# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# COHOMOLOGÍA DE GAVILLAS SOBRE VARIEDADES ALGEBRAICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

**OSCAR ANTONIO RIOS HERNÁNDEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:**
**DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA**
**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018**

# Cohomología de gavillas sobre variedades algebraicas

Oscar Antonio Rios Hernández

2018

# Índice general

# Introducción

El aconteciemiento más destacable dentro del desarrollo de la geometría algebraica, y de hecho uno de los más sobresalientes de las matemáticas del siglo pasado, es sin lugar a dudas la introducción de la teoría de gavillas y el nacimeinto de la teoría de esquemas en el estudio de las variedades algebraicas. En su mayor parte desarrollado por Alexander Grothendieck, el trabajo realizado con la introducción de estas nuevas herramientas fue sobremanera profundo, y permeó considerablemente en el desarrollo de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX. Dando un nuevo enfoque al estudio de variedades algebraicas redefiniéndolas desde un punto de vista abstracto, permitió el uso y desarrollo de técnicas poderosas como sucesiones espectrales o teorías de cohomología, abrió paso a la construcción de puentes hacia distintas áreas de las matemáticas, y por supuesto, dio pie a la resolución de problemas que hasta entonces parecían bastante lejanas de conseguir con los métodos tradicionales.

Dada la trascendencia de los resultados alcanzados, resulta inocente suponer que la introdución a este nuevo lenguaje fuese elemental, y no sólo porque el carácter de la obra resulta monumental; sino además, porque mucha de la maquinaria más sofisticada de las matemáticas de ese tiempo fue necesaria para su desarrollo. Estos dos factores son algunos, entre otros tantos, que si bien no impiden, sí al menos dificultan iniciarse en el estudio de este nuevo enfoque.

El presente trabajo se centra en dos objetivos principales. El primero, es desarrollar el concepto de variedad algebraica utilizando enfoque moderno de la teoría de gavillas pero partiendo desde el punto de vista clásico de conjuntos algebraicos. Dicha tarea, se pretende realizar sin profundizar más de lo necesario en la teoría de gavillas o desarrollar la teoría de esquemas. El segundo objetivo, es poder introducir y desarrollar técnicas de cohomología sobre variedades algebraicas y probar algunos resultados importantes en esta dirección. La finalidad es exponer, en términos hasta cierto punto accesibles, las ideas generales de ciertos aspectos que se estudian dentro de enfoque de la geometría algebraica moderna y ver de qué manera pueden ser estudiados en casos particulares. Las demostraciones de algunos resultados no se incluyen en la tesis, sin embargo, se hará referencia explícita de dónde pueden ser consultadas. En general, se trata de resultados de álgebra conmutativa y álgebra homológica de los cuales no es necesaria la prueba para el desarrollo posterior de los temas. Los capítulos quedan distribuidos de la siguiente manera.

En el Capítulo I desarrollamos las nociones relacionadas con espacios afines. Se estudian conceptos como conjuntos algebraicos afines, ideales asociados a un conjunto algebraico afín, morfismos, anillo de coordenadas, etc. El resultado principal es establecer una correspondencia a nivel categórico entre conjuntos algebraicos afines y $k$-álgebras reducidas finitemente generadas.

El Capítulo II, se centra en el estudio de conjuntos algebriacos proyectivos y las construcciones correspondientes estudiadas en el caso afín, así como en la relación que guardan con los conjuntos algebricos afines. Se enfatizan las diversas similitudes entre la geometría afín y proyectiva, así como sus marcadas diferencias. Al final se introduce el concepto de homografías en el espacio proyectivo debido a su uso en un resultado posterior.

El desarrollo de la teoría de gavillas y su utilidad en geometría algebraica se presenta en el Capítulo III. En particular se definirá la noción abstracta de variedad algebraica y se introducirán las de gavillas de módulos. Se estudian nuevamente las relaciones entre variedades afines y proyectivas. Destacando la importancia del estudio local en ambos enfoques.

Se incluyen en el Capítulo IV resultados relacionados con la noción de dimensión de una variedad algebraica. Partiendo de definiciones en álgebra y topología, se introducen las ideas que las relacionan ambos enfoques en el caso de variedades algebraicas.

En el Capítulo V se desarrollan las nociones de cohomología en variedades. Se estudian conceptos de cohomología de Čech y cohomología de gavillas. Los resultados principales consisten en probar teoremas de desvanecimiento y calcular los grupos de cohomología de gavillas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. De manera general, se pretende ver cómo utlizando técnicas asequibles, en casos particulares, se pueden desarrollar diversos resultados que requieren de la maquinaria pesada en sus versiones más generales.

# Capítulo 1

# Conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n$

De manera general, la geometría algebraica clásica comprende el estudio de los conjuntos de ceros comunes de polinomios en varias variables con coeficientes sobre un campo fijo, así como de las relaciones que surgen entre estos conjuntos de ceros y las subestructuras del anillo de polinomios correspondiente. El sorprendente desarrollo del álgebra abstracta, a partir de los trabajos de D. Hilbert, E. Noether y W. Krull al rededor de 1900, permitió la formulación adecuada de una teoría en donde dichas relaciones se volviesen cada vez más estrechas.

En el presente capítulo introducimos las nociones básicas para iniciarce en el estudio de los objetos de interés así como de los morfismos correspondientes entre ellos. El resultado más importante será establecer una equivalencia entre la categoría de conjuntos algebraicos afines y la categoría de $k$-álgebras reducidas finitamente generadas.

## 1.1. Conjuntos algebraicos afines

Históricamente hablando, buena parte del progreso de la geometría algebraica se desarrolló trabajando sobre los cuerpos de los números reales o complejos, obteniendo en los segundos un ambiente más cómodo para la formulación de resultados. Sin embargo, a finales del siglo XIX los matemáticos R. Dedekind y H. Weber observaron que no todas las propiedades de los números complejos eran necesarias para el desarrollo de una teoría lo suficientemente complaciente.

En lo subsecuente, a menos que se especifique lo contrario, consideramos a $k$ simplemente como un campo algebraicamente cerrado de característica cero; todos los anillos se suponen conmutativos con unidad y todo morfismo entre anillos preserva la unidad.

**Definición 1.1.1.** *Sea $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n$ variables sobre un campo $k$. Definimos el **n-espacio afín** sobre $k$ como*

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_k := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in k\}$$

**Definición 1.1.2.** *Consideremos un subconjunto $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, al conjunto de ceros comunes de los polinomios de $S$, es decir*

$$\mathcal{V}(S) := \{P = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \ \forall f \in S\}$$

*le llamamos **conjunto algebraico afín** defindo por $S$.*

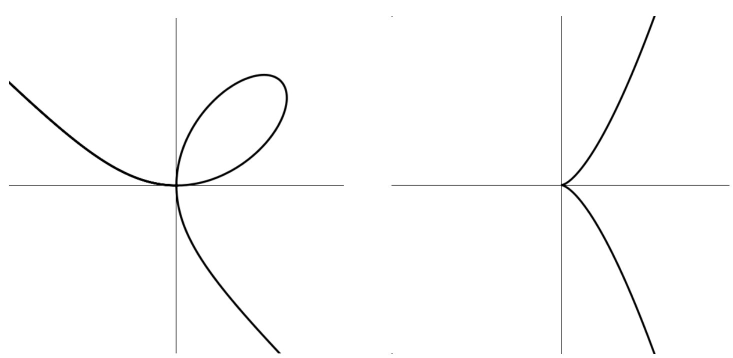
**Ejemplos 1.1.3.**

- *Si $k = \mathbb{C}$ y $n = 1$, dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$, tenemos que $\mathcal{V}(f)$ son las raíces del polinomio $f$, es decir un conjunto finito de puntos en el espacio afín $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.*

- *Para un polinomio $f$ no constante en el anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$ al conjunto algebraico afín definido por $\mathcal{V}(f)$ le llamamos **hipersuperficie**. En el caso de que $f$ sea lineal decimos que $\mathcal{V}(f)$ es un **hiperplano**.*

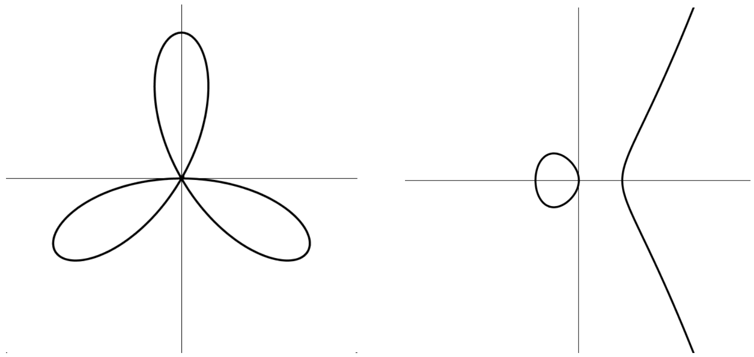
- *Todas las cónicas en $\mathbb{R}^2$ están dadas como ceros de polinomios de grado dos, en consecuencia son conjuntos algebraicos afines.*

- *Los siguientes son ejemplos de conjuntos algebraicos afines en el espacio $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.*



(a) $x^3 + y^3 - xy = 0$ (b) $y^2 - x^3 = 0$

Figura 1.1: Curva nodal y curva cúspide



(a) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ (b) $y^2 - x(x-1)(x+1) = 0$

Figura 1.2: Curva trébol y curva elíptica

- *Consideremos el grupo general lineal $GL_n(k)$ de las matrices invertibles de orden $n \times n$, los subgrupos de matrices*

$$SL_n(k) := \{A \in GL_n(k) : det(A) = 1\}$$

*y*

$$SO_n(k) := \{A \in GL_n(k) : AA^t = I\}$$

*si consideramos las entradas de una matriz como variables, los anteriores son ejemplos de conjuntos algebraicos afines en el espacio afín $\mathbb{A}_k^{n^2}$ ya que tanto el determinante como el producto de matrices se pueden expresar como polinomios. Ambos ejemplos combinan de manera muy especial la estructura variedad algebraica con su estructura de grupo, en general se conocen como grupos algebraicos afines.*

**Afirmación 1.1.4.** *El conjunto $X = \{(t, sen(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ no es un conjunto algebraico.*

*Prueba.* En efecto, si $X$ es un conjunto algebraico afín, entonces existe un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que se anula en todo $X$. Considere el polinomio $f(x, 0) \in \mathbb{R}[x]$; sin perder generalidad, podemos elegir $f$ de tal manera que $f(x, 0)$ sea distinto del polinomio cero en $\mathbb{R}[x]$. Ahora, note que $f(x, 0)$ se anula en una cantidad infinita de puntos, en particular los de la forma $x = n\pi$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, lo cual no es posible. En consecuencia $X$ no es un conjunto algebraico. $\square$

**Proposición 1.1.5.** *Sean $S \subset S'$ subconjuntos del anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $\mathcal{V}(S') \subset \mathcal{V}(S)$, más aún si $I = \langle S \rangle$ denota el ideal generado por $S$, se tiene que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(I)$.*

*Demostración.* Tomemos un punto $P \in \mathcal{V}(S')$, entonces por definición cada polinomio $f \in S'$ se anula en $P$, en particular si $f \in S \subset S'$ se tiene que $f(P) = 0$, luego $P \in \mathcal{V}(S)$, por lo tanto $\mathcal{V}(S') \subset \mathcal{V}(S)$. Por otro lado como $S \subset I = \langle S \rangle$ se tiene que $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(S)$. Ahora si $f \in I$, entonces se escribe de la forma $f = s_1 * g_1 + \ldots + s_k * g_k$ donde $s_i \in S$ y $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, así para cada punto $P \in \mathcal{V}(S)$

$$f(P) = s_1(P) * g_1(P) + \ldots + s_k(P) * g_k(P) = 0$$

en consecuencia $P \in \mathcal{V}(I)$. $\square$

La proposición anterior nos muestra que basta restringirnos al estudio de conjuntos afines definidos por ideales. De hecho, los siguientes resultados, nos restringen a ideales finitamente generados.

**Definición 1.1.6.** *Un anillo $R$ se dice* ***de Noether****, si satisface alguna de las siguientes tres condiciones equivalentes:*

1. *Toda cadena estrictamente ascendente de ideales en $R$*

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$$

*se estaciona, es decir, existe un entero $n$ tal que $I_n = I_{n+1} = \ldots$.*

2. *En cada familia no vacía de ideales de $R$ hay un elemento maximal, esto es, un ideal que no está contenido en ningún otro ideal de la familia.*

3. *Todo ideal $I$ en el anillo $R$ es finitamente generado, es decir, existen elementos $a_1, \ldots, a_k \in I$ tales que $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.*

**Teorema 1.1.7** (Teorema de la Base de Hilbert)**.** *Si $R$ es un anillo de Noether, entonces el anillo de polinomios $R[x_1, \ldots, x_n]$ también es de Noether*[1]*.*

**Corolario 1.1.8.** *El anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$ es de Noether, en consecuencia dado un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ existe un conjunto finito de polinomios $\{f_1, \ldots, f_l\} \subset I$ tales que*

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\{f_1, \ldots, f_l\}).$$

*Demostración.* Es inmediato pues para un campo $k$ los únicos ideales son los triviales $\{0\}$ y $k$. $\square$

[1] Ver [15] para la prueba.

**Proposición 1.1.9.** *Sean $I, J$ ideales y $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales todos ellos en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre un campo $k$. Entonces se cumple lo siguiente*

1. $\mathcal{V}(\{0\}) = \mathbb{A}^n_k$, $\mathcal{V}(1) = \emptyset$.
2. $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$.
3. $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$.
4. $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$.

*Demostración.*

1. Es evidente pues el polinomio $f \equiv 0$ se anula en todo punto $P \in \mathbb{A}^n_k$ y el polinomio constante $g = 1$ nunca se anula.

2. Demostramos que $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(J)$ para $I \subset J$. Aplicando este resultado a las contenciones $I \cap J \subset I$ y $I \cap J \subset J$ tenemos que

$$\mathcal{V}(I \cap J) \supset \mathcal{V}(I),\ \mathcal{V}(I \cap J) \supset \mathcal{V}(J)$$

en consecuencia

$$\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I \cap J).$$

Inversamente, elegimos $P \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Si $P \notin \mathcal{V}(I)$, entonces existe un polinomio $f \in I$ tal que $f(P) \neq 0$. Ahora, para un elemento arbitrario $g \in J$, tenemos $h = f * g \in I \cap J$. Entonces

$$h(P) = f(P) * g(P) = 0$$

así $g(P) = 0$, lo cual implica que $P \in \mathcal{V}(J)$. En consecuencia

$$\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

3. Note que el ideal $I_\lambda$ está contenido en $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, en consecuencia

$$\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subset \mathcal{V}(I_\lambda)$$

de esta manera

$$\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subset \bigcap_{\mu\in\Lambda} \mathcal{V}(I_\mu).$$

Para probar la otra contención escribimos primero $I_\lambda$ en términos de sus generadores, es decir

$$I_\lambda = \langle h_{\lambda 1}, \ldots, h_{\lambda m_\lambda} \rangle$$

note entonces que el conjunto $H = \{h_{\lambda j}\}_{\lambda \in \Lambda,\ 1 \le j \le m_\lambda}$ genera al ideal $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. Es decir que cada polinomio $f \in \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ se escribe como

$$f = h_1 * g_1 + \ldots + h_k * g_k$$

con $h_i \in H$ y $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Considere ahora un punto $P \in \mathcal{V}\left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$ entonces note que

$$h_{\lambda j}(P) = 0,\ j = 1, \ldots, m_\lambda$$

y esto pasa para cada $\lambda \in \Lambda$, por lo tanto

$$f(P) = h_1(P) * g_1(P) + \ldots + h_k(P) * g_k(P)$$

finalmente, $P \in \mathcal{V}\left(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$.

4. Es claro que $\mathcal{V}(\sqrt{I}) \subset \mathcal{V}(I)$ pues $I \subset \sqrt{I}$. Ahora, sea $f \in \sqrt{I}$. Entonces $f^m \in I$ para algún entero positivo $m$. Para $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(I)$, tenemos
$$f^m(a_1, \ldots, a_n) = 0$$
en consecuencia, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Por lo tanto, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(I)$.
$\square$

Las propiedades mencionadas nos reflejan lo siguiente; para un anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre un campo $k$, los conjuntos algebraicos se comportan como los cerrados de una topología sobre el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$. Dicha toplología se conoce como **topología de Zariski** y posee diversas propiedades de interés. Por ejemplo, observe que dos abiertos no vacíos siempre se intersectan.

Consideremos $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, el conjunto definido como $D(f) = (\mathbb{A}_k^n - V(f))$ es un abierto en la topología de Zariski, y le llamamos abierto estándar. Note que los abiertos estándar forman una base para la topología de Zariski.

## 1.2. El ideal de un conjunto algebraico

Dado un conjunto de polinomios $S$ en el anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$, le hemos asociado un subconjunto $\mathcal{V}(S)$ en el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$, la construcción dual consiste en que a cada subconjunto de un espacio afín podamos asignarle un subconjunto en el anillo de polinomios de tal manera que se anulen en cada uno de sus puntos. De hecho, como veremos, dicho subconjunto resulta ser un ideal. La asignación de estos ideales será primordial para construir el análogo algebraico de las variedades afines, y jugará un papel fundamental para establecer la correspondencia categórica.

**Definición 1.2.1.** *Sea $k$ un campo, considere un subconjunto $X \subset \mathbb{A}_k^n$ definimos el conjunto*

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in A : f(P) = 0 \ \forall P \in X\}$$

*y le llamamos* ***ideal asociado*** *al conjunto $X$.*

Note que el conjunto que acabamos de definir es en realidad un ideal. En efecto, es claro que $0 \in \mathcal{I}(X)$, además si $f \in \mathcal{I}(X)$, note que

$$(-f)(P) = -(f(P)) = 0$$

para todo $P \in X$, en consecuencia $-f \in \mathcal{I}(X)$. Así mismo considere $f, g \in I(X)$, luego

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0$$

por lo tanto $f + g \in I(X)$. Finalmente si $f \in I(X)$ y $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que

$$(f * g)(P) = f(P) * g(P) = 0$$

por lo tanto $f * g \in \mathcal{I}(X)$.

**Proposición 1.2.2.** *Sean $X$ y $Y$ subconjuntos de un espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ entonces las siguientes afirmaciones son ciertas*

1. *$X \subset Y \ \Rightarrow \ \mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(Y)$*
2. *Para cada subconjunto $X \subset \mathbb{A}_k^n$ tenemos que $X \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$. La igualdad se cumple si y sólo si $X$ es un conjunto algebraico.*
3. *Si $J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal, entonces $J \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$.*

*Demostración.* 1. Si $P \in X$, en particular $P \in Y$ luego para $f \in \mathcal{I}(Y)$ se tiene que $f(P) = 0$, es decir, $f \in \mathcal{I}(X)$ en consecuencia $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$.

2. Si $P \in X$ entonces $f(P) = 0$ para cada $f \in \mathcal{I}(X)$, así $P \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$. Si se da la igualdad, por definición $X$ es algebraico. Por otro lado, si $X$ es algebraico, existe un ideal $J$ tal que $\mathcal{V}(J) = X$. En particular, $J \subset \mathcal{I}(X)$ y en consecuencia $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subset \mathcal{V}(J) = X$.

3. Sea $f \in J$ entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in \mathcal{V}(J)$ en consecuencia $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$.

□

**Ejemplos 1.2.3.**

- *Sea $P = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto el espacio afín $\mathbb{A}^n_k$, consideremos el ideal*

$$I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$$

*note que $\{P\} = \mathcal{V}(I)$. Afirmamos que el $I$ es el ideal asociado a $\{P\}$. En efecto, la contención $I \subset \mathcal{I}(P)$ es clara. Inversamente, si $f \in \mathcal{I}(P)$ lo podemos expresar de la siguiente manera*

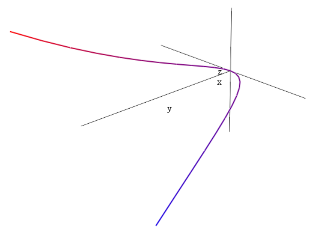
$$f = (x_1 - a_1) * g_1 + (x_2 - a_2) * g_2 + \ldots (x_n - a_n) * g_n + c$$

*donde $c \in k$. Note que al evaluar $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ pero el polinomio se anula en ese punto en consecuencia $c = 0$ y por lo tanto $f \in I$.*

- *Considere la curva $C = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}^3$, veamos que la curva es un conjunto algebraico. Sea $J$ el ideal generado por los elementos $x^2 - y, x^3 - z \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Claramente los puntos de la curva anulan los polinomios, en consecuencia $C \subset \mathcal{V}(J)$. Por otro lado si $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{V}(I)$ tenemos que se satisfacen las ecuaciones $x_1^2 = y_1$ y $x_1^3 = z_1$. Así $Q \in C$, en consecuencia $C$ es el conjunto algebraico $\mathcal{V}(J)$. Es claro que $J \subset \mathcal{I}(C)$. Supongamos ahora que no se da la otra contención, entonces existe $f \in \mathcal{I}(C) - J$. Elijamos $f$ de manera que $\mathrm{gr}_y(f)$ sea mínimo y sea $d = \mathrm{gr}_y(f)$, entonces $f$ se escribe como*

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(x, z) y^i$$

*para algunos polinomios $a_i(x, z) \in \mathbb{R}[x, z]$. Ahora si $d > 1$, consideremos el polinomio $g = a_d(x, z) y^{d-1}(x^2 - y)$, es claro que $f - g \in \mathcal{I}(C)$, más aún $f - g$ no está en $J$, pues de lo contrario $f$ también lo estaría, luego $f - g \in \mathcal{I}(C) - J$ y tiene grado menor que $d$, lo cual es una contradicción, así $\mathrm{gr}_y(f) = 0$, en consecuencia $f \in \mathbb{R}[x, z]$. Análogamente podemos llegar a que el grado de $f$ en $z$ es cero, así $f$ es un polinomio* *en $\mathbb{R}[x]$ que se anula en todos los puntos de la curva, en consecuencia $f$ es el polinomio cero. Finalmente $\mathcal{I}(C) = J$. A la curva $C$ se le conoce como curva alabeada.*



(a) $x^2 - y, x^3 - z = 0$

Figura 1.3: Curva alabeada

**Proposición 1.2.4.** *Considere $k$ un campo infinito, entonces $\mathcal{I}(\mathbb{A}_k^n) = 0$.*

*Demostración.* Por inducción sobre $n$. El caso base $n = 1$ es claro pues un polinomio distinto de cero sólo tiene un número finito de raíces. Ahora supongamos que el resultado es cierto para $n = r$, sea $f$ un polinomio no constante en $k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, entonces $f$ se escribe de la forma

$$f = a_s(x_1, \ldots, x_n) * x_{n+1}^s + \ldots + a_0(x_1, \ldots, x_n)$$

con $s \geq 1$ y $a_s \neq 0$. Por hipótesis de inducción existe un punto $P \in \mathbb{A}^n$ tal que $a_i(P) \neq 0$ para toda $i = 1, \ldots, s$. Luego el polinomio $f(x_{n+1}) = a_s(P)x_{n+1}^s + \ldots + a_1(P)$ tiene a lo más $s$ raíces. Por lo tanto $f$ no se anula en todo $\mathbb{A}_k^n$. $\square$

## 1.3. Irreducibilidad

Recapitulando hasta ahora, a cada subconjunto del anillo de polinomios $S$ le hemos asociado un objeto geométrico vía el mapeo $\mathcal{V}(S)$ en donde a un conjunto de polinomios le asignamos sus ceros comunes. De la misma manera a cada objeto geométrico de un espacio afín le fue asociado un objeto algebraico mediante el mapeo $\mathcal{I}(X)$, los polinomios que se anulan en $X$. Probamos también que es suficiente concentrarnos en el estudio ciertos conjuntos con estructura, los ideales del anillo de polinomios. Más aún, vimos que cada espacio afín posee estructura toplológica considerando los conjuntos algebraicos como base de cerrados. Los resultados mencionados tienen la siguiente finalidad; a partir los mapeos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{I}$ antes definidos empezaremos a construir una especie de *diccionario* entre el álgebra y la geometría, en el cual cada propiedad geométrica (o topológica) se vea reflejada en alguna propiedad algebraica y viceversa. La construcción de este diccionario es, en esencia, el tema central en geometría algebraica. Uno de los elementos fundamentales de este diccionario es el concepto de *irreduciblidad*, dicho concepto fue escencialmente modelado por L. Kronecker y E. Lasker a finales del siglo XIX para el caso de curvas y superficies complejas, la definición actual es la siguiente.

**Definición 1.3.1.** *Sea $X$ en un espacio topológico no vacío, $X$ se dice* ***irreducible*** *si toda vez que admite una descomposición del tipo*

$$X = X_1 \cup X_2$$

*en dos subconjuntos cerrados no vacíos, entonces $X = X_1$ o bien $X = X_2$. Si $X$ admite la descomposición en cerrados propios entonces $X$ dice* ***reducible****.*

**Proposición 1.3.2.** *Sea $X$ un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$X$ es irreducible.*
2. *Si $U$ y $V$ son abiertos en $X$ tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ o bien $V = \emptyset$.*
3. *Todo abierto no vacío es denso en $X$.*

*Demostración.*

- $1 \Rightarrow 2$. Sean $U, V \subset X$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ entonces, $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$ note que los conjuntos $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son ambos cerrados. Luego como $X$ es irreducible se tiene que $X \setminus U = X$ o bien $X \setminus V = X$ pues no pueden ser ambos propios. En consecuencia $U = \emptyset$ o bien $V = \emptyset$.
- $2 \Rightarrow 3$. Sea $U$ un abierto no vacío en $X$, note que para cualquier otro abierto no vacío $V$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, en consecuencia $U$ es denso en $X$.
- $3 \Rightarrow 1$. Sean $X_1, X_2 \subset X$ cerrados no vacíos tales que $X = X_1 \cup X_2$, en consecuencia $(X \setminus X_1) \cap (X \setminus X_2) = \emptyset$, entonces se tiene que $X \setminus X_1 = \emptyset$ o bien $X \setminus X_2 = \emptyset$, en consecuencia $X = X_1$ o $X = X_2$.

$\square$

**Definición 1.3.3.** *Un conjunto algebraico $X$ es irreducible (resp. reducible) si lo es como espacio topológico.*

**Proposición 1.3.4.** *Sea $X$ un conjunto algebraico no vacío y sea $\mathcal{I}(X)$ su ideal asociado. Entonces, $X$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es primo.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $X$ es reducible, entonces existe una descomposición de la forma $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1$ y $X_2$ conjuntos algebraicos propios no vacíos. Es decir $X_1 \subsetneq X$ y $X_2 \subsetneq X$, en consecuencia $\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(X_1)$ y $\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(X_2)$. Considere polinomios $f \in \mathcal{I}(X_1) \setminus \mathcal{I}(X)$ y $g \in \mathcal{I}(X_2) \setminus \mathcal{I}(X)$, note que el polinomio $f * g$ se anula en $X_1 \cup X_2 = X$. Por lo tanto $\mathcal{I}(X)$ no es primo.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{I}(X)$ no es primo. Entonces existen polinomios $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathcal{I}(X)$ tales que $f * g \in \mathcal{I}(X)$. Considere los ideales $J_1 := \langle \mathcal{I}(X), f \rangle$ y $J_2 := \langle \mathcal{I}(X), g \rangle$. Note que los conjuntos algebraicos $X_1 := \mathcal{V}(J_1)$ y $X_2 := \mathcal{V}(J_2)$ son subconjuntos propios no vacíos de $X$. Además si $P \in X$ se tiene que $(f * g)(P) = 0$ entonces $f(P) = 0$ o $g(P) = 0$, luego $P \in X_1$ o $P \in X_2$. Finalmente $X \subset X_1 \cup X_2$.

□

**Ejemplos 1.3.5.** 1. *Todo polinomio lineal $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ es irreducible debido a que es de grado 1, en consecuencia $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{A}^n$ también es irreducible, pues el ideal generado es primo.*

2. *El conjunto $\mathcal{V}(xy) \subset \mathbb{A}^2$ no es irreducible, ya que se puede expresar como la unión de los ejes $X$ y $Y$ que son ambos cerrados. Sin embargo los ejes sí son conjuntos irreducibles, es decir, que $\mathcal{V}(xy)$ es unión de dos irreducibles.*

3. *De manera más general, considere un polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y sea $f = f_1 * \ldots * f_s$ factorización en irreducibles: Es claro que $\mathcal{V}(f)$ no es irreducible; no obstante $\mathcal{V}(f)$ admite la descomposición*

$$\mathcal{V}(f) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{V}(f_i)$$

*en donde cada elemento de la unión es irreducible.*

Una vez definidos los conjuntos algebraicos irreducibles y analizando los ejemplos, es natural cuestionarnos acerca de si todo conjunto algebraico admite una descomposición en subconjuntos irreducibles. La respuesta a esta cuestión es afirmativa, más aún probaremos que dicha descompocisición es finita y única salvo el orden de los factores.

**Teorema 1.3.6.** *Sea $V$ un conjunto algebraico no vacío. Entonces $V$ se escribe de manera única como*

$$V = V_1 \cup V_2 \ldots \cup V_r$$

*donde los conjuntos $V_i$ son conjuntos algebraicos afines irreducibles y $V_i \nsubseteq V_j$ si $i \neq j$. A los conjuntos $V_i$ los llamamos las componentes irreducibles de $V$.*

*Demostración.*

1. Existencia. La prueba será por contradicción, es decir, suponemos que existen conjuntos algebraicos que no admiten descomposición en componentes irreducibles, tomemos $V$ de tal manera que el ideal asociado $\mathcal{I}(V)$ sea el elemento maximal de la colección de los ideales asociados a estos conjuntos. Como $V$ es reducible, existen $F$ y $G$ tales que $V = F \cup G$ con $F \neq V$ y $G \neq V$, luego $\mathcal{I}(V) \subsetneq \mathcal{I}(F), \mathcal{I}(G)$, y como $\mathcal{I}(V)$ es un elemento maximal, se tiene que $F$ y $G$ sí admiten descomposición en componentes irreducibles, en consecuencia $F = F_1 \cup \ldots \cup F_s$ y $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$, así $V$ también se descompone, los cual es una contradicción.

2. Unicidad. Consideremos dos expresiones para un conjunto algebraico, $V = V_1 \cup \ldots \cup V_s = W_1 \cup \ldots \cup W_r$. Note que el conjunto

$$V_i = V \cap V_i = (W_1 \cap V_i) \cup \ldots \cup (W_r \cap V_i)$$

luego como $V_i$ es irreducible existe $j$ tal que $V_i = W_j \cap V_i$, en consecuencia $V_i \subset W_j$, análogamente existe $k$ tal que $W_j \subset V_k$, así $V_i \subset V_j$ por lo tanto las dos componentes $V_i$ y $V_j$ son iguales. Finalmente $V_i = W_j$.

□

**Afirmación 1.3.7.** *El conjunto algebraico $V = \mathcal{V}(x^2 - yz, xz - x) \subset \mathbb{A}^3$ tiene tres componentes irreducibles.*

*Prueba.* En efecto, notemos que un punto $P = (x, y, z)$ pertenece a $V$ si y sólo si satisface las ecuaciones

$$x^2 = yz, \ x(z-1) = 0$$

ahora si $z = 1$ y $x^2 = y$ se satisfacen ambas ecuaciones, lo mismo para $x = 0$ y $y = 0$ o $x = 0$ y $z = 0$. Así las componentes para $V$ son las curvas que se generan con cada par de las ecuaciones anteriores, es decir, la parábola $x^2 = y$ y en el plano $z = 1$ o los ejes $Z$ y $Y$. Es claro que todas son irreducibles. □

## 1.4. Teorema de los ceros de Hilbert

Inicialmente nada nos impide definir conjuntos algebraicos afines sobre un campo arbitrario, en el sentido de que las propiedades enunciadas anteriormente se siguen cumpliendo. No obstante, surge la siguiente dificultad, considere $k = \mathbb{R}$ el campo de los números reales y considere el polinomio $f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1$ en el anillo $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, note que la ecuación $f = 0$ no tiene soluciones en los reales, es decir $\mathcal{V}(P) = \emptyset$ en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ en cuyo caso el estudio de conjuntos algebraicos parece carecer de sentido. Sin embargo, dicho polinomio tiene ceros considerándolo en el campo de los números complejos.

Los resultados que veremos en esta sección nos permiten, por un lado asegurar la existencia de conjuntos algebraicos afines para campos algebraicamente cerrados, y por otro establecer una correspondencia entre los mapeos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{V}$ con respecto a los ideales asociados a conjuntos algebraicos afines.

El siguiente Lema es un resultado debido al matemático de origen polaco Oscar Zariski. Es pieza fundamental para la prueba que veremos del Teorema de los ceros de Hilbert y su demostración puede ser consultada en [17].

**Lema 1.4.1** (Zariski). *Sea $R$ un álgebra finitamente generada sobre un campo $k$ tal que $R$ es a su vez un campo, entonces $R$ es una extensión algebraica sobre $k$.*

**Teorema 1.4.2.** *Sea $I$ un ideal en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre un campo algebraicamente cerrado $k$ tal que $I$ no contiene a la unidad, es decir $I \neq k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Como el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ es de Noether para el ideal $I$ existe un ideal maximal $J$ que contiene a $I$. Así $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$, en consecuencia, bastará probar que $\mathcal{V}(J)$ es no vacío. Entonces podemos suponer que $I$ es un ideal maximal $J$. Ahora para un ideal maximal $J$, se tiene que $k[x_1, \ldots, x_n]/J$ es un campo que contiene a $k$, por el Lema 1.4.1 es una extensión algebraica de $k$, y como $k$ es algebraicamente cerrado tenemos que $k[x_1, ..., x_n]/J = k$. Por lo tanto, tenemos que cada clase $x_i$ determina un elemento $a_i \in k$, tenemos pues que $x_i - a_i \in J$. Luego $\{x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\} \subset J$. Pero $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ es un ideal maximal, en consecuencia

$$J = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$$

por lo tanto

$$\mathcal{V}(J) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

finalmente $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. $\square$

El resultado que acabamos de probar es conocido como el *Teorema débil de los ceros de Hilbert*. Observe que, en la prueba, el resultado refleja una correspondencia entre los ideales maximales del anillo de polinomios y los puntos del espacio afín.

**Teorema 1.4.3** (Teorema de los ceros de Hilbert)**.** *Para un ideal $J$ del anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre un campo $k$ algebraicamente cerrado. Entonces*

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$$

Este resultado nos permite restringirnos al estudio de únicamente los ideales radicales del anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$. Veamos la prueba.

*Demostración.* Como $J \subset \sqrt{J}$ se tiene que $\sqrt{J} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$. Ahora para la otra contención, bastará probar que para cada $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ se tiene que $f \in \sqrt{J}$, es decir, que existe un entero $m$ tal que $f^m \in J$. Sabemos que cada ideal es finitamente generado, en particular $J$ lo es, entonces $J = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$. Introduzcamos una variable adicional $t$ y consideremos el siguiente ideal[2]

$$\tilde{J} := \langle h_1, \ldots, h_k, ft - 1 \rangle$$

en el anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \ldots, x_n, t]$. Entonces $\mathcal{V}(\tilde{J})$ consta de los puntos $(P, t_0)$ donde $P \in \mathbb{A}^n$ es cero de los $h_i$ ($P \in \mathcal{V}(I)$) y $t_0 \in k$ de tal manera que $(P, t_0) \in \mathbb{A}^{n+1}$ es cero del polinomio $ft - 1$, es decir que $f(P)t_0 - 1 = 0$, así $f(P) \neq 0$ lo cual es una contradicción pues $f(P) = 0$, la única posibilidad es que $\mathcal{V}(\tilde{J}) = \emptyset$. En consecuencia por el Teorema 1.4.2 $I_f = \langle 1 \rangle$ y por lo tanto existen polinomios $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n, t]$ tales que

$$1 = \sum_{i=1}^{k} g_i h_i + g_0(ft - 1)$$

ahora si hacemos $t = \frac{1}{f}$ obtenemos la siguiente igualdad

$$1 = \sum_{i=1}^{k} g_i(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f})h_i = \frac{1}{f^m} \sum_{i=1}^{k} g_i'(x_1, \ldots, x_n, 1)h_i$$

[2]Esta técnica es conocida como *el truco de Rabinowitsch*.

donde $m$ es la mayor potencia de $t$ que aparece en todos los polinomios $g_i$ y los polinomios $g_i'$ es el resultado de multiplicar $g_i$ por la potencia de $f$ correspondiente. Finalmente tenemos que

$$f^m = \sum_{i=1}^{k} g_i'(x_1, \ldots, x_n)h_i \in J$$

en consecuencia $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$. □

En base a los resultados anteriores, es conveniente remarcar las siguientes observaciones. Consideremos el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$, los mapeos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{V}$. Hasta ahora hemos estudiado la correspondecia

- ideales de $k[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow$ subconjuntos de $\mathbb{A}_k^n$

estudiando esta correspondecia, algunas de las consecuencias de los resultados anteriores son las siguientes biyecciones

- $\{$ideales radicales$\} \Leftrightarrow \{$conjuntos algebraicos$\}$
- $\{$ideales primos$\} \Leftrightarrow \{$conjuntos algebraicos irreducibles$\}$
- $\{$ideales maximales$\} \Leftrightarrow \{$puntos$\}$

dichas correspondencias exponen de manera clara la idea central del estudio en geometría algebraica. En la que, de manera general, a un objeto geométrico le es asociado un objeto algebraico y viceversa. Así mismo nos deja en puerta la siguiente cuestión: es posible que las relaciones entre objetos geométricos tengan una interpretación algebraica. Tal análisis corresponde al tema central de la siguiente sección.

## 1.5. Morfismos

Toda vez que se define cierta clase de objetos en matemáticas, surge la necesidad de compararlos de tal manera que sus estructuras se conserven bajo tales comparaciones (funciones continuas entre espacios topológicos, funciones diferenciables entre variedades diferenciables, funciones holomorfas entre superficies de Riemann, etc.). El introducir dichas comparaciones permite la clasificación de los objetos por medio de equivalencias, y con ello facilita el estudio de sus propiedades mediante análisis más simples.

En el caso de los conjuntos algebraicos observamos los siguiente, dado un polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ lo podemos considerar como una función

$f : \mathbb{A}^n_k \to k$ mediante la evaluación de cada punto del espacio afín en el polinomio. Más aún, $k$ lo podemos ver como $\mathbb{A}^1_k$, es decir que el contradominio de $f$ es un espacio afín, además para un conjunto algebraico $X$ en un espacio afín consideramos $f$ como la función restricción. El ejemplo anterior es nuestro primer acercamiento para definir morfismos entre conjuntos algebraicos afines.

**Definición 1.5.1.** *Sea $X$ un conjunto algebraico en un n-espacio afín. Una función $\phi : X \to k$ es una* ***aplicación polinomial*** *si existe un polinomio $f$ en $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\phi(P) = f(P)$ para todo punto $P \in X$.*

Note que el polinomio $f$ no es único, pues para $f$ y $g$ en $k[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que

$$f\mid_X = g\mid_X \Leftrightarrow (f-g)\mid_X = 0 \;\Leftrightarrow f - g \in I(X).$$

**Definición 1.5.2.** *Sea $X$ un conjunto algebraico afín, entonces definimos su* ***anillo de coordenadas*** *como*

$$k[X] := k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

*entonces tenemos la siguiente identificación*

$$k[X] = \{\phi : \phi \textit{ es una aplicacion plolinomial}\}.$$

**Observación 1.5.3.** *Dado un conjunto algebraico $X$ es irreducible si y sólo si $k[X]$ es un dominio entero.*

**Corolario 1.5.4.** [3] *Sea $X \subset \mathbb{A}^n_k$ un conjunto algebraico entonces, el álgebra $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ es reducida*[4] *si y sólo si el ideal $I(X)$ es un ideal radical.*

*Demostración.* Sea $f \in \sqrt{I}$ entonces existe un entero $m$ tal que $f^m \in I$, considere la clase de $f$ en el anillo de coordenadas $\bar{f} \in k[X]$ tenemos que $(\bar{f})^m = 0$ y como $k[x]$ es reducida no tiene nilpotentes distintos de cero, es decir, $\bar{f} = 0$ entonces $f \in I$, finalmente $\sqrt{I} \subset I$.
Suponga ahora que $\bar{f} \in k[X]$ es nilpotente, entonces $(\bar{f})^m = 0$, en consecuencia $f^m \in I$ y como el ideal $I$ es radical se tiene que $f \in I$, por lo tanto $\bar{f} = 0$, es decir $k[X]$ es reducida. □

[3]En este resultado $k$ no es necesariamente cerrado

[4]Un álgebra es reducida si no tiene elementos nilpotentes no triviales.

**Definición 1.5.5.** *Una función $\phi : V \to W$ entre conjuntos algebraicos afines $V \in \mathbb{A}_k^n$ y $W \in \mathbb{A}_k^m$ es llamado* ***mapeo polinomial*** *si existen polinomios $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que*

$$\phi(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P)) \in W \subset \mathbb{A}_k^m$$

**Lema 1.5.6.** *Sean $y_1, \ldots, y_m$ las funciones coordenadas de $\mathbb{A}_k^m$. Una función $\phi : V \to W$ es un mapeo polinomial si y sólo si $\phi_j = y_j \circ \phi \in k[V]$ para $j = 1, \ldots, m$.*

*Demostración.* Componiendo $\phi$ con $y_j$ tenemos la proyección en la j-ésima coordenada

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_j"'] & W \subset \mathbb{A}_k^m \arrow[d, "y_j"] \\ & \mathbb{A}_k^1 \end{tikzcd}$$

sea $\phi_j = y_j \circ \phi$, ahora como $\phi$ es un mapeo polinomial se tiene que $\phi_j(P) = f_j(P)$ para algún $f_j \in k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $\phi_j$ es una aplicación polinomial. Por lo tanto $\phi_j \in k[V]$.
Ahora si $\phi_j = y_j \circ \phi \in k[V]$, quiere decir que $\phi_j$ es una aplicación polinomial por lo tanto existen polinomios $f_1, ..., f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\phi(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P))$, en consecuencia $\phi$ es un mapeo polinomial. □

**Lema 1.5.7.** *Sea $\phi : V \to W$ un mapeo polinomial entonces $\phi$ es una función continua con la topología de Zariski.*

*Demostración.* Considere $Z$ un cerrado en $W$, entonces existen polinomios $h_1, \ldots, h_r \in k[x_1, \ldots, x_m]$ tales que $h_i(P) = 0$ para todo $P \in Z$, luego si $Q \in \phi^{-1}(Z)$ se tiene que $(h_i \circ \phi) \in k[V]$ se anula en $Q$, es decir que $\phi^{-1}(Z)$ es un cerrado en $V$, por lo tanto $f$ es continua. □

**Observación 1.5.8.** *Sean $V \subset \mathbb{A}_k^n$, $W \subset \mathbb{A}_k^m$ y $U \subset \mathbb{A}_k^s$ conjuntos algebraicos, considere $\phi : V \to W$ y $\varphi : W \to U$ mapeos polinomiales. Entonces la composición usual de funciones definida como*

$$\varphi \circ \phi$$

*es un mapeo polinomial, pues $\varphi \circ \phi$ está determinada por los polinomios correspondientes*

$$g_1(f_1, \ldots, f_m), \ldots, g_s(f_1, \ldots, f_m)$$

*más aún dado un conjunto algebraico $V$ la función identidad $id_V$ es claramente una mapeo polinomial. Podemos decir que una mapeo polinomial*

*$\phi : V \to W$ es un* ***isomorfismo*** *si existe un mapeo polinomial $\varphi$ tal que $\phi \circ \varphi$ es la identidad en $W$ y $\varphi \circ \phi$ es la identidad en $V$. En otras palabras, se obtiene una categoría en donde los objetos son los conjuntos algebraicos afines y las flechas son los mapeos polinomiales.*

**Ejemplos 1.5.9.** 1. *Considere el mapeo $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dado por $\phi(t) = (t^2, t^3)$, claramente $\phi$ es un mapeo polinomial. Sea $C := Im(\phi)$, note que el mapeo $\varphi : C \to \mathbb{A}^1$ definido como $\varphi(x, y) = y/x$ es la función inversa para $\phi$, sin embargo $\varphi$ no es polinomial, en consecuencia $\phi$ no es un isomorfismo entre conjuntos algebraicos. A la curva $C$ se le conoce como cúspide.*

2. *Afirmamos que el mapeo $\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definido como $\psi(t) = (t, t^2)$ sí es un isomorfismo entre la recta afín y la parábola. En efecto, su inversa está dada por $\psi^{-1}(t, t^2) = t$ que claramente es polinomial. Así $\psi$ es un isomorfismo.*

El siguiente resultado establece una relación entre los mapeos polinomiales entre variedades algebraicas y los morfismos entre los anillos de coordenadas correspondientes.

**Teorema 1.5.10.** *Sean $V \subset \mathbb{A}^n_k$ y $W \subset \mathbb{A}^m_k$ conjuntos algebraicos afines, entonces*

1. *Un mapeo polinomial $\phi : V \to W$ induce un morfismo de $k$-álgebras $\phi^* : k[W] \to k[V]$.*

2. *Cualquier morfismo de $k$-álgebras $\Phi : k[W] \to k[W]$ es de la forma $\Phi = \phi^*$ para algún mapeo polinomial $\phi : V \to W$.*

3. *La correspondencia anterior entre morfismos de $k$-álgebras y mapeos polinomiales es contravariante, es decir*

$$(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^*$$

4. *Una mapeo polinomial $\phi : V \to W$ es un isomorfismo si y sólo si el morfismo de $k$-álgebras $\phi^* : k[W] \to k[V]$ lo es.*

*Demostración.* 1. Un mapeo polinomial $\phi : V \to W$ induce $\phi^* : k[W] \to k[V]$ mediante la composición de funciones, es decir, si $\alpha \in k[W]$ definimos

$$\phi^*(\alpha) := \alpha \circ \phi$$

note que $\alpha \circ \phi : V \to k$, en consecuencia está en $k[V]$. Además $\phi^*$ es homeomorfismo pues

$$\phi^*(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \circ \phi = \alpha \circ \phi + \beta \circ \phi = \phi^*(\alpha) + \phi^*(\beta)$$

$$\phi^*(\alpha\beta) = (\alpha\beta) \circ \phi = \alpha \circ \phi\beta \circ \phi = \phi^*(\alpha)\phi^*(\beta)$$

2. Dado del morfismo $\Phi : k[W] \to k[V]$, queremos encontrar $\phi : V \to W$ tal que $\phi^* = \Phi$. Bastará definir $\phi$ en las funciones coordenadas, sean $\overline{y}_i := y_i + I(W) \in k[W]$. Definimos $\phi_i := \Phi(\overline{y}_i) \in k[V]$, note que la función $\phi : V \to \mathbb{A}^m$ dada por $\phi(P) = (\phi_1(P), ..., \phi_m(P))$ es un mapeo polinomial, pues cada $\phi_j$ es una aplicación polinomial. Afirmamos que $\phi(V) \subset W$. En efecto, considere $g \in I(W)$, entonces tenemos lo siguiente $g(\overline{y}_1, ..., \overline{y}_m)$ en $k[W]$ se anula pues $g$ está en $I(W)$, luego $\Phi(g(\overline{y}_i, ..., \overline{y}_m)) = 0$ porque $\Phi$ es $k$-morfismo. Así mismo como $g$ tiene coeficientes en $k$ tenemos que

$$0 = \Phi(g(\overline{y}_i, ..., \overline{y}_m)) = g(\Phi(\overline{y}_i), ..., \Phi(\overline{y}_m)) = g(\phi_1, ..., \phi_m)$$

ahora, la función $g(\phi_1, ..., \phi_m) \in k[V]$ manda cada punto $P$ de $V$ en $g(\phi_1(P), ..., \phi_m(P))$ y se anula para todo $g \in I(W)$, en consecuencia $(\phi_1(P), ..., \phi_m(P)) \in W$, así $\phi(P) \in W$. Finalmente veamos que para la aplicación polinomial $\phi$, se cumple que $\phi^* = \Phi$, en efecto, sean $\overline{y}_i$ los generadores en $k[W]$, ahora como $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ y $\Phi(\overline{y}_i) = \phi_i$ entonces

$$f^*(\overline{y}_i) = \overline{y}_i \circ f = f_i = \varphi(\overline{y}_i)$$

que es lo que queríamos.

3. Es consecuencia directa de la asociatividad en la composición de funciones, para $\alpha \in K[U]$ tenemos que

$$(\phi \circ \varphi)^*(\alpha) = \alpha \circ (\phi \circ \varphi) = (\alpha \circ \phi) \circ \varphi = \phi^*(\alpha) \circ \varphi = \varphi^*(\phi^*(\alpha)) = (\varphi^* \circ \phi^*)(\alpha)$$

4. Se sigue del hecho de que $(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^*$.

$\square$

Note que el funtor contravariante que asocia a cada conjunto algebraico afín $V$ su anillo de coordenadas $k[V]$, nos brinda una equivalencia entre la categoría de conjuntos algebraicos afines con mapeos polinomiales y la categoría de $k$-álgebras reducidas de tipo finito con homomorfismos de $k$-álgebras. En consecuencia es suficiente estudiar el anillo de coordenadas para obtener la clasificación acerca de los conjuntos algebraicos afines. Aunque no siempre es sencillo conocer explícitamente quién es el anillo de coordenadas de un conjunto algebraico, su inclución nos permite realizar construcciones relacionadas con invariantes geométricos a través de estructuras algebraicas.

La siguiente definición es necesaria para estos fines, en particular la noción de *dimensión* está ampliamente relacionada con ella. En general consideramos a $V$ como un conjunto algebraico irreducible.

**Definición 1.5.11.** *Considere $V$ un conjunto algebraico (irreducible), sabemos que $k[V]$ es un dominio entero. Sea $k(V)$ el campo de cocientes del dominio entero $k[V]$, entonces a $k(V)$ lo llamamos **el campo de funciones racionales de** $V$, y a sus elementos les llamamos **funciones racionales en** $V$.*

Observe que por definición los elementos de $k(V)$ son de la forma $f = g/h$ donde $g, h \in k[V]$ y $h \neq 0$, en consecuencia $f$ no es en general una función en todo $V$, ya que $h$ puede tener ceros en $V$. En cuyo caso tenemos puntos de $V$ en donde $f$ puede no estar bien definida. Nosotros consideraremos a $f$ definida en el abierto $D(f)$ que denota el conjunto de puntos $P \in V$ tales que $h(P) \neq 0$.

# Capítulo 2

# Conjuntos algebraicos en $\mathbb{P}^n$

A pesar de que los primeros estudios en geometría proyectiva tienen su origen en los trabajos desarrollados por el matemático G. Desargues a mediados del siglo XVII, en los que se expone de manera sistemática el estudio de los métodos utilizados en perspectiva, fue hasta la segunda mitad del siglo XIX en que la geometría proyectiva alcanzara su etapa de mayor esplendor. Durante aquella época se progresó con estupendos resultados obtenidos a través de considerar los puntos al infinito además de los puntos usuales.

Si bien es cierto que las técnicas utilizadas durante la época dorada de la geometería proyectiva tuvieron desde el principio ciertas limitaciones naturales, por un lado la intuición que tanto ayudaba en el caso de dimensiones dos y tres era prácticamnte imposible considerarla en dimensiones mayores y por otro la carencia de herramientas adecuadas que permitieran seguir avanzando con su desarrollo, una buena cantidad de situaciones que presentan dificultades técnicas en geometría afín tienen una formulación proyectiva sin complicaciones.

En el presente capítulo introducimos las versiones proyectivas de los objetos y resultados presentados en el caso afín, realizando un análisis de las similitudes que se presentan entre ambos enfoques, así como de sus sustanciales diferencias. En general, a menos que se presente alguna ambigüedad, usaremos la misma notación que en el caso afín para denotar los objetos que se definan en este capítulo.

## 2.1. Conjuntos algebraicos proyectivos

Iniciamos presentando la definición de espacio proyectivo analizando de cómo se relaciona, en un estudio local, con la geometría de los espacios afines. Al final examinaremos de qué manera podemos intruducir una noción adecuada para conjuntos algebraicos proyectivos y algunos ejemplos de ellos.

**Observación 2.1.1.** *Sea $k$ un campo fijo, consideremos $\mathbf{E}$ un $k$-espacio vectorial de dimensión $n+1$*[1]*. Dados dos elementos $x, y \in \mathbf{E}$ distintos de cero, decimos que $x$ y $y$ están relacionados, escribimos $x \sim y$, si y sólo si existe $\lambda \in k$ con $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda x = y$.*

*Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto*

- *(Refexividad) Note que si $\lambda = 1 \neq 0$ entonces $\lambda x = x$, así $x \sim x$.*
- *(Simetría) Si $x \sim y$ se tiene que $\lambda x = y$, como $\lambda \neq 0$ entonces para $\lambda^{-1} \neq 0$ tenemos que $\lambda^{-1} y = x$, en consecuencia $y \sim x$.*
- *(Transitividad) Consideramos $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen escalares $\lambda', \lambda \in k$ ambos distintos de cero tales que $\lambda x = y$ y $\lambda' y = z$, en consecuencia $\lambda' \lambda x = z$, con $\lambda' \lambda \neq 0$, es decir $x \sim z$.*

**Definición 2.1.2.** *Definimos el **n-espacio proyectivo**, sobre el campo $k$, como las clases de equivalencia en la relación anterior, es decir*

$$\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{E}) := (\mathbf{E} - \{\bar{0}\}) / \sim$$

*si no hay confusión en la escritura, omitiremos el campo en la notación.*

De lo anterior un punto $P$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ es una clase de equivalencia bajo la relación introducida. Dado un representante $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{E} \setminus \{\bar{0}\}$ de la clase de equivalencia, denotamos a $P$ como $P = (a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$, donde a las coordenadas les llamamos **coordenadas homogéneas** del punto $P$.

Note que si definimos los conjuntos $U_i = D(x_i)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ se tiene una identificación entre cada conjunto $U_i$ y el espacio afín $\mathbb{A}^n$ donde a cada punto $(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ en $U_i$ le asociamos $(x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i)$ en $\mathbb{A}^n$. En consecuencia, el $n$-espacio proyectivo está cubierto, en cierto sentido, por $n+1$ copias del $n$-espacio afín.

La segunda observación que vale la pena mencionar es la siguiente, dado un polinomio $f$ en el anillo $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, al considerar la ecuación $f(P)$ donde $P$ es un punto en el espacio proyectivo, el valor de $f(P)$ depende del representante que se elija de la clase. Por lo cual, al intentar introducir la noción de conjunto algebraico proyectivo como conjunto de ceros de polinomios

[1]Note que, también podríamos considerar el $(n+1)$-espacio afín en lugar de $\mathbf{E}$.

es necesario considerar la situación anterior. Sin embargo, si consideramos $f$ como un polinomio homogéneo[2], obtenemos el siguiente resultado

$$f(\lambda P) = \lambda^s f(P)$$

donde $s$ es el grado de $f$. En efecto, como $f$ es homogéneo se escribe de la forma

$$\sum a_{v_0 \ldots v_n} x_0^{v_0} \ldots x_n^{v_n}$$

donde $s = v_0 + \ldots + v_n$, finalmente si evaluamos en $\lambda P$ claramente se obtiene la igualdad. Bajo estas condiciones, diremos que un polinomio se anula en un punto del espacio preoyectivo si se anula en todos los representantes de su clase.

**Definición 2.1.3.** *Un* ***conjunto algebraico proyectivo*** *es un subconjunto $V$ de $\mathbb{P}^n$ tal que, existe un conjunto $S \subset k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, escribimos $V = \mathcal{V}(S)$, de polinomios homogéneos que se anulan en $V$, es decir*

$$V := \{P \in \mathbb{P}^n : f(P) = 0, f \in S\}$$

**Ejemplos 2.1.4.**

- *Sean dos puntos distintos $P, Q$ en el espacio $\mathbb{P}^n$, y sea $\rho$ la proyección de $\mathbf{E}$ en $\mathbb{P}^n$. Definimos la* ***recta proyectiva*** *entre $P$ y $Q$, escribimos $\overline{PQ}$, como la imagen bajo $\rho$ del subespacio vectorial, menos el cero, generado por dos representantes de $P$ y $Q$, claramente $\overline{PQ}$ es un conjunto algebraico proyectivo.*

- *Sea $C$ la curva afín en $\mathbb{A}^2$, definida por el polinomio $y^2 = x^3 - x$. Introducimos una variable adicional $z$ y definimos $C' \subset \mathbb{P}^n$ como el conjunto de ceros del polinomio homogéneo $y^2 z = x^3 - xz^2$, es claro que $C'$ es un conjunto algebraico proyectivo. Éste proceso de introducir una variable adicional en el polinomio original, se le conoce como* ***homogeneizar*** *el polinomio, y* ***proyectivizar*** *un conjunto algebraico afín.*

Los siguientes ejemplos son conocidos como *conos*, y relacionan los conjuntos algeraicos afines y proyectivos.

**Ejemplos 2.1.5.**

- *Sea $V$ un conjunto algebraico proyectivo, asociamos a $V$ su* ***cono afín*** *$C(V)$ como la imagen inversa bajo la proyección $\rho : k^{n+1} - \{\overline{0}\} \to \mathbb{P}^n(k)$ unión con el origen en $k^{n+1}$. Claramente $C(V)$ es un conjunto algebraico afín.*

[2] Un polinomio se dice *homogéneo* o *forma* de grado $k$ si todos sus términos son de grado $k$.

- *Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, dado un conjunto algebraico proyectivo $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ y el punto $P = (0 : 0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^n$ definimos el **cono** de $X$ sobre el vértice $P$ como*

$$\overline{X, P} := \bigcup_{Q \in X} \overline{PQ}$$

*afirmamos que $\overline{X, P}$ es un conjunto algebraico proyectivo. En efecto, como $X$ es conjunto algebraico proyectivo en $\mathbb{P}^{n-1}$, existen polinomios $f_1, \ldots, f_k \in k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ que se anulan en los puntos de $X$, note que los mismos polinomios considerados en el anillo $k[x_0, \ldots, x_n]$ definen el cono.*

## 2.2. Propiedades de los conjuntos algebraicos proyectivos

A continuación estudiaremos las versiones proyectivas de ideal asociado, el Teorema de los Ceros de Hilbert y el anillo de coordenadas que introducimos en el caso de conjuntos algebraicos afines. Los siguientes resultados nos permiten construir de una manera adecuada éstas nociones. Así mismo, facilitan la deducción de diversos resultados estudiados en el caso afín.

**Proposición-Definición 2.2.1.** *Dado un ideal $I$ en el anillo de polinomios $k[x_0, \ldots, x_n]$, son equivalentes*

1. *$I$ es generado por polinomios homogéneos.*
2. *Si $f \in I$ y $f = f_0 + \ldots + f_k$ donde los $f_i$ son polinomios homogéneos de grado $i$, entonces $f_i \in I$ para cada $i$.*

*diremos que un ideal es **homogéneo** si satisface alguna de las dos condiciones anteriores.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2). Consideremos el ideal $I = \langle E \rangle$ donde $E$ un conjunto de polinomios homogéneos. Y sea $f \in I$, entonces

$$f = \sum_{i=1}^{k} g_i h_i$$

donde los polinomios $h_i$ son homogéneos de grado $d_i$. Ahora, expresamos $g_i$ como su descomposición en formas $g_i = g_0^i + \ldots + g_{r_i}^i$ donde cada forma $g_j$ es de grado $j$. De esta manera

$$f = (g_0^0 + \ldots + g_{r_0}^0)h_0 + \ldots + (g_0^k + \ldots + g_{r_k}^k)h_k$$

finalmente si $f = f_0 + \ldots + f_s$, agrupamos los términos de grado $i$, se tiene que

$$f_i = \sum_j g^j_{i-d_i} h_i$$

en consecuencia $f_i \in I$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dado $f \in I$ lo escribimos como suma de formas $f = f_0 + \ldots + f_k$, por hipótesis $f_i \in I$ para cada $i$, luego $I$ es generado por el conjunto de formas, en consecuencia es homogéneo. Más aún, como el anillo de polinomios es de Noether, dicho conjunto es finito.

□

**Proposición 2.2.2.** *Dados $I$ y $J$ ideales homogéneos y $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales homogéneos. Entonces los siguientes ideales son homogéneos:*

1. $I \cap J$.
2. $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.
3. $IJ$.

*Demostración.* 1. Tomemos $f \in I \cap J$ y consideremos su descomposición en formas $f = f_0 + \ldots + f_k$. Ahora como $I$ es homogéneo y $f \in I$, se tiene que $f_i \in I$ para cada $i$. Análogamente $f_i \in J$. Así el ideal $I \cap J$ es homogéneo.

2. Sea $f \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ entonces $f$ se escribe de la siguiente manera

$$f = \sum_{0\leq i\leq k} g_i f_{\lambda_i}$$

con $f_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$. Ahora como cada $I_{\lambda_i}$ es generado por un conjunto de polinomios homogéneos $S_{\lambda_i} = \{h^i_1, \ldots, h^i_{l_i}\}$, se tiene que $f_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{l_i} r^i_j h^i_j$ y en consecuencia $f$ es generado por polinomios homogéneos. Finalmente, $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es generado por la unión de los conjuntos $S_\lambda$, por lo cual es homogéneo.

3. Sea $f \in IJ$ entonces $f$ es de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} g_i h_i$$

donde $g_i \in I$ y $h_i \in J$. Ahora, como los ideales $I$ y $J$ son homogéneos, se tiene que existen conjuntos $S = \{p_1, \ldots, p_s\}$ y $R = \{q_1 \ldots, q_r\}$ de polinomios homogéneos, tale que $\langle S \rangle = I$ y $\langle R \rangle = J$. Luego para $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$g_i = \sum_{j=1}^{s} g_j^{(i)} p_j$$

y

$$h_i = \sum_{l=1}^{r} h_l^{(i)} q_l$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} g_i h_i &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq l \leq r}} g_j^{(i)} p_j h_l^{(i)} q_l \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq l \leq r}} (g_j^{(i)} h_l^{(i)})(p_j q_l) \end{aligned}$$

así $f$ es generado por los polinomios $p_j q_l$ que son homogéneos, en consecuencia $IJ$ un ideal homogéneo.

$\square$

Una vez presentados los resultado anteriores, resulta natural introducir la siguiente definición.

**Definición 2.2.3.** *Sea $X$ un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$. Definimos el **ideal asociado** a $X$ como*

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in k[x_o, \ldots, x_n] : f(P) = 0, \forall P \in X\}.$$

Note que las propiedades enunciadas de los mapeos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{I}$ para el caso afín se satisfacen de nuevo en su forma proyectiva. Así mismo las definiciones de la topología de Zariski y el concepto irreducibilidad se trasladan de manera natural sin ninguna complicación. No obstante, una diferencia relevante es que el conjunto $\mathcal{I}(X)$ es, en caso proyectivo, un ideal radical homogéneo. Este hecho, como veremos a continuación, tendrá diversas repercusiones en la versiones proyectivas del Teorema de los Ceros de Hilbert y del anillo de coordenadas.

**Teorema 2.2.4** (Versión proyectiva del Teorema de los Ceros de Hilbert)**.** *Sea $I$ un ideal homogéneo del anillo $k[x_0, \ldots, x_n]$, considere $V = \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}_k^n$, entonces*

1. $\mathcal{V}(I) = \emptyset \Leftrightarrow \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset \sqrt{I}$.
2. *Si* $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$, *entonces* $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

*Demostración.* Si $I = k[x_0, \ldots, x_n]$, entonces $\mathcal{V}(I) = \emptyset$ y la primera proposición es trivial. Asumamos que $I \neq k[x_0, \ldots, x_n]$. Entonces cosidere el conjunto $C(V) = \mathcal{V}(I) \cup \{\overline{0}\}$ en el espacio afín $\mathbb{A}_k^{n+1}$ y aplicamos el Teorema de los Ceros en $C(V)$, luego $V$ vacío si y sólo si $C(V) = \{\overline{0}\}$, es decir si $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle = \sqrt{I}$ y se prueba la primer afirmación. Por último, si $V$ es no vacío aplicamos de nuevo el Teorema de los Ceros a $C(V)$ y esto prueba la segunda afirmación. $\square$

El anillo de coordenadas $k[V]$ de un conjunto algebraico proyectivo $V$ se defninen de manera similar que en el caso afín. Sin embargo hay dos diferencias fundamentales con el caso afín. Para analizar la primera de ellas observemos lo siguiente propiedad, es claro que el anillo de polinomios $k[x_0, \ldots, x_n]$, visto como $k$-álgebra, admite la siguiente descomposición

$$k[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

donde $I_n$ es el subespacio de los polinomios de grado $n$, además dicha descomposición satisface que $I_r I_s \subset I_{s+r}$, decimos que una $k$-álgebra es **graduada** si satisface esta propiedad. Note que si consideremos $I$ como un ideal homogéneo, el cociente $k[x_0, \ldots, x_n]/I$ admite una descomposición similar mediante la proyección de los subespacios $I_n$, es decir que $k[V]$ es un álgebra graduada. No obstante, la diferencia primordial es que en el anillo de coordenadas proyectivo, a diferencia del caso afín, los elementos de $k[V]$ no definen funciones en los puntos del conjunto $V$. Este hecho es sobremanera significativo, y justifica en cierta media el estudio local que comensaremos en el siguiente capítulo.

## 2.3. Homografías en $\mathbb{P}^n$

Designamos esta sección a realizar un breve estudio acerca de las homografías en el espacio proyectivo. El objetivo no es pretender profundizar en el tema, sino enunciar algunas propiedades debido al uso de estas transformaciones en un resultado posterior. Las observaciones que se realizan, son consecuencias inmediatas de resultados básicos del ágebra lineal y únicamente se enuciarán.

Considere $\mathbf{E}$ un $k$-espacio vectorial de dimensión $n+1$. Denotamos por $GL(\mathbf{E})$ al grupo general lineal. El grupo $GL(\mathbf{E})$ define una acción natural en el espacio vectorial $\mathbf{E}$. Un elemento $\overline{u} \in GL(\mathbf{E})$ tiene asociada una transformación lineal y preserva colinealidad cuando $u$ es inyectivo. En consecuencia, induce una transformación biyectiva $\overline{u}$ en el espacio $\mathbb{P}^n$.

**Definición 2.3.1.** *Una biyección en $\mathbb{P}^n$ inducida por un elemento $u \in GL(\mathbf{E})$ es llamada* ***homografía****.*

**Definición 2.3.2.** *Sea $\mathbf{E}$ un espacio vectorial de dimensión $n+1$. Considere $\mathbf{F}$ un subespacio de dimensión $m+1$, con $0 \leq m \leq n$. La imagen de $\mathbf{F} - \{\overline{0}\}$ en $\mathbb{P}^n$ es llamado subespacio proyectivo de dimensión $m$ y lo denotamos por $\overline{\mathbf{F}}$.*

Es conveniente mencionar las siguientes observaciones respecto las dos definiciones anteriores.

1. Si $\overline{V}$ y $\overline{W}$ son subespacios proyectivos de $\mathbb{P}^n$ de dimensiones $r$ y $s$ tales que $r + s - n \geq 0$. Entonces $V \cap W$ es un subespacio preoyectivo de dimensión mayor a cero, en particular la intersección es no vacía.

2. De manera inversa, si $\overline{V}$ y $\overline{W}$ son dos subespacios proyectivos en $\mathbb{P}^n$ de dimensión $d$, entonces existe una homografía $\overline{u}$ tal que $\overline{u}(\overline{V}) = \overline{W}$.

3. Si $\overline{F}$ es un subespacio de dimensión $d$ en $\mathbb{P}^n$ y $\overline{u}$ es una homografía, entonces $\overline{u}(\overline{\mathbf{F}}) = \overline{u(\mathbf{F})}$. Es decir, que la imagen es de nuevo un subespacio de dimensión $d$.

4. Sea $u$ una matriz diagonal en $GL(\mathbf{E})$ con todas sus entradas distintas dos a dos. Entonces $\overline{u}$ tiene exactamente $n$ puntos fijos.

5. El grupo de homotecias $k^*$ actúa trivialmente en $\mathbb{P}^n$. En consecuencia, podemos identificar el grupo de homografías en $\mathbb{P}^n$ como el grupo cociente $PGL(\mathbf{E}) = GL(\mathbf{E})/k^*$.

6. El grupo $PGL(\mathbf{E})$ es el grupo de automorfismos[3] en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

[3]En el sentido que estudiatemos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

# Gavillas y variedades

En el año de 1945, el matemático francés J. Leray introduce las nociones referentes a gavillas, cohomología con coeficientes en una gavilla y sucesión espectral. Dicha introducción trajo consigo importantes avances en áreas como la topología algebraica, la topología diferencial y la teoría de espacios analíticos. En geometría algebraica la situación no fue particularmente distinta, por un lado el enfoque dado desde el punto de gavillas proporciona una manera sistemática de estudiar los datos algebraicos en una variedad de una manera local, y permite generalizar los objetos dando paso a un nuevo lenguaje en el que los métodos utilizados fueron renovados por completo; por otro lado, el estudio de cohomología y la sucesión espectral facultan la posibilidad de unificar diversos conceptos y resultados en el área. Y más aún, el uso de este lenguaje fue fundamental para dar solución a diversos problemas que permanecían abiertos.

## 3.1. Gavillas

Al comparar el estudio de conjuntos algebraicos afines con conjuntos algebraicos proyectivos, nos hemos encontrado con importantes similitudes y sustanciales diferencias. La diferencia más notable es el papel que juega el anillo de coordenadas. En el caso afín obtenemos una correspondencia que traslada las propiedades geométricas de $V$ con las propiedades algebraicas de $k[V]$. Sin embargo, en el caso proyectivo los elementos $f \in k[V]$ no definen funciones, para un polinomio homogéneo $f$ de grado $d$ y un punto en el espacio proyectivo $P$, el valor de $f$ en $P$ depende de la elección del representante del punto pues $f(\lambda P) = \lambda^d f(P)$.

Para solucionar este problema, usamos la idea de que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ posee una cubierta abierta dada por los conjuntos $U_i = D(x_i)$, que son isomorfos a espacios afines y en los cuales nos es posible definir funciones adecuadas para trabajar. De cierta manera, podemos pensar que las funciones convenientes para definir en el espacio proyectivo son funciones definidas de manera local, en los abiertos $U_i$, y que se comportan de manera apropiada en las intersecciones correspondientes. No obstante, dicho método no nos provee una forma para definir funciones de manera global. Así pues, si lo que deseamos es trabajar con funciones definidas en $\mathbb{P}^n$, deberán ser definidas localmente. Es aquí donde la noción de gavilla juega un papel primordial.

**Definición 3.1.1.** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $K$ un conjunto. Una **gavilla de funciones** $K$-evaluadas sobre $X$ está dada por lo siguiente, a cada abierto $U$ de $X$, le asociamos un conjunto de funciones $\mathcal{F}(U)$ de $U$ en $K$, de tal suerte que se satisfacen los siguientes dos axiomas*

**Restricción** *Si $V$ es un abierto contenido en $U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, entonces $f|_V \in \mathcal{F}(V)$.*

**Pegado** *Si $U$ tiene una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$, entonces para cualquier elección de elementos $f_i \in U_i$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, existe una única función $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$.*

Note que el axioma de restricción define para cada $V \subset U$ un mapeo $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, tal que para todo $U$, $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$, y para todos $W \subset V \subset U$, $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$. Al conjunto $\mathcal{F}(U)$ también lo denotamos como $\Gamma(U, \mathcal{F})$ y a sus elementos les llamamos **secciones** de $\mathcal{F}$ sobre $U$. Si $U$ es $X$, a los elementos de $\mathcal{F}(X)$ les llamamos secciones globales. El procedimiento para definir gavillas de manera general es la siguiente.

**Definición 3.1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una **pregavilla** $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre $X$, es una asignación que asocia a cada conjunto abierto $U \subset X$ un conjunto $\mathcal{F}(U)$, y para cada par de abiertos $V \subset U$, morfismo restricción $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ de tal manera que se satisface lo siguiente*

1. *Para cada abierto $U$, $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$.*

2. *Si $W \subset V \subset U$ son abiertos, entonces se tiene que $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$.*

**Ejemplo 3.1.3.** *Sea $M$ un conjunto no vacío y $X$ es un espacio topológico para cada abierto $U \subset X$ definimos $\mathcal{F}(U)$ como el conjunto de funciones de $U$ en $M$. Si $V \subset U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, definimos el mapeo restricción como la restricción de $f$ a $V$. Claramente es una pregavilla.*

**Ejemplo 3.1.4.** *En el ejemplo anterior, el conjunto $M$ puede ser remplazado por un espacio topológico, y las secciones de $\mathcal{F}$ sobre abiertos $U \subset M$ por funciones continuas de $U$ en $M$. Nuevamente se satisfacen las condiciones de pregavilla.*

Dicho de otra manera, si consideramos la categoría $Top(X)$ en donde los objetos son los abiertos de $X$ y los morfismos son las inclusiones (en caso de existir), una pregavilla de conjuntos se puede ver como un funtor contravariante de dicha categoría en la categoría $Sets$ de conjuntos. Análogamente podemos definir pregavillas de grupos, anillos o módulos, basta reemplazar la categoría de conjuntos por la categoría de grupos, anillos o módulos, respectivamente.

**Definición 3.1.5.** *Una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $X$ se dice que es una* ***gavilla*** *si satisface la condición adicional de pegado.*

**Ejemplo 3.1.6.** *Dado un espacio topológico $X$, podemos definir la gavilla de funciones continuas con valores reales, los morfismos restricción son las restricciones en el sentido usual. En este sentido, podemos definir la gavilla de funciones diferenciables sobre una variedad direfenciable o la gavilla de funciones holomorfas sobre una variedad compleja.*

**Ejemplo 3.1.7.** *Considere una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $X$ y un conjunto abierto $U$ de $X$. Construimos una gavilla $\mathcal{F}\mid_U$ sobre $U$ de la manera más natural, dado un abierto $V \subset U$, definimos $\mathcal{F}\mid_U(V) = \mathcal{F}(V)$. Esta gavilla se conoce como la* ***gavilla restricción****.*

Dada una pregavilla $\mathcal{F}$, resulta natural pensar si existe una gavilla $\mathcal{G}$ que, en cierto sentido, complete la estructura de la pregavilla original. La respuesta a lo anterior es afirmativa; sin embargo, es necesario aclarar a qué nos referimos con completar. La noción adecuada para ello está ligada con la siguiente definición.

**Definición 3.1.8.** *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas (gavillas) sobre $X$, un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, es una colección de morfismos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada abierto $U$ de $X$, tales que si $V \subset U$ el siguiente diagrama comnuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

*Un isomorfismo es un morfismo que tiene inversa por ambos lados.*

Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de funciones $K$-evaluadas sobre un espacio $X$, entonces existe una gavilla $\mathcal{F}^+$ llamada la **gavilla asociada** a $\mathcal{F}$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ de tal manera que para todo morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existe un único morsismo $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$, la construcción de la gavilla asociada es la siguiente. Para cada abierto $U$ de $X$ definimos el conjunto

$$\mathcal{F}^+(U) = \{f : U \to K : \forall x \in U, \exists V \subset U, g \in \mathcal{F}(V), x \in V, f|_V = g\}$$

se tiene además, que el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es único hasta isomorfismo. Una revisión detallada del caso general de ésta contrucción puede ser consultada en [7].

Las gavillas más importantes con las que trabajaremos serán gavillas de conjuntos con alguna estructura algebraica, por ejemplo gavillas de anillos (o en general de $k$-álgebras), asumiendo que todo anillo (o $k$-álgebra) lo consideramos conmutativo y con unidad, y los mapeos restricción son morfismos entre anillos (o $k$-álgebras) que preservan la unidad. La siguiente definición es un ejemplo de este tipo y será clave para la definición de variedad algebraica.

**Definición 3.1.9.** *Un **espacio anillado** es un espacio topológico $X$ junto con una gavilla de anillos (conmutativos). A esta gavilla la llamamos **gavilla estructural** y la denotamos como $\mathcal{O}_X$.*

A partir de ahora $k$ denota un campo algebraicamente cerrado de característica cero fijo. Y la gavilla estructural de todo espacio anillado será considerada como una gavilla de funciones $k$-valuadas y asumimos que dicha gavilla contiene a las funciones constantes; es decir, es una gavilla de $k$-álgebras. La noción de morfismo entre dos espacios anillados viene dada como sigue.

**Definición 3.1.10.** *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados. Un morfismo entre espacios anillados está definido por una función continua $\phi : X \to Y$, que transforma las secciones por medio de la composición. En otras palabras, para cada función $g : U \to k$ tal que $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ tenemos que $g \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$.*

Notemos que, para cada conjunto abierto $U$ de $Y$ se define un morfismo de anillos

$$\phi_U^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

donde $\phi_U^*(g) = g \circ \phi$.

Los siguientes dos lemas nos servirán para dotar a los conjuntos algebraicos afines de una estructura de espacio anillado.

**Lema 3.1.11.** *Sea $X$ un espacio topológico, y sean $\mathcal{U}$ una base de conjuntos abiertos de $X$ y $K$ un conjunto. De tal manera que a cada conjunto abierto $U \in \mathcal{U}$ le asociamos un conjunto $\mathcal{F}(U)$ de funciones de $U$ en $K$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

**Restriccíon** *Si $U, V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $s\,|_V \in \mathcal{F}(V)$.*

**Pegado** *Para cada conjunto abierto $U \in \mathcal{U}$, y cada cubierta abierta $U_i \in \mathcal{U}$ con $i \in I$ de $U$. Si $s$ es una función de $U$ en $K$ tal que para todo $i \in I$ $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$, entonces $s \in \mathcal{F}(U)$.*

*Entonces existe una única gavilla $\overline{\mathcal{F}}$ de funciones sobre $X$ tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{F}(U) = \overline{\mathcal{F}}(U)$.*

*Demostración.* Si $U$ es un conjunto abierto de $X$ y $U_i$ es una cubierta abierta de elementos en $\mathcal{U}$, definamos el siguiente conjunto

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to K : \forall i, s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}$$

Es claro que $\overline{\mathcal{F}}$ satisface las condiciones de pregavilla. Además si $U$ es un abierto de $\mathcal{U}$ por definición $\overline{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$. Verifiquemos que se satisface la condición de pegado. Sea $V$ un abierto de $X$, sea $\{V_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de $V$ y sean $f_j \in \overline{\mathcal{F}}(V_j)$ tales que $f_j\,|_{U_j \cap U_k} = f_k\,|_{U_j \cap U_k}$ para cada $i, k \in J$ tales que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Definamos $f : V \to K$ de manera local como $f = f_j$ en cada $V_j$, es claro que $f$ está bien definida, queremos probar que $f \in \overline{\mathcal{F}}(V)$. Considere para cada $V_j$ una cubierta $\mathcal{U}_{j_i}$ de elementos de $\mathcal{U}$. Note que, la unión de estas cubiertas es una cubierta abierta de elementos de $\mathcal{U}$ para el abierto $V$, además cada $f_j\,|_{U_{j_i}} \in \overline{\mathcal{F}}(U_{j_i}) = \mathcal{F}(U_{j_i})$ para cada $j \in J$ y para cada $i \in I$, en consecuencia $f \in \overline{\mathcal{F}}(V)$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ es una gavilla. □

**Lema 3.1.12.** *Sea $X$ un espacio topológico con una base de abiertos $\mathcal{U}$, y sean $\mathcal{F}$ una gavilla y $\mathcal{G}$ una pregavilla, ambas sobre $X$. Si $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$.*

*Demostración.* Por la condición de minimalidad, bastará probar que para cada abierto $U$, se tiene que $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}^+(U)$. En efecto, sea $U$ un abierto de $X$, consideremos $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{U}$ tal que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U$$

entonces para $f \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para cada $i \in I$, pues $\mathcal{F}$ es gavilla. Por otro lado, como los abiertos $U_i$ son elementos de $\mathcal{U}$, se tiene que $\mathcal{F}(U_i) = \mathcal{G}(U_i)$, en consecuencia $f_i \in \mathcal{G}(U_i)$ y por definición de la gavilla asociada $f \in \mathcal{G}^+(U)$. Finalmente como $\mathcal{F}$ es gavilla y $\mathcal{G}^+$ es minimal, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$. $\square$

## 3.2. Variedades algebraicas

Si $V$ es un conjunto algebraico afín, hemos estudiado un conjunto de funciones sobre $V$ que codifica de manera algebraica la información geométrica de $V$, las aplicaciones polinomiales del anillo de coordenadas $k[V]$[1]. Por otro lado, para cada conjunto algebraico afín $V$ contamos con una base de abiertos definida de manera muy simple, los conjuntos $D(f)$. Estos dos principios serán fundamentales para construir una gavilla de funciones sobre $V$.

Analicemos de qué manera podemos definir las secciones $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$. Como $D(f)$ es el conjunto de puntos de $V$ donde no se anula el polinomio $f$, es natural incluir la función inversa $f^{-1}$ como sección de $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$. De manera más precisa, consideremos el homomorfismo restricción

$$r : \Gamma(V) \to \mathcal{F}(D(f), k)$$

donde $\mathcal{F}(D(f), k)$ denota el anillo de funciones de $D(f)$ en $k$, como $r(f)$ es invertible, sabemos que $r$ se puede factorizar desde la localización[2] $\Gamma(V)_f$, como $r = \rho j$, donde $j$ es el morfismo de localización y el homomorfismo $\rho : \Gamma(V)_f \to \mathcal{F}(D(f), k)$ es inyectivo, pues si $\rho(g/f^n) = 0$ se tiene que $g(x) = 0$ sobre $D(f)$, en consecuencia $fg = 0$ sobre todo $V$, por lo cual $g/f^n$ es cero en anillo de localización. Estas obsevaciones motivan la siguiente definición.

**Definición 3.2.1.** *Sea $V$ un conjunto algebraico afín, consideremos un elemento no cero $f$ en $\Gamma(V)$. El conjunto*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$$

*nos provee un método con el cual podemos definir una gavilla de anillos sobre $V$, llamada la* ***gavilla de funciones regulares****.*

El siguiente resultado nos muestra cómo esta definición, verifica las condiciones de gavilla en el caso de conjuntos algebraicos irreducibles.

**Proposición 3.2.2.** *Si $V$ es un conjunto algebraico afín irreducible, entonces la gavilla de funciones regulares $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$ es en verdad una gavilla de anillos sobre $V$.*

[1] En lo subsecuente, utilizatemos la notación $\Gamma(V)$ para referirnos al anillo $k[V]$.

[2] Ver [1] para dicha construcción.

*Demostración.* Sea $V$ un conjunto algebraico afín. Para el axioma de restricción, si $D(f) \subset D(g)$, entonces $V(g) \subset V(f)$, es decir que $f$ se anula sobre $V(g)$. Por el Teorema de los Ceros de Hilbert, $f^n = gh$. Ahora, dado $u/g^i \in \Gamma(V)_g$, su restricción sobre $D(f)$ la podemos escribir de la forma $uh^i/g^ih^i = uh^i/f^{ni}$, así dicha resctricción pertenece a $\Gamma(V)_f$. De esta manera definimos los morfismos de restricción entre los anillos de localización.

Ahora, para el axioma del pegado. Sea $D(f)$ un abierto estándar de $V$, consideremos una cubierta abierta de conjuntos $D(f_i)$, donde $f_i \neq 0$. Esto significa que $V(f)$ es la intersección de los conjuntos $V(f_i)$, dicho de otra manera, $V(f) = V(I)$ donde $I$ es el ideal generado por los polinomios $f_i$. Así, como el anillo de cooordenadas es de Noether, podemos asumir que el ideal $I$ es generado por un conjunto finito de polinomios $f_i$.

Sean $s_i$ secciones asociadas a los abiertos $D(f_i)$ las cuales escribimos como $s_i = a_i/f_i^n$, usamos el mismo $n$ para toda $i$ tomando en cuenta que son un número finito de casos. Asumimos que las secciones coinciden en las intersecciones $D(f_i) \cap D(f_j)$. Tenemos entonces que $a_i f_j^n = a_j f_i^n$ sobre $D(f_i) \cap D(f_j)$ y en consecuencia, esta relación se mantiene en $V$ por densidad, ya que $V$ es irreducible.

Ahora como $f$ se anula sobre $V(f_1, \ldots, f_r) = V(f_1^n, \ldots, f_r^n)$, por el Teorema 1.4.3 sabemos que $f \in rad(f_1^n, \ldots, f_r^n)$. En conseceuncia, existe un entero $m$ y funciones $b_j \in \Gamma(V)$ tales que $f^m = \sum_{j=1}^r b_j f_j^n$.

Finalmente, buscamos una sección $s$ sobre $D(f)$ de la forma $s = a/f^m$, con $m$ definido como antes, tal que $s \mid_{D(f_i)} = s_i$, es decir, $a/f^m = a_i/f_i^n$, escrito de otra manera

$$f_i^n a = a_i f^m = a_i \sum_{j=1}^r b_j f_j^n \sum_{j=1}^r b_j a_i f_j^n = \sum_{j=1}^r b_j a_j f_i^n = f_i^n \sum_{j=1}^r b_j a_j$$

Y esto claramente se cumple si $a = \sum_{j=1}^r b_j f_j^n$, con lo cual se concluye la prueba. □

Note que cuando se consideramos una cubierta abierta de $V$ existe un elemento identidad de la forma $1 = \sum_{j=1}^r b_j f_j^n$, que es un análogo algebraico de las particiones de unidad utilizadas en el análisis.

**Definición 3.2.3.** *Una **variedad algebraica afín** es un espacio anillado, el cual es isomorfo a un par $(V, \mathcal{O}_V)$, donde $V$ es un conjunto algebraico afín y $\mathcal{O}_V$ es la gavilla de funciones regulares sobre $V$. Un morfismo entre varidades algebraicas afines es simplemente un morfismo entre espacios anillados.*

La ventaja principal entre considerar varidades algebraicas afines en lugar de conjuntos algebraicos afines es el trabajar con una definición intrínseca, la estructura no depende del encaje. La siguiente proposición exhibe esta propiedad.

**Proposición 3.2.4.** *Sea $V$ un conjunto algebraico afín, considere $f \in \Gamma(V)$. El conjunto $D(f)$ equipado con la restricción de la gavilla $\mathcal{O}_V$ a $D(f)$ es una variedad algebraica afín.*

*Demostración.* Asumamos que $V$ está encajado en $k^n$, sean $I = I(V)$ y $F$ un polinomio que restringido a $V$ es $f$. Queremos probar que $D(f)$ es isomorfo a algún conjunto algebraico afín. El truco es observar éste conjunto en $k^{n+1}$. Consideremos el mapeo

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left( x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} \right)$$

que manda a $D(F)$ en $k^{n+1}$. Denotemos por $W$ a la imagen de $\varphi$; note que, $W$ es igual al conjunto $V(J)$, donde $J = I + (x_{n+1}F - 1)$. Es claro que $\varphi$ actúa como homeorfismo entre $D(f)$ y $W$, cuya inversa está dada por la proyección $\rho(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Finalmente, $\varphi$ es un isomorfismo. $\square$

**Ejemplo 3.2.5.** *El grupo de matrices invertibles con coeficientes complejos $GL(n, \mathbb{C})$ es una variedad algebraica afín. En efecto, este es un abierto de la forma $D(f)$ en el espacio afín $M(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$, siendo $f$ la función determinate, la cual es claramente polinomial.*

De la misma manera que, en topología diferencial, las variedades direfenciables se construyen de manera local, pegando abiertos de $\mathbb{R}^n$, en geometría algebraica las variedades algebraicas se construyen pegando variedades afines.

**Definición 3.2.6.** *Una **variedad algebraica** es un espacio anillado compacto, el cual es localmente isomorfo a una variedad algebraica afín. Un morfismo entre variedades algebraicas es un morfismo entre espacios anillados.*

**Definición 3.2.7.** *Sea $X$ una variedad algebraica. Los conjuntos abiertos que son isomorfos a variedades algebraicas afines, son llamados **conjuntos abiertos afines** de $X$.*

**Proposición 3.2.8.** *Dada una variedad algebraica $X$, los conjuntos abiertos afines forman una base de abiertos para $X$. Más precisamente, cada conjunto abierto de $X$ es unión finita de conjuntos abiertos afines.*

*Demostración.* Tenemos que $X$ es la unión finita de conjuntos abiertos afines $U_1, \ldots, U_r$, eso se sigue de la definición de variedad y el hecho de que $X$ es compacto. Ahora, dado $U$ abierto en $X$, $U = \bigcup_{i=1}^{r} U \cap U_i$, donde cada $U \cap U_i$ es abierto, lo cual concluye la prueba. □

**Corolario 3.2.9.** *Toda variedad algebrica se puede escribir como unión finita de conjuntos cerrados irreducibles, los cuales ninguno contiene a otro. Estos cerrados son llamados las componentes irreducibles de la variedad.*

*Demostración.* Sea $X$ una variedad algebraica, sabemos que $X = U_1 \cup \ldots \cup U_r$, donde cada $U_i$ es un abierto afín. Entonces, tenemos que cada $U_i$ se puede escribir como unión finita de cerrados irreducibles $U_{i,j}$ en $U_i$. Así pues, $X = \bigcup_{i,j} \overline{U}_{i,j}$. Más aún, como los conjuntos $U_{i,j}$ son irreducibles, es claro que las cerraduras $\overline{U}_{i,j}$ también lo son, y esto concluye la prueba. □

**Ejemplo 3.2.10.** *Si $X$ es una variedad algebraica y $U$ es un abierto en $X$, entonces $U$ equipado con la gavilla $\mathcal{O}_X \mid_U$ es una variedad algebraica, la cual es llamada subvariedad abierta de $X$.*

**Ejemplo 3.2.11.** *Sea $X$ una variedad algebraica y sea $Y$ un cerrado $X$. Nuestro objetivo es definir una gavilla $\mathcal{O}_Y$ sobre $Y$. La idea más natural, es que el mapeo de inclusión fuese un morfismo y brinde la estructura tomando la gavilla de funciones sobre conjuntos abiertos de $X$ restringidos a $Y$, es decir, definir las secciones sobre un abierto $V$ de $Y$ como*

$$\mathcal{O}_Y = \{f : V \to k : \exists U \subset X, U \cap Y = V, \exists g \in \mathcal{O}_X(U), g \mid_V = f\}$$

*Desafortunadamente, esta fórmula sólo define una pregavilla. En general, no satisface la condición de pegado, y por lo tanto debemos considerar la gavilla asociada $\mathcal{O}_Y^+$. Bajo estas condiciones, decimos que $(Y, \mathcal{O}_Y^+)$ es una subvariedad cerrada de $X$.*

## 3.3. Gavillas de módulos

Hasta este momento, hemos introducido la definición de variedad algebraica a través del estudio local de funciones definidas sobre abiertos de cierto espacio anillado. La mayor parte de esta teoría, se enriquece enormemente al considerar gavillas de módulos. La importancia de dichos objetos radica en que esencialmente, todas las construcciones clásicas de módulos: morfismos, kernel, imagen o sucesiones exactas, por citar algunos ejemplos, se pueden realizar para gavillas de módulos.

La presente sección está dedicada al estudio de este tipo gavillas, noción que será pieza fundamental para desarrollo de la siguiente sección y el resto de la tesis. Al final definiremos los conceptos correapondientes a gavillas coherentes y casi-coherentes, debido a la importancia que tienen en el cálculo de cohomología. Consideremos $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado.

**Definición 3.3.1.** *Un $\mathcal{O}_X$-módulo, es una gavilla $\mathcal{F}$ tal que para cada abierto $U$ en $X$, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo y los morfismos restricción son morfismos de módulos.*

**Ejemplo 3.3.2.** *En un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ la suma directa $\mathcal{O}_X^n$ de $n$ copias de la gavilla estructural, es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

**Definición 3.3.3.** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. Un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, está dado por morfismos $\mathcal{O}_X(U)$-lineales $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada abierto $U$ de $X$, de tal manera que conmutan adecuadamente con los morfismos restricción.*

Dado un morfismo de gavillas $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, definimos la gavilla kernel como

$$(\mathrm{Ker} f)(U) := \mathrm{Ker}(f(U))$$

decimos que un morfismo es inyectivo si $f(U)$ lo es para cada $U$, o bien si $\mathrm{Ker} f(U) = 0$ para cada $U$. La construcción anterior siempre nos provee de una gavilla. No obstante, la situación es distinta si buscamos asociar la imagen de los morfismos $f(U)$, pues en general, ésta resulta ser una pregavilla y no una gavilla. En este caso se tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.3.4.** *Sea $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos la gavilla imagen $\mathrm{Im}(f)$ de la siguiente manera. Considere $s \in \mathcal{G}(U)$, decimos que $s \in \mathrm{Im}(f(U))$ si para todo $x \in U$, existe un abierto $V \subset U$ tal que $x \in V$ y $s|_V \in \mathrm{Im}(f(V))$. Decimos que $f$ es sobreyectivo si $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{G}$.*

Una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H}$ está dada por dos morfismos de gavillas $u$ y $v$ tales que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$.

**Definición 3.3.5.** *Sea $\varphi : Y \to X$ una función continua y sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre $Y$. Definimos la* ***imagen directa*** *de $\mathcal{F}$, escribimos $\varphi_*\mathcal{F}$, como la gavilla sobre $X$ dada por $\varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ para cada abierto $U$ de $X$.*

**Ejemplo 3.3.6.** *Sea $X$ una variedad algebraica, y sea $Y$ un subconjunto cerrado de $X$, considere $j : Y \to X$ la inclusión canónica. Denotamos por $\mathcal{F}_Y$ a la gavilla de todas las funciones $k$-evaluadas sobre $Y$, consideramos su imagen directa $j_*\mathcal{F}_Y$. Existe un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $r : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{F}_Y$ el cual asocia a cada sección $s \in \mathcal{O}_X(U)$ su restricción $s\mid_{U\cap Y} \in j_*\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Y(U \cap Y)$. Bajo estas condiciones $\mathcal{F}_Y$ es la gavilla imagen de $r$.*

**Definición 3.3.7.** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos el producto tensorial $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}$ como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Este es de nuevo un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

**Definición 3.3.8.** *Dada una variedad algebraica afín $V$, denotemos por $A$ al anillo de secciones globales $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Sea $M$ un $A$-módulo. Definimos un $\mathcal{O}_V$-módulo $\widetilde{M}$ sobre los abiertos estándar de $V$ de la siguiente manera. Si $f \in A$, entonces se define $\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$. En particular, $\widetilde{M}(V) = \Gamma(V, \widetilde{M}) = M$.*

**Definición 3.3.9.** *Un $\mathcal{O}_V$-módulo $\mathcal{F}$ isomorfo a un $\mathcal{O}_V$-módulo del tipo $\widetilde{M}$ es llamado **casi-coherente**. Si además $M$ es finitamente generado, decimos que $\mathcal{F}$ es **coherente**.*

**Proposición 3.3.10.** *Sea $X$ una variedad algebraica afín y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $\mathcal{F}$ es casi-coherente (coherente) si y sólo si existe una cubierta abierta afín $U_i$ de $X$ con $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = A_i$ y $A_i$-módulos (de tipo finito) $M_i$ tales que, para cada $i$, $\mathcal{F}\mid_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.*

La demostración de este resultado utiliza técnicas que no hemos desarrollado en el presente trabajo y es por esto que la omitiremos, sin embargo puede ser consultada en [7]. Lo más importente de la proposición anterior es que exhibe que la propiedad de ser casi-coherente (coherente) es local. En consecuencia, justifica la siguiente definición para variedades algebraicas.

**Definición 3.3.11.** *Sea $X$ una variedad algebraica y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es casi-coherente (coherente) si existe una cubierta abierta afín $U_i$ de $X$ tales que $\mathcal{F}\mid_{U_i}$ es casi-coherente (coherente) para cada $U_i$.*

**Proposición 3.3.12.** *Sea $X$ una variedad y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos gavillas-casi coherentes. Entonces*

- *La gavilla $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es casi-coherente.*
- *Para cada abierto afín $U$ de $X$*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

*Demostración.* Si $U$ es un conjunto abierto, notemos que

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \mid_U = \mathcal{F} \mid_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G} \mid_U$$

pues ambas gavillas tienen asociada la misma pregavilla

$$W \mapsto \mathcal{F}(W) \otimes_{\mathcal{O}_{X(W)}} \mathcal{G}(W)$$

Ahora, si $U$ es afín y denotamos por $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_(X))$, $F = \Gamma(U, \mathcal{F})$ y $G = \Gamma(U, \mathcal{G})$, entonces $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \mid_U = \widetilde{F} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{G} = \widetilde{F \otimes_A G}$ lo cual prueba ambos incisos. □

## 3.4. Variedades proyectivas

De la misma manera en la que pasamos de estudiar conjuntos algebraicos afines a variedades afines, para definir variedades proyectivas lo haremos a través de los conjuntos algebraicos proyectivos. Si $V$ es un conjunto algebraico proyectivo, definiremos una estructura de gavilla sobre cierta base de conjuntos abiertos $D(f)$, donde $f \in \Gamma(V)$. La idea para definir esta gavilla será utilizar los conjuntos $U_i = D(x_i)$. Por ejemplo, si consideramos la biyección $j : k^n \to U_0$, dada por $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (1, \xi_1 \ldots, \xi_1)$ y cuya inversa es $(x_0 \ldots, x_n) \mapsto (x_1/x_0, \ldots, x_1/x_0)$. Las funciones adecuadas sobre $U_0$ corresponden a funciones polinómicas en $k^n$, es decir, polinomios en las variables $x_1/x_0, \ldots, x_1/x_0$. En consecuencia, podemos asociar $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k[x_1/x_0, \ldots, x_1/x_0]$. Este anillo está contenido en la localiación de $k[x_0, \ldots, x_n]$ desde $x_0$. Sin embargo, considerando los polinomios en las variables $x_i/x_0$ convendrá tomar únicamente los elementos de la forma $f/x_0^s$ con $f$ un polinomio homogéneo.

**Definición 3.4.1.** *Sea $R$ un anillo graduado y sea $f \in R$ un elemento homogéneo de grado $d$. Definimos una graduación en el anillo localizado $R_f$ de la siguiente manera $deg(g/f^r) = e - rd$ siempre que $g$ sea un elemento homogéneo en $R$ de grado $e$. El conjunto de elementos de grado $0$ de $R_f$ es entonces un sub-anillo, el cual denotamos por $R_{(f)}$.*

**Definición 3.4.2.** *Sea $V$ un conjunto algebraico proyectivo. Definimos una gavilla de funciones $k$-evaluadas sobre $V$, de la siguiente manera*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_{(f)}$$

*donde $f \in \Gamma(V)$ tiene grado mayor que cero.*

**Proposición-Definición 3.4.3.** *Sea $V$ un conjunto algebraico proyectivo. El espacio anillado $(V, \mathcal{O}_V)$ (con la gavilla definida anteriormente) es una variedad algebraica. Una variedad algebraica que es isomorfa a un conjunto algebraico proyectivo. Adicionalmente, toda variedad definida como ahora, con la gavilla definida anteriormente, será llamada* ***variedad proyectiva****.*

*Demostración.* Empezamos por reducir al caso donde $V = \mathbb{P}^{\Bbbk}$. Asumimos $V \subset \mathbb{P}^n$. Considere $f \in \Gamma(V)$, como la imagen de un polinomio homogéneo $F \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Tenemos que $D(f) = V \cap D(F)$. Más aún, el homomorfismo restricción

$$r : \Gamma(D(F), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to \Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$$

es claramente sobreyectivo. Pero $\mathcal{O}_V$ es entonces la imagen de la gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ en la gavilla de funciones sobre $V$, y como $\mathbb{P}^n$ es una variedad, entonces $V$ es simplemente la subvariedad cerrada del ejemplo 3.3.6.

Para $\mathbb{P}^n$ será suficiente mostrar que los conjuntos abiertos $D(x_i)$ son afines variedades y salvo homografía, basta probarlo para $U_0$, pues es claro que las homografías son automorfismos del espacio proyectivo con su estructura de espacio anillado. Esto es en escencia una traducción formal de la relación afín-proyectiva que hemos estudiado y lo retomamos en la siguiente proposición. □

**Proposición 3.4.4.** *Sea $U_0 = D(x_0)$ el conjunto de puntos en $\mathbb{P}^n$ tales que su coordenada $x_0$ es distinta de cero. Consideremos la biyección $j : k^n \to U_0$, definida como*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (1, \xi_1 \ldots, \xi_1)$$

*la cual tiene inversa*

$$(x_0 \ldots, x_n) \mapsto (x_1/x_0, \ldots, x_1/x_0)$$

*Adicionalmente equipamos a $k^n$ con la topología de Zariski, y a $U_0$ con la topología de Zariski inducida por $\mathbb{P}^n$. Bajo estas condiciones*

- *$j$ es un homeomorfismo.*
- *$j$ es un isomorfismo de espacios anillados entre la variedad afín $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ y $(U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_0})$.*

*Demostración.* La prueba de esta proposición está basada en estudiar los operadores de homogeneización y deshomogeneización en detalle. Si $P$ es un polinomio homogéneo de grado $d$ en las variables $t_1, \ldots, t_m$, entonces la fórmula

$$P\left(\frac{t_1}{t_i}, \ldots, \frac{t_m}{t_i}\right)$$

Es válida en el campo de cocientes. Utilizaremos la siguiente notación, los polinomios en $k[x_0, \ldots, x_n]$ se escribirán con letras mayúsculas y para polinomios en $k[x_1, \ldots, x_n]$ utilizaremos letras minúsculas.

**El operador $\flat$**. Considere el siguiente homomorfismo de anillos

$$k[x_0, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$$

dado por

$$P(x_0, \ldots, x_n) \mapsto P_\flat(x_1, \ldots, x_n) = P(1, x_1, \ldots, x_n)$$

Note que el homomorfismo es sobreyectivo. Además su núcleo es el ideal generado por $(x_0 - 1)$. Estamos interesados en el caso donde $P$ es un polinomio homogéneo de grado $d$. En este caso tenemos, en el campo de cocientes $k(x_0, \ldots, x_n)$

$$P_\flat\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = P\left(\frac{x_0}{x_0}, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^d}$$

Observamos que si $P$ es homogéneo de grado $d$, entonces $P_\flat$ es de grado $d$ si y sólo si $x_0$ no divide $P$.

**El operador $\sharp$**. Contrario la operación $\flat$, definimos una operación de $k[x_1, \ldots, x_n]$ en $k[x_0, \ldots, x_n]$ de la siguiente manera, si $p \in [x_1, \ldots, x_n]$, entonces $p^\sharp$ es el polinomio homogéneo de menor grado en $k[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $p = (p^\sharp)_\flat$. Podemos describir esta operación de la siguiente manera, si $p = p_0 + p_1 + \ldots + p_d$, donde $p_i$ es homogéneo de grado $i$ y $p_d \neq 0$, entonces $p^\sharp = x_0^d p_0 + x_0^{d-1} p_1 + \ldots + p_d$, o alternativamente[3]

$$p^\sharp(x_1, \ldots, x_n) = x_0^d p\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Realizamos las siguientes observaciones. Si $p, q \in k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $(pq)^\sharp = p^\sharp q^\sharp$, es claro pues se deduce de la fórmula anterior. Además si $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $(p^\sharp)_\flat = p$. Si $P$ es un polinomio homogéneo en $k[x_0, \ldots, x_n]$, entonces $P = x_0^s (P_\flat)^\sharp$, donde $x_0^s$ es la mayor potencia de $x_0$ que divide a $P$. Finalmente si $P$ es homogéneo y $P_\flat$, entonces $P = 0$.

**$J$ es un homeomorfismo**. Dado que los conjuntos $D(F)$ y $D(f)$ forman bases de conjuntos abiertos abiertos en $\mathbb{P}^n$ y $k^n$, respectivamente, se deduce la continuidad de las siguientes fórmulas. Si $F \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, entonces

$$J^{-1}(D(F)) = j^{-1}(D(F) \cap U_0) = D(F_\flat)$$

[3]Note que esta operación no es un homomorfismo de anillos.

Ahora si $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces

$$j(D(f)) = D(f^\sharp) \cap U_0$$

**El isomorfismo de gavillas**. Consideremos un $F \in k[x_0, \ldots, x_n]$ un polinimio homogéneo de grado $d$. Bastará probar que hay un isomorfismo

$$\Gamma(D(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq \Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{k^n})$$

note que $D(F) \cap U_0 = D(Fx_0)$. Además, se tiene que

$$\Gamma(D(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k[x_0, \ldots, x_n]_{(Fx_0)}$$

y los elementos en este anillo son funciones de la forma $P/(Fx_0)^s$, donde $P$ es homogéneo de grado $s(d+1)$. Así mismo, son de la forma $P/F^s x_0^r$, donde $P$ es de grado $sd + r$, basta con multiplicar el numerador por una potencia de $F$ o de $x_0$ para recuperar la forma anterior. Por otro lado, $\Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{k^n}) = k[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$.

Ahora, para definir el mapeo $\varphi$ requerido comenzamos con el morfismo $\flat : k[x_0, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$. Como $(Fx_0)_\flat = F_\flat$, este homomorfismo induce un homomorfismo $\psi$ en los anillos locales

$$\psi : k[x_0, \ldots, x_n]_{Fx_0} \to k[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$$

Y construimos $\varphi$ componiendo $\psi$ con la inclusión natural

$$i : k[x_0, \ldots, x_n]_{Fx_0} \to k[x_0, \ldots, x_n]_{Fx_0}$$

Por último, veamos que $f$ es de hecho un isomorfismo. Recordemos que $\varphi(P/F^s x_0^r) = P_\flat / F_\flat^s$. Ahora, si $P_\flat / F_\flat^s = 0$, entonces $P_\flat = 0$ y en consecuencia $P = 0$ así $\varphi$ es inyectivo. Por otro lado, considere $p/F_\flat^s \in k[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$, tenemos que $p/F_\flat^s = \varphi(x_0^r p^\sharp / F^s)$, donde $r = sd - deg(p) \in \mathbb{Z}$, en consecuencia $\varphi$ es sobreyectivo. Finalmente, $\varphi$ es isomorfismo. $\square$

Introducimos ahora las gavillas de módulos sobre variedades proyectivas. En escencia, es la misma definición que en el caso afín, salvo considerar elementos homogéneos. El objetivo principal es introducir cierto tipo gavillas sobre variedades proyectivas que permitan considerar secciones globales, las gavillas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y las gavillas $\mathcal{O}_X(d)$. Dada una variedad proyectiva $X$ encajada en $\mathbb{P}^n$, denotamos por $R$ al anillo de coordenadas de $X$, es decir $R = \Gamma(X)$.

**Definición 3.4.5.** *Sea $M$ un $R$-módulo. Definimos un $\mathcal{O}_X$-módulo $\widetilde{M}$ sobre los abiertos estándar de $X$ de la siguiente manera, si $f \in R$ es homogéneo de grado mayor que cero, entonces $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$.*

Note que nuevamenete $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$. Decimos también, que un $\mathcal{O}_X$-módulo es coherente o casi-coherente si lo es como en el caso afín.

**Definición 3.4.6.** *Sea $R$ un anillo graduado y sea $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un $R$-módulo graduado. El módulo $M_d$ es el mismo módulo graduado que $M$ salvo que la graduación está desplazada, es decir $M(d)_n = M_{d+n}$.*

**Definición 3.4.7.** *Sea $X$ una variedad proyectiva encajada en $\mathbb{P}^n$, y sea $R$ al anillo de coordenadas $\Gamma(X)$. La gavilla $\mathcal{O}_X(d)$ es la gavilla asociada al módulo desplazado $R(d)$, es decir, $\mathcal{O}_X(d) = \widetilde{R(d)}$. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, escribimos $\mathcal{F}(d)$ para la gavilla $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$.*

Las secciones de $\mathcal{O}_X(d)$ sobre los abiertos $D(f)$ son los elementos de grado $d$ en $R(f)$, es decir, elementos de la forma $a/f^r$, donde $\deg(a) - r\deg(f) = d$. Por otro lado, note que si $M$ es un módulo graduado, entonces $\widetilde{M(d)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) = \widetilde{M}(d)$.

**Proposición 3.4.8.** *Sea $R_d$ el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado $d$ en las variables $x_0, \ldots, x_n$. Entonces*

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \begin{cases} 0 & si \quad d < 0 \\ \\ R_d & si \quad d \geq 0 \end{cases}$$

*En particular, $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$.*

*Demostración.* Consideremos $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, con $f \neq 0$. Por definición su restricción al abierto $D(x_i)$ es una función racional de la forma $P_i(x_0, \ldots, x_n)/x_i^r$, donde $P_i$ es homogéneo de grado $d + r$. Luego simplificando, si es necesario, podemos suponer que $x_i$ no divide a $P$. Así mismo, $f \mid_{D(x_j)}$ es de la forma $P_j(x_0, \ldots, x_n)/x_j^s$, con $P_j$ es homogéneo de grado $d + s$ y $x_j$ no divide a $P_j$. Ahora, como estas expresiones son restricciones de $f$, deben coincidir en la intersección $D(x_i x_j)$, y por lo tanto son iguales en el anillo de localización $k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i x_j)}$, o en el campo de funciones de racionales $k(x_0, \ldots, x_n)$. En consecuencia, $x_j^s P_i = x_i^r P_j$, y como $x_i$ no divide a $P_i$, se tiene que $r = 0$ y $s = 0$, en consecuencia $P_i = P_j$. Finalmente, la sección $f$ está dada por un polinomio de grado $d$ el cual es independiente de $i$. $\square$

**Corolario 3.4.9.** *Se tiene que*

$$\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n(d), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \binom{n+d}{n}$$

A diferencia de las variedades afines, cuyos espacios de secciones globales rara vez son de dimensión finita, el espacio de secciones globales de la gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ sobre el espacio proyectivo es de dimensión finita. Este es un fenómeno general si consideramos variedades algebraicas proyectivas y gavillas coherentes.

# Capítulo 4

# Dimensión

Siendo el problema de la clasificación de objetos uno de los principales objetivos dentro del quehacer matemático, la búsqueda de invariantes es uno de los más importantes y recurridos medios para conseguir tal objetivo. Dentro de distintas áreas de las matemáticas el concepto de *dimensión* es de los primeros y más naturales invariantes que se estudian. No obstante, una noción apropiada de dimensión no siempre es sencilla de definir. Por un lado es deseable poder describirla en términos de cálculo sencillos. Y por otro, se busca que refleje de una manera adecuada, nuestra capacidad para poder describir el objeto desde el punto de vista geométrico. En este sentido, el caso de la geometría algebraica, es natural que las variedades de dimensión 0 correspondan a puntos, las de dimensión 1 a curvas, las de dimensión 2 a superficies, etcétera.

Empeñado en proveer de sólidos fundamentos algebraicos a la geometría algebraica, el matemático L. Kronecker fue el primero en intruducir una definición algebraica de dimensión para variedades. Kronecker se dio cuenta de que al descomponer una variedad en sus componentes irreducibles, una buena noción de dimensión podía definirse en cada una de las componentes a través del campo de cocientes del anillo de coordenadas.

El presente capítulo está dedicado a estudiar brevemente el concepto de dimensión para variedades algebraicas. El obetivo no es el de profundizar en la teoría, sino el de entender el concepto desde el punto de vista algebraico y el probar algunos resultados naturales en esta dirección. La finalidad de introducir estas nociones, es la estrecha relación que tienen con diversos resultados en cohomología, tema central en el siguiente capíitulo.

## 4.1. Definiciones en topología y álgebra

La idea central para definir la dimensión, es establecer que para cada subconjunto cerrado irreducible de una variedad irreducible, tiene dimensión menor que la variedad original. Introducimos ahora definiciones de dimensión en topología y álgebra. En la siguiente sección, estudiaremos las implicaciones que de ellas se derivan en geometría algebraica.

**Definición 4.1.1.** *Sea $X$ un conjunto. Una* ***cadena*** *de subconjuntos de $X$, es una sucesión $X_0 \subset X_1 \ldots \subset X_n$, tales que los conjuntos $X_i$ son distintos. Bajo estas condiciones, decimos que la* ***longitud*** *de la cadena es $n$.*

**Definición 4.1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. La* ***dimensión*** *de $X$, es el máximo de las longitudes de cadenas de subconjuntos cerrados irreducibles de $X$. Esto es un entero positivo o $\infty$. Denotamos a la dimensión de $X$ como* $\dim(X)$*.*

Note que la definición anterior está pensada para topologías de tipo Zariski. Si $X$ es un espacio de Hausdorff[1], por ejemplo, la dimensión de $X$ es cero.

**Proposición 4.1.3.** *Sea $Y$ un subespacio topológico de un espacio $X$. Entonces* $\dim(Y) \leq \dim(X)$*. Más aún, si $X$ es un espacio irreducble de dimensión finita, y $Y$ es un cerrado irreducible distinto que $X$, entonces* $\dim(Y) < \dim(X)$*.*

*Demostración.* Para cada cadena $F_1 \subset F_2 \ldots \subset F_s$ de cerrados irreducibles en $Y$, considere la sucesión $\overline{F}_1 \subset \overline{F}_2 \ldots \subset \overline{F}_s$ de cerrados irreducibles en $X$. Note que en esta sucesión $F_i = \overline{F}_i \cap Y$. En consecuencia, es una cadena de cerrados irreducibles $\overline{F}_i$ pues son distintos entre sí. Así $\dim(Y) \leq \dim(X)$. La segunda condición es obvia, basta añadir a $X$ a la cadena en $Y$. $\square$

Bajo estas condiciones, si $X$ es de dimensión finita, decimos que el número $\dim(X) - \dim(Y)$ es la **codimensión** de $Y$ en $X$, escribimos $\operatorname{codim}(X)$.

**Proposición 4.1.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, donde los conjuntos $X_i$ son cerrados. Entonces*

$$\dim(X) = \sup\{\dim(X_i)\}$$

[1] Para cada par de puntos distintos existen abiertos ajenos que contienen a los puntos.

*Demostración.* Claramente $\dim(X) \geq \sup\{\dim(X_i)\}$. Ahora, sea

$$p = \sup\{\dim(X_i)\}$$

Si $p$ es infinito, el resultado es trivial. Asumamos que no y consideremos una cadena de cerrados irreducibles en $X$ de longitud $p+1$, $F_0 \subset F_1 \ldots \subset F_{p+1}$. Entonces

$$F_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{r} (X_i \cap F_{p+1})$$

ahora, como $F_{p+1}$ es irreducible, está contenido en alguno de los conjuntos $X_i$, pero esto es una contradicción ya que $\dim(X_i) \leq p$. En consecuencia $\dim(X) = \sup\{\dim(X_i)\}$. □

En el caso algebraico la noción de dimensión está dada de la siguiente manera para el caso de anillos.

**Definición 4.1.5.** *Sea $A$ un anillo arbitrario. Definimos la dimensión de $A$, escribimos $dim_K(A)$, como el máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos de $A$.*

La definición anterior es conocida como *dimensión de Krull* de un anillo. El siguiente teorema relaciona esta noción de dimensión con la teoría de extensiones de campos, para el caso de un dominio entero.

**Teorema 4.1.6.** *Sea $A$ un domino entero el cual es una $k$-álgebra de tipo finito, y sea $K = \mathrm{Fr}(A)$ su campo de cocientes. Entonces, la dimensión de Krull del anillo $A$ coincide con el grado de tracendencia de $K$ sobre $k$,* $\dim_K(A) = \partial_k K$. [2]

## 4.2. Dimensión en geometría algebraica

Los resultados que enunciaremos en esta sección establecen conexiones entre la dimensión topológica y la dimensión de Krull con objetos estudiados en geometría algebraica.

**Proposición 4.2.1.** *Si $V$ una variedad algebraica afín*[3] *y $\Gamma(V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ es el anillo de funciones regulares sobre $V$. Entonces*

$$\dim(V) = \dim_K(\Gamma(V)) = \partial_k K$$

[2] Para un estudio más profundo en esta dirección y la prueba de este resultado puede consultarse [16].

[3] Vista como espacio topológico con la topología de Zariski.

*Demostración.* El resultado se sigue de la demostración del **Teorema de los ceros de Hilbert (1.4.3)** y de las correspondencias que analizamos al final de la **Sección 1.4**. En donde se establece una biyección entre los ideales primos y conjuntos algebraicos irreducibles. □

Las siguientes observaciones son consecuencias inmediatas de los resultados enunciados en este capítulo.

1. El espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ tiene dimensión igual a $n$. En efecto, pues el anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$ tiene como campo de cocientes a $k(x_1, \ldots, x_n)$ cuyo grado de tracendencia sobre $k$ es precisamente $n$.

2. Si $V$ es una variedad algebraica afín irreducible, entonces

$$dim(V) = dim_K(\Gamma(V)) = \partial_k K$$

3. En particular, toda variedad algebraica afiín irreducible es de dimensión finita.

4. Todo punto es de dimensión cero. La única cadena a considerar es el mismo punto.

**Proposición 4.2.2.** *Sea $X$ una variedad algebraica irreducible y sea $U$ un subconjunto abierto no vacío de $X$. Entonces,* $\dim(X) = \dim(U)$. *Más aún, esta dimensión es finita*

*Demostración.* Analicemos primero el caso en el que $X$ es una variedad afín. Si $U$ es un abierto no vacío de $X$, entonces existe un abierto de la forma $D(f)$, con $f \in \Gamma(X)$ distinto de cero, tal que $D(f) \subset U \subset X$. En consecuencia,

$$\dim(D(f)) \leq \dim(U) \leq \dim(X)$$

Ahora, el anillo asociado a $D(f)$ es un anillo de localización del anillo $\Gamma(X)$, y estos dos anillos tienen el mismo campo de cocientes. Así, $X$ y $D(f)$ tienen la misma dimensión y por lo tanto $U$ también. En consecuencia, todos los subconjuntos afines no vacíos de $X$ (que es irreducible) tienen la misma dimensión.

Supongamos ahora que $\dim(X) > r$ para todo entero $r > 0$. Entonces existe una cadena de cerrados irreducibles en $X$, $F_0 \subset F_1 \ldots \subset F_s$ con $s > r$. Consideremos $x \in F_0$, y sea $U$ un abierto afín que contiene a $x$. Note que, podemos construir una cadena de cerrados irreducibles $U \cap F_i$ en $U$. Sin embargo esta cadena es de longitud $s$, lo cual es una contradicción.

Finalmente, si $U$ es un abierto arbitrario, $U$ contiene a un abierto afín y esto concluye la prueba. □

Observaciones para calcular la dimensión en el caso general. Sea $X$ una variedad algebraica arbitraria.

1. Descomponemos $X$ en sus componentes irreducibles.
2. Si $X$ es irreducible, pasamos a un abierto afín de $X$.
3. Si $X$ es una variedad afín irreducible, calculamos el grado de tracendencia de $K(V)$.

En particular, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es de dimensión $n$, basta calcular la dimensión en la cubierta afín. Exponemos ahora un resultado en el caso proyectivo. La idea de la prueba consiste básicamente en utilizar conjuntos afines y el cono de un conjunto proyectivo. La ventaja principal del espacio proyectivo es que en ciertos casos, podemos asegurar de que las variedades obtenidas son no vacías.

**Proposición 4.2.3.** *Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ un variedad algebraica proyectiva irreducible, considere $f \in \Gamma(V)$ un polinomio homogéneo no constante. Entonces*

- *Cada componente irreducible de $\mathcal{V}(f)$ es de codimensión $1$ en $V$.*
- *Si $\dim(V) > 0$, entonces $\mathcal{V}(f)$ es no vacío.*

*Demostración.* Para probar la primera afirmación consideramos los conjuntos abiertos afines $U_i = D(x_i)$. Note que, las componentes de $\mathcal{V}(f)$ son no vacías y por lo tanto no están contenidas en todos los conjuntos $\mathcal{V}(x_i)$. Consideremos por ejemplo las componentes de $\mathcal{V}(f)$ que no están contenidos en $\mathcal{V}(x_0)$. Entonces $V \cap U_0$ es un variedad algebraica afín irreducible y $\mathcal{V}(f) \cap U_0 = \mathcal{V}(f_\flat) \neq \emptyset$, donde $f \in \Gamma(V \cap U_0)$ se define como en el capítulo anterior. Ahora, el elemento $f_\flat$ no es invertible, ya que $\mathcal{V}(f_\flat)$ es no vacío. Además, $f_\flat$ es distinto de cero, pues de otro modo $V \cap U_0$ estaría contenido en $\mathcal{V}(f)$ y por lo tanto $V$ y $f$ serían ambos cero, lo cual no ocurre. En consecuencia, se tiene que

$$\dim(\mathcal{V}(f_\flat)) = \dim(V \cap U_0) - 1 = \dim(V - 1)$$

y esto se cumple para todas las componentes irreducibles que no están contenidas en $\mathcal{V}(x_0)$.

Para la segunda afirmación utilizamos los conos en $k^{n+1}$. Consideramos $C(V)$ el cono afín de $V$. El ideal (afín) de $C(V)$ no es otro que $I(V)$. Además, como $I(V)$ es primo, se tiene que $C(V)$ es irreducible. Más aún,

$$\dim C(V) = \dim V + 1$$

Consideramos ahora la subvariedad afín $V_a(f) \subset C(V)$. Esta es no vacía, pues $f$ es homogéneo, y por lo tanto contiene a 0. Además, es de codimensión 1 en $C(V)$, y en consecuencia es de dimensión igual a $\dim(V) > 0$. Finalmente, no consiste únicamente del punto 0 y por lo tanto su imagen en $\mathbb{P}^n$, que es simplemente $V(f)$, es no vacía. $\square$

# Capítulo 5

# Cohomología en variedades algebraicas

En el presente capítulo desarrollamos la nociones referentes a cohomología sobre variedades algebraicas. No probaremos la existencia y unicidad de estos grupos, tampoco desarrollaremos las nociones referentes al ágebra homológica. Nos limitaremos a usar tales resultados y suponer conocidas las definiciones. Para una revisión detallada sobre estos temas puede consultarse [7] y [8].

Uno de los principales problemas en geometría algebraica es estudiar el anillo de secciones globales de una variedad. En particular, calcular su dimensión es de primordial interés. Dada una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos en una variedad $X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

se obtiene una sucesión en las secciones globales

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X, \mathcal{H}) \tag{5.2}$$

una de las dificultades al estudiar esta sucesión es que $\Gamma$ no exacto derecho, en consecuencia $\pi$ no necesariamente en sobreyectivo.

Esta situación surge a menudo en geometría algebraica, con frecuencia necesitamos calcular la dimensión de un espacio de secciones globales (que en el caso proyectivo es de dimensión finita si $\mathcal{F}$ es coherente). Por ejemplo, si $X$ es una variedad algebraica, la dimensión del anillo de secciones globales es el número de componentes conexas de la variedad. El método utilizado para realizar estos cálculos es estudiar las gavillas involucradas y alguna sucesión exacta relacionada con ellas, sin embargo, continuamente nos encontramos con el problema de la no exactitud de $\Gamma$.

La cohomología se inventó en cierto modo para tratar de resolver este problema. La idea es introducir nuevos grupos asociados a $\mathcal{F}$, denotados por $H^i(X,\mathcal{F})$, definidos para $i \geq 0$, y tales que $H^0(X,\mathcal{F})$ sea simplemente $\Gamma(X)$. La propiedad más importante de esta construcción es que dada una sucesión exacta de gavillas

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathcal{H}) &\xrightarrow{\quad\delta\quad} \\ H^1(\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}) &\longrightarrow H^2(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

con la cual esperamos poder calcular la imagen de $\pi$.

La idea general para comprender la cohomología es la siguiente, retomemos el ejemplo de la sucesiones (5.1) y (5.2). El propósito es caracterizar la imagen de $\pi$.

Consideremos $h \in \Gamma(\mathcal{H})$. En principio $h$ no está en la imagen de $\pi$, pero localmente sí lo está porque $\pi$ es sobreyectiva. En consecuencia, existe una cubierta abierta $U_i$ de $X$ y secciones $g_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{G})$ tales que $p(g_i) = h\mid_{U_i}$. El problema radica en si las secciones $g_i$ se pueden pegar o no. Consideremos secciones $f_{ij} = g_i - g_j$ sobre cada uno de los conjuntos abiertos $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Como $g_i$ y $g_j$ tinen la misma imagen en $\mathcal{H}$, $f_{ij}$ es una sección en $\mathcal{F}$. Más aún, sobre el abierto $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ tenemos que $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, a esta relación se le conoce como cociclo y decimos que las secciones $f_{ij}$ forman un cociclo.

Las secciones $g_i$ se pueden pegar si y sólo si existen elementos $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{F})$ tales que $f_i + g_i = f_j + g_j$ o $f_{ij} = f_j - f_i$ las cuales son secciones de $\mathcal{F}$, y en este caso decimos que $f_{ij}$ es una cofrontera. La impedimento para que $h$ esté en la imagen de $p$ es que un ciclo no siempre es una cofrontera. En consecuencia, buscamos que definir $H^1(X,\mathcal{F})$ como el cociente de el grupo de cociclos módulo el grupo de cofronteras, el mapeo $\delta : H^o(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ es el mapeo que asocia a cada $h$ la clase del cociclo $f_{ij}$ definido arriba. Finalmente $h \in \mathrm{Im}\mathcal{H}$ si y sólo si $h \in \mathrm{Ker}\delta$.

## 5.1. Cohomología de Čech

En la presente sección daremos una construcción explícita de los grupos de cohomologá de Čech para espacios topológicos en general. Al final veremos cómo se relacionan los grupos de cohomología con las secciones globales de un espacio $X$ y observaremos algunas propiedades naturales en el caso de variedades algebraicas.

Establecemos la siguiente notación. Sea $X$ un espacio topológico, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre $X$. Considere $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta finita de $X$ indizada por el conjunto ordenado $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Denotamos las intersecciones

$$U_{ij} = U_i \cap U_j, \dots, U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

Bajo estas circunstancias definimos el complejo de grupos abelianos $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ de la siguiente manera. Para cada $0 \leq p \leq n$, definimos el conjunto

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$$

Si $p > n$ entonces $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Un elemento $s$ en $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es llamado **cocadena** y está determinado por secciones $s_{i_0 \dots i_p}$ sobre cada intersección $U_{i_0 \dots i_p}$.

Definimos ahora la diferencial $d^{p+1} : C^p \to C^{p+1}$ dado por la expresión

$$d^{p+1}(s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \cdots i_{p+1}}}$$

donde el símbolo $\widehat{i_k}$ significa que no consideramos el índice $i_k$. Con la cual obtenemos una fórmula para calcular la $(i_0 \dots i_{p+1})$-ésima componente de $d(s)$.

**Proposición 5.1.1.** *La composición $d^{p+1} \circ d^p = 0$ para todo $p \geq 0$. El complejo construido es llamado el complejo de Čech de $\mathcal{F}$ relativo a la cubierta $\mathcal{U}$. Los grupos de cohomología correspondientes son llamados los grupos de cohomología de Čech de $\mathcal{F}$ relativos a la cubierta $\mathcal{U}$ y los denotamos por $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.*

*Demostración.* Sea $t = d^p(s)$. Queremos calcular $d^{p+1}(t)$, analizamos cada componente

$$\begin{aligned} d^{p+1}(t)_{i_0 \dots i_{p+1}} &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k t_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \sum_{l=0, l\neq k}^{p+1} (-1)^{a(k,l)} s_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots \widehat{i_l} \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} \end{aligned}$$

donde el entero $a(k,l)$ es $l$ si $l < k$ o $l+1$ si $l > k$.

Consideremos ahora el término $s_{i_0 \ldots \widehat{\alpha} \ldots \widehat{\beta} \ldots i_{p+1}}$ en la suma total. Note que dicho término aparece en dos ocasiones, una con el signo $(-1)^{\alpha}(-1)^{\beta+1}$, y otra con el signo $(-1)^{\alpha}(-1)^{\beta}$. En consecuencia, dichos términos se cancelan. Finalmente $d^{p+1} \circ d^{p} = 0$. □

**Ejemplo 5.1.2.** *Un elemento $s \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es de la forma $s = (s_i)$, donde $s_i \in \mathcal{F}_i$ y la diferencial $d(s)$ está dada por $d(s)_{ij} = (s_i - s_j) \mid_{U_{ij}}$. Ahora si $t \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, entonces $t = (t_{ij})$, con $t_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$, y la imagen de la diferencial $d(t)_{ijk} = (t_{jk} - t_{ki} + t_{ij}) \mid_{U_{ijk}}$, de donde es claro que $d \circ d$ se anula.*

**Proposición 5.1.3.** *Para todo espacio topológico $X$, el grupo de cohomología $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ coincide con las secciones globales, es decir*

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

*donde $\mathcal{F}$ es una gavilla de grupos y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta finita como las descritas al inicio de la sección.*

*Demostración.* El grupo $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es simplemente el kernel de la primera diferencial. Es decir, consta de todas las cocadenas $s = (s_i)$ tales que $d(s) = 0$. Por lo que vimos en el ejemplo anterior, tenemos que $d(s)_{ij} = s_i - s_j \mid_{U_{ij}}$. En consecuencia, $s_i = s_j$ sobre $U_{i,j}$. Así, por la condición del pegado en la gavilla $\mathcal{F}$, las secciones $s_i$ pueden ser pegadas para obtener una sección global $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. □

Note que, cuando $X$ es una variedad algebraica sobre un campo $k$ y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, los grupos $\mathcal{F}(U_{i_0 \ldots i_p})$ tienen una estructura natural de $k$-espacio vectorial. De la misma manera, esto ocurre para $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, más aún los mapeos diferenciales son $k$-lienales.

Otra propiedad interesante de los grupos de cohomología de Čech es que conmutan con sumas directas, es decir

$$\check{H}^p(X, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i \in I} \check{H}^p(X, \mathcal{F}_i)$$

esto es inmediato de la definición de $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Se puede demostrar, que la cohomología de Čech es la *correcta* cohomología para realizar cálculos. Es de hecho única si requerimos que $H^0 = \Gamma$, que la sucesión exacta larga exista y que satisfaga cierto teorema de desvanecimiento. Ver [7] para más detalles. En particular, y usaremos este hecho sin demostración, la cohomología de Čech no depende de la elección de la cubierta afín, lo cual también se puede demostrar directamente usando sucesuines espectrales. Bajo estas hipótesis, usaremos en algunas ocasiones la notación $H^i(X, \mathcal{F})$ para referinos al i-ésimo grupo de cohomología omitiendo el símbolo $^v$ y la cubierta abierta sobre la que se calcule.

## 5.2. Teoremas de Desvanecimiento

El uso de la cohomología depende en buena medida de que podamos probar que ciertos grupos de cohomología se anulan, esta propiedad es conocida como desvanecimiento. En esta sección probaremos, bajo ciertas condiciones, cómo la cohomología se anula en el caso afín para el grado $p > 0$. Para el caso proyectivo, veremos que los grupos se anulan si el grado es mayor que la dimensión de la variedad. Resultados más generales en esta dirección fueron probados por los matemáticos A. Grothendieck y J.P. Serre en la década de los 60´s y pueden ser consultados en [7].

**Teorema 5.2.1.** *Sea $X$ una variedad algebraica afín irreducible, y sean $A = \Gamma(X)$ su anillo de coordenadas, $M$ un $A$-módulo libre de torsión*[1], *$\mathcal{F} = \widetilde{M}$ la gavilla casi-coherente asociada y sea $\mathcal{U} = (U_i)$ con $i = 1, \ldots, m$ una cubierta de conjuntos abiertos afines estándar de $X$. Entonces, para todo $p > 0$ se tiene que $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.*

*Demostración.* Bastará probar el caso $p = 1$. Ahora, como $M$ es libre de torsión, tenemos que para $a \in A$ y $x \in M$ tales que $ax = 0$, entonces $a = 0$ o bien $x = 0$. La idea general en la demostración, será ver cómo todo 1-cociclo puede expresarse como una cofrontera.

Establecemos $U_i = D(f_i)$ para $f_i \in A$ con $f_i \neq 0$. Sea $\alpha = (\alpha_i)$ un 1-cociclo. En principio, $\alpha_{ij}$ está definido solamente si $i < j$ y la relación de cociclo está dada por

$$\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0$$

sólo se tiene si $i < j < k$. Será conveniente extender esta definición a todas las parejas $i, j$ estableciendo $\alpha_{ii} = 0$ para toda $i$ y $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ siempre que $i > j$. Es claro que la relación de cociclo permanece para todas las ternas $i, j, k$.

Bajo estas condiciones, consideramos $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \widetilde{M}) = M_{f_i f_j}$. Escribimos $\alpha_{ij} = \beta_{ij}/f_i^n f_j^n$, donde $\beta_{ij} \in M$. Note que, podemos usar la misma $n$

[1] Ver [1] para esta definición.

para todos los pares $i, j$ debido a que la cubierta abierta es finita. Entonces, expresamos las relación de cociclo de la siguiente manera

$$\frac{\beta_{jk}}{f_j^n f_k^n} - \frac{\beta_{ik}}{f_i^n f_k^n} + \frac{\beta_{ij}}{f_i^n f_j^n} = 0$$

o de manera alternativa

$$f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij} = 0$$

en principio esto es válido para el anillo $M_{f_i f_j f_k}$. Sin embargo, como $M$ es libre de torsión, sigue siendo válido también en $M$.

De la misma manera, podemos escribir las relaciones anteriores como la expresión

$$f_k^n \alpha_{ij} = -\frac{\beta_{jk}}{f_j^n} + \frac{\beta_{ik}}{f_i^n}$$

la cual está sobre el abierto $U_{ij}$.

Notemos que esta relación es cercana a la expresión que buscamos, escribir a $\alpha_{ij}$ como cofrontera. Es decir, escribirlo en la forma $\alpha_{ij} = \gamma j - \gamma_i$.

Por otro lado, sabemos que los conjuntos $D(f) = D(f^n)$ son una cubierta para $X$. En consecuencia, podemos considerar particiones de la unidad; es decir, existen elementos $a_k \in A$ tales que $1 = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^n$. Bajo estas condiciones, definimos para cada $j$ lo siguiente

$$\gamma_j = -\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\beta_j k}{f_j^n}$$

en consecuencia, sobre las intersecciones $U_{ij}$ obtenemos

$$\gamma_j - \gamma_i = \sum_{k=0}^{n} a_k \left( \frac{\beta_i k}{f_i^n} - \frac{\beta_j k}{f_j^n} \right) = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^n \alpha_{ij} = \alpha_{ij}$$

por lo cual $\alpha$ es una cofrontera. Finalmente $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Para el caso de variedades proyectivas la demostración se basa en diversos argumentos geométricos y de dimensión. El siguiente lema es uno de tales argumentos.

**Lema 5.2.2.** *Sea $V$ una subvariedad cerrada en $\mathbb{P}^N$ de dimensión $d$. Entonces, existe una subvariedad lineal $W \subset \mathbb{P}^N$, de codimensión $n+1$, tal que $V \cap W = \emptyset$.*

*Demostración.* Por inducción sobre $N$. Para el caso base $N = 1$, el resultado es inmediato. Supongamos ahora que el resultado se satisface para $N - 1$. Para el paso inductivo, probaremos que existe un hiperplano $H$ que no contiene ninguna componente de $V$. Luego, la restricción de las componentes a $H$ es vacía o de dimensión a lo más $N-1$ y aplicamos hipótesis de inducción.

Considere $\mathbf{E} = k^{N+1}$. Note que, un hiperplano proyectivo $H$ corresponde a una forma lineal que no se anula en todo $\mathbf{E}$. Además, dos formas lineales que son proporcionales definen el mismo hiperplano. En consecuencia, podemos hacer corresponder el espacio de hiperplanos, con el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N(\mathbf{E})$. En términos de coordenadas, a un hiperplano $H$ definido por $a_0x_0 + \ldots + a_Nx_N$ le asociamos un punto en $\mathbb{P}^N(\mathbf{E})$ con coordenadas homogéneas $(a_0 : \ldots : a_N)$.

Ahora, si $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ es la descomposición de $V$ en su componentes irreducibles. Elegimos $x_i \in V_i$, con $x_i = (x_{i_0} : \ldots : x_{i_N})$. En el espacio de hiperplanos, el conjunto de hiperplanos que no contienen a $x_i$ es un abierto no vacío $\Omega_i$. Definimos $\Omega = \bigcap_{i=1}^r \Omega_i$, es un abierto no vacío. Finalmente elegimos algún hiperplano en $\Omega$ y este satisface las condiciones. $\square$

**Teorema 5.2.3.** *Sea $V$ una variedad proyectiva de dimensión $n$ y sea $\mathcal{F}$ una gavilla casi-coherente. Entonces $H^i(V, \mathcal{F}) = 0$ para toda $i > n$.*

*Demostración.* Consideremos $W$ la subvariedad lineal del lema anterior. Vía una homografía, podemos asumir que $W = \mathcal{V}(x_0, \ldots, x_n)$, recordemos que $\dim(W) = n+1$. Ahora, como $V \cap W = \emptyset$, entonces $V \subset D(x_0) \cup \ldots \cup D(x_n)$. En consecuencia, $V$ está cubierto por $n + 1$ abiertos afines, los conjuntos $V \cap D(x_i)$. Sin embargo, en el complejo de Čech asociado a esta cubierta, todos los grupos $C^i$ son cero para $i > n$. En consecuencia, todos los grupos $H^i$ se anulan. $\square$

## 5.3. Cohomología de gavillas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$

Una de las piezas fundamenteles en geometría algebraica es el cálculo de la cohomología de gavillas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Concluimos este trabajo estudiando de que manera se comporta esta cohomología.

**Teorema 5.3.1.** *Sea $n$ un entero mayor que $1$ y considere $d \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $S_d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado $d$ en $n + 1$ variables*[2]*, entonces*

1. $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = S_d$, *para toda $d$.*

[2] Por convención, si $d < 0$, entonces $S_d = 0$.

2. *El espacio vectorial $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ es isomorfo al espacio dual del espacio vectorial $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ para todo $d \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* Considere el conjunto $S = k[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$. Probaremos el teorema simultáneamente para todos los enteros $d \in \mathbb{Z}$ usando la gavilla $\mathcal{F} = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Esta gavilla es casi-coherente, pero no coherente, sobre $\mathbb{P}^n$ y tiene asociado al $S$-módulo graduado $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S(d)$. Como la cohomología conmuta con sumas directas, si calculamos la cohomología de $\mathcal{F}$ obtenemos la cohomología de cada uno de sus sumandos.

Calcularemos la cohomología de $\mathcal{F}$ usando la cubierta abierta estándar de $\mathbb{P}^n$, los conjuntos abiertos afines $D(x_i)$. Sabemos que

$$\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = S(d)_{(x_{i_0}\ldots x_{i_p})}$$

el conjunto de elementos homogéneos de grado $(d)$ del anillo local $S_{x_{i_0}\ldots x_{i_p}}$, y deducimos que este es el complejo de Čech de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. El complejo Čech de $\mathcal{F}$, la cual es la suma directa de arriba, y consiste en los anillos localizados de $S$, tenemos que

$$C^p = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<\ldots<i_p} S_{x_{i_0}\ldots x_{i_p}}$$

de lo cual obtenemos el siguiente complejo

$$\prod_{i=0}^{n} S_{x_i} \to \prod_{0\leq i\leq j\leq n} S_{x_i x_j} \to \ldots \to \prod_{i=0}^{n} S_{x_0\ldots\widehat{x_i}x_n} \to^{\delta_n} S_{x_0x_1\ldots x_n}$$

Note que el grupo $C^p$, con su descomposición natural como suma directa, es un $S$-módulo graduado, y por lo tanto ocurre lo mismo para $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$. La parte homogénea de grado $d$ en este grupo es simplemente $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

Por otro lado, como el funtor $H^0$ es igual a $\Gamma$, ya hemos calculado $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

Para calcular $H^n$, note que $S_{x_1x_2\ldots x_n}$ es un espacio de dimensión infinita, que tiene una base formada por todos los monomios $x_0^{\alpha_0}\ldots x_n^{\alpha_n}$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, note que $H^n$ es el cokernel de $\delta_n$, además la imagen de este mapeo consiste de todas las fracciones de la forma

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{f_i}{(x_0\ldots\widehat{x_i}\ldots x_n)^r} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x_i^r f_i}{(x_0\ldots x_n)^r}$$

Por lo tanto, de lo anterior obtenemos una base de la imagen de $\delta_n$ formada por los monomios $x_0^{\alpha_0}\ldots x_n^{\alpha_n}$, de tal manera que al menos uno de los enteros $\alpha_i$ sea mayor que cero. En consecuencia, tenemos que el cokernel $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ tiene una base que consiste en las imágenes de los monomios cuyos exponentes son estrictamente negativos, en el caso de $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ corresponden a los monomios con grado $\sum_{i=0}^n \alpha_i = d$. Observamos que este espacio es 0 para $d \geq -n$. Para $d \leq -n-1$ tenemos que contar los monomios grado $d$ en las variables $x_i$ cuyos exponentes son menores que cero. Esto es equivalente a contar los monomios de grado $-d-(n+1)$ en las variables $1/x_i$, los cuales son $\binom{-d-1}{n}$.

En el caso especial con $d = -n-1$ el espacio $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ es de dimensión 1 con una base que consiste de la imagen del monomio $1/x_0 \ldots x_n$. Al identificar este espacio con el campo base se obtiene una forma bilineal no degenerada

$$\varphi : H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$$

la transfomación está dada asociando a los monomios $x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n}$ y $x_0^{\beta_0} \ldots x_n^{\beta_n}$, donde $\sum_{i=0^n} \alpha_i = d$ y $\sum_{i=0^n} \beta_i = -d-n-1$, como imagen bajo $\varphi$ el monomio $x_0^{\alpha_0+\beta_0} \ldots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ en $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$. Como $\varphi$ es no degenerada, con una elección adecuada del orden en los monomios su matriz es la matriz identidad, induce un isomorfismo entre $H^n$ y el espacio dual de $H^0$. $\square$

# Bibliografía


[1] Atiyha, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, primera edición, Addison-Wesley, U. S. A., 1969.

[2] Dieudonné, J., *History of Algebraic Geometry*, primera edición, Wadsworth, California, 1985.

[3] Eisenbud, D., Harris, J., *Schemes: The Lenguage of Modern Algebraic Geometry*, primera edición, Wadsworth, California, 1992.

[4] Fulton, W., *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, primera edición, W. A. Benjamin Inc., New York, 1969.

[5] Harder, G., *Lectures in Algebraic Geometry I*, segunda edición, Wieweg+Teubner, Alemania, 2011.

[6] Harris, J., *Algebraic Geometry: A First Curse*, segunda edición, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, primera edición, Springer-Verlag, U. S. A., 1977.

[8] Hilton, P.J.; Stammbach, U, *A Couse in Homological Algebra*, segunda edición, Springer-Verlag, U. S. A., 1997.

[9] Hulek, K., *Elementary Algebraic Geometry*, primera edición, American Mathematical Society, U. S. A., 2003.

[10] Perrin, D., *Algebraic Geometry: An Introduction*, primera edición, Springer-Verlag, London, 2008.

[11] Samuel, P., *Méthodes D'algèbre Abstraite en Géomètre Algébreique*, primera edición, Springer, Berlin, 1955.

[12] Smith, K., Kahanpää, L., Kekäläinen, P., Traves, W., *An Invitation to Algebraic Geometry*, primera edición, Springer, U. S. A., 2000.

[13] Ueno, K., *Algebraic Geometry I: From Algebraic Varieties to Schemes*, primera edición, American Mathematical Society, U. S. A., 1999.

[14] Zaldívar, F., *Notas de Geometría Algebraica I*, Sin publicar. Disponible en internet.

[15] Zariski, O., Samuel, P., *Commutative Algebra Vol I*, primera edición, Springer-Verlag, U. S. A., 1975.

[16] Zariski, O., Samuel, P., *Commutative Algebra Vol II*, primera edición, Springer-Verlag, U. S. A., 1975.

[17] Zariski, O., *A new proof of Hilbert´s Nullstellensatz*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), p. 362-368, U. S. A., 1947.