Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de maestría y doctorado en ciencias matemáticas y de la especialización en estadística aplicada. Instituto de Matemáticas.

Variedades de Frobenius

Tesis
que para optar por el grado de: maestro en ciencias

presenta: Ramiro García Bautista

Director de Tesis: Dr. Carlos Segovia González. Instituto de Matemáticas

2018

Ciudad Universitaria, CD. MX., 19 de junio 2018

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi hija Larisa Estefania García Olivera, la cual fue la inspiración fundamental para su culminación...

Agradecimiento

Agradezco primeramente a mi asesor de tesis, Doctor Carlos Segovia González por haber confiado en mí y ser paciente durante este largo tiempo. También agradezco a mi esposa Enedina Olivera Martinez por estar a mi lado durante este tiempo y darme su voto de confianza, y a todos los que me rodean y que incentivaron en terminar este trabajo de forma directa, en particular a mis suegros, Cecilia Martinez y Manuel Olivera, y a mi hermano Venancio Claudio García.

También hago un agradecimiento especial a la UNAM por la formación en Matemáticas recibida y por su gran labor al formar personas de pensamiento critico. Al CONACYT por el apoyo recibido, y hago mención que los apoyo en ciencia siempre darán frutos para un mejor país.

A mis sinodales por el apoyo incondicional en la revisión de la tesis.

Introducción

El concepto de un *álgebra de Frobenius* es importante en el estudio de las representaciones de grupo desde su concepción por Ferdinand Frobenius y su desarrollo por Tadasi Nakayama. Actualmente su estudio a retomado fuerza por su descubrimiento de aplicaciones en teorías topológicas cuánticas de campos.

En el estudio de las variedades diferenciables podemos estudiar nuevas estructuras que se van generando al dotar de más propiedades a dicha variedad. Una de esas estructuras es la de tomar una álgebra de Frobenius en cada espacio tangente y la cual produce el concepto de una *variedad de Frobenius*.

En esta tesis damos un estudio de las álgebras de Frobenius así como su generalización a variedades de Frobenius de una forma estructurada y sencilla. Una variedad de Frobenius consta de un producto con unidad donde la asociatividad del producto depende totalmente de un sistema de ecuaciones diferenciales conocidas como las ecuaciones WDVV (Witten-Dijkgraff-Verlinde-Verlinde). La solución de dicho sistema se llama el *potencial de Frobenius*. En nuestro trabajo estudiaremos un caso particular de un potencial de Frobenius específico que resuelve el problema enumerativo de Kontsevich, acerca de contar el número de curvas de género cero y grado d que pasan por $3d-1$ puntos en $\mathbb{CP}^2$.

La descripción de la presente tesis es como sigue: en el capítulo 1 introducimos lo que es una estructura de álgebra de Frobenius y exponemos varios ejemplos que nos ayudan a entenderla, además introducimos un resultado debido a Lowell Abrams para ver cuando una estructura algebraica tiene una estructura de álgebra de Frobenius. En el capítulo 2 introducimos lo que es una estructura de variedad de Frobenius, donde desglosamos todas las propiedades que la caracterizan, además estudiamos en este mismo capitulo lo que es un potencial de Frobenius y concluimos con la construcción de ejemplos de variedades de Frobenius utilizando el potencial. Al final de la tesis se incluye un apéndice con algunos conceptos importantes que utilizamos.

Tabla de Notaciones

Se dan la notaciones que se utilizan en la tesis.

Simbología	Definiciones
G	Grupo.
M	Variedad diferenciable.
g	Métrica de la variedad diferenciable.
$(\ ,\ \ )$	Producto interno del espacio vectorial.
$\langle\ ,\ \rangle$	Producto interno entre un espacio y su dual.
Δ	Indicará el coproducto de un álgebra.
d	Derivada exterior de De Rham.
$\mathcal{L}$	Derivada de Lie.
D	Derivada covariante.
R	Curvatura de Riemanniana.
∇	Conexión de Levi-Civita.
Negro	Un texto en negro indicará un concepto importante.
Itálica	Un texto en itálica indicará una idea principal.
$\square$	Término de una demostración.

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Frobenius

En este capítulo se expone la definición de álgebra de Frobenius con algunas equivalencias y algunos ejemplos. Nuestro objetivo es introducir posteriormente la definición de una variedad de Frobenius en el siguiente capítulo.

1.1. Álgebra de Frobenius

Un k-álgebra A es un k-espacio vectorial con un producto $\circ : A \otimes A \to A$, con unidad $u : k \to A$. Si el producto es asociativo diremos que es un álgebra asociativa, o un álgebra conmutativa si el producto lo es. Exponemos la definición del álgebra de Frobenius, la cual tendrá varias equivalencias.

Definición 1.1 (Álgebra de Frobenius)**.** Un **álgebra de Frobenius** es un k-álgebra A de dimensión finita, con una forma k-linea $\theta : A \longrightarrow k$, que define una forma bilineal $(a\ ,\ b) := \theta(a \circ b)$ no degenerada, compatible[1] con el producto.

Observemos que si el álgebra es asociativa, la compatibilidad con el producto en la definición 1.1 puede omitirse. En este trabajo solamente se trabajará con álgebras asociativas, salvo que se diga lo contrario. Usualmente a la forma lineal θ es común decirle el mapeo traza.

[1]La forma bilineal no degenerada $(\ ,\ ) : A \otimes A \to k$ se dice compatible con el producto, en el siguiente sentido

$$(ab\ ,\ c) = (a\ ,\ bc)$$

donde $ab = \circ(a, b)$.

Definición 1.2. Un **álgebra de Frobenius** es un k-álgebra A de dimensión finita con una función lineal $\varepsilon : A \to k$, tal que el único ideal del $\ker(\varepsilon)$ es el trivial.

La forma lineal ε se le conoce como counidad.

Definición 1.3. Un **álgebra de Frobenius** es un k-álgebra A de dimensión finita con un isomorfismo de A-módulos[2] $\lambda : A \to A^*$.

Para más información sobre álgebra de Frobenius se puede consultar en [2, 6, 13]. Ahora demostraremos que las tres definiciones de álgebras de Frobenius son equivalentes.

Proposición 1.1. *Las definiciones 1.1, 1.2, 1.3 son equivalentes.*

Demostración: 1.1)⇒ 1.2) Definamos la counidad

$$\begin{aligned} \varepsilon : A &\longrightarrow k \\ a &\longmapsto (1_A, a)\,, \end{aligned}$$

la cual es lineal. Falta probar que no tiene ideales no triviales: si $a \in \ker(\varepsilon)$ y para todo $b \in A$ se tiene $\varepsilon(ba) = 0$, por definición el generado por a es un ideal en el $\ker(\varepsilon)$; por compatibilidad se tiene $\varepsilon(ba) = (1_A, ba) = (b, a) = 0$, lo que implica que $a = 0$, pues $(\ ,\ )$ es no degenerada. Esto demuestra que el único ideal es el trivial.

1.2) ⇒1.3) Definamos

$$\begin{aligned} \lambda : A &\longrightarrow A^* \\ a &\longmapsto \lambda_a, \end{aligned}$$

donde $\lambda_a : A \to k$, $\lambda_a(b) = \varepsilon(ab)$. Observemos que si $\lambda_a(b) = \varepsilon(ab) = 0$ para todo $b \in A$, el generado por a es un ideal en el $\ker(\varepsilon)$, y al no tener $\ker(\varepsilon)$ ideales no triviales se tiene que $a = 0$, entonces λ es inyectiva. Y como $\dim A = \dim A^*$, pues A es de dimensión finita, luego se tiene que λ es un isomorfismo.

1.3) ⇒1.1) Definamos

$$\begin{aligned} (\ ,\ ) : A \otimes A &\longrightarrow k \\ a \otimes b &\longmapsto \lambda_a(b)\,, \end{aligned}$$

[2]El espacio dual A^* es un A-módulo con la acción $a \cdot \varphi = \varphi \circ \overline{m}(a)$, donde $\overline{m}(a) : A \to End(A)$ es la multiplicación por la izquierda por $a \in A$.

la cual es bilineal por definición. Falta probar que es no degenerado. Si $(a, b) = 0$ para todo $b \in A$ y por ser λ isomorfismo, en particular inyectivo, se tiene que $a = 0$ por lo tanto es no degenerado. La compatibilidad se da por la propiedad de ser A-módulos. □

Sea V un álgebra conmutativa. Sobre el álgebra de Frobenius se tiene un producto interior definida por la forma bilineal, notemos que podemos definir una forma trilineal

$$c : V \times V \times V \longrightarrow k$$

dado por $c(u, v, w) := (u \circ v, w)$. Notamos que la forma c es simétrica en todas sus entradas. También observemos que para cualquier elemento a podemos definir un endomorfismo $\lambda_a : V \longrightarrow V$, dado por $\lambda_a(b) := a \circ b$, donde a es semi-simple si la matriz asociada al endomorfismo es diagonalizable. De los conceptos anteriores tenemos el siguiente lema.

Lema 1.1. *Sea V un álgebra de Frobenius con producto interior tal que todos sus elementos son semisimples. Luego tenemos las siguientes consecuencias:*

1. *Existe una base ortogonal $e_1, \cdots, e_n$ con $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, las cuales diagonalizan simultáneamente los endomorfismos λ_a para toda $a \in V$.*

2. *Si $e_i^2 = a_i e_i$ entonces $a_i \neq 0$, además $u_i = a_i^{-1} e_i$ define una base ortogonal de V con $u_i^2 = u_i$ y $u_i u_j = 0$ para todo $i \neq j$.*

3. *El elemento identidad de V es $e = \sum a_i^{-1} e_i = \sum u_i$.*

4. *Si $\eta_1, \cdots, \eta_n$ es la base dual en V^* de $u_1, \cdots, u_n$, entonces*

$$\theta = \sum \mu_i \eta_i,$$

$$(\ .\ ) = \sum \mu_i \eta_i^2,$$

$$c = \sum \mu_i \eta_i^3,$$

donde $\mu_i = \theta(u_i) = \theta(u_i^2) = a_i^{-1}(e_i, e_i)$.

La base $u_1, \cdots, u_n$ es única bajo permutación.

Demostración: 1) Por hipótesis los endomorfismos λ_a son diagonalizables y como su producto conmuta, entonces son simultáneamente diagonalizable con respecto a una base $e_1, \cdots, e_n$ de vectores propios. Debida a que cada λ_a es auto-adjunta podemos escoger que la base sea ortonormal, es decir, $(e_i, e_i) = \pm 1$ y $(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

2) Como las e_i son vectores propios de λ_{e_i}, se sigue en particular que $e_i e_j = a e_j$ y $e_j e_i = b e_i$ para algunos a, b; estos tienen que ser a lo más iguales por la conmutatividad, entonces $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$ y $e_i^2 = a_i e_i$. Ahora $a_i \theta(e_i) = \theta(e_i^2) = (e_i, e_i) = \pm 1$, luego tenemos que $a_i \neq 0$. Si definimos $u_i = a_i^{-1} e_i$, se observa que $u_i^2 = a_i^{-1} e_i a_i^{-1} e_i = a_i^{-1} e_i = u_i$, también tenemos que $u_i u_j = a_i^{-1} e_i a_j^{-1} e_j = 0$ si $i \neq j$ por ser $e_i e_j = 0$.

Ahora vemos que las u_i forman una base de V. Si $b = \sum b_i a_i^{-1} e_i = 0$, tenemos que $b_j = (\sum b_i a_i^{-1} e_i, a_j e_j) = 0$ entonces $b_j = 0$, la cual implica que es linealmente independiente. Como $\{u_i\}$ tiene la misma cantidad de vectores que la dimensión de V, concluimos que el conjunto $\{u_i\}$ forma una base.

3) Sea $e = \sum u_i$, podemos observar que $e u_j = \sum u_i u_j = u_j^2 = u_j$ para todos los elementos de la base, entonces e es la identidad.

4) Como θ es un elemento del dual V^* entonces se puede escribir en términos de la base dual η_i de u_i. Esto es $\theta = \sum \mu_i \eta_i$ donde $\theta(u_i) = \sum \mu_j \eta_j(u_i) = \mu_i$.

Por el isomorfismo que existe entre $(V \times V)^*$ y $V^* \times V^*$ tenemos que $(\ .\ ) = \sum g_{ij} \eta_i \times \eta_j$ donde $\eta_i \times \eta_j$ es una base de $V^* \times V^*$. Evaluando se tiene que $(u_m, u_n) = \sum g_{ij} \eta_i(u_m) \eta_j(u_n)$, con $\eta_i(u_m) \eta_j(u_n) \neq 0$ si $n = m = i = j$ y cero en otro caso.

En el caso en todos los subindices sean iguales se tiene que $g_{ii} = (u_i, u_i) = \theta(u_i^2) = \theta(u_i) = \mu_i$. Como conclusión inferimos que $(\ .\ )$ se puede escribir de la forma $\sum \mu_i \eta_i^2$.

De forma análoga se puede observar que $c = \sum \mu_i \eta^3$. □

La **condición de Abrams** es una herramienta importante para saber si un álgebra conmutativa tiene la estructura de álgebra de Frobenius, el enunciado es el siguiente.

Teorema 1.1 (Abrams [1])**.** *Una álgebra conmutativa A de dimensión finita con producto $m : A \otimes A \to A$, con unidad $u : k \to A$, es un álgebra de Frobenius si y sólo si tiene un coproducto $\triangle : A \to A \otimes A$ co-conmutativo, con counidad $\varepsilon : A \to k$, tal* *que $\triangle$ es un mapa de A-módulos, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes\Delta"'] & A \arrow[d, "\Delta"] \\
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes 1"'] & A \otimes A\,.
\end{tikzcd}$$

Podemos hablar de la categorías de álgebras de Frobenius donde sus morfismos son los siguientes.

Definición 1.4 (Homomorfismos de álgebras de Frobenius)**.** Sea (A_1, θ_1) y (A_2, θ_2) álgebras de Frobenius. Un homomorfismo de álgebra de Frobenius $\phi : (A_1, \theta_1) \to (A_2, \theta_2)$ es un homomorfismo de álgebra el cual es a la vez un homomorfismos de coálgebras (en particular preserva la forma de Frobenius en el siguiente sentido $\theta_1 = \phi\theta_2$).

Podemos seguir estudiando estas categorías y el teorema de Abrams en [1, 6].

1.2. Ejemplos

En esta sección estudiaremos algunos de los ejemplos más importantes de álgebras de Frobenius. Para más información el lector puede ver [6].

Ejemplo 1.1. Sea k un campo y tomaremos el álgebra como $A = k$.

Podemos observar que todo mapa lineal, $\theta : k \to k$, se puede definir por un escalar λ distinto de cero, i.e. $\theta(a) := \lambda a$. Si la forma bilineal definida por $(a, b) := \theta(ab)$ es cero, para todo $b \in A$, entonces $a = 0$; la cual implica que es no degenerada; observamos que es compatible con el producto, $(a, bc) = \theta(a(bc)) = \theta((ab)c) = (ab, c)$.

Por la definición 1.1, k es un álgebra de Frobenius. Esto nos indica que cualquier campo tiene una estructura natural de álgebra de Frobenius.

Ejemplo 1.2. Sea $A = k[t]/(t^n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Tenemos el siguiente hecho: una forma lineal $\theta : A \to k$ define una forma bilineal no degenerada si y sólo si $\theta(t^{n-1}) \neq 0$. Demostremos el hecho anterior en los siguientes párrafos.

La multiplicación en A está dada por la multiplicación en polinomios y definimos $(\ ,\ ) : A \otimes A \to k$, dada por la composición de la multiplicación con θ. Asumamos que

θ define una forma bilineal $(\ ,\ )$ no degenerada y supongamos $\theta(t^{n-1}) = 0$. Sea $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in A$, observamos que para $t^{n-1} \in A$, $(a, t^{n-1}) = \theta(at^{n-1}) = a_0\theta(t^{n-1}) = 0$ para todo a, lo que contradice que $(\ ,\ )$ es no degenerada, por lo tanto $\theta(t^{n-1}) \neq 0$.

Supongamos ahora que existe $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in A$ tal que $(b, a) = 0$ para todo $b \in A$. En particular se tiene $(t^{n-i}, a) = a_{i-1}\theta(t^{n-1}) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, lo cual implica que $a_{i-1} = 0$, por lo que $a = 0$ y $(\ ,\ )$ es no degenerada. Se observa que $(\ ,\ )$ es compatible con el producto al ser A asociativa.

Por la definición 1.1 se tiene que A junto con ε es un álgebra de Frobenius.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos con el mapa lineal $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definida por $\varepsilon(a + ib) = a$. Observamos que $\ker(\varepsilon) = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$, no tiene ideales no triviales. Entonces por la definición 1.2, el campo de los números complejos es un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$

Ejemplo 1.4. Consideremos el álgebra de matrices $n \times n$, denotada por $M_n(k)$, con k un campo. La traza usual

$$\mathrm{Tr}((a_{ij})) = \sum_i a_{ii},$$

define un álgebra de Frobenius.

Para demostrar este hecho sólo hay que ver que la forma bilineal definida por la traza es no degenerada. Definamos $(A, B) := \mathrm{Tr}(AB)$, la cual es bilineal por definición de la traza. Sea $A = (a_{ij})$ tal que $(A, B) = 0$ para todo $B \in M_n(k)$. Sea E_{ij} la base canónica[3] de $M_n(k)$. Podemos observar que $\mathrm{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$ para todo ij. Por lo tanto $A = (a_{ij})$ es la matriz idénticamente cero, y $(\ ,\ )$ es no degenerada. Por la asociatividad del producto de matrices se tiene la compatibilidad de $(\ ,\ )$ con el producto. Por la definición 1.1, con θ como la traza se tiene que $M_n(k)$ es una álgebra de Frobenius.

Ejemplo 1.5. Sea $G = \{e, g_1, \cdots, g_n\}$ un grupo finito, con e la identidad de G. Sea $\mathbb{C}[G]$ el álgebra de grupo definido por el conjunto de sumas formales $\sum_{i=0}^{n} c_i g_i$, con $c_i \in \mathbb{C}$ y $g_0 = e$. La multiplicación de $\mathbb{C}[G]$ está generada por la multiplicación de G. Tenemos que $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra de Frobenius con el mapa lineal definido por

[3] Cada E_{ij} tiende valor de uno en la entrada ij y cero en otro caso.

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : \mathbb{C}[G] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ e & \longmapsto & 1 \\ g_i & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Definimos la forma bilineal $(p, q) := \varepsilon(pq)$ para $p, q \in \mathbb{C}[G]$. Demostremos que $(\ , \ )$ es no degenerada. Sea $p = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i$ con $\varepsilon(gh) = 0$ para todo $h \in \mathbb{C}[G]$. Luego tenemos $(p \ , g_i^{-1} \ ) = \varepsilon(pg_i^{-1}) = c_i = 0$ para todo i. Por lo tanto $p = 0$ y $(\ , \ )$ es no degenerada. La asociatividad del producto de G, implica que $(\ , \ )$ es compatible con el producto de polinomios de $\mathbb{C}[G]$. Concluimos que $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra de Frobenius.

Y por ultimo introduciremos el ejemplo más representativo del álgebra de Frobenius.

Ejemplo 1.6. Sea M una variedad compacta, orientada, conexa, de dimensión finita. Consideremos el álgebra dada por la cohomología de la variedad con coeficientes en un campo k.

$$H^*(M, k) = \bigoplus_i H^i(M, k)\,,$$

donde el producto está dado por el producto cup (ver [8, pág. 244]),

$$\begin{array}{rcl} \cup : H^p(M, k) \otimes H^q(M, k) & \longrightarrow & H^{p+q}(M, k) \\ [\alpha] \otimes [\beta] & \longmapsto & d^*([\alpha] \times [\beta]), \end{array}$$

con d la diagonal.

Definamos una forma lineal $\theta : H^*(M, k) \longrightarrow k$, $\theta(\varphi) := \varphi([\alpha])$, donde $[\alpha]$ es la clase fundamental[4] de M en homología, esto induce la forma bilineal,

$$(\ , \ ) : H^*(M, k) \otimes H^*(M, k) \to k$$

definido por $(\varphi, \psi) := \theta(\varphi \cup \psi) = (\varphi \cup \psi)([\alpha]) = \varphi([\alpha] \cap \psi)$, donde $\cap$ es el producto cap.

Observamos que

$$\Phi : H^{n-k}(M, k) \xrightarrow{h} Hom_k(H_{n-k}(M), k) \xrightarrow{D^*} Hom_k(H^k(M), k)$$

[4] Una clase fundamental en M es un elemento $[\alpha] \in H_n(M, k)$ tal que su imagen bajo $H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M - p) \cong \mathbb{Z}$ es el generador para cada $p \in M$.

nos da $\Phi(\varphi)(\psi) = \varphi([\alpha] \cap \psi)$, donde h es el mapa de coeficientes universales que para un campo k es un isomorfismo. La dualidad de Poincaré D (ver [12] página 163) es un isomorfismo que nos asegura que $(\ ,\ )$ es no degenerada. Por la definición 1.3 la cohomología de M con la traza anterior es un álgebra de Frobenius.

Con estos ejemplos se puede tener una noción clara de un Álgebra de Frobenius, lo cual cierra nuestro principal interés que era entender su estructura.

Capítulo 2

Variedad de Frobenius

A continuación estudiaremos una generalización de álgebras de Frobenius tomando una variedad diferenciable M tal que cada espacio tangente en cada punto, es una álgebra de Frobenius. Este capítulo en gran parte está basado en los artículo de Hitchin [5] y de Dubrovin [4]. Nuestro objetivo primordial será encontrar un potencial sobre la variedad, $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, que produce la estructura de Frobenius.

2.1. Variedad de Frobenius

Consideremos una variedad Riemanniana[1] M con una métrica g (ver [3] y [16]). La variedad (M, g) Riemanniana es plana si es localmente isométrico al espacio euclidiano (ver [9]).

Definición 2.1 (**Estructura de Frobenius**)**.** Una variedad Riemanniana posee una estructura de Frobenius si sobre cada punto de la variedad, tiene una estructura de álgebra de Frobenius conmutativa que varia suavemente sobre cada espacio tangente, donde la forma bilineal no degenerada coincide con la métrica.

Al darle una estructura de álgebra de Frobenius a cada espacio T_pM, la aplicación lineal definida en ella, induce una 1-forma contravariante diferenciable $\theta \in C^\infty(T^*M)$; por la definición de la forma bilineal $g(a\ ,\ b) := \theta(ab)$ y la conmutatividad que se le pide al álgebra de Frobenius, la 2-forma simétrica $g \in C^\infty(S^2T^*M)$

[1]Una variedad de Riemanniana es una variedad diferenciable en la que cada espacio tangente tiene un producto interior que varia suavemente punto a punto.

coincide con la métrica de la variedad y de la misma manera la forma trilineal $c(u,v,w) := g(u \circ v, w)$ produce un 3-forma simétrica $c \in C^\infty(S^3T^*M)$. Es decir, localmente se ven de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lcl} \theta : T_pM & \longrightarrow & k \\ g : T_pM \otimes T_pM & \longrightarrow & k \\ c : T_pM \otimes T_pM \otimes T_pM & \longrightarrow & k \end{array}$$

Recordemos que por la definición de álgebra de Frobenius el producto es compatible con la métrica, es decir, $g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$ para todo campo vectorial $X, Y, Z \in TM$, donde la forma lineal esta dado por $\theta(Y) := g(e, Y)$.

Al ser M una variedad Riemanniana, se le puede asociar una conexión de Levi-Civita, ver el teorema B.1 del apéndice, a partir de esta conexión se define la curvatura asociada.

Definición 2.2 (**Campo de Euler**). Dado un campo vectorial E sobre la variedad, se dice que es un campo vectorial de Euler si cumple los siguientes axiomas,

$$\mathcal{L}_E(g)(X,Y) = E(g(X,Y)) - g([E,X],Y) - g(X,[E,Y]) = rg(X,Y),$$

$$[E, X \circ Y] - [E,X] \circ Y - X \circ [E,Y] = X \circ Y.$$

donde r es una constante y $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie[2].

Definición 2.3. (**Variedad de Frobenius**) Una estructura de Frobenius variando de manera suave sobre el espacio tangente define una variedad de Frobenius $(M, \circ, e, g, \theta, E)$ si tiene las siguiente propiedades:

(i) $\circ$ es un producto asociativo en cada espacio tangente;

(ii) g es una métrica plana sobre M;

(iii) e es unidad para el producto y $\nabla e = 0$;

(iv) los tensores $c(u,v,w) := (u \circ v, w)$ y ∇c son totalmente simétricos;

[2]Si X, Y son campos vectoriales, la derivada de Lie se define $(\mathcal{L}_X Y)(p) = lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}[Y_p - (\phi_{h*}Y)_p]$, con ϕ flujo local de X, más aun, es igual al corchete de Lie, es decir, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

(v) $E \in \Gamma(TM)$ es un campo de Euler.

A continuación explicaremos las características más importantes de las propiedades de una variedad de Frobenius dadas en la definición 2.3.

Observamos que la métrica plana de la **condición (ii) de la definición 2.3** nos indica que la curvatura R (definida en B.4) es idénticamente cero, de esto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Si la métrica es plana, entonces existe un sistema local ortogonal de coordenadas paralelas* $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

De la **condición (iii) de la definición 2.3** se tiene que la identidad e es una sección del haz tangente TM, que se puede expresar en términos de la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$. La unidad es covariantemente constante en cada espacio tangente, es decir, la conexión ∇ aplicada a e se anula. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Se tiene que* $\nabla e = 0$ *si y sólo si* $\nabla\theta = 0$.

Demostración: Observemos que $\theta(Y) = g(e, Y)$, por la compatibilidad con la métrica se tiene que

$$\nabla_X(\theta(Y)) = \nabla_X(g(e, Y)) = g(\nabla_X e, Y) + g(e, \nabla_X Y).$$

Y por otro lado, por las propiedades de una conexión tenemos

$$\nabla_X(\theta(Y)) = (\nabla_X\theta)(Y) + \theta(\nabla_X Y) = (\nabla_X\theta)(Y) + g(e, \nabla_X Y)$$

Igualando las expresiones anteriores se obtiene

$$(\nabla_X\theta)(Y) = g(\nabla_X e, Y)$$

y por ser la métrica no degenerada se tiene que $\nabla e = 0$ si y sólo si $\nabla\theta = 0$. □

Recordemos el lema 1.1, visto en el capítulo anterior, la cual utilizaremos para estudiar la **condición (iv) de la definición 2.3**.

Si V un álgebra de Frobenius con producto interior $(\, , \,)$ tal que todos sus elementos son semisimples existe una base ortogonal $e_1, \cdots, e_n$ con $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ que define una base $\{u_i\}_{i=1,\ldots,n}$ ortogonal de V con $u_i^2 = u_i$ y $u_i u_j = 0$ para todo $i \neq j$, donde el elemento identidad de V es $e = \sum u_i$. Además si $\eta_1, \cdots, \eta_n$ es la base dual en V^* entonces, θ, g y c se puede escribir en términos de esta base. Vamos a demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea M una variedad con una estructura de Frobenius, tal que la derivada covariante $\nabla c \in C^\infty(M, S^3T^*M \otimes T^*M)$ es totalmente simétrica*[3] *. Luego tenemos las siguientes consecuencias:*

$$g(\nabla_{u_i} u_j, u_k) = 0, \text{ para } i,\ j,\ k \text{ distintos}, \tag{2.1}$$

$$g(\nabla_{u_i} u_i, u_j) = g(\nabla_{u_j} u_j, u_i), \tag{2.2}$$

$$g(\nabla_{u_i} u_j, u_j) = g(\nabla_{u_i} u_j, u_i), \tag{2.3}$$

donde $i \neq j$ para las dos últimos.

Demostración: Nos basaremos en la siguiente propiedad para la derivada covariante de c

$$u_i[c(u_j, u_k, u_l)] = (\nabla_{u_i} c)(u_j, u_k, u_l) + c(\nabla_{u_i} u_j, u_k, u_l) + c(u_j, \nabla_{u_i} u_k, u_l) + c(u_j, u_k, \nabla_{u_i} u_l). \tag{2.4}$$

para indices arbitrarios $i,\ j,\ k,\ l \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis M tiene la estructura de Frobenius entonces $c(u_j, u_k, u_l) = \theta(u_j u_k u_l)$ y por lema 1.1 si al menos dos de los indices son distintos, esta se anula y tendremos las siguientes consecuencias de la expresión 2.4:

- si todos los indices son distintos se tiene $(\nabla_{u_i} c)(u_j, u_k, u_l) = 0$;
- si $i = j$ y j, k, l distintos, tenemos $(\nabla_{u_i} c)(u_i, u_k, u_l) = 0$; y
- si $j = k$ y i, k, l distintos, obtenemos $(\nabla_{u_i} c)(u_j, u_j, u_l) + c(u_j, u_j, \nabla_{u_i} u_l) = (\nabla_{u_i} c)(u_j, u_j, u_l) + g(u_j, \nabla_{u_i} u_l) = 0$.

Utilizando los dos últimos casos y la simetría de ∇c obtenemos el inciso (2.1),

$$g(u_j, \nabla_{u_i} u_l) = -(\nabla_{u_i} c)(u_j, u_j, u_l) = -(\nabla_{u_j} c)(u_j, u_i, u_l) = 0.$$

[3]Totalmente simétrica significa, que el tensor $\nabla c(X, Y, Z, W) := \nabla_X c(Y, Z, W)$ visto como un cuatro tensor es simétrico en todas sus entradas.

Para demostrar (2.2) observamos lo siguiente.

- si dos indices son iguales a pares, en el caso $i = j$, $k = l$ y $j \neq k$, de la expresión (2.4) se tiene $(\nabla_{u_i} c)(u_i, u_k, u_k) + c(\nabla_{u_i} u_i, u_k, u_k) = 0$.

el punto anterior implica que $g(\nabla_{u_i} u_i, u_k) = -(\nabla_{u_i} c)(u_i, u_k, u_k)$ y por simetría de ∇c se obtiene el inciso (2.2) de la siguiente manera

$$g(\nabla_{u_i} u_i, u_k) = -(\nabla_{u_i} c)(u_i, u_k, u_k) = -(\nabla_{u_k} c)(u_k, u_i, u_i) = g(\nabla_{u_k} u_k, u_i).$$

Para demostrar (2.3) de la proposición, observamos lo siguiente:

- si tres indices son iguales, en el caso $i = j = k$ y $k \neq l$, tenemos $(\nabla_{u_i} c)(u_i, u_i, u_l) + c(u_i, u_i, \nabla_{u_i} u_l) = 0$.
- en el caso $j = k = l$ y $i \neq j$, obtenemos $(\nabla_{u_i} c)(u_l, u_l, u_l) + c(\nabla_{u_i} u_l, u_l, u_l) = 0$.

De las dos expresiones anteriores y de la simetría de ∇c, obtenemos el inciso (2.3) mediante

$$g(\nabla_{u_i} u_l, u_l) = g(\nabla_{u_i} u_l, u_i).$$

□

Proposición 2.4. *Sea M una variedad con estructura de Frobenius como en la proposición 2.3. Existe un sistema de coordenadas ortogonales locales $x_1, \cdots, x_n$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ es una base para T_pM, para cada p; con $u_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.*

Demostración: Debemos mostrar que la base canónica es integrable, para eso es suficiente demostrar que las 1-forma duales η_i son cerradas.

La derivada exterior de las 1-formas es,

$$d\eta_k = \sum_i \nabla_{u_i} \eta_k \wedge \eta_i,$$

donde $\nabla_{u_i} \eta_k = -\Gamma^k_{ij} \eta_j$ y Γ^k_{ij} son los símbolos de Christoffel, ver [3, 9].

Por definición $\langle \eta_k, u_i \rangle := \eta_k(u_i) = \delta_{ki}$, entonces evaluando η_k en $\nabla_{u_i} u_j$ se tiene

$$\langle \nabla_{u_i} u_j, \eta_k \rangle = \Gamma^k_{ij} \;\; y \;\; g(\nabla_{u_i} u_j, u_k) = \Gamma^k_{ij}.$$

Tenemos las siguientes consecuencias:

- si $i \neq k \neq j$, se tiene que $\Gamma_{ij}^{k} = 0$;
- si $j = k$, $\langle \nabla_{u_i} u_k, \eta_k \rangle = \Gamma_{ik}^{k}$;
- si $j = i$, $\langle \nabla_{u_i} u_i, \eta_k \rangle = \Gamma_{ii}^{k}$.

De las propiedades anteriores se tiene

$$\nabla_{u_i} \eta_k = -\langle \nabla_{u_i} u_i, \eta_k \rangle \eta_i - \langle \nabla_{u_i} u_k, \eta_k \rangle \eta_k,$$

sustituyendo este resultado en $d\eta_k$, se obtiene

$$d\eta_k = -\sum_{i \neq k} \langle \nabla_{u_i} u_k, \eta_k \rangle \eta_i \wedge \eta_k + \eta_k \wedge \nabla_{u_k} \eta_k = \sum_{i \neq k} \langle \nabla_{u_k} u_i - \nabla_{u_i} u_k, \eta_k \rangle \eta_i \wedge \eta_k$$

pero observamos que del inciso (2.1) y (2.2) de la proposición 2.3, se tiene

$$g(\nabla_{u_k} u_i - \nabla_{u_i} u_k, u_k) = 0$$

donde las u_k son ortogonales, y la expresión anterior significa

$$\langle \nabla_{u_k} u_i - \nabla_{u_i} u_k, \eta_k \rangle = 0$$

entonces $d\eta_k = 0$, así que existe un conjunto de funciones x_k tales que $\eta_k = dx_k$. Por ser $\{\eta_1, \cdots, \eta_k\}$ un conjunto linealmente independiente también lo es el conjunto $\{x_1, \cdots, x_k\}$, entonces forma un sistema de coordenadas locales, con $u_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. $\square$

Proposición 2.5. *Sea M una variedad como en la proposición 2.4. La 1-forma $\theta = \sum_i \mu_i \eta_i$ es cerrada y existe una función diferenciable ϕ tal que $\mu_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$.*

Demostración: Sea $\theta = \sum_i \mu_i \eta_i$ la 1-forma, donde es claro que $\mu_i = \theta(u_i)$. Para demostrar la proposición, es suficiente ver que

$$d\theta = d\sum_i \mu_i \eta_i = d\sum_i \mu_i dx_i = \sum_i d\mu_i \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = 0$$

la cual es equivalente pedir que

$$u_j\mu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = u_i\mu_j,$$

pero $u_j\mu_i = g(\bigtriangledown_{u_j} u_i, u_i)/2$ es simétrico en i y j, entonces de las igualdades 2.2 y 2.3 de la proposición 2.3, se tiene $u_j\mu_i = u_i\mu_j$, lo que implica que $d\theta = 0$.

Por el lema de Poincaré existe ϕ tal que $\theta = d\phi$, la cual nos dice $\mu_i = \theta(u_i) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ esto concluye la proposición. □

Podemos formular el inverso del teorema 2.3, y para demostrarlo solamente necesitamos establecer 3 ecuaciones para la derivada covariante que son equivalentes a la simetría de ∇c. La definición de c generaliza la condición de compatibilidad con la métrica que estudiamos con el álgebra de Frobenius, esto da aun más sentido al nombre de variedad de Frobenius.

A las coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ se les conocen como coordenadas canónicas, las cuales son únicas salvo traslación y permutación.

Las proposiciones anteriores y el lema 1.1 implican el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea M una variedad como en las proposiciones 2.3 y 2.4, entonces la métrica esta dado por*

$$g = \sum_i \mu_i \eta_i^2 = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i^2$$

a dicha métrica se le llama métrica Egoroff.

Como observación tenemos que si g es la métrica Egoroff, entonces la estructura de Frobenius con la base canónica $\frac{\partial}{\partial x_i}$, tiene un único c, para el cual ∇c es totalmente simétrico. Además, notemos que el lema 1.1 del apéndice, nos dice que la estructura de producto en el álgebra de Frobenius se puede recuperar mediante la forma c. Para esto se define el producto entre los elementos básicos $e_ie_j = \sum a_{ijk}e_k$, luego se tiene que sus coeficientes están determinados por $\theta(e_ie_je_k) = c(e_i, e_j, e_k) = a_{ijk}$. Más características relacionadas con las variedades de Frobenius en [5] y [11].

2.2. La existencia de un potencial para la variedad de Frobenius.

En la presente sección mostraremos la existencia de un potencial de Frobenius.

Teorema 2.2. *Sea M una variedad de Frobenius, existe una función F tal que*

- $$c = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} dt_i dt_j dt_k$$

- $$g = \sum_{j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k.$$

Demostración: La condición de que la métrica sea plana nos asegura que existen coordenadas locales planas $t_1, \ldots, t_n$ donde la métrica tiene coeficientes constantes y su derivada covariante es la derivada parcial usual. Si escribimos

$$c = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} dt_i dt_j dt_k,$$

tenemos que

$$dc = \sum_{l} \frac{\partial c_{i,j,k}}{\partial t_l} dt_l dt_i dt_j dt_k,$$

donde la simetría de ∇c puede interpretarse como

$$\frac{\partial c_{ijk}}{\partial t_l} = \frac{\partial c_{ijl}}{\partial t_k},$$

luego $dc = 0$ y por el lema de Poincaré existe b_{ij} tal que

$$c_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k},$$

observemos que c es simétrico con respecto a i y j, es decir, tenemos que

$$c_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial b_{ji}}{\partial t_k} = c_{jik},$$

ahora si simetrizamos b_{ij} la fórmula se sigue conservando, entonces podemos suponer que $b_{ij} = b_{ji}$. Esto nos produce una 2-forma

$$b = \sum_{ij} b_{ij} dt_i dt_j,$$

simétrica, pero como c_{ijk} es simétrico en j y k, así obtenemos que

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial t_j},$$

lo que indica que $db = 0$, entonces por el lema de Poincaré existe una función a_i tal que

$$b_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial t_j}.$$

Repitiendo nuevamente el argumento se produce una función generadora o potencial, F tal que

$$c = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} dt_i dt_j dt_k.$$

Al aplicar una transformación euclidiana a coordenadas planas se obtienen nuevamente coordenadas planas. En particular, dado que e es constante covariante, y bajo una rotación se puede tomar

$$e = \frac{\partial}{\partial t_1} \text{ y } \theta = dt_1,$$

recordando que $g(u, v) = c(u, v, e)$, entonces

$$g = \sum_{j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k.$$

□

A la función F anterior se le conoce como **potencial de Frobenius**, la cual como se puede observar es una función generadora de la variedad de Frobenius.

Denotaremos por $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$ para simplificar la notación de las derivadas parciales. Recordemos que las coordenadas planas $\{t_1, ..., t_n\}$ fueron escogidas de tal forma que $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle$ sea constante. La matriz asociada (g_{jk}) a la métrica y su inversa $(g^{jk}) := (g_{jk})^{-1}$ nos ayudarán a reconstruir el producto.

En la reconstrucción del producto obtenemos que su coeficiente esta dado por $c^i_{jk} = \sum_s g^{is} c_{sjk}$, donde $c_{ijk} = \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_j}$, de tal forma que

$$\partial t_j \circ \partial t_k = \sum_i c^i_{jk}(t) \partial t_i.$$

La propiedad asociativa del producto nos da un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales para la función potencial llamadas **ecuaciones WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde)**.

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} g^{kl} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^3 F}{\partial t_m \partial t_j \partial t_k} g^{kl} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_i \partial t_n}.$$

El campo de Euler (definición 2.2) se puede expresar de forma equivalente (ver [10, pág 10]) a $\mathcal{L}_E(g) = (2-k)g$, $\mathcal{L}_E(\circ) = r\circ$ y $\mathcal{L}_E(e) = -e$, donde k, r son constantes. Además el campo de Euler se puede escribir de la forma $E = r \sum_i x_i \partial_i$, donde u_i es la base producida en la proposición 2.4, más aun, podemos tomar $r = 1$, normalizando. Si la variedad de Frobenius es de dimensión dos se tiene,

$$E = (s + a)\partial_s + ((1 - k)t + b)\partial_t,$$

en el caso de reparametrizar s, t con $k \neq 1$ se tiene $E = s\partial_s + (1 - k)t\partial_t$ y si $k = 1$, se tiene $E = s\partial_s + 2\partial_t$.

El campo de Euler se puede escribir de una forma sencilla usando la compatibilidad de las coordenadas locales canónicas y las coordenadas planas, como

$$E = \sum_{i,j} S_{i,j} t_i \partial_j + a \sum_i t_i \partial_i + \sum_i b_i \partial_i,$$

donde (S_{ij}) es antisimétrica. Dado que en la tesis se está trabajando en los número reales, podemos suponer que la matriz antisimétrica es idénticamente cero, es así que, la expresión se reduce a,

$$E = \sum_i (a) t_i \partial_i + \sum_i b_i \partial_i,$$

y si además, $a \neq 0$, entonces bajo la traslación por $\frac{b_i}{a}$, se obtiene

$$E = \sum_i a t_i \partial_i.$$

Con los datos anteriores se reconstruye la estructura de la variedad de Frobenius a partir del Potencial de Frobenius.

2.3. Ejemplos de Variedad de Frobenius.

En las secciones pasadas se introdujeron todas las propiedades de una variedad de Frobenius. En esta sección el objetivo es dar un ejemplo de variedad de Frobenius.

Consideremos la siguiente función

$$F = \frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2, t_3).$$

Utilizando la expresión para la métrica[4] dada por el teorema 2.2 en términos del potencial y al correr $j, k = 1, 2, 3$, tenemos

$$g = \sum_{j\le k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k \qquad = \sum_{j\le k}^{3} \frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k.$$

desarrolando se tiene,

$$\begin{aligned} g = \sum_{j\le 1}^{3} \frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_1} dt_j dt_1 \quad &+ \sum_{j\le 2}^{3} \frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_2} dt_j dt_2 \\ &+ \sum_{j\le 3}^{3} \frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_3} dt_j dt_3, \end{aligned}$$

y simplificando[5] las respectivas sumas tenemos

$$g = \sum_{j\le 1}^{3} \frac{\partial^2[t_1 t_3 + \frac{1}{2}t_2^2]}{\partial t_1 \partial t_j} dt_j dt_1 + \sum_{j\le 2}^{3} \frac{\partial^2[t_1 t_2 + f_{t_2}(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j} dt_j dt_2 + \sum_{j\le 3}^{3} \frac{\partial^2[\frac{1}{2}t_1^2 + f_{t_3}(t_2,t_3)]}{\partial t_1 \partial t_j} dt_j dt_3.$$

Podemos darnos cuenta que muchos de los términos se anulan, entonces al realizar dichas operaciones tenemos.

$$\boldsymbol{g = dt_1 dt_3 + dt_2^2}.$$

Ahora determinaremos los coeficientes de la forma c [6] dado por el teorema 2.2.

[4]En la expresión de la métrica los indices pueden ordenarse.
[5]Para simplificar notaciones, escribiremos la $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ como f_{t_i}.
[6]Los índices se pueden ordenar de la misma forma que se hizo con la métrica.

Observemos que la suma

$$c=\sum_{i,j,k}\frac{\partial^3 F}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}dt_idt_jdt_k.$$

corre sobre los índices $i,j,k=1,2,3$. Entonces se tiene

$$c=\sum_{i,j,k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}dt_idt_jdt_k$$

$$c=\sum_{1\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_1\partial t_j\partial t_k}dt_1dt_jdt_k \quad +\sum_{2\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_2\partial t_j\partial t_k}dt_2dt_jdt_k+\sum_{3\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_3\partial t_j\partial t_k}dt_3dt_jdt_k.$$

Observamos que esta expresión es un poco larga, pero se desarrollará de forma que no se pierda la noción de los cálculos que se están realizando. Notamos que el primer término se puede calcular de la cuenta que se hizo para determinar la métrica, es decir,

$$\sum_{1\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_1\partial t_j\partial t_k}dt_1dt_jdt_k=dt_1^2dt_3+dt_1dt_2^2$$

Esto simplificará las cuentas que debemos hacer para calcular c. Ahora quedan por determinar los otros dos términos de este.

Desarrollando el segundo término de c tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_2\partial t_j\partial t_k}dt_2dt_jdt_k&=\sum_{2\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2t_3+\frac{1}{2}t_1t_2^2+f(t_2,t_3)]}{\partial t_2\partial t_j\partial t_k}dt_2dt_jdt_k\\&=\sum_{2\leq j\leq k}^{3}\frac{\partial^2[t_1t_2+f_{t_2}(t_2,t_3)]}{\partial t_j\partial t_k}dt_2dt_jdt_k,\end{aligned}$$

luego tenemos,

$$= \sum_{2\leq j\leq 2}^{3} \frac{\partial^2[t_1t_2 + f_{t_2}(t_2,t_3)]}{\partial t_j \partial t_2} dt_2 dt_j dt_2$$

$$+ \sum_{2\leq j\leq 3}^{3} \frac{\partial^2[t_1t_2 + f_{t_2}(t_2,t_3)]}{\partial t_j \partial t_3} dt_2 dt_j dt_3,$$

y simplificando la expresión anterior,

$$= f_{t_2t_2t_2}(t_2,t_3)dt_2^3 + f_{t_2t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2^2dt_3 + f_{t_3t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2dt_3^2,$$

concluimos que el segundo término es

$$\sum_{2\leq j\leq k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_2 \partial t_j \partial t_k} dt_2 dt_j dt_k = f_{t_2t_2t_2}(t_2,t_3)dt_2^3 + f_{t_2t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2^2dt_3 + f_{t_3t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2dt_3^2.$$

Para terminar el cálculo de c, se desarrollará el tercer término

$$\sum_{3\leq j\leq k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_3 \partial t_j \partial t_k} dt_3 dt_j dt_k = \sum_{3\leq j\leq k}^{3} \frac{\partial^3[\frac{1}{2}t_1^2t_3 + \frac{1}{2}t_1t_2^2 + f(t_2,t_3)]}{\partial t_3 \partial t_j \partial t_k} dt_3 dt_j dt_k$$

$$= \sum_{3\leq j\leq k}^{3} \frac{\partial^2[\frac{1}{2}t_1^2 + f_{t_3}(t_2,t_3)]}{\partial t_j \partial t_k} dt_3 dt_j dt_k,$$

y desarrollando tenemos,

$$\sum_{3\leq j\leq k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_3 \partial t_j \partial t_k} dt_3 dt_j dt_k = \sum_{3\leq j\leq 3}^{3} \frac{\partial^2[\frac{1}{2}t_1^2 + \frac{3}{2}t_2^4\dot{u}(t_3)]}{\partial t_j \partial t_3} dt_3 dt_j dt_3 = f_{t_3t_3t_3}(t_2,t_3)dt_3^3$$

y concluimos que el tercer término es

$$\sum_{j,k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_3 \partial t_j \partial t_k} dt_3 dt_j dt_k = f_{t_3t_3t_3}(t_2,t_3)dt_3^3.$$

Con los datos anteriores podemos calcular la expresión final de c, pues sustituyendo tenemos

$$c = \sum_{i,j,k}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} dt_i dt_j dt_k$$

$$\boldsymbol{c(t_1,t_2,t_3) = dt_1^2 dt_3 + dt_1 dt_2^2 + f_{t_2t_2t_2}(t_2,t_3)dt_2^3 + f_{t_2t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2^2 dt_3 + f_{t_3t_3t_2}(t_2,t_3)dt_2 dt_3^2}$$
$$\boldsymbol{+ f_{t_3t_3t_3}(t_2,t_3)dt_3^3}.$$

Se ha construido casi toda la estructura de la variedad de Frobenius. Falta encontrar el producto y el campo de Euler. Observemos que la matriz que representa a la métrica es

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya inversa es

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto[7] esta definido por

$$\frac{\partial}{\partial t_j} * \frac{\partial}{\partial t_k} = c_{jk}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial_\lambda},$$

donde, $c_{jk}^{\lambda} = g^{\lambda i} c_{ijk}$, ahora podemos calcular los coeficientes del producto en los elementos de la base y observamos que los únicos productos que tenemos que calcular son los siguientes

$$\partial_2 * \partial_2 = c_{2,2}^{\lambda} \partial_\lambda \tag{2.5}$$

$$\partial_2 * \partial_3 = c_{2,3}^{\lambda} \partial_\lambda \tag{2.6}$$

$$\partial_3 * \partial_3 = c_{3,3}^{\lambda} \partial_\lambda \tag{2.7}$$

Usamos la notación $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$ para simplificar la escritura. Observamos que las igual-

[7] Se estará usando algunas veces la notación de Einstein en la cual no se escribe la sumatoria.

dades anteriores produce un sistema de ecuaciones 3 por 3, que resolveremos a continuación. Desarrollaremos cada igualdad, empezando con el (2.2),

$$c_{22}^1 = g^{11}c_{122} + g^{12}c_{222} + g^{13}c_{322} = c_{322} = f_{t_3t_2t_2}$$

$$c_{22}^2 = g^{21}c_{122} + g^{22}c_{222} + g^{23}c_{322} = c_{222} = f_{t_2t_2t_2}$$

$$c_{22}^3 = g^{31}c_{122} + g^{32}c_{222} + g^{33}c_{322} = c_{122} = 1.$$

Ahora veamos que pasa con la igualdad (2.3),

$$c_{23}^1 = g^{11}c_{123} + g^{12}c_{223} + g^{13}c_{323} = c_{323} = f_{t_3t_2t_3}$$

$$c_{23}^2 = g^{21}c_{123} + g^{22}c_{223} + g^{23}c_{323} = c_{223} = f_{t_2t_2t_3}$$

$$c_{23}^3 = g^{31}c_{123} + g^{32}c_{223} + g^{33}c_{323} = c_{123} = 0.$$

y por ultimo con la igualdad (2.4)

$$c_{33}^1 = g^{11}c_{133} + g^{12}c_{233} + g^{13}c_{333} = c_{333} = f_{t_3t_3t_3}$$

$$c_{33}^2 = g^{21}c_{133} + g^{22}c_{233} + g^{23}c_{333} = c_{233} = f_{t_2t_3t_3}$$

$$c_{33}^3 = g^{31}c_{133} + g^{32}c_{233} + g^{33}c_{333} = c_{133} = 0.$$

Podemos notar que el cálculo de los coeficientes no es muy complicado, dado que la mayoría de los términos se cancelan. Al sustituir estos resultados obtenemos los productos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial_2 * \partial_2} &= \boldsymbol{f_{t_3t_2t_2}\partial_1 + f_{t_2t_2t_2}\partial_2 + \partial_3}\\
\boldsymbol{\partial_2 * \partial_3} &= \boldsymbol{f_{t_3t_2t_3}\partial_1 + f_{t_2t_2t_3}\partial_2}\\
\boldsymbol{\partial_3 * \partial_3} &= \boldsymbol{f_{t_3t_3t_3}\partial_1 + f_{t_2t_3t_3}\partial_2.}
\end{aligned}$$

Podemos observar que esto reconstruye todo el producto, dado que lo calculamos desde el producto de las bases. Recordemos que el producto en una variedad de Frobenius tiene que ser asociativo, entonces observemos que pasa con la asociatividad del producto, para la cual se tiene la siguiente igualdad

$$\partial_2 * (\partial_2 * \partial_3) = (\partial_2 * \partial_2) * \partial_3.$$

Se tiene que satisfacer otra igualdad, pero no se desarrollará dado que conduce al mismo resultado. Desarrollaremos el lado izquierdo de la igualdad, recordando que ∂_1 es la identidad

$$\begin{aligned}
\partial_2 * (\partial_2 * \partial_3) &= \partial_2 * (f_{t_3t_2t_3}\partial_1 + f_{t_2t_2t_3}\partial_2) \\
&= f_{t_3t_2t_3}\partial_2 * \partial_1 + f_{t_2t_2t_3}\partial_2 * \partial_2 \\
&= f_{t_3t_2t_3}\partial_2 + f_{t_2t_2t_3}(f_{t_3t_2t_2}\partial_1 + f_{t_2t_2t_2}\partial_2 + \partial_3) \\
&= f_{t_2t_2t_3}f_{t_3t_2t_2}\partial_1 + (f_{t_3t_2t_3} + f_{t_2t_2t_3}f_{t_2t_2t_2})\partial_2 + f_{t_2t_2t_3}\partial_3.
\end{aligned}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned}
(\partial_2 * \partial_2) * \partial_3 &= (f_{t_3t_2t_2}\partial_1 + f_{t_2t_2t_2}\partial_2 + \partial_3) * \partial_3 \\
&= f_{t_3t_2t_2}\partial_1 * \partial_3 + f_{t_2t_2t_2}\partial_2 * \partial_3 + \partial_3 * \partial_3 \\
&= f_{t_3t_2t_2}\partial_3 + f_{t_2t_2t_2}(f_{t_3t_2t_3}\partial_1 + f_{t_2t_2t_3}\partial_2) + f_{t_3t_3t_3}\partial_1 + f_{t_2t_3t_3}\partial_2 \\
&= (f_{t_2t_2t_2}f_{t_3t_2t_3} + f_{t_3t_3t_3})\partial_1 + (f_{t_2t_2t_2}f_{t_2t_2t_3} + f_{t_2t_3t_3})\partial_2 + f_{t_3t_2t_2}\partial_3.
\end{aligned}$$

Igualando ambos lados tenemos que

$$f_{t_2t_2t_3}f_{t_3t_2t_2}\partial_1 = (f_{t_2t_2t_2}f_{t_3t_2t_3} + f_{t_3t_3t_3})\partial_1 \tag{2.8}$$

$$(f_{t_3t_2t_3} + f_{t_2t_2t_3}f_{t_2t_2t_2})\partial_2 = (f_{t_2t_2t_2}f_{t_2t_2t_3} + f_{t_2t_3t_3})\partial_2 \tag{2.9}$$

$$f_{t_2t_2t_3}\partial_3 = f_{t_3t_2t_2}\partial_3. \tag{2.10}$$

Dado que las derivadas parciales conmutan, las igualdades (2.9) y (2.10) se cumplen. Ahora para que se cumpla la asociatividad se debe satisfacer la igualdad (2.8), es decir,

$$\boldsymbol{f_{t_2t_2t_3}^2 = f_{t_2t_2t_2}f_{t_2t_3t_3} + f_{t_3t_3t_3}}.$$

A la expresión anterior se le conoce como **ecuación de Chazy**.

Con eso demostramos la siguiente proposición, la cual produce variedades de Frobenius dependiente de la función f.

Proposición 2.6. *La función potencial*

$$F = \frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2, t_3)$$

en dimensión 3, con un campo de Euler E, produce una variedad de Frobenius si y sólo si, satisface la ecuación de Chazy

$$f_{t_2t_2t_3}^2 = f_{t_3t_3t_3} + f_{t_2t_2t_2} f_{t_2t_3t_3}.$$

El resultado anterior es un caso muy general, porque depende de la función f. Introduciremos unos casos particulares y solo se remarcarán los datos importantes.

Ejemplo 2.1. Considere la función

$$f(t_2, t_3) = \frac{3}{2}t_2^4 u(t_3).$$

El campo de Euler para este potencial es $E = t_1\partial_1 + \frac{1}{2}t_2\partial_2$ y la métrica que produce el potencial esta dada por $g = dt_1 dt_3 + dt_2^2$. El producto es

$$\begin{aligned}
\partial_2 * \partial_2 = &\quad 18t_2^2\dot{u}(t_3)\partial_1 + \quad 36t_2 u(t_3)\partial_2 \quad + \partial_3 \\
\partial_2 * \partial_3 = &\quad 6t_2^3\ddot{u}(t_3)\partial_1 + \quad 18t_2^2\dot{u}(t_3)\partial_2 \\
\partial_3 * \partial_3 = &\quad \tfrac{3}{2}t_2^4\dddot{u}\,\partial_1 + \quad 6t_2^3\ddot{u}(t_3)\partial_2,
\end{aligned}$$

y la ecuación de Chazy es

$$\dddot{u}(t_3) + 144u(t_3)\ddot{u}(t_3) - 216(\dot{u}(t_3))^2 = 0.$$

Otro ejemplo similar a la anterior es el siguiente.

Ejemplo 2.2. Considere la función

$$f(t_2, t_3) = -\frac{1}{16}t_2^4 u(t_3),$$

con la función u uno periódica. Rápidamente podemos observar que el campo de Euler para este potencial es $E = t_1\partial_1 + \frac{1}{2}t_2\partial_2$. La métrica es la misma que en el ejemplo anterior, $g = dt_1 dt_3 + dt_2^2$. La ecuación de Chazy que debe satisfacer el productos es

$$\dddot{u}(t_3) - 6u(t_3)\ddot{u}(t_3) + 9(\dot{u}(t_3))^2 = 0.$$

Con los ejemplos anteriores concluimos la parte más importante del contenido de esta tesis.

2.4. Un problema enumerativo

A continuación introduciremos un problema clásico de geometría enumerativa que data del siglo XIX, el cual fue resuelto en gran parte por Manin y Kontsevich ([7]). En este articulo se estudian teorías topólogicas cuánticas de campos y sus aplicaciones a problemas de conteo en geometría algebraica. El problema que trataremos es determinar el número de curvas que pasan por un objeto geométrico tal que satisfacen ciertas relaciones geométricas. Tales números producen una sucesión de números llamadas invariantes de Gromov-Witten(GW) del plano proyectivo complejo. Resolvamos el presente problema: ***calcular el número de curvas de grado d que pasan por 3d-1 puntos colocados de forma general en el plano proyectivo*** $\mathbb{CP}^2$. Denotamos dicho número por N_d.

La función $F = \frac{1}{2}s^2u + \frac{1}{2}st^2 + f(t,u)$ determina un potencial de la variedad de Frobenius asociada a los invariantes GW de $\mathbb{CP}^2$, donde la función f es dada por la fórmula

$$f(t,u) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d e^{dt} u^{3d-1}}{(3d-1)!} N_d\,,$$

con la condición inicial $N_1 = 1$. Recordemos que la función f tiene que cumplir la ecuación de Chazy $(f_{ttu})^2 = f_{uuu} + f_{ttt}f_{tuu}$. Ahora encontraremos una fórmula de recurrencia. Para eso la estrategia es esbozar cada término de la igualdad y analizar algunos términos especiales que nos ayudará a construir esta fórmula de recurrencia.

El primer sumando del lado derecho de la igualdad es

$$f_{uuu} = \sum_{d=2}^{\infty} \frac{q^d e^{td} u^{3d-4}}{(3d-4)!} N_d,$$

en forma desarrollada

$$f_{uuu} = \frac{q^2e^{2t}u^2}{2!}N_2 + \frac{q^3e^{3t}u^5}{5!}N_3 + \frac{q^4e^{4t}u^8}{8!}N_4 + \cdots + \frac{q^ke^{kt}u^{3k-4}}{(3k-4)!}N_k + \cdots + .$$

En el segundo sumando de la igualdad tenemos la intervención de las siguientes expresiones

$$f_{ttu}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{d^2q^de^{dt}u^{3d-2}}{(3d-2)!}N_d$$

$$=\frac{1^2q^1e^{1t}u^1}{1!}N_1+\frac{2^2q^2e^{2t}u^4}{4!}N_2+\frac{3^2q^3e^{3t}u^7}{7!}N_3+\cdots+\frac{k^2q^ke^{kt}u^{3k-2}}{(3k-2)!}N_k+\cdots+$$

$$f_{ttt}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{d^3q^de^{dt}u^{3d-1}}{(3d-1)!}N_d$$

$$=\frac{1^3q^1e^{1t}u^2}{2!}N_1+\frac{2^3q^2e^{2t}u^5}{5!}N_2+\frac{3^3q^3e^{3t}u^8}{8!}N_3+\cdots+\frac{k^3q^ke^{kt}u^{3k-1}}{(3k-1)!}N_k+\cdots+$$

$$f_{tuu}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{dq^de^{dt}u^{3d-3}}{(3d-3)!}N_d$$

$$=\frac{1q^1e^{1t}u^0}{0!}N_1+\frac{2q^2e^{2t}u^3}{3!}N_2+\frac{3q^3e^{3t}u^6}{6!}N_3+\cdots+\frac{kq^ke^{kt}u^{3k-3}}{(3k-3)!}N_k+\cdots+.$$

Nuestra estrategia es ver los términos del primer lado izquierdo de la igualdad, comenzando por el término $\frac{q^2e^{2t}u^2}{2!}N_2$, y recopilar todos los términos del segundo lado derecho de la igualdad de Chazy que tengan la expresión común $e^{2t}u^2$, con estos datos producimos la siguiente igualdad

$$\frac{q^2e^{2t}u^2}{2!}N_2=(\frac{1^2q^1e^{1t}u^1}{1!}N_1)^2-(\frac{1^3q^1e^{1t}u^2}{2!}N_1)(\frac{1q^1e^{1t}u^0}{0!}N_1),$$

y simplificando,

$$\frac{q^2e^{2t}u^2}{2!}N_2=q^2e^{2t}u^2N_1^2-\frac{q^2e^{2t}u^2}{2!}N_1^2,$$

tenemos $N_2=N_1N_1$. Entonces para el caso $n=2$ se tiene que

$$N_2=1.$$

Ahora si analizamos el término $\frac{q^3e^{3t}u^5}{5!}N_3$ y recopilamos todos los términos del segundo lado derecho de la igualdad de Chazy que tengan la expresión común $e^{3t}u^5$, producimos lo siguiente

$$\frac{q^3e^{3t}u^5}{5!}N_3=2(\frac{1^2q^1e^{1t}u^1}{1!}N_1)(\frac{2^2q^2e^{2t}u^4}{4!}N_2)-(\frac{1^3q^1e^{1t}u^2}{2!}N_1)(\frac{2q^2e^{2t}u^3}{3!}N_2)$$

$$-(\frac{2^3q^2e^{2t}u^5}{5!}N_2)(\frac{1q^1e^{1t}u^0}{0!}N_1),$$

cancelando términos de la forma $q^3e^{3t}u^5$.

$$\frac{N_3}{5!} = \frac{2*2^2}{4!}N_1N_2 - \frac{2}{2!3!}N_1N_2 - \frac{2^3}{5!}N_5,$$

y simplificando, $N_3 = 12N_1N_2$. De esto concluimos que para el caso $n = 3$ se tiene

$$N_3 = 12.$$

Es clara la estrategia, ahora calcularemos para el caso más general, con los términos que tienen la expresión común $e^{kt}u^{3k-4}$ obtenemos

$$\frac{q^ke^{kt}u^{3k-4}}{(3k-4)!}N_k = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(i(k-i))^2q^ke^{kt}u^{3k-4}}{(3i-2)!(3(k-i)-2)!}N_iN_{k-i} - \frac{(k-i)(i)^3q^ke^{kt}u^{3k-4}}{(3i-1)!(3(k-i)-3)!}N_iN_{k-i},$$

cancelando los términos de la forma $q^ke^{kt}u^{3k-4}$, obtenemos

$$\frac{N_k}{(3k-4)!} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(i(k-i))^2N_iN_{k-i}}{(3i-2)!(3(k-i)-2)!} - \sum_{i=1}^{k-1}(\frac{(k-i)(i)^3N_iN_{k-i}}{(3i-1)!(3(k-i)-3)!},$$

y simplificando,

$$\frac{N_k}{(3k-4)!} = \sum_{i=1}^{k-1}[\frac{(i(k-i))^2}{(3i-2)!(3(k-i)-2)!} - \frac{(k-i)(i)^3}{(3i-1)!(3(k-i)-3)!}]N_iN_{k-i}$$

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1}[\frac{(i(k-i))^2(3k-4)!}{(3i-2)!(3(k-i)-2)!} - \frac{(k-i)(i)^3(3k-4)!}{(3i-1)!(3(k-i)-3)!}]N_iN_{k-i},$$

observamos que $\binom{3k-4}{3i-2} = \frac{(3k-4)!}{(3i-2)!((3k-4-(3i-2))!}$ y $\binom{3k-4}{3i-1} = \frac{(3k-4)!}{(3i-1)!(3k-4-(3i-1))}$. Entonces

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1}[(i(k-i))^2\binom{3k-4}{3i-2} - (k-i)(i)^3\binom{3k-4}{3i-1}]N_iN_{k-i},$$

y para el caso $n = k$, se tiene la fórmula.

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1}[(i(k-i))^2\binom{3k-4}{3i-2} - (k-i)(i)^3\binom{3k-4}{3i-1}]N_iN_{k-i}.$$

Esta es la fórmula de recurrencia para calcular el número de curvas que pasan por cierto puntos genéricos en el espacio proyectivo. Mediante la fórmula anterior calculamos N_k como 1, 1, 12, 620, 87304, 26312976, ...; sucesión A013587 en la página web [14].

Apéndice A

Lema de Poincaré.

En este apéndice enunciamos el Lema de Poincaré, el cual se puede consultar en [15]. Dicho resultado es fundamental para demostrar la existencia del potencial de Frobenius.

Definición A.1. Una variedad M es contraible a un punto $p_0 \in M$ si existe una función C^∞

$$H : M \times [0,1] \to M,$$

tal que $H(p,1) = p$ y $H(p,0) = p_0$, para todo $p \in M$.

Enunciaremos el siguiente teorema conocido como el lema de Poincaré.

Teorema A.1 (Lema de Poincaré)**.** *Si M es una variedad diferenciable contraible a un punto, entonces todo forma cerrada ω en M es exacta.*

Para ver la demostración consulte [12] y [15], donde además puede ver algunas consecuencias de dicho lema.

Apéndice B

Conexiones y curvatura

Conexión de Levi-Civita

Todas las variedades admiten métricas Riemannianas. Denotaremos el conjunto de todos los campos vectoriales sobre la variedad M, por $\mathcal{X}(M)$ y el de las funciones diferenciales sobre M por $C^{\infty}(M)$. Los resultados siguientes se puede ver en [3].

Definición B.1 (Conexión)**.** Una conexión es una función $\triangledown : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ tal que satisface las siguientes condiciones

a) $\triangledown_{fX+gY}(Z) = f \triangledown_X (Z) + g \triangledown_Y (Z)$,

b) $\triangledown_X(Y + Z) = \triangledown_X(Y) + \triangledown_X(Z)$,

c) $\triangledown_X(fY) = X(f)Y + f \triangledown_X (Y)$,

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Definición B.2. La conexión en una variedad Riemanniana es compatible con la métrica si y sólo, si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \triangledown_X Y, Z\rangle + \langle Y, \triangledown_X Z\rangle$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definición B.3. La conexión en una variedad diferenciable M se dice simétrica o sin torsión si

$$\triangledown_X Y - \triangledown_Y X = [X, Y].$$

Teorema B.1 (Conexión de Levi-Civita)**.** *Dado una variedad Riemanniana M, existe una única conexión en M que satisface las siguientes condiciones*

a) Es simétrica.

b) Es compatible con la métrica.

A la conexión $\bigtriangledown$ se le conoce como conexión Riemanniana o **Conexión de Levi-Civita**.

La conexión $\bigtriangledown_X Y$ esta determinado de manera única por la expresión $\langle Z, \bigtriangledown_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}$. Además dado el sistema coordenado asociado $\{x_1,\cdots,x_n\}$ de una carta (U,x) alrededor de p, se tiene $\Gamma^s_{ji} = g^{sk}\frac{1}{2}\{X_i g_{jk} + X_j g_{ki} - X_k g_{ij}\}$, donde Γ^s_{ji} son los coeficientes de la conexión, llamados símbolos de Christoffel, donde es claro que depende de la métrica (ver [16]).

Curvatura.

A partir de la definición de conexión de Levi-Civita definimos la curvatura.

Definición B.4. La curvatura R de una variedad Riemanniana M determina para cada par X, $Y \in \mathcal{X}(M)$ un mapeo $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, dado por

$$R(X,Y)Z = \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X Z - \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y Z + \bigtriangledown_{[X,Y]} Z,$$

donde $\bigtriangledown$ es la conexion de Levi-Civita.

Podemos observar que si $M = \mathbb{R}^n$ entonces la R es cero. La curvatura $R(\ ,\ )$ es bilineal, y cada operador $R(X\ ,Y\ )$ es lineal.

Apéndice C

Álgebra lineal.

Sea V un álgebra conmutativa. Recordemos que una transformación lineal es **semisimple** si la matriz asociada es diagonalizable, en particular, un elemento $a \in V$ es semisimple si la matriz asociada al endomorfismo lineal $T : V \to V$, $T(x) := l_a(x) = ax$, es diagonalizable. Una familia $\iota := \{L\}$ de transformaciones lineales, son simultáneamente diagonalizables si existe una base para la cual se pueden diagonalizar.

Si V tiene un producto interior definido, observamos que el mapeo $a \to l_a$ con $l_a(x) = ax$ define una representación de V como un álgebra conmutativa de endomorfismos auto-adjuntos de V. Además tiene una base ortogonal en la cual es diagonalizable las matrices asociadas a los endomorfismos l_a, es decir, son semisimples. Si los elementos de la familia $\iota := \{L\}$ conmutan entonces son simultaneamente diagonalizable, esta observación nos ayudará a demostrar el lema 1.1.

Bibliografía

[1] L. Abrams. Two-dimensional topologial quantum feld theories and frobenius algebras. *S. Knot Theory Ramifications*, 5:569–587, —-.

[2] Charles W. Curtis y Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience Publishers New York, 1962.

[3] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhauser Boston, 1992.

[4] B. Dubrovin. Geometry of 2d topological field theories. *SISSA TRIESTE*, 89:12–13, 1994.

[5] N. Hitchin y D. Calderbank. Frobenius manifolds. En *Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics*. 1997.

[6] Joachim Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, tomo 59. London Mathematical Society, 2003.

[7] M. Kontsevich y Yu. Manin. Gromov-witten classes, quantum chomology and enumerative geometry. *Communications in Mathematical Physics*, 164:525–562, 1994.

[8] Saunders Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, 1991.

[9] John M. Lee. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.

[10] Y. P. Lee y R. Pandharipande. *Frobenius manifolds, Gromov-Witten Theory, and Virasoro Constraints*. 2004.

[11] Carlos Segovia. Topological Quantum Field Theory. masterthesis. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN, 2007.

[12] Morita Shigeyuki. *Geometry of Differential Forms*. American Mathematical Society, Editorial Board, 2000.

[13] Andrzej Skowroński y Kunio Yamagata. *Frobenius Algebras I, Basic Representation Theory*. European Mathematical Society PUblishing House, 2010.

[14] N. J. A. Sloane. Encyclopedia of integer sequences. 1964. URL https://oeis.org/search?q=a013587&language=spanish&go=Buscar.

[15] Michael Spivak. *Comprehesive Introduction to Differential Geometry*. PERISH, INC, 1999.

[16] Héctor Sánchez y Óscar A. Palmas. *Geometría Riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.