Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Iztacala

Análisis de estrategias de enseñanza de álgebra en educación primaria

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A (N)

Balderas Trejo Oscar Giovanni
Delgado Aguilar Dulce María Samantha

Director: Mtro. **Luis Gonzaga Zarzosa Escobedo**

Dictaminadores: Dra. **Blanca Estela Huitron Vázquez**

Mtro. **J. Jesús Becerra Ramírez**

Los Reyes Iztacala, Edo de México, 2018

ÍNDICE

RESUMEN

Las matematicas son consideradas como un elemento esencial en la formación de los estudiantes para el desarrollo de competencias que permitan una mejor calidad de vida. En México se presenta un serio problema, ya que estas competencias no son desarrolladas de forma efectiva en los estuidantes, los resultados en la prueba PLANEA demuestran que más del 96% de los alumnos de educación básica es incapaz de resolver satisfactoriamente problemas que involucran conceptos algebraicos, a su vez en la aplicación de la prueba PISA se encontró que el 57% de los jovenes de 15 años son incapaces de extraer información relevante de un contexto explícito o de plantear estrategias de solución. Uno de los factores que provoca este fenomeno es la discontinuidad del discurso pedagógico en la transición de la aritmética al álgebra, ante esta problemática de discontinuidad es importante analizar el diseño de metodologías que faciliten el proceso de transición y promueva el desarrollo de competencias matemáticas, particularmente se analizaron tres modelos diferentes que persiguen este objetivo: a) pre-álgebra, b) álgebra temprana y el c) aprendizaje basado en esquemas. Tras el análisis se concluyé que la presentación de un modelo mixto que logré incorporar los elementos más importantes de cada uno de los modelos analizados podría resultar como la estrategía más eficaz para el desarrollo de competencias matematicas; no obstante, esto supone una nueva problematica, ya que la integración de los modelos supone la comparación de estrategías especificas que parten de bases teóricas distintas.

INTRODUCCIčN

Las matematicas son consideradas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2016) como un elemento esencial en la formación de todos los estudiantes, ya que a la educación matematica le da un papel importante en la reducción de las desigualdades socioeconómicas mediante el desarrolló de competencias que permitan a las personas ser ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos con una mejor calidad de vida. Esta competencia es entendida como la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas (OCDE, 2006). Este concepto atiende a la necesidad mencionada de un dominio conceptual que no se limite al conocimiento técnico de la terminología empleada en las matemáticas o al uso de operaciones matemáticas en contextos limitados, sino a su empleo contextos cotidianos.

En México se presenta un problema, ya que estas competencias no se desarrollan de forma eficaz**,** en evaluaciones como la presentada en el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, por sus siglas PLANEA (INEE, 2017), se encontró que el 60.5% de los alumnos de 6to año de primaria tienen un nivel de logro insuficiente de los aprendizajes clave de matematicas, lo que representa deficits fundamentales para continuar su aprendizaje, estos deficits se pueden observar al evaluar a los alumnos de secundaria, quienes de acuerdo a la Articulación de la Educación Básica (SEP, 2011) deberían dominar procesos algebraicos, sin embargo más del 96% de los alumnos demostró ser incapaz de resolver satisfactoriamente problemas que involucran conceptos algebraicos.

Si comparamos los resultados obtenidos en las pruebas PISA por alumnos mexicanos de 15 años de edad en el área de matematicos con los de los países miembros de la OCDE se observa que presentan un promedio por debajo de la media internacional, a su vez la prueba demuestra que el 57% son incapaces de extraer información relevante de un contexto explícito o de plantear estrategias de solución.

Las deficiencias presentadas por los alumnos mexicanos para continuar desarrollando competencias matematicas despues de la educación Primaria se agrabán en el transito de la aritmetica al álgebra, ya que se produce un problema de discontinuidad del discurso pedagógico, lo que termina por convertirse en una competencia mal desarrollada que aleja a las personas del uso adecuado de estas herramientas para solucionar problemas. Debido a los problemas que se presentan a partir de esta discontinuidad, la transición de la aritmética al álgebra es uno de los principales temas de investigación sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente el problema se complejiza con la dificultad para vincular los ejercicios vistos en clase con temas presentes en un contexto externo al aula de clases como la economía, la tecnología y los problemas cotidianos en el trabajo u hogar (Hoyles y colaboradores, 2010 en OCDE, 2016).

Ante esta problemática se destaca la necesidad de analizar el diseño de metodologías que fomenten el desarrollo de las competencias matematicas, en las que además se establezca un vinculo entro lo aprendido en clase y las situaciones presentes en la vida real; centrandose de manera particular en la transición de la aritmetica al álgebra, ya que es ahí donde la problemática se agraba notablemente. A partir del estudio de esta transición han surgido diferentes propuestas que enfatizan aspectos de la relación que pueden mejorar el desarrollo de competencias matemáticas, con base en estos estudios se han originado tres modelos diferentes orientados a facilitar la transición aritmética/álgebra: a) pre-álgebra, b) álgebra temprana y, c) aprendizaje basado en esquemas, los cuales serán analizados en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 1. IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS PARA LA ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICOS (OCDE)

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2016) considera que todos los estudiantes necesitarán matemáticas para su vida adulta y que el conocimiento de las mismas es crucial para la reducción de las desigualdades socioeconómicas, por lo tanto, la enseñanza regular de las matemáticas se ha convertido en un tema de suma importancia en las prácticas escolares y el diseño de currículos educativos.

A pesar de la importancia que la OCDE atribuye a las matemáticas, es común el cuestionarse sobre lo aprendido en las clases habituales de matemáticas y su uso en la vida cotidiana. Una de las razones utilizadas para explicar el papel central de las matemáticas en la educación es la idea, que se remonta a Platón, de que la educación matemática mejora las habilidades de pensamiento de orden superior, es decir, los que son buenos en matemáticas tienden a ser buenos pensadores, y los que son entrenados en matemáticas aprenden a ser buenos pensadores; por tanto, las matemáticas deben ser enseñadas por su propio bien, en lugar de servir a fines más concretos y prácticos; sin embargo es necesario cuestionarse si esto realmente es así.

Los cuestionamientos a esta idea se han incrementado actualmente, ya que con el desarrollo de nuevas tecnologías (particularmente aquellas que permiten realizar operaciones matemáticas) se ha desestima la utilidad del desarrollo de competencias matemáticas, ya que se argumenta que estas competencias pueden no ser necesarias dada la existencia de nuevas herramientas técnologicas (Steen, 2001 en OCDE, 2016). Sin embargo, la OCDE destaca la importancia del desarrollo de competencias matemáticas, ya que aún cuando el empleo de la tecnología pudo haber reducido la necesidad de cálculos mecánicos, ha incrementado la importancia del entendimiento de propiedades cuantitativas, incluso se afirma que cuanto más uso puede hacer la gente de la tecnología, mayor es la necesidad de su comprensión y su capacidad de analizar críticamente lo que están haciendo.

Aun cuando las matemáticas pueden cumplir un papel destacado en el entendimiento del uso de las nuevas tecnologías, persiste el cuestionamiento de si lo que es enseñado de manera tradicional en las clases de matemáticas es realmente útil, Steen (2001 en OCDE, 2016) recuperó el testimonio de diversos estudiantes de matemáticas, quienes afirman que lo visto en clases es muy limitado en cuanto a la aplicabilidad en su contexto diario; Hoyles y colaboradores (2010 en OCDE, 2016) encontraron en la mayoría de la población el argumento de que las matemáticas escolares solo sirven para una serie muy limitada de casos; estos autores infieren que este argumento gana popularidad debido a la dificultad para vincular los ejercicios vistos en clase con temas presentes en su contexto, tales como: economía, tecnología y problemas cotidianos en el trabajo u hogar; ya que es muy difícil especificar qué contenido se puede aplicar de manera específica a cada uno de estos casos.

1.1 Competencias matemáticas para la resolución de problemas.

La OCDE (2016) a través de la prueba PISA en el año de 2015 sostiene que la alfabetización matemática es fundamental dado que en ella se engloba el conjunto de capacidades, habilidades y aptitudes que permiten a las personas resolver problemas y situaciones de la vida. Esta alfabetización desarrolla las competencia matematica, la cual es definida como la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos; esto incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos y elementos para describir, explicar y predecir fenómenos. El desarrollo de esta competencia ayuda a los individuos a reconocer el papel que desempeña la matemática en el mundo y a tomar decisiones bien fundamentadas. Por lo tanto, aquellos que desarrollen de manera apropiada la alfabetización matemática son capaces de reconocer y emplear los conceptos matemáticos en situaciones de su vida cotidiana, permitiéndoles una mejor toma de decisiones que facilite una buena calidad de vida, esto atiende a la necesidad mencionada anteriormente de un dominio conceptual que no se limite al conocimiento técnico de la terminología empleada en las matemáticas o al uso de operaciones matemáticas en contextos limitados.

A su vez en México el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) definió a las competencias como:

> "*...un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación, valores y emociones, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diferentes contextos sociales*" (INEE, 2005, p.16).

Esta definición, al igual que la de PISA, enfatiza la capacidad del estudiante para llevar los conocimientos enseñados en el aula a su práctica en circunstancias cotidianas.

1.1.1 Desarrollo de competencias matemáticas.

Con la finalidad de desarrollar estrategias para la adquisición de competencias, la Secretaría de Educación Pública (SEP) publicó el 19 de agosto de 2011 en el Diario Oficial de la Federación el Acuerdo número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica, es decir, publicó el Programa de estudios de Educación Primaria, el cual orienta el trabajo en el aula realizado por los profesores. En este documento en el apartado que refiere a la enseñanza de matemáticas establece que la formación matemática debe desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana; éxito que en el mismo documento se indica, depende en gran medida de los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas en la educación básica.

En cuanto a la adquisición de competencias matemáticas en específico, la SEP estructuró la enseñanza de matemáticas en educación básica con base en tres ejes principales:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico: alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra.
- Forma, espacio y medida: refiere al estudio de la geometría y la medición.

- Manejo de la información: incluye aspectos relacionados con el análisis de la información que proviene de distintas fuentes y su uso para la toma de decisiones informadas.

El primero de los ejes establecidos por la SEP atañe a la relación directa entre aritmética y álgebra, el cual como se ha mencionado con anterioridad será relevante para la estructuración de una secuencia didactica adecuada. Socas (2011) analizó los currículos de educación básica en el área de matemáticas, y encontró que la enseñanza de matemáticas en este nivel educativo, habitualmente, como en el caso de México, comprende estas dos áreas (aritmética y álgebra) por lo que las estrategias para su enseñanza y por ende su vinculación, es uno de los rubros más importante en investigación educativa.

1.2 Desempeño en el área de matemáticas en México

Además de ser parte esencial de los currículos de educación básica a nivel mundial, la enseñanza de álgebra se ha convertido en foco de diversas investigaciones a causa del bajo desempeño que los alumnos suelen mostrar en esta área. Este bajo desempeño se ve reflejado en evaluaciones como la presentada en el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) elaborado por el INEE, en la evaluación realizada en el 2015 (INEE, 2017) encontraron que el 60.5% de los alumnos de 6to año de primaria tienen un nivel de logro insuficiente de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales para seguir aprendiendo.

Las consecuencias de estas deficiencias se observan al evaluar a los alumnos de secundaria, quienes de acuerdo a la normatividad de la Educación Básica (SEP, 2011) deberían dominar procesos algebraicos, en la evaluación mencionada anteriormente,º sólo el 3.1% demostró poder resolver satisfactoriamente problemas que involucran conceptos algebraicos, aspecto considerado por el INEE (2005) y la OCDE (2006) dentro de las habilidades básicas desarrolladas en las competencias matemáticas, es decir, que el 96.9% de los estudiantes mexicanos no tienen las competencias básicas para resolver problemas de la vida cotidiana de manera que les garanticen una buena calidad de vida.

Estos resultados se equiparan a los resultados obtenidos por los alumnos mexicanos en la prueba PISA (OCDE, 2016) realizada en el 2015, en promedio obtuvieron 408 puntos en matemáticas, 72 puntos por debajo del promedio OCDE de 490 puntos; asimismo se demostró que 57% no alcanzan el nivel básico de competencias, de manera que son incapaces de extraer información relevante de un contexto explícito o de plantear estrategias de solución. Estos resultados sitúan al País en el puesto número 56 de los 70 países miembros evaluados en competencias matemáticas.

Esto pone en evidencia que, si bien existen serios problemas de desempeño de los alumnos mexicanos en matemáticas, particularmente en álgebra, este no es un problema que se limite a esta rama de las matemáticas, sino que esta situación comienza a hacerse presente desde la adquisición de conocimientos relacionados con la aritmética.

1.3 Relación aritmética-álgebra

Como ya se mencionó anteriormente, ambas ramas están relacionadas de manera directa en los currículos educativos, al igual que en la media de resultados de desempeño en cada una de ellas, esta situación conlleva a que la relación entre ambas se convierta en uno de los focos de investigación más importantes.

Diversos autores (Vigotsky, 2015; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011; Socas, 2011; Molina, 2009; Drijvers y Hendrikus, 2003; Gómez 1995, Booth, 1989) describen la relación entre estas dos ramas de la matemática definiendo al álgebra como la generalización de la aritmética, en otras palabras, los conceptos propios de la aritmética son primordiales para la fundamentación del álgebra.

Esta idea de la aritmética como base del álgebra, aunada al hecho de que históricamente la aritmética surgió primero, da lugar a la intuición de que deben ser enseñadas en este mismo orden (Carraher, Brizuela y Earnest, 2006). Esta perspectiva a su vez puede inducir la idea de que el álgebra tiene un mayor nivel de dificultad, por lo tanto, si los alumnos no logran desarrollar las competencias matemáticas es porque aún no han alcanzado el desarrollo cognitivo adecuado para operar con la dificultad que los conceptos algebraicos representan.

1.4 Desarrollo cognitivo como factor en el proceso de aprendizaje.

Socas (1997) afirma que sin importar el tipo de error que los alumnos puedan cometer, la causa de estos será la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, por lo que el estudio de las dificultades asociadas al proceso de desarrollo cognitivo es retomado por diversos autores. Collis (1975) refiere que las respuestas de los alumnos están vinculadas con niveles de comprensión de acuerdo a estadio de desarrollo. Küchemann (1981) remarca que la interpretación que el alumno da a las literales (letras utilizadas para representar un valor cuantitativo en álgebra) determina el nivel de complejidad con el que puede trabajar.

McGregor y Stacey en 1997 sostuvo las afirmaciones de los dos investigadores citados anteriormente, y además argumentó que gran parte de los alumnos no son capaces de aprender álgebra ya que se encuentran en el estadio de operaciones concretas y no son capaces de dar una interpretación adecuada a los conceptos abstractos, como son las literales. Socas (2011) afirma que las investigaciones que conjuntan las explicaciones empíricas de los errores con supuestos de las estructuras mentales sobre el procesamiento de información, permiten predecir algunos tipos de errores, permitiendo una clasificación más completa de los errores con base en principios cognitivos.

Esta clasificación puede ser de gran utilidad para el análisis de los errores, no obstante, esto no garantiza una respuesta a la problemática de la falta de competencias matemáticas en los estudiantes ya que se ha encontrado que las intervenciones más exitosas frente a esta problemática encuentran inconveniente la perspectiva de que las posibles dificultades en el desarrollo cognitivo sean la causa del bajo rendimiento en álgebra, y en su lugar se enfocan en la falta de coherencia pedagógica y matemática entre la aritmética y el álgebra desde el ámbito didáctico (Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011).

1.5 Discontinuidad en el programa de enseñanza de las matemáticas.

Kieran y Filloy (1989) señalan que la falta de coherencia pedagógica y matemática entre la aritmética y el álgebra no consiste simplemente en una generalización de la aritmética, sino que aprender álgebra requiere una transición desde lo que puede considerarse como un modelo informal de representación utilizado para de resolver problemas concretos, a un modelo formal con elementos abstractos. Esto indica que existe una falta de modelos teóricos paradigmáticos (en el sentido de Kuhn, 1962 en Socas, 2011) en los fenómenos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico, siendo la razón de la ruptura en los procedimientos sintácticos de los usuarios del lenguaje algebraico, es decir, los estudiantes utilizan un marco de referencia aritmético en el cual basan sus métodos para la resolución de problemas, sin embargo este marco de referencia es distinto al utilizado cuando se introducen nociones algebraicas.

La incoherencia didáctica entre estas ramas genera un problema de discontinuidad del discurso pedagógico, así como en el desarrollo de competencias matemáticas. Una ruptura importante entre estos dos ámbitos, puede traducirse en una competencia mal desarrollada, incompleta, que aleje a las personas del uso adecuado de estas herramientas para solucionar problemas.

Podemos situar la ruptura entre lo que el alumno sabe y lo que el alumno está aprendiendo, ya que existe una reconceptualización de términos aritméticos a términos algebraicos, que llevan al estudiante a cometer repetidos errores. Booth (1989) enlista los problemas que presentan la mayoría de los estudiantes cuando comienzan el estudio del álgebra independientemente de su nivel académico en 4 categorías:

a) El enfoque de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas.

> En aritmética, el foco de la actividad es el hallazgo de respuestas numéricas particulares; sin embargo, en álgebra eso no es así, el foco se encuentra en la derivación de procedimientos y relaciones y la expresión de estas generalidades en abstracciones y que se use como reglas procedimentales, mientras que en la aritmética esto no sucede, y siempre se espera una respuesta numérica que dé una solución inmediata.

b) Los tipos de métodos usados en aritmética.

Al igual que Kieran y Filloy (1989), Booth (1989) considera que los alumnos en un principio no son capaces de guiarse con un método algebraico, ya que no tienen la noción de qué metodología puede ser empleada en la resolución de problemas abstractos que impliquen generalidades (como los problemas con literales), a diferencia de los métodos aritméticos que responden a particularidades del contexto (valores concretos). Un ejemplo de ello está en la resolución de ecuaciones, los métodos utilizados comúnmente por alumnos en un primer momento son intuitivos, luego por tanteo (como las equivalencias y la sustitución), y por último, el formal, en donde se utilizan métodos algebraicos apropiados.

c) El uso de la notación y convención en álgebra.

Se refiere al uso que se le da a los símbolos “+”, “-“ o “=” en la aritmética, los dos primeros son interpretados en términos de acciones que se deben llevar a cabo, en el caso del símbolo “=” representa un signo unidireccional de conclusión. En cambio en el álgebra, los signos “+” y “-“ se vuelven propiedades de los números (negativos y positivos) y en el signo “=” se vuelve una expresión bidireccional de equidad.

Este error en el uso de los símbolos es retomado también por Kieran y Filloy (1989) quienes además mencionan que otro problema es la unión de dos elementos, que en aritmética denota una adición, por ejemplo, 37 como resultado de la operación de sumar treinta más siete: 37=30+7, en el álgebra ésta significa multiplicación, por ejemplo, 4b puede ser expresada como la multiplicación de los componentes: 4(b)=4b, además del uso del paréntesis, que en álgebra resalta el orden jerárquico de las operaciones a realizar.

d) El significado de las letras y variables.

En aritmética el uso de literales se reduce a representación de fórmulas (para calcular áreas o perímetros (por ejemplo : A=bxh -área es igual a base por altura- como expresión de la fórmula para el cálculo de áreas), asimismo identifican unidades de medida (por ejemplo : cm, ml, etc.); en el álgebra se usan para determinar variables desconocidas o incógnitas (por ejemplo: 5ab+x, donde no se sabe el valor numérico de "*a*", "*b*", "y", "*x*") (Kieran y Filloy, 1989).

Aunado a lo anterior, Kieran y Filloy (1989) señalan otras dificultades presentadas en el aprendizaje del álgebra:

1. Expresiones.

   En aritmética es común que las expresiones formen dos partes: la operación (división, multiplicación, suma o resta) entre dos o más valores y el resultado de esa operación, por lo que si se les presentan expresiones como a+3 son incapaces de asignar un significado ya que carece de un signo igual y un miembro a la derecha, tal como 2x+5x=algo.

2. Ecuaciones.

   Generalmente no son relacionadas con algo que pueda ser significativo para los alumnos (por ejemplo: 3+n=8) en vez del uso de incógnitas (por ejemplo: 3+5=8).

Los problemas anteriores evidencian la fuerte influencia aritmética que resulta ser un obstáculo para el aprendizaje del álgebra, por lo que varios investigadores (Booth, 1989; Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Butto y Rojano, 2010) afirman que para el aprendizaje del álgebra es imprescindible que los alumnos empleen un modelo formal de representación matemática, distinto al que se enseña tradicionalmente en la escuela primaria, para que sobre ese nuevo marco de referencia se construyan las nociones básicas del álgebra.

Schliemann, Carraher, y Brizuela (2011) indican que buscar y corregir de manera individual cada uno estos problemas pueden representar un esfuerzo infructuoso, debido a la cantidad de ocasiones en que se pueden presentar por cada alumno. Sugieren que la estrategia pedagógica tenga como base los conceptos de generalización, patrones numéricos, variables y funciones, desde un paradigma coherente a la relación aritmética-álgebra.

1.6 Vinculación del aprendizaje escolar con la práctica en la vida cotidiana desde el modelo constructivista

1.6.1 Cultura como contexto del aprendizaje

El uso de un paradigma común basado en estos conceptos no garantiza que los aprendizajes adquiridos en el aula se transformen en herramientas útiles en el contexto cotidiano. Papert (1996) afirma que es necesario un contexto que vincule a las matemáticas escolares con las matemáticas que sirven a un propósito social. Carraher, Carraher y Schliemann (2007) demostraron que niños de bajos recursos pueden lograr un desempeño positivo en el uso de matemáticas en ámbitos informales que favorecen el uso de operaciones matemáticas aprendidas empíricamente. Por lo que se destaca la necesidad, mencionada anteriormente, de la creación de contextos que fomenten el uso de matemáticas escolares con propósitos sociales, es decir, condiciones que permitan a los alumnos emplear el aprendizaje escolar para la toma de decisiones.

El aprendizaje y la aplicación de las matemáticas tiene un elemento cultural, ya que se basan en sistemas de símbolos que deben ser convencionales en distintos contextos sociales. Este sistema lógico es construido por los niños sobre la base de su experiencia y reflexión directas de su experiencia en contextos sociales. Este elemento influye de manera significativa sobre su desarrollo de competencias matemáticas (Schliemann y Carraher, 2002).

En atención a lo anterior es importante destacar el valor que Vigotsky da a la cultura y el contexto social en el proceso de aprendizaje, ya que la persona se encuentra inmersa desde su nacimiento en este proceso, el cual tiene por objetivo la adquisición de conceptos para la resolución de problemas, es decir, el desarrollo de competencias, las cuales sólo se presentan bajo ciertas condiciones de orientación e interacción social, se deben tener ciertas condiciones iniciales, de desarrollo y conclusión de las actividades pensadas en producir un efecto significativo en los aprendices (Butto y Delgado, 2012).

1.6.1.1 Adquisición de conceptos

Para la adquisición de estos conceptos matemáticos, Vergnaud (1996, en Butto y Delgado, 2012) reconoce la idea de Piaget de una estructura básica donde se integran los nuevos conceptos mediante la adaptación, equilibrio y desequilibrio; además, al igual que Vygostky, destaca la importancia de la interacción social, el lenguaje y la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos.

Para este mismo autor, los conceptos se componen de los siguientes elementos:

$$C = (S, I, R)$$

Donde:

- S: es el conjunto de situaciones a las que el alumno se enfrenta y dan sentido al concepto por sus vivas experiencias.
- I: es el conjunto de invariantes que son los objetos, propiedades y sus relaciones, los cuales se traducen en reglas de aplicación en ciertos dominios.
- R: es el conjunto de representaciones diversas del concepto: lenguaje natural, gráficas, tablas, diseños, sentencias, etcétera, forman el bagaje que el alumno usa para enfrentar las situaciones del concepto.

Por consiguiente, la relación entre la adquisición de conceptos y desarrollo de competencias se puede observar mediante las aportaciones de Vigotsky, quien afirmó que no sólo es necesario establecer el nivel de desarrollo mediante tareas o actividades que el niño puede realizar por sí mismo, sino que es necesario determinar también aquello que puede hacer con ayuda de otros, estos niveles se alcanzan a través de la Zona de Desarrollo Próximo, que se refiere a la distancia que existe entre el nivel real (capacidad de resolver un problema) y el potencial (capacidad de resolver un problema bajo la guía de un compañero más capaz o del profesor) (Butto y Delgado, 2012); en otras palabras, para que los estudiantes puedan desarrollar competencias es necesario conocer la base de conceptual de la cual parte y a partir de ello diseñar metodologías de enseñanza que le permitan adquirir nuevos conocimientos con la ayuda de otros, sin que exista una gran distancia entre lo que el estudiante conoce y lo que se pretende que aprenda.

De esta manera, educar quiere decir crear las condiciones necesarias que permitan que las destrezas, conocimientos y capacidades que se están desarrollando en la zona de desarrollo potencial se conviertan en conocimientos, habilidades y destrezas que uno pueda hacer autónomamente (zona de desarrollo real).

1.6.1.2 Proceso evolutivo de los conceptos

Piaget (en Vigotsky, 2015) señala una diferencia entre los conceptos aprendidos empíricamente por los niños (espontáneos) y los aprendidos mediante la instrucción formal (científicos). Los conceptos espontáneos surgen a partir de la interacción del niño con su medio y se construyen a partir de sus conocimientos previos, por lo que los significantes dados a estos conceptos están en función del dominio que tenga el niño sobre contexto donde se aplica el concepto, esto provoca que sean poco generalizables y se limiten a ser de respuesta a contextos inmediatos, no siendo factibles de desarrollar un proceso evolutivo. Por otro lado, los conceptos científicos son expuestos al niño por un adulto y generalmente contradicen o desequilibran los conceptos espontáneos basados en la lógica infantil, ésto da lugar al proceso de asimilación del concepto científico a través de la comparación de significantes, el cual concluye con un regreso al equilibrio al desechar el concepto espontáneo que no ajuste con la realidad expuesta por un adulto.

Vigotsky en su obra *Pensamiento y lenguaje* publicada en 1934 (editada en 2015) hace una crítica a las ideas de Piaget sobre la adquisición de conceptos. Plantea que tanto los conceptos espontáneos como los científicos tienen un proceso evolutivo para su asimilación. Todo concepto es acuñado en el lenguaje infantil con base en los conceptos que el niño conozca previamente, ya que estos funcionan como mediadores para su comprensión; para el niño, antes de la asimilación de un concepto, escucha palabras que primeramente no tienen significado, éstas palabras son fonemas equivalentes únicamente a la consecución de sonidos, después de escucharlo en distintos contextos se forma una aproximación al significado de la palabra con base en los conceptos que se reconocen en el mismo contexto. Posteriormente, el niño intenta utilizar la palabra basado en el significado que él atribuye a la misma, en ese momento se denomina a la palabra como un concepto espontáneo.

Los conceptos científicos también son sometidos a un proceso evolutivo. Parten de una noción que se presenta en un contexto educativo formal, como lo es la escuela, estos conceptos ya poseen un significante construido previamente (este es ajeno al niño) que permite emplear este concepto de forma general en diversos ámbitos. Dado que el significante es ignorado por el niño, este no logra comprender el concepto que le es enseñado, se limita a utilizarlo en las situaciones concretas (habitualmente en la escuela), por ejemplo, utilizar el concepto de *incógnita* al resolver una ecuación en clase e ignorar el concepto al desconocer un valor cuantitativo en la vida real.

Bajo esta lógica resulta incoherente pretender que los conceptos que son dados a los niños de manera deliberada sean asimilados por los mismos para poder utilizarlos libremente, para ello es necesario un proceso evolutivo del significado de los conceptos que permitan al niño utilizarlos libremente, es decir, que permitan al niño hacer abstracción de similitudes y diferencias de este concepto con respecto a otros, de manera que pueda emplearlo como herramienta para referir a su realidad y a su vez asimilar nuevos conceptos.

La evolución descrita por Vigotsky (2015) comienza en el uso de los conceptos a partir de su similitud con otros conceptos ya asimilados, estas similitudes se presentan antes que la diferenciación, ya que para ésta se requiere un mayor grado de dominio de los conceptos para identificar las peculiaridades de cada uno. En función de la abstracción que se logre hacer de estas similitudes y diferencias, se otorgará un significante más específico a los conceptos, lo que a su vez permite su uso generalizado de manera apropiada.

1.6.2 Estructuración conceptual

Como ya se mencionó anteriormente, a todo concepto se le asigna un significante en función de los conceptos ya asimilados; por lo tanto, existen conceptos subordinados y supraordenados, dicho de otro modo, los conceptos pueden ser agrupados en función de su grado de complejidad basados en la necesidad de otros conceptos que lo expliquen. De esta manera los conceptos supraordenados son la base para explicar conceptos más complejos. Por ejemplo: los perros son mamíferos (esta oración establece la similitud entre ambos conceptos) pero no todos los mamíferos son perros (la segunda oración indica la diferenciación entre ambos), por lo tanto el concepto *mamífero* es generalizable para referir a otros animales que cumplan esta característica; en este ejemplo al establecer la diferenciación de los conceptos, mamífero se convierte en un concepto supraordenado asimilado a partir de conceptos infraordenados como perro u otros animales que cumplan este criterio.

Si se establece al álgebra como la generalización de la aritmética, quiere decir que los conceptos algebraicos son asimilados con base en los conceptos aritméticos, por lo cual tienen un mayor grado de complejidad, esto provoca que las nociones algebraicas no sean susceptibles de ser aprendidas de manera espontánea por los alumnos.

Para que los conceptos algebraicos sean asimilados de manera exitosa (permitiendo el desarrollo de competencias), es necesario que existan factores que promuevan la evolución de los conceptos espontáneos para que a su vez estos puedan mediar los científicos, resultando en la asimilación de conceptos generalizables (aplicables dentro y fuera del contexto escolar) que sean utilizados como herramientas para la resolución de problemas.

1.7 El papel del docente

Estos factores promotores de la evolución de conceptos deben hacerse presentes en la *Zona de desarrollo próximo* del niño para garantizar el aprendizaje, por tanto, la tarea del profesor es asegurar la disposición de estos factores. Dentro de este enfoque educativo, el alumno es el responsable de construir el aprendizaje mediante la guía del profesor y la mediación de sus compañeros, regulando sus propios mecanismos de aprendizaje, mientras que el docente es visto como el promotor y facilitador del aprendizaje y su autonomía a partir de la confección y organización de experiencias didácticas con sentido para el alumno (Covarrubias, 2010).

Esta función del docente es considerada en la “Guía para el maestro” publicada por la SEP en el 2011, en donde se menciona que el profesorado debe contar con una serie de competencias para llevar a cabo el proceso de enseñanza, las cuales comprenden la generación de ambientes de aprendizaje en donde se desarrolle una relación de confianza y trabajo entre alumno-profesor y alumno-alumno, favoreciendo la inclusión y poniendo énfasis en las competencias que los alumnos deben desarrollar; sin embargo esta información no precisa con claridad las caracteristicas con las que debe contar un profesor de educación básica y como se relacionan estas con el papel que debe cumplir el docente.

1.8 Enseñanza de matemáticas en la “Guía para el maestro”

La SEP (2011), en específico para la enseñanza matemática, contempla que el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas, es decir, en función del desarrollo de competencias aplicables a diversos contextos. En seguimiento de esta idea, se articula la educación de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos con la intención de partir de entornos cotidianos. Se puede observar que la enseñanza de matemáticas está fundamentada en la perspectiva constructivista expuesta anteriormente, donde se parte de los conceptos empíricos o cotidianos.

Sin embargo esto no se cumple de manera real, ya que no se contemplan actividades que permiten al alumno desarrollar los conceptos propios del álgebra; al analizar el currículo de educación Primaria se observa que dentro del eje de sentido numérico y pensamiento algebraico (el cual alude al aprendizaje de aritmética y álgebra), no se hacen presentes temas que se encuentren relacionados con la enseñanza de álgebra, sino sólo aquellos que se vinculan con resolución de problemas, por medio de suma, resta, multiplicación o división con hasta tres dígitos, además de comparación de fracciones y sus operaciones, conversión de fracciones a decimales, uso de divisores y múltiplos, desarrollo de algoritmos, cálculos mentales, y seriación numérica, las cuales son temáticas habitualmente vinculadas únicamente a la aritmética.

Asimismo, se observan subtemas en los que se hace uso de expresiones que a primera vista parecen ser propios de temas algebraicos, sin embargo, en estos sólo se emplea el uso de notación algebraica para la explicación al docente del tema, no como tópico para ser enseñado. Existen ejemplos del uso de las literales como:

1) Quinto grado: Análisis de las relaciones entre los términos de división, la relación *r=D-(d X c)* a través de la obtención del residuo en una división y, uso de la expresión *n/m* para representar el cociente de una medida entera.
2) Sexto grado: Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural usando la expresión *a/b de n*.

En estos ejemplos se reduce el uso de literales a una forma de explicar un tema y diferentes partes de alguna operación o fracción.

1.8.1 Currículo oculto

Además en esta "Guía para maestros" no se reconoce el papel que pueden tener los propios alumnos en la autorregulación de su aprendizaje, se plantea una práctica docente organizada acorde con la información que se pretende transmitir al alumno, y consta de una serie de pasos a seguir con la cual se obtendrá el éxito conforme los estándares de evaluación planteados en el programa de estudio, esto se hace con base en la suposición de una clase que se lleva con total control por parte del docente y que ésta concluye sin ningún tipo de percance o alteración. A continuación, se presenta un ejemplo de una clase de matemáticas perteneciente al primer grado de primaria:

FASE 1

El maestro invita a los niños a jugar a resolver problemas en parejas. Para motivarlos, les dice que van a ganar los equipos que lleguen a la solución correcta, por ello va a haber más de un equipo ganador. Las reglas del juego las explica cada vez que pasan de una etapa de trabajo a otra. En esta fase les explica los siguientes puntos: 1) Planteará el problema oralmente. Mientras tanto, deberán escuchar con mucha atención porque lo van a memorizar; b) A la voz de ¡alto! deben iniciar la reflexión y discusión con su pareja de equipo sobre la solución del problema. Les dice que trabajarán durante cinco minutos en esta etapa sin usar calculadora ni lápiz y tampoco su cuaderno y; c) A la siguiente vez que lo escuchen decir ¡alto! van a escribir la respuesta en la hoja que les entregó y la levantarán.

El problema:

Van descubrir qué cantidad representan la segunda y la tercera tira que aparecen en la hoja. Tomen como modelo la cantidad que representa la primera

Figura 1. Ejemplo de problema matematico presente en el *Programas de estudio 2011 Guía para el maestro* (SEP, 2011, p. 410)

Van a contestar las preguntas siguientes:

¿Qué cantidad representa la tercera tira?

¿Qué cantidad representa la tira más larga?

Actividad del maestro y los alumnos durante la fase 1:

• Los alumnos escuchan con atención y observan las tiras, a la vez que memorizan la situación.

• Al inicio, el maestro motiva la reflexión y la discusión entre los alumnos sobre cómo resolverla. Trabajan en esta etapa un tiempo de cinco minutos.

• A los cinco minutos los alumnos escuchan al maestro decir ¡alto! y es el momento en que escriben la respuesta en la hoja y la levantan.

A pesar del aparente control y flexibilidad que se muestra en la guía del maestro, la realidad en el aula puede no cumplir con lo que se espera, de manera que se visualiza la existencia de una combinación de elementos que interactúan entre sí y que dificultan el proceso enseñanza/aprendizaje, por ejemplo, en la interacción escolar, se llevan a cabo algunas acciones relacionadas con las actitudes y valores que el profesor y los alumnos desarrollan y desempeñan en la relación de unos con otros, influyendo en el ambiente escolar, a este fenómeno Jackson (1992 en Díaz, 2005) lo nombró currículo oculto, al ser interacciones ocurridas en el aula que promueve una serie de resultados no intencionados, que no son previstos por la institución o el docente.

Posteriormente Díaz (2005), estableció una nueva categoría denominada currículo en proceso, el cual resulta de la combinación del currículo oculto y el planteado por una institución o intencionado. Esto quiere denotar que el docente no siempre va a seguir al pie de la letra lo que dicta el currículo, sino que utilizará técnicas variadas que le han servido a lo largo de su carrera. De acuerdo con

Prieto (2008), existen tres factores principales que servirán de base para las prácticas de enseñanza del profesor:

- Condiciones personales: Hace referencia a todos aquellos rasgos que van a configurar el estilo propio del maestro, es decir, carácter, temperamento, edad, estudios realizados, experiencia profesional, etc.
- Actitud: el profesor debe comprender que en el proceso de enseñanza/aprendizaje es un elemento más, ya que se trata de un asunto comunitario en el que deben participar todos los integrantes del grupo. De esta manera, se potenciará la comunicación entre los alumnos y el propio profesor, consiguiendo una mayor interacción y, con toda seguridad, una mayor calidad en el proceso formativo del grupo en su totalidad.
- Formación: el profesor no sólo debe tener dominio de ciertos conocimientos, por ejemplo, matemáticas o física, sino que debe estar familiarizado con técnicas pedagógicas y conocimiento psicológico, así como una formación en técnicas de dinamización, que puedan llegar a propiciar una comunicación más directa y duradera, que permita a su vez la intercomunicación entre profesor y alumno y que resulte en una formación más efectiva.

El conjunto de estos factores puede afectar el proceso de enseñanza aprendizaje, provocando que el modelo empleado por las instituciones no pueda alcanzar sus objetivos. En ejemplo de esto se observa al considerar la formación del docente, donde emerge uno de estos factores.

Díaz (2006) señala que debido a los constantes cambios en materia de política educativa existe un fenómeno de desinformación o confusión por parte de los docentes sobre estrategias pedagógicas, los constantes cambios no permiten el establecimiento eficaz de una estrategia o la capacitación adecuada de los profesores, por lo que ellos suelen atender a objetivos expresados en términos numéricos (calificación) que no necesariamente responden al desarrollo de competencias, sino a la repetición de la información proporcionada al alumno en clase, planteamiento contrario a lo establecido por el constructivismo para el desarrollo de competencias.

1.9 Necesidad de estrategias pedagógicas

Estas estrategias deficientes empleadas por el docente subrayan la necesidad del diseño de nuevas metodologías que fomenten el establecimiento de lo aprendido en clase con las situaciones presentes en la vida real; ante la falta de estas, suele dejarse a los estudiantes a su propia suerte y a la inventiva. Bajo estas condiciones es poco probable que descubran muchos conceptos importantes de las matemáticas elementales. Es por ello que Carraher y Schliemann (2002) recomiendan que los estudiantes y los profesores busquen múltiples caminos de razonamiento en la resolución de problemas.

Por lo tanto, es importante analizar el desarrollo de estrategias de enseñanza para la educación Primaria que resulten afínes y compatibles con el álgebra. De tal modo que desde la educación Primaria los alumnos se inicien en el manejo de formas de representación algebraica vinculadas a problemas reales. Las estrategias a ser analizadas se clasificaron con base en la forma en la que abordan la relación entre aritmética y álgebra, quedando de la siguiente forma: a) pre-álgebra, b) álgebra temprana y, c) aprendizaje basado en esquemas.

CAPÍTULO 2. PRE-ÁLGEBRA

La transición de la aritmética al álgebra ha sido estudiada desde diferentes perspectivas con el objetivo de facilitar el desarrollo de competencias matemáticas, dando origen a distintos modelos educativos, de los cuales han surgido propuestas curriculares; algunos de éstos consideran la madurez cognitiva un requisito esencial para el aprendizaje de temas que requieren complejidad en el pensamiento matemático como el álgebra. Una de ellas denominada como Pre-Álgebra, que busca facilitar la adquisición de conceptos algebraicos a partir de tareas mediadoras que retomen los conceptos aritméticos para su evolución a concepciones algebraicas más elaboradas.

2.1 Concepto de Pre-álgebra

El enfoque de Pre-Álgebra se apoya en dos puntos esenciales señalados por Socas (2011):

1. La concepción de que el álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero en el que esta noción es una concepción más amplia que la aritmética generalizada.
2. La validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivo, en donde el álgebra se encuentra en el estadio de desarrollo formal y en consecuencia se considera que los niños que no se encuentren en este periodo, no tienen las capacidades cognitivas para su aprendizaje.

Linchevski (1995) indica que en Pre-álgebra se exploran experiencias y situaciones matemáticas que permiten al alumno comprender las nociones algebraicas a través de la aritmética, facilitando la comprensión del significado, significación y lógica de la representación simbólica para la manipulación de conceptos. Este autor señala que este tipo de actividades deben ubicarse de manera previa al comienzo del estudio formal del álgebra, sin embargo, no limita su uso a este tiempo, las tareas pre-algebraicas también pueden ser utilizadas de manera intermitente para facilitar la adquisición de nuevos conceptos durante la instrucción algebraica o incluso en la enseñanza de la aritmética.

2.2 Adquisición de conceptos algebraicos

Al analizar el álgebra como un código (forma de representación conceptual) se destacan discrepancias en relación a la aritmética. Kieran y Filloy (1989) señalaron diversas incongruencias en el uso de signos y sus significantes al pasar de la aritmética al álgebra (ver *1.5 Discontinuidad en el programa de enseñanza de las matemáticas*), este tipo de incongruencias conceptuales dificulta la comprensión de conceptos.

Además, Malara y Navarra (2003) señalan que otra dificultad para la adquisición de conceptos algebraicos es el poco contacto que el alumno tiene con ellos, aun cuando se relacionan con principios aritméticos, la correspondencia entre estos mediante la generalización de significantes habitualmente no es presentada a los alumnos, sino que solo se hace evidente más tarde al estudiar conceptos algebraicos. Estas dificultades remarcan la necesidad de un modelo enfocado en la adquisición de conceptos algebraicos con base en el conocimiento aritmético (véase, por ejemplo, Kieran 1992, Linchevski 1995).

2.2.1 Los pre-conceptos

Linchevski (1995) sitúa como base de este modelo los preconceptos para la adquisición de concepciones más elaboradas. La noción de preconceptos deriva de la teoría del aprendizaje de Ausubel, Novak y Hanesian (1983), estos autores proponen que el aprendizaje depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, es decir, el aprendizaje se basa en la relación de los conocimientos previos del alumno con los nuevos conocimientos. Es necesario puntualizar que la organización jerárquica y relacional de los conceptos juega un papel muy importante en la estructura cognitiva, ya que no sólo se trata de saber la cantidad de conocimiento que se tiene sobre un tema, sino cuáles son los conceptos y proposiciones relacionados en la adquisición de un nuevo concepto, así como de su grado de dominio.

Los conceptos asimilados en esta estructura se consideran como aprendizajes significativos sólo cuando estos sirven para la adquisición de nuevos conceptos, por lo que la meta de la educación es brindar al alumno aprendizajes potencialmente significativos; en otras palabras, la instrucción escolar debe ofrecer al alumno conceptos que le permitan adquirir nuevo conocimiento o la resolución de problemas, ya que solo al cumplir esta función serán significativos.

Para que un concepto sea potencialmente significativo debe tener un significado lógico (relación no arbitraria y de manera importante con la estructura pre-existente), cuando se convierte en contenido cognoscitivo nuevo, diferenciado e idiosincrático, se puede decir que ha adquirido un significado psicológico. De esta forma, el emerger del significado psicológico no solo depende de la representación que el alumno tenga del material lógicamente significativo, sino también de que posea los antecedentes ideativos necesarios en su estructura cognitiva.

Los antecedentes ideativos refieren a los pre-conceptos mencionados con anterioridad, los cuales se pueden definir como la representación de algún aspecto de la realidad, y que constituye el punto de partida en el proceso de aprendizaje para la asimilación de conceptos; en otros términos, son las concepciones del alumno sobre un tema específico que servirán de base para la creación de un significado lógico.

Por ende, la definición aportada por Linchevski (1995) da al modelo de Pre-álgebra el objetivo de brindar al alumno conceptos que partan de la aritmética (adquiridos previamente) que sean potencialmente significativos para la asimilación de conceptos algebraicos (más complejos), esto mediante tareas que vinculen de manera lógica ambas ramas de la matemática, lo cual es sustentado por Gallardo y Rojano (1987, en Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay, y Wilss, 1998), quienes mencionan que las dificultades que los estudiantes tenían en la comprensión de los principios algebraicos provienen de una base inadecuada de conocimientos aritméticos, tales dificultades radican en la inversión de operaciones, el cambio de operaciones verticales (en aritmética) a horizontales (en álgebra) además de la noción de equivalencia (p. ej. 5+8=2+11).

2.3 Brecha cognitiva para la transición conceptual

Autores como Filloy y Rojano (1989), así como Herscovicks y Linchevski (1994) consideran que las dificultades en la transición aritmética-álgebra se deben a una brecha cognitiva, respectivamente, dirigidos primordialmente a la incapacidad de los alumnos a resolver problemas con incognitas, lo cual impide la construcción de un significado de lo que están haciendo y realicen operaciones sin sentido en símbolos que no entienden, como la *"x"* utilizada para referir a las incognitas.

Davis y Vergnaud (1985, 1988 en Socas, 2011) argumentaron la necesidad de iniciar la enseñanza del álgebra desde la educación Primaria, con el objetivo de preparar a los alumnos para abordar esta transición en la secundaria. Con base en este argumento se desarrollaron diversos proyectos que facilitarán la transición, por ejemplo, el proyecto *ALGERBRIDGE* (iniciado por el Educational Testing Service y el College Entrance Examination Board en Michigan Estados Unidos, 1990) dio paso a que se considerara la enseñanza de aspectos fundamentales del álgebra en el séptimo grado (equivalente al primer año de secundaria en México).

2.4 Didáctica Pre-algebraica: Metodología de enseñanza.

Uno de los aspectos fundamentales para facilitar la transición es la adquisición de conceptos clave vinculados a la notación algebraica y los procedimientos básicos, para que el alumno pueda desarrollar las habilidades que le serán útiles en los cursos de álgebra formal. A continuación, se muestran algunos ejemplos de la didáctica pre algebraica para la adquisición de conceptos.

2.4.1 Conceptos álgebraicos incompatibles

Goldman (2015) señaló que una de las principales problemáticas para el paso de la aritmética al álgebra está asociada al uso de conceptos denominados algebraicos (aun cuando estos aparecen desde la enseñanza de aritmética) ya que no son términos con los que se familiarice al alumno desde la enseñanza de la aritmética, sino que se omiten en el afán de simplificar el contenido. A continuación, se presenta una lista de conceptos acuñada por el mismo autor, en la que se recopilan los principales conceptos que ejemplifican lo mencionado anteriormente y la concepción otorgada por Goldman (2015):

Tabla 1. Lista de conceptos algebraicos definidos por Goldman (2015).

Concepto	Definición
Constante	Un número fijo que puede expresarse como un entero, fracción o número real ya sea positivo o negativo (5+2x, 5 es la constante)
Coeficiente	Una constante que se multiplica por una variable (5x, es 5 el coeficiente)
Variable	Letra usada para representar un valor desconocido en una ecuación o expresión.
Término	Puede ser un conjunto numérico o variable.
Expresión	Combinación de dos o más términos con un operador (suma, resta, multiplicación, división), puede ser aritmética (sólo números) o variable (combinación números y variables).
Ecuación	Contiene un signo igual (=) y puede tener uno o más términos o expresiones a cada lado del signo igual.

2.4.2 Nomenclatura de operadores matemáticos en el contexto cotidiano

A su vez, Larson, Boswell, Kanold y Stiff (2005) destacan otro problema verbal. Estos autores refieren a la dificultad de adaptar los problemas presentes en el mundo real a un modelo matemático a partir del uso de términos indicativos de operaciones aritméticas, indican que la posibilidad de establecer verbalmente un modelo matemático que refleje un problema cotidiano es un paso intermedio importante antes de proceder a la elaboración de modelos propiamente matemáticos, ya que sin este vínculo carece de sentido el uso de las representaciones matemáticas pues no indican nada en la vida real. Un modelo verbal eficiente para vincular las expresiones matemáticas con las problemáticas presentes en el mundo real debe describir un problema usando palabras como etiquetas y usando símbolos matemáticos para relacionar las palabras. La tabla 2 muestra palabras y frases que indican operaciones matemáticas las cuales señalán estos autores deben ser incorporadas al lexico de los alumnos para la elaboración de modelos matematicos.

Tabla 2. Vinculación de modelos verbales a matematicos mediante palabras y frases (Larson, Boswell, Kanold y Stiff, 2005).

Palabras y frases comunes que indican operaciones			
Adición	Sustracción	Multiplicación	División
más	menos	veces	dividido en
la suma de	la diferencia de	el producto	dividido entre
incrementado por	decrementado por	multiplicado por	el cociente de
total	menos que	por	
más que	extraído de		
añadido a			

2.5 Prueba empírica de incompatibilidad conceptual

Para demostrar el problema de falta de elementos conceptuales para el aprendizaje de álgebra, Filloy y Rojano (1989) analizaron la capacidad de niños entre 12 y 13 años de edad en la ciudad de México para resolver problemas que implican sintaxis de la forma “ax+b=cx” siendo “a”, “b” y “c” valores numéricos, mientras que “x” representa un valor desconocido (incógnita). Estos autores sostienen es imposible poder resolver este tipo de problemas para los alumnos sin antes no adquieren distintos elementos de la sintaxis algebraica.

Comenzaron su análisis pidiendo que resolvieran este tipo de problemas mediante la repetición de ensayos para intentar llegar a la solución; posteriormente se propuso una metodología que permitiera encontrar el valor de “x”, para esto comenzaron relacionando los componentes de la ecuación con los datos proporcionados en el problema, posteriormente se compararon dos modelos de resolución:

- Modelo Viète: modelo propuesto por François Viète, el cual consiste en la transposición de los componentes de un término a otro respetando la sintaxis algebraica, por ejemplo, en la ecuación “ax+b=cx” el componente “ax” es cambiado al segundo término con signo contrario para mantener la equidad, quedando la siguiente expresión “b=cx-ax”.
- Modelo Eulerian: este modelo consiste en realizar la misma operación en cada uno de los términos, a fin de simplificar la expresión, por ejemplo, en la ecuación “18x+6=12x”, se divide entre “18” cada uno de los términos resultando en la siguiente expresión “3x+1=4x”.

Al comparar los distintos modelos de solución, encontraron que la principal limitante en los alumnos no consiste en la selección de uno u otro modelo, sino en la incapacidad de operar con valores desconocidos (incógnitas), ya que para ambos casos se requiere la capacidad de poder operar con cada uno de los componentes atendiendo a la equidad entre ambos, en lugar de operar unicamente con uno y tomar el otro como el resultado final de un proceso (como habitualmente se presenta en la aritmética.

Para desarrollar la capacidad de los alumnos para operar con incógnitas se emplearon los siguientes modelos:

- Modelo geométrico: consiste en representar gráficamente los componentes de la ecuación. Para facilitar la representación se puede atender a propiedades como los valores numéricos para mantener una proporcionalidad (a mayores cantidades, figuras de dimensiones más extensas).
- Modelo de balanza: se compara la ecuación con una balanza en la cual se debe mantener el equilibrio, por lo tanto, toda operación realizada en un término debe ser compensado en el otro para mantener dicho equilibrio.

Con base en estos modelos, los alumnos fueron capaces de emplear los dos modelos diferentes de solución expuestos anteriormente para la resolución de problemas cada vez más complejos. Los autores concluyeron que para el aprendizaje del álgebra no se puede proceder de manera espontánea, sino que deben incluir pre tareas como los modelos geométricos y de balanza, ya que las mayores dificultades para los alumnos no se encuentran en el seguimiento de un modelo algebraico, sino en la incapacidad para operar con algunos conceptos.

2.6 Proceso evolutivo de los conceptos.

En el estudio de la adquisición de nuevos conceptos, como los algebraicos, es necesario retomar lo mencionado con anterioridad sobre el proceso evolutivo en la adquisición de conceptos (ver apartado 1.6.2.2 Proceso evolutivo de los conceptos), en otras palabras, los conceptos no toman un significado definitivo y estático, sino que se transforman con relación a la estructura cognitiva pre existente y nuevos conceptos adquiridos. Desde la perspectiva descrita por Ausubel, Novak y Hanesian (1983), son los preconceptos la base para la adquisición de nuevos conceptos, así como para la re-significación de conceptos ya pertenecientes a la estructura.

A su vez, Vigotsky (2015) analizó la adquisición de conceptos al aprender un lenguaje distinto a la lengua materna. Encontró que la adquisición comienza por la comparación con un significante similar al término en el otro idioma, es decir, se equiparan palabras con los mismos significados (por ejemplo: apple=manzana); sin embargo, el nuevo concepto (apple) puede adquirir diferentes connotaciones en función del contexto, por lo que el *traducir* de manera literal de un lenguaje a otro puede generar cambios en el significante.

Al considerar estos elementos en el aprendizaje del álgebra como un lenguaje (sistema de representación), se destacan los errores producidos por una equiparación directa de símbolos entre aritmética y la notación algebraica (ver *1.5 Discontinuidad en el programa de enseñanza de las matemáticas*), por lo que es necesario la re-significación de una serie de símbolos y términos a partir de pre conceptos generados mediante tareas pre algebraicas, con la intención de permitir al alumno el uso de conceptos.

2.7 Aplicación de principios Pre-algebraicos

Estos principios teóricos han sido implementados en diferentes sistemas de enseñanza, como el propuesto por Sutherland (1987), con el desarrollo del sistema Logo[1], Sutherland llevó a cabo un estudio longitudinal (3 años) con alumnos de 11 años de edad, en donde se les presentaron situaciones de problema con base en el lenguaje Logo, los cuales requerían el uso de variables no sólo de este contexto sino en contextos no presentes en el entorno digital, encontraron que todos los alumnos fueron capaces de conectar su concepción de *variable* obtenida dentro del contexto de Logo con un contexto externo. Las pruebas escritas sobre álgebra que se aplicaron a los alumnos indican que, si los alumnos han tenido experiencia con *variables* en Logo, en una variedad de contextos, entonces son capaces de usar estas concepciones derivadas de Logo en el álgebra tradicional.

[1] El Logo sistema es un lenguaje de programación diseñado con base en concepciones constructivistas en el que se busca ofrecer un contexto para el aprendizaje de matemáticas, se podría asumir como una zona de desarrollo próximo digital. (Papert, 1980)

CAPÍTULO 3. ÁLGEBRA TEMPRANA

En este capítulo se analizará el modelo de Álgebra Temprana (*Early algebra*), que contrasta con el modelo de Pre-Álgebra expuesto anteriormente. Este último modelo parte del supuesto de que los alumnos de menor edad (estudiantes de nivel primaria) poseen desarrollo cognitivo limitado, mientras que en el modelo de Álgebra Temprana se considera que la mayoría de las dificultades en el aprendizaje del álgebra provienen de las bases aritméticas, por lo que centran su atención en la enseñanza desde el inicio de la instrucción matemática.

3.1 Modelo álgebra temprana

Carraher y Schliemann (2007 en Brizuela, Martinez y Cayton-Hodges, 2013) definen el Álgebra Temprana como la enseñanza de razonamiento algebraico y adquisición de conceptos algebraicos en niños de entre 6 y 12 años. Es importante destacar que este modelo puede llegar a ser confundido con Pre-álgebra con base en la definición aportada por Linchevski (1995), quien define el modelo pre-algebraico como una forma de enseñanza donde se brindan al alumno experiencias y situaciones que le permitan comprender las nociones algebraicas a través de la aritmética. Aun cuando ambos modelos buscan la continuidad y un vínculo más eficaz entre lo concreto y lo abstracto, Schliemann, Carraher, y Brizuela (2011) hacen una distinción entre estos modelos a partir de la perspectiva que mantienen sobre la transición de la aritmética al álgebra, dado que en el Álgebra Temprana no se considera una transición, sino que se retoma el álgebra como la generalización de la aritmética.

Tradicionalmente se contempla el aprendizaje de la aritmética y el álgebra como una secuencia, en la cual existe una intersección de ideas, técnicas y representaciones entre ambas ramas, es en esta intersección donde se busca generar un *puente* que facilite la transición (ver figura 2).

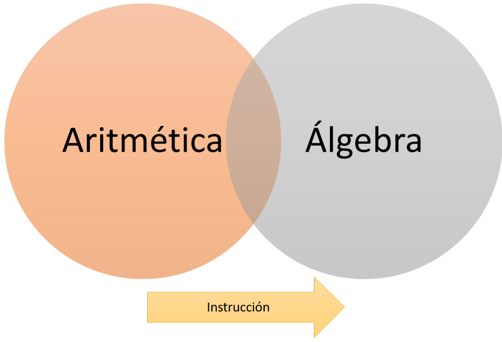


Figura 2. El enfoque predominante de cómo la aritmética se relaciona con el álgebra. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011:17

En el modelo propuesto por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) la aritmética parte del álgebra y no se relacionan como instancias independientes, es decir, la aritmética forma parte del álgebra en las instancias en las que se utilizan los números para representar medidas particulares (por ejemplo 1 metro) o como ejemplo de relaciones entre variables (por ejemplo, la relación a+b=c expresada como 2+3=5); esta condición hace innecesaria una transición (ver figura 3).

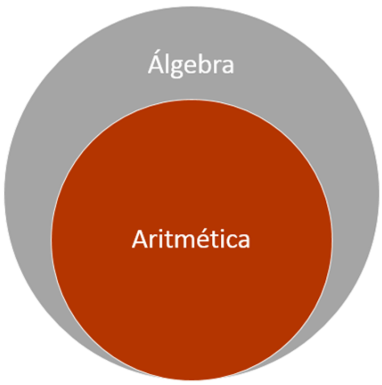


Figura 3. La aritmética con un carácter inherentemente algebraico. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011:19

3.2 Multi-representatividad

Drijvers y Hendrikus (2003) argumentan en favor de esta perspectiva. Estos autores destacan las diferencias entre las formas de representación aun cuando estas sean equivalentes (por ejemplo las expresiones x(y)= xy es equivalente a 3(7)=21; aunque dos expresiones pueden referir a la misma relación (multiplicación en el ejemplo anterior) los estudiantes operan con mayor facilidad con la expresión que refiere a valores concretos y no a elementos generales como las incógnitas. Por lo que la aritmética serviría no solo como una forma de representar relaciones numéricas con valores concretos, sino que a su vez esta forma de representación permite al alumno reconocer características de la expresión. Esto demuestra cómo el alumno puede aprender conceptos algebraicos desde una expresión aritmética.

En consecuencia, el modelo de Álgebra temprana se centra en la enseñanza de la aritmética en atención a propiedades algebraicas, esto con el objetivo de que las matemáticas se transformen en un modo de razonamiento generalizable acerca de relaciones cuantitativas.

Se propone incorporar en la educación Primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones funcionales y propiedades matemáticas (Socas, 2011) con base en estas aproximaciones para desarrollar competencias algebraicas. Blanton y Kaput (2005) propusieron que en los salones de clase de educación básica se prioricen estos temas por medio de actividades de exploración, modelización de situaciones, predicciones, discusión, argumentación y comprobación de procedimientos, etc., lo cual genera un ambiente de trabajo óptimo para el desarrollo de habilidades aritméticas y algebraicas.

3.3 Proceso evolutivo conceptual

Este ambiente de trabajo óptimo refiere a la creación de una zona de desarrollo próximo (ver *1.6.1.1 Adquisición de conceptos*, página 10) y a lo que Vergnaud (1996, en Butto y Delgado, 2012) refiere como el conjunto de situaciones a las que el alumno se enfrenta para dar sentido al concepto a través de su experiencia, es decir, las actividades deben propiciar la interacción del alumno con sus pares para la adquisición de conceptos algebraicos bajo la guía del profesor.

De esta forma, los conceptos evolucionan a partir de preconceptos y generalizaciones propiciadas por los mismos alumnos; al focalizar el aprendizaje en esta relación entre pares se desestima la consideración de que un aparato cognitivo poco desarrollado en los alumnos sea la causa principal de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, en su lugar se considera como causa principal la enseñanza de aritmética y álgebra como elementos independientes.

Radford, Bardini y Sabena (2007) analizaron los diversos recursos simbólicos utilizados por los estudiantes en su paso por modelos de representación particular (aritméticos) a modelos de relaciones funcionales generales (álgebra). En su análisis afirman que la capacidad de los alumnos para la resolución de problemas mediante modelos matemáticos depende del cómo han adquirido conceptos propios del área y no de una estructura cognitiva.

A su vez, distintos autores (Vergnaud, 1996, en Butto y Delgado, 2012; Vigotsky, 2015; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011) afirman que el conjunto de representaciones diversas del concepto: lenguaje natural, gráficas, tablas, diseños, sentencias, etc. son fundamentales para la adquisición de conceptos, por lo que no solo se deben presentar tareas que relacionen conceptos algebraicos con representaciones aritméticas, sino que a su vez se deben usar diversas representaciones de estos elementos para facilitar la adquisición de conceptos.

Brizuela, Martinez y Cayton-Hodges (2013) afirman que la enseñanza de la aritmética como generalización del álgebra (considerando las operaciones como una formas de representación de una función), facilita el diseño de tareas que permitan al alumno desarrollar competencias matemáticas; sin embargo estos mismos autores enfatizan la importancia de emplear diversas formas de representación para resolver una misma problemática, así como de vincular estas tareas al contexto (situaciones o actividades) de los estudiantes para obtener resultados satisfactorios.

Con base en lo anterior se puede concluir que la introducción del álgebra en el currículo de matemáticas en educación Primaria puede promover el desarrollo de competencias matemáticas, esto con la finalidad de minimizar las dificultades en niveles posteriores (Molina, 2009; Socas, 2011, Carraher y Brizuela, 2012, Radford, Bardini y Sabena, 2007) así como la incomprensión, reprobación y desencanto con las matemáticas cuando se inicia el álgebra. Para cumplir con este objetivo el Álgebra Temprana se guía por 3 preceptos: a) las operaciones aritméticas pueden ser abordadas como funciones, b) la generalización es la base del razonamiento algebraico y, c) la utilización de letras como representación de cantidades incógnitas deben ser promovidas en los estudiantes (Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011).

3.4 Pruebas empíricas del modelo Álgebra temprana

Diversas investigaciones (Davis, 1985; Vergnaud, 1998; Mason 1996, citados en Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011) apoyan la idea de que las bases algebraicas deben ser enseñadas en los primeros años de educación Primaria, tal es el caso de la investigación realizada por Bodanskii (1991, en Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006) en donde enseñó a grupos de alumnos de 1º a 4º año de primaria a representar algebraicamente problemas verbales para su posterior resolución, obteniendo mejores resultados que los mostrados por los grupos control de 6to y 7mo grado que no habían trabajado de esta manera. Lima y Da Rocha (1997, en Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006) encontraron que los alumnos de 1º a 6º grado pueden desarrollar representaciones escritas de problemas algebraicos y con ayuda de un entrevistador, resolver problemas de ecuaciones lineales usando diferentes estrategias.

A raíz de esas investigaciones el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas Norteamericano (NCTM por sus siglas en inglés) publicó en su documento “Principles and Standards for School Mathematics” (2000) que la introducción temprana del álgebra y el razonamiento algebraico debía ser incentivado a partir del jardín de niños y que la notación algebraica debía ser parte del currículo de la escuela primaria a partir del tercer grado (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011).

La introducción de nociones algebraicas en la educación Primaria con base en el modelo de Álgebra Temprana tiene como objetivo el desarrollar las competencias matemáticas necesarias para que el alumno sea capaz de:

1) Representar las acciones y los cálculos necesarios para resolver un problema
2) Expresar relaciones entre cantidades incógnitas
3) Resolución de problemas.

Una de las principales competencias dentro de este modelo es la capacidad del alumno para representar múltiples relaciones numéricas que se presentan en su contexto cotidiano; en estas relaciones se pueden presentar valores numéricos concretos, así como valores desconocidos.

Con el objetivo de analizar la forma en que los estudiantes representan relaciones numéricas que impliquen valores desconocidos, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) realizaron un estudio con alumnos de tercer grado en Estados Unidos, donde evaluaron si los estudiantes de esta edad son capaces de representar y operar con incógnitas.

En el estudio se presentó a los niños una serie de problemas con incógnitas a ambos lados de las ecuaciones, uno de los problemas más representativos es el siguiente:

> "*Miguel y Roberto tienen cada uno un acuario con peces. Miguel tiene 8 peces azules y algunos peces de color rojo. Roberto sólo tiene peces rojos, tiene 3 veces más peces rojos que Miguel. En total, Miguel tiene el mismo número que Roberto. ¿Cuántos peces rojos tiene Miguel?" (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2001, p. 89).*

Los investigadores examinaron qué tipo de notación emplean los estudiantes, si necesitan ayuda para resolver los problemas y cómo realizan los cálculos. Encontraron que el 87% de los estudiantes no fue capaz de resolver este tipo de problemas por sí mismos. El análisis de las estrategias empleadas por los alumnos para resolver el problema destacó el desarrollo de notación para las cantidades incógnitas y la resolución de problemas a partir de esas cantidades, estos problemas se consideran una consecuencia de la experiencia aritmética en la que se dan todos los datos de manera explícita y la solución depende de las mismas.

Con instrucción basada en el modelo de Álgebra Temprana el 73% logró resolver el ejercicio de manera satisfactoria, esto significa no solo que los alumnos de tercer grado escolar son capaces de resolver problemas verbales que involucran incógnitas, sino que la enseñanza con base en este modelo genera un cambio significativo en el desempeño de los estudiantes. Este estudio demostró que los niños de tercer grado son capaces de desarrollar notaciones y representaciones para problemas algebraicos verbales en donde se involucran cantidades incógnitas, y que pueden hacer uso de varias estrategias para su resolución, lo cual resulta contradictorio con la teoría de que un bajo desarrollo cognitivo propio de edades tempranas sea la causa de los problemas en el aprendizaje de álgebra.

3.5 Didáctica del Álgebra Temprana: Metodología de enseñanza.

La enseñanza basada en el Álgebra Temprana no trata de presentarle a niños de educación Primaria las actividades algebraicas diseñadas para la educación secundaria; en este modelo se cubren diversos temas de matemáticas en forma innovadora, donde se fomenta el aprendizaje mediante la expresión de generalidades con base en el lenguaje algebraico; por ejemplo, en la suma se hace referencia a la posibilidad de expresar adiciones a cantidades desconocidas como en el caso de n+3; donde “n” puede referir a cualquier cantidad, a diferencia de la enseñanza común donde a la mayoría de los estudiantes se les enseña a agregar 3 a otro número (por ejemplo 3+5) utilizando únicamente valores explícitos. Al usar expresiones para describir relaciones entre números y cantidades, los estudiantes de primaria, empiezan a desarrollar el uso de notaciones algebraicas como una herramienta que les permitirá hacer generalizaciones entre relaciones cuantitativas (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011).

Este modelo no tiene como objetivo aumentar la cantidad de matemáticas que los estudiantes deben aprender, sino que el propósito es enseñar tópicos aritméticos bajo distintas formas de representación que permitan al alumno familiarizarse con los conceptos y herramientas algebraicas desde una edad temprana y en contextos significativos. A continuación, se muestran algunos ejemplos didácticos desarrollados con base en este modelo para la adquisición de conceptos algebraicos.

3.5.1 Funciones aditivas y problemas verbales

Como se mencionó anteriormente, en el Álgebra Temprana se pretende que la suma sea vista como una función, es decir, la relación de un conjunto de números o cantidades, y no como una operación binaria (la suma de dos cantidades explícitas). En la enseñanza de la adición se emplean reglas de relaciones como las presentadas en las series numéricas (por ejemplo: 1, 2, 3...; 2, 4, 6…; 21, 28, 35…) en la que los alumnos deben encontrar la relación que permite conocer el siguiente número, de esta forma la adición se da desde un número de origen variable (número antecesor en la serie) por lo que se emplea la adición como una función variable del tipo “n+a” y no una suma de dos cantidades dadas. Un ejemplo de lo descrito anteriormente es la relación de la serie numérica “7, 13, 19, 25…” donde se tiene como primer valor “7” y se sigue una regla de “n+6” donde “n” adquiere distintos valores para predecir el número subsecuente.

Además de mostrar el uso de la adición como función en series numéricas es necesario que los estudiantes aprendan a distinguir estas reglas en contextos determinados, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) presentaron a niños de escuela primaria un problema que consistía en representar la estatura de 3 niños distintos con base en un valor desconocido.

Andrés es 4 pulgadas más alto que María.
María es 6 pulgadas más baja que Lila.
Dibuja las alturas de Andrés, de María y de Lila.
Muestra a qué se refieren los números 4 y 6.

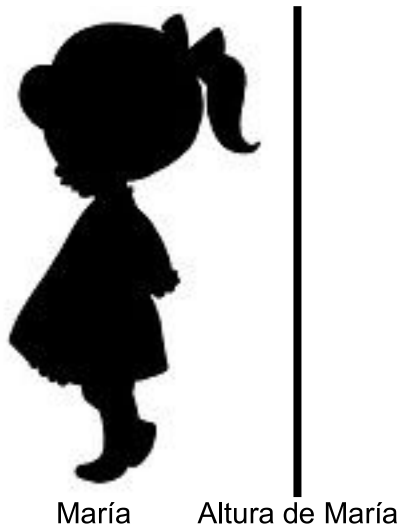


Figura 4. “El problema de las alturas” como fue presentado a los alumnos. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011, p. 115.

En este problema se indica a los alumnos que hay una diferencia en las alturas de algunos niños (tal y como se muestra en la información mostrada en el lado izquierdo de la figura 3); se desconoce el tamaño de los niños, sin embargo, lo que sí se conoce es la diferencia entre las alturas, con lo que se puede generar un conjunto de posibles formas de presentación de la relación entre las alturas.

Como en el primer ejemplo de enseñanza de la adición como función, aquí los niños deben emplear la función a partir de valores no concretos (variables o incógnitas) y encontrar la relación entre dos valores; de esta forma se introduce la notación algebraica en operaciones habitualmente resueltas con bases aritméticas y valores concretos. Además, es importante señalar que este tipo de establecimiento de representación de funciones puede ser empleado no solo en la adición, sino también en la sustracción, división y multiplicación siempre que se plantee el contexto de manera adecuada.

3.5.2 Equivalencia entre pesos en una balanza de dos platillos y Problemas verbales, representación y solución

Las balanzas han sido usadas por varios investigadores como recursos que ayudan a dar significado a ecuaciones en situaciones didácticas o para realizar la comprensión de equivalencias y la manipulación de incógnitas; la balanza debe encontrarse en perfecto equilibrio de manera que ambos lados cuentan con el mismo peso, si se aumenta el peso de un lado, la balanza pierde el equilibrio, así que es necesario hacer lo mismo del otro lado para continuar con el equilibrio; lo anterior ejemplifica lo que ocurre con las ecuaciones; si del lado derecho de la ecuación se realiza, por ejemplo, una suma, en el lado izquierdo debe realizarse lo mismo, con el fin de mantener la igualdad, de esta manera, se pretende que los niños sean capaces de aprender conceptos como equivalencia y desigualdad.

En los siguientes 3 ejemplos, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) analizan a qué edad los niños comprenden equivalencias a pesar de las transformaciones que pudieran ocurrir y cómo representan algebraicamente problemas verbales. En el primer ejemplo se estableció la situación inicial de equivalencia y si ésta permanecería si cantidades similares o diferentes se sumaban o restaban de las dos cantidades comparadas, los ítems que se les presentaron son en un principio valores conocidos, luego pasaron a ser valores parcialmente conocidos y al final valores desconocidos. Se hace uso de una balanza, pesas rotuladas y cajitas de peso desconocido diferenciadas con colores. El examinador explica al niño que las cajas del mismo color pesan lo mismo aun cuando se desconozca ese peso, posteriormente se le pedía al niño igualar ambos lados de la balanza de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 3. (Fragmento) Items incluidos en cada contexto. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011, p. 57.

	Situación inicial		Cambios Sugeridos		Cardinalidad de los resultados
Item	Lado A	Lado B	Lado A	Lado B	
1	10+2	5+5+2	Restar 2	Restar 2	Conocida
2	7	7	Sumar 6	Sumar 3	Conocida
3	6+4	3+3+4	Restar 6	Restar 3	Conocida
4	8	4+4	Sumar 2	Sumar 2	Conocida
5	x	x	Sumar 6	Sumar 3	Parcialmente Conocida
6	x+10	x+5+5	Restar x	Restar x	Conocida
7	8	4+4	Sumar x	Sumar x	Parcialmente Conocida
8	x+6	x+3+3	Restar 6	Restar 3	Parcialmente Conocida
9	z	z	sumar x	sumar y	Desconocida
10	x	y+y	sumar z	sumar z	Desconocida

Los resultados de este ejercicio demuestran que los niños de 7 años son capaces de comprender la noción de equivalencia dando respuestas correctas en casi todos los ítems, además, en el caso de los ítems con valores desconocidos los niños brindaron justificaciones lógicas sobre los pesos de las distintas cajas (p. ej. respuesta dada por un niño: “tendremos lo mismo ya que las dos cajas amarillas tenían lo mismo que la caja anaranjada y entonces, si agregas una caja roja y agregas otra caja roja tendremos la misma cantidad”).

Como se mencionó anteriormente, se busca que los niños comprendan la equivalencia de ecuaciones usando datos en bruto. El método de Álgebra Temprana considera que la sola presentación de los datos no es suficiente para que los niños comprendan este concepto, si no que se deben ver acompañados de elementos significantes en la vida de los niños, de manera que se le da importancia al contexto. En los siguientes ejemplos se analizan las notaciones escritas para la resolución de problemas de 19 niños y se trata de ver si estos son capaces de identificar si hay equivalencias o desigualdades cuando se transforman a partir de operaciones iguales o diferentes en problemas que impliquen un contexto; en un principio se muestran problemas verbales con cantidades específicas y posteriormente problemas verbales con cantidades no especificadas (ver tabla 2 y tabla 3). Para cada problema se les permitió a los niños usar cualquier herramienta y representación que considerasen necesaria para llegar a la solución del problema, además debían justificar sus respuestas; se les proporcionó papel, lápices y marcadores de colores.

Tabla 4. (Fragmento) Items incluidos en cada contexto. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011, p.77

Problemas verbales presentados	Ecuaciones implícitas
Problemas con cantidades especificadas	
A Brian y a Tomás les encanta comer chocolate. Un día, Brian llevó 10 chocolates a la escuela y luego compró 2 más en la tienda de la escuela. Ese día, Tomás llevó 5 chocolates a la escuela, luego compró 5 más en la	10+2 = 5+5+2 10+2(-2) = 5+5+2(-2) (Verdadero)

tienda, y luego obtuvo dos más que le dio otro amigo. Durante el recreo, Tomás se comió 2 de sus chocolates y Brian se comió 2 de los suyos. Ahora, ¿Piensas que después del recreo, Tomás tiene la misma cantidad de chocolates que Brian?¿O piensas que uno de ellos tiene más chocolates que el otro?	
Bárbara y Juana tuvieron su fiesta de cumpleaños el mismo día. Bárbara recibió 7 regalos de sus amigos, y Juana también recibió 7 regalos de sus amigos. Cuando cada fiesta había terminado, las niñas pasaron un tiempo especial con sus respectivas familias y recibieron aún más regalos. Bárbara recibió 6 regalos más de su familia. Juana recibió 3 regalos más de su familia. Al final del día. ¿Piensas que Juana recibió la misma cantidad de regalos que Bárbara?¿O piensas que una recibió más regalos que la otra?	7=7 7(+6) = 7(+3) (Falso)

Tabla 5. (Fragmento) Items incluidos en cada contexto. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011:78-79

Problemas verbales presentados	Ecuaciones implícitas
Problemas con cantidades no específicas	
Raúl y Andrés estaban recogiendo caracoles en la playa por la mañana. Raúl puso los caracoles que encontró en una caja grande. Andrés encontró el mismo número de caracoles que Raúl, pero los guardó equitativamente en dos cajas pequeñas. Por la tarde, volvieron a la playa y Raúl volvió a encontrar la misma cantidad de caracoles	x = y + x x + z (- z) = y + y + z (- z) verdadero

que Andrés. En esta ocasión, cada niño puso los caracoles que había encontrado en una bolsa. Al día siguiente fueron a contar cuántos caracoles tenía cada uno, pero no pudieron encontrar las bolsas, ¿piensas que Raúl tiene el mismo número de caracoles que Andrés? ¿O piensas que uno de los dos tiene más caracoles que el otro?	
Rosa y Claudia coleccionan estampillas. Antes de Navidad, Rosa tenía el mismo número de estampillas que Claudia. Rosa guardaba todas sus estampillas en un álbum. Claudia sus estampillas en dos álbumes. Después de Navidad, ambas juntaron todas las estampillas de los sobres donde venían las tarjetas de Navidad que habían recibido sus familias, y se dieron cuenta de que cada una había recibido el mismo número de estampillas nuevas. Ambas guardaron sus nuevas estampillas en sus respectivos álbumes. ¿Piensas que ahora Rosa tiene el mismo número de estampillas que Claudia? ¿O piensas que una de ellas tiene más estampillas que la otra?	x = y1+ y2 x (+ z) = y1 + y2(+ z) verdadero

Los resultados muestran que el 94.4% de los problemas fueron resueltos satisfactoriamente por los niños, lograron reconocer que operaciones equivalentes en cantidades equivalentes producen resultados equivalentes y que operaciones diferentes en cantidades diferentes producen resultados diferentes. Los niños desarrollaron dos estrategias de resolución: 1) el cálculo de valores, los niños suman los valores dados en el problema; esta estrategia fue usada por el 57.9% de los niños para resolver los problemas con información numérica y, 2) lógica en las transformaciones, los niños localizan las operaciones que suceden en los problemas y comparan el resultado de los problemas, llegando a la conclusión de “si las operaciones son equivalentes o diferentes el resultado debe ser equivalente o diferente”, esta estrategia fue usada por el 79% de los niños para resolver problemas sin información numérica.

Además, se examinaron las notaciones de los niños para determinar si se usa como un sistema de representación de la realidad y si se usa como vía de resolución de problemas. Los resultados refieren que en que cada tipo de problema hay un tipo distinto de notación. Como se dijo con anterioridad, los problemas con información numérica se representaron dividiendo los datos y operaciones según los personajes involucrados, de esta manera, a los niños les resultaba más fácil realizar las operaciones para llegar a un resultado, mientras que en los problemas sin información numérica fueron representados con letras o dibujos que aluden a los objetos que se transforman de acuerdo con las operaciones (por ejemplo cajas de caracoles o bolsas con estampillas, iniciales etc). Además, los alumnos usaron sus representaciones como una manera de aclarar los hechos de cada problema, sirviéndoles como guía de resolución.

Esto indica la capacidad de los alumnos, de poder usar notaciones variadas, mismas que se abstraen sistemáticamente hasta llegar a una formalización, viéndose reflejado en el caso de una niña, que usó la letra “b” para diferenciar la palabra batch (tanda) de la palabra basket (canasta), asemejando al uso de la x para referir una cantidad incógnita. A partir de estos ejemplos de estudios realizados por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011), concluyen que los alumnos de tercer grado pueden desarrollar notaciones consistentes para representar elementos y relaciones en problemas con información numérica y sin información numérica, lo que sugiere que pueden aprender las reglas sintácticas del álgebra, contradiciendo nuevamente la idea de que la enseñanza de ciertos temas y la presentación de errores matemáticos son originados por un inadecuado desarrollo cognitivo, como se señalaba en años anteriores.

3.7 Resultados de aprendizaje con base en el modelo de Álgebra Temprana

Diferentes investigaciones (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2008; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2007) han demostrado que niños de entre 8 y

11 años de edad instruidos con base en los ejemplos didácticos expuestos anteriormente son capaces de:

- Desarrollar operaciones aritméticas como funciones generales en lugar de solo como relaciones particulares.
- Uso de números negativos.
- Adquisición del concepto *variable* y su uso en el diseño de modelos matemáticos.
- Relacionar valores numéricos bajo reglas generales (emplear ecuaciones del tipo “a+x=c” donde x puede adquirir distintos valores)
- Resolver relaciones numéricas bajo distintos sistemas de representación.

Al contrastar los estudiantes enseñados mediante el modelo de Álgebra Temprana con los enseñados de manera tradicional, se ha encontrado que los primeros obtienen un mejor desempeño al utilizar valores desconocidos, asimismo esta tendencia se mantiene al emplear letras como representación de valores no explícitos y al diseñar un modelo matemático con valores abstractos (ver figura 5).

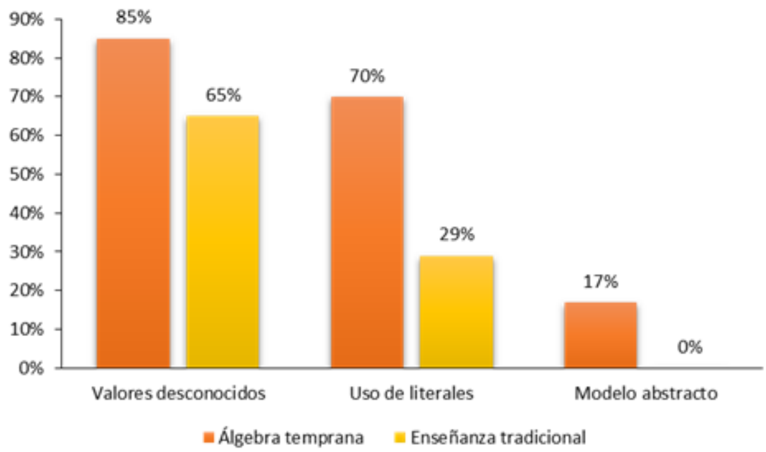


Figura 5. Comparación de porcentaje de problemas resueltos satisfactoriamente en Álgebra Temprana y enseñanza tradicional.

No obstante, estos resultados no son generalizables a todas las formas de representación y aun cuando los resultados mejoran a medida que el estudiante continúa su educación, es necesario explorar el desempeño de los estudiantes instruidos bajo este modelo en los siguientes grados educativos (Brizuela, Martinez y Cayton-Hodges 2013).

CAPÍTULO 4. MODELO CONCEPTUAL BASADO EN ESQUEMAS

En los capítulos anteriores se describieron los modelos de Pre-Álgebra y Álgebra Temprana, ambos modelos educativos comparten el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra. Para lograr este objetivo cada modelo presenta una perspectiva diferente. El modelo de Pre-Álgebra propone una serie de actividades basadas en principios aritméticos que se vinculen con los conocimientos algebraicos, de manera que estas actividades permitan a los estudiantes la formación de pre conceptos, es decir, aproximaciones a conceptos algebraicos que se desarrollarán más adelante en la enseñanza formal de álgebra, por ende, este modelo se situaría entre ambas ramas de conocimiento.

Por otro lado, el modelo de Álgebra Temprana propone la enseñanza conceptual del álgebra como una generalización de la aritmética, haciendo de estas ramas de la matemática un continuo lógico, y no dos campos de conocimiento diferente. Para lograrlo se plantea una forma de enseñanza basada en el concepto de *zona del desarrollo próximo*, situando al profesor como un guía del aprendizaje y a los alumnos como los principales responsables de la adquisición de conceptos algebraicos, llevándose a cabo desde edades tempranas. Desde esta perspectiva adquiere particular importancia, conocer los conceptos infantiles acerca de modos de representación de relaciones cuantitativas, a fin de que la enseñanza se coloque un paso adelante de estas nociones.

4.1 Instrucción basada en esquemas

Sin embargo, estos modelos no representan las únicas formas en las que se busca vincular con el aprendizaje del álgebra. En este capítulo se expondrá una propuesta diferente a lo descrito con anterioridad, se abordará la propuesta de la Instrucción Basada en Esquemas (SBI por sus siglas en inglés) la cual parte de la idea de que problemas semejantes, pueden resolverse con estrategias semejantes; por lo tanto este modelo pretende diseñar guías o "*prótesis*" que orienten a los alumnos para la resolución de problemas con base en sus características; estos esquemas son definidos por Fuchs, Zumetra, Finelli, Powell, Seethaler, Hamlett y Fuchs (2010) como una descripción generalizada de los problemas que requieren un método de solución similar.

Desde esta perspectiva, los esquemas propuestos son diseñados en función de particularidades presentadas por la problemática que se pretende resolver, de forma que estos disminuyan la posibilidad de confusión por parte de los alumnos; como las presentes al emplear metodologías de carácter general como el método heurístico propuesto por Pólya. En el planteamiento de Pólya se dan directrices generales a los alumnos sobre el procedimiento que deben seguir para la resolución de problemas, como: a) comprensión del problema, b) concepción de un plan, c) ejecución del plan y la d) examinación de la solución obtenida (Corbalán y Deulofeu, 1996).

Al emplear este tipo de modelos los estudiantes pueden presentar dificultad en la concepción de un plan, ya que en realidad no se les brinda un proceso de resolución de problemas, sino una guía genérica para la toma de decisiones. Por ello, en el SBI se propone la existencia de modelos más específicos que atiendan a las características específicas presentes en el contexto del problema.

4.2 Identificación de esquemas a partir de la problemática.

En el ánimo de desarrollar modelos más específicos, se ha recurrido al desarrollo de una amplia gama de estructuras. Es imperativo que el alumno sea capaz de identificar la que mejor se adecue a la problemática que pretende resolver. De esta manera se ofrece una herramienta que permite cubrir de mejor modo el primer paso considerado por Pólya, estableciendo como comprensión el reconocimiento de los elementos relevantes para la resolución del problema y la forma en cómo interactúan entre ellos; es decir, qué tipo de operación matemática representa de mejor manera el problema (suma, resta, multiplicación, división o una combinación de ellas) y cómo se debe plantear esta operación (atendiendo a qué función cumple cada número con respecto al tipo de operación).

De esta manera, para la selección o desarrollo de una representación de los problemas, se deben tomar en cuenta dos aspectos importantes: 1) el conocimiento previo (experiencias en reconocer esquemas a través del entrenamiento/enseñanza) y 2) la aplicación de métodos aritméticos, tal como lo señala Gick (1986 citado en Fang, Herron, Zhou, Hartsell y Mohn, 2015, p. 38)

"...para desarrollar una representación del problema, los alumnos primero necesitan encontrar la estructura de un problema y conectar este nuevo problema con el conocimiento previo; a continuación, se aplica el uso de estrategias existentes para encontrar la solución a este nuevo problema. Este proceso también se denomina activación de esquema (conectar un nuevo problema con el conocimiento existente anterior y construir una nueva red más grande) a través del cual los estudiantes deben ser capaces de encontrar el esquema para resolver el nuevo problema".

Esto refiere al proceso de generalización y abstracción, descritos por Vigotsky en la adquisición de conceptos (Ver capitulo 1). Donde se identifican características similares a problemas resueltos con anterioridad para establecer un probable plan de acción, y se diferencia la forma en como este debe ser resuelto en función de sus características. La identificación y diferenciación de estas particularidades puede ser analizada mediante la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1982, en Moreira, 2002), esta teoría dice que el conocimiento se puede organizar en categorías conceptuales, las cuales son conjuntos informales y heterogéneos de información relevante a distintas situaciones. Con base en esto, la selección de un esquema se da mediante el reconocimiento de la información relevante y su relación con conceptos adquiridos con anterioridad que puedan presentar al mismo campo.

Las bases de este modelo son recuperadas por autores como Mayer (2004), quien propone que la enseñanza a alumnos, específicamente aquellos con problemas de aprendizaje debe apoyarse en estructuras que le permitan realizar representaciones conceptuales para facilitar el aprendizaje. Esto concuerda con lo propuesto en el SBI (Xin, Liu, Jones, Tzur, y Si, 2014), que, como su nombre lo indica, proponen el uso de una serie de esquemas para el desarrollo de las competencias; estos esquemas, con la guía del profesor, deben permitir a los niños modelar problemas de su vida cotidiana con base en conceptos matemáticos para poder encontrar una solución.

4.3 Story Grammar

¿Cómo se desarrolla un modelo que cumpla con estas características? para dar respuesta a esta pregunta, el SBI retoma elementos de la comprensión de textos, en particular de la estrategia conocida como *Story Grammar*; para la comprensión de textos. Mediante esta estrategia, se reconocen elementos claves dentro del texto, los cuales permiten identificar la estructura del mismo y los elementos más importantes para su comprensión; al conocer esta información es posible observar cómo interactúan los distintos elementos de la lectura para darle un sentido a ésta. Esto permite al lector generar un modelo que le dé una visión global del texto, para ordenar y relacionar los elementos importantes para la comprensión del texto.

De manera análoga, en cualquier problema matemático hay una relación entre elementos cuantitativos y no cuantitativos; el alumno debe ser capaz de abstraer la información pertinente de la que no lo es; es decir, se deben diferenciar aquellos componentes cuantitativos (cantidades conocidas y desconocidas), así como el tipo de relación implicada. A partir de esta información se llevarán a cabo operaciones matemáticas que los relacionen a fin de obtener un resultado o despejar una incógnita; a su vez el educando debe saber distinguir aquellos componentes cualitativos que no aportan datos útiles y que pueden confundir al alumno (como el orden o modo en que se presenta la información; la extensión, que puede ser variable; la familiaridad con la situación, que puede ser diversa, etcétera). De modo que, sin una guía o una estructura que oriente el cómo abordar el problema, el alumno puede verse abrumado para saber manejar toda esta información con potencial distractor.

4.4 Modelo Conceptual basado en Solución de Problemas.

Dentro del SBI, destacaremos el enfoque “Modelo Conceptual basado en Solución de Problemas” (Conceptual Model-Based Problem Solving -COMPS-) desarrollado por Xin (2012). Este modelo se apoya, primordialmente, en el reconocimiento de estructuras comunes en ciertos tipos de problemas verbales, para la elección y aplicación de operaciones para su resolución.

¿En qué consiste lo peculiar de esta modalidad de enseñanza? En la utilización de una serie herramientas o recursos de representación dentro del continuo concreto-abstracto, que se pueden ir administrando desde la parte más específica y familiar a la más abstracta, y todo ello en compatibilidad con un pensamiento algebraico. Los roles del docente y el alumno adquieren una función diferente a la establecida en los modelos anteriores. En este enfoque es el profesor quien toma el papel principal en la construcción de los conceptos, ya que es el encargado de seleccionar los modelos conceptuales que serán empleados por los alumnos.

4.4.1 Modelamiento de situaciones reales

Antes de continuar con el análisis de este modelo, es importante puntualizar que éste se basa en la representación de eventos en la vida cotidiana mediante modelos matemáticos para la toma de decisiones. Blum y Leiss (2005, en Xin 2012) desarrollaron un marco de referencia en el cual describieron los pasos a seguir en el proceso de toma de decisiones con base en modelos matemáticos (ver figura 1): en primer lugar se debe (1) leer y comprender la tarea mediante la identificación de los factores relevantes, con base en la comprensión de la situación; (2) se estructura la tarea y se desarrolla un modelo situacional real; (3) posteriormente se conecta y/o representa el modelo real con uno matemático; (4) después se procede a resolver y obtener los resultados matemáticos; (5) seguidamente se interpretan los resultados matemáticos con respecto al contexto del problema real; y (6) finalmente se validan los resultados.

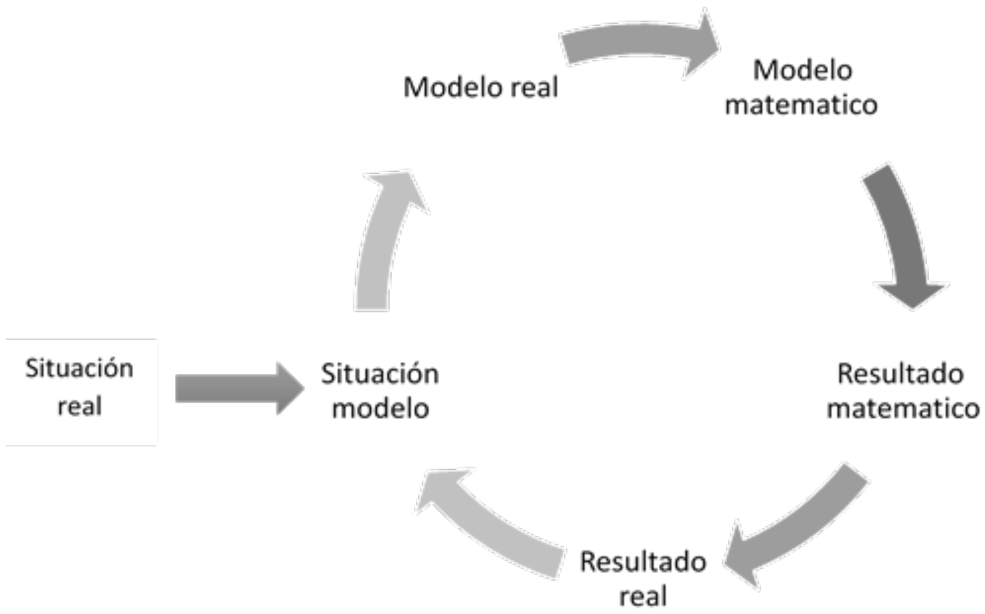


Figura 6. Modelo de Blum y Leiss (2005, en Xin 2012) de la toma de decisiones con base en modelos matemáticos.

4.5 Desarrollo de competencias

El que los alumnos sean capaces de tomar decisiones siguiendo este proceso significa que han desarrollado las competencias matemáticas consideradas como básicas por la OCDE y el INEE (ver capítulo 1).

Uno de los aspectos esenciales para el desarrollo de estas competencias es la capacidad de los alumnos para operar con valores desconocidos, sin embargo, el 57% de los alumnos mexicanos evaluados mediante la prueba PISA (OCDE, 2016) es incapaz de resolver problemas que impliquen valores desconocidos; esto indica que los alumnos presentan dificultades para el aprendizaje del álgebra, como la incapacidad de los alumnos para operar con elementos abstractos. Xin, Jintendra y Deatline-Buchman (2005) enfatizan que, además de estos problemas, los alumnos con problemas en matemáticas tienen complicaciones con procesos de solución que impliquen demasiados pasos.

Aun cuando el desarrollo de estas competencias es un objetivo en común con los modelos expuestos en los capítulos anteriores, la importancia del modelo conceptual basado en solución de problemas es la atención a los alumnos con dificultades para el aprendizaje, concordando con la afirmación del National

Council of Teachers of Mathematics (2000, en National Mathematics Advisory Panel, 2008) acerca de generar en los estudiantes una comprensión conceptual que busca que los estudiantes utilicen de una forma flexible el conocimiento matemático y no una memorización de hechos o procedimientos que no sabrán en qué momento aplicarlos, además de crear conexiones entre distintas áreas de las matemáticas como en la aritmética y el álgebra, con lo cual Xin (2008) considera que todos los estudiantes, especialmente aquellos con dificultades en el aprendizaje, deben ser guiados a maneras de pensamiento algebraico, por lo cual diseñó una estrategia instruccional basada en esquemas que acentúa la conceptualización pre-algebraica.

En consideración a la enseñanza de estos alumnos con problemas de aprendizaje, el National Mathematics Advisory Panel (2008 en Xin, Lin, Jones, Tzur y Si, 2016) considera necesaria la inclusión de actividades diseñadas específicamente para esta población; ya que los alumnos con problemas de aprendizaje tienden a no participar activamente en las construcción de su conocimiento por iniciativa propia, por lo tanto el panel sugiere una instrucción guiada de cerca por el profesor con el fin de facilitar la participación de los alumnos y en consecuencia fomentar el aprendizaje.

4.6 Identificación de estructuras

La estrategia de Xin (2012), intenta trabajar en la identificación de la estructura común subyacente a diversos problemas de suma y resta por un lado, y de multiplicación o división, por otro. Basados en estas estructuras, los alumnos aprenden a identificar la información relevante para resolver problemas, desarrollando competencias para la toma de decisiones apoyándose en modelos matemáticos; ya que con este modo de trabajo se hace contacto con la lógica del álgebra, si ésta última se define como el estudio de las relaciones cuantitativas del modo más general posible, se puede apreciar que la identificación de la estructura de los problemas aditivos y multiplicativos como lo hace Xin, es una forma de identificar relaciones cuantitativas del modo más general posible.

Lesh, Doerr, Carmona y Hjalmarson (2003, en Xin, 2012), sostienen que cuando estos modelos o sistemas son dados a los estudiantes, la actividad central es la comprensión conceptual del sistema; en otras palabras, es de vital importancia que los alumnos no solo aprendan a utilizar estos modelos de manera mecánica, sino que sean capaces de identificar cómo interactúan los elementos para que los utilicen fuera del contexto escolar.

De acuerdo con esta idea, en el enfoque de solución de problemas con base en modelos conceptuales, se proponen estructuras flexibles que sean adaptables a problemas cotidianos. Como ya se ha mencionado, están diseñados en función del tipo de relación cuantitativa (suma/resta o multiplicación/división), permitiendo plantear esquemas generalizables entre estos tipos de relación en consideración del axioma de que problemas similares implican soluciones similares.

4.6.1 Conocimiento conceptual y procedimental

Xin (2008) asevera que al emplear estos esquemas se pueden modelar patrones (orden en que se presenta la información en un problema verbal), así como la relación funcional (qué operación matemática relaciona los elementos). De esta forma se facilita el aprendizaje conceptual (qué significado se atribuye a los elementos) y procedimental (metodología para la solución de problemas). Esta autora da especial énfasis a la relación entre ambos tipos de conocimiento, ya que asegura que ambos se deben relacionar para el aprendizaje. Esto se ejemplifica mediante un esquema en donde relaciona ambos tipos de conocimiento en la solución de problemas (ver figura 7).

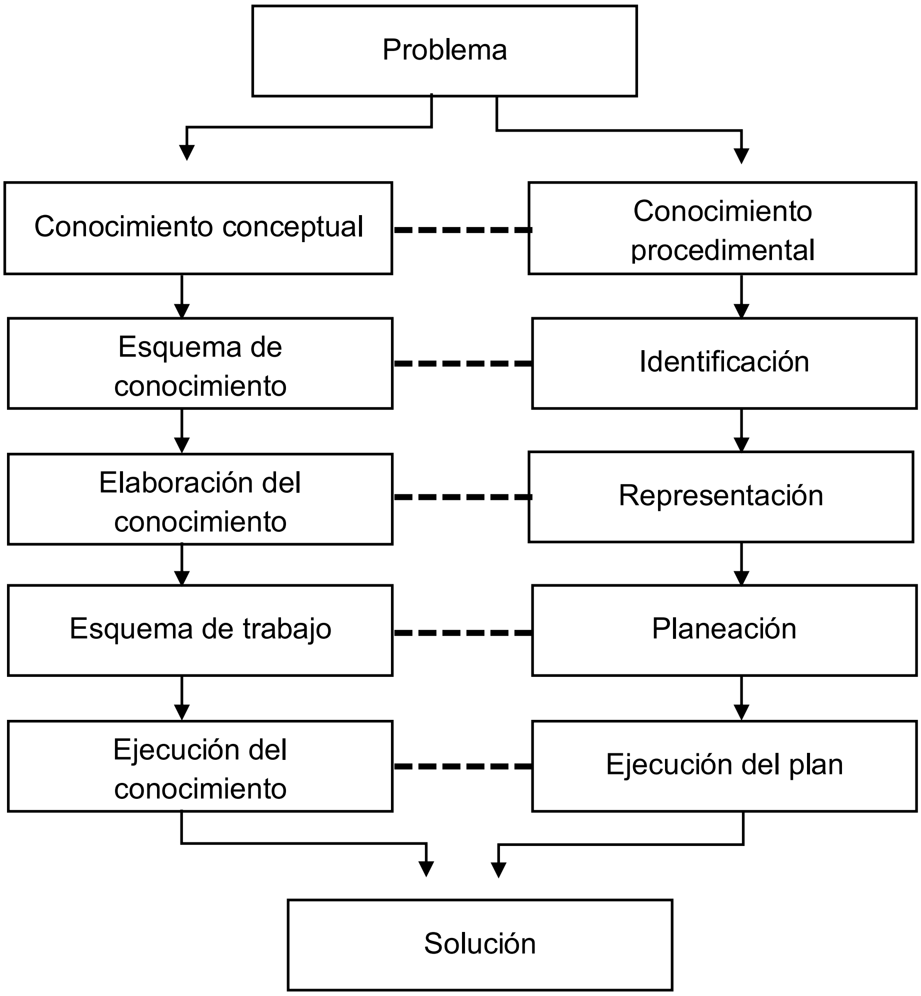


Figura 7. Modelo de resolución de problemas basado en esquemas. Xin 2008, p.529

El modelo comprende el proceso de resolución de problemas en cuatro etapas:

1. La primera etapa relaciona el uso de esquemas conceptuales con la identificación de las características particulares del problema para la selección de un modelo que se ajuste a la situación.
2. La segunda etapa consiste en plantear el esquema seleccionado, de forma que represente el problema planteado y la relación entre los elementos relevantes para la solución.
3. Posteriormente, con base en la relación mostrada en el esquema, se elige la operación matemática más apropiada para la relación de variables (elementos a considerar).

4. Por último, se realiza la operación seleccionada y se plantea una solución al problema de acuerdo con el resultado obtenido.

Como se puede observar en el esquema anterior, el conocimiento conceptual (construcción de relaciones entre elementos de información) y el conocimiento procedimental (ejecución de un plan de acción) se encuentran estrechamente ligados. Adicionalmente, es importante señalar que para la adquisición de conceptos y el uso de esquemas fuera del contexto escolar, se requiere que los alumnos tengan una serie de experiencias resolviendo problemas en contextos diferentes (como los presentes en su vida cotidiana) con base en los modelos conceptuales; Wagner (2006, en Xin 2008) afirma que para la transferencia del aprendizaje escolar a la vida cotidiana mediante el uso de esquemas para la resolución de problemas, es fundamental hacer énfasis en la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental en distintos ejemplos. Una vez que se logra esta transferencia, los alumnos aprenden a utilizar los esquemas de forma generalizada, aun cuando el contexto de los problemas cambie. Con esto, los estudiantes adquieren las competencias necesarias para comprender la conexión entre problemas nuevos y familiares, para llegar con facilidad a la resolución del problema (Xin, Wiles y Liu, 2008).

4.7 Didáctica del Conceptual Model-Based Problem Solving (COMPS) Metodología de enseñanza

Como se ha mencionado con anterioridad, el COMPS de Xin acentúa el problema de la adquisición de esquemas de manera que se enseña a reconocer y expresar patrones para facilitar el pensamiento algebraico (Xin, 2008), y tiene como objetivo facilitar la expresión algebraica de las relaciones matemáticas. Less, Doerr, Carmona y Hjalmarson (2003, en Xin, 2012) afirman que una de las primeras tareas que deben realizar los niños dentro de este modelo es la discriminación de los elementos relevantes, como pueden ser lo datos específicos que se muestran en cada problema y los descriptores asociados a la relación entre elementos (p. ej. menos que, más que, tantas veces más, etc), a su vez, Xin (2012) también da importancia a la diferenciación de la información irrelevante (la historia que se desarrolla para dar lo datos que se usarán para la resolución), ya que los alumnos con problemas en el aprendizaje presentan dificultades no solo para reconocer información útil, sino que también para ignorar la información irrelevante, buscan elaborar esquemas que pueden resultar demasiado complejos o confusos por la inclusión de muchos elementos.

4.7.1 Esquemas propuestos por Xin

Para evitar las fallas anteriores, Xin desarrolló el esquema *Parte-Parte-Todo* (PPT), para los problemas de suma/resta, mientras que para los problemas de multiplicación/división, el esquema *Factor-Factor-Producto* (FFP); estos dos esquemas sirven de guía para que el alumno pueda, en primer lugar, reconocer qué clase de problemas son y, en segunda, resolverlos.

En ambos esquemas, los niños deben, identificar aquellas partes que están implicadas (números), por ejemplo: Raquel tenía 48 flores en un jarrón grande. Entonces, 19 de las flores se marchitaron, así que sacó esas. Luego quedan 29 flores en el florero. El alumno puede identificar los elementos con ayuda de preguntas específicas del problema que facilitan una significativa y adecuada representación de la información: ¿Qué pasa en el problema? ¿Cuántas flores había al inicio?, ¿Cuántas flores quitó Raquel?, ¿Cuántas flores quedaron al final?, estas preguntas ayudan a la identificación de los elementos que componen el esquema bajo los que se llevarán a cabo una operación, en este ejemplo se observa que se cuenta con los tres elementos que se requieren en el esquema PPT, de manera que las 19 flores sacadas del florero y las 29 restantes representan las partes, mientras que las 48 flores son el todo, representándose de la siguiente manera: (Parte) 19 (Parte) 29 (Todo) 48, lo mismo ocurre para los problemas de multiplicación/división.

En segundo lugar, ya que los alumnos pueden reconocer las partes de los esquemas (Parte-Parte-Todo y Factor-Factor-Producto) se debe prestar atención a las operaciones que han de realizarse, lo cual se puede inducir a través de ciertas preguntas, por ejemplo: Raúl tiene 15 tarjetas de béisbol, su amigo Gerardo le regaló 13 más por su cumpleaños, de manera que ahora Raúl tiene 28 tarjetas, para conocer la operación a realizar, se debe plantear la pregunta: ¿Raúl tiene más o menos tarjetas? ¿Se deben sumar o restar tarjetas?, dado que se aumentó el número de tarjetas se debe realizar una suma, por lo que el problema se debe representar de la siguiente manera: 15 (Parte) + 13 (Parte) = 28 (Todo).

Posterior a que los alumnos reconocen estas variantes (de elementos y operaciones) en distintos problemas y contextos, se comienza a omitir algún valor (que puede ser cualquiera de las partes o el todo, o cualquiera de los factores o el producto); por ejemplo: Cristina leyó dos libros durante el verano. Un libro era 193 páginas y el otro libro era 267 páginas, ¿Cuántas páginas ha leído todo el verano?; Susana está poniendo su colección de 146 piedras en cajas de huevo. Cada caja puede contener 12 piedras. ¿Cuántos cartones necesita para las 146 piedras?. En el primer ejemplo se observa que sólo se dan dos datos (las partes), y el todo no se sabe, representándose así 193+267=?; mientras que en el segundo ejemplo un factor es el que hace falta, por lo que se representa: 12x?=146. Al igual que los ejemplos anteriores, el alumno puede ayudarse de preguntas para facilitar el reconocimiento de los elementos y operaciones.

Por último, y una vez que los alumnos ya saben distinguir los esquemas y operar con o sin valores desconocidos, la autora propone el uso paulatino de un recurso mnemotécnico denominado DOTS (Detect, Organize, Transform and Solve) a fin de que ayude a los alumnos a recordar el procedimiento general que aprendieron; esta herramienta consta de una lista de 4 elementos: **D**etectar el tipo de problema, **O**rganizar la información usando el diagrama del modelo conceptual, **T**ransformar el diagrama de una ecuación matemática significativa y **R**esolver la cantidad desconocida en la ecuación y comprobar la respuesta.

Xin (2012) afirma que la efectividad de este modelo radica en la comprensión de los conceptos matemáticos (por ejemplo: igualdad, incógnita, ecuación, negativo, positivo) y de la operatividad aritmética, es decir, uno de los puntos claves es que los estudiantes aprendan a identificar las partes que componen los problemas y la manera en que se relacionan (operaciones suma/resta y multiplicación/división). Al centrarse en esas relaciones entre los elementos, no sólo se mejoran las habilidades de los estudiantes en aritmética, sino que además se proporciona el fundamento para el acceso al álgebra (Xin, Zhang, Park, Tom, Whipple y Si, 2011).

Por ende, en el enfoque de Solución de Problemas con base en Modelos Conceptuales se da mayor importancia a la comprensión de conceptos que a la operatividad aritmética (Xin, Liu, Jones, Tzur, y Si, 2014; Jonassen, 2003 en Xin 2012). De esta manera se busca asegurar en primer lugar el desarrollo de habilidades de identificación y discriminación de la información, ya que de lo contrario no importará si los alumnos saben operar o no con los factores aritméticos si desconocen su función o qué elementos utilizan para llegar a una solución.

Xin (2012) hace una clasificación de los tipos de problemas a los que está dirigido su modelo: Problemas adición/sustracción, que a su vez se dividen en 2 categorías: 1) *Parte-Parte-Todo*, que abarca 3 subcategorías: combinación, cambio con ganancia y cambio con pérdida y 2) Adición-Comparación, que abarca 2 subcategorías: compara más y compara menos; y Problemas Multiplicativos, que se dividen en dos categorías: Grupos Iguales y Multiplicación-Comparación. A continuación, se explicara en qué consiste cada categoría y subcategoría.

4.7.2 Problemas adición/sustracción

- Parte-parte-todo (ver figura 3). Este tipo de problemas indica cuando dos cantidades hacen un todo (en adelante Problemas PPT).

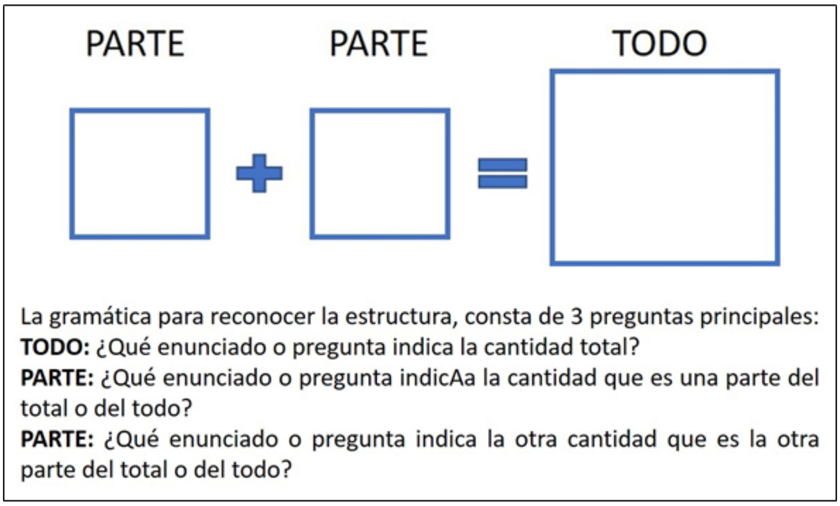


Figura 8. Esquema perteneciente al modelo Parte-Parte-Todo

En términos generales, todos los problemas de adición o sustracción implican las diferentes relaciones entre estos tres elementos (Parte-Parte-Todo);

sin embargo, la autora distingue tres subcategorías que pueden representar diferente grado de dificultad. Estas serían:

1. Combinación

Ejemplo 1: Jamie y Daniella han descubierto que juntas tienen 92 libros. Jamie dice que ella tiene 57 libros. ¿Cuántos libros tiene Daniella?

Ejemplo 2. Víctor tiene 51 rocas en su colección. Su amiga María tiene 3 rocas en su colección. ¿Cuántas rocas tienen entren los dos?

2. Cambio con ganancia

Ejemplo 1. Luis tiene 73 barras de dulces. Luego, otro estudiante, Lucas, le dió más barras de dulce. Ahora Luis tiene 122 barras de dulce. ¿Cuántas barras de dulce le dió Lucas a Luis?

Ejemplo 2: Un jugador de basketball corrió 17 vueltas alrededor de la pista. El entrenador le dijo que corriera 24 vueltas más al final de la práctica. ¿Cuántas vueltas en total dió el jugador de basketball?

3. Cambio con pérdida

Ejemplo 1: Davis tiene 62 soldados de juguete. Luego, un día, él perdió 29 de ellos. ¿Cuántos soldados de juguete tiene ahora Davis?

Ejemplo 2: Alexandra tiene muchas muñecas. Luego ella le regala 66 de sus muñecas a su hermana menor. Ahora Alexandra tiene 63 muñecas. ¿Cuántas muñecas tenía Alexandra al inicio?

- Adición comparativo (ver figura 4). Se comparan dos cantidades (una mayor que la otra).

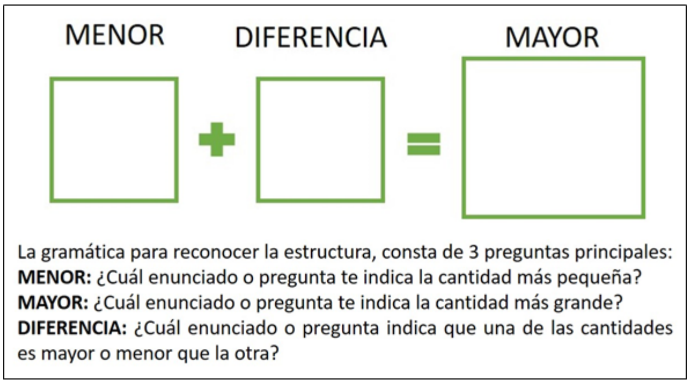


Figura 9. Esquema perteneciente al modelo Adición Comparación

A su vez, los problemas de PPT abarcan 2 subcategorías, en donde cualquiera de las partes (sea la mayor, menor o diferencia) puede ser desconocida, que pueden representar diferente grado de dificultad. Estas serían:

1. Problemas de Cambio-ganancia (AC-More Problems)

Ejemplo1. Ramón salió un día y compró 54 coches de juguete. Más tarde, Ramón descubrió que su amiga Gabrielle tiene 56 coches más que lo que él compró. ¿Cuántos coches tiene Gabrielle?

Ejemplo 2. Estefanía recoge pelotas de goma. A partir de hoy ella tiene 93 de ellas. Estefanía tiene 53 pelotas de goma más que su amiga Elisa. ¿Cuántas pelotas de goma tiene Elisa?

2. Problemas de Cambio-pérdida (AC- Less Problems)

Ejemplo 1. Carolina dijo que tenía 82 manzanas. Si Alberto tiene 32 manzanas menos que Carolina, ¿Cuántas manzanas tiene Alberto?

Ejemplo 2. Diana tiene 6 pequeños peces en su acuario. Su papá tiene 104 pequeños peces en su acuario. ¿Cuántos peces menos tiene Diana en comparación con su papá?

4.7.3 Problemas multiplicativos

Se hace empleo del modelo "*Factor-Factor-Producto*" (véase figura 10) que es una generalización del modelo conceptual de multiplicación y división donde se deben identificar tres elementos básicos: *factor-factor-producto*; donde el primer factor refiere al valor de las unidades y el segundo al número de unidades, por último, el producto será el resultado total de la multiplicación o división según sea la relación entre los elementos.

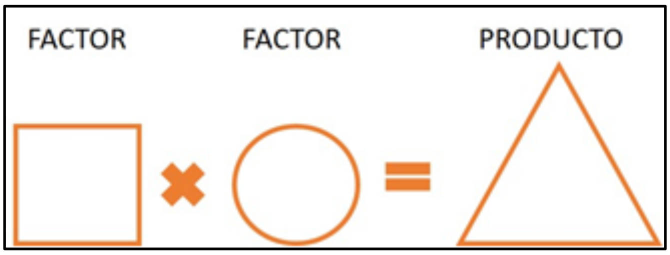


Figura 10. Esquema general de problemas multiplicativos

Este modelo se usa para las siguientes categorías (Xin, 2012):

- Grupos iguales (Véase figura 11). Se indica un número igual de segmentos o partes. Se puede desconocer el valor de cada unidad, el número de unidades o el producto.

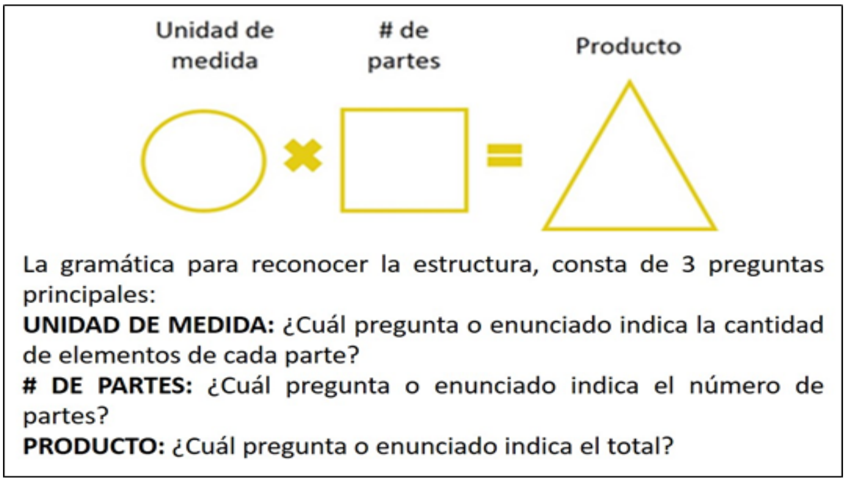
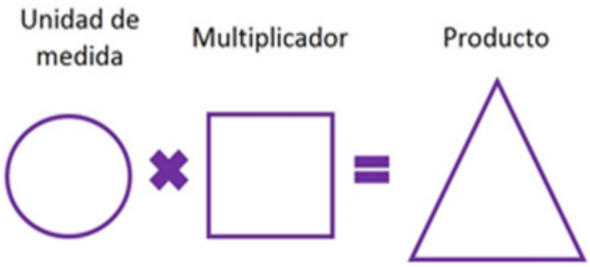


Figura 11. Esquema perteneciente al modelo Grupos Iguales

Ejemplo 1. Una escuela organizó una visita al museo en Lafayette. Gastó un total de $667 comprando 23 boletos. ¿Cuánto cuesta cada boleto?
Ejemplo 2. En una escuela hay un total de 575 alumnos. Si un salón puede albergar 25 estudiantes, ¿Cuántos salones debería tener la escuela?

- Comparaciones multiplicativas (Véase figura 7). Se indica cuando un número o cantidad multiplica y compara una parte de otra cantidad. Se puede desconocer el conjunto comparado, el conjunto de referencia o el multiplicador.



La gramática para reconocer la estructura, consta de 3 preguntas principales:
MULTIPLICADOR: ¿Cuál pregunta o enunciado indica una cantidad que es más o menos veces que otra?
UNIDAD: ¿Cuál pregunta o enunciado indica una cantidad o unidad que es multiplicada por otra?
PRODUCTO: ¿Cuál es la cantidad comparada o el producto?

Figura 12. Esquema perteneciente al modelo Comparación Multiplicativas.

- Ejemplo 1. Issac tiene 22 canicas. Lucas tiene 22 veces más canicas que Issac. ¿Cuántas canicas tiene Lucas?
- Ejemplo 2. Gina ha enviado 462 paquetes en la última semana para la oficina de correos. Gina ha enviado 21 veces más paquetes a su amiga Diane. ¿Cuántos paquetes ha enviado Diane?

4.8 Pruebas empíricas del modelo

Se han realizado diferentes estudios para probar la efectividad de este modelo conceptual obteniendo resultados favorables (Xin, Jitendra, y Deatline-Buchman, 2005; Xin, 2008; Xin, Wiles y Lin, 2008; Xin, 2012,), uno de los más prominentes es en el realizado por Xin, Zhang, Park, Tom, Whipple y Si (2011) en donde se tiene como principal objetivo evaluar y comparar la efectividad dos procedimientos instructivos de resolución de problemas, Modelo Conceptual Basado en Resolución de Problemas (COMPS) y un enfoque instruccional heurístico general (GHI) para la resolución de problemas verbales de multiplicación y división a estudiantes con problemas de aprendizaje.

La distinción principal entre las dos condiciones (COMPS y GHI) radicó en las herramientas que sirvieron para la resolución de problemas verbales. En la primera condición, los estudiantes contaban con un modelo bien definido (Factor-Factor-Producto) sirviendo para impulsar la selección de la operación para resolver lo desconocido. En contraste, la condición de GHI tenía la flexibilidad de usar múltiples estrategias, por lo que los elementos de la ecuación no fueron definidos.

En general, los resultados indicaron que el grupo COMPS mejoró significativamente más que el grupo GHI; el grupo COMPS logró resolver problemas basados en un modelo que ayudara a reconocer los elementos y a elegir el tipo de operación a realizar y cómo éstos se encuentran relacionados así como su expresión matemática, por el contrario, en el grupo GHI, aunque se resolvieron varios problemas planteados, se usaron diversas estrategias, con las que no lograron darle sentido a la relación matemática en una ecuación, por ejemplo, algunos alumnos realizaron operaciones basadas en el tamaño del número, por ejemplo, si se trataban de números grandes, realizaban divisiones, y si se trataba de números pequeños usaban la multiplicación, lo que evidencía que los alumnos priorizan los datos expuestos sin antes hacer un análisis de lo que pide realizar el problema o si se tiene una serie de estrategias que no ayudan a la comprensión del mismo, contrario a si los alumnos cuentan con estructuras que les ayuden a identificar lo elemental del problema y entendiendo la relación de cada parte que lo conforman, tal como lo hace el método COMPS.

De acuerdo con este estudio, los autores mencionan que se puede esperar que los estudiantes de primaria con problemas de aprendizaje evolucionen de las operaciones concretas a pensar simbólicamente o algebraicamente, debido a la sistematicidad de la instrucción algebraica basada en la conceptualización de las relaciones matemáticas y la resolución de problemas. De manera que se la estrategia de COMPS promueve la expresión algebraica de las relaciones matemáticas en la resolución aritmética de problemas verbales, puede facilitar la preparación del álgebra, tal como lo promueven el National Mathematics Advisory Panel y el Panel Consultivo Nacional de Matemáticas.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN

En los capítulos previos se han descrito tres modelos educativos distintos vinculados la relación entre la aritmética y el álgebra: el modelo de pre-álgebra, álgebra temprana y el enfoque de solución de problemas con base en modelos conceptuales; cada uno de estos modelos presenta una perspectiva diferente sobre el aprendizaje de matemáticas, lo cual deriva en distintas metodologías para la enseñanza de la misma.

El modelo de pre álgebra propone una serie de actividades diseñadas a partir de principios aritméticos que se vinculen con elementos algebraicos, de manera que los estudiantes puedan formar nociones o *preconceptos* (Ausubel, Novak y Hanesian 1983) propios del álgebra, previamente a su instrucción formal en esta área de las matemáticas, posicionando al modelo pre algebraico como un curso adicional a la enseñanza habitual, situado en el cambio de aritmética al álgebra con la finalidad de establecer un *puente conceptual* entre ambas, facilitando así la adquisición de conceptos algebraicos (Linchevski, 1995).

Desde una perspectiva distinta, el modelo de álgebra temprana propuesto por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) plantea la enseñanza conceptual del álgebra como una generalización de la aritmética, haciendo de ambas un continuo lógico, y no dos ramas de conocimiento independientes. Con base en esto, se plantea una forma de enseñanza basada en el concepto de *zona del desarrollo próximo* acuñado por Vygotsky (2015), situando al profesor y a los alumnos como los principales responsables de la adquisición de conceptos algebraicos a partir de sus conocimientos previos a la instrucción. Desde esta perspectiva, adquiere particular importancia conocer los conceptos infantiles acerca de modos de representación de relaciones cuantitativas, a fin de que la enseñanza se coloque un paso delante de estas nociones y se encamine hacia formas de representación algebraicas.

Finalmente, el enfoque de solución de problemas con base en modelos conceptuales, el cual deriva de la Instrucción Basada en Esquemas o SBI por sus siglas en inglés (Xin, Liu, Jones, Tzur, y Si, 2014), parte de la idea de que problemas semejantes, pueden resolverse con estrategias semejantes; por lo tanto este último modelo pretende diseñar guías o *prótesis* que guíen a los alumnos para la resolución de problemas de acuerdo a sus características o estructura de los problemas. La diferenciación de los problemas puede hacerse a partir de campos conceptuales definidos por Vergnaud (1982, en Moreira, 2002) como conjuntos informales y heterogéneos de información relevante a distintas situaciones. Una vez que sea identificada la relación con problemas que los alumnos pudieron haber resuelto con anterioridad, se diseña una solución basado en esta experiencia.

5.1 Principales diferencias entre los modelos

5.1.1 Relación aritmética-álgebra

Una de las principales diferencias entre los modelos señalados al inicio de esta capítulo, es la forma de caracterizar la relación entre el álgebra y la aritmética: una perspectiva (pre-álgebra) asume que son áreas de conocimiento independientes que deben relacionarse de manera congruente para facilitar el paso de la aritmética al álgebra; considerando a la segunda como un área de mayor complejidad para el aprendizaje debido al uso de representaciones abstractas, a diferencia de la aritmética donde habitualmente se relacionan las cantidades numéricas con elementos concretos. De esto deriva el objetivo de generar vínculos entre ambas áreas.

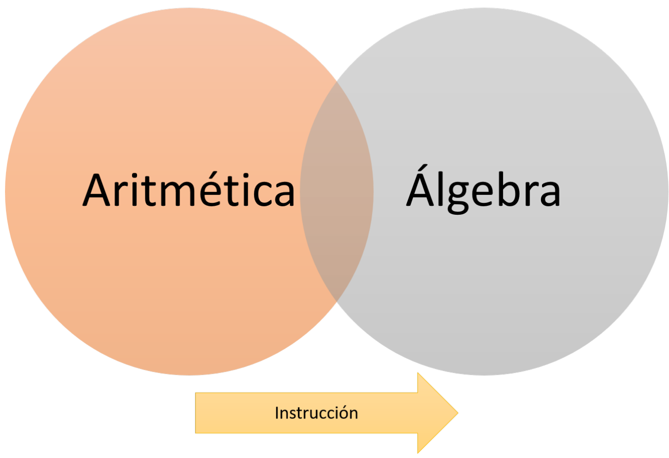


Figura 13. Enfoque de aritmética y álgebra como áreas independientes. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011:17

Por otro lado, una perspectiva diferente asume el álgebra como forma sistemática de expresión de relaciones numéricas; se considera que el álgebra y la aritmética forman parte de un continuo donde el primero es la expresión generalizada de operaciones aritméticas, por lo que el papel central en la enseñanza del álgebra son los procesos de generalización y abstracción.

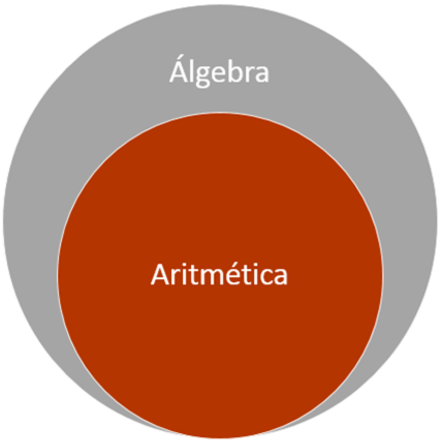


Figura 2. La aritmética con un carácter inherentemente algebraico. Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011:19

En la segunda perspectiva se considera que tánto la aritmética como el álgebra pueden relacionarse mediante un continuo de representaciones de relaciones numéricas que van de los elementos concretos (aritmética) a elementos abstractos (álgebra).

Como se puede observar, un elemento en común entre ambas perspectivas (y por ende entre los modelos) es la vinculación del álgebra con la representación de relaciones numéricas mediante elementos abstractos, por lo tanto en cada metodología se plantean formas de representación con componentes concretos y la inclusión progresiva de elementos abstractos.

Sin embargo esto no termina por esclarecer cual de estos modelos representa una mejor alternativa, se puede considerar el trabajo de Echazarra, Salinas, Méndez, Denis y Rech (2016) como una aproximación a la resolución de esta duda, estos autores examinaron cómo las estrategias particulares de enseñanza y aprendizaje están relacionadas con el rendimiento del alumno en preguntas específicas de la prueba PISA, en particular preguntas sobre matemáticas. Dentro de este análisis se consideraron de manera particular dos grupos de estrategias: aquellas que favorecen la memorización y son relacionadas a métodos de enseñanza directivos, por otro lado se situaron las estrategias que promueven el desarrollo de conocimientos mediante ejercicios de reflexión, es decir, estrategias con orientaciones cognitivas y la adquisición de conceptos.

Si se analizan de manera global los resultados obtenidos, es complicado identificar una tendencia en las estrategias empleadas por los países con mejores resultados. Sin embargo al evaluar los resultados con base en los niveles de dificultad establecidos en la prueba PISA, se puede observar que las estrategias directivas son eficaces en los primeros niveles de dificultad, donde se evalúa la capacidad de operar con valores concretos y la identificación de elementos relevantes del contexto; no obstante, en los siguientes niveles de dificultad donde se evalúa la deducción de información no explícita y el uso de conceptos como variable o incógnita, la eficacia de este tipo de estrategias disminuye considerablemente.

Por otro lado, las estrategias cognitivas demostraron una alta eficacia en la enseñanza de los elementos evaluados en los niveles más altos de complejidad; pero se encontró que los alumnos enseñados bajo este tipo de estrategias inicialmente presentan dificultades para llegar al desarrollo de estos conceptos. Por tanto, se sugiere que una combinación de ambos tipos de estrategias, como el planteado en esta investigación, puede dar resultados satisfactorios.

A su vez, Echazarra, Salinas, Méndez, Denis y Rech (2016) pusieron a prueba esta hipótesis, tras identificar las estrategias predominantes en cada país y su desempeño en la prueba PISA en el área de matemáticas, realizaron una regresión logística donde predijeron la respuesta de los alumnos al emplear estrategias cognitivas en los países con tendencia a las estrategias directivas y viceversa. Se predijo una mejoría generalizada en el desempeño con base en los criterios de evaluación de la prueba PISA, siendo esta significativa en más del 50% de los países participantes.

De modo que, se estima que un modelo mixto, el cual involucra ambos tipos de estrategias, mejora los resultados obtenidos en comparación a cuando se emplea un solo tipo de estrategias (memorización o cognitivo), independientemente de cuál sea este. Con el fin de mejorar el desarrollo de competencias matemáticas consideradas como básicas por la OCDE, esta organización retoma los modelos mixtos que incorporan estrategias directivas como base, para posteriormente dar paso al desarrollo conceptual mediante estrategias cognitivas como un modelo óptimo de enseñanza recomendable a todos los países miembros.

El estudio realizado por Echazarra, Salinas, Méndez, Denis y Rech (2016) no comprará de manera precisa los modelos analizados en esta investigación, ya que atiende a estrategías de aprendizaje las cuales representan categorías muy generales para considerarlas como equivalentes a los modelos, no obstante, las conclusiones encontradas por estos autores abre la posibilidad a una alternativa diferente; estos autores llegarón a la conclusión de que la comparativo de estrategías educativas no demuestra que una sea superior en todo sentido, sino que cada una de estas cobra relavancía en función de los contenidos.

Podríamos establecer lo mismo acerca de la comparativa de los modelos, a reserva de un prueba empírica, ya que cada uno de los modelos se enfoca en una problemática diferente de la trassición de la aritmetica al álgebra, por lo que se asume que ninguno de los modelos será superior en todos los sentidos a los otros, sino que cada uno demostrará mejores caracteristicas en función del tema de enseñanza y la problemática particular que se presente.

CONCLUSIč N

Dada la importancia atribuida por la OCDE (2016) a las matematicas y la problemática de desempeño de los alumnos mexicanos de educación Primaria y los alumnos de 15 años, se analizó el diseño de metodologías que fomenten el desarrollo de las competencias matemáticas, particularmente se analizaron tres modelos diferentes orientados a facilitar la transición aritmética/álgebra: a) pre-álgebra, b) álgebra temprana y el c) aprendizaje basado en esquemas.

El modelo de pre álgebra propone una serie de actividades diseñadas a partir de principios aritméticos que se vinculen con elementos algebraicos, de manera que los estudiantes puedan formar nociones o *preconceptos* (Ausubel en 1983) propios del álgebra, previamente a su instrucción formal en esta área de las matemáticas, posicionando al modelo pre algebraico como un curso adicional a la enseñanza habitual, situado en el cambio de aritmética al álgebra con la finalidad de establecer un *puente conceptual* entre ambas, facilitando así la adquisición de conceptos algebraicos (Linchevski, 1995).

Desde una perspectiva distinta, el modelo de álgebra temprana propuesto por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) plantea la enseñanza conceptual del álgebra como una generalización de la aritmética, haciendo ambas un continuo lógico, y no dos ramas de conocimiento independientes. Con base en esto se plantea una forma de enseñanza basada en el concepto de *zona del desarrollo próximo* acuñado por Vygotsky (2015), situando al profesor como un guía del aprendizaje y a los alumnos como los principales responsables de la adquisición de conceptos algebraicos a partir de sus conocimientos previos a la instrucción. Desde esta perspectiva adquiere particular importancia, conocer los conceptos infantiles acerca de modos de representación de relaciones cuantitativas, a fin de que la enseñanza se coloque un paso delante de estas nociones y se encamine hacia formas de representación algebraicas.

Finalmente, el enfoque de solución de problemas con base en modelos conceptuales, el cual deriva de la Instrucción Basada en Esquemas o SBI por sus siglas en inglés (Xin, Liu, Jones, Tzur, y Si, 2014), parte de la idea de que problemas semejantes, pueden resolverse con estrategias semejantes; por lo tanto este último modelo pretende diseñar guías o *prótesis* que guíen a los alumnos para la resolución de problemas de acuerdo a sus características o estructura de los problemas. La diferenciación de los problemas puede hacerse a partir de campos conceptuales definidos por Vergnaud (1982, en Moreira, 2002) como conjuntos informales y heterogéneos de información relevante a distintas situaciones. Una vez que sea identificada la relación con problemas que los alumnos pudieron haber resuelto con anterioridad, se diseña una solución basado en esta experiencia.

Al analizar el desarrollo de estrategias de enseñanza para la educación Primaria encontramos que una de las principales diferencias entre estos modelos, es la forma de caracterizar la relación entre el álgebra y la aritmética: el modelo de pre-álgebra asume que son áreas de conocimiento independientes que deben relacionarse de manera congruente para facilitar el paso de la aritmética al álgebra; considerando a la segunda como un área de mayor complejidad para el aprendizaje debido al uso de representaciones abstractas, a diferencia de la aritmética donde habitualmente se relacionan las cantidades numéricas con elementos concretos. De esto deriva el objetivo de generar vínculos entre ambas áreas.

Por otro lado, tanto el modelo de álgebra temprana y el de aprendizaje basado en esquemas asumen el álgebra como forma sistemática de expresión de relaciones numéricas; se considera que el álgebra y la aritmética forman parte de un continuo donde el primero es la expresión generalizada de operaciones aritméticas, por lo que el papel central en la enseñanza de álgebra son los procesos de generalización y abstracción mediante el uso de diversas de representaciones de relaciones numéricas que van de los elementos aritmética a elementos abstractos. Esta diferencia al considerar la relación entre aritmetica y álgerba determinar la forma en la que son construidas las metodologías de cada uno de los modelos.

Aún cuando cada uno de los modelos elaborá una propuesta diferente, es complicado determinar la superioridad de un modelo por sobre el otro en cuanto a su eficacía para el desarrolló de competencias matematicas, ya que los resultados obtenidos con la comprobación de cada uno de estos modelos no es copletamente generalizable a todos los elementos que competen al curriculo de educación básica; esto se puede deber al énfasis que hace cada uno de los modelos (pre-álgebra al desarrollo conceptual, álgebra temprana a la multirepresentatividad de las relaciones numéricas y el modelo de aprendizaje basado en esquemas a la identificación de los elementos de un problema y sus relaciones), ya que esta especialización termina por dejar descubiertos rubrós importantes que podrían ser abordador desde los otros modelos.

Por lo tanto, se concluyé que la presentación de un modelo mixto que logré incorporar los elementos más importantes de cada uno de los modelos analizados (pre-álgebra, álgebra temprana y aprendizaje basado en esquemas) podría resultar como la estrategía más eficaz para el desarrollo eficaz de competencias matematicas. No obstante, esto supone un nuevo reto, ya que la integración de los modelos supone la comparación no unicamente de estrategías especificas, sino de bases teóricas que pueden resultar incompatibles o afectar a la estructura global de los modelos al no respetarse la secuencia planteada originalmente, ya que se corre el riesgo de implementar estrategias sin una base teórica a propiada, así como de caer nuevamente en la incongruencia didáctica al emplear métodos que parten de perspectivas diferentes

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel D., Novak J., y Hanesian H. (2009). "*Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*". México: Trillas.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algbraic Reasoning. Journal of Research in Mathematics Education, 36 (5), pp. 412-446.

Booth, L.R. (1989). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The ideas of algebra, K-12, 19*, Pp. 299-306

Brizuela, B., Martínez, M., & Cayton-Hodges, G. (2013). The impact of Early Algerba: Results from longitudinal Intervention. *Jorunal Of Research in Mathematics Education, 2 (2)*, pp. 209-241.

Butto, C. y Delgado J. (2012). Rutas hacia el álgebra: Actividades en Excel y Logo. México: UPN.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22 (3),* pp. 55-86. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000300004&lng=es&tlng=es.

Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H. & Wilss, L. (1998). Arithmetic, pre algebra and algebra: A model of transition. Mathematics Education Research Group of Australasia, Gold Coast

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37 (2),* pp. 87-115.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (2007). *En la vida 10 en la escuela 0*. México: Siglo XXI.

Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not same as algebra early. En Kaput, J., Carraher, D. & Blanton,

M. (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 235-272). Manhatan, NJ: Erlbaum.

Collis, K. (1975). *The development of formal reasoning*. University of Newcastle: Newcastle, England.

Covarrubias, P. (2010). Enfoques contemporáneos de la psicología educativa”, en Tirado, F., Martínez, M., Covarrubias P., López, M., Quezada, R., Olmos, A. y Díaz, F. (2010). *Psicología educativa para afrontar los desafíos del siglo XXI,* México: McGraw Hill, cap. 1, pp. 40-59.

Corbalán, F. & Deulofeu, J. (1996) Como plantear y resolver problemas. Polya, un clásico en resolución de problemas. Revista SUMA, junio 1996, número 22, p. 103-107. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/22/103-107.pdf

Díaz, A. (2005) La educación en valores: Avatares del currículum formal, oculto y los temas transversales. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 7 (*2), pp. 1-15.

Díaz, A. (2006). El enfoque de competencias de la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?. *Perfiles Educativos, 17 (111)*, pp. 7-36.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, the Netherlands: Utrecht University. Disponible en: https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf?sequence=1

Echazarra, A., Salinas, D., Méndez, I., Denis, V., y Rech, G. (2016). *How teachers teach and students learn Successful strategies for school*. OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/5jm29kpt0xxx-en

Fang, H., Herron, S., Zhou, Q., Hartsell, T. & Mohn, R. (2015). The Effects of Simplified Schema-based Instruction on Elementary Students Mathematical Word Problem Solving Perfomance. *Journal of Mathematics Education (8)*, 1, pp.37-55.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 2 (9)*, pp. 19-26.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25* (3), pp. 327-342.

Fuchs, L., Zumetra, R., Finelli, R., Powell, S., Seethaler, P., Hamlett C., & Fuchs D. (2010). The effects of Schema-Broadening Instruction on second grader´s word-problem performance and their ability to represent word problems with algebric equations: a randomized control study. *The elementary school Jounal, 110 (4)*, pp. 1-25.

Goldman, G. (2015). Pre-Algebra Step by Step Approach. USA: Pearblossom Private School. (3ra ed). 370 pp.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Revista Suma, 20*, 61-68.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics 2*7, pp. 59-78.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company, pp. 390-419.

Kieran y Filloy. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), pp. 229-240.

Küchermann, D. (1981). Algebra. En Children´s Understanding of Mathematics. Murray:London.

INEE, (2005). PISA para docentes: la evaluación como oportunidad de aprendizaje. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación: México.

INEE, (2017). Informe de resultados Planea 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación: México.

Larson, R. Boswell, L., Kanold, T., & Stiff, L. (2005). Middle School Math: Student Edition Pre-Algebra. USA: McDougal Littell.

Linchevsky. L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of Pre-Algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* pp. 113-120.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *ArAl project: Arithmetic pathways towards favoring pre-algebraic thinking*. Bologna: Pitagora.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strike rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist, 59*, 14–19.

MacGregor, M. and Stacey, K. (1997). *“Students' understanding of algebraic notation”. Educational Studies in Mathematics, 33*, pp. 1-19.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación Primaria. PNA, 3(3), 135-156.

Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Enseñanza de las ciencias (1),* pp. 1-28.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundation for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Department of Education: Washington, DC.

OECD (2006), *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*, OECD Publishing, Paris. DOI: http://dx.doi.org/10.1787/9789264026407-en

OECD (2016). *Equations and Inequalities: Making Mathematics Accessible to All*. PISA, OECD Publishing, Paris. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264258495-en.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* PISA, OECD Publishing, Paris. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en

Papert, S. (1996). The Wondeful Discovery of Nothing. En *The Connect Family: Bridging the Digital Generation Gap*. Longstreet Press.

Papert, S. (1980). Redefining Childhood: The Computer Presence as an Experiment in Developmental Psychology. En *8th World Computer Congress: IFIP Congress, Tokyo, Japan and Melbourne, Australia*

Prieto, E. (2008). El papel del profesorado en la actualidad. Su función docente y social. *Foro de Educación, 10*, pp. 325-345.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: the multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro.* Educación Básica Primaria. México:SEP.

Schliemann, A. y Carraher, D. (2002). The evolution of mathematical reasoning: everyday versus idealized understandings. *Developmental Review,* 22, pp. 242-266.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. 2007). *Bringing out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. Hisllsdale, NJ: Erlbaum

Schliemann, A., Carraher, D. & Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. En *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives*. Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques, pp. 109-124.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de didáctica de las Matemáticas, 77*, pp. 5-34.

Sutherland, R. (1987). A study of the use and understanding of algebra related concepts within a Logo environment, en Bergeron, J.C., Herscovics, N. y Kieran, C., (eds.), Vol. 1, pp. 241-247.

Vygotsky, L. (2015). *Pensamiento y lenguaje* (Trad. por J. Tosaus) México: Editorial Booket (Thought and language publicado en 1934).

Xin, Y., Liu, J., Jones, S., Tzur, R., & Si, L. (2016). A preliminary discourse analysis of constructivist-oriented mathematics instruction for a student with learning disabilities, *The Journal of Educational Research, 109*:4, 436-447, DOI: 10.1080/00220671.2014.979910

Xin, Y., Jitendra, A., & Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of Mathematical Word Problem-Solving Instruction on Middle School Students with Learning Problems. The Journal of Special Education Vol. 39 (3), pp. 181-192.

Xin, Y. (2008). The effect of Schema-Based Instruction in Solving Mathematics Word Problems: An Emphasis on Prealgebraic Conceptualization of Multiplicative Relations. Journal for Research in Mathematics Education, 39 (5), pp. 526-551.

Xin, Y., Wiles, B., & Lin, Y. (2008). Teaching Conceptual Model-Based Word Problem Story Grammar to Enhance Mathematics Problem Solving. *The Journal of Special Education, 20* (10), pp. 1-16.

Xin, Y., Zhang, D., Park, J., Tom, K., Whipple, A., & Si, L. (2011). A comparision of two Mathematics Problem Solving Strategies: Facilitate Algebra Readiness. The Journal of Educational Research, 104 (6), pp. 381-395.

Xin, Y. (2012). Conceptual Model-Based Problem Solving. Teach Students with Learning Difficulties to Solve Math Problems. USA: Sense Publishers.