



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

EFECTO DEL GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL EN EL FLUJO DE UN LÍQUIDO COMPLEJO

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

JULIO CÉSAR MANZO GONZAGA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESOR DE TESIS:

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

CIUDAD DE MÉXICO, A 23 MARZO DEL 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

EFFECTO DEL GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL EN EL FLUJO DE UN LÍQUIDO COMPLEJO



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Manzo Gonzaga Julio César, con número de cuenta 41310710-7 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 23 del mes de Marzo de 2018 a las 11:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	DR. FRANCISCO VIDAL CABALLERO DOMÍNGUEZ
SUPLENTE	M. EN I. FRANCISCO JAVIER ALMAZAN RUÍZ
SUPLENTE	DRA. BLANCA ESTELA GARCÍA ROJAS

Mariano Pérez Camacho
Edtson E. Herrera Valencia

El título de la tesis que se presenta es: "Efecto del Gradiente de Presión Pulsátil en el Flujo de un Líquido Complejo".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
CDMX a 28 de Febrero de 2018.

[Signature]
DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ
DIRECTOR

RECIBÍ:
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo.Bo.

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA
DIRECCIÓN

[Signature]
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.



**YO TENGO EL PREMIO: EL PREMIO
ES EL PLACER DE DESCUBRIR
COSAS NUEVAS, LA EMISIÓN DEL
DESCUBRIMIENTO, AL VER A LOS
DEMÁS USAR MI TRABAJO.**

FIS. RICHARD P. FEYNMAN



DEDICATORIAS

Es mi deseo como sencillo gesto de agradecimiento, dedicarle mi título de Ingeniero Químico en el presente informe, a las siguientes personas que han marcado mi vida:

A mi abuela *Delfina Manzo*[†]:

Porque vives en mi corazón y siempre quisiste lo mejor para mí, sé que desde el cielo me estás cuidando y bendiciendo, para que todo salga bien.

A mi padre *Julio César Manzo*:

GRACIAS por haberme inducido al estudio de la Ingeniería Química, hoy en día no me arrepiento, también te agradezco por todas las cosas buenas que has hecho para que siempre este bien, esta es tu mejor herencia que me has dado, espero y siempre te sientas orgulloso de mi como el día de hoy.

A mi madre *Hidalia Gonzaga Dolores*:

A mi fuerza de todos los días, te agradezco por todos los consejos, regaños, y por su puesto por el gran apoyo y esfuerzo que has hecho para que este día llegara, no tengo palabras para describir el amor que tengo por ti, pero sabes, que todo lo que he hecho y haré, siempre será pensando en ti. GRACIAS MAMÁ.

A mi hermano *Inri Manzo Gonzaga*:

Tú que eres mi mejor ejemplo a seguir, porque siempre vas por la vida cumpliendo tus sueños a pesar de los obstáculos que te ha puesto. Sé que siempre hemos estado juntos a pesar de vivir en distintos lugares, Gracias por brindarme tu apoyo cuando más lo he necesitado y por ser uno de los seres más importantes en mi vida.

A mi hermana *Guadalupe Stefania Manzo Gonzaga*:

Porque siempre hemos compartido momentos buenos y malos, tus consejos me ha ayudado a afrontar los retos que se me han presentado a lo largo mi carrera, sabes que eres de las personas más importantes para mi vida, y que agradezco a Dios por haberme dado una hermana como tú, te quiero mucho.

A mis sobrinos *Dahlia Isabel y Gael Jaeem Manzo Carrasco*:

Sé que cuando crezcan sabrán lo importante que fueron para mí en mi etapa como universitario y que son una parte importante para que este día concluyera, no tienen que ser igual que yo, sino superiores a mí y a todos, jamás se resignen con lo que tienen, si pueden tenerlo todo. Siempre contarán con su tío para beneficio de ustedes, los quiero muchos sobrinos.



A mi director de tesis, *Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia*:

Le agradezco por compartirme sus conocimientos, sabiduría y experiencias, así como la oportunidad que me ha brindado para poder realizar este trabajo de investigación, al mismo tiempo por haberme dedicado su valioso tiempo y atención, la cual valoro y agradezco mucho. Gracias por su amistad y por los consejos que me ha dado, para que sea una mejor persona y me supere en el ámbito profesional y personal, siempre será un gran ejemplo para mí, en todos los ámbitos y estaré eternamente agradecido con usted, por lo que dedico respetuosamente esta tesis a usted y a su apreciable familia.

A toda mi familia:

Porque siempre me dieron buenos consejos y ánimos para continuar en esta etapa de formación académica, y me apoyaron, moral y económicamente cuando más lo necesite, sé que siempre contare con su apoyo incondicional, muchísimas gracias.



AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer a **Dios** y a la **Virgen de Guadalupe**, por haberme permitido llegar hasta este momento tan especial, y que jamás me falto salud y fortaleza para continuar cuando a punto de caer he estado, nunca me dejen solo, que yo jamás los olvidare.

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** y en especial a la **Facultad de Estudios Superiores Zaragoza** que me dieron la oportunidad de formarme como profesionista y ser humano.

Al Dr. Mariano Pérez Camacho:

Por compartirme sus conocimientos en el aula, y ahora al concluir esta etapa, las cuales siempre apporto comentarios y sugerencias para el entendimiento del tema estudiado, agradezco por su tiempo y apoyo.

Al Dr. Francisco Vidal Caballero Domínguez:

Por sus aportaciones, comentarios y el apoyo especial en la elaboración de este trabajo.

Al M. en I. Francisco Javier Almazán Ruíz:

Por su interés en especial a este trabajo, así como las aportaciones, comentarios y sugerencias dedicadas para un mejor entendimiento de esta tesis.

A la Dra. Blanca Estela García Rojas:

Por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo de investigación, los comentarios emitidos y las sugerencias que ayudaron a que dicho trabajo fuera de mayor calidad.

Al Dr. Fausto Calderas García:

Por su tiempo dedicado, las aportaciones teóricas y computacionales en la ciencia de la reología y por aclararme las dudas que me surgieron a lo largo de la elaboración de esta tesis.

A mis profesores:

Por confiar en mí, tenerme la paciencia para explicarme y contestar mis dudas, apoyarme en momentos difíciles y compartirme sus conocimientos en sus áreas respectivas, soportar a un alumno inquieto, y enseñarme que la humildad te abre las puertas de cualquier lugar. Agradezco por haberlos tenido como profesores, porque cada uno de ustedes, apporto un granito de su conocimiento para formarme como un gran profesionista y a la vez contar con su amistad y por ser tan buenas personas conmigo. Muchas gracias.

A mis mejores amigos David Osvaldo Cervera García y Daniel Nolasco Ruiz:

La vida me ha demostrado que ustedes siempre han estado conmigo en los momentos más difíciles y sé, que siempre contaré con ustedes, que cuando necesite de unas palabras o de una llamada de atención, serán los primeros en



decirme las cosas que estoy haciendo mal, aún nos quedan años para compartir de esta gran amistad. Los aprecio hermanos.

A mi mejor amiga *Cinthia Velasco García*:

Gracias por compartir bellos momentos y en ocasiones momentos tristes que pasamos a lo largo de la carrera, fuiste y serás una de las parte de mi columna vertebral de mi vida profesional, siempre estaré muy agradecido contigo, porque sin ti, no sería la misma persona que soy hoy en día, gracias por soportar mis cambios de ánimo y porque nunca me has dejado solo en los momentos que estuve a punto de caer, por eso y muchas cosas más, te dedico esta tesis a ti y a tu querida familia. GRACIAS WERA.

A mis amigos de la Facultad: *Areli Noemí López Ávila, Sergio Torres Gordillo, Eduardo Daniel Lozada Hernández y Adriana Anaíd Larrieta Hernández*:

Cuando llegue a la facultad, jamás pensé que iba a encontrar tan buenos amigos en todos los ámbitos, muchas gracias por estar conmigo en todo este tiempo donde hemos vivido momentos alegres y tristes, gracias por ser mis amigos y recuerden que siempre los llevare presente.

A la familia *Díaz Rogel*:

Gracias por estos cinco años, las cuales me han abierto las puertas de su casa y ser parte de su apreciable familia, por el apoyo incondicional que me han dado, siempre los recordare y estaré muy agradecido con ustedes.

A todas las personas que hicieron posible que este día concluyera, que sin ustedes a mi lado no lo hubiera logrado, tantas desveladas sirvieron de algo y aquí está la recompensa. Les agradezco a todos ustedes con toda mi alma el haber llegado a mi vida y el compartir momentos agradables y tristes, pero esos momentos son los que nos hacer crecer y valorar a las personas que nos rodean. Muchas gracias y sé que nunca los olvidaré.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115615>><<Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos Aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE112716>><<Material didáctico teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo Semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniería Química>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



CONTENIDO

DEDICATORIAS	4
AGRADECIMIENTOS	6
ÍNDICE DE FIGURAS	10
ÍNDICE DE TABLA	12
NOMENCLATURA	13
GLOSARIO	17
RESUMEN	20
ABSTRACT	21
CAPÍTULO I	22
INTRODUCCIÓN	22
1.1 Flujo pulsátil	23
1.2 Antecedentes	25
1.3 Objetivos	31
1.4 Hipótesis	32
1.5 Distribución del material de la tesis de licenciatura	32
CAPÍTULO II	34
MARCO TEÓRICO	34
2.1 Hemorreología: Sangre humana	35
2.2 Aproximaciones matemáticas	38
2.3 Fenómenos de transporte	40
2.4. Tensores	44
2.5. Ecuaciones constitutivas	47
2.6 Pruebas de flujo	50
2.7 Ley de Hagen Poiseuille	54
2.8. Número de Womersley	58
CAPÍTULO III	60
SISTEMA FÍSICO	60
3.1 Descripción del problema físico del flujo pulsátil	61
3.2 Cinemática de flujo	62



3.3 Ecuaciones de continuidad y momento.	65
3.4 Ecuación constitutiva.	67
CAPÍTULO IV	71
MODELADO TEÓRICO	71
4.1 Modelo viscoelástico lineal sin efectos inerciales.	72
4.2 Modelo viscoelástico lineal de Maxwell con efectos inerciales.	77
4.3 Flujo volumétrico pulsátil.....	79
4.4 Modelos viscoelásticos lineales en términos del operador en el espacio de la frecuencia.	80
4.5 Resumen de las ecuaciones más importantes.	81
CAPÍTULO V	86
SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	86
5.1. Módulos viscoelásticos adimensionales sin inercia.	87
5.1.2 Módulo	88
5.2 Función de transferencia.	90
5.3 Flujos volumétricos real e imaginaria del modelo de Maxwell con inercia.	94
5.4 Simulación con datos reométricos de sangre con colesterol.	101
CAPÍTULO VI	109
CONCLUSIONES	109
6.1 Modelado teórico.	110
6.2 Trabajo a futuro.	116
APÉNDICE A	118
A-1) Perfil de velocidades.	120
A-2) Flujo volumétrico.....	123
BIBLIOGRAFÍA	128



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Organización del trabajo desarrollado en la tesis.....	33
Figura 2.1 Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.....	37
Figura 2.2 Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte, el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).	49
Figura 2.3 Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).	51
Figura 2.4 Perfil de velocidades típicas de un fluido ideal en el interior de una tubería.	54
Figura 2.5 Perfil de velocidades típicas de un fluido viscoso en el interior de una tubería (régimen laminar).	55
Figura 2.6 Cilindro de radio r se encuentra en equilibrio (moviéndose a velocidad constante) bajo la acción de la fuerza impulsora originada por la diferencia de presión entre sus extremos, menos la fuerza de retardo de viscosidad, que actúa sobre su superficie lateral.	56
Figura 3.1 Representación esquemática del sistema de estudio. Un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ de un fluido complejo (sangre humana) y fluye por efecto de un gradiente de presión pulsátil. En el lado derecho del capilar, se representa un punto material en coordenadas cilíndricas.	61
Figura 5.1 Ilustra el comportamiento del módulo elástico adimensional como función de la frecuencia angular.	87
Figura 5.2 Ilustra el comportamiento del módulo viscoso como función de la frecuencia adimensional.	88
Figura 5.3 Ilustra los módulos viscoelásticos de pérdida y de almacenamiento en función de la frecuencia adimensional. El cruce que se observa con un círculo verde, es el punto en donde el material se comporta como viscoelástico. Observe que, a frecuencias menores de 1, i.e. $\omega < 1$, el sistema se comporta como sólido, mientras que a frecuencias moderadas y altas, el sistema (fluido) se comporta como líquido.	90
Figura 5.4 Ilustra la viscosidad real de la función de transferencia vs la frecuencia adimensional.	91
Figura 5.5 Ilustra la viscosidad imaginaria de la función de transferencia en función de la frecuencia adimensional.	92



Figura 5.6 Ilustra el comportamiento de las viscosidades reales e imaginarias de la función de transferencias versus la frecuencia adimensional. Observe que, a frecuencias menores de 1, i.e. $\omega < 1$, en el sistema domina la viscosidad real, mientras que, a frecuencias moderadas y altas, el sistema es dominado por la viscosidad imaginaria...... 93

Figura 5.7 Ilustra la magnitud de la función de transferencia en función de la frecuencia adimensional...... 94

Figura 5.8 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 2, 4$ y 6), adimensional relacionado a un fluido de Maxwell. 95

Figura 5.9 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 8$ y 10), relacionado a un fluido de Maxwell. 96

Figura 5.10 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular, entre dos a diez, relacionado a un fluido de Maxwell. 97

Figura 5.11 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 2, 4$ y 6), relacionado a un fluido de Maxwell. 98

Figura 5.12 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 8$ y 9), relacionado a un fluido de Maxwell. 99

Figura 5.13 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular, entre dos a diez, relacionado a un fluido de Maxwell. 100

Figura 5.14 Se ilustra la viscoelasticidad lineal como función del módulo elástico (a) y viscoso (b) como función de la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempo de relajación de Maxwell con datos reométricos de sangre con colesterol..... 102

Figura 5.15 Se ilustra el comportamiento de la viscoelasticidad compleja como función del módulo viscoelástico y la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempos de relajación de Maxwell, utilizando datos reométricos de sangre con colesterol..... 103

Figura 5.16 Representa el flujo pulsátil, parte real (a) y parte imaginaria (b) como función de transferencia y la frecuencia angular con módulos elásticos y tiempos de relajación multimodales de Maxwell con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol..... 105

Figura 5.17 Se ilustra el flujo pulsátil real como función de transferencia y la frecuencia angular, para un modo (b) y tres modos (a), con módulos elásticos y



tiempos de relajación multimodales de Maxwell con datos reometricos de sangre con contenido de colesterol alto..... 107

ÍNDICE DE TABLA

Tabla 1. Modelos viscoelásticos más representativos en la descripción del flujo pulsátil..... 39

Tabla 2. Definiciones de las variables dinámicas de la tabla 1..... 40

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente..... 41

Tabla 4. Ilustra los modelos viscoelásticos lineales en términos de los operadores temporales y de Fourier. 80

Tabla 5. Presenta las variables dimensionales, características y adimensionales.82

Tabla 6. Valores de parámetros de material para el modelo multimodal de Maxwell. 101



NOMENCLATURA

a	Radio del capilar [m];
G_0	Módulo elástico [Pa];
L	Longitud del capilar [m];
Q	Flujo volumétrico [m^3/s];
C_i	Constante de integración [1];
V_z	Velocidad axial [$m\ s^{-1}$];
u	variable paramétrico [1];
t	Coordenada de tiempo [s];
(r, ϕ, z)	Coordenadas cilíndricas [m, 1, m];
r	Radio esférico del capilar [m];
$V(t)$	Velocidad de flujo volumétrico [$m^3\ s^{-1}$];
C_A	Concentración del componente A [mol/m^3];
$P(z,t), P_0, \Delta P(z,t)$	Presión, presión constante y diferencia de presión [Pa];
P	Potencia [J/s];
n	Exponente de la ley de potencia [1];
h	Altura del capilar [m];
K	Conductividad térmica [$W\ m^{-1}\ K^{-1}$];
$\eta(i\omega)$	Viscosidad compleja [Pa];
p	Presión termodinámica [N/m^3];
D_{AB}	Coefficiente de difusión del componente A en el componente B [m^2/s]
N_A	Densidad de flujo molar [kmol/s];
R_A	Reacción química [mol];
$\{G', G''\}$	Módulo elástico y módulo viscoso [Pa];
$\{G'(\omega), G''(\omega)\}$	Módulo real e imaginario [Pa];
$\{\eta'(\omega), \eta''(\omega)\}$	Viscosidad real e imaginaria [Pa s];
w	Velocidad de flujo másico [kg/s];
Q	Flujo volumétrico [m^3/s];
$\langle V_z \rangle$	Velocidad media [m/s];
$\{Q_v, Q_N\}$	Flujo volumétrico viscoelástico y newtoniano [m^3/s];
Re	parte real [1];
Im	parte imaginaria [1]
$\{J_0, J_1\}$	Funciones de Bessel de orden cero y primero [1]
$T(\omega)$	Función de transferencia [1];
$I(\%)$	Eficiencia o aumento en el flujo volumétrico [1];
$\langle Q \rangle$	Promedio del flujo volumétrico pulsátil u oscilatorio en la pared [1];
$n(t)$	Función estocástica estacionaria [1];



D/DT	Operador de Stokes [1/s];
$\langle P \rangle$	Potencia pulsátil promedio [1];
Letras griegas	
ε	Parámetro de perturbación [1];
η	Función viscosidad [Pa s];
$\{\eta_0, \eta_\infty\}$	Viscosidades a bajo y alto corte [Pa s];
φ	Función fluidez [1/Pa];
φ_1	Fluidez a primer orden [1/Pa];
$\dot{\gamma}_{rz}$	Escalar rapidez de deformación [s ⁻¹];
$\{\Psi_1, \Psi_2\}$	Primera y segunda diferencia de esfuerzos [1];
λ	Tiempo estructural [s];
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell a bajo corte [s];
λ_∞	Tiempo de relajación de Maxwell a alto corte [s];
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa];
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$	Componentes normales del tensor de esfuerzos [Pa];
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa];
$\zeta(\text{IId})$	Función estructural [Pas];
θ	Coordenada angular [1];
ρ	Densidad del líquido [kg/m ³];
μ	Viscosidad newtoniana [Pa s];
Φ	Operador temporal de fluidez [1];
η^*	Función viscosidad compleja [Pa s];
β	Segunda función de estructura [1];
ω	Frecuencia angular [1/s];
δ	Función delta de Dirac [1];
Variables y números adimensionales	
Re	Número de Reynolds [1];
Wo	Número de Womersley [1];
$\{\bar{\eta}'(\omega), \bar{\eta}''(\omega)\}$	Función viscosidad real e imaginaria [1];
$\{\bar{G}'(\omega), \bar{G}''(\omega)\}$	Módulo real e imaginario [1];
\bar{Q}_R	Flujo volumétrico real [1];
$\bar{\Phi}$	Función fluidez [1];
$\bar{\omega}$	Frecuencia angular [1];
\bar{t}	Tiempo [1];



Vector, diadas y tensores

V	Vector velocidad [m/s];
$V \otimes V$	Producto diádico del vector de velocidad [m ² /s ²];
D	Tensor rapidez de deformación [1/s];
f	Fuerza de cuerpo [N/m ³];
σ	Tensor de esfuerzos [Pa];
W	Tensor vorticidad [1/s];
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s];
∇V^T	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s];
I_D	Segundo invariante del tensor rapidez de deformación [1/s];
σ	Tensor de esfuerzo cortante [Pa];
R	Vector posición [m];
n	Vector director [m];
g	Aceleración de las fuerzas gravitacionales [m/s ²];
q	Vector de flujo de calor [W m ⁻²];
∇u	Tensor de deformación [1]
$D = D^T$	Transpuesta del tensor de deformación [1/s]

Otros símbolos

$()^T$	Transpuesta de una matriz [1];
∇	Operador gradiente [m ⁻¹];
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [m ⁻¹];
∇^2	Operador Laplaciano [m ⁻¹];
$\overset{\nabla}{\sigma}$	Derivada convectiva superior del modelo de Maxwell [1/s];
Tr	Traza de una matriz [1];
$\langle \cdot \rangle$	Valor promedio [1];
{sen,cos}	Función seno y coseno [1];
\times	Producto vectorial cruzado [1];
\cdot	Determinante [1];
\neq	Diferente de zero [1];
{(.), (:)}	Producto tensorial de punto simple y doble [1];
e^x	Función exponencial [1];
\mathfrak{S}	Factor geométrico [m ²];
{∇, ∇_s}	Operadores de superficie nabla y nabla _s [m ⁻¹]
π	Constante pi [1]
{d/dt, d/d ξ}	Derivada del tiempo espacial [s ⁻¹];
{$\partial/\partial z, \partial/\partial t$}	Derivaciones del tiempo espacial y temporal [m ⁻¹ , s ⁻¹];
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada [1];



$\det \bullet $ { $\infty, \approx, \neq, \infty$ }	Determinante [1]; Infinito, aproximadamente, aproximadamente igual, proporcionalmente [1;]
Subíndice {b, t} {rz, rr, $\theta\theta$, zz}	Se refiere a los fluidos interiores y exteriores [1]; Se refiere a los componentes del tensor de esfuerzo [1];
Superíndice $\dot{} = d/dt, = d^2/dt^2$ T ∇	Se refiere a la primera y segunda derivada [s^{-1} , s^{-1}]; Se refiere al transporte de un tensor [1]; Se refiere a la derivada del tiempo conectivo superior [1];



GLOSARIO

Deformación:	Cambio de posición de un punto material a otro.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.
Esfuerzo en la pared:	Esfuerzo evaluado en la pared.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.
Fluido biológico:	Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.
Fluidos complejos:	Son aquellos que presentan comportamiento reológico en estado estacionario y no estacionario.
Flujo cortante:	Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
Flujo homogéneo:	Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Son aquellos donde la viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Fluido no newtoniano:	La viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Flujo oscilante:	Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.



Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Frecuencia Angular:	Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.
Función de Transferencia:	Relaciona la variable de entrada y salida en un estado dinámico.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Gradiente:	Operador matemático espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.
Modelo de Jeffreys:	Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidez de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Módulo elástico	Está asociado con la energía almacenada en el material, y se mide en pascal.
Módulo viscoso	Está asociada con la energía disipada por el material, y se mide en pascal.
Módulo complejo	Es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elásticos y viscosos.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.
Reología:	Ciencia que estudia la deformación y el flujo de materia cuando es sometida a un esfuerzo.



Tensor de Esfuerzo:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.
Tiempo de retardo:	Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscoelasticidad no lineal:	Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un material.



RESUMEN

En este trabajo, se estudia el efecto del gradiente de presión pulsátil de un fluido biológico viscoelástico (sangre humana con hipercolesterolemia) en un capilar de radio $r=a$ y longitud axial $z=L$. Para describir la transferencia de momento y reología se suponen las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil en la dirección z y (vii) la reología del sistema de flujo es descrita por la ecuación constitutiva del modelo de Maxwell, de un modo y de tres modos aplicada a un sistema biológico particular (sangre con colesterol), la cual acopla los mecanismos elásticos y viscosos en el sistema.

Al combinar la ecuación de momento con la ecuación constitutiva reológica (Maxwell), se obtiene una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la velocidad debido a la inercia y la viscoelasticidad, inducidos por el gradiente de presión pulsátil. Suponiendo, que la función velocidad es continua, el espacio temporal es transformado al espacio de frecuencias utilizando el operador de Fourier.

Al aplicarse la condición de no deslizamiento, se obtienen expresiones analíticas para el perfil de velocidad, el flujo volumétrico y la función de transferencia, que relaciona la variable de entrada (Flujo volumétrico viscoelástico) con la salida (gradiente de presión pulsátil o en términos del flujo volumétrico newtoniano), las cuales dependen del número adimensional de Womersley, el cual relaciona los mecanismos oscilatorios y viscosos respectivamente, y el tiempo reducido de Maxwell. Físicamente, el tiempo reducido se puede interpretar como un cociente entre las viscosidades del solvente y del polímero.

A partir del cálculo de la función de transferencia se obtienen la parte real e imaginaria, las cuales muestran curvas discontinuas y resonantes respectivamente, y se ven afectadas por las propiedades materiales del medio, asociados a los números adimensionales característicos en el sistema

Finalmente, las bondades y predicciones del modelo de Maxwell son probadas con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol y se demuestra la concordancia entre las proyecciones teóricas y los datos experimentales, todo esto en el ámbito del régimen de viscoelasticidad lineal o deformaciones bajas.

Palabras claves: Función de transferencia, viscoelasticidad lineal, modelo de Maxwell, Sangre humana con contenido de colesterol.



ABSTRACT

In this work, the effect of the pulsatile pressure gradient of a biologic viscoelastic liquid (human blood with hypercholesterolemia) in a capillary of radius $r=a$ and axial length $z=L$ was studied. To describe the momentum transfer and rheology, the following conditions are assumed: (i) isothermal process, (ii) incompressible fluid, (iii) non-steady state, (iv) viscoelastic fluid, (v) the gravitational effects are negligible, (vi) the system (fluid) is continuous and irreversibly deformed by a pulsatile pressure gradient in the axial z direction, (vii) the flow system rheology is described by the constitutive equation of the Maxwell model, in a way and in three ways applied to a particular biological system (blood with cholesterol), which couples the elastic and viscous mechanisms in the system.

By combining the momentum equation with the rheological constitutive equation (Maxwell), a linear partial differential equation that describe the changes in the velocity gradient due to inertia and viscoelasticity is obtained, all of this induced by a pressure gradient. Assuming that the function is continuous, the temporary space is transformed to the frequency domain using the Fourier operator.

Assuming the non-slip condition, analytical expressions for the velocity profile, the volumetric flow and the complex transfer function, which relates the input variable (viscoelastic volumetric flow) to the output (pulsatile pressure gradient or in term of Newtonian volumetric flow), are obtained as a function of Womersley's dimensionless number, which, relates the oscillatory and viscous mechanisms respectively, and the Maxwell reduced dimensionless time. Physically, the reduced time can be interpreted as a quotient between the viscosities of the solvent and the polymer.

From the calculation of the transfer function, the real and imaginary parts are obtained, which show discontinuous and resonant curves respectively, and are affected by the properties material of the medium, associated with the characteristic dimensionless numbers in the system.

Finally, the benefits and predictions of the Maxwell model are tested by blood rheometric data with cholesterol content and agreement between the theoretical projections and the experimental data, all this in the field of linear viscoelastic regimen or low deformations, is demonstrated.

Keywords: Transfer function, linear viscoelasticity, Maxwell model, human blood with cholesterol content.



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia, y su aplicación es muy diversa, desde sistemas biológicos, polímeros, materia blanda y fluidos complejos (Bird et al. 1977). Por ejemplo, i) en los sistemas biológicos, se tienen las células ciliadas externas que son las causantes de amplificar el sonido que entra al oído externo (Abou-Daka et al. 2012, Herrera-Valencia et al. 2015). La forma en que estas lo hacen, es cambiando su curvatura por efecto de los campos eléctricos y al entrar en resonancia, estas liberan la energía en el sistema, la cual se amplifica. ii) El flujo electro-osmótico en la sangre se produce cuando un fármaco se libera y por difusión entra al torrente sanguíneo en forma de partículas (Afonso et al. 2015). iii) El corazón bombea y expulsa la sangre en forma de un gradiente de presión pulsátil y al combinarse con las partículas, se presenta un fenómeno electro-osmótico acoplado con un flujo pulsátil sanguíneo (Afonso et al. 2015). Uno de los ejemplos más estudiados es el flujo pulsátil sanguíneo, el cual se genera por efecto del corazón humano. El corazón actúa como bomba peristáltica lo que induce un gradiente de presión pulsátil, lo que permite que la sangre circule con mayor facilidad en el sistema circulatorio (Herrera-Valencia et al. 2017). iv) Otra de las aplicaciones de los sistemas pulsátiles es en la ciencia de polímeros en extrusión de polímeros con boquillas oscilantes (Casualli et al. 1990). Estas, se colocan al final del extrusor y al oscilar se aumenta la temperatura de procesabilidad en el sistema (Herrera-Velarde y Mena 2000, 2001; Herrera-Velarde et al. 2003). Finalmente, v) el estudio de los medios porosos a través de la permeabilidad dinámica y estática en función de la frecuencia y las propiedades materiales de los sistemas empleados (tensoactivos catiónicos), para describir la relación entre la variable de entrada (flujo volumétrico viscoelástico) y la de salida (gradiente de presión pulsátil o en términos del flujo volumétrico newtoniano) (Del Rio 1993; Del Rio y Castrejón-Pita 1997; Del Rio et al. 1998a,b). En las siguientes secciones se presentará el estado del arte del flujo oscilante.

1.1 Flujo pulsátil.

Actualmente, existen en la literatura dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo, es el flujo vibrátil a gradiente de presión constante. Los cálculos más interesantes en los dos sistemas, son la eficiencia en el flujo volumétrico o el aumento de flujo volumétrico y la fracción de potencia empleada por efecto de las oscilaciones, y se define por las siguientes ecuaciones:

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \quad (1.1-1a)$$



$$P(\%) = \frac{\langle Q_0 \nabla P_0 \rangle - Q_0 \nabla P_0}{Q_0 \nabla P_0} \times 100 \quad (1.1-1b)$$

En la Ec. (1-1a) $\langle Q(t) \rangle$ representa el flujo perturbado (pulsátil u oscilante) y Q_0 es el flujo a gradiente de presión constante. Las Ecs. (1-1a y 1-1b) es una forma de cuantificar los efectos que produce la perturbación pulsátil u oscilante en el flujo volumétrico (Barnes et al. 1989; Bird et al 1987; Phan-Thien 1978, 1980 a,b, 1982; Phan-Thien y Dudek 1982 a,b). Sobre estos sistemas se han publicado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales con el fin de analizar estos interesantes problemas (Barnes et al. 1969, 1971; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; Herrera et al 2009, 2010, 2017).

Los flujos oscilatorios y vibrátiles sean aplicado en fluidos no-newtonianos: (i) viscosos inelásticos y (ii) viscoelástico lineales y no lineales, (iii) complejos (macromoléculas, cristales líquidos, sistemas micelares, polímeros asociativos, coloides, sangre, etc.) (Barnes et al. 1969, 1971; Casualli et al. 1990; Davies et al. 1978; De Andrade Lima y Rey 2005, 2006; Herrera-Valencia et al. 2009, 2010, 2016, 2017; Herrera y Rey 2014; Herrera-Velarde y Mena 2000, 2001; Herrera-Velarde et al. 2003; Manero y Mena 1977; Manero y Walters 1980; Lin et al. 2015; Moyers-Gonzalez y Owen 2010; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c, 2009; Phan-Thien 1978, 1980a,b, 1982; Phan-Thien y Dudek 1982a,b).

Las principales conclusiones de estos trabajos, son mencionadas a continuación:

- I. La eficiencia o aumento en el flujo volumétrico (Ec. 1-1a), dependen de la amplitud de las perturbaciones, frecuencia angular y de las propiedades materiales de los líquidos (viscosidades a bajo y alto corte, y los tiempos de relajación) (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002).
- II. Para que existan aumentos en los dos sistemas (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared) el líquido analizado debe ser adelgazante al corte, i.e., la función viscosidad debe cambiar por efecto de la rapidez de deformación (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; Barnes et al. 1969, 1971; 1989; Bird et al. 1987; Bird et al. 2002; Herrera et al. 2009, 2010, 2017).
- III. El máximo en las curvas resonantes (eficiencia o aumento en el flujo volumétrico vs gradiente de presión) está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticos del material (Phan-Thien 1978, 1980a,b, 1982; Phan-Thien y Dudek 1982a,b).



- IV. Experimentalmente se demostró que, para algunos valores de frecuencia, la eficiencia aumenta mientras que algunas investigaciones muestran el comportamiento opuesto, i.e. decreciente (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987).

1.2 Antecedentes.

Los primeros estudios del flujo pulsátil se centran en el trabajo de Fredrickson (1964), el cual estudio el flujo pulsátil de un fluido de Maxwell. (Bird et al. 1977) (Problema V₄, primera edición). En su trabajo Fredrickson postula que las variables cinemáticas y dinámicas se pueden expresar como el producto de una función que depende de la posición, y del tiempo a través de una función exponencial compleja. Los resultados de Fredrickson, demostraron que el flujo volumétrico, depende de la densidad, propiedades geométricas del sistema y de un cociente de funciones de Bessel, las cuales proveen curvas resonantes y discontinuas en el espacio complejo asociados a las oscilaciones de estas funciones especiales. En forma adimensional, el flujo volumétrico pulsátil en el régimen inercia-viscoelasticidad lineal, el grupo adimensional que describe los mecanismos involucrados, el número de Reynolds, Deborah o Womersley (Del Rio 1993; Del Rio y Castrejón-Pita 1997; Del Rio et al, 1998a,b).

1.2.1 Régimen de viscoelasticidad lineal.

En el régimen de viscoelasticidad lineal, muchos investigadores han trabajado el modelo de Maxwell, por su simplicidad. Del Rio et al. (1998) estudio el flujo pulsátil sanguíneo para el modelo de Maxwell. Suponiendo estado no estacionario, y despreciando términos no-lineales, se demuestra que el flujo volumétrico se puede expresar en términos de una función de transferencia compleja reducida, que es el cociente de la función de transferencia dinámica y estática (tiempos largos). En sus resultados, ellos analizaron el efecto de la inercia y viscoelasticidad en la respuesta dinámica del flujo entre la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico viscoelástico). Bajo ciertas condiciones físicas, el sistema muestra curvas de tipo resonante, lo que implica un aumento entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico (Del Rio 1993; Del Rio y Castrejón-Pita 1997; Del Rio et al, 1998a,b). Sus resultados teóricos fueron alimentados con datos de sangre fresca y obtuvo resultados aplicados a la relación gradiente de presión-flujo volumétrico, todo esto con un enfoque de aplicación a la bio-reología. El estudio de la función de transferencia es un concepto que ha sido aplicado al estudio de la permeabilidad dinámica en medios porosos (López de Haro et al. 1996).



Inspirado en el trabajo del Del Rio et al. (1998), Dakka et al. (2012) y Herrera-Valencia et al. 2015, Gutiérrez-Aguilar et al. 2017, estudian los mecanismos oscilantes en las células ciliadas externas, que se pueden describir como los mecanismos biológicos que tiene el cuerpo humano para amplificar el sonido. Ellos obtuvieron una función de transferencia compleja en función, de las variables de entrada (campo eléctrico) y la de salida (curvatura o flujo volumétrico). La comparación entre los dos mecanismos, es que en ambos la resonancia es vital para sus procesos biológicos y esta depende de las propiedades materiales del sistema y es gobernada por los grupos adimensionales que describen la interacción o relación entre los mecanismos, e.g. inerciales-viscoelásticos, oscilatorios-viscosos, etc.

1.2.2 Aproximaciones matemáticas en el flujo oscilatorio.

La solución de las ecuaciones acopladas en el flujo oscilatorio: (i) pulsátil y (ii) vibrátil, han sido muy variadas. En el régimen newtoniano se han deducido expresiones analíticas para el aumento del flujo volumétrico y la potencia. Los resultados muestran que, no existe aumento en el fluido newtoniano debido a que la viscosidad es constante, mientras que la potencia utilizada por efecto del flujo pulsátil es mayor que a gradiente de presión constante (Bird et al. 1977). En el régimen viscoelástico lineal se ha utilizado la transformada de Fourier, con el fin de obtener una relación entre el gradiente de presión pulsátil y el newtoniano (Del Rio et al. 1988). Por otra parte, el problema de incorporar un gradiente de presión pulsátil en la ecuación de movimiento ha sido punto de partida en esquemas per turbativos.

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 (1 + \varepsilon n(t)) \quad (1.2-1)$$

En la ecuación anterior, ε es un parámetro de pequeñez, $n(t)$ es una función estocástica que describe las desviaciones del gradiente de presión constante. A partir de este hecho, muchos autores han demostrado que el problema del flujo pulsátil es de tipo perturbativo, en donde las variables perturbadas son la velocidad axial, el flujo volumétrico, rapidez de deformación, el esfuerzo cortante, etc. (Phan-Thien 1978, 1980a-c, 1982; Phan-Thien y Dudek 1982a, b; Herrera et al. 2009, Herrera-valencia et al. 2010, 2016, 2017). El esquema perturbativo aplicado a las ecuaciones que describían el flujo pulsátil fue resuelto hasta el segundo orden. Nótese, que en el esquema perturbativo de Phan-Thien el orden cero, corresponde al flujo homogéneo en estado estacionario, el primer orden a los mecanismos inerciales y el segundo a los elásticos. Su esquema perturbativo, permitió obtener las siguientes conclusiones: a) El aumento en el flujo volumétrico es un efecto de los mecanismos adelgazantes al corte, b) El máximo de las curvas resonantes se



debe a un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas del sistema y c) el efecto de la frecuencia es la de aumentar el máximo en las curvas resonantes.

Los resultados de los trabajos del grupo de investigación de Phan-Thien fueron obtenidos con diferentes líquidos viscosos y viscoelásticos como: (i) Ley de Potencia, (ii) Modelo de Tanner acoplado con la ecuación constitutiva de Carreau, modelo constitutivo de Goddard-Miller, etc.

Por otra parte, los métodos numéricos son fundamentales en la descripción del flujo pulsátil. Muchos de ellos, se basan en diferencias finitas, elemento o volumen finito y métodos de Galerkin, etc (Davies et al. 1978; De Andrade Lima y Rey 2005, 2006; Manero y Walters 1980; Owen 2006; Moyers-Gonzalez y Owen 2006, 2010; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c, 2009). Algunos autores han ocupado sofisticados programas que permiten mediante una interfaz modelar los efectos del flujo pulsátil en sistemas complejos como cristales líquidos (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).

1.2.3 Resultados experimentales y computacionales.

Los trabajos mencionados antes demostraron que la eficiencia o el aumento al flujo volumétrico dependen de la amplitud de las perturbaciones, de la frecuencia, de las propiedades adelgazantes al corte del líquido y de la ecuación constitutiva que se utiliza para describir el flujo. El estudio de flujos oscilantes tiene una amplia historia, y muchos de ellos están basados en líquidos poliméricos de alto peso molecular (Barnes et al. 1989; Bird et al. 1987). Barnes et al. (1969) presentaron una disertación teórica y experimental acerca del flujo pulsátil en una tubería de radio constante. Como líquido de estudio utilizaron una solución de poliacrilamida y sus cálculos teóricos estuvieron basados en consideraciones inelásticas (es decir, en donde los mecanismos viscosos son dominantes sobre los elásticos) y los parámetros de la ecuación constitutiva fueron extraídos directamente de datos reométricos. Para su trabajo experimental utilizaron los siguientes valores de amplitud, radio del cilindro y frecuencia: (i) $\varepsilon = 0.2$, (ii) $\omega = 0.88$ rad/s y (iii) $R = 0.16$ cm. Sin embargo, en la parte experimental de su trabajo, para una solución de poliacrilamida de 1.5 y 8 % en peso se obtuvo un aumento del 20 y 8 % respectivamente. Sus predicciones teóricas demostraron la misma tendencia que la parte experimental pero cuantitativamente hubo una diferencia por un factor de 2 con los experimentos. La discrepancia ente los resultados teóricos y experimentales fue asociada a los efectos elásticos del flujo sobre la poliacrilamida. Por esta razón, Walters y Townsend (1970) estudiaron el flujo pulsátil de un líquido viscoelástico caracterizado con un modelo corrotacional de cuatro constantes tipo Oldroyd-B. Sus predicciones fueron similares a las de Barnes et al. (1969). Ellos demostraron que la eficiencia depende de la amplitud de la perturbación y que, para un cierto valor crítico del gradiente de presión, se aprecian aumentos considerables en el flujo volumétrico. Además, sus cálculos teóricos demostraron que la eficiencia es una



función creciente o decreciente de la frecuencia para un gradiente de presión constante.

1.2.4 Discrepancias entre la teoría y la experimentación.

Por otra parte, y en la misma línea, Barnes et al. (1971) estudiaron el mismo problema, utilizando datos visco-métricos para alimentar su modelo. Las conclusiones principales de su trabajo basado en el modelo Newtoniano Generalizado son:

- (i) a bajas frecuencias, los resultados experimentales con una solución de poliacrilamida demostraron que el flujo volumétrico perturbado decrece conforme aumenta la frecuencia de las pulsaciones y
- (ii) a frecuencias altas la eficiencia aumenta conforme la frecuencia de las pulsaciones lo hace.

De acuerdo con esto, existen discrepancias entre los resultados teóricos con el modelo viscoelástico de cuatro constantes propuesto por Walters y Townsend (1970) y los resultados teóricos-experimentales de Barnes et al (1971).

Por estos motivos, los métodos computacionales empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido de gran interés con el fin de obtener resultados más precisos en la obtención de la eficiencia. Townsend (1973) resolvió el flujo pulsátil como un problema de valor inicial mediante un algoritmo computacional basado en un esquema perturbativo y utilizando un método numérico tipo Runge-Kutta clásico de cuarto orden. Una de las ventajas de éste es su gran estabilidad computacional y versatilidad en las cantidades físicas importantes (amplitud de la perturbación, frecuencia, propiedades materiales de la ecuación constitutiva etc.).

Para el intervalo de frecuencias que utilizaron, Barnes et al. (1971) y Edwards et al. (1972) estudiaron la eficiencia y la potencia requerida para el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil. Para caracterizar su líquido, utilizaron dos modelos viscosos (ley de potencia y Ellis) y resolvieron el problema de valor inicial empleando un método de diferencias finitas. Sus principales conclusiones incluyeron, que el aumento en el flujo volumétrico no depende de la frecuencia de las pulsaciones, solamente de su amplitud y del índice del modelo de ley de potencia, asociado con las propiedades adelgazantes del líquido.

Sin embargo, la potencia requerida para mantener el flujo pulsátil es siempre positiva, lo que implica que no existe ninguna ventaja de tipo energética en bombear un líquido viscoso mediante un gradiente de presión pulsátil. Por último, ellos concluyeron que la diferencia entre sus resultados y los de Barnes et al. (1971) están asociados a las ecuaciones constitutivas que fueron empleadas en los experimentos.



Por otra parte, en la mayoría de los trabajos, los efectos inerciales y elásticos son despreciados en el cálculo de la eficiencia. Por esta razón, Davies et al. (1978) analizaron el flujo a gradiente de presión pulsátil incorporando los mecanismos mencionados anteriormente. Para caracterizar su líquido viscoelástico, utilizaron un modelo de Goddard-Miller, el cual demostró las mismas discrepancias entre la teoría y la parte experimental mencionadas por Barnes et al. (1971). Sus conclusiones principales son enlistadas a continuación:

- (i) Los mecanismos inerciales y elásticos no son los responsables del aumento en el flujo volumétrico,
- (ii) La discrepancia entre la teoría y los datos experimentales han sido asociados a flujos secundarios.
- (iii) El aumento en el flujo volumétrico depende fuertemente de la curva de viscosidad que se empleé.

Conclusiones similares a las de Davies et al. (1978), han sido obtenidas por diferentes investigadores, utilizando diferentes ecuaciones constitutivas Phan-Thien resolvió los dos sistemas de flujo (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared). Mediante desarrollos perturbativos-estocásticos y numéricos, con un número considerable de ecuaciones constitutivas (Tanner, newtoniano generalizado, redes no afines, Wagner, fluidos débilmente elásticos etc.). Las conclusiones principales de sus trabajos fueron:

- (i) Para que exista aumento en el flujo, la función viscosidad debe disminuir con el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, es decir, el líquido debe ser adelgazante al corte.
- (ii) La eficiencia o el aumento del flujo volumétrico es muy sensible al tipo de ecuación constitutiva que se utilice.
- (iii) El valor del gradiente de presión al cual se obtiene el máximo en las curvas eficiencia-gradiente de presión, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas de los líquidos.
- (iv) De acuerdo con su esquema perturbativo, la eficiencia es un fenómeno de segundo orden en el parámetro de expansión (amplitud de las perturbaciones).

Finalmente, existen una gama de posibilidades de estudio en el flujo pulsátil o vibrátil en el régimen de viscoelasticidad no-lineal acoplada con diferentes mecanismos. Sin embargo, en este trabajo nos enfocaremos en el régimen de viscoelasticidad lineal, i.e. bajas deformaciones. El objetivo es desarrollar una metodología para estudiar cualquier sistema viscoelástico lineal, utilizando una formulación basada en la transformada especial de Fourier. Para ello, queremos obtener una expresión, que permita cuantificar el efecto de las propiedades pulsátiles y materiales del flujo newtoniano al viscoelástico. Por eso, **en este**



proyecto de licenciatura, se tomará como base las siguientes restricciones para modelar el flujo de un fluido viscoelástico pulsátil y su aplicación en sangre humana con colesterol utilizando la transformada de Fourier.

Las principales restricciones son descritas a continuación:

- A) Para describir el flujo pulsátil, se modela el flujo sanguíneo en un capilar de radio constante, es decir, no existe cambios en el radio por efecto de la longitud axial. Se desprecian la vascularización de las venas y solo se describe el efecto del flujo pulsátil en una vena.
- B) Para caracterizar nuestro fluido utilizamos el modelo viscoelástico de Maxwell, el cual, contiene dos propiedades materiales como las son: tiempo de relajación y modelo elástico de Maxwell. Este sistema acopla la contribución de un fluido newtoniano asociado al solvente y uno viscoelástico de Maxwell, el cual, describe la solución polimérica.
- C) Para describir la cinemática del fluido en el sistema, despreciamos los efectos convectivos de la ecuación de movimiento resultando un modelo dinámico lineal que combina los efectos viscoelásticos con los de la inercia.
- D) Para resolver la ecuación dinámica lineal se utiliza el formalismo de Fourier, el cual, nos permite obtener expresiones cerradas para la velocidad y el flujo volumétrico y analizar la respuesta dinámica oscilatoria en el sistema.
- E) El flujo volumétrico dinámico es función de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión, propiedades geométricas, propiedades del medio como son: (i) viscosidad y (ii) densidad del fluido y finalmente de la función de transferencia compleja que incluye los efectos inerciales y viscosos mediante un cociente de funciones de Bessel que proporcionan un comportamiento oscilante y resonante en el sistema.
- F) Los mecanismos de transferencia de energía y de masa no son tomados en cuenta, debido a que la complejidad de nuestro sistema aumentaría porque se habría que acoplar en la ecuación de momento, la de energía y masa.

Hasta este momento, existen varias preguntas que deben ser contestadas las cuales son formuladas a continuación:

- ✓ La función de transferencia depende solamente de los números adimensionales del medio, es decir, es independiente del fluido. En este caso, se puede separar el problema en utilizar las ecuaciones empíricas de la Tabla (1) y modelar el fluido con alguna de las ecuaciones constitutivas de la Tabla (2).
- ✓ El efecto de las propiedades del fluido debe influir en la función de transferencia combinado con la fuerza motriz, i.e. no solamente las propiedades del diámetro y geométricas sino también las propiedades



materiales del fluido (función de fluidez, densidad, etc.) y el gradiente de presión.

- ✓ Por último, la función de transferencia, depende de las propiedades materiales, y nos proporciona las desviaciones del comportamiento newtoniano por los efectos de los mecanismos oscilatorios y viscoelásticos del medio.

1.3 Objetivos.

En esta sección, se presentan el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis del trabajo de esta investigación.

1.3.1 Objetivo General.

El objetivo esencial del presente trabajo, es contribuir al entendimiento del efecto de gradiente de presión pulsátil de un fluido viscoelástico lineal caracterizado por el modelo de Maxwell.

1.3.2 Objetivos particulares.

- ✓ Establecer un modelo dinámico lineal que involucre los mecanismos inerciales viscoelásticos lineales a partir de la ecuación de momento y la ecuación reológica constitutiva de Maxwell.
- ✓ Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar la ecuación dinámica lineal y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.
- ✓ Aplicar el formalismo de Fourier para resolver la ecuación dinámica lineal propuesta y obtener una expresión analítica que relacione el perfil de velocidades y el flujo volumétrico asociado con el gradiente de presión pulsátil.
- ✓ Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y la función de transferencia real y compleja, tomando en cuenta los efectos inerciales de la ecuación de momento.
- ✓ Utilizar datos reométricos de un fluido viscoelástico biológico (sangre con trastornos alimenticios: hipercolesterolemia) provenientes de la literatura, con el fin de alimentar los resultados analíticos obtenidos y analizar sus predicciones con datos reales.



1.4 Hipótesis.

Si el efecto de agregar un gradiente de presión pulsátil módica el flujo volumétrico en el sistema, entonces, este se calculará a través del aumento de flujo en función de los números adimensionales característicos y las propiedades materiales asociados a estos.

Por otro lado, y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actúales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como a la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura. Para este efecto, la distribución y el contenido del material de la presente tesis se muestran en la Fig. (1.1).

1.5 Distribución del material de la tesis de licenciatura

Este documento está organizado de la siguiente manera: en el capítulo I, contiene la introducción al problema y los antecedentes, las cuales involucra los objetivos e hipótesis. En el capítulo II, se discute el marco teórico en donde se ven los elementos básicos de fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos, las ecuaciones de continuidad y transportes básicos, el modelo teórico, la variable y los grupos adimensionales, así como, las propiedades estocásticas de la serie aleatoria de Fourier $n(t)$ utilizada para describir el ruido en el sistema acoplado. En el capítulo III, se discute el problema físico, y el modelo constitutivo empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo. En el capítulo IV, se presenta el modelado matemático en estado estacionario, en el régimen viscoso, mientras que en el régimen de viscoelasticidad, son analizados el lineal (bajas deformaciones) y no lineal (altas deformaciones). En el régimen de viscoelasticidad lineal, la ecuación diferencial lineal se resuelve por transformada de Fourier, obteniéndose la función de transferencia, mientras que a deformaciones altas (viscoelasticidad no-lineal) por un método perturbativo a ordenes: primero y segundo respectivamente. En todos los casos, se obtiene soluciones analíticas para la fluidez, flujo volumétrico, aumento de fluidez y potencia pulsátil. En el capítulo V, se presentan las predicciones de los modelos teóricos desarrollados y se obtiene las predicciones de los mismos, variando los grupos adimensionales correspondientes. En el capítulo VI, se describe el análisis de resultados, conclusiones y trabajo a futuro. Los apéndices al final de esta tesis muestran los resultados matemáticos más importantes. Por otro lado, y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actúales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de tesis de



licenciatura. Para este efecto, la distribución y el contenido del material de la presente tesis se muestran en la Fig. (1.1).



Figura 1.1 Organización del trabajo desarrollado en la tesis.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO



2.1 Hemorreología: Sangre humana.

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos en término de dos parámetros principales: el esfuerzo y la deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no newtoniano que cuenta con características adelgazantes al corte (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado menor es su viscosidad). Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, ente otros factores (Calderas et al 2013).

El estudio de la sangre presenta un reto a nivel científico, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de la misma y, el segundo, el efecto de trastornos alimenticios que inducen diferentes patologías en el cuerpo humano, entre las cuales se pueden citar:

- (i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, que se han declarado como epidemia nacional,
- (ii) la hipercolesterolemia asociado con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan los infartos al miocardio,
- (iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y todo tipo de enfermedades de trasmisión sexual.

La sangre humana es un fluido con funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno, la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el transporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la actualidad dan problemas que atañen a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como el hipercolesterolemia familiar. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre > 200 mg/ dl) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, y el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continúa. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células, el contenido de proteínas y metabolitos en el plasma. El colesterol total junto con los triglicéridos, son las sustancias que más afectan la reología de la sangre humana. La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes de las de la sangre con



concentraciones normales; la diferencia de viscosidad entre ambas es del orden de 10 veces mayor (Calderas et al 2013).

2.1.1 La sangre humana: un fluido no newtoniano.

La sangre humana se ha considerado en algunas investigaciones como un fluido newtoniano, es decir, en muchas simulaciones y artículos, se supone que su viscosidad no depende del esfuerzo aplicado. Esto no es cierto, para que la sangre se comportara así, tendría que estar diluida. La sangre está compuesta de células suspendidas en un medio líquido (plasma) y la interacción entre las células depende de la velocidad a la cual se mueve el fluido; cuando dicho fluido está estático, la repulsión entre las células de la sangre, debida a la carga negativa de sus membranas, el contenido de colesterol total y triglicéridos interactúan en un balance tal que los eritrocitos no coalescen en estructuras estables, esto ocurre solo cuando la sangre está en presencia de un anticoagulante como el ácido etilen-diamin-tetraacético (EDTA) y no existe una patología asociada (Calderas et al. 2013; Bird et al. 2002).

2.1.2 Las propiedades del flujo de la sangre dependen de varios factores.

La sangre es un fluido con reología compleja, cuyas propiedades de flujo resultan afectadas por la orientación y deformabilidad de las células sanguíneas. Las propiedades de agregación transitoria de las células sanguíneas, en este caso los glóbulos rojos y las plaquetas, obedecen a una teoría que sostiene que las macromoléculas, como el colesterol, promueven la agregación transitoria de los eritrocitos, ya que se interponen entre una célula y otra y generan puentes entre sus membranas para reducir la interacción electrostática natural entre estas (Calderas et al. 2013).

2.1.3 Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no newtoniano.

Un fluido newtoniano como el agua es un sistema homogéneo de una sola fase, no tiene partículas en suspensión que puedan interactuar, además de que su estructura química es simple por ser una molécula pequeña compuesta solo por un átomo de oxígeno unido a dos átomos de hidrógeno. Por esta razón, el agua en estado líquido tendrá la misma viscosidad independientemente de la rapidez con la que se deforme. La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase continua (plasma), que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tienen una carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar, a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie. La Fig. (2.1) ilustra las predicciones del



modelo de Carreau con datos reométricos de sangre humana con niveles de colesterol normales. En el reograma, se observa que la curva presenta adelgazamiento al corte, es decir, a mayor velocidad de corte la función viscosidad disminuye. A bajas rapidez de deformación, la sangre muestra una viscosidad constante, i.e. los hematocritos forman conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo (Estado S1 en la Fig. 2.1).

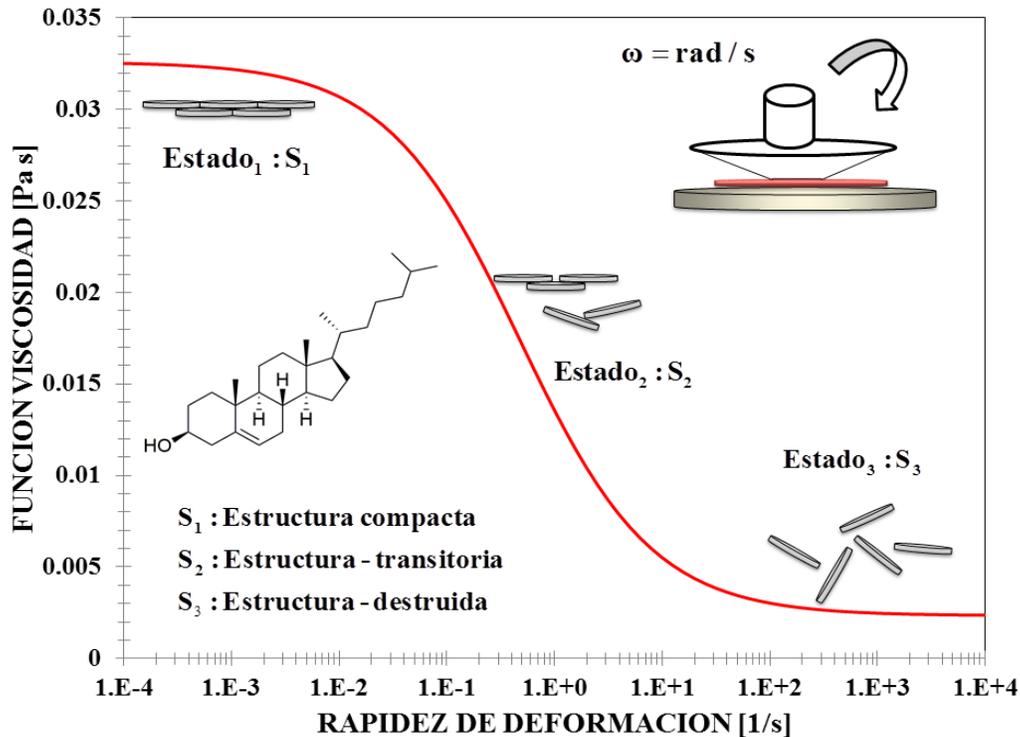


Figura 2.1 *Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.*

Fuente: Moreno, L., Calderas, F., Sánchez Olivares, G., Medina Torres, L., Sánchez Solís, A. and Manero, O. (2013). La sangre humana desde el punto de vista de la reología. *Materiales avanzados*, (20), pp. 33-37.

A una rapidez de deformación crítica, la sangre presenta un cambio en su viscosidad asociada a que los constituyentes de esta (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye, i.e. el sistema presenta adelgazamiento al corte. Por último, a rapidez de deformación alta [100 s^{-1}], el sistema presenta una segunda zona de viscosidad constante en donde



la viscosidad del hematocrito es del orden de la del plasma. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapidez de deformación del orden de $1-100 \text{ s}^{-1}$ que corresponde a la parte central del reograma teórico (Calderas et al. 2013; Moreno et al. 2015; Herrera-Valencia et al. 2016, 2017). Se puede observar que la viscosidad de la sangre depende de las propiedades de agregación de los glóbulos rojos, y esta obedece a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electrostática natural entre dos células.

2.1.4 Como se estudia la sangre en un reómetro.

La sangre, como cualquier otro fluido, puede estudiarse mediante técnicas reométricas. La sangre humana para su estudio se debe de obtener de voluntarios sanos, sin coagulopatía en curso, mediante la aplicación en un torniquete a la altura del musculo bíceps que genera turgencia para realzar las venas cefálicas y basilica. Se procede a realizar una punción y extraer sangre (5 mL aproximadamente) en un tubo adicionado con EDTA para evitar la coagulación de la sangre durante el ensayo. Los ensayos efectuados se hacen en situaciones de flujo controlado como el denominado flujo de corte simple en estado estacionario, en el que fluido se coloca entre un disco y un cono (con un ángulo pequeño cercano a un grado) del mismo diámetro, el cono gira a una velocidad angular controlada y se determina la viscosidad a diferentes velocidades de giro. La temperatura es controlada durante la prueba y se trata de mantenerla en condiciones similares a las de una persona sana (temperatura cercana a los 37 grados Celsius). El equipo que controla la temperatura, la velocidad de giro del cono y mide el torque generado se denomina reómetro. En este caso se utiliza un equipo de la marca TA Instruments modelo AR-G2, con geometría de cono y platos a una temperatura de 37 °C. Para caracterizar los fluidos, se han utilizado diferentes ecuaciones constitutivas. Las investigaciones realizadas en este campo, se han basado en el estudio de líquidos newtonianos y no newtonianos. Los flujos oscilantes en sus dos versiones, han sido caracterizados con diferentes ecuaciones constitutivas para líquidos débilmente elásticos y viscoelásticos. La mayoría de estos trabajos, han empleado diferentes ecuaciones reológicas (Calderas et al. 2013; Moreno et al. 2010).

2.2 Aproximaciones matemáticas.

En las últimas décadas, el estudio del flujo oscilante se ha centrado básicamente en métodos analíticos y numéricos avanzadas, con el fin de obtener resultados que describan con mayor precisión la parte fenomenológica de estos



sistemas físicos utilizado diferentes ecuaciones constitutivas. Por otra parte, existen trabajos en la literatura donde las técnicas perturbativas antes descritas no son aplicables, por lo que se debe recurrir a métodos variacionales y computacionales tipo Galerkin (Herrera et al. 2009).

Tabla 1. Modelos viscoelásticos más representativos en la descripción del flujo pulsátil.

Régimen	Modelos	Modelo Reológico	Función Viscosidad
VISCOSO	Ley de Potencia (Ostwald)	$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = m\left(n\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)$
	Ellis	$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{ \sigma }{\sigma_{1/2}}\right)^{\alpha-1}}$
	Reinner Phillipoff	$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_\sigma) = \frac{1}{\varphi_\infty + \frac{\varphi_0 - \varphi_\infty}{1 + \left(\frac{ \sigma }{\sigma_s}\right)^2}}$
	Carreau	$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda \Pi_D)^2\right]^{(1-n)/2}}$
	Hershel-Bulkley	$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}$	$\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_\infty}{\Pi_D} + m(\Pi_D)^{n-1}$
VISCOELÁSTICO LINEAL	Maxwell	$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 \mathbf{D}$	$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
	Jeffreys	$\sigma + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}$	$\eta = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$
VISCOELÁSTICO NO LINEAL	Convectiva Superior de Maxwell	$\sigma + \lambda_M \overset{\nabla}{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D}$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano
	Oldroyd-B	$\sigma + \lambda_M \overset{\nabla}{\sigma} = 2\eta_0 \left(\mathbf{D} + \lambda_J \overset{\nabla}{\mathbf{D}}\right)$	En corte es la misma que el fluido Newtoniano

Es preciso destacar, que esta tesis solo abordará fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales (Modelo de Maxwell).



Tabla 2. Definiciones de las variables dinámicas de la tabla 1.

Nombre	Simbolo	Unidades (MKS)	Nombre
Tensor de esfuerzo	σ	Pa	Pascal
Tensor rapidez de deformación	D	1/s	Inverso de segundo
Función viscosidad	η	Pa s	Pascal-segundo
Segundo-invariante del tensor rapidez deformación	Π_D	1/s	Inverso de segundo
Tiempo de relajación de Maxwell	λ_M	s	Segundo
Tiempo de retardo de Jeffreys	λ_J	s	Segundo
Viscosidades a bajo y alto corte	η_0 η_∞	Pa s	Pascal segundo
Derivada convectiva superior de Maxwell	∇	1/s	Inverso de segundo

A pesar de existir distintos tipos de ecuaciones, a todas ellas se les exige una serie de requisitos:

- a) La relación entre esfuerzo y deformación debe ser independiente de rotaciones o traslaciones impuestas al fluido.
- b) Debe ser independiente del sistema de coordenadas elegido.
- c) La respuesta del material debe ser independiente de lo que ocurra en los alrededores de los distintos elementos; es decir, para un elemento de fluido se debe satisfacer las condiciones de contorno, pero al margen de esto, su comportamiento debería ser independiente de lo que les ocurra a los elementos vecinos.

2.3 Fenómenos de transporte.

Los fenómenos de transporte, se define como la rama de la termodinámica irreversible que estudia los mecanismos de transporte de momento, energía y masa. Estos, pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987). La ecuación diferencial parcial básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material DX/dt (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987):



$$\frac{D}{Dt} \mathbf{X} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (2.3-1)$$

Tabla 3. Ilustra las variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa respectivamente.

Mecanismo de transporte	X	Y	f
MOMENTO	$\rho \mathbf{V}$	$\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$	$\rho \mathbf{g}$
ENERGÍA	$U = \rho C_p T$	$-k \nabla T$	$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$
MASA	C_A	$N_A = -c D_{AB} \nabla X_A + X_A (N_A + N_B)$	R_A
CONTINUIDAD	ρ	$\rho \mathbf{V}$	0

El primer término de la Ec. (2.3-1), representa la derivada material de la propiedad \mathbf{X} , la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través del negativo de la divergencia del flux \mathbf{Y} y por último, el término que está relacionado a las fuerzas de bulto (momento), trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscosas o viscoelásticas (energía) o la generación por reacción química (materia), (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987).

2.3.1 Ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera (Bird et al. 2002; Bird et al. 1987):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.3-2)$$

En la Ec. (2.3-2) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ es el producto diádico de los vectores de velocidad, p es la presión termodinámica en el sistema, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos que puede ser de naturaleza viscosa o viscoelástico, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es una constante igual a 9.81 m/s².



Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con el tensor rapidez de deformación es lineal, i.e. que la potencia es del tensor rapidez de deformación es uno,

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (2.3-3)$$

y suponiendo que el proceso es isotérmico (temperatura constante), la Ec. (2.3-2) se transforma en la ecuación de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos (Bird et al. 1987, 2002):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (2.3-4)$$

La Ec. (2.3-3) es base para describir la dinámica de flujo en fluidos newtonianos y ha sido ampliamente estudiada analítica y numéricamente en geometrías simples y complejas (Bird et al. 1977) (Capítulos 2,3).

2.3.2 Ecuación de transporte de energía.

La ecuación de energía se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que, desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta.

$$\frac{DU}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) U = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.3-5)$$

Si suponemos que la energía interna del sistema de estudio, se puede expresar como el producto de la densidad, la capacidad calorífica a presión constante, la temperatura en el sistema, i.e. $U = \rho C_p T + \text{cte}$, y suponiendo que el flux de calor y el gradiente de temperaturas se pueden expresar en su forma más simple, i.e. lineal y la constante de proporcionalidad no depende de la temperatura, i.e. es constante, la ecuación de transporte toma la siguiente forma (Bird et al. 1987, 2002):

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.3-6)$$

La Ec. (2.3-6) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como función como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos (Bird et al. 1987,



2002). La Ec. (2.3-6) es punto de partida en el estudio de transferencia de calor en diversos sistemas en donde el transporte molecular de energía (conducción), convección (natural y forzada) y disipación viscosa es importante. Si consideramos, que el fluido es newtoniano, i.e. satisface la Ec. (2.3-3), por lo que:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = k \nabla^2 T + 2\mu (\mathbf{D} : \mathbf{D}) \quad (2.3-7)$$

La Ec. (2.3-7) es punto de partida para estudiar los problemas de disipación de fluidos newtonianos en geometrías simples.

2.3.3 Ecuación de transporte de masa.

La ecuación que describe los cambios espaciales y temporales del flujo molar puede ser descrita a través de la siguiente expresión:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = -\nabla \cdot \mathbf{N}_A + R_A \quad (2.3-8)$$

La Ec. (2.3-8) es punto de partida para estudiar los problemas de transferencia de materia en diferentes sistemas físicos (Bird et al. 2012) (Capítulo 18).

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AB} \nabla x_A + x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) \quad (2.3-9)$$

La Ec. (2.3-9) puede ser reescrita en términos de la velocidad global del sistema:

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AB} \nabla x_A + C_A \mathbf{V} \quad (2.3-10)$$

Al sustituir la Ec. (2.1.10) en la Ec. (2.1-8), se obtiene:

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A \quad (2.3-11)$$

La Ec. (2.3-11) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie por efecto de los mecanismos difusivos y de generación asociados a la reacción química R_A . Si la reacción química es modelada mediante la siguiente ecuación de ajuste:

$$R_A = -k_n C_A^n \quad (2.3-12)$$

Al substituir la Ec. (2.3-12), en la Ec. (2.3-11), se tiene:



$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n C_A^n \quad (2.3-13)$$

La Ec. (2.3-13) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente (Bird et al. 1987, 2002).

2.3.4 Reología.

La Reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia cuando es sometida a un esfuerzo (Bird et al. 1987, 2002). Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades mecánicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas cortantes que se le apliquen, i.e. el sistema fluye debido a una deformación continua e irreversible que se le aplique. Una de las propiedades materiales más importantes en reología es la viscosidad, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et al. 1987, 2002).

2.4. Tensores.

En esta sección, se presentan los fundamentos de reología como son: (i) Los tensores básicos y (ii) ecuaciones constitutivas que describen la naturaleza del material de estudio. En mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular el esfuerzo y la deformación, i.e. $\sigma = f(\epsilon)$.

2.4.1 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2002):



$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.4-1)$$

Se observa, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características.

2.4.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.4-2)$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente tiene unidades de inverso del tiempo.

2.4.3 Tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$ y otra anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de Vorticidad (Bird et al. 1987, 2002):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.4-3)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma matricial (Bird et al. 1987, 2002):



$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.4-4)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente, esta matriz simétrica nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado un elemento de control en el sistema (Bird et al. 1987, 2002).

2.4.4 Tensor de Vorticidad.

El tensor de Vorticidad en coordenadas cartesianas se define de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2002):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4-5)$$

El tensor de Vorticidad, es de segundo orden, anti-simétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente, nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Bird et al. 1987, 2002).

2.4.5 Tensor de esfuerzos.

Al igual que los tensores anteriormente definidos, el tensor de esfuerzos, es de segundo orden, el cual, se puede describir como una matriz simétrica de 3x3 formada por nueve elementos. Los elementos fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales (Bird et al. 1987, 2002). Observe que, los esfuerzos cortantes inducen el movimiento del elemento material de control, mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica de este, pero no su volumen de control. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4-6)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir, los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

2.5. Ecuaciones constitutivas.

2.5.1 Fluido newtoniano.

Desde el punto de vista de la reología, los fluidos newtonianos son aquellos, que no importa la rapidez con la que sean deformados, su viscosidad permanece constante. Matemáticamente, un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación. La ecuación tensorial básica de este tipo de fluidos, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (2.5-1)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (2.5-1) los tensores de esfuerzo cortante y rapidez de deformación $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}\}$ tienen unidades de Pa y s^{-1} en el sistema internacional de unidades. Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (2.5-1) son no-newtonianos.

2.5.2 Fluidos no newtonianos.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son punto de partida en la mayoría de los procesos industriales y el estudio de nuevos materiales, incluyendo aplicaciones tecnológicas e investigación básica.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, soluciones jabonosas, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pastas, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, frecuencia y pH (Bird et al.



1987, 2002). La ecuación básica del fluido no-newtoniano inelástico se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = \eta(\Pi_D)(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) \quad (2.5-2)$$

En la Ec. (2.5-2) $\eta(\Pi_D)$ es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad (2.5-3)$$

En la Ec. (2.5-3) $\mathbf{D}:\mathbf{D}$ es el doble producto tensorial del tensor rapidez de deformación. Este escalar nos da información del tipo de flujo que se está estudiando, i.e. flujo cortante, extensional o una combinación de estos (Bird et al. 1997, 2002). La Ec. (2.5-2) es válida para fluidos no-newtonianos viscosos, para incorporar los mecanismos elásticos se debe de modificar esta para tomar en cuenta este mecanismo.

2.5.3 Viscoelasticidad lineal.

La viscoelasticidad es un tipo de comportamiento reológico que presentan ciertos materiales que exhiben tantas propiedades viscosas con propiedades elásticas cuando se deforman. Un material viscoelástico, es un material para el cual existe una relación lineal entre los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación. Matemáticamente, la relación más simple de un material viscoelástico lineal puede ser expresado de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2002):

$$\boldsymbol{\sigma} + A^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \dots + A^{(n1)} \frac{\partial^{(n1)}}{\partial t^{(n1)}} \boldsymbol{\sigma} = B^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon} + B^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots + B^{(n2)} \frac{\partial^{(n2)}}{\partial t^{(n2)}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5-4)$$

Existen diversos modelos constitutivos para materiales viscoelásticos lineales dependiendo los valores de los coeficientes A y B de la Ec. (2.5-4). Los modelos viscoelásticos más comunes son: (i) Maxwell, (ii) Jeffreys, (iii) Burgers, etc. Todos estos modelos descomponen son combinaciones de resortes y dispositivos de fricción (émbolos) lo que genera los diferentes tipos de ecuaciones constitutivas. En la Fig. (2.2) se observa un dispositivo clásico que representa al modelo viscoelástico más sencillo conocido como fluido viscoelástico de Maxwell.



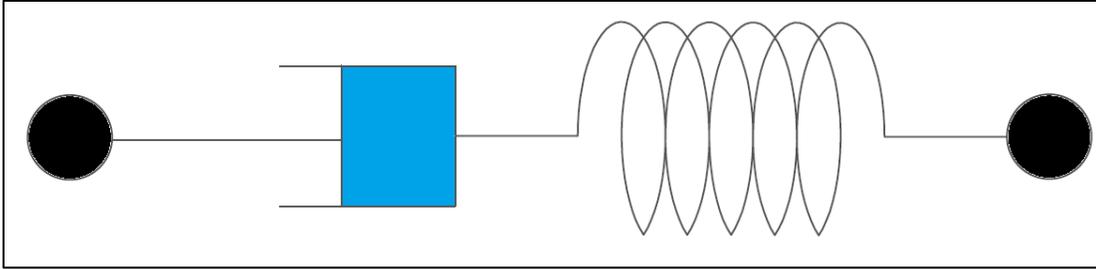


Figura 2.2 Se ilustra el Modelo de Maxwell en término de un pistón y un resorte, el pistón describe la parte viscosa (disipativa) y el resorte la parte elástica (recuperación).

Fuente: Zamora Cisneros, D. (2016). Transformada de Fourier aplicada a la permeabilidad dinámica de un fluido biológico viscoelástico: sangre humana. Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Y otros modelos, que representan los efectos viscosos, siendo estos modelos, interpretables en términos de muelles y amortiguadores. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los muelles y amortiguadores. Además, solo son aplicados a fluidos con gradientes de desplazamiento extremadamente pequeño.

2.5.4 Modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell (Fig. 2.1) se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación:

$$\gamma = \gamma_{\text{Newton}} + \gamma_{\text{Hook}} \quad (2.5-5)$$

Derivando la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hook}} \quad (2.5-6)$$

La contribución de Newton y de Hooke se sustituye en la expresión anterior:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hook}} = \frac{\sigma}{\eta_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma}{G_0} \right) = \frac{\sigma}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \quad (2.5-7)$$

Multiplicando la Ec. (2.5-7) por la viscosidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \sigma + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma \quad (2.5-8)$$



Si se define el tiempo de relajación de Maxwell, como $\lambda_0 = \eta_0/G_0$ por lo que la expresión anterior toma la forma:

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.5-9)$$

Finalmente, si el tensor que describe la evolución de la deformación $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ se expresa en términos del tensor rapidez de deformación, i.e. $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathbf{D}$, por lo que, se tiene el modelo tensorial de Maxwell:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.5-10)$$

El modelo de Maxwell predice que el esfuerzo decaerá exponencialmente con el tiempo en un polímero sometido a deformación constante, lo cual se ajusta bastante bien a lo observado experimentalmente para muchos polímeros líquidos. Sin embargo, una limitación importante es que no predice el comportamiento de flujo lento (creep) de muchos polímeros ya que en este caso predice un aumento lineal de la deformación con el tiempo si el esfuerzo es constante, sin embargo, la mayor parte de los polímeros muestran una tasa de deformación decreciente con el tiempo. Por otra parte, esta ecuación está limitada solamente a deformaciones bajas, mientras que los procesos industriales trabajan a deformaciones moderadas y altas respectivamente, por lo que, se necesitan ecuaciones diferentes al modelo explicado por la Ec. (2.5-7) (Bird et al. 1977, 2002) (Capítulo 8 de Bird et al. 2002).

2.6 Pruebas de flujo.

2.6.1 Flujo cortante en estado estacionario.

En esta prueba, la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo, de tal manera, que la transferencia de momento se da en la componente ortogonal a la velocidad (eje coordenado y) como se muestra en la Fig. (2.3).



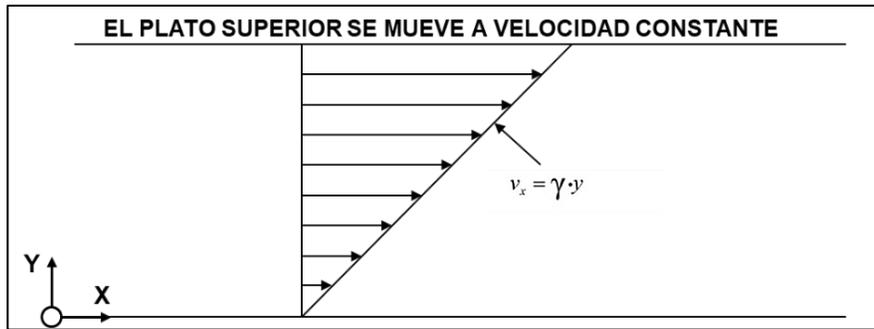


Figura 2.3 Ilustra el flujo cortante simple en un sistema de placas paralelas. El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo (es decir, un sistema en donde, las variables dinámicas del sistema dependen de la posición).

Fuente: Zamora Cisneros, D. (2016). Transformada de Fourier aplicada a la permeabilidad dinámica de un fluido biológico viscoelástico: sangre humana. Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

En el flujo cortante simple, las matrices de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación toman la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6-1)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.6-1) en la Ec. (2.5-7) se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6-2)$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (2.6-2)

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad (2.6-3a)$$



$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) N_1 = 0 \quad (2.6-3b)$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) N_2 = 0 \quad (2.6-3c)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al newtoniano, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \\ N_1 &= 0 \\ N_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6-4a-c)$$

2.6.2 Funciones materiales del modelo de Maxwell.

Las funciones materiales, nos describen la naturaleza física del material sometido a flujo. En corte existen tres principales: (i) La función viscosidad, (ii) El primer coeficiente de esfuerzos normales y (iii) el segundo coeficiente de esfuerzos normales. A partir de las Ecs. (2.6-4a) se tiene lo siguiente:

a) Función viscosidad:

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{xz} \right) = \frac{\sigma_{xz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = \eta_0 \quad (2.6-5)$$

b) Primera diferencia de esfuerzos normales:

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (2.6-6)$$

c) Segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$\Psi_2 = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\gamma}_{xz}} = 0 \quad (2.6-7)$$

Por lo tanto, en estado estacionario, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos, y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son cero.



2.6.3 Flujo oscilatorio de baja amplitud.

En flujo oscilatorio se estudia la respuesta mecánica del material por lo que el modelo de Maxwell toma la siguiente forma en el espacio de Fourier de las frecuencias:

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \quad (2.6-8)$$

Dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la viscosidad compleja:

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (2.6-9)$$

La viscosidad compleja $\eta(i\omega)$ se puede desacoplar en una parte real y otra imaginaria por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1 + i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0\omega}{1 - i\lambda_0\omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{\lambda_0 \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (2.6-10)$$

Separando la parte real y la imaginaria de la Ec. (2.6-10), se tiene la siguiente expresión para la viscosidad real e imaginaria respectivamente:

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0 \lambda_0}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.6-11)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$\eta''(\omega) = \frac{\eta_0 \lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.6-12)$$

Y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$. Por lo que, a partir de las Ecs. (2.6-11) y (2.6-12) se tiene lo siguiente:

$$G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.6-13)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:



$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.6-14)$$

Las Ecs. (2.6-13, 2.6-14) son las expresiones analíticas para los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell respectivamente. Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. Un hecho importante, es cuando se igualan las dos expresiones: $\omega_{\text{cruce}} = 1/\lambda_0$, se obtiene el tiempo de relajación de Maxwell, por lo que en el caso más simple, el sistema de flujo oscilatorio, permite calcular una de las propiedades materiales del sistema, conocida como tiempo de relajación de Maxwell. Obsérvese, que cuando la frecuencia aumenta, la Ec. (2.6-14) tiene a un valor constante, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} = G_0 \quad (2.6-15)$$

Los casos particulares de las Ecuaciones (2.6-13, 2.6-14) nos permiten calcular los parámetros materiales del sistema (η_0 , λ_0 , G_0) respectivamente.

2.7 Ley de Hagen Poiseuille.

En fluido ideal que circula en régimen estacionario por el interior de un conducto la velocidad es la misma para todas las partes de la misma sección transversal. El perfil de velocidad es el que se muestra en la figura.

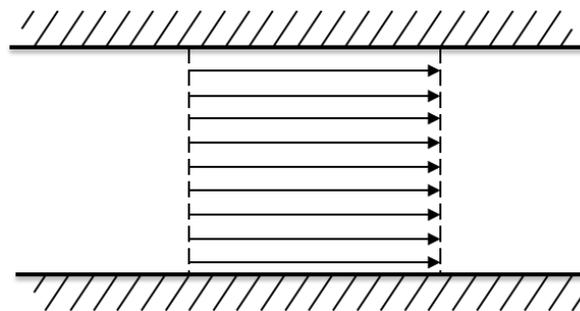


Figura 2.4 Perfil de velocidades típicas de un fluido ideal en el interior de una tubería.

Fuente: Universidad de Alicante. Acústica, Fluido y Termodinámica, 1992.



En un fluido viscoso que circula por el interior de un conducto la velocidad en los puntos de cada sección transversal es diferente. Cuando la velocidad no rebasa un cierto límite el movimiento se realiza por capas superpuestas que no se entremezclan, siguiendo las líneas de corriente caminos aproximadamente paralelos a las paredes. Se dice entonces, que el fluido sigue un régimen laminar y el perfil típico de velocidad es el de la figura que se muestra a continuación:

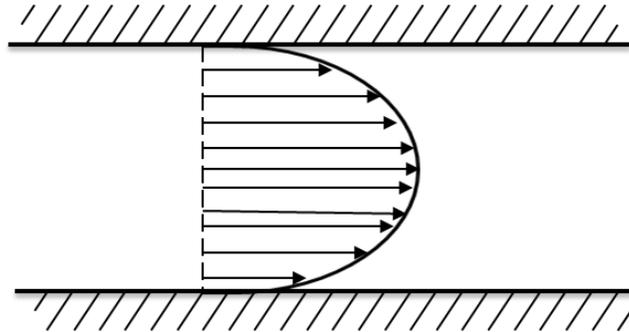


Figura 2.5 Perfil de velocidades típicas de un fluido viscoso en el interior de una tubería (régimen laminar).

Fuente: Universidad de Alicante. Acústica, Fluido y Termodinámica, 1992.

Debido a la viscosidad, la velocidad de un fluido viscoso que pasa a través de una tubería no es la misma en todos los puntos de una sección transversal. Las paredes del tubo ejercen una fuerza de resistencia sobre la capa más externa del fluido, que a su vez actúa sobre la capa inmediata y así sucesivamente. Como consecuencia de esto, la velocidad es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes.

2.7.1 Ecuación de Hagen Poiseuille.

Consideremos un tubo cilíndrico de longitud L y sección circular de radio R , como se muestra en la Fig. (2.6).



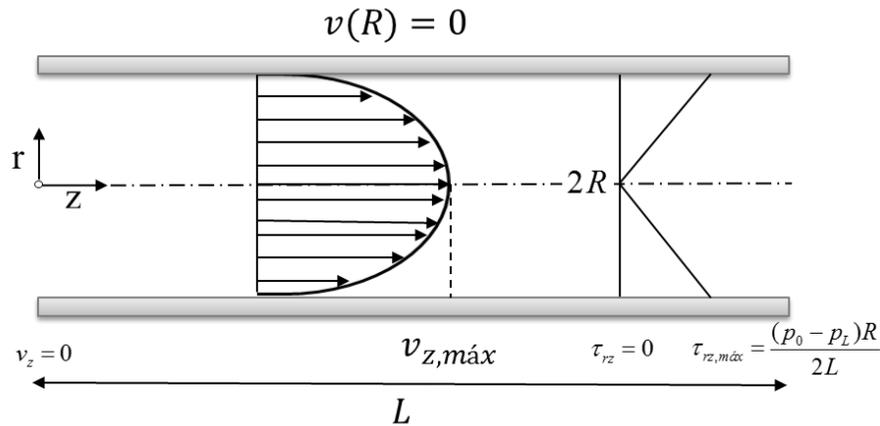


Figura 2.6 Cilindro de radio r se encuentra en equilibrio (moviéndose a velocidad constante) bajo la acción de la fuerza impulsora originada por la diferencia de presión entre sus extremos, menos la fuerza de retardo de viscosidad, que actúa sobre su superficie lateral.

Fuente: Elaboración propia.

A través del cual fluye un líquido de viscosidad μ el cual, es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección axial de flujo (eje coordenado z). Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible, simetría cilíndrica, efectos gravitacionales despreciables, la componente z de la ecuación de movimiento tiene la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \rho g_z \quad (2.7-1)$$

Aplicando las condiciones del sistema, es simplificada la ecuación de movimiento:

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}}_{=0} + \rho g_z \quad (2.7-2)$$

Simplificando la Ec. (2.7-2), se obtiene:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (2.7-3)$$

De la ley de viscosidad de newton para fluidos newtonianos, obtenemos:



$$\sigma_{zr} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (2.7-4)$$

Sustituyendo la ecuación del esfuerzo cortante en la ecuación de movimiento simplificada, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r \quad (2.7-5)$$

Aplicando una doble Integral a la ecuación (2.7-5) respecto a r, se obtiene v_z :

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r + \frac{c_1}{r} \quad (2.7-6)$$

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + c_1 \ln(r) + c_2 \quad (2.7-7)$$

Aplicando las condiciones de adherencia, se determina las constantes c_1 y c_2 :

$$\text{C.F.1: } r = R \quad V_z = 0$$

$$\text{C.F.2: } r = 0 \quad V_{z,\text{máx}} = 0$$

Al aplicar las condiciones de frontera en la Ec. (2.7-7) por lo que, se tienen los siguientes valores:

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.7-8)$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación (2.7-7):

$$v_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.7-9)$$

Posteriormente, se puede obtener la velocidad máxima si $r=0$:

$$v_{z,\text{máx}} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.7-10)$$

El flujo volumétrico, se obtiene al integrar a la ecuación del perfil de velocidad:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) dr d\theta = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{P_0 - P_L}{L} \quad (2.7-11)$$



La velocidad media, es obtenida mediante el cociente de la integral del flujo volumétrico y el área de sección transversal:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{R^2 (p_0 - p_L)}{8\mu L} = \frac{1}{2} v_{z,\text{máx}} \quad (2.7-12)$$

La velocidad de flujo másico w , es el producto del área de la sección transversal, la densidad y la velocidad media:

$$w = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L} \quad (2.7-13)$$

La caída de presión a una distancia L , se obtiene mediante el despeje de la ecuación (2.7-11):

$$P_0 - P_L = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4} \quad (2.7-14)$$

La ecuación de Hagen Poiseuille solo es aplicada bajo las siguientes suposiciones (Bird et al. 2002):

- a) Flujo laminar ($Re < 2100$)
- b) Densidad es constante (flujo incomprensible).
- c) Flujo estacionario (no cambia con el tiempo).
- d) Fluido Newtoniano.
- e) Se ignoran los efectos de entrada y salida del flujo.
- f) El fluido se comporta como un continuo.
- g) Se omite los efectos de deslizamiento en la pared.

2.8. Número de Womersley

El número de Womersley (Wo), se puede definir por la relación:

$$Wo^2 = \frac{\text{mecanismo oscilatorio}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho \omega U}{\mu U L^{-2}} = \frac{\omega L^2}{\mu \rho^{-1}} = \frac{\omega L^2}{\nu} \quad (2.8-1)$$

Es una expresión adimensional de la frecuencia de flujo pulsátil en relación con los efectos viscosos. Es utilizado para determinar el grosor de la capa límite para ver si los efectos de entrada pueden ser ignorados.

$$Wo = L \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}} \quad (2.8-2)$$



Donde L es una escala de longitud, ω es la frecuencia angular de las oscilaciones, y ν , ρ , μ son la viscosidad cinemática, la densidad y la viscosidad dinámica del fluido, respectivamente. El número de Womersley surge en la solución de las ecuaciones linealizadas de Navier Stokes para el flujo oscilatorio (supuestamente laminar e incomprensible) en un tubo. Expresa la relación entre el mecanismo oscilatorio y la fuerza de corte dado por la viscosidad. Cuando Wo es pequeño (<1), significa que la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente baja como para que un perfil de velocidad parabólica tenga tiempo para desarrollarse durante cada ciclo, y el flujo estará casi en fase con el gradiente de presión, y se le dará a una buena aproximación según la ley de Poiseuille, usando el gradiente de presión instantáneo. Cuando Wo es grande (>10), significa que la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente grande como para que el perfil de velocidad sea relativamente plano o parecido a un flujo tapón, y el flujo promedio se retrasa en el gradiente de presión unos 90 grados. Junto con el número de Reynolds, el número de Womersley rige la similitud dinámica. Su aplicación en un sistema cardiovascular, la frecuencia de pulsación disminuye a medida que la sangre se aleja del origen de la pulsación, el corazón. Por lo tanto, el cambio de frecuencia en el flujo sanguíneo no afecta las características definidas por el número de Womersley.



CAPÍTULO III

SISTEMA FÍSICO



3.1 Descripción del problema físico del flujo pulsátil.

En esta sección, se describe el sistema de flujo, las restricciones utilizadas en el modelado y la ecuación constitutiva empleada para su caracterización reológica. El sistema de flujo es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, el líquido se deforma continua e irreversiblemente por medio de un gradiente de presión pulsátil.

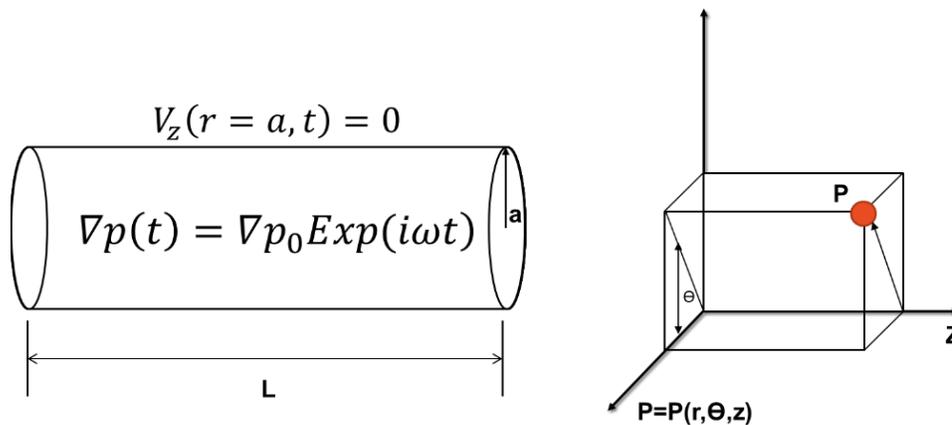


Figura 3.1 Representación esquemática del sistema de estudio. Un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ de un fluido complejo (sangre humana) y fluye por efecto de un gradiente de presión pulsátil. En el lado derecho del capilar, se representa un punto material en coordenadas cilíndricas.

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de proceso se define a continuación:

- Proceso en estado no estacionario: La velocidad depende de la posición ortogonal al flujo y del tiempo de proceso t , i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \partial / \partial t \neq 0$$
- Proceso isotérmico: El sistema mantiene su temperatura constante, i.e. no es necesario incluir el balance de energía térmica en los cálculos.
- Fluido incompresible: El fluido (sangre humana) mantiene su densidad constante, i.e. la densidad no depende de la posición ni del tiempo. Matemáticamente, se tiene un campo sinusoidal en donde la divergencia del vector velocidad es cero: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.
- El fluido se mueve por la influencia de un gradiente de presión pulsátil, i.e. un gradiente que depende de la frecuencia y del tiempo, y que matemáticamente se puede representar mediante una exponencial compleja:
 $\nabla p(t) = \nabla p_0 \text{Exp}(i\omega t)$. En el gradiente de presión pulsátil, ∇p_0 es el gradiente de presión constante en la dirección axial z .



- e) Flujo unidireccional, i.e. el campo de velocidades solo tiene una componente en la dirección del eje coordenado z: $V = [0, 0, V_z(r, t)]$.
- f) Efectos gravitacionales no se toman en cuenta, i.e., las fuerzas de bulto asociados al producto de la densidad del líquido y la gravedad son despreciables.
- g) El sistema de coordenadas se coloca en el centro del capilar como se observa en la Fig. (3.1). El eje de coordenadas “z” corresponde a la velocidad axial del sistema, el eje coordenado “r” al del gradiente de velocidad en donde se transmite el movimiento y el eje angular θ es el neutro, el cual, representa a la vorticidad del sistema.
- h) Existe simetría cilíndrica en el sistema, i.e. ninguna variable, atributo o característica del sistema depende de la coordenada angular θ . Matemáticamente se expresa como:

$$\partial / \partial \theta = 0$$

3.2 Cinemática de flujo.

3.2.1 Vector de velocidad.

El vector de velocidad en este sistema de flujo está dado por el siguiente vector renglón:

$$V = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, t)) \tag{3.2-1}$$

3.2.2 Tensor gradiente de velocidad y traspuesta.

Aplicando el tensor gradiente de velocidad definido en el Cap. II en coordenadas cilíndricas, al vector de velocidad definido en la Ec. (3.2-1), se tiene lo siguiente:

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2-2}$$

Y para la traspuesta de la Ec. (3.2-2) se tiene lo siguiente:



$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2-3)$$

3.2.3 Tensor rapidez de deformación.

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2-4) \end{aligned}$$

El tensor rapidez de deformación, solamente contiene dos términos cortantes.

3.2.4 Tensor de vorticidad.

El tensor rapidez de vorticidad \mathbf{W} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V} - (\nabla \mathbf{V})^T)/2$.



$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{dV_r}{dr} & \frac{dV_\theta}{dr} & \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} & \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} \\ \frac{dV_r}{dz} & \frac{dV_\theta}{dz} & \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}^T \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dV_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2-5)$$

Este tensor nos da información acerca de las rotaciones materiales en el sistema. Por lo tanto, en un fluido cortante existen elementos cortantes que se deforman continua e irreversiblemente y que rotan por efecto del flujo.

3.2.5 Tensor de esfuerzos.

Matemáticamente, el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica que describe la transferencia de cantidad movimiento y físicamente, nos da la distribución de las fuerzas en cada área de los elementos de control que son cortados debido al flujo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2-6)$$

La Ec. (3.2-6) contiene información acerca de los elementos cortantes y extensionales que actúan en un elemento de control respectivamente. Por ejemplo, los elementos cortantes son los responsables de deformar continua e irreversiblemente el fluido, y cumplen la condición de simetría, es decir, los elementos fuera de la diagonal son iguales $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, debido a la simetría del tensor de esfuerzo. Los elementos en la diagonal principal $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$, están asociados con la elasticidad del material en flujo cortante en estado estacionario. A partir de estos, se define la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:



$$\begin{aligned}
 N_1 = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelástico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases} \\
 N_2 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} &= \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelástico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.2-7}$$

El cálculo de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales puede ser aplicado para explicar la formación de vórtices en contracciones y expansiones de flujo.

3.3 Ecuaciones de continuidad y momento.

En esta sección, se presentan las ecuaciones generales para el estudio del gradiente de presión pulsátil.

3.3.1 Ecuación de continuidad.

Suponiendo que el fluido es incompresible y que el flujo es unidireccional, es decir, que el vector velocidad solo tiene componente en **z**, entonces:

$$\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\text{Fluido-Incompresible}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; V_z \neq V_z(z)
 \tag{3.3-1}$$

3.3.2 Ecuación de momento.

La ecuación de momento, es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Aplicando un balance de fuerza a un elemento de control, se tiene la componente **r** de la ecuación de movimiento:

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial V_r}{\partial t}}_{\text{Estado-Estacionario}} + \underbrace{V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\partial V_r}{\partial z}}_{\text{Ecuación de Continuidad}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr})}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z}}_{\text{Transferencia de momento solo en la dirección z}} + \underbrace{\rho g_r}_{\text{Efectos Gravitacionales}}
 \tag{3.3-2}$$

Componente θ de la ecuación de movimiento modificada:



$$\rho \left(\begin{array}{c} \overset{=0}{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}} \\ \text{Estado-Estacionario} \end{array} + \underbrace{\overset{=0}{V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{\overset{=0}{V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z}}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} \right) = - \underbrace{\overset{=0}{\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}}}_{\text{Gradiente de Presion solo en la direccion z}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta})}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion } \theta} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion r}} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_\theta}}_{\text{Efectos Gravitacionales}}$$

(3.3-3)

Componente z de la ecuación de movimiento modificada:

$$\rho \left(\begin{array}{c} \overset{=0}{\frac{\partial V_z}{\partial t}} \\ \text{Estado-Estacionario} \end{array} + \underbrace{\overset{=0}{V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta}}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{\overset{=0}{V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} \right) = - \underbrace{\overset{\neq 0}{\frac{\partial p}{\partial z}}}_{\text{Gradiente de Presion solo en la direccion z}} + \underbrace{\overset{\neq 0}{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion r}} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion } \theta} + \underbrace{\overset{=0}{\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion z}} + \underbrace{\overset{=0}{\rho g_z}}_{\text{Efectos Gravitacionales}}$$

(3.3-4)

Aplicando las hipótesis anteriores (estado no estacionario, fluido incompresible, solo hay transferencia de momento en la componente rz del tensor de esfuerzos), se llega a la siguiente expresión simplificada.

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (3.3-5)$$

3.3.3 Gradiente de presión pulsátil.

El gradiente de presión pulsátil se propone como el producto de un gradiente de presión en estado estacionario multiplicado por una función exponencial compleja de tiempo continuo, respectivamente:

$$\frac{\partial p(t)}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z} \text{Exp}(i\omega t) = \frac{\partial p_0}{\partial z} (\text{Cos}(\omega t) + i\text{Sin}(\omega t)) \quad (3.3-6)$$

La ecuación anterior representa al gradiente de presión pulsátil, desarrollado por la identidad de Euler, el cual integra los componentes reales e imaginarios del



sistema. Finalmente sumando la ecuación de continuidad simplificada, el balance de fuerzas toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_0}{\partial z} \text{Exp}(i\omega t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \quad (3.3-7)$$

3.4 Ecuación constitutiva.

3.4.1 Modelo Viscoelástico de Maxwell.

El modelo viscoelástico de Maxwell es una de las ecuaciones reológicas más sencillas viscoelásticas lineales, la cual puede ser descrita en forma tensorial de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (3.4-6)$$

Suponiendo flujo homogéneo, i.e. ninguna variable dinámica del sistema (esfuerzo, rapidez de deformación) depende de la posición, asumiendo todas las demás restricciones, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (3.4-7)$$

Al sumar las matrices, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4-8)$$

Desacoplando las matrices, se tiene las siguientes ecuaciones diferenciales parciales para los esfuerzos normales:

$$\sigma_{rr} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr} = 0 \quad (3.4-9a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (3.4-9b)$$

$$\sigma_{zz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} = 0 \quad (3.4-9c)$$



Para los esfuerzos cortantes, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zr} = \eta_0 \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.4-10a)$$

$$\sigma_{rz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_0 \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.4-10b)$$

Observe, que tanto la componente rz y zr de la ecuación constitutiva tiene la misma estructura matemática.

3.4.2 Modelo multimodal de Maxwell.

El modelo viscoelástico de Maxwell es una de las ecuaciones reológicas más sencillas viscoelásticas lineales, la cual puede ser descrita en forma tensorial de la siguiente manera, para n-modos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\sigma}_j \quad (3.4-11)$$

Sustituyendo la Ec. (3.4-11) en la (3.4-6), obtenemos:

$$\left(1 + \lambda_{M\ell} \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}_\ell = 2\eta_{0\ell} \mathbf{D}; \ell = 1, 2, 3 \quad (3.4-12)$$

3.4.3 Ecuación de movimiento modificada.

Al combinar la componente rz de la ecuación de Maxwell, con la ecuación de movimiento, se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial lineal:

$$\sigma_{zr} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.4-13)$$

Al sustituir la Ec. (3.4-13) en la Ec. (3.3-5), se obtiene:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (3.4-14)$$

Desarrollando la Ec. (3.4-14):

$$\boxed{\rho \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)} \quad (3.4-15)$$



La Ec. (3.4.-15) es el resultado más importante de la presente tesis de licenciatura y es punto de partida en los cálculos posteriores. Este modelo que describe los mecanismos: (i) inerciales, (ii) viscoelásticos y (iii) pulsátiles se puede expresar, en términos de un operador diferencial:

$$\Phi = \varphi_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (3.4-16)$$

La Ec. (3.4-16) se puede interpretar como un operador temporal asociado con la fluidez:

$$\Phi \rho \frac{\partial}{\partial t} V_z = -\Phi \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z \quad (3.4-17)$$

La Ec. (3.4-17) es la más importante del presente trabajo y contiene varios casos particulares que a continuación son descritos:

a) Mecanismos inerciales despreciables:

$$\Phi \rho \frac{\partial}{\partial t} V_z \cong 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z = \Phi \frac{\partial p(t)}{\partial z} \quad (3.4-17a)$$

b) Fluido Newtoniano:

$$\Phi = \varphi_0 \quad (3.4-17b)$$

c) Fluido Maxwell:

$$\Phi = \varphi_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (3.4-17c)$$

d) Fluido de Jeffreys:

$$\Phi = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}} \quad (3.4-17d)$$

e) Fluido de Burgers:

$$\Phi = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}} \quad (3.4-17e)$$



f) Multimodal de Maxwell:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_k = \sum_{j=1}^{N=k} \varphi_{0j} \left(1 + \lambda_{0j} \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad (3.4-17f)$$

En la siguiente sección, se utiliza la Ec. (3.4-17) incisos (c y f) con el fin de obtener el perfil de velocidades, flujo volumétrico y función de transferencia de un fluido de Maxwell. Se analizarán dos casos principales: (i) Sin inercia y viscoelasticidad y (ii) Con inercia y viscoelasticidad. El objetivo del siguiente capítulo será el de encontrar expresiones para los módulos G' y G'' en función del flujo volumétrico viscoelástico y viscoso respectivamente.



CAPÍTULO IV

MODELADO TEÓRICO



4.1 Modelo viscoelástico lineal sin efectos inerciales.

En este capítulo, se presenta el modelado matemático de la Ec. (3.4-17). Partiendo de la hipótesis de flujo a Reynolds bajos, es decir los mecanismos inerciales son despreciables, la ecuación de momento se reduce a un balance entre el gradiente de presión pulsátil y la divergencia del tensor de esfuerzos, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.1-1)$$

Integrando con respecto a la coordenada radial “r” se tiene lo siguiente expresión general:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r + \frac{C_1}{r} \quad (4.1-2)$$

Como el esfuerzo debe ser una función acotada, i.e. en $r = 0$ se cumple que $\sigma_{rz} = \text{finito}$, por lo que la constante C_1 de la Ec. (4.1-2) debe ser cero, i.e. $C_1 = 0$. La componente z de la ecuación de momento toma la forma:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r \quad (4.1-3)$$

La Ec. (4.1-3) describe el esfuerzo cortante rz en función de la mitad del gradiente de presión pulsátil, multiplicada por la coordenada radial. **Observe que, esta expresión es completamente general y no depende del sistema, i.e. en la Ec. (4.1-3) no está incluida ninguna propiedad material del sistema (viscosidades, densidades, tiempos de relajación, etc.) y es válida para cualquier material o sistema complejo.**

La componente rz del modelo de Maxwell, se puede definir en términos del operador fluidez dado por la Ec. (3.4-17) inciso “c”.

$$\sigma_{rz} = \dot{\gamma}_{rz} / \Phi \quad (4.1-4)$$

En la Ec. (4.1-4) Φ , es el operador fluidez lineal definido en la sección anterior el cual, depende de las propiedades de la ecuación constitutiva empleada, i.e. tiempos de relajación, módulos elásticos, tiempos de retardo, etc.

$$\Phi = \Phi(\lambda_0, G_0, \partial_t) = \varphi_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4.1-5)$$



4.1.1 Flujo volumétrico en estado no estacionario.

La expresión general del flujo volumétrico en función de la viscosidad puede ser escrita en términos de una integral doble de la siguiente manera:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta \quad (4.1-6)$$

Debido a la simetría cilíndrica, el vector velocidad no depende de la coordenada angular θ , por lo que se puede integrar con respecto a θ la Ec. (4.1-6),

$$Q(t) = 2\pi \int_0^a V_z(r,t) r dr \quad (4.1-7)$$

La Ec. (4.1-6) representa el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$. La Ec. (4.1-6) se emplea cuando se conoce el perfil de velocidades en función de la coordenada radial y es general para cualquier tipo de fluido. Integrando por partes con respecto a r , tomando $u = V_z(r, t)$ y $dV = r dr$, se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = 2\pi \left(\frac{1}{2} V_z(r,t) r^2 \Big|_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) = \pi \left(V_z(a,t) a^2 - V_z(0,t) 0^2 - \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) \quad (4.1-8)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en el capilar se obtiene otra versión de la Ec. (4.1-6) para el flujo volumétrico:

$$Q(t) = -\pi \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \quad (4.1-9)$$

La Ec. (4.1-9) es equivalente a la Ec. (4.1-7) excepto que, para calcularla se necesita información de la rapidez con la que se deforma el sistema (fluido). La Ec. (4.1-9) será punto de partida en la descripción de la función de transferencia y el flujo volumétrico pulsátil. Multiplicando por la segunda potencia de r e integrando con respecto a r de 0 al límite superior "a", se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = -\pi \int_0^a r^2 \dot{\gamma}_{rz} dr = \Phi \left(-\pi \int_0^a \sigma_{rz} r^2 dr \right) \quad (4.1-10)$$

Al sustituir la componente rz del tensor de esfuerzos Ec. (4.1-1) en la Ec. (4.1-10) se tiene la evolución del flujo volumétrico en función del gradiente de presión pulsátil en la dirección axial.



$$Q_V(t) = \Phi \left(-\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{dp(t)}{dz} \right) \quad (4.1-11)$$

Si el tiempo de Maxwell es cero, i.e. $\lambda_M = 0$, se obtiene el flujo volumétrico para el modelo newtoniano. Esta ecuación es conocida como de Hagen y Poiseuille:

$$Q_N(t) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(-\frac{dp(t)}{dz} \right) \quad (4.1-12)$$

Combinando las ecuaciones (4.1-11) y (4.1-12) y definiendo Q_V como el flujo volumétrico viscoelástico y Q_N como el flujo volumétrico newtoniano, se tiene:

$$Q_V(t) = \Phi Q_N(t) \quad (4.1-13)$$

Es decir, el flujo volumétrico viscoelástico se puede describir como el producto de una función fluidez y el flujo volumétrico newtoniano.

4.1.2 Formalismo de Fourier.

Si suponemos que el flujo volumétrico es una función continua y satisface el formalismo de la transformada de Fourier, se tiene la siguiente definición formal (Haberman 2003). Con el fin de resolver la ecuación dinámica Ec. (4.1-13), se utilizará el formalismo de Fourier. Si suponemos que la función es continua, la transformada de Fourier de una función continua y la derivada de una función continua se escribe como:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.1-14)$$

Los resultados más importantes de la transformada de Fourier se aplican en la transformada de una derivada temporal (Haberman 2003):

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t} e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega t} f(t)}{2\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{i\omega}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = i\omega F(\omega) \quad (4.1-15)$$

Suponiendo que en $t = 0$ la función $f(t)$ se anula, i.e. $f(\infty) = f(0) = 0$, se tiene que la derivada temporal de una función continua $f(t)$ toma la forma:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right) = i\omega F(\omega) \quad (4.1-16)$$



Es fácil demostrar por inducción matemática, que la transformada de Fourier de derivadas de órdenes superiores puede ser descrita como un múltiplo de la Ec. (4.1-16), por lo que:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right) = (i\omega)^k F(\omega) \quad (4.1-17)$$

Los resultados deducidos en esta sección serán punto de partida en la descripción del flujo oscilatorio.

4.1.3 Flujo oscilatorio a baja frecuencia.

Al aplicar el operador temporal de la fluidez, a la Ec. (4.1-13) se tiene lo siguiente:

$$Q_V(t) = \varphi_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_N(t) \quad (4.1-18)$$

Aplicando la transformada de Fourier, a la ecuación diferencial, Ec. (4.1-18) se tiene lo siguiente:

$$\hat{Q}_V(i\omega) = \hat{\Phi}(i\omega) \hat{Q}_N \quad (4.1-19)$$

La Ec. (4.1-19) es una función compleja de variable compleja la cual, se puede descomponer en una parte real e imaginaria respectivamente:

$$\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} = \frac{1}{\text{Re}[\hat{\Phi}(i\omega)] + i \text{Im}[\hat{\Phi}(i\omega)]} \quad (4.1-20)$$

Multiplicando por el complejo conjugado del denominador de la Ec. (4.1-20), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} = \text{Re} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] - j \text{Im} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] \quad (4.1-21)$$

Separando la parte real e imaginaria de la Ec. (4.1-21) se tiene lo siguiente:



$$\eta'(\omega) = \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] = \frac{\operatorname{Re} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right]}{\left(\operatorname{Re} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right] \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right] \right)^2} \quad (4.1-22)$$

y

$$\eta''(\omega) = \operatorname{Im} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] = \frac{\operatorname{Im} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right]}{\left(\operatorname{Re} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right] \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left[\hat{\Phi}(\omega) \right] \right)^2} \quad (4.1-23)$$

A partir de las viscosidades real e imaginaria, se pueden deducir los módulos de pérdida y almacenamiento:

$$G'(\omega) = \omega \eta''(\omega) = \omega \operatorname{Im} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] \quad (4.1-24)$$

y

$$G''(\omega) = \omega \eta'(\omega) = \omega \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right] \quad (4.1-25)$$

Las Ecs. (4.1-24) y (4.1-25) son las mismas que se obtiene en la dinámica de polímeros líquidos y flujo oscilatorio en reología. Estas fueron deducidas a través del flujo volumétrico despreciando los efectos inerciales. En particular si el operador fluidez corresponde al de Maxwell, se tiene lo siguiente:

$$\hat{\Phi}(i\omega) = \varphi_0 \left(1 + (\lambda_0 \omega)^2 \right) \quad (4.1-26)$$

La viscosidad real e imaginaria tiene la siguiente representación analítica:



$$\eta'(\omega) = \frac{1}{\varphi_0 (1 + (\lambda_0 \omega)^2)} \quad (4.1-27)$$

y

$$\eta''(\omega) = \frac{\lambda_0 \omega}{\varphi_0 (1 + (\lambda_0 \omega)^2)} \quad (4.1-28)$$

A partir de esto, los módulos elásticos G' y G'' toman la forma:

$$G'(\omega) = \omega \eta''(\omega) = \frac{\lambda_0 \omega^2}{\varphi_0 (1 + (\lambda_0 \omega)^2)} \quad (4.1-29)$$

y

$$G''(\omega) = \omega \eta'(\omega) = \frac{\omega}{\varphi_0 (1 + (\lambda_0 \omega)^2)} \quad (4.1-30)$$

Las Ecs. (4.1-29) y (4.1-30) son los módulos de pérdida y almacenamiento asociados al sistema de flujo pulsátil. La función viscosidad compleja toma la forma:

$$\eta^*(\omega) = \sqrt{(\eta'(\omega))^2 + (\eta''(\omega))^2} \quad (4.1-31)$$

Finalmente, la expresión del flujo volumétrico viscoelástico se puede expresar en términos de producto de flujo volumétrico del fluido newtoniano multiplicados por una fluidez adimensional real e imaginaria respectivamente.

4.2 Modelo viscoelástico lineal de Maxwell con efectos inerciales.

En el régimen de viscoelasticidad lineal, la ecuación dinámica que describe el efecto combinado de la inercia con los mecanismos viscoelásticos en el régimen de bajas deformaciones, es la siguiente:

$$\rho \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p(t)}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.2-1)$$

La Ec. (4.2-1) se puede poner en términos del operador fluidez de Maxwell:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \rho \Phi \frac{\partial}{\partial t} \right) V_z = \Phi \frac{\partial p(t)}{\partial z} \quad (4.2-2)$$



Con el fin de resolver la ecuación dinámica Ec. (4.2-1), se utilizará de nuevo el formalismo de Fourier. Los pasos intermedios y detalles en las deducciones del perfil de velocidades y la deducción del flujo volumétrico se presentan a detalle en el apéndice (A).

4.2.1 Perfil de velocidades del modelo viscoelástico lineal.

Aplicando la transformada de Fourier, y suponiendo que la velocidad en la frontera del capilar es cero, y finalmente resolviendo una ecuación de Bessel paramétrica, se obtiene una expresión analítica para el perfil de velocidades.

$$V_z(r, \omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(1 - \frac{J_0 \left(i^{3/2} \sqrt{\rho\omega\Phi} r \right)}{J_0 \left(i^{3/2} \sqrt{\rho\omega\Phi} a \right)} \right) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.2-3)$$

La Ec. (4.2-3) J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de orden cero y primero respectivamente.

4.2.2 Flujo volumétrico del modelo viscoelástico lineal.

El flujo volumétrico viscoelástico, puede ser obtenido directamente mediante una doble integración por lo que, en coordenadas polares se tiene lo siguiente:

$$Q_v(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, \omega) r dr d\theta = 2\pi a^2 \int_0^1 V_z(r^*, \omega) r^* dr^* \quad (4.2-4)$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico viscoelástico, se puede expresar como:

$$Q_v(\omega) = T(\omega) \frac{\pi a^4 \phi_0}{8} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = T(\omega) Q_N(\omega) \quad (4.2-5)$$

Donde la función de transferencia está dada por el siguiente cociente de funciones Bessel:

$$T(\omega) = -\frac{8i}{a^2 \rho \phi_0} \frac{1}{\omega} \left(1 - 2 \frac{J_1 \left(i^{3/2} a \sqrt{\rho\omega\Phi} \right) / \left(i^{3/2} a \sqrt{\rho\omega\Phi} \right)}{J_0 \left(i^{3/2} a \sqrt{\rho\omega\Phi} \right)} \right) \quad (4.2-6)$$

La función de transferencia, Ec. (4.2-6) puede ser utilizada para cualquier función fluidez compleja en el régimen de viscoelasticidad lineal. Los siguientes puntos importantes de la Ec. (4.2-6) son mencionados a continuación:

- a) La función de transferencia depende de las propiedades materiales $\{\phi_0, \rho\}$ respectivamente.



- b) Físicamente, la función de transferencia compleja nos da las desviaciones del comportamiento newtoniano por efecto de los mecanismos inerciales y viscoelásticos del medio.
- c) La función de transferencia presenta un comportamiento resonante, debido a que es el cociente de funciones Bessel de primer y cero ordenes respectivamente. La resonancia se debe a las oscilaciones de las funciones de Bessel:

$$\frac{J_1\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\Phi^*}\right)/\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\Phi^*}\right)}{J_0\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\Phi^*}\right)} \quad (4.2-7)$$

- d) A frecuencias bajas la función de transferencia se reduce al operador fluidez definido en la primera sección de este capítulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) \rightarrow \hat{\Phi}(i\omega) = 1 + (\lambda_0\omega)i \quad (4.2-8)$$

4.3 Flujo volumétrico pulsátil.

Suponiendo que el gradiente de presión pulsátil puede ser escrito en términos de una función exponencial compleja, aplicando la transformada de Fourier:

$$\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z} \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.3-1)$$

En la Ec. (4.3-1) δ es la función delta de Dirac y ω_0 es una frecuencia de referencia. Al substituir la Ec. (4.3-1) en la Ec. (4.2-5), se tiene:

$$Q_v(\omega) = T(\omega) \frac{\pi a^4 \phi_0}{8} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.3-2)$$

Tomando la anti-transformada de la Ec. (4.3-1), se tiene lo siguiente:

$$Q_v(t) = T(\omega) Q_{N0}(t) \text{Exp}(i\omega t); \quad Q_{N0}(t) = \frac{\pi a^4 \phi_0}{8} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \quad (4.3-3)$$

En la Ec. (4.3-3) Q_{N0} es la amplitud del flujo volumétrico newtoniano. Si se define el flujo volumétrico newtoniano como:

$$Q_v(t) = Q_{N0}(t) \text{Exp}(i\omega t) = \frac{\pi a^4 \phi_0}{8} \left(-\frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \text{Exp}(i\omega t) \quad (4.3-4)$$

Finalmente, se tiene la relación de los flujos volumétricos:



$$Q_v(t) = T(\omega)Q_{N0}(t) \tag{4.3-5}$$

Finalmente, la parte real y la parte imaginaria:

$$\text{Re}[Q_v(t)] = Q_{N0} \left(\text{Re}[T(\omega)] \cos(\omega t) - \text{Im}[T(\omega)] \sin(\omega t) \right) \tag{4.3-6}$$

y

$$\text{Im}[Q_v(t)] = Q_{N0} \left(\text{Im}[T(\omega)] \cos(\omega t) + \text{Re}[T(\omega)] \sin(\omega t) \right) \tag{4.3-7}$$

Las Ecs. (4.3-6) y (4.3-7) representan la parte real e imaginaria del flujo volumétrico. Se puede observar que, ambas dependen de la amplitud del fluido newtoniano y de las propiedades materiales de la función fluidez que se utilice. Debido que las curvas oscilantes que se presentan en las Ecs. (4.3-6) y (4.3-7) se debe al cociente entre las funciones de Bessel y las funciones periódicas. La tabla (4) presenta algunos operadores temporales que representan a la fluidez y su representación en el espacio de Fourier.

4.4 Modelos viscoelásticos lineales en términos del operador en el espacio de la frecuencia.

En la tabla (4), se presentan diferentes operadores viscosidad con el fin de aplicarlos a la función de transferencia desarrollada en el trabajo presente. En particular, se utilizará el modelo de Maxwell y multimodal de Maxwell.

Tabla 4. Ilustra los modelos viscoelásticos lineales en términos de los operadores temporales y de Fourier.

Modelo	Operador temporal	Operador-Fourier
Newton	$\Phi = \varphi_0$	$\Phi^* = \varphi_0$
Maxwell	$\Phi = \varphi_0 \left(1 + \frac{1}{G_0 \varphi_0} \frac{\partial}{\partial t} \right)$	$\Phi^* = \varphi_0 \left(1 + \frac{1}{G_0 \varphi_0} (i\omega) \right)$
Jeffreys	$\Phi = \varphi_0 \frac{1 + \frac{1}{G_0 \varphi_0} \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \frac{1}{(1+\varphi_r) G_0 \varphi_0} \frac{\partial}{\partial t}}$	$\Phi^* = \varphi_0 \frac{1 + \frac{1}{G_0 \varphi_0} (i\omega)}{1 + \frac{1}{(1+\varphi_r) G_0 \varphi_0} (i\omega)}$



Burger	$\Phi = \varphi_0 \frac{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}$	$\Phi^* = \varphi_0 \frac{1 + \frac{1}{G_0 \varphi_0} (i\omega) + \beta (i\omega)^2}{1 + \frac{1}{(1 + \varphi_r) G_0 \varphi_0} (i\omega)}$
Maxwell Multimodal	$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n \varphi_{0i} \left(1 + \frac{1}{G_{0i} \varphi_{0i}} \frac{\partial}{\partial t} \right)$	$\sum_{i=1}^n \Phi_i^* = \sum_{i=1}^n \varphi_{0i} \left(1 + \frac{1}{G_{0i} \varphi_{0i}} (i\omega) \right)$

4.4.1 Modelo multimodal de Maxwell

En pruebas de flujo oscilatorio el modelo uni-modal de Maxwell no describe satisfactoriamente datos experimentales de sangre con colesterol (Moreno et al. 2015, Herrera-Valencia et al. 2016, 2017). La fluidez para los datos de Moreno et al. (2015) pueden ser representados por medio del modelo multimodal con tres modos $N = 3$, por lo que:

$$\Phi^* = \eta^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N=3} \frac{G_{0i} \lambda_{0i}}{1 + \lambda_{0i} (i\omega)}} = \frac{(1 + \lambda_{01} (i\omega))(1 + \lambda_{02} (i\omega))(1 + \lambda_{02} (i\omega))}{G_{01} \lambda_{01} (1 + \lambda_{02} (i\omega))(1 + \lambda_{03} (i\omega)) + G_{02} \lambda_{02} (1 + \lambda_{01} (i\omega))(1 + \lambda_{03} (i\omega)) + G_{03} \lambda_{03} (1 + \lambda_{01} (i\omega))(1 + \lambda_{03} (i\omega))}$$

(4.4-1)

En el régimen de bajas frecuencias, la función fluidez compleja tiende a la fluidez a corte bajo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi^* \rightarrow \varphi_0 = \eta_0^{-1} = 1 / \sum_{i=1} G_{0i} \lambda_{0i} = 1 / (G_{01} \lambda_{01} + G_{02} \lambda_{02} + G_{03} \lambda_{03})$$

(4.4-2)

4.5 Resumen de las ecuaciones más importantes.

En este capítulo, se desarrollaron las ecuaciones más importantes de la presente tesis, las cuales se pueden clasificar en dos contribuciones principales: La primera de ellas, es la función de transferencia para un fluido viscoelástico sin inercia. La segunda de ellas, es el mismo sistema, pero tomando en cuenta los mecanismos inerciales.

4.5.1 Variables adimensionales.

Las variables adimensionales son: (a) Las viscosidades reales e imaginaria, (b) los módulos viscoelásticos, (c) los flujos real e imaginario, (d) La función de transferencia, (e) la frecuencia adimensional y (f) el tiempo de proceso.



Tabla 5. Presenta las variables dimensionales, características y adimensionales.

Variable dimensional	Variable característica	Variable adimensional
$\eta'(\omega)$	φ_0	$\bar{\eta}'(\omega) = \varphi_0 \eta'(\omega)$
$\eta''(\omega)$	φ_0	$\bar{\eta}''(\omega) = \varphi_0 \eta''(\omega)$
$G'(\omega)$	G_0	$\bar{G}'(\omega) = \frac{G'(\omega)}{G_0}$
$G''(\omega)$	G_0	$\bar{G}''(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G_0}$
$\text{Re}[Q_v(t)]$	Q_{N0}	$\bar{Q}_R = \frac{\text{Re}[Q_v(t)]}{Q_{N0}}$
Φ	φ_0	$\bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\varphi_0}$
ω	λ_0	$\bar{\omega} = \lambda_0 \omega$
t	λ_0	$\bar{t} = t/\lambda_0$

Las variables características con las que se hicieron adimensionales las expresiones fueron: $\{\varphi_0, \lambda_0, G_0, Q_{N0}\}$. Se escogieron estas variables, porque son propiedades materiales medibles y se pueden extraer directamente de los experimentos reológicos. La fluidez es el inverso de la viscosidad y se puede obtener directamente de una prueba de flujo en estado estacionario, el tiempo de relajación de Maxwell, se obtiene de pruebas en flujo oscilatorio de baja amplitud cuando se obtiene la frecuencia de cruce entre el módulo elástico y de recuperación, i.e., $\lambda_0 = 1/\omega_c$. La tercera variable G_0 es el módulo elástico el cual se puede obtener directamente del límite a frecuencias altas de $G'(\omega)$, i.e. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G'(\omega) \rightarrow G_0$, la última variable de escalamiento, es el flujo volumétrico newtoniano que es una combinación de parámetros medibles como son: (i) el radio del capilar y (ii) el gradiente de presión. Por lo tanto, las ecuaciones adimensionales son:

4.5.2 Ecuaciones adimensionales.

a) Sin mecanismos inerciales.

Viscosidad real e imaginaria:

$$\eta'(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} ; \quad \eta''(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$



La viscosidad compleja, se obtiene a partir de las viscosidades reales e imaginarias:

$$\eta^*(\omega) = \sqrt{[\eta'(\omega)]^2 + [\eta''(\omega)]^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}};$$

Módulos viscoso y elástico:

$$G'(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}; \quad G''(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

El módulo complejo se obtiene a partir de G' y G'' :

$$G^* = \sqrt{[G'(\omega)]^2 + [G''(\omega)]^2} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

Flujos volumétricos pulsátiles reales e imaginarios:

$$\text{Re}[\bar{Q}_v(t)] = \text{Cos}(\omega t) - \omega \text{Sin}(\omega t)$$

Y

$$\text{Im}[\bar{Q}_v(t)] = \omega \text{Cos}(\omega t) + \text{Sin}(\omega t)$$

b) Con mecanismos inerciales.

Relación de flujos volumétricos viscoelástico y newtoniano:

$$Q_v(\omega) = T(\omega)Q_N(\omega)$$

La función de transferencia está dado por:

$$T(\omega) = -\frac{8i}{a^2 \rho \phi_0} \frac{1}{\omega} \left(1 - 2 \frac{J_1\left(i^{3/2} a \sqrt{\rho \omega \Phi^*}\right) / \left(i^{3/2} a \sqrt{\rho \omega \Phi^*}\right)}{J_0\left(i^{3/2} a \sqrt{\rho \omega \Phi^*}\right)} \right)$$

Las viscosidades, quedan definidas en términos de la función de transferencia y la parte real e imaginaria:



$$\eta'(\omega) = \frac{\operatorname{Re}[T(\omega)]}{\left(\operatorname{Re}[T(\omega)]\right)^2 + \left(\operatorname{Im}[T(\omega)]\right)^2}$$

y

$$\eta''(\omega) = \frac{\operatorname{Im}[T(\omega)]}{\left(\operatorname{Re}[T(\omega)]\right)^2 + \left(\operatorname{Im}[T(\omega)]\right)^2}$$

A partir de las viscosidades real e imaginaria, se pueden deducir los módulos de pérdida y almacenamiento del material:

$$G'(\omega) = \omega \eta'(\omega) = \omega \frac{\operatorname{Im}[T(\omega)]}{\left(\operatorname{Re}[T(\omega)]\right)^2 + \left(\operatorname{Im}[T(\omega)]\right)^2}$$

y

$$G''(\omega) = \omega \eta''(\omega) = \omega \frac{\operatorname{Re}[T(\omega)]}{\left(\operatorname{Re}[T(\omega)]\right)^2 + \left(\operatorname{Im}[T(\omega)]\right)^2}$$

Los flujos oscilatorios:

$$\operatorname{Re}[\bar{Q}_v(t)] = \operatorname{Re}[T(\omega)] \operatorname{Cos}(\omega t) - \operatorname{Im}[T(\omega)] \operatorname{Sin}(\omega t)$$

Y

$$\operatorname{Im}[\bar{Q}_v(t)] = \operatorname{Im}[T(\omega)] \operatorname{Cos}(\omega t) + \operatorname{Re}[T(\omega)] \operatorname{Sin}(\omega t)$$

4.5.3 Función de transferencia adimensional y número de Womersley.

La función de transferencia compleja en forma adimensional, tiene la siguiente forma:

$$T(\omega) = -\frac{8i}{\operatorname{Wo}^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(i^{3/2} \operatorname{Wo}_\omega(\omega)) / i^{3/2} \operatorname{Wo}_\omega(\omega)}{J_0(i^{3/2} \operatorname{Wo}_\omega(\omega))} \right) \quad (4.5-1)$$



En donde, el número de Womersley generalizado toma la forma:

$$W_{o_\omega}(\omega) = \frac{a}{1/\sqrt{\rho\phi_0\omega}} \sqrt{\bar{\Phi}^*} = W_o \sqrt{\bar{\Phi}^*} \quad (4.5-4)$$

y

$$W_o = a\sqrt{\rho\phi_0\omega} \quad (4.5-5)$$

La relación de fluidez adimensional está dada por:

$$\bar{\Phi}^* = \frac{\Phi}{\phi_0} = \frac{(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega^*))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega^*))}{\bar{\eta}_{01}(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega))+\bar{\eta}_{02}(1+i\omega)(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega))+\bar{\eta}_{03}(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))} \quad (4.5-6)$$

Donde, las siguientes cantidades adimensionales, están dada por:

$$\bar{\eta}_{0k} = \frac{\eta_{0k}}{\eta_0} = \frac{G_{0k}\lambda_{0k}}{\sum_{i=1}^3 G_{0i}\lambda_{0i}}; k=\{1,2,3\} \quad (4.5-7)$$

y

$$\bar{\lambda}_{0\ell} = \frac{\lambda_{0\ell}}{\lambda_{01}}; \ell=\{2,3\} \quad (4.5-8)$$

y la frecuencia adimensional:

$$\omega^* = \lambda_{01}\omega \quad (4.5-9)$$

En este capítulo, se presentan las principales ecuaciones de este trabajo. Los resultados están basados en la función de transferencia y su cálculo en dos condiciones:

- a) Sin mecanismos inerciales.
- b) Con mecanismos inerciales.
- c) Generalización de la fluidez para diferentes ecuaciones constitutivas.
- d) Modelo de Maxwell para tres modos.

Finalmente, se aplicará el modelo de Maxwell multimodal para tres modos.



CAPÍTULO V

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



En este capítulo, se presentan las principales predicciones de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 4. En la primera parte de este capítulo, se describe los resultados de un fluido viscoelástico sin inercia, i.e. a número de Reynolds bajos. En la segunda parte de este, se presentan los resultados de la función de transferencia con inercia, y finalmente en la última sección, se presentan los resultados en sangre con colesterol.

5.1. Módulos viscoelásticos adimensionales sin inercia.

5.1.1 Módulo elástico.

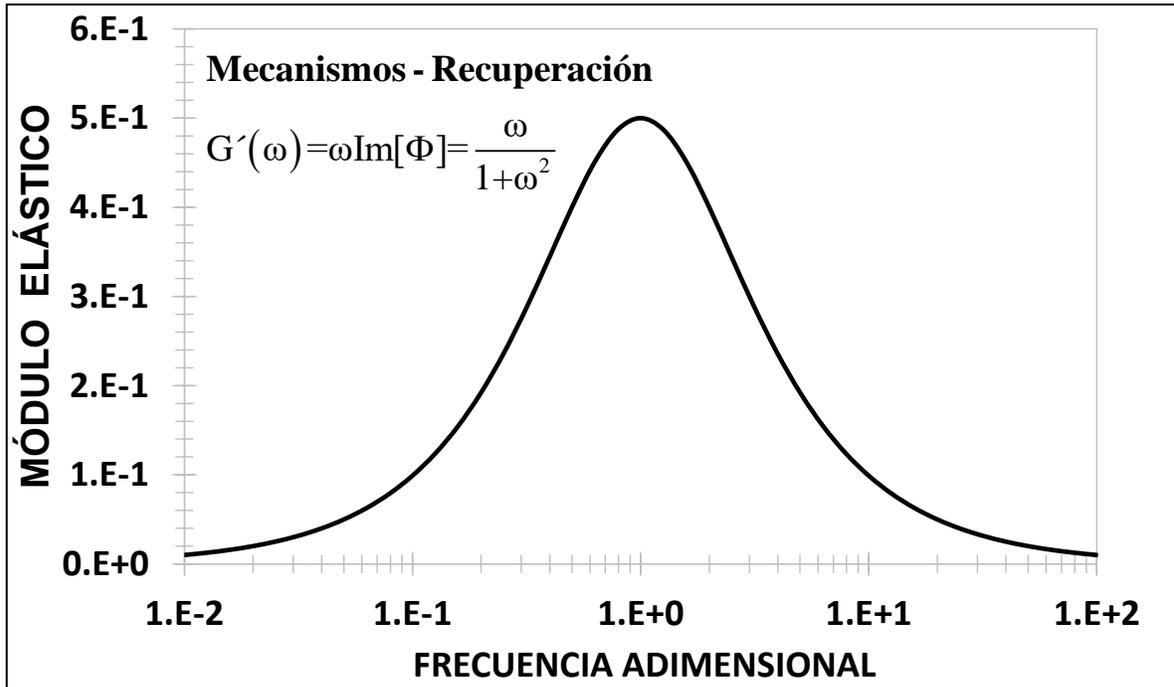


Figura 5.1 Ilustra el comportamiento del módulo elástico adimensional como función de la frecuencia angular.

La Fig. (5.2) muestra el comportamiento de la $G'(\omega)$ en función de la frecuencia.

$$G'(\omega) = \omega \text{Re}[\Phi] = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

Los límites de la ecuación para $G'(\omega)$ son:

$$G'(\omega) = \omega(1 + \omega^2)^{-1} \cong \omega(1 - \omega^2) + O(\omega^2) \cong \omega$$



Es decir, a bajas frecuencias el comportamiento del módulo es lineal con la frecuencia, por lo que a frecuencias altas el sistema tiene el siguiente límite:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} = 0$$

Físicamente, la G' muestra las clásicas curvas resonantes descritas en diferentes sistemas oscilatorios. La G' relaciona la energía recuperada en el sistema por efecto de la elasticidad. Se puede observar, que sin tomar en cuenta los efectos inerciales, la G' solo presenta un máximo resonante, se esperaría que, incluyendo los mecanismos inerciales esto se modificara.

5.1.2 Módulo viscoso.

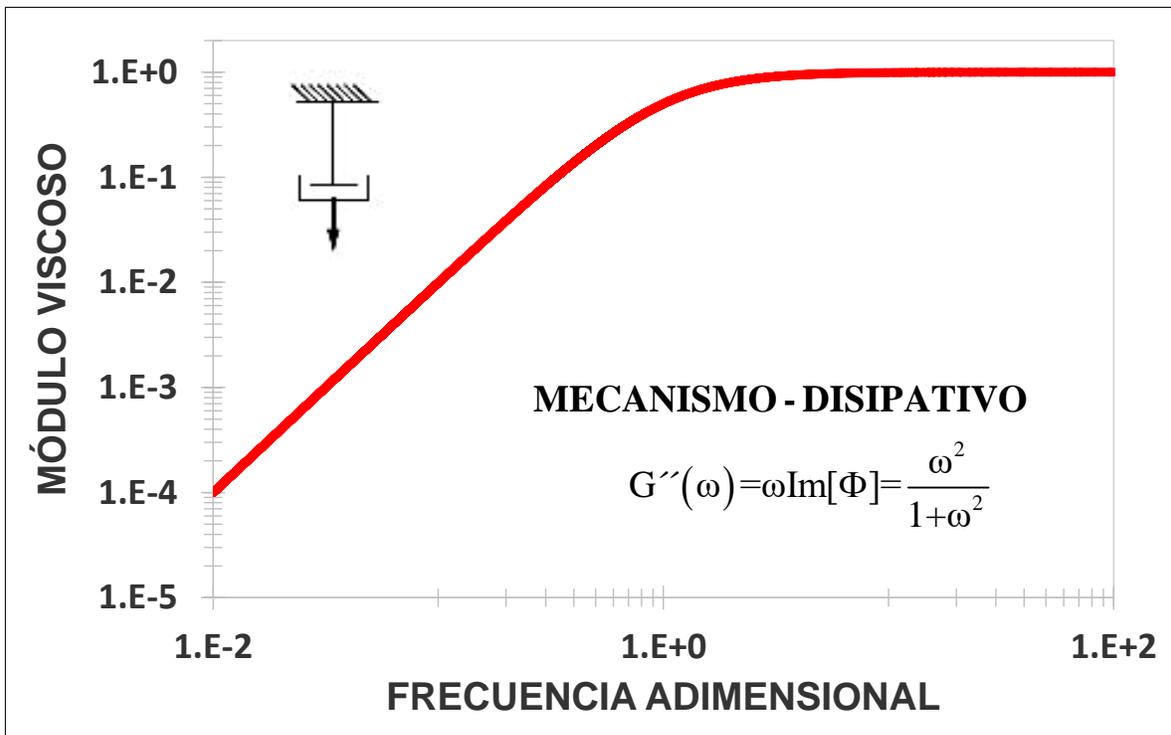


Figura 5.2 Ilustra el comportamiento del módulo viscoso como función de la frecuencia adimensional.

La Fig. (5.1) muestra la simulación para el módulo viscoso adimensional en función de la frecuencia adimensional. Este se puede expresar como el producto de la frecuencia con la función de transferencia imaginaria.

$$G''(\omega) = \omega \text{Im}[\Phi] = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}$$



El módulo viscoso G'' , tiene dos comportamientos asintóticos a baja y alta frecuencia respectivamente. A frecuencias bajas, i.e., $\omega \ll 1$, el módulo de pérdida tiene la siguiente forma asintótica.

$$G''(\omega) = \omega^2 (1 + \omega^2)^{-1} \cong \omega^2 (1 - \omega^2) + O(\omega^2) \cong \omega^2$$

Por lo que, el comportamiento de la función de transferencia, a bajas frecuencias es cuadrático con la frecuencia adimensional. Por otra parte, a frecuencias altas, el sistema tiende a un valor límite, i.e.

$$\text{Lim}_{\omega \rightarrow \infty} G''(\omega) = \omega \text{Im}[\Phi] = \text{Lim}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} = 1$$

Este comportamiento se observa claramente en la Fig. (5.1) por lo que coincide con el tratamiento clásico de flujo oscilatorio a bajas amplitud en sistemas poliméricos. Físicamente, el módulo G'' describe la pérdida de la energía en el sistema asociado con la viscosidad del fluido complejo.

Las dos ecuaciones tienen un punto en común que corresponde a la viscoelasticidad del material, i.e. el punto en donde los módulos son iguales, i.e.

$$G'(\omega) = G''(\omega)$$

Es decir, la parte real y compleja de la función de transferencia son iguales y se tiene lo siguiente:

$$\text{Re}[\Phi] = \text{Im}[\Phi]$$

Sustituyendo el valor de la parte real e imaginaria de la función de transferencia, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\omega_c}{1 + \omega_c^2} = \frac{1}{1 + \omega_c^2}$$

Esta ecuación, tiene soluciones para cero y el valor de 1 en frecuencia por lo que en el caso adimensional, el tiempo viscoelástico de cruce en el sistema es igual a la unidad.

$$\omega_c = 1$$



Este valor de la frecuencia de cruce está asociado a la viscoelasticidad del material, por lo que es un parámetro muy importante. En este punto, Fig. (5.3), el tiempo de relajación de Maxwell, se puede definir como el modo de cruce uni-modal en una prueba de flujo oscilatorio de baja amplitud. Es importante destacar, que la mayoría de sistemas físicos, presentan un comportamiento que no ajusta a un solo modo, por lo que, se debe de ajustar la muestra de estudio a un espectro de tiempo de relajación, que en principio puede arrojar información física concerniente a la distribución del peso molecular en el sistema.

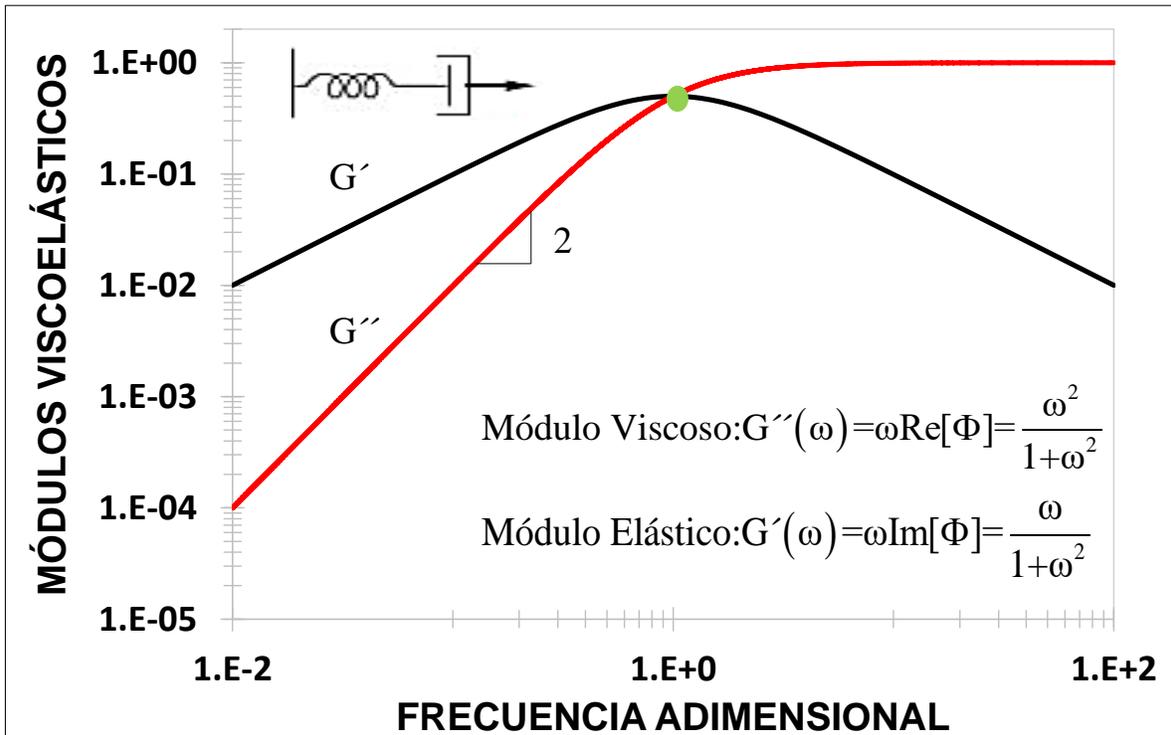


Figura 5.3 Ilustra los módulos viscoelásticos de pérdida y de almacenamiento en función de la frecuencia adimensional. El cruce que se observa con un círculo verde, es el punto en donde el material se comporta como viscoelástico. Observe que, a frecuencias menores de 1, i.e. $\omega < 1$, el sistema se comporta como sólido, mientras que a frecuencias moderadas y altas, el sistema (fluido) se comporta como líquido.

5.2 Función de transferencia.

5.2.1 Componente real de la función de transferencia.

La viscosidad real es la parte real de la función de transferencia la cual, se describe matemáticamente de la siguiente forma:



$$\eta'(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

Los límites de la viscosidad real están dados por:

$$\eta'(\omega) = (1 + \omega^2)^{-1} = 1 - \omega^2 + O(\omega^2) \cong 1$$

Es decir, cerca de una vecindad del cero, la función viscosidad real tiende a la unidad, mientras que, a frecuencias altas, se tiene lo siguiente:

$$\text{Lim}_{\omega \rightarrow \infty} \eta'(\omega) = \text{Lim}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \omega^2} = 0$$

En la Fig. (5.4) se ilustra la viscosidad real en función de la frecuencia. Es claro que la viscosidad real muestra dos zonas, a bajas frecuencias, moderadas y altas. A frecuencias bajas la viscosidad es constante con valor igual a 1, mientras que para un valor crítico de frecuencia, la viscosidad real decrece con la frecuencia adimensional. Físicamente a frecuencias bajas, el sistema se comporta como un sólido, mientras que para un valor crítico de frecuencia, el sistema responde mecánicamente como un fluido.

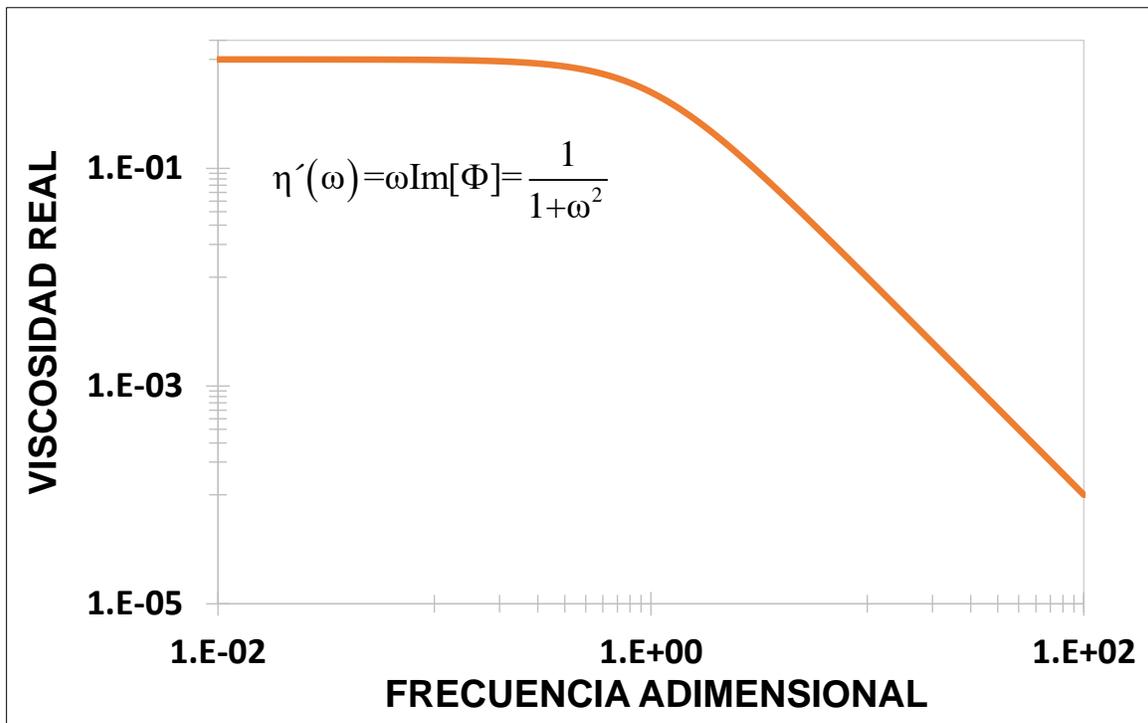


Figura 5.4 Ilustra la viscosidad real de la función de transferencia vs la frecuencia adimensional.



5.2.2 Componente imaginaria de la función de transferencia.

Por otra parte, la viscosidad imaginaria está dada por la siguiente expresión:

$$\eta''(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

Como en el caso anterior, la viscosidad imaginaria tiene dos límites asintóticos, los cuales se describen a continuación:

$$\eta''(\omega) = \omega(1 + \omega^2)^{-1} = \omega(1 - \omega^2 + O(\omega^2)) \cong \omega$$

Mientras que, a frecuencias altas, se tiene el siguiente resultado:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \eta''(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} = 0$$

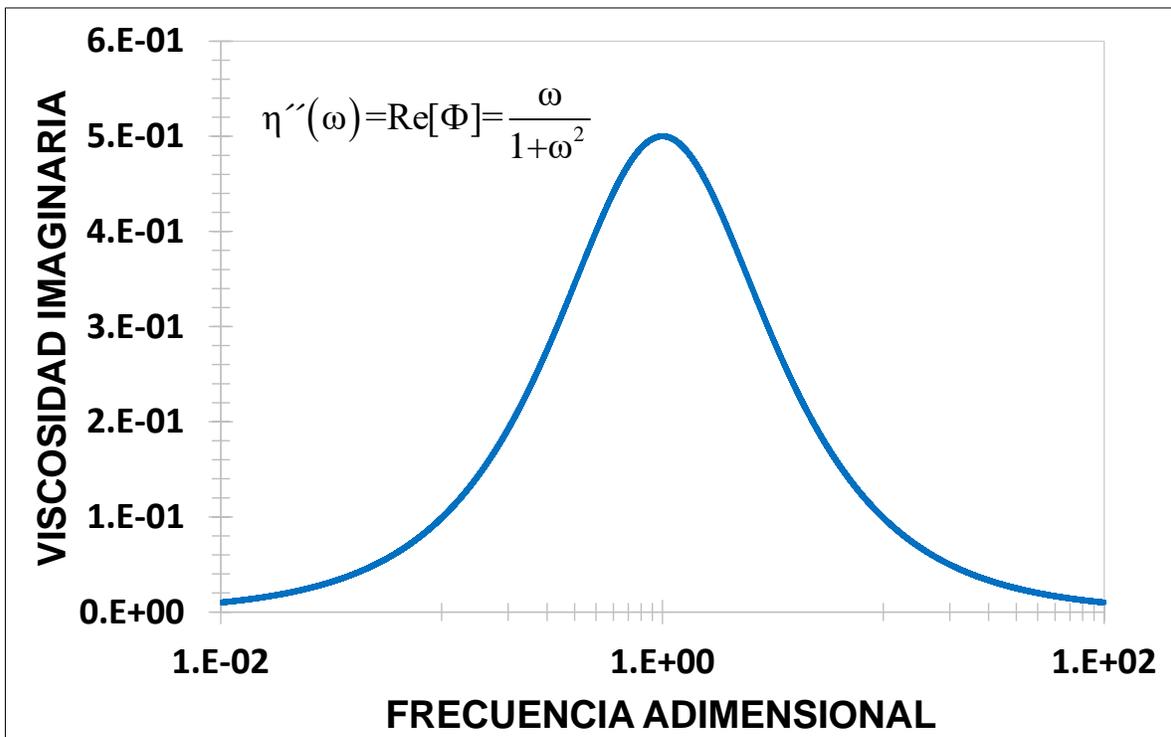


Figura 5.5 Ilustra la viscosidad imaginaria de la función de transferencia en función de la frecuencia adimensional.

La Fig. (5.5) ilustra la función de transferencia imaginaria en función de la frecuencia adimensional. Es claro que la parte imaginaria de esta, muestra un comportamiento resonante para alguna frecuencia crítica. Los sistemas de almacenamiento de energía muestran por lo regular un comportamiento de



recuperación, en forma de curva resonante. El máximo en la viscosidad real, se obtiene cuando la derivada de la frecuencia es cero, i.e. al tomar la derivada de la viscosidad bi-prima con respecto a la frecuencia e igualando a cero, se tiene:

$$\omega_0 = 1$$

Al sustituir esta frecuencia en la viscosidad imaginaria, se tiene:

$$\eta''_{\max} = 1/2$$

Esto se comprueba visualmente con el valor máximo de la curva resonante de la Fig. (5.5).

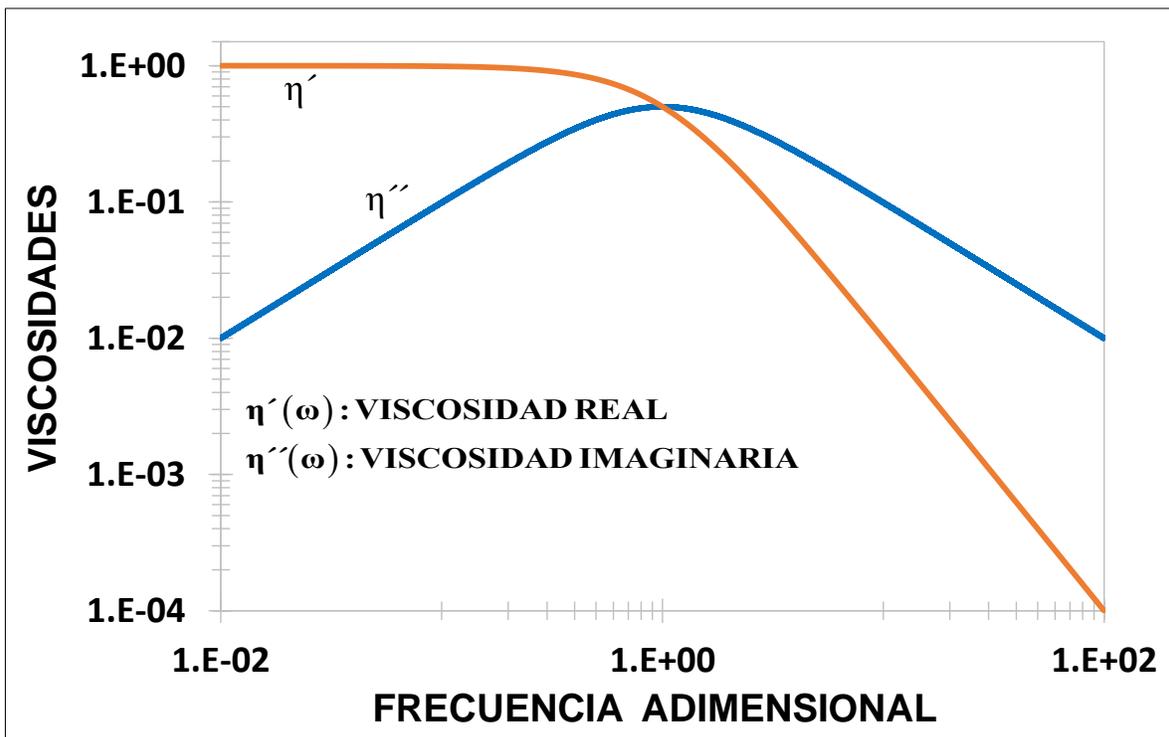


Figura 5.6 Ilustra el comportamiento de las viscosidades reales e imaginarias de la función de transferencias versus la frecuencia adimensional. Observe que, a frecuencias menores de 1, i.e. $\omega < 1$, en el sistema domina la viscosidad real, mientras que, a frecuencias moderadas y altas, el sistema es dominado por la viscosidad imaginaria.



5.2.3 Magnitud de la función de transferencia.

La viscosidad compleja puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\eta^*(\omega) = \sqrt{[\eta'(\omega)]^2 + [\eta''(\omega)]^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

La viscosidad compleja a frecuencias bajas es 1 y a frecuencias altas, la viscosidad compleja tiende a cero.

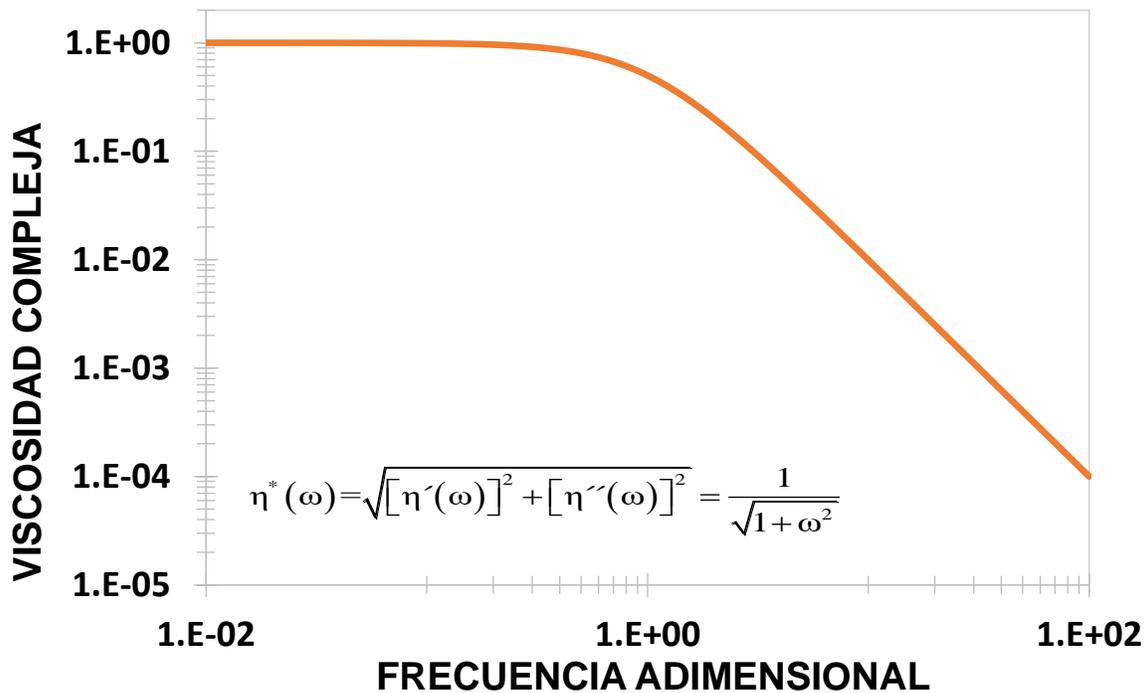


Figura 5.7 Ilustra la magnitud de la función de transferencia en función de la frecuencia adimensional.

5.3 Flujos volumétricos real e imaginaria del modelo de Maxwell con inercia.

Para un fluido viscoelástico de Maxwell, el sistema de flujo volumétrico real, queda definido de la siguiente manera:

$$\text{Re}[\bar{Q}_V(t)] = \text{Cos}(\omega t) - \omega \text{Sin}(\omega t)$$

Y la parte imaginaria toma la forma:

$$\text{Im}[\bar{Q}_V(t)] = \omega \text{Cos}(\omega t) + \text{Sin}(\omega t)$$



Es decir, los flujos volumétricos, son una combinación lineal de senos y cosenos. Las expresiones para el flujo volumétrico y real pueden ser expresadas en términos de una matriz:

$$\begin{pmatrix} \text{Re}[\bar{Q}_v(t)] \\ \text{Im}[\bar{Q}_v(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Cos}(\omega t) \\ \text{Sin}(\omega t) \end{pmatrix}$$

5.3.1 Flujo volumétrico real.

En la Fig. (5.10) se ilustra el flujo volumétrico real en función del tiempo adimensional de proceso para diferentes valores en la frecuencia adimensional. Es claro que el flujo volumétrico es una combinación de senos y cosenos; y que la frecuencia a través de la función de transferencia juega un papel de amplitud de las curvas mostradas en la Figs. (5.8-9-10). El efecto de la frecuencia, se observa en el número de ciclos que describe los flujos volumétricos (real e imaginario) y básicamente la frecuencia está relacionada con el número de ciclos y con la amplitud de los flujos volumétricos respectivamente.

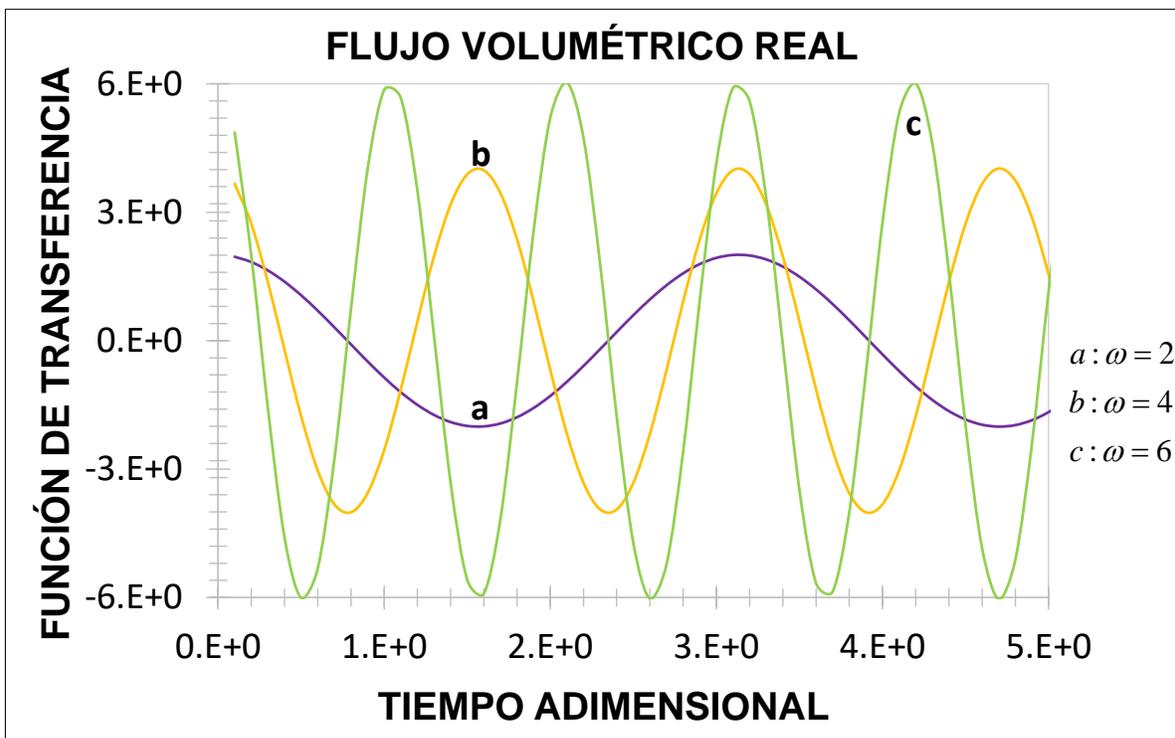


Figura 5.8 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 2, 4$ y 6), adimensional relacionado a un fluido de Maxwell.



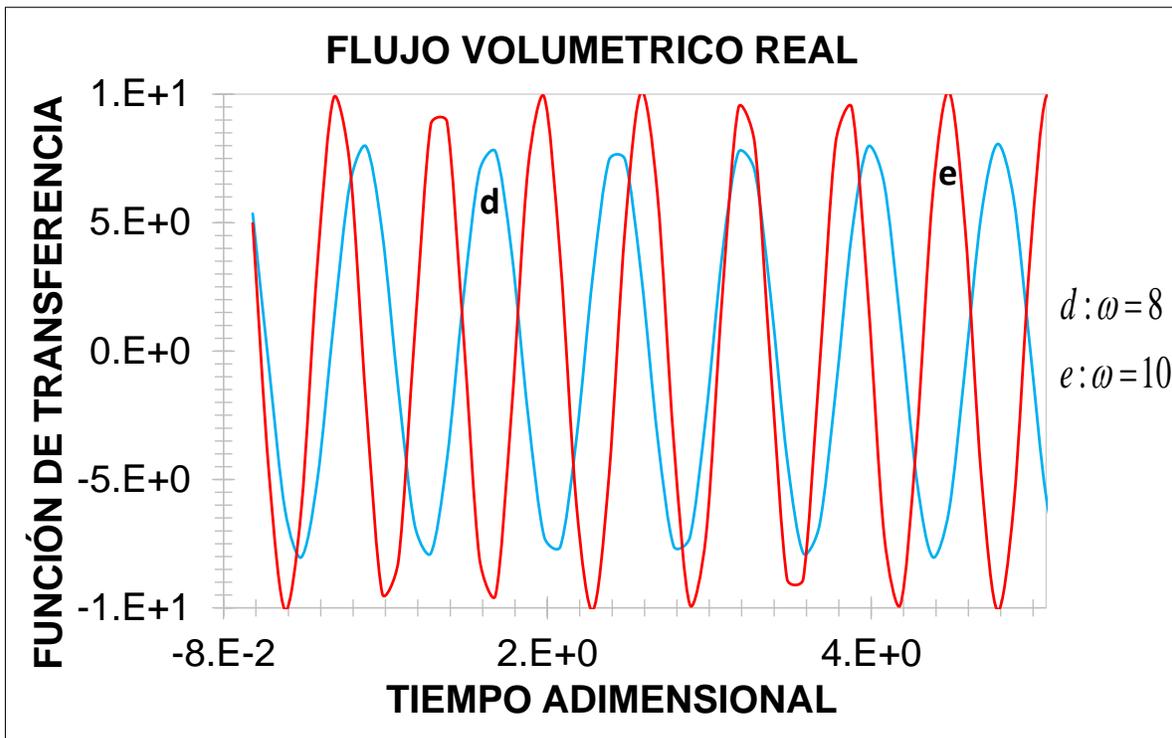


Figura 5.9 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 8$ y 10), relacionado a un fluido de Maxwell.

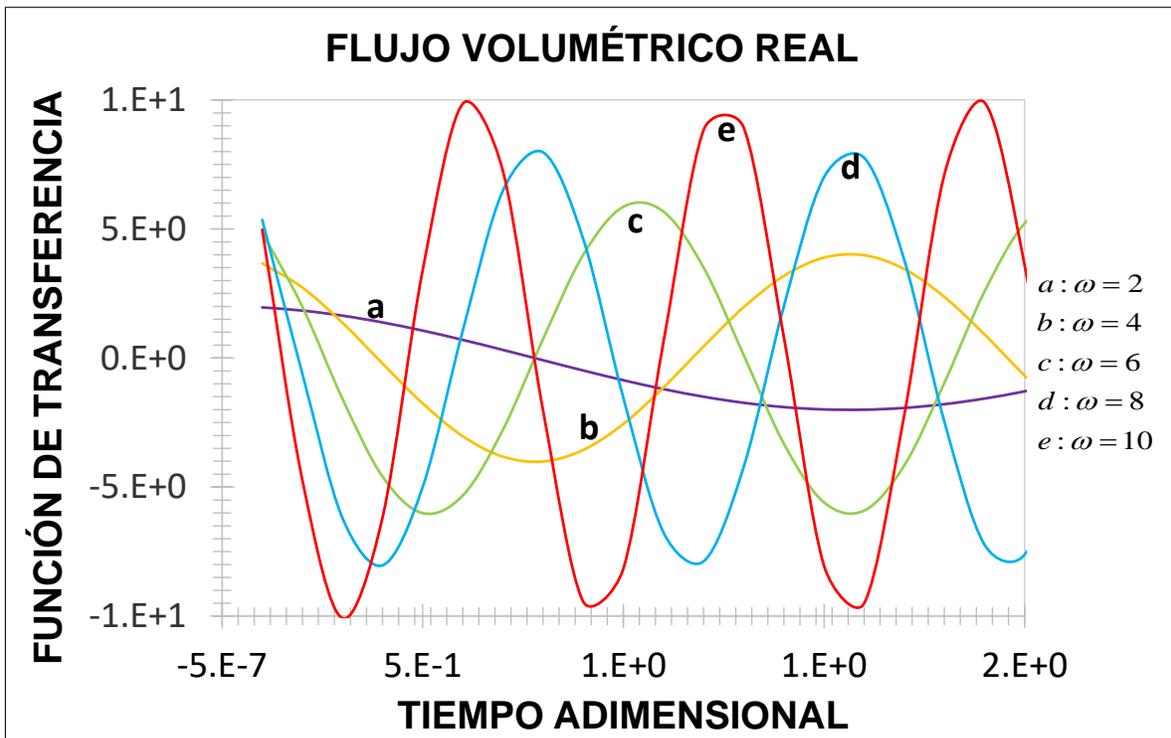


Figura 5.10 Ilustran el flujo volumétrico real como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular, entre dos a diez, relacionado a un fluido de Maxwell.



5.3.2 Flujo volumétrico Imaginario.

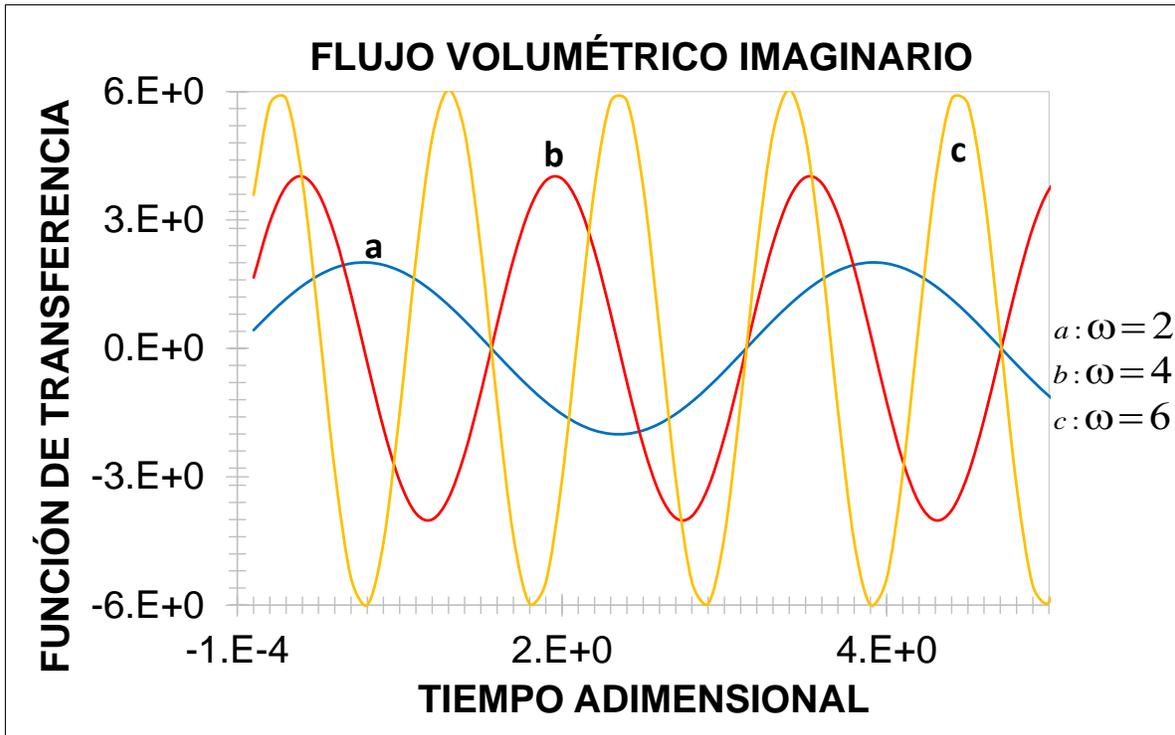


Figura 5.11 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 2, 4$ y 6), relacionado a un fluido de Maxwell.



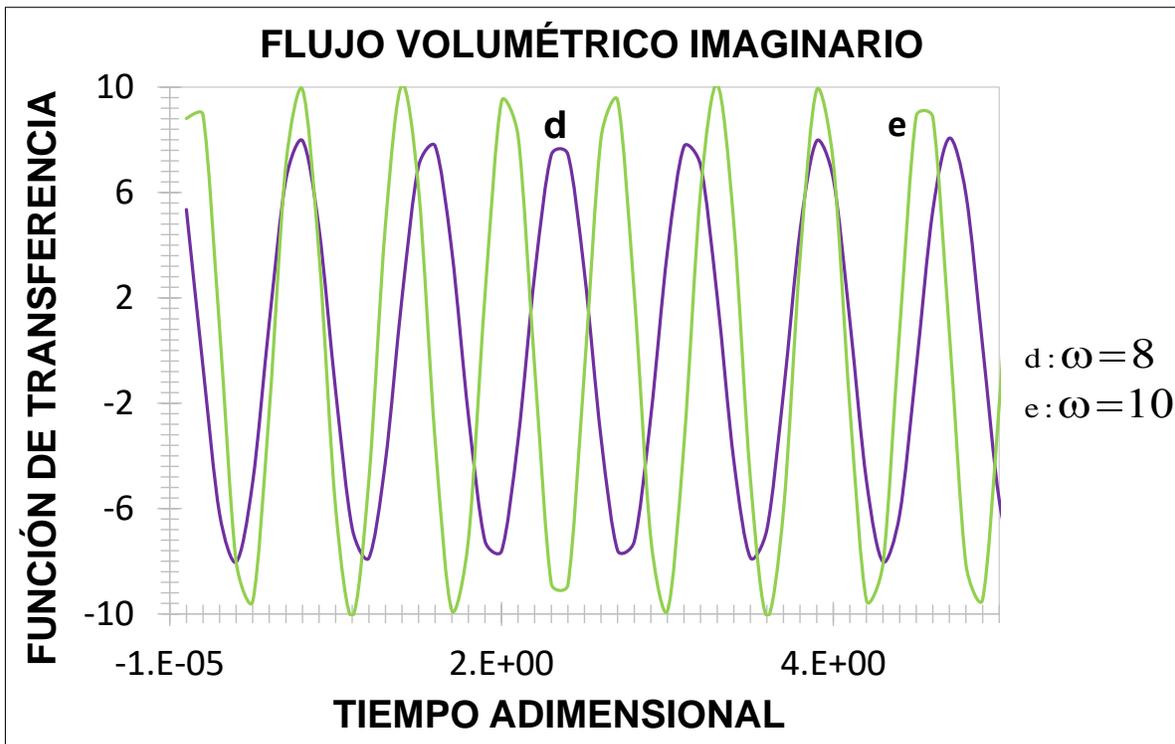


Figura 5.12 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular ($\omega = 8$ y 9), relacionado a un fluido de Maxwell.



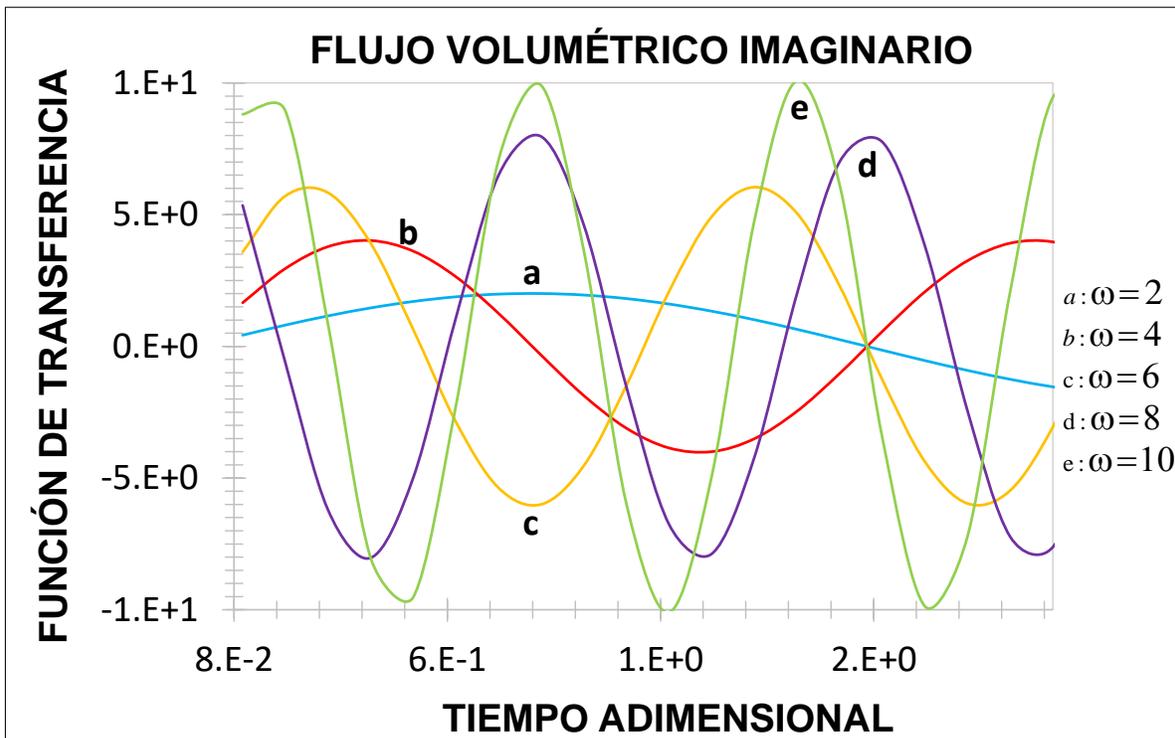


Figura 5.13 Ilustran el flujo volumétrico imaginario como función del tiempo adimensional para diferentes valores de frecuencia angular, entre dos a diez, relacionado a un fluido de Maxwell.

En las Figs. (5.11-12-13) ilustran el comportamiento del flujo volumétrico imaginario con función del tiempo de proceso como función de la frecuencia adimensional. Se observan tres comportamientos en las gráficas:

- El efecto de la frecuencia adimensional induce un aumento en el número de los ciclos.
- El máximo en las curvas, depende de la frecuencia adimensional y básicamente, el comportamiento entre el flujo volumétrico real e imaginario es básicamente el mismo, excepto que se encuentran desfasados.
- Cualitativamente, son similares, sin embargo cuantitativamente son diferentes.
- El flujo imaginario y real, depende de los mecanismos oscilatorios y viscosos a través del número de Womersley y de la frecuencia compleja.

En la siguiente sección se aplican los resultados obtenidos en esta parte del capítulo, en el flujo pulsátil con inercia y aplicado a la descripción del flujo pulsátil sanguíneo con el modelo de Maxwell multimodal en el caso de tres modos.



5.4 Simulación con datos reométricos de sangre con colesterol.

En esta sección, se predice la mejora de la fluidez con datos reales de sangre humana con hipercolesterolemia. Los parámetros del material se dan en las Tablas (6). El radio sanguíneo típico de las venas varía de 0,02 a 0,35 cm y la densidad de la sangre es aproximadamente de 1,05 g / cm³ respectivamente (Del Rio et al. 1998). Los datos reométricos de colesterol en sangre no pueden ajustarse con un solo modelo en pruebas oscilatorias de flujo, por lo que es necesario emplear más modos para ajustarse a las medidas experimentales (Calderas et al. 2009). Las fluideces reales e imaginarias pueden ser sustituidas por el modelo Maxwell generalizado para N = 3 modos, de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 6. Valores de parámetros de material para el modelo multimodal de Maxwell.

MODELO	MÓDULO ELÁSTICO [Pa]	TIEMPO DE RELAJACIÓN [s]
Maxwell Multimodal	$G_i = \begin{cases} i=1: 28.5 \\ i=2: 0.37 \\ i=3: 0.01 \end{cases}$	$\lambda_i = \begin{cases} i=1: 0.0052 \\ i=2: 0.03 \\ i=3: 0.79 \end{cases}$

5.4.1 Viscoelasticidad lineal.

La Fig. (5.14) muestra la simulación para la viscoelasticidad lineal como función del módulo elástico (a), y el módulo viscoso (b) versus la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempos de relajación de Maxwell con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol alto.

Para el módulo elásticos multimodal, se tiene:

$$G'(\omega) = \sum_{j=1}^{N=3} G'_j(\omega)$$

$$= G_{01} \frac{\lambda_{01}^2 \omega^2}{1 + \lambda_{01}^2 \omega^2} + G_{02} \frac{\lambda_{02}^2 \omega^2}{1 + \lambda_{02}^2 \omega^2} + G_{03} \frac{\lambda_{03}^2 \omega^2}{1 + \lambda_{03}^2 \omega^2}$$

Y finalmente, para el módulo viscoso multimodal, es:



$$G''(\omega) = \sum_{j=1}^{N=3} G_j''(\omega)$$

$$= G_{01} \frac{\lambda_{01}\omega}{1 + \lambda_{01}^2\omega^2} + G_{02} \frac{\lambda_{02}\omega}{1 + \lambda_{02}^2\omega^2} + G_{03} \frac{\lambda_{03}\omega}{1 + \lambda_{03}^2\omega^2}$$

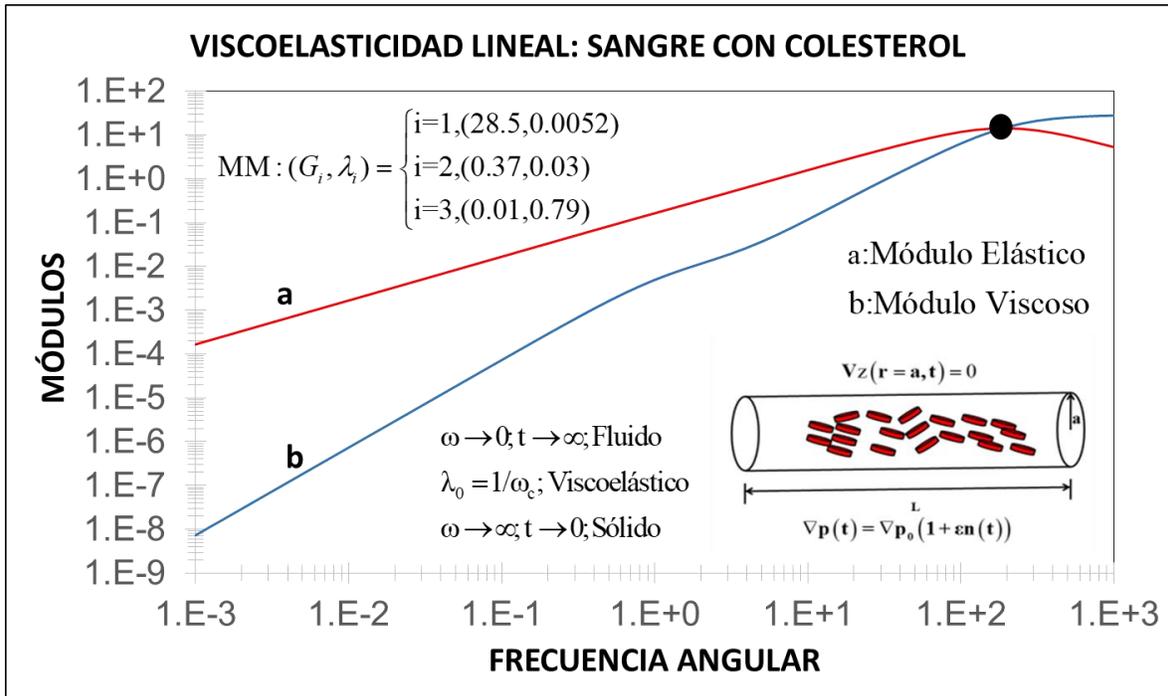


Figura 5.14 Se ilustra la viscoelasticidad lineal como función del módulo elástico (a) y viscoso (b) como función de la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempo de relajación de Maxwell con datos reométricos de sangre con colesterol.

Matemáticamente, la función del módulo elástico (a) muestra un comportamiento creciente en el intervalo de frecuencias $[-0.001, 100]$, pero tiende a decrecer de manera que aumenta significativamente la frecuencia angular adimensional. Mientras que, al igual que el módulo elástico (a), el módulo viscoso (b) muestra un comportamiento lineal en el intervalo de la frecuencias $[-0.001, 1000]$ esto se debe, que al aumentar la frecuencia adimensional, aumenta significativamente el módulo viscoso (b). Es importante resaltar que a moderadas y altas frecuencias $[200, 1000]$ se tiene una intersección entre ambos módulos de tal manera que se obtiene, el módulo de almacenamiento debido a la tensión aplicada y pérdida del material, que determina la disipación de energía del modelo de



Maxwell [350]. Dichos módulos, representan una propiedad mecánica característica de este tipo de fluido viscoelástico lineal.

Físicamente, el módulo complejo está relacionado con el mecanismo viscoso y elástico, que describen la respuesta mecánica del fluido viscoelástico a través de las variaciones de la frecuencia. Ambos módulos dependen del esfuerzo cortante y la velocidad de deformación del material. Observe que, a frecuencias bajas, el sistema se comporta como un sólido, ya que domina la parte elástica, y a frecuencias altas, el sistema se comporta como un líquido, lo cual rige la viscosidad.

$$\omega \rightarrow 0; t \rightarrow \infty; \text{Sólido}$$

$$\lambda_0 = 1/\omega_c; \text{Viscoelástico}$$

$$\omega \rightarrow \infty; t \rightarrow 0; \text{Fluido}$$

5.4.2 Viscoelasticidad compleja.

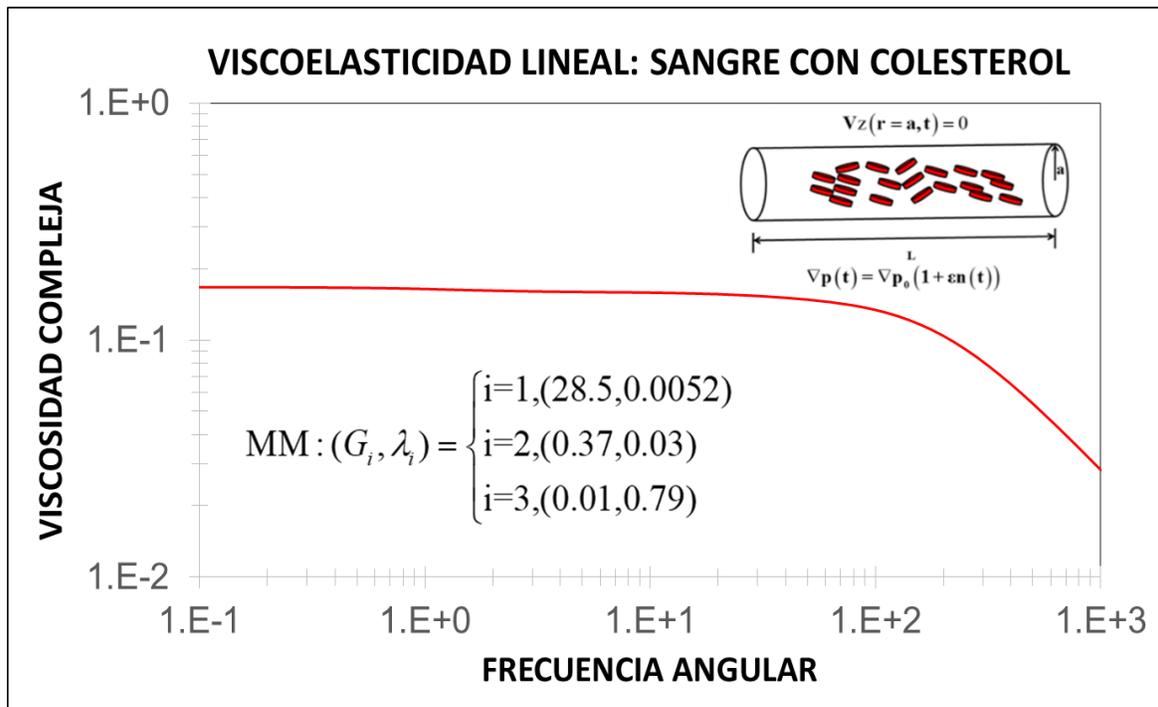


Figura 5.15 Se ilustra el comportamiento de la viscoelasticidad compleja como función del módulo viscoelástico y la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempos de relajación de Maxwell, utilizando datos reométricos de sangre con colesterol.



La viscosidad compleja se representa matemáticamente de la siguiente forma:

$$\eta^*(\omega) = \sqrt{[\eta'(\omega)]^2 + [\eta''(\omega)]^2}$$

La viscosidad compleja debe ser revaluada con tres modos para los datos de sangre con colesterol. La viscosidad $\eta'(\omega)$ para tres modos

$$\eta'(\omega) = G_{01}\lambda_{01} \frac{\lambda_{01}\omega}{1 + \lambda_{01}^2\omega^2} + G_{02}\lambda_{02} \frac{\lambda_{02}\omega}{1 + \lambda_{02}^2\omega^2} + G_{03}\lambda_{03} \frac{\lambda_{03}\omega}{1 + \lambda_{03}^2\omega^2}$$

Y para $\eta''(\omega)$ para tres modos

$$\eta''(\omega) = G_{01}\lambda_{01} \frac{1}{1 + \lambda_{01}^2\omega^2} + G_{02}\lambda_{02} \frac{1}{1 + \lambda_{02}^2\omega^2} + G_{03}\lambda_{03} \frac{1}{1 + \lambda_{03}^2\omega^2}$$

La Fig. (5.15) muestra la simulación para la viscoelasticidad compleja como función del módulo viscoelástico y la frecuencia angular adimensional para diferentes valores de módulos elásticos y tiempo de relajación de Maxwell con datos reométricos de sangre con hipercolesteronemia.

Matemáticamente, la función del módulo viscoelástico muestra un comportamiento monótono decreciente pero constante en el intervalo de frecuencias [0.1,150], y tiende a decrecer de manera que aumenta significativamente la frecuencia angular. Es importante resaltar que a frecuencias altas, se tiene una viscosidad compleja menor y que tiende a ser muy pequeño, incluso menor a cero.

Físicamente, la viscosidad compleja está relacionado con los mecanismos viscosos y elásticos que está asociada con la recuperación y describen la respuesta de las propiedades viscoelásticas del fluido a través de las variaciones de la frecuencia angular. Observe que, cuando la frecuencia angular disminuye, la viscosidad compleja tiende a comportarse un sólido y por el contrario, a frecuencias altas se comporta como un líquido en estado estacionario.

5.4.3 Función de transferencia real e imaginaria

La función de transferencia en forma adimensional tiene la siguiente forma:



$$T(\omega) = -\frac{8i}{W_0^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(i^{3/2} W_0 \omega)}{J_0(i^{3/2} W_0 \omega)} \right)$$

En donde, el número de Womersley generalizado toma la forma:

$$W_{0\omega}(\omega) = \frac{a}{1/\sqrt{\rho\phi_0\omega}} \sqrt{\Phi^*} = W_0 \sqrt{\Phi^*}; \quad W_0 = \frac{a}{1/\sqrt{\rho\phi_0\omega}}$$

La relación de fluidez adimensional está dada por:

$$\bar{\Phi}^* = \frac{\Phi}{\phi_0} = \frac{(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega^*))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega^*))}{\bar{\eta}_{01}(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega)) + \bar{\eta}_{02}(1+i\omega)(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega)) + \bar{\eta}_{03}(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))}$$

Donde se tiene las cantidades adimensionales, que toman las siguientes definiciones:

$$\bar{\eta}_{0k} = \frac{\eta_{0k}}{\eta_0} = \frac{G_{0k}\lambda_{0k}}{\sum_{i=1}^3 G_{0i}\lambda_{0i}}; \quad \bar{\lambda}_{0k} = \frac{\lambda_{0k}}{\lambda_{01}}; \quad k=\{2,3\}; \quad \omega^* = \lambda_{01}\omega$$

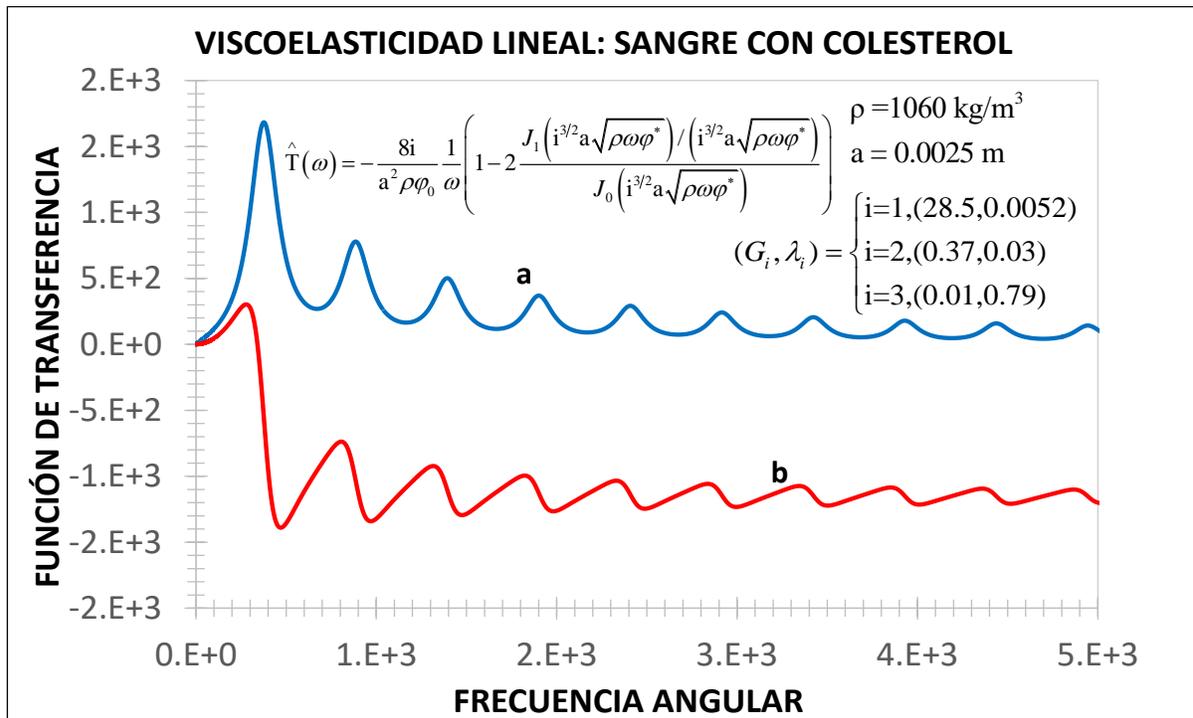


Figura 5.16 Representa el flujo pulsátil, parte real (a) y parte imaginaria (b) como función de transferencia y la frecuencia angular con módulos elásticos y tiempos de relajación multimodales de Maxwell con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol.



La Fig. (5.16) Representa el comportamiento de la simulación del flujo pulsátil real (a) e imaginario (b) como función de transferencia y la frecuencia angular adimensional con módulos elásticos y tiempos de relajación multimodales de Maxwell con datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia. Suponiendo que la sangre tiene una densidad de 1060 kg/m^3 y el radio de la vena es de 0.0025 m (Del Rio et al. 1998).

Matemáticamente, la parte real (a) del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes en el intervalo de $[0.001-800]$ siendo este el pico resonante dominante $[350]$, siendo a valores bajos de la frecuencia angular adimensional. Conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema. En la parte imaginaria (b), se puede observar un comportamiento de curvas discontinuas negativas $[0.001-800]$ siendo este el pico resonante dominante, para encontrar un punto máximo positivo y después ser sucedido por un punto mínimo negativo; la transición existente, sólo entre estos dos puntos, es lineal, además, conforme el sistema va evolucionando, existe una sucesión de puntos que se asemejan al comportamiento antes mencionado dando lugar a un comportamiento tipo diente de sierra.

Observe que, el comportamiento de las curvas antes mencionada, son las que se presentan en otros sistemas complejos (Del Rio et al. 1998). Conforme los tiempos de relajación de Maxwell aumenta, los valores máximos y mínimos disminuyen y el comportamiento irregular se va atenuando, al mismo tiempo, el material cambia para volverse constante e independiente. Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias altas, ya que tienden a atenuarse e incluso a desaparecer.

Físicamente, la máxima respuesta del gradiente de presión pulsátil, se ve inducida con respecto al valor de los tiempos de relajación de Maxwell y la relación entre el mecanismo viscoso y elástico, que representa el tiempo reducido adimensional.

5.4.4 Función de transferencia del modelo de Maxwell y Multimodal de Maxwell.

En el modelo de Maxwell uni-modal solo se tiene un modo por lo que, se tiene la siguiente expresión:

$$\bar{\Phi}^* = \frac{\Phi}{\varphi_0} = 1 + i\omega^*$$



Y para el modelo multimodal, se tiene:

$$\bar{\Phi}^* = \frac{\Phi}{\varphi_0} = \frac{(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega^*))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega^*))}{\bar{\eta}_{01}(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega))+\bar{\eta}_{02}(1+i\omega)(1+\bar{\lambda}_{03}(i\omega))+\bar{\eta}_{03}(1+i\omega^*)(1+\bar{\lambda}_{02}(i\omega))}$$

La Fig. (5.17) Muestra el comportamiento de la simulación del flujo pulsátil real, uni-modal (b) y multimodal (a) como función de transferencia y la frecuencia angular adimensional con módulos elásticos y tiempos de relajación de Maxwell con datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia. Suponiendo que la sangre tiene una densidad de 1060 kg/m^3 y el radio de la vena es de 0.0025 m (Del Rio et al. 1998).

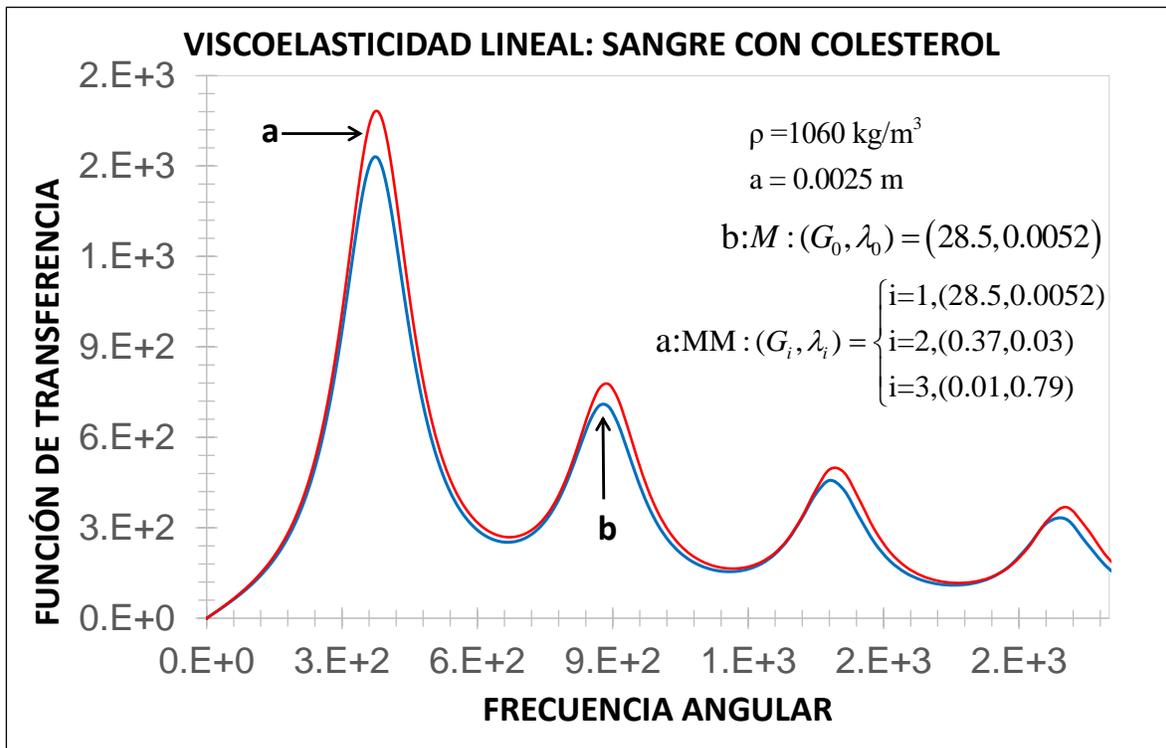


Figura 5.17 Se ilustra el flujo pulsátil real como función de transferencia y la frecuencia angular, para un modo (b) y tres modos (a), con módulos elásticos y tiempos de relajación multimodales de Maxwell con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol alto.

Matemáticamente, la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes, siendo a bajos valores de la frecuencia angular adimensional. Para así, conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema.



Se observan dos curvas resonantes las cuales describen la frecuencia multimodal de Maxwell, uni-modal (b) y multimodal (a) con datos de módulos elásticos y tiempos de relajación iguales, ya que se necesitan tres modos para ajustar todo el rango de datos en la zona de baja velocidad de corte. Ambos describen un comportamiento que se asemejan al tipo diente de sierra.

El modo principal (b) describe los datos a lo largo de las regiones de corte bajo, donde se produce el fenómeno de tensión de fluencia. El comportamiento entre las curvas resonantes (b) y (a) antes mencionadas son semejante, pero con desplazamientos pequeños, lo que muestra que el modelo de Maxwell aproxima a una mejor respuesta de las propiedades viscoelásticos del material a través de la variación de la frecuencia adimensional sin importar la cantidad de modos que se utilicen para describir a dicho sistema. Cuando los valores máximos y mínimos disminuyen, el comportamiento irregular se va atenuando, conforme el sistema evoluciona, para volverse estable.

Es importante resaltar, que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias altas pero presentado un pico de resonancia más pronunciada y produciendo una frecuencia de resonancia máxima a bajas frecuencias, a su vez tienden a atenuarse e incluso a desaparecer.

Físicamente, el aumento de flujo para sangre humana real para el flujo pulsátil (b) representa la aproximación de orden cero (sin mejora de flujo) y el flujo pulsátil (a) representa la aproximación de primer orden. La máxima respuesta entre el flujo oscilante y el gradiente de presión pulsátil, se ve inducida con respecto a la frecuencia multimodal de Maxwell y la relación entre los mecanismos viscosos y elásticos, que definen al tiempo reducido adimensional. Como consecuencia de esto, es posible notar que a valores pequeños de la frecuencia adimensional, se tiene el máximo valor obtenido para el flujo pulsátil, i.e. el flujo máximo posible se da en este punto. Conforme el sistema va evolucionando se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado. Entonces, a medida que aumenta el contenido de colesterol, el máximo del aumento de flujo es más evidente ya que el colesterol induce un esfuerzo cortante más fuerte.



CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES



6.1 Modelado teórico.

En este trabajo se estudió el efecto del gradiente de presión pulsátil de un fluido biológico viscoelástico (sangre humana con hipercolesterolemia) fluyendo en un capilar de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$. Para describir la transferencia de momento y reología se postularon las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil en la dirección z y (vii) la reología del sistema de flujo fue caracterizada por la ecuación constitutiva del de Maxwell de un modo y de tres modos aplicada a un sistema biológico particular (sangre con colesterol), la cual acopla los mecanismos elásticos y viscosos en el sistema.

Al combinar la ecuación de momento con la ecuación constitutiva reológica (Maxwell) se obtuvo, una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la velocidad debido a la inercia y la viscoelasticidad, inducidos por el gradiente de presión pulsátil. Debido que la función velocidad es continua, el espacio temporal es transformado al espacio de frecuencias utilizando el formalismo de Fourier (Operador integral de Fourier con el núcleo exponencial complejo).

Se aplicó la condición de no deslizamiento en el capilar, se obtuvo expresiones analíticas para el perfil de velocidad, el flujo volumétrico y la función de transferencia que relaciona la variable de entrada (flujo volumétrico viscoelástico) con la de salida (gradiente de presión pulsátil o en términos del flujo volumétrico newtoniano), las cuales dependen del número adimensional de Womersley y del tiempo reducido de Maxwell. El número de Womersley relaciona los mecanismos oscilatorios y viscosos respectivamente y que puede ser descrito también en términos del número de Reynolds o del Deborah (Del Rio et al. 1999; Herrera-Valencia et al. 2009, 2010, 2017; Herrera-Valencia y Rey 2015)

La ventaja del formalismo de Fourier es que, al pasar al espacio de las frecuencias, no se necesitan especificar condiciones límite en la ecuación diferencial parcial que describe el sistema físico de estudio. La transformada integral de Fourier, permite obtener la función de transferencia que relaciona los mecanismos viscoelásticos y viscosos a través de las variables de entrada y salida. Esta función de transferencia, depende del operador fluidez que describe la relación entre la rapidez de deformación y el esfuerzo (Herrera-Valencia y Rey 2015; 2018). En este trabajo, este tratamiento, permite extender el operador fluidez a cualquier ecuación constitutiva lineal (bajas deformaciones): (i) Maxwell, (ii) Jeffreys (polímero + solvente); (iii) Burgers, (iv) Maxwell Generalizado, (v) Modelos fraccionados de Maxwell, Jeffreys, Burgers, etc.



6.1.1 Función de transferencia compleja sin inercia.

En la primera parte de este trabajo, se analizó la función de transferencia en el caso límite cuando la frecuencia tiende a cero, i.e. en el espacio del tiempo, el sistema se encuentra en el régimen permanente. La parte real e imaginaria sin inercia de la función de transferencia coincide con las viscosidades real e imaginaria calculadas en las pruebas de flujo oscilatorio de baja amplitud (Bird et al. 1977) (Capítulo V). Al multiplicar estas por la frecuencia obtenemos los módulos de pérdida y almacenamiento. Este estudio, puede ser extendido a cualquier ecuación reológico en el régimen de viscoelasticidad lineal.

$$G'(\omega) = \omega \operatorname{Im} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right]; \quad G''(\omega) = \omega \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} \right]$$

Por ejemplo, para un fluido de Maxwell, las contribuciones fueron expuestas en las Ecs. (4.1-24) y (4.1-25).

$$\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} = \frac{1}{1+i\omega}$$

Los módulos viscoelásticos para el modelo de Maxwell se escriben como:

$$G'(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Por ejemplo, para un fluido de Jeffreys, la relación entre el flujo volumétrico newtoniano y flujo viscoelástico tiene la forma:

$$\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} = \frac{1+(\lambda_J/\lambda_0)(i\omega)}{1+i\omega}$$

La ecuación anterior, es la forma adimensional del modelo de Jeffreys. Al calcular la parte real e imaginaria de la función de transferencia y multiplicarla por la frecuencia, se tiene lo siguiente:



$$G'(\omega) = \frac{\omega + (\lambda_J / \lambda_0) \omega^3}{1 + (\lambda_J / \lambda_0)^2 \omega^2}$$

$$G''(\omega) = (1 - (\lambda_J / \lambda_0)) \frac{\omega^2}{1 + (\lambda_J / \lambda_0)^2 \omega^2}$$

Las expresiones anteriores son los módulos viscoelásticos para el modelo de Jeffreys. Este tipo de sistemas viscoelásticos han sido estudiados en sistemas micelares tipo gusano el régimen diluido y semi-diluido en tensoactivos aniónicos tipo CTAT o EHAC (Manero et al. 2012). Por ejemplo, para un fluido de Burgers que contiene una segunda derivada en el tensor de esfuerzos.

$$\frac{\hat{Q}_N(\omega)}{\hat{Q}_V(\omega)} = \frac{1 - (\beta / \lambda_0^2) \omega^2 + (i\omega)}{1 + (\lambda_J / \lambda_0) (i\omega)}$$

Los módulos viscoelásticos para el modelo de Burgers, se presentan a continuación:

$$G'(\omega) = \frac{\omega - (\beta / \lambda_0^2) \omega^2 + (\lambda_J / \lambda_0) \omega^3}{1 + (\lambda_J / \lambda_0)^2 \omega^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{1 + (\lambda_J / \lambda_0) (1 - (\beta / \lambda_0^2) \omega^2)}{1 + (\lambda_J / \lambda_0)^2 \omega^2} \omega^2$$

Por último, para el modelo de Maxwell multimodal, se tiene la relación de los módulos viscoelásticos para tres modos es la siguiente:

$$G'(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{G_{02} / G_{01} \omega}{1 + (\lambda_{02} / \lambda_{01})^2 \omega^2} + \frac{G_{03} / G_{01} \omega}{1 + (\lambda_{03} / \lambda_{01})^2 \omega^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} + \frac{G_{02} / G_{01} \omega^2}{1 + (\lambda_{02} / \lambda_{01})^2 \omega^2} + \frac{G_{03} / G_{01} \omega^2}{1 + (\lambda_{03} / \lambda_{01})^2 \omega^2}$$

Las ecuaciones desarrolladas en este capítulo, son punto de partida en nuestro análisis sin inercia. Las principales contribuciones del mismo, se enlistan a continuación. En este trabajo, se analizaron los modelos de Maxwell y multi modal de Maxwell solamente.



6.1.2 Función de transferencia compleja con inercia.

Utilizando el formalismo de Fourier se obtuvo una expresión cerrada para la función de transferencia en el sistema, la cual, es una relación entre la variable de entrada (Flujo viscoelástico de Maxwell) y la de salida (Flujo newtoniano).

$$T(\omega) = \frac{Q_N(\omega)}{Q_V(\omega)}$$

La función de transferencia compleja que se obtuvo es un cociente de series de Bessel, las cuales inducen a un comportamiento resonante, el cual es regulado a través del número de Womersley y la función fluidez compleja que depende de la ecuación constitutiva que se esté analizando.

$$T(\omega) = -\frac{8i}{W_0} \left(1 - 2 \frac{J_1 \left(i^{3/2} \sqrt{W_0} \left(\Phi^* / \varphi_0 \right) \right) / \left(i^{3/2} \sqrt{W_0} \left(\Phi^* / \varphi_0 \right) \right)}{J_0 \left(i^{3/2} \sqrt{W_0} \left(\Phi^* / \varphi_0 \right) \right)} \right)$$

La función de transferencia, depende de la longitud característica radial $r = a$, la fluidez a bajo corte, de la densidad y de la frecuencia. Nótese que esta, es general y depende de la fluidez normalizada:

$$W_0 = \rho \omega a^2 \varphi_0$$

Y de la función fluidez compleja normalizada con la fluidez a bajo corte:

$$\Phi^* / \varphi_0$$

La función de transferencia compleja, contiene varios casos particulares, los cuales son descritos a continuación:

- a) A frecuencias cercanas a cero, la función de transferencia tiende a la fluidez normalizada:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) = \Phi^* / \varphi_0$$

- b) En el caso de un fluido newtoniano con inercia, el valor de la fluidez compleja normalizada es uno, por lo que:

$$\Phi^* / \varphi_0 = 1,$$

La función de transferencia se reduce a:



$$T(\omega) = -\frac{8i}{a^2 \rho \varphi_0 \omega} \left(1 - 2 \frac{J_1 \left(i^{3/2} \sqrt{a^2 \rho \omega \varphi_0} \right) / \left(i^{3/2} \sqrt{a^2 \rho \omega \varphi_0} \right)}{J_0 \left(i^{3/2} \sqrt{a^2 \rho \omega \varphi_0} \right)} \right)$$

- c) La función fluidez compleja normalizada, contiene varios casos particulares dependiendo de la ecuación constitutiva normalizada. Por citar algunos: (i) Maxwell, (ii) Jeffreys, (iii) Burgers, (iv) Maxwell generalizado, etc.

Las curvas generadas mediante las simulaciones son características de otros sistemas dinámicos que involucran una variable de entrada y salida y mecanismos de tipo inercial modificados por los efectos elásticos. Por citar algunos: (i) Medios porosos, (ii) Fluidos electroreológicos, (iii) Sistemas biológicos (Células ciliadas externas, Flujo sanguíneo).

Observe que, la manera de modificar el número de Womersley es a través de la geometría (radio del capilar) y las propiedades materiales del sistema, como son: (i) pH, (ii) Concentración y (iii) Peso molecular.

La parte real y la imaginaria del flujo volumétrico muestran un comportamiento oscilatorio y el valor del máximo y mínimo en el sistema, está determinado por las propiedades materiales en el sistema.

El flujo volumétrico real e imaginario en función de las frecuencias muestra un comportamiento oscilatorio, es decir, un comportamiento no-monótono inducido por el valor de la frecuencia y de las propiedades materiales del medio.

A una frecuencia en específico, y un número de Womersley, la función de transferencia está completamente determinada. Esta, está relacionada a la amplitud de las oscilaciones mientras que, la frecuencia de oscilación está directamente relacionada con el número de ciclos en el sistema.

6.1.3 Aplicación a sangre con contenido de colesterol.

De datos reométricos extraídos de experimentos oscilatorios a baja amplitud, se obtiene las propiedades materiales del modelo de Maxwell para sangre con hipercolesterolemia. El ajuste con el modelo de Maxwell se hizo con tres modos característicos los cuales fueron simulados mediante un programa de Mathematica 11.0 (Calderas et al. 2009; Moreno et al. 2015; Herrera-Valencia 2017). La selección de tres modos se hizo con el fin, de que sean la menor cantidad de parámetros materiales en el sistema, i.e. al aumenta el número de modos se oscurece la interpretación física en el sistema.



El punto de cruce [350], entre el módulo elástico y viscoso, es el tiempo dominante viscoelástico de Maxwell y este se obtiene directamente del experimento a amplitudes bajas, i.e. $\lambda_0 = 1/\omega_c$. Este tiempo describe los procesos acoplados de elasticidad (almacenamiento) o pérdida (viscosidad) en el sistema.

A frecuencias bajas el sistema presenta un comportamiento de sólido mientras que, a frecuencias altas de fluido, es decir, la parte disipativa domina sobre los mecanismos elásticos.

$$\omega \rightarrow 0; t \rightarrow \infty; \text{Sólido}$$

$$\lambda_0 = 1/\omega_c; \text{Viscoelástico}$$

$$\omega \rightarrow \infty; t \rightarrow 0; \text{Fluido}$$

La parte real de la función de transferencia muestra un comportamiento resonante en la ventana de observación de [0.001, 5000]. El máximo de las curvas resonantes se encuentra en el primer pico resonante que se encuentra a una frecuencia de [350], e incluso a esta frecuencia, se encuentra asociado el módulo de almacenamiento y pérdida. Al aumentar la frecuencia, el sistema muestra varias curvas resonantes en las que el máximo local decrece, conforme aumenta la frecuencia adimensional. Por otra parte, la función de transferencia imaginaria muestra un comportamiento las clásicas curvas tipo diente de sierra investigadas en la literatura especializada (Del Rio et al. 1998). Estas curvas, también decrecen conforme se aumenta la frecuencia adimensional. Los datos utilizados para la simulación fueron de sangre con contenido de colesterol alto.

Se demostró, que no existe mucha diferencia entre el modelo de Maxwell unimodal [1550] y el multimodal [1700] ya que, las curvas resonantes asociadas a la función de transferencia son muy similares .

Observe que, la curva resonante dominante se encuentra en el tiempo viscoelástico de cruce, por lo que, la respuesta entre el fluido newtoniano y el viscoelástico esta determinado por las propiedades del tiempo de relajación dominante.

En conclusión, los mecanismos viscoelásticos permiten que exista una diferencia considerable entre el flujo viscoelástico de la sangre y el flujo volumétrico newtoniano, lo cual, puede representar una ventaja desde el punto de vista mecánico el sistema cardiaco.



6.2 Trabajo a futuro.

A continuación, se presentan algunas de las aplicaciones de flujo pulsátil y puedan ser viables a diferentes ramas de las ciencias:

- Comparar las predicciones teóricas del efecto de los mecanismos cinéticos, viscoelásticos y de ruptura mediante el uso de sangre humana con diferentes patologías humanas, por ejemplo, la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, el hipercolesterolemia asociado con el colesterol alto que afecta a las arterias, el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y las enfermedades de transmisión sexual (Calderas et al. 2003).
- El análisis del flujo pulsante y oscilante combinado, aplicado a la disipación viscosa en flujos complejos, merece un análisis adicional.
- La extensión a fluidos viscoelástico no lineales, es decir, que se aplique a medianas y altas rapidezces de deformación. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones constitutivas que describen este régimen es la ecuación reológica de Bautista Manero-Puig (Manero et al. 1980).
- Aplicar el formalismo de Fourier y la función de transferencia para otro tipo de sistemas complejos, como las células ciliadas externas, que son sistemas biológicos que presentan cambio en su curvatura en función de un campo eléctrico y muestran resonancia (Abou-Dakka et al. 2012).
- Este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo. La solución micelar consiste en una mezcla de tensoactivo, alcohol, salmuera y crudo. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recuperación en los yacimientos.
- Ecuaciones constitutivas que involucren transferencia de momento y que induzcan la transferencia de masa por corte. En este punto, se podría aplicar este conocimiento para estudiar la evolución del hematocrito.
- Aplicar paquetes de programación especializados para una descripción de sistemas más complejos como una arteria o una vena que cambie su diámetro como función de la posición axial. Estos sistemas presentan un cambio de flujo debido a la expansión y contracción de la vena.



Finalmente, este trabajo y los resultados teóricos, computacionales y las predicciones con datos reométricos representan la búsqueda constante del estudio de sistemas biológicos que inspiran al hombre a entender cómo trabajan y su posible beneficio a la sociedad, utilizando a los fenómenos de transporte, reología y matemáticas aplicadas como herramienta de carácter obligatorio para su análisis y comprensión.



APÉNDICE A



En este apéndice se desarrolla las ecuaciones principales mediante una forma matemática equivalente diferente a la desarrollada mediante el formalismo de Fourier y la ecuación homogénea de Bessel.

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (\text{A-1})$$

El término $\rho \partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. Por otra parte, la componente rz de la ecuación constitutiva toma la forma:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{\Phi} \dot{\gamma}_{rz} \quad (\text{A-2})$$

Al combinar las Ecuaciones (A-1, A-2), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\Phi} \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (\text{A-3})$$

Al multiplicar la Ec. (A-1) $1 + \lambda_M \partial_t$ se tiene lo siguiente:

$$\rho \Phi \frac{\partial V_z}{\partial t} = \Phi \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (\text{A-4})$$

La rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz} = dV_z/dr$ se puede expresar de la siguiente:

$$\rho \Phi \frac{\partial V_z}{\partial t} = \Phi \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A-5})$$

La Ec. (A-5) se puede es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en la Ec. (A-5) se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{I} \left\{ \rho \Phi \frac{\partial V_z}{\partial t} \right\} = \mathfrak{I} \left\{ \Phi \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$\rho \hat{\Phi} \cdot (i\omega) V_z(r, \omega) = \hat{\Phi} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \right) \quad (\text{A-7})$$



Simplificando la Ec. (A-7) y definiendo la fluidez compleja como el inverso de la viscosidad compleja, se tiene lo siguiente:

$$\hat{\Phi}^* = \frac{1}{\eta^*} = \text{Re} \left[\hat{\Phi} \right] + i \text{Im} \left[\hat{\Phi} \right] \quad (\text{A-8})$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

A-1) Perfil de velocidades.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \rho(i\omega) \hat{\Phi}^* V_z(r, \omega) = \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-9})$$

Factorizando la función velocidad $V_z(r, \omega)$:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \rho(i\omega) \hat{\Phi}^* \right\} V_z(r, \omega) = \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-10})$$

Para resolver la Ecuación diferencial de Bessel se propone el siguiente cambio de variable:

$$\alpha^2 = \rho(i\omega) \hat{\Phi}^* \quad (\text{A-11})$$

Nótese que α tiene unidades de longitud. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-12})$$

La parte homogénea se resuelve de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (\text{A-13})$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (\text{A-14})$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:



$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2 r^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (\text{A-15})$$

La Ec. (A-15) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (\text{A-16})$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (A-16) está dada por la Expresión:

$$V_z(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (\text{A-17})$$

En la Ec. (A-17) $\{J_0(x), Y_0(x)\}$ son la funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente. La solución particular para el problema de la Ec. (A-17) se puede expresar como:

$$V_{z_p}(r, \omega) = A \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2 \right\} V_z(r, \omega) = \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-18})$$

Sustituyendo en la Expresión general, se tiene lo siguiente:

$$\alpha^2 A = \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-19})$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{\hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right)}{\alpha^2} = \frac{\hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right)}{\rho(i\omega) \hat{\Phi}^* \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right)} = \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-20})$$

En donde el operador diferencial espacial se anula debido a que la solución particular es una constante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z(r, \omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) A = 0 \quad (\text{A-21})$$

Por lo que, la solución es la solución homogénea dada por las series de Bessel Ec. (A-20) y sol. Particular Ec. (A-21) por lo que, se tiene lo siguiente:



$$V_z(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-22})$$

o

$$V_z(\alpha r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-23})$$

La solución general contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 las cuales deben de determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se pueden describir como:

$$\text{C.F.1: } r = 0; V_z(0, \omega) = 0; \quad \left| V_z(0, \omega) \right| \leq M \quad (\text{A-24a})$$

$$\text{C.F.2: } r = a; V_z(\alpha a, \omega) = 0 \quad (\text{A-24b})$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. Por otra parte, la segunda condición de frontera se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = V_z(\alpha r = 0, \omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-25})$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-26})$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (\text{A-27})$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero. Por lo que la solución general toma la forma:



$$V_z(\alpha r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-28})$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(\alpha a, \omega) = C_1 J_0(\alpha a) + C_2 Y_0(\alpha a) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A-29})$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha a) \rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-30})$$

Finalmente al sustituir las constantes C_1 y C_2 en la solución general, se tiene lo siguiente:

$$V_z(\alpha r, \omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha a) \rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (\text{A-31})$$

Factorizando la velocidad axial en el espacio de Fourier, se tiene:

$$V_z(\alpha r, \omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) \quad (\text{A-32})$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del sistema $\{\rho, \eta_0, \lambda_0, \lambda_J\}$, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir a efectos resonantes en el sistema.

A-2) Flujo volumétrico.

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, esta dada por:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r, t) r dr \quad (\text{A-33})$$



Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$\mathfrak{T}\{Q(t)\} = Q(\omega) = \mathfrak{T}\left\{2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, t) r dr\right\} \quad (\text{A-34})$$

Por otra parte suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$\mathfrak{T}\left\{2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, t) r dr\right\} = 2\pi \int_0^a \mathfrak{T}\{V_z(\alpha r, t)\} r dr = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr \quad (\text{A-35})$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr \quad (\text{A-36})$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el espacio de Fourier en la integral de flujo volumétrico Ec. (A-36)

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(\alpha r, \omega) r dr = 2\pi \int_0^a \frac{1}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right) r dr \quad (\text{A-37})$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \int_0^a \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right) r dr \quad (\text{A-38})$$

Para simplificar la integración de la Ec. (A-38) se propone el siguiente cambio de variable: $u = r/a$,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \int_{0/a}^{a/a} \left(1 - \frac{J_0\left(\alpha a \left(\frac{r}{a}\right)\right)}{J_0(\alpha a)}\right) \left(\frac{r}{a}\right) d\left(\frac{r}{a}\right) \quad (\text{A-39})$$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\alpha a u)}{J_0(\alpha a)}\right) u du \quad (\text{A-40})$$



Definiendo $\alpha a = \beta$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (A-40) toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^\beta \left(1 - \frac{J_0(\beta u)}{J_0(\beta)} \right) u du \quad (A-41)$$

En la Ec. (A-41) se hace el siguiente cambio de variable $z = \beta u$, por lo que:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^\beta \left(1 - \frac{J_0(z)}{J_0(\beta)} \right) z dz \quad (A-42a)$$

Aplicando linealidad de la suma, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \int_0^\beta z dz - \frac{1}{J_0(\beta)} \int_0^\beta J_0(z) z dz \right\} \quad (A-42b)$$

Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz} [zJ_1(z)] = zJ_0(z) \quad (A-43)$$

En la Ec. (A-43) J_1 es la función de Bessel de primera especie de orden 1. Al sustituir la Ec. (A-43), en la integral de la expresión del flujo volumétrico:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \int_0^\beta z dz - \frac{1}{J_0(\beta)} \int_0^\beta \frac{d}{dz} [zJ_1(z)] dz \right\} \quad (A-44)$$

Al simplificar la Ec. (A-44) se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^\beta - \frac{zJ_1(z)}{J_0(\beta)} \Big|_0^\beta \right\} \quad (A-45)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, i.e. evaluando la función de Bessel en los límites superior e inferior respectivamente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{\beta J_1(\beta)}{J_0(\beta)} \right\} \quad (A-46)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:



$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho(i\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (\text{A-47})$$

La Ec. (A-47) es el resultado más importante del presente análisis y es punto de partida en los cálculos posteriores. Un hecho importante de la Ec. (A-47) es la dependencia con el parámetro β el cual, nos aporta información acerca de los mecanismos inerciales y de flujo a través de la función fluidez compleja. La Ec. (A-47) puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right\} \quad (\text{A-48})$$

Para poder desacoplar la Ec. (A-48) en una contribución real y otra imaginaria, las funciones de Bessel deben ser desarrolladas:

$$1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} = -\frac{(\beta)^2}{8} - \frac{(\beta)^4}{48} - \frac{11}{3072}(\beta)^6 - \frac{11}{3072}(\beta)^8 + O((\alpha R)^{10}) \quad (\text{A-49})$$

Sustituyendo la Ec. (A-48), en la Ec. (A-49)

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot i \left(-\frac{1}{8}(\beta^2)^1 - \frac{1}{48}(\beta^2)^2 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 - \frac{11}{3072}(\beta^2)^3 + O((\beta^2)^{10}) \right) \quad (\text{A-50})$$

El parámetro β se puede expresar en término de las fluideces real y compleja respectivamente:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= (\alpha a)^2 = a^2 \rho(i\omega) \hat{\Phi}^* = a^2 \rho(i\omega) \left(\text{Re} \left[\hat{\Phi}^*(\omega) \right] - i \text{Im} \left[\hat{\Phi}^*(\omega) \right] \right) \\ &= a^2 \rho \omega \left(\text{Im} \left[\hat{\Phi}^*(\omega) \right] + i \text{Re} \left[\hat{\Phi}^*(\omega) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A-51})$$

Combinando las últimas dos expresiones, el flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{\rho\omega} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \left(\text{De } \omega^* \hat{\Phi}^* \right)^j \quad (\text{A-52})$$

En término de las fluideces real e imaginaria se tiene lo siguiente:



$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2}{(\rho/\lambda_0)} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) i^3 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \omega^{*j-1} De^j \left(\varphi_I^*(\omega) + i\varphi_R^*(\omega) \right)^j \quad (A-53)$$

El flujo volumétrico puede ser expresado en término de una serie de potencias infinita la cual, depende de las propiedades inerciales y viscoelásticas a través del número de Deborah y de las fluideces real e imaginaria respectivamente. Las cantidades adimensionales definidas en el flujo volumétrico son las siguientes:

$$De = \frac{a^2 \rho \varphi_0}{\lambda_0} = \frac{\text{Inercia}}{\text{Viscoelasticidad}} = \begin{cases} De \gg 1 : \text{Inercia} \\ De = 1 : \text{Inercia} = \text{Viscoelasticidad} \\ De \ll 1 : \text{Viscoelasticidad} \end{cases} \quad (A-54a)$$

$$\omega^* = \omega \lambda_0 \quad (A-54b)$$

$$\bar{\varphi}_R(\omega^*) = \frac{\lambda^* \omega^{*2}}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^{*2}} \quad (A-54c)$$

$$\bar{\varphi}_I(\omega^*) = \frac{(1 - \lambda^*) \omega^*}{1 + (\lambda^*)^2 \omega^{*2}} \quad (A-54d)$$

En las expresiones (A-54 c,d) son las expresiones de la frecuencia, las fluideces reales e imaginaria respectivamente. Nótese que a frecuencias bajas, i.e. tiempos largos, el flujo volumétrico se transforma en:

$$\text{Lim}_{\omega^* \rightarrow 0} Q(\omega^*) \cong \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left(-\frac{\partial p(\omega^*)}{\partial z} \right) \quad (A-55)$$

La Ec. (A-55) representa el modelo newtoniano en el espacio de frecuencias.



BIBLIOGRAFÍA



- Abou-Dakka M., Herrera-Valencia E.E., Rey D. A. (2002). Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cell. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 185-186, 1-17.
- Afonso A.M., Alves M.A., Pinho F. T. (2011). Electro-osmotic flow of viscoelastic fluids in microchannels under asymmetric zeta potentials. *J. Eng. Math* 71, 15-30.
- Apostolidis AJ, Beris AN (2015) The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state rheology of blood. *Rheol Acta* 1: 1-13.
- Bautista F, Soltero JFA, Macias ER, Manero O (2002) On the shear banding flow of wormlike micelles. *J Phys Chem B* 106: 13018-13026.
- Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 *An introduction to rheology*, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 *Dynamics of polymeric liquids*, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E. & Lightfoot E.N. 2002 *Transport Phenomena*, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Currie, I.G, 1974 *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill Press.
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2005) Pulsatile Poiseuille flow of discotic mesophases. *Chem Eng Sci* 60: 6622-6636.
- De Kee D, Chan Man Fong CF (1994) Rheological Properties of Structured Fluids. *Polym Eng Sci* 34: 438-445.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. (1998) Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E.* 58 (5) 6323.
- Fredrickson AG (1964) *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Herrera-Valencia E.E. & Rey, A.D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.



- Herrera-Valencia EE, Calderas F, Medina-Torres L, Pérez-Camacho M, Moreno L, Manero O (2017). On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood. *Rheol Acta* 56(4): 1-21
- Herrera-Valencia, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.
- Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009) Effect of random longitudinal vibration on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol Acta* 48:779-800
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2000) A note on Newtonian and non-Newtonian oscillatory pipe flow. *Rev Mex Fís* 46: 566-571.
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2001) Viscous dissipation of a power law fluid in a oscillatory pipe flow. *Rev Mex Fís* 47: 351-356.
- Herrera Velarde JR, Zenit R, Mena B (2003) Measurement of the temperature rise in non-Newtonian oscillatory pipe flows. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 109: 157-176.
- Lin Y, Han Tan GW, Phan-Thien N, Cheong Khoo B (2015) Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspension in tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 202: 13-17.
- Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. *Rheol Acta* 19: 277-284.
- Moreno L, Calderas F, Sanchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sanchez-Solis A, Manero O (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Aust Rheol J* 27: 1-10.
- Moreno L, Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solís, A & Manero, O. 2013. La sangre humana desde el punto de vista de la reología. *Materiales Avanzados.* 20, 33-37.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG (2010) Mathematical modelling of the cell-depleted peripheral layer in the steady flow of blood in a tube. *Biorheology* 47: 39-71.



- Manero O, Mena B (1977) An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. *Rheol Acta* 19: 277-284.
- Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. *Rheol Acta* 19: 277-284.
- Massoudi M, Phuoc TX (2008) Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model. *Comput Math Appl* 56:199–211.
- Mena B, Manero O, Binding DM (1979) Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 5: 427-448.
- Moreno L, Calderas F, Sanchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sanchez-Solis A, Manero O (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Aust Rheol J* 27: 1-10.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008a) A nonhomogeneous constitutive model for human blood. Part I. Model derivation and steady flow. *J Fluid Mech* 617: 327-354.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008b) A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part II. Asymptotic solution for large Peclet numbers. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 155: 146-160.
- Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008c) A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part III. Oscillatory flow. *J Fluid Mech* 155: 161-173.
- Phan-Thien N, Dudek J (1982a) Pulsating flow of a plastic fluid. *Nature* 296: 843-84.
- Phan-Thien N, Dudek J (1982b) Pulsating flow revisited. *J Non-Newton Fluid-Mech* 11: 147-161.
- Phan-Thien N, Dudek J (1982b) Pulsating flow revisited. *J Non-Newton Fluid-Mech* 11: 147-161.
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in *Self-Assembled Supramolecular*



- Architectures: Lyotropic Liquid Crystals. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga).
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers* 97 374-396.
- Rey, A.D. Mojdeh Golmohammadi & Herrera-Valencia, E.E. 2011 A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. *Soft Matter* 5002-5009.

