



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
“ARAGÓN”**

“DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA VIGAS
A PARTIR DE MODELOS CONTINUOS”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

**PRESENTA:
CRISTOPHER AGUIRRE ARELLANO**

ASESOR:
DR. JAIME RETAMA VELASCO



CIUDAD NEZAHUALCOYOTL, EDO. DE MÉX., MARZO 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“Porque no todo ha de ser mejor ni
peor que lo nuestro, nos debe bastar con
que sea diferente, y como tal contemplarlo,
y como tal admirarlo”

DR. IGNACIO CHÁVEZ

Dedicatoria

A mis padres, J. Guadalupe Aguirre Cárdenas y Ma. Nidia Arellano Damián, ustedes me han impulsado cada día, ofreciéndome siempre lo mejor de sí: amor, comprensión, tolerancia e ideales. Gracias por formarme con excelentes valores y guiarme por el camino correcto.

A mis hermanos, Aldair, Osvaldo, Monserrat y Guadalupe por su cariño incondicional, sus ocurrencias y mostrarme las cosas buenas de la vida.

A mis abuelos, Juan Arellano, Ma. De Jesús Damián y Gloria Cárdenas, por su confianza y amor. Han estado al pendiente desde el primer día sin dudar de mis capacidades.

A mis amigos, Carmen Cárdenas, Vanesa Pacheco, José Ortuño, Rafael Calderón y Pablo Millán, son ustedes quienes caminan a mi lado, con la misma incertidumbre, pero con las metas firmes. Me impulsan a ser cada día una mejor persona, gracias por sus consejos y momentos inolvidables.

A Rosanelly Cano Avila, por ser fiel y comprensiva, por brindarme tu actitud más positiva en cada proceso de este trabajo y de mi carrera. Tú eres mi compañera de viaje y has sujetado mi mano fuerte en momentos débiles, llenando mi mundo de alegría. Tú mejor que nadie sabe lo que este logro significa en mi vida. Gracias por tu eterno cariño.

A mis tíos, Ignacia Aguirre, German García, Raúl Aguirre e Hilda Ramirez, por su apoyo durante toda mi carrera. Ustedes pusieron la primera piedra para que este sueño tomara forma. Estaré eternamente agradecido.

A mis primos, Brandon, Ashanti y Mario, por sus consejos y brindarme toda la confianza del mundo al momento de iniciar este viaje.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma mater.

A la Facultad de Estudios Superiores "Aragón", el recinto de mis estudios profesionales.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, por el apoyo brindado para el desarrollo del presente trabajo de tesis, a través del proyecto de investigación PAPIIT, número de registro **TA101317**, con título "*Análisis no-lineal de vigas con zonas de plastificación y funciones spline*".

A mi asesor de tesis, Dr. Jaime Retama Velasco, por brindarme su tiempo, conocimientos y consejos en todo momento. Gracias por no dudar de mis habilidades y siempre confiar en mí.

A los profesores de la carrera de ingeniería civil de la FES "Aragón", por fortalecer mis valores humanos y transmitirme cada uno de sus conocimientos.

A Oscar Alejandro Silverio, mi amigo y compañero de vivencias académicas. Nunca dejes que tu curiosidad se apague, sé que llegarás muy alto en tu vida profesional y personal.

A mis tíos, Jazmin, Rosalba, Julia, Patricia, Mario, Teresa, Humberto, Xochitl, Sandra, Juan, Daniel y José, por alimentarme con su cariño.

A mis primos, Raúl, Antonio, Juan Carlos, Hugo, José Luis, Susana, Viridiana, Guadalupe, América y Garibaldi, por su respeto y apoyo en mis decisiones.

A Martin Romero Medina, por creer en mí y brindarme su confianza. Fue un excelente profesor.

A mis amigos de la escuela, Daniel, Luis Felipe, Jorge Adrian, Jorge Arturo, Miguel, Iván, Abimael, Marcos, Jonathan, David, Fidel y Axel, por compartir conmigo una de las mejores etapas de mi vida: la universidad.

A Emma Ávila y Marcos Cano, por acogerme en su familia y ofrecerme un segundo hogar.

Resumen

El trabajo que aquí se expone, corresponde a una recopilación de ideas y teorías básicas que sientan las bases de la Mecánica de Materiales y el Análisis Estructural. Asimismo, cada una de las teorías mencionadas en la tesis, convergen en un tema imprescindible en la ingeniería civil: el Método de los Elementos Finitos; profundizando ínfimamente en el comportamiento plástico.

No solo se habla de una evolución del Método de los Elementos Finitos a través de los años, sino se tocan temas que investigadores se han dado a la tarea de esclarecer para formular las variantes que intervienen en el comportamiento de un modelo sujeto a diversos fenómenos, y así, tener cierto control sobre estos ante situaciones no previstas.

Para introducir los temas de interés, se presenta un breve resumen al inicio del trabajo sobre algunas aportaciones de diferentes autores que enriquecen los temas donde se involucran los diagramas momento-curvatura en su rango lineal y en el no-lineal, desde el punto de vista del Análisis Estructural.

Por otro lado, el entendimiento de la teoría de vigas es vital, para esto se comentan dos de ellas. También, es importante mencionar la definición de la curvatura en un sentido físico y las consecuencias de ella: las deformaciones longitudinales, tópicos expuestos en el trabajo.

Además, a la vez que se describen los diagramas momento-curvatura, es fundamental tocar la plasticidad en las vigas de concreto, desde la aplicación de carga hasta lograr la formación de una articulación plástica en los modelos, sobrepasando los límites de fluencia y plasticidad.

Finalmente, se explica de manera somera la metodología del Método de los Elementos Finitos, para posteriormente estudiar los efectos de fuerzas en las vigas de concreto utilizando modelos con características reales, y por consecuencia, realizar diagramas que ayuden a interpretar lo que sucede internamente en las vigas.

.

Abstract

The thesis work presented here corresponds to a collection of ideas and theories that lay the foundations of the Mechanics of Materials and the Structural Analysis. Likewise, each of the theories mentioned in the thesis, converge on an essential subject in civil engineering: The Finite Element Method; deepening in the plastic behavior.

Not only is there talk of an evolution of the Finite Element Method through the years, but themes are touched that researchers have been given the task of clarifying to formulate the variants that intervene in the behavior of a model subject to various phenomena, thus, have some control over these in unforeseen situations.

To introduce the topics of interest, a brief summary is presented at the beginning of the work about some contributions from different authors who enrich the topics where moment-curvature diagrams are involved in their linear range and in the non-linear, from the point of view of the Structural Analysis.

Otherwise, the understanding of beam theory is essential, for this, two of them are commented. Also, it is important to mention the definition of the curvature in a physical sense and the consequences of it: longitudinal strains, topics exposed at work.

In addition, at the same time that the moment-curvature diagrams are described, it is essential to touch the plasticity in concrete beams, from the loading application until achieving the formation of a plastic joint in the models, exceeding the limits of yield and plasticity.

Finally, it is explained in a shallow way the methodology of the Finite Element Method, to later study the effects of forces on concrete beams using models with real characteristics, and consequently, make diagrams that help interpret the relationship between the bending moment and the curvature.

Contenido

1	Introducción.....	1
1.1	Antecedentes	1
1.2	Justificación	2
1.3	Objetivo.....	3
1.4	Organización de la tesis.....	3
2	Teoría de vigas	5
2.1	Teoría de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko	5
2.2	Flexión pura.....	7
2.3	Curvatura y radio de curvatura	10
2.4	Deformación unitaria	12
2.5	Fórmula de la flexión elástica.....	14
3	Diagrama momento-curvatura.....	19
3.1	Flexión inelástica	19
3.2	Momento de fluencia.....	21
3.3	Momento plástico	24
3.4	Factor de forma.....	25
3.5	Relación momento-curvatura	26
3.6	Articulaciones plásticas	28
4	El problema del continuo en 2D	31
4.1	Esfuerzos planos.....	32
4.2	Deformaciones planas.....	32
4.3	El problema elástico.	33
4.4	Método de los elementos finitos.	36
4.4.1	Elementos para discretizar un sólido continuo.....	38
4.4.2	Campo de desplazamiento para elementos unidimensionales.	39
4.4.3	Campo de desplazamiento para elementos bidimensionales.	44
4.4.4	Integración numérica.	48
4.4.5	Matriz de rigidez del elemento.....	51
5	Ejemplos de aplicación.	57
5.1	Características generales de los modelos.	57
5.2	Mallas generales.....	58

5.3	Restricciones y tipo de carga.....	60
5.4	Aplicación de la carga.....	63
5.5	Análisis de los modelos.	63
5.6	Resultados.	64
5.6.1	Cargas de plastificación de los modelos con carga puntual.	67
5.6.2	Cargas de plastificación de los modelos con carga distribuida.	70
5.6.3	Gráficas reacción-peralte.	72
5.6.4	Ejemplos con carga puntual en el extremo derecho.	72
5.6.5	Ejemplos con carga distribuida en toda su longitud.	74
5.6.6	Deformaciones de la sección transversal.....	76
5.6.7	Diagramas momento-curvatura.	78
5.6.8	Diagramas momento curvatura (carga puntual).	79
5.6.9	Diagramas momento curvatura (carga distribuida).	80
5.6.1	Comparación de los diagramas momento-curvatura.	82
5.6.2	Diagramas momento-curvatura para la plastificación progresiva de un modelo.	86
6	Conclusiones.	89

Lista de figuras.

Figura 1. Flexión de una viga de acuerdo con la teoría de Euler-Bernoulli.....	6
Figura 2. Flexión de una viga de acuerdo con la teoría de Timoshenko.....	6
Figura 3.viga sujeta a flexión pura.	7
Figura 4. Viga con fibras seccionadas.....	8
Figura 5.Viga sujeta a flexión pura.	8
Figura 6.Viga en voladizo en flexión pura.	9
Figura 7. Viga con apoyo simple en flexión pura.	9
Figura 8. Viga simple con región central en flexión pura y regiones extremas en flexión no uniforme.....	9
Figura 9.Función para ilustrar la curvatura.	10
Figura 10. Curvatura de una viga flexionada: (a) viga con carga y (b) curva de deflexión.....	11
Figura 11. Convención de signos para la curvatura de una viga.	12
Figura 12. Vista ortogonal de una viga flexionada sobre el eje x	13
Figura 13. Deformación de un segmento infinitesimal de una viga.	14
Figura 14.viga con cargas en su plano de simetría.....	15
Figura 15. Diagrama idealizado de un material elastoplástico perfecto.....	19
Figura 16. Viga de material elastoplástico sometida a un momento flexionante positivo M	20
Figura 17.Distribución de esfuerzo en una viga de material elastoplástico	21
Figura 18. Zona plástica alcanzada en los extremos de la sección transversal.....	22
Figura 19. Viga en cantilever con carga puntual en el extremo.....	22
Figura 20. Distribución del esfuerzo normal en una viga rectangular cuando la sección $c - c$ se ha plastificado totalmente.	23
Figura 21. Efecto de los esfuerzos por cortante.....	23
Figura 22. Diagrama momento-curvatura para una viga.	28
Figura 23. Formación de una articulación plástica en una viga con soporte simple.	29
Figura 24. Cuerpo en estado de esfuerzo plano.	32
Figura 25. Geometría y notaciones para un cuerpo deformable en 3d.....	33
Figura 26. Elemento finito tipo línea.....	38
Figura 27. Elemento finito tipo viga.	38
Figura 28. Elemento finito triangular.	39
Figura 29. Elemento finito rectangular.	39
Figura 30. Elemento lineal de una dimensión.....	40
Figura 31. Elemento real e idealizado.	48
Figura 32. Puntos de gauss y coordenadas naturales en un elemento finito.	51
Figura 33. Elemento finito triangular con dos desplazamientos por nodo.....	52
Figura 34. Malla con 300 cm de longitud y 30 cm de peralte.	59
Figura 35. Malla con 300 cm de longitud y 30 cm de peralte.	59
Figura 36. Malla de longitud igual a 100 cm y peralte de 30 cm.	60
Figura 37. Modelo con restricción de traslación vertical y horizontal ($L=100$ cm).	60
Figura 38. Extremo izquierdo amplificado de la figura 37.	61

Figura 39. Carga puntual en el elemento.....	61
Figura 40. Carga distribuida en la parte superior del modelo.	62
Figura 41. Nodo donde se analizaron los desplazamientos.....	64
Figura 42.Carga de falla para el ejemplo 1.....	68
Figura 43.Carga de falla para el ejemplo 2.....	68
Figura 44.carga de falla del ejemplo 3.	69
Figura 45.carga de falla del ejemplo 4.	70
Figura 46.carga de falla del ejemplo 5.	71
Figura 47.Carga de falla del ejemplo 6.....	71
Figura 48.Plastificación del ejemplo 1.....	73
Figura 49.Plastificación del ejemplo 2.....	73
Figura 50.Plastificación del ejemplo 3.....	74
Figura 51. Plastificación del ejemplo 4.....	75
Figura 52. plastificación del ejemplo 5.....	75
Figura 53. plastificación del ejemplo 6.....	76
Figura 54. Deformación de la sección transversal del ejemplo 1.	77
Figura 55. Deformación de la sección transversal del ejemplo 3.	77
Figura 56. Deformación de la sección transversal ya plastificada del ejemplo 3.....	78
Figura 57. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 1.....	79
Figura 58. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 3.....	80
Figura 59. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 4.....	81
Figura 60. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 6.....	81
Figura 61. Plastificación de la sección del modelo de longitud 100 cm.....	83
Figura 62. Diagrama momento curvatura del ejemplo 1.	83
Figura 63. Plastificación de la sección del modelo de longitud 200 cm.....	84
Figura 64. Diagrama momento curvatura del ejemplo 2.	84
Figura 65. Plastificación de la sección del modelo de longitud 300 cm.....	85
Figura 66. Diagrama momento curvatura del ejemplo 3.	85
Figura 67. Estado de esfuerzos en la sección.....	86
Figura 68. Comportamiento elástico-lineal del modelo.....	86
Figura 69. Inicio y prolongación de la plastificación de la viga.	87
Figura 70. Plastificación con núcleo elástico de 10 cm.	88

Lista de tablas.

Tabla 1. Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de gauss.....	50
Tabla 2. Ejemplos totales y sus características.	62
Tabla 3. carga de fluencia y plastificación para carga puntal.....	69
Tabla 4.carga de fluencia y plastificación para carga distribuida.....	72
Tabla 5.resumen de diagramas momento-curvatura para carga puntual.	80
Tabla 6.resumen de los diagramas momento-curvatura para carga distribuida.	82

1 Introducción

1.1 Antecedentes

El levantamiento de grandes civilizaciones nacidas de la mente e ingenio humano atrajo consigo la creación de infraestructura imponente. A su vez, el avance en el conocimiento del comportamiento de las estructuras surgido a partir de su estudio ha hecho posible un desarrollo paulatino de la ingeniería.

Como punto de partida fundamental aparece el siglo XIX, dado que en esta época se construyeron las bases de la teoría lineal de la flexión, hipótesis ampliamente utilizada el día de hoy (Heyman 1999). Pero, la idea de estudiar un comportamiento plástico ideal emanó primero en Europa en el siglo XX, con los experimentos con vigas empotradas de Kazinczy y las contribuciones a los problemas de la capacidad última de carga en acero estructural de H. Maier-Leibnitz. Estas ideas fueron posteriormente fomentadas en los Estados Unidos, en la segunda mitad del siglo por Theodore R. Higgins (Popov 2000).

Entonces, una vez iniciada una metodología enfocada al análisis de estructuras en un rango no-lineal, diversos investigadores se dieron a la tarea de establecer las bases para calcular los diagramas momento-curvatura, con un comportamiento elástico y plástico, haciendo uso únicamente de la Mecánica de materiales. Uno de ellos fue M.R. Horne (Horne 1979), quien comenta someramente lo necesario para alcanzar el momento de fluencia. Formula el momento plástico y expone la relación de éstos con la curvatura para secciones transversales como la rectangular y los perfiles I. El mismo caso sucede con Timoshenko y Gere, pero a diferencia del primero, en su trabajo estos últimos autores describen el cálculo de los valores en el rango elástico; caracterizado por el momento de fluencia y posterior a éste. Estos autores muestran diagramas con valores de forma para diversas secciones transversales (Timoshenko y Gere 1986). Por su parte Barber ofrece un enfoque con pocas variantes, pero destacándose la resolución de ejercicios para secciones I y circulares (Barber 2000).

Ahora bien, la tecnología computacional existente en el presente siglo, posibilita la implementación numérica para agilizar los procesos de cálculo. Tapía aborda el tema de no-linealidad existente en la relación momento-curvatura, además de construir diagramas que

revelen los valores de esta relación, haciéndolo por un camino dado por el método de los elementos finitos (Tapia 2013). La metodología usada roza a la expuesta en el presente trabajo, pero con la variante dada por la presencia de acero de refuerzo en el concreto y la inclusión de daño.

1.2 Justificación

Hoy día se puede presumir de un desarrollo computacional avanzado si se compara con la tecnología implementada hace unas cinco décadas. Este progreso acompañado de personal con grandes aptitudes enfocadas a la comprensión y traducción de nuestro entorno a reglas de carácter ingenieril, han hecho posible el desarrollo de programas con metas orientadas a la solución de problemas donde ya no se menosprecian algunos factores para favorecer su entendimiento, sin dejar de lado la idea de que sean métodos analíticos con hipótesis simplificadoras del problema, sino que conservan sus características intrínsecas y por tanto se puede presumir la resolución del problema real.

Los diseños arquitectónicos actuales de edificios y otras construcciones, demandan un mayor entendimiento sobre la validez de las hipótesis fundamentales en las que se basan los métodos tradicionales de cálculo que se utilizan en el análisis estructural. Problemas con secciones variables son comunes hoy en día en el diseño estructural y que no cumplen satisfactoriamente con las simplificaciones hechas al estudio de flexión en vigas. bajo este contexto, en el presente trabajo de tesis se busca entender el comportamiento de este tipo de elementos bajo condiciones de carga monótonamente creciente, y con modelos de plasticidad perfecta, por medio de la construcción de diagramas momento-curvatura a partir de modelos de la mecánica de sólidos, en dos dimensiones, cimentando su solución en un programa de cómputo basado en el método de los elementos finitos. Estas bases generan el análisis de un problema real, sin prescindir de ninguna variante importante y reduciendo el tiempo invertido en su solución.

1.3 Objetivo

Elaborar diagramas momento-curvatura para vigas, a partir del análisis de ejemplos referentes a sólidos continuos en 2d, utilizando el método de los elementos finitos, con el fin de realizar una comparación de éstos con los obtenidos por Análisis estructural.

1.4 Organización de la tesis

En el capítulo 1 se expone la justificación, los antecedentes, objetivos y la organización de la tesis.

En el capítulo 2 se comentan aspectos básicos de las dos principales teorías de vigas, continuando con las condiciones de flexión pura, definiciones importantes de curvatura y radio de curvatura. Además, se describe el concepto de deformación unitaria y su relación con la curvatura, así como se presenta una breve deducción de la fórmula de la flexión elástica.

A continuación, en el capítulo 3 se trata la teoría de la flexión inelástica, tocando después definiciones y formulaciones fundamentales: el momento de fluencia y momento plástico; éste con la finalidad de aterrizar en lo que se conoce como factor de forma y, posteriormente, con la relación que existe entre el momento y la curvatura, tanto en el rango lineal y cuando se sobrepasa este límite.

Por otro lado, el capítulo 4 toca temas un poco más complejos y que exigen de un estudio comprometido y disciplinado, pues son tópicos que forman la base del método usado para resolver los ejercicios que posteriormente se plantearon. Aquí se comenta la Teoría elástica y su problemática. Así también, se expone de modo sencillo los aspectos básicos del método de los elementos finitos.

Asimismo, para convertir las bases teóricas expuestas en los capítulos iniciales, en algo más palpable y explícito, se aborda una serie de ejemplos con características puntuales. La descripción de los ejemplos analizados, así como sus resultados, se comentan en el capítulo 5, donde además se muestran un conjunto de comentarios concisos y analíticos para dar una idea clara de lo que representan.

Por último, la teoría fusionada con la implementación de un software, y un estudio objetivo y analítico de los resultados, se reflejan en las conclusiones obtenidas en el capítulo 6, puntos que describen el comportamiento general de los modelos ante cada solicitud hecha.

2 Teoría de vigas

La constante iniciativa del ser humano por entender y tratar de controlar el entorno lo ha llevado a modificar la naturaleza a su favor, creando grandes estructuras como las pirámides de Egipto, los puentes romanos, la gran muralla china, entre otros.

La naturaleza ha sabido aportar de su riqueza materiales que el hombre, en su necesidad por mejorar el entorno para sí, ha implementado con gran maestría. Pero no fue hasta la viga empotrada en un extremo y con carga puntual vertical en el otro, de Galileo en 1638, que se dio un paso hacia el estudio de los efectos que fuerzas externas provocan en una viga (Popov 2000). Siguiendo la línea, Mariotte continúa con este estudio de la viga de Galileo, pero no fue hasta que Parent introdujo “*la conclusión de que había que imaginar que las fibras superiores de la viga estaban traccionadas y las inferiores, comprimidas*” (Heyman 1999). Posteriormente, con la llegada de Coulomb se viene a aclarar esta última idea de Parent, con lo que emana la teoría de Parent/Coulomb, que posteriormente se convertiría en la teoría de la flexión de Coulomb/Navier, porque en los escritos de Navier de 1826, surge la teoría lineal de la flexión, con referencia en la Ley de Hooke, como una teoría elástica lineal (Heyman 1999). Además, añade Popov que este mismo autor francés cimentó la hipótesis cinemática sobre las secciones planas (Popov 2000).

2.1 Teoría de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko

Los modelos de Euler-Bernoulli (Euler, 1974) y Timoshenko (1921,1922) representan las teorías clásicas de vigas (Carrera, Giunta y Petrolo 2011). A su vez, existe una tercera teoría conocida como teoría de vigas de Reddy y Bickford. “Las últimas dos teorías consideran la deformación transversal por fuerza cortante; deformación que ha sido despreciada en la teoría de Euler-Bernoulli” (Wang, Reddy y Lee 2000).

A continuación, se exponen algunos aspectos básicos de las primeras dos teorías, empezando por la de Euler-Bernoulli, la cual se derivada de las siguientes suposiciones (Carrera, Giunta y Petrolo 2011):

- La sección transversal es rígida en su plano
- La sección transversal rota alrededor de un eje neutro, permaneciendo plana.

- La sección transversal permanece perpendicular al eje neutro durante la deformación.

Las tres suposiciones expuestas arriba se ilustran en la figura 1.

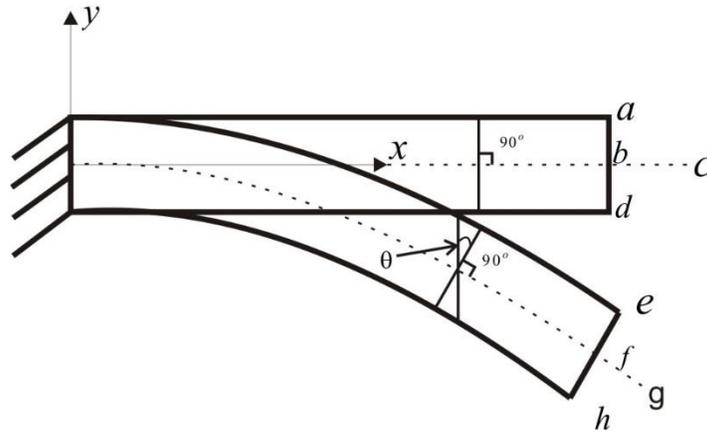


Figura 1. Flexión de una viga de acuerdo con la teoría de Euler-Bernoulli.

La viga mostrada hace comprender cada uno de los puntos que rigen a la teoría de la que se habla. La línea “*abd*”, conserva su rigidez y continúa siendo plana, así como es recalculable que el ángulo recto, respecto del eje neutro, expuesto por el segmento “*abc*” se preserva, es decir, “*abc*” es igual a “*efg*” después de que ocurre la flexión de la viga.

Por otro lado, en la teoría de Timoshenko “la sección transversal todavía es rígida, rota alrededor del eje neutro permaneciendo plana, pero no permanece perpendicular a ella” (Carrera, Giunta y Petrolo 2011), véase figura 2. Este último breve y simple punto es el que marca la diferencia entre a ambas teorías.

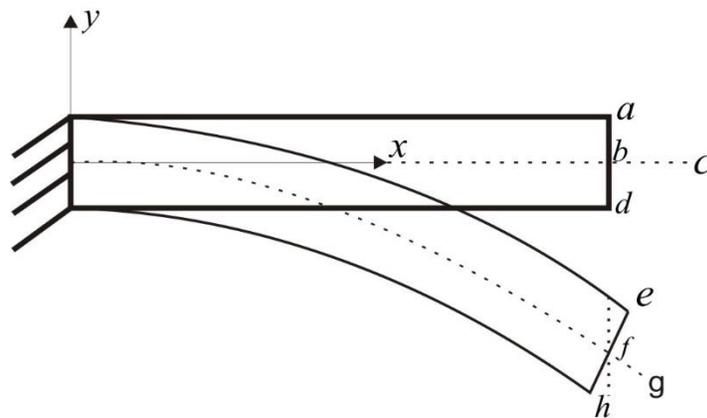


Figura 2. Flexión de una viga de acuerdo con la teoría de Timoshenko.

La figura 2 ilustra como la sección delineada por “ ad ” permanece plana, por tanto, esta línea es igual a “ eh ” una vez que ya sucedió la flexión. Y como se espera, el ángulo recto denotado “ abc ”, no se conserva. Entonces los ángulos dados por “ abc ” y “ efg ” no son iguales.

2.2 Flexión pura

Para introducirse al estudio de la teoría de vigas, es menester el análisis de la presencia de flexión pura en el elemento viga. Para esto, Gere y Goodno mencionan que una viga está en flexión pura si está sometida ante un momento constante (Gere y Goodno 2009).

Para continuar, es obligado hacer algunas suposiciones: una de ellas es que el plano de la sección transversal de la viga permanece plano y normal a las fibras longitudinales de ésta después de la flexión (detalle que se destaca en las dos teorías antes mencionadas), adicionalmente, el material de la viga debe ser lineal y homogéneo (Megson 2005).

Respecto a la primera suposición Popov afirma que “las secciones planas de una viga, normales a su eje, permanecen planas después de que la viga se somete a flexión” (Popov 2000). Además, es importante mencionar que la suposición precedente fue introducida de modo inexacto por Jacob Bernoulli y retomada por Leonard Euler, motivo suficiente para que sea conocida como la hipótesis de Euler-Bernoulli (Popov 2000).

Esta suposición es estrictamente verdadera si los momentos de flexión son producidos por la pura acción de flexión, sin la interacción de las fuerzas cortantes, pues estas fuerzas cortantes causan que la sección transversal se deforme en forma de una “ s ” (Horne 1979). Entonces, para ilustrar el fenómeno denominado flexión pura es menester la figura 3, donde se observa el estado de deformación debido a los momentos aplicados a la viga con sección transversal rectangular; cumpliendo con esto, la condición de prescindir de la fuerza cortante.

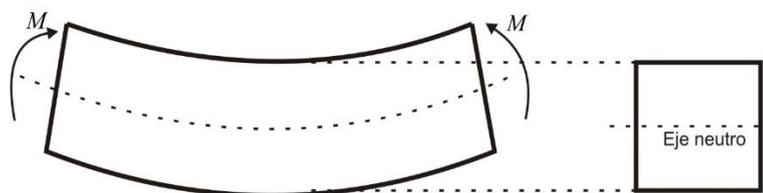


Figura 3. Viga sujeta a flexión pura.

A continuación, se expone una figura similar a la 3, pero con señalización que ayuda a identificar algunas secciones de interés, ver figura 4. Se nota la asignación “ af ”, “ bg ” y “ ch ” para las líneas presentes en la altura de la viga, el eje longitudinal es el x , y el término “ sx ” expresa el espacio contenido entre las líneas “ af ” y “ ch ”.

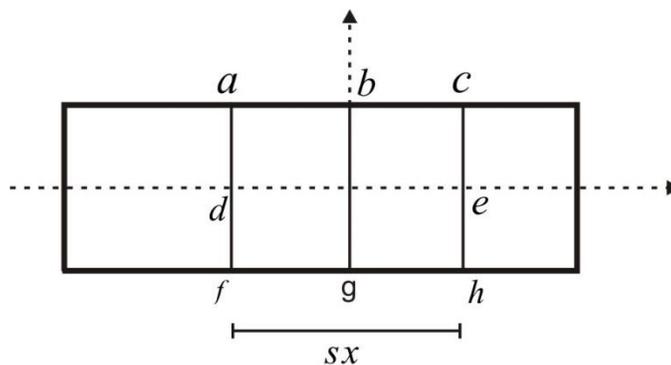


Figura 4. Viga con fibras seccionadas.

Además, se nota que el momento aplicado causa que la viga se curve como en la figura 5. Con esto, se dice que los momentos causan una disminución en la longitud correspondiente a las fibras superiores, mientras se registra un alargamiento en las respectivas fibras inferiores, *i.e.*, longitud “ fh ”, y finalmente, se puntualiza un inexistente cambio de las fibras del eje neutro caracterizadas por la longitud “ de ”

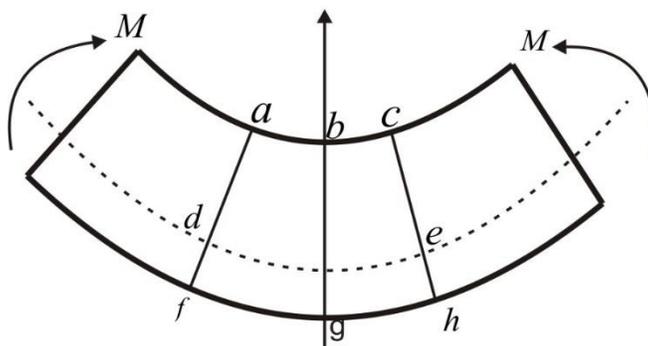


Figura 5. Viga sujeta a flexión pura.

Otros ejemplos donde se percibe la flexión pura se muestran en las figuras 6 y 7, éstos solo exponen una variación en las condiciones de apoyo.



Figura 6. Viga en voladizo en flexión pura.



Figura 7. Viga con apoyo simple en flexión pura.

Es notable que las vigas antes mostradas no presentan fuerzas cortantes en toda su longitud y el momento flexionante que actúa es constante. En cambio, por inspección, en la figura 8, las partes de la viga cerca de los extremos están en flexión no uniforme debido a la presencia de las fuerzas cortantes, causantes de variación en el diagrama de momento.

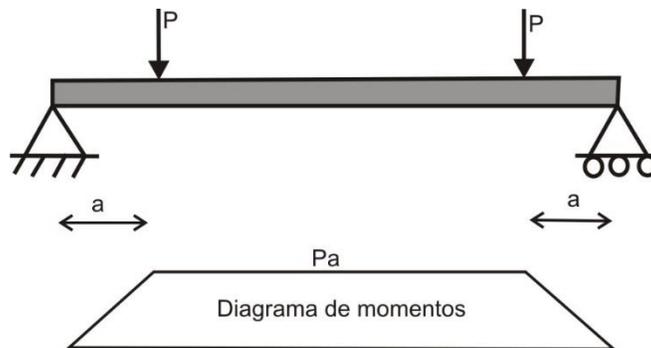


Figura 8. Viga simple con región central en flexión pura y regiones extremas en flexión no uniforme.

El análisis de ilustraciones similares a las de arriba (figura 3, 4 y 5) se utiliza para deducir las fórmulas de deformación unitaria, flexión elástica y para definir lo que se conoce como curvatura y radio de curvatura, puntos posteriormente analizados.

2.3 Curvatura y radio de curvatura

Acerca del concepto de curvatura, su estudio involucra la observación de la figura 9, donde se enseña una función $y = f(x)$ con inicio en el punto cualquiera A , y otro punto más adelante donde se ha incrementado una longitud " s ". Con la aparición del punto P a lo largo de la línea marcada se puede ejemplificar la definición de la curvatura. Entonces, Frank Ayres explica que "la curvatura k de una curva $y = f(x)$ en un punto P es igual a la variación del ángulo de inclinación τ de la tangente en P por unidad de longitud de arco s ", y se denota como (Ayres 1976):

$$k = \frac{d\tau}{ds} \quad (1)$$

es decir, la curvatura es la variación de τ con respecto a s , ver figura 9.

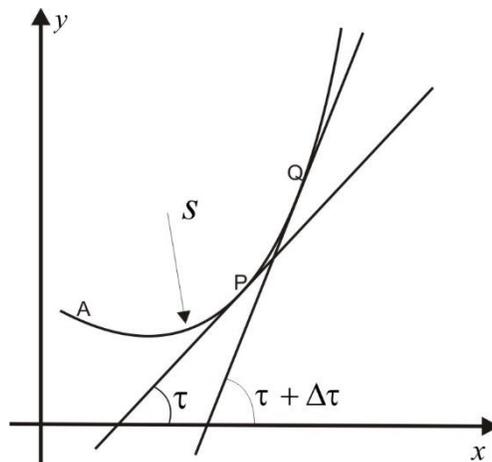


Figura 9. Función para ilustrar la curvatura.

De forma semejante, se puede ilustrar la curvatura con el estudio de la figura 10, que simboliza una viga en cantilever con una carga en el extremo derecho actuando hacia arriba, esta ilustración comparte cierta similitud con la expuesta por Ayres en cuanto a algunas especificaciones, pero en esta ocasión se refiere completamente el concepto a la curvatura existente en una viga. En lo que se refiere a la representación de la curvatura físicamente, se afirma que "la curvatura es una medida de qué tan agudamente está flexionada una viga" (Gere y Goodno 2009).

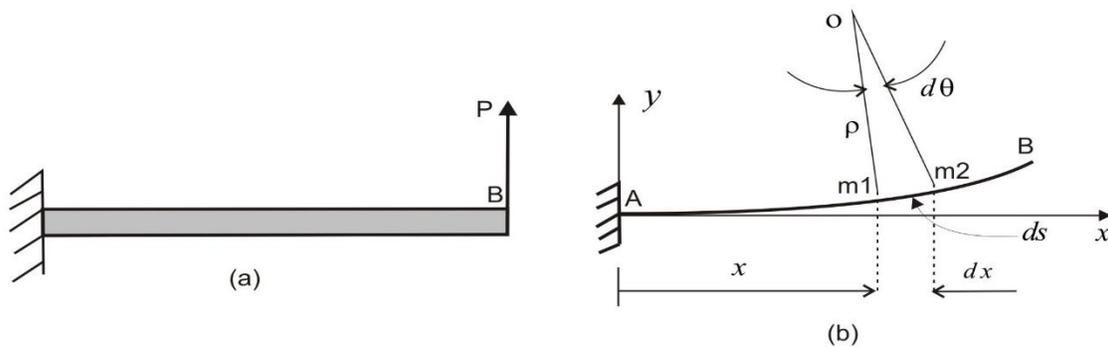


Figura 10. Curvatura de una viga flexionada: (a) viga con carga y (b) curva de deflexión.

donde ρ es el radio de curvatura y O' es el centro de curvatura.

De otra manera, la curvatura “se define como el recíproco del radio de curvatura” (Gere y Goodno 2009). Por lo que, los autores comparten la explicación con Ayres (1971), quien alude al concepto de radio de curvatura ρ en un punto P de la curva exhibida en la figura 9, y lo indica como (Ayres 1976):

$$k = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

donde k es la curvatura y $k \neq 0$.

Asimismo, Barber (Barber 2000) concuerda y dice que la distancia del centro de la curvatura al plano central, se define como radio de curvatura.

Finalmente, se dice que “si la viga es prismática y el material es homogéneo, la curvatura variará sólo con el momento flexionante” (Gere y Goodno 2009). Entonces, se dice que: “una viga en flexión pura tendrá una curvatura constante y una viga en flexión no uniforme tendrá una curvatura variable” (Gere y Goodno 2009).

Asimismo, se debe tener presente la convención de los signos de la curvatura, observar la figura 11, donde se visualiza ésta, es decir, una curvatura positiva representa una flexión cóncava hacia arriba y es negativa cuando lo hace convexa hacia abajo.

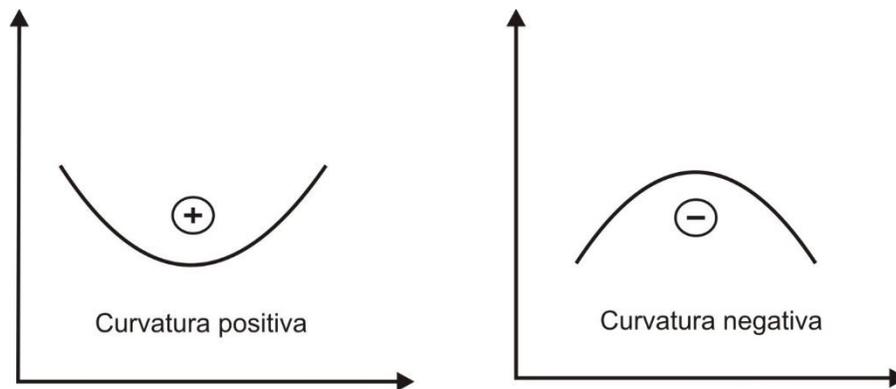


Figura 11. Convención de signos para la curvatura de una viga.

En palabras de Timoshenko y Gere: los signos de las curvaturas “no se han elegido arbitrariamente y se establecen matemáticamente a partir de los ejes coordenados” (Timoshenko y Gere 1986).

2.4 Deformación unitaria

Como es lógico, si un elemento cualquiera es sometido a algún tipo de carga o esfuerzo, se prevé que sufra algún daño si la magnitud con la que se aplica la fuerza es considerable. Un ejemplo tangible y simple de esto sucede cuando un niño estira un resorte con suficiente fuerza como para evitar que el objeto se vuelva a su estado original, es decir, sufre deformaciones irreversibles. Entonces, esa reacción que se provocó en el resorte, es una deformación, término al que ocupan las siguientes líneas.

Se dice que “hay dos tipos de deformación: deformación normal, caracterizada por cambios en la dimensión, y deformación por cortante, la cual describe la distorsión (cambio en ángulos)” (Pytel y Kiusalaas 2010). En este apartado sólo se habla de la primera.

Si se traslada el término deformación a la teoría de vigas, Popov dice que “en una viga sometida a flexión, las deformaciones lineales de sus fibras son directamente proporcionales a sus distancias respectivas a la superficie neutra” (Popov 2000). Si se sigue la proposición anterior, entonces las deformaciones máximas estarán presentes en las fibras más alejadas del eje neutro.

Ahora, la deformación longitudinal puede ser concebida con algunas relaciones, como lo detalla Barber (Barber 2000) cuando estudia las deformaciones provocadas por un momento

flexionante. Mediante algunas deducciones se logra establecer una relación entre la deformación unitaria longitudinal y el radio de curvatura de la viga. Se necesita aclarar que el estudio de este autor tiene interés sobre la influencia del momento flexionante en dos ejes ortogonales.

La figura 12 muestra una viga cuyo eje longitudinal es el x , mientras el eje y mide su altura, y el momento es aplicado sobre el eje z . Asimismo, el radio de curvatura se simboliza como ρ .

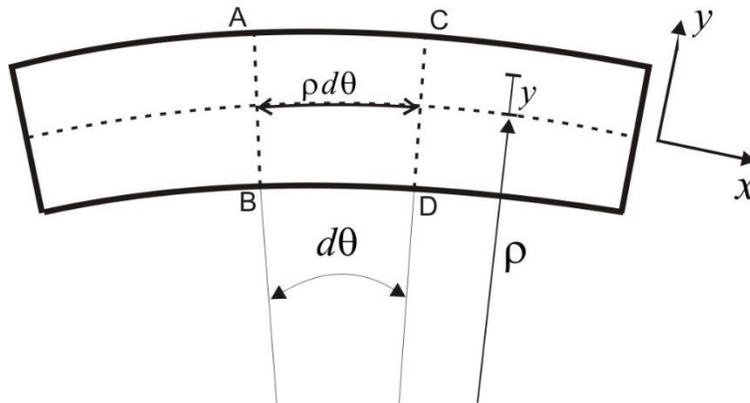


Figura 12. Vista ortogonal de una viga flexionada sobre el eje x

Con la ambición de encontrar la deformación longitudinal, es decir, la ocurrida en dirección del eje x , sufrida por la viga, Barber añade que el espacio denotado por $\rho d\theta$ no sufre alargamiento ni acortamiento y que las fibras en dirección del eje longitudinal forman arcos una vez deformada la viga (Barber 2000).

Entonces, si se sabe que “la deformación unitaria longitudinal correspondiente es igual al alargamiento dividido entre la longitud inicial” (Gere y Goodno 2009). Y además se analiza la figura 12, donde la longitud inicial es $\rho d\theta$, y si la fibra de interés está a una distancia y , más allá de donde llega ρ , entonces, la longitud de la fibra alargada es $(\rho + y)d\theta$ y la deformación axial es (Barber 2000):

$$\epsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{(\rho + y)d\theta}{\rho d\theta} - 1 = \frac{\rho d\theta + yd\theta}{\rho d\theta} - 1 = \frac{y}{\rho} \quad (3)$$

Asimismo, en la ilustración 13 se puede estudiar el mismo fenómeno con un segmento de viga antes de la deformación y después de la aplicación de flexión pura, donde el momento actúa en el plano $x - y$, por lo tanto, el eje x corre a lo largo del segmento. Con base en esta figura, la expresión que se obtiene para denotar la deformación longitudinal se escribe:

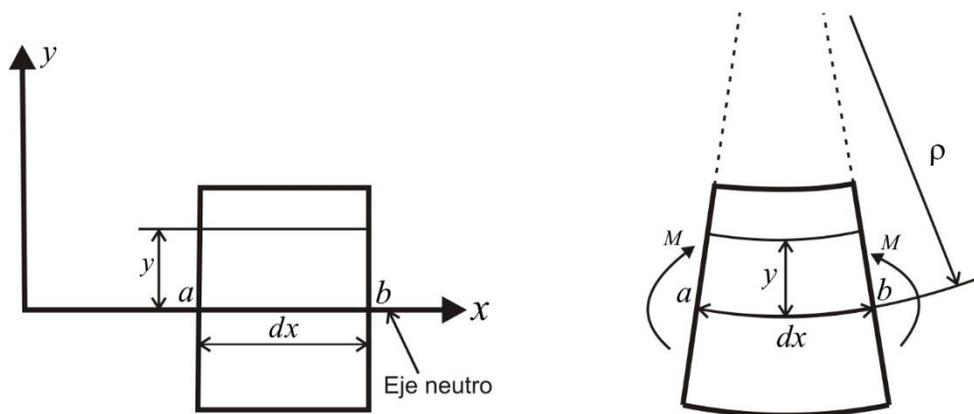


Figura 13. Deformación de un segmento infinitesimal de una viga.

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (4)$$

Finalmente, si “la curvatura se denota k (letra griega kappa) y se define como el recíproco del radio de curvatura” (Gere y Goodno 2009), y si se toma la expresión (3), surge:

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} = ky \quad (5)$$

donde la variable ϵ_x son las deformaciones longitudinales. Por lo tanto, se establece que las deformaciones son directamente proporcionales a la curvatura (k) de la viga y a la distancia (y) del eje neutro hacia la fibra de interés.

2.5 Fórmula de la flexión elástica

Los esfuerzos causados por un momento flexionante son conocidos como esfuerzos de flexión, y la relación entre esos esfuerzos y el momento flexionante es conocida como fórmula de la flexión (Pytel y Kiusalaas 2010). A su vez, para lograr la deducción de la

expresión que representa el esfuerzo por flexión, es conveniente dejar claras algunas suposiciones además de las dos comentadas al inicio del apartado sobre flexión pura.

Entonces, las suposiciones a seguir dictan que la viga tiene un plano de simetría axial, además, las cargas que se aplican están sobre este plano de simetría y son perpendiculares al eje longitudinal. Por último, los cambios en las dimensiones de la sección transversal son despreciables (Pytel y Kiusalaas 2010), ver figura 14. Una vez sentadas estas bases, se necesita del uso de dos ecuaciones de equilibrio para deducir la fórmula. A continuación, se expone la primera: si se usa la Ley de Hooke, y la fórmula (5), se puede escribir (Popov 2000):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Eky \tag{6}$$

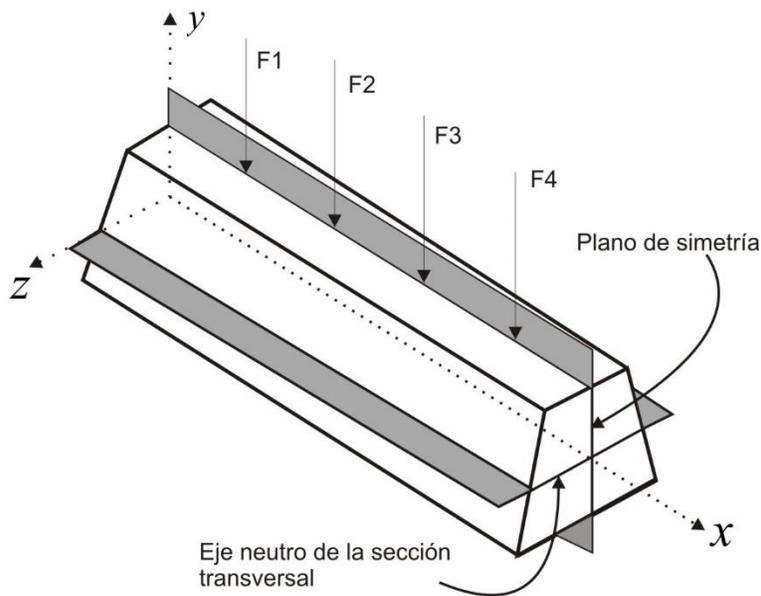


Figura 14. Viga con cargas en su plano de simetría.

Como no hay carga axial, la fuerza normal resultante en la sección transversal debe ser cero y se tiene (Megson 2005),

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \tag{7}$$

donde A es el área de la sección transversal. Con ayuda de la expresión (6), la ecuación (7) se escribe (Popov 2000),

$$\int_A EkydA = Ek \int_A ydA = 0 \quad (8)$$

Como la integral es igual a cero,

$$\int_A ydA = 0 \quad (9)$$

esta integral se denomina como primer momento de área (Pytel y Kiusalaas 2010).

Por lógica debe existir área, entonces, la distancia y del origen al centroide de un área debe ser cero, por lo tanto, el eje z de la figura 14, debe pasar por el centroide de una sección donde los esfuerzos y deformaciones son nulos, este eje se llama eje neutro (Popov 2000).

Por otro lado, Megson arriba a la integral (9) partiendo de la fórmula (4), sustituyendola en la fórmula dada por la Ley de Hooke, resulta (Megson 2005):

$$\sigma_x = -E \frac{y}{\rho} \quad (10)$$

así, se sustituye en (7), donde es visible el primer momento de área:

$$-\frac{E}{\rho} \int_A ydA = 0 \quad (11)$$

Continuando con la deducción de la fórmula de la flexión: la segunda ecuación de equilibrio dicta que “la suma de los momentos aplicados externamente y de los momentos resistentes internos debe ser cero (es decir, deben estar en equilibrio)” (Popov 2000).

La expresión (11) simboliza la fuerza, y multiplicada por una distancia y , resulta un momento, siendo éste el momento resistente interno y al igualarlo con el externo surge:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \quad (12)$$

La integral $\int_A y^2 dA$ se conoce como segundo momento de área o momento de inercia y está dada por el símbolo I (Megson 2005), entonces la ecuación (12) queda:

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (13)$$

Al combinar esta expresión con la (10) emana:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{\rho} = -\frac{\sigma_x}{y} \quad (14)$$

Finalmente, se despeja el esfuerzo:

$$\sigma_x = -\frac{M}{I}y \quad (15)$$

La fórmula (15) es conocida como la fórmula de la flexión elástica.

Se nota que cuando el momento flexionante es positivo, causa esfuerzos negativos de compresión sobre el eje neutro, y positivos de tensión bajo él (Pytel y Kiusalaas 2010).

Entonces, el esfuerzo normal es directamente proporcional al momento flexionante y a la distancia del eje neutro hasta donde se pretende calcular el esfuerzo, e inversamente proporcional al momento de inercia.

3 Diagrama momento-curvatura

El concepto de curvatura ya fue definido en el apartado anterior, así también se mostró una breve descripción del momento. Además, el lector interesado en estos tópicos debe poseer conocimientos básicos, por lo que se considera innecesario profundizar en este capítulo sobre las definiciones de cada uno.

Por otro lado, para lograr un óptimo estudio del comportamiento de las gráficas que posteriormente se mostrarán en el trabajo, ya se expusieron las ideas y conceptos que rigen la región elástica-lineal. Pero, es necesario abordar el comportamiento inelástico del material, motivo suficiente para tocar los temas que a continuación se exhiben.

3.1 Flexión inelástica

En el capítulo precedente se trataron temas respetando el concepto de elasticidad en un material, es decir, cuando las deformaciones en los materiales satisfacen la ley de Hooke. Por otro lado, solamente al hablar de flexión inelástica, es necesario ir más allá: explorar la respuesta del material cuando ya no rige la ley de Hooke.

En lo que se refiere a análisis plásticos o inelástico, se puede tener un modelo simple bilineal, conocido como de plasticidad perfecta, y se muestra en la figura 15. Para esto, se toman como cimiento los siguientes aspectos (Megson 2005):

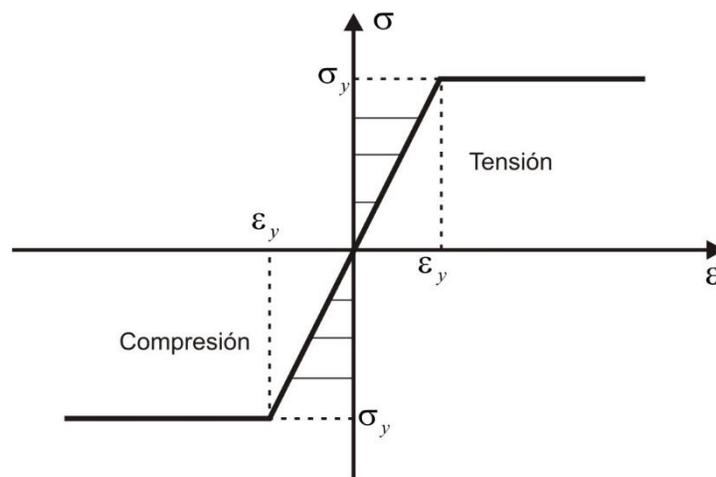


Figura 15. Diagrama idealizado de un material elastoplástico perfecto.

- Se idealiza la curva esfuerzo-deformación como la mostrada en la figura 15.
- Las propiedades mecánicas del material para compresión y tensión, son las mismas.
- Las secciones planas permanecen planas, antes y después de la flexión.

Para conocer el comportamiento del material cuando se somete a un estado de esfuerzos monótono creciente hasta llegar a su límite de fluencia, Gere y Goodno recurren al análisis de la viga de la figura 16 (Gere y Goodno 2009).

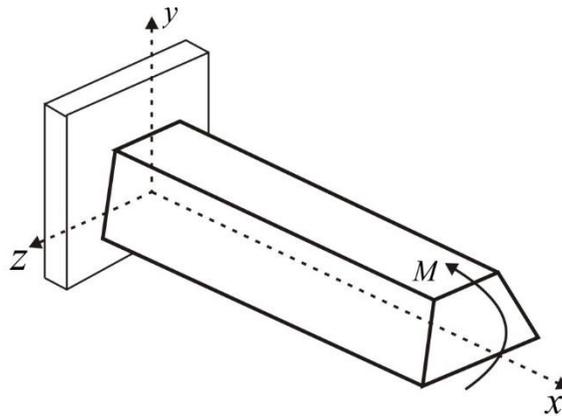


Figura 16. Viga de material elastoplástico sometida a un momento flexionante positivo M .

El momento que someterá a la viga a un esfuerzo de flexión pura, actuará en el plano $x - y$. Además, se ve que la sección transversal posee una forma trapezoidal y el eje x pasa a lo largo del elemento.

El momento flexionante M , regirá todo el análisis, porque será su incremento de magnitud la que dicte el comportamiento interno del elemento, esto justifica la importancia de éste. Si se hace una observación rápida, el momento flexionante causará flexión pura en la viga y si se recuerda la fórmula de la flexión elástica, el momento flexionante es proporcional al esfuerzo, por consecuencia éste último dependerá directamente del incremento de M . Entonces, cuando el momento llegue a un punto máximo, causará un esfuerzo máximo, pero sin tocar el valor de esfuerzo de fluencia, véase figura 17(b). Por tal, “la viga está en la misma condición que una viga ordinaria en flexión elástica ordinaria con una distribución lineal de esfuerzos” (Gere y Goodno 2009).

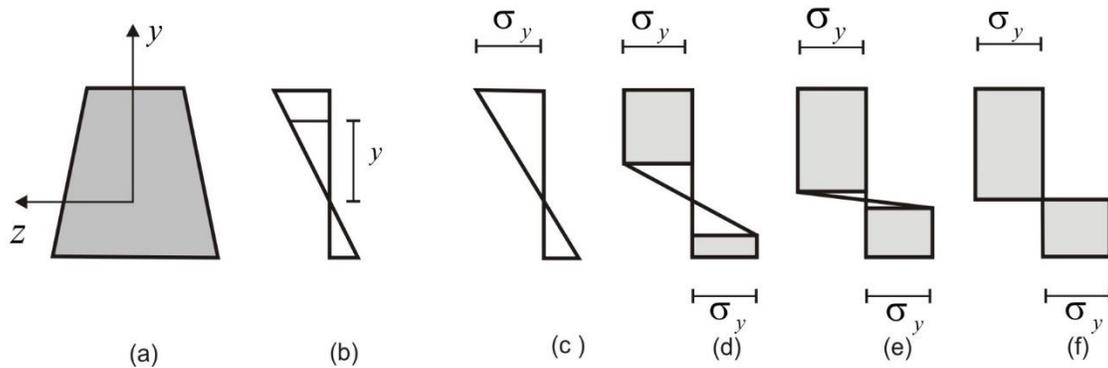


Figura 17. Distribución de esfuerzo en una viga de material elastoplástico

El siguiente apartado representa el punto de partida real a la hora de ingresar a la zona inelástica del comportamiento de una viga.

3.2 Momento de fluencia

Para explicar lo que se considera como momento de fluencia, se sigue inspeccionando la figura 18, donde se visualiza la variación de los esfuerzos en todo el peralte de una viga. Se exhibe un incremento en el valor del momento flexionante de la viga mostrada en la figura 16, por tanto, cuando se aumenta la magnitud de M , el esfuerzo sufrirá un incremento hasta el punto de alcanzar el esfuerzo de fluencia, ver figura 17(c); donde se aprecia el incremento de esfuerzo en la parte que corresponde a esfuerzos de compresión, mientras que en la figura 17(d) ya se visualiza la igualdad del esfuerzo máximo con el esfuerzo de fluencia en la parte que corresponde a tensión.

Asimismo, Horne (Horne 1979) hace el estudio de una viga con sección rectangular cuando ésta alcanza los esfuerzos de fluencia, y donde se señala una variación del esfuerzo normal hasta σ_y , puntualizando que se alcanzan zonas plásticas en compresión y tensión cuando se llega al M_y , ver figura 18, es decir, cuando se presenta el momento de fluencia.

El estado de esfuerzos de la figura 18 está en condición similar que el de la figura 17(d), en el sentido de que en ambos casos ya se visualiza la plastificación en los extremos opuestos de la sección transversal.

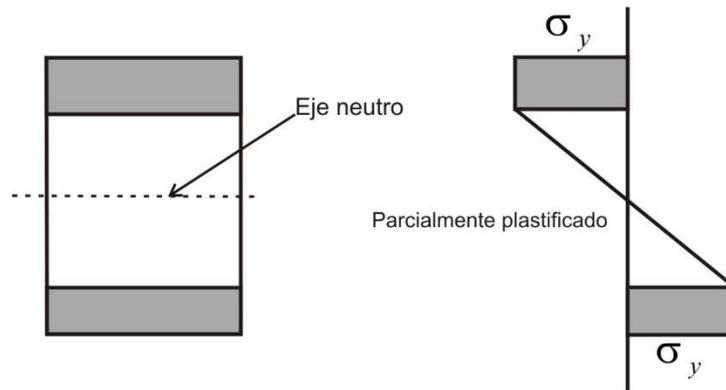


Figura 18. Zona plástica alcanzada en los extremos de la sección transversal.

También, para explicar el momento de fluencia y expresarlo como fórmula, se puede estudiar una viga en cantilever con sección transversal rectangular y carga puntual en su extremo, donde ésta se va incrementando hasta alcanzar el esfuerzo de fluencia (Pytel y Kiusalaas 2010), ver figura 19.

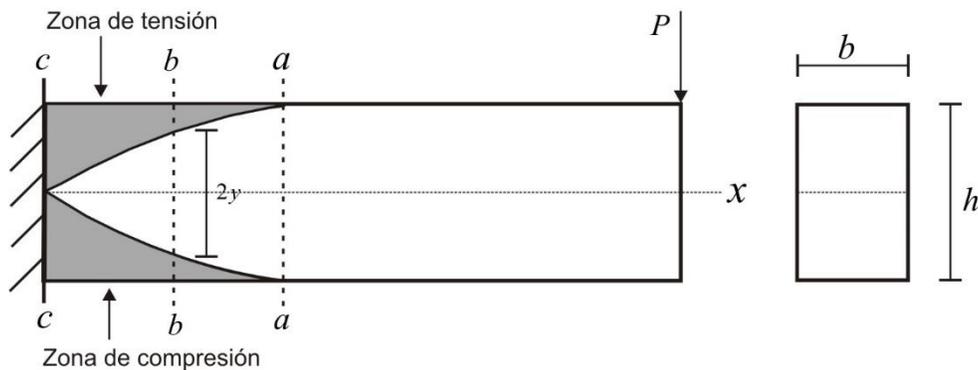


Figura 19. Viga en cantilever con carga puntual en el extremo.

Asimismo, al continuar el análisis de la figura anterior, es posible describir tres zonas de la viga involucradas con la fluencia de la porción, ver figura 20. En la figura 20(a), apenas se alcanzan los esfuerzos de fluencia y la distribución aún es lineal en todo su peralte, mientras que en la figura 20(b) es lineal en un núcleo igual a $2y$, donde también se presenta una zona plástica fuera de este rango, y finalmente, la figura 20(c) manifiesta una plastificación completa de la sección transversal (Pytel y Kiusalaas 2010). La zona $c - c$ (véase figura 19), es de suma importancia para el trabajo, pues es ésta la zona que se estudiará en los ejemplos de aplicación que se mostrarán más adelante, y precisamente con una viga en cantilever.

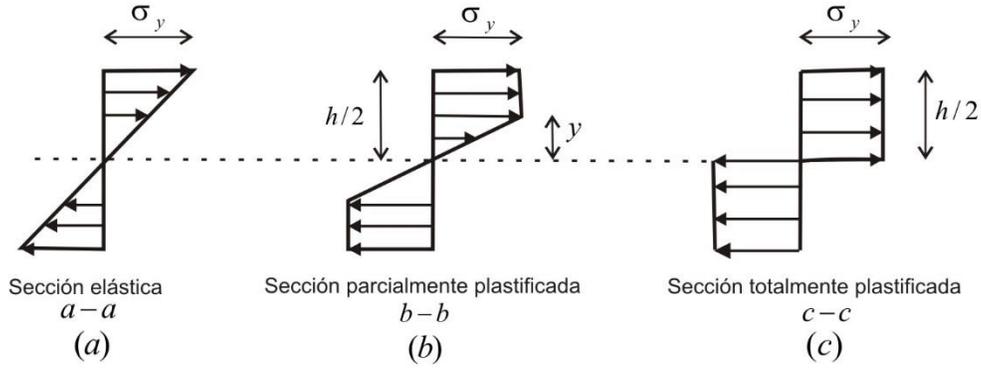


Figura 20. Distribución del esfuerzo normal en una viga rectangular cuando la sección $c - c$ se ha plastificado totalmente.

Como complemento, es importante resaltar que la plastificación del miembro ocurre despreciando los efectos por cortante. Caso distinto al detallado en la figura 21, en donde el esfuerzo cortante se concentra el eje central hasta alcanzar el esfuerzo cortante de fluencia (línea $b - b$) (Horne 1979).

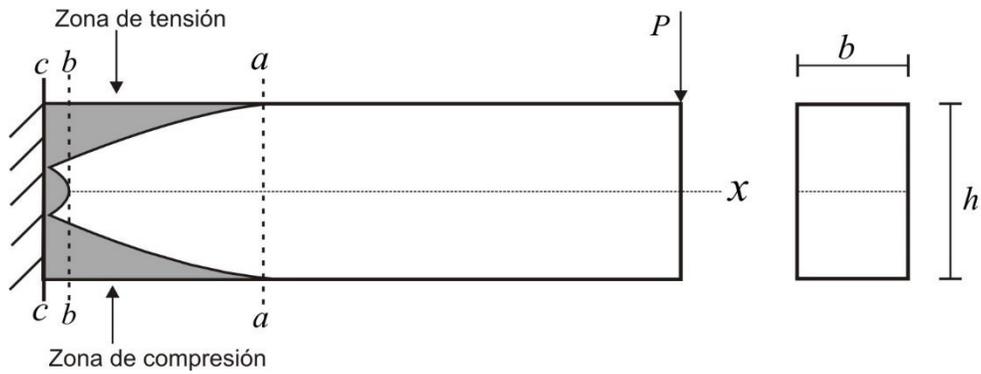


Figura 21. Efecto de los esfuerzos por cortante.

Entonces, la ilustración anterior expone el tipo de plastificación cuando se toma en consideración el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante. Si se retoma la figura 20(a), y se usa la fórmula de la flexión ($M_{max} = \sigma_{max}S$), es posible deducir la expresión llamada momento de fluencia expuesta a continuación (Pytel y Kiusalaas 2010):

$$M_y = \sigma_y \frac{bh^2}{6} = \sigma_y S \tag{16}$$

donde M_y es el momento de fluencia de la sección, σ_y se conoce como esfuerzo de fluencia, S es el módulo de sección, b es el ancho y h el peralte de la sección transversal.

Ahora bien, si se desea conocer el comportamiento del momento entre el rango donde se alcanzó el momento de fluencia y el límite dado por el momento plástico, se expone la siguiente fórmula (Timoshenko y Gere 1986):

$$M = M_y \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) \quad (M_y \leq M \leq M_p) \quad (17)$$

donde M_y es el momento de fluencia, e se conoce como la distancia del eje neutro hasta la fibra donde se inicia la plastificación y h es el peralte de la sección.

Finalmente, se puede conceptualizar el momento de fluencia como la magnitud o límite donde se pierde la linealidad en los esfuerzos presentes en la sección.

3.3 Momento plástico

Una vez que se realizó la transición del rango elástico al plástico, al sobrepasar los esfuerzos de fluencia, si el incremento del momento flexionante sigue, surge un nuevo parámetro llamado momento plástico.

Las figuras 17(f) y 20(c), representan la plastificación total de la sección y “el momento flexionante que corresponde a esta distribución idealizada de esfuerzos, denominada momento plástico, representa el momento máximo que puede soportar una viga de material elastoplástico” (Gere y Goodno 2009).

Si la condición arriba descrita se cumple, “la expresión para el momento plástico puede formularse en una forma análoga a la del momento de fluencia” (Timoshenko y Gere 1986):

$$M_p = \sigma_y Z \quad (18)$$

donde

$$Z = \frac{A(y_1 + y_2)}{2} \quad (19)$$

Z es el módulo plástico de la sección y A es el área de la misma.

Para encontrar el eje neutro de la sección cuando existe un momento plástico, se debe dividir la sección en dos áreas iguales y por lo tanto, y_1 será la distancia del eje neutro de la sección transversal total hasta el centroide del área superior, mientras y_2 el de la distancia inferior.

De igual manera, es posible exponer una expresión que denota lo que es el momento plástico, pero en función de las dimensiones de la sección transversal y se puede expresar como a continuación se muestra (Pytel y Kiusalaas 2010):

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad (20)$$

Una vez planteados los dos conceptos anteriores (momento de fluencia y momento plástico), se puede realizar una relación entre ambos. Para alcanzar este objetivo se comenta el apartado siguiente.

3.4 Factor de forma

“La relación del momento plástico de una viga y su momento de fluencia es conocido como factor de forma, f .” (Megson 2005). Se puede escribir de la siguiente manera:

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y Z_p}{\sigma_y S} = \frac{Z_p}{S} \quad (21)$$

donde Z_p es el módulo plástico, S es el módulo de sección. Este valor es “máximo cuando la mayoría del material está ubicado cerca del eje neutro (por ejemplo, una viga con sección circular sólida) y mínimo cuando la mayor parte del material está alejado del eje neutro (por ejemplo, una viga con sección de patín ancho)” (Gere y Goodno 2009).

De modo similar, Horne especifica de forma breve lo que es el factor de forma, y a diferencia de Megson, lo denota con la letra ν , y dice que su valor para una sección rectangular es de 1.5 (Horne 1979). Este valor puede ser comprobado con un ejemplo sencillo, como lo propone Megson, tomando de referencia una sección rectangular con una base b y una altura d . Además, se hace hincapié que en una sección doblemente simétrica, el eje neutro elástico y plástico coinciden, entonces si se consideran las fórmulas (16) y (20), y si el factor de forma se definió como la división del momento plástico entre el momento de fluencia, se tiene (Megson 2005):

$$f = \frac{\sigma_y \frac{bh^2}{4}}{\sigma_y \frac{bh^2}{6}} = \frac{6bh^2}{4bh^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \quad (22)$$

Con esto se comprueba que el factor de forma para una viga de sección rectangular es precisamente 1.5.

En resumen, si se conociera el momento de fluencia, se podría calcular el momento plástico sin aplicar la fórmula (20) con tan solo multiplicar por 1.5 el momento de fluencia, puesto que una viga de sección rectangular tiene una resistencia de un 50% más una vez alcanzado el momento de fluencia.

Por lo tanto, esto ayuda a complementar la definición de momento plástico, es decir, se puede definir como el momento último o de colapso de una viga.

3.5 Relación momento-curvatura

El momento de fluencia y el momento plástico son parámetros esenciales para comprender los diagramas momento-curvatura, pues son límites que rigen rangos de comportamiento. Por ejemplo, el momento de fluencia funge como término del espacio elástico y da inicio al rango plástico, mientras que el momento plástico demuestra hasta qué punto resiste un momento la viga.

Lo anterior, es decir, el momento, se supone válido para el eje ordenado, mientras que las abscisas son gobernadas por la curvatura, ya definida en el capítulo anterior.

Para continuar, Megson deduce la fórmula de la flexión elástica, y dentro de su deducción retoma la fórmula (Megson 2005):

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (23)$$

Donde ρ simboliza el radio de curvatura, y es sabido que la curvatura es igual al inverso del radio de la misma, por lo que él concluye:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (24)$$

Lo que es igual:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (25)$$

donde k es la curvatura.

Por lo tanto, el momento flexionante es directamente proporcional a la curvatura e inversamente proporcional a la rigidez a la flexión.

De la expresión (25), es posible complementar la relación momento-curvatura añadiendo el límite de fluencia en ambos términos y resulta (Timoshenko y Gere 1986):

$$k_y = \frac{M_y}{EI} \quad (26)$$

“Por lo que la relación momento-curvatura para una viga en el intervalo linealmente elástico puede expresarse en la forma adimensional como sigue” (Timoshenko y Gere 1986), véase figura 22:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{k}{k_y} \quad (0 \leq M \leq M_y) \quad (27)$$

Ahora bien, si el momento flexionante se incrementa hasta sobrepasar el momento de fluencia, Megson dice que la relación momento-curvatura ya no es lineal y la plastificación se extiende de los extremos hacia el eje neutro, donde ya el crecimiento del momento es pequeño y provoca que la curva se vuelva plana, causando que se enfoque hacia la línea horizontal del M_p de manera asintótica (Megson 2005), ver figura 22.

Entonces, si se desea calcular las magnitudes del momento y la curvatura para la región plástica, para el primer valor (el momento) se puede recurrir a la fórmula (17).

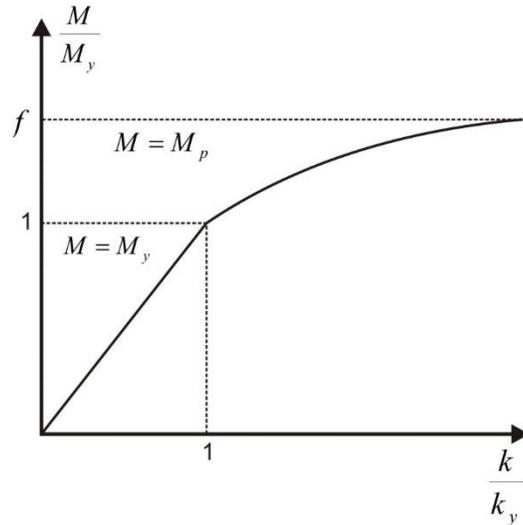


Figura 22. Diagrama momento-curvatura para una viga.

Asimismo, el cálculo de la magnitud de la curvatura cuando se ha excedido la curvatura de fluencia hasta la de plastificación, se realiza con la siguiente fórmula (Timoshenko y Gere 1986):

$$k = \frac{k_y}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_y}}} \quad (k_y \leq k \leq k_p) \quad (28)$$

Otro punto vital a reflexionar, es que claramente de la porción no lineal del diagrama momento-curvatura depende de la sección transversal considerada (Megson 2005). Lo anterior mencionado se vuelve clave para el presente trabajo, porque en los ejemplos que se manejarán, la variación vendrá dada por la longitud de la viga y no por las medidas de la sección transversal, entonces, al menos el momento plástico será igual para todos los ejemplos.

3.6 Articulaciones plásticas

Para introducir el concepto de articulación plástica, es necesario explicar lo que ocurre cuando se sobrepasa el momento de fluencia. Entonces, aunque se haya alcanzado y sobrepasado el límite de fluencia, aún se encuentra un núcleo elástico (como se mencionó en secciones anteriores), y la deformación de la viga está controlada por la zona elástica, esto es

conocido como flujo plástico controlado. Por otro lado, cuando la curvatura es ya muy grande, eso pasa cuando la curva de la figura 22 se acerca asintóticamente al momento plástico, la viga continúa deformándose sin incremento de carga, esto último es llamado flujo plástico no controlado, correspondiente al momento plástico (Timoshenko y Gere 1986). La presencia del flujo plástico no controlado en una sección de la viga, genera las articulaciones plásticas (Megson 2005), ver figura 23:

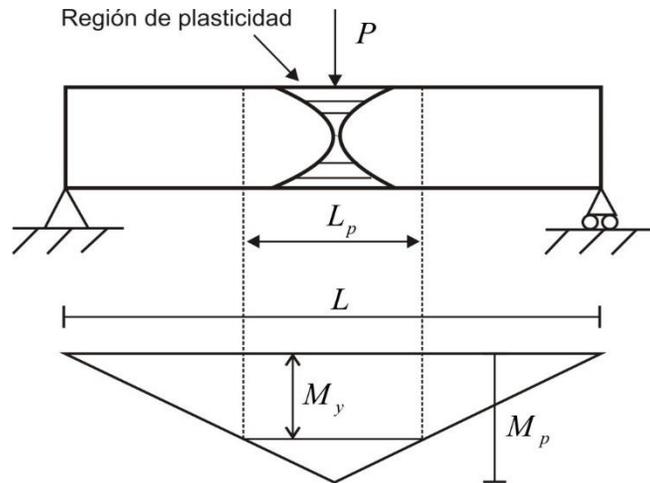


Figura 23. Formación de una articulación plástica en una viga con soporte simple.

Ahora bien, se sabe que el momento máximo en la viga de la figura 23 está dado por:

$$M_{max} = \frac{WL}{4} \quad (29)$$

Pero, si se incrementa el valor de la carga W hasta conseguir el momento plástico, es decir:

$$\frac{WL}{4} = M_p \quad (30)$$

Entonces se genera el flujo plástico incontrolado y, por tanto, una articulación plástica. Entonces, la carga de colapso que genera esta articulación se puede deducir despejándola de la expresión anterior (Megson 2005):

$$\frac{WL}{4} = M_p \quad (31)$$

$$W_p = \frac{4M_p}{L} \quad (32)$$

Como complemento a anteriores secciones, en la figura 23 es visible gráficamente el momento de fluencia y el momento plástico. Así también, se muestra la longitud que ocupa una articulación plástica. Esta longitud de la articulación plástica se puede calcular con la siguiente fórmula (Timoshenko y Gere 1986):

$$L_p = L \left(1 - \frac{1}{f}\right) \quad (33)$$

Y como el factor de forma para una sección rectangular es 1.5, la longitud de plastificación resulta:

$$L_p = \frac{L}{3} \quad (34)$$

es decir, un tercio de la longitud total de la viga.

4 El problema del continuo en 2D

Para iniciar un estudio correcto del método de los elementos finitos (en adelante MEF), se hace obligatorio tocar el punto de partida de sus bases y la razón por la cual fue desarrollado, así como su aplicación a la solución de problemas de la mecánica de sólidos.

Por consiguiente, conocer lo que se considera como medio continuo es básico en el estudio del método para el presente trabajo. Entonces, dice Chávez que los “medios deformables caracterizados por el hecho de que sus átomos o moléculas están tan próximos unos a otros, se sugiere que dichos materiales pueden idealizarse como medios continuos” (Chávez 2001).

Una vez concebida la definición de un medio continuo, es necesario mencionar la diferencia entre los elementos discretos y los continuos, a lo que Zienkiewicz añade que los modelos con un número finito de elementos bien definidos son problemas discretos, mientras que, un elemento continuo usa la invención matemática del infinitésimo, y por consecuencia resultan las ecuaciones diferenciales con un número infinito de elementos (Zienkiewicz 1982).

Ahora bien, las estructuras o problemas que suelen enseñarse en un aula de clases, es decir, los elementos discretos (estructuras articuladas o reticuladas), pueden ser resueltos sin tocar el uso del MEF. El argumento que le da validez a esas soluciones para dichos problemas los expone Vázquez y López, quienes señalan que la teoría de la elasticidad soluciona una estructura con cargas aplicadas al resolver ecuaciones diferenciales (o de gobierno), pero que la Resistencia de Materiales añade hipótesis simplificadoras a la Teoría de la Elasticidad para resolver dichas ecuaciones, obteniéndose unas soluciones que se consideran exactas (Vázquez y López 2001).

Por lo anterior, si se busca la solución de un sólido continuo, el uso del MEF es ampliamente recomendable debido a que “el método de los elementos finitos reduce el problema elástico a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas (Vázquez y López 2001).

Por otro lado, el problema de un cuerpo en el espacio sometido a cargas, es decir, un cuerpo el cual está constituido por medidas en tres dimensiones, puede ser reducido a incógnitas en dos dimensiones de dos maneras: un estado de esfuerzos planos y otro de deformaciones planas, tema que a continuación se toca.

4.1 Esfuerzos planos.

Si se desea estudiar problemas reales, es obvia la idea de visualizar un objeto en tercera dimensión, debido a lo real del concepto. Pero en ocasiones, es de gran utilidad y practicidad reducir el problema sin prescindir de las ideas originales que definen el estado del objeto analizado. Así pues, si la simplificación recae en la dimensión física del fenómeno y es práctico omitir una dimensión: se dice que los problemas en dos dimensiones se modelan como esfuerzo plano y deformación plana, donde el primero ocurre cuando un cuerpo plano delgado se somete a carga plana sobre su borde (ver figura 24), y por tanto (Chandrupatla y Belegundu 1999):

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (35)$$

Entonces, los esfuerzos existentes en un cuerpo con un estado de esfuerzos bidimensional serán:

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (36)$$

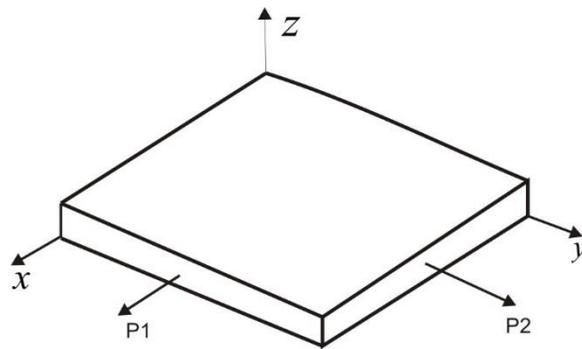


Figura 24. Cuerpo en estado de esfuerzo plano.

4.2 Deformaciones planas.

Ahora bien, si se desea entender estas deformaciones ocurridas en el plano, García estima que el estado de deformaciones planas ocurre en miembros que no son libres de expandirse en la dirección perpendicular al plano de aplicación de la carga (se consideran los ejes que

contienen el plano al x y y), por lo que los desplazamiento que se puedan presentar en la dirección z son cero, es decir, las deformaciones son $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yx} = 0$ (García 2007).

Por lo anterior explicado, el vector de deformación cuando se considera solo deformación plana termina como:

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad (37)$$

4.3 El problema elástico.

Para entender los principios fundamentales del problema elástico en el sólido continuo cuando su comportamiento es elástico y lineal, a su vez que el material es homogéneo e isótropo, y de esta forma conocer el camino que facilita el MEF para conocer su comportamiento, se contempló un análisis hecho por Carrera, Giunta y Petrolo, quienes consideran la estructura de la figura 25, sujeta a ciertas fuerzas, e introducen las variables de desplazamiento siguientes (Carrera, Giunta y Petrolo 2011):

$$u = \{u_x, u_y, u_z\}^T \quad (38)$$

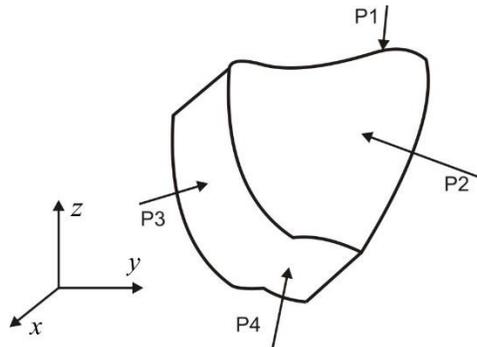


Figura 25. Geometría y notaciones para un cuerpo deformable en 3d.

Este análisis lo realizan en tercera dimensión, y es el caso general. Para el presente trabajo se buscará reducirlo a segunda dimensión solo con la omisión de algunas variables con base en los argumentos expuestos para esfuerzos y deformaciones planas.

Ahora bien, en el análisis se enfatiza que el cálculo del estado deformado del cuerpo provocado por las fuerzas aplicadas, da la solución al problema de la elasticidad en 3D.

Entonces, la esencia de la solución del problema elástico es determinar en cada uno de los puntos de la estructura las 15 funciones desconocidas siguientes (Pilkey 2002):

- 6 componentes del estado esfuerzos: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- 6 componentes del estado de deformaciones: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- 3 desplazamientos: u, v, w .

Las 15 funciones mencionadas satisfacen 3 ecuaciones de equilibrio, 6 relaciones deformación-desplazamiento y 6 ecuaciones de esfuerzo-deformación (Pilkey 2002).

Para continuar con el análisis, es necesario exponer tres principios que relacionan las 15 incógnitas arriba expuestas, estas relaciones se pueden plantear en tres principios: el de continuidad, modelos constitutivos y equilibrio. Las expresiones se exponen de manera matricial en la parte de abajo. Así también, por practicidad y facilidad en el estudio del comportamiento de los sólidos, las deformaciones y esfuerzos considerados son en las direcciones para elasticidad bidimensional, idea tratada en subtemas precedentes. Los vectores de esfuerzo y deformación para un estado bidimensional son:

$$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} \quad (39)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{vmatrix} \quad (40)$$

Entonces, los tres principios referidos en líneas precedentes, se enuncian de manera concisa de la siguiente forma:

Continuidad:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (41)$$

De forma general se escribe:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (42)$$

donde $\{\varepsilon\}$ y $\{u\}$ son las deformaciones y desplazamientos y $[B]$ es la matriz de compatibilidad que relaciona los desplazamientos con las deformaciones. En este trabajo de tesis se asume una relación de pequeñas deformaciones.

El segundo principio es el modelo constitutivo y cuando se consideran esfuerzos planos, se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

y se denota más sencillamente:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (44)$$

donde $\{\sigma\}$ y $\{\varepsilon\}$ son los esfuerzos y las deformaciones, respectivamente, así como $[D]$ es la matriz constitutiva. Además, ν es el módulo de Poisson y E el módulo de elasticidad del material.

Y finalmente, el tercer principio (el de equilibrio) se expone:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

de forma más condensada es:

$$[\nabla]^T \{\sigma\} + \{q\} = 0 \quad (46)$$

donde $\{\sigma\}$ y $\{q\}$ representan los esfuerzos internos y las fuerzas de cuerpo, y $[\nabla]^T$ es el operador nabla.

4.4 Método de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos, dice Segerling es un método numérico con dos subdivisiones, pero la que realmente refleja lo que es el método, utiliza elementos continuos para obtener soluciones aproximadas de problemas como la transferencia de calor, la mecánica de fluidos y problemas de mecánica de sólidos (Segerling 1984). De manera sencilla, García añade que “las características que lo distinguen de otros métodos son (García 2007):

- a) El método utiliza una formulación integral para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.
- b) El método utiliza funciones continuas para la aproximación de una cantidad o cantidades desconocidas.

Complementariamente, Segerling afirma la incertidumbre del origen del MEF, pero resalta que en los años cincuenta's se cimentaron las bases del método como lo conocemos ahora, extendiéndose así el análisis matricial de estructuras a los cuerpos continuos (Segerling 1984).

Ahora bien, en cuanto al nombre del método, Zienkiewicz señala que fue Clough el primero en usar el término de elementos finitos (Zienkiewicz 1982). Y finalmente, “a fines de la década de 1960 y principios de la siguiente, el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones”, así como “las bases matemáticas se establecieron en la década de 1970” (García 2007).

En cuanto al método en sí, éste consiste en una serie de pasos mencionados a continuación (Kollar 2003):

- Generación de una malla que abarca toda la estructura.

- La matriz de rigidez $[k]$ para cada elemento es generada.
- La matriz de rigidez $[K]$ de la estructura es determinada ensamblando las matrices de rigidez del elemento.
- Las cargas aplicadas en la estructura son reemplazadas por un sistema de fuerza equivalente, tal que las fuerzas actúan en los puntos nodales.
- Los desplazamientos de los puntos nodales d son calculados por:

$$[K]d = f \quad (47)$$

donde f es el vector de fuerza representando las fuerzas nodales equivalentes aplicadas.

- El vector d está subdividido en subvectores δ , cada δ representa los desplazamientos de los puntos nodales de un elemento particular.
- Los desplazamientos en un punto dentro del elemento son calculados por:

$$U = [N]\delta \quad (48)$$

donde el vector U representa los desplazamientos y $[N]$ es la matriz de los vectores de forma.

- Las deformaciones de un punto dentro del elemento son calculadas por:

$$\varepsilon = [B]\delta \quad (49)$$

donde $[B]$ es la matriz deformación-desplazamiento.

- Los esfuerzos en un punto dentro del elemento son calculados por:

$$\sigma = [E]\varepsilon \quad (50)$$

donde $[E]$ es la matriz constitutiva que caracteriza el material.

Estos puntos del método serán abordados en párrafos posteriores, iniciando con la descripción de los tipos de elemento que competen al presente trabajo, es decir, solo se mencionarán elementos unidimensionales y bidimensionales, así como su vector de desplazamiento o campo de desplazamiento.

4.4.1 Elementos para discretizar un sólido continuo.

La discretización de una estructura para conocer su comportamiento puede realizarse en elementos de forma simple pero que vayan de acuerdo con las exigencias del problema. Los elementos finitos más comunes son los unidimensionales como el elemento tipo línea, y el elemento tipo viga, este último toma en consideración los giros y los desplazamientos transversales, ver figura 27, mientras que el primero sólo considera los desplazamientos en una dirección axial, ver figura 26.

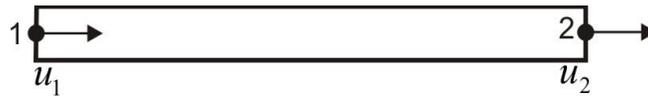


Figura 26. Elemento finito tipo línea.



Figura 27. Elemento finito tipo viga.

Además, existen otros dos elementos sólidos bidimensionales, que permiten desplazamientos verticales y horizontales. Una de las formas es la triangular; elemento con el cual se puede aproximar cualquier forma estructural continua en el plano, en forma de lámina y bordes curvos, una vez que se disminuya el tamaño de los elementos, y la forma cuadrilateral, siendo este último un elemento útil por su facilidad computacional (Fornóns 1982), ver figuras 28 y 29, respectivamente.

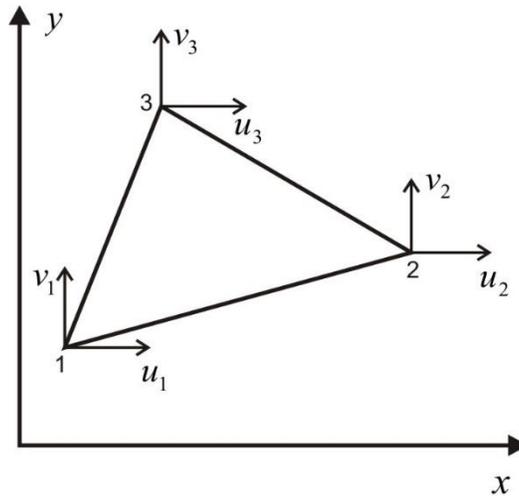


Figura 28. Elemento finito triangular.

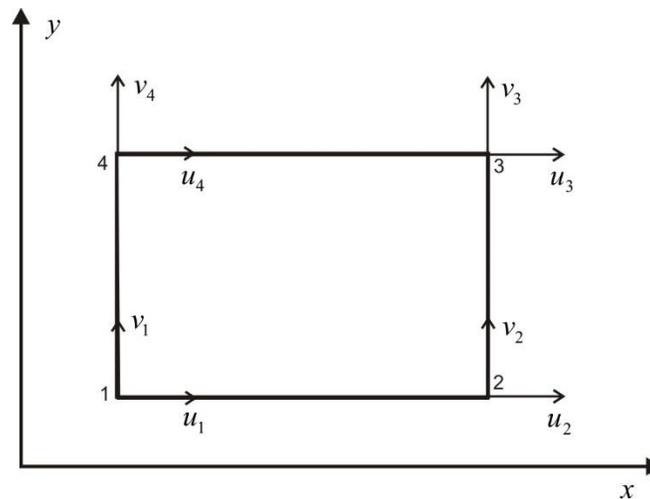


Figura 29. Elemento finito rectangular.

4.4.2 Campo de desplazamiento para elementos unidimensionales.

Una vez expuestos los tipos de elementos que es común utilizar para la resolución de problemas reales con el MEF, es menester describir el campo de desplazamientos para cada uno de ellos.

Entonces, se entiende por campo de desplazamiento a una función cuyas coordenadas definen la forma del desplazamiento de un elemento y para el elemento línea el campo de

desplazamientos está dado por la función de interpolación que a continuación se muestra (Segerling 1984), ver figura 30:

$$u(x) = a_1 + a_2x \quad (51)$$

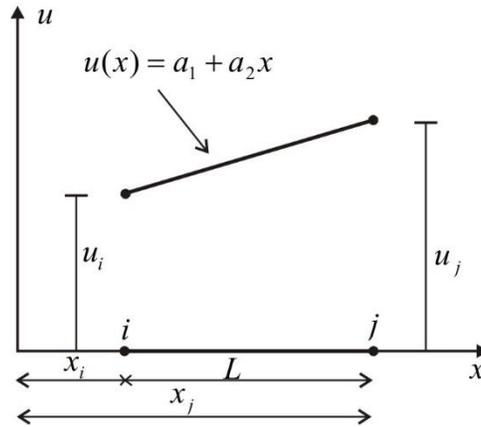


Figura 30. Elemento lineal de una dimensión.

donde los coeficientes a_1 y a_2 son determinados por las condiciones nodales:

$$u(x) = u_i \text{ en } x = x_i \quad (52)$$

$$u(x) = u_j \text{ en } x = x_j \quad (53)$$

entonces, los valores de los coeficientes quedan definidos como:

$$a_1 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{x_j - x_i} \quad (54)$$

$$a_2 = \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i} \quad (55)$$

sustituyendo y reordenando las expresiones (54) y (55) en la función de interpolación (51), surge la siguiente función:

$$u(x) = \left(\frac{x_j - x}{L}\right) u_i + \left(\frac{x - x_i}{L}\right) u_j \quad (56)$$

y de acuerdo con la figura 30, $x_j - x_i = L$, motivo para ser reemplazada en la expresión. Además, el autor afirma que la ecuación (56) es una forma estándar para los elementos finitos, donde los valores son multiplicados por valores de x , los cuales son llamados funciones de forma o funciones de interpolación. Una definición más acertada sobre estas funciones la describen Vázquez y López, quienes dicen que las representaciones de estas funciones coinciden con la forma que adquiere el elemento como consecuencia de los anteriores desplazamientos, tomados en dirección perpendicular al elemento, por esto se les llama funciones de forma a las funciones de interpolación (Vázquez y López 2001).

Asimismo, las funciones de forma poseen propiedades: la primera dicta que cada función de forma tiene un valor de uno en su propio nodo y es cero en otro, además, la suma de estas funciones en cualquier punto del dominio es uno, otra propiedad restringe a las funciones de forma a ser siempre polinomios del mismo orden que la ecuación de interpolación original (García 2007).

En este caso, la función (56) posee dos funciones de forma, una para cada nodo y se denotan como a continuación se señala:

$$N_i = \frac{x_j - x}{L} \quad (57)$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{L} \quad (58)$$

Lo anterior permite reescribir la función (56) así:

$$u(x) = N_i u_i + N_j u_j \quad (59)$$

de modo más conciso:

$$\{U\} = [N]\{\delta\} \quad (60)$$

donde $\{U\}$ es la matriz que interpola los valores nodales, $[N]$ es la matriz que contiene a las funciones de forma y $\{\delta\}$ es el vector que contiene los valores nodales de la sección, y así se

entiende que cada elemento de la matriz $[N]$ es una función de forma que multiplica a un desplazamiento nodal (grado de libertad) del elemento.

Por otro lado, para el elemento viga, véase figura 27, los grados de libertad son cuatro, eso significa que la función de interpolación posee cuatro coeficientes, y el campo de desplazamientos y las deducciones posteriores parten por (García 2007):

$$v = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (61)$$

De las condiciones de frontera se pueden desarrollar las funciones de forma correspondientes a este elemento finito, para finalmente conocer el campo de desplazamiento o función de interpolación en función de las funciones de forma y los desplazamientos nodales.

Entonces, las condiciones de frontera surgen a partir de los desplazamientos y giros, es decir, cuando

$$x = 0 \rightarrow v = a_1 \quad (62)$$

$$x = L \rightarrow v = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \quad (63)$$

,si se sabe que la derivada del campo de desplazamientos es el giro, entonces:

$$\frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (64)$$

cuando

$$x = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = a_2 \quad (65)$$

$$x = L \rightarrow \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 \quad (66)$$

También, en los apoyos los desplazamientos y giros deben ser igual a:

$$\begin{aligned}
x = 0 &\rightarrow v = v_1 \\
x = L &\rightarrow v = v_2 \\
x = 0 &\rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta_1 \\
x = L &\rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta_2
\end{aligned} \tag{67}$$

Si se igualan las primeras condiciones de frontera para desplazamientos y giros (de (62) a (66)) con las de la expresión (67), se obtiene

$$a_1 = v_1 \tag{68}$$

$$a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4x^3 = v_2 \tag{69}$$

$$a_2 = \theta_1 \tag{70}$$

$$a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2 \tag{71}$$

y de forma matricial se pueden escribir

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{72}$$

asimismo, realizando una serie de pasos algebraicos y algunas sustituciones se llega a la función de interpolación en función de las funciones de forma y de los desplazamientos nodales, es decir, surge

$$v = v_1N_1 + \theta_1N_2 + v_2N_3 + \theta_2N_4 \tag{73}$$

donde las funciones de formas son

$$N_1 = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] \tag{74}$$

$$N_2 = \left[x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \quad (75)$$

$$N_3 = \left[\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right] \quad (76)$$

$$N_4 = \left[-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \quad (77)$$

También conocidas como polinomios de Hermite (Burden y Douglas, Análisis Numérico 1998).

4.4.3 Campo de desplazamiento para elementos bidimensionales.

Como se recalcó, las precedentes descripciones pertenecen a elementos unidimensionales. Para conocer el campo de desplazamientos del elemento bidimensional triangular como el de la figura 28, que pertenece a los ejes coordenados $x - y$, y cuenta con tres nodos, donde sus desplazamientos están denotados por $u - v$; se considera que los desplazamientos u y v son independientes uno de otro, por lo tanto, los coeficientes (a_1, a_2, a_n) de las funciones de interpolación ($u(x, y)$ y $v(x, y)$) no deben ser iguales, lo que resulta en la proposición de un polinomio de interpolación para cada componente de desplazamientos (García 2007):

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (78)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \quad (79)$$

Las condiciones de frontera para el campo de desplazamientos expuesto por (78) y (79) son

$$\begin{aligned} x = x_1, y = y_1 &\rightarrow u = u_1 \text{ y } v = v_1 \\ x = x_2, y = y_2 &\rightarrow u = u_2 \text{ y } v = v_2 \\ x = x_3, y = y_3 &\rightarrow u = u_3 \text{ y } v = v_3 \end{aligned} \quad (80)$$

y si se aplican estas condiciones al campo de desplazamientos se revela

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 \\
v_1 &= a_4 + a_5x_1 + a_6y_1 \\
u_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 \\
v_2 &= a_4 + a_5x_2 + a_6y_2 \\
u_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 \\
v_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3
\end{aligned} \tag{81}$$

Las expresiones anteriores se ordenan matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Ahora bien, la expresión (82) se puede condensar como a continuación se muestra:

$$\{\delta\} = [C]\{\alpha\} \tag{83}$$

entonces, si se retoman las expresiones (78) y (79), se pueden ordenar matricialmente como sigue

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{array} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \tag{84}$$

y de forma condensada la expresión (84) se reescribe:

$$\{U\} = [P]\{\alpha\} \tag{85}$$

donde $\{U\}$ es la matriz que interpola los valores nodales, y si se desea conocer los coeficientes $\{\alpha\}$ se recurre a (83), resultando

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\delta\} \tag{86}$$

que sustituida en (85), determina la función de desplazamientos:

$$\{U\} = [P][C]^{-1}\{\delta\} \quad (87)$$

Entonces, comparando la expresión (87) con la fórmula (60), las funciones de forma están dadas por

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (88)$$

Conocido esto, las funciones de forma para un elemento finito triangular son (Vázquez y López 2001):

$$N_1 = \frac{x_2y_3 - y_2x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e} \quad (89)$$

$$N_2 = \frac{x_3y_1 - y_3x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e} \quad (90)$$

$$N_3 = \frac{x_1y_2 - y_1x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e} \quad (91)$$

donde A_e es el área del triángulo y se calcula como se muestra a continuación:

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (92)$$

Con lo anterior, se puede calcular el vector de desplazamientos en cualquier punto del elemento.

Por otro lado, un camino similar que el anterior descrito se sigue para un elemento finito cuadrangular, véase figura 29, el cual posee un nodo en cada vértice y desplazamientos $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$. Por lo tanto, el número de coeficientes es de ocho, número igual a los grados de libertad del elemento, debido a esto el campo de desplazamientos es (Vázquez y López 2001)

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (93)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (94)$$

donde las condiciones de frontera para este caso están dadas por

$$\begin{aligned} x = x_1, y = y_1 &\rightarrow u = u_1 \text{ y } v = v_1 \\ x = x_2, y = y_2 &\rightarrow u = u_2 \text{ y } v = v_2 \\ x = x_3, y = y_3 &\rightarrow u = u_3 \text{ y } v = v_3 \\ x = x_4, y = y_4 &\rightarrow u = u_4 \text{ y } v = v_4 \end{aligned} \quad (95)$$

y aplicando estas condiciones al campo de desplazamientos, resulta el grupo de expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 \\ v_1 &= a_5 + a_6x_1 + a_7y_1 + a_8x_1y_1 \\ u_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 \\ v_2 &= a_5 + a_6x_2 + a_7y_2 + a_8x_2y_2 \\ u_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 \\ v_3 &= a_5 + a_6x_3 + a_7y_3 + a_8x_3y_3 \\ u_4 &= a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 \\ v_4 &= a_5 + a_6x_4 + a_7y_4 + a_8x_4y_4 \end{aligned} \quad (96)$$

A su vez, si se toma como punto de partida las expresiones (83) y (85), y más específicamente la fórmula (88), a la vez que se siguen pasos similares a los realizados para el elemento triangular, se pueden deducir las expresiones que simbolizan las funciones de forma del elemento cuadrangular, reveladas a continuación:

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \quad (97)$$

$$N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \quad (98)$$

$$N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \quad (99)$$

$$N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \quad (100)$$

Entonces, cuando se presume conocer las funciones de forma para los elementos finitos que se estudian, es reconocible la posibilidad de obtener los desplazamientos de cualquier nodo

del elemento, para posteriormente internarse en el cálculo de las deformaciones y los esfuerzos existentes en el sólido.

En resumen, se dice que la matriz de funciones de interpolación N (fórmula (88)) tiene 2 filas y tantas columnas como grados de libertad haya en todos los nudos del elemento (Celigueta 2008), por lo tanto, de forma general se escribe

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (101)$$

4.4.4 Integración numérica.

Debido a la dificultad abundante en la resolución de problemas con elemento finito, como integrales donde se involucran productos de funciones de forma, donde la integración analítica no es viable, es necesario implementar la integración numérica. Así también pasa cuando se tienen elementos con fronteras curvas, donde las integrales son más fácilmente evaluadas usando un sistema de coordenadas natural (Seegerling 1984), punto coincidente con García quien dice que “las dificultades asociadas en la evaluación de integrales puede disminuir cambiando las variables de integración, esto involucra escribir la integral en un nuevo sistema coordenado” (García 2007).

Además, es común que, para facilitar los cálculos, se adopten o idealicen los elementos estudiados en formas más simples, ver figura 31, donde se muestra un elemento real idealizado a su forma más simple posible, donde la idealización se realiza en un campo gobernado por coordenadas naturales.

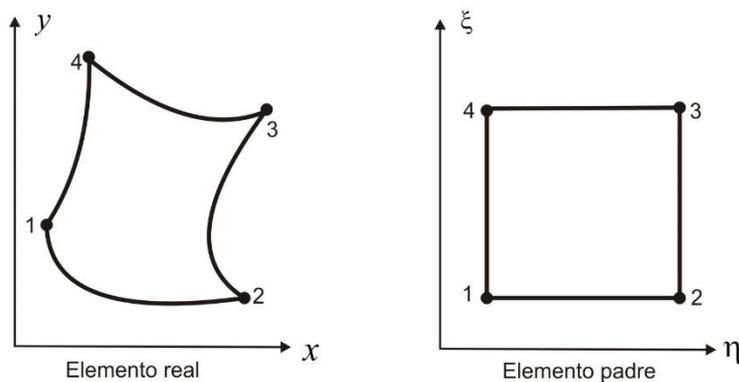


Figura 31. Elemento real e idealizado.

En general, los elementos de referencia poseen una geometría sencilla para después ser mapeados a la geometría real del elemento mediante una transformación. La transformación define las coordenadas de cada punto del dominio real en términos de las coordenadas del punto correspondiente del elemento padre (Pilkey 2002).

A estas integrales, procedimiento o cálculo numérico de una integral se conoce por cuadratura, siendo la cuadratura de Gauss la más utilizada para determinar las integrales en el método de los elementos finitos (Chandrupatla y Belegundu 1999). Además de la cuadratura de Gauss, existe otra muy común en el MEF y se llama cuadratura de Newton-Cotes, estas dos cuadraturas tienen la forma siguiente (Vázquez y López 2001):

$$\text{Newton - Cotes } I = \int_a^b f(x) dx \quad (102)$$

$$\text{Gauss - Legendre } I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (103)$$

Por ser el proceso más usado y popular en el MEF, solo se abordará la cuadratura de Gauss-Legendre.

Ahora bien, para llegar a la expresión (103), donde se enseña la integral de una función $f(\xi)$ en el intervalo $(-1,+1)$, de involucra un cambio de variable de la coordenada cartesiana x por la coordenada natural ξ , la integral definida de una función $f(x)$ entre los límites x_1 y x_2 puede transformarse en la integral definida de una función $f(\xi)$ entre los límites -1 y 1 , esta igualdad queda definida así (Vázquez y López 2001)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (104)$$

La fórmula (105) expresa el valor de dicha integral como una suma de productos de los valores del integrando, esto último es más claro denotándose como sigue (Chandrupatla y Belegundu 1999)

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (105)$$

donde w_i es el peso correspondiente al punto de integración i y n es el número de dichos puntos. En la tabla 1 se muestran los valores de ξ_i y los pesos w_i para las primeras seis cuadraturas de Gauss- Legendre.

A lo antedicho, Segerlind complementa diciendo que la cuadratura de Gauss-Legendre localiza puntos específicos para obtener la mayor exactitud, esto se traduce en que un polinomio de grado $(2p - 1)$ o menor, puede ser integrado de manera exacta, caso contrario cuando la función $f(\xi_i)$ no es un polinomio, o es un cociente de polinomios, lo que arroja una solución no exacta (Segerling 1984).

Tabla 1. Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de gauss.

n	ξ_i	W_i
1	0.0000 00000	2.00000 00000
2	$\pm 0.57735\ 02692 = \pm 1/\sqrt{3}$	1.00000 00000
3	$\pm 0.77459\ 66692 = \pm \sqrt{0.6}$	0.55555 55555 = 5/9
	0.00000 00000	0.88888 88888 = 8/9
4	$\pm 0.86113\ 63116$	0.34785 48451
	$\pm 0.33998\ 10436$	0.65214 51549
5	$\pm 0.90617\ 98459$	0.23692 68851
	$\pm 0.53846\ 93101$	0.47862 86705
	0.00000 00000	0.56888 88889
6	$\pm 0.93246\ 95142$	0.17132 44924
	$\pm 0.66120\ 93865$	0.36076 15730
	$\pm 0.23861\ 91861$	0.46791 39346

Ahora bien, cuando es necesario aplicar la integración numérica a dos dimensiones, por ejemplo a un elemento cuadrilateral como el de la figura 31, la fórmula bidireccional para la función $f(\xi, \eta)$ resulta ser

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (106)$$

donde n_1 y n_2 son el número de puntos de integración en las direcciones ξ y η , respectivamente. A su vez, para tener un mejor concepción de los puntos de Gauss y del rango de la integral $(-1,1)$, se ilustra la figura 32, correspondiente a un elemento cuadrilateral en un sistema coordenado natural.

A su vez, la integral (106) se resuelve aplicando las mismas reglas que la integración unidimensional arriba expuestas. Entonces, para integrar numericamente la función $f(\xi, \eta)$ se integra numericamente primero respecto a ξ manteniendo η constante, y después se integra numéricamente respecto a η (Vázquez y López 2001). A su vez, la integral (106) se resuelve aplicando las mismas reglas que la integración unidimensional arriba expuestas.

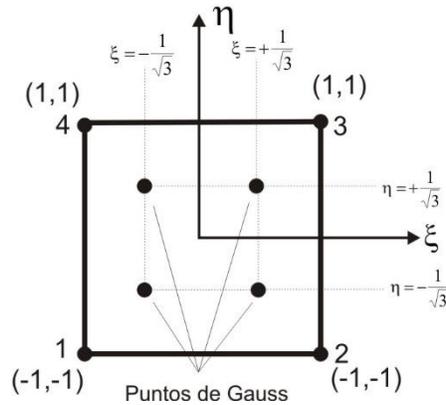


Figura 32. Puntos de gauss y coordenadas naturales en un elemento finito.

Entonces, para integrar numericamente la función $f(\xi, \eta)$ se integra numericamente primero respecto a ξ manteniendo η constante, y después se integra numéricamente respecto a η (Vázquez y López 2001). También, la cuadratura gaussiana en dos dimensiones se puede escribir como a continuación se revela:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx w_1^2 f(\xi_1, \eta_1) + w_2 w_1 f(\xi_2, \eta_1) + w_2^2 f(\xi_2, \eta_2) + w_1 w_2 f(\xi_1, \eta_2) \quad (107)$$

4.4.5 Matriz de rigidez del elemento

Para el presente trabajo, hablar sobre los elementos bidimensionales triángulo y rectángulo es tocar directamente el modelado de los elementos que posteriormente se analizarán, dado que en los ejemplos estudiados la discretización fue llevada a cabo usando elementos rectangulares. Es sabido que los elementos triangulares son forma que se adaptan de buena manera para simular elementos de forma compleja, así como ayudan en la solución donde existen elementos con bordes curvos.

Entonces, si se desea conocer la matriz de rigidez de estos dos elementos, se debe contemplar la figura 33, correspondiente a un elemento triangular con tres nodos, en los cuales existen dos grados de libertad por cada uno.

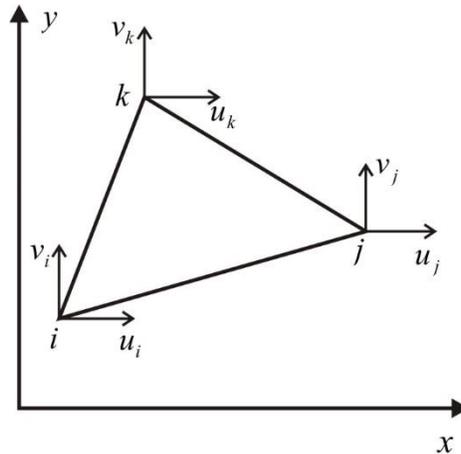


Figura 33. Elemento finito triangular con dos desplazamientos por nodo.

Por inspección, el elemento tiene seis desplazamientos nodales:

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (108)$$

Al continuar con el análisis, se supone la función de desplazamientos siguiente (Megson 2005):

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (109)$$

Al sustituir valores de desplazamiento y coordenadas en cada nodo, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (110)$$

La cual puede tomar la forma:

$$\{\delta\} = [A]\{\alpha\} \quad (111)$$

y si se despeja $\{\alpha\}$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\} \quad (112)$$

Ahora bien, las deformaciones planas de la expresión (37) se pueden definir de la siguiente forma (Megson 2005):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (113)$$

Y sustituyendo los valores de u y v de la expresión (109) en las expresiones de (113), y realizando las derivadas parciales, resulta:

$$\epsilon_x = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (114)$$

o

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (115)$$

si se compacta la expresión anterior, se puede escribir:

$$\epsilon = [C]\{\alpha\} \quad (116)$$

Como se definió $\{\alpha\}$ en (112) y sustituyendo en (116):

$$\varepsilon = [C][A]^{-1}\{\delta\} \quad (117)$$

o también

$$\varepsilon = [B]\{\delta\} \quad (118)$$

Esta expresión se refiere a las deformaciones existentes en el elemento, donde se relacionan los desplazamientos nodales con las deformaciones en cualquier punto del elemento mediante la matriz $[B]$ conocida como matriz de deformación y se define por (Vázquez y López 2001)

$$[B] = [\partial][N] \quad (119)$$

Para el elemento bidimensional triángulo, la fórmula anterior se desarrolla

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (120)$$

asimismo, recordando la definición hecha para esfuerzos planos y tomando en cuenta que se trata de deformaciones planas, la matriz de elasticidad es algo peculiar y relaciona a ambos de la siguiente forma

$$\{\sigma\} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (121)$$

y de forma matricial se escribe

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (122)$$

donde $[D]$ es la matriz de elasticidad que relaciona las deformaciones con los esfuerzos.

Ahora bien, si se sustituye la ecuación (117) en la expresión anterior, se tiene:

$$\{\sigma\} = [D][C][A]^{-1}\{\delta\} \quad (123)$$

Finalmente, empleando el principio del valor estacionario de la energía potencial total, se obtiene la matriz de rigidez del elemento (Megson 2005):

$$[k] = \left[\int_v [B]^T [D][B] dv \right] \quad (124)$$

La matriz de rigidez expuesta en (124) es la forma general para los elementos de estudio del presente capítulo: triángulo y rectángulo.

Por otro lado, la expresión general para la matriz de rigidez del elemento con el que se discretiza el sólido continuo, se adapta a las coordenadas naturales para un elemento cuadrilateral bidimensional de la siguiente manera (Chandrupatla y Belegundu 1999):

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (125)$$

En esta integral, las funciones complicadas para integrarse analíticamente son $[B]$ y \mathbf{J} , por lo que se recurre a la integración numérica ya comentada en el capítulo anterior. Al comparar el primer término de (106) con la fórmula (125), se tiene

$$k(\xi, \eta) = ([B]^T [D][B] \det \mathbf{J}) \quad (126)$$

con esto se comprueba la posibilidad de integración de la matriz de rigidez de un elemento mediante integración numérica.

Como complemento, en algunos casos cuando la geometría del elemento finito estudiado es compleja, es necesaria una transformación de las derivadas de las funciones de forma N definidas en coordenadas naturales ξ, η (dominio idealizado), cuando son necesarias en las coordenadas x e y (dominio real del elemento), por lo cual se puede utilizar las reglas de derivación para realizar la siguiente relación entre ambas coordenadas (Celigueta 2008):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (127)$$

donde a \mathbf{J} se le conoce como matriz Jacobiana, y despejando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (128)$$

Las funciones de interpolación para los elementos de interés (barra, viga, triángulo y rectángulo) del presente trabajo ya se han deducido en capítulos precedentes en función de las coordenadas reales (x e y). Pero, cuando se ha idealizado un elemento cuadrilateral en uno como el de la figura 32, el cual se encuentra en coordenadas naturales, las funciones de interpolación son las siguientes (Chandrupatla y Belegundu 1999):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (129)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (130)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (131)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (132)$$

Estas funciones se pueden transformar a coordenadas del mundo real con la expresión (127), y así el análisis se facilita.

5 Ejemplos de aplicación.

Para mostrar el concepto de carga de fluencia, exhibir la plastificación y exponer resultados concretos de éstos, se concibieron seis ejemplos, derivados de dos condiciones generales de frontera y de carga. Estos ejemplos fueron analizados por el método de los elementos finitos mediante el uso de un programa computacional FEAP (Finite Element Analysis Program). Este programa, a grandes rasgos es un código de elementos finitos desarrollado por el profesor R.L. Taylor, de la Universidad de Berkeley en California (Estados Unidos), para fines académicos y/o de investigación (Taylor 2013).

Mediante el análisis se pretende mostrar la plastificación del modelo mediante una serie de gráficas que muestran las reacciones horizontales ocurridas en el empotre de los modelos, así como otras que expresan las deformaciones longitudinales (ϵ_x), ambas ocupando el lugar acostumbrado por el eje x , mientras en el eje y se visualiza el peralte. Además, se concluyeron seis gráficas más donde se expone la carga de falla obtenida con el MEF siendo comparada con la solución exacta. Finalmente, se graficaron los datos que más competen al presente trabajo, es decir, la relación momento-curvatura de cada modelo que arrojó el análisis.

5.1 Características generales de los modelos.

El momento de fluencia y plastificación, así como las curvaturas correspondientes a éstos en un modelo continuo, se buscaron obtener analizando tres modelos básicos con algunas variaciones correspondientes a la carga aplicada, restricciones impuestas y cambios en la longitud.

En total se modelaron tres mallas, representando como único material al concreto simple, el cual se estima como elástico, homogéneo e isotrópico. Donde “la isotropía supone que la microestructura del material consiste de elementos orientados al azar, y excluye, por consiguiente, la existencia de direcciones "preferenciales" para sus propiedades mecánicas” (Chávez 2001).

El módulo de elasticidad del material fue calculado tomando una resistencia a la compresión $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$, con la fórmula propuesta por las NTC-Concreto correspondientes a un concreto de clase 1 (NTC para Diseño de Estructuras de Concreto 2004):

$$E = 140000\sqrt{f'c}, \text{ en } \text{kg/cm}^2 \quad (133)$$

entonces, el módulo de elasticidad es $E = 211360 \text{ kg/cm}^2$

Además, el coeficiente de Poisson toma un valor de 0.21, valor común para concreto. Es importante comentar que la falla del material es igual tanto en compresión como en tensión, porque se está considerando un material con un comportamiento elastoplástico perfecto, esta idealización fue explicada en el capítulo 3. Entonces, la falla general se presentará si se alcanza un esfuerzo de tensión de $25 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, es decir, el 10% de la falla a compresión del concreto. Finalmente, la base de todos los modelos no varía y se propone de 15 centímetros.

También, cada uno de los elementos finitos que construyen la malla, cuenta con 4 nodos y se permiten dos grados de libertad por nodo, condición no aplicable para cuando se restrinjan, según se explique más adelante.

5.2 Mallas generales.

La primera malla consta de una longitud igual a 300 y peralte de 30, medidas en centímetros, ver figura 34. La magnitud del peralte será una constante en las mallas consecuentes.

El modelo de la figura 34, posee 9331 nodos lo que produce que el sólido tenga 9000 elementos finitos.

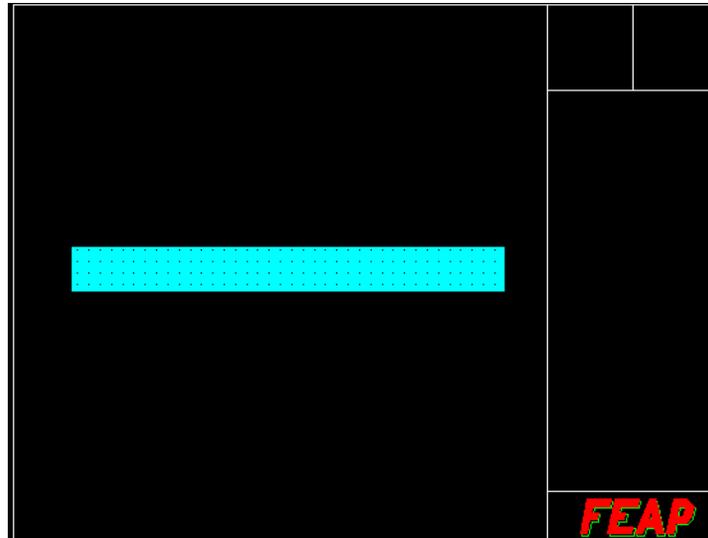


Figura 34. Malla con 300 cm de longitud y 30 cm de peralte.

Asimismo, la segunda malla consta de 200 cm, con la magnitud del peralte ya descrita, ver figura 35. A su vez, este modelo contiene 6000 elementos y 6231 nodos.

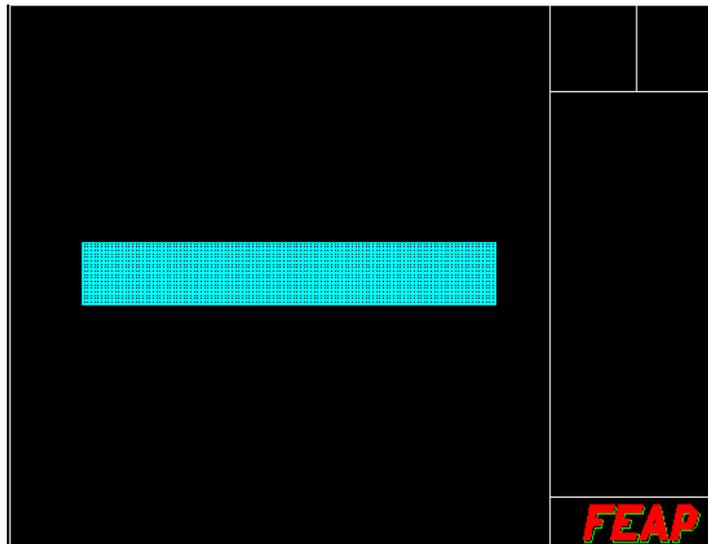


Figura 35. Malla con 300 cm de longitud y 30 cm de peralte.

De similar manera, se modeló la malla de longitud 100 cm, con el peralte antedicho, constituida por 3000 elementos y 3131 nodos, ver figura 36.

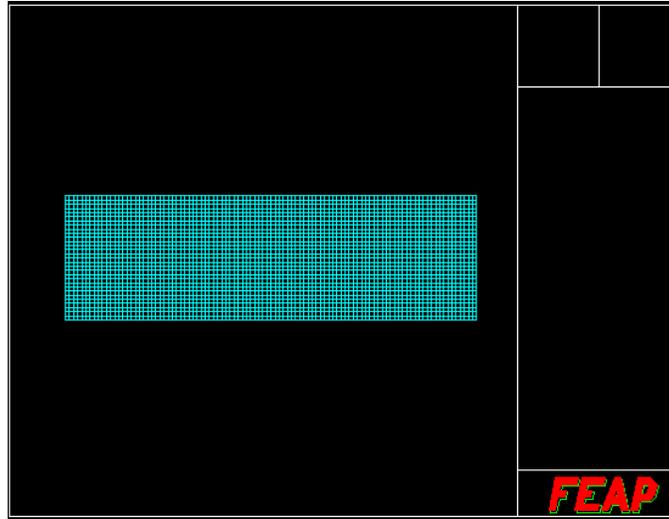


Figura 36. Malla de longitud igual a 100 cm y peralte de 30 cm.

5.3 Restricciones y tipo de carga.

Ya se han explicado las características de las tres mallas base de los ejemplos que se muestran a continuación. El complemento de esas mallas corresponde a las condiciones de apoyo y el tipo de carga aplicada. Para esto, a todos los modelos se les impidió el desplazamiento de traslación vertical y horizontal en el extremo izquierdo a una distancia $x = 0$, ver figura 37 y 38.

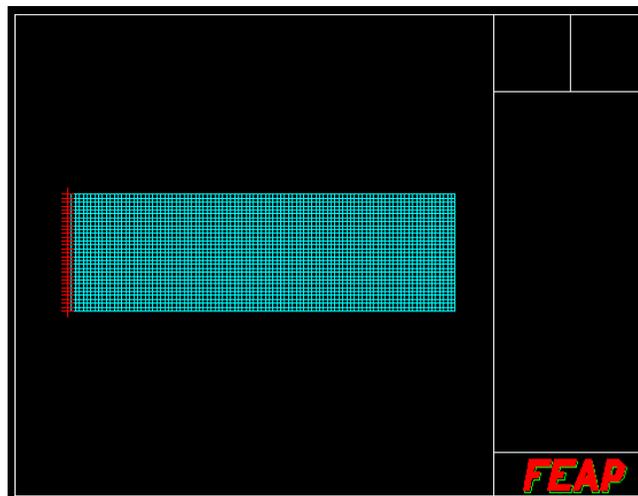


Figura 37. Modelo con restricción de traslación vertical y horizontal ($L=100$ cm).

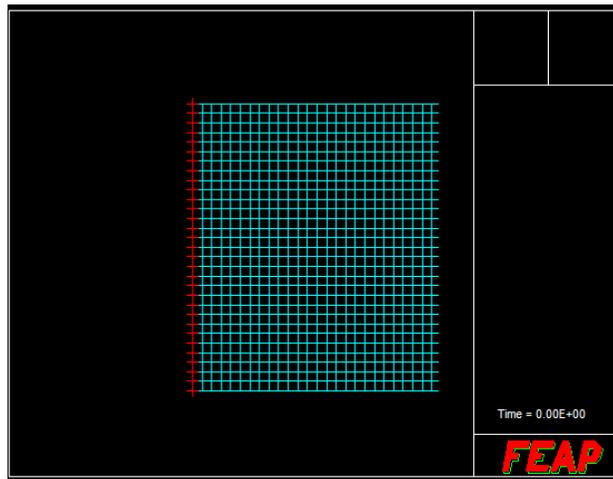


Figura 38. Extremo izquierdo amplificado de la figura 37.

A su vez, la carga que se aplicó fue puntual en el extremo superior derecho, ver figura 39. Este estado de carga se usó para las tres mallas, es decir, se generaron tres ejemplos con longitudes de 300, 200 y 100 cm.

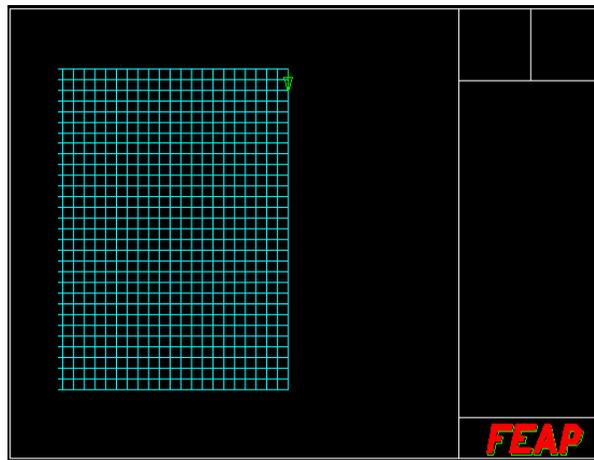


Figura 39. Carga puntual en el elemento.

Por otro lado, se concibieron tres ejemplos más, respetando las longitudes y restricciones antedichas. Pero, se cambió el estado de la carga, pues ahora se impuso una carga distribuida a lo largo del modelo en la parte superior de éste, ver figura 40.

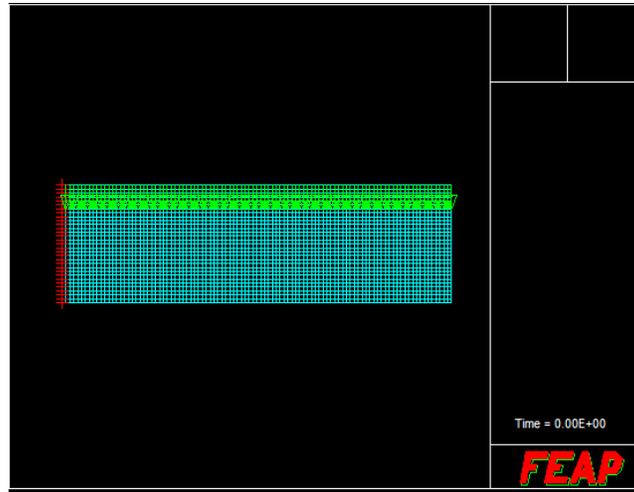


Figura 40. Carga distribuida en la parte superior del modelo.

En resumen, la cantidad total de ejemplos que se analizaron es de seis. Ahora, de modo complementario se detalla la tabla 2 donde se resumen las características de los modelos.

Tabla 2. Ejemplos totales y sus características.

Ejemplo	Longitud (cm)	Peralte (cm)	Base (cm)	Tipo de carga.	Restricciones ($x = 0$)
1	300	30	15	Puntual	Horizontal y vertical
2	200	30	15	Puntual	
3	100	30	15	Puntual	
4	300	30	15	Distribuida	
5	200	30	15	Distribuida	
6	100	30	15	Distribuida	

Las figuras de este capítulo en las que no se especifique la longitud, se refieren a mallas con largo igual a 100 centímetros.

5.4 Aplicación de la carga.

Primero, es importante señalar que el proceso de carga es cuasi-estático, a pesar de que la simbología que se usará en las gráficas (T10, T50, etc.) indica tiempos. El tiempo como parámetro, tiene un sentido más abstracto, es decir, solo se emplea para aplicar en un número de pasos o incrementos y no en un sentido físico (Borts y Sluys 1999).

Ahora, si se habla de la metodología usada para imponer la carga externa, “básicamente existen dos métodos para imponer carga externa y para controlar la aplicación de la carga y el proceso subsiguiente de lograr convergencia dentro de los pasos de carga” (Borts y Sluys 1999), estos métodos son conocidos como control de carga y control de desplazamiento.

Los modelos se analizaron en el presente trabajo se expusieron a un control de carga, esto consiste en “aplicar directamente la carga en un número de pasos” (Borts y Sluys 1999). Entonces, la imposición de la carga externa se realizó en incrementos pequeños, para ser exactos, los resultados que posteriormente se revelarán fueron obtenidos por aumentos de carga de un kilogramo. La decisión de implementar la fuerza externa en incrementos pequeños viene de la mano con la idea de que los resultados que se obtienen dependen de un proceso iterativo y de la trayectoria de los esfuerzos (Borts y Sluys 1999).

5.5 Análisis de los modelos.

El análisis de los ejemplos expuestos anteriormente facilitó la obtención de la carga que se fue aplicando, así también los desplazamientos generados en un punto específico, las consecuentes reacciones y las deformaciones provocadas por la carga.

Entonces, los valores de cada una de las incógnitas de interés se conocieron de la siguiente forma: la carga fue el resultado de la suma de las reacciones verticales en el extremo izquierdo, ver figuras 37 y 38. Por el mismo camino emanaron las reacciones horizontales graficadas posteriormente. En cuanto a los desplazamientos, la figura 41 muestra el nodo de la posición general donde se estudiaron, siendo la posición de éste el eje neutro.

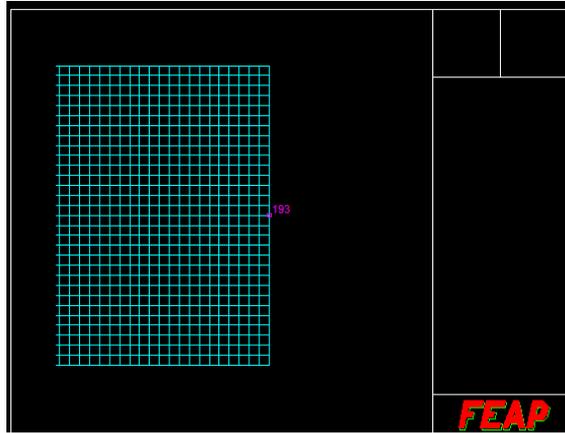


Figura 41. Nodo donde se analizaron los desplazamientos.

Asimismo, las deformaciones longitudinales (ϵ_x) necesarias ocurrieron a una distancia $x = 0$. Finalmente, los pasos sobre el cálculo de las incógnitas son simples y se realizan una vez que el programa computacional FEAP (Finite Element Analysis Program) termine el análisis y haya arrojado los resultados del sólido continuo cargado.

5.6 Resultados.

Como ya se comentó, la importancia de conocer las reacciones verticales radica en que, posibilita saber la carga aplicada y de esta manera generar gráficas carga-desplazamiento que dejen observar la carga de plastificación de un modelo.

En cambio, las reacciones horizontales permiten desarrollar directamente gráficas reacción-peralte, donde sea sencillo verificar la transición del rango elástico al plástico, es decir, observar cómo se plastifica la sección es posible con estas gráficas.

Otro uso práctico de las reacciones en x se refleja con la multiplicación de cada una de éstas por su respectiva distancia al eje neutro, y de la sumatoria de los resultados de estas multiplicaciones resulta el momento de la carga que generó dichas reacciones.

Asimismo, al saberse los momentos, la creación de las gráficas momento-curvatura se vislumbra más cercana pues con las deformaciones sufridas por el sólido, es simple calcular la curvatura, despejándola de la ecuación (5) (en los modelos el eje longitudinal es el x) en el rango elástico e incluso cuando ya se plastificó la sección:

$$k = \frac{\epsilon_x}{y} \quad (134)$$

A su vez, para observar el comportamiento de las secciones transversales, las deformaciones nos dan una idea correcta, pues si se grafican éstas en relación al peralte, surgen gráficas significativas por su facilidad de estudio, es decir, es visible la variación de la forma de las secciones transversales a través del aumento de carga.

Por último, las gráficas explanadas en los siguientes apartados constituyen una comparación entre los resultados obtenidos por el MEF y los calculados por métodos tradicionales que aportan una solución exacta.

Las gráficas que en páginas posteriores se muestran, corresponden a la carga de fluencia y la carga de plastificación resultante por el MEF, en las mismas se muestran las magnitudes de las cargas P_y y P_p (carga de fluencia y de plastificación, respectivamente) que se calcularon a partir de la ecuación (16), donde el momento máximo para una viga en cantiliver es igual a la fuerza P_y por la distancia L :

$$P_y L = M_y \quad (135)$$

si se sustituye este valor en la ecuación (16), se obtiene

$$P_y = \sigma_y \frac{bh^2}{6L} \quad (136)$$

y la carga de plastificación resulta ser

$$P_p = 1.5 * P_y \quad (137)$$

Para las gráficas que a continuación se exponen, la carga de fluencia (P_y) y la de plastificación (P_p) calculadas con las expresiones anteriores para cuando la carga es puntual son:

Para una longitud del modelo igual a 300 cm:

$$P_y = \left(25 \frac{kg}{cm^2} \right) \left(\frac{(15cm)(30cm)^2}{6(300 cm)} \right) = 187.5 kg$$

$$P_p = 1.5 * 187.5 kg = 281.25kg$$

Ahora con la longitud igual a 200 cm:

$$P_y = \left(25 \frac{kg}{cm^2}\right) \left(\frac{(15cm)(30cm)^2}{6(200 cm)}\right) = 281.25 kg$$

$$P_p = 1.5 * 281.25 kg = 421.875 kg$$

Finalmente, para el ejemplo con longitud correspondiente a 100 cm:

$$P_y = \left(25 \frac{kg}{cm^2}\right) \left(\frac{(15cm)(30cm)^2}{6(100 cm)}\right) = 562.5kg$$

$$P_p = 1.5 * 562.5 kg = 843.75 kg$$

Por otro lado, cuando se modificó la forma de aplicación de la fuerza, los resultados son parecidos a los de la condición de carga anterior. Estas cargas se obtienen usando la expresión (16), pero ahora cambia el momento, dado que para una carga distribuida, el momento de fluencia está dado por

$$\frac{W_y L^2}{2} = M_y = \sigma_y \frac{bh^2}{6} \quad (138)$$

a su vez, la carga de fluencia se calcula

$$W_y = \frac{2\sigma_y bh^2}{6L^2} \quad (139)$$

y la carga de plastificación se obtiene con

$$W_p = 1.5 * W_y \quad (140)$$

Entonces, los resultados para cada ejemplo son presentados a continuación:

Ejemplo de largo 300 cm:

$$W_y = \frac{2(25 \frac{kg}{cm^2})(15 cm)(30cm)^2}{6(300 cm)^2} = 1.25 \frac{kg}{cm}$$

$$W_p = 1.5 \left(1.25 \frac{kg}{cm} \right) = 1.875 \frac{kg}{cm}$$

Ejercicio con longitud equivalente a 200 cm:

$$W_y = \frac{2(25 \frac{kg}{cm^2})(15 cm)(30cm)^2}{6(200 cm)^2} = 2.81 \frac{kg}{cm}$$

$$W_p = 1.5 \left(2.81 \frac{kg}{cm} \right) = 4.22 \frac{kg}{cm}$$

Modelo de longitud igual a 100 cm:

$$W_y = \frac{2(25 \frac{kg}{cm^2})(15 cm)(30cm)^2}{6(100 cm)^2} = 11.25 \frac{kg}{cm}$$

$$W_p = 1.5 \left(11.25 \frac{kg}{cm} \right) = 16.88 \frac{kg}{cm}$$

Nótese el aumento en la resistencia del modelo cuando la relación $\frac{L}{h}$ es menor, es decir, para el modelo con longitud de 300 cm, esta relación equivale a 10, mientras que la relación más pequeña la tiene el ejemplo de longitud igual a 100 cm, de 3.33. Entonces, cuando se posee una relación grande, la carga de fluencia y de plastificación es pequeña en comparación con el resto de los ejemplos.

5.6.1 Cargas de plastificación de los modelos con carga puntual.

Las gráficas resultantes de los ejemplos donde la carga aplicada es una puntual en el extremo superior derecho se muestran a continuación. Asimismo, el orden elegido contiene la idea de observar como la carga de plastificación es mayor para relaciones L/h cada vez menores. Para esto, se presenta a continuación la gráfica carga-desplazamiento con relación longitud-peralte de 10, en donde, la carga de fluencia y plastificación tienen un valor constante (calculados con anterioridad), y donde el desplazamiento de 0.67 cm corresponde al análisis con el MEF. En cuanto a los valores aproximados, se obtuvieron 254 y 285 kilogramos de carga de fluencia y plastificación, respectivamente.

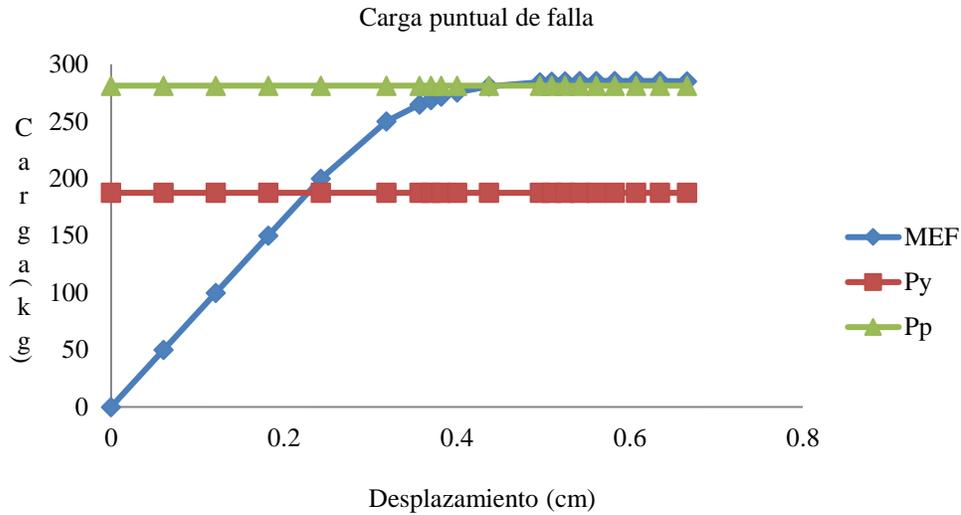


Figura 42.Carga de falla para el ejemplo 1.

Asimismo, para la relación L/h con valor a 6.67, muestra la gráfica 43 valores de carga exactos (P_y y P_p) constantes y el máximo desplazamiento registrado es de 0.31 cm. Ahora bien, al compararse estos valores con los aproximados obtenidos con el MEF, se analiza un incremento, es decir, como en el ejemplo anterior, las cargas de fluencia y plastificación son mayores: 355 y 425 kg, respectivamente.

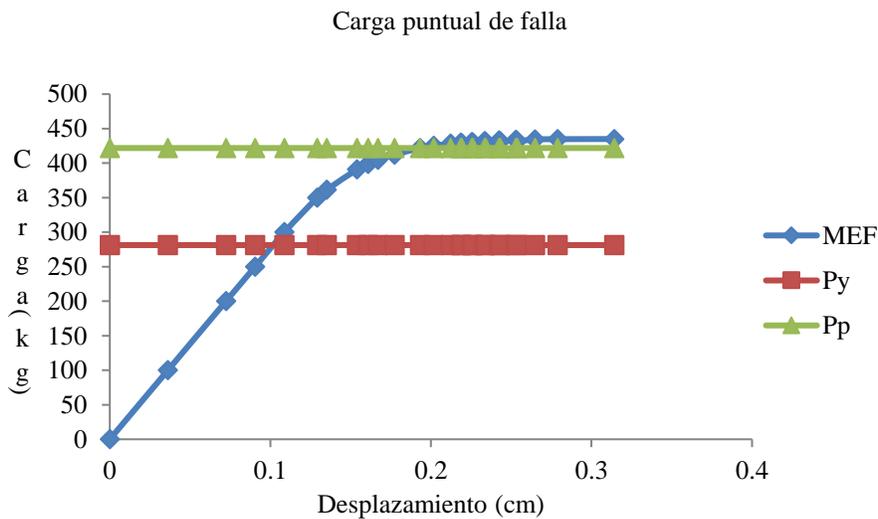


Figura 43.Carga de falla para el ejemplo 2.

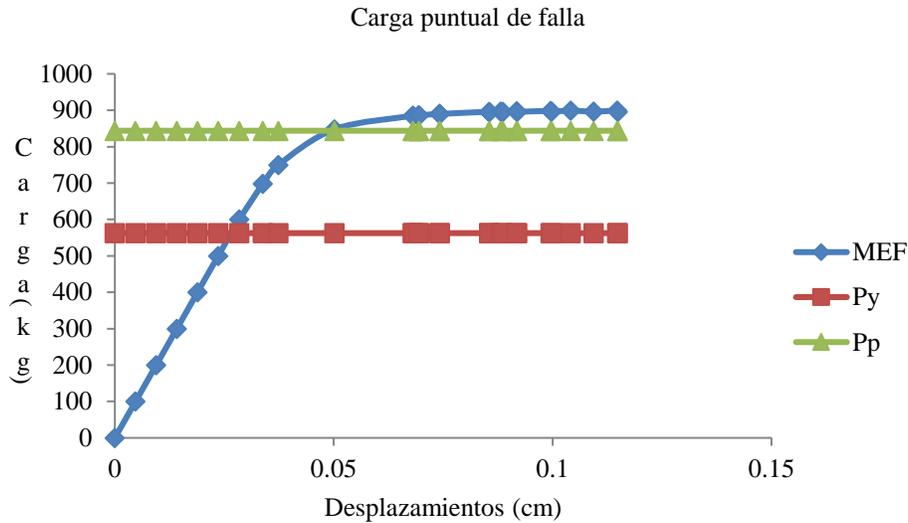


Figura 44. Carga de falla del ejemplo 3.

También, en la gráfica 44 se registran diferencias en cuanto a las cargas de fluencia y plastificación exactas y las aproximadas calculadas con el MEF, siendo estas últimas de 487 y 900 kg, y el desplazamiento para cuando se plastifica el modelo es de 0.11 cm. Es vital mencionar que la no variación en la carga por parte de la solución exacta, se hizo solo para realizar una comparación entre ambos métodos y que los intervalos de desplazamiento descritos en líneas precedentes corresponden estrictamente a los resultados aproximados (obtenidos por el MEF).

A su vez, como resumen se creó la tabla 3, donde se muestran las descripciones arriba comentadas.

Tabla 3. Carga de fluencia y plastificación para carga puntual.

Ejemplo	Longitud (cm)	Solución exacta (kg)		MEF (kg)	
		P_y	P_p	P_y	P_p
1	300	187.5	281.21	254	285
2	200	281.25	421.88	355	425
3	100	562.5	843.75	487	900

La tabla 3 muestra que con el análisis hecho por el MEF el sólido continuo posee más resistencia, dado que se alcanza la carga de fluencia y de plastificación después de la que se predice con la teoría tradicional. Caso excepcional en el ejemplo 3, donde la fluencia dada por el MEF no es mayor que la solución exacta.

Por otro lado, si se comparan los desplazamientos en las tres gráficas (42,43 y 44), es notable que cuando es necesaria más carga para llegar a la fluencia y a la plastificación del modelo, los desplazamientos son menores, es decir, si la relación L/h disminuye también lo hacen los desplazamientos sufridos en la viga.

5.6.2 Cargas de plastificación de los modelos con carga distribuida.

Por otro lado, se revelan las gráficas creadas a partir del análisis con carga distribuida sobre los sólidos continuos. Es importante recordar que las cargas de fluencia y plastificación para este tipo de carga ya fueron calculadas al inicio del capítulo, asimismo, las cargas de la solución exacta están graficadas con comportamiento constante en cuanto a la carga, obteniendo su variación en el valor de la curvatura. Entonces, cuando la longitud es de 300 cm la carga de fluencia se alcanza en 1.33 kg/cm, mientras la de plastificación resulta en 1.95 kg/cm, siendo éstas pertenecientes a la solución aproximada. En cuanto a los desplazamientos, éstos van aumentando paulatinamente incluso cuando ya no existe un gran aumento en la carga.

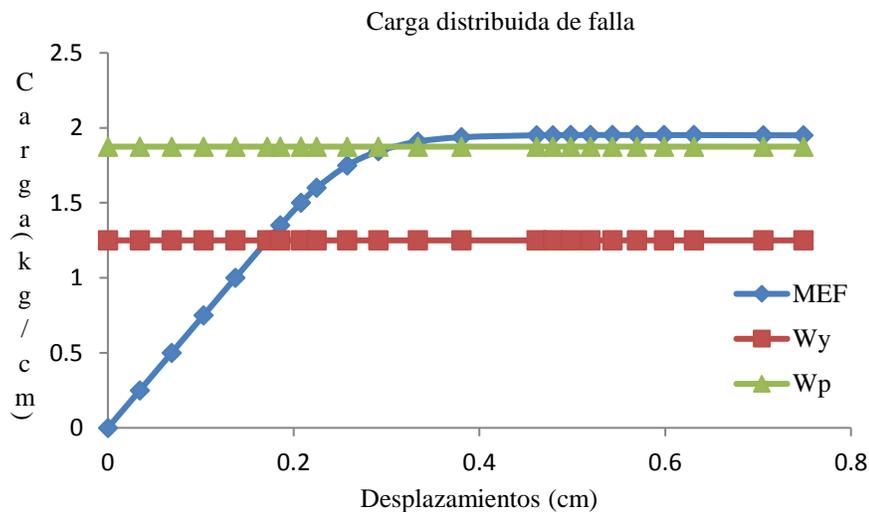


Figura 45. Carga de falla del ejemplo 4.

Ahora bien, si la longitud disminuye a 200 cm la carga se comporta linealmente hasta alcanzar la fluencia en la sección, entonces, la carga de fluencia se alcanza en 2.98 kg/cm y posteriormente la de plastificación resulta ser 4.47 kg/cm.

Asimismo, para el último ejemplo con longitud de 100 cm, las cargas necesarias para la plastificación son mayores que los dos anteriores modelos, resultando una W_y de 16 kg/cm y una W_p de 18.37 kg/cm, ver figura 47. Asimismo, los desplazamientos que aparecieron en el sólido son pequeños cuando se plastifica, en comparación con los de las figuras 45 y 46.

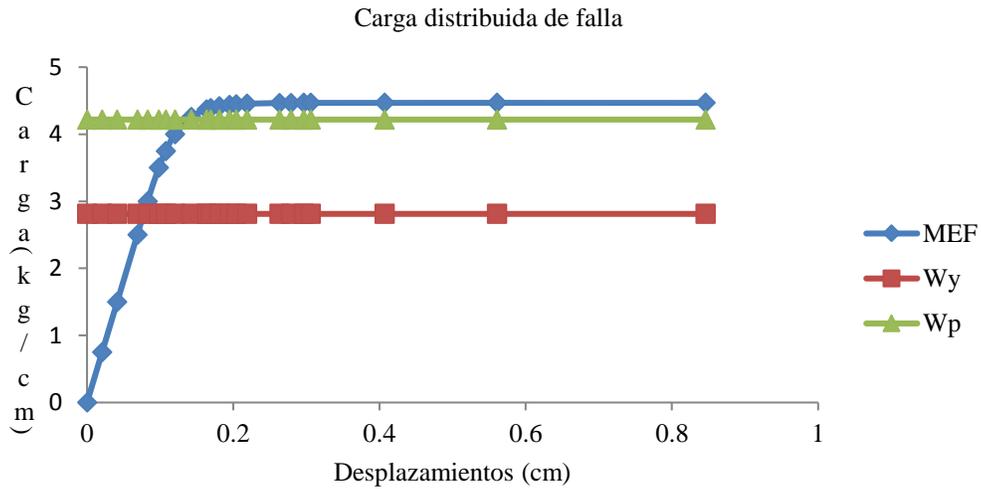


Figura 46. Carga de falla del ejemplo 5.

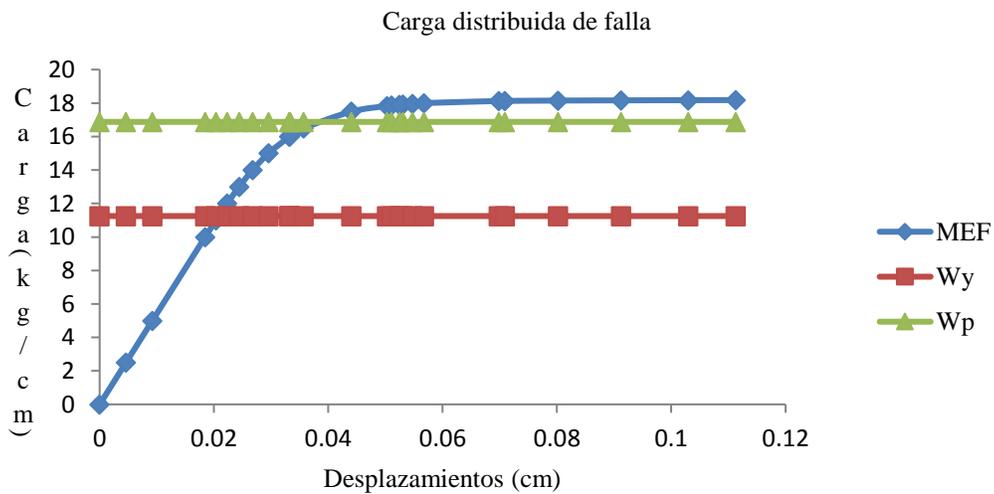


Figura 47. Carga de falla del ejemplo 6.

Cuando se hace la comparación entre los resultados con ambos métodos, el análisis con el MEF arroja que el sólido necesita más carga para llegar a la fluencia y a su vez resiste más fuerza de lo que supone la solución exacta, ver tabla 4.

Tabla 4. Carga de fluencia y plastificación para carga distribuida.

Ejemplo	Longitud (cm)	Solución exacta (kg/cm)		MEF (kg/cm)	
		W_y	W_p	W_y	W_p
4	300	1.25	1.88	1.33	1.95
5	200	2.81	4.22	2.98	4.47
6	100	11.25	16.88	16	18.37

5.6.3 Gráficas reacción-peralte.

Se recuerda que las gráficas precedentes y las que posteriormente se enseñen, pertenecen al tramo donde el momento es máximo, esto es en el extremo izquierdo de los modelos, a una distancia $x = 0$.

Una vez hecha esta valiosa aclaración, y además de mostrar las cargas de falla, ahora se presentan como camino óptimo para observar el desarrollo de la plastificación en las secciones, un conjunto de gráficas con las reacciones en x desarrollándose en todo el peralte. Para esto, es importante mencionar que por estática se sabe que la sumatoria de las reacciones es cero, debido a la inexistencia de fuerzas implicadas a lo largo del sólido (fuerzas en x).

5.6.4 Ejemplos con carga puntual en el extremo derecho.

Los datos que a continuación se exponen a modo de gráficas, siguen un desarrollo de la plastificación desde que ésta es escasa, llegando al esfuerzo de fluencia, donde se inicia la plastificación y finalmente se expone un estado avanzado de la misma en la sección del sólido. Para lo anterior, solo se consideraron algunos tiempos que permiten observar el fenómeno, y solo se revelan datos para ciertos tiempos, de 5 a 7 tiempos, los cuales son los de mayor relevancia.

En la gráfica 48 se pueden estudiar las reacciones correspondientes a la cantidad de carga aplicada al modelo, es decir, si el tiempo tiene un número 50 significa que la fuerza corresponde a esa cantidad, al menos hasta antes de alcanzar el esfuerzo de fluencia en el modelo, pues cuando esto sucede, ya no se comporta linealmente, y por lo tanto, el tiempo no expone la cantidad de carga aplicada.

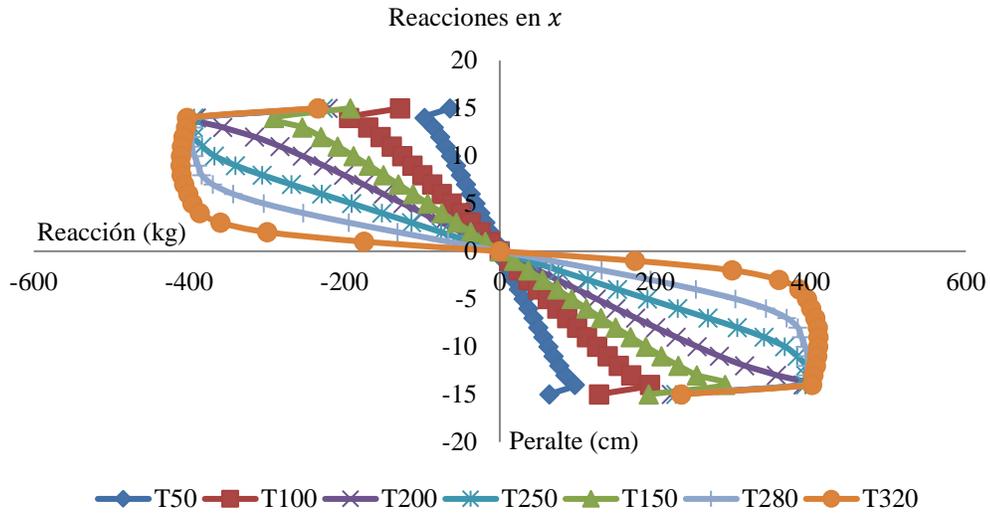


Figura 48. Plastificación del ejemplo 1.

Ahora bien, el comportamiento descrito anteriormente también sucede en la gráfica 49, pero además, en ambas ilustraciones es posible observar el momento en que se inicia la plastificación y como esta avanza desde la parte superior e inferior hacia el interior donde se localiza el eje neutro del sólido.

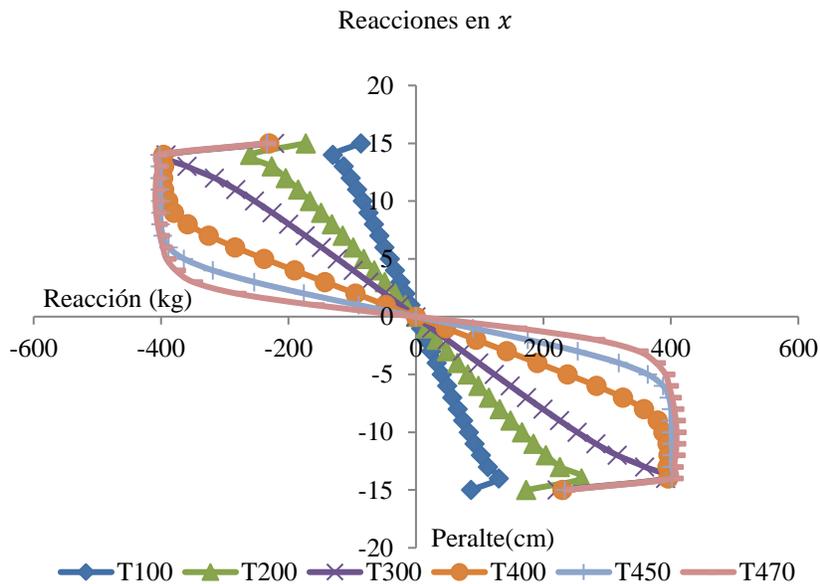


Figura 49. Plastificación del ejemplo 2.

Asimismo, la ilustración 50 correspondiente al modelo de longitud igual a 100 cm y con carga puntual, se comporta similarmente que los modelos de 300 y 200 cm en su longitud

con la única disparidad en cuanto a los tiempos, en este caso mayores para conseguir una plastificación casi total.

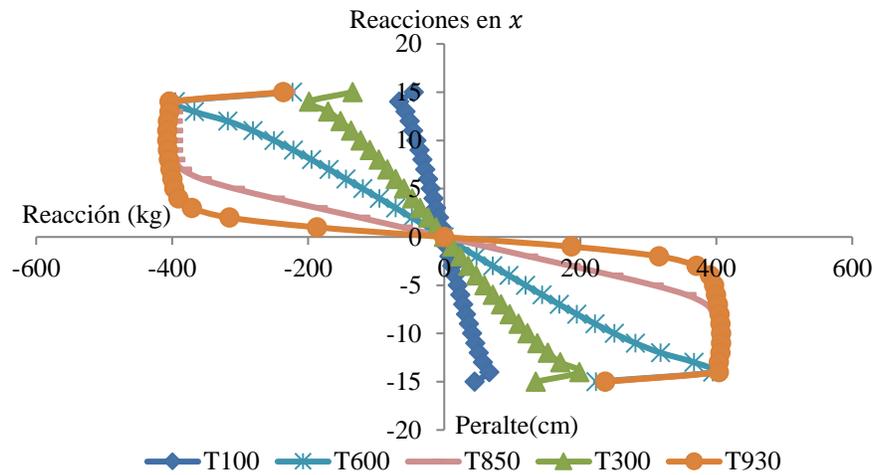


Figura 50. Plastificación del ejemplo 3.

Finalmente, es visible que para la primera gráfica (figura 48) el inicio de la plastificación ocurre para un tiempo muy inferior, esto comparándola con la gráfica del ejemplo con longitud de 100 cm (gráfica 50).

En resumen, el último tiempo cuando solo existe un núcleo con dimensiones que oscilan entre los 4 y 6 cm, es de T320, T500 y T930 (300, 200 y 100 cm de longitud, respectivamente), para los tres ejercicios.

5.6.5 Ejemplos con carga distribuida en toda su longitud.

Una dinámica similar a la descrita para cuando la carga es puntual sucede con las siguientes gráficas, donde se buscaron los valores para la transición de las secciones en los sólidos continuos, del rango elástico al plástico.

A continuación se presenta la gráfica 51, perteneciente a un modelo con carga distribuida en toda su longitud equivalente a 300 cm. Como ya se mencionó, en esta ilustración se puede estudiar el avance de la plastificación en la zona donde existe mayor momento (en el empotre del modelo). Para los tiempos representados con T51, T150, y T252, aún no se alcanza el esfuerzo de fluencia, es hasta T453 cuando se inicia ésta y finalmente, cuando se aumenta la carga se visualiza una total plastificación de la zona en un tiempo T621.

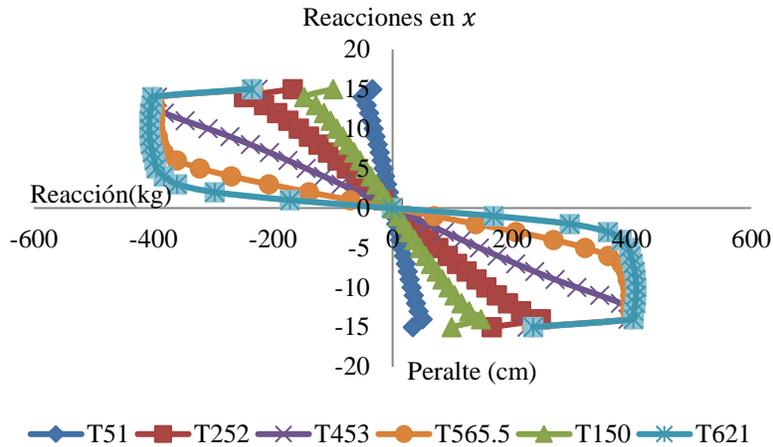


Figura 51. Plastificación del ejemplo 4.

A su vez, en la gráfica 52 correspondiente a una viga con longitud de 200 cm necesita de mayor fuerza para alcanzar los esfuerzos de fluencia y plastificación, es decir, se ve como en el tiempo 500 ya entra en el rango no-lineal y en T900 solo queda un núcleo lineal pequeño en la sección.

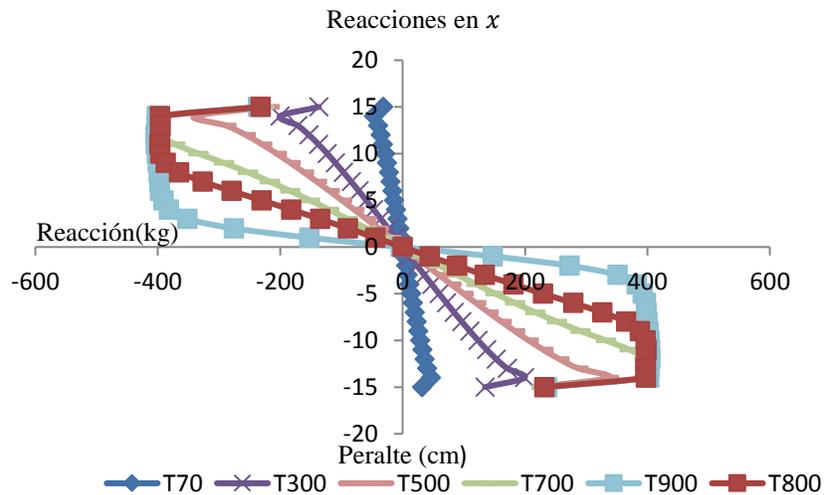


Figura 52. Plastificación del ejemplo 5.

Finalmente, se expone el modelo plastificado de la viga con longitud de 100 cm, el cual necesita una cantidad alta de carga para lograr reducir casi por completo el núcleo elástico cercano al eje neutro, es decir, el objetivo se alcanza en un tiempo de 1850.

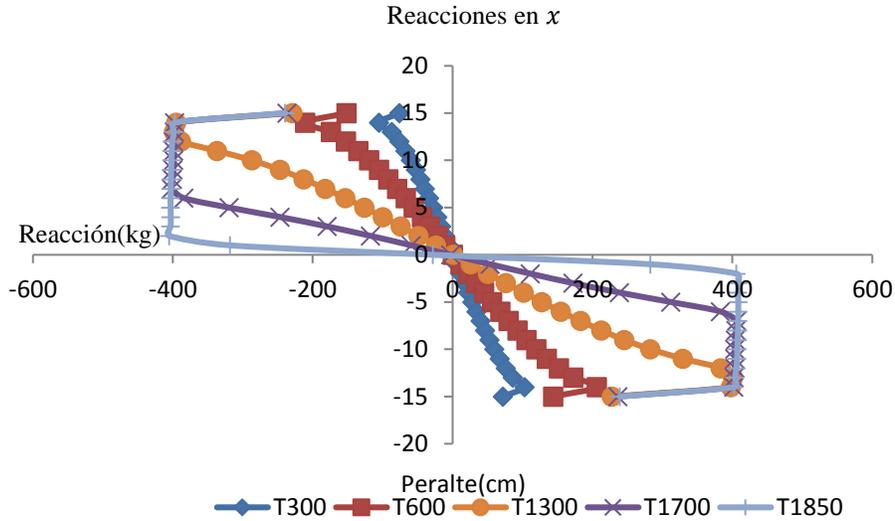


Figura 53. Plastificación del ejemplo 6.

Además, es importante mencionar la conservación de un núcleo no plastificado con dimensiones similares a las de los tres ejemplos con la carga puntual. Asimismo, es notable que los resultados presentados en las precedentes graficas siguen el comportamiento explicado en el capítulo 3.

Como complemento, por inspección y razonamiento de las gráficas anteriores, se afirma que en la parte superior del eje neutro ($y = 0$) existen esfuerzos de tensión, puesto que las reacciones son negativas y debajo de la superficie neutra aparecen esfuerzos de compresión.

5.6.6 Deformaciones de la sección transversal.

Otro rasgo importante y necesario de mencionar son las deformaciones de la sección transversal, tópico comentado en el subcapítulo 2.4. Por razones de practicidad y para mostrar resultados no tediosos, solo se expondrá el comportamiento de las secciones transversales para los ejemplos donde la relación L/h dista considerablemente. Entonces, solo se hablará de las relaciones equivalentes a 10 (ejemplo 1 de longitud 300 cm), y 3.33 (ejemplo 3 de longitud 100 cm), donde la carga se aplica de manera puntual.

Además, los tiempos en los que se muestran las gráficas van desde lo lineal hasta una plastificación no muy prolongada, dado que serían poco visibles las deformaciones para cargas pequeñas si se mostrasen las secciones con deformaciones de total plastificación.

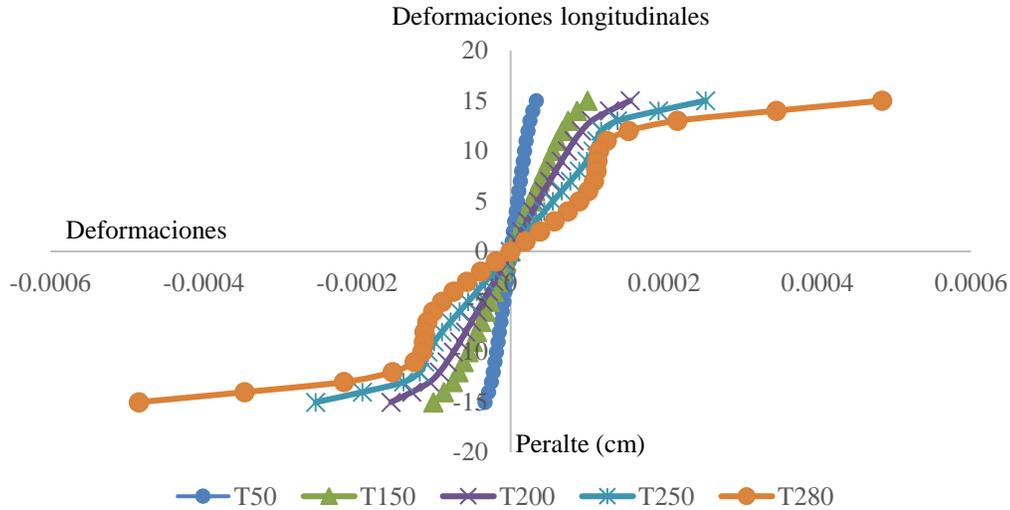


Figura 54. Deformación de la sección transversal del ejemplo 1.

Asimismo, la deformación de las secciones transversales es similar, con la única disparidad en los tiempos necesarios para alcanzar el comportamiento no-lineal, ver figuras 54 y 55.

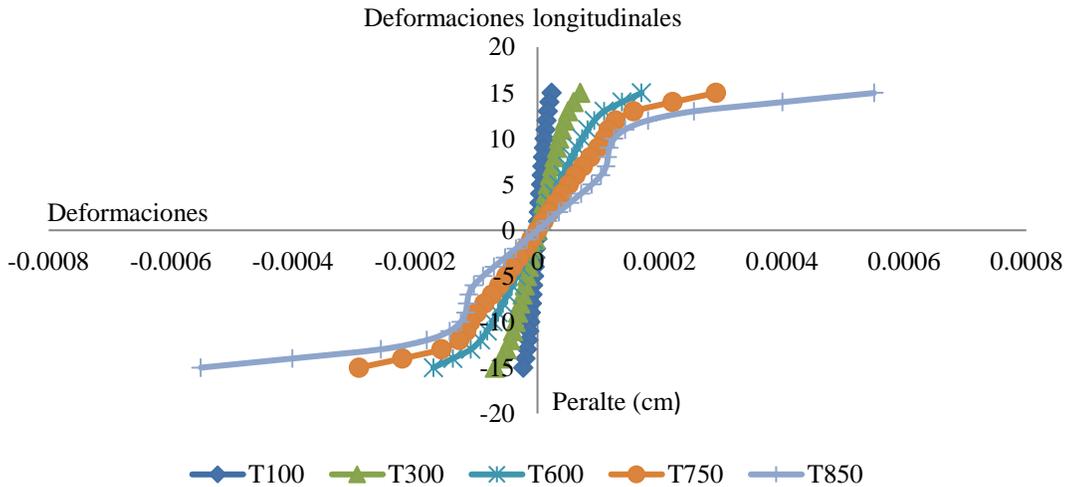


Figura 55. Deformación de la sección transversal del ejemplo 3.

Otra observación importante sucede durante los tiempos equivalentes a cargas lineales, donde las gráficas permiten demostrar una permanencia plana por parte de las secciones transversales. Aunque esta condición deja de ser aceptable cuando se vislumbra la entrada a la zona no lineal, debido a la forma poco común que muestra las secciones. Es notable además, la gran magnitud de las deformaciones presentadas en los extremos del peralte, en comparación con las del centro de la sección.

Por otro lado, para suplir las posibles dudas que deje no mostrar las deformaciones correspondientes a una sección con plastificación avanzada, se exhibe solo una única gráfica correspondiente a un ejemplo de longitud equivalente a 300 cm, ver figura 56.

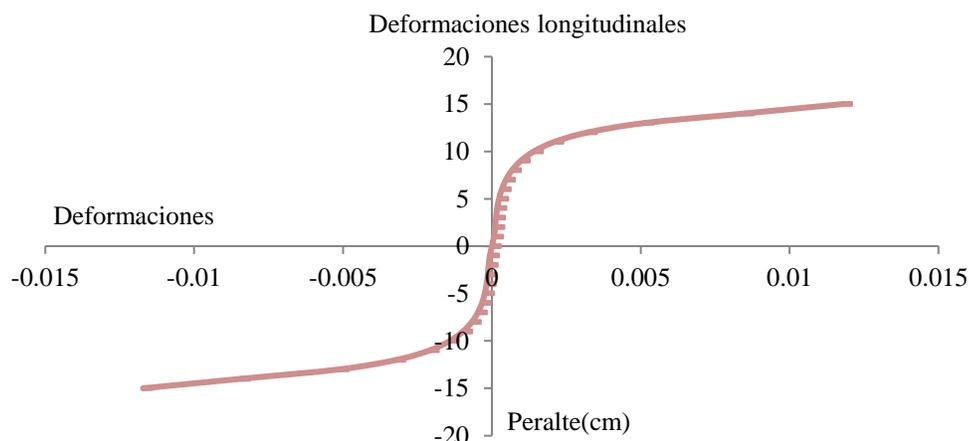


Figura 56. Deformación de la sección transversal ya plastificada del ejemplo 3.

Entonces, cuando el incremento de fuerza aplicada al sólido continúa hasta una plastificación considerable, es decir, cuando existe muy poco núcleo elástico, las secciones tienden a revelarse con forma de “s” alargada, ver figura 56.

5.6.7 Diagramas momento-curvatura.

Al continuar con el análisis y descripción de los resultados se llegó a un punto esencial del presente trabajo: los diagramas momento-curvatura. Para esto, es necesario aclarar que el diagrama momento-curvatura obtenido mediante la solución exacta, es el mismo para todos los ejemplos, debido a que la variación depende de la base y la altura de la sección transversal, como se explicó en la descripción de las fórmulas del capítulo 3.

Asimismo, a causa de la poca variación obtenida por los resultados vía el MEF, y los valores calculados mediante la solución exacta, se comentarán solo los diagramas equivalentes a las longitudes de 300 y 100 cm para las dos condiciones de carga.

5.6.8 Diagramas momento curvatura (carga puntual).

Las siguientes figuras muestran los diagramas obtenidos mediante el MEF, para esto se debe mencionar además que en ellos se ilustra una sencilla comparación con enfoque principal hacia el momento plástico. A continuación se muestra la gráfica de la viga con longitud de 300 cm, ver figura 57. En ella es visible la diferencia entre los momentos plásticos de la solución exacta y la dada con el MEF, mientras la solución aproximada oscila los 90000 kg-cm de momento, la solución exacta se da en 84375 kg-cm. Como consecuencia se puede afirmar que para flexionar una viga es necesaria más fuerza de la que se calcula con los métodos tradicionales, dado que para un mismo valor de curvatura el momento flexionante varía de acuerdo al tipo de solución.

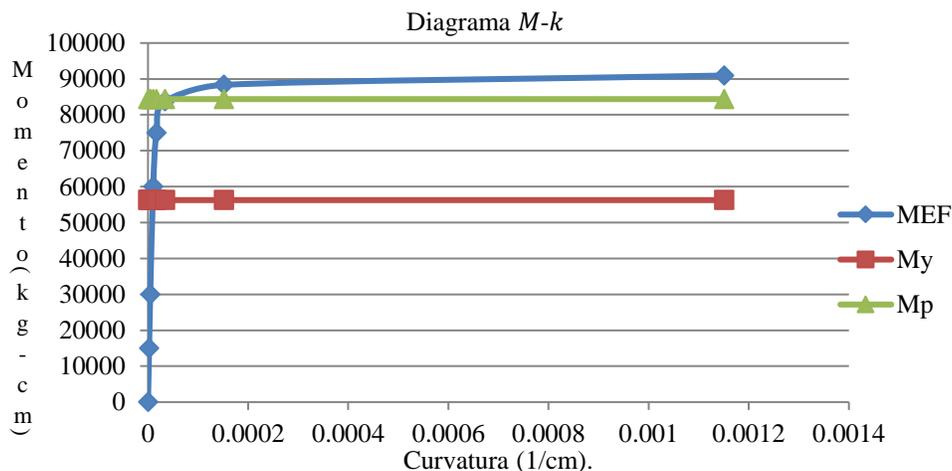


Figura 57. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 1

Asimismo, en la gráfica 58 se puede estudiar la curvatura relacionada al momento flexionante para el modelo de longitud igual a 100 cm. Por otro lado, si se analizan los puntos con mayor momento graficados en ambas ilustraciones, se observa que en el ejemplo 3 el momento aplicado es de 90956.96 kg-cm y genera una curvatura de 0.000232 1/cm, mientras que en el ejemplo de la figura 57 el momento de 90935.5 kg-cm resulta en una curvatura en la viga de 0.0011506 1/cm, con esto se puede afirmar que en relaciones longitud-peralte cada vez menores, el modelo se plastifica sin que haya demasiada flexión.

A su vez, en la tabla 5 se realiza un resumen respecto a los diagramas de las figuras 57 y 58.

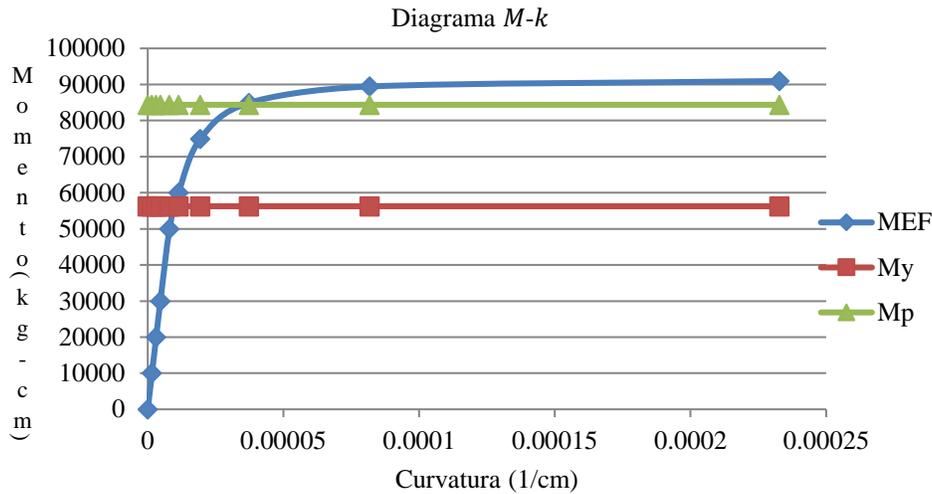


Figura 58. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 3.

Tabla 5. Resumen de diagramas momento-curvatura para carga puntual.

Ejemplo	Longitud (cm)	Solución exacta (kg-cm)		MEF (kg-cm)
		M_y	M_p	M_p
1	300	56 250	84 375	90 000
3	100	56 250	84 375	90 000

En la tabla 5 no se coloca una columna referente al momento de fluencia para el MEF, debido su compleja identificación por el manejo de demasiada información. Aunque es posible que siga la misma tendencia de los datos mostrados en las gráficas de carga, es decir, que el momento de fluencia obtenido con el MEF sea mayor que la solución exacta. Asimismo, es notoria la superioridad del momento plástico obtenido con el MEF.

5.6.9 Diagramas momento curvatura (carga distribuida).

Así como en el apartado anterior, solo se exhiben dos diagramas pertenecientes a sólidos continuos con longitudes de 300 y 100 cm. Asimismo, se creó una tabla, parecida a la expuesta en el capítulo anterior, puesto que los diagramas presentan un comportamiento similar en los puntos analizados. La primera gráfica se trata de los resultados pertenecientes a la viga con carga distribuida y longitud de 300 cm.

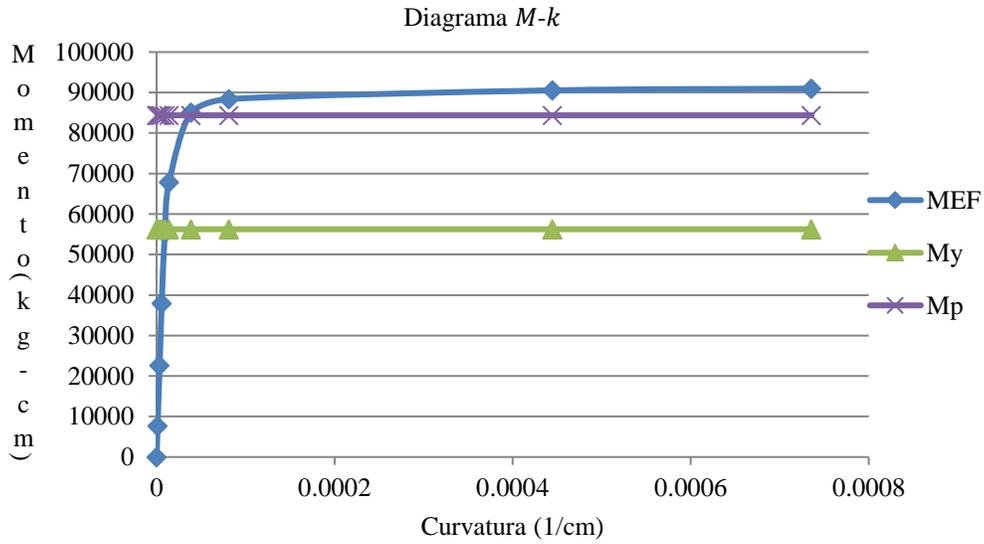


Figura 59. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 4

De igual manera, el momento plástico alcanzado con el MEF para ambos modelos supera al que se calculó de forma exacta, dado que en las gráficas supera el valor de 90000, pero la curvatura no es tan significativa.

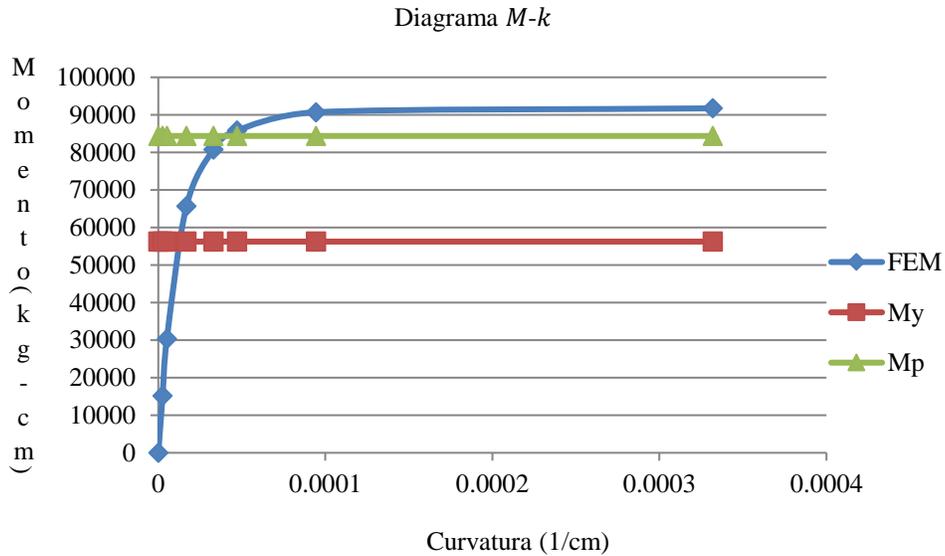


Figura 60. Diagrama momento-curvatura del ejemplo 6

Las tablas 5 y 6, no exponen los valores para la curvatura, debido a la sencilla identificación de ésta en los diagramas. Además, si se habla de alguna diferencia entre ellos, recae

justamente en ésta. Este último punto es comentado en la sección posterior, donde se comparan los diagramas obtenidos por los dos métodos.

Tabla 6. Resumen de los diagramas momento-curvatura para carga distribuida.

Ejemplo	Longitud (cm)	Solución exacta (kg-cm)		MEF (kg-cm)
		M_y	M_p	M_p
4	300	56 250	84 375	90 000
6	100	56 250	84 375	90 000

Por otro lado, en el capítulo 3, se comentó la definición de momento plástico, en este concepto se dijo: “representa el momento máximo que puede soportar una viga de material elastoplástico”. Con esta definición en mente, se estudia en las gráficas que en todos los casos el MEF predice el momento plástico por arriba del que se obtiene de manera exacta, en consecuencia la resistencia de una viga es mayor de la que se calcula con métodos tradicionales.

Finalmente, en los diagramas se nota que tan agudamente se flexiona una viga (es decir, el valor de la curvatura) con las características de los ejemplos analizados, para primero dejar el comportamiento lineal y después observar el inicio de la plastificación.

Asimismo, es lógica la variación de la curvatura debido a que no existe la condición de flexión pura en la viga.

5.6.1 Comparación de los diagramas momento-curvatura.

Para continuar con el análisis de los resultados, se exponen tres diagramas correspondientes a longitudes de: 300, 200 y 100 cm, ver figuras 62, 64 y 66, respectivamente, y donde la carga es puntual. El análisis de los modelos con carga puntual se justifica debido a la similitud entre el comportamiento de las gráficas correspondientes a carga puntual y donde la fuerza es distribuida. Además, cabe señalar que la plastificación a la que se llevaron los diagramas momento-curvatura de Análisis estructural (AE), corresponden a un núcleo no plastificado variable para cada caso; se hizo la comparación de esta forma para poder apreciar ambas gráficas de mejor forma. Sin embargo, a pesar de que el porcentaje de plastificación no es el mismo entre la solución exacta y la dada por el MEF. El ejercicio es útil, dado que permite observar el instante en que en ambas soluciones tienden asintóticamente por su no-linealidad. Y como complemento se exponen las figuras 61, 63 y 65, que acompañan la plastificación de la sección en cada ejemplo analizado.

Por inspección, en la viga de longitud 300 cm (figura 62) es notable que con la solución aproximada (MEF) es posible plastificar el mismo porcentaje de la sección que con la solución exacta, pero es necesaria una mayor cantidad de momento flexionante.

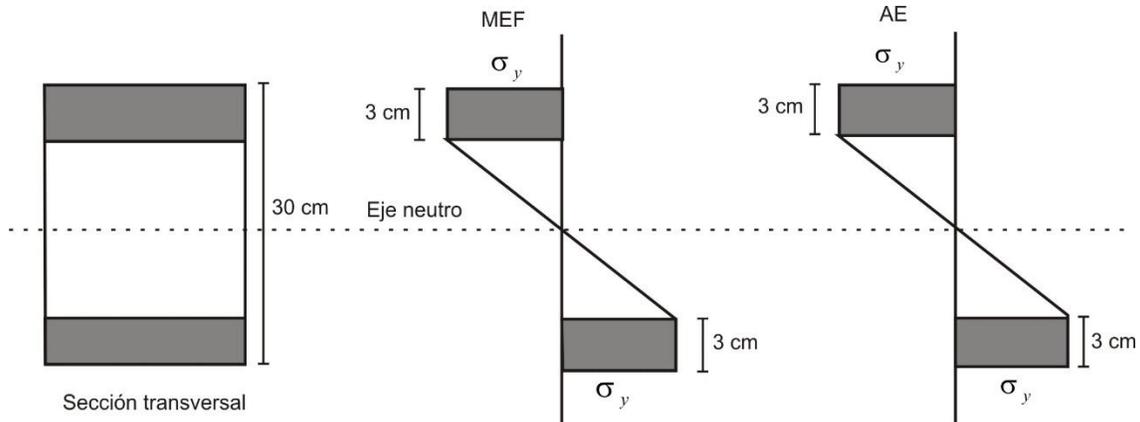


Figura 61. Plastificación de la sección del modelo de longitud 100 cm.

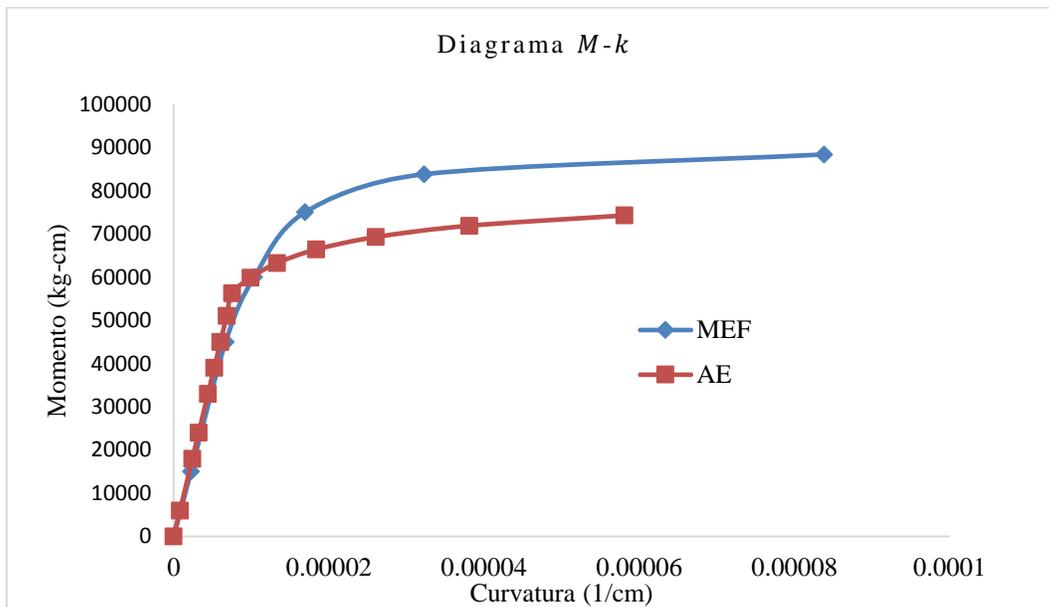


Figura 62. Diagrama momento curvatura del ejemplo 1.

Ahora bien, al hablar del modelo con longitud de 200 cm, se expone un diagrama momento-curvatura con cierta similitud entre ambas soluciones, pero el grado de plastificación de la sección difiere en gran medida. Mientras que con el MEF se ha alcanzado un núcleo elástico de 14 cm, con AE se ha aproximado a la plastificación casi total del modelo, dejando un núcleo elástico de 4 cm.

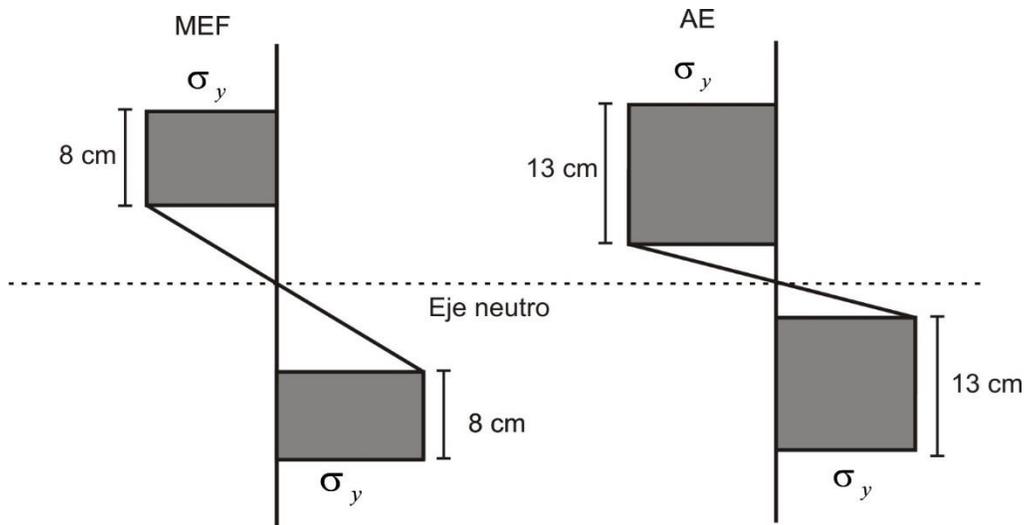


Figura 63. Plastificación de la sección del modelo de longitud 200 cm.

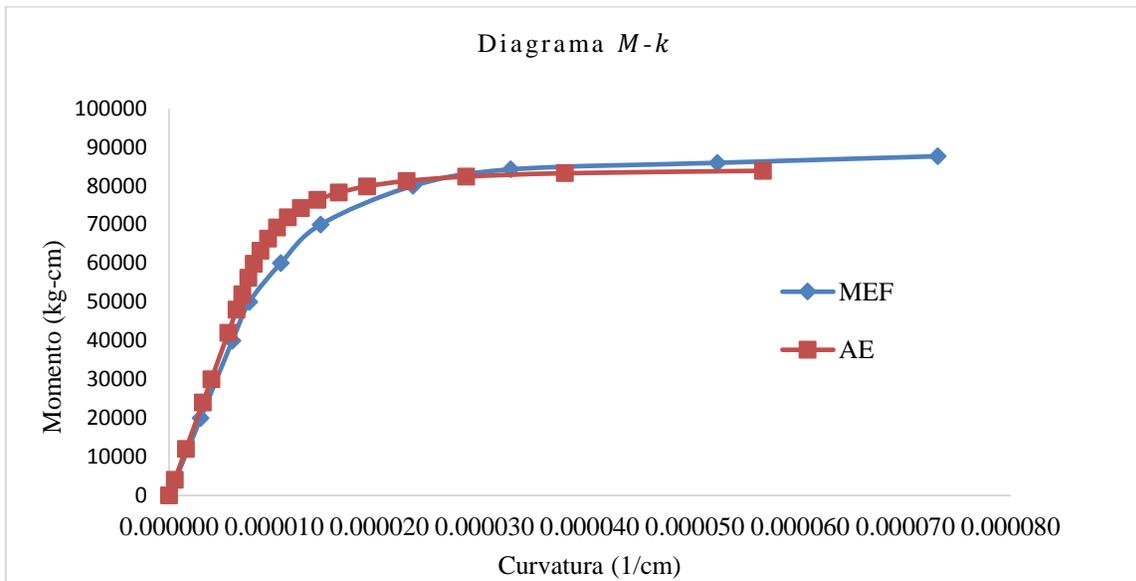


Figura 64. Diagrama momento curvatura del ejemplo 2.

Finalmente, para el modelo designado como ejemplo 3 (longitud de 100 cm), existe una similitud entre ambas soluciones y la parte plastificada es desigual en un porcentaje pequeño. Es decir, con el Método de los Elementos Finitos se logra una plastificación en los extremos de 9 cm (por lado) y la solución exacta fija una plastificación de 10 cm, ver figura 65.

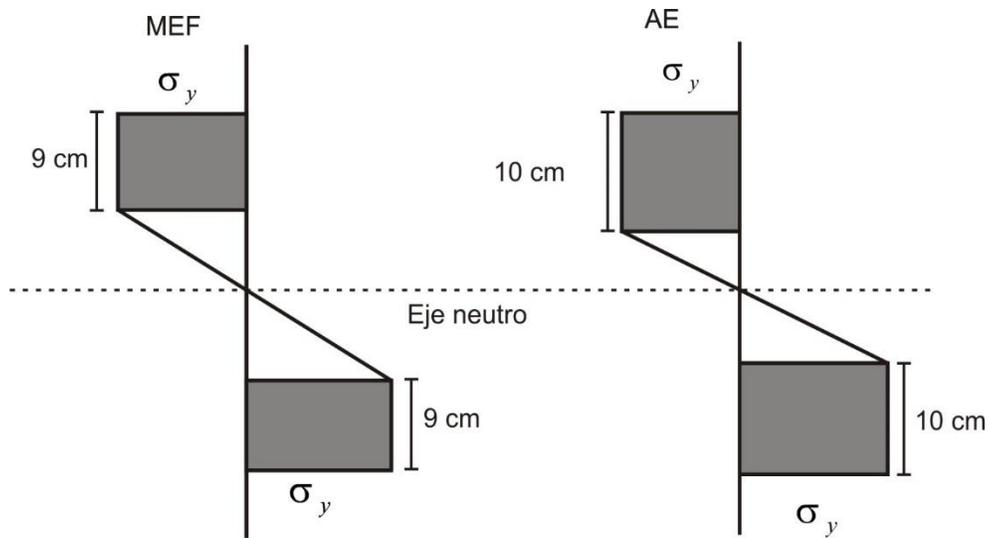


Figura 65. Plastificación de la sección del modelo de longitud 300 cm.

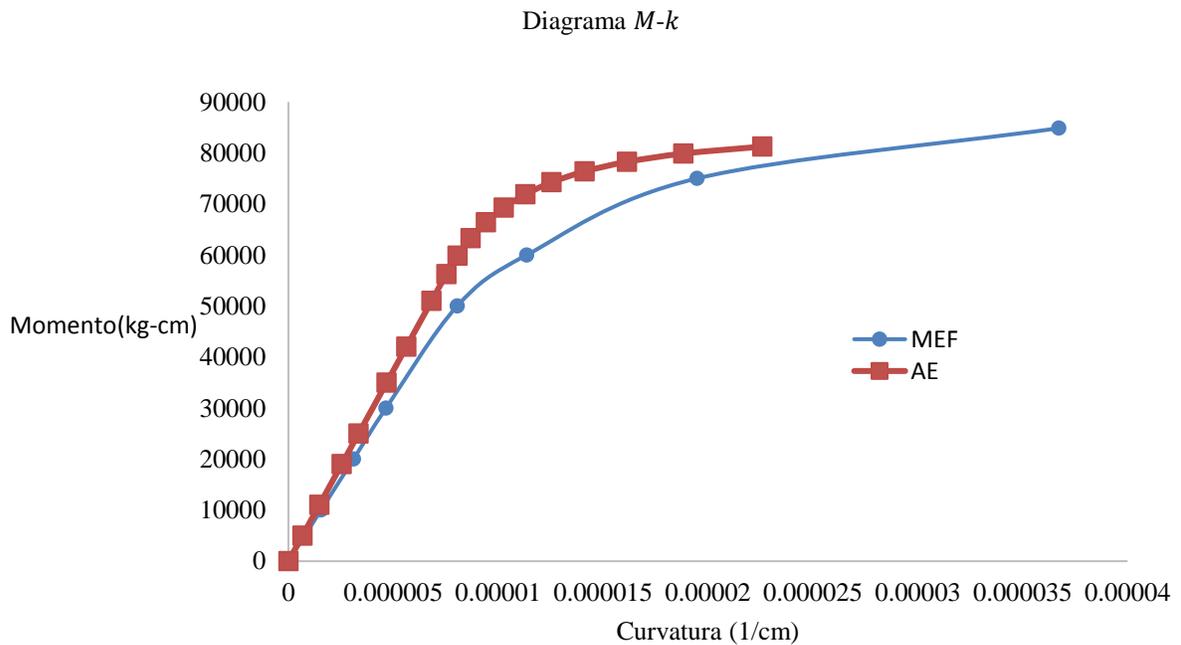


Figura 66. Diagrama momento curvatura del ejemplo 3.

Como complemento a lo anterior comentado, es posible decir que en cuanto al comportamiento de los diagramas obtenidos con el Análisis estructural y el MEF, ambos poseen similitud en el rango lineal, suscitándose la disparidad en el acceso al rango plástico.

5.6.2 Diagramas momento-curvatura para la plastificación progresiva de un modelo.

Como complemento, se retomaron las ideas descritas en el capítulo 3 respecto a la progresiva plastificación de la sección, y a su vez se creó la gráfica 67 donde se ilustran los diferentes estados por los que pasa la sección del modelo al incrementarse la carga y por consecuencia los esfuerzos y el momento flexionante. En dicha figura, la sección marcada del eje neutro hacia los extremos de la zona plastificada es denotada con la letra e y corresponde al núcleo elástico de la sección. La viga analizada en este apartado corresponde a una longitud igual a 100 cm con la carga puntual en su extremo superior derecho.

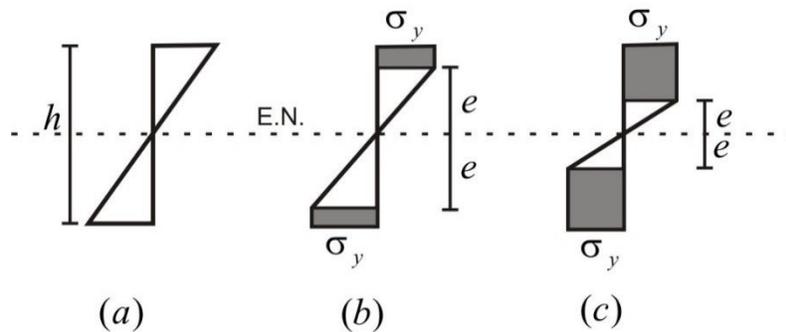


Figura 67. Estado de esfuerzos en la sección.

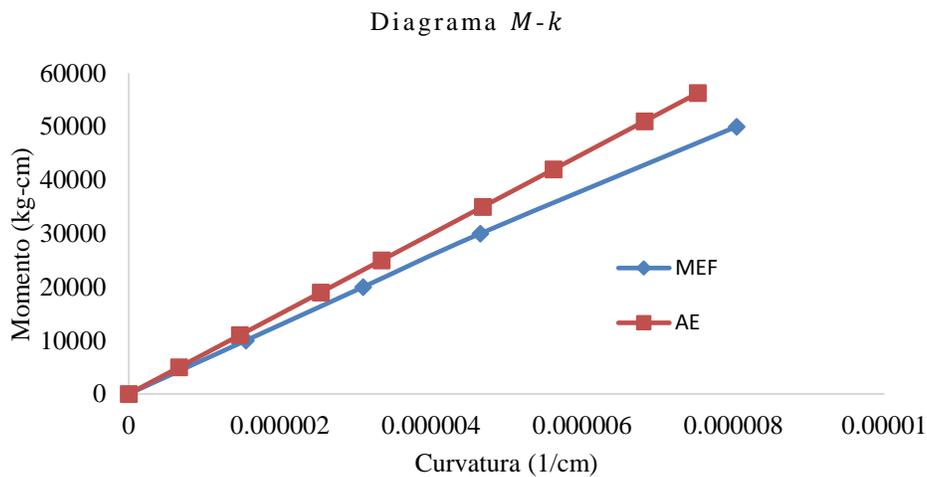


Figura 68. Comportamiento elástico-lineal del modelo.

Ahora bien, la figura 68 representa la sección (a) de la figura 67, esto por su estado elástico-lineal en ambas soluciones, es notable una desigualdad entre ambas soluciones.

Al continuar con el análisis e incrementar la fuerza aplicada, se llega a un estado de plastificación correspondiente a 10 cm y núcleo elástico de 20 cm, ver figura 67. Para este estado la disparidad entre ambas soluciones es más marcada, dado que con el MEF resulta un momento flexionante de 74999.57 kg-cm que genera una curvatura de 0.0000194713 1/cm, mientras la solución exacta arroja un momento de 69250 kg-cm y la curvatura resulta de 0.0000102671 1/cm, ver figura 69.

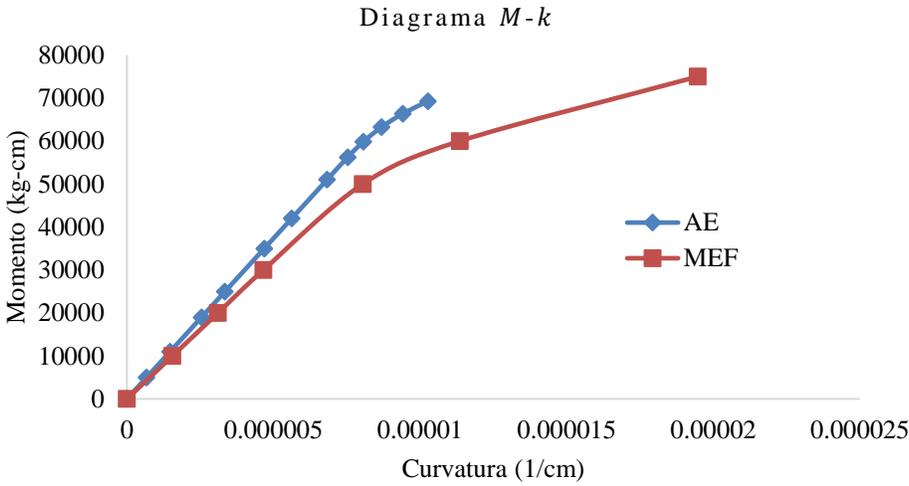


Figura 69. Inicio y prolongación de la plastificación de la viga.

Asimismo, cuando el núcleo elástico solo es de 10 cm, sección (c) de la figura 67, la zona plástica resulta de 20 cm totales. Los momentos ahora son de 89096.8 kg-cm y 79875 kg-cm para curvaturas de 0.0000818067 y 0.0000188231 1/cm, obtenidos con el MEF y la solución exacta, respectivamente, ver figura 70.

Entonces, de acuerdo con el análisis anterior, y sabiendo que el análisis hecho con el MEF genera soluciones aproximadas, se entiende que para un valor cualquiera de momento flexionante, la flexión presente en la viga (medio continuo) será mayor realmente que la tomada en cuenta a la hora de realizar análisis con métodos tradicionales (solución exacta).

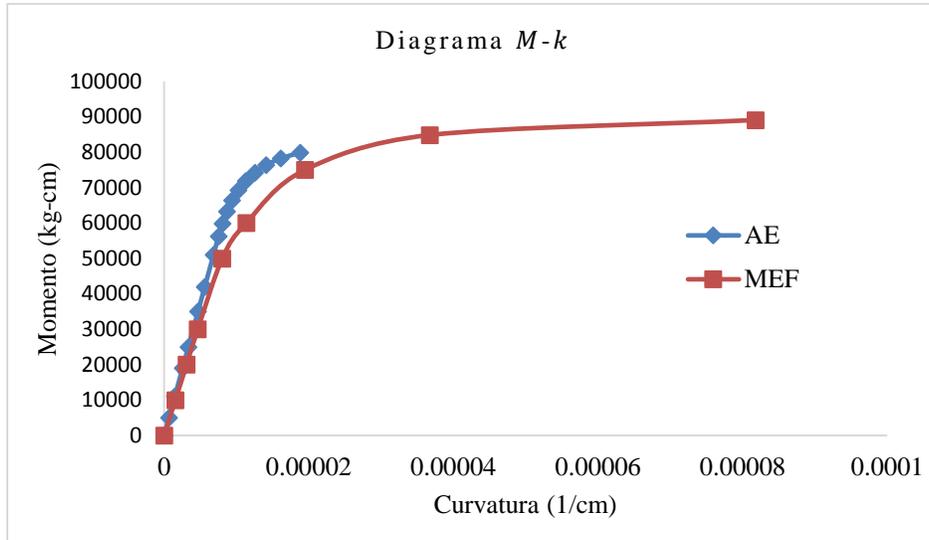


Figura 70. Plastificación con núcleo elástico de 10 cm.

Asimismo, es notable en los diagramas precedentes que es necesario un mayor momento flexionante, según el Método de los Elementos Finitos, para conseguir una plastificación casi total de la sección.

6 Conclusiones.

Con el análisis específico y objetivo de los resultados, se puede calificar el alcance de los objetivos con un porcentaje favorable. A continuación, se muestran de manera breve y concisa algunas de las conclusiones:

- En la totalidad de las gráficas representativas de las cargas aplicadas a los sólidos, tanto la carga de fluencia como la del inicio de la plastificación, fueron superiores las obtenidas con el MEF que la solución exacta.
- En cuanto a los diagramas momento-curvatura dados por el MEF, el momento donde concurren todos los ejemplos es de un valor aproximado de 90 000 kg-cm.
- Las secciones transversales permanecen planas y normales al eje neutro, durante el incremento de carga cuasi-estática, en el rango elástico y lineal; posterior a ello en el rango inelástico, las secciones sufren alaveo por efecto de las deformaciones por cortante.
- En todos los ejemplos se logró la plastificación de las secciones.

Como complemento, se recomienda realizar más análisis de este tipo con incrementos de carga no mayores a 1 kilogramo, dado que los resultados tienden a ser diferentes si se adoptan incrementos exagerados de carga.

Bibliografía

- Ayres, F. *Cálculo diferencial e integral*. España: Mcgraw-Hill, 1976. ISBN:9684511825
- Barber, J. *Intermediate Mechanics of materials*. New York: Springer, 2000. ISBN:9789400702943
- Borts, R., y L. Sluys. *Computational Methods in Non-linear Solid Mechanics*. The Netherlands: Delf University of Tecnology, 1999.
- Burden, R., y Douglas J. *Análisis Numérico*. CDMX: International Thomson Editores, 1998. ISBN:9687529466
- Carrera, E., G. Giunta, y M. Petrolo. *Beam structures classical and advanced theories*. New Delhi: Wiley, 2011. ISBN: 9780470972007
- Celigueta, J. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. España: tecnun, 2008. ISBN: 9788492197026.
- Chandrupatla, T., y A. Belegundu. *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. México: Prentice Hall, 1999. ISBN: 9789701702604
- Chávez, J. *Introducción al análisis estructural*. Facultad de ingeniería civil, U.A.N.L., 2001.
- Fornóns, J.M. *El método de los elementos finitos en la ingeniería de estructuras*. Barcelona: Universidad Politecnica de Barcelona, 1982. ISBN:8460026477
- García, R. *Fundamentos básicos del elemnto finito*. México: UNAM, 2007.
- Gere, J., y B. Goodno. *Mecánica de materiales*. México: Cengage Learning, 2009. ISBN:9786074813159
- Heyman, J. *La ciencia de las estruturas*. Instituto Juan de Herrera, 1999. ISBN:8495365987
- Horne, M.R. *Plastic Theory of structures*. Manchester: Pergamon Press, 1979. ISBN: 0080227376
- Kollar, L. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University, 2003. ISBN:9780511057038
- Megson, T. *Structural and Stress Analysis*. Elsevier, 2005. ISBN: 0750662212
- «Normas Técnicas Complementarias para LA CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO.» CDMX, 2004.
- Pilkey, W. *Analysis and design of elastic beam*. New York: John Wiley and sons, 2002. ISBN:0471381527
- Popov, E. *Mecánica de sólidos*. México: Pearson Education, 2000. ISBN:9701703987
- Pytel, A., y J. Kiusalaas. *Mechanics of materials*. USA: Cengage Learning, 2010. ISBN: 9780495667759
- Seegerling, L. *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley and sons, 1984.
- Tapia, M. *Análisis de estructuras de barras con leyes constitutivas no lineales*. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2013.
- Taylor, R.L. *FEAP: a Finite Element Analysis Program*. Berkeley: University of California, 2013.

Timoshenko, S. y Gere, J. *Mecánica de materiales*. México: Iberoamerica, 1986. ISBN:9687270160

Vázquez, M., y E. López. *El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural*. Madrid: Noela, 2001. ISBN: 9788488012067

Wang, M., J. Reddy, y K. Lee. *Shear deformable beams and plates, Relationships with classical solutions*. Oxford: Elsevier, 2000. ISBN: 0080437842

Zienkiewicz, O. *El método de los elementos finitos*. España: Reverté, 1982.