V . Para nosotros aquí $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interno usual y con la base canónica, es decir trabajaremos con el haz $\xi = (E, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ o simplemente escrito como $\xi = (E, \pi, M)$. El

siguiente resultado también fue demostrado por H. Whitney en *Differentiable manifolds, Annals of Math. (2) v. 37, 1936, 645-680*.

Proposición 2.2. En cada haz vectorial real (complejo) $E \rightarrow M$, se puede definir una métrica riemanniana (hermitiana).

Dados dos haces vectoriales $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ con fibras típicas V_1 y V_2 , respectivamente, si definimos la unión disjunta,

$$E_1 \otimes E_2 := \bigcup_{p \in M} E_{1p} \otimes E_{2p}, \quad (2.15)$$

entonces tenemos una proyección $\pi : E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ que mapea cualquier elemento de la fibra $E_{1p} \otimes E_{2p}$ al punto base $p \in M$. Se puede construir un atlas de haz vectorial para el espacio $E_1 \otimes E_2$ a partir de un atlas en cada fibra E_1 y E_2 como en [Lee, 2009].

§2.5. El haz tangente

Ahora recuperamos la construcción del haz tangente que hicimos en la [Sección 2.2](#). Queremos definir la derivada de una función f en una variedad M , es decir, queremos medir la razón de cambio de f en un punto p de la variedad M , la cual debe involucrar sólo valores de f cercanos a p en una vecindad abierta de p , pues hasta ahora no tenemos ninguna manera de llevar un punto $p \in M$ arbitrario a un punto $q \in M$ también arbitrario. Para lograr esto regresemos al espacio tangente para definir el haz tangente.

Definición 2.18. Definimos el *haz tangente* de una variedad M como la unión disjunta de sus espacios tangente:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (2.16)$$

Asimismo, dado un mapeo suave $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades M y N , los mapeos tangente $T_p f$ de cada espacio tangente se combinan para dar el mapeo $Tf : TM \rightarrow TN$ en el haz tangente de M , el cual es un mapeo lineal en cada fibra. A este mapeo se le llama *levantamiento tangente de f* o *mapeo tangente de f* . Para mapeos suaves $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ la regla de la cadena toma la forma natural:

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \quad (2.17)$$

Si U es un abierto en un espacio vectorial de dimensión finita V , entonces el mapeo tangente en $x \in U$ puede verse como el producto cartesiano $\{v\} \times V$. Por ejemplo, ya que un elemento $v_p = (p, v)$ corresponde a la derivada dada por

$$f \mapsto v_p f := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv),$$

entonces el haz tangente de U puede verse como el producto cartesiano $U \times V$.

Otro ejemplo: si U_1 y U_2 son abiertos de los espacios vectoriales V y W , respectivamente, y si $f : U_1 \rightarrow U_2$ es suave (o por lo menos de clase C^1), entonces tenemos el mapeo tangente $Tf : TU_1 \rightarrow TU_2$. Si vemos a TU_1 como $U_1 \times V$ y a TU_2 como $U_2 \times W$, el mapeo tangente Tf está dado por

$$(p, v) \mapsto (f(p), Df(p) \cdot v).$$

Estos dos ejemplos motivan la siguiente definición.

Definición 2.19. Si $f : M \rightarrow V$ es una función, con V un espacio vectorial de dimensión finita, entonces definimos la *diferencial de f* como el mapeo $df(p) : T_p M \rightarrow V$ para cada $p \in M$ dado por $df(v) = df(p)(v)$ cuando $v \in T_p M$.

Para cada carta (U, x) tenemos el levantamiento tangente $Tx : TU \rightarrow TV$, donde $V := x(U)$, y como $V \subset \mathbb{R}^n$, podemos identificar $T_{x(p)}V$ con el producto cartesiano $\{x(p)\} \times \mathbb{R}^n$. Bajo esta identificación tenemos que

$$T_px \cdot v_p = \left(x(p), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \circ \gamma) \right), \quad (2.18)$$

para $v_p \in T_p U$ y γ una curva que representa al vector v_p y tal que $\gamma'(0) = v_p$.

Si $v_p = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ y si tomamos $\gamma(t) := x^{-1}(x(p) + te_i)$, donde e_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} T_px \cdot v_p &= T_px \cdot \left(\sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \\ &= \left(x(p), \sum_{i=1}^n v^i e_i \right) \end{aligned}$$

$$= (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n). \quad (2.19)$$

A las cartas del espacio tangente TM las denotamos por parejas de la forma (TU_α, Tx_α) y se derivan o heredan de las cartas de M . De hecho estas cartas son los levantamientos tangente de las cartas de M . Por esta razón a estas cartas les llamamos *cartas naturales* para TM . Con estas cartas se muestra que si M es una variedad suave de dimensión n , entonces TM es una variedad suave de dimensión $2n$ y el mapeo $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ es un mapeo suave (veáse [Lee, 2009]). Más aún, para un mapeo suave $f : M \rightarrow N$ el mapeo tangente Tf es suave y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Si $p \in U \cap V$ y $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, entonces $Ty \circ Tx^{-1}$ asocia la $2n$ -ada $(x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n)$ a la $2n$ -ada $(y^1(p), \dots, y^n(p), w^1, \dots, w^n)$, donde

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial (y \circ x^{-1})^i}{\partial x^k} v^k. \quad (2.20)$$

Si abreviamos la i -ésima componente de $y \circ x^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p))$ simplemente como $y^i := y^i(x^1(p), \dots, x^n(p))$, entonces los mapeos de transición del haz tangente se expresan de la siguiente manera:

$$y^i = y^i(x^1(p), \dots, x^n(p)),$$

y

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} v^k. \quad (2.21)$$

Es decir, podemos interpretar que esta expresión local está definida en la variedad, en el dominio de la carta, o bien en el espacio euclidiano (en la imagen del dominio de la carta), precisamente esta libertad es lo que nos impide notar esta construcción en el cálculo vectorial, donde $M = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.20. Un difeomorfismo $F : TM \rightarrow M \times V$ tal que el mapeo $F|_{T_p M} : T_p M \rightarrow \{p\} \times V$ es lineal para cada $p \in M$ y tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{F} & M \times V \\ & \searrow \pi_{TM} & \swarrow pr_1 \\ & M & \end{array}$$

se llama *trivialización global de TM* .

Si existe una trivialización global de TM decimos que TM es *trivial*. Para un abierto $U \subset M$ una trivialización de TU se llama *trivialización local de TM sobre U* . En general no existe una trivialización global del haz tangente TM , pero por otro lado cada punto $p \in M$ está contenido en un abierto U tal que TM tiene una trivialización local sobre U .

El dual del haz tangente se llama *haz cotangente* y se define de manera análoga al haz tangente, por lo cual también es una variedad de dimensión $2n$. En general no existe algo como un “levantamiento cotangente”.

§2.6. Campos vectoriales

Un *campo vectorial* es un mapeo suave de un vector tangente en cada punto de la variedad, $X : M \rightarrow TM$. En otras palabras, un campo vectorial es una sección suave en el haz tangente $\pi : TM \rightarrow M$. Escribimos $X_p := X(p)$. En contraste, una sección suave del haz cotangente es una *1-forma* o un *campo covectorial*.

Una sección local de TM definida en un abierto U es lo mismo que un campo vectorial en la variedad abierta U . Si (U, x) es una carta en una variedad suave de dimensión n , entonces si escribimos $x = (x^1, \dots, x^n)$ tenemos campos vectoriales definidos en U mediante el mapeo

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p. \quad (2.22)$$

Al conjunto ordenado de campos vectoriales $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ se le llama *marco coordenado*, el cual evidentemente es una base para TM . Si X es un campo

vectorial suave definido en algún conjunto que contenga al abierto U , entonces para algunas funciones X^i definidas en U tenemos que

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad (2.23)$$

es decir,

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.24)$$

Al conjunto de todos los campos vectoriales definidos en una variedad M lo denotamos por $\mathfrak{X}(M)$.

Hasta ahora hemos visto cómo vectores tangentes individuales en $T_p M$ pueden identificarse como derivadas en $p \in M$. Esta idea puede globalizarse usando campos vectoriales entendidos como operadores de derivación. De hecho, si $v \in T_p M$ es un vector tangente, entonces existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$. Llamaremos *derivación (global)* en $C^\infty(M)$ a un mapeo lineal $\mathcal{D} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que tiene la propiedad de Leibniz:

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g). \quad (2.25)$$

Definición 2.21. A un campo vectorial X sobre M le asociamos el mapeo $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definido por $(\mathcal{L}_X f)(p) := X_p f$. Al operador \mathcal{L}_X se le llama *derivada de Lie (para funciones)*.

Es importante notar que la derivada de Lie es lineal: $\mathcal{L}_{aX+bY} = a\mathcal{L}_X + b\mathcal{L}_Y$. Además $(\mathcal{L}_X f)(p) = X_p \cdot f = df(X_p)$ para cualquier $p \in M$, consecuentemente $\mathcal{L}_X f = df \circ X$. Una caracterización importante de los campos vectoriales suaves es que la derivada de Lie es la única derivada para un campo determinado de manera unívoca, por esta razón podemos escribir $Xf := \mathcal{L}_X f$. El siguiente resultado es inmediato de la propiedad (2.24).

Teorema 2.2. Si \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son dos derivadas, entonces también se tiene que $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] := \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ es una derivada.

Prueba. Sean \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son dos derivadas. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](fg) &:= \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2(fg) - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1(fg) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f)g + f\mathcal{D}_2(g)) - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f)g - f\mathcal{D}_1(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2 f)g + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(\overline{g}) + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(\overline{g}) + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) \\
&\quad - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g - \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(\overline{g}) - \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(\overline{g}) - f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)) \\
&= (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(f)g + f(\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(g) \\
&= [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](f)g + f[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](g).
\end{aligned}$$

□

De este teorema y de la caracterización de los campos vectoriales, $Xf = \mathcal{L}_X f$, se sigue como corolario importante el siguiente resultado.

Corolario 2.1. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son dos campos vectoriales, entonces existe un único campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, llamado *corchete de Lie*, tal que

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X, \quad (2.26)$$

o bien

$$[X, Y] = XY - YX \quad (2.27)$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
[X, Y]f &= \mathcal{L}_{[X, Y]}f = (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y)f - (\mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)f \\
&= \mathcal{L}_X(Yf) - \mathcal{L}_Y(Xf) = (XY)f - (YX)f.
\end{aligned}$$

□

Entonces, la forma local de la derivada de Lie para los campos $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ está dada por la expresión

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.28)$$

Definición 2.22. Dado un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$, definimos el *pull-back por f del campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$* , f^*Y , y definimos el *push-forward por f del campo $X \in \mathfrak{X}(M)$* , f_*X , como

$$f^*Y := Tf^{-1} \circ Y \circ f \quad (2.29)$$

y

$$f_*X := Tf \circ X \circ f^{-1}, \quad (2.30)$$

respectivamente.

En otras palabras, $(f^*Y)(p) = Tf^{-1} \cdot Y_{f(p)}$ y $(f_*X)(p) = Tf \cdot X_{f^{-1}(p)}$ respectivamente. Notemos que $f^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$.

También podemos definir estos operadores para funciones suaves. De hecho, el *pull-back de un mapeo suave* g se define como $f^*g := g \circ f$ y si además f es un difeomorfismo entonces podemos definir el *push-forward de un mapeo suave* g como $f_*g := (f^{-1})^*g$. Con esta definición se puede ver que la derivada de Lie en funciones es natural con respecto al pull-back y al push-forward (es decir que conmuta con estos operadores).

Podemos extender la derivada de Lie a campos vectoriales definiéndola para un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ con respecto a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante el corchete de Lie:

$$\mathcal{L}_X Y := [X, Y]. \quad (2.31)$$

Podemos interpretar la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ como una medida de la razón de cambio del campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ en la dirección del campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, mientras que el corchete de Lie mide la carencia de conmutatividad de flujos. En la siguiente sección extenderemos la derivada de Lie a campos tensoriales.

§2.7. Campos tensoriales

A partir de ahora en el resto de este trabajo usaremos la convención de la suma de Einstein, que consiste en eliminar los símbolos de suma cuando la suma queda sobreentendida por el contexto, por ejemplo la suma $\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_j^{ik} \alpha^j v_k$ la escribiremos simplemente como $\tau_j^{ik} \alpha^j v_k$. Vamos a introducir los *campos tensoriales* también llamados simplemente *tensores*.

Aunque los campos tensoriales se pueden introducir de manera práctica describiendo sus expresiones locales en cartas y después describiendo cómo esas expresiones se transforman bajo un cambio de coordenadas (mapeo de transición), no tomaremos este camino desde el principio porque esconde gran parte de la estructura geométrica y algebraica de estos objetos. En su lugar los presentaremos como mapeos multilineales, rescatando de esta manera parte de sus estructuras algebraica y geométrica. Para definir los tensores es suficiente una estructura de módulo pero nosotros tomaremos espacios vectoriales.

Definición 2.23. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} . Entonces, un *tensor algebraico W -valuado en V* es un mapeo multilinear de la forma

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \rightarrow W, \quad (2.32)$$

donde cada factor V_i es V o bien V^* . Si $W = \mathbb{F}$ entonces simplemente decimos que τ es un *tensor algebraico*.

Ya que hay tensores que contienen básicamente la misma información pero que son diferentes, vamos a especificarlos como $\tau_{s_1 s_2 \dots s_b}^{r_1 r_2 \dots r_a}$ y hacemos $r := r_1 + \cdots + r_a$ y $s := s_1 + \cdots + s_b$. Diremos que el tensor es de *tipo total* $\binom{r}{s}$ o (r, s) y convendremos en asignar a cada tensor de tipo total $\binom{r}{s}$ un único elemento del espacio de mapeos multilineales de V^r en W^s , $T_s^r(V; W)$, separando las componentes de V de las de V^* . Diremos entonces que el tensor es *r -contravariante y s -covariante* y que está *en su forma consolidada*. Se puede consolidar primero con V^* y después con V . Vamos a restringirnos al estudio de tensores consolidados ya que las mismas propiedades para tensores no consolidados se deducen de manera análoga.

Definición 2.24. Para un par de tensores $S \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ y $T \in T_{s_2}^{r_2}(V)$ definimos su *producto tensorial (consolidado)* $S \otimes T \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ como

$$\begin{aligned} S \otimes T(\theta^1, \dots, \theta^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) \\ = S(\theta^1, \dots, \theta^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1})T(\theta^{r_1+1}, \dots, \theta^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nótese que el producto tensorial es asociativo pero no necesariamente es conmutativo.

Proposición 2.3. Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial con base (e_1, \dots, e_n) y base dual correspondiente (e^1, \dots, e^n) para V^* . Entonces, el conjunto indexado

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} : i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n\}$$

es una base para $T_s^r(V)$, es decir que si $\tau \in T_s^r(V)$, entonces

$$\tau = \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}, \quad (2.34)$$

donde $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$.

A los elementos $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ se les llama *componentes de τ con respecto a la base* (e_1, \dots, e_n) . Entonces, las componentes de un tensor dependen de la base escogida, y consecuentemente las componentes con respecto a una base están relacionadas con las componentes de otra base por medio de una ley de transformación que se deduce de esta proposición. Asimismo, se deducen otras operaciones tensoriales como la suma y el producto de manera natural.

Definición 2.25. Un tensor covariante $\tau \in T_s^0(V, W)$ se llama

1. *simétrico*, sii $\tau(v_1, \dots, v_s) = \tau(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)})$ y
2. *alternante o antisimétrico*, sii $\tau(v_1, \dots, v_s) = \text{sgn}(\sigma)\tau(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)})$,

para todos los componentes v_1, \dots, v_s y para toda permutación σ de las letras $\{1, \dots, s\}$.

Definiciones análogas se dan para tensores contravariantes. Vamos a definir una operación tensorial que nos será muy útil y que de alguna manera generaliza el concepto de traza de una transformación lineal.

Definición 2.26. Sea (e^1, \dots, e^n) una base para V y sea (e_1, \dots, e_n) la base dual para V^* . Si $\tau \in T_s^r(V)$, entonces para $k \leq r$ y $l < s$ definimos $C_l^k \tau \in T_{s-1}^{r-1}(V)$ como

$$\begin{aligned} C_l^k \tau(\theta^1, \dots, \theta^k, \dots, \theta^{r-1}, w_1, \dots, w^l, \dots, w_{s-1}) \\ := \tau(\theta^1, \dots, e^a, \dots, \theta^{r-1}, w_1, \dots, e_a, \dots, w_{s-1}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Este mapeo se llama *contracción del tensor τ en los índices k y l* . Si escribimos las componentes de τ con respecto a nuestra base como $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ y escogemos el índice superior i_k y el índice inferior j_l para realizar la contracción, entonces los componentes del tensor contraído $C_l^k \tau$ están dados por la expresión

$$(C_l^k \tau)_{j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_s}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_r} = \tau_{j_1 \dots a \dots j_s}^{i_1 \dots a \dots i_r}. \quad (2.36)$$

Usualmente sólo escribimos $\tau_{j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_s}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_r}$ en lugar de $(C_l^k \tau)_{j_1 \dots \hat{j}_l \dots j_s}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_r}$ siempre que esté claro cómo se realiza la contracción.

Hay dos enfoques para introducir campos tensoriales en variedades suaves que son equivalentes, a saber el enfoque “de abajo hacia arriba” y el enfoque “de arriba hacia abajo”. Lo que queremos hacer es asignar a cada punto $p \in M$

un elemento de $T_s^r(T_p M)$ de una manera suave, por lo que vamos a considerar un campo tensorial como una sección de un haz vectorial adecuado, de hecho del haz vectorial $T_s^r(TM) \rightarrow M$, llamado $\binom{r}{s}$ -haz tensorial sobre M .

Consideremos un haz vectorial de rango k , $\xi = (E, \pi, M)$ y tomemos como fibra típica a \mathbb{R}^k . Sea $T_s^r(E) := \bigcup_{p \in M} T_s^r(E_p)$. Entonces consideramos un haz vectorial $T_s^r(\xi)$ que tenga a $T_s^r(E)$ como espacio total, a M como espacio base, y a $T_s^r(E_p)$ como fibra sobre p . Explícitamente, si (U, ϕ) es una carta del haz ξ , entonces una carta para $T_s^r(\xi)$ es $\Phi^{r,s} := (\pi, \Phi^{r,s}) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times T_s^r(\mathbb{R}^k)$. Al conjunto de secciones suaves del haz $T_s^r(\xi)$ lo denotamos por $\Gamma(T_s^r(\xi))$.

Definición 2.27. El espacio de secciones $\Gamma(T_s^r(TM))$ se denotará como $\mathcal{T}_s^r(M)$ y a sus elementos se les llamará *campos tensoriales r -contravariantes s -covariantes* o simplemente *campos tensoriales de tipo total $\binom{r}{s}$* . El espacio de tensores $\mathcal{T}_0^r(M)$ se denota por $\mathcal{T}^r(M)$ y al espacio de tensores $\mathcal{T}_s^0(M)$ se denota por $\mathcal{T}_s(M)$.

En otras palabras, un campo tensorial suave A es una aplicación suave de un mapeo multilineal en cada espacio tangente de la variedad. Así, para cada $p \in M$, $A(p)$ es el mapeo multilineal

$$A(p) : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

es decir, $A(p)$ es un elemento del espacio $T_s^r(T_p M)$. En el caso de una variedad riemanniana (M, g) , una métrica riemanniana es un elemento de $\mathcal{T}_2(M)$ que es simétrica y es positiva definida en cada punto.

Un campo tensorial A de tipo total (k, l) puede expresarse en general como el producto

$$A = A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}, \quad (2.38)$$

donde $\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$ y dx^{i_r} son funciones suaves, de hecho $\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \in \mathfrak{X}(U)$ y $dx^{i_r} \in \mathfrak{X}^*(U)$.

Por otro lado, podemos definir tensores que no necesariamente sean secciones suaves de un haz tensorial apropiado definiendo sus leyes de transformación como se señalaba al inicio de esta sección, y entonces en estos casos un tensor será suave cuando sus componentes sean suaves con respecto a cada carta de un atlas.

Definición 2.28. Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, definimos el *pull-back* por f del campo tensorial $\tau \in \mathcal{T}_s(N)$, $f^*\tau \in \mathcal{T}_s(M)$ por

$$f^*\tau(v_1, \dots, v_s)(p) = \tau(Tf \cdot v_1, \dots, Tf \cdot v_s) \quad (2.39)$$

para todo $v_1, \dots, v_s \in T_pM$, y para cualquier $p \in M$.

La expresión local del pull-back para una carta (U, x) en M y para una carta (V, y) en N , con $f(U) \subset V$, la obtenemos como sigue: Si se denota a la función $\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}$ por $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$, tenemos

$$T_p f \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{f(p)}. \quad (2.40)$$

De donde se sigue que

$$(f^*\tau)_{i_1 \dots i_s}(p) = (\tau_{k_1 \dots k_s} \circ f) \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{i_s}}. \quad (2.41)$$

Si f es un cambio de coordenadas y un difeomorfismo, la relación (2.40) coincide con la ley de transformación para tensores. Cabe señalar además que el pull-back se distribuye sobre el producto tensorial y si f es un difeomorfismo entonces la noción de pull-back por f se puede extender a tensores contravariantes y a tensores mixtos $\tau \in \mathcal{T}_s^r$ como sigue:

$$\begin{aligned} f^*\tau(a_1, \dots, a_r, v_1, \dots, v_s)(p) \\ := \tau((Tf^{-1})^*a_1, \dots, (Tf^{-1})^*a_r, Tf \cdot v_1, \dots, Tf \cdot v_s), \end{aligned} \quad (2.42)$$

para todo $v_1, \dots, v_s \in T_pM$ y $a_1, \dots, a_r \in T_p^*M$ y para cualquier $p \in M$. El *push-forward* por f para un tensor mixto $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ se define entonces como

$$f_*\tau := (f^{-1})^*\tau. \quad (2.43)$$

La otra manera de definir un campo tensorial de tipo total (r, s) es definirlo como un mapeo multilineal $\mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow C^\infty(M)$. En este sentido, un campo tensorial es un elemento de $T_s^r(\mathfrak{X}(M))$. Que ambas maneras son equivalentes se sigue del hecho de que $T_s^r(\mathfrak{X}(M)) \cong \mathcal{T}_s^r(M)$.

Como veremos en el [Capítulo 4](#), los campos electromagnéticos se combinan formando tensores, pero que además dependen del tiempo en el caso dinámico. Queremos entonces derivar campos tensoriales, en particular queremos extender la derivada de Lie a campos tensoriales. Con esta idea en mente, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.29. Decimos que una *derivada tensorial* es una colección de mapeos $\mathcal{D}_s^r : \mathcal{T}_s^r(U) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(U)$, denotadas todas ellas por \mathcal{D} por simplicidad, tales que

1. Para todo par de abiertos U y V con $V \subset U$, $\mathcal{D}A|_V = \mathcal{D}(A|_V)$, para todo tensor $A \in \mathcal{T}_s^r(U)$.
2. \mathcal{D} conmuta con la contracción, es decir $\mathcal{D}(C_i^k A) = C_i^k(\mathcal{D}A)$, para todo tensor $A \in \mathcal{T}_s^r(U)$.
3. \mathcal{D} satisface la regla de Leibniz, es decir $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$, para todo par de tensores $A, B \in \mathcal{T}_s^r(U)$.

De la definición anterior se sigue que la derivada de Lie, \mathcal{L}_X , puede extenderse a una derivada tensorial para cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. De hecho se tiene que para un campo tensorial $S \in \mathcal{T}_s(M)$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X S)(Y_1, \dots, Y_s) &= X(S(Y_1, \dots, Y_s)) \\ &= \sum_{i=1}^s S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \mathcal{L}_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_s). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Consideremos el espacio vectorial V (que debe pensarse como un espacio tangente de una variedad o una fibra de algún haz vectorial). Entonces podemos equiparle un producto escalar g a cualquier espacio tensorial $T_s^r(V)$. Por ejemplo, para $T_1^1(V) = V \otimes V^*$ existe un único producto escalar g_1^1 en $V \otimes V^*$ tal que para $v_1 \otimes \alpha_1, v_2 \otimes \alpha_2 \in V \otimes V^*$ tenemos $g_1^1(v_1 \otimes \alpha_1, v_2 \otimes \alpha_2) = g(v_1, v_2)g^*(\alpha_1, \alpha_2)$, donde g^* es el producto escalar en V^* inducido por g .

Definición 2.30. Si $g \in \mathcal{T}_2(M)$ es un tensor simétrico no degenerado y tiene índice constante en M , entonces llamamos a g una *métrica semi-riemanniana* y a la pareja (M, g) la llamamos *variedad semi-riemanniana*. El *índice* de (M, g) es el índice de g y lo denotamos por $\text{ind}(g)$ o $\text{ind}(M)$; la *signatura* es también constante, por lo que la variedad tiene una signatura. Si la signatura de una variedad semi-riemanniana con $\dim M \geq 2$ es $(-1, +1, \dots, +1)$, entonces decimos que M es una *variedad Lorentziana*.

En nuestro caso la variedad de Lorentz importante es el espacio de Minkowski de dimensión k , \mathbb{R}_1^k , con el producto vectorial dado por

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle_1 = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^k x^i y^i, \quad (2.45)$$

y con signatura $(-1, +1, \dots, +1)$ e índice $\text{ind}(\mathbb{R}_1^k) = \text{ind}(g) = 1$.

Para cualquier par de campos vectoriales X e Y definimos su producto interno como $\langle X, Y \rangle_g(p) := \langle X_p, Y_p \rangle_g$. En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) en $U \subset M$ se tiene que $g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_g$. Por lo tanto, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ en U , entonces

$$\langle X, Y \rangle_g(p) := \langle X_p, Y_p \rangle_g = g_{ij}(p) X^i Y^j. \quad (2.46)$$

Hemos presentado de manera global el tipo de espacios en los que se puede plantear una teoría que trate de modelar el espacio-tiempo físico, tal como la teoría de la gravitación o la mecánica clásica. Sin embargo, estamos interesados en un tipo particular de tensores, que son las formas diferenciales. En el siguiente capítulo desarrollamos este tema y desarrollamos una manera adecuada de derivar formas diferenciales.

Capítulo 3

Formas diferenciales

La electrodinámica como la presentamos en el [Capítulo 1](#) acepta una formulación vectorial, de tal modo que cuando el espacio donde se hallan los campos electromagnéticos es una variedad arbitraria, entonces las ecuaciones de Maxwell quedan escritas en términos tensoriales. Un tipo de tensores particulares que vamos a usar para escribir las ecuaciones geométricas de la EDC son aquellos que llamamos *formas diferenciales*. Una forma diferencial no es nada más que un campo tensorial alternante antisimétrico (cf. [[Spivak, 1999](#), [Lee, 2009](#), [Lee, 1997](#)]). Nosotros en este capítulo vamos a introducir una versión antisimétrica del productor tensorial y con ella introduciremos un operador diferencial natural llamado *derivada exterior*, adecuada para derivar formas diferenciales. También introducimos el operador de curvatura y vemos cómo obtener la curvatura de un haz vectorial en términos de formas diferenciales y de la derivada exterior.

§3.1. Formas diferenciales

Definición 3.1. Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita. Un mapeo k -multilineal $\alpha : V \times \cdots \times V \rightarrow W$ se llama *alternante* si $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ siempre que $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$. El espacio de mapeos k -multilineales alternantes en W se denota por $L_{\text{alt}}^k(V; W)$ o simplemente $L_{\text{alt}}^k(V)$ si $W = \mathbb{R}$. Convenimos en llamar $L_{\text{alt}}^0(V; W) := W$ y en particular $L_{\text{alt}}^0(V) := \mathbb{R}$.

Ya que estamos trabajando con el campo \mathbb{R} que tiene característica cero, los mapeos k -multilineales alternantes son los mismos que los mapeos

k -multilineales (completamente) antisimétricos, los que a su vez están definidos por la propiedad de que para cualquier permutación σ de letras $\{1, 2, \dots, k\} =: S_k$, tenemos que

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad (3.1)$$

A veces escribiremos $\sigma_i := \sigma(i)$ por comodidad.

Definición 3.2. El mapeo de antisimetrización $\text{Alt}^k : T_k^0(V) \rightarrow L_{\text{alt}}^k(V)$ se define como

$$\text{Alt}^k(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}). \quad (3.2)$$

Definición 3.3. Dadas $\omega \in L_{\text{alt}}^{k_1}(V)$ y $\eta \in L_{\text{alt}}^{k_2}(V)$, definimos su *producto exterior o producto cuña* $\omega \wedge \eta \in L_{\text{alt}}^{k_1+k_2}(V)$ como

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1!k_2!} \text{Alt}^{k_1+k_2}(\omega \otimes \eta). \quad (3.3)$$

Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \dots, v_{k_1+k_2}) \\ &= \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \text{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k_1}})\eta(v_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, v_{\sigma_{k_1+k_2}}) \\ &= \sum_{(k_1, k_2)\text{-ordenación}} \text{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k_1}})\eta(v_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, v_{\sigma_{k_1+k_2}}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde la suma corre sobre todas la permutaciones tomadas de tal manera que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{k_1}$ y $\sigma_{k_1+1} < \sigma_{k_1+2} < \dots < \sigma_{k_1+k_2}$, llamadas (k_1, k_2) -ordenaciones. El coeficiente del mapeo Alt es una convención, pero no la única convención es uso. Aquí utilizaremos sólo esta convención.

El caso más importante para nosotros es para $\omega, \eta \in L_{\text{alt}}^1(V)$, en donde $\omega \wedge \eta(v, w) = \omega(v)\eta(w) - \omega(w)\eta(v)$, lo cual es claramente un mapeo bilineal antisimétrico. De hecho tenemos que el producto exterior \wedge es \mathbb{R} -bilineal, asociativo y semi-conmutativo en el sentido de que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k_1 k_2} \beta \wedge \alpha$.

Una interpretación geométrica del producto exterior para $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^* = L_{\text{alt}}^1(V)$ y para $v_1, \dots, v_k \in V$ se obtiene de la relación

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(v_1, \dots, v_k) = \det A, \quad (3.5)$$

donde $A := (a_j^i) = (\alpha^i(v_j))$.

Definición 3.4. Definimos el símbolo

$$\epsilon_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} := \begin{cases} 1, & \text{si } j_1, \dots, j_k \text{ es una permutación par de } i_1, \dots, i_k, \\ -1, & \text{si } j_1, \dots, j_k \text{ es una permutación impar de } i_1, \dots, i_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta definición tenemos que si (e_1, \dots, e_n) es una base para V y si (e^1, \dots, e^n) es la base dual para V^* , entonces

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \epsilon_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} \quad (3.6)$$

Como $\alpha \in L_{\text{alt}}^k(V)$ es también un elemento de $T_k^0(V)$, podemos escribir

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad (3.7)$$

donde $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Ya que $\text{Alt}(\alpha) = \alpha$ y Alt es lineal, tenemos que

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_k} \text{Alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}) = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}. \quad (3.8)$$

De hecho tenemos que si (e^1, \dots, e^n) es una base para V^* , entonces el conjunto de elementos $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ es una base para $L_{\text{alt}}^k(V)$. Por lo tanto, $\dim(L_{\text{alt}}^k(V)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. En particular $\dim(L_{\text{alt}}^k(V)) = 0$ para $k > n$.

Para facilitar la escritura representaremos una sucesión de k enteros, digamos i_1, \dots, i_k , del conjunto $\{1, 2, \dots, \dim V\}$ como I , al producto $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ como e^I y al símbolo $\epsilon_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ como ϵ_J^I . Si en algún momento necesitamos que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, entonces escribiremos \vec{I} . Con esta notación podemos definir también el símbolo $a_J := \epsilon_J^{\vec{I}} a_{\vec{I}} = \epsilon_J^{\vec{I}} a_{\vec{I}}$ para cualquier k -ada de índices $J = (j_1, \dots, j_k)$. Con esta convención tenemos que

$$\alpha = a_{\vec{I}} e^{\vec{I}} = \frac{1}{k!} a_I e^I = \frac{1}{k!} a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}. \quad (3.9)$$

Entonces, para $\alpha = \frac{1}{k!}a_I e^I$ y $\beta = \frac{1}{l!}b_J e^J$ se tiene que

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{(k+l)!} (\alpha \wedge \beta)_{I \cup J} e^{I \cup J}, \quad (3.10)$$

donde $(\alpha \wedge \beta)_{I \cup J} = \frac{1}{k!l!} a_I b_J \in I' \cup J'$.

Definición 3.5. Sean $v \in V$ y $\omega \in L_{\text{alt}}^k(V)$. Definimos $i_v \omega \in L_{\text{alt}}^{k-1}(V)$ como

$$i_v \omega(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}), \quad (3.11)$$

y lo llamamos *producto interior de v y ω* o *contracción de ω por v* . Convenimos en $i_v a = 0$ para $a \in L_{\text{alt}}^0(V) := \mathbb{R}$, con lo cual obtenemos un mapeo lineal $i_v : L_{\text{alt}}^k(V) \rightarrow L_{\text{alt}}^{k-1}(V)$.

Nótese que i_v depende linealmente de v y que $i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$ para todo $v, w \in V$, de donde se sigue inmediatamente que $i_v \circ i_v = 0$. Además, el mapeo de contracción i_v satisface la regla del producto para \wedge :

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v \beta), \quad (3.12)$$

para todo $\alpha \in L_{\text{alt}}^k(V)$ y más aún, es el único mapeo de grado -1 con estas propiedades.

Vamos ahora a definir el espacio vectorial de k -formas. Para esto consideremos una variedad M de dimensión n y la unión disjunta de todos los espacios $L_{\text{alt}}^k(T_p M)$, es decir formamos el haz natural $L_{\text{alt}}^k(TM)$ que tiene en el punto $p \in M$ al espacio $L_{\text{alt}}^k(T_p M)$ como fibra típica:

$$L_{\text{alt}}^k(TM) = \bigcup_{p \in M} L_{\text{alt}}^k(T_p M),$$

y hacemos $d := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \dim(T_p M)$. A las secciones suaves de este haz las denotaremos como $\Omega^k(M) := \Gamma(M; L_{\text{alt}}^k(TM))$.

Definición 3.6. A los elementos de $\Omega^k(M)$ les llamamos *k -formas diferenciales*, o simplemente *k -formas*.

Con esta definición, a los elementos de $\Omega(M)$ les llamamos *formas diferenciales* en M , e identificamos a $\Omega^k(M)$ con el subespacio obvio o natural de $\Omega(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$. A una forma en $\Omega^k(M)$ se le llama *forma homogénea de grado k* y si $\omega \in \Omega(M)$, entonces podemos escribir de manera unívoca

$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k$, donde $\omega_k \in \Omega^k(M)$ y los ω_k se llaman *componentes homogéneos de ω* . El espacio $\Omega^k(M)$ es un módulo sobre el álgebra de funciones suaves $C^\infty(M)$, además tenemos la suma directa $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$, con una descomposición similar para cada $U \subset M$. Existe un isomorfismo de módulos $\bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M) \cong \Gamma(\bigoplus_{k=0}^n L_{\text{alt}}^k(TM))$.

Definición 3.7. Para $\omega \in \Omega^{k_1}(M)$ y $\eta \in \Omega^{k_2}(M)$ definimos el *producto exterior o producto cuña* $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k_1+k_2}(M)$ como $(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p)$.

De la misma manera en la que un vector tangente es la versión infinitesimal de una curva (parametrizada) que pasa por un punto $p \in M$, un covector en $p \in M$ es la versión infinitesimal de una función definida cerca de p , por lo que una manera de visualizar una k -forma es como la intersección de familias de conjuntos de nivel. Dado que tratamos a las formas diferenciales como campos tensoriales alternantes covariantes, tenemos una noción de pull-back. De hecho el pull-back de un campo tensorial alternante es también un campo tensorial alternante. Veamos la expresión local del pull-back para formas. Dadas $f : M \rightarrow N$ un mapeo suave, (U, x) una carta de M y (V, y) una carta de N con $f(U) \subset V$. Si $\eta = b_{\vec{J}} dy^{\vec{J}}$ y si abreviamos $\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}$ como $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$, entonces

$$f^* \eta = b_{\vec{J}} \circ f \frac{\partial y^{\vec{J}}}{\partial x^{\vec{L}}} dx^{\vec{L}}. \quad (3.13)$$

Observación 3.1. Notemos que el espacio $\Omega^0(M)$ es el espacio de funciones suaves $C^\infty(M)$, por lo que tenemos varias notaciones para el mismo espacio (inconvenientemente): $C^\infty(M) = \Omega^0(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$.

§3.2. La derivada exterior

Vamos ahora a definir la derivada exterior d de una forma ω . Para 0-formas la derivada exterior es la diferencial, $f \mapsto df$. Usando coordenadas rectangulares canónicas x^i para un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, todas las k -formas pueden escribirse como sumas de la forma $f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = f dx^{\vec{I}}$ para alguna $f \in C^\infty(U)$ y como la diferencial de una 0-forma es una 1-forma, entonces $d : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Procedemos inductivamente para extender la definición del operador d a un operador tal que a cada k -forma le asocia una $k+1$ -forma. Hacemos a d lineal sobre todos los reales y definimos $d(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) := df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Se puede demostrar que si la fórmula anterior es válida para los k índices crecientes \vec{I} , entonces es válida para cualquier elección de k índices I .

Definición 3.8. La *derivada exterior* $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ se define primero para cada función suave de valores reales $f(x_1, \dots, x_n)$ como

$$d(fd x^I) := df \wedge dx^I = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I,$$

y después para sumas de k -formas básicas como $d(\alpha_I dx^I) := d\alpha_I \wedge dx^I$.

Es un ejercicio rutinario verificar que d así definida es una derivada para cada carta (U, x) y si (U, x) y (V, y) son dos cartas tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $d_x|_{U \cap V} = d_y|_{U \cap V}$. El siguiente teorema se sigue inmediatamente de esta definición.

Teorema 3.1. Para cada k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$, tenemos que $d(d\omega) = 0$.

Prueba. Para cualquier 0-forma f (función suave) tenemos que $d(df) = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0$, porque $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$ (simetría en i, j) y $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ (antisimetría en i, j) y $dx^i \wedge dx^i = 0$ para todo i . Entonces para cualquier par de funciones $f, g \in C^\infty(U)$ tenemos que $d(df \wedge dg) = -d(dg \wedge df)$, consecuentemente $d(df \wedge dg) = 0$. Procediendo inductivamente tenemos que $d(df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$ para cualesquiera funciones $f_i \in C^\infty(U)$. Luego, para cualquier forma $\omega = \omega_I dx^I \in \Omega_M^k(U)$ tenemos que $d(d\omega) = d(d\omega_I dx^I) = 0$, porque $d(d\omega_I) = 0$ y $d(dx^I) = 0$. \square

De hecho de que si dos derivadas \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 coinciden tanto para funciones como para formas exactas exactas, entonces $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, se sigue que la derivada exterior es única.

Teorema 3.2 (Lema de Poincaré). Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es una k -forma tal que $d\omega = 0$, entonces existe una $(k-1)$ -forma $\tau \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\tau$.

Es necesario enfatizar que M es una variedad diferenciable real, pues en otro tipo de variedades el lema de Poincaré no necesariamente es cierto. Este teorema es una forma general del teorema que afirma que siempre existen potenciales escalares y vectoriales para un campo vectorial dado. A una forma diferencial suave α se le llama *cerrada* sii $d\alpha = 0$ y se le llama *exacta* sii $\alpha = d\beta$ para alguna forma diferencial β .

Observación 3.2. Como $d \circ d = 0$, cada forma exacta es cerrada. El recíproco no es cierto porque depende de las propiedades topológicas de la variedad.

Dado que las formas diferenciales son campos tensoriales alternantes, la derivada de Lie actúa en formas diferenciales. De manera que la derivada de Lie de una forma diferencial es una forma diferencial. De hecho para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para cualquier 0-forma $f \in \Omega^0(M)$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X df)(Y) &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 (\phi_t^X)^* df \right) (Y) = \frac{d}{dt} \Big|_0 df (T\phi_t^X \cdot Y) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 Y (\phi_t^X)^* f = Y \frac{d}{dt} \Big|_0 (\phi_t^X)^* f \\ &= Y(\mathcal{L}_X f) = d(\mathcal{L}_X f)(Y), \end{aligned}$$

donde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo arbitrario. Donde $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_p^X(t) = T_0 \phi_p^X \frac{\partial}{\partial u} \Big|_0 = X_p$, con $\phi_p^X(t)$ es el mapeo $\phi_t^X : U \rightarrow M$ dado por $\phi_t^X(p) = \phi^X(t, p)$ para $\phi^X : (-a, a) \times U \rightarrow M$, $0 < a \leq \infty$ un mapeo suave llamado *flujo*, de hecho a la terna (U, a, ϕ^X) se le llama *caja de flujo para X*.

Consecuentemente tenemos dos maneras para derivar secciones en $\Omega(M)$, a saber, la primera es con la derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^i(M) \rightarrow \Omega^i(M)$ (que es una derivada de grado 0) donde tenemos que $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$. La segunda es con la derivada exterior d (que es una derivada de grado 1), por lo cual necesitamos una tercera derivada para relacionar la derivada de Lie con la derivada exterior. De hecho esta tercera derivada que buscamos se define usando el producto interior dado por el mapeo de contracción (3.12) definiendo $i_{fX}\omega := fi_X\omega$ y $i_X df := df(X) = \mathcal{L}_X f$ para cualquier función $f \in C^\infty(M)$ y en general definimos la derivada $i_X(\alpha \wedge \beta) := (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X\beta)$ para cada $\alpha \in \Omega^k(M)$, que es una derivada de grado -1 llamada *producto interior u operador de contracción*, y es tal que $i_X f = 0$ para cada $f \in \Omega^0(M)$ y $i_X\theta = \theta(X)$ para cada $\theta \in \Omega^1(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por tanto, $\mathcal{L}_X(i_Y\omega) = i_{\mathcal{L}_X Y}\omega + i_Y\mathcal{L}_X\omega$. Así tenemos el siguiente teorema que relaciona las tres derivadas que hemos definido.

Teorema 3.3 (Fórmula de Cartan). Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d. \quad (3.14)$$

Otra forma de pensar a las formas diferenciales es considerarlas como herramientas para “medir” en el sentido de que una 1-forma es una herramienta para medir curvas, una 2-forma es una herramienta para medir superficies,

y en general, una k -forma es una herramienta de medición para objetos de dimensión k . Formalmente lo que tenemos es una n -forma $\alpha = adu^I$ para alguna función a y para algún abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con (u^1, \dots, u^n) las coordenadas canónicas en U . Si α tiene soporte compacto en U^1 definimos la integral de α como sigue.

Definición 3.9. Si $\alpha = adu^I$ es una n -forma y $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, definimos la *integral* de α como

$$\int_U \alpha = \int_U adx^I := \int_U a(u)du^1 \cdots du^n, \quad (3.15)$$

donde la última integral es la integral de Riemann o de Lebesgue (o cualquier otra que se elija) de la función $a(\cdot)$.

Podemos extender a la función $a(\cdot)$ por cero a todo \mathbb{R}^n e integrar sobre un n -cubo suficientemente grande tal que contenga al soporte de $a(\cdot)$ en su interior.

§3.3. Métricas

Consideremos un espacio con producto interno real (no necesariamente positivo definido) (V, g) . Queremos inducir un producto escalar en el espacio $L_{\text{alt}}^k(V) \cong \wedge^k(V^*)$ (el álgebra de Grassman). A pesar de que los elementos de $L_{\text{alt}}^k(V) \cong \wedge^k(V^*)$ se pueden pensar como tensores de tipo total $(0, k)$ que son tensores alternantes, daremos un producto escalar para este espacio de tal manera que la base $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k} = \{e^{\vec{I}}\}$ sea ortonormal si la base (e^1, \dots, e^k) es ortonormal. Supongamos que $\alpha = \alpha^{\vec{I}}$ y $\beta = \beta^{\vec{I}}$, donde los α^i y los β^i son 1-formas. Entonces queremos tener un producto interno tal que

$$\langle \alpha | \beta \rangle_g = \left\langle \alpha^{\vec{I}} \middle| \beta^{\vec{I}} \right\rangle_g = \det \left[\langle \alpha^i, \beta^i \rangle_g \right], \quad (3.16)$$

donde $\langle \alpha, \beta \rangle_g = g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp)$ es el producto interno natural de α y de β tomados como tensores, para el mapeo musical \sharp (el mapeo que “baja” índices). Podemos extender esta bilinealidad a todas las k -formas haciendo a la base anterior ortonormal, es decir haciendo $\left\langle e^{\vec{I}} \middle| e^{\vec{I}} \right\rangle_g = \pm 1$, y definiendo un

¹Se define el soporte de una forma diferenciable $\alpha \in \Omega(M)$ como el cierre del conjunto $\{p \in M : \alpha(p) \neq 0\}$ y lo denotamos $\text{sopp}(\alpha)$.

producto escalar (que no dependa de la base). Por lo tanto, si $\alpha = \alpha_{\vec{I}} e^{\vec{I}}$, entonces

$$\langle e^{\vec{I}} | \alpha \rangle_g = \langle e^{\vec{I}} | e^{\vec{I}} \rangle_g \alpha_{\vec{I}}, \quad (3.17)$$

y

$$\alpha_{\vec{I}} = \langle e^{\vec{I}} | e^{\vec{I}} \rangle_g \langle e^{\vec{I}} | \alpha \rangle_g = \pm \langle e^{\vec{I}} | \alpha \rangle_g. \quad (3.18)$$

Notemos que el producto escalar no necesariamente es positivo definido, a menos de que demos un orden lineal específico a la base $\{e^{\vec{I}}\}$. El producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ para tensores está relacionado con el producto escalar $\langle \cdot | \cdot \rangle_g$ para formas por la ecuación

$$\langle \alpha | \beta \rangle_g = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \beta \rangle_g. \quad (3.19)$$

Por tanto para $\alpha = a_{\vec{I}} \theta^{\vec{I}}$ y $\beta = b_{\vec{I}} \theta^{\vec{I}}$ vistos como k -formas, tenemos que si $\theta^1, \dots, \theta^n$ forman una base para V^* no necesariamente ortonormal, entonces

$$\langle \alpha | \beta \rangle_g = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \beta \rangle_g = \frac{1}{k!} a_{\vec{I}} b^{\vec{I}} = a_{\vec{I}} b^{\vec{I}}. \quad (3.20)$$

Podemos extender este producto escalar a toda el álgebra de Grassman $\bigwedge V^* = \bigoplus_k \bigwedge^k V^*$ haciendo que las formas de grados diferentes sean ortogonales. Tenemos definiciones similares para $\bigwedge^k V$ y $\bigwedge V$.

Dada una base ortonormal fija (e_1, \dots, e_n) , todas las bases ortonormales para V son de una de dos clases llamadas *orientaciones*. A saber, aquellas bases (f_1, \dots, f_n) para las cuales $f^{\vec{I}} = e^{\vec{I}}$ y aquellas para las cuales $f^{\vec{I}} = -e^{\vec{I}}$. Por lo tanto, para cada orientación de V existe un elemento métrico correspondiente del álgebra $\bigwedge^n V^*$, llamado *elemento de volumen* para el espacio métrico (V, g) . El elemento de volumen correspondiente a la base (e_1, \dots, e_n) se define como $\text{vol} := e^1 \wedge \dots \wedge e^n$. Más aún, si (f_1, \dots, f_n) es una base orientada positivamente y (f^1, \dots, f^n) es la base dual, entonces tenemos que

$$\text{vol} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} f^1 \wedge \dots \wedge f^n. \quad (3.21)$$

Fijemos entonces una orientación y hagamos a (e_1, \dots, e_n) una base ortonormal en esa orientación, con lo cual tenemos el elemento de volumen correspondiente $\text{vol} = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Definición 3.10. Definimos el *operador estrella* $*$: $\bigwedge^k V^* \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^*$ para $1 \leq k \leq n = \dim V$ (también llamado *operador de Hodge*) de manera implícita según el siguiente teorema.

Teorema 3.4. Sea (V, g) un espacio con producto interno de dimensión finita n con elemento de volumen vol . Entonces para cada natural k existe un único isomorfismo lineal $*$: $\bigwedge^k V^* \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^*$ tal que $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol}$ para todo par de formas diferenciales $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*$.

Prueba. Sea (V, g) un espacio con producto interno n -dimensional con elemento de volumen vol y consideremos una forma diferencial $\gamma \in \bigwedge^{n-k} V^*$. Definamos un mapeo lineal $L_\gamma : \bigwedge^k V^* \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que $L_\gamma(\alpha) \text{vol} = \alpha \wedge \gamma$. Notemos que si $L_\gamma(\alpha) = 0$ para cada forma diferencial $\alpha \in \bigwedge^k V^*$, entonces $\gamma = 0$. Consecuentemente la asignación $\gamma \mapsto L_\gamma$ produce un mapeo lineal 1-1, $\bigwedge^k V^* \rightarrow \left(\bigwedge^k V^*\right)^*$. Pero además se tiene que $\dim\left(\bigwedge^k V^*\right) = \dim\left(\bigwedge^k V^*\right)^*$, de donde se sigue que el mapeo $\gamma \mapsto L_\gamma$ es de hecho un isomorfismo lineal. Por tanto, para cada forma diferencial $\beta \in \bigwedge^k V^*$ existe una única forma diferencial $*\beta \in \bigwedge^{n-k} V^*$ que satisface que $\alpha \wedge *\beta = L_{*\beta}(\alpha) \text{vol} = \langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol}$ y la propiedad de linealidad de este isomorfismo se comprueba inmediatamente. \square

Entonces, si (V, g) es un espacio con producto escalar g , con $\dim V = n$ y con elemento de volumen vol para una base ortonormal orientada positivamente (e_1, \dots, e_n) con base dual (e^1, \dots, e^n) y si σ es una permutación de $(1, \dots, n)$, tenemos para los elementos básicos $e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$ de $\bigwedge^k V^*$ la siguiente relación:

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}) = \epsilon_{\sigma_1} \dots \epsilon_{\sigma_k} \text{sgn}(\sigma) e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \quad (3.22)$$

En otras palabras, si $\{i_{k+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, entonces

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \pm(\epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k}) e^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n}, \quad (3.23)$$

tomando el signo $+$ si $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n} = e^1 \wedge \dots \wedge e^{i_n}$.

Del hecho de que el producto escalar en $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$ es $\langle a | b \rangle_g = ab$ (el producto de reales), podemos extender el operador $*$ para toda el álgebra $\bigwedge V^*$.

Consideremos una base no necesariamente ortonormal y definamos el símbolo $\epsilon_{\vec{I}} := \epsilon_{\vec{N}}$, donde $\vec{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\vec{I} = \{i_1, \dots, i_n\}$; es decir que $\epsilon_{\vec{I}}$ es el signo de la permutación $\binom{\vec{N}}{\vec{I}}$. Hagamos $\vec{I}' = \{i_1, \dots, i_k\}$, $\vec{J} = \{j_1, \dots, j_n\}$, $\vec{J}' = \{j_1, \dots, j_k\}$, $\vec{J}'' = \{j_{k+1}, \dots, j_n\}$ y $g = \det(g_{ij})$. Tenemos el siguiente par de teoremas que se siguen de la unicidad del operador $*$, cf. [Lee, 2009].

Teorema 3.5. Sea (V, g) un espacio con producto interno de dimensión finita n con elemento de volumen vol . Entonces

1. $*1 = \text{vol}$.
2. $*\text{vol} = (-1)^{\text{ind}(g)}$.
3. $**\alpha = (-1)^{\text{ind}(g)}(-1)^{k(n-k)}\alpha$, para $\alpha \in \bigwedge^k V^*$.
4. $\langle *\alpha | *\beta \rangle = (-1)^{\text{ind}(g)} \langle \alpha | \beta \rangle$.

Teorema 3.6. Dados (V, g) un espacio orientado con producto escalar con elemento de volumen vol , y (e^1, \dots, e^n) una base de V^* orientada positivamente. Si $\omega = \frac{1}{k!} \omega_{I'} e^{I'} = \omega_{\vec{I}'} e^{\vec{I}'}$, entonces

$$*\omega = \sqrt{|g|} \sum_{\vec{J}''} \omega^{\vec{J}''} \epsilon_{J' \cup J''} e^{\vec{J}''}. \quad (3.24)$$

Finalmente, consideremos una n -variedad orientada semi-riemanniana (M, g) y sea vol su forma de volumen. Para cada natural k los productos inducidos por g_p en el álgebra $\bigwedge^k T_p^*M$ para cada $p \in M$ se combinan para dar un mapeo bilineal simétrico en $C^\infty(M)$ de la siguiente manera:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_g : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (3.25)$$

con $\langle \alpha | \beta \rangle_g(p) := \langle \alpha(p) | \beta(p) \rangle_g = g_p(\alpha(p), \beta(p))$.

Se puede calcular que $\langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol} = \alpha \wedge *\beta$. Podemos definir un producto escalar $(\cdot | \cdot)$ en el espacio $\Omega(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$ haciendo $(\alpha | \beta) = 0$ para $\alpha \in \Omega^{k_1}(M)$ y $\beta \in \Omega^{k_2}(M)$ con $k_1 \neq k_2$ y haciendo

$$(\alpha | \beta) := \int_M \alpha \wedge *\beta = \int_M \langle \alpha | \beta \rangle_g \text{vol}, \quad \text{si } \alpha, \beta \in \Omega^k(M). \quad (3.26)$$

Definición 3.11. Sea (M, g) una n -variedad semi-riemanniana orientada. Para cada k con $0 \leq k \leq n = \dim M$ definimos el *operador codiferencial* $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ como

$$\delta := (-1)^{\text{ind}(g)} (-1)^{n(k-1)+1} * d*, \quad \text{y} \quad \delta := 0 \text{ en } \Omega^0(M). \quad (3.27)$$

Los dos operadores δ y d se pueden combinar para dar un mapeo lineal $\Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ que también se denota por δ . De hecho tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1. La codiferencial δ es la adjunta formal de la derivada exterior d en $\Omega(M)$. Es decir, para todo par de formas $\alpha, \beta \in \Omega(M)$ con soporte compacto en el interior de M se tiene que

$$(d\alpha|\beta) = (\alpha|\delta\beta). \quad (3.28)$$

Definición 3.12. Para $0 \leq k \leq n = \dim M$ definimos al operador diferencial $\Delta : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ como $\Delta := \delta d + d\delta$ llamado *operador de Laplace-Beltrami*. Para cada k , la restricción de Δ a $\Omega^k(M)$ se llama también *operador de Laplace-Beltrami (en k -formas)*. Si $\Delta\omega = 0$, decimos que ω es una *forma armónica*.

Teorema 3.7 (Descomposición de Hodge). Sea (M, g) una n -variedad riemanniana compacta y orientada (sin frontera). Para cada $0 \leq k \leq n = \dim M$ el espacio de k -formas armónicas, \mathcal{H}^k , es finito-dimensional. Más aún, se tiene una descomposición ortogonal de $\Omega^k(M)$:

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) &= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\ &= d\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\ &= d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Es decir, para toda $\omega \in \Omega^k(M)$ se tiene que $\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$, donde α es una $(k-1)$ -forma, β es una $(k+1)$ -forma y γ es una forma armónica. Este teorema de descomposición es una generalización para variedades del [Teorema 1.3](#).

§3.4. Conexiones y derivadas covariantes

Un concepto fundamental en geometría diferencial es el de *conexión*, mismo que a su vez es fundamental en electrodinámica (y en todas o casi todas las ramas de la física), pues se corresponde a lo que se llama *norma (gauge)*. Los términos “derivada covariante” y “conexión” son tratados a veces como sinónimos, de hecho una derivada covariante es llamada también *conexión de Koszul*. La idea clave es medir la razón de cambio de secciones de haces vectoriales en la dirección de un vector o de un campo vectorial en la variedad base, pero también se puede ver como un mecanismo para levantar curvas de la base al espacio total, donde estos levantamientos son secciones paralelas a lo largo de la curva.

Tomaremos la fibra típica de un \mathbb{F} -haz vectorial de rango k como \mathbb{F}^k . Consideraremos $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ la base canónica de \mathbb{F}^k . Así, cada carta del haz vectorial (U, ϕ) está asociada a un campo de referencia (e_1, \dots, e_k) donde $e_i(x) := \phi^{-1}(x, \mathbf{e}_i)$. Dado un \mathbb{F} -haz vectorial suave de rango k sobre una variedad M , $\pi : E \rightarrow M$, una *derivada covariante* se puede definir como cierto mapeo $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ con ciertas propiedades, de las que se deriva un mapeo bien definido $\nabla : TM \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ con propiedades adecuadas o bien de la manera inversa. Nosotros tomaremos el primer camino y el segundo camino se puede ver por ejemplo en [Lee, 2009].

Definición 3.13. Una *derivada covariante o conexión de Koszul* en un \mathbb{F} -haz vectorial suave $E \rightarrow M$ es un mapeo $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ (escribimos $\nabla(X, s) := \nabla_X s$) que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$, para todo $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(M, E)$.
2. $\nabla_{X_1+X_2}(s) = \nabla_{X_1}s + \nabla_{X_2}s$, para todo $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ y $s \in \Gamma(M, E)$.
3. $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s_1, s_2 \in \Gamma(M, E)$.
4. $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$, para todo $f \in C^\infty(M; \mathbb{F})$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(M, E)$.

Para un campo fijo $X \in \mathfrak{X}(M)$, el mapeo $\nabla_X : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ se llama *derivada covariante con respecto a X* .

Esta definición es suficiente para deducir que la derivada covariante ∇ induce mapeos $\nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(U, E)$ para cada abierto $U \subset M$, relacionados entre sí de manera natural. Para cada punto fijo $p \in M$ el valor de $(\nabla_X s)(p)$ depende solamente del valor del campo X en el punto $p \in M$ y de los valores de la sección s a lo largo de cualquier curva suave c que represente al vector X_p . Así, obtenemos un mapeo bien definido $\nabla : TM \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ tal que $\nabla_v s = (\nabla_X s)(p)$ para cualquier extensión de $v \in T_p M$ a un campo vectorial X con $X_p := v$. Las propiedades resultantes de este mapeo son las siguientes:

1. $\nabla_{av}(s) = a\nabla_v s$, para todo $a \in \mathbb{R}$, $p \in M$, $v \in T_p M$, $s \in \Gamma(M, E)$.
2. $\nabla_{v_1+v_2}s = \nabla_{v_1}s + \nabla_{v_2}s$, para todo $p \in M$, $v_1, v_2 \in T_p M$, $s \in \Gamma(M, E)$.
3. $\nabla_v(s_1 + s_2) = \nabla_v s_1 + \nabla_v s_2$, para todo $p \in M$, $v \in T_p M$, $s_1, s_2 \in \Gamma(M, E)$.

4. $\nabla_v(fs) = (vf)s(p) + f(p)\nabla_v s$, para todo $p \in M, v \in T_p M, s \in \Gamma(M, E)$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{F})$.
5. El mapeo $p \mapsto \nabla_{X_p} s$ es suave para todo campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Un mapeo que satisface estas cinco propiedades también es llamado *derivada covariante o conexión de Koszul*. Notemos que es fácil obtener una conexión de Koszul en el sentido de la [Definición 3.13](#) haciendo simplemente $(\nabla_X s)(p) := \nabla_{X_p} s$. A una derivada covariante en el haz tangente TM de una n -variedad M también se le llama *derivada covariante en M* .

Dados una subvariedad M de \mathbb{R}^n , un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un vector $v \in T_p M$, definimos

$$\nabla_v X := \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 X \circ c \right)^t \in T_p M. \quad (3.30)$$

Con esta definición, ∇ es una derivada covariante que satisface las cinco propiedades listadas arriba. Consideremos el caso de un haz vectorial en general y el mapeo de restricción $r_V^U : \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(V, E)$ dado por $\sigma \mapsto \sigma|_V$, donde $V \subset U$.

Definición 3.14. Una *derivada covariante natural* ∇ en un \mathbb{F} -haz vectorial $E \rightarrow M$ es una asignación en cada abierto $U \subset M$ de un mapeo de la forma $\nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(U, E)$ (escribimos $\nabla^U(X, \sigma) := \nabla_X^U \sigma$) tal que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada abierto $U \subset M$, el mapeo ∇^U es una conexión de Koszul en el haz restringido $E|_U \rightarrow U$.
2. Para abiertos anidados $V \subset U$, tenemos que las restricciones satisfacen que $r_V^U(\nabla_X^U \sigma) = \nabla_{r_V^U X}^V r_V^U \sigma$, i. e. naturalidad con respecto a restricciones.
3. Para $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $\sigma \in \Gamma(U, E)$, el valor de $(\nabla_X^U \sigma)(p)$ depende solamente del valor de X en el punto $p \in U$.

Llamamos a $\nabla_X^U \sigma$ la *derivada covariante de σ con respecto a X* . Denotaremos a todos estos mapeos con el símbolo ∇ siempre que no haya riesgo de confusión. Esta definición de derivada covariante natural es apropiada incluso para variedades de dimensión infinita, en contraste con la conexión de Koszul que está definida sólo para secciones globales. Pero en el caso de dimensión finita, una conexión de Koszul genera una derivada covariante natural.

Lema 3.1. Supongamos que $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es una conexión de Koszul para el haz vectorial $E \rightarrow M$. Entonces, si para algún abierto U se tiene que $X|_U = 0$ o si $\sigma|_U = 0$, entonces $(\nabla_X \sigma)(p) = 0$ para todo $p \in U$.

Prueba. Sea $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ una conexión de Koszul para el haz vectorial $E \rightarrow M$ y sea U un abierto.

(a) Supongamos que $\sigma|_U = 0$ y sea $q \in U$. Entonces existe un abierto relativo compacto tal que $q \in \bar{V} \subset U$ y existe una función suave $f \in C^\infty(M; \mathbb{F})$ tal que $f = 1$ en V y $f = 0$ en el complemento de U , de donde se sigue que $f\sigma \equiv 0$ en M y de aquí $\nabla(f\sigma) \equiv 0$ en M porque la conexión ∇ es lineal. Por la propiedad (iv) de la [Definición 3.13](#) tenemos que $\nabla_X(f\sigma)(q) = f(p)(\nabla_X \sigma)(q) + \underbrace{(X_q f)\sigma(q)} = f(p)(\nabla_X \sigma)(q) = 0$, donde el segundo término se cancela ya que X es un campo global.

(b) Supongamos que $X|_U = 0$ y sea $q \in U$. Entonces existe un abierto relativo compacto tal que $q \in \bar{V} \subset U$ y existe una función suave $f \in C^\infty(M; \mathbb{F})$ tal que $f = 1$ en V y $f = 0$ en el complemento de U , de donde se sigue que $fX \equiv 0$ en M y de aquí $\nabla_{fX} \sigma = f \nabla_X \sigma \equiv 0$ en M porque la conexión ∇ es lineal en la primera entrada. Por la propiedad (i) de la [Definición 3.13](#) tenemos que $\nabla_{fX}(\sigma)(q) = f(p)(\nabla_X \sigma)(q) = 0$, ya que σ es una sección global. \square

De este lema se sigue que para una conexión de Koszul ∇ dada y para cualquier abierto $U \subset M$ dado, definimos la derivada covariante natural $\nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E|_U) \rightarrow \Gamma(E|_U)$ como

$$(\nabla_X^U \sigma)(p) := (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma})(p), \quad (3.31)$$

para $p \in U$, $X = \tilde{X}$ y $\sigma = \tilde{\sigma}$ en algún abierto V con $p \in V \subset \bar{V} \subset U$.

La asignación $U \mapsto \nabla^U$ es una derivada covariante natural. De este lema podemos definir $\nabla_{v_p} \sigma$ para $v_p \in T_p M$ como $\nabla_{v_p} \sigma := (\nabla_X \sigma)(p)$, donde X es cualquier campo vectorial con $X(p) := v_p \in T_p M$. Decimos que la derivada covariante $\nabla_X \sigma$ es *tensorial* en la variable X (i. e. es lineal en \mathbb{R} en la primera entrada). Consideremos un haz vectorial de rango r , $\pi : E \rightarrow M$, con una conexión ∇ . Entonces la elección de un marco local de referencia en un abierto $U \subset M$ es equivalente a una trivialización de la restricción $\pi_U : E|_U \rightarrow U$, pues dado que $\phi = (\pi, \Phi)$ es dicha trivialización sobre U , si $e_i(x) := \phi^{-1}(x, \mathbf{e}_i)$, donde (\mathbf{e}_i) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces tenemos un marco de referencia (e_1, \dots, e_k) . Queremos analizar la expresión de una derivada covariante dada, desde el punto de vista de este marco de referencia.

Para cada uno de estos marcos existe una matriz de 1-formas $\omega = (\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq r}$ para $X \in \Gamma(U, E)$. Escribimos

$$\nabla_X e_j := \omega_j^i(X) e_i. \quad (3.32)$$

A las formas ω_j^i les llamamos *formas de conexión*. De hecho tenemos que si $s = s^i e_i$ es la expresión local de una sección $s \in \Gamma(E)$ en términos de un marco local (e_1, \dots, e_k) , entonces se tiene la siguiente expresión local obtenida mediante cálculo directo:

$$\nabla_X s = (X s^i + \omega_r^i(X) s^r) e_i. \quad (3.33)$$

Podemos elegir U suficientemente pequeño tal que sea también el dominio de un marco coordenado ∂_μ para M y en tal caso tendremos $\nabla_{\partial_\mu} e_j = \omega_{\mu j}^k e_k$, donde $\omega_{\mu j}^k := \omega_j^k(\partial_\mu)$. Por lo tanto

$$\nabla_X s = (X^\mu \partial_\mu s^i + X^\mu \omega_{\mu r}^i s^r) e_i. \quad (3.34)$$

Para dos marcos moviéndose uno con respecto al otro cuyos dominios se traslapan, digamos $u = (e_1, \dots, e_k)$ y $u' = (e'_1, \dots, e'_k)$, el cambio de marco está dado por la expresión $e'_i = g_i^j e_j$. En notación matricial podemos escribir $u' = ug$, para alguna $g : U \cap U' \rightarrow GL(n)$ suave con u tomado como un renglón de campos vectoriales. Derivando ambos lados con $\nabla u := (\nabla e_1, \dots, \nabla e_k)^t$ obtenemos la *ley de transformación para formas de conexión*:

$$\omega' = g^{-1} \omega g + g^{-1} dg. \quad (3.35)$$

Definición 3.15. Sean $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial con una conexión de Koszul ∇ , $f : N \rightarrow M$ un mapeo suave y $\sigma : N \rightarrow E$ una sección a lo largo de f . Una *derivada covariante a lo largo de f* es un mapeo $\nabla^f : TN \times \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{au+bv}^f \sigma = \nabla_{au}^f \sigma + \nabla_{bv}^f \sigma$, para todo $a, b \in \mathbb{F}, p \in M, \sigma \in \Gamma_f(E)$ y $u, v \in T_p N$.
2. $\nabla_u^f (\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_u^f \sigma_1 + \nabla_u^f \sigma_2$, para todo $u \in TN, \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_f(E)$.
3. $\nabla_v^f (h\sigma) = h(p) \nabla_v^f \sigma + v(h) \sigma(p)$, para todo $v \in T_p N, h \in C^\infty(N; \mathbb{F})$ y $\sigma \in \Gamma_f(E)$.
4. Si $U \in \mathfrak{X}(N)$, entonces $p \mapsto \nabla_{U(p)}^f \sigma$ es suave para todo $\sigma \in \Gamma_f(E)$.

5. Si $g : P \rightarrow N$ es suave, entonces $\nabla^{f \circ g}$ está relacionada con ∇^f por medio de la regla de la cadena, es decir $\nabla_u^{f \circ g}(\sigma \circ g) = (\nabla_{Tg \cdot u}^f \sigma)$ para todo $u \in TP$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & E \\
 & & \nearrow^{\sigma \circ g} & & \downarrow \pi \\
 P & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Definición 3.16. Decimos que una sección σ es *paralela a lo largo de una curva* $c : I \rightarrow E$ si para todo punto de la curva c tenemos que $\nabla_u^f \sigma = 0$, para todo vector $u \in TN$ tangente a la curva.

Teorema 3.8. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial (suave) con una conexión ∇ . Supongamos que $c : [a, b] \rightarrow M$ es una curva suave en M . Para cada $u \in E_{c(a)}$ existe una única sección paralela $\sigma_{c,u}$ a lo largo de c tal que $\sigma_{c,u}(a) = u$. Si $P_c : E_{c(a)} \rightarrow E_{c(b)}$ denota al mapeo que lleva a $u \in E_{c(a)}$ en $\sigma_{c,u}(b)$, entonces P_c es lineal.

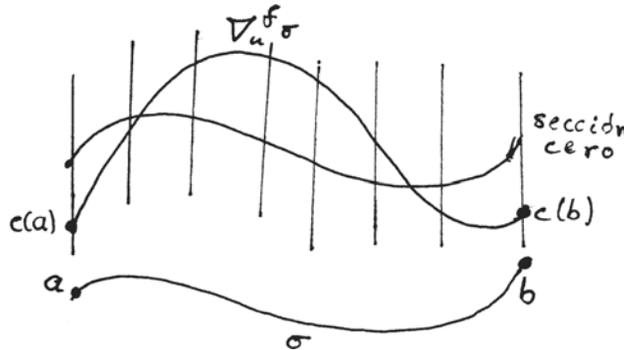


Figura 3.1: Transporte paralelo.

Al mapeo P_c se le llama *transporte paralelo a lo largo de la curva* c , desde el punto $c(a)$ hasta el punto $c(b)$. Para cualquier curva c suave en M y t_1, t_2 en el dominio de c , definimos el mapeo $P(c)_{t_1}^{t_2} : E_{c(t_1)} \rightarrow E_{c(t_2)}$ como $P(c)_{t_1}^{t_2} := P_{c|_{[t_1, t_2]}}$ si $t_1 > t_2$ y como $P(c)_{t_1}^{t_2} := P_{c|_{[t_1, t_2]}}^{-1}$ si $t_2 \geq t_1$. La demostración de este teorema se puede consultar en [Lee, 2009, Lee, 1997].

Convengamos en llamar a una conexión sobre un haz vectorial E una *conexión trivial* si para cada $u \in E$ existe una sección paralela s tal que $s(\pi(u)) = u$. No siempre existen estas secciones, ni siquiera localmente. El siguiente

teorema nos indica cómo calcular la derivada de una sección a lo largo de un mapeo entre dos variedades. La demostración es bastante técnica por lo cual no la exhibiremos aquí, pero se puede ver por ejemplo en [Lee, 2009, cap. 12].

Teorema 3.9. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial con conexión ∇ y sea $f : N \rightarrow M$ un mapeo suave. Si $u \in T_p N$ y $\sigma \in \Gamma_f(E)$, entonces para cualquier curva suave $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ con $c'(0) = u$ tenemos que

$$\nabla_u^f \sigma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P(f \circ c)_0^t)^{-1} \sigma(c(t)) - \sigma(c(0))}{t}, \quad (3.36)$$

donde $P(f \circ c)_0^t$ es el transporte paralelo a lo largo de $f \circ c$ desde $(f \circ c)(0)$ hasta $(f \circ c)(t)$.

Los casos especiales más importantes para nosotros y en general son $f = id_M$, donde recuperamos una conexión de Koszul y también el caso cuando f misma es una curva en M , en cuyo caso se tiene para un vector $v \in T_p M$ que

$$\nabla_v \sigma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P(c)_0^t)^{-1} \sigma(c(t)) - \sigma(c(0))}{t}.$$

§3.5. Curvatura

Para terminar este capítulo pasamos a discutir los conceptos básicos de curvatura, la última herramienta que necesitaremos para reformular las ecuaciones de Maxwell. Si pensamos a la curvatura para haces vectoriales como un tipo de segunda derivada, podemos empezar fijando una conexión ∇ , ya que es un método para definir derivadas de secciones. Por lo que la curvatura debería de ser algo como la “conexión de la conexión” y del hecho de que la derivada covariante no necesariamente conmuta tenemos que una medida de esta falta de conmutatividad está dada por el *operador de curvatura* definido para un par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ como el mapeo $F(X, Y) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ dado por

$$F(X, Y)\sigma := [\nabla_X, \nabla_Y]\sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma. \quad (3.37)$$

De hecho, tenemos que para una sección fija σ el mapeo $(X, Y) \mapsto F(X, Y)\sigma$ es $C^\infty(M)$, bilineal y antisimétrico. Más aún $F(X, Y)$ es lineal sobre funciones suaves, es decir $F(X, Y)(f\sigma) = fF(X, Y)(\sigma)$. Por lo tanto, tenemos que $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(M, \text{End}(E))$, donde $\text{End}(E) := L(E, E)$ son los endomorfismos de E .

Para cada par de vectores $v_p, w_p \in T_p M$ se tiene que $F(v_p, w_p)$ es un mapeo lineal $E_p \rightarrow E_p$. Es decir que $F(X_p, Y_p) \in \text{End}(E_p)$, pero dado que el mapeo $F(X_p, Y_p)$ es antisimétrico, entonces tenemos un elemento del producto $\text{End}(E_p) \otimes \bigwedge^2 T_p^* M$ para cada punto $p \in M$. Por otra parte, F puede considerarse como una sección del espacio $\text{End}(E_p) \otimes \bigwedge^2 T_p^* M$. Al espacio de dichas secciones lo denotaremos $\Omega(M, \text{End}(M))$. Por lo tanto,

LA CURVATURA ES UNA 2-FORMA VALUADA EN $\text{End}(E)$.

Para ayudar a comprender el significado geométrico de la curvatura, podemos verla en términos de transporte paralelo (3.36), para lo cual primero conviene definir el mapeo $F^f(U, V) : \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E)$ dado por

$$F^f(U, V)\sigma := \nabla_U \nabla_V \sigma - \nabla_V \nabla_U \sigma - \nabla_{[U, V]}\sigma, \quad (3.38)$$

para toda $\sigma \in \Gamma_f(E)$ con $f : N \rightarrow M$ suave, σ una sección de $E \rightarrow M$ y $U, V \in \mathfrak{X}(N)$, con la propiedad de que $F^f(U, V)X = F(Tf \circ U, Tf \circ V)X$ para todo $X \in \Gamma_f(E)$ y para todo par de campos $U, V \in \mathfrak{X}(N)$.

Teorema 3.10. Sean $E \rightarrow M$ un haz vectorial con una conexión ∇ , $y \in E_p$, y $u, v \in T_p M$. Consideremos una vecindad abierta U de $0 \in \mathbb{R}^2$ y denotemos a los campos de referencia en \mathbb{R}^2 por ∂_1, ∂_2 y a sus valores en el origen por $\partial_1(0), \partial_2(0)$, respectivamente. Supongamos que tenemos un mapeo suave $f : U \rightarrow M$ con $f(0) = p$, $T_p f \cdot \partial_1(0) = u$ y $T_p f \cdot \partial_2(0) = v$. Para s, t pequeños sea $y_{s,t}$ el elemento de E_p obtenido por transporte paralelo de y alrededor de la trayectoria cerrada dada por las siguientes cuatro curvas:

1. $c_1^{s,t} : \sigma \mapsto f(\sigma, 0), 0 \leq \sigma \leq s;$
2. $c_2^{s,t} : \tau \mapsto f(s, \tau), 0 \leq \tau \leq t;$
3. $c_3^{s,t} : \sigma \mapsto f(s - \sigma, t), 0 \leq \sigma \leq s;$
4. $c_4^{s,t} : \tau \mapsto f(0, t - \tau), 0 \leq \tau \leq t.$

Entonces,

$$F(u, v)y = - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{y_{s,t} - y}{st}. \quad (3.39)$$

Prueba. Supongamos que tenemos todas las hipótesis del teorema. Sea Y una sección suave a lo largo de $f : U \rightarrow M$ definida como sigue: si tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces para cada pareja $(s, t) \in [0, \epsilon] \times [0, \epsilon]$, las curvas $c_1^{s,t}, \dots, c_4^{s,t}$ están definidas. Para cada pareja (s, t) sea $Y(s, t)$ el resultado de transportar paralelamente a $y \in E_p$ a lo largo de las curvas

$c_1^{s,t}$ y $c_2^{s,t}$. Notemos que así definida, Y es una sección suave y $Y(0,0) = y$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} F(u,v)y &= F^f(\partial_1(0), \partial_2(0)) \\ &= \cancel{\nabla_{\partial_1(0)} \nabla_{\partial_2} Y} - \nabla_{\partial_2(0)} \nabla_{\partial_1} Y - \cancel{\nabla_{[\partial_1, \partial_2]} Y}, \\ &= -\nabla_{\partial_2(0)} \nabla_{\partial_1} Y, \end{aligned} \quad (3.40)$$

pues $\nabla_{[\partial_1, \partial_2]} Y = 0$ porque $[\partial_1, \partial_2] = 0$ y $\nabla_{\partial_2} Y = 0$ porque Y es paralelo a lo largo de las curvas $c_2^{s,t}$.

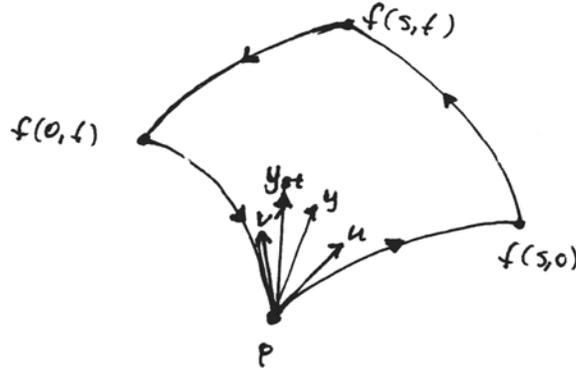


Figura 3.2: Curvatura en términos del transporte paralelo.

Sea P_t el transporte paralelo a lo largo de $\tau \mapsto f(0,t)$, desde p hasta $f(0,t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_2(0)} \nabla_{\partial_1} Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1}(\nabla_{\partial_1} Y)(0,t) - (\nabla_{\partial_1} Y)(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1}(\nabla_{\partial_1(0,t)} Y)}{t}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sea $P_{s,t}$ el transporte paralelo a lo largo de $\sigma \mapsto f(\sigma,t)$, desde $f(0,t)$ hasta $f(s,t)$. Entonces

$$\nabla_{\partial_1(0,t)} Y = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{s,t}^{-1} Y(s,t) - Y(0,t)}{s}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.40)-(3.42) tenemos que

$$F(u,v)y = -\nabla_{\partial_2(0)} \nabla_{\partial_1} Y = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1}(\nabla_{\partial_1(0,t)} Y)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1} P_{s,t}^{-1} Y(s,t) - P_t^{-1} Y(0,t)}{st} \\
&= - \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{y_{s,t} - y}{st},
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. \square

Una conexión en el haz tangente TM de una variedad suave M se llama *conexión lineal en M* . En este caso tenemos notación especial para las componentes de las formas de conexión cuando se usan marcos coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$. La ecuación $\nabla_{\partial_\mu} e_j = \omega_{\mu j}^k e_k$ deviene en la ecuación $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, donde los símbolos Γ_{ij}^k son un caso especial de las componentes de las formas de conexión llamados *símbolos de Christoffel*. Si $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$ son dos campos en M , entonces tenemos la siguiente relación en términos de los símbolos de Christoffel:

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} X^j + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (3.43)$$

Enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [Lee, 2009, cap. 12].

Teorema 3.11. Sea (e_1, \dots, e_k) un marco de referencia en un abierto $U \subset M$ y sea $\omega = (\omega_j^i)$ la matriz de 1-formas de conexión asociada a este marco. Definimos la *matriz de curvatura* con respecto a la conexión ∇ como

$$\Omega := d\omega - \omega \wedge \omega. \quad (3.44)$$

Definición 3.17. Si $T \in \mathcal{T}_s^r$ es un campo tensorial, definimos la *derivada covariante del tensor T* como

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &:= X(T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^r T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \\
&\quad - \sum_{i=1}^s T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s). \quad (3.45)
\end{aligned}$$

La *derivada covariante de un campo tensorial $T \in \mathcal{T}_l^k$* se denotará como ∇T y se define como el elemento de \mathcal{T}_{l+1}^k dado por

$$\nabla T(\omega^1, \dots, \omega^r, X, Y_1, \dots, Y_s) := \nabla_X T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s). \quad (3.46)$$

Para cualquier marco fijo (E_1, \dots, E_n) denotamos a las componentes de ∇T por $\nabla_i T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ o simplemente como $T_{j_1 \dots j_s; i}^{i_1 \dots i_r}$.

El tensor $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ se llama *tensor de torsión*. Si $T \equiv 0$ decimos que *la conexión es de torsión nula o sin torsión*. En este caso se sigue inmediatamente que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pero no necesariamente que $\omega_{\mu j}^k = \omega_{j\mu}^k$, donde $\nabla_{\partial_\mu} e_j = \omega_{\mu j}^k e_k$, a menos de que los elementos (e_1, \dots, e_n) del marco de referencia tengan corchetes de Lie nulos por pares o, equivalentemente, que localmente sea un marco coordinado de referencia para alguna carta. Dado que no hay evidencia física suficiente para concluir que el espacio-tiempo tiene una conexión de torsión no nula, nosotros asumiremos en este trabajo que la torsión del espacio-tiempo es idénticamente cero.

Como la derivada covariante extendida para campos tensoriales covariantes $\nabla_X : \mathcal{T}_s^0(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^0(M)$ respeta el subespacio de tensores alternantes, entonces tenemos un mapeo $\nabla_X : L_{\text{alt}}(M) \rightarrow L_{\text{alt}}(M)$ o bien $\nabla_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$. Más aún, tenemos que ∇_X es una derivación para formas diferenciales con respecto al producto tensorial y al producto exterior, es decir, se tiene

$$\nabla_X(\alpha \otimes \beta) = \nabla_X \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \nabla_X \beta, \quad \nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta. \quad (3.47)$$

Con el [Teorema 3.11](#) y con estas dos últimas relaciones ya tenemos todas las herramientas necesarias para escribir las ecuaciones geométricas de la EDC, partiendo del formalismo vectorial como lo expusimos en el [Capítulo 1](#). A esto dedicaremos el siguiente capítulo, aprovechando también el formalismo tensorial desarrollado en el [Capítulo 2](#).

Capítulo 4

Electrodinámica geométrica

La formulación de la electrodinámica en un espacio-tiempo general supone que debemos comenzar con una variedad suave (M, \mathcal{A}) de dimensión n con cartas adecuadas. Después de esto debemos construir los espacios tangente de esta variedad $T_p M$, en cada punto $P \in M$ (con cualquiera de los tres métodos expuestos en el [Capítulo 2](#)) y a partir de estos construir el haz tangente TM y su dual, T^*M , que consideraremos como nuestro haz fibrado, de hecho como un \mathbb{R} -haz vectorial $\xi = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$. Construimos las secciones del haz vectorial $\Gamma(\xi)$ y construimos un atlas para este con cartas de haz naturales. Por simplicidad asumiremos aquí que el haz vectorial es trivial, es decir que $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$. Una vez que tengamos estos objetos debemos introducir un producto escalar en las fibras del haz tangente TM y con ellas una métrica g a través de un marco global o a través de marcos locales.

A algunos objetos electrodinámicos los podemos modelar o representar como campos vectoriales en el espacio tangente, es decir $X : M \rightarrow TM$ (los cuales son secciones del haz tangente), pero también como 1-formas del haz cotangente (las cuales son secciones del haz cotangente). De manera general, a los campos electromagnéticos los modelaremos como campos tensoriales y como k -formas, que vamos a derivar por medio de la derivada covariante (conexión de Koszul) y de la derivada de Lie. Por tanto, vamos a trabajar con un (r, s) -haz tensorial $T_s^r(\xi) = (T_s^r(TM), \pi, M, T_s^r(\mathbb{R}^n))$ y sus secciones $\Gamma(T_s^r(TM))$.

El segundo postulado de Einstein puede formularse así: *Para todas las leyes de la naturaleza hay una formulación covariante*, donde covariante aquí sig-

nifica que preservan su forma bajo cambios de coordenadas $x \rightarrow x'$. Por esta razón, antes de comenzar propiamente con la formulación de la electrodinámica clásica en términos de formas diferenciales, veamos primero la formulación tensorial que resulta ser su formulación covariante, con $\dim M = 4$ y con los cambios de coordenadas dados por las transformaciones de Lorentz (1.66).

De este punto en adelante se usarán las unidades del sistema gaussiano, en donde $\frac{1}{\epsilon_0} = 4\pi = \mu_0$, porque son más naturales que las unidades SI para la formulación covariante de la electrodinámica clásica (por ejemplo tenemos que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 1$) y nos basamos en [Parrott, 1987, Garrity, 2015, Baez et al., 1994, Lee, 2015, Russer, 2013].

Las ecuaciones de Maxwell en el sistema gaussiano toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

§4.1. Electrodinámica covariante

Comenzaremos con el espacio donde la electrodinámica clásica se ve más natural, es decir en un espacio de Minkowski de cuatro dimensiones, \mathbb{R}_1^4 como vimos en la Sección 1.6. En un marco de referencia S , un *evento* está determinado por sus coordenadas de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ donde este ocurre, a las cuales llamaremos *coordenadas espaciales*, y por el instante t cuando este ocurre, a la cual llamaremos *coordenada temporal*. Entonces, un evento queda representado por el 4-vector $\underline{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z) := (ct, \mathbf{r})$ y sus componentes están representadas por x^μ , donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Si nos interesan solamente las componentes espaciales escribiremos x^i , donde $i = 1, 2, 3$. De ahora en adelante convendremos que $c := 1$ y que todos los índices griegos correrán desde 0 hasta 3 y todos los índices latinos correrán desde 1 hasta 3.

Consideraremos además el producto interno definido en la Sección 1.6 y en (2.45) para un par de vectores $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}_1^4$:

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{y} &= g_1(\underline{x}, \underline{y}) := -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 \\ &:= g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $x_\nu = g_{\mu\nu}x^\mu$, entonces podemos escribir (4.2) como

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = g_1(\underline{x}, \underline{y}) = x_\nu y^\nu. \quad (4.3)$$

Si f es una función escalar, convenimos en escribir $\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x^i}$ y $\partial^i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, para cualquier índice $i \in I$, con I un conjunto indexado.

Definición 4.1. Definimos el operador diferencial covariante

$$\partial_\mu := (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) := (\partial_t, \text{grad}). \quad (4.4)$$

De esta definición obtenemos el operador diferencial contravariante

$$\partial^\mu := (-\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) := (-\partial_t, \text{grad}). \quad (4.5)$$

y obtenemos el *operador de D'Alambert*

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu := -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = -\partial_t^2 + \Delta, \quad (4.6)$$

el cual es el equivalente al operador laplaciano para el espacio de Minkowski, por lo que también se suele llamar *4-laplaciano*.

Notemos que $\partial_i = \partial^i$, para cualquier índice espacial i y $\partial_t = -\partial^t$ para un índice temporal t . Más aún, se tiene que $\partial^\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial^\mu$.

Definición 4.2. Definimos el *4-potencial electromagnético* como

$$\underline{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\Phi, \mathbf{A}) \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$ y $\Phi := A^0$ son los potenciales electromagnéticos y definimos la *4-corriente* como

$$\underline{j} = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \mathbf{j}), \quad (4.8)$$

donde $\mathbf{j} = (j^1, j^2, j^3)$ es la densidad de corriente y $\rho := j^0$ es la densidad de carga.

Para satisfacer el primer postulado de la relatividad especial se requiere, en particular para la electrodinámica clásica, que ambos miembros de una ecuación tengan las mismas propiedades tensoriales, es decir que sean tensores del mismo rango para que se transformen adecuadamente bajo cambios de coordenadas. Este requerimiento de homogeneidad se expresa diciendo que

las ecuaciones están escritas en su *forma covariante*. Si probamos que las ecuaciones de Maxwell son covariantes, entonces probaríamos que la electrodinámica clásica es invariante bajo transformaciones de Lorentz de la misma manera que la mecánica clásica lo es bajo transformaciones de Galileo.

La ecuación de continuidad (1.20)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = 0$$

puede escribirse fácilmente en su forma covariante como

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.9)$$

pues el hecho de que la 4-corriente $\underline{\mathbf{j}}$ es un 4-vector se sigue de la conservación de la carga eléctrica en un sistema cerrado.

De la relación

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} &= (\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2, \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3, \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) \\ &= (B^1, B^2, B^3) \end{aligned}$$

se sigue que podemos escribir el tensor contravariante

$$F^{kj} := \partial^j A^k - \partial^k A^j = B^i. \quad (4.10)$$

De la relación

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1, \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2, \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3) \\ &= (E^1, E^2, E^3) \end{aligned}$$

se sigue que podemos escribir el tensor contravariante

$$F^{0i} := \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -E^i. \quad (4.11)$$

De las ecuaciones (4.9) y (4.10) se sigue inmediatamente que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ o equivalentemente que $F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} = 0$, es decir que el tensor $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico y en consecuencia $F^{\mu\mu} = 0$. Todas las componentes $F^{\mu\nu}$ se pueden arreglar en una matriz de la forma siguiente:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Definición 4.3. Definimos el *tensor electromagnético de Faraday* como

$$F^{\mu\nu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu. \quad (4.13)$$

Este tensor permite comprender por qué los campos electrodinámicos \mathbf{E} y \mathbf{B} están tan relacionados en los cambios de coordenadas: porque son las componentes de un mismo tensor. Más concretamente, si L_ρ^μ representa la matriz de un cambio de coordenadas dado por las transformaciones de Lorentz (1.66) entre dos marcos inerciales de referencia S y S' , entonces el tensor electromagnético de Faraday se transforma como $F'^{\mu\nu} = L_\rho^\mu L_\sigma^\nu F^{\rho\sigma}$. Notemos que

$$\begin{aligned} F_{\rho\sigma} &= g_{\rho\mu} F^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

es decir, $F_{\mu\nu}$ se obtiene de $F^{\mu\nu}$ sustituyendo E^i por $-E^i$. Notemos también que $F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})$, de donde se sigue que $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu})$.

4.1.1. Ecuaciones de Maxwell covariantes

Teorema 4.1. Las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell son cuatro ecuaciones escalares que se pueden escribir de la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu. \quad (4.15)$$

Prueba. Calculamos la derivada $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$ y usamos la antisimetría del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$.

Para $\nu = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ &= \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 \end{aligned}$$

$$= 4\pi j^0.$$

Es decir, $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Para $\nu = i$ tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_1 F^{1i} + \partial_2 F^{2i} + \partial_3 F^{3i} \\ &= -\partial_0 E^i + \partial_j B^k - \partial_k B^j \\ &= 4\pi j^i.\end{aligned}$$

Es decir, $(\text{rot } \mathbf{B})^i - \partial_t \mathbf{E}^i = 4\pi \mathbf{j}^i$.

Por lo tanto, un índice temporal con un índice espacial de $F^{\mu\nu}$ nos dan la ley de Gauss y dos índices espaciales de $F^{\mu\nu}$ nos dan la ley de Ampère-Maxwell. \square

Teorema 4.2. Las ecuaciones homogéneas de Maxwell son cuatro ecuaciones escalares que se pueden escribir de la forma

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0.^1 \quad (4.16)$$

Prueba. Notemos que si dos de los índices λ, μ, ν se repiten, entonces se tiene que $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} \equiv 0$. Por esto nos fijaremos en las cuatro combinaciones posibles de índices sin repetición.

Para $\{\gamma, \mu, \nu\} = \{i, j, k\}$ tenemos

$$\begin{aligned}\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} &= -\partial^i B^i - \partial^j B^j - \partial^k B^k \\ &= -3\partial^i B^i \\ &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

Para $\{\gamma, \mu, \nu\} = \{0, j, k\}$ tenemos

$$\partial^0 F^{jk} + \partial^j F^{k0} + \partial^k F^{0j} = -\partial^0 B^i + \partial^j E^k - \partial^k E^j = 0.$$

Es decir, $(\text{rot } \mathbf{E})^i + \partial_t \mathbf{B}^i = 0$.

Por lo tanto, tres índices espaciales de $F^{\mu\nu}$ nos dan la ley de Coulomb, mientras que un índice temporal con dos índices espaciales de $F^{\mu\nu}$ nos dan la ley de Faraday. \square

¹Esta relación se llama *identidad de Jacobi* y es válida para cualquier tensor.

Si sustituimos el tensor de Faraday (4.13) en las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (4.15) encontramos las cuatro ecuaciones acopladas para los potenciales electromagnéticos \mathbf{A} y Φ :

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= \cancel{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu} - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu \quad (\text{Norma de Lorentz } \partial_\mu A^\mu = 0) \\ &= 4\pi j^\nu.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Por lo tanto, si la norma de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ es elegida en un marco de referencia, la elección es válida en todos los marcos de referencia, porque el operador de D'Alambert es invariante bajo cambios de coordenadas. Como en la norma de Lorentz las ecuaciones para los potenciales electromagnéticos \mathbf{A} (1.50) y Φ (1.51) en el vacío son $\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ y $\square \Phi = -\rho/\epsilon_0$, entonces se sigue que estas dos ecuaciones para los potenciales están dadas por las cuatro componentes de la ecuación tensorial $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi j^\nu$ o bien $\square \underline{A} = -4\pi \underline{j}$.

Ya que esta ecuación y las ecuaciones (4.15), (4.16) son igualdades entre 4-vectores, son invariantes bajo cambios de coordenadas (de Lorentz) y por lo tanto son covariantes. Esto es suficiente para demostrar la covarianza de la electrodinámica clásica, porque a partir de las ecuaciones de Maxwell y de la norma de Lorentz se deduce toda la electrodinámica clásica. Por lo tanto, la electrodinámica clásica está de acuerdo con el primer postulado de la relatividad especial siempre que se transforme siguiendo las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de norma para los potenciales electromagnéticos $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \phi$ y $\Phi' = \Phi - \partial_t \phi$ en su forma covariante son las cuatro componentes de

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \phi.\tag{4.18}$$

Entonces, la ecuación para encontrar los potenciales que satisfacen la norma de Lorentz es $\square \phi = -\partial_\mu A^\mu$. La ecuación de ondas electromagnéticas es $\partial_\mu \partial^\mu F^{\mu\nu} = 0$. Introduciendo el 4-vector $\underline{k} = (k^0, k^1, k^2, k^3) := (\omega, k^1, k^2, k^3)$, encontramos que la fase de una onda monocromática, $k_\mu \cdot x^\mu$, es un invariante relativista y para una onda electromagnética la norma del vector de onda es nula, es decir $k_\mu \cdot k^\mu = 0$ (cf. [Greiner, 1998, Jackson, 1998, Parrott, 1987]).

Finalmente, recordemos que la 4-*velocidad* está dada por $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}$, donde $d\tau := dt/\gamma$ es el *tiempo propio*; el 4-*momento* es $p^\mu := m_0 u^\mu$, donde m_0 es la masa en reposo. Dada la 4-*fuerza* f^μ , tenemos que las *ecuaciones de movimiento* están dadas por

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (4.19)$$

que es la forma covariante de la segunda ley de Newton. Entonces, las ecuaciones de movimiento debido a la fuerza de Lorentz son las componentes espaciales de la ecuación tensorial

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu = F^{\mu\nu}j_\nu, \quad (4.20)$$

pues se tiene que

$$\begin{aligned} f^i &= \frac{dp^i}{d\tau} = qF^{i\nu}u_\nu \\ &= q(F^{i0}u_0 + F^{i1}u_1 + F^{i2}u_2 + F^{i3}u_3) \\ &= q(\gamma E^i + B^j u_k - B^k u_j) \quad (\text{porque } u_0 := -\gamma). \end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{F}^i = q(\gamma \mathbf{E} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}))^i$.

Mientras que la componente temporal nos da la potencia del campo eléctrico, es decir

$$f^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = qF^{0\nu}u_\nu = q \left(\cancel{F^{00}}u_0 + F^{01}u_1 + F^{02}u_2 + F^{03}u_3 \right).$$

De donde se sigue que si $\mathcal{E} := -\gamma m_0$, entonces

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{d(\gamma m_0)}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \\ &= -q(E^1u_1 + E^2u_2 + E^3u_3) \quad (\text{porque } p_0 := m_0) \\ &= q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (4.15) y (4.21) tenemos que

$$4\pi f^\mu = F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Usando la antisimetría del tensor electromagnético y las ecuaciones de Maxwell homogéneas (4.16) reescribimos el segundo término de esta expresión como

$$\begin{aligned}
 F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\nu\rho} \partial^\nu F^{\mu\rho} \\
 &= \frac{1}{2} F_{\rho\nu} (\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\mu F^{\nu\rho} \\
 &= -\frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\rho\nu} F^{\nu\rho}) \\
 &= -\frac{1}{4} \delta_\rho^\mu \partial^\rho (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}).
 \end{aligned}$$

Entonces la densidad de energía está dada por

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (F^{\mu\nu} F_\nu^\rho + \frac{1}{4} \delta^{\mu\rho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \partial_\rho T^{\mu\rho}, \quad (4.23)$$

donde hemos definido al *tensor energía-momento* $T^{\mu\rho}$ como

$$T^{\mu\rho} := \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\nu} F_\nu^\rho + \frac{1}{4} \delta^{\mu\rho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (4.24)$$

Vamos a calcular explícitamente los elementos del tensor energía-momento. Primero calculemos $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= F_{0\beta} F^{0\beta} + F_{1\beta} F^{1\beta} + F_{2\beta} F^{2\beta} + F_{3\beta} F^{3\beta} = 2B^2 - 2E^2 \\
 \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= \frac{B^2 - E^2}{2}.
 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora calculemos la componente temporal T^{00} :

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} (F^{0\nu} F_\nu^0 + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \frac{1}{4\pi} \left(E^2 + \frac{B^2 - E^2}{2} \right) = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = u. \quad (4.26)$$

Es decir, la componente temporal del tensor de energía-momento es la densidad de energía u del campo electromagnético.

Por otra parte, notemos que $T^{0i} = \frac{1}{4\pi} F^{0\nu} F_\nu^i = \frac{1}{4\pi} F^{i\nu} F_\nu^0 = T^{i0}$. Entonces tenemos que

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} F^{0\nu} F_\nu^i = \frac{1}{4\pi} (F^{00} F_0^i + F^{01} F_1^i + F^{02} F_2^i + F^{03} F_3^i)$$

$$= \frac{E^j B^k - E^k B^j}{4\pi} = \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i}{4\pi} = s^i. \quad (4.27)$$

Es decir, las componentes híbridas o mixtas del tensor energía-momento son las componentes del vector de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = (s^1, s^2, s^3)$.

Por otro lado, tenemos que las componentes espaciales del tensor energía momento,

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} (F^{i\nu} F_{\nu}^j + \frac{1}{4} \delta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} (B^2 - E^2)), \quad (4.28)$$

son las componentes del *tensor de esfuerzos de Maxwell*.

Por lo tanto tenemos que el *tensor electromagnético de energía-momento* está dado por

$$(T^{\mu\rho}) = \begin{pmatrix} u & s^1 & s^2 & s^3 \\ s^1 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ s^2 & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ s^3 & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

y las ecuaciones de Maxwell son el par de ecuaciones tensoriales

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 4\pi j^{\nu} \quad \text{y} \quad \partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} = 0.$$

§4.2. Electrodinámica geométrica

Para escribir las ecuaciones de la electrodinámica en términos de formas diferenciales tenemos que relacionar las formas diferenciales en \mathbb{R}^3 con el cálculo vectorial en \mathbb{R}^3 , es decir, necesitamos relacionar formas con campos vectoriales. Notemos que en \mathbb{R}^3 las 1-formas se pueden escribir de la forma $\alpha = a_i dx^i$ en la base ordenada $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$ para algunas funciones suaves a_i ; todas las 2-formas se pueden escribir de la forma $\beta = \epsilon_{jk} b_i dx^j \wedge dx^k$ en la base ordenada $\{dx^1 \wedge dx^2, -dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$ para algunas funciones suaves b_i ; las 3-formas se pueden escribir de la forma $\gamma = \epsilon_{ijk} c_i dx^j \wedge dx^k$ en la base unitaria $\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$ (incluso las formas globales) para algunas funciones suaves c_i . Es importante aclarar que a los índices latinos $\{i, j, k\}$ los tomaremos en orden cíclico, es decir $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$.

A una 1-forma $\alpha = a_i dx^i$ podemos asociarle un campo vectorial de manera natural por medio del mapeo que sube índices, a saber $\sharp\alpha = g^{ij} a_j dx^i =$

$a^j \mathbf{e}_j$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es la base canónica para \mathbb{R}^3 . Sin embargo, esta asociación depende de la noción de ortogonalidad que proporciona el producto interno canónico de \mathbb{R}^3 dado por (g^{ij}) , es decir que en otra base ortogonal el campo asociado a la 1-forma α es otro campo distinto. Por tanto, para una función $f(x, y, z)$ consideramos su diferencial $df = \partial_i f dx^i$, la cual es una 1-forma, y le subimos un índice para obtener su gradiente:

$$\text{grad } f = \sharp df = g^{ij} \partial_i f dx^j = \partial^j f \mathbf{e}_j. \quad (4.30)$$

En la última igualdad estamos usando coordenadas rectangulares. Si usamos coordenadas generalizadas entonces tendremos que $\text{grad } f = g^{ij} \partial_i f \partial_j = \partial^j f \partial_j$.

Para poder escribir la divergencia y el rotacional de un campo vectorial necesitamos asociar 2-formas con campos vectoriales. De manera que a una 2-forma $\beta = \epsilon_{jk} b_i dx^j \wedge dx^k$ le asociamos el campo vectorial $\sharp(*\beta)$, es decir

$$\sharp(*\epsilon_{jk} b_i dx^j \wedge dx^k) = \sharp(b_i dx^i) = b^i \mathbf{e}_i, \quad (4.31)$$

Consideremos un campo vectorial $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$ al cual le aplicamos el mapeo que baja índices, es decir $\flat \mathbf{X} = g_{ij} X^i \mathbf{e}_j = X_j dx^j$. Aplicamos el operador estrella,

$$*(\flat \mathbf{X}) = *X_i dx^i = \epsilon_{ijk} X_i dx^j \wedge dx^k.$$

Calculamos la derivada exterior,

$$\begin{aligned} d(\epsilon_{ijk} X_i dx^j \wedge dx^k) &= \epsilon_{ijk} dX_i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_l X_i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \partial_l X_l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k. \quad (\text{suma en } l) \end{aligned}$$

Aplicamos el operador estrella,

$$*\partial_l X_l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \partial_l X_l, \quad (\text{suma en } l)$$

porque $*dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = *\text{vol} = 1$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\text{div } \mathbf{X} = *d*(\flat \mathbf{X}) = *d*(X_i dx^i) = \partial_i X^i. \quad (4.32)$$

En la última igualdad estamos usando coordenadas rectangulares, en las que $X^i = X_i$. Si en lugar de usar coordenadas cartesianas usamos coordenadas generalizadas entonces tenemos que $\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} X^i \right)$.

Para escribir el rotacional basta con tomar la derivada exterior $d(\flat \mathbf{X})$,

$$\begin{aligned} d(\flat \mathbf{X}) &= d(X_i dx^i) = dX_i \wedge dx^i = \partial_j X_i dx^j \wedge dx^i \\ &= (\partial_i X_j - \partial_j X_i) dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Aplicamos el operador estrella,

$$*(\partial_i X_j - \partial_j X_i) dx^i \wedge dx^j = \epsilon_{ijk} (\partial_i X_j - \partial_j X_i) dx^k.$$

Finalmente subimos el índice,

$$\epsilon_{ijk} g^{ij} (\partial_i X_j - \partial_j X_i) dx^k = \epsilon_{ij}^k (\partial_i X^j - \partial_j X^i) \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} \partial_i X^j \mathbf{e}_k. \quad (\text{suma en } k)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \sharp * d(\flat \mathbf{X}) = \sharp * d(X_i dx^i) = \epsilon_{ijk} \partial_i X^j. \quad (\text{suma en } k) \quad (4.33)$$

En la última igualdad estamos usando coordenadas cartesianas en las cuales $X^i \mathbf{e}_k = X_k^i$.

Por lo tanto, con el operador estrella podemos reformular el lenguaje de los campos vectoriales, los gradientes, las divergencias y los rotacionales en términos de formas diferenciales. Resumiendo, tenemos que hay cuatro tipos de mapeos lineales en \mathbb{R}^3 a los cuales les podemos asociar alguna forma diferencial:

$$\begin{aligned} \operatorname{id}_{C^\infty(\mathbb{R})}(f) &= f, \\ \flat(X_1, X_2, X_3) &= X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz, \\ *\flat(X_1, X_2, X_3) &= X_1 dy \wedge dz - X_2 dx \wedge dz + X_3 dx \wedge dy, \\ *f &= f dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow \operatorname{id} & & \downarrow \flat & & \downarrow *\flat & & \downarrow * \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{array} \quad (4.34)$$

Consideremos de nueva cuenta el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^4 . Según la convención que hemos hecho, los índices griegos corren desde 0 hasta 3, mientras que los índices latinos corren desde 1 hasta 3. En adelante convendremos en tomar estos valores en orden cíclico, es decir $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$.

La relatividad especial nos sugiere que el espacio vectorial 4-dimensional $\Omega^1(\mathbb{R}_1^4)$ con la base ordenada $\{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\}$ tiene un producto interno dado por la matriz diagonal $g_1 := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. De tal manera que para cualesquiera dos 1-formas $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$ y $\beta = \beta_\mu dx^\mu$ su producto interno está dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{g_1} := -\alpha_0\beta_0 + \alpha_i\beta_i. \quad (\text{suma sobre } i) \quad (4.35)$$

El producto interno en el espacio vectorial 6-dimensional de 2-formas $\Omega^2(\mathbb{R}_1^4)$, con base ordenada

$$\{dx^0 \wedge dx^1, dx^0 \wedge dx^2, dx^0 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$$

está dado por la matriz diagonal $g_2 := \text{diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$. De tal manera que para cualesquiera dos 2-formas $\alpha = \alpha_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y $\beta = \beta_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, su producto interno está dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{g_2} := -\alpha_{0i}\beta_{0i} + \alpha_{ij}\beta_{ij}. \quad (\text{suma sobre } i) \quad (4.36)$$

De la misma manera tenemos que el producto interno inducido en el espacio 4-dimensional de 3-formas $\Omega^3(\mathbb{R}_1^4)$ con base ordenada

$$\{dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$$

está dado por la matriz diagonal $g_3 := \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$. Consecuentemente el producto de dos 3-formas $\alpha = \alpha_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$ y $\beta = \beta_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$ está dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{g_3} := -\alpha_{0ij}\beta_{0ij} + \alpha_{ijk}\beta_{ijk}. \quad (\text{suma sobre } i) \quad (4.37)$$

Elegimos como base del espacio unidimensional de 4-formas $\Omega^4(\mathbb{R}_1^4)$ al elemento $\{dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$, el cual coincide con el elemento de volumen $\text{vol}_{\mathbb{R}_1^4}$ del espacio-tiempo \mathbb{R}_1^4 . Usaremos el mismo símbolo g para representar a cualquiera de las métricas g_1, g_2, g_3 siempre que no haya riesgo de confusión, en particular para calcular el operador estrella de cualquier k -forma del espacio-tiempo.

Observación 4.1. De manera explícita, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
*dt &= -dx \wedge dy \wedge dz. \\
*dx &= -dt \wedge dy \wedge dz. \\
*dy &= dt \wedge dx \wedge dz. \\
*dz &= -dt \wedge dx \wedge dy. \\
*(dt \wedge dx) &= -dy \wedge dz. \\
*(dt \wedge dy) &= dx \wedge dz. \\
*(dt \wedge dz) &= -dx \wedge dy. \\
*(dx \wedge dy) &= dt \wedge dz. \\
*(dx \wedge dz) &= -dt \wedge dy. \\
*(dy \wedge dz) &= dt \wedge dx. \\
*(dt \wedge dx \wedge dy) &= -dz. \\
*(dt \wedge dx \wedge dz) &= dy. \\
*(dt \wedge dy \wedge dz) &= -dx. \\
*(dx \wedge dy \wedge dz) &= -dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con los elementos que hemos desarrollado hasta este punto estamos en condiciones de ofrecer una formulación geométrica de la electrodinámica clásica en términos de formas diferenciales ayudándonos para esto de las ecuaciones (4.30)-(4.33), del diagrama (4.34) y de la [Observación 4.1](#). Dado que sabemos cómo convertir los campos vectoriales electromagnéticos (dependientes del tiempo) \mathbf{E} y \mathbf{B} sobre \mathbb{R}^3 en formas diferenciales sobre \mathbb{R}^3 , entonces es claro que el rotacional del campo eléctrico proviene de la derivada exterior de una 1-forma \mathcal{E} a la cual llamaremos *1-forma del campo eléctrico* que obtenemos a partir de \mathbf{E} bajando el índice, es decir $\mathcal{E} := \flat\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = E^i \partial_i \mapsto \mathcal{E} = E_i dx^i. \quad (4.38)$$

Por otro lado, es claro que la divergencia del campo magnético proviene de la derivada exterior de una 2-forma \mathcal{B} a la cual llamaremos *2-forma del campo magnético* y que obtenemos a partir de \mathbf{B} bajando el índice y después aplicando el operador estrella, es decir $\mathcal{B} = *(\flat\mathbf{B})$:

$$\mathbf{B} = B^i \partial_i \mapsto \flat\mathbf{B} = B_i dx^i \mapsto \mathcal{B} = \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k. \quad (4.39)$$

Si elegimos trabajar con coordenadas rectangulares, como lo hemos venido haciendo, la matriz de la métrica canónica de \mathbb{R}^3 , $g = \text{diag}(1, 1, 1)$, es la matriz identidad $I = (\delta_{ij}) = (g_{ij})$. Consecuentemente, tenemos por un lado que $\mathcal{E} = \flat\mathbf{E} = g_{ij}E^i\partial_j = E_j dx^j$ y por otro lado que $\mathcal{B} = *\flat\mathbf{B} = *(g_{ij}B^i\partial_j) = *(B_j dx^j) = \epsilon_{jki}B_j dx^k \wedge dx^i$ con los mismos componentes que en (4.38) y en (4.39), respectivamente, pues en cualquier sistema coordenado rectangular se tiene que $E^i = E_i$ y $B^i = B_i$.

Observación 4.2. Notemos que en el caso estático, es decir, el caso en el que las formas electromagnéticas \mathcal{E} y \mathcal{B} no dependen del tiempo, las ecuaciones homogéneas de Maxwell son simplemente

$$d\mathcal{E} = 0 \quad \text{y} \quad d\mathcal{B} = 0. \quad (4.40)$$

Prueba. En efecto,

$$d\mathcal{E} = (\partial_i E_j - \partial_j E_i) dx^i \wedge dx^j = 0 \Leftrightarrow \partial_i E_j - \partial_j E_i = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

$$d\mathcal{B} = \partial_l B^l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

□

Supongamos que los campos electromagnéticos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ también dependen del tiempo. Consecuentemente las formas electromagnéticas \mathcal{E} y \mathcal{B} dependen del tiempo, por lo que las consideraremos como formas en el espacio-tiempo \mathbb{R}_1^4 . De hecho vamos a combinar estas dos formas en una sola 2-forma electromagnética.

Definición 4.4. Sean $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ los campos electromagnéticos. La 2-forma electromagnética de Faraday \mathcal{F} asociada a estos campos electromagnéticos se define como

$$\mathcal{F} := \mathcal{E} \wedge dx^0 + \mathcal{B} = E_i dx^i \wedge dx^0 + \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k. \quad (4.41)$$

Observación 4.3. Notemos que se sigue trivialmente que la 2-forma de Faraday está dada en términos del tensor de Faraday por la expresión

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.42)$$

Comparando la 2-forma de Faraday \mathcal{F} con el $(2,0)$ -tensor $F^{\mu\nu}$ de Faraday podemos obtener las componentes de $F^{\mu\nu}$ inmediatamente. La información de las fuentes electromagnéticas se puede escribir con una 1-forma como sigue.

Definición 4.5. Sea $\rho(t, \mathbf{r})$ una función de densidad de carga eléctrica y sea $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ un campo vectorial de corriente eléctrica. La 1-forma de corriente asociada a la carga y a la corriente está dada por

$$\mathcal{J} := j_\mu dx^\mu. \quad (4.43)$$

Notemos además que si pensamos al espacio-tiempo como un producto de la forma $M = \mathbb{R} \times S$, donde S es una variedad suave que representa al espacio, entonces se tiene que para cualquier forma $\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$ podemos escribir su derivada exterior como

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \\ &= \partial_\mu \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\ &= \partial_0 \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx^0 \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} + \\ &\quad + \partial_i \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx^i \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\ &= \partial_0 \omega \wedge dx^0 + d_s \omega, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde cada μ_i toma valores de $\{0, 1, \dots, n = \dim M\}$ y la parte $d_s \omega$ no contiene a dx^0 , con lo cual podemos separar la parte espacial y la parte temporal de la derivada exterior de una forma en el espacio de Minkowski.

4.2.1. Ecuaciones de Maxwell geométricas

Teorema 4.3. Los campos vectoriales $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ y la función $\rho(t, \mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones homogéneas de Maxwell si y sólo si

$$d\mathcal{F} = 0. \quad (4.45)$$

Prueba. Calculamos $d\mathcal{F} = 0$ y usamos el resultado de la [Observación 4.2](#).

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= d\mathcal{E} \wedge dx^0 + d\mathcal{B} \\ &= (\partial_0 \mathcal{E} \wedge dx^0 + d_s \mathcal{E}) \wedge dx^0 + \partial_0 \mathcal{B} \wedge dx^0 + d_s \mathcal{B} \\ &= d_s \mathcal{E} \wedge dx^0 + \partial_0 \mathcal{B} \wedge dx^0 + d_s \mathcal{B} \\ &= (d_s \mathcal{E} + \partial_0 \mathcal{B}) \wedge dx^0 + d_s \mathcal{B} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} d_s \mathcal{B} = 0 \\ d_s \mathcal{E} + \partial_0 \mathcal{B} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0. \end{array}$$

□

Antes de involucrar a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell cabe observar que si en realidad los campos electromagnéticos son formas diferenciales como se han planteado, entonces se sigue que la ecuación (4.44) no tiene nada que ver con la métrica del espacio de Minkowski, y en general con la de ninguna variedad $M = \mathbb{R} \times S$. De hecho si $\phi : \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ es un difeomorfismo, entonces tenemos que $d\mathcal{F} = 0$ si y sólo si $d(\phi^* \mathcal{F}) = 0$. Por lo tanto, la ecuación $d\mathcal{F} = 0$ expresa en realidad un hecho topológico del espacio-tiempo y no un hecho métrico:

EXISTE CIERTA FORMA \mathcal{F} QUE ES CERRADA.

Sin embargo esto no es así para las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell, pues la métrica de la variedad sobre la cual hemos elegido trabajar necesariamente aparecerá implícita en el operador estrella que aparece tanto en la divergencia como en el rotacional de un campo vectorial.

Teorema 4.4. Los campos vectoriales $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ y la función $\rho(t, \mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell si y sólo si

$$*d*\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}. \quad (4.46)$$

Prueba. Calculemos $*\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} *\mathcal{F} &= *(\mathcal{E} \wedge dx^0 + \mathcal{B}) = *(\mathcal{E} \wedge dx^0) + *\mathcal{B} \\ &= *E_i dx^i \wedge dx^0 + *\epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k \\ &= \epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k + B_i dx^0 \wedge dx^i \\ &= \epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k - B_i dx^i \wedge dx^0 \\ &= *_s \mathcal{E} - *_s \mathcal{B} \wedge dx^0, \end{aligned}$$

donde $*_s$ es el operador estrella en el espacio \mathbb{R}^3 , con respecto a la métrica canónica. Calculamos $d*\mathcal{F}$.

$$d*\mathcal{F} = d*_s \mathcal{E} - d(*_s \mathcal{B} \wedge dx^0)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_0 *_s \mathcal{E} \wedge dx^0 + d_s *_s \mathcal{E} - \cancel{\partial_0 (*_s \mathcal{B} \wedge dx^0)} \wedge dx^0 - d_s (*_s \mathcal{B} \wedge dx^0) \\
&= *_s \partial_0 \mathcal{E} \wedge dx^0 + d_s *_s \mathcal{E} - d_s *_s \mathcal{B} \wedge dx^0.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $*d * \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
*d * \mathcal{F} &= * (*_s \partial_0 \mathcal{E} \wedge dx^0 + d_s *_s \mathcal{E} - d_s *_s \mathcal{B} \wedge dx^0) \\
&= * (*_s \partial_0 \mathcal{E} \wedge dx^0) + *d_s *_s \mathcal{E} - * (d_s *_s \mathcal{B} \wedge dx^0).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
* (*_s \partial_0 \mathcal{E} \wedge dx^0) &= * (\epsilon_{ijk} \partial_0 E_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0) \\
&= -\partial_0 E_i dx^i = -\partial_0 \mathcal{E}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Por otra parte, tenemos $*_s \mathcal{E} = \epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
*d_s *_s \mathcal{E} &= *d_s (\epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k) \\
&= *\epsilon_{ijk} d_s E_i \wedge dx^j \wedge dx^k \\
&= *\epsilon_{ijk} \partial_l E_i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \\
&= *\partial_l E_l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\
&= -\partial_l E_l dx^0.
\end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned}
*_s d_s *_s \mathcal{E} \wedge dx^0 &= *_s d_s (\epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0) \\
&= *_s (\epsilon_{ijk} d_s E_i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0) \\
&= *_s (\epsilon_{ijk} \partial_l E_i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0) \\
&= *_s (\partial_l E_l dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0) \\
&= \partial_l E_l dx^0.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$*d_s *_s \mathcal{E} = - *_s d_s *_s \mathcal{E} \wedge dx^0. \tag{4.48}$$

En tercer lugar tenemos $*_s \mathcal{B} = B_i dx^i$. Consecuentemente tenemos que

$$\begin{aligned} *(d_s *_s \mathcal{B} \wedge dx^0) &= *d_s (B_i dx^i \wedge dx^0) \\ &= *(d_s B_i \wedge dx^i \wedge dx^0) \\ &= *(\partial_l B_i dx^l \wedge dx^i \wedge dx^0) \\ &= \epsilon_{ikj}(\partial_k B_j - \partial_j B_k) dx^i. \end{aligned}$$

Pero también tenemos que

$$\begin{aligned} *_s d_s *_s \mathcal{B} &= *_s d_s (B_i dx^i) \\ &= *_s d_s B_i \wedge dx^i \\ &= *_s \partial_l B_i dx^l \wedge dx^i \\ &= \epsilon_{ijk}(\partial_j B_k - \partial_k B_j) dx^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-*(d_s *_s \mathcal{B} \wedge dx^0) = *_s d_s *_s \mathcal{B}. \quad (4.49)$$

De las ecuaciones (4.47)-(4.49) concluimos que

$$*d*\mathcal{F} = -\partial_0 \mathcal{E} - *_s d_s *_s \mathcal{E} \wedge dx^0 + *_s d_s *_s \mathcal{B}. \quad (4.50)$$

Notemos que podemos escribir la 1-forma corriente como

$$\mathcal{J} = j_\mu dx^\mu = j_0 dx^0 + j_i dx^i = -\rho dx^0 + j, \quad (4.51)$$

donde $j := j_i dx^i$. Entonces de la ecuación (4.46) se sigue que

$$\begin{aligned} -*_s d_s *_s \mathcal{E} \wedge dx^0 - \partial_0 \mathcal{E} + *_s d_s *_s \mathcal{B} &= 4\pi(-\rho dx^0 + j) \\ \Leftrightarrow *_s d_s *_s \mathcal{E} = 4\pi\rho &\quad \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \Leftrightarrow *_s d_s *_s \mathcal{B} - \partial_0 \mathcal{E} = 4\pi j &\quad \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}, \end{aligned}$$

como se quería demostrar. \square

Así como de las ecuaciones de Maxwell vectoriales se puede deducir la ley de la conservación de la carga (1.20), pues de

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j},$$

obtenemos su divergencia

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E}) = \operatorname{div}(4\pi \mathbf{j})$$

Usamos (A.8) y conmutamos los operadores ∂_t y div ,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) - \partial_t \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Eliminamos el término constante,

$$-4\pi \partial_t \rho = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0.$$

Asimismo podemos obtener la ley de la conservación de la carga desde las ecuaciones de Maxwell geométricas (4.45)-(4.46), pues de

$$*d * \mathcal{F} = 4\pi \mathcal{J},$$

por (3) del Teorema 3.5 obtenemos

$$d * \mathcal{F} = \pm 4\pi * \mathcal{J},$$

Derivamos y usamos el Teorema 3.1,

$$d(d * \mathcal{F}) = \pm 4\pi d * \mathcal{J}.$$

Obtenemos

$$d * \mathcal{J} = 0. \tag{4.52}$$

Observación 4.4. Notemos que en el caso estático hay un par de ecuaciones que involucran solamente a la 1-forma eléctrica:

$$d\mathcal{E} = 0, \quad *_s d_s *_s \mathcal{E} = 4\pi \rho,$$

y hay un par de ecuaciones que involucran solamente a la 2-forma magnética:

$$d\mathcal{B} = 0, \quad *_s d_s *_s \mathcal{B} = 0,$$

lo cual hace evidente que solamente en el caso dinámico los campos electromagnéticos se afectan mutuamente.

Si pensamos a las ecuaciones de Maxwell $d\mathcal{F} = 0$ y $\delta\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}$ simplemente como un par de ecuaciones que tiene que satisfacer una 2-forma \mathcal{F} cuando la 1-forma \mathcal{J} es dada, entonces las ecuaciones de Maxwell tienen sentido en cualquier variedad semi-riemanniana, de hecho, en una variedad de Lorentz que se pueda escribir como un producto $(a, b) \times S = M$ con la métrica producto $-dt \otimes dt \times g$, para alguna métrica riemanniana g en una variedad espacial (S, g) , y podemos escribir la ecuación $\mathcal{F} = \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B}$ que nos permite identificar el campo eléctrico y el campo magnético en su forma covariante.

Cabe señalar que las componentes de la forma $*\mathcal{F}$ se pueden arreglar en una matriz de 4×4 comparando con (4.41):

$$*\mathcal{F} = *_s\mathcal{E} - *_s\mathcal{B} \wedge dx^0 = \epsilon_{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k - B_i dx^i \wedge dx^0.$$

Es decir, las componentes de $*\mathcal{F}$ se obtienen a partir de las componentes de \mathcal{F} cambiando $E^i \rightarrow -B^i$ y $B^i \rightarrow E^i$.

Por lo tanto tenemos que

$$(*\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

la llama *matriz dual de la matriz* (4.13), y las ecuaciones de Maxwell son el par de ecuaciones.

$$d\mathcal{F} = 0 \quad y \quad *d*\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}.$$

Análogamente a como identificamos las formas del campo eléctrico, del campo magnético, la forma de corriente y la forma de Faraday, podemos capturar la información de los potenciales electromagnéticos en una sola 1-forma.

Definición 4.6. Dados el potencial escalar $\Phi(t, \mathbf{r})$ y el potencial vectorial $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, definimos la 1-forma *potencial* asociada a los potenciales electromagnéticos, como

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu. \quad (4.54)$$

Teorema 4.5. Los campos electromagnéticos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ y los potenciales electromagnéticos $\Phi(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones de potenciales si y sólo si

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}. \quad (4.55)$$

Prueba. Derivamos la 1-forma potencial,

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= d(A_\mu dx^\mu) = -\partial_0(A_\mu dx^\mu) \wedge dx^0 + d_S(A_\mu dx^\mu) \\
 &= -\partial_0(A_\mu dx^\mu) \wedge dx^0 + d_S A_\mu \wedge dx^\mu \\
 &= -\partial_0(A_\mu dx^\mu) \wedge dx^0 + \partial_i A_\mu dx^i \wedge dx^\mu \\
 &= -\partial_0(A_i dx^i) \wedge dx^0 + \partial_i A_0 dx^i \wedge dx^0 + \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\
 &= (-\partial_0(A_i dx^i) + \partial_i A_0 dx^i) \wedge dx^0 + \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j.
 \end{aligned}$$

Comparamos $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \wedge dx^0 + \mathcal{B} &= (-\partial_0(A_i dx^i) + \partial_i A_0 dx^i) \wedge dx^0 + \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\
 \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} &= -\partial_0(A_i dx^i) + \partial_i A_0 dx^i & \mathbf{E} &= -\text{grad } \Phi - \partial_t \mathbf{A} \\
 \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j & \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

□

En el [Capítulo 1](#) vimos que los potenciales para campos electromagnéticos dados no son únicos, sino que están en función de una transformación de norma. Este hecho tiene una interpretación natural en términos de formas diferenciales, pues para cualquier forma ω siempre tenemos que $d^2\omega = 0$ ([Teorema 3.1](#)), en particular para cualquier función f suave siempre se tiene que $d^2f = 0$ (esta relación es equivalente a las relaciones [\(A.7\)](#) y [\(A.8\)](#), como se puede comprobar inmediatamente del diagrama [\(4.34\)](#)).

Supongamos que \mathcal{A} es una 1-forma potencial, es decir que $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$. Entonces para cualquier función $f(t, x, y, z)$ la forma $\mathcal{A} + df$ también es una 1-forma potencial, pues

$$d(\mathcal{A} + df) = d\mathcal{A} + d^2f = \mathcal{F}. \quad (4.56)$$

Por lo tanto, la ecuación $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ expresa la libertad de norma, es decir cualquier 1-forma potencial \mathcal{A} puede sustituirse por otra 1-forma potencial, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A} + df$.

Conclusión

Notemos que de la 1-forma potencial $\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu$, obtenemos que la condición de Lorentz es $*d*\mathcal{A} = 0$, pues

$$\begin{aligned} *\mathcal{A} &= *(A_\mu dx^\mu) \\ &= -A_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \epsilon_{ijk} A_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0. \end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} d*\mathcal{A} &= -\partial_0 A_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 - d_s A_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \cancel{\partial_0(\epsilon_{ijk} A_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0 \wedge dx^0)} + \epsilon_{ijk} d_s A_i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0 \\ &= -\partial_0 A_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 - \cancel{\partial_i A_0 dx^i \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3} \\ &\quad + \partial_i A_i dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0. \end{aligned}$$

Aplicamos el operador $*$ y usamos la condición de Lorentz en el último paso,

$$\begin{aligned} *d*\mathcal{A} &= -\partial_0 A_0 + \partial_i A_i \\ &= -\partial_0 \Phi + \partial_i A_i \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Dado que a la forma electromagnética $*\mathcal{F}$ se le llama dual del tensor electromagnético \underline{F} , de la misma forma llamamos a la forma $*\mathcal{A}$ dual del tensor potencial \underline{A} y llamamos a la forma $*\mathcal{J}$ dual del tensor de corriente \underline{j} . Por tanto, el operador de Hodge $*$ es un operador de “dualización” y la dualización es su propia inversa, salvo un signo. Notemos que del teorema [Teorema 3.5](#) y de la [Definición 3.11](#) es inmediato dualizar las formas $\mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{J}$ y los tensores $\underline{F}, \underline{A}, \underline{j}$.

En efecto:

$$\begin{array}{lll}
 *d * \mathcal{A} = 0 & \xrightarrow{\text{dual}} & \delta \mathcal{A} = 0. \\
 \mathcal{F} = d\mathcal{A} & \xrightarrow{\text{dual}} & *\mathcal{F} = \delta * \mathcal{A}. \\
 \square \underline{A} = -4\pi \underline{j} & \xrightarrow{\text{dual}} & \square \underline{A} = -4\pi \underline{j}. \\
 *d * \mathcal{F} = 4\pi \mathcal{J} & \xrightarrow{\text{dual}} & \delta \mathcal{F} = 4\pi \mathcal{J}. \\
 d\mathcal{F} = 0 & \xrightarrow{\text{dual}} & \delta * \mathcal{F} = 0. \\
 d * \mathcal{J} = 0 & \xrightarrow{\text{dual}} & \delta \mathcal{J} = 0.
 \end{array}$$

Podemos resumir los resultados principales en el siguiente cuadro.

Descripción	Forma vectorial	Forma covariante	Forma geométrica
Norma de Lorentz	$\partial_t \Phi + \text{div } \mathbf{A} = 0$	$\partial_\mu A^\mu = 0$	$*d * \mathcal{A} = 0$
Campo electromagnético	$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{A},$ $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \partial_t \mathbf{A}$	$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$	$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$
Ecuaciones de ondas	$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j},$ $\square \Phi = -\rho/\epsilon_0$	$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi j^\nu$	$\square \underline{A} = -4\pi \underline{A}$
Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas	$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho,$ $\text{rot } \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$	$*d * \mathcal{F} = 4\pi \mathcal{J}$
Ecuaciones de Maxwell homogéneas	$\text{div } \mathbf{B} = 0,$ $\text{rot } \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$	$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$	$d\mathcal{F} = 0$
Conservación de la carga	$\partial_t \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0$	$\partial_\mu j^\mu = 0$	$d * \mathcal{J} = 0$
Lagrangiano	$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ $- q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$	$\underline{L} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ $+ j_\mu A^\mu$	$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} * \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$ $+ * \mathcal{J} \wedge \mathcal{A}$

Cuadro 4.1: Resumen de resultados.

Se puede replantear el contenido del Cuadro 4.1, incluyendo el concepto de curvatura desarrollado en la Sección 3.5, de la siguiente forma: cuando incluimos el concepto de curvatura, se encuentra que la 1-forma potencial \mathcal{A} es una conexión y que la 2-forma electromagnética \mathcal{F} es la curvatura de esta conexión. La importancia de este hecho es que hace naturales las posibles generalizaciones de la electrodinámica vectorial, como de hecho es el caso cuando se quieren describir también la fuerza débil (interacción electrodebil) y la fuerza fuerte (modelo estándar), como lo demostraron C. Yang y R. Mills.

En efecto, sea $\pi : E \rightarrow M$ un \mathbb{R} -haz vectorial trivial. Elijamos una sección $s \in \Gamma(E)$ que no sea nula en ninguna parte y sea ω una 1-forma. Consideremos una función $f \in C^\infty(M)$, entonces definimos una conexión para este haz vectorial de la siguiente manera:

$$\nabla(fs) := f \cdot \omega \cdot s + df \cdot s. \tag{4.58}$$

Entonces, por el Teorema 3.11 la curvatura de esta conexión está dada por

$$\begin{aligned} F &= d\omega - \omega \wedge \omega \\ &= d\omega. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Si A es la matriz de la conexión, entonces $A = \omega$. Por tanto tenemos que $F = dA$ y podemos identificar a la matriz de la conexión con la 1-forma potencial, es decir $A = \omega = \mathcal{A}$. También tenemos que identificar a la 2-forma de curvatura F con la 2-forma electromagnética \mathcal{F} . De hecho, la curvatura F corresponde a la 2-forma electromagnética si y sólo si $dF = 0$ y $*d*F = 4\pi\mathcal{J}$.

Por tanto, podemos describir a las ecuaciones de Maxwell de esta manera: Dada una densidad de carga ρ y una corriente eléctrica, está dada una 1-forma de corriente \mathcal{J} . De entre todas las conexiones para el haz vectorial trivial $\pi : E \rightarrow M$ sobre el espacio de Minkowski $M = \mathbb{R}_1^4$, escogemos aquellas conexiones \mathcal{A} tales que su curvatura correspondiente $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ satisfaga que $*d*\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J}$. De entre todas las conexiones posibles, las que pudieran tener un significado físico son aquellas cuyas curvaturas correspondientes son los puntos críticos para un lagrangiano dado. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes se llaman *ecuaciones de Yang-Mills*. Para poder hacer una generalización será necesario que el campo electromagnético (el campo de fuerzas) este descrito como la curvatura de una conexión, es decir, que de alguna manera podamos escribir “fuerza = curvatura”.

Apéndice A

Relaciones vectoriales comunes

En este apéndice presentamos las relaciones vectoriales más comunes del cálculo vectorial multivariable empleadas sobre todo en el [Capítulo 1](#), pero también en el [Capítulo 4](#).

§A.1. Fórmulas vectoriales

Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} tres vectores en \mathbb{R}^3 y sean f y g dos funciones suaves en \mathbb{R}^3 (o por lo menos de clase C^2). Entonces, se tienen las siguientes relaciones:

$$\text{A.1 } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

$$\text{A.2 } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

$$\text{A.3 } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

$$\text{A.4 } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

$$\text{A.5 } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}.$$

$$\text{A.6 } \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f.$$

$$\text{A.7 } \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}.$$

$$\text{A.8 } \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0.$$

$$\text{A.9 } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}.$$

$$\text{A.10 } \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f.$$

$$\text{A.11 } \operatorname{div}(f \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

$$\text{A.12 } \operatorname{rot}(f \mathbf{a}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{a} + f \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

$$\text{A.13 } \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

$$\text{A.14 } \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

$$\text{A.15 } \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{b}.$$

§A.2. Análisis vectorial

Si \mathbf{x} es un vector radial en \mathbb{R}^3 de magnitud $r = |\mathbf{x}|$, entonces $\mathbf{n} := \mathbf{x}/r$ es un vector radial unitario. Sea $f(r)$ una función suave de r y sea \mathbf{k} un vector constante. Entonces, se tiene las siguientes relaciones:

$$\text{A.16 } \operatorname{div} \mathbf{x} = 3.$$

$$\text{A.17 } \operatorname{rot} \mathbf{x} = 0.$$

$$\text{A.18 } \operatorname{grad} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{n}.$$

$$\text{A.19 } \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{r^3}.$$

$$\text{A.20 } \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = -\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \text{ si } r \neq 0.$$

$$\text{A.21 } \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{k}}{r} \right) = \mathbf{k} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \right), \text{ si } r \neq 0.$$

$$\text{A.22 } \operatorname{rot} \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = -\operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \right), \text{ si } r \neq 0.$$

$$\text{A.23 } \Delta \left(\frac{\mathbf{k}}{r} \right) = \mathbf{k} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

$$\text{A.24 } \operatorname{rot}(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} - \operatorname{grad}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}).$$

$$\text{A.25 } \operatorname{div}(\mathbf{n}f(r)) = \frac{2}{r}f + \frac{\partial f}{\partial r}.$$

$$\text{A.26 } \operatorname{rot}(\mathbf{n}f(r)) = 0.$$

$$\text{A.27 } (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{n}f(r) = \frac{f(r)}{r} (\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})) + \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Sean f y g dos funciones suaves en \mathbb{R}^3 y sea \mathbf{X} un campo vectorial en \mathbb{R}^3 . Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es una región con elemento de volumen dV y si S es una superficie cerrada que contiene a V en su interior y con elemento de área dS y vector normal \mathbf{n} que apunta hacia afuera en dS , entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$\text{A.28 } \int_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \oint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{Teorema de Gauss})$$

$$\text{A.29 } \int_V \operatorname{grad} f dV = \oint_S f \mathbf{n} dS.$$

$$\text{A.30 } \int_V \operatorname{rot} \mathbf{X} dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{X} dS.$$

$$\text{A.31 } \int_V (f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dV = \int_S f \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} g dS.$$

(Identidad de Green)

$$\text{A.32 } \int_V (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_S (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{n} dS.$$

(Teorema de Green)

Si S es una superficie abierta con la curva C es su frontera, con elemento de línea $d\mathbf{l}$ y si definimos el vector normal \mathbf{n} a S por medio de la regla de la mano derecha con respecto al sentido de la integral de línea alrededor de C , entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$\text{A.33 } \int_S \operatorname{rot} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\text{A.34 } \int_S \mathbf{n} \times \operatorname{grad} f dS = \oint_C f d\mathbf{l}.$$

§A.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Podemos definir un sistema de coordenadas u_1, u_2, u_3 de tal manera que las coordenadas rectangulares x, y y z sean funciones de las nuevas coordenadas: $x = x(u_1, u_2, u_3), y = y(u_1, u_2, u_3), z = z(u_1, u_2, u_3)$.

Así, definimos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales como sistemas para los cuales, localmente alrededor de cada punto $P(u_1, u_2, u_3)$, las superficies $u_1 = \text{const.}, u_2 = \text{const.}$ y $u_3 = \text{const.}$ son mutuamente ortogonales. El volumen de un cubo unitario tal que tres de sus caras son las superficies $u_1 = \text{const.}, u_2 = \text{const.}$ y $u_3 = \text{const.}$ y cuyos lados son $h_1 u_1, h_2 u_2$ y $h_3 u_3$ está dado por $d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$, donde $h_1 = h_1(u_1, u_2, u_3), h_2 = h_2(u_1, u_2, u_3)$ y $h_3 = h_3(u_1, u_2, u_3)$, en general.

Consideremos una función escalar $f = f(u_1, u_2, u_3)$ y un campo vectorial $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Entonces, se tienen las siguientes relaciones:

$$\text{A.35 } (\text{grad } f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

$$\text{A.36 } (\text{div } \mathbf{X})_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} (X_i h_j h_k).$$

$$\text{A.37 } (\text{rot } \mathbf{X})_i = \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (X_k h_k) - \frac{\partial}{\partial u_k} (X_j h_j) \right].$$

$$\text{A.38 } (\Delta f)_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right).$$

Apéndice B

Electromagnetismo y álgebra geométrica

El álgebra geométrica de un espacio de tres dimensiones consiste de cuatro tipos distintos de objetos matemáticos que tienen correspondencias con objetos geométricos y con objetos físicos. A los elementos de un álgebra geométrica los llamamos *multivectores* y un multivector de grado $k \geq 0$ se denota como $M_k = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k$, donde cada a_i es un vector. En este apéndice nos basamos en [Baylis, 2002, de Sabbata et al., 2007, Jancewicz, 1998, Vaz, 2016].

Los objetos que sólo tienen magnitud (escalares) se representan con multivectores de grado 0 y gráficamente con un punto; los objetos lineales que tienen magnitud y dirección (vectores) se representan con multivectores de grado 1 y gráficamente como un rayo o línea dirigida; los objetos planos que tienen magnitud y orientación se representan por multivectores de grado 2 y gráficamente como un paralelogramo orientado con la punta de a pegada a la cola de b ; los objetos sólidos que tienen magnitud y quiralidad se representan por multivectores de grado 3 y gráficamente como un paralelepípedo orientado con la punta de a pegada a la cola de b y la punta de b pegada a la cola de c .

Notemos que no es posible construir objetos de grado mayor que 3 en el espacio de tres dimensiones y los cuatro tipos de objetos definidos arriba son independientes entre sí. En general escribiremos un multivector M_r de grado r como una combinación lineal de multivectores de grado $k \leq r$, donde los multivectores de grado distinto no se mezclan, porque son partes distintas de un mismo objeto, como los números complejos o los cuaternios.

§B.1. Álgebra geométrica

Definimos el *álgebra geométrica* de un espacio vectorial V de dimensión $\dim V = n < \infty$, como la quarteta $(\mathcal{G}, +, *, \cdot)$, donde la suma (geométrica) $+$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ y el producto por escalares \cdot : $\mathbb{R} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ son operaciones tales que $(\mathcal{G}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y el producto geométrico $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es asociativo y distributivo, es decir $(\mathcal{G}, +, *, \cdot)$ es un álgebra. Además tenemos los siguientes axiomas:

Ax. 1 Existe un único multivector I tal que $IA = A$.

Ax. 2 Para cada vector no nulo $a \in \mathcal{G}$ existe un único vector $a^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $aa^{-1} = I = a^{-1}a$, donde $a^{-1} = \frac{a}{a^2}$. Además,

Ax. 3 Si $\dim V = r$, entonces para cada vector a y para cada multivector A_r de grado r se tiene que $a \wedge A = 0$.

A los multivectores de grado k los denotamos como \mathcal{G}_n^k .

Para cada vector a y para multivector A_k de grado k definimos el *producto interno* \cdot : $\mathcal{G}_n^1 \times \mathcal{G}_n^k \rightarrow \mathcal{G}_n^{k-1}$ como

$$a \cdot A_k := \frac{1}{2} (aA_k - (-1)^k A_k a) = -(-1)^k A_k \cdot a. \quad (\text{B.1})$$

Para cada vector a y para cada multivector A_k de grado k definimos el *producto externo* \wedge : $\mathcal{G}_n^1 \times \mathcal{G}_n^k \rightarrow \mathcal{G}_n^{k+1}$ como

$$a \wedge A_k := \frac{1}{2} (aA_k + (-1)^k A_k a) = -(-1)^k A_k \wedge a. \quad (\text{B.2})$$

En particular, el producto interno de un escalar λ de grado 0 con un vector a sería un multivector de grado $0 - 1$, por lo cual el objeto $\lambda \cdot a$ no tiene significado dentro del álgebra geométrica \mathcal{G} . El producto externo de un escalar λ con un vector a es un multivector de grado $0 + 1$ y en este caso $\lambda \wedge a = a \wedge \lambda$, pues el producto externo coincide con el producto escalar: $\lambda \wedge a = \lambda a = a \wedge \lambda$. Un multivector $A \in \mathcal{G}$ es *par* si contiene sólo multivectores de grado par y escribimos A^+ . Un multivector $A \in \mathcal{G}$ *impar* si contiene sólo multivectores de grado impar y escribimos A^- . Los multivectores pares forman una subálgebra de \mathcal{G} que denotamos \mathcal{G}^+ .

Para evitar el uso excesivo de paréntesis en la escritura de cualquier multivector que contenga productos de distintos tipos convengamos en realizar las operaciones en el orden siguiente: primero producto externo, después producto interno y finalmente producto geométrico. Algunas relaciones comunes del álgebra geométrica son las siguientes:

$$\text{B.3 } aA_k = a \cdot A_k + a \wedge A_k.$$

$$\text{B.4 } a \wedge (B_k \wedge C_l) = (a \wedge B_k) \wedge C_l.$$

$$\text{B.5 } a \cdot (B_r + C_r) = a \cdot B_r + a \cdot C_r.$$

$$\text{B.6 } a \wedge (B_r + C_r) = a \wedge B_r + a \wedge C_r.$$

$$\text{B.7 } (B_r + C_r) \cdot a = B_r \cdot a + C_r \cdot a.$$

$$\text{B.8 } (B_r + C_r) \wedge a = B_r \wedge a + C_r \wedge a.$$

$$\text{B.9 } A = A^+ + A^-.$$

$$\text{B.10 } a \cdot a_1 \wedge C_{r-1} = a \cdot a_1 C_{r-1} - a_1 \wedge (a \cdot C_{r-1}), \text{ para } r \geq 3.$$

(Expansión de Laplace)

$$\begin{aligned} \text{B.11 } a_1 \wedge (a \cdot C_{r-1}) &= a_1 \wedge (a \cdot a_2 \wedge a_3 \wedge \cdots \wedge a_r) \\ &= a \cdot a_2 a_1 \wedge a_3 \wedge \cdots \wedge a_r - a_r \cdot a_3 a_1 \wedge a_2 \wedge a_4 \wedge \cdots \wedge a \\ &\quad + \cdots + (-1)^r a \cdot a_r a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.12 } a \cdot C_r &= a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) = (-1)^{s+1} a \cdot a_s a_1 \wedge a_2 \wedge \widehat{a_s} \wedge \cdots \wedge a_r \\ &= a \cdot a_1 a_2 \wedge a_3 \wedge \cdots \wedge a_r - a \cdot a_2 a_1 \wedge a_3 \cdots \wedge a_r \\ &\quad + \cdots + (-1)^{r+1} a \cdot a_r a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}. \end{aligned}$$

Las fórmulas de reducción de las ecuaciones (B.11) y (B.12) se generalizan tomando un multivector A_s de grado s en el lugar del vector a .

$$\text{B.13 } A_r \cdot B_s := (A_r B_s)_{r-s}.$$

$$\text{B.14 } A_r \wedge B_s := (A_r B_s)_{r+s}.$$

$$\text{B.15 } (A_r b) C_s = A_r (b C_s).$$

B.16 $AB = A \cdot B + [a \wedge (b \cdot B) + a \cdot (b \wedge B)] + A \wedge B = (AB)_0 + (AB)_2 + (AB)_4$,
si $A = a \wedge b = ab$ es producto de vectores ortogonales.

Definimos la *reversión* de un multivector $A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$ de grado r como el multivector $\bar{A}_r = a_r \wedge a_{r-1} \wedge \cdots \wedge a_1$ de grado de r . Así, tenemos:

B.17 $\bar{A}_r = -A_r$, para $r \geq 3$.

B.18 $\bar{A} = \overline{A_0 + A_1 + \cdots + A_r} = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \cdots + \bar{A}_r = A_0 + A_1 - \cdots - A_r$.

B.19 $\overline{AB \cdots KL} = \bar{L} \bar{K} \cdots \bar{B} \bar{A}$.

B.20 $|A|^2 = |\bar{A}A|_0 = |A_0|^2 + \cdots + |A_r|^2 \geq 0$ y $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

B.21 Los vectores a y b son colineales si y sólo si $ab = ba$.

B.22 Los vectores a y b son ortogonales si y sólo si $ab = -ba$.

B.23 $a = a \cdot BB^{-1} + a \wedge BB^{-1} := a_{\parallel} + a_{\perp}$.

B.24 Si M es un multivector que determina un M -espacio, entonces

$a_{\parallel}M = a \cdot M = (-1)^{k+1}Ma_{\parallel}$ y $a_{\perp}M = a \wedge M = (-1)^kMa_{\perp}$.

Al multivector $a_{\parallel} = a \cdot MM^{-1}$ lo llamamos *inyección o proyección del vector a sobre el M -espacio* y al multivector $a_{\perp} = a \wedge MM^{-1}$ lo llamamos *eyección del vector a desde el M -espacio*.

Un *ángulo* es cierta relación entre dos direcciones. Más precisamente, dado un ángulo θ entre la dirección a y la dirección b (vectores unitarios), definimos el seno y el coseno del ángulo θ a través de las ecuaciones $a \cdot b = \cos \theta$ y $a \wedge b = i \sin \theta$, donde i es el pseudoescalar unitario del $(a \wedge b)$ -plano.

Dado que un ángulo es una relación entre dos direcciones que determinan un plano, expresamos a los ángulos como bivectores. Así, el ángulo desde $a = \overrightarrow{OA}$ hasta $b = \overrightarrow{OB}$ está representado por el bivector $\phi = i\theta$, donde ϕ es el área dirigida $[OAB]$ del sector circular OAB con centro en O , es decir $\theta = \pi/2\pi = 1/2$. Entonces el área dirigida del segmento circular OAB la podemos escribir como $[OAB] = i\theta/2$. Por tanto podemos escribir el bivector $\Phi = i\theta = 2[OAB]$, donde i indica el plano del ángulo $|\frac{\Phi}{2}|$ e indica la “magnitud superficial” del ángulo. Entonces, tenemos:

$$\text{B.25 } z = ab = a \cdot b + a \wedge b = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta := \exp(i\theta).$$

$$\text{B.26 } z = ab = \pm \exp(\phi/2).$$

$$\text{B.27 } \exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots, \text{ si } |A| \text{ tiene una magnitud definida y } \exp A \in \mathcal{G} \text{ si } A \in \mathcal{G}.$$

$$\text{B.28 } \exp A \exp B = \exp(A + B) \text{ si y sólo si } AB = BA.$$

$$\text{B.29 } \cosh A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\text{B.30 } \sinh A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + \frac{A^3}{3! + \frac{A^5}{5!}} + \dots$$

$$\text{B.31 } \exp A = \cosh A + \sinh A.$$

$$\text{B.32 } \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \dots$$

$$\text{B.33 } \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = A - \frac{A^3}{3! + \frac{A^5}{5!}} + \frac{A^7}{7!} - \dots$$

Si I es un multivector tal que $I^2 = -1$ e $IA = AI$, entonces tenemos:

$$\text{B.34 } \cosh(IA) = \cos A.$$

$$\text{B.35 } \sinh(IA) = I \sin A.$$

$$\text{B.36 } \exp(IA) = \cos A + \sin A.$$

$$\text{B.37 } \text{Si } A = i\theta, \text{ entonces } ab = \exp(i\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

§B.2. Álgebra geométrica del plano euclidiano

Definimos a la a -línea como el conjunto de vectores x que satisfacen la ecuación $x = \alpha a$, para un vector no nulo a y un escalar α . Decimos que el vector x está dirigido positivamente si $x \cdot a > 0$ y decimos que está dirigido negativamente si $x \cdot a < 0$. A esta diferencia entre vectores positivos y vectores negativos la llamamos *orientación o sentido* de la a -línea.

Notemos que la ecuación $x \wedge a = 0$ (*ecuación no paramétrica* de la a -línea) tiene como solución a los vectores $x = \alpha a$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ (*ecuación paramétrica* de la a -línea). Análogamente, definimos al B -plano como el conjunto de vectores x que satisfacen la ecuación $x \wedge B = 0$ para un bivector no nulo B .

El vector unitario i está dado por la ecuación $B = \mathcal{B}i$, donde \mathcal{B} es un escalar que llamamos *dirección del B -plano*. De aquí se sigue que el vector unitario i determina una orientación del B -plano y da la orientación opuesta para el plano euclidiano. Notemos que $x \wedge i = 0$, es decir que cada bivector que es un múltiplo escalar no nulo de i determina al mismo plano que determina el bivector i , con la misma orientación o con orientación opuesta, según si el escalar es positivo o negativo. Si factorizamos al vector unitario i como producto de dos vectores ortogonales unitarios σ_1 y σ_2 : $i = \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = -\sigma_2 \wedge \sigma_1 = -\sigma_2 \sigma_1$, donde $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 0$ y $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, entonces la ecuación paramétrica del i -plano es $x = (x \cdot \sigma_1)\sigma_1 + (x \cdot \sigma_2)\sigma_2 := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$.

Notemos que los escalares $x_1 := x \cdot \sigma_1$ y $x_2 := x \cdot \sigma_2$ son las componentes rectangulares del vector x con respecto a la base $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Un vector x se representa mediante un segmento de línea dirigido, mientras que el pseudoescalar unitario i se representa como un área unitaria dirigida.

El bivector unitario o pseudoescalar unitario i acepta dos interpretaciones geométricas distintas que corresponden a dos propiedades básicas del plano:

1. i es la unidad de área dirigida que representa la dirección del plano, pues i es el producto de dos vectores ortogonales unitarios σ_1 y σ_2 .
2. i es el generador de las rotaciones del plano.

En efecto, notemos que $\sigma_1 i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 = (\sigma_1 \sigma_1) \sigma_2 = \sigma_2$ y $\sigma_2 i = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_1 (\sigma_2 \sigma_2) = -\sigma_1$. Es decir, la multiplicación de σ_1 por el bivector unitario i por la derecha transforma σ_1 en σ_2 y dado que σ_1 y σ_2 son dos vectores ortogonales, esta transformación es una rotación pura por un ángulo recto.

Análogamente, la multiplicación de σ_2 por el bivector unitario i por la derecha transforma σ_2 en $-\sigma_1$ de donde se sigue que esta transformación es una rotación pura por un ángulo recto, por lo cual podemos ver al pseudoescalar i como el generador de las rotaciones del plano.

Sustituyendo, tenemos que $\sigma_1 i^2 = (\sigma_1 i)i = -\sigma_1$, lo cual nos dice que dos rotaciones consecutivas por ángulos rectos invierten la dirección, lo que nos permite interpretar geoméricamente la ecuación $i^2 = -1$, cuando i y -1 se toman como operadores sobre vectores. Si x es un vector en el i -plano y multiplicamos por i por la derecha, entonces obtenemos a x rotado por un ángulo recto:

$$x' = xi = (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)i = x_1\sigma_1i + x_2\sigma_2i = x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1. \quad (\text{B.38})$$

Definimos un *espinor* en el i -plano como el producto de dos vectores en el i -plano. Por ejemplo,

$$z = \sigma_1 x = \sigma_1(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2) = x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_1\sigma_2 = x_1 + ix_2. \quad (\text{B.39})$$

Este espinor es por supuesto un *número complejo*. Cabe hacer notar que además de la propiedad algebraica $i^2 = -1$ atribuida a la unidad imaginaria, nuestra i es un bivector o un pseudoescalar unitario para el i -plano. De manera que i posee tanto propiedades algebraicas como propiedades geométricas. De tal suerte que así como la unidad pseudoescalar i está cargada de mayor significación que la unidad imaginaria, así mismo el espinor $z = x_1 + ix_2$ está cargado de mayor significación que un número complejo.

De manera análoga a como se construye el *diagrama de Argand* para representar a los números complejos \mathbb{C} , construimos un diagrama para representar el *i -plano espinorial* con un *eje escalar* y un *eje pseudoescalar* perpendiculares entre sí para representar al conjunto de espinores de la forma $z = x_1 + ix_2$.

Cada vector x en el i -plano de vectores determina un único espinor $z = \sigma_1 x = x_1 + ix_2$ en el plano espinorial, mediante el producto geométrico. Recíprocamente, cada espinor z en el plano espinorial determina un único vector x en el plano vectorial de esta manera:

$$\sigma_1 x = z \quad \Rightarrow \quad \sigma_1^2 x = \sigma_1 z \quad \Rightarrow \quad x = \sigma_1 z.$$

Observemos que en la ecuación $x = \sigma_1 z$ el espinor z actúa por la derecha sobre el vector σ_1 transformándolo en el vector x y produciendo una rotación

por un ángulo $\theta = \arctan(x_2/x_1)$ junto a una dilatación por $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Dado que nuestra elección de σ fue arbitraria, se sigue que el espinor z actúa de la misma manera sobre cada vector del i -plano. Por lo tanto, cada espinor se puede pensar como una representación algebraica de una rotación-dilatación. Notemos de paso que el reverso de un espinor z corresponde al conjugado complejo de z , el módulo de un espinor z coincide con el módulo de z como número complejo y la separación de un espinor z en sus partes escalar y pseudoescalar corresponde a separar a z como número complejo en sus partes real e imaginaria.

En este punto conviene hacer la siguiente aclaración. Tenemos los conceptos o definiciones de *espacio vectorial* y *espacio espinorial* y cada uno tienen significados geométricos distintos. Cada uno de estos espacios son espacios lineales, puesto que el espacio vectorial es un espacio lineal de vectores y el espacio espinorial es un espacio lineal de espinores, pero el término espacio vectorial *no* es sinónimo de espacio lineal en el álgebra geométrica, pues en el álgebra geométrica agregamos ciertas propiedades especiales a los vectores que vienen dadas como consecuencia de introducir el producto geométrico y el producto externo definiendo un pseudoescalar unitario tomado como generador de rotaciones, lo cual ciñe el uso de los vectores en un sentido preciso, que no es el del álgebra lineal.

Como el álgebra geométrica del plano consiste de dos tipos distintos de objetos, los vectores (multivectores de grado impar) y los espinores (multivectores de grado par), entonces el espacio lineal del álgebra geométrica se construye a partir de vectores y espinores, como suma (directa) de dos espacios lineales. Por tanto, restringiremos el uso del término “espacio vectorial” a un espacio lineal de vectores en el álgebra geométrica. Por último observemos que el espacio lineal total no es un espacio vectorial.

Consideremos la ecuación del i -plano: $x = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$, donde los vectores ortonormales σ_1 y σ_2 forman una base para el plano. El producto geométrico de los vectores σ_1 y σ_2 genera dos elementos básicos más: el escalar unitario $1 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y el pseudoescalar unitario $i = \sigma_1\sigma_2$. Así, el álgebra geométrica del i -plano es generada por dos vectores ortonormales y es expandida por cuatro cantidades linealmente independientes: $\{1, \sigma_1, \sigma_2, i\}$. De donde se sigue que cada multivector A se puede expresar como una combinación lineal de elementos básicos: $A = \alpha_0 1 + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 i$, para $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ escalares.

Definimos el *álgebra geométrica del i -plano* como el conjunto de multivectores generados por adición de productos geométricos de vectores del i -plano. Escribimos $\mathcal{G}_2(i)$ o simplemente \mathcal{G}_2 . El subíndice 2 indica tanto la dimensión del plano como el grado del pseudoescalar. Como los cuatro multivectores unitarios $\{1, \sigma_1, \sigma_2, i\}$ constituyen una base para \mathcal{G}_2 , entonces el álgebra \mathcal{G}_2 es un espacio lineal de dimensión $\dim \mathcal{G}_2 = 4$. Es claro que cualquier multivector $A \in \mathcal{G}_2$ se puede expresar como la suma de un vector $a = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2$ y un espinor $z = \alpha_0 + \alpha_3i$, es decir $A = a + z$.

Por lo tanto, el álgebra geométrica \mathcal{G}_2 se puede escribir como la suma directa de dos espacios lineales: $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2^- + \mathcal{G}_2^+$, donde \mathcal{G}_2^- es el espacio lineal bidimensional de vectores y \mathcal{G}_2^+ es el espacio bidimensional de espinores. Ambos son espacios lineales cerrados bajo el producto escalar, sin embargo solamente \mathcal{G}_2^- es un espacio vectorial. Por lo tanto, \mathcal{G}_2 es un espacio lineal de 4 dimensiones pero no es un espacio vectorial. De hecho, el espacio bidimensional \mathcal{G}_2^- es el i -plano mismo y ya que el producto escalar está definido en él, este espacio es euclidiano y lo denotaremos también como \mathcal{E}_2 . Una observación importante es que en contraste con la dimensión de un espacio vectorial que es el número de vectores linealmente independientes, la dimensión de un espacio lineal y su álgebra indican el grado de su pseudoescalar. El álgebra de los números complejos \mathbb{C} aparece ahora con una interpretación geométrica como el subálgebra de multivectores pares en \mathcal{G}_2 , denotada como \mathcal{G}_2^+ .

De manera similar a como desarrollamos el álgebra geométrica del plano euclidiano \mathcal{E}_2 , podemos desarrollar el álgebra geométrica del espacio euclidiano \mathcal{E}_3 . En efecto, el álgebra geométrica $\mathcal{G}_3(i)$, donde $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ es el pseudoescalar unitario dextrógiro, está generada por los vectores ortonormales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y es extendida por las ocho cantidades linealmente independientes $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, i\}$, que forman una base para el álgebra geométrica $\mathcal{G}_3(i)$. Para cada multivector $M \in \mathcal{G}_3$ definimos su *multivector dual* como el producto iM .

Notemos que por el Ax. 3 y por la ecuación del espacio $x \wedge i = 0$, si a es un vector y A es un multivector de grado $k \geq 4$, entonces $a \wedge A = 0$. De aquí se sigue que cada multivector $M \in \mathcal{G}_3$ es de la forma $M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3$. Por tanto, en este caso tenemos que $M_0 := \alpha$ es la parte escalar, $M_1 := a$ es la parte vectorial, $M_2 := ib$ es la parte bivectorial (dual del vector b), y $M_3 := i$ es la parte pseudoescalar. Así, $M = \alpha + a + ib + i\beta$. Si denotamos por

\mathcal{G}_3^k al subespacio de k -vectores en \mathcal{G}_3 , entonces tenemos que \mathcal{G}_3^1 es un espacio de vectores 3-dimensional, \mathcal{G}_3^2 es un espacio de bivectores 3-dimensional y \mathcal{G}_3^3 es un espacio de trivectores 1-dimensional.

§B.3. Álgebra geométrica del espacio-tiempo

En esta sección nos basamos principalmente en [Hestenes, 2015]. Consideraremos los cuatro vectores $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ tales que $-\gamma_0^2 = \gamma_k^2 = 1$. El álgebra geométrica del espacio-tiempo cuadrimensional está generada por cuatro vectores γ_μ y es expandida por las 16 cantidades siguientes: $\{1, \gamma_\mu, \sigma_k, i\sigma_k, i\gamma_\mu, i\}$, donde i es un cuadvivector (o pseudoescalar) unitario de grado cuatro para el espacio-tiempo; $i\gamma_\mu$ son cuatro trivectores (o pseudovectores) de grado tres; σ_k y $i\sigma_k$ son seis bivectores de grado dos; γ_μ son cuatro vectores de grado uno y 1 es un escalar de grado cero, que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} i &= \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, & \sigma_k &= \gamma_k\gamma_0, \\ i^2 &= -1, & i\gamma_\mu &= -\gamma_\mu i. \end{aligned} \tag{B.40}$$

Al álgebra 16-dimensional del espacio-tiempo, $\mathcal{D}_4(i)$, le llamamos *álgebra de Dirac* y sabemos que es isomorfa al álgebra matricial (real) de Dirac. Cada multivector $M \in \mathcal{D}_4$ es de la forma $M = \alpha + a + B + ib + i\beta$, donde α y β son escalares, a y b son vectores y B es un bivector. Para facilitar la descomposición de un multivector con respecto a la base $\{\gamma_\mu\}$, introducimos una base recíproca $\{\gamma^\mu\}$ (evitamos decir base dual ya que en álgebra geométrica la palabra dual ya está ocupada), definida por la relación $\gamma^\mu \cdot \gamma_\mu = \delta_\nu^\mu$. Se sigue la siguiente relación para la métrica de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu. \tag{B.41}$$

Las componentes contravariantes de un vector $a = a^\nu\gamma_\nu$ están dadas por $a^\mu = a \cdot \gamma^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu$ y las componentes covariantes de un vector $a = a_\nu\gamma^\nu$ están dadas por $a_\mu = a \cdot \gamma_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu$. Las componentes $B^{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ del bivector B están dadas por $B^{\mu\nu} = (\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \cdot B = \gamma^\mu \cdot (\gamma^\nu \cdot B)$. Notemos que los pseudoescalares $i\gamma_\mu$ del álgebra de Dirac son los duales de los vectores γ_μ y son trivectores (por ejemplo $i\gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2$). Además cualquier multivector M del álgebra de Dirac se puede descomponer como $M = M_+ + M_-$, donde $M_+ = \alpha + B + i\beta$ y $M_- = a + ib$.

Los multivectores de grado par o espinores forman una subálgebra (de un espacio lineal octadimensional) del álgebra de Dirac isomorfa al álgebra de Pauli, lo cual es evidente del hecho de que los objetos básicos del álgebra Dirac, $\{1, \sigma_k, i\sigma_k, i\}$, coinciden con los elementos básicos del álgebra de Pauli porque $\sigma_k \sigma_j = \frac{1}{2}(\sigma_k \sigma_j + \sigma_j \sigma_k) = \frac{1}{2}(\gamma_k \gamma_j + \gamma_j \gamma_k) = \gamma_k \gamma_j = \delta_{kj}$ es la condición para que exista una base para el espacio tridimensional euclidiano. i también es la unidad pseudoescalar para el espacio euclidiano tridimensional y conmuta con σ_k , es decir $i\sigma_k = \sigma_k i$, lo cual indica la semejanza con la unidad imaginaria.

En álgebra geométrica las matrices de Pauli, $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$ y $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde $j := \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, son vistas como tres vectores básicos ortonormales para un espacio euclidiano tridimensional. De la misma manera los elementos $\{\gamma_k\}, \{\sigma_k\}$ se interpretan geoméricamente como bivectores espacio-temporales y no como operadores en un espacio espinorial abstracto. Más aún, el álgebra (real) de Pauli es isomorfa al álgebra matricial (real) de Pauli. De manera similar, las cuatro matrices de Dirac en el álgebra del espacio-tiempo, $\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ y $\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}$, donde $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3 = \sqrt{-1}I$, son vistas como cuatro vectores básicos ortonormales para el espacio-tiempo (real).

De manera explícita, γ_0 es el vector en el cono de luz que apunta hacia el futuro y γ_k , es un conjunto dextrogiro de vectores espacio-temporales. El vector γ_0 que apunta hacia el futuro caracteriza al marco de referencia de un observador y mapea los bivectores espacio-temporales $\{\sigma_k = \gamma_k \gamma_0\}$ a los vectores básicos ortonormales del álgebra de Pauli. Por lo tanto, el álgebra de Pauli se identifica con el álgebra de un espacio en reposo, relativo a un vector tipo tiempo γ_0 . Asimismo, el vector γ_0 determina un mapeo de cualquier vector del espacio-tiempo a un vector $a = a^\mu \gamma_\mu$ mediante la relación $a \gamma_0 = a \cdot \gamma_0 + a \wedge \gamma_0$. Consecuentemente, $a \cdot \gamma_0$ es la componente temporal γ_0 del vector a , y el bivector $a \wedge \gamma_0$ se puede descomponer en el marco $\{\sigma_k\}$ y representa a un vector espacial relativo a un observador en el marco γ_0 .

Cabe señalar que en $\mathcal{D}(i)$, el pseudoescalar i conmuta con bivectores pero anticonmuta con vectores y trivectores, mientras que en el álgebra de Pauli el pseudoescalar i conmuta con los vectores y los bivectores. En $\mathcal{D}(i)$ se definen cuatro tipos de operadores de conjugación. Para verlo escribamos un

multivector $M \in \mathcal{D}(i)$ de la forma $M = M_E + M_V + M_B + M_T + M_P$, donde los subíndices S, V, B, T y P indican las partes escalar, vectorial, bivectorial, trivectorial (pseudovector) y pseudoescalar, respectivamente.

Definimos la *conjugación por reversión* $M \mapsto \overline{M}$ invirtiendo el orden de los productos que aparecen en M :

$$\begin{aligned}\overline{M} &:= \overline{M}_S + \overline{M}_V + \overline{M}_B + \overline{M}_P \\ &= M_S + M_V - M_B - M_T + M_P.\end{aligned}\tag{B.42}$$

Dado que la reversión es independiente de cualquier base en el álgebra, es un tipo de conjugación invariante.

Definimos la *conjugación espacio-temporal* $M \mapsto \widetilde{M}$ como

$$\begin{aligned}\widetilde{M} &:= -iMi = -iM_Si - iM_Vi - iM_Bi - iM_Ti - iM_Pi \\ &= M_S - M_V + M_B - M_T + M_P.\end{aligned}\tag{B.43}$$

Es decir, la conjugación espacio-temporal de M es la operación que invierte la dirección de todos los vectores del espacio-tiempo. Notemos que el multivector M es par si $\widetilde{M} = M$ y es impar si $\widetilde{M} = -M$.

Definimos la *conjugación espacial* $M \mapsto M^*$ como $M^* := \gamma_0 M \gamma_0$. Esta operación depende de la elección de γ_0 , por lo que no es una conjugación invariante, y cambia $\{\sigma_k\}$ y $\{\gamma_k\}$ de marcos izquierdos a marcos derechos sin cambiar a γ_0 , puesto que $\sigma_k^* = \gamma_0 \sigma_k \gamma_0 = -\sigma_k$ y $\gamma_\mu^* = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = (-\gamma_0, \gamma_k)$.

Definimos la *conjugación hermitiana* $M \mapsto M^\dagger$ dada por $M^\dagger := \gamma_0 \overline{M} \gamma_0$. Esta operación corresponde a la conjugación hermitiana de M tomado como matriz en el álgebra de matrices de Dirac y dado que la conjugación hermitiana depende de la elección de γ_0 , no es una conjugación invariante.

En el álgebra de matrices de Dirac las relaciones (B.29) no determinan a las matrices de Dirac de manera única, ya que cualesquiera dos conjuntos de matrices de Dirac $\{\gamma_k\}$ y $\{\gamma'_k\}$ están relacionados por una transformación de semejanza,

$$\gamma'_\mu = R \gamma_\mu R^{-1},\tag{B.44}$$

donde R es una matriz no singular, lo cual cambia la representación de matrices de Dirac. La condición geométrica de que los γ_μ tienen que ser vectores implica que se puedan escribir como $\gamma'_\mu = a_\mu^\nu \gamma_\nu$, lo cual a su vez implica la invarianza bajo reversión $\overline{\gamma'_\mu R} = \overline{R \gamma_\mu}$, o sea $\overline{R} \gamma'_\mu = \gamma_\mu \overline{R}$ o bien $\overline{R} R \gamma_\mu R^{-1} = \gamma_\mu \overline{R}$. De tal manera que podemos elegir a R tal que $\overline{R} R = 1$, resultando $R^{-1} = \overline{R}$. Por tanto,

$$\gamma'_\mu = a_\mu^\nu \gamma_\nu = R \gamma_\mu \overline{R}. \quad (\text{B.45})$$

Esta ecuación describe una transformación de Lorentz de un marco de vectores $\{\gamma_k\}$ a un marco de vectores $\{\gamma'_k\}$. Más aún, podemos resolver para R como función de γ_μ y de γ'_μ solamente, lo cual implica que R es un multivector y que cada transformación de Lorentz se puede expresar de esta forma y (B.35) es una transformación de Lorentz propia (conexa continuamente con la identidad) si y sólo si R es un multivector par tal que $\overline{R} R = 1$, de donde se sigue que $R = \pm \exp(\phi/2)$, para un bivector ϕ . Así, R es una *rotación de Lorentz* y de hecho R es un campo espinorial real en el álgebra del espacio-tiempo.

§B.4. Electromagnetismo à la Maxwell

Podemos expresar \mathcal{G}_3 como la suma de una parte \mathcal{G}_3^- que consiste de los multivectores impares y una parte \mathcal{G}_3^+ que consiste de los multivectores pares: $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_3^- + \mathcal{G}_3^+$. Asimismo, \mathcal{G}_3^+ es una subálgebra de \mathcal{G}_3 y \mathcal{G}_3^- no lo es. Por esta razón, a la subálgebra \mathcal{G}_3^+ se le llama *álgebra espinorial* para acentuar su carácter geométrico, pues cada espinor de \mathcal{G}_3^+ representa una rotación-dilatación en el espacio tridimensional \mathcal{E}_3 y a su vez representa a un subespacio \mathcal{G}_3^1 de vectores en \mathcal{G}_3 .

Para cualquier multivector $M \in \mathcal{G}_3$ se tiene $M = M^- + M^+$, donde $M^- = a + i\beta$ y $M^+ = \alpha + ib$. Como $i_1 = \sigma_1 i = i\sigma_1$, $i_2 = \sigma_2 i = i\sigma_2$, $i_3 = \sigma_3 i = i\sigma_3$ y dado que $i\sigma_k$ son los únicos bivectores linealmente independientes que se pueden obtener de σ_k por medio del producto geométrico, entonces cualquier bivector $B \in \mathcal{G}_3$ se puede escribir como $B = \mathcal{B}_1 i\sigma_1 + \mathcal{B}_2 i\sigma_2 + \mathcal{B}_3 i\sigma_3 = i(\mathcal{B}_1 \sigma_1 + \mathcal{B}_2 \sigma_2 + \mathcal{B}_3 \sigma_3) = ib$, para escalares \mathcal{B}_k . Así, tenemos que $M^+ = \alpha 1 + \mathcal{B}_1 i_1 + \mathcal{B}_2 i_2 + \mathcal{B}_3 i_3$, con lo cual el conjunto de multivectores unitarios $\{1, i_1, i_2, i_3\}$ son una base para \mathcal{G}_3^+ y \mathcal{G}_3^+ es un espacio lineal de cuatro dimensiones. Notemos que los bivectores $\{i_1, i_2, i_3\}$ satisfacen que $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -i_1 i_2 i_3 = -1$.

Los elementos de \mathcal{G}_3^+ fueron introducidos por primera vez por W. R. Hamilton (1805-1865) y fueron llamados *cuaterniones*. Por tanto, el álgebra espinorial \mathcal{G}_3^+ y el álgebra de cuaterniones son idénticas: los cuaterniones son espinores, pues basta hacer $\hat{i} = i_1 = i\sigma_1$, $\hat{j} = -i_2 = -i\sigma_2$ y $\hat{k} = i_3 = i\sigma_3$.

Notemos que $\alpha\sigma_1 \wedge \beta\sigma_2 = i\alpha\beta\sigma_3$. Consecuentemente el bivector $\alpha\sigma_1 \wedge \beta\sigma_2$ es el dual del vector $\alpha\beta\sigma_3$ que es perpendicular al rectángulo orientado descrito por el bivector y $|\alpha\sigma_1 \wedge \beta\sigma_2| = |\alpha\beta\sigma_3|$. Por tanto, $a \wedge b = ia \times b$, o equivalentemente, $a \times b = -ia \wedge b$, tomando a, b y $a \times b$ de tal manera que formen una sistema derecho que coincida con el sistema definido por el pseudoescalar i y $|a \times b|$ es el área del paralelogramo $a \wedge b$. Por tanto, el álgebra vectorial que J. W. Gibbs (1839-1903) introdujo en 1884 coincide con el álgebra \mathcal{G}_3 .

Regresemos a las ecuaciones de Maxwell. El campo electromagnético se puede escribir mediante ocho ecuaciones por los seis escalares $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$, (4.1), o bien mediante dos ecuaciones por un tensor antisimétrico, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, (1.5)-(1.6), o bien por un par de ecuaciones mediante la 2-forma electromagnética \mathcal{F} , (4.45)-(4.46). En álgebra geométrica podemos describir al campo electromagnético mediante una sola ecuación con un solo bivector F , lo cual se puede intuir si observamos que la descripción de las ondas electromagnéticas se lleva a cabo cabalmente mediante el uso de números complejos que surgen de manera natural con significado geométrico, algebraico y físico (tomando por separa la parte real y la parte imaginaria).

Dados el *bivector electromagnético*, $F := \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ y el *bivector corriente* $j := \frac{1}{2}j^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$ (comparar con la forma electromagnética y con la forma de corriente), se pueden sustituir las dos ecuaciones tensoriales (4.15) y (4.16) por dos ecuaciones multivectoriales, usando (B.10) y la anticonmutatividad del producto externo, para el producto interno entre un vector y un bivector:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \cdot (F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = 4\pi j^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu, \quad (\text{B.46})$$

y

$$\gamma^\mu \partial_\mu \wedge (F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = 0. \quad (\text{B.47})$$

O bien, usando el producto geométrico:

$$\gamma^\mu \partial_\mu (F^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = 4\pi j^{\mu\nu}\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu. \quad (\text{B.48})$$

Si definimos el símbolo $\nabla := \gamma^\mu \partial_\mu$, entonces tenemos que las ecuaciones de Maxwell son $\nabla F = 4\pi j$.

Bibliografía

- [Atiyah, 1987] Atiyah, M. (1987). On the work of simon donaldson. In Gleason, A., editor, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 2, pages 3–6. American Mathematical Society.
- [Baez et al., 1994] Baez, J. N. et al. (1994). *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [Baylis, 2002] Baylis, W. E. (2002). *Electrodynamics. A Modern Geometric Approach*. Birkhäuser.
- [Buck et al., 1978] Buck, R. C. et al. (1978). *Advanced Calculus*. McGraw-Hill, Inc.
- [Byrne,] Byrne, C. A brief history of electromagnetism. Disponible en <http://faculty.uml.edu/cbyrne/cbyrne.html>.
- [Capelas de Oliveira, 2016] Capelas de Oliveira, E. (2016). *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach*. Springer International Publishing Switzerland.
- [Darrigol, 2000] Darrigol, O. (2000). *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press.
- [de Sabbata et al., 2007] de Sabbata, V. et al. (2007). *Geometric Algebra and Applications to Physics*. Taylor & Francis Group, LLC.
- [Doran et al., 2003] Doran, C. J. L. et al. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press.
- [Garrity, 2015] Garrity, T. A. (2015). *Electricity and Magnetism for Mathematicians. A Guided Path from Maxwell's Equations to Yang-Mills*. Cambridge University Press.

- [Girard, 2007] Girard, P. R. (2007). *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. Birkhäuser.
- [Greiner, 1998] Greiner, W. (1998). *Classical Electrodynamics*. Springer.
- [Hehl, 2010] Hehl, F. W. (2010). On the changing form of maxwell's equations during the last 150 years -spotlights on the history of classical electrodynamics-. Ver Obukhov et al., arXiv:0911.5175.
- [Hestenes, 1984] Hestenes, D. (1984). *Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. D. Reidel Publishing Company.
- [Hestenes, 1987] Hestenes, D. (1987). *Clifford Algebra to Geometric Calculus*. D. Reidel Publishing Company.
- [Hestenes, 2002] Hestenes, D. (2002). *New Foundations for Classical Mechanics*. Kluwer Academic Publishers.
- [Hestenes, 2015] Hestenes, D. (2015). *Space-Time Algebra*. Birkhäuser.
- [Jackson, 1998] Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons.
- [Jancewicz, 1998] Jancewicz, B. (1998). *Multivector and Clifford Algebra in Electrodynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [Kline, 1992] Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días (3 vols.)*. Alianza Universidad.
- [Kolmogorov et al., 1996] Kolmogorov, A. N. et al. (1996). *Mathematics of the 19th Century*. Birkhäuser Verlag.
- [Lacava, 2016] Lacava, F. (2016). *Classical Electrodynamics. From Image Charges to the Photon Mass and Magnetic Monopoles*. Springer International Publishing.
- [Lee, 1997] Lee, J. M. (1997). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-VerlSpringer-Verlag New York, Inc.
- [Lee, 2009] Lee, J. M. (2009). *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society.

-
- [Lee, 2015] Lee, J. M. (2015). Differential and physical geometry.
- [Maxwell, 1865] Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 155:459–512.
- [Maxwell, 1873] Maxwell, J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism. 2 Vols.* Clarendon Press Series.
- [Parrott, 1987] Parrott, S. (1987). *Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry.* Springer-Verlag.
- [Russer, 2013] Russer, P. (2013). The geometric representation of electrodynamics by exterior differential forms. *Telsiks*, pages 3–12.
- [Sagan, 1974] Sagan, H. (1974). *Advanced Calculus of Real-Valued Functions of a Real Variable and Vector-Valued Functions of a Vector Variable.* Houghton Mifflin Company.
- [Scriba et al., 2015] Scriba, C. J. et al. (2015). *5000 Years of Geometry. Mathematics in History and Culture.* Birkhauser.
- [Spivak, 1999] Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. 5 Vols.* Publish Or Perish, Inc.
- [Vaz, 2016] Vaz, Jr, J. (2016). *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors.* Oxford University Press.
- [Whittaker, 1910] Whittaker, E. T. (1910). *A History of the Theories of Aether and Electricity.* Longmans, Green, and Co.
- [Yang et al., 1975] Yang, C. et al. (1975). Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D, Vol. 12, No. 12.*