



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Efectos inducidos
por dispositivos de punta alar
en el arrastre y sustentación
de alas**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Gerardo Juárez Chávez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Enrique Guzmán Vázquez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado Asignado

Presidente: **Dr. Federico Méndez Lavielle**
Secretario: **Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz**
Suplente: **Dr. Martín Salinas Vázquez**
Suplente: **Dr. Marco Antonio Reyes Huesca**
Vocal: **Dr. Enrique Guzmán Vázquez**

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mis padres por toda la paciencia y el apoyo emocional que han mostrado, durante la carrera y durante el tedioso proceso de completar la tesis. No puedo describir con palabras lo importantes que son para mí.

Le agradezco al resto de mi familia: a Adrián, a Mara, a Carolina, a Pepe, a Bety, a Tere y a Aníbal. De alguna u otra manera, todos ellos me han dado consejos que me han servido para tomar mejores decisiones, o bien, para ver la vida desde una perspectiva más optimista (algo en lo que yo soy terriblemente malo).

Le agradezco muchísimo al Dr. Enrique Guzmán por diversas cosas: por haber sido un profesor ejemplar en Mecánica de Fluidos I, por haberme invitado a formar parte de su grupo de investigación (¡aún si escogí mi propio tema sobre la marcha!), por haberme dado la oportunidad de estar en el Instituto de Ingeniería, por las comidas que nos ha invitado, una y otra vez; y por haber sido un mentor que genuinamente se preocupa por sus estudiantes. Estoy convencido de que necesitamos más profesionistas como él.

Le agradezco a Alan Olvera (¡especialmente a Alan Olvera!) por tantas buenas experiencias durante la carrera y por haberme aguantado durante esos 5 años. Siempre apreciaré su capacidad de ponerme los pies en la tierra cuando dejo de ver las cosas claras.

Le agradezco a mis colegas del Instituto por distintas cosas. A Marcel por toda la atención que me dio cuando requería de ayuda o algo de presión para terminar, por no temer a decir la verdad cuando era necesario hacerlo y por las lluvias de ideas tan enriquecedoras cuando de matemáticas se trataba. A Alan Lobato por haberme introducido a los juegos de mesa, sin los cuales habría vivido numerosas semanas con mucho más estrés del que experimenté. A Ángel por haberme acompañado a comer a Ciencias, semana tras semana. A Juan Carlos por haber hecho toda la talacha de documentos de tesis en LaTeX y la ayuda que recibí cuando era servidor social. A Jonathan por siempre estar dispuesto a atender mis dudas sobre las simulaciones numéricas. A Diego por el intercambio de información valiosa en más de una ocasión.

Le agradezco al Dr. Marco Reyes, por haber impartido mi asignatura favorita de toda la carrera, la cual me aportó muchísimas cosas y me dio la perspectiva que hoy tengo de la descripción matemática de los procesos físicos.

Le agradezco a mis grandes amistades de mucho tiempo atrás, cuya compañía significa mucho para mí. Le agradezco a Alan Ituriel por ser lo más cercano que tengo a un hermano, por ser la persona en la que deposito mi absoluta confianza y por haberme aconsejado sobre decisiones importantes de la vida. Le agradezco a Daniel por haber compartido conmigo experiencias, ideas, pensamientos y excentricidades en los últimos diez años, prácticamente todos los días, que estoy seguro que recordaré por siempre. Le agradezco a Adrián Gil porque su amistad no era algo que yo esperaba, incluso en aquellos primeros días en el taller de fotografía, y, sin embargo, ha pasado a ser una de las relaciones que más aprecio en mi vida. Le agradezco a Selene por su inexplicable capacidad de siempre alegrarme el día con alguna sorpresa, imposible de predecir, y por las veces que me ha acompañado a disfrutar de una buena comida. Le agradezco a Emile por compartir sus opiniones y experiencias, por defender sus principios y por haberme tenido tanta confianza cuando las cosas se ponían difíciles.

Finalmente, debido a eventos recientes, sería injusto si no le agradeciera al Dr. Martín Salinas, dado que resolvió mis dudas en un área que no conocía en lo absoluto, a alguien que él no conocía en absoluto, y que me ayudó a solventar las dificultades que surgieron con las entrevistas de la Maestría.

Resumen

Esta tesis condensa los resultados obtenidos del arrastre y la sustentación de un ala de avión, con perfil NACA 2412, sin dispositivo de punta alar y equipada con seis configuraciones distintas de dispositivos de punta alar, para dos envergaduras distintas. En el primer capítulo, se presenta un resumen de las investigaciones de aerodinámica de alas de envergadura infinita y de alas de envergadura finita. En seguida, se introducen los estudios más relevantes que se han hecho sobre los efectos que producen los dispositivos de punta alar. En el segundo capítulo, se describen en brevedad las características de los flujos alrededor de alas, tanto de envergadura infinita como finita, y se menciona la naturaleza del arrastre debido a la sustentación. También se incluyen los avances realizados del modelado matemático, del flujo alrededor de la geometría base bidimensional, por la vía analítica.

En el tercer capítulo se describen las geometrías de estudio que se seleccionaron, así como la forma general para construirlas. También se mencionan las características más relevantes de las mallas utilizadas, los esquemas de discretización escogidos, el algoritmo de solución al que se recurrió y el modelo de turbulencia seleccionado. En el cuarto capítulo, se presentan los resultados de las simulaciones de ala infinita y se describen los rangos de validez de los mismos, comparándolos con los datos experimentales disponibles. Después, se muestran los resultados de las simulaciones para alas finitas para las siete configuraciones. Como última sección de este capítulo, se discuten las razones por las cuales distintos dispositivos provocan arrastres y sustentaciones diferentes, dentro de lo que los resultados lo permiten.

Para finalizar, el quinto capítulo consiste de las conclusiones generales que se pueden sacar del estudio, de la mención de los aspectos que le dan valor a este trabajo y de las recomendaciones que se pueden hacer para mejorar los resultados obtenidos, o bien, para continuar esta investigación hacia el futuro. Los apéndices resumen brevemente algunos desarrollos matemáticos que son necesarios para entender partes del texto y algunas sugerencias para realizar simulaciones numéricas en OpenFoam.

Contenido

Resumen	iv
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Dispositivos de punta alar	1
1.1.1. Generalidades	1
1.1.2. Tipos de dispositivos	3
1.2. Antecedentes	6
1.2.1. Investigación de alas de envergadura infinita	6
1.2.2. Investigación de alas de envergadura finita	8
1.3. Reducción de arrastre asociado al uso de dispositivos de punta alar	10
1.4. Objetivo de la tesis	11
1.4.1. Alcances	11
1.4.2. Hipótesis	12
2. MARCO TEÓRICO	13
2.1. Descripción del problema	13

2.1.1. Fenómeno físico	14
2.2. Modelado del ala de envergadura infinita	22
2.2.1. Transformación de Zhukovsky	22
2.2.2. Transformación de Theodorsen	24
2.2.3. Ecuaciones para $\psi(\theta)$ y $\varepsilon(\theta)$	25
2.2.4. Ecuaciones para $\psi(\varphi)$ y $\varepsilon(\varphi)$	29
2.2.5. Flujo potencial real alrededor de un perfil alar	33
2.2.6. Flujo potencial complejo alrededor de un perfil alar	36
2.3. Modelado del ala de envergadura finita	38
3. PROGRAMA NUMÉRICO	39
3.1. Pre-procesamiento	39
3.1.1. Geometrías de estudio	39
3.1.2. Dominio computacional	43
3.1.3. Malla	48
3.2. Procesamiento	53
3.2.1. Esquemas de discretización	53
3.2.2. Propiedades de transporte	53
3.2.3. Condiciones de frontera	54
3.2.4. Criterios y parámetros	57
3.2.5. Modelo de turbulencia	58
3.2.6. Algoritmo de solución	59

3.3. Post-procesamiento	61
3.3.1. Cálculo de las fuerzas	61
4. RESULTADOS	63
4.1. Ala infinita	63
4.2. Ala finita (sin dispositivo de punta alar)	68
4.3. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia arriba, sin vértice)	78
4.4. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia arriba, con vértice)	87
4.5. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia abajo, sin vértice)	96
4.6. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia abajo, con vértice)	106
4.7. Ala finita (con dispositivo de punta alar en cimitarra, sin vértice)	115
4.8. Ala finita (con dispositivo de punta alar en cimitarra, con vértice)	125
4.9. Coeficientes de arrastre y sustentación	134
4.10. Discusión	136
4.10.1. Simulaciones de ala infinita	136
4.10.2. Coeficientes de ala infinita	139
4.10.3. Simulación de ala finita sin dispositivo	140
4.10.4. Simulaciones de ala finita con dispositivos	142
4.10.5. Efecto de los dispositivos en los coeficientes	146
5. CONCLUSIONES	150
5.1. Resumen	150
5.2. Contribuciones	152

<i>CONTENIDO</i>	VIII
5.3. Recomendaciones y trabajo futuro	153
A. Desarrollos matemáticos	157
A.1. Sistema de ecuaciones integrales de Fredholm del segundo tipo	157
A.2. Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS)	161
A.3. Ecuaciones del algoritmo SIMPLE	162
B. Simulación en OpenFoam	166
B.1. Recomendaciones sobre generación de superficies	166

Lista de Figuras

1.1. Vórtice generado en la punta de un ala (NASA).	2
1.2. Diferentes dispositivos de punta alar. Los tipos son: (a) el difusor de vórtice, (b) el dispositivo hacia arriba, (c) la cerca de ala, (d) la punta de ala distorsionada, (e) el dispositivo en cimitarra, (f) el espiroide, (g) el dispositivo parcialmente suavizado y (h) el dispositivo totalmente suavizado.	5
2.1. Sistema de coordenadas cartesiano tradicionalmente utilizado en aerodinámica y aeronáutica para distinguir la dirección de las fuerzas.	15
2.2. Partes de un perfil alar.	15
2.3. Región de estancamiento[62].	16
2.4. Capa límite viscosa para alas infinitas[62].	17
2.5. Transición de la capa límite en placas planas[62].	18
2.6. Estela turbulenta[64].	19
2.7. Perfiles de velocidad de la capa límite para alas finitas[62].	20
2.8. Campo de velocidad alrededor de una aeronave, vista de un plano yz [62]. . .	21
2.9. Formación de vórtices en un ala finita[64].	22
2.10. Transformación y transformación inversa de Zhukovsky.	23
2.11. Transformación y transformación inversa de Theodorsen.	24

3.1. Segmentos de trazo que formaban parte del ala base y de la curva guía, vista posterior.	41
3.2. Geometrías estudiadas para envergadura de 0.5 <i>m</i>	42
3.3. Geometrías estudiadas para envergadura de 1.0 <i>m</i>	43
3.4. Dominio computacional para el caso de ala infinita, con dimensiones en términos de <i>c</i>	44
3.5. Acercamiento del dominio computacional para el caso de ala infinita.	45
3.6. Dominio computacional utilizado para las alas finitas, en función de <i>c</i> y <i>b</i> (válido para todas las geometrías).	46
3.7. Fronteras del dominio computacional para alas finitas.	47
3.8. Malla fina para el caso de ala infinita.	50
3.9. Malla para los casos de ala finita (distintos acercamientos).	51
3.10. Malla para el caso de ala finita (otras vistas).	52
3.11. Algoritmo SIMPLE.	60
4.1. Campos de interés en todo el dominio, ala infinita (parte 1).	64
4.2. Campos de interés en todo el dominio, ala infinita (parte 2).	65
4.3. Ángulo de ataque contra coeficiente de arrastre para distintos valores de viscosidad de Spalart-Allmaras a la entrada.	66
4.4. Ángulo de ataque contra coeficiente de sustentación para distintos valores de viscosidad de Spalart-Allmaras a la entrada.	67
4.5. Tubos de corriente alrededor de ala finita sin dispositivo.	68
4.6. Presión (ϱ) en distintos planos <i>yz</i> , ala sin dispositivo.	69

4.7. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).	71
4.8. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).	72
4.9. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).	74
4.10. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).	75
4.11. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).	76
4.12. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).	77
4.13. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia arriba, sin vértice.	78
4.14. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice.	79
4.15. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).	80
4.16. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).	81
4.17. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).	83
4.18. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).	84
4.19. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).	85
4.20. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).	86
4.21. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia arriba, con vértice.	87

4.22. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice.	88
4.23. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).	89
4.24. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).	90
4.25. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).	92
4.26. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).	93
4.27. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).	94
4.28. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).	95
4.29. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia abajo, sin vértice.	96
4.30. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice.	97
4.31. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).	99
4.32. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).	100
4.33. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).	102
4.34. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).	103
4.35. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).	104

4.36. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).	105
4.37. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia abajo, con vértice.	106
4.38. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice.	107
4.39. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).	108
4.40. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).	109
4.41. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).	111
4.42. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).	112
4.43. Viscosidad turbulenta (ν_T) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).	113
4.44. Viscosidad turbulenta (ν_T) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).	114
4.45. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo en cimitarra, sin vértice.	115
4.46. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice.	117
4.47. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).	118
4.48. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).	119
4.49. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).	121

4.50. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).	122
4.51. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).	123
4.52. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).	124
4.53. Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo en cimitarra, con vértice.	125
4.54. Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice.	126
4.55. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 1).	127
4.56. Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 2).	128
4.57. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 1).	130
4.58. Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 2).	131
4.59. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 1).	132
4.60. Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 2).	133
4.61. Envergadura contra coeficiente de arrastre para alas con distintos dispositivos.	134
4.62. Envergadura contra coeficiente de sustentación para alas con distintos dispositivos.	135
B.1. Malla resultante de usar <i>snappyHexMesh</i> , exportando el archivo <i>.stl</i> directamente a OpenFoam; frente del perfil.	167

- B.2. Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo .sto a Salome y luego, una vez allí, el archivo .stl a OpenFoam; frente del perfil. 167
- B.3. Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo .stl directamente a OpenFoam; parte posterior del perfil. 168
- B.4. Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo .sto a Salome y luego, una vez allí, el archivo .stl a OpenFoam; parte posterior del perfil. . 168

Lista de Tablas

3.1. Nodos por arista para malla de caso de ala infinita	48
3.2. Nodos por arista para malla de caso de ala infinita	49
3.3. Independencia de malla de C_D para el caso de ala infinita	49
3.4. Independencia de malla de C_L para el caso de ala infinita	49
3.5. Cantidad de volúmenes para mallas de ala finita	52
3.6. Propiedades de transporte	54
3.7. Tipos de condiciones de frontera para caso de ala infinita (Físicas)	55
3.8. Valores de condiciones de frontera para caso de ala infinita (Físicas)	55
3.9. Tipos de condiciones de frontera para caso de ala infinita (OpenFoam)	55
3.10. Valores de condiciones de frontera para caso de ala infinita (OpenFoam)	56
3.11. Tipos de condiciones de frontera para casos de ala finita (Físicas)	56
3.12. Valores de condiciones de frontera para casos de ala finita (Físicas)	56
3.13. Tipos de condiciones de frontera para casos de ala finita (OpenFoam)	57
3.14. Valores de condiciones de frontera para casos de ala finita (OpenFoam)	57
3.15. Criterios de convergencia	57

3.16. Factores de relajamiento	58
4.1. Tamaños relativos de superficies mojadas para todos los dispositivos	145

Nomenclatura

Variables

Parte real de coeficiente j -ésimo de expansión en series:	A_j
Envergadura del perfil alar:	b
Aceleración asociada a las fuerzas de cuerpo:	\mathbf{b}
Parte imaginaria de coeficiente j -ésimo de expansión en series:	B_j
Cuerda del perfil alar:	c
Coefficiente de arrastre (calculado):	C_D
Coefficiente de sustentación (calculado):	C_L
Coefficiente j -ésimo de expansión en series:	C_j
Transformación de Zhukovsky:	f
Transformación inversa de Zhukovsky:	f^{-1}
Fuerza aerodinámica:	F
Transformación de deformación de circunferencia:	g
Transformación inversa de deformación de circunferencia:	g^{-1}
Transformación de Theodorsen:	h
Transformación inversa de Theodorsen:	h^{-1}
Número imaginario:	i
Presión:	p
Presión de la corriente libre:	p_∞
Coordenada radial en el plano de la circunferencia:	r
Radio reescalado de la circunferencia:	R
Radio de la circunferencia:	R_0
Superficie:	S
Tiempo:	t
Tensor de esfuerzos de Cauchy:	\mathbf{T}
Parte real de coordenada compleja en el plano del perfil alar:	u
Velocidad de la corriente libre:	U_∞

Parte imaginaria de coordenada compleja en el plano del perfil alar:	v
Velocidad:	\mathbf{v}
Campo de velocidad complejo:	V
Coordenada compleja en el plano del perfil alar:	w
Plano complejo del perfil alar:	W
Parte real de coordenada compleja en el plano de la circunferencia:	x
Parte imaginaria de coordenada compleja en el plano de la circunferencia:	y
Coordenada compleja en el plano de la circunferencia:	z
Coordenada compleja en el plano de la circunferencia (con una rotación constante):	\tilde{z}
Plano complejo de la circunferencia:	Z

Letras griegas

Ángulo de ataque:	α
Límite de integración variable:	β
Circulación:	Γ
Coordenada compleja en el plano de la circunferencia deformada:	ζ
Función de rotación de la circunferencia:	ε
Coordenada angular en el plano de la circunferencia deformada:	θ
Plano complejo de la circunferencia deformada:	Λ
Viscosidad dinámica:	μ
Viscosidad dinámica turbulenta:	μ_t
Viscosidad cinemática:	ν
Viscosidad (cinemática) turbulenta:	ν_t
Viscosidad de Spalart-Allmaras:	$\tilde{\nu}$
Densidad:	ρ
Función potencial real:	Φ
Coordenada angular en el plano de la circunferencia:	φ
Coordenada angular en el plano de la circunferencia (variable muda):	$\tilde{\varphi}$
Función de deformación de la circunferencia:	ψ
Constante de escala de la circunferencia:	ψ_0
Función de corriente:	Ψ
Parte rotacional del campo de velocidades:	Υ
Potencial de velocidad complejo:	Ω

Subíndices y superíndices

Inverso:	-1
Inicial o base:	0
Índice de sumatoria:	j
Turbulento:	t
Superficie alar:	Σ
De la corriente libre:	∞

Grupos dimensionales y otros símbolos

Conjunto de los números complejos:	\mathbb{C}
Conjunto de los números reales:	\mathbb{R}
Operador derivada parcial:	∂
Operador derivada total:	d
Operador integral:	\int
Operador integral de superficie cerrada:	\oint
Operador nabla:	∇
Operador diferencial complejo:	∇
Operador diferencial complejo conjugado:	$\bar{\nabla}$
Magnitud de un vector:	$\ \ $

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Dispositivos de punta alar

1.1.1. Generalidades

Los dispositivos de punta alar, conocidos más comúnmente como “winglets” o “sharklets” en inglés¹, son superficies que se montan en las puntas de las alas con el objetivo de reducir el arrastre producido en regímenes subsónicos[101]. El *arrastre*² es la componente de la fuerza aerodinámica que va en contra de la dirección del movimiento del cuerpo involucrado[62][64]. La *sustentación*³ es la componente de la fuerza aerodinámica que es perpendicular a la dirección del movimiento[62][64]. La *fuerza aerodinámica* es aquella que actúa sobre un cuerpo en virtud de su movimiento dentro de un gas, en este caso aire. Existen dos mecanismos mediante los cuales se producen estas componentes. El primero es el mecanismo viscoso y el segundo está asociado al campo de presión[62]. Una descomposición más explícita de la fuerza aerodinámica se ilustra en las ecuaciones (3.6) y (3.7).

El *arrastre debido a la presión* se puede descomponer en dos partes[93]: el *arrastre de forma*, y el *arrastre inducido* o *arrastre debido a la sustentación*[54]. La primera se debe a que el fluido

¹En realidad no hay diferencia entre ambos términos. Existen simultáneamente debido a una disputa de patentes entre Boeing (*winglets*) y Airbus Industrie (*sharklets*).

²Entendiéndose, en términos generales, como la resistencia que ejerce el fluido sobre el objeto en movimiento.

³Entendiéndose, en términos generales, como la fuerza que permite el levantamiento del objeto en movimiento.

tiene que rodear al cuerpo en movimiento. La segunda⁴ se refiere exclusivamente al efecto que tienen los vórtices que se forman en la punta de las alas, mostrados en la Figura 1.1, sobre el resto del flujo[8][23]. Los dispositivos de punta alar se concentran en reducir el arrastre inducido a través de la mitigación de los vórtices. Sin embargo, también pueden afectar al *arrastre viscoso* en el proceso[101]. De igual forma, su presencia también modifica la *sustentación debido a la presión* y, en mucho menor grado, a la *sustentación viscosa*. No todos los expertos en el área están de acuerdo con esta descomposición del arrastre debido a la presión[62]. Sólo es posible hacerlo cuando se modela a las alas de una manera muy específica[77][78].



Figura 1.1: Vórtice generado en la punta de un ala (NASA).

El primer uso documentado de dispositivos de punta alar fue en 1897, por el ingeniero británico F. W. Lanchester, en el que se patentó la instalación de una placa plana en el extremo de un ala[57][101]. Una segunda patente fue introducida en 1930 por J. V. Burnelli[15], también basada en el uso de placas planas en la punta del ala. Desde entonces, numerosas otras patentes de distintas clases de dispositivos se han registrado. Estos dispositivos pueden consistir de una sola superficie, de dos superficies o de más. El primer caso corresponde al diseño de la mayoría de los dispositivos. En el segundo caso se suele denominar *superficie primaria* a aquélla que se extiende desde el extradós⁵ hacia arriba y *superficie secundaria*

⁴Que sólo se presenta en alas con envergadura finita.

⁵Véase la Figura 2.2.

a la que se extiende desde el intradós⁶ hacia abajo[101]. Sólo hay unos pocos ejemplos que pertenecen al tercer caso.

En la actualidad parece haber consenso en que los dispositivos de punta alar efectivamente reducen el arrastre inducido. Ésto ha sido verificado de forma experimental[101] y numérica[36], aunque las conclusiones de cada estudio no coinciden en todo. Además, para cierto tipo de alas, se conoce cuál es la distribución de presión que se requiere para obtener el arrastre inducido mínimo[54][68]. Sin embargo, todavía no se entiende por completo la relación que hay entre los parámetros geométricos que definen al dispositivo y la distribución de presión sobre el ala. Asimismo, algunos diseños también conllevan algún tipo de problema estructural para el ala[35]. Ésta es la razón por la que todavía no existe un dispositivo de punta alar óptimo y que, incluso en aeronaves comerciales modernas, todavía se pueden observar cambios en el diseño de los dispositivos.

1.1.2. Tipos de dispositivos

Existen muchos tipos diferentes de dispositivos de punta alar. En la aviación comercial podemos identificar al menos seis modelos de importancia. La *cerca de ala*⁷ fue utilizada por primera vez en el Airbus A310, en el año de 1985, y después en el Airbus A300-600. En la actualidad, todavía se puede observar en el Airbus A320 y Airbus A380 de modelo clásico[1]. Es un dispositivo con dos superficies, en la que existe una simetría aproximada⁸ entre la superficie primaria y la superficie secundaria, ninguna de las cuales termina en vértice. Es el dispositivo preferido para equipamiento en alas que originalmente no tenían aditamento alguno. Ésto se debe a que no producen problemas estructurales y son fáciles de instalar[35]. La *cerca de ala* se puede observar en la imagen (c) de la Figura 1.2 .

El *difusor de vórtice*⁹ fue utilizado, por primera vez, en el Boeing 747-400 en 1988. Posteriormente se instaló en las primeras versiones del Airbus A330 y del Airbus A340. Éste se caracteriza por tener solamente una superficie primaria que no termina en vértice y que forma un ángulo bien definido con el extradós. Parece ser más efectivo que la *cerca de ala*[37], pero es más difícil de instalar. Éste se puede observar en la imagen (a) de la Figura 1.2. El *dispositivo hacia arriba* es el más común en la actualidad y se muestra en la imagen (b) de la Figura

⁶Ibidem.

⁷Del término “wingtip fence”.

⁸En la investigación original de R. T. Whitcomb[101], no existía dicha simetría. En la actualidad, la simetría se cumple para la mayoría de los dispositivos de este tipo.

⁹Del término “vortex diffuser”.

1.2. La primera vez que se utilizó fue en 1997, en el Boeing 737 Next Generation¹⁰. El nuevo Airbus A320neo, introducido en 2014, incorpora este dispositivo a sus alas. Se caracteriza por tener una superficie primaria que no forma un ángulo bien definido con el extradós, sino que es cóncava. Es uno de los dispositivos que más reducen el arrastre, pero las desventajas estructurales que conlleva también son mayores[35].

La *punta de ala distorsionada*¹¹ fue utilizada en el Boeing 777. Más que un dispositivo de punta de ala, este diseño es una extensión del ala misma. La reducción de arrastre que produce es limitada[106], pero no presenta mayores problemas estructurales[35]. Nuevas tendencias en el diseño de dispositivos han producido los modelos como el *dispositivo parcialmente suavizado*¹² y el *dispositivo totalmente suavizado*¹³. Éstos pueden observarse en las imágenes (g) y (h) de la Figura 1.2. El primero se puede hallar en las alas del Airbus A350 y del Airbus A330neo, mientras que el segundo es usado exclusivamente en el Boeing 787 Dreamliner y en el Boeing 747-8. En ambos casos se tiene solamente la superficie primaria, pero la transición entre el extradós y el dispositivo es mucho más suave que en otros modelos.

El tipo de dispositivo de más reciente uso en aviación comercial se conoce como *dispositivo en cimitarra*¹⁴. Se puede observar en la imagen (e) de la Figura 1.2. Es un dispositivo de dos superficies, en el que la superficie primaria y la superficie secundaria forman ángulos bien definidos con el extradós y con el intradós respectivamente. Es notable que se haya implementando en el Boeing 737 MAX y en el Airbus A380neo sólo hasta la década de 2010. Ésto genera preguntas interesantes respecto a por qué este diseño sería preferible a los dispositivos clásicos. Finalmente, el *espiroide*¹⁵ se presenta en la imagen (f) de la Figura 1.2. Fue patentado por L. B. Gratzner en 1992. Ha sido estudiado de manera experimental en el Gulfstream II y numéricamente por P. Bourdin[35]. Lo que lo distingue es que consiste de una superficie curva que se cierra con el extradós.

¹⁰Es decir, las series 700, 800 y 900.

¹¹Del término “raked wingtip”.

¹²Del término “blended winglet”.

¹³Del término “fully-blended winglet”.

¹⁴Del término “scimitar winglet”.

¹⁵Del término “spiroid winglet”.

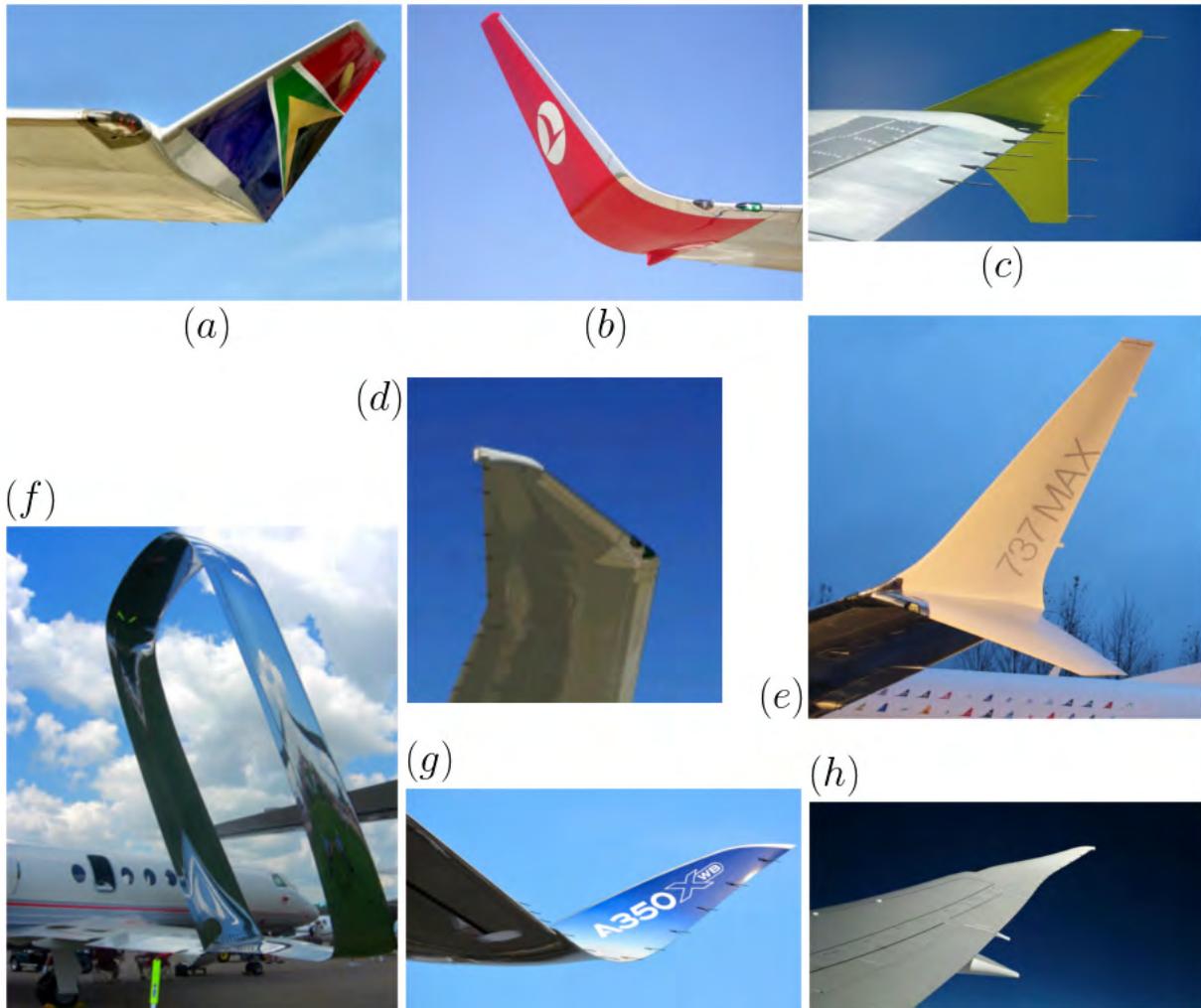


Figura 1.2: Diferentes dispositivos de punta alar. Los tipos son: (a) el difusor de vórtice, (b) el dispositivo hacia arriba, (c) la cerca de ala, (d) la punta de ala distorsionada, (e) el dispositivo en cimitarra, (f) el espiroide, (g) el dispositivo parcialmente suavizado y (h) el dispositivo totalmente suavizado.

Aunque todos los dispositivos sirven el mismo propósito, pareciera ser que algunos modelos son preferibles a otros en distintas circunstancias[70]. A decir verdad, algunas aeronaves comerciales modernas, como el Sukhoi Superjet 100 y el Irkut MC-21, no utilizan dispositivos de punta alar. Ciertos autores afirman que su uso equivale a sólo extender la envergadura del ala[36]. Ante estas diferencias de opinión respecto a su uso, todavía son vigentes los estudios del efecto que producen estos dispositivos. En general, la idea sigue siendo encontrar una forma óptima para reducir el arrastre, o bien, investigar si existen alternativas.

1.2. Antecedentes

Los estudios de dispositivos de punta alar no pueden separarse de los estudios de aerodinámica de alas. En los últimos cien años, se han realizado numerosas investigaciones al respecto, tanto de carácter teórico como práctico. Los trabajos analíticos prácticamente siempre se han planteado bajo las suposiciones de flujo estacionario, incompresible e irrotacional[79]. Los detalles de estas suposiciones se explican en las Secciones 2.1 y 2.2. Para observar los efectos de flujos reales¹⁶, se ha recurrido a estudios experimentales y numéricos. La mayoría de éstos han aproximado las alas como cuerpos de envergadura infinita¹⁷. De este conjunto de publicaciones, casi todas las que han estudiado a alas de envergadura finita han sido de carácter experimental y/o numérico¹⁸.

1.2.1. Investigación de alas de envergadura infinita

El tratamiento matemático de problemas físicos que involucran geometrías complejas nunca ha sido una tarea trivial. En 1851, cuando B. Riemann introdujo el *teorema de mapeos conformes*, la variable compleja se convirtió en una poderosa herramienta para resolver estos problemas en una geometría más simple y traducir los resultados a la geometría de interés[89]. En 1902, N. Zhukovsky fue el primero en aprovecharla para modelar el flujo estacionario alrededor de perfiles alares[107]. Se requirió de una hipótesis heurística para cerrar el problema, propuesta por M. W. Kutta¹⁹ en 1903, conocida como *condición de Kutta*[62]. Ésta nos dice que de todos los posibles flujos irrotacionales alrededor de un ala, sólo es físicamente admisible aquél en el que el fluido se desprende suavemente del borde de salida del perfil[88]. Algunos ven esta hipótesis como un artificio matemático, dado que carece de demostración formal. La justificación física para su uso radica en que los flujos viscosos son incapaces de rodear esquinas muy puntiagudas en objetos[62]. Esta *teoría de Kutta-Zhukovsky* asentó las bases para el estudio de flujo alrededor de alas infinitas durante gran parte del siglo XX.

¹⁶Es decir, flujos transitorios, compresibles y rotacionales.

¹⁷Mientras que es posible realizar estudios numéricos que realmente correspondan al caso de flujo alrededor de alas infinitas, experimentalmente esto sólo puede aproximarse.

¹⁸Debido a las dificultades matemáticas que implica el modelado de flujos tridimensionales alrededor de geometrías complejas.

¹⁹De hecho, se le atribuye tanto a Kutta como a Zhukovsky el desarrollo simultáneo, pero independiente, de la misma teoría.

Dado que se limita al modelado de perfiles idealizados²⁰, pertenece a la familia de las teorías aproximadas. Para ciertas aplicaciones, los resultados que proporciona son satisfactorios[79]. Los trabajos de T. Von Kármán, E. Trefftz y R. Von Mises[94][95], publicados entre 1918 y 1920, extendieron la teoría para incluir perfiles alares con borde de salida en punta suave[64]. En 1928, E. Carafoli realizó su propia modificación, tomando en cuenta perfiles con borde de salida en curva suave[64].

La primera teoría exacta, conocida como *teoría de perfiles alares de forma arbitraria*, fue propuesta en 1931 por T. Theodorsen[88][89]. Con la introducción de un mapeo intermedio, se volvió posible estudiar cualquier perfil alar. Entre 1931 y 1945, E. Jacobs, *et al*, realizaron estudios experimentales[2][44][45][46] de diferentes perfiles alares sistemáticamente. Estos perfiles estarían destinados a usarse en la industria aeronáutica²¹. En 1944, I. E. Garrick desarrolló la teoría de perfiles alares arbitrarios con múltiples componentes[25], extendiendo el trabajo previo de Theodorsen²². En 1935, Theodorsen incluyó a los perfiles alares con movimiento oscilante en su teoría[90], considerando por primera vez a los flujos transitorios. En 1940, C. Schmieden incorporó la separación del vórtice inicial en la teoría de Kutta-Zhukovsky. Ésto eliminó la necesidad de un punto de estancamiento posterior[80].

En 1951, R. L. Halfman continuó con el estudio de alas oscilantes de forma experimental[32]. G. Couchet[14] modificó la teoría de Zhukovsky para incluir los flujos transitorios[29] en el año de 1956. Posteriormente, entre 1976 y 1979, D. C. Ives y N. D. Halsey también estudiaron las alas de múltiples componentes[33][43], extendiendo el trabajo de Kutta-Zhukovsky²³. En la década de 1980, con el auge de la dinámica de fluidos computacional, los estudios se comenzaron a enfocar en complementar los resultados analíticos y experimentales con simulaciones numéricas. Por ejemplo, N. D. Halsey utilizó una variante numérica de un modelado por mapeos conformes en 1982[34]. En 1985, A. Suddhoo, *et al*, evaluaron la exactitud de algunos métodos numéricos respecto a los resultados analíticos para perfiles de múltiples componentes[86].

Avances más recientes incluyen las propuestas de W. Yeung²⁴ y G. V. Parkinson, desarrollada entre 1987 y 1992, donde se modela la separación de la capa límite en alas con el uso de una fuente[73], o bien, con mapeos adicionales[105]; las investigaciones de M. E. Klonowska y W. J. Prosnak en 1996, en las que se modifica lo que planteó Garrick[50] acerca de las

²⁰Es decir, el perfil alar es construido matemáticamente como un contorno cerrado. El contorno no coincide necesariamente con la forma del perfil de un ala construida en el mundo real.

²¹T. Theodorsen, E. Jacobs, entre otros, eran miembros de NACA.

²²Se buscaba estudiar biplanos originalmente.

²³Con el objetivo de estudiar el efecto de dispositivos hípersustentadores.

²⁴Desde 1985, W. Yeung se ha dedicado a estudiar la separación de flujo, entrada-en-pérdida y uso de dispositivos hípersustentadores en alas[104].

alas de múltiples componentes; el trabajo de S. Michelin y S. G. L. Smith en 2009, donde se modifica el trabajo de Couchet para incluir el desprendimiento de vórtices[63]; y el estudio de Verhoff en 2010, donde también se modela la separación de capa límite en flujos externos[92]. También se han realizado estudios relevantes sobre aplicaciones prácticas.

En 2005, O. Agren, *et al*, utilizaron una de las teorías transitorias para modelar el flujo alrededor de turbinas eólicas[4]. En 2005, M. R. Ahmed, *et al*, investigaron las fuerzas sobre un ala en un túnel de viento, enfocándose en el efecto suelo[5]. F. C. Gerhardt, *et al*, aplicaron la teoría exacta de perfiles oscilantes en aletas rígidas de yates[27] en 2011. En 2017, J. M. R. Gorle, *et al*, se basaron en dicho desarrollo para analizar el flujo alrededor de álabes de turbinas Darrieus[29]. Existen muchos más estudios, la mayoría de los cuales no son accesibles con facilidad. Gran parte de las investigaciones que se mencionaron hacen referencia al mundo occidental. El desarrollo en paralelo que se dio en Europa del Este y en Rusia puede investigarse en ciertas fuentes selectas[21][22].

1.2.2. Investigación de alas de envergadura finita

La primera persona en desarrollar una teoría aproximada para alas finitas fue L. Prandtl. Esta *teoría de la línea de sustentación* se basa en lo que ya se conocía para alas infinitas y permite estimar incluso el arrastre debido a la sustentación. La desventaja principal es que está limitada al no considerar la compresibilidad, la viscosidad, las alas de envergadura corta y las alas en flecha o con algún tipo de curvatura. No obstante, a lo largo de los años, la teoría se ha ido modificando de distintas maneras, o bien, utilizado para propósitos prácticos. Dicha teoría fue publicada en dos reportes técnicos[77][78] en los años de 1918 y 1919. En 1922, A. F. Zahm, *et al*, hicieron un estudio experimental del efecto de las puntas de ala distorsionadas[106]. En 1923, M. Munk estimó el arrastre debido a la sustentación mínimo posible en alas finitas[68] según la teoría de Prandtl.

En 1925, H. Wagner desarrolló otra teoría para estudiar el flujo alrededor de alas finitas en paralelo[98]. En 1938, W. Mangler realizó la primera investigación científica documentada sobre el efecto de dispositivos de punta alar en alas de envergadura finita[59]. Su énfasis fue la distribución de presión sobre la superficie alar. En 1939, R. T. Jones extendió el trabajo de Wagner para flujo transitorio[48]. En 1947, J. Weissinberg investigó experimentalmente la distribución de presión sobre alas finitas en flecha[99]. R. T. Whitcomb, considerado por muchos como el pionero en el estudio de dispositivos de punta alar, llevó a cabo su investigación experimental en 1976. Este estudio, realizado en las instalaciones de la NASA, permitió la incorporación de dispositivos en aeronaves de transporte[101].

En 1976, el trabajo de K. K. Ishimitsu, *et al*, que fue financiado por la Fuerza Aérea de Estados Unidos, sirvió para estudiar el uso de dispositivos en aviones Boeing KC-135[42]. Un año más tarde, H. Heyson, *et al*, hicieron un estudio paramétrico de la geometría de los dispositivos y de su efecto en la reducción del arrastre[38]. En 1984, Jones publicó su propio estudio acerca de la eficacia de los dispositivos al reducir el arrastre en aeronaves pequeñas[49]. En 1987, la investigación de A. B. Taylor, que fue de carácter experimental, buscó estudiar el efecto de los dispositivos en aeronaves McDonell Douglas DC-10[87]. Una adaptación de la teoría de línea de sustentación para alas en flecha fue propuesta por J. L. Guermond en 1990[30]. Recientemente, ha habido un resurgimiento del interés en los dispositivos de punta alar para mitigar los vórtices de estela.

Entre los años 2001 y 2003, P. Bourdin publicó varios estudios de efectos de dispositivos en el arrastre inducido de alas[11][35]. En 2005, las deformaciones en alas provocadas por los dispositivos fueron investigadas numéricamente por B. Prananta, *et al*[76]. Ese mismo año, dos tesis de maestría, realizadas en 2005 y 2006 en la Universidad de Cranfield, se dedicaron a simular la generación de estos vórtices detrás de alas de aeronaves comerciales[3][10]. En 2006, una investigación sobre el uso de estos dispositivos en álabes de turbina[47] fue realizada por J. Johansen, *et al*. En 2007, uno de los grupos de investigación más interesados en este tema, con sede en el Centro Aeroespacial Alemán (DLR), utilizó un acoplamiento numérico entre la línea de sustentación y el método de elemento finito para estudiar los efectos hidrodinámicos y estructurales de los dispositivos en aeronaves comerciales[84][85].

La reducción del arrastre en un Boeing 767 equipado con una cerca de ala[37] fue estudiada por R. Hernández-Rivera, *et al*, en 2008. Una de las investigaciones más completas en el tema fue realizada en 2009 por J. L. Hantrais-Gervois, *et al*²⁵, de forma experimental y numérica, para verificar el rendimiento de dispositivos hacia abajo en sus aeronaves[35]. En 2011, M. E. Braaten, *et al*, llevaron a cabo un análisis estructural en álabes de turbinas eólicas con la modificación[12]. Un análisis similar para alas de avión fue realizado por R. De Breuker, *et al*, ese mismo año[17]. Esta última publicación es parte de otra rama de investigación actual que se dedica a estudiar alas finitas de forma cambiante[18][55][66][97]. En 2012, A. Gupta, *et al*, complementaron la investigación de las turbinas eólicas con el análisis de qué le ocurre al fluido[31].

En 2013, M. Dinesh, *et al*, del Centro de Tecnología de Altair de India, hicieron un estudio sobre dispositivos de punta alar en un avión genérico[20]. También en ese año, Pooladsanj, *et al*, hicieron su investigación numérica al respecto para bajos números de Reynolds[75]. El estudio numérico de Grivilovic, *et al*, en 2015 comparó los efectos de distintos tipos de dispo-

²⁵En colaboración con Airbus Industrie.

sitivos de punta alar en aeronaves comerciales[26]. En 2016, S. P. Hariyadi, *et al*, estudiaron numéricamente el efecto de dos variantes del dispositivo de cerca de ala para envergaduras pequeñas[36]. Ese mismo año, la investigación de A. T. Krebs buscó optimizar el diseño de un dispositivo de punta alar utilizando algoritmos evolutivos[52]. Este estudio numérico modeló el flujo con métodos de reja de vórtices[13]. Esta tendencia de usar algoritmos evolutivos es relativamente nueva y se ha aplicado sólo al diseño de planeadores[51][60][61].

Entre los estudios más modernos que forman parte de la investigación computacional de alas finitas se encuentran el de S. M. Hosseini, *et al*, en 2015[39] y el de M. Ghoreyshi, *et al*, en 2016[28]. El trabajo de Hosseini representa la primera simulación numérica directa (DNS) realizada para una sección de ala de tamaño real en condiciones de vuelo reales²⁶. La investigación de Ghoreyshi, que utilizó simulación de grandes escalas (LES), proporciona información valiosa sobre el flujo en la punta del ala. Ninguno de estos estudios lidió con dispositivos de punta alar, debido a los grandes recursos computacionales requeridos. El interés tan marcado en el uso de estos dispositivos, en las últimas décadas, gira en torno a su capacidad de reducción de arrastre.

1.3. Reducción de arrastre asociado al uso de dispositivos de punta alar

Debido al incremento en el tráfico aéreo a nivel global, las emisiones de gases de efecto invernadero producidas por aeronaves comerciales han ido en aumento. Ésto a ocurrido a pesar de mejoras en la tecnología de motores[6]. De hecho, estas emisiones representan aproximadamente el 12% de todas las que producen los distintos medios de transporte y el 2% de las emisiones totales a nivel global[41]. La disminución en el arrastre que conllevan los dispositivos de punta alar implica una reducción en la cantidad de combustible utilizado por los aviones. Es por eso que su uso se ha propuesto como una de las maneras en las que se pueden reducir estas emisiones. En los estudios mencionados en la Sección 1.2, se reportaron distintos grados de eficiencia para cada dispositivo. Esta eficiencia se ha expresado en términos de reducción de arrastre, o bien, de combustible consumido.

El resultado del ala elíptica de Prandtl indica que es posible reducir el arrastre en un 10% si extendemos la envergadura en un 5%, con o sin dispositivo[37]. Whitcomb concluyó que, para $Re = 5 \times 10^6$, el uso de dispositivos resulta en una reducción del 20% en el arrastre

²⁶Siendo específicos, $Re = 10^6$.

inducido[101] y un aumento del 9 % en la relación sustentación-arrastre²⁷. Ishimitsu estableció que los dispositivos reducen el arrastre del Boeing KC-135 en un 4 % a bajas velocidades y en un 6 % en condiciones de crucero[42]. Heyson, *et al*, concluyeron que los dispositivos siempre disminuyen más el arrastre que la extensión de ala equivalente[38], al contrario de lo que dijo Prandtl. Taylor afirmó que la disminución del arrastre en el DC-10 fue del 2 % en condiciones de crucero y que esta reducción fue del 75 % del valor que se había predicho en experimentos de túnel de viento[87].

Hernández-Rivera, *et al*, reportaron una reducción del 9 % en la velocidad del vórtice, así como una disminución del 3.6 % en el arrastre y un aumento de 2.4 % en la sustentación[37]. Ésto corresponde al uso de un difusor de vórtice para $Re = 10^7$. Hantrais-Gervois, *et al*, mencionan una mejora en la relación sustentación-arrastre del 6 % al utilizar dispositivos hacia abajo[35]. Gupta, *et al*, afirman que el uso de dispositivos en álabes rectos incrementa, en un porcentaje que va entre 2 % y 20 %²⁸, la potencia efectiva que producen las turbinas eólicas[31]. Hariyadi, *et al*, menciona que los dispositivos pueden reducir el consumo de combustible hasta en un 7 %[36]. En general, se observa que no hay consistencia en los beneficios reportados. Ésto se debe a que cada estudio lleva a cabo su investigación con sus propias geometrías, en distintas condiciones y con un criterio diferente de comparación respecto al caso base.

1.4. Objetivo de la tesis

Este trabajo busca investigar los cambios que se producen en los coeficientes de arrastre y sustentación, C_D y C_L , de un ala con perfil NACA 2412 al equiparla con seis tipos distintos de dispositivos de punta alar, así como las razones físicas que expliquen estos cambios.

1.4.1. Alcances

Concretamente, la investigación busca:

- Reproducir los resultados experimentales, publicados por NACA, con una simulación numérica de ala infinita y un modelo analítico basado en la teoría de flujo potencial

²⁷Entendiéndose como el cociente $\frac{C_L}{C_D}$.

²⁸El porcentaje parece ser dependiente del ángulo de canto que forma el dispositivo con el extradós.

bidimensional.

- Utilizando los mismos parámetros²⁹ de la simulación de ala infinita, simular el ala finita sin dispositivo de punta alar, para varios valores de envergadura.
- Simular el ala finita equipada con los distintos dispositivos de punta alar, para los mismos valores de envergadura que el caso base.
- Analizar el efecto que tiene cada dispositivo en los coeficientes C_D y C_L , en contraste con el ala sin dispositivo, para cada valor de envergadura.
- Extender el modelo analítico bidimensional a los casos tridimensionales.
- Comparar las predicciones obtenidas por la vía analítica y la numérica.

1.4.2. Hipótesis

En virtud del conocimiento que se tiene *a priori* sobre el fenómeno físico, se espera que:

En general, cualquier dispositivo de punta alar reducirá el arrastre debido a la presión, siempre y cuando la superficie mojada agregada no incremente demasiado el arrastre viscoso.

Un dispositivo de punta alar sobre el extradós y otro sobre el intradós, aproximadamente simétricos, producirán efectos iguales.

Un dispositivo alar que termine en vértice reducirá más el arrastre que el caso análogo que no termine en vértice.

El dispositivo de punta alar en cimitarra producirá un mayor efecto que los dispositivos individuales por separado.

Un mismo dispositivo instalado en alas de distinta envergadura producirá efectos diferentes.

²⁹Realizando únicamente los cambios apropiados para que corresponda a un ala de envergadura finita.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Descripción del problema

El problema a resolver es uno de modelado del flujo alrededor de alas de avión en condiciones de vuelo reales. El proceso de resolución se descompone en dos vertientes: la analítica y la numérica. La primera consiste en modelar el flujo alrededor de un cuerpo de geometría arbitraria, encontrar una descripción matemática del campo de presión a su alrededor¹ y calcular las fuerzas de interés sobre la superficie. Las dificultades de esto giran en torno a las limitaciones de la teoría existente de alas y la complejidad de las geometrías involucradas. La segunda vertiente consiste en simular un flujo ligeramente compresible², para un alto número de Reynolds³, alrededor de alas de tamaño real. Las complicaciones radican en la generación de una malla adecuada para la geometría de estudio y en la obtención de resultados físicamente razonables para las condiciones ya mencionadas⁴.

¹En función del campo de velocidad.

²Dado que $Ma \approx 0,25$ para la corriente libre y $Ma \approx 0,35$ para regiones cercanas al ala.

³Es decir, $Re = 9 \times 10^6$.

⁴Existe cierta dificultad al tratar de obtener resultados válidos en simulaciones de casos ligeramente compresibles[100].

2.1.1. Fenómeno físico

El flujo alrededor de cuerpos es un fenómeno muy complejo, en especial si hablamos de alas finitas. Si bien las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos⁵ tienen una forma bien definida, no nos hablan de la topología particular de un flujo. Ésta es altamente dependiente de la geometría. Numerosos flujos distintos podrían cumplir las ecuaciones y existir, en diferentes condiciones o instantes de tiempo, para una misma geometría[62]. Ésto es cierto para flujos turbulentos, donde ninguno de ellos es exactamente igual a otro[16]. En general, cuando existe movimiento entre un fluido y un cuerpo en su interior, ocurrirán dos fenómenos⁶: (A) cambios en el campo de presión a raíz de la tendencia del fluido a rodear el obstáculo y (B) generación de vorticidad en la región donde el fluido entra en contacto con las paredes del cuerpo.

Como consecuencia de ambos fenómenos, se producirán cambios importantes en el campo de velocidad y éstos retroalimentarán a (A) y a (B). Es decir, que *la relación causal entre los cambios de presión y los cambios de velocidad, una vez estando en estado estacionario⁷, no es unidireccional, sino circular*[62]. Asimismo, debido a la transferencia de moméntum del cuerpo al fluido, *el fenómeno aerodinámico no puede desasociarse de la vorticidad*[8] *producida por los esfuerzos viscosos*⁸. En la teoría de flujo potencial, los efectos de la viscosidad pueden condensarse en una entidad matemática conocida como *circulación*. [79]. El resultado global será la aparición de la fuerza aerodinámica. Haciendo referencia a la Figura 2.1, las componentes del *arrastre*, de la *sustentación* y de la *fuerza lateral*⁹ actúan a lo largo del eje x positivo, del eje y positivo y del eje z positivo, respectivamente. En condiciones de simetría del objeto respecto a un plano xy central, la componente lateral se hace cero.

Este sistema de coordenadas será el que se utilice en el resto del documento. En cuanto a alas, sus diferentes partes tienen nombres específicos. El extremo donde se adhiere al fuselaje se llama *raíz del ala* y el extremo opuesto es la *punta del ala*. Un *perfil alar* es el corte transversal¹⁰ de un ala. Los perfiles pueden ser constantes o variables a lo largo de la envergadura.

⁵Véase ecuación (A.28).

⁶Si hablamos exclusivamente de flujos subsónicos.

⁷Está claro que la causalidad no puede ser circular. Esta afirmación sólo se refiere a la interpretación de la causalidad cuando ya se tiene flujo estacionario.

⁸En otras palabras, la interpretación del fenómeno únicamente como una consecuencia del “efecto Bernoulli” es estrictamente incorrecta. Dicha interpretación es común en textos de aeronáutica[70].

⁹Esta componente cobra importancia en aeronáutica, más que en aerodinámica, pues se relaciona más con condiciones de vuelo atípicas (ej. viento cruzado). Si no es el caso, solamente tendrá relevancia hablar del arrastre y de la sustentación.

¹⁰Sobre un plano paralelo al plano xy .

Observando la Figura 2.2, se observa que las partes cruciales de un perfil alar son la superficie superior, llamada *extradós*; la superficie inferior, llamada *intradós*; la superficie anterior del ala, llamada *borde de ataque*; y el vértice posterior del ala, o *borde de salida*. La distancia entre el borde de ataque y el borde de salida se define como *cuerda*, mientras que la distancia entre el punto con y menor y el punto de y mayor en el perfil es el *espesor*[96].

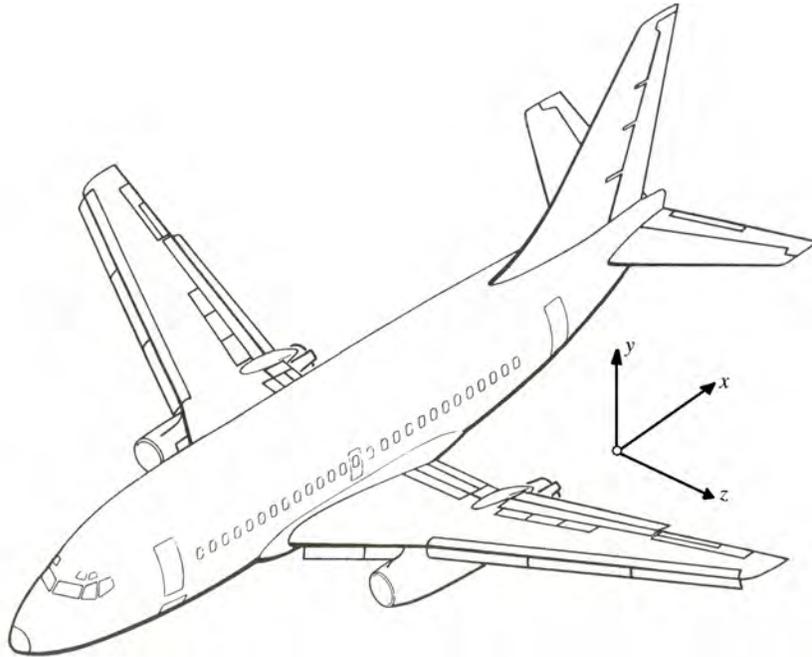


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesiano tradicionalmente utilizado en aerodinámica y aeronáutica para distinguir la dirección de las fuerzas.

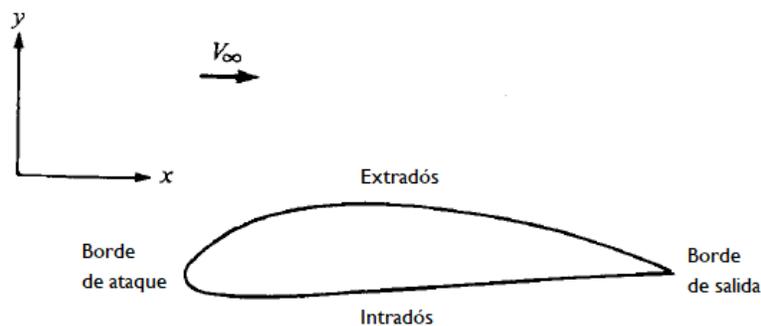


Figura 2.2: Partes de un perfil alar.

Las características que distinguen a los flujos alrededor de alas (6 y 7 sólo para alas finitas) son:

1. Generación de una región de estancamiento

Cuando el fluido se encuentra con el obstáculo, la velocidad cae drásticamente sin hacerse cero¹¹. Ésto provoca un incremento en la presión hasta su valor máximo. La zona muy localizada donde ésto ocurre se conoce como *región de estancamiento*. Esta región no se ubica directamente sobre la pared del borde de ataque, sino ligeramente separada de ella. Como consecuencia de este incremento de presión, debe haber cambios en el campo aguas-arriba¹². Ésto es el resultado de que el fluido se comporte como medio continuo. La descripción matemática de alas infinitas reduce estas regiones a *líneas de estancamiento*. Éstas se extienden infinitamente a ambos lados, se encuentran justo sobre la pared y la velocidad del fluido sobre ellas realmente es cero. De manera análoga, en la descripción matemática de alas finitas se tienen verdaderos *puntos de estancamiento*. Entonces, el fluido debe acelerarse desde estas regiones y hacia el resto del cuerpo.

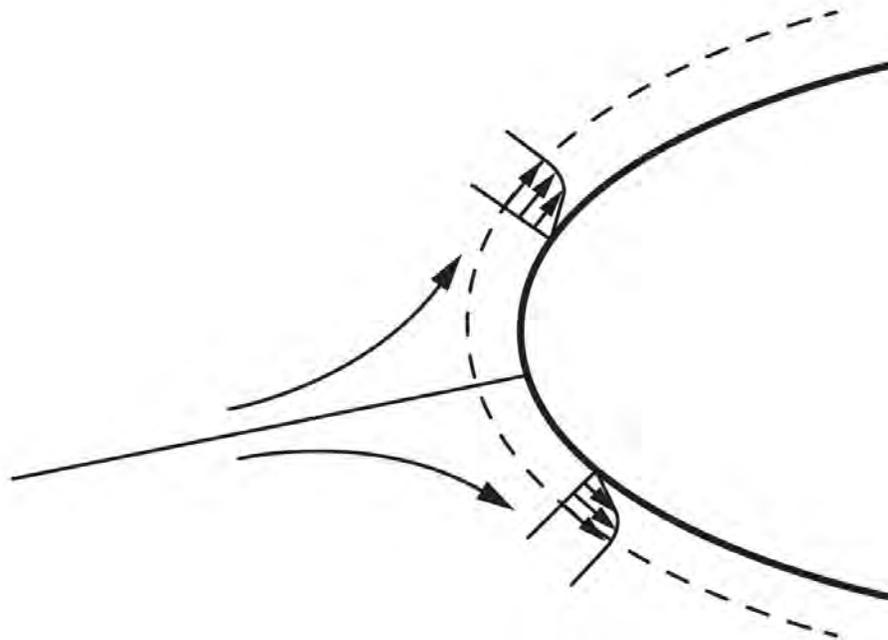


Figura 2.3: Región de estancamiento[62].

¹¹Se está haciendo una distinción entre regiones de estancamiento físicas y matemáticas.

¹²A veces se menciona que esto es prueba de que el fluido reacciona al obstáculo antes de toparse con él. Sin embargo, hay que recordar que no puede haber acción a distancia si las fuerzas de cuerpo son insignificantes.

2. Formación de una capa límite viscosa

Si bien el estancamiento ocurre realmente a cierta distancia del borde de ataque, la velocidad del fluido sí es cero sobre la pared. Ésto se debe a que la velocidad promedio de las moléculas del fluido cerca de la pared se hace cero. La manifestación macroscópica de ésto es la condición de no-deslizamiento y la aparición de una región donde los efectos viscosos son apreciables. Esta región se conoce como *capa límite*. La zona sobre el borde de ataque donde el fluido “adquiere”, por primera vez, una velocidad cero se conoce como *región de adherencia*¹³. El hecho de que la velocidad del fluido tenga que cambiar de cero a la de la corriente libre de manera asintótica[79] implica que existen grandes gradientes de velocidad. El resultado es que hay una transferencia progresiva de moméntum entre moléculas de fluido cercanas a la pared y aquéllas que están más lejos, la cual se presenta como esfuerzos cortantes a nivel macroscópico.

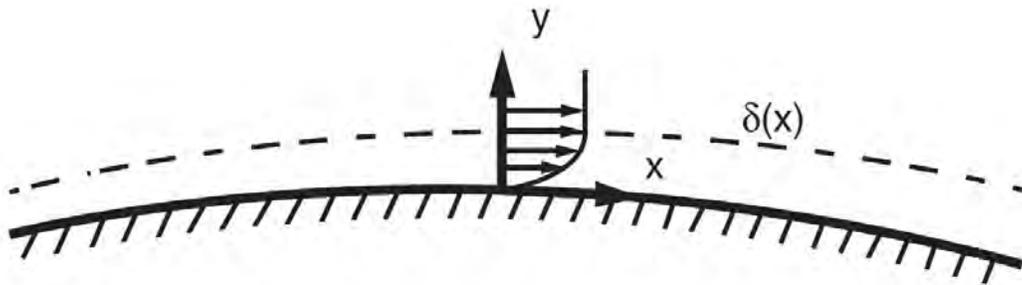


Figura 2.4: Capa límite viscosa para alas infinitas[62].

El esfuerzo cortante sobre la pared se conoce como *fricción en la pared*¹⁴. A una cierta distancia de la pared, definida de manera arbitraria[79], conocida como *espesor de la capa límite*, el fluido ya tiene prácticamente la velocidad de la corriente libre. Al no haber más transferencia de moméntum, no se producen esfuerzos cortantes y es aquí donde se tiene la aparente *frontera de la capa límite*. La capa límite se mantiene en régimen laminar, ensanchándose conforme avanzamos aguas-abajo, hasta un cierto punto sobre el extradós e intradós. El ensanchamiento es la manifestación macroscópica de la propagación de la transferencia de moméntum a zonas cada vez más lejanas de la pared. Finalmente, la presencia de esfuerzos cortantes en la capa llevan a que el fluido adquiera una tendencia local a rotar, denominada *vorticidad*. Esta última también es

¹³Debido a que el fluido se “adhiere” a la pared, formando la capa límite.

¹⁴A pesar del nombre, su naturaleza física difiere de la fricción de Coulomb. Realmente es la transferencia de moméntum entre las moléculas inmediatamente adyacentes a la pared y las que se encuentran justo encima de éstas.

transportada, vía advección en la dirección aguas-abajo y difusión[16] en direcciones perpendiculares a ésta. El perfil de velocidad en la capa límite laminar se puede apreciar en la Figura 2.4.

3. Transición de la capa al régimen turbulento

Si bien la capa límite se encuentra rodeando a toda el ala, hay una zona donde la misma se vuelve turbulenta. La *turbulencia* es el desarrollo, desde su generación hasta su disipación, de una distribución espacialmente compleja de tubos de vorticidad que interactúan entre sí[16]. Si bien las características no-lineales de la dinámica de fluidos siempre están presentes, sólo llegan a manifestarse de forma tan clara cuando la inercia del fluido es suficientemente grande en comparación con la disipación viscosa. Esto hace que cualquier perturbación, por más pequeña que sea, se magnifique y se pueda observar como inestabilidades en el flujo. En general, lo que ocurre en la capa límite turbulenta es similar a lo que ocurre en la laminar¹⁵. La diferencia principal radica en que la transferencia de momento se da a mucha mayor escala debido al movimiento caótico que acompaña a la turbulencia, no sólo a nivel molecular. La Figura 2.5 es un esquema de este proceso.

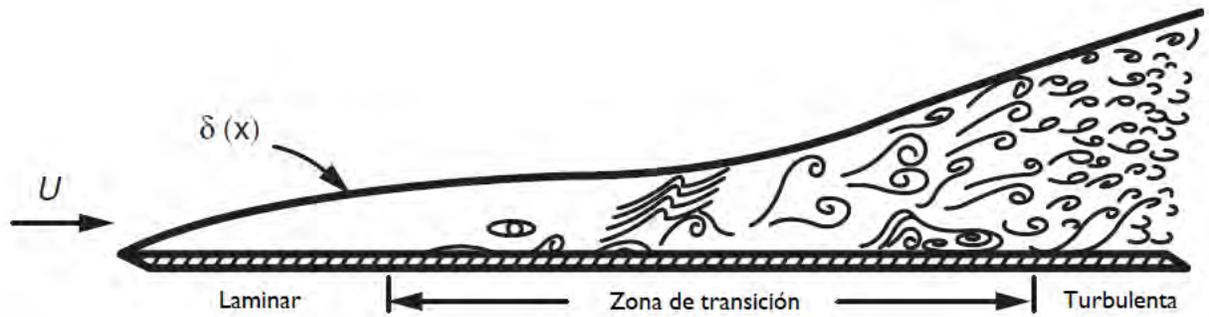


Figura 2.5: Transición de la capa límite en placas planas[62].

4. Separación de la capa límite y recirculación de flujo

Sobre el extradós y más aguas-abajo que la zona de transición turbulenta de la capa límite, esta última se “separa” del ala. La *separación de la capa límite* se refiere a que la región donde la velocidad aumenta desde cero hasta la de la corriente libre se va localizando progresivamente más lejos de la pared. Lo que ocurre entre la pared y el

¹⁵El comportamiento de la velocidad en función de la distancia con la pared sí es fundamentalmente distinto a lo que ocurre en el caso laminar. El mismo está descrito por la *ley de la pared* en tres subcapas: la viscosa, la de traslape y la logarítmica[16].

punto donde la velocidad es cero es un contraflujo. Esta *recirculación* se produce debido a que la presión hacia el borde de salida es mayor que la del extradós o intradós, es decir que hay un *gradiente de presión adverso*. Como consecuencia, el fluido en la capa límite se va desacelerando gradualmente hasta que el flujo se invierte de dirección. La zona de transición turbulenta de la capa límite y el punto de separación de la misma son altamente dependientes del ángulo de ataque del ala.

5. Emanación de una estela turbulenta

Como resultado de la separación, la región espacial donde el flujo tiene un alto contenido de vorticidad se ensancha considerablemente[16] y este fluido es arrastrado, por advección, aguas-abajo. Esta región espacial conserva sus características de flujo rotacional y turbulento por una cierta distancia aguas-abajo, denominándose *estela turbulenta*. Dicha región se sigue ensanchando, debido a difusión de la vorticidad hacia el flujo inicialmente irrotacional. Al mismo tiempo, hay una interacción continua entre el flujo promedio¹⁶ y el flujo turbulento dentro de la estela. Se presenta una transferencia de energía en cascada¹⁷ de las grandes escalas a las pequeñas escalas[16][102], hasta que el efecto de la viscosidad molecular es comparable con los efectos de la turbulencia. Una vez que se llega a este punto, la viscosidad molecular disipa la energía de esta cascada y la estela, finalmente, desaparece. Nótese que estas observaciones, ilustradas en la Figura 2.6, no mencionan nada sobre lo que sucede cuando el ala comienza a moverse desde el reposo.



Figura 2.6: Estela turbulenta[64].

6. Aparición de flujo lateral variable en el espacio

En esencia, el flujo en la tercera dimensión solamente modifica algunas de las características mencionadas en los puntos (1) a (5). En primer lugar, las regiones de estancamiento y adherencia sí son aproximadamente puntuales. Cualquier otra zona de

¹⁶Desde la perspectiva en la que la turbulencia puede tratarse como el resultado de cantidades físicas promedio y fluctuaciones.

¹⁷Según la teoría de turbulencia de Kolmogorov.

estancamiento o adherencia aparente sólo lo es en la práctica, debido a que el flujo lateral provoca que el fluido siempre se acelere desde la verdadera región de estancamiento y hacia los lados. La capa límite no tiene un solo perfil de velocidad, sino dos: el *perfil de flujo de corriente*¹⁸ y el *perfil de flujo cruzado*¹⁹. La forma del primero es similar a lo que se ve en alas infinitas, mientras que la del segundo depende del origen del flujo lateral²⁰. La combinación de ambas componentes proporciona el *perfil compuesto*, como se ilustra en la Figura 2.7. El flujo lateral también retroalimentará al campo de presión y, como consecuencia, la forma de este último cambiará a lo largo de la envergadura del ala. La zona de separación de la capa límite también será variable sobre el ala.

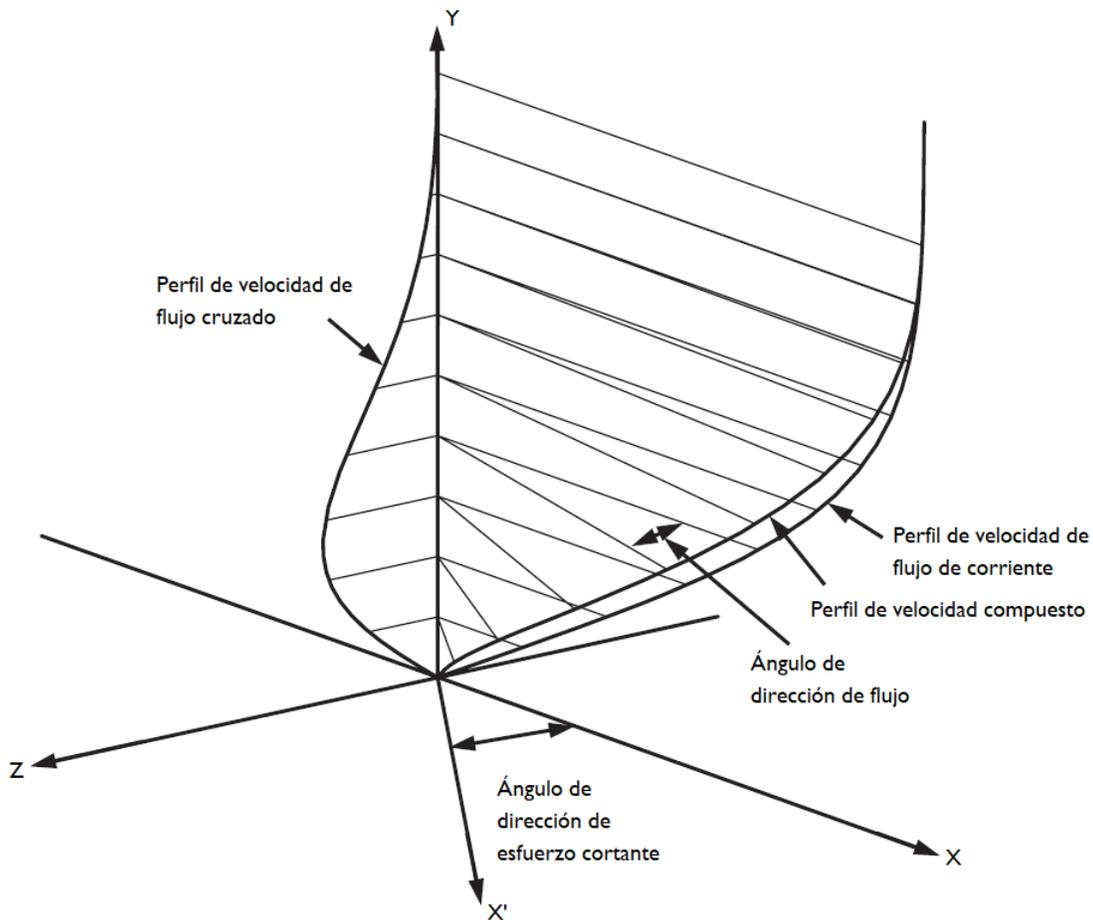


Figura 2.7: Perfiles de velocidad de la capa límite para alas finitas[62].

¹⁸Sobre los planos xy .

¹⁹Sobre los planos yz .

²⁰Puede ser debido a esfuerzos cortantes, o bien, como en el caso de alas finitas, debido a gradientes de presión.

7. Inducción de flujo descendente y formación de vórtice

El hecho de que un ala sea finita implica que las masas de fluido, de alta y de baja presión, eventualmente se encontrarán. Sobre el extradós y por debajo del intradós, a medida que nos acercamos al final del ala, el flujo lateral se incrementa debido al campo de presión. Al mismo tiempo, la tendencia del fluido de viajar del intradós al extradós permite que, en la punta del ala, el flujo del intradós se tuerza al cambiar de superficie alar y que se encuentre con el flujo del extradós. Una vez que se encuentran, se induce un movimiento rotatorio y se forma un vórtice. Este vórtice hace el que el flujo que todavía viaja en la dirección x descienda²¹, por detrás del borde de salida, y que la dirección en la que actúa la sustentación se incline. Una de las componentes, a lo largo del eje y , será la sustentación neta y la otra, a lo largo del eje x , será el arrastre debido a la sustentación, mencionado en la Sección 1.1. El campo de velocidad, en general, alrededor de un avión real se ilustra en la Figura 2.8.



Figura 2.8: Campo de velocidad alrededor de una aeronave, vista de un plano yz [62].

El problema central por el que se plantea el uso de dispositivos de punta alar es la reducción de esta componente del arrastre²². Para lograrlo, un dispositivo de punta alar realiza tres efectos físicos[31]: (1) la difusión del vórtice que se produce en la punta del ala, (2) el desplazamiento de la región de formación del vórtice y (3) la reducción del flujo en dirección lateral. De estos tres, el de mayor importancia es la difusión del vórtice[36][101], aunque hay que recordar que los tres efectos están acoplados. En realidad, lo que resulta al final es un cambio en la distribución de presión[62]. Si bien se tiene este panorama general de lo que ocurre alrededor de alas y de la física de los dispositivos de punta alar, se desconocen los detalles finos respecto a los cambios en la topología del flujo, así como del campo de presión

²¹Lo que se conoce como *flujo descendente*.

²²Para una descomposición más explícita de las fuerzas, véase las ecuaciones (3.6) y (3.7).

a nivel local, que inducen distintas geometrías de punta de ala. De aquí que sea importante llegar a un modelo matemático que sea capaz de describir estos aspectos, más allá de la teoría de línea de sustentación[77][78] debido a sus limitaciones. La Figura 2.9 es un esquema de la topología general del alrededor de un ala finita.

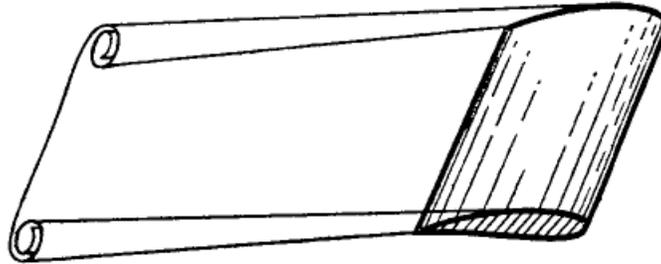


Figura 2.9: Formación de vórtices en un ala finita[64].

2.2. Modelado del ala de envergadura infinita

El obstáculo fundamental radica en que no es sencillo un modelo matemático para describir el flujo alrededor de las geometrías involucradas. Un camino viable consiste en utilizar la teoría de flujo potencial, ya sea para alas infinitas o alas rectas finitas. Esta teoría nos permite tratar el problema del flujo alrededor de una geometría más simple y después traducir los resultados a la geometría deseada²³. El mismo dice que existe una y sólo una función $w = f(z)$ que mapea una región dada, externa a un contorno cerrado de forma arbitraria²⁴ en el plano W , a otra región diferente, externa a una circunferencia centrada en el origen del plano Z , tal que $z \rightarrow \infty$ cuando $w \rightarrow \infty$ [88]. En otras palabras, es posible describir el flujo alrededor de un perfil alar cualquiera, que este flujo conserve las mismas características lejos del contorno y realizar los cálculos pertinentes sobre una circunferencia.

2.2.1. Transformación de Zhukovsky

Lo descrito anteriormente se conoce como mapeo conforme, siempre y cuando se conserven los ángulos. Éste consiste de una transformación de la forma $f : Z \rightarrow W$, donde Z y W son

²³O por lo menos a una geometría que se aproxima de manera muy cercana a la deseada.

²⁴Siempre y cuando sea *simplemente conexo*.

el dominio virtual y el dominio físico respectivamente²⁵, en la cual se conservan localmente los ángulos²⁶. N. Zhukovsky propuso su regla de transformación f , tal que

$$f(z) = z + \frac{R_0^2}{z}, \quad (2.1)$$

donde cada punto z del plano Z se mapea a un punto w del plano W . En este caso, todos los puntos sobre la circunferencia en Z están descritos por $z = R_0 e^{i\varphi}$. La cantidad R_0 no es más que el radio de dicha circunferencia. Asimismo, existe una regla de transformación inversa f^{-1} , de la forma $f^{-1} : W \rightarrow Z$, tal que

$$f^{-1}(w) = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4R_0^2}}{2}, \quad (2.2)$$

donde se observa que cada punto w se mapea a dos puntos z_1, z_2 en Z . La transformación se ilustra con mayor claridad en la Fig. 2.10.

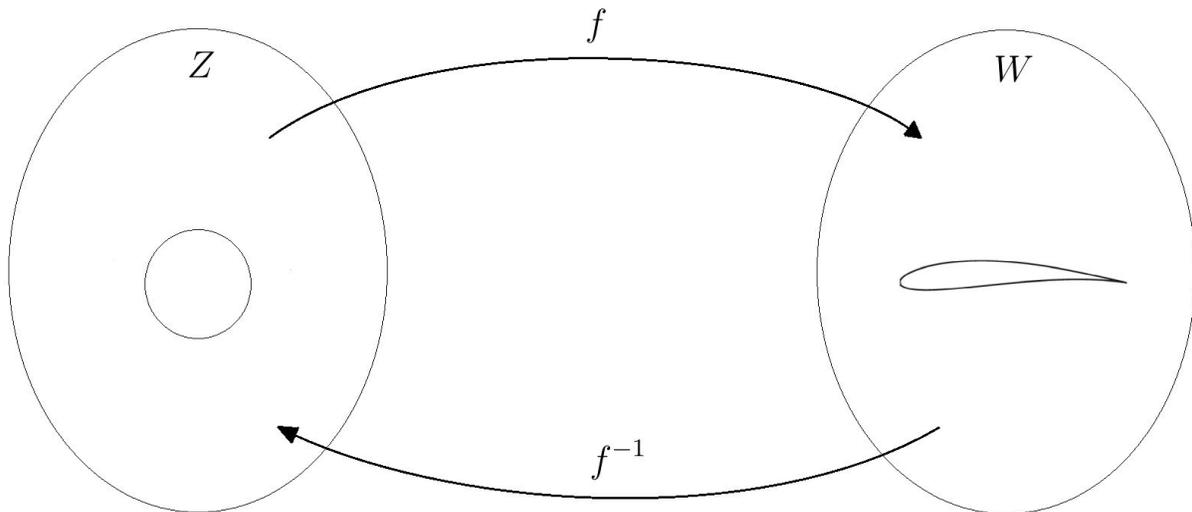


Figura 2.10: Transformación y transformación inversa de Zhukovsky.

En principio, si nos limitamos a una *teoría aproximada*, bastaría con el uso de (2.1) y (2.2) para realizar nuestro modelado. Por otro lado, si queremos aplicar una *teoría exacta*,

²⁵Es decir que $Z \subset \mathbb{C}$ y que $W \subset \mathbb{C}$. Ambos pueden interpretarse como planos de Argand.

²⁶Esto sólo puede violarse en aquellos puntos denominados *puntos críticos*.

cada perfil alar diferente requerirá de su propio mapeo para poder realizarse el modelado. Los perfiles de Zhukovsky tienen bordes de ataque muy anchos en comparación con la sección que converge en el borde de salida. Ésto hace que no sean muy útiles para aplicaciones prácticas en la mayoría de los perfiles[96], a excepción de álabes de turbina[29]. Es por eso que es deseable utilizar una teoría exacta. Dicho ésto, tendríamos que conocer las formas específicas de la transformación $h : Z \rightarrow W$ y de su inversa $h^{-1} : W \rightarrow Z$ para cada perfil. Si seguimos el camino de T. Theodorsen[88][89], dicha transformación queda expresada en la Figura 2.11.

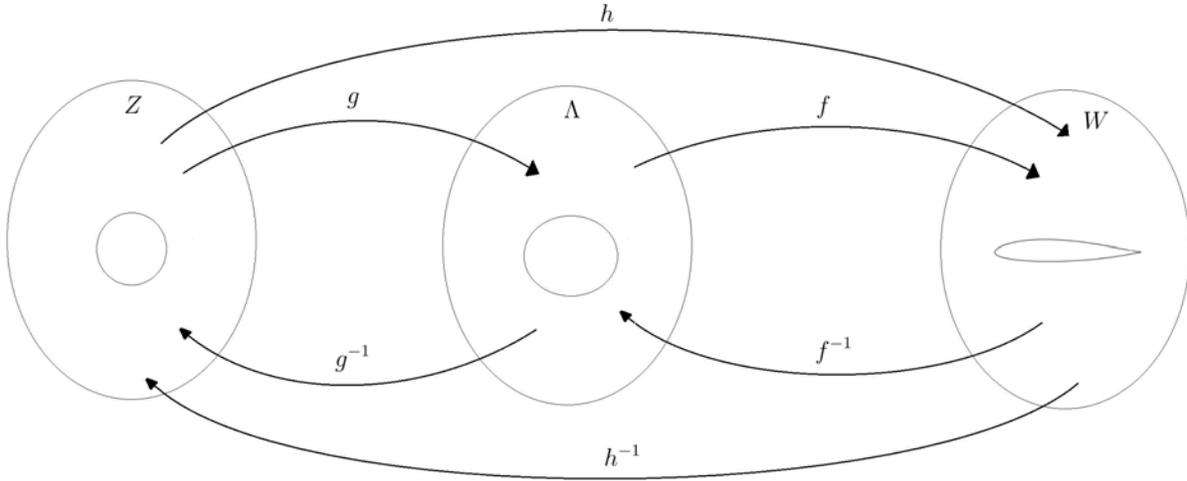


Figura 2.11: Transformación y transformación inversa de Theodorsen.

2.2.2. Transformación de Theodorsen

La forma de h es propuesta como una composición de un mapeo intermedio $g : Z \rightarrow \Lambda$ y el mapeo clásico de Zhukovsky, tal que $f : \Lambda \rightarrow W$. De forma similar, h^{-1} es una composición de f^{-1} y g^{-1} . En este caso, Z es el dominio de la circunferencia, W es el dominio del perfil y Λ es el dominio de una circunferencia deformada²⁷. En el fondo, un perfil alar arbitrario se puede interpretar como un contorno cerrado cuya forma es una ligera desviación de la del perfil de Zhukovsky. Como consecuencia, la transformación inversa clásica no lo mapeará a una circunferencia, sino a una circunferencia ligeramente deformada. El propósito del mapeo intermedio es corregir esta deformación y éste está dado por

$$g(z) = e^{(\psi(\varphi) - \psi_0) + i(\theta(\varphi) - \varphi)} z, \quad (2.3)$$

²⁷De manera análoga a los dominios anteriores, $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

mientras que el mapeo inverso es

$$g^{-1}(\zeta) = e^{(\psi_0 - \psi(\theta)) + i(\varphi(\theta) - \theta)} \zeta, \quad (2.4)$$

donde φ y θ son las coordenadas angulares en Z y en Λ respectivamente. Por otro lado, así como $z \in Z$ y $w \in W$, también es cierto que $\zeta \in \Lambda$. La parte real de la función exponencial que multiplica a z en (2.3) proporciona un reescalamiento, variable con la coordenada angular φ , de la circunferencia en Z . La parte imaginaria representa una rotación de la circunferencia mencionada. Entonces, la transformación f está dada por

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta} \quad (2.5)$$

y su inversa f^{-1} por

$$f^{-1}(w) = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2}}{2} \quad (2.6)$$

A pesar de que hay un gran parentesco entre (2.2) y (2.6), es importante el hecho de que $R_0 \neq R$. De hecho, la circunferencia en Z ahora está dada por $z = R e^{\psi_0} e^{i\varphi}$, por lo que $R_0 = R e^{\psi_0}$. Finalmente, si realizamos la conveniente sustitución de variable

$$\varepsilon = \varphi - \theta, \quad (2.7)$$

se observa que la dificultad en el uso de la transformación de Theodorsen gira en torno a la deducción de las funciones ψ y ε , y de la constante ψ_0 .

2.2.3. Ecuaciones para $\psi(\theta)$ y $\varepsilon(\theta)$

En la práctica, se conocerá la forma de un perfil alar dado $F = F(w)$ en W antes que cualquier otra cosa. A partir de aquí, a través de f , deseamos conocer a $\psi(\theta)$ y $\varepsilon(\theta)$. Sustituyendo la definición de la circunferencia en (2.3), tenemos que

$$g(Re^{\psi_0}) = Re^{\psi(\varphi)+i\theta(\varphi)}. \quad (2.8)$$

O bien, mediante una transformación por invarianza,

$$g(\theta) = Re^{\psi(\theta)+i\theta}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo a (2.9) en (2.3), obtenemos

$$f(Re^{\psi(\theta)+i\theta}) = Re^{\psi(\theta)+i\theta} + \frac{R^2}{Re^{\psi(\theta)+i\theta}}, \quad (2.10)$$

que se puede simplificar a

$$f(\theta) = R(e^{\psi(\theta)}e^{i\theta} + e^{-\psi(\theta)}e^{-i\theta}). \quad (2.11)$$

Después, utilizando la identidad de Euler, reescribimos a (2.11) como

$$f(\theta) = R\left((e^{\psi(\theta)} + e^{-\psi(\theta)}) \cos \theta + i(e^{\psi(\theta)} - e^{-\psi(\theta)}) \sin \theta\right) \quad (2.12)$$

y, finalmente, en términos de funciones hiperbólicas, nos queda

$$f(\theta) = R\left(2 \cosh \psi(\theta) \cos \theta + 2i \sinh \psi(\theta) \sin \theta\right). \quad (2.13)$$

Recordando que, al realizar esta serie de sustituciones, ya nos encontramos en el plano W tal que $w = f(\theta)$, llegamos al par de ecuaciones

$$u = 2R \cosh \psi(\theta) \cos \theta \quad (2.14)$$

$$v = 2R \sinh \psi(\theta) \sin \theta, \quad (2.15)$$

donde $w = u + iv$. Dividiendo tanto a (2.14) como a (2.15) entre $4R$ y elevándolas al cuadrado, conseguimos las expresiones

$$\frac{u^2}{4R^2} = \cosh^2 \psi(\theta) \cos^2 \theta \quad (2.16)$$

$$\frac{v^2}{4R^2} = \sinh^2 \psi(\theta) \sin^2 \theta . \quad (2.17)$$

A partir de (2.16) y (2.17), podemos obtener las curvas de $\psi = cte$, o bien, las curvas de $\theta = cte$. Para el primer caso, dividimos a (2.16) entre $\cosh^2 \psi$, a (2.17) entre $\sinh^2 \psi$ y las sumamos. Para el segundo caso, dividimos a (2.16) entre $\cos^2 \theta$, a (2.17) entre $\sin^2 \theta$ y las restamos. Dichas ecuaciones son de la forma

$$\frac{u^2}{4R^2 \cosh^2 \psi(\theta)} + \frac{v^2}{4R^2 \sinh^2 \psi(\theta)} = 1 \quad (2.18)$$

$$\frac{u^2}{4R^2 \cos^2 \theta} - \frac{v^2}{4R^2 \sin^2 \theta} = 1 . \quad (2.19)$$

Se concluye que las curvas (2.18) son elipses de curvatura variable respecto a θ , mientras que las curvas (2.19) son hipérbolas siempre ortogonales a las elipses. Sustituyendo la identidad hiperbólica $\cosh^2 \psi = 1 + \sinh^2 \psi$ en (2.18), se tiene que

$$\frac{u^2}{4R^2(1 + \sinh^2 \psi(\theta))} + \frac{v^2}{4R^2 \sinh^2 \psi(\theta)} = 1 . \quad (2.20)$$

A partir de (2.20), se realiza el desarrollo

$$(\sinh^2 \psi(\theta)) \frac{u^2}{4R^2} + (1 + \sinh^2 \psi(\theta)) \frac{v^2}{4R^2} = (\sinh^2 \psi(\theta))(1 + \sinh^2 \psi(\theta)) \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{u^2}{4R^2} + \frac{v^2}{4R^2} \right) \sinh^2 \psi(\theta) + \frac{v^2}{4R^2} = \sinh^4 \psi(\theta) + \sinh^2 \psi(\theta) \quad (2.22)$$

$$(\sinh^2 \psi(\theta))^2 + \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{4R^2} \right) \sinh^2 \psi(\theta) - \frac{v^2}{4R^2} = 0 , \quad (2.23)$$

donde (2.23) es una ecuación cuadrática. Como $\sinh^2 \psi > 0$ necesariamente, sólo se toma la raíz positiva, tal que

$$\sinh^2 \psi(u, v) = \frac{-\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}. \quad (2.24)$$

De aquí que

$$\sinh \psi(u, v) = \pm \sqrt{\frac{-\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}} \quad (2.25)$$

y, por lo tanto,

$$\psi(u, v) = \sinh^{-1} \pm \sqrt{\frac{-\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}}. \quad (2.26)$$

De manera análoga a como se obtuvo (2.26), es posible realizar el desarrollo

$$\frac{u^2}{4R^2(1 - \sin^2 \theta)} - \frac{v^2}{4R^2 \sin^2 \theta} = 1 \quad (2.27)$$

$$(\sin^2 \theta) \frac{u^2}{4R^2} - (1 - \sin^2 \theta) \frac{v^2}{4R^2} = (\sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta) \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{u^2}{4R^2} + \frac{v^2}{4R^2}\right) \sin^2 \theta - \frac{v^2}{4R^2} = \sin^2 \theta - \sin^4 \theta \quad (2.29)$$

$$(\sin^2 \theta)^2 + \left(\frac{u^2}{4R^2} + \frac{v^2}{4R^2} - 1\right) \sin^2 \theta - \frac{v^2}{4R^2} = 0. \quad (2.30)$$

Igualmente, como $\sin^2 \theta > 0$, entonces

$$\sin^2 \theta(u, v) = \frac{-\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}. \quad (2.31)$$

Es decir que

$$\sin \theta(u, v) = \pm \sqrt{\frac{-\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}} \quad (2.32)$$

y que

$$\theta(u, v) = \sin^{-1} \pm \sqrt{\frac{-\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2}{4R^2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}}}{2}}. \quad (2.33)$$

Teniendo a (2.26) y (2.33), sólo requerimos el conocimiento de las coordenadas (u, v) de una serie de puntos de un perfil alar arbitrario, en el plano W , para obtener los valores correspondientes de ψ y θ . Una vez con esta información, es posible aproximar una función $\psi(\theta)$.

2.2.4. Ecuaciones para $\psi(\varphi)$ y $\varepsilon(\varphi)$

Una vez conocidas $\psi(\theta)$ y $\varepsilon(\theta)$, nos interesa llegar a sus formas alternativas $\psi(\varphi)$ y $\varepsilon(\varphi)$, mediante el uso de g . Dado que nos interesa que estas tres funciones sean únicas y analíticas en toda la región externa al contorno de interés, es conveniente expresarlas como

$$(\psi(\varphi) - \psi_0) - i\varepsilon(\varphi) = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{z^j}. \quad (2.34)$$

Es decir la parte principal de una serie de Laurent, alrededor de $z = 0$. Los coeficientes C_j se pueden descomponer en $A_j + iB_j$, con lo cual (2.34) se reescribe de la forma

$$(\psi(\varphi) - \psi_0) - i\varepsilon(\varphi) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{A_j}{r^j} e^{-ij\varphi} + i \frac{B_j}{r^j} e^{-ij\varphi} \right) \quad (2.35)$$

y, si expandimos las exponenciales con ayuda de la identidad de Euler, llegamos a

$$(\psi(\varphi) - \psi_0) - i\varepsilon(\varphi) = \sum_{j=1}^N \left(\left(\frac{A_j}{r^j} \cos j\varphi + \frac{B_j}{r^j} \sin j\varphi \right) + i \left(\frac{B_j}{r^j} \cos j\varphi - \frac{A_j}{r^j} \sin j\varphi \right) \right). \quad (2.36)$$

Separando la parte real de la parte imaginaria, llegamos a las expresiones

$$\psi(\varphi) - \psi_0 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{A_j}{r^j} \cos j\varphi + \frac{B_j}{r^j} \sin j\varphi \right) \quad (2.37)$$

$$\varepsilon(\varphi) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{A_j}{r^j} \sin j\varphi - \frac{B_j}{r^j} \cos j\varphi \right). \quad (2.38)$$

Se observa que (2.37) y (2.38) representan dos series de Fourier. Aprovechando la condición de ortogonalidad entre funciones propias y observando que ψ_0 representa el coeficiente $\frac{a_0}{2}$ en (2.37), se llega a las expresiones^{28 29}

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (2.39)$$

$$\frac{A_j}{r^j} = \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \cos j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} \quad (2.40)$$

$$\frac{B_j}{r^j} = \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \sin j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi}. \quad (2.41)$$

Realizando el mismo procedimiento para (2.38), se tiene que

²⁸La única diferencia entre φ y $\tilde{\varphi}$ es que la última representa la variable “dummy” en el integrando.

²⁹La variable β la dejamos libre por el momento, tomando en cuenta que nuestro único requisito es que la integral sea a lo largo de un periodo de 2π radianes. La razón se explicará más adelante.

$$\frac{A_j}{r^j} = \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \sin j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} \quad (2.42)$$

$$\frac{B_j}{r^j} = -\frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \cos j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} . \quad (2.43)$$

Sustituyendo a (2.40) y (2.41) en (2.38), así como a (2.39), (2.42) y (2.43) en (2.37), se cumple que

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\cos j\varphi \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \sin j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} - \sin j\varphi \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \cos j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\sin j\varphi \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \cos j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} - \cos j\varphi \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \sin j\tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} \right) . \quad (2.45)$$

Como la variable de integración es $\tilde{\varphi}$ y no φ , podemos reorganizar a (2.2.4) y (2.45) de la forma

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \left(\sin j\tilde{\varphi} \cos j\varphi d\tilde{\varphi} - \cos j\tilde{\varphi} \sin j\varphi \right) d\tilde{\varphi} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \left(\cos j\tilde{\varphi} \sin j\varphi d\tilde{\varphi} - \sin j\tilde{\varphi} \cos j\varphi \right) d\tilde{\varphi} . \quad (2.47)$$

Utilizando las identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos, llegamos a

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \sin j(\tilde{\varphi} - \varphi) d\tilde{\varphi} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \sin j(\tilde{\varphi} - \varphi) d\tilde{\varphi}, \quad (2.49)$$

o bien, a

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \sum_{j=1}^N \sin j(\tilde{\varphi} - \varphi) d\tilde{\varphi} \quad (2.50)$$

$$\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \sum_{j=1}^N \sin j(\tilde{\varphi} - \varphi) d\tilde{\varphi}. \quad (2.51)$$

Tomando en cuenta la identidad

$$\sum_{j=1}^N \sin j(\tilde{\varphi} - \varphi) = \frac{1}{2} \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} - \frac{\cos \left((j + \frac{1}{2})(\tilde{\varphi} - \varphi) \right)}{2 \sin \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2}}, \quad (2.52)$$

podemos reescribir a (2.50) y (2.51) como

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} - \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \frac{\cos \left((j + \frac{1}{2})(\tilde{\varphi} - \varphi) \right)}{2 \sin \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2}} d\tilde{\varphi} \right] \quad (2.53)$$

$$\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} - \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \frac{\cos \left((j + \frac{1}{2})(\tilde{\varphi} - \varphi) \right)}{2 \sin \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2}} d\tilde{\varphi} \right]. \quad (2.54)$$

Evaluando en el límite cuando $N \rightarrow \infty$, la última integral, tanto en (2.53) como en (2.54), se hace cero. Es de esta forma que llegamos al sistema de ecuaciones integrales dado por

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi}. \quad (2.56)$$

Al resolverlo, se obtendrán expresiones para $\psi(\varphi)$ y $\varepsilon(\varphi)$. Ésto sólo es posible si el intervalo de integración se subdivide, teniéndose que encontrar una solución por cada subintervalo k -ésimo. Con ayuda de lo que se muestra en el Apéndice A.1, llegamos a

$$\psi_k(\varphi) = \psi_0 \left(1 - \frac{\lambda_k^2}{2!} f_k(\varphi)^2 - \frac{\lambda_k^4}{4!} f_k(\varphi)^4 - \frac{\lambda_k^6}{6!} f_k(\varphi)^6 - \dots \right) \quad (2.57)$$

$$\varepsilon_k(\varphi) = -\psi_0 \left(\frac{\lambda_k}{1!} f_k(\varphi) + \frac{\lambda_k^3}{3!} f_k(\varphi)^3 + \frac{\lambda_k^5}{5!} f_k(\varphi)^5 - \dots \right). \quad (2.58)$$

2.2.5. Flujo potencial real alrededor de un perfil alar

Lo que se expuso en las secciones anteriores sirve de preámbulo para plantear el problema de flujo. Las leyes fundamentales de conservación requeridas son la conservación de masa, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.59)$$

y la conservación de moméntum, o sea

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.60)$$

La suposiciones que podemos hacer para este problema incluyen: (a) fluido newtoniano, (b) flujo incompresible, (c) las fuerzas de cuerpo no tienen relevancia en el problema, (d) flujo irrotacional, (e) flujo bidimensional y (f) flujo estacionario. El resultado de (a) y (b) es que (2.59) y (2.60) cambien respectivamente a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.61)$$

y a

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.62)$$

Cabe mencionar que la ecuación (2.62) se puede reescribir, sin mayores problemas, de la forma

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.63)$$

Utilizando la identidad

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (2.64)$$

la ecuación (2.62) cambia nuevamente. Su forma es ahora

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.65)$$

Por otro lado, la descomposición de Helmholtz nos dice que todo campo vectorial se puede expresar de la forma³⁰

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \nabla \times \Upsilon. \quad (2.66)$$

La suposición (d), físicamente admisible sólo para una región externa a la capa límite y a la zona inmediatamente aguas-abajo respecto al perfil alar[16], implica que

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.67)$$

o dicho de otra manera, que

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad (2.68)$$

³⁰Siendo estrictos, sería $\mathbf{v} = -\nabla \phi + \nabla \times \Upsilon$.

donde Φ es una función potencial. Sustituyendo a (2.67) y (2.68) en (2.61) y en (2.65), se llega a³¹

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.69)$$

y a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) + \frac{1}{2}\nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla(\nabla^2\Phi) + \mathbf{b}. \quad (2.70)$$

Después, acoplando a (2.69) y (2.70), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) + \frac{1}{2}\nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{b}. \quad (2.71)$$

Con las suposiciones (c) y (f), se llega a

$$\frac{1}{2}\nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (2.72)$$

Interpretando el operador ∇ más externo como una derivada d , lo que implica integrar el flujo a lo largo de una línea de corriente, reescribimos a (2.72) como

$$\frac{1}{2}d(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = -\frac{dp}{\rho}. \quad (2.73)$$

Integrando entre dos puntos, para los cuales corresponde un valor de potencial Φ_1 y Φ_2 , así como un valor de presión p_1 y p_2 respectivamente; se llega a

$$\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \|\nabla\Phi\| d(\|\nabla\Phi\|) = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}. \quad (2.74)$$

En este caso, nos es más conveniente regresar a la variable \mathbf{v} del lado izquierdo de (2.74), por lo que

³¹Simultáneamente también se cumple que $\nabla^2\Psi = 0$, donde Ψ es la función de corriente.

$$\int_{v_1}^{v_2} v \, dv = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}. \quad (2.75)$$

Esto nos lleva de inmediato a la *ecuación de Bernoulli*, dada por

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad (2.76)$$

Para un perfil alar, podríamos decir que la presión en la corriente libre p_∞ corresponde a p_2 y, por lo tanto, que la velocidad en la corriente libre U_∞ corresponde a v_2 , mientras que p_1 y v_1 son arbitrarias. Es decir,

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (2.77)$$

Si, de alguna manera, logramos obtener la forma matemática que describe al campo de velocidad v , entonces (2.77) nos permite conocer el campo de presión p y viceversa. En otras palabras,

$$p = p_\infty + \frac{\rho(U_\infty^2 - v^2)}{2}. \quad (2.78)$$

Finalmente, para calcular la fuerza aerodinámica F se sabe que

$$F = \oint_{\Sigma} \left[p_\infty + \frac{\rho(U_\infty^2 - v^2)}{2} \right] dS .. \quad (2.79)$$

Una vez que conozcamos el campo de velocidad alrededor de la geometría, será posible calcular a F . Ésto será posible una vez que conozcamos ψ y ε , que nos permitirán cerrar el sistema de ecuaciones que involucra a la transformación.

2.2.6. Flujo potencial complejo alrededor de un perfil alar

El potencial complejo de flujo alrededor de un círculo[8][88][90] está dado por

$$\Omega(z) = -Uz - U\frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{R}, \quad (2.80)$$

donde el primer término representa un flujo de corriente libre de magnitud U , el segundo término representa un vórtice con circulación Γ centrado en el origen y el tercer término es la presencia de la geometría. La geometría es una circunferencia de radio R centrada en el origen. Podemos reescribir a (2.80) de la forma

$$\Omega(z) = -U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R}. \quad (2.81)$$

Haciendo la sustitución³² $z \rightarrow e^{i\alpha}\tilde{z}$ en (2.81), llegamos al potencial complejo para un flujo uniforme con ángulo de ataque α , dado por

$$\Omega(\tilde{z}) = -Ue^{i\alpha}\left(\tilde{z} + \frac{R^2}{\tilde{z}}e^{-i2\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{e^{i\alpha}\tilde{z}}{R}. \quad (2.82)$$

Sustituyendo a (2.4) en (2.82), tal que $\tilde{z} = g^{-1}(\zeta)$, llegamos a

$$\Omega(\zeta) = -Ue^{i\alpha}e^{(\psi_0-\psi)+i\varepsilon}\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}e^{-i2\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{e^{i\alpha}e^{(\psi_0-\psi)+i\varepsilon}\zeta}{R}. \quad (2.83)$$

Finalmente, para llegar al plano W , se sustituye a (2.6) en (2.83) y se obtiene

$$\Omega(w) = -Ue^{i\alpha}e^{(\psi_0-\psi)+i\varepsilon}\left(\frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2}}{2} + \frac{R^2}{\frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2}}{2}}e^{-i2\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{e^{i\alpha}e^{(\psi_0-\psi)+i\varepsilon}\frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2}}{2}}{R}. \quad (2.84)$$

Derivando a (2.84) respecto a w , deducimos que

$$V(w) = -Ue^{(\psi_0-\psi)+i(\alpha+\varepsilon)}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{w}{2\sqrt{w^2 - 4R^2}} - \frac{2R^2}{w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2}}\left(1 \pm \frac{w}{\sqrt{w^2 - 4R^2}}\right)e^{2[(\psi_0-\psi)+i(\alpha+\varepsilon)]}\right) -$$

³²Que, siendo estrictos, no es más que otro mapeo conforme, tal que $\tilde{z} = e^{-i\alpha}z$.

$$-i \frac{\Gamma}{2\pi(w \pm \sqrt{w^2 - 4R^2})} \left(1 \pm \frac{w}{\sqrt{w^2 - 4R^2}}\right). \quad (2.85)$$

Siendo estrictos, tendríamos que sustituir a (2.2.6) en (3.5) e integrar para calcular la fuerza aerodinámica. Sin embargo, debido a la complejidad de (2.84), resulta más fácil trabajar con la rapidez. Si es cierto que

$$V(w) \equiv \frac{d\Omega(w)}{dw} = \frac{d\Omega(z)}{dz} \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta(w)}{dw}, \quad (2.86)$$

la rapidez está dada, entonces, por

$$|V(w)| = \left| \frac{d\Omega(z)}{dz} \right| \left| \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta(w)}{dw} \right|. \quad (2.87)$$

Una vez sustituyendo a 2.86, o bien, a 2.87 en 3.5 y aplicando las transformadas pertinentes, será posible calcular la distribución de presión sobre el perfil de forma arbitraria. Ésto se destinará para el trabajo futuro.

2.3. Modelado del ala de envergadura finita

Para el caso de flujo alrededor de un ala finita, la complejidad agregada gira en torno a la necesidad de considerar una tercera dimensión utilizando todavía variable compleja³³. Con la teoría de línea de sustentación, sería posible hacer el modelado, de ser porque las geometrías con dispositivos no son alas rectas. Sería necesario extender esta teoría para líneas de sustentación curvas, pero ésto se dejará para trabajo futuro.

³³Formalmente, se estaría tratando de modelar un espacio en \mathbb{R}^3 mediante elementos pertenecientes a \mathbb{C}^1 .

Capítulo 3

PROGRAMA NUMÉRICO

3.1. Pre-procesamiento

En primera instancia, entendemos como *pre-procesamiento* al proceso que gira en torno a la preparación de las geometrías de estudio para la simulación. En éste se incluye la eliminación de las características no esenciales en las superficies de las geometrías de estudio, la definición del dominio computacional y la generación de las mallas¹.

3.1.1. Geometrías de estudio

Se estudiaron alas rectas de perfil alar NACA 2412, con área transversal constante para el caso base y con área transversal variable para los casos con dispositivos. La razón de que se seleccionara este perfil fue que el interés del estudio radicaba en evaluar el efecto de los dispositivos en alas que realmente se utilicen en la industria aeronáutica. Dichas alas se utilizan en avionetas de la familia del Cessna 172, ninguna de las cuales está equipada con dispositivos de punta alar, dándole plusvalía a los resultados de la investigación. Asimismo, el uso de alas rectas facilitaría la generación de las mallas pertinentes y permitiría la validación de las simulaciones². Las geometrías se construyeron utilizando el programa de diseño asistido por computadora (CAD) Siemens NX, mediante la extrusión del perfil base y la extensión³ del

¹Si es que se utiliza el método de volúmenes finitos.

²Dado que NACA publicó resultados experimentales para este perfil.

³Herramienta *Sweep*.

área transversal del perfil a lo largo de curvas guía, formando así las superficies complejas de los dispositivos.

Antes que nada, el perfil alar fue ligeramente modificado para evitar ciertos problemas asociados con el mallado de las geometrías. Se le removió el borde de salida puntiagudo a una distancia del 95 % de la cuerda nominal c , medida a partir del borde de ataque. Esta simplificación no es del todo descabellada, dado que ningún ala real cuenta con un borde de salida puntiagudo. De hecho, el borde de salida de las alas en avionetas Cessna 172 termina súbitamente, tal que la cuerda real resulta ser del 95 % de la cuerda nominal. Es decir que la geometría generada realmente refleja a la geometría real. En cuanto al diseño de las de los dispositivos en sí, éste no se planteó de manera muy estricta, pero sí se buscó que la forma de las superficies complejas fuera lo más parecida a algunos de los dispositivos reales más modernos (véase la Figura 1.2).

Para poder hacer una comparación válida, se construyeron dispositivos hacia arriba y hacia abajo donde las curvas guía fueran las mismas, pero en espejo respecto al eje z^4 . El dispositivo en cimitarra se propuso como el resultado de superponer los dispositivos hacia arriba y hacia abajo. Las curvas guía siempre fueron construidas de la misma manera para todos los casos, extendiéndose a partir del ala base. En otras palabras, siempre se podía generar el mismo dispositivo en la punta del ala, sin importar qué envergadura tuviera. Finalmente, cambiando el tamaño del área transversal del cuerpo al final de la curva guía, como un porcentaje del área transversal en el ala base, se podía controlar si el dispositivo terminaba en vértice⁵ o no⁶. Una última condición a cumplir fue que, sin importar la altura a la que llegaran los dispositivos, su extensión tenía que estar acotada dentro de la envergadura del ala sin dispositivo.

Las dimensiones del ala base y de la curva guía se muestran en la Figura 3.1, nuevamente en función de c y de b . El ala base comprende la región de longitud L , mientras que la curva guía está formada por el resto de los segmentos de trazo. Cabe mencionar que la curva guía se encontraba en el plano $x = 0.95c$, para que la curvatura del dispositivo fuera del borde de ataque al borde de salida. Se estudiaron las mismas geometrías para dos valores de b distintos, con el objetivo de ver en qué grado afectaba la envergadura a la efectividad de los dispositivos. Sorprendentemente, la comunidad científica, que realiza este tipo de investigaciones, no parece tener consistencia sobre qué envergadura tienen las alas estudiadas, a pesar

⁴Hay que recordar que, aunque éste fue un intento de que existiera “simetría” entre los dispositivos hacia arriba y hacia abajo, no existe verdadera simetría entre ambos debido a la asimetría del perfil alar en sí.

⁵Para no generar un vértice, el área transversal en la punta era del 5 % del área en el ala base.

⁶Para generar un extremo de ala suficientemente parecido a un vértice, el área transversal en la punta era del 0.002 % del área en el ala base.

de las implicaciones físicas que ésto necesariamente tendrá⁷. Un siglo atrás, parecía estar bien entendido que C_D y C_L dependen de la envergadura[96]. Existen estudios con envergadura corta[36] y estudios con envergadura larga[35][31][37][75].

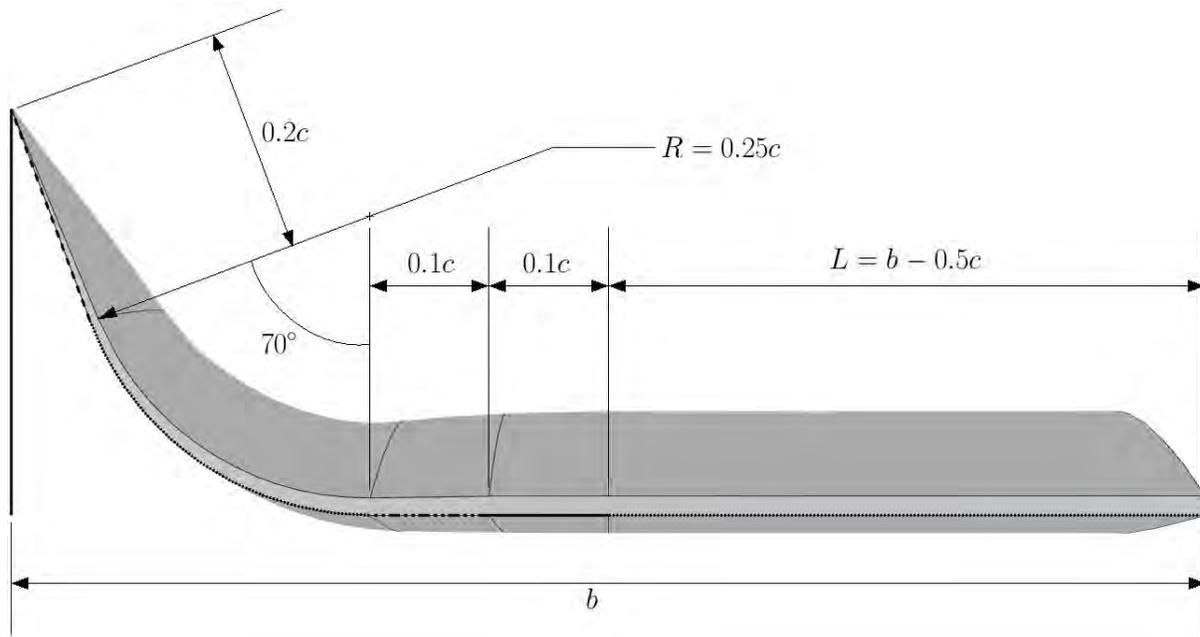


Figura 3.1: Segmentos de trazo que formaban parte del ala base y de la curva guía, vista posterior.

Dicho ésto, las Figuras 3.2 y 3.3 ilustran las alas finitas que se estudiaron. Las geometrías, para una envergadura de 0.5 m , se denominan: (a) ala sin dispositivo; (b) ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice; (c) ala con dispositivo hacia arriba, con vértice; (d) ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice; (e) ala con dispositivo hacia abajo, con vértice; (f) ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice; y (g) ala con dispositivo en cimitarra, con vértice. La misma nomenclatura, pero con letras mayúsculas, es válida para una envergadura de 1.0 m . Cabe mencionar que la geometría (A) fue la misma que se utilizó para el estudio de ala infinita, con las condiciones de frontera apropiadas.

⁷Mediante un razonamiento físico, está claro que si se tiene un ala en la que $b \rightarrow 0$, eventualmente el cuerpo ya no se comportará como ala. Se esperaría que C_D y C_L ya no correspondan a este tipo de cuerpo. El corolario es que el efecto de los dispositivos no puede ser el mismo para alas de distinta envergadura.

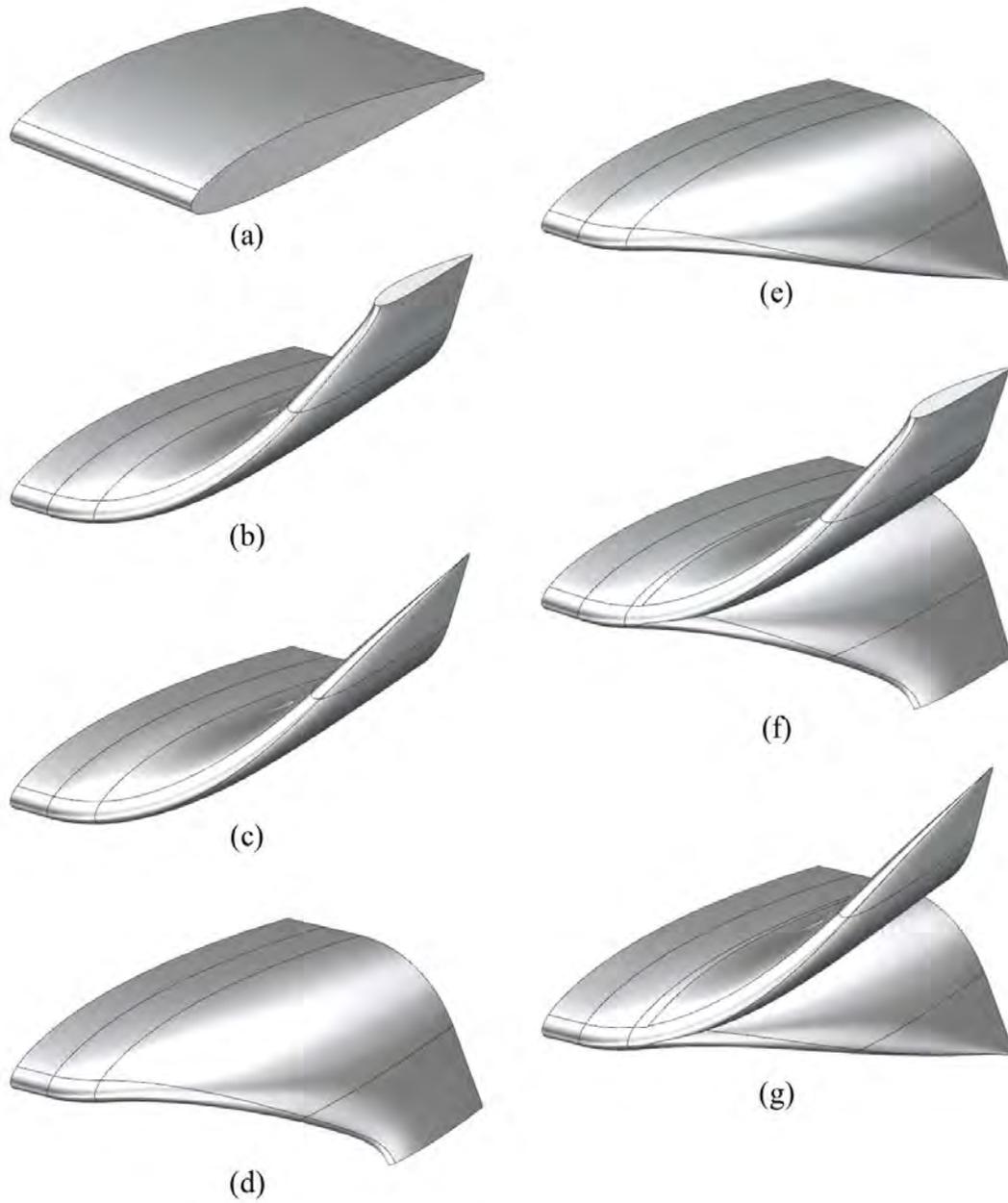


Figura 3.2: Geometrías estudiadas para envergadura de 0.5 m.

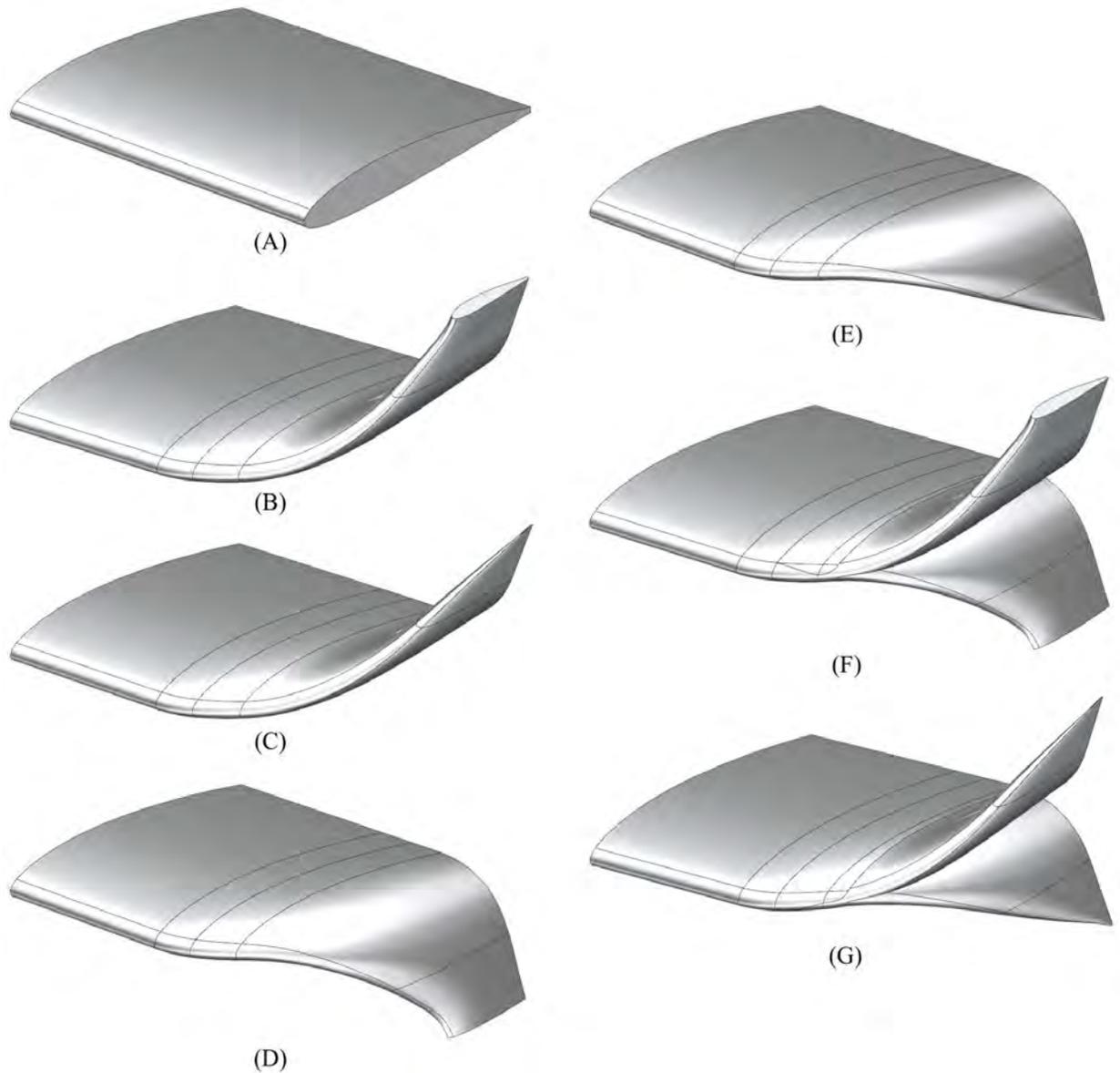


Figura 3.3: Geometrías estudiadas para envergadura de 1.0 *m*.

3.1.2. Dominio computacional

Para la simulación de ala infinita, se subdividió el dominio computacional en 11 bloques. Seis de ellos correspondían a la región aguas-arriba, mientras que el resto estaban asociados a la región aguas-abajo. La idea era construir una malla estructurada hexaédrica por bloques, que se proyectara del perfil alar hacia afuera, para tener los mejores resultados posibles cerca

del ala[53]. Dado que no existe un criterio universal para escoger el mejor tamaño de dominio y que distintas mallas requieren de topologías muy diferentes para los bloques, la definición de las dimensiones en el caso de ala infinita se hizo de manera arbitraria. De todas formas, la región de enrollamiento, desarrollo y disipación de los vórtices en aviones comerciales excede las 500 envergaduras aguas-abajo[37]. Es por eso que, si se observan la Figura 3.4, sólo se indican las medidas más importantes en términos de c . El propósito es que la topología de los bloques sea aproximadamente reproducible para el interesado en el tema, sin la necesidad de que el dominio tenga que ser construido de manera idéntica.

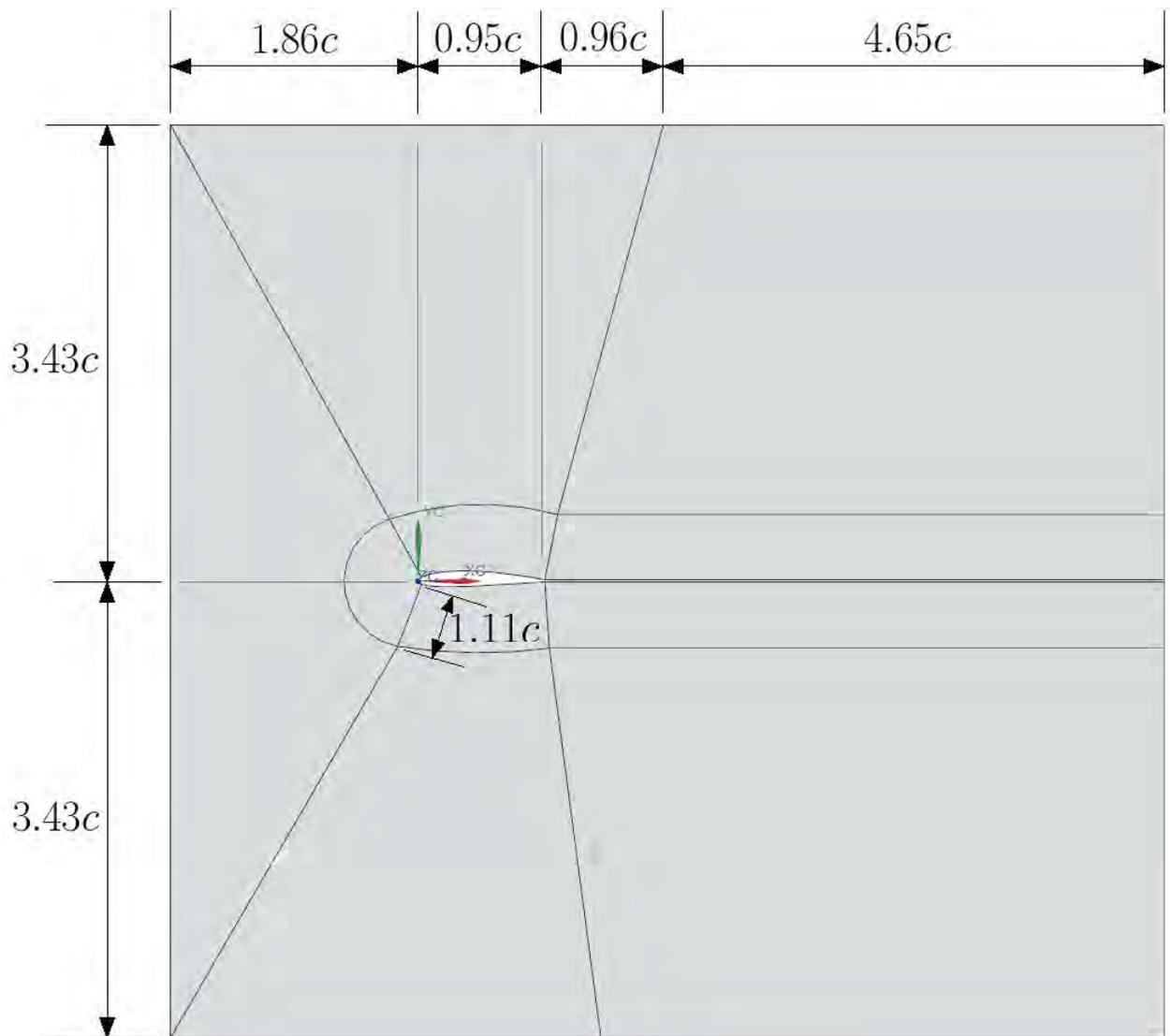


Figura 3.4: Dominio computacional para el caso de ala infinita, con dimensiones en términos de c .

La Figura 3.5 es un acercamiento del dominio, alrededor de la zona del perfil alar. Se puede observar mejor el detalle del borde de salida recortado y, más que nada, se indican una serie de valores que corresponden a la definición del número de nodos por arista. Hay que recordar que las aristas sin valor adquieren su número de nodos al proyectarse la malla de las aristas opuestas en el mismo bloque. Ésto cobrará importancia cuando se hable con más detalle de las mallas. También se debe hacer hincapié en que la profundidad del dominio correspondía a una envergadura de $b = 1.0$ m.

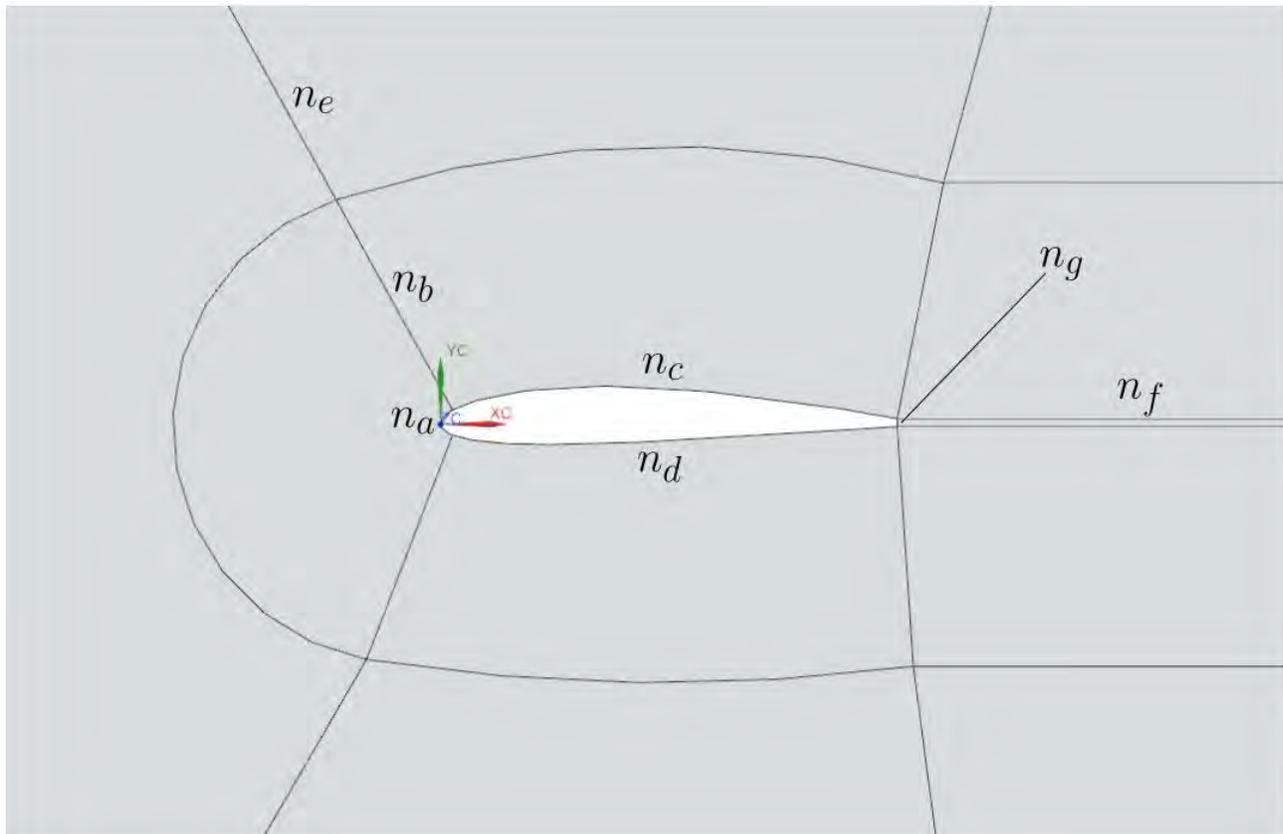


Figura 3.5: Acercamiento del dominio computacional para el caso de ala infinita.

El dominio computacional para alas finitas fue diferente, en varios aspectos, al de ala infinita. Se definió como una caja, de ciertas dimensiones, que contenía a la geometría de estudio, tal y como se muestra en la Figura 3.6. Tomando el borde de ataque como el origen, el dominio se extendía 5 cuerdas aguas-abajo a partir de este punto y 1.5 cuerdas aguas-arriba a partir del mismo punto. En la dirección y , existía simetría, extendiéndose 1.5 cuerdas hacia arriba y 1.5 cuerdas hacia abajo. Finalmente, en la dirección z , el dominio comenzaba en la raíz del ala y se extendía 0.5 cuerdas más a partir de la punta del ala. La cuerda real de

todas las alas era de 0.95 m , debido al borde de salida recortado. Estos detalles, en función de c y de la envergadura b , se ilustran en la Figura 3.6.

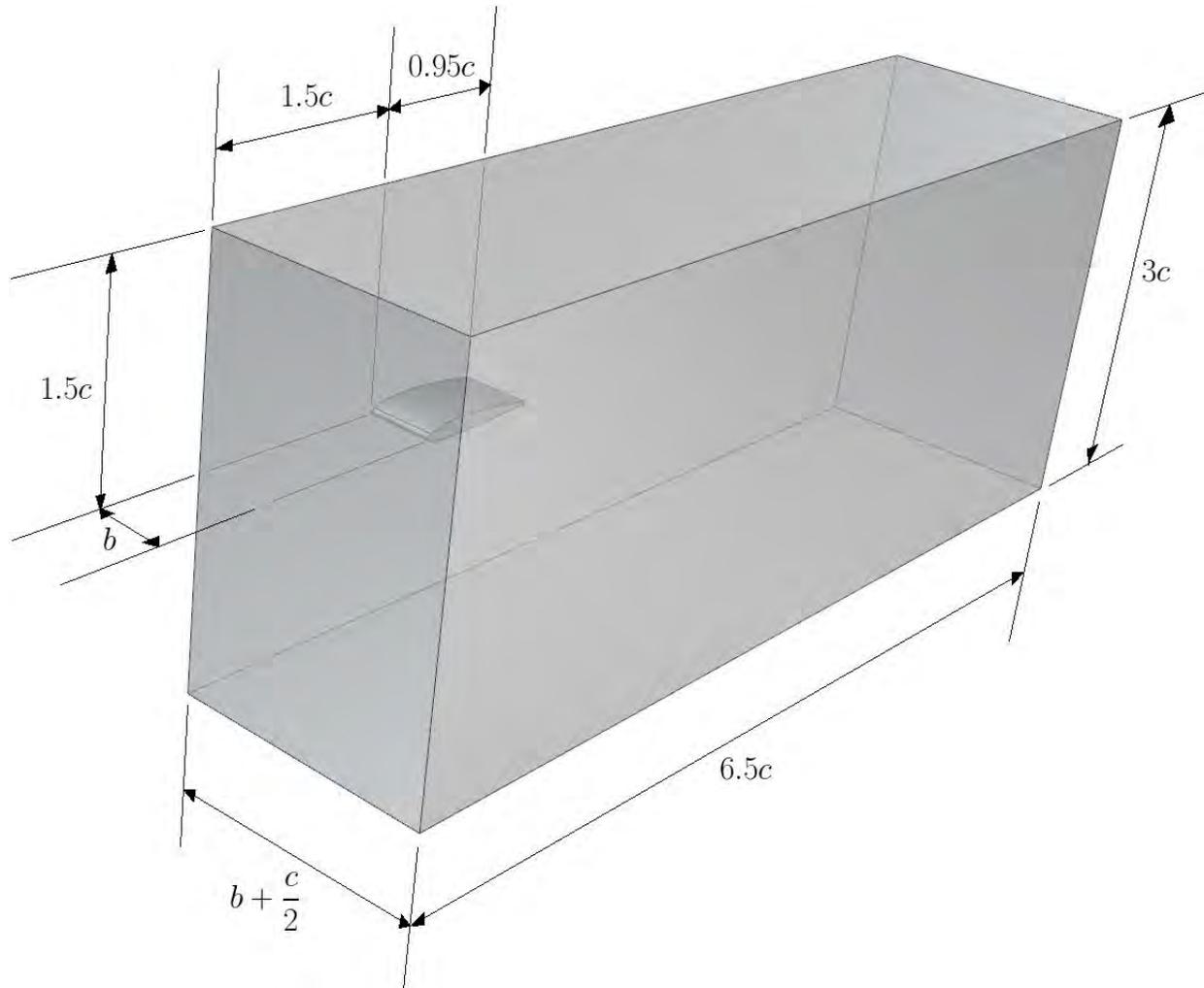


Figura 3.6: Dominio computacional utilizado para las alas finitas, en función de c y b (válido para todas las geometrías).

Para establecer las condiciones de frontera, asociando una para cada variable a cada uno de los parches, como se muestra en las Tablas 3.7-3.14, se utilizó la nomenclatura indicada en la Figura 3.7. Los parches se denominaron: (1) Arriba, (2) Abajo, (3) Frente, (4) Atrás, (5) Entrada y (6) Salida. El parche “Paredes”, no mostrado en la Figura 3.7, corresponde a todas las superficies que componen la geometría. En el caso del dominio de ala infinita, se siguió la misma nomenclatura, excepto que las caras Frente/Atrás eran una sola frontera.

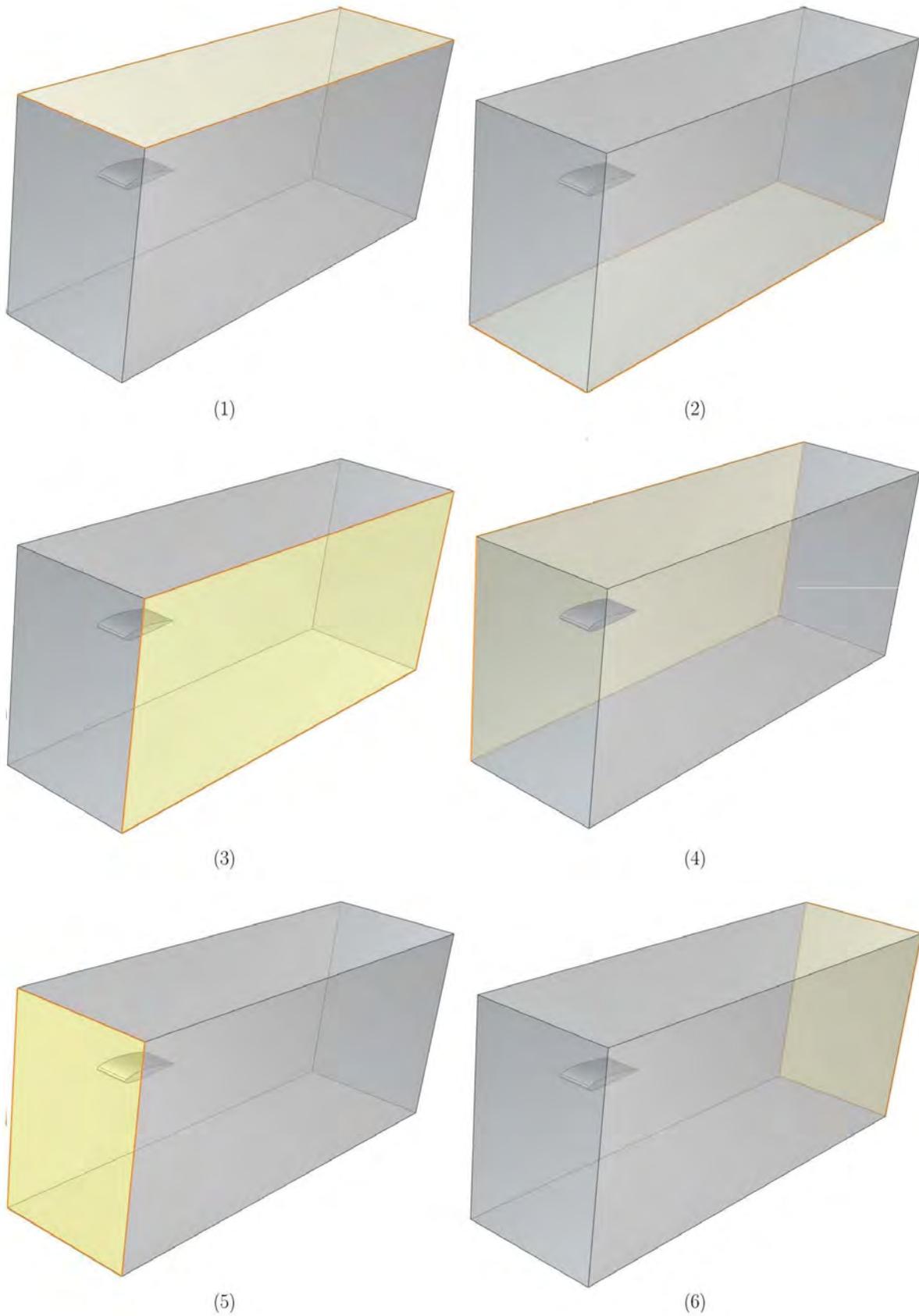


Figura 3.7: Fronteras del dominio computacional para alas finitas.

3.1.3. Malla

Se construyeron varias mallas distintas para el caso de ala infinita, con el objetivo de calibrar una solución que correspondiera a los resultados experimentales. La mayoría de ellas fueron mallas estructuradas por bloques, con elementos hexaédricos, y fueron construidas usando el programa Salome. Originalmente se planteaba tomar la malla de ala infinita y simplemente extenderla a lo largo de la superficie tridimensional, generando así las mallas de ala finita, pero esto resultó ser más complicado de lo que se pensaba. Es por eso que, una vez obtenidos los resultados satisfactorios para ala infinita, se prosiguió a mallar los casos de ala finita con ayuda de la aplicación *snappyHexMesh*⁸, incorporada a OpenFoam. Naturalmente, esto provocaría problemas para garantizar la independencia de malla de los resultados.

Teniendo dos mallas fundamentalmente distintas, no podría garantizarse del todo que la independencia de una malla fuera equivalente a la independencia de la otra. Más aún, cada geometría distinta implicaba un estudio de independencia de malla diferente. Sin embargo, hay que recordar que los resultados para alas finitas siempre se contrastaron contra aquéllos correspondientes al ala infinita, caso en el que sí se verificó meticulosamente la independencia de malla. Con base a esta similitud de resultados y una obtención de valores creíbles en cada simulación es que se concluyó sobre la veracidad de los resultados. La realización de simulaciones con mallas más comparables entre sí y con estudios de independencia de malla sistemáticos se dejó para trabajo futuro.

Dicho esto, el número de nodos por arista (indicados en la Figura 3.5), así como el número total de elementos⁹ resultantes, se resumen en las Tablas 3.1 y 3.2. Nótese que el número entre paréntesis indica el factor de escalamiento con el que se separan progresivamente los nodos¹⁰. En los campos n_b y n_f en la malla extra fina se agregaron adicionalmente mallas de capa límite, con espesor de 0.3 m , 40 capas y factor de escalamiento de 1.1. Fuera de eso, la malla extra fina es idéntica a la malla fina.

Tabla 3.1: Nodos por arista para malla de caso de ala infinita

	n_a	n_b	n_c	n_d	n_e	n_f	n_g	n_h
Gruesa	20 (1)	25 (4)	15 (5)	15 (0.2)	10 (3)	15 (0.1)	1 (1)	1 (1)
Fina	40 (1)	15 (4)	150 (1)	150 (1)	80 (1)	130 (1)	3 (1)	1 (1)
Extra fina	40 (1)	15 (4)	150 (1)	150 (1)	80 (1)	130 (1)	3 (1)	1 (1)

⁸La cual también construye mallas conformes, con la mayoría de sus elementos hexaédricos.

⁹Es decir, volúmenes finitos.

¹⁰Este factor de escalamiento corresponde al *scale factor* en Salome.

Tabla 3.2: Nodos por arista para malla de caso de ala infinita

	Nodos	Volúmenes
Gruesa	5831	2814
Fina	51276	25335
Extra fina	185916	92310

Asimismo, utilizando los valores calculados de C_D y C_L , se muestra la diferencia obtenida para dos finezas de malla distintas en las Tablas 3.3 y 3.4 (solamente para ángulo de ataque de 0°).

Tabla 3.3: Independencia de malla de C_D para el caso de ala infinita

	C_{Dexp}	C_D	Error respecto a C_{Dexp}
Gruesa	0.009	0.01128370	25.37 %
Fina	0.009	0.00995015	10.45 %
Extra fina	0.009	0.01005960	11.77 %

Tabla 3.4: Independencia de malla de C_L para el caso de ala infinita

	C_{Lexp}	C_L	Error respecto a C_{Dexp}
Gruesa	0.2	0.215439	7.72 %
Fina	0.2	0.209658	4.83 %
Extra fina	0.2	0.19937	0.315 %

El criterio para considerar independencia de malla parece ser una variación de menos del 5 % de los resultados de una fineza a la otra[31][37]. El error respecto al valor experimental de C_D se pudo reducir hasta un 0.315 % en el caso de malla extra fina. Aún la malla fina tenía apenas un error del 4.83 %, pero lo importante es que la diferencia entre los valores de C_L para estas dos finezas fue de 4.515 %. A pesar de que todavía existe un error de aproximadamente el 10 % respecto a los datos experimentales en el arrastre, la diferencia en el valor de C_D entre las mallas fina y extra fina fue de 1.32 %. Bajo este argumento, es posible decir que se tiene independencia de malla, aunque falte perfeccionar los resultados. Dicho esto, se seleccionó la malla fina para realizar las simulaciones, para ahorrar tiempo computacional y por el hecho de que es la malla que menor error tuvo para el arrastre.

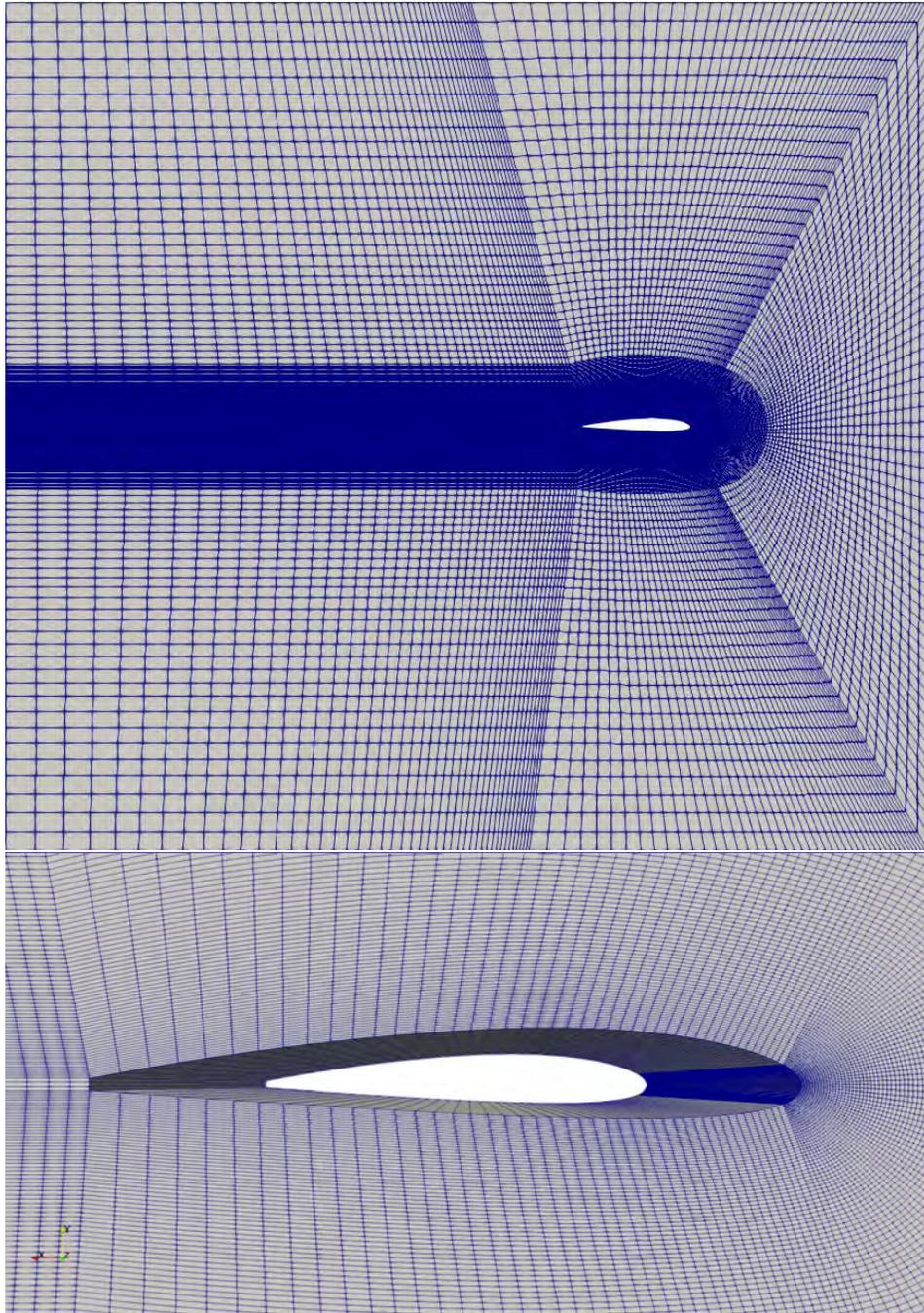


Figura 3.8: Malla fina para el caso de ala infinita.

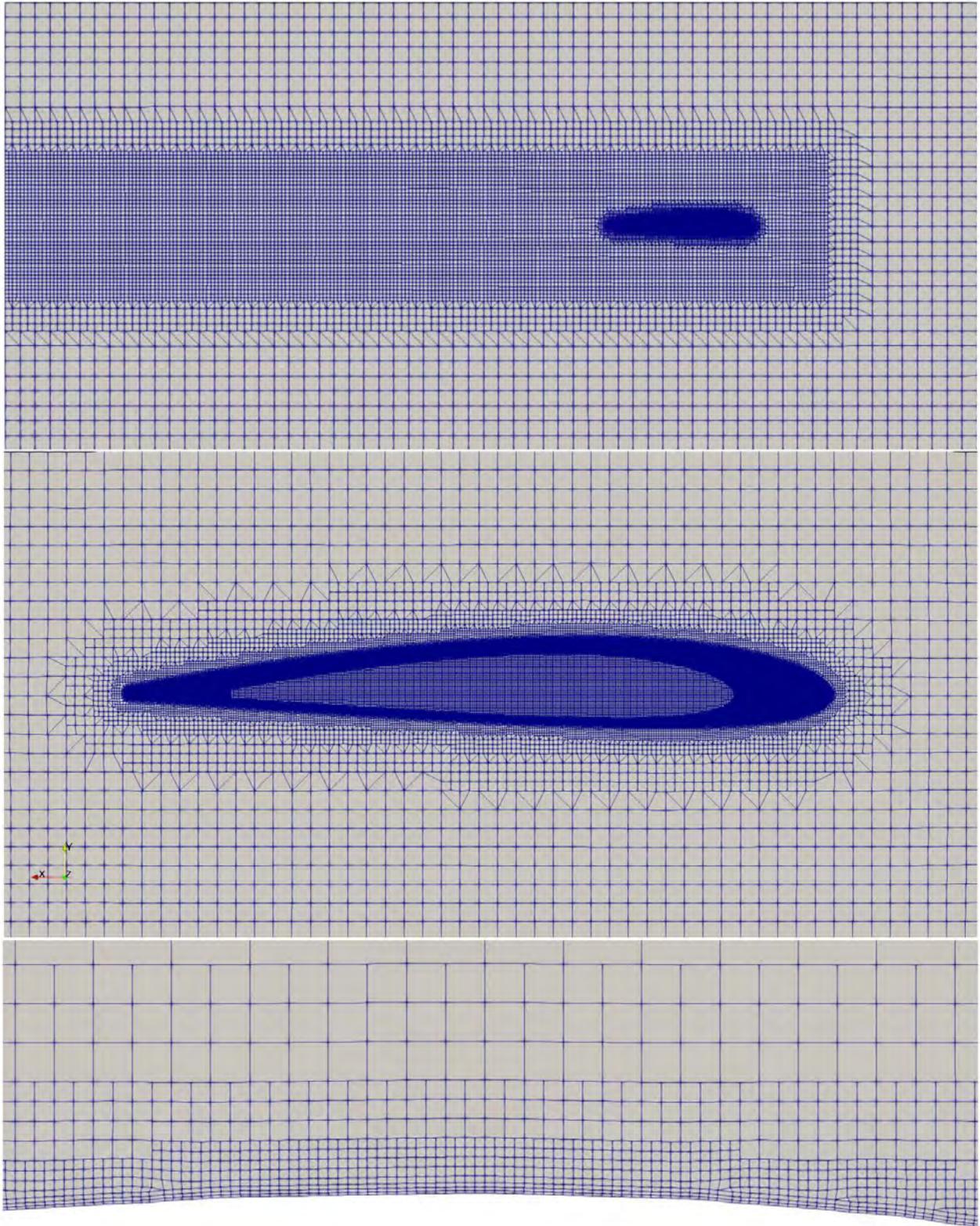


Figura 3.9: Malla para los casos de ala finita (distintos acercamientos).

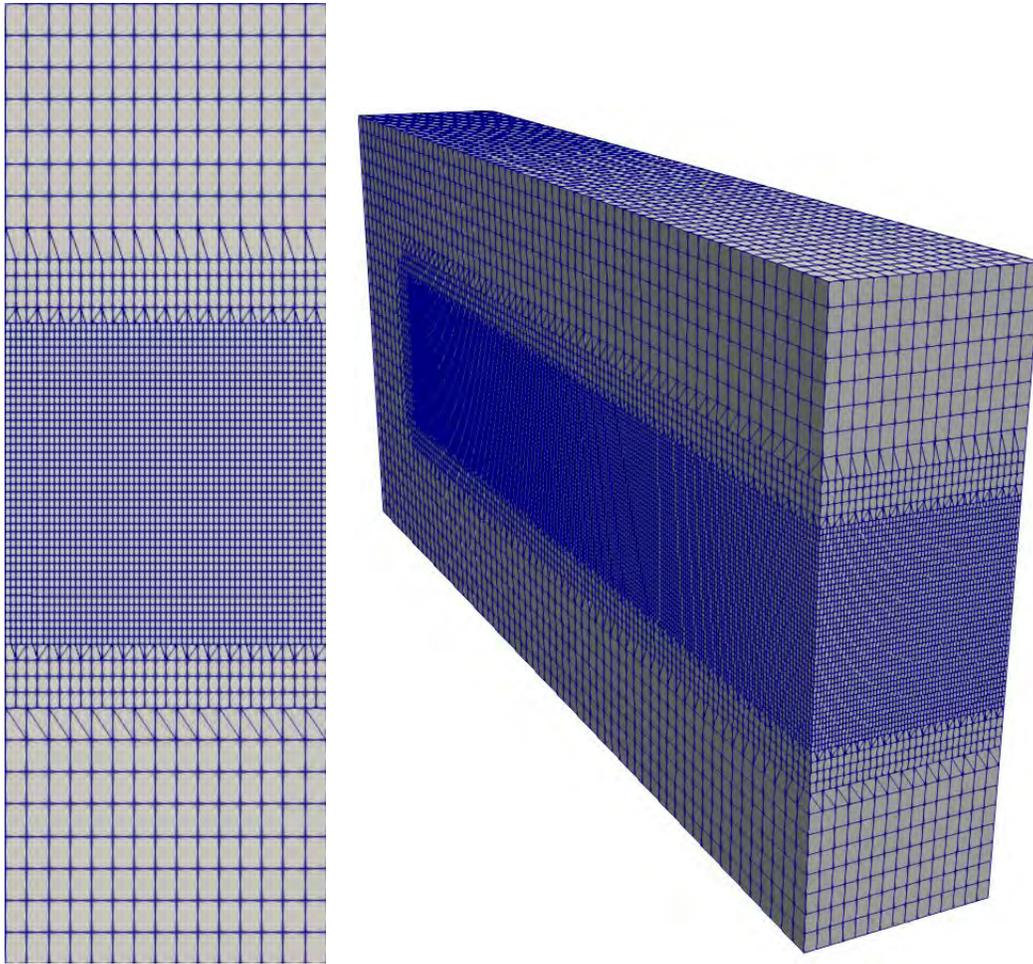


Figura 3.10: Malla para el caso de ala finita (otras vistas).

La Tabla 3.5 resume la cantidad de volúmenes aproximada que tenían las mallas de alas finitas.

Tabla 3.5: Cantidad de volúmenes para mallas de ala finita

	Número de volúmenes
$b = 0.5 \text{ m}$	2×10^6
$b = 1.0 \text{ m}$	9×10^6

3.2. Procesamiento

Por otro lado, el *procesamiento* se refiere al proceso de simulación del fenómeno físico. En éste se incluyen la discretización de las ecuaciones, la especificación de las propiedades físicas, la definición de las condiciones de frontera y la selección del método numérico a utilizar. Si es necesario, aquí también se agregan modelos matemáticos *a doc* necesarios para cerrar el sistema de ecuaciones a resolver.

3.2.1. Esquemas de discretización

Los esquemas de discretización, término a término, se resumen en la lista siguiente.

- Transitorio: Sin esquema, sólo se realizaron simulaciones exclusivamente estacionarias sin esquemas de marcha en el tiempo (*steadyState*).
- Gradientes: Segundo-orden, de diferencias centradas, limitado por valores de las celdas adyacentes en múltiples direcciones, valor de coeficiente 0.5 (*cellMDLimited Gauss linear 0.5*).
- Divergencias: Segundo-orden, de diferencias con cezgo hacia aguas-arriba, no acotado (*linearUpwind Gauss*).
- Laplacianos: Segundo orden, gradientes normales a la superficie calculados con corrección (*Gauss linear limited 1.0*).
- Interpolación: Lineal.

Los métodos de solución iterativa del sistema matricial fueron todos de tipo Gauss-Seidel, sin preconditionares para las matrices. El número de correctores de no-ortogonalidad se mantuvo en 2.

3.2.2. Propiedades de transporte

Como se reportó que las condiciones del experimento eran a temperatura ambiente, en un túnel de viento que usaba aire no presurizado, para $Ma < 0.3$, se seleccionaron las propiedades que se resumen en

Tabla 3.6: Propiedades de transporte

Valor	Propiedad	
	ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	ν [$\frac{m^2}{s}$]
	1	1×10^{-5}

3.2.3. Condiciones de frontera

La definición de las condiciones de frontera se realizó de acuerdo con lo recomendado en publicaciones previas[29]. Algunos autores[62] afirman que no existe ninguna combinación práctica de condiciones de frontera que puedan producir un resultado perfecto escoger la combinación que sea físicamente más razonable. Esto es tener condiciones de corriente libre lejos del ala y un flujo lo menos turbulento posible a la entrada, no-deslizamiento y una función de pared¹¹ sobre el ala; y gradientes cero a la salida, para dejarle cierta libertad al cálculo. Es importante resaltar que, dado el algoritmo de solución utilizado, se calculó la variable ϱ , a veces conocida como *presión cinemática*, en lugar de p , tal que

$$\varrho = \frac{p}{\rho}. \quad (3.1)$$

Ésto equivale a resolver numéricamente la ecuación 2.63 dividida entre ρ , sin mayores dificultades. Esta cantidad física no es propiamente la *presión* que conocemos y, de hecho, su nombre no es totalmente correcto, dado que la presión es necesariamente de carácter dinámico¹². Como resultado, los valores de ϱ en la frontera y en el resto del dominio no serán propiamente los de la presión termodinámica, sino que se calcularán respecto a una referencia cero¹³ en la corriente libre. En este caso, dadas las propiedades de transporte del medio, los valores numéricos de ϱ serán idénticos a los que se obtendrían si se estuviera calculando p , respecto a la referencia cero. Habiendo aclarado este punto, por motivos de simpleza, nos referiremos a ϱ como la *presión*.

Regresando a las condiciones de frontera, para el caso de ala infinita se resumen de la forma

¹¹Si la fineza de la malla lo requiere cerca de la pared.

¹²Ya sea desde el punto de vista mecánico o termodinámico.

¹³Similar a lo que sería una presión manométrica o vacuométrica.

Tabla 3.7: Tipos de condiciones de frontera para caso de ala infinita (Físicas)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	Dirichlet	Dirichlet	Dirichlet	Dirichlet
Salida	Neumann	Neumann	Neumann	Neumann
Paredes	Dirichlet	Neumann	Dirichlet	Dirichlet
Arriba/Abajo	Neumann	Neumann	Neumann	Neumann
Frente/Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

Tabla 3.8: Valores de condiciones de frontera para caso de ala infinita (Físicas)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	$\mathbf{v} = 90 \hat{\mathbf{e}}_x$	$\varrho = 0$	$\nu_t = 0,14$	$\tilde{\nu} = 0,0001$
Salida	$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nabla \nu_t = \mathbf{0}$	$\nabla \tilde{\nu} = \mathbf{0}$
Paredes	$\mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nu_t = 0$	$\tilde{\nu} = 0$
Arriba/Abajo	$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nabla \nu_t = \mathbf{0}$	$\nabla \tilde{\nu} = \mathbf{0}$
Frente/Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

Asimismo, la manera concreta en la que estas condiciones se implementaron, usando terminología de OpenFoam, se ilustra a continuación

Tabla 3.9: Tipos de condiciones de frontera para caso de ala infinita (OpenFoam)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	fixedValue	fixedValue	fixedValue	fixedValue
Salida	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
Paredes	fixedValue	zeroGradient	nuTSpaldingWallFunction	fixedValue
Arriba/Abajo	slip	slip	slip	slip
Frente/Atrás	empty	empty	empty	empty

Tabla 3.10: Valores de condiciones de frontera para caso de ala infinita (OpenFoam)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	uniform (0 0 0)	uniform 0	uniform 0.14	uniform 0.0001
Salida	N/A	N/A	N/A	N/A
Paredes	uniform (0 0 0)	N/A	uniform 0	uniform 0
Arriba/Abajo	N/A	N/A	N/A	N/A
Frente/Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

Por otro lado, en el caso de ala finita, las condiciones de frontera físicas utilizadas fueron

Tabla 3.11: Tipos de condiciones de frontera para casos de ala finita (Físicas)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	Dirichlet	Dirichlet	Dirichlet	Dirichlet
Salida	Neumann	Neumann	Neumann	Neumann
Paredes	Dirichlet	Neumann	Dirichlet	Dirichlet
Arriba/Abajo	Neumann	Neumann	Neumann	Neumann
Frente	Neumann	Neumann	Neumann	Neumann
Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

Tabla 3.12: Valores de condiciones de frontera para casos de ala finita (Físicas)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	$\mathbf{v} = 90 \hat{\mathbf{e}}_x$	$\varrho = 0$	$\nu_t = 0,14$	$\tilde{\nu} = 0,0001$
Salida	$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nabla \nu_t = \mathbf{0}$	$\nabla \tilde{\nu} = \mathbf{0}$
Paredes	$\mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nu_t = 0$	$\tilde{\nu} = 0$
Arriba/Abajo	$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nabla \nu_t = \mathbf{0}$	$\nabla \tilde{\nu} = \mathbf{0}$
Frente	$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\nabla \varrho = \mathbf{0}$	$\nabla \nu_t = \mathbf{0}$	$\nabla \tilde{\nu} = \mathbf{0}$
Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

Asimismo, la manera concreta en la que estas condiciones se implementaron, usando terminología de OpenFoam, se ilustra a continuación

Tabla 3.13: Tipos de condiciones de frontera para casos de ala finita (OpenFoam)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	fixedValue	fixedValue	fixedValue	fixedValue
Salida	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
Paredes	fixedValue	zeroGradient	nuTSpaldingWallFunction	fixedValue
Arriba/Abajo	slip	slip	slip	slip
Frente	slip	slip	slip	slip
Atrás	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane

Tabla 3.14: Valores de condiciones de frontera para casos de ala finita (OpenFoam)

	Campo			
	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$	$\tilde{\nu} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Entrada	uniform (0 0 0)	uniform 0	uniform 0.14	uniform 0.0001
Salida	N/A	N/A	N/A	N/A
Paredes	uniform (0 0 0)	N/A	uniform 0	uniform 0
Arriba/Abajo	N/A	N/A	N/A	N/A
Frente	N/A	N/A	N/A	N/A
Atrás	N/A	N/A	N/A	N/A

3.2.4. Criterios y parámetros

Todas las simulaciones se realizaron con los criterios de convergencia, relativos y absolutos, que se especifican en la Tabla 3.15. Éstos son los criterios que se tienen por defecto en OpenFoam, aunque también se utilizan frecuentemente en estudios ya publicados[36][37].

Tabla 3.15: Criterios de convergencia

	$\varrho \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\mathbf{v} \left[\frac{m}{s} \right]$	$\nu_t \left[\frac{m^2}{s} \right]$
Tolerancia absoluta	1×10^{-5}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
Tolerancia relativa	1×10^{-1}	1×10^{-8}	1×10^{-8}

Asimismo, los factores de relajamiento utilizados se indican en la Tabla 3.16. Éstos reflejan un relajamiento balanceado entre la presión y la velocidad, tal y como se recomienda para

que cumplan la relación óptima[67], y un ligero relajamiento para la viscosidad turbulenta, con el objetivo de estabilizar la simulación.

Tabla 3.16: Factores de relajamiento

	λ_ρ	λ_ν	λ_{ν_t}
Valor	0.3	0.7	0.7

3.2.5. Modelo de turbulencia

Se utilizó el modelo de Spalart-Allmaras, que se implementa con ecuaciones promediadas de Navier-Stokes (RANS). La razón por la cual se decidió utilizar un modelo de este tipo fue la disponibilidad de recursos computacionales. Mientras que el uso de un modelo RANS era concebible, el uso de una simulación de grandes escalas (LES) que pudiera capturar la capa límite habría requerido una malla extremadamente fina[16]. Para el tamaño de las geometrías involucradas, el número de elementos requerido habría resultado en un tiempo computacional prohibitivo. Asimismo, no se requería mucha exactitud[16] respecto a los resultados, dado que C_D y C_L son cantidades físicas suficientemente gruesas. El uso de una simulación numérica directa (DNS) habría sido imposible de implementar, existiendo solamente unos pocos estudios[39][40] de este tipo en alas y álabes de turbina¹⁴.

En cuanto a la selección de este modelo sobre otros, solamente se consideró que el de Spalart-Allmaras se calibró específicamente para flujos aerodinámicos con altos valores de Re [83] y que se han reportado resultados exitosos del mismo en estudios previos[31][35]. Otras ventajas reportadas incluyen la aplicabilidad del modelo a una gran variedad de situaciones, su estabilidad y el hecho de que no agrega mucha complejidad computacional¹⁵ al cálculo[31]. Existen otros estudios sobre dispositivos de punta alar que han utilizado el modelo $k - \varepsilon$, con resultados exitosos hasta $\alpha = 19^\circ$ [36], y el modelo $k - \omega SST$, para $\alpha = 0^\circ$ [37]. El modelo es *de una ecuación*, la cual se expresa en su forma más general como

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{Pr_t}(\nabla \cdot (\tilde{\nu}\nabla\tilde{\nu}) + c_{b2}\nabla\tilde{\nu} \cdot \nabla\tilde{\nu}) - \left(c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2, \quad (3.2)$$

¹⁴Ninguno de ellos involucrando geometrías del tamaño de las de este trabajo ni valores de Re del mismo orden de magnitud.

¹⁵Dado que es de una sola ecuación, el tiempo computacional requerido para resolver el modelo de turbulencia es menor al que se requiere para modelos de más ecuaciones.

donde $\tilde{\nu}$ se conoce como *variable de Spalart-Allmaras*, o bien, *viscosidad de Spalart-Allmaras*. Las cantidades c_{b1} , f_{t2} , c_{b2} , c_{w1} y f_w son coeficientes de calibración, \tilde{S} es una norma característica del gradiente de velocidad, κ es la energía cinética turbulenta y d es la distancia con la pared sólida. La relación entre esta cantidad y la viscosidad turbulenta está dada por

$$\nu_t = f_{v2} \tilde{\nu}, \quad (3.3)$$

donde f_{v2} es otro coeficiente, tal que $f_{v2} \rightarrow 1$ para toda región externa a la subcapa viscosa de la capa límite. Su definición es

$$f_{v2} = \frac{\left(\frac{\tilde{\nu}}{\nu}\right)^3}{\left(\frac{\tilde{\nu}}{\nu}\right)^3 + c_{v1}^3}, \quad (3.4)$$

donde c_{v1} es otro coeficiente de calibración y el término $\frac{\tilde{\nu}}{\nu}$ podría interpretarse como el grado de turbulencia que tiene el flujo, en relación con la difusión molecular de moméntum. Dicho ésto, está claro que (3.2) es una ecuación de transporte para la viscosidad turbulenta en sí.

3.2.6. Algoritmo de solución

Se utilizó el algoritmo *simpleFoam*, para simulaciones estacionarias de flujo incompresible y con modelo de turbulencia, con ayuda del conocido algoritmo¹⁶ SIMPLE. Si bien el fenómeno aerodinámico es necesariamente de carácter transitorio[62], aunque las condiciones de flujo a la entrada sean estacionarias, es posible realizar simulaciones de este último tipo. Son más comunes las simulaciones transitorias[75], pero algunos estudios sí trabajaron exclusivamente en estado estacionario[31][37]. Nótese que el algoritmo original se planteó en términos de p y, por lo tanto, en nuestro caso, hemos de reemplazar dicha variable por ρ . Aprovechando las ecuaciones (A.43)-(A.48), el algoritmo se resume de la forma

¹⁶Para diferenciar la jerarquía de ambos.

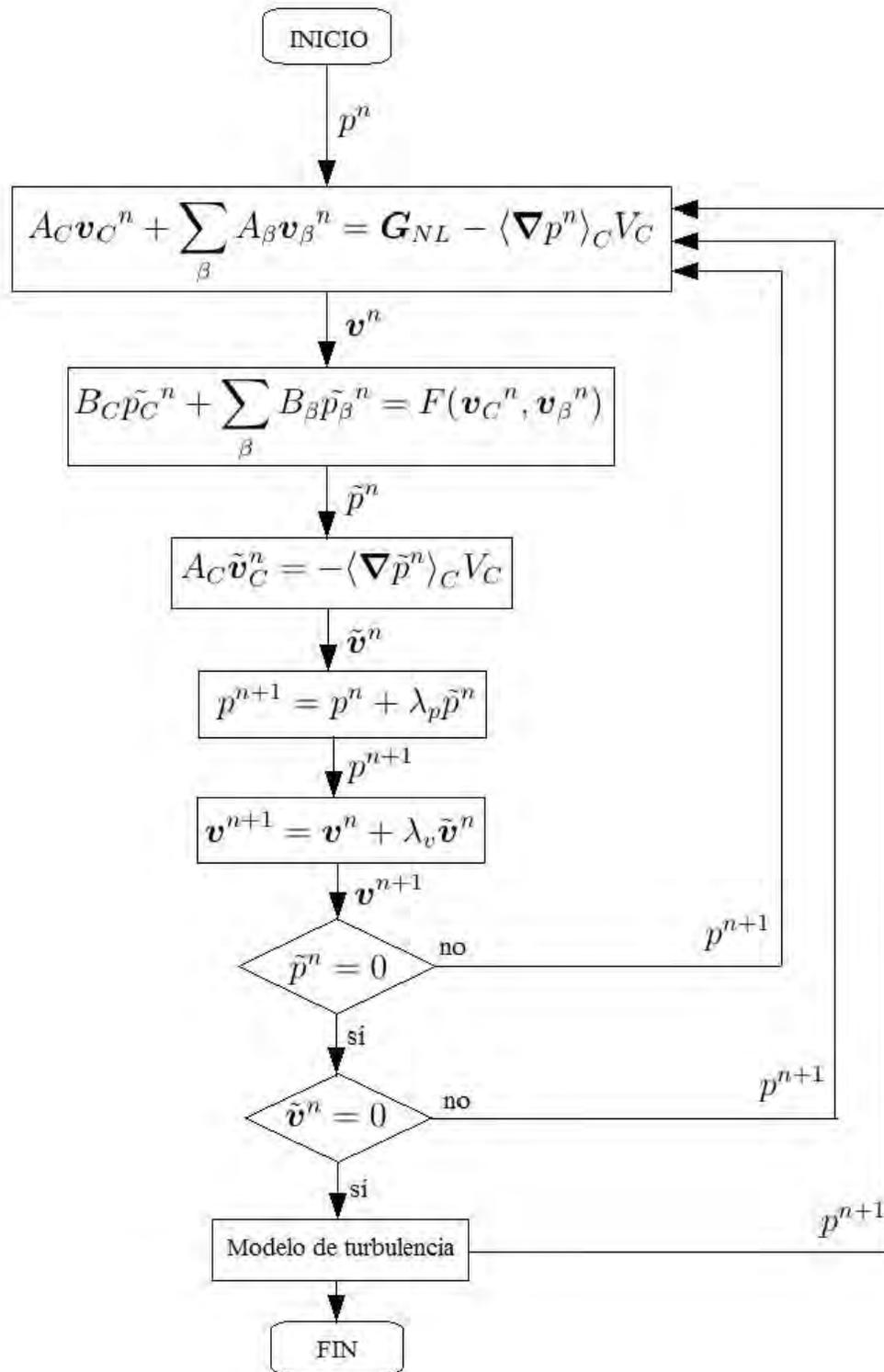


Figura 3.11: Algoritmo SIMPLE.

3.3. Post-procesamiento

Finalmente, el *post-procesamiento* se refiere al proceso de presentación de los datos obtenidos en la simulación. En éste se incluyen los cálculos adicionales que se tengan que realizar y la visualización de los resultados en gráficas.

3.3.1. Cálculo de las fuerzas

Para el cálculo de las fuerzas¹⁷, se utilizó un código, disponible en el dominio público, basado en la definición dada por

$$\mathbf{F} = - \oint_{\Sigma} p \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{\Sigma} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (3.5)$$

donde la primera integral representa las *fuerzas debido a la presión* y la segunda a las *fuerzas viscosas*. Para calcular las magnitudes de las dos fuerzas de interés, es decir la *fuerza de arrastre* y la *fuerza de sustentación*, se recurre específicamente a

$$F_D = - \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}_D \cdot p \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}_D \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (3.6)$$

y a

$$F_L = - \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}_L \cdot p \mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}_L \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.7)$$

En el caso de (3.6), la primera integral representa la *fuerza de arrastre debido a la presión* F_D^p , donde viene incluido tanto el *arrastre de forma* como el *arrastre inducido*, y la segunda representa la *fuerza de arrastre viscoso* F_D^τ . En la ecuación (3.7), la primera integral representa la *fuerza de sustentación debido a la presión* F_L^p y la segunda a la *fuerza de sustentación viscosa* F_L^τ , la cual estrictamente existe, pero es muy pequeña. Cabe mencionar que, en este caso, se cumplen las relaciones

¹⁷Sólo las *fuerzas de superficie* actúan sobre el cuerpo. En este caso, Σ representa toda la superficie del ala.

$$\hat{e}_D = \hat{e}_x \quad (3.8)$$

y

$$\hat{e}_L = \hat{e}_y . \quad (3.9)$$

para los vectores de dirección de ambas fuerzas en el sistema coordenado que se seleccionó. Finalmente, para calcular los coeficientes de arrastre y de sustentación, se utilizaron las expresiones

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho U^2 A} \quad (3.10)$$

y

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho U^2 A} . \quad (3.11)$$

De manera análoga, si se desea calcular alguna de las componentes del arrastre o la sustentación, sólo se debe reemplazar la fuerza correspondiente en (3.10) y (3.11). Cabe mencionar que el área de referencia A siempre fue aquella correspondiente al ala sin dispositivo de punta alar, aún en los casos con dispositivo, dada por

$$A = cb , \quad (3.12)$$

donde c es la cuerda del perfil alar y b es la envergadura. Esta es la forma tradicionalmente adoptada para calcular ambos coeficientes en alas y, en general, en cuerpos delgados[64]. En las simulaciones de ala infinita, b era la envergadura real del cuerpo que se pretendía estudiar¹⁸. En cambio, en las simulaciones de alas finitas, b era de la mitad de la envergadura real del ala¹⁹.

¹⁸El ala simulada tenía la envergadura del ala real.

¹⁹Debido a que sólo se simuló la mitad del ala, con una condición de simetría en un plano.

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1. Ala infinita

La simulación de ala infinita fue el caso base, con el que se calibró el modelo numérico para un cierto rango de valores¹ de α y de $\tilde{\nu}$ en la entrada. Se hizo ésto ante la incertidumbre de para qué casos sería válido el modelo de turbulencia utilizado. A continuación se describen las características de los campos de interés. En primer lugar, en la parte superior de la Figura 4.1 se observa el campo de presión. Se tiene la región de presión máxima cerca del borde de ataque y, a medida que avanzamos aguas-abajo sobre el extradós, encontramos la zona de presión mínima. En el lado opuesto del ala, sobre el intradós, hay una región donde la presión es menor que cerca del borde de ataque, pero indudablemente mayor a la del extradós. Cerca de lo que sería el borde de salida, se nota una zona muy localizada de alta presión. No es tan alta como el máximo, cerca del borde de ataque, pero es mayor a todas las demás. Finalmente, el resto del campo tiene una presión uniforme con valor 0 en la escala de los resultados.

Por otro lado, en la parte inferior de la Figura 4.1 se muestra la componente de la velocidad en x en el dominio. Esta componente es la que corresponde a la dirección del flujo de corriente libre. Se observa que, lejos del perfil, se tiene un valor uniforme de $90 \frac{m}{s}$, tal y como se especificó para la entrada en la Sección 3.2. Cerca del borde de ataque, la magnitud de la componente cae a cero, mientras que la magnitud máxima se localiza sobre el extradós,

¹De hecho, se asumía en un principio que el modelo sería válido para un rango mayor que el que se identificó mediante esta calibración.

coincidiendo con la zona de menor presión. Cerca del borde de salida también hay una zona de magnitud aparentemente cero. A partir de este punto, en la dirección aguas-abajo, hay una estela de baja magnitud de velocidad, distinta de cero, que gradualmente incrementa y se difunde al alcanzar la velocidad de la corriente libre.

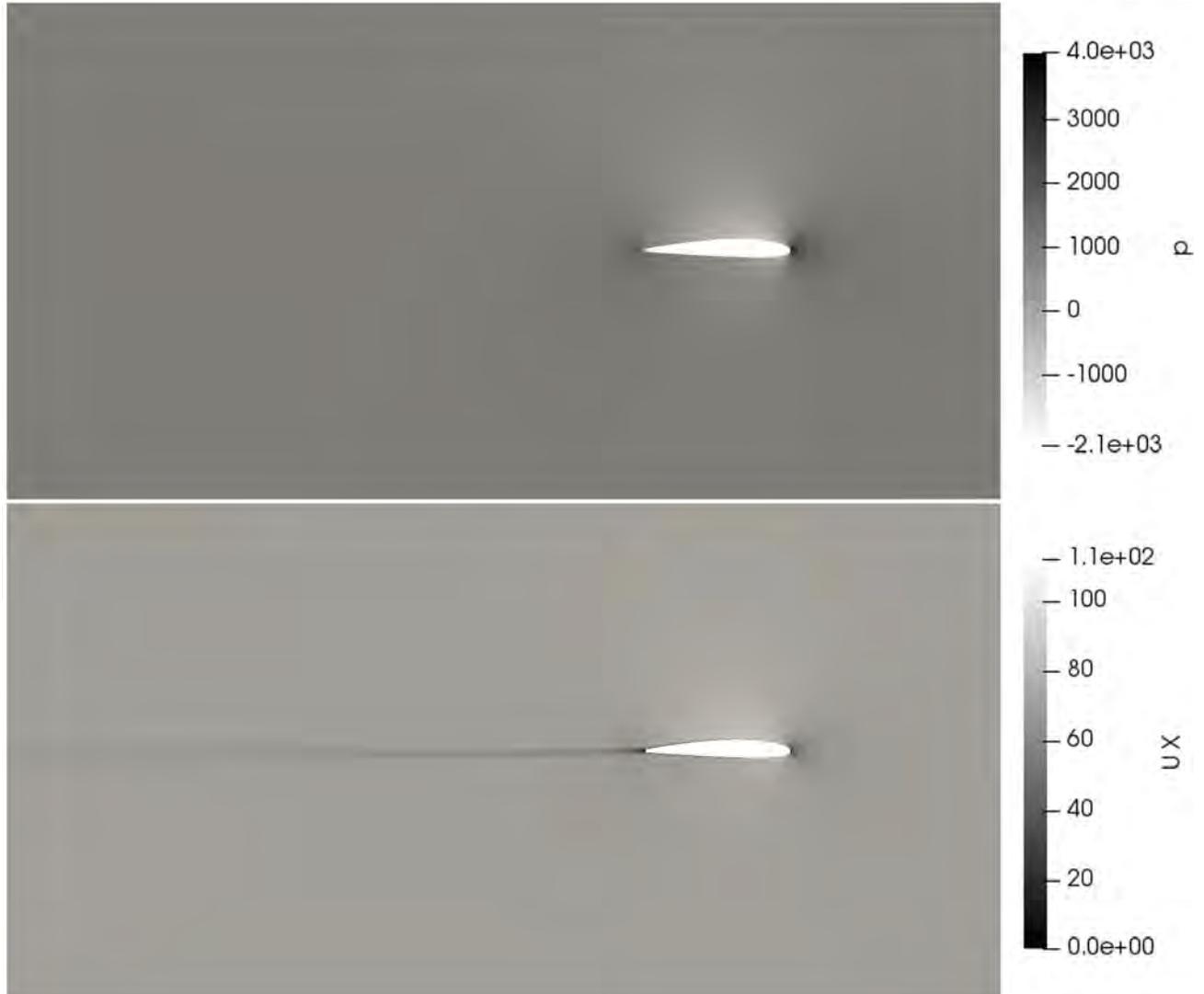


Figura 4.1: Campos de interés en todo el dominio, ala infinita (parte 1).

Por otro lado, en la parte superior de la Figura 4.2 se observa la componente de la velocidad en y . Se observa una magnitud cero uniforme en gran parte del dominio, lo que corresponde a la corriente libre. A partir de las inmediaciones del borde de ataque, si nos movemos sobre el extradós, observamos que la magnitud de la componente aumenta a valores positivos hasta su máximo. En cambio, si nos movemos sobre el intradós, esta magnitud disminuye hasta

valores negativos. Ambos valores tienen aproximadamente el mismo valor absoluto. Aparte de esto, se notan magnitudes ligeramente negativas de esta componente de la velocidad sobre el extradós, pero acercándonos hacia el borde de salida. Parece haber una ligera discontinuidad en la magnitud de esta componente justo sobre el borde de salida, entre la parte del dominio que está sobre el extradós y la que está por debajo del intradós.

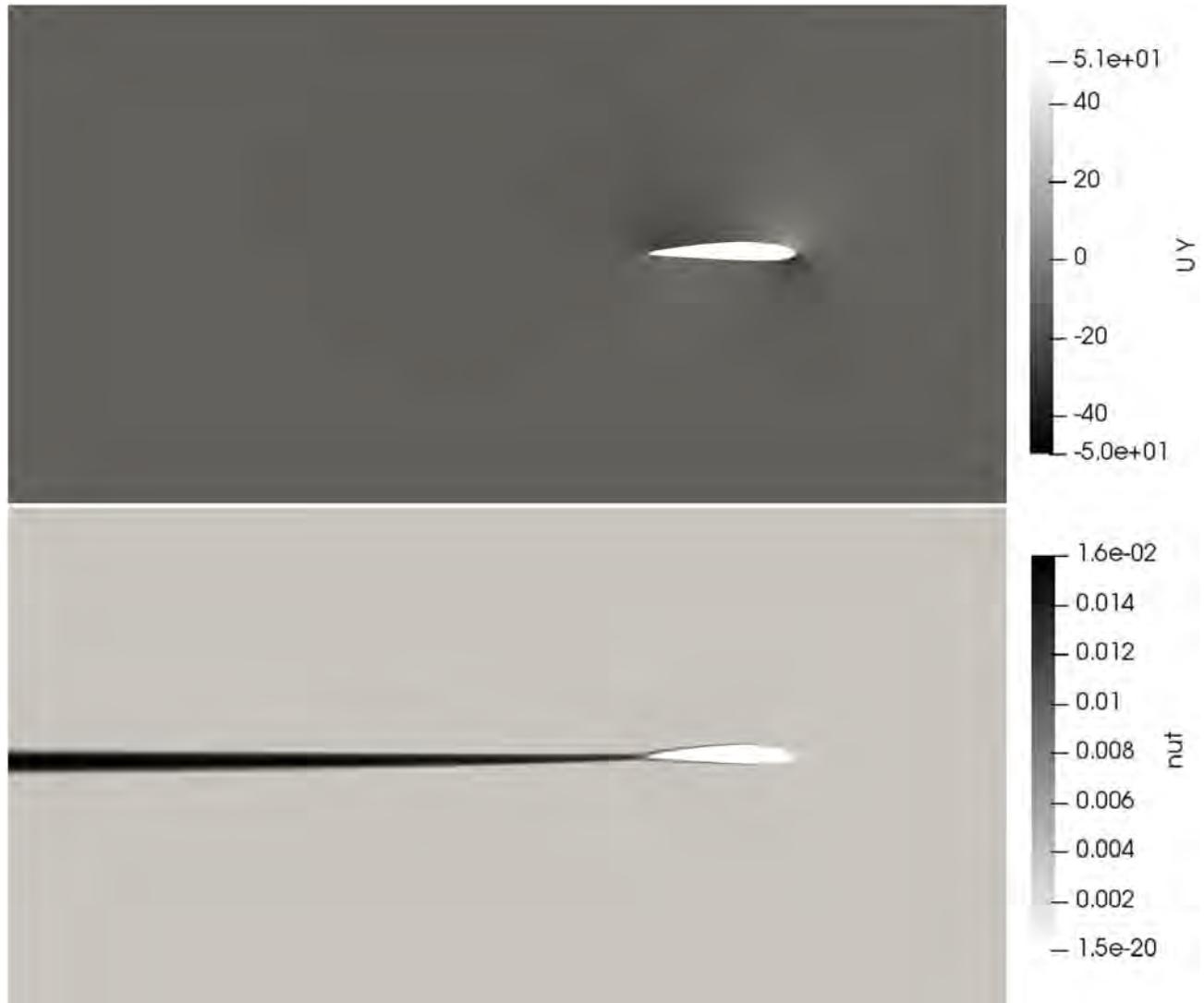


Figura 4.2: Campos de interés en todo el dominio, ala infinita (parte 2).

Finalmente, en la parte inferior de la Figura 4.2, se presenta el campo de viscosidad turbulenta. Se muestran dos regiones claramente distinguibles, una de baja viscosidad turbulenta y otra de alta viscosidad turbulenta. La zona de bajos valores, distintos de cero pero de magnitud extremadamente pequeña, es la de mayor tamaño, correspondiendo a la corriente

libre y las inmediaciones del borde de ataque. Comenzando en algún punto sobre el extradós y algún otro punto sobre el intradós, se forma la otra región, con altos valores de viscosidad turbulenta. Esta zona es muy delgada al principio y se localiza exclusivamente junto a las paredes el perfil alar. Conforme nos movemos aguas-abajo, esta zona se ensancha y forma una estela de alta viscosidad turbulenta que se ensancha progresivamente. En ninguna parte del dominio hay una transición suave de valores bajos a valores altos.

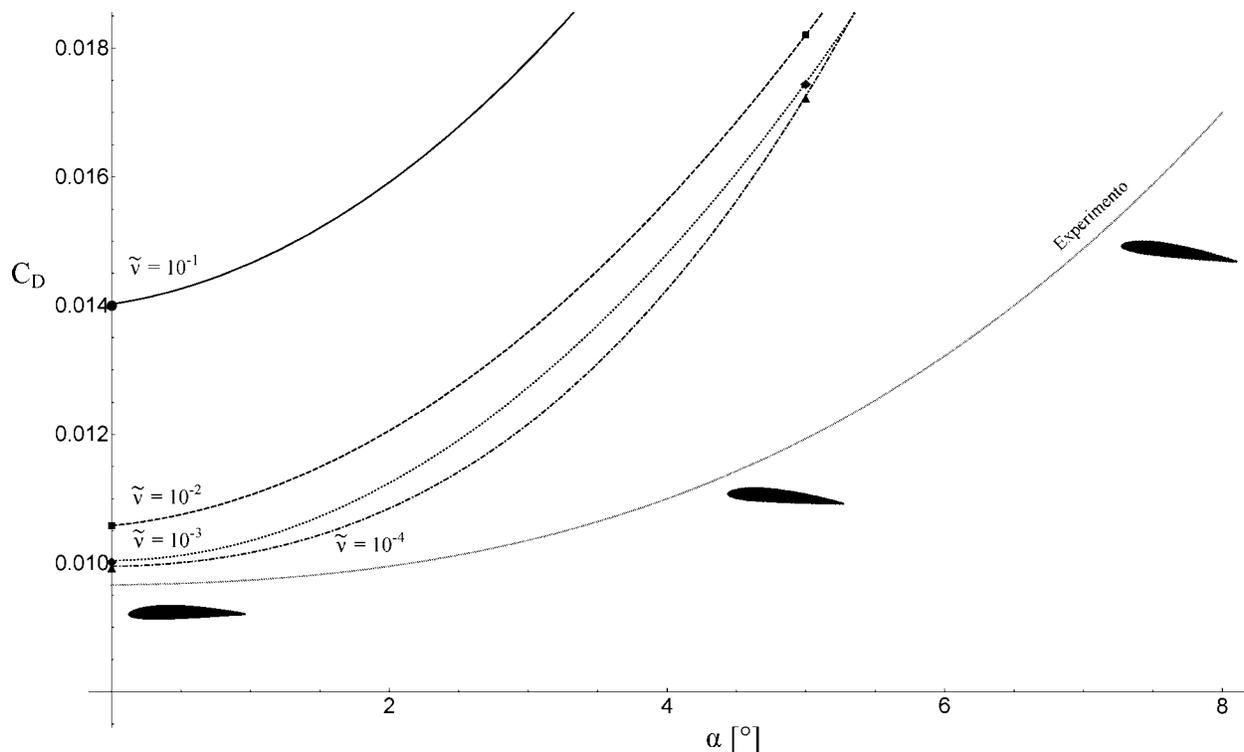


Figura 4.3: Ángulo de ataque contra coeficiente de arrastre para distintos valores de viscosidad de Spalart-Allmaras a la entrada.

Lo que observamos en la Figura 4.3 determina el grado de confiabilidad de los resultados de este estudio. Las simulaciones de ala infinita no proporcionan, en general, resultados de coeficiente de arrastre suficientemente parecidos a los datos experimentales. Se aprecia que únicamente para un ángulo de ataque de 0° y un valor de viscosidad de Spalart-Allmaras de $10^{-4} \frac{m^2}{s}$ es que el coeficiente de arrastre predicho se aproxima al que se midió en el experimento. La discrepancia entre la curva numérica y la curva experimental aumenta progresivamente para ángulos de ataque mayores. A su vez, la discrepancia es mayor para valores mayores de viscosidad de Spalart-Allmaras, comportándose simplemente como un corrimiento para todo ángulo de ataque. Este corrimiento no crece de forma lineal en relación con el aumento de

valor para la viscosidad de Spalart-Allmaras.

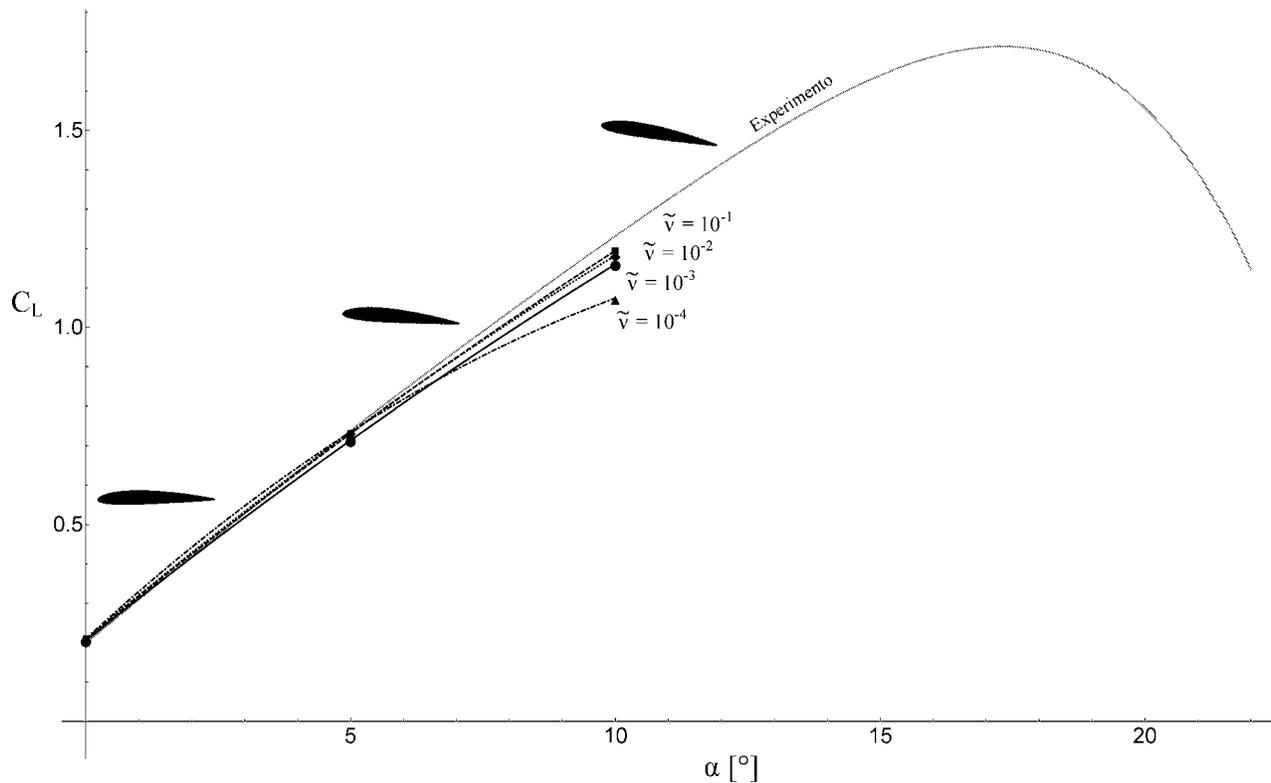


Figura 4.4: Ángulo de ataque contra coeficiente de sustentación para distintos valores de viscosidad de Spalart-Allmaras a la entrada.

La Figura 4.4 muestra que las simulaciones de ala de envergadura infinita proporcionan resultados razonablemente similares a la curva experimental para el coeficiente de sustentación. No obstante, esto sólo es cierto para un rango de valores de ángulo de ataque muy específico, de entre 0° y 10° . Para ángulos mayores, las simulaciones no presentan resultados creíbles, por lo que no se muestran en la figura. Se observa que a menores valores de la viscosidad de Spalart-Allmaras, la curva de sustentación que se obtuvo en las simulaciones se va alejando de la curva experimental. Esta desviación es progresivamente mayor a medida que el ángulo de ataque se incrementa. A pesar de ello, se puede observar que si se estudia el caso de 0° , el coeficiente de sustentación predicho parece ser independiente del valor de la viscosidad de Spalart-Allmaras.

4.2. Ala finita (sin dispositivo de punta alar)

Los resultados para alas finitas se presentarán de la siguiente manera: (1) una imagen a color con los tubos de corriente alrededor de la punta del ala, graficándose la presión sobre la superficie y la viscosidad turbulenta sobre los tubos; (2) una serie de planos de corte yz , vistos desde la parte posterior del ala y hacia adelante, donde se graficarán varias cantidades de interés en escalas de grises. Mientras que (1) tendrán simplemente un propósito ilustrativo del fenómeno, teniéndose la misma cantidad total de tubos en cada imagen; (2) servirán para hacer un análisis más detallado. Asimismo, las escalas de colores de todas las imágenes isométricas serán equivalentes, mientras que cada una de las imágenes en escalas de grises tendrá su leyenda correspondiente.

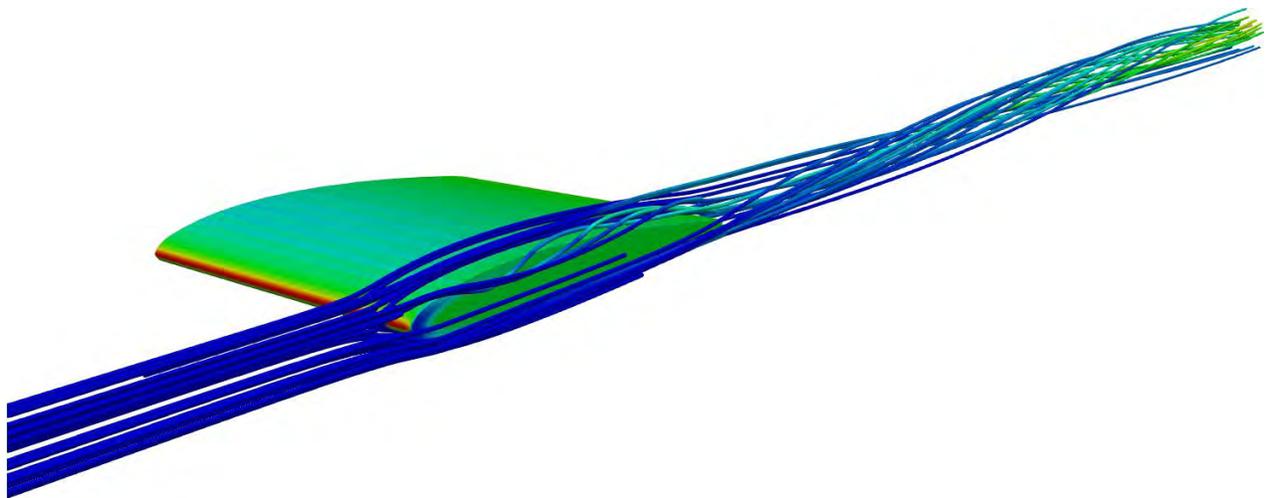


Figura 4.5: Tubos de corriente alrededor de ala finita sin dispositivo.

En el caso del ala sin dispositivo, la Figura 4.5 muestra cómo el fluido sobre el extradós, muy cerca del borde de ataque y de la punta del ala, fluye inicialmente en una dirección positiva z . Sin embargo, tan pronto como se termina el ala, este flujo se tuerce y comienza a formar un vórtice, tan pronto como se topa con el ala. Del lado del intradós, se observa que efectivamente el fluido viaja hacia el extradós, torciéndose al rodear la geometría. Aguas-abajo, la forma del vórtice se consolida, incrementando la viscosidad turbulenta en el mismo, y la estructura se mantiene más o menos contenida en una región espacial. La rotación del vórtice es negativa, respecto al eje x . En cuanto a los detalles finos, plano por plano, la Figura 4.6 nos muestra el campo de presión alrededor del ala.

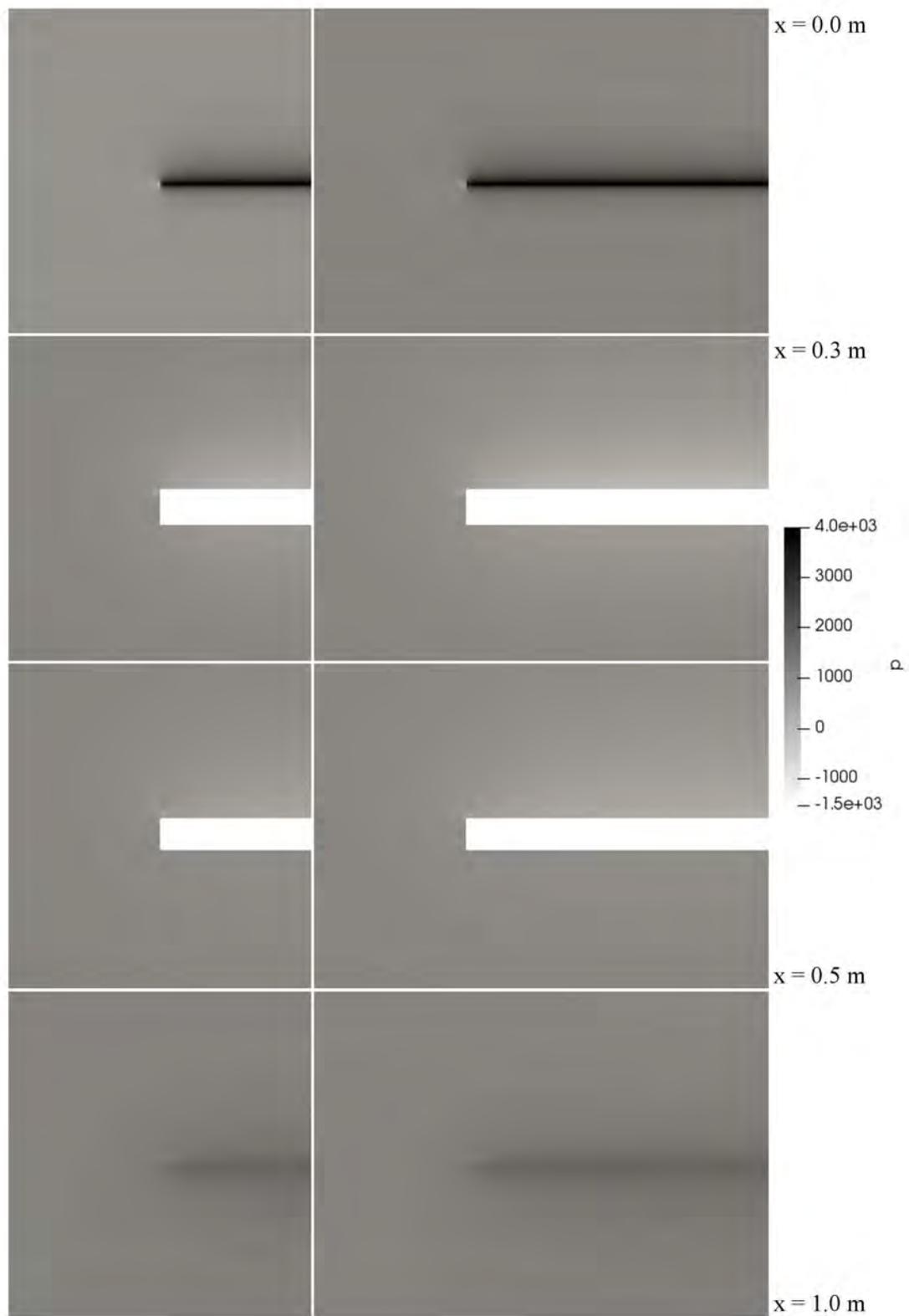


Figura 4.6: Presión (ρ) en distintos planos yz , ala sin dispositivo.

La presión calculada es cero en las zonas lejanas al ala y solamente en su vecindad es que se aprecian diferencias en el campo. Cuando $x = 0.0$ m , se observa una franja oscura de presión máxima a lo largo del borde de ataque. En la dirección y positiva, a partir de esta franja, se aprecia una disminución gradual de la presión hasta llegar al valor de la corriente libre. En la dirección y negativa, a partir de la misma franja, se observa otra disminución gradual en el valor de la presión, pero espacialmente más drástica que la anterior. Adyacente a la franja de presión máxima, donde termina el ala, hay una pequeña región de muy baja presión. Cuando $x = 0.3$ m , se comienza a observar que hay una zona de baja presión sobre lo que sería el extradós. Por debajo del intradós, no se puede apreciar con claridad si hay diferencia de presión respecto a las zonas donde predomina la corriente libre.

Lo que queda claro es que hay una región aproximadamente circular de baja presión justo donde termina el ala, del lado del extradós. En el plano $x = 0.5$ m , la zona de baja presión sobre el extradós permanece, aunque con magnitudes mayores que en el plano anterior. La pequeñas zonas circulares de baja presión se han desplazado hacia el extradós y hacia el intradós, respectivamente. Finalmente, en el plano $x = 1.0$ m , que correspondería al borde de salida, se observa otra franja de alta presión. La magnitud de la presión aquí es mayor que la de la corriente libre y mayor que la de la región de baja presión sobre el extradós en el plano $x = 0.3$ m , pero menor que la de la franja del borde de ataque. En este caso, sólo se puede apreciar una de las dos zonas circulares de baja presión sobre el extradós. Ésta es de mayor tamaño y está más difundida que en planos anteriores. No se notan diferencias relevantes entre mismos planos que corresponden a envergaduras distintas.

En la Figura 4.7, para $x = 0.0$ m se observa claramente que en la región sobre el extradós se tiene un flujo vertical ascendente. En cambio, por debajo del intradós, el flujo vertical es completamente descendente. Lejos del ala, el flujo vertical es cero. En el plano $x = 0.3$ m , que corresponde a la ubicación del mayor espesor del perfil alar, se observa que la magnitud de la velocidad vertical, tanto del lado del extradós como del intradós, se ha acercado a cero. También notamos con mayor claridad la ubicación y naturaleza de las regiones circulares de baja presión cerca de la punta del ala. Al tener una región de v_y ascendente adyacente a una de v_y descendente, se trata de una estructura vorticosa². En este caso, la estructura del lado del extradós tiene rotación positiva respecto al eje x , mientras que la estructura del lado del intradós gira negativamente respecto al x . Cuando $x = 0.5$ m , se observa que v_y sobre el extradós es fuertemente descendente y que v_y por debajo del intradós es ligeramente ascendente. Las estructuras en la punta del ala se han desplazado, tal y como se vio en la Figura 4.6.

²Hacemos referencia al término *eddy*. No está claro si se le puede llamar “vórtice” propiamente[28].

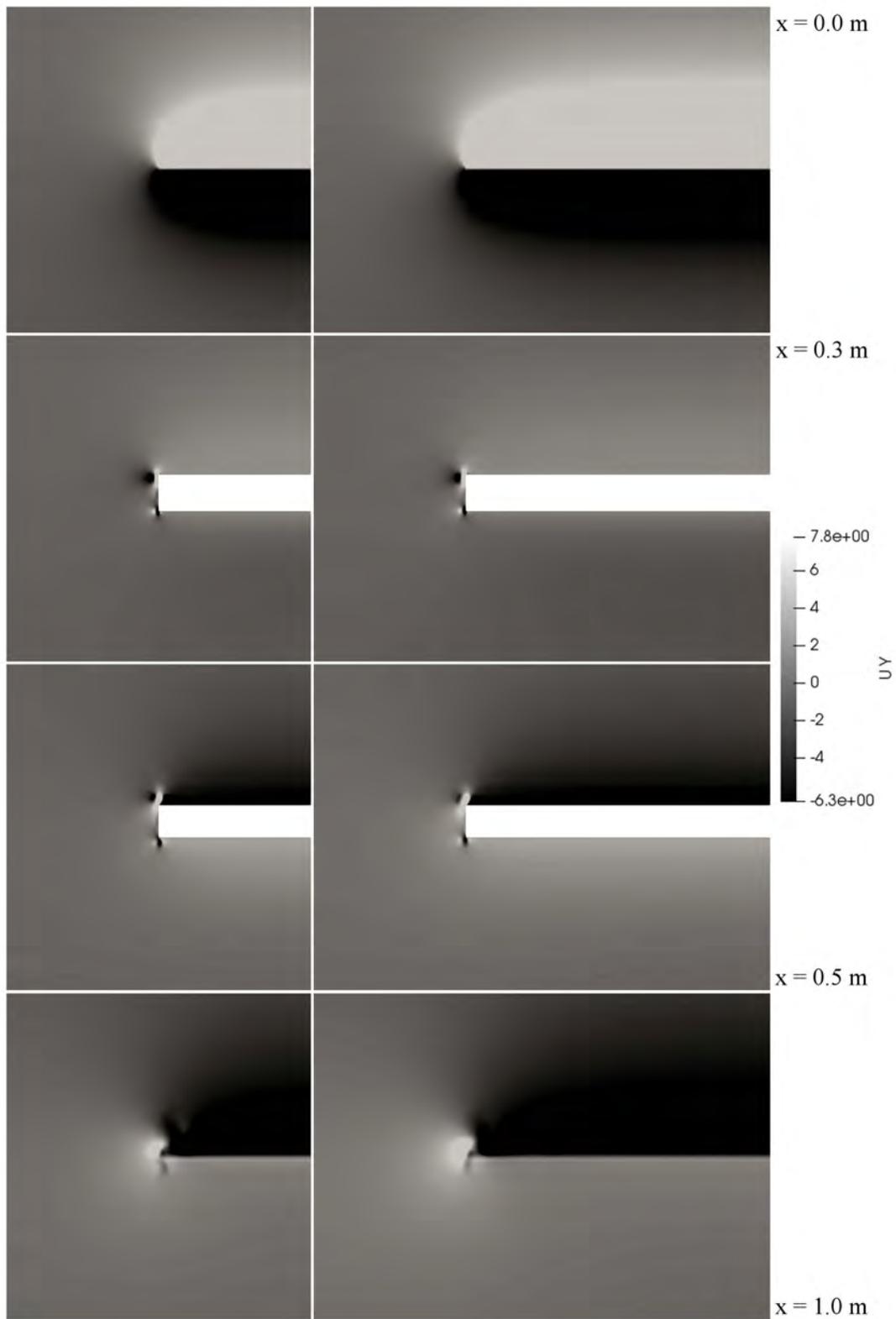


Figura 4.7: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).

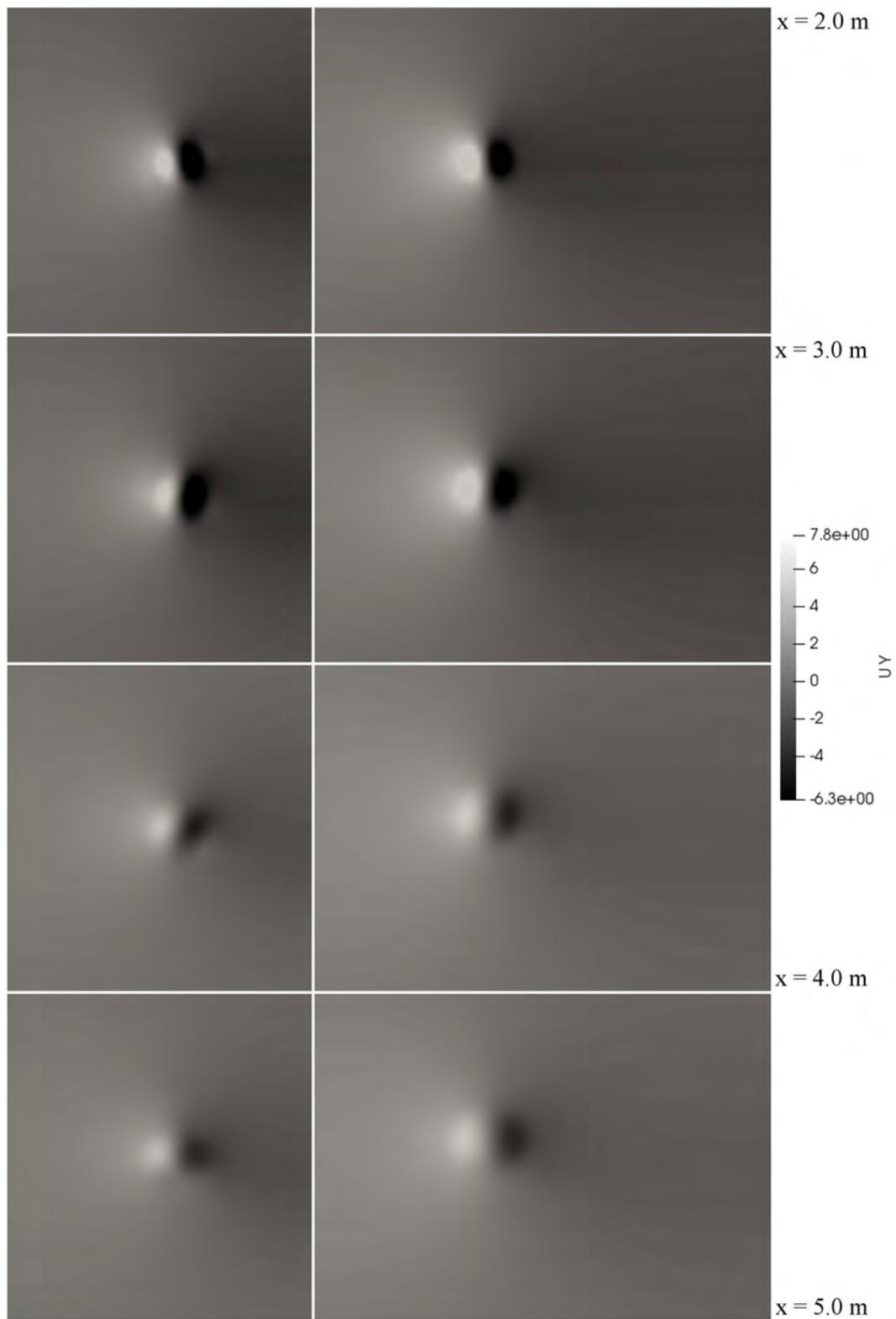


Figura 4.8: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).

En el plano $x = 1.0 \text{ m}$, ya no se observan dos estructuras distintas, sino una sola. Éste tiene una rotación negativa respecto al eje x y es de mayor tamaño que los mencionados anteriormente. Asimismo, la región de flujo descendente sobre el extradós está mucho más marcada, a tal punto que pareciera haber una discontinuidad entre ésta y la zona por debajo del intradós. Lo que se observa en la Figura 4.8 es la evolución de esta estructura, que definitivamente podemos llamar *vórtice*³. Lo que ocurre entre $x = 1.0 \text{ m}$ y $x = 3.0 \text{ m}$ es una rotación de los contornos de v_y , que correspondería al enrollamiento⁴ del vórtice. No hay cambios apreciables entre los planos $x = 3.0 \text{ m}$ y $x = 5.0 \text{ m}$ más allá de una difuminación de los contornos de v_y , que correspondería a la difusión del vórtice.

En la Figura 4.9, cuando $x = 0.0 \text{ m}$, se observa una región de flujo lateral hacia la punta del ala. En el resto del dominio esta velocidad lateral es cero. Cuando $x = 0.3 \text{ m}$, volvemos a observar los dos vórtices en la punta del ala y no se aprecia una región de flujo lateral en otra parte del dominio. En el plano $x = 0.5 \text{ m}$, se siguen observando los vórtices, habiéndose desplazado ligeramente. Sin embargo, la región de influencia que éstos tienen ha crecido, debido a que hay una zona de flujo lateral hacia la raíz del ala sobre el extradós. Si observamos el plano $x = 1.0 \text{ m}$, se ha consolidado esta región donde v_z es negativa. Al mismo tiempo, debajo del intradós y cerca de la punta del ala, se ha marcado otra zona donde v_z es positiva. Ésto corresponde con la supervivencia de solo uno de los vórtices.

La Figura 4.10, de manera similar a la Figura 4.7, no presenta mayores puntos a notar además de la difusión del vórtice. La última información que obtenemos de la simulación para el ala sin dispositivo se condensa en las Figuras 4.11 y 4.12, respecto a la región donde predomina la turbulencia. En los planos que van desde $x = 0.0 \text{ m}$ hasta $x = 1.0 \text{ m}$, es evidente que la viscosidad turbulenta no es apreciable hasta que se forma una delgada capa alrededor del ala y, notablemente, dos zonas de altos valores para esta cantidad en los vórtices de la punta del ala. El resto del dominio tiene una magnitud uniforme baja, aunque distinta de cero.

Cuando $x = 1.0 \text{ m}$, se puede ver con mayor claridad que los dos vórtices coexisten como estructuras de alta viscosidad turbulenta separadas. A partir del plano $x = 2.0 \text{ m}$, sólo se observa una única región turbulenta aproximadamente circular que se enrolla y consolida su forma. La zona de alta viscosidad turbulenta que, en un principio, tiene la forma del perfil se ensancha entre los planos $x = 1.0 \text{ m}$ y $x = 5.0 \text{ m}$. Esta zona corresponde a la estela turbulenta y, a diferencia de en otras imágenes, no se aprecia una difuminación de las regiones conforme nos movemos aguas-abajo.

³Debido a la terminología que comparte esta estructura de punta de ala en aeronáutica y en aerodinámica.

⁴Del término en inglés *roll-up*.

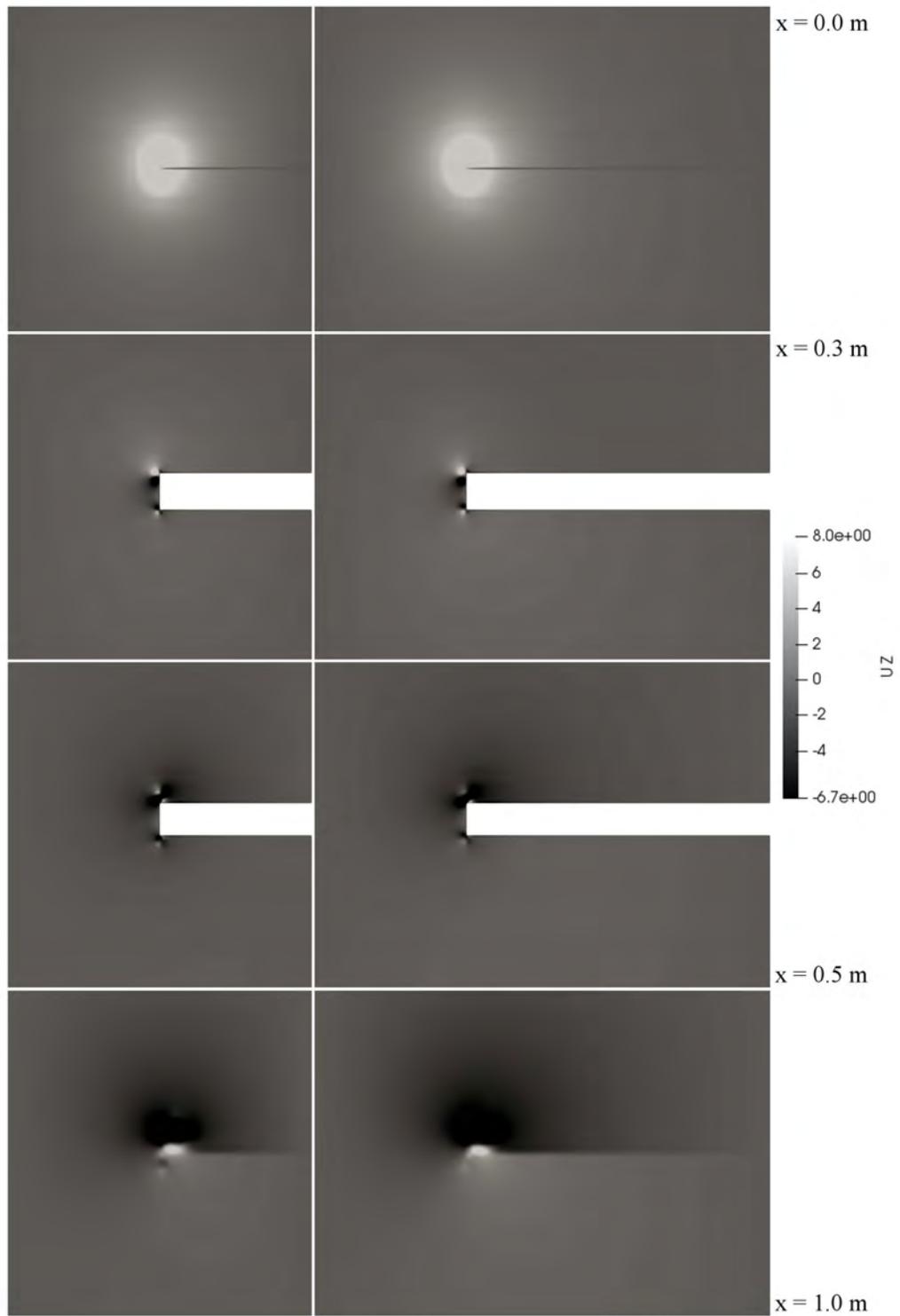


Figura 4.9: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).

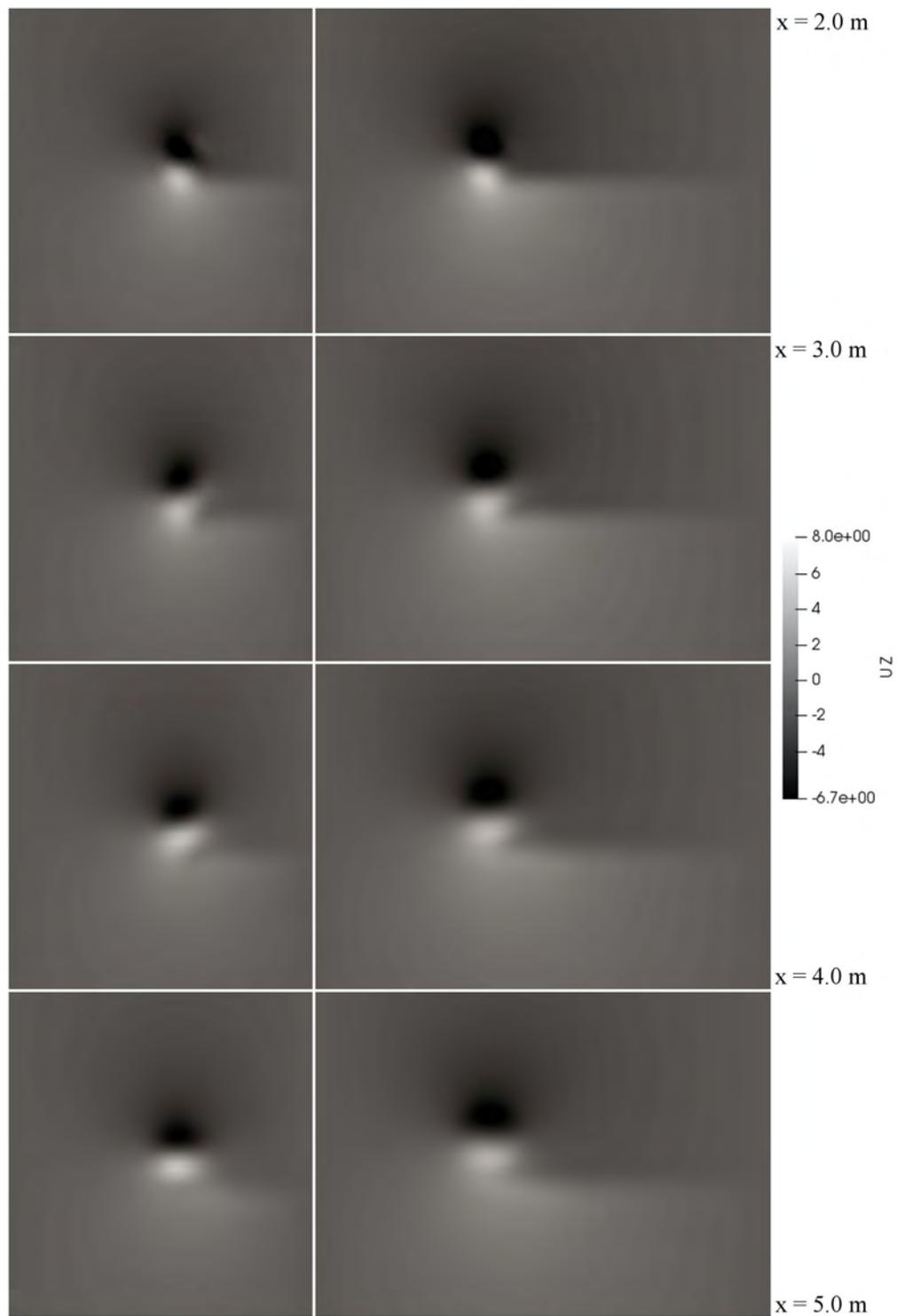


Figura 4.10: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).

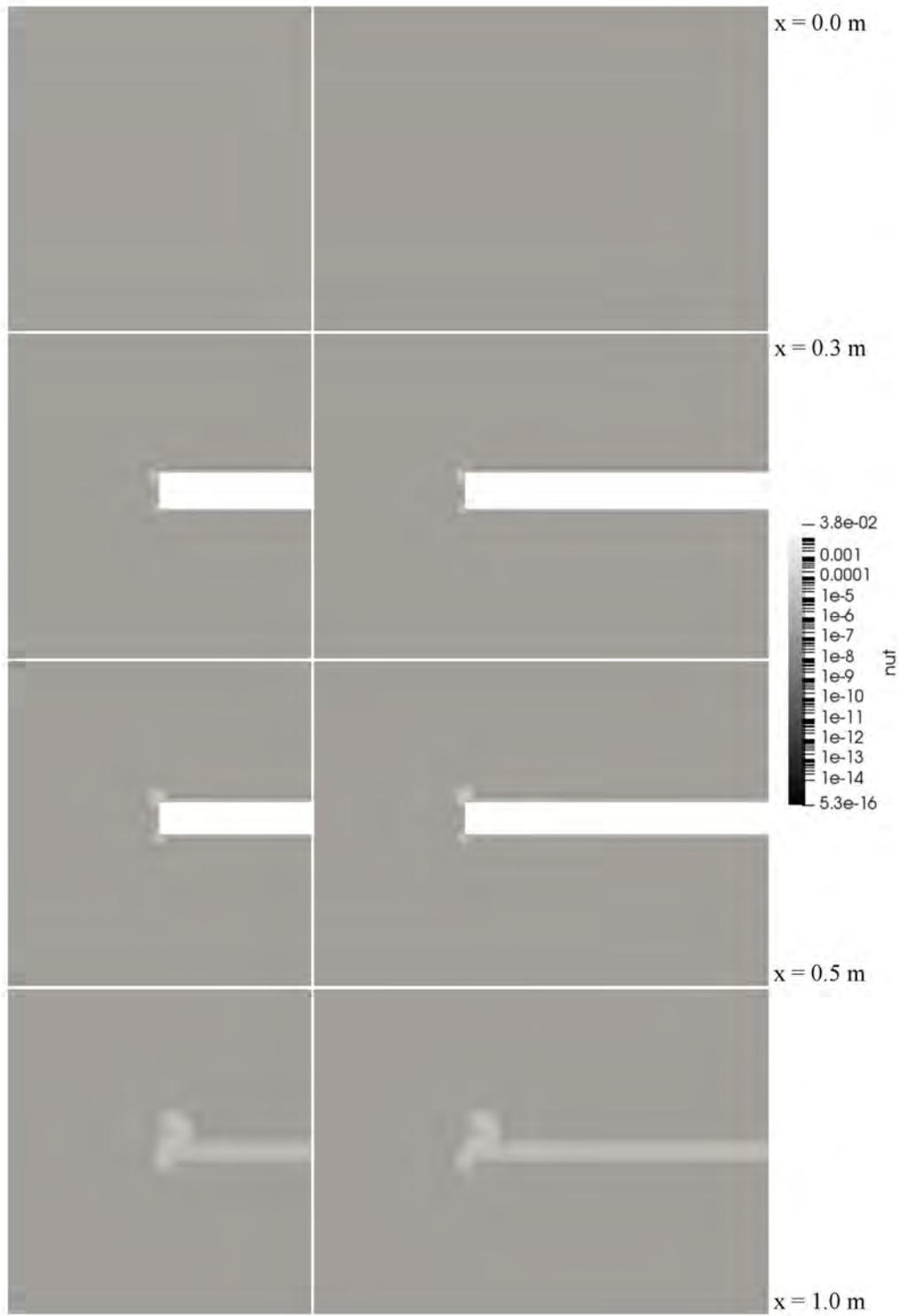


Figura 4.11: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 1).

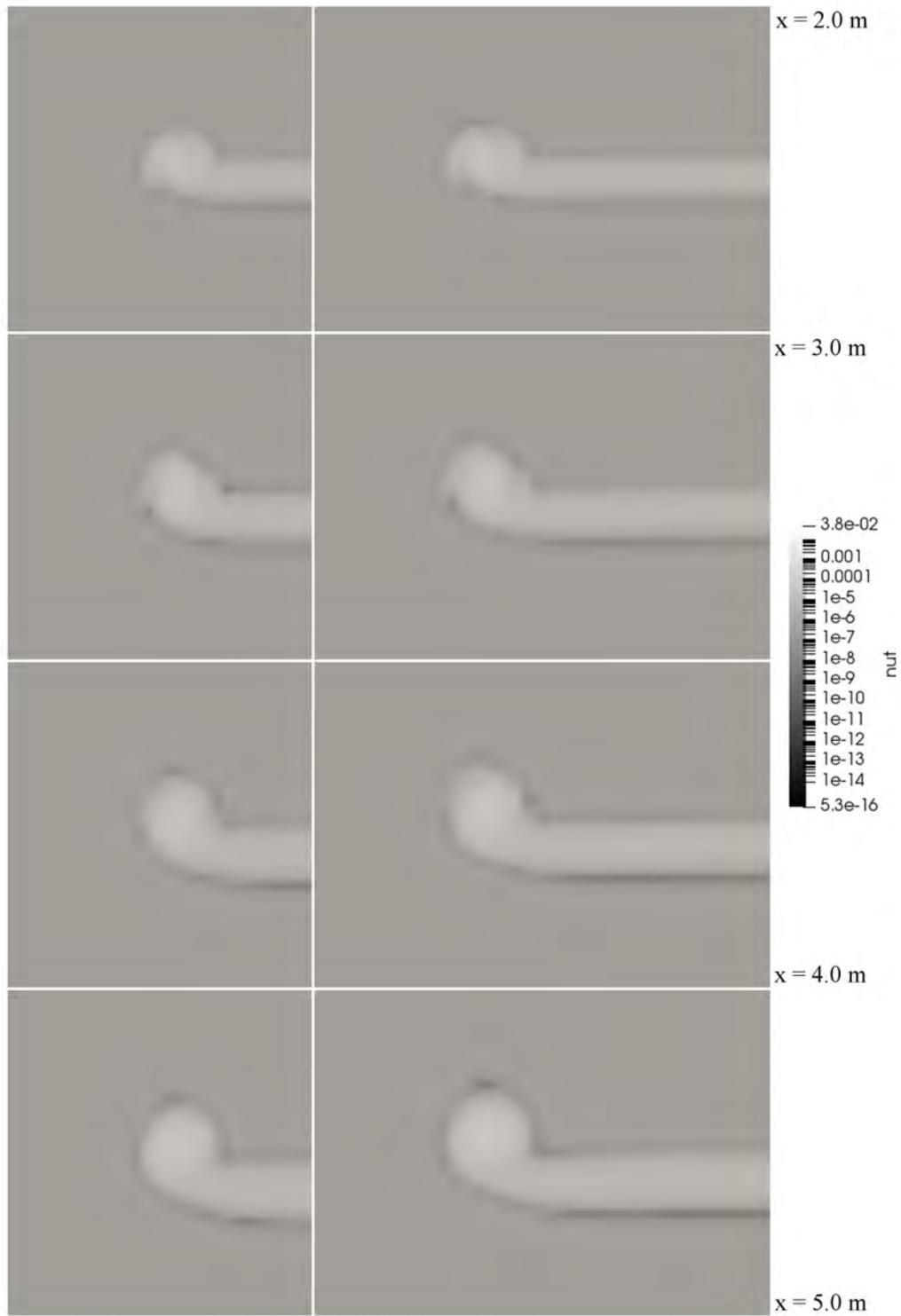


Figura 4.12: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala sin dispositivo (parte 2).

4.3. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia arriba, sin vértice)

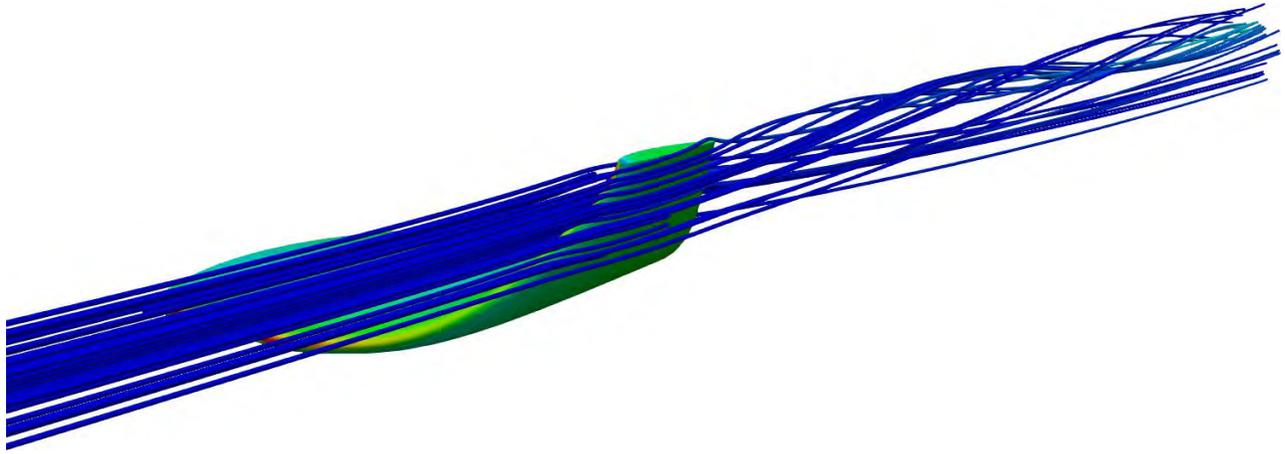


Figura 4.13: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia arriba, sin vértice.

Contrastando la Figura 4.13 con el ala sin dispositivo, se observa que el fluido sigue viajando del intradós al extradós, torciéndose al rodear la geometría en la punta del ala. Otra similitud radica en que el vórtice también tiene una dirección de rotación negativa, respecto al eje x . Sin embargo, es notable que la forma del vórtice no se consolida tan bien aguas-abajo. El vórtice parece estar contenido en una región espacial de tamaño similar que en el caso sin dispositivo. Sin embargo, la viscosidad turbulenta en el núcleo del vórtice es menor para esta ala que para la que carecía de dispositivo. En cuanto al campo de presión, dirigimos nuestra atención a la Figura 4.14. Por motivos de simpleza, la descripción de estos resultados se realizará en función de qué tanto difieren del caso sin dispositivo.

Cuando $x = 0.0$ m, se vuelve a manifestar la franja de presión máxima cerca del borde de ataque, mientras que el resto del dominio tiene presión uniforme cero. A diferencia del caso sin dispositivo, no hay una pequeña región de baja presión cerca de la punta del ala en este plano. Cuando $x = 0.3$ m, observamos la misma región de baja presión sobre el extradós. La característica distintiva es que hay una zona de alta presión cerca del extremo del ala. Este aspecto sigue presente en el plano $x = 0.5$ m, donde ahora se ubica en la parte de máxima curvatura del corte de la geometría. En ninguno de estos planos se observan zonas de baja presión muy localizadas, como los vórtices del caso de ala sin dispositivo.

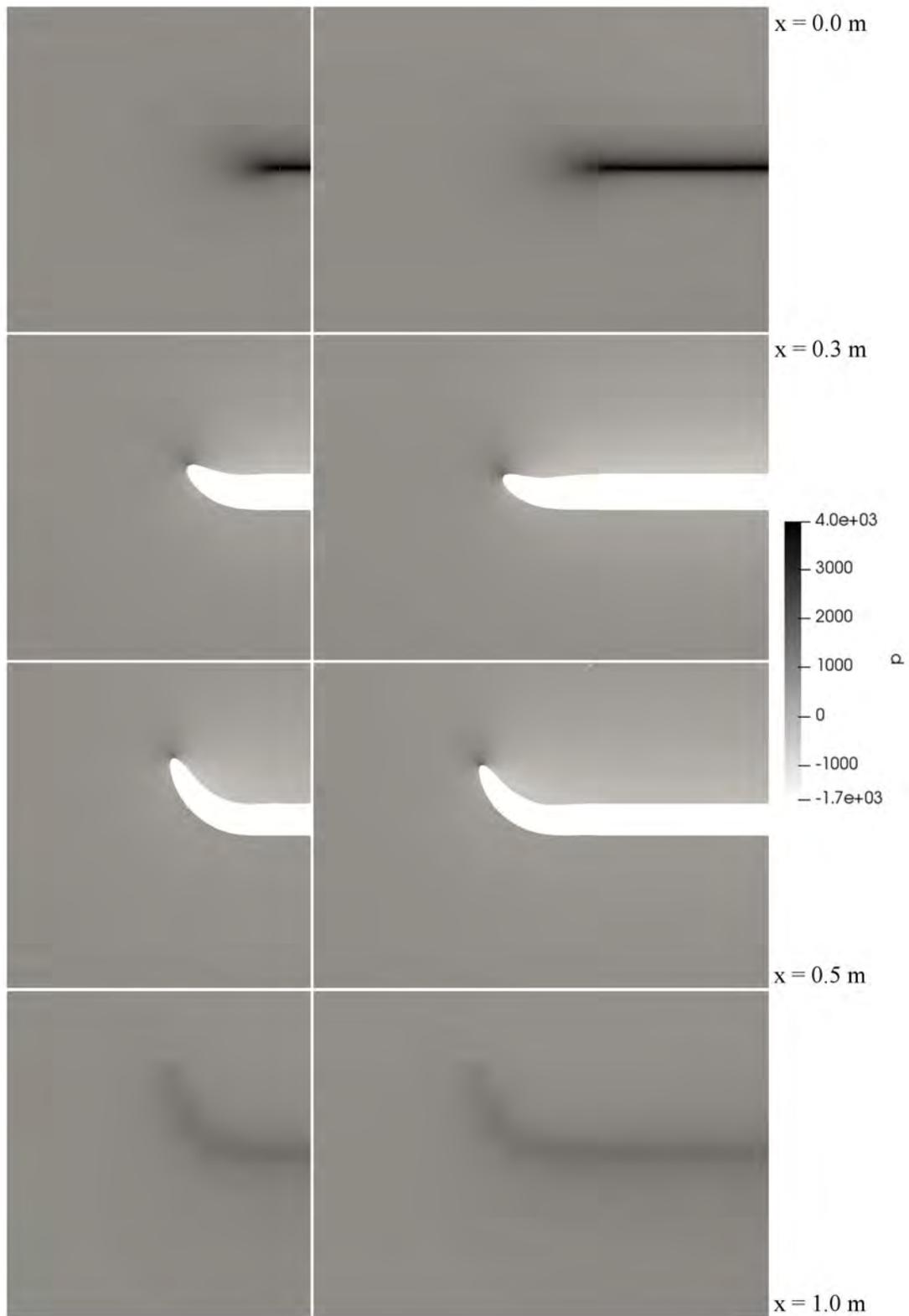


Figura 4.14: Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice.

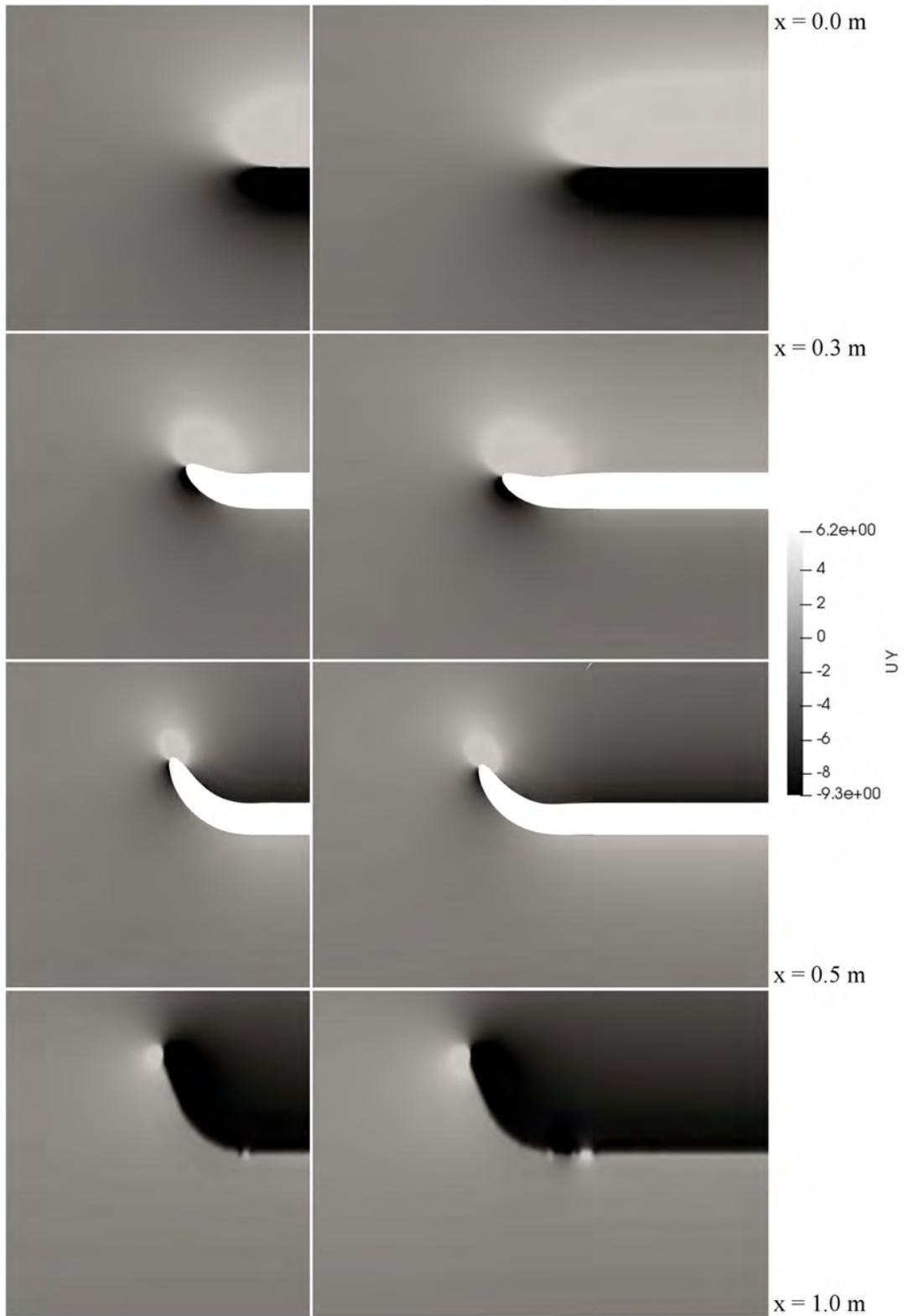


Figura 4.15: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).

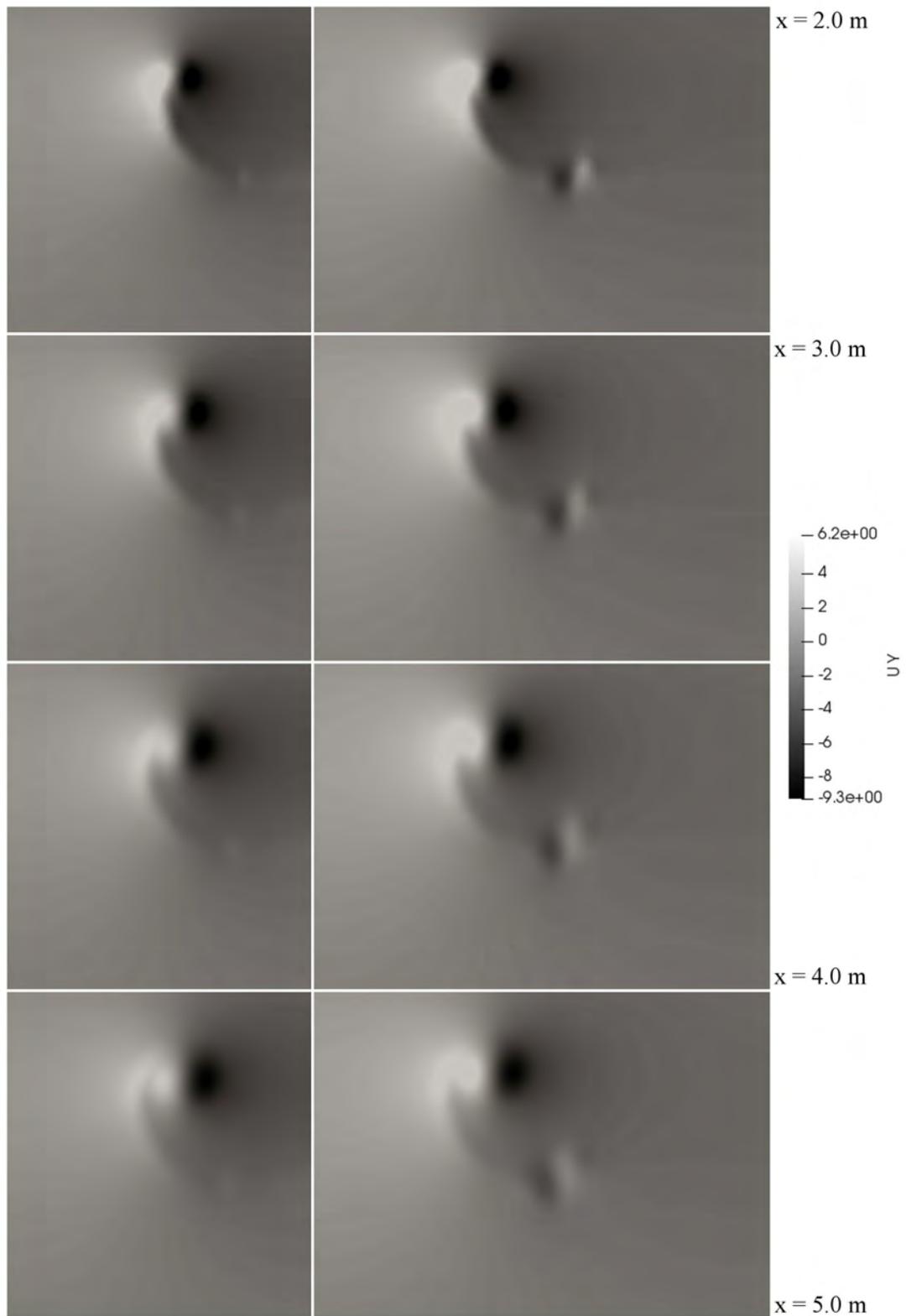


Figura 4.16: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).

En el plano $x = 1.0$ m , observamos una pequeña de estas zonas, finalmente, en la punta del dispositivo. Siguiendo el contorno del ala, se encuentra una región de alta presión, aunque menor que la máxima, tal y como en el caso sin dispositivo. En la Figura 4.15, en el plano $x = 0.0$ m , se muestran contornos de v_y muy similares a los del caso sin dispositivo, a excepción de que se pierde cierta “simetría” que existía entre la región de flujo ascendente y la región de flujo descendente⁵. En el plano $x = 0.3$ m comienzan a verse diferencias más relevantes respecto al ala sin dispositivo. En primer lugar, hay dos regiones muy marcadas en cuanto a la dirección del flujo lateral. Sobre el extradós, v_y es tal que el flujo tiene una tendencia a viajar hacia la punta del ala. Por debajo del intradós, la tendencia es la opuesta.

Sin embargo, ambas regiones están ubicadas exclusivamente cerca de la parte de mayor curvatura del corte de la geometría. Esta característica persiste en el plano $x = 0.5$ m , acompañada de la región de flujo descendente sobre el resto del extradós. Cuando nos movemos al plano $x = 1.0$ m , la zona de flujo descendente sobre gran parte del extradós está más marcada que antes. Adicionalmente, la pequeña región de flujo descendente por debajo del intradós ha desaparecido, mientras que la de flujo ascendente por encima del extradós parece haberse desplazado. Un detalle peculiar es una diminuta zona de flujo ascendente sobre el borde de salida, no tan cerca de la punta del ala. Éste sólo aparece en el ala de envergadura larga.

Parece haber una ligera diferencia en tamaño de las regiones mencionadas con el cambio de envergadura, siendo mayores para cuando el ala se extiende más. En la Figura 4.16, ya se distingue claramente el vórtice. Se ve que su enrollamiento sigue aproximadamente el contorno del ala con dispositivo y que se difunde en planos cada vez más aguas-abajo. Una diferencia importante es que parece haber un segundo vórtice, únicamente en el ala de envergadura larga, con rotación contraria a la del vórtice primario. Este vórtice parece extenderse desde la zona donde se había observado el detalle peculiar. Por otro lado, en la Figura 4.17, cuando $x = 0.0$ m , vuelve a observarse una región de flujo lateral hacia la punta del ala, mientras que el resto del dominio tiene un valor uniforme cero para v_z .

En el plano $x = 0.3$ m , a diferencia de lo que se tenía en el ala sin dispositivo, se forman dos regiones pequeñas cerca del extremo del ala. Sobre el extradós aparece una zona de flujo lateral negativo, mientras que junto a la punta se forma otra región, donde el flujo lateral es positivo. La primera de estas zonas crece para cuando llegamos al plano $x = 0.5$ m , mientras que la segunda disminuye en tamaño. Eventualmente, en el plano $x = 1.0$ m , se observa que estas regiones se juntan en la punta del dispositivo, conformando el vórtice. Al igual que en la Figura 4.15, se observa la anomalía en el campo cuando la envergadura es larga. En la Figura 4.18 se ve el desarrollo del vórtice primario y, para b extendida, del vórtice secundario.

⁵Siendo más grande la región sobre el extradós, de flujo ascendente

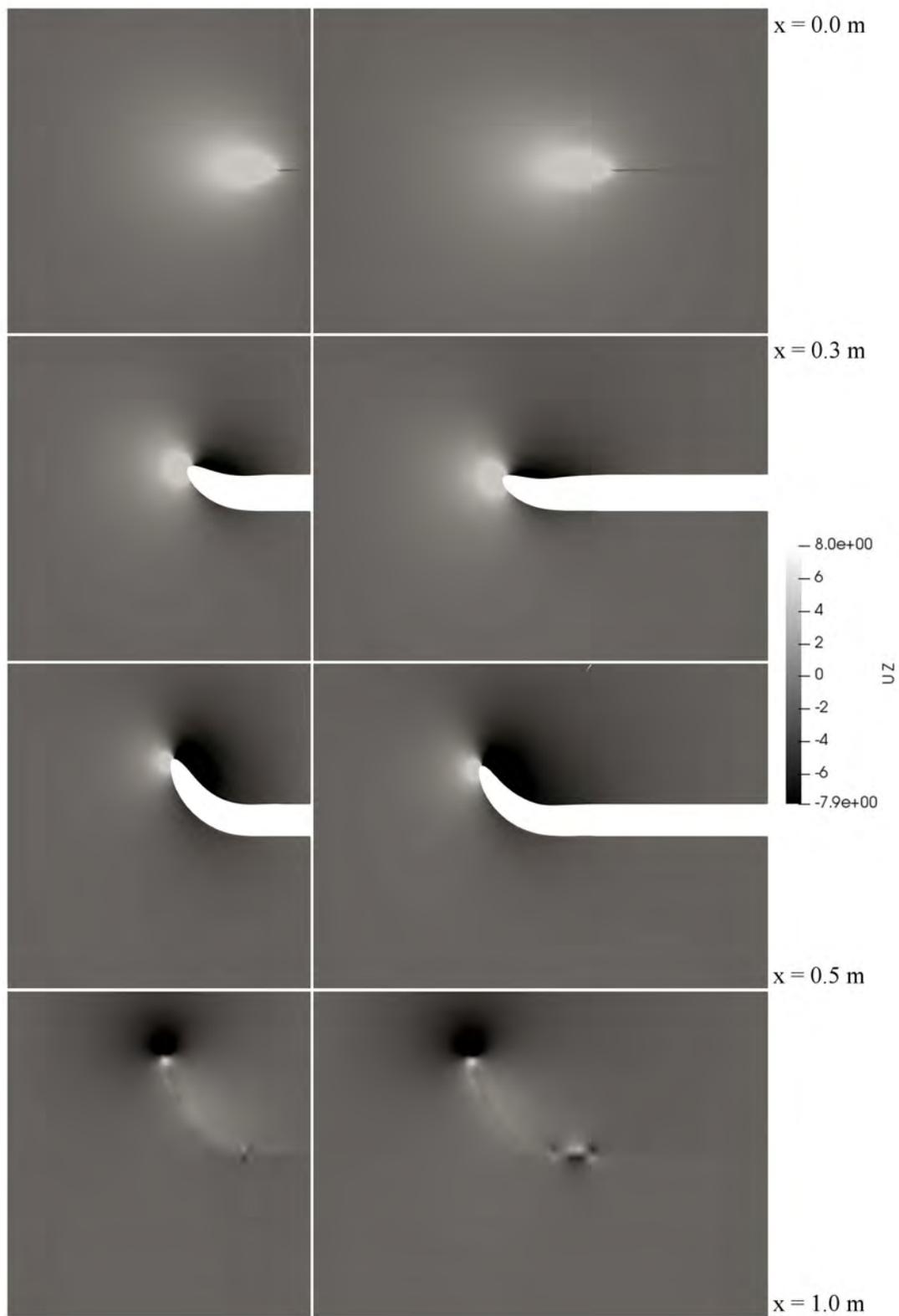


Figura 4.17: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).

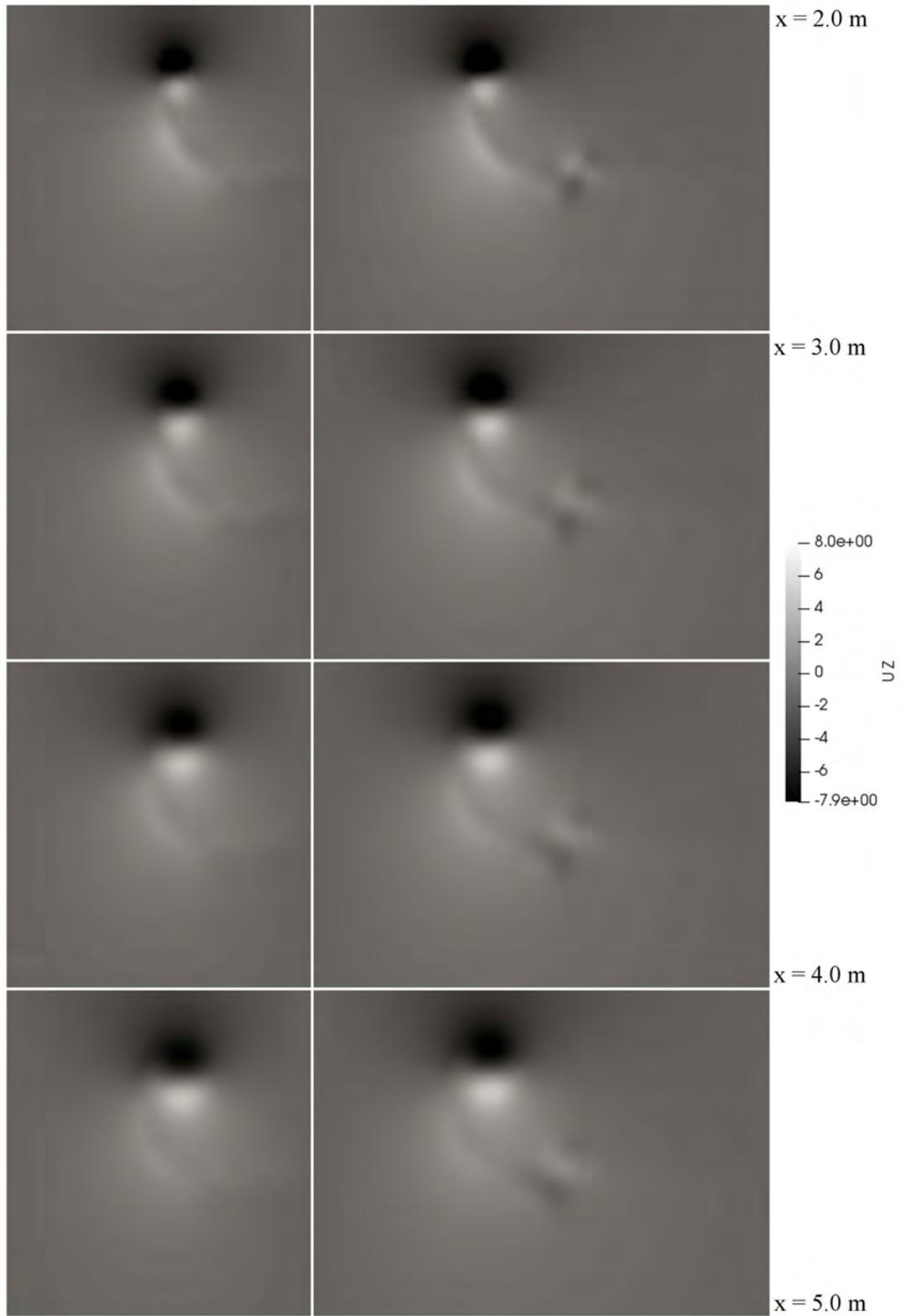


Figura 4.18: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).

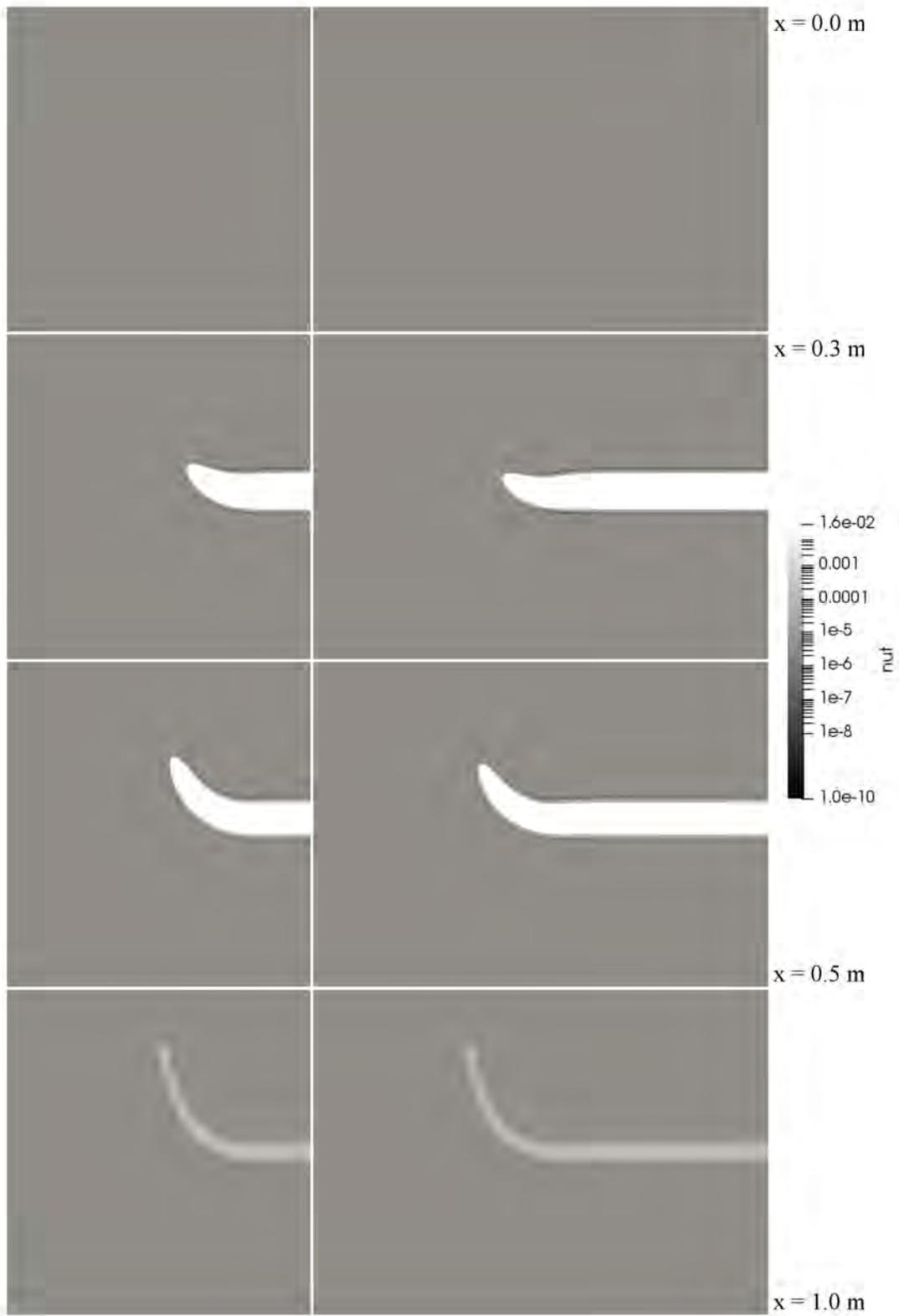


Figura 4.19: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 1).

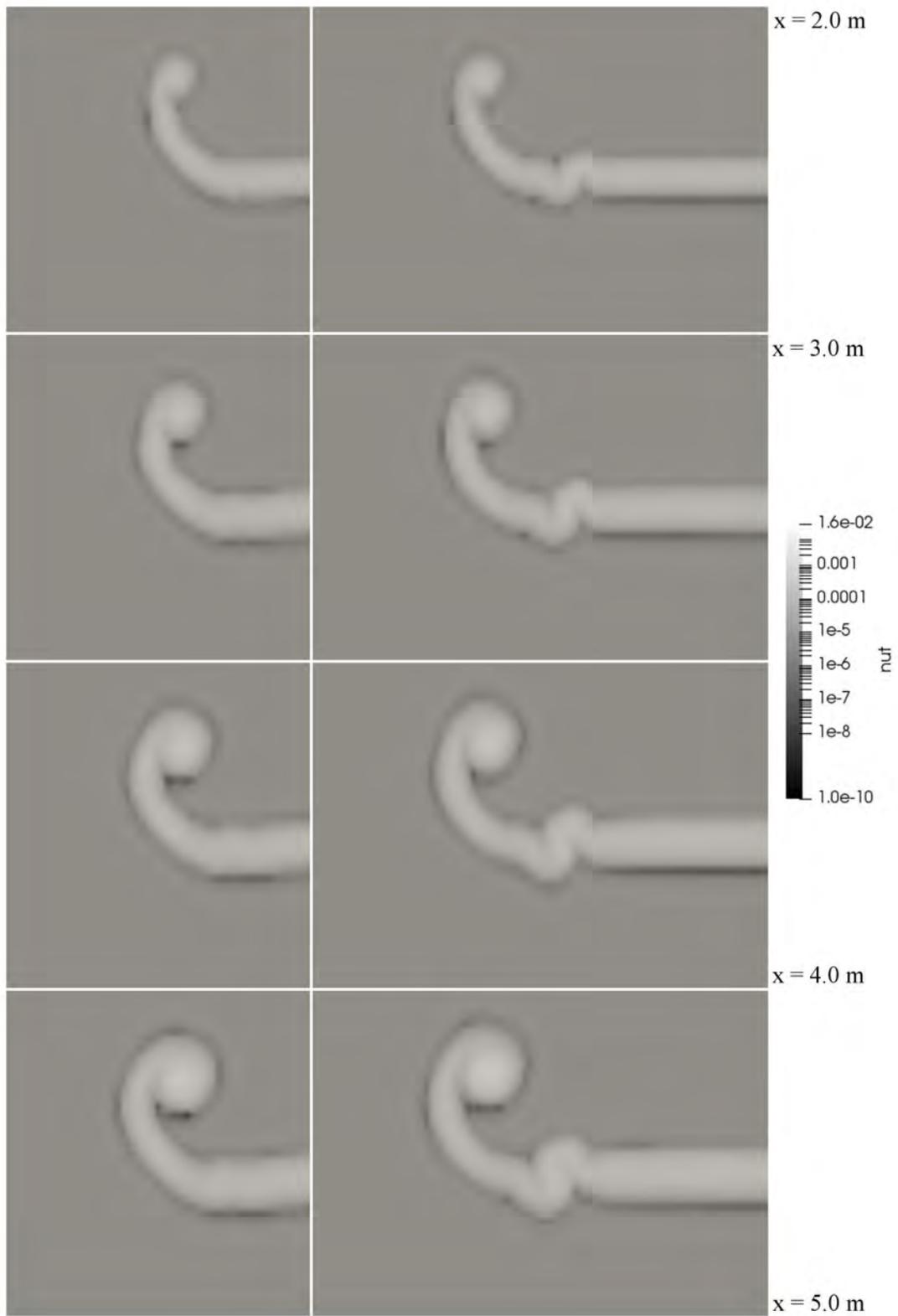


Figura 4.20: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice (parte 2).

En la Figura 4.19, a pesar de tener una geometría completamente distinta, no se observan cambios significativos respecto a lo que se presenta en el caso sin dispositivo. La viscosidad turbulenta tiene valores bajos, distintos de cero, lejos del ala y únicamente se manifiesta en una capa muy delgada junto a la pared. En el plano $x = 1.0 \text{ m}$ es donde se aprecia la región de alta viscosidad turbulenta, que tiene la forma del ala misma. En la Figura 4.20, se ve que la región turbulenta se ensancha conforme avanzamos aguas-abajo. Cerca de la punta del dispositivo, se muestra cómo el vórtice se enrolla y consolida su forma. En la ubicación de la anomalía que se vio en las Figuras 4.15 y 4.17, se observa que la región turbulenta adquiere una forma atípica.

4.4. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia arriba, con vértice)

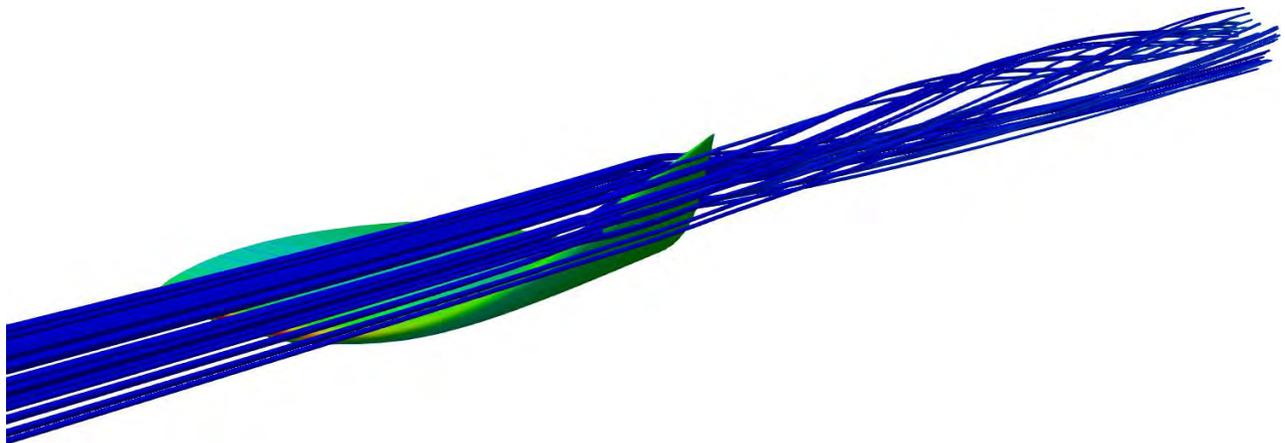


Figura 4.21: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia arriba, con vértice.

Se puede notar en la Figura 4.21 que el vórtice sigue formándose, aún si la punta del ala termina en vértice. Sigue existiendo una torción de los tubos de corriente cuando el fluido del intradós viaja al extradós. Su forma parece no estar tan bien consolidada como en la Figura 4.5, pero sí luce similar a la del vórtice en la Figura 4.21. Una diferencia destacable es que la viscosidad turbulenta en el núcleo del vórtice es aún menor que en el caso de dispositivo hacia arriba sin vértice, al punto de que su magnitud pareciera no tener diferencia con la de la corriente libre. De manera análoga a los dos casos anteriores, la dirección de rotación del vórtice es negativa, respecto al eje x .

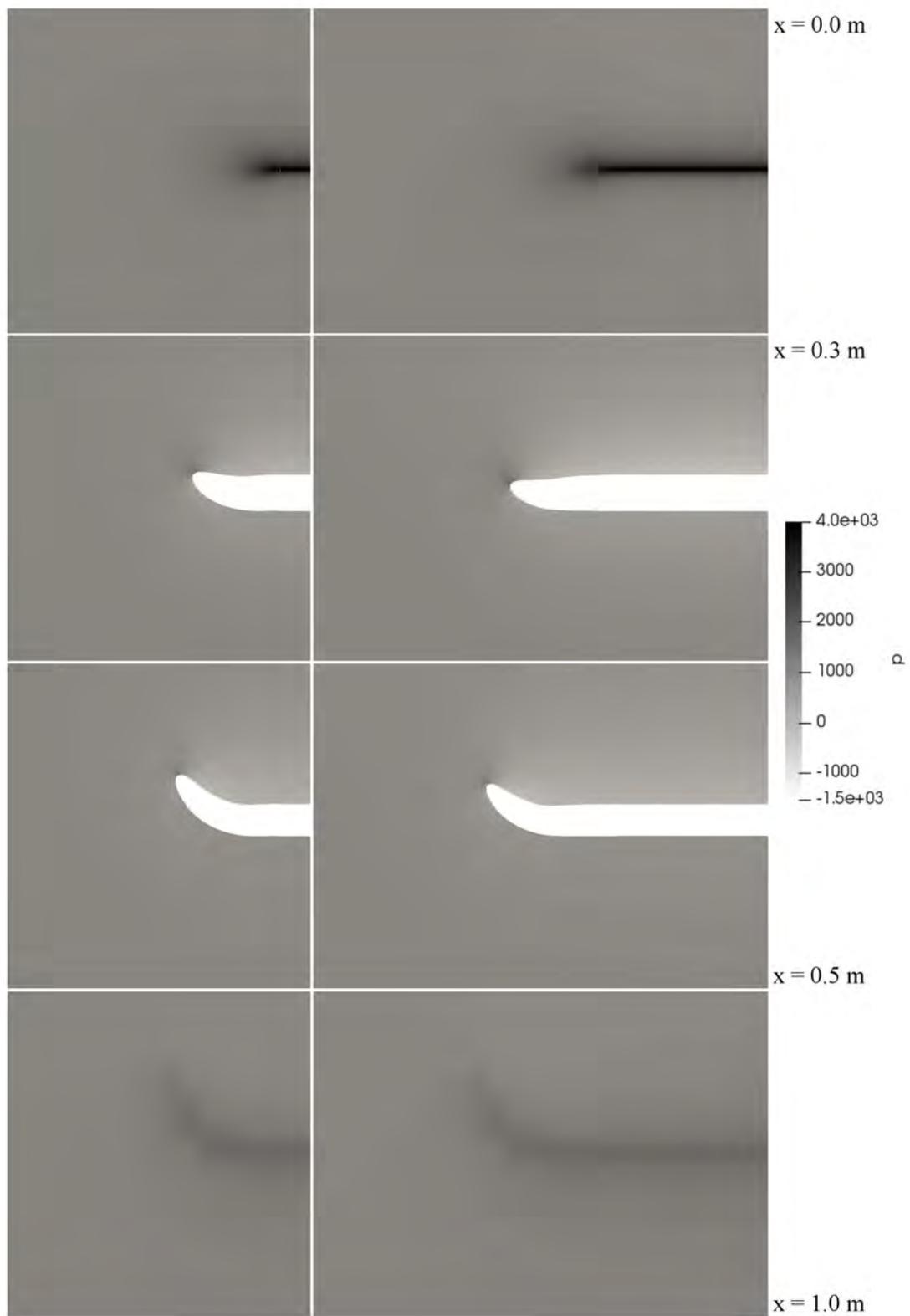


Figura 4.22: Presión (p) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice.

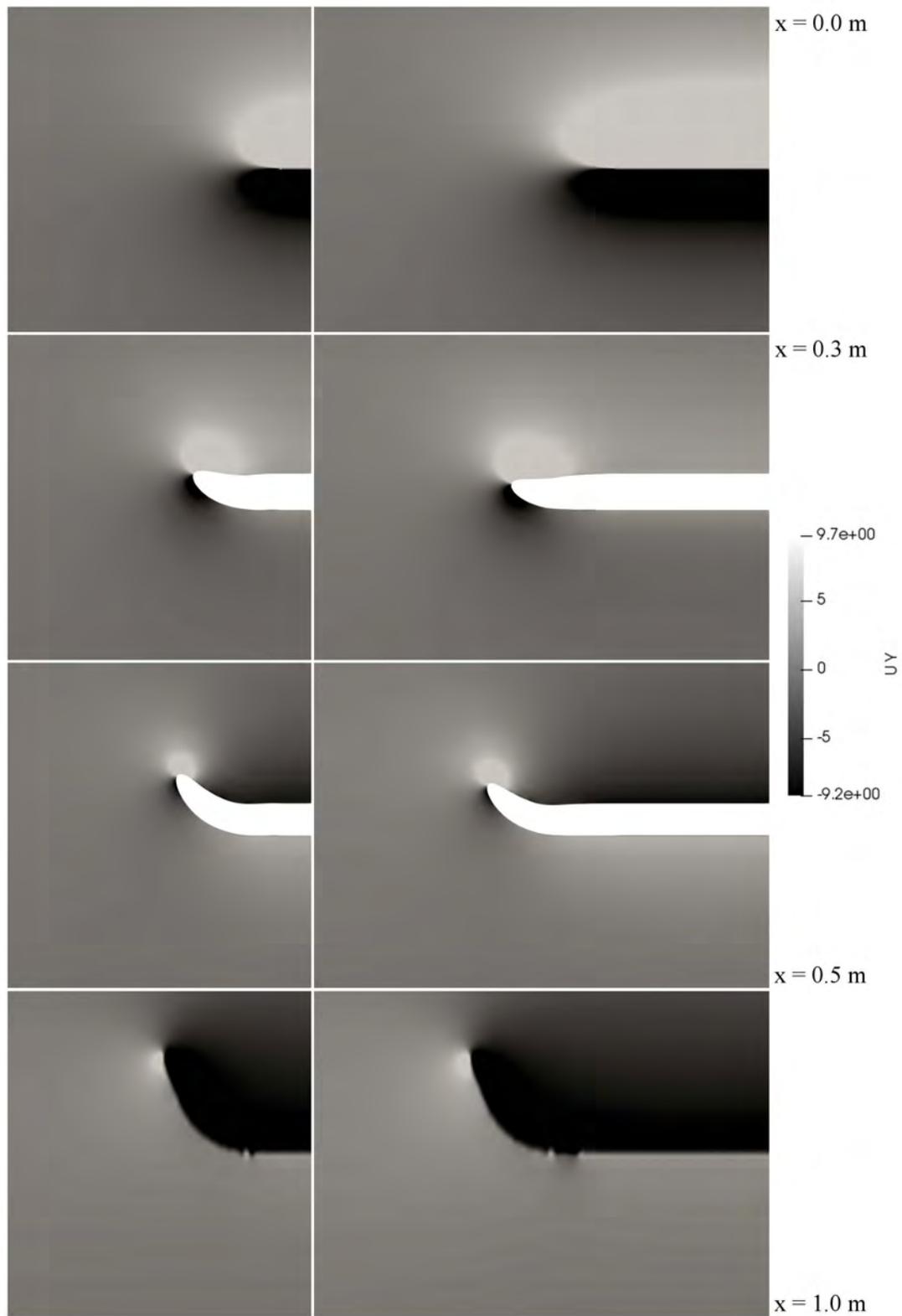


Figura 4.23: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).

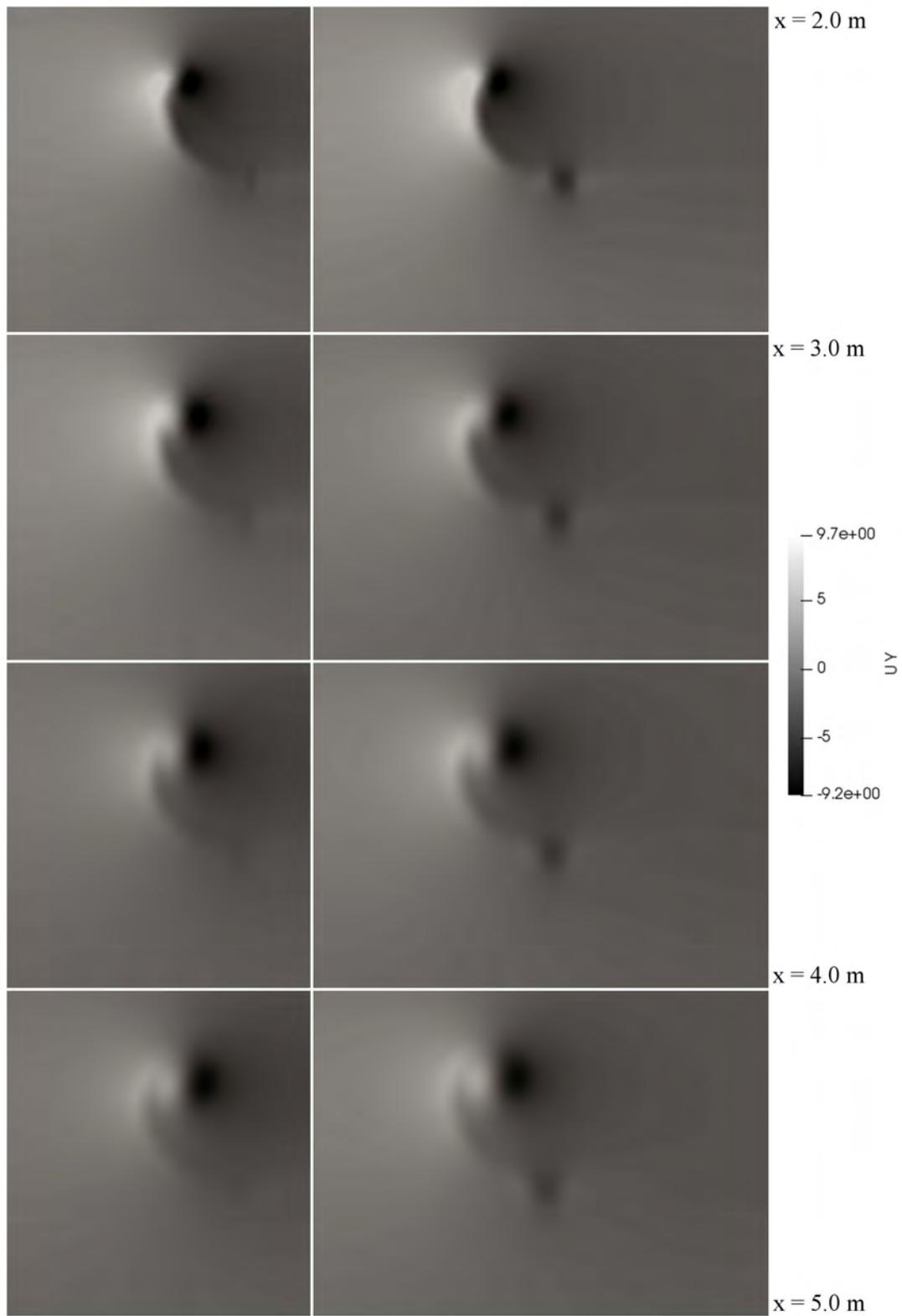


Figura 4.24: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).

Al comparar este caso con dispositivo hacia arriba con aquél en el que la punta no termina en vértice, apreciamos muy pocas diferencias en la apariencia general de los campos. Entre las similitudes más relevantes en la Figura 4.22 se encuentran la zona de máxima presión cerca del borde de ataque en $x = 0.0$ m, la zona de presión mínima sobre el extradós que permanece desde $x = 0.3$ m hasta $x = 0.5$ m y la zona de presión alta, aunque no máxima, cuando $x = 1.0$ m, detrás del borde de salida. Las dos diferencias más relevante es que, en el plano $x = 1.0$ m, prácticamente no se puede distinguir una zona muy localizada de baja presión en la punta del dispositivo, lo que correspondería al vórtice.

De igual manera, se presentan varias similitudes entre las Figuras 4.15-4.16 y las Figuras 4.23-4.24. En primer lugar, cuando $x = 0.0$ m, sigue existiendo una región de flujo ascendente sobre el extradós y una de flujo descendente por debajo del intradós, siendo de mayor tamaño la primera. En los planos que van desde $x = 0.3$ m hasta $x = 1.0$ m, se manifiestan las mismas regiones de flujo ascendente y/o descendente en las mismas zonas que ya se explicaron. En dado caso, dichas regiones son ligeramente distintas en forma y tamaño. La anomalía en el borde de salida parece notarse mucho menos en el ala con dispositivo que termina en vértice que en el que no termina en vértice, aunque no podría descartarse su presencia.

No obstante, es importante hacer hincapié en que, en el plano $x = 1.0$ m, la región que comprende al vórtice parece ser ligeramente más pequeña en el ala que termina en vértice. Para los planos $x = 2.0$ m a $x = 5.0$ m, el desarrollo y difusión del vórtice primario se aprecia de manera similar al caso anterior. El vórtice secundario sigue presente para la envergadura larga, pero está mucho menos definido que cuando el dispositivo no termina en vértice. Continuando con las Figuras 4.25 y 4.26, los planos que van desde $x = 0.0$ m hasta $x = 0.5$ m lucen muy parecidos. Nuevamente, las regiones de valores relevantes⁶ de v_y y v_z tienen tamaños ligeramente distintos a los del caso que no termina en vértice, pero no presentan muchas más diferencias.

En el plano $x = 1.0$ m, la anomalía luce ligeramente diferente, pero está ubicada en la misma zona del dominio. Un detalle que sí se nota es que, en la punta del dispositivo, no pareciera haber una región muy localizada de flujo lateral positivo. En la Figura 4.18, esta zona, asociada al vórtice primario que se forma, era claramente distinguible. Para los planos que van desde $x = 2.0$ m hasta $x = 5.0$ m, se vuelve a manifestar el enrollamiento del vórtice, su desarrollo y difusión de manera muy similar al ala anterior. El vórtice secundario sigue presente también se manifiesta en la Figura 4.26. Tal y como ya se había mencionado, éste no llega a consolidarse en una estructura tan clara como lo hacía cuando el ala no terminaba en vértice.

⁶Entendiéndose como distintos de cero.

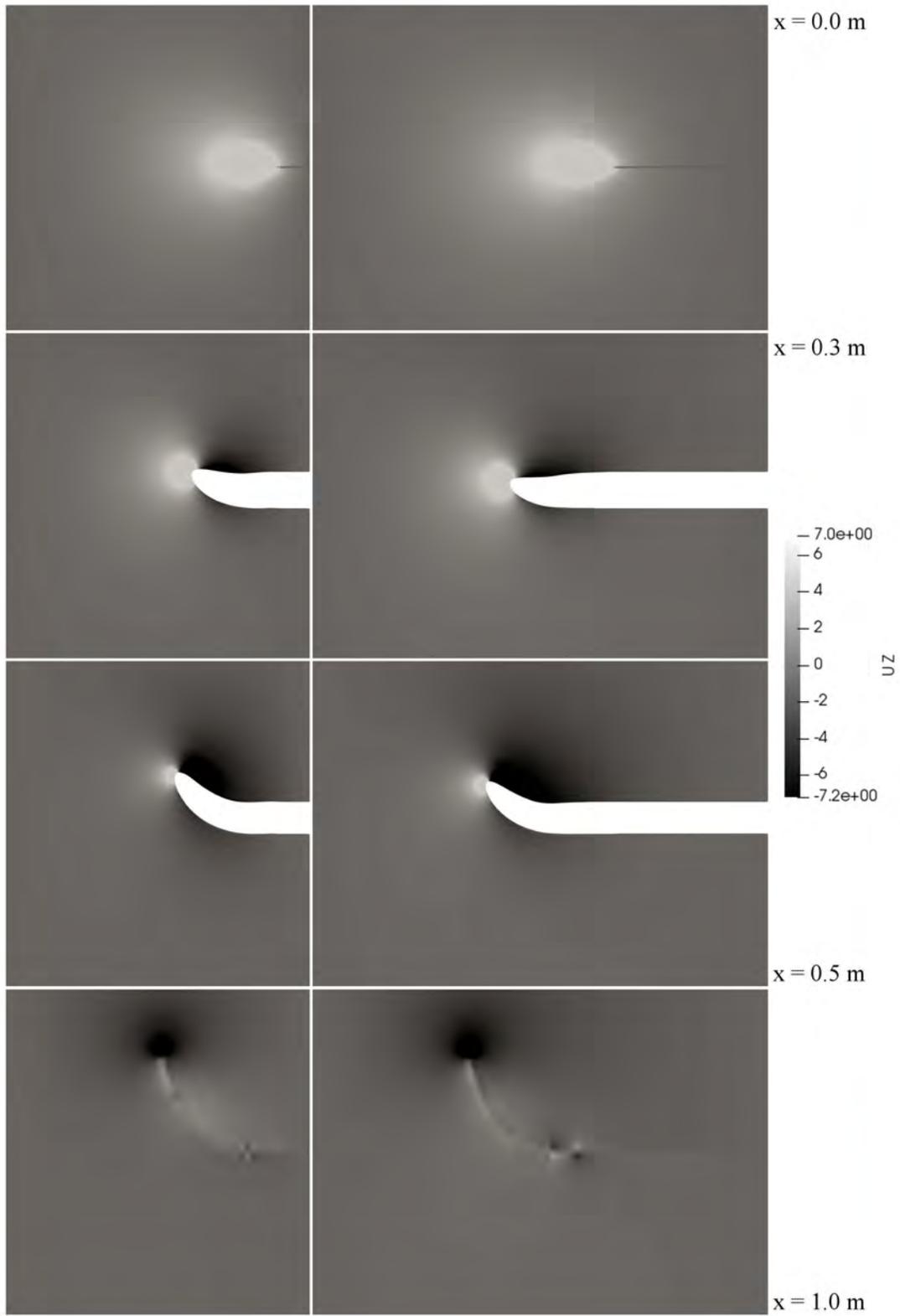


Figura 4.25: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).

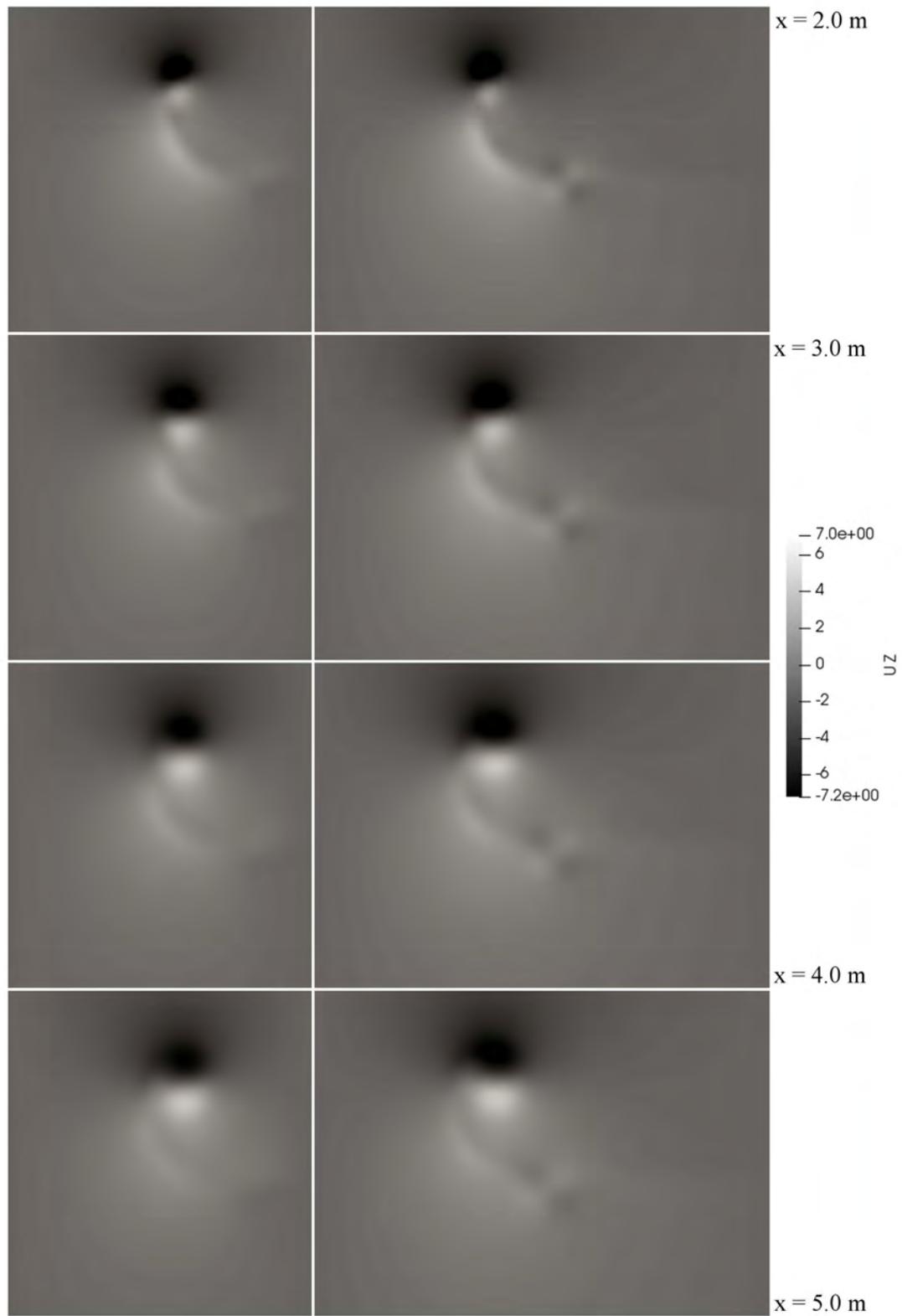


Figura 4.26: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).

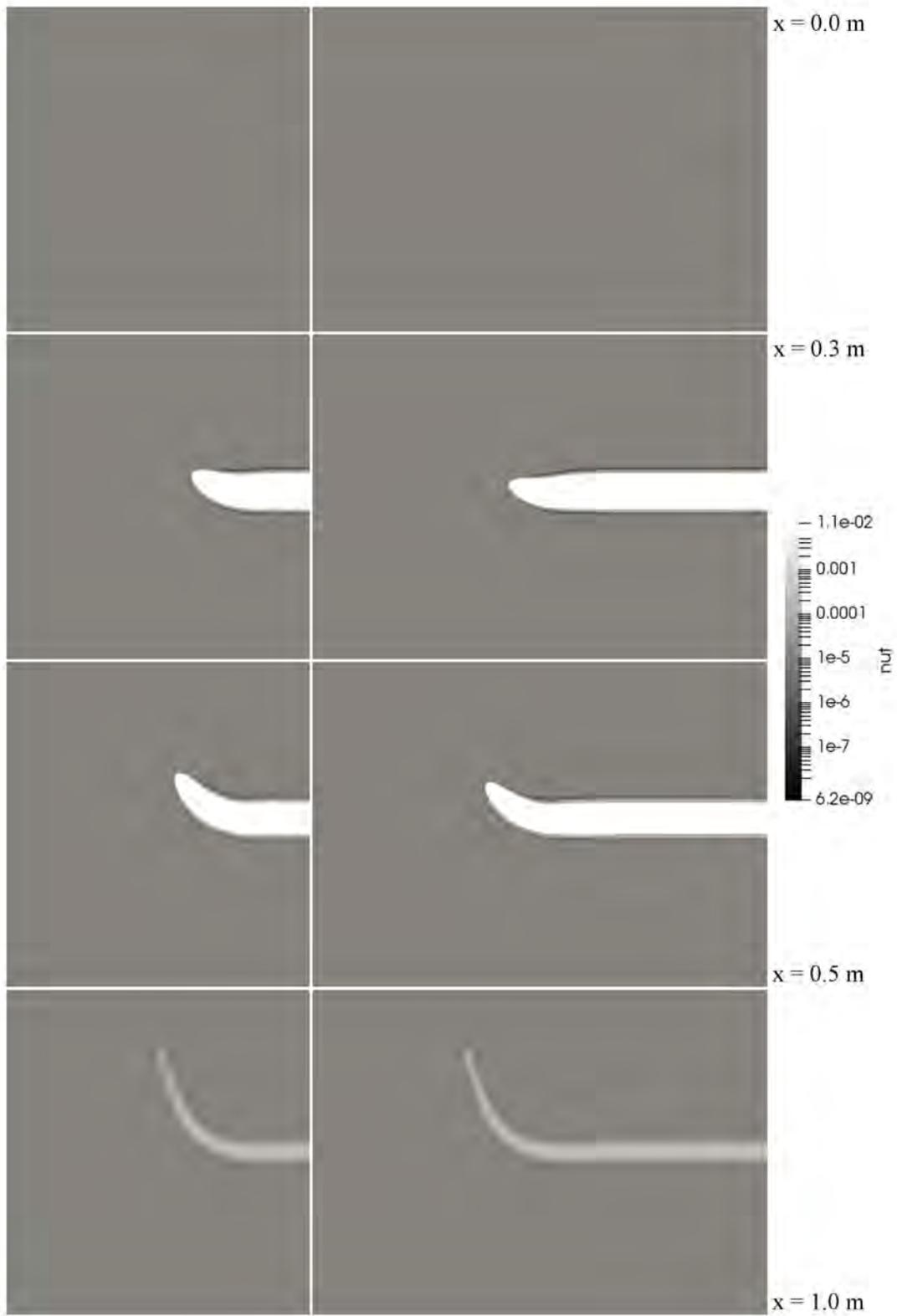


Figura 4.27: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 1).

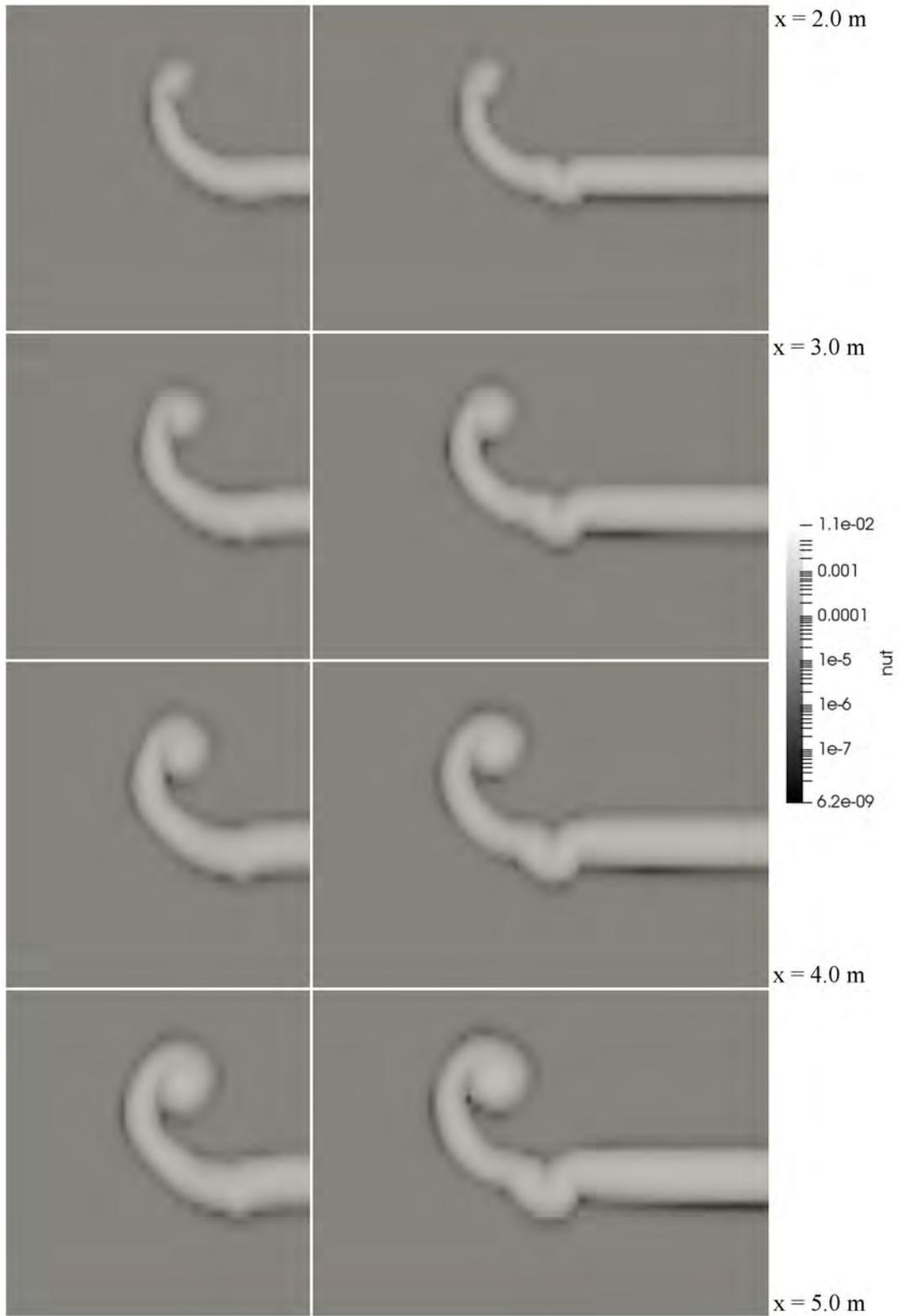


Figura 4.28: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia arriba, con vértice (parte 2).

Por último, las Figuras 4.27 y 4.28 muestran esencialmente lo mismo que las análogas para el ala con dispositivo que no termina en vértice. En dado caso, el tamaño del vórtice es menor durante su enrollamiento y la magnitud de la viscosidad turbulenta en su núcleo es ligeramente menor que para el caso anterior. La región turbulenta detrás del borde de salida se ensancha también conforme nos movemos aguas-abajo y, más que nada, se observa también una anomalía en la forma de esta estela. Esta anomalía se localiza en la misma zona donde se observaba el vórtice secundario. La forma de la anomalía difiere ligeramente de lo que se tenía en el ala que no terminaba en vértice.

4.5. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia abajo, sin vértice)

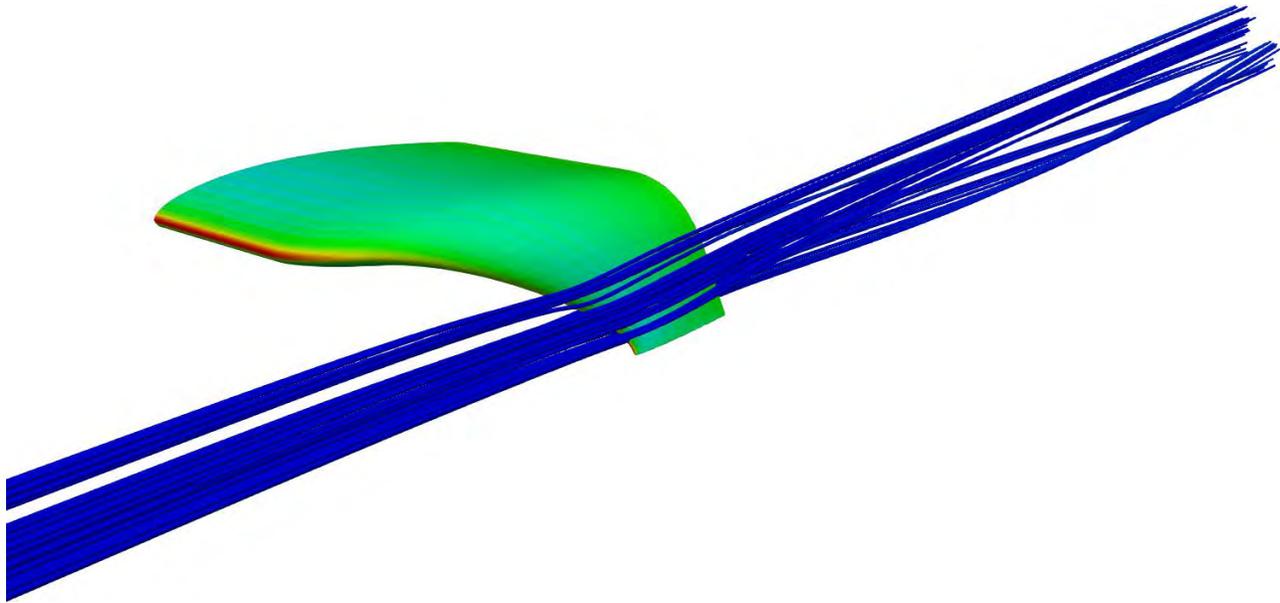


Figura 4.29: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia abajo, sin vértice.

La Figura 4.29 prácticamente no muestra un cambio en la magnitud de la viscosidad turbulenta en el núcleo del vórtice, a diferencia de lo que ocurría en el caso análogo “simétrico” hacia arriba. El flujo sigue tendiendo a ir del intradós al extradós, dado que la rotación del vórtice, una vez más, es negativa respecto al eje x . La perspectiva de la imagen no permite ver muchos más detalles, aunque muchas más diferencias se hacen evidentes en los planos de corte.

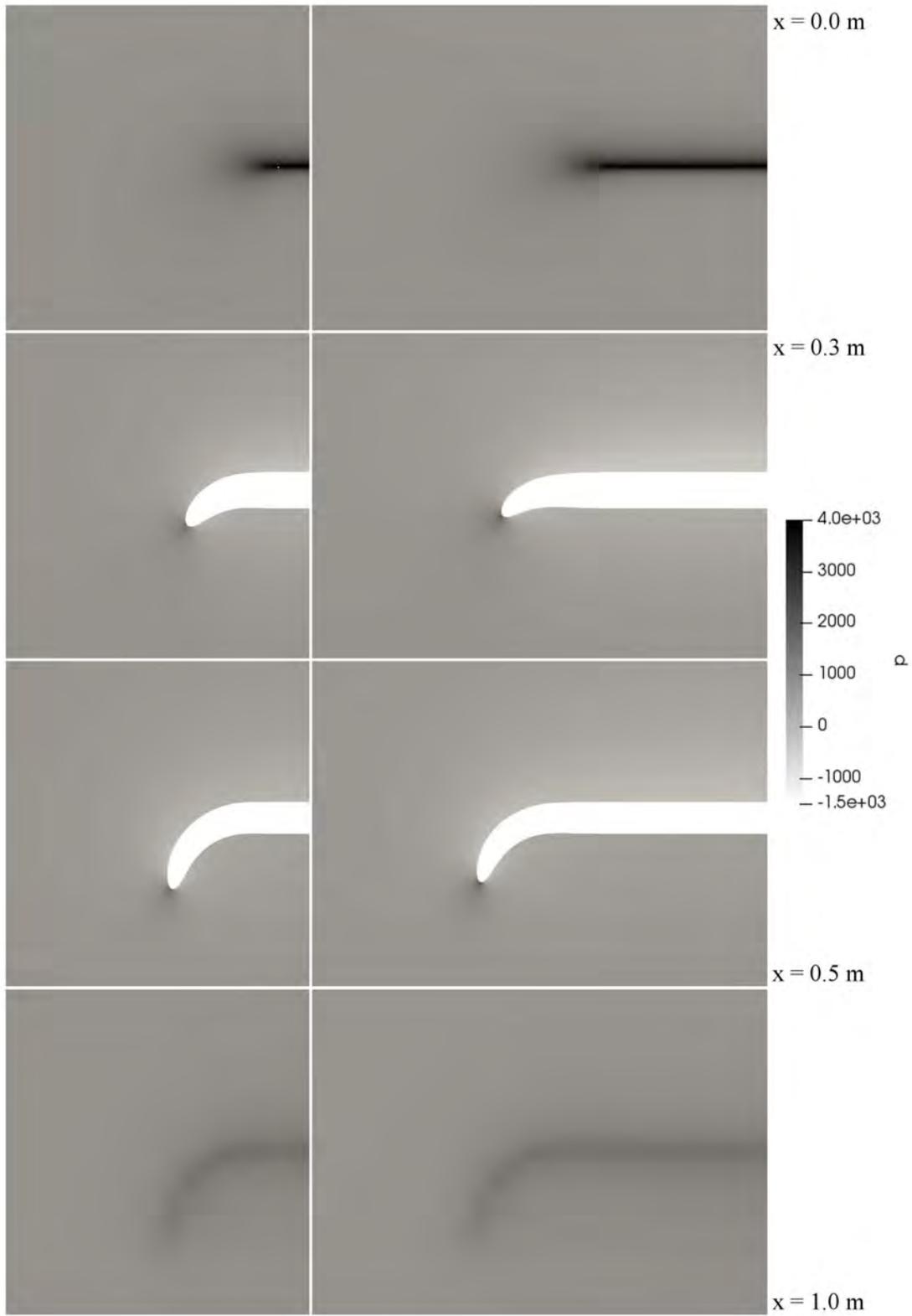


Figura 4.30: Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice.

En la Figura 4.30, en el plano $x = 0.0$ m, seguimos viendo la franja de presión máxima cerca del borde de ataque. En los planos $x = 0.3$ m y $x = 0.5$ m, una zona de baja presión predomina sobre el extradós y hasta el extremo del ala, donde se localiza una zona de alta presión. Esta zona, tal y como en casos anteriores, tiene una presión que sigue siendo menor a la máxima y coincide con la parte del corte de la geometría de mayor curvatura. Una vez que llegamos al plano $x = 1.0$ m, vemos una zona de alta presión, menor que la máxima, con la forma del ala en sí. A diferencia del caso análogo hacia arriba⁷, es muy difícil distinguir la región localizada de baja presión correspondiente al vórtice.

Pasando a la Figura 4.31, se observan cosas interesantes. En el plano $x = 0.0$ m, se tienen dos regiones aproximadamente simétricas, no muy diferentes de las de casos anteriores. Una es de flujo ascendente, sobre el extradós; y la otra de flujo descendente, por debajo del intradós. Sin embargo, en el plano $x = 0.3$ m, la zona de flujo ascendente cercana al extremo del ala tiene un tamaño mayor que la de flujo descendente. El tamaño es mayor para la envergadura larga que para la de envergadura corta. En los dispositivos hacia arriba, la zona de mayor tamaño era la de flujo descendente. En el resto del extradós, se tiene una zona de flujo ligeramente ascendente.

En el plano $x = 0.5$ m, se manifiesta un patrón ligeramente más complejo. Se tiene la región de flujo descendente sobre el extradós y las dos zonas cercanas al extremo del ala: la de flujo ascendente sobre el extradós y la de flujo descendente por debajo del intradós. No obstante, adicionalmente se observa una región de flujo ascendente por debajo del intradós, desde la raíz del ala y casi hasta el extremo. Esta región no estaba presente en ninguna de las alas anteriores. En el plano $x = 1.0$ m, volvemos a observar la región de flujo descendente muy marcada sobre el extradós. Sin embargo, esta región no llega hasta el extremo del ala, como en el caso sin dispositivo y los dos casos con dispositivo hacia arriba. En el plano $x = 1.0$ m, se vuelve a presentar la anomalía, de manera similar a lo que se veía en la Figura 4.15, en la misma zona sobre el borde de salida

Se sigue viendo la zona de flujo descendente y persiste su característica de que no continua hasta la punta del ala. Comparando con la Figura 4.15, la zona de flujo ascendente en la punta, asociada al vórtice, es de mayor tamaño que la de flujo descendente. A mayor envergadura, de mayor tamaño es esta región. En la Figura 4.32, observamos que el vórtice sigue teniendo rotación negativa respecto al eje x . La anomalía ahora se manifiesta como un vórtice secundario, de menor tamaño, y mismo sentido de rotación que el del primario. La zona entre la raíz del ala y el vórtice secundario, sobre todo para la envergadura larga, muestra un flujo descendente importante atípico.

⁷Es decir, cuyo dispositivo no termina en vértice.

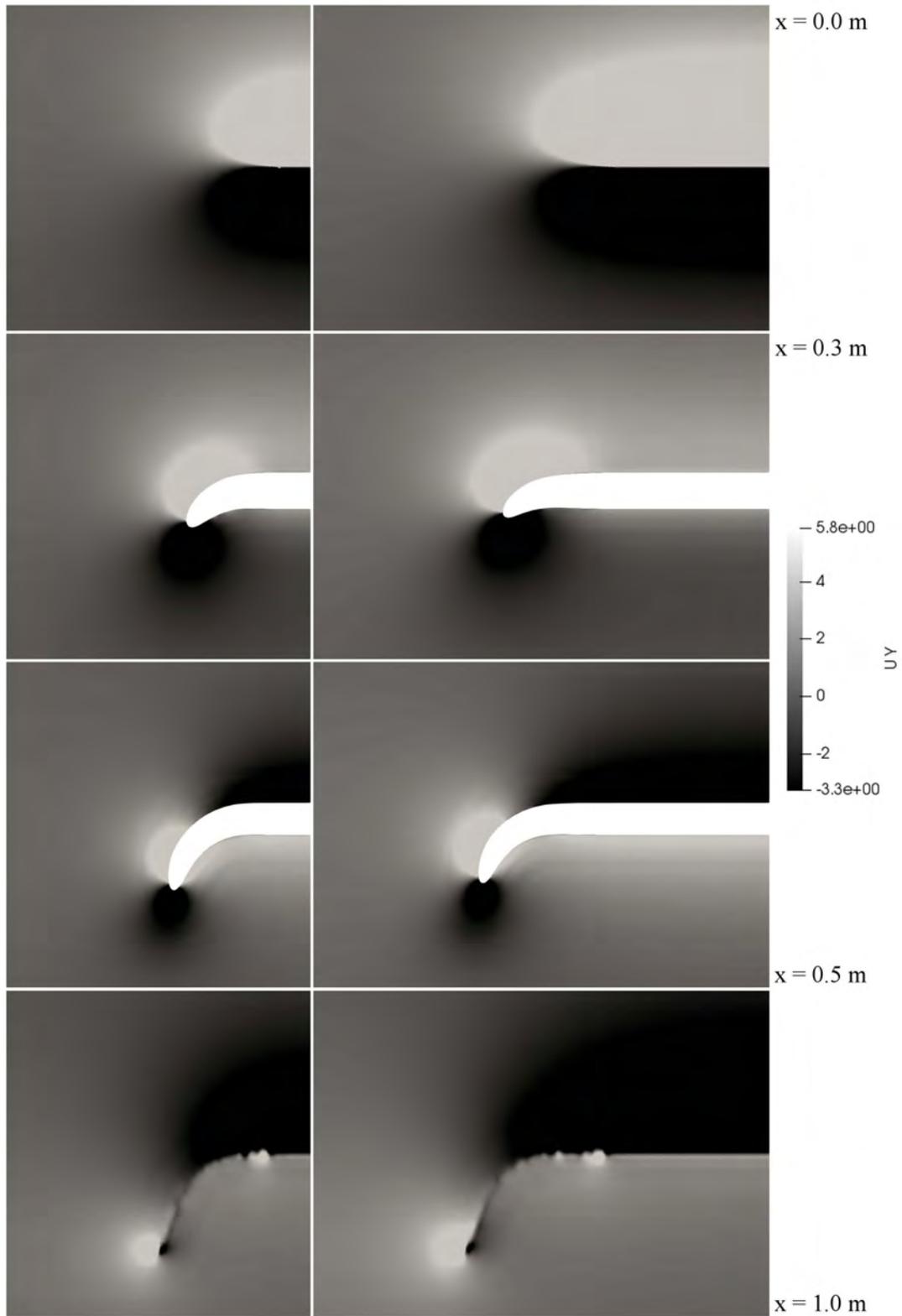


Figura 4.31: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).

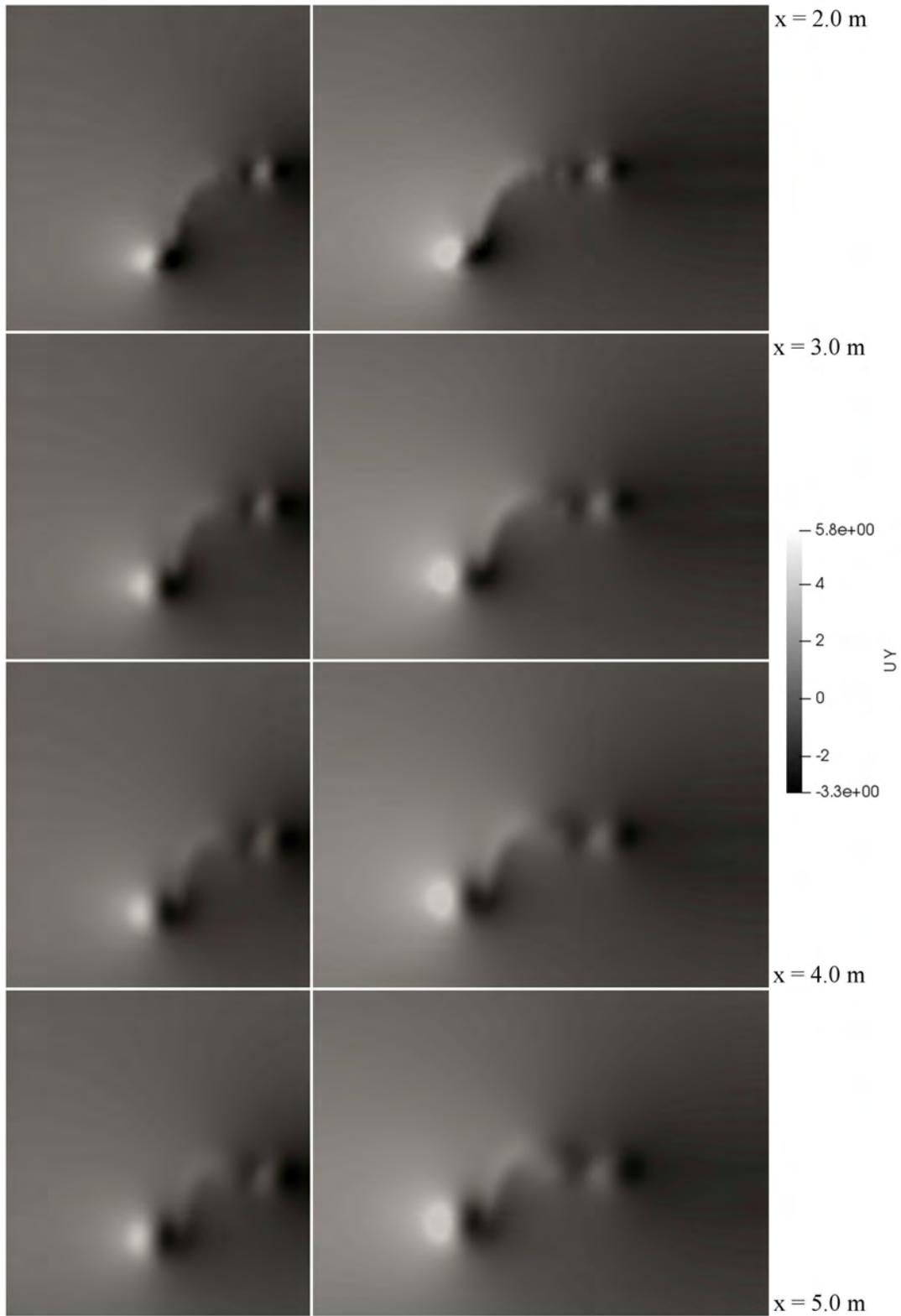


Figura 4.32: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).

La rotación de las regiones de flujo ascendente y descendente asociadas al vórtice, que se desarrolla entre los planos $x = 2.0 \text{ m}$ y $x = 3.0 \text{ m}$, es en sentido antihorario. Esta rotación de la estructura vorticiosa sólo se presentaba de manera evidente en la Figura 4.8, en la cual tenía sentido horario. A partir de aquí, el vórtice se difunde conforme nos movemos aguas-abajo. Siguiendo con la Figura 4.33, cuando $x = 0.0 \text{ m}$, se observa flujo lateral positivo, tanto sobre el extradós como por debajo del intradós. El resto del dominio tiene un valor uniforme cero para v_z . En el plano $x = 0.3 \text{ m}$, hay dos regiones de flujo lateral hacia la raíz del ala, una arriba del extradós y otra debajo del intradós, siendo de mayor tamaño la última. Por otro lado, junto al extremo del ala y más del lado del extradós, hay una región de flujo lateral positivo.

Estas zonas permanecen en el plano $x = 0.5 \text{ m}$, sólo que aquella de flujo lateral negativo sobre el extradós tiene mayor tamaño que la de flujo, en la misma dirección, por debajo del intradós. Para cuando llegamos a $x = 1.0 \text{ m}$, sólo sobrevive la zona de flujo lateral negativo sobre el extradós, la cual llega hasta la punta del dispositivo. Se observa la anomalía nuevamente, tanto en el caso de envergadura corta como en el de envergadura larga. En los planos que van de $x = 2.0 \text{ m}$ a $x = 5.0 \text{ m}$, se observa con mayor claridad que el vórtice primario y el vórtice secundario tienen el mismo sentido de rotación. La difusión de ambos también se hace evidente, conforme nos movemos aguas-abajo. Sin embargo, a diferencia de lo que se veía en la Figura 4.32, la región que se encuentra entre la raíz del ala y el vórtice secundario no luce atípica⁸.

En la Figura 4.35, parece haber más semejanzas que diferencias respecto a los casos sin dispositivo y con dispositivo hacia arriba. Nuevamente, entre los planos $x = 0.0 \text{ m}$ y $x = 0.5 \text{ m}$ observamos que la viscosidad turbulenta no se manifiesta más que en una capa muy delgada, adyacente a las paredes del ala. En el plano $x = 1.0 \text{ m}$, la zona de alta viscosidad turbulenta sigue la forma del ala y, en la punta del dispositivo, se ve lo que parece ser el núcleo del vórtice incipiente como una diminuta región de alta viscosidad turbulenta que sobresale. En los siguientes planos, en la Figura 4.36 la zona turbulenta correspondiente a la estela se va ensanchando progresivamente.

Se puede ver en todos estos planos de la región aguas-abajo que, a diferencia de los casos con dispositivo hacia arriba, la anomalía produce una alteración de la forma de la estela turbulenta para ambas envergaduras. La forma de la anomalía, correspondiente con el vórtice secundario, es la misma para ambas envergaduras. Más allá de esto, la Figura 4.36 muestra el enrollamiento del vórtice ocurriendo de la misma manera que con los dispositivos hacia arriba. Entre más aguas-abajo nos encontramos, el vórtice consolida mejor su forma.

⁸Haciendo referencia al flujo descendente tan marcado que se observaba.

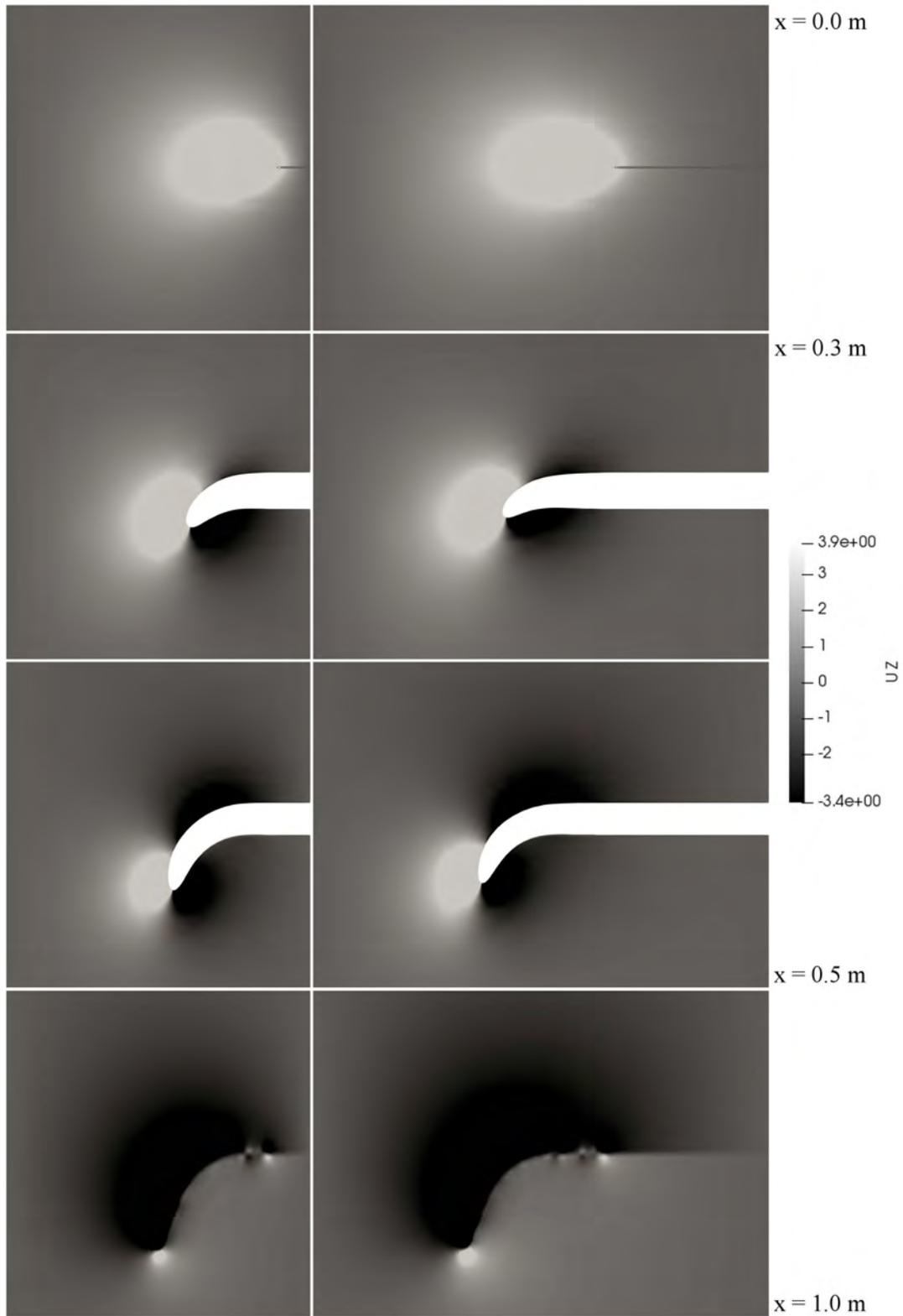


Figura 4.33: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).

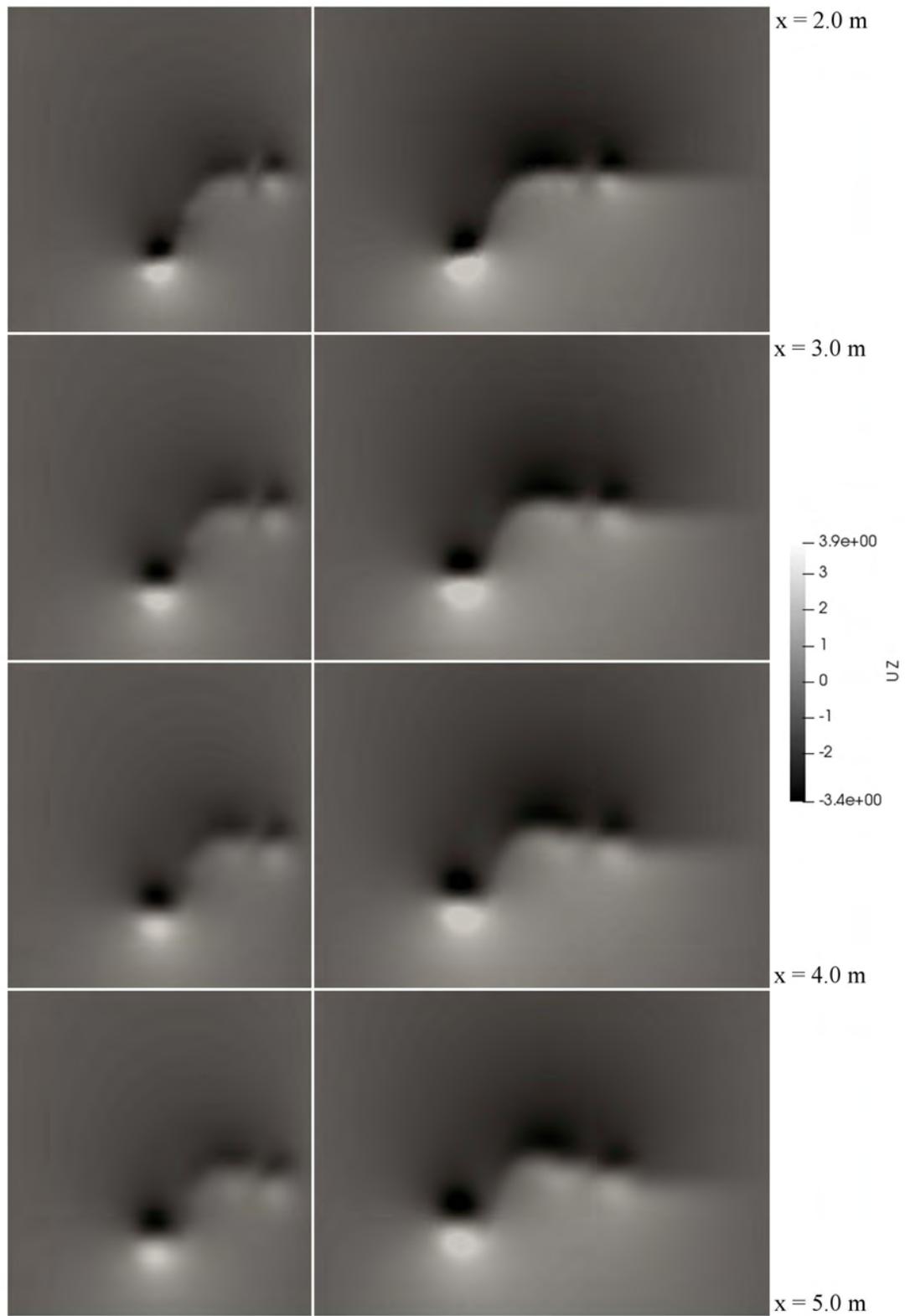


Figura 4.34: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).

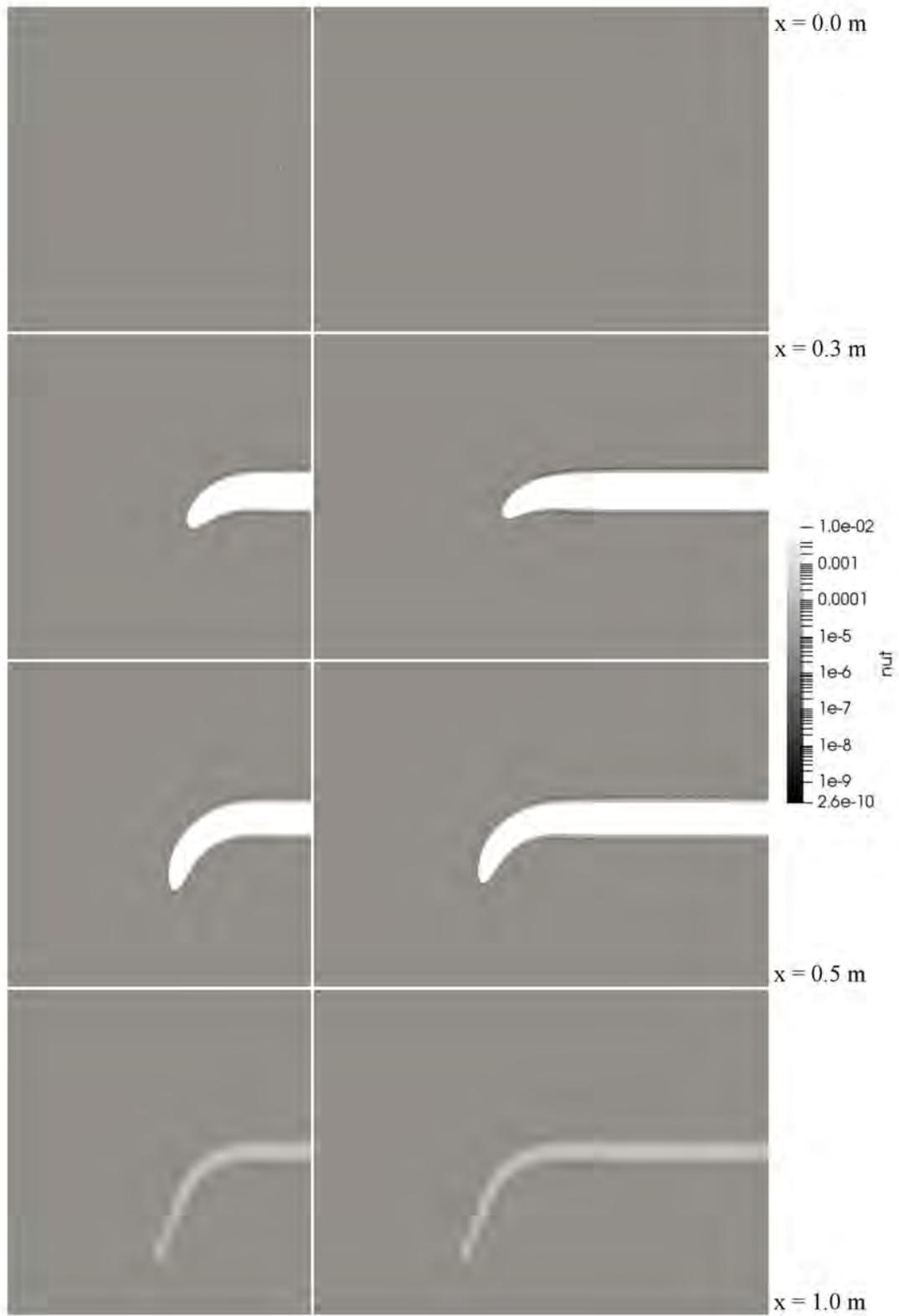


Figura 4.35: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 1).

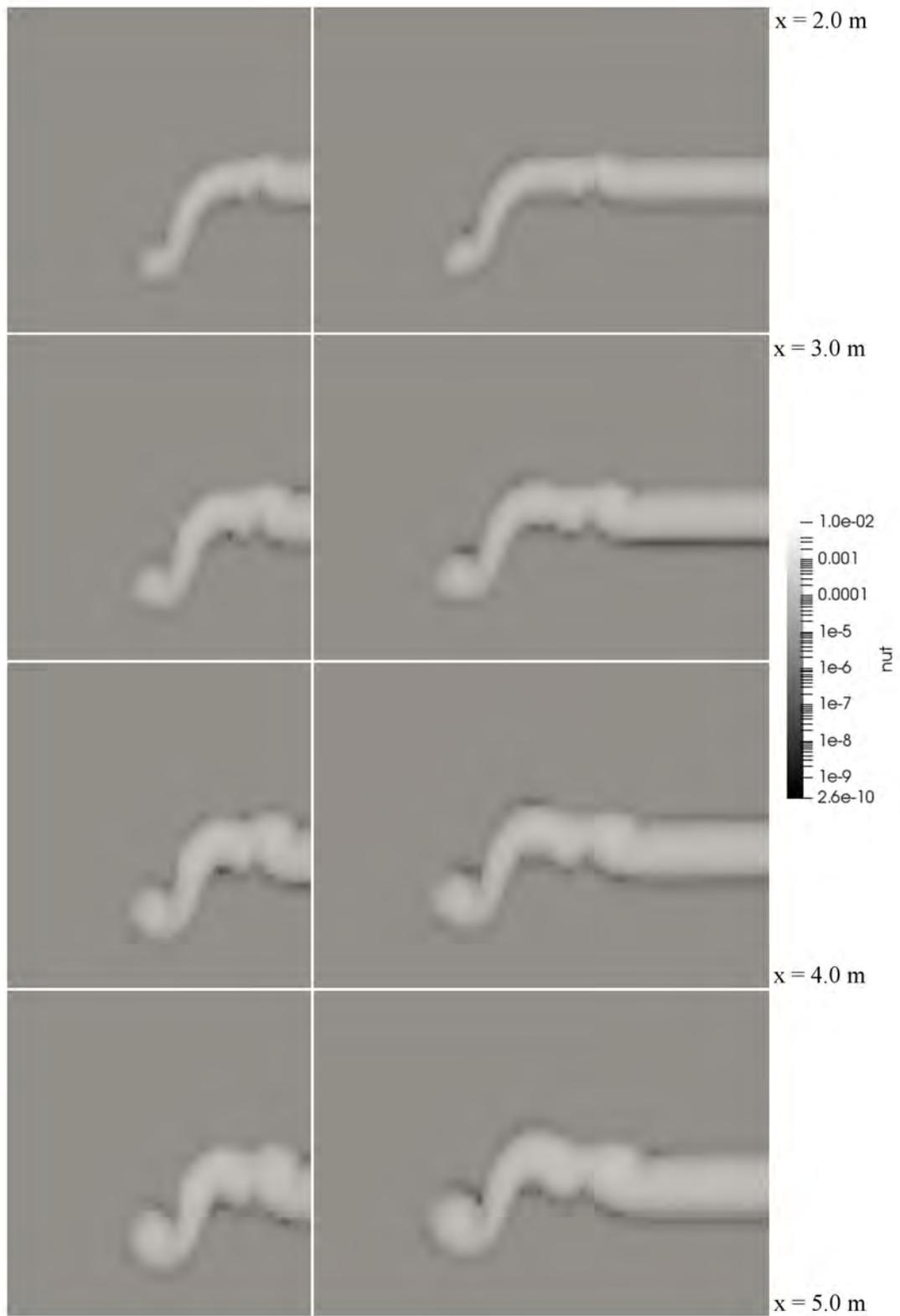


Figura 4.36: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, sin vértice (parte 2).

4.6. Ala finita (con dispositivo de punta alar hacia abajo, con vértice)

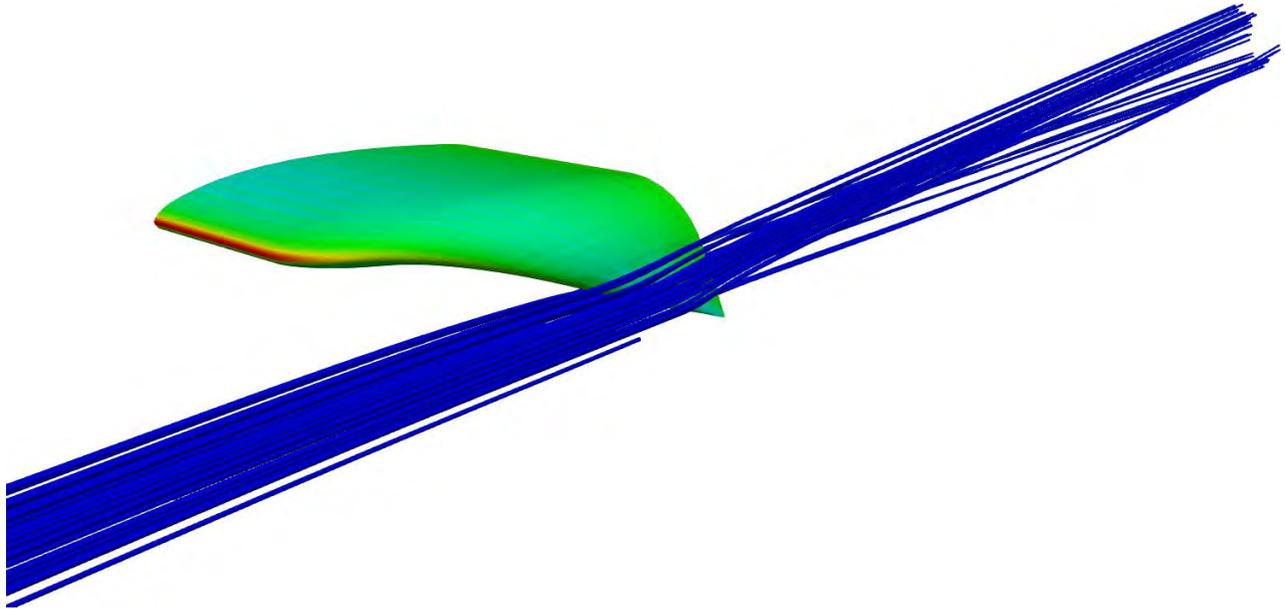


Figura 4.37: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo hacia abajo, con vértice.

La Figura 4.37 muestra cosas muy similares a la Figura 4.37. En general no parece haber cambios notables en la viscosidad turbulenta de los tubos de corriente. Sigue produciéndose cierta rotación en el flujo aguas-abajo del dispositivo y los tubos de corriente todavía tienen que rodear a la superficie del ala, pero no queda tan claro si se forma el vórtice y en qué región espacial queda acotado. Indudablemente el flujo sigue tendiendo a ir del intradós al extradós, debido a la forma en la que se observa la torción de los tubos de corriente. Se pueden observar más detalles con las imágenes de los planos en las Figuras 4.38-4.44.

En la primera de estas figuras, se muestra nuevamente el mismo patrón de las alas previas: la zona de presión máxima cerca del borde de ataque, la zona de baja presión sobre todo el extradós en los planos $x = 0.3 \text{ m}$ y $x = 0.5 \text{ m}$, la pequeña región de alta presión⁹ en la parte de mayor curvatura de los cortes del ala y una zona de presión alta¹⁰, con la forma de la geometría, atrás del borde de salida. Asimismo, no es posible distinguir la región de baja presión localizada que sería el núcleo del vórtice, tal y como en el caso de dispositivo hacia arriba que terminaba en vértice.

⁹Aunque menor que la presión máxima.

¹⁰Nuevamente inferior a la presión máxima

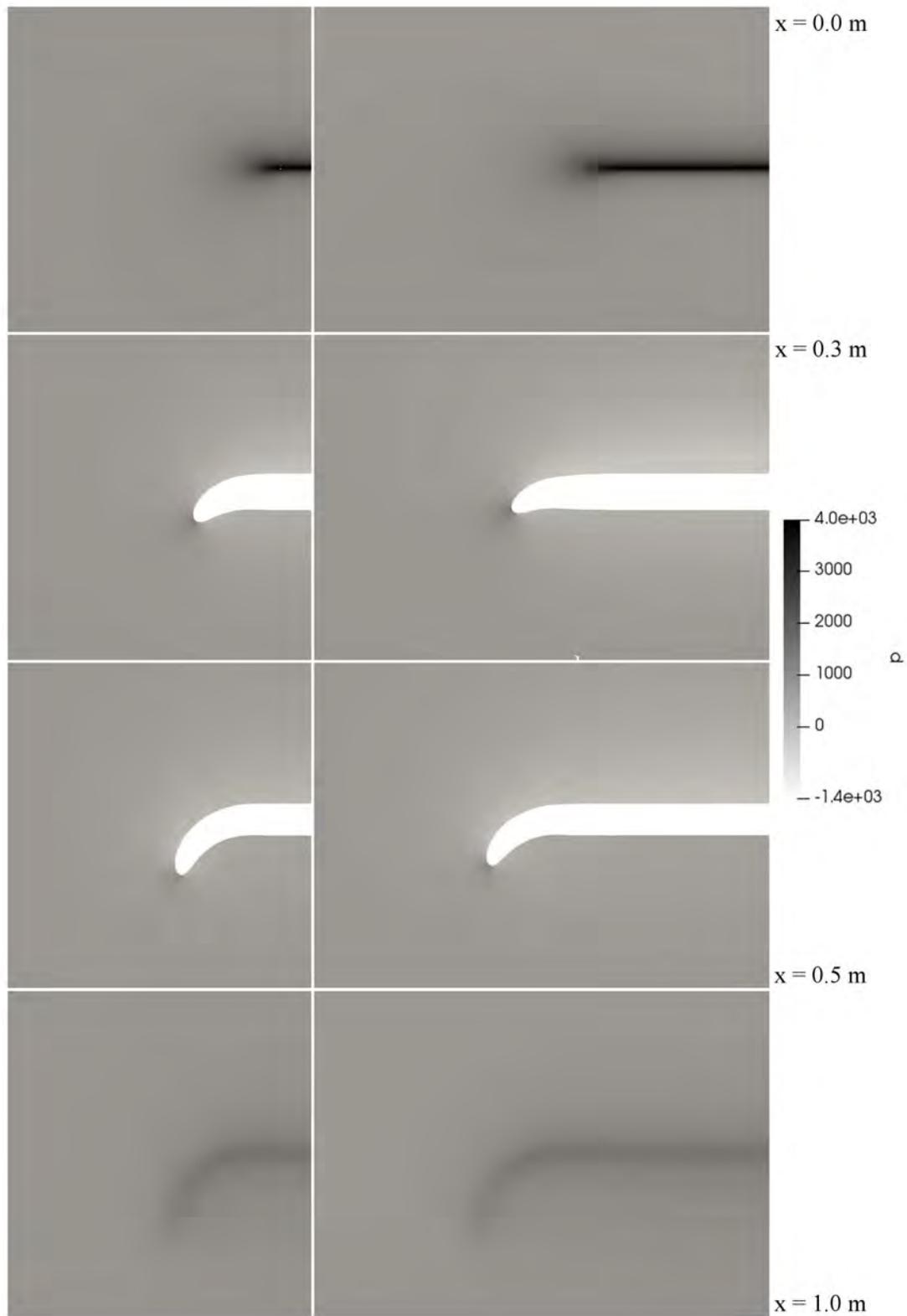


Figura 4.38: Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice.

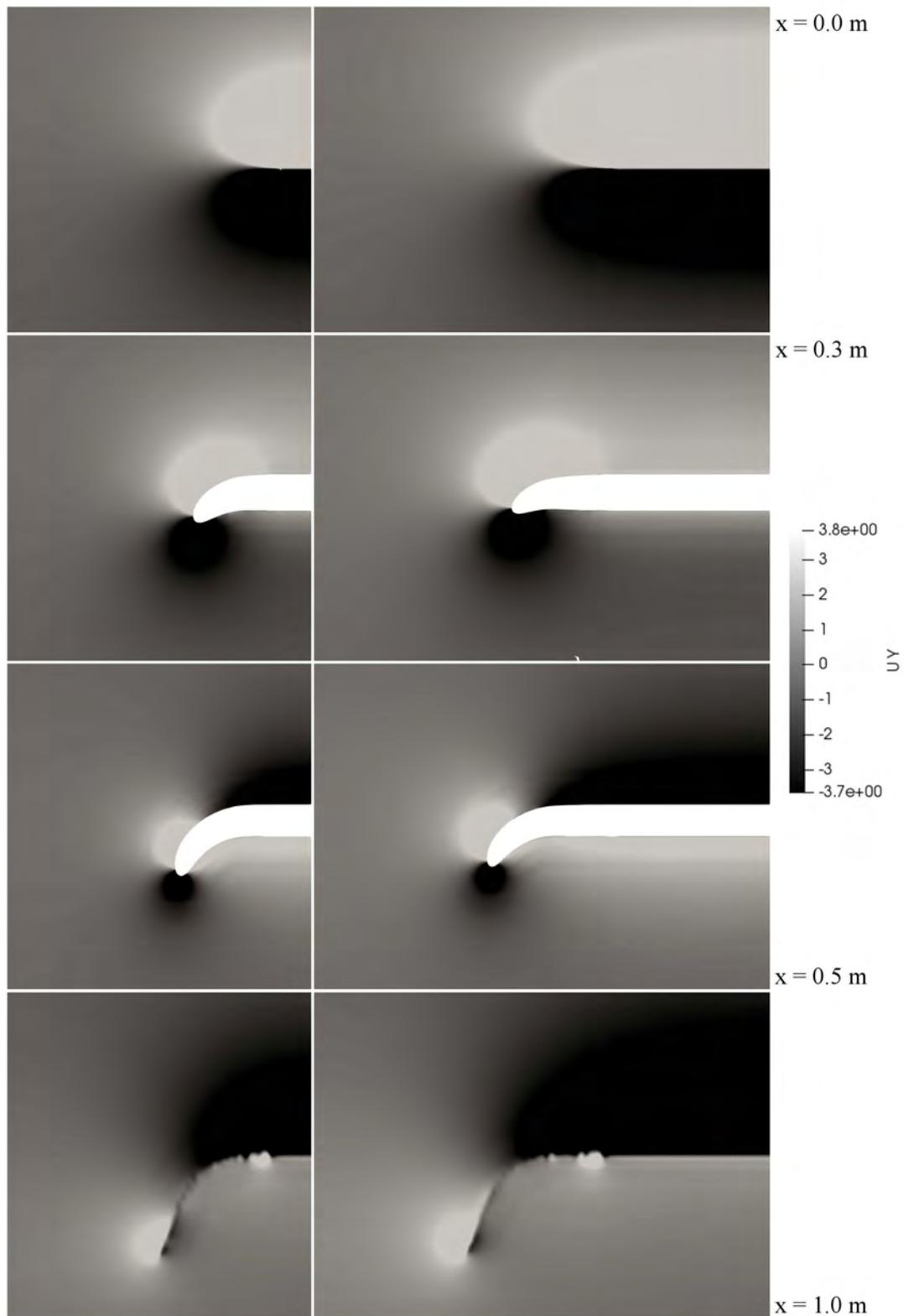


Figura 4.39: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).

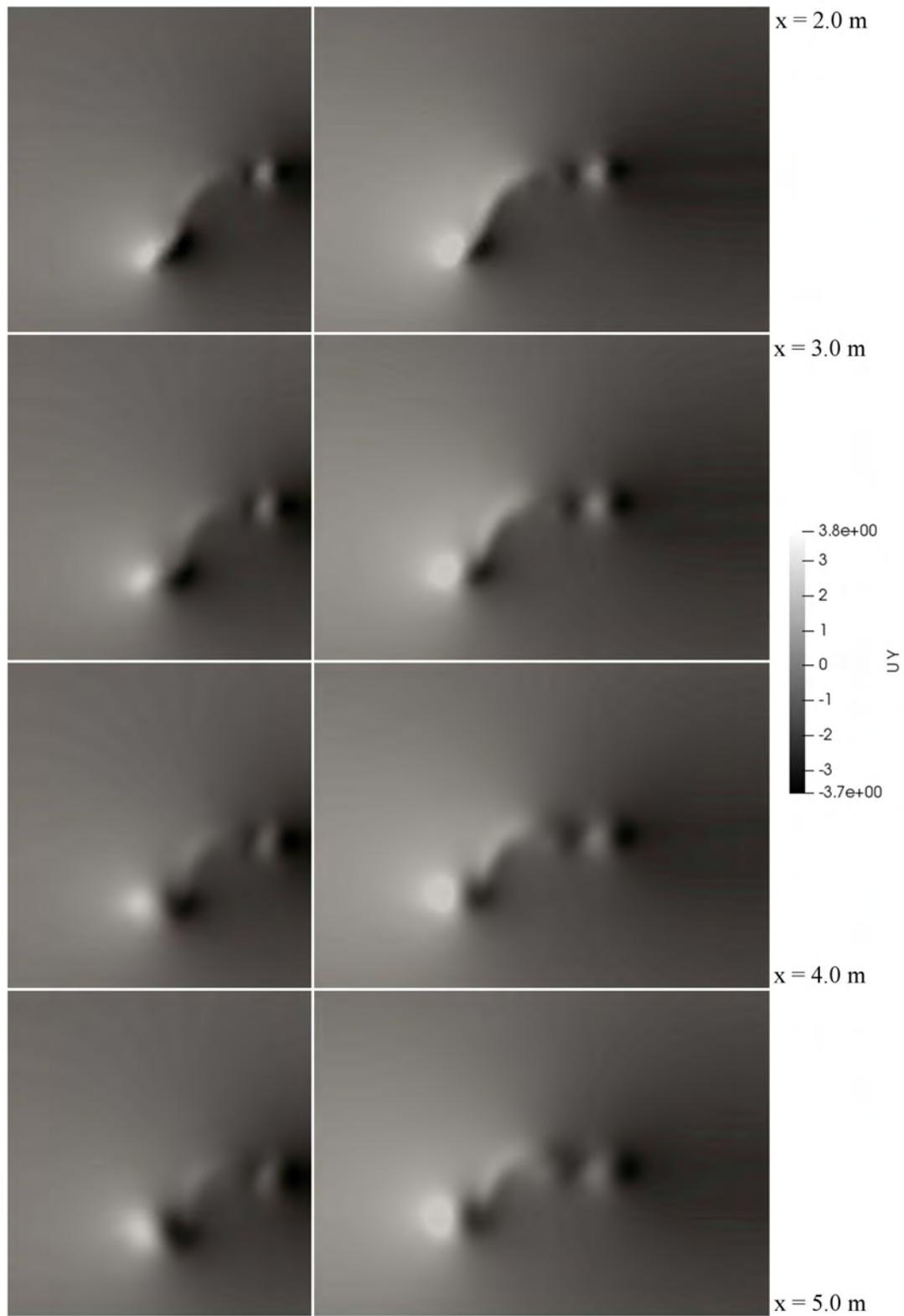


Figura 4.40: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).

Diferencias notables entre la Figura 4.31 y la Figura 4.39 incluyen el tamaño de las pequeñas regiones de flujo descendente o ascendente en los planos $x = 0.3 \text{ m}$ y $x = 0.5 \text{ m}$. Sin embargo, esta diferencia de tamaño, si se ve con mayor detalle, se debe al uso de distintas escalas. En realidad lo que se observa es que el valor máximo de v_y es mayor en el caso del dispositivo que no termina en vértice, pero el valor mínimo de v_z es menor en el caso del dispositivo que termina en vértice. En cuanto a las Figuras 4.32 y 4.40, no apreciamos diferencias adicionales a las que ya se mencionaron. La anomalía, que se manifiesta como un vórtice secundario, está presente en esta ala también. Al comparar las Figuras 4.33 y 4.42, notamos que la magnitud máxima de v_y es igual tanto en el caso con dispositivo que termina en vértice como en el que no termina en vértice.

Por otro lado, la magnitud mínima de v_y es ligeramente menor en el caso donde el dispositivo no termina en vértice. Nuevamente, esto tiene el efecto visual de cambio de tamaño aparente entre las regiones de flujo lateral positivo y negativo en los planos $x = 0.3 \text{ m}$ y $x = 0.5 \text{ m}$. Cuando $x = 1.0 \text{ m}$, se nota un cambio de tamaño auténtico entre las regiones de flujo lateral hacia la raíz del ala de ambas envergaduras. Cuando la envergadura es mayor, esta región tiene un mayor tamaño. Considerando que se tiene el mismo valor máximo, está claro que el vórtice en la punta del ala tiene mayor tamaño para mayor envergadura. Contrastando las Figuras 4.34 y 4.42, no vuelven a apreciarse cambios significativos de un ala a la otra.

Vuelve a estar claro que el vórtice es de mayor tamaño para mayores envergaduras en el ala que no termina en vértice. De igual manera, aparece el vórtice secundario para ambas envergaduras y no se observan regiones atípicas entre este último y la raíz del ala. Pasando a la Figura 4.43, todo luce muy similar al campo de v_t del caso con dispositivo hacia abajo que no termina en vértice. La zona de alta viscosidad turbulenta surge alrededor de todas las paredes del ala. Una diferencia con este último que vale la pena resaltar es que no se observa la zona turbulenta asociada al vórtice en la punta. En la imagen 4.44, se manifiesta la anomalía en la estela turbulenta, tanto en la envergadura corta como en la larga. El vórtice que inicialmente no es visible se forma en el plano $x = 0.3 \text{ m}$ y se consolida en los siguientes dos planos. La estela también se ensancha conforme nos movemos aguas-abajo.

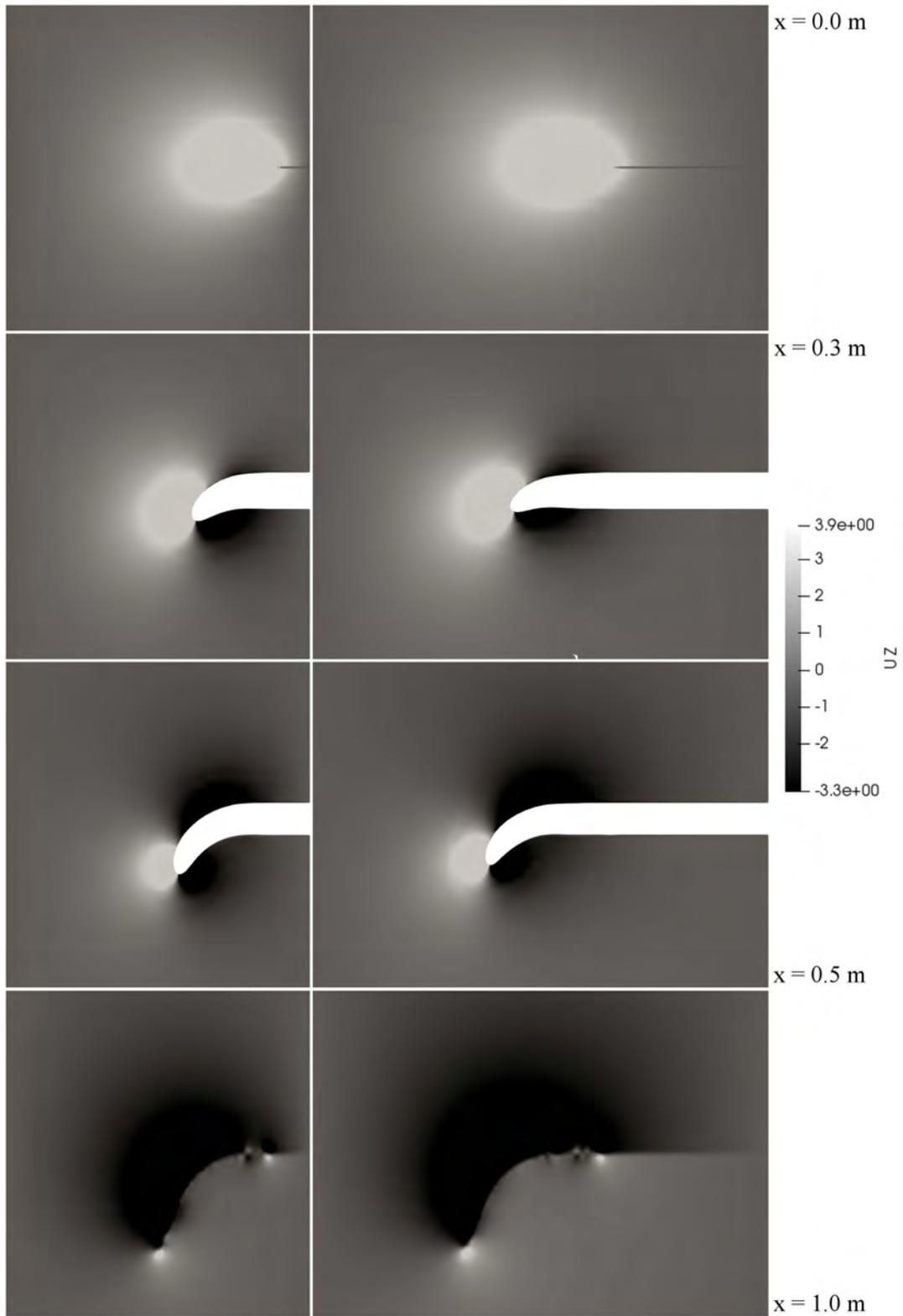


Figura 4.41: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).

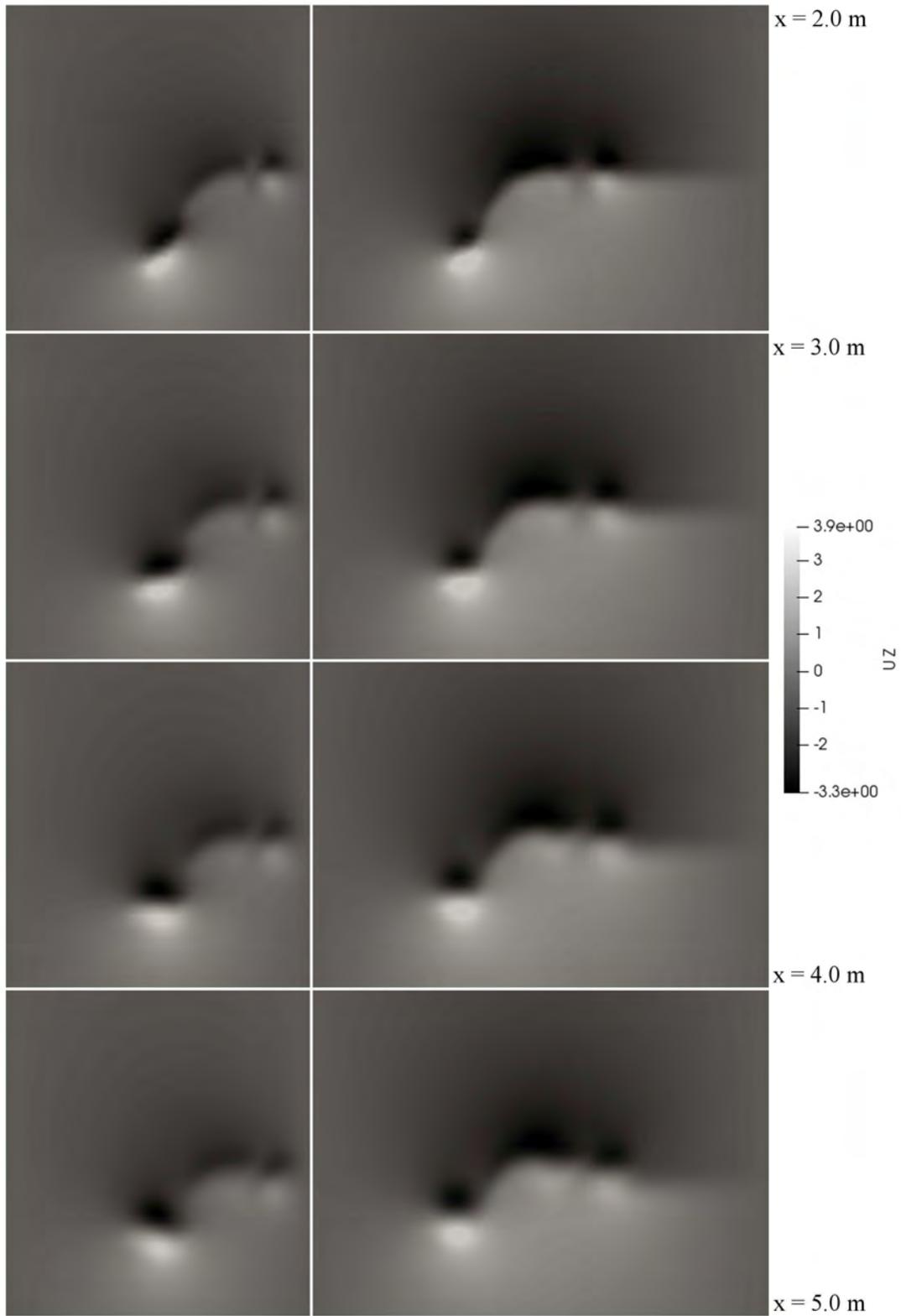


Figura 4.42: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).

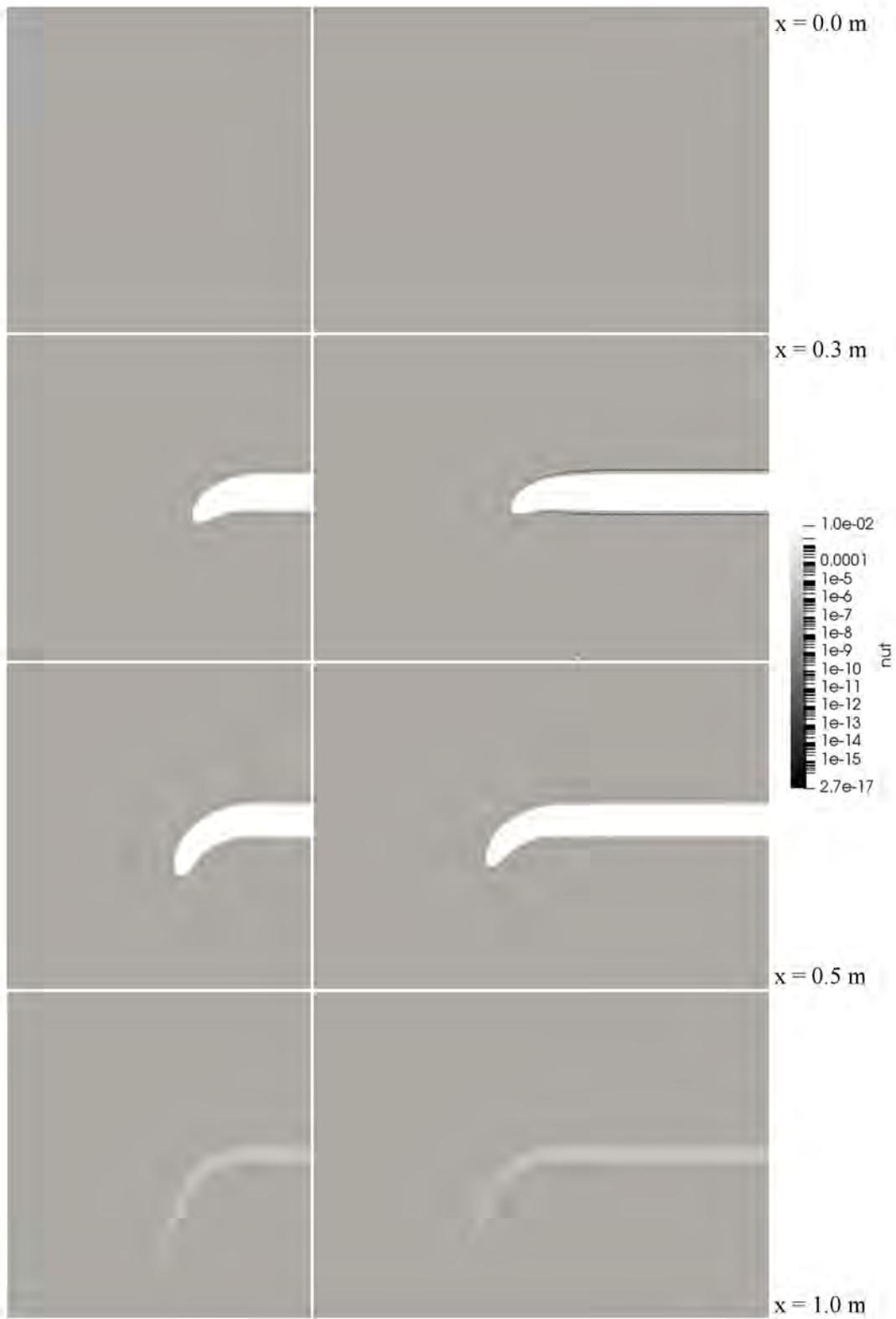


Figura 4.43: Viscosidad turbulenta (ν_T) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 1).

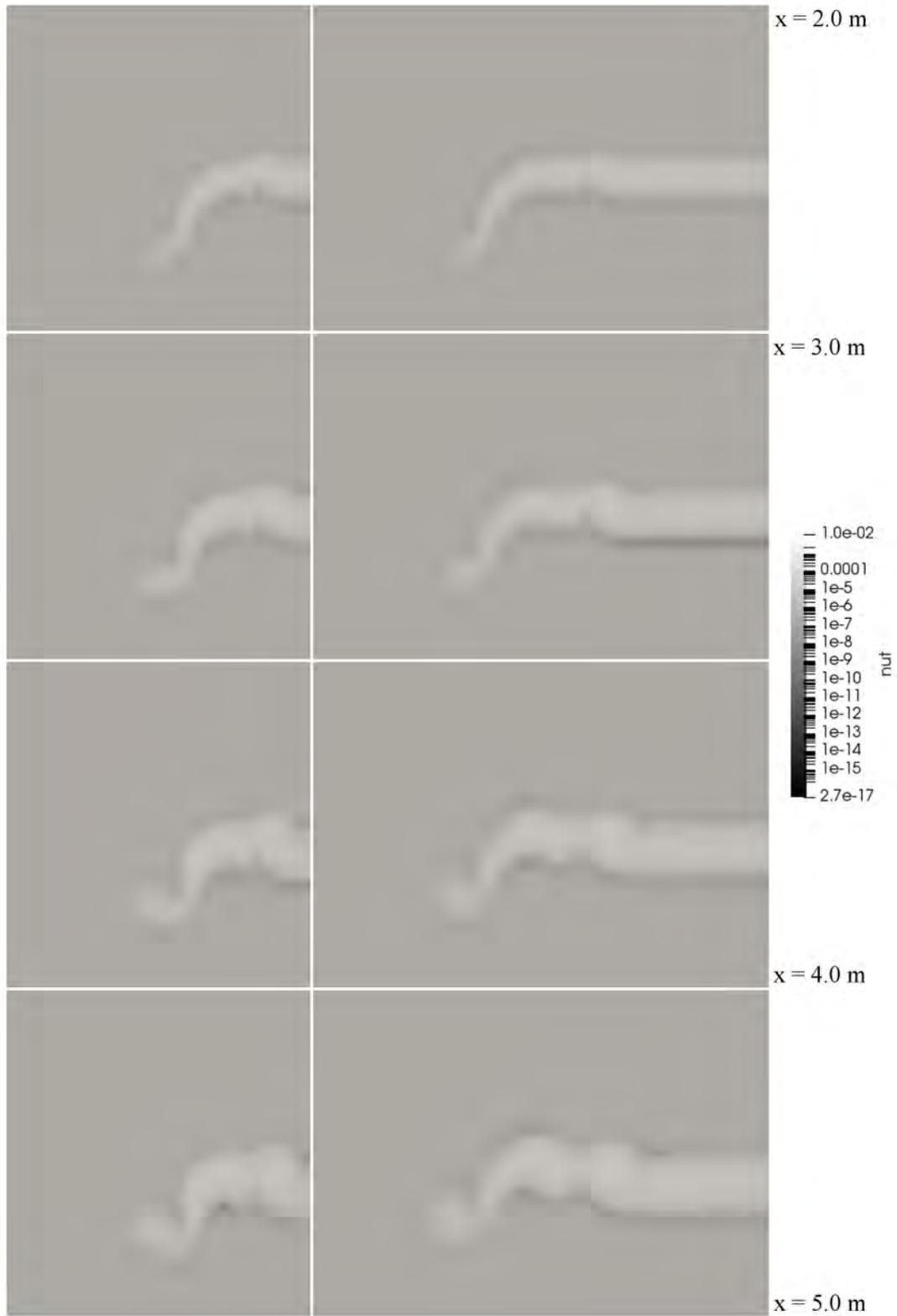


Figura 4.44: Viscosidad turbulenta (ν_T) en distintos planos yz , ala con dispositivo hacia abajo, con vértice (parte 2).

4.7. Ala finita (con dispositivo de punta alar en cimitarra, sin vértice)

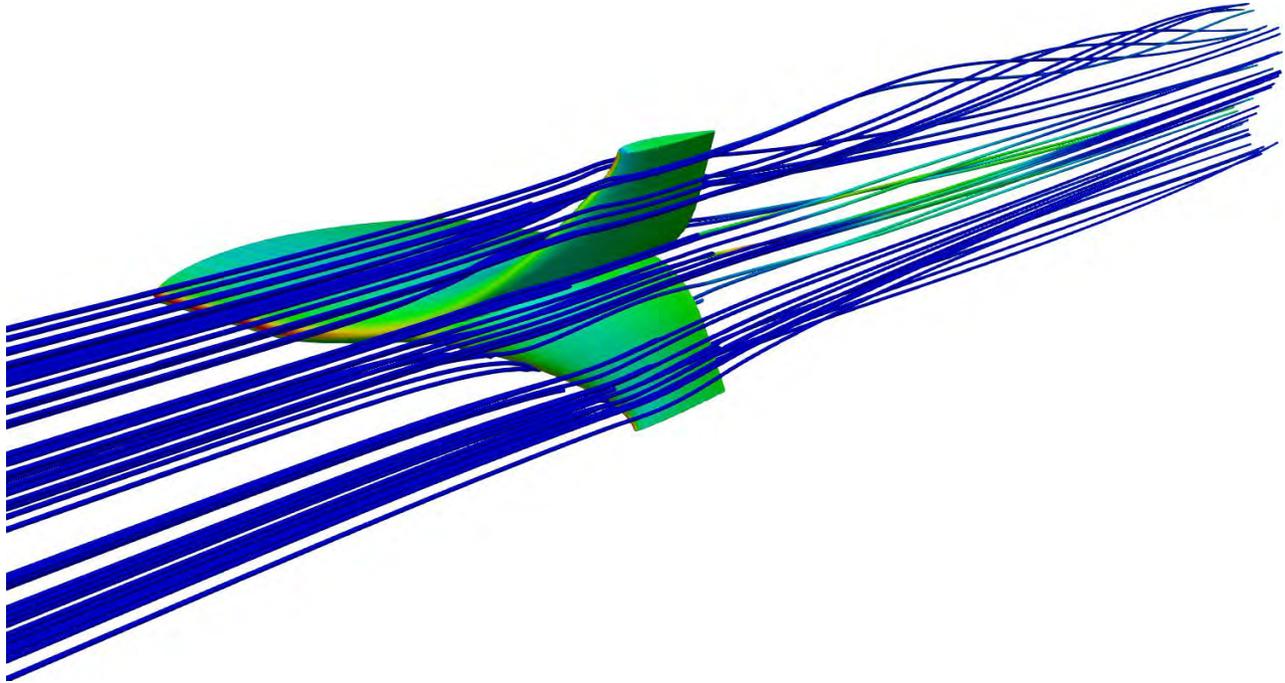


Figura 4.45: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo en cimitarra, sin vértice.

De alguna manera, el flujo resultante en este dispositivo es el de mayor interés para el estudio. Es el caso con el dispositivo de punta alar menos ortodoxo en existencia y no se ha estudiado previamente de manera científica. En la Figura 4.45 notamos que, a pesar de que el dispositivo surge de superponer como superficie primaria al dispositivo hacia arriba y a la superficie secundaria como el dispositivo hacia abajo, el resultado no es la superposición de ambos flujos. Se observa un vórtice mejor consolidado y contenido en cierta región espacial para la superficie primaria que para la secundaria. En el vórtice superior, se nota todavía cierto gradiente en la magnitud de la viscosidad turbulenta, mientras que ésto es casi imperceptible en el vórtice inferior.

En cambio, el flujo que pasa cerca de la unión de ambas superficies presenta un gradiente de viscosidad turbulenta perceptible. Este mismo flujo también parece torcerse, de manera similar a los vórtices de las superficies primaria y secundaria, pero no es evidente que constituya de un vórtice bien consolidado en sí. Si comenzamos a estudiar con detalle a la Figura 4.46, volvemos a observar la franja de presión máxima en el plano $x = 0.0$ m. En el plano

$x = 0.3 \text{ m}$, se presenta la misma zona de baja presión sobre el extradós. No obstante, en ese caso, hay dos regiones de alta presión, menor a la máxima, en las zonas de mayor curvatura que corresponden al corte de las superficies primaria y secundaria del dispositivo.

Difícil de ver, pero estando todavía presente, es una pequeña zona de baja presión localizada en la rendija donde se unen ambas superficies. Esta zona tiene presión mayor que la que está sobre el extradós, pero todavía menor que la zona que está por debajo del intradós. Su presencia se hace más evidente en el plano $x = 0.5 \text{ m}$, donde la rendija crece de tamaño. En el plano $x = 1.0 \text{ m}$, se observa la franja de alta presión, menor a la presión máxima, que sigue la forma del ala. Adicionalmente, se nota la región muy localizada de baja presión asociada al vórtice superior. Es difícil notar la zona análoga para el vórtice inferior. En la Figura 4.47, en el plano $x = 0.0 \text{ m}$, vemos que existe una asimetría entre la zona de flujo ascendente sobre el extradós y la de flujo descendente por debajo del intradós.

Cuando $x = 0.3 \text{ m}$, notamos que la zona de flujo ascendente se limita casi exclusivamente a la parte superior de la superficie primaria. La acompaña una diminuta región de flujo descendente en la parte inferior de la misma superficie, pero casi inmediatamente se trasciende a una zona pequeña de flujo ascendente en la parte superior de la superficie secundaria. Existe una zona de flujo descendente que predomina únicamente por debajo de la superficie secundaria. A medida que nos desplazamos al plano $x = 0.5 \text{ m}$, las dos regiones externas a la rendija de unión de las superficies decrecen de tamaño, mientras que las zonas internas al hueco entre superficies crecen. No sólo crecen, sino que se desplazan más hacia la punta de cada superficie.

Además, sobre el resto del extradós se aprecia la zona de flujo descendente general que aparecía en las demás alas. En cuanto llegamos al borde de salida, en $x = 1.0 \text{ m}$, esta zona general de flujo descendente crece hasta cubrir absolutamente toda la región sobre el extradós. Aparece una región muy distintiva de flujo ascendente en la esquina que se forma entre la superficie secundaria y el intradós, siendo más notable para el ala de mayor envergadura. En este plano, la región de flujo descendente en la punta de la superficie secundaria ha disminuido considerablemente de tamaño. Ocurrió algo similar con la zona de flujo ascendente cerca de la punta de la superficie primaria.

Los detalles que se acaban de mencionar revelan que ambos vórtices, tanto el superior como el inferior, tienen la misma dirección de rotación. En donde se unen ambas superficies, observamos una zona de flujo descendente mucho más pequeña y con menor magnitud que las demás. También se observa una anomalía similar a la que se presentó en los casos anteriores, pero sólo en el caso de envergadura larga. En la Figura 4.48, vemos el enrollamiento de los vórtices superior e inferior. Queda claro que el superior tiene mayor tamaño que el inferior y que los valores extremos de v_y en el vórtice superior son más pronunciados que en inferior.

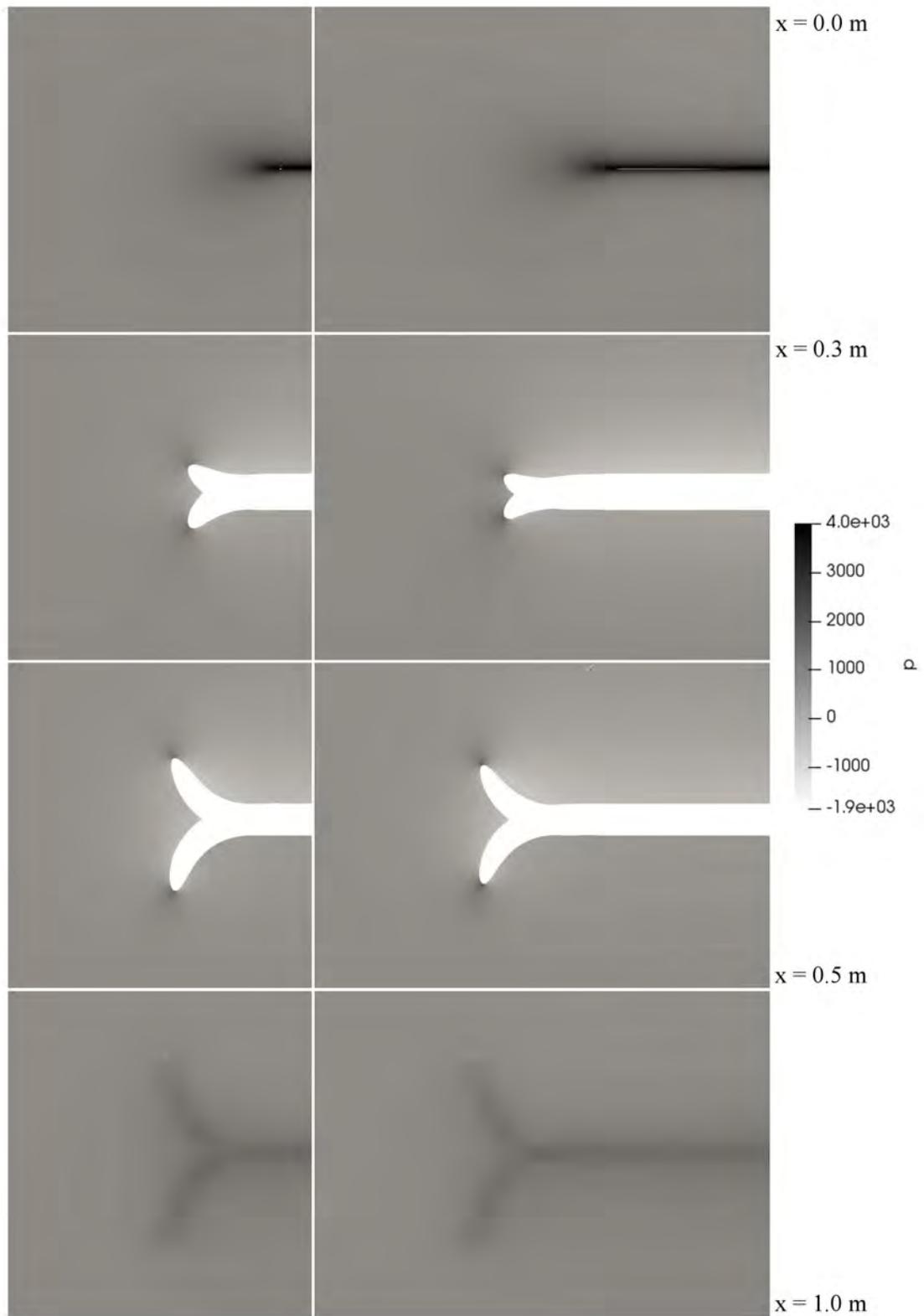


Figura 4.46: Presión (p) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice.

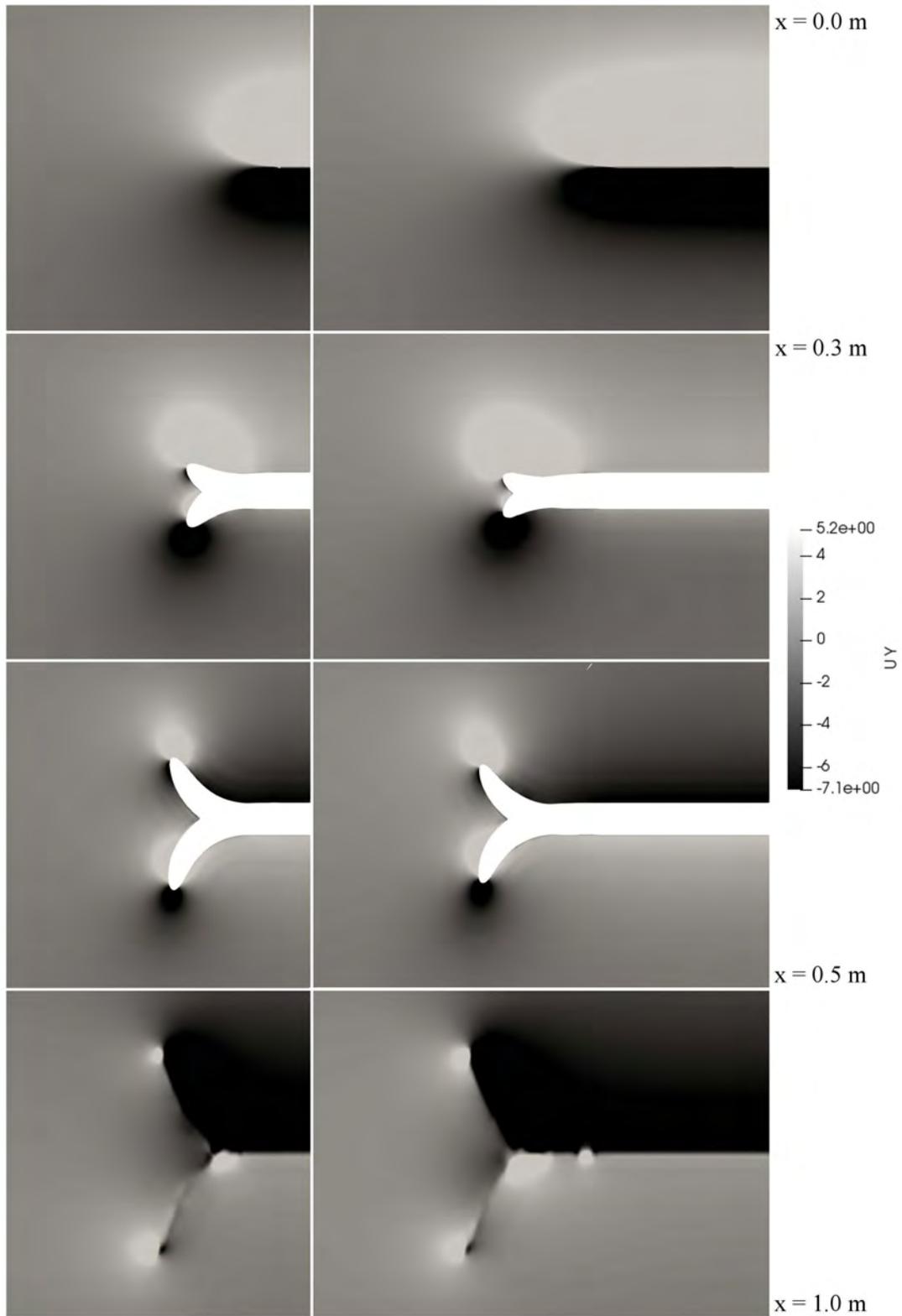


Figura 4.47: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).

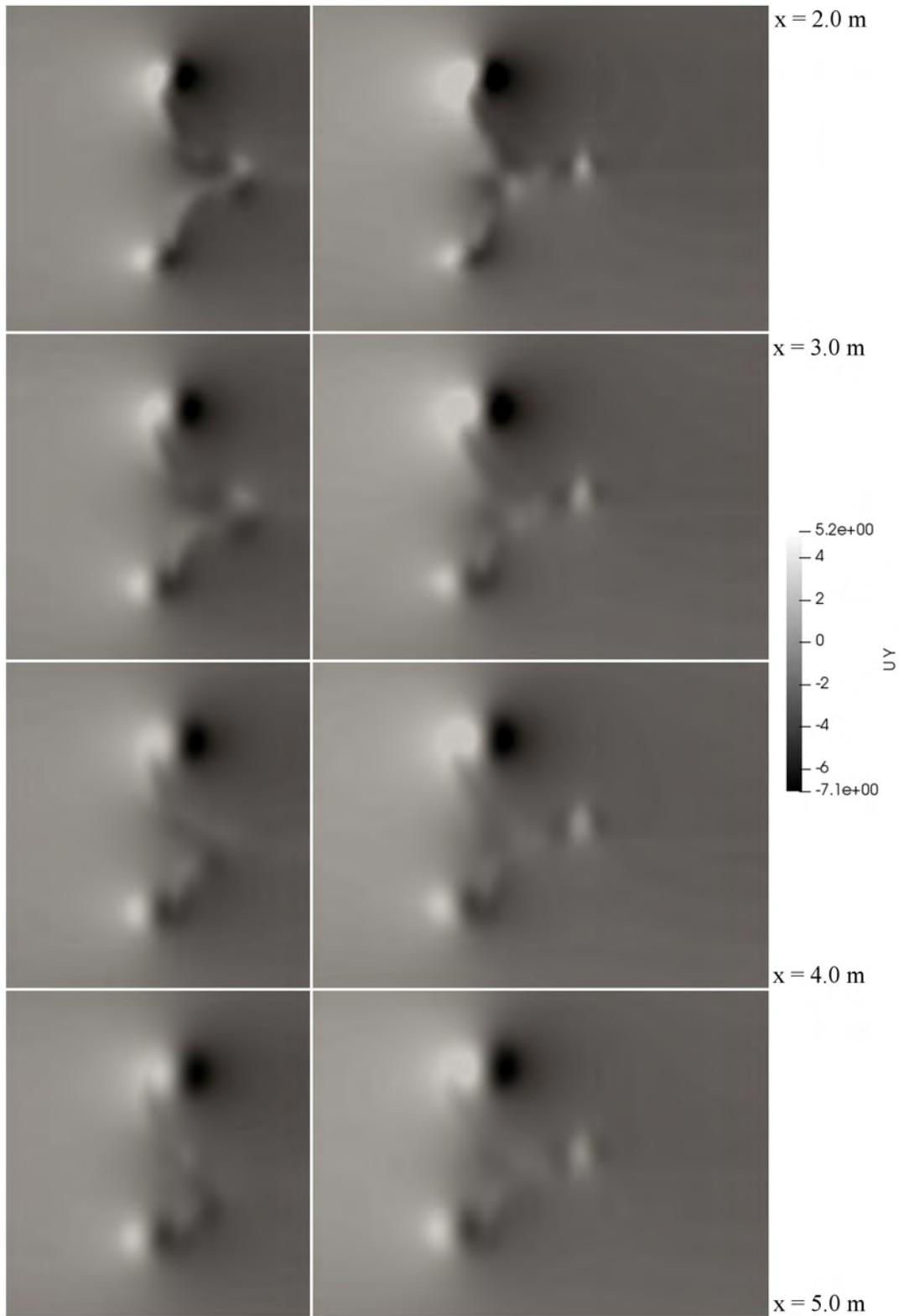


Figura 4.48: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).

Más allá de estas observaciones, no hay más cosas por resaltar en esta figura. Pasando a la Figura 4.49, se presenta cierta simetría en las regiones de flujo lateral para los planos $x = 0.0$ m y $x = 0.3$ m . Se observa que, por encima del extradós y debajo del intradós, hay una tendencia del fluido a viajar hacia la raíz del ala. Del lado donde termina la geometría, hay una tendencia del flujo a alejarse de la raíz del ala. Cuando llegamos al plano $x = 0.5$ m , esta simetría se pierde por completo. La región de flujo lateral negativo sobre el extradós crece desproporcionadamente en relación con la que está debajo del intradós. Esta última no crece apreciablemente, pero se desplaza hacia la punta de la superficie secundaria. La región de flujo lateral positivo se ha dividido en dos, una pequeña en la superficie primaria y una de tamaño mediano junto a la superficie inferior.

Cuando la envergadura es corta, está muy marcada una zona de flujo lateral negativo en la rendija donde se unen las dos superficies. Cuando la envergadura es larga, esta región está presente, pero destaca mucho menos. Si llegamos al plano $x = 1.0$ m , vemos un patrón complejo. El vórtice superior se caracteriza por tener una zona de flujo lateral negativo predominante. Del lado donde acaba el ala, hay una zona muy marcada de flujo lateral negativo a lo largo de la parte superior de la superficie secundaria. Ésto no ocurre a lo largo de la parte inferior de la superficie primaria. La zona de flujo lateral positivo tampoco predomina en el vórtice inferior, pero sí se nota otra zona de este tipo cerca de la unión de ambas superficies. La misma tiende a ser de mayor tamaño para mayor envergadura.

La anomalía está muy clara en el ala de mayor envergadura. Continuando con la Figura 4.50, se nota una diferencia peculiar entre ambas envergaduras. La zona que correspondería a la rendija donde se unen ambas superficies es de flujo predominantemente negativo para la envergadura corta y de flujo principalmente positivo para la envergadura larga. De cualquier forma, estas dos zonas se difuminan conforme avanzamos aguas-abajo, perdiéndose por completo para el plano $x = 5.0$ m . Como se mencionaba anteriormente, el vórtice superior está mucho mejor constituido que el inferior y los valores extremos de v_z siguen siendo más pronunciados para el primero.

En general, la Figuras 4.51 nos dice lo mismo sobre la aparición de la zona de alta viscosidad turbulenta. Asimismo, la Figura 4.52 cuenta la misma historia sobre los vórtices. El superior, el de mayor tamaño y el más consolidado de los dos, se enrolla en sentido horario. Por otro lado, el inferior es más pequeño y difuso, pero se enrolla en el mismo sentido. La anomalía es evidente en la envergadura larga debido a la alteración que produce en la zona de alta viscosidad turbulenta. Lo que es notable es que una zona nueva, de alta viscosidad turbulenta, emerge de la rendija de unión entre ambas superficies. Ésto ocurre a pesar de que no se podía identificar ningún vórtice emanando de aquí, a diferencia de las anomalías que ya se han comentado.

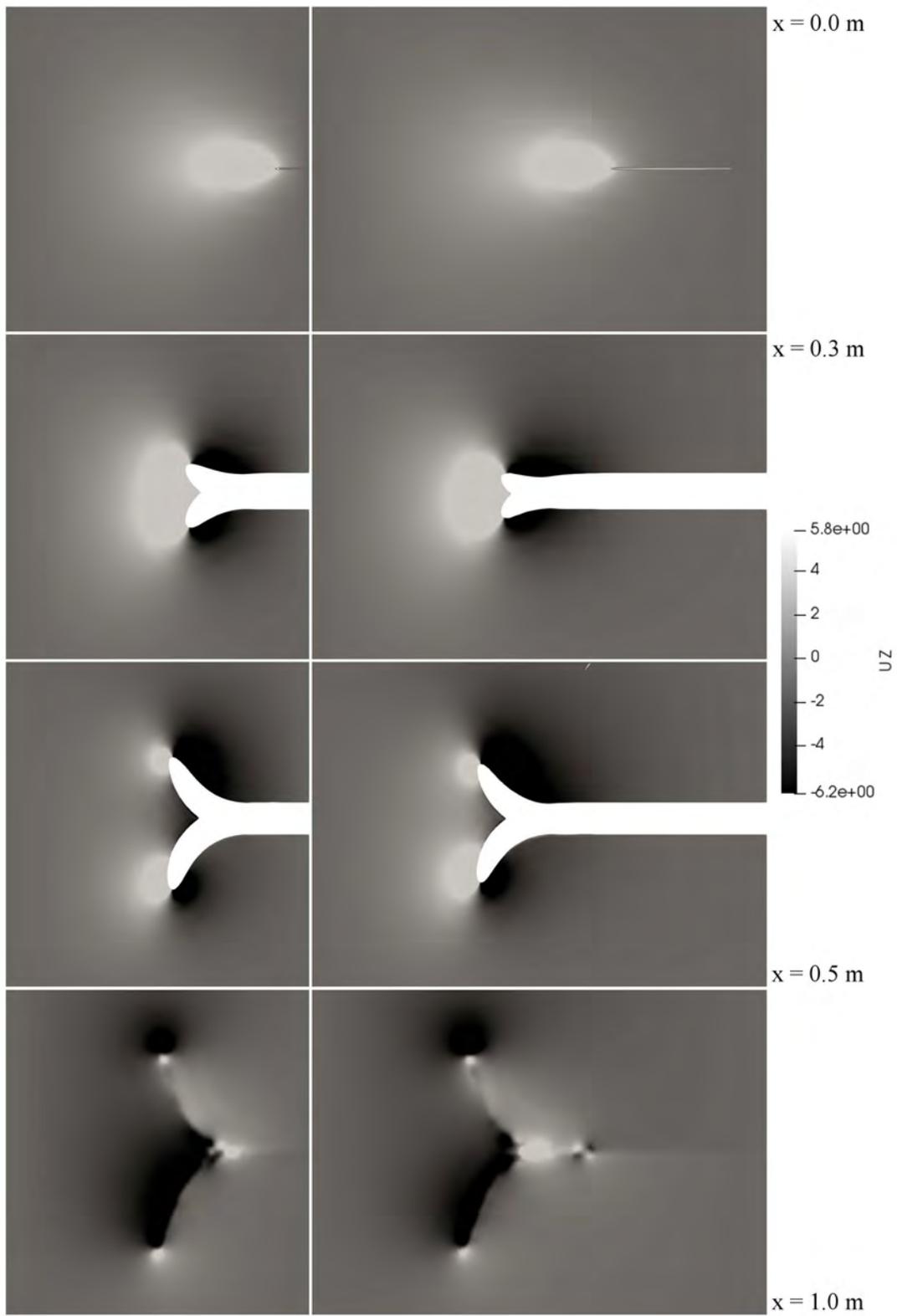


Figura 4.49: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).

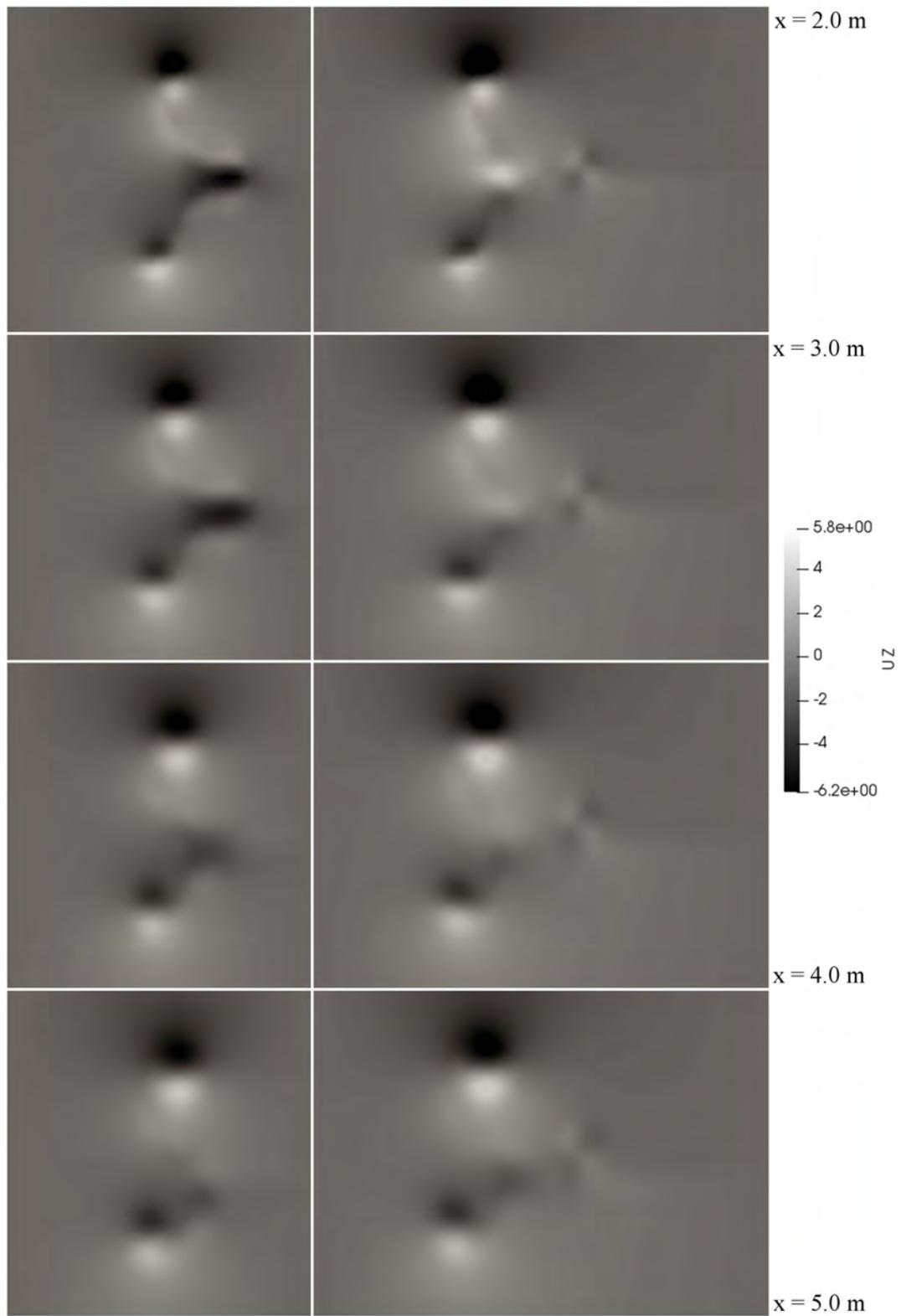


Figura 4.50: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).

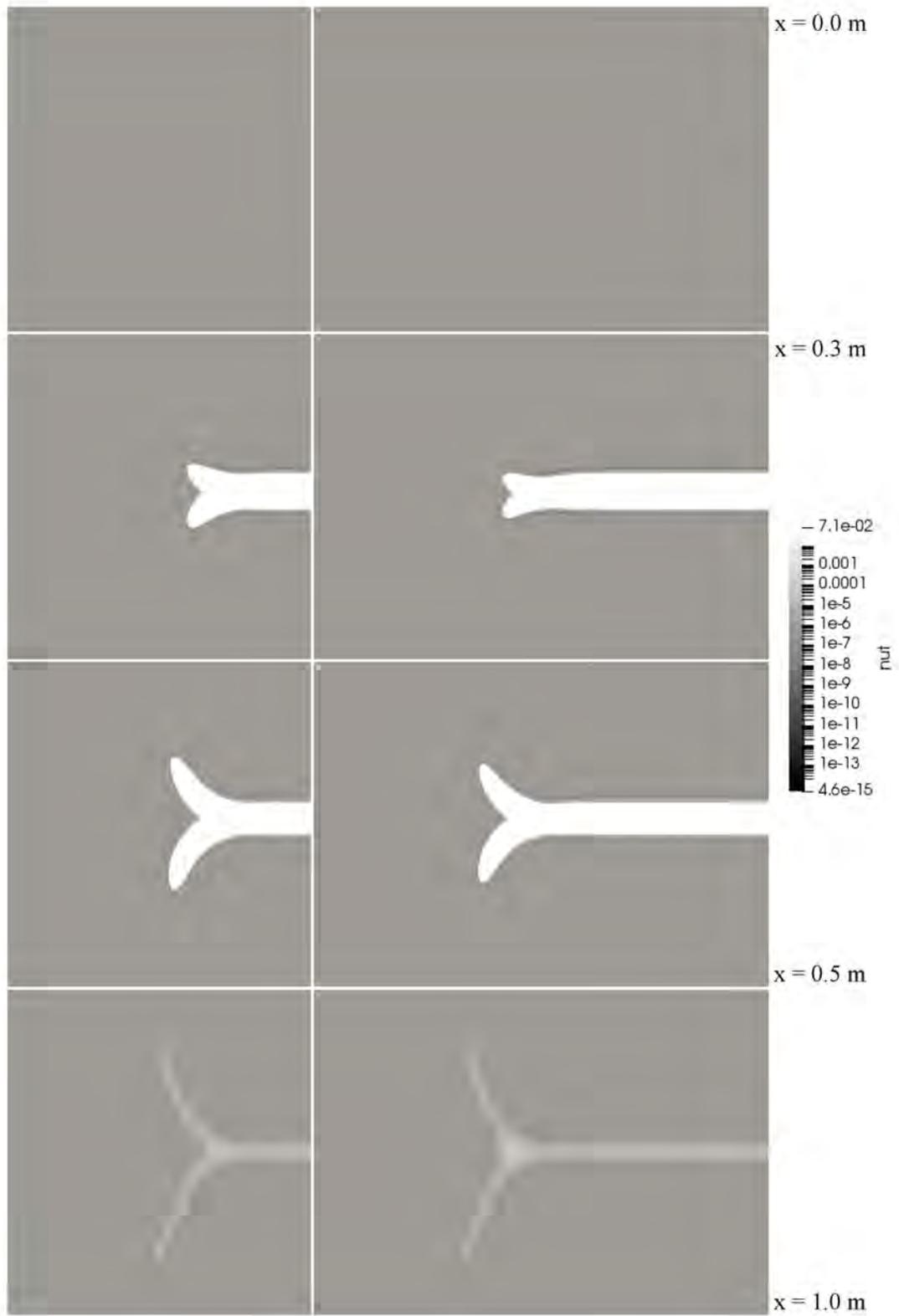


Figura 4.51: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 1).

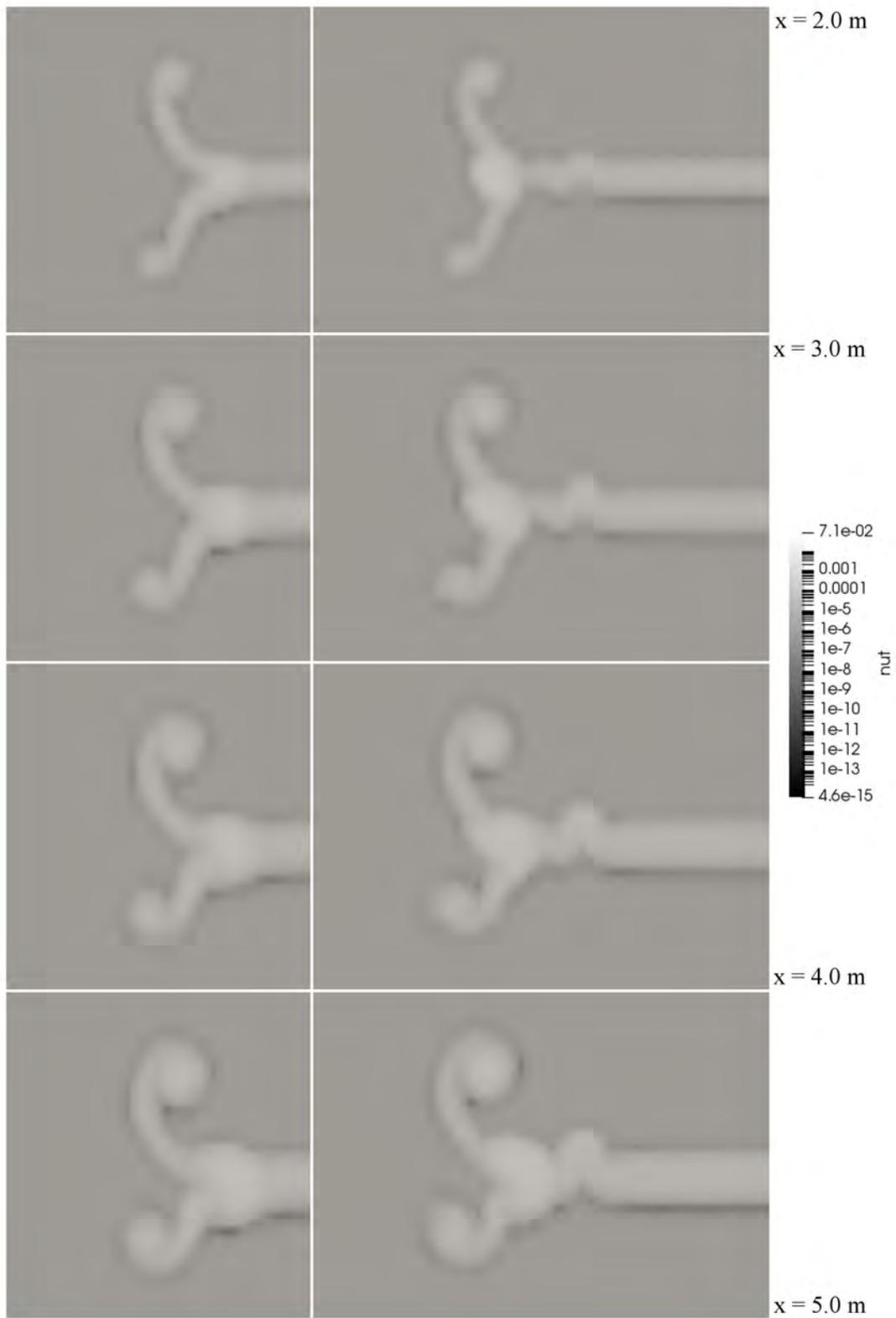


Figura 4.52: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, sin vértice (parte 2).

4.8. Ala finita (con dispositivo de punta alar en cimitarra, con vértice)

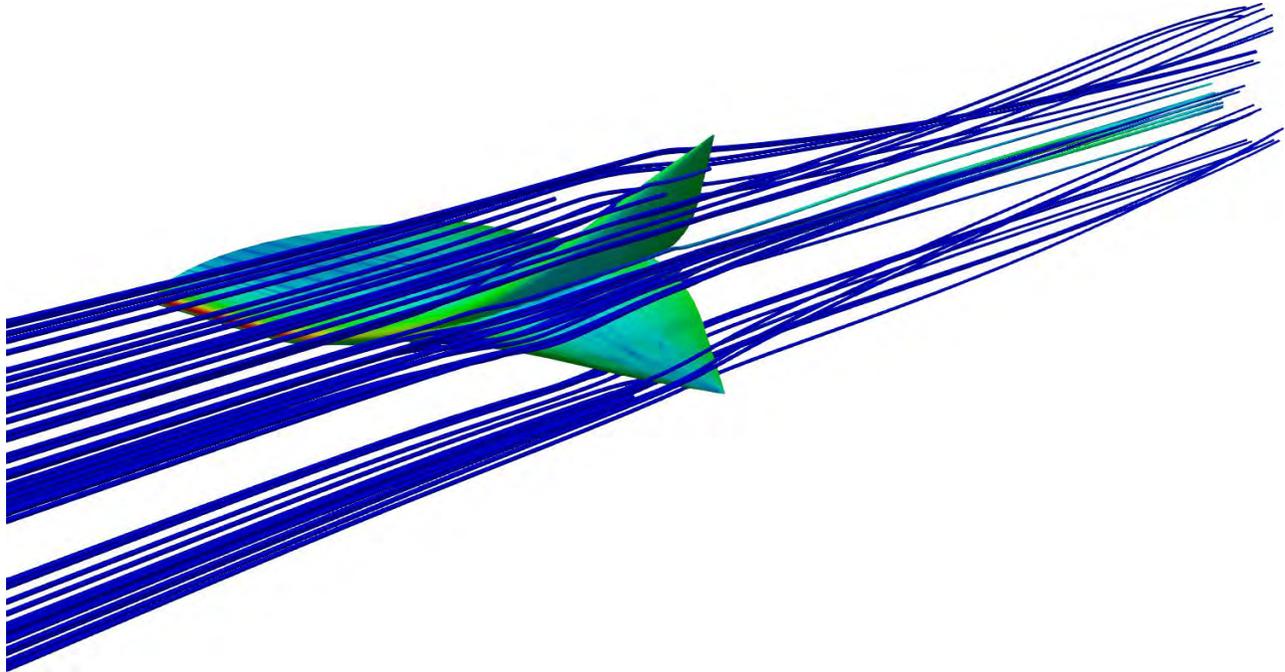


Figura 4.53: Tubos de corriente alrededor de ala finita con dispositivo en cimitarra, con vértice.

Esta variante del ala con dispositivo en cimitarra produce un flujo con muchas similitudes al diseño anterior. Se observan dos vórtices, uno generado alrededor de la superficie primaria y otro alrededor de la secundaria, así como una zona con un gradiente significativo de viscosidad turbulenta en la zona de unión entre ambas superficies. Nuevamente, el flujo no es exactamente una superposición de los flujos resultantes de los dispositivos hacia arriba y hacia abajo que terminan en vértice, a pesar de que el cuerpo sea una superposición de geometrías. Si comparamos contra la Figura 4.46, la Figura 4.54, se observan aproximadamente las mismas regiones de presión. Incluso en magnitud, ϱ no cambia de forma apreciable. El núcleo del vórtice resalta solamente en la superficie primaria, como esta zona de presión baja muy localizada.

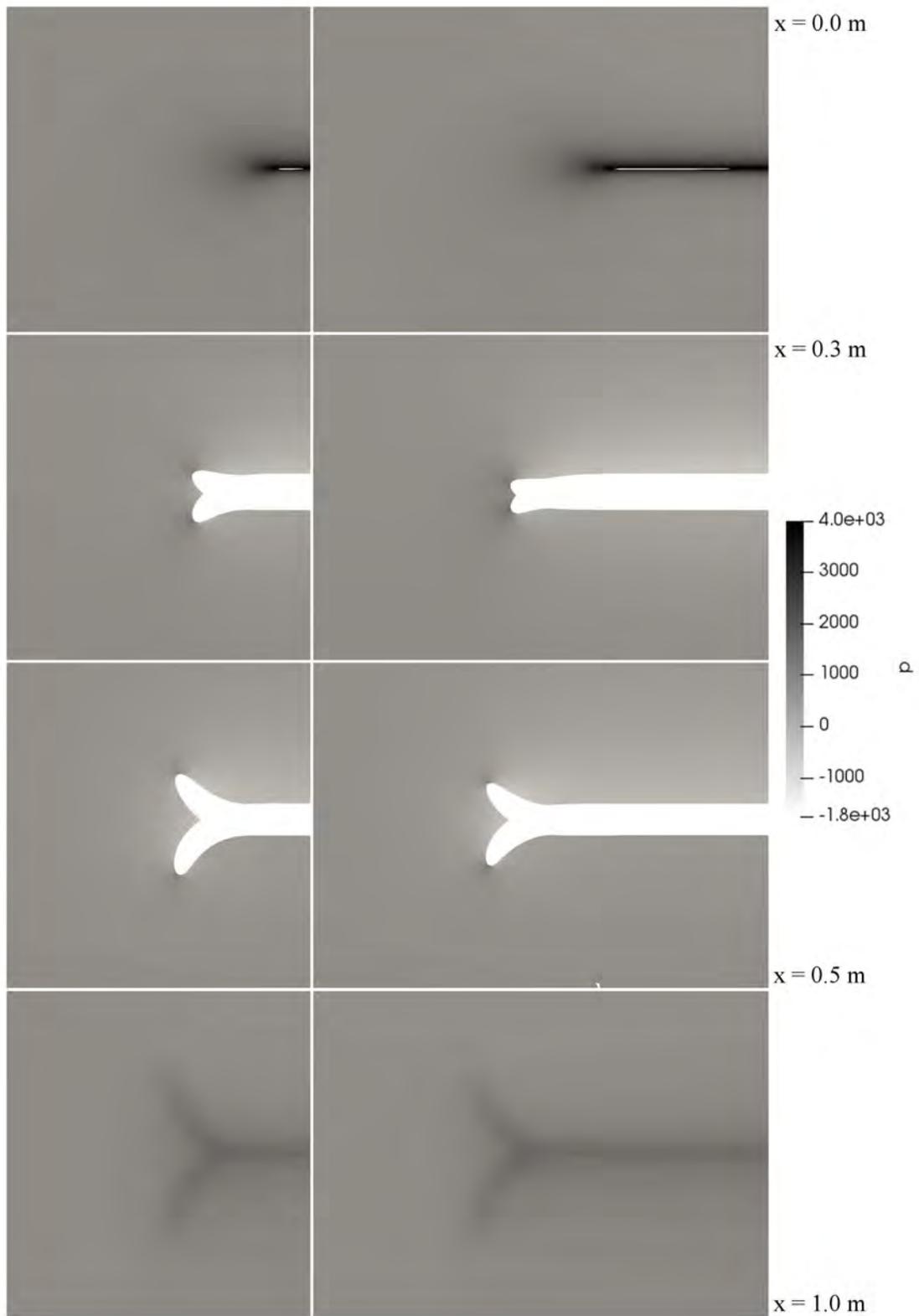


Figura 4.54: Presión (ρ) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice.

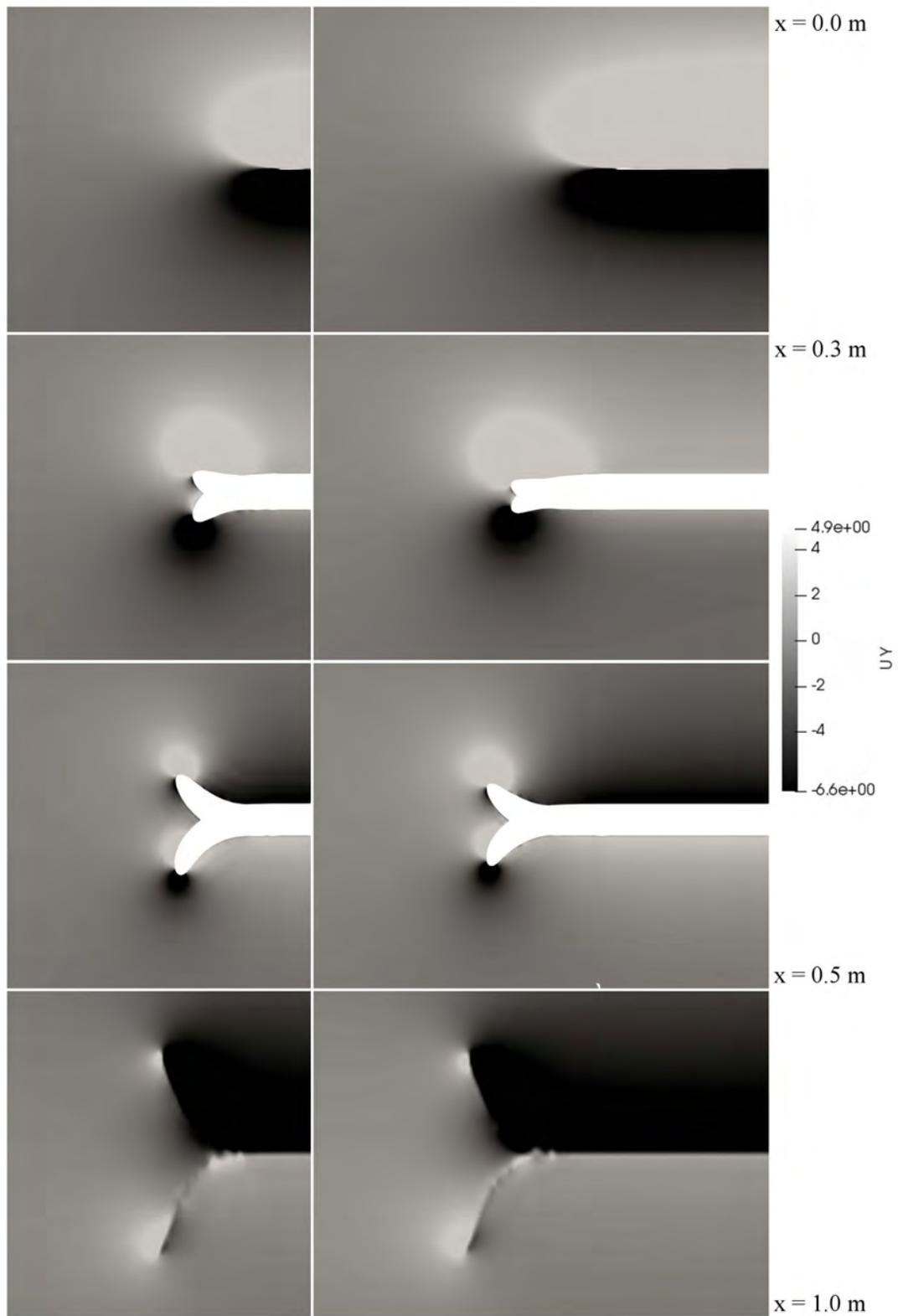


Figura 4.55: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 1).

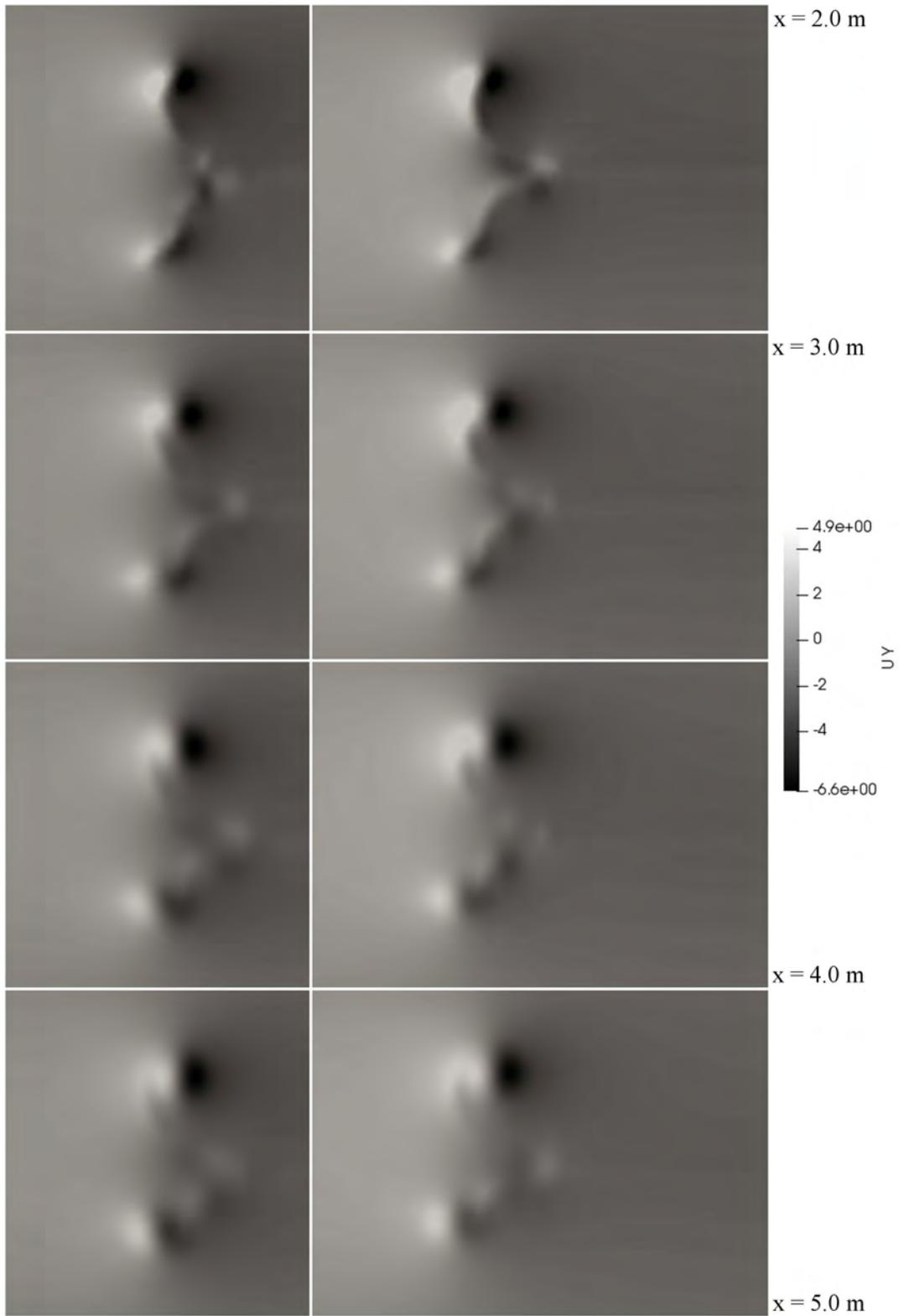


Figura 4.56: Componente de la velocidad en y (v_y) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 2).

En las Figuras 4.55 y 4.56, se muestran aproximadamente las mismas regiones de flujo ascendente y descendente alrededor de las superficies. El cambio más significativo que se puede notar radica en las magnitudes, pues el valor máximo de v_y es mayor para el dispositivo que no termina en vértice. En cambio, el valor mínimo de v_y es inferior en el dispositivo que termina en vértice. En el plano $x = 1.0$ m, es interesante ver que la región de flujo ascendente ubicada entre el ala base y la superficie secundaria, del lado del intradós, no está presente. La anomalía sobre el borde de salida tampoco se puede apreciar. El vórtice superior se comienza a formar junto a una zona de flujo descendente predominante sobre el extradós, mientras que el vórtice inferior no está asociado a una región de un flujo descendente tan marcado. Estas dos últimas características las comparte el ala con dispositivo en cimitarra que no termina en vértice.

El desarrollo de los dos vórtices no presenta mayores diferencias. El inferior sigue siendo más difuso que el superior. En las Figuras 4.57 y 4.58 se sigue teniendo la región de flujo lateral hacia la punta del ala en el plano $x = 0.0$ m. A diferencia de lo que ocurre con v_y , el valor máximo de v_z es mayor para el caso que no termina en vértice y el valor mínimo es menor también para el caso mencionado. En el plano $x = 0.3$ m, nuevamente se aprecian las dos regiones de flujo lateral hacia la raíz del ala, sobre el extradós y por debajo del intradós, y la zona combinada de flujo lateral positivo entre las superficies primaria y secundaria. Al pasar al plano $x = 0.5$ m, la región de flujo lateral negativo sobre el extradós crece más que la que está por debajo del intradós. Asimismo, la región de flujo lateral ascendente en el extremo del ala se ha dividido en dos. La más pequeña es aquella que está por debajo de la superficie primaria.

Cuando llegamos al plano $x = 1.0$ m, las regiones de distinta magnitud de v_z lucen muy similares a lo que se veía en la Figura 4.49. La excepción es la región de flujo lateral negativo de la superficie secundaria para la envergadura larga. Parece estar menos definida en el caso del dispositivo que no termina en vértice. Para los planos aguas-abajo, la difusión del vórtice vuelve a lucir muy similar al del caso anterior. No se puede encontrar anomalía en el flujo, a diferencia de los casos con dispositivos de una sola superficie. Finalmente, las Figuras 4.59 y 4.60 muestran prácticamente lo mismo. La región de altos valores de ν_t aparece alrededor de las paredes del ala y toda la estela tiene la forma de la geometría en cuanto pasamos a la región aguas-abajo. Tampoco se nota alguna anomalía en este campo. La estela se va ensanchando conforme nos movemos aguas-abajo y hay una región de alta viscosidad turbulenta que se forma donde ambas superficies se unen, tal y como en el caso anterior.

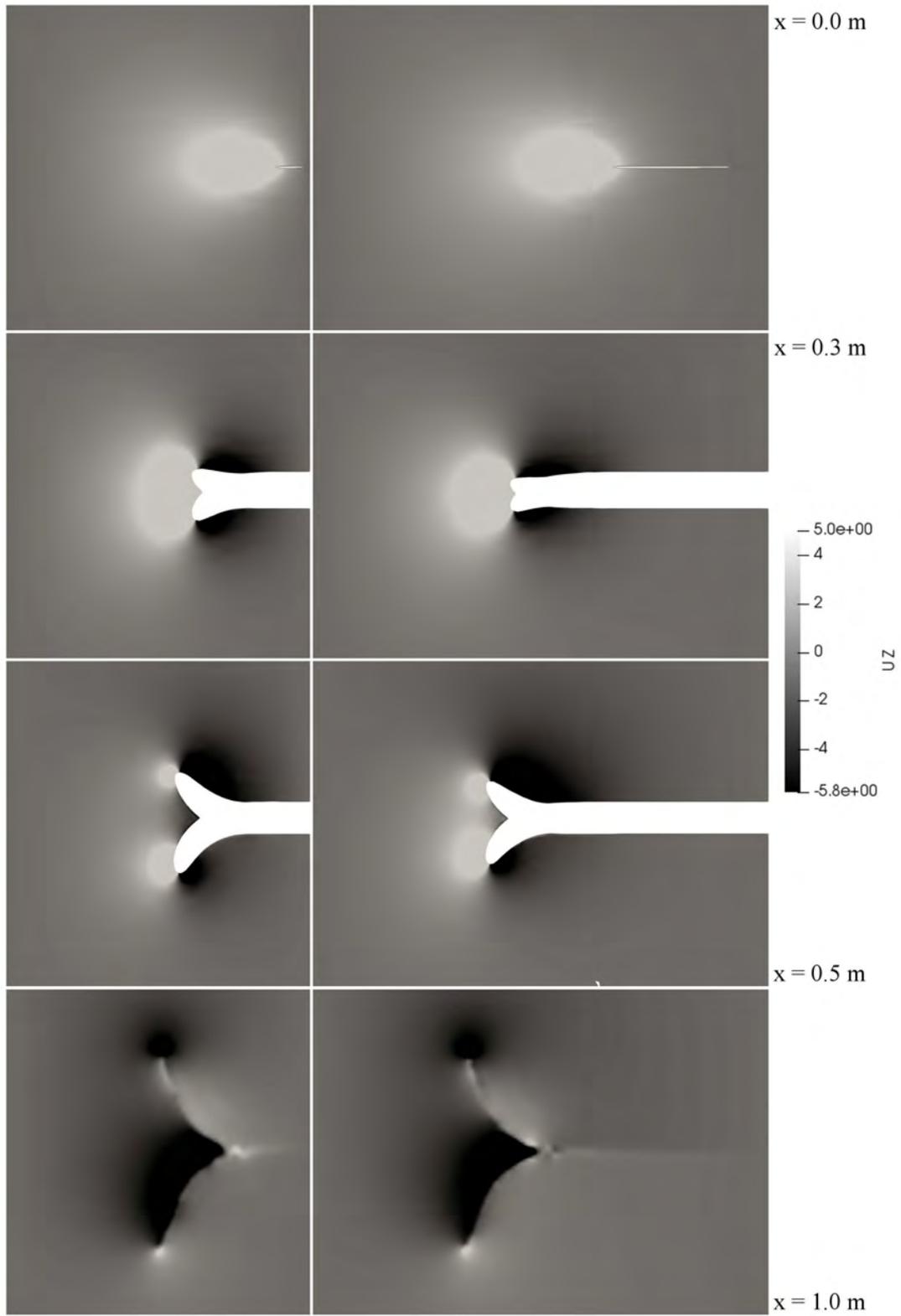


Figura 4.57: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 1).

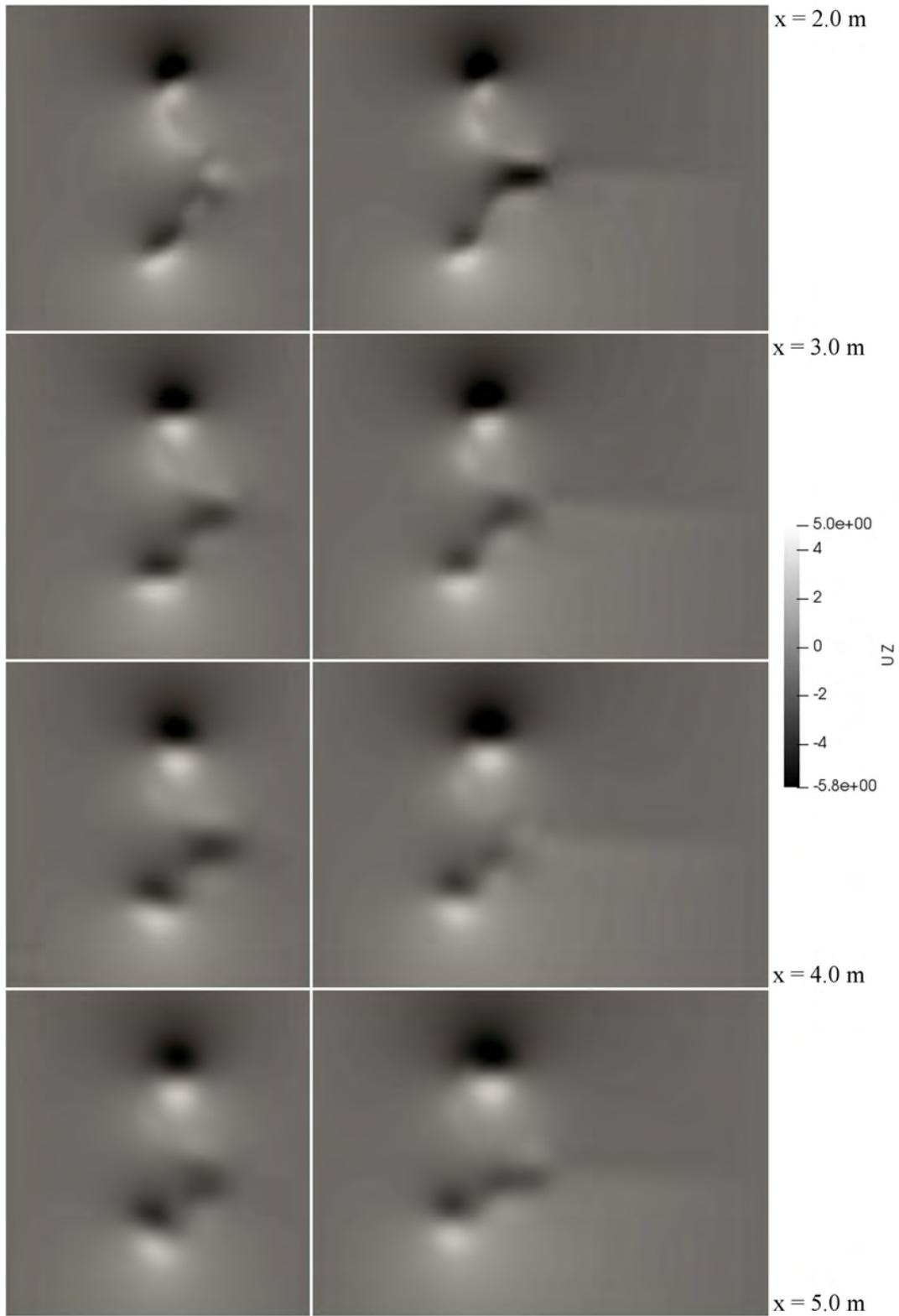


Figura 4.58: Componente de la velocidad en z (v_z) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cimitarra, con vértice (parte 2).

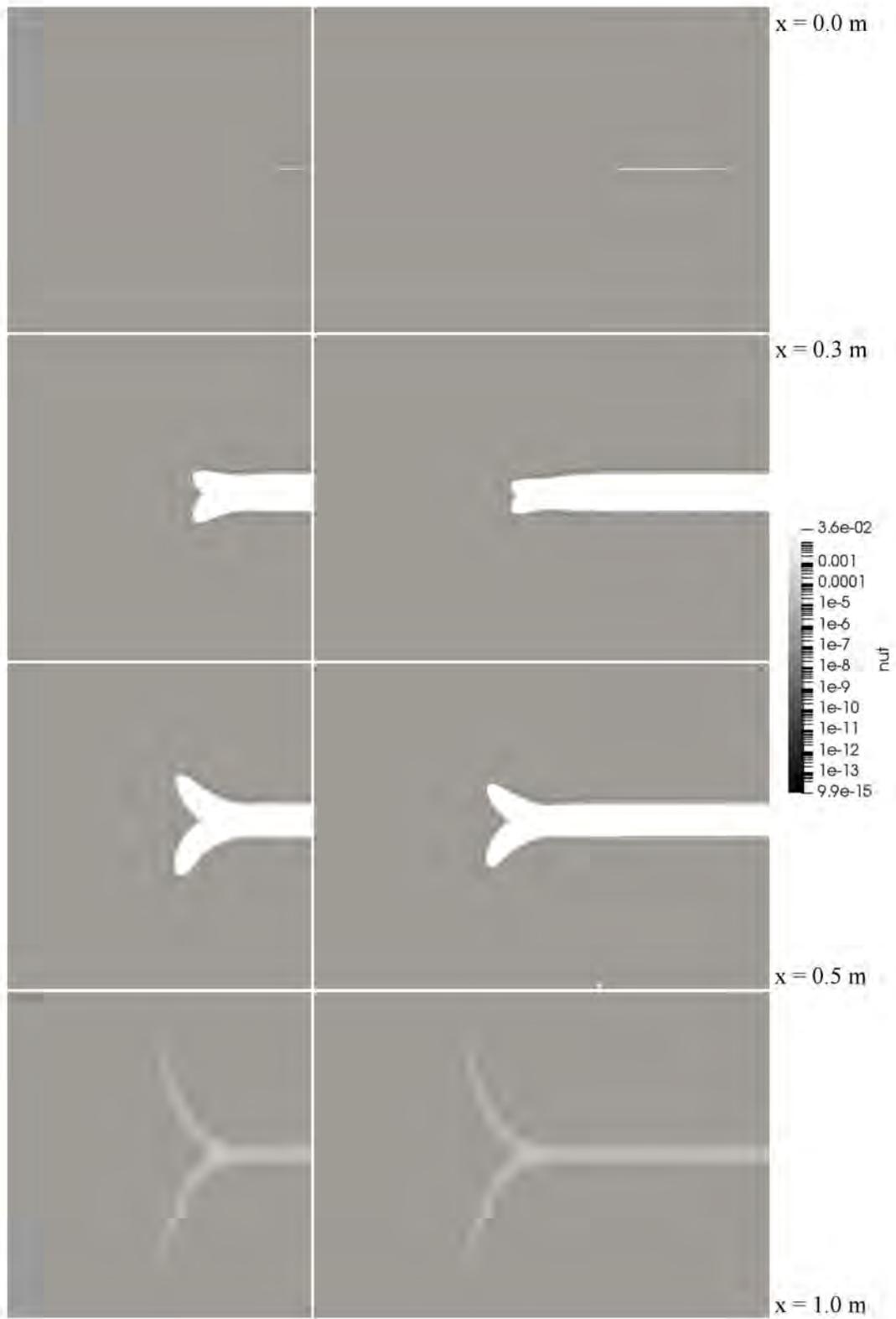


Figura 4.59: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cuitarra, con vértice (parte 1).

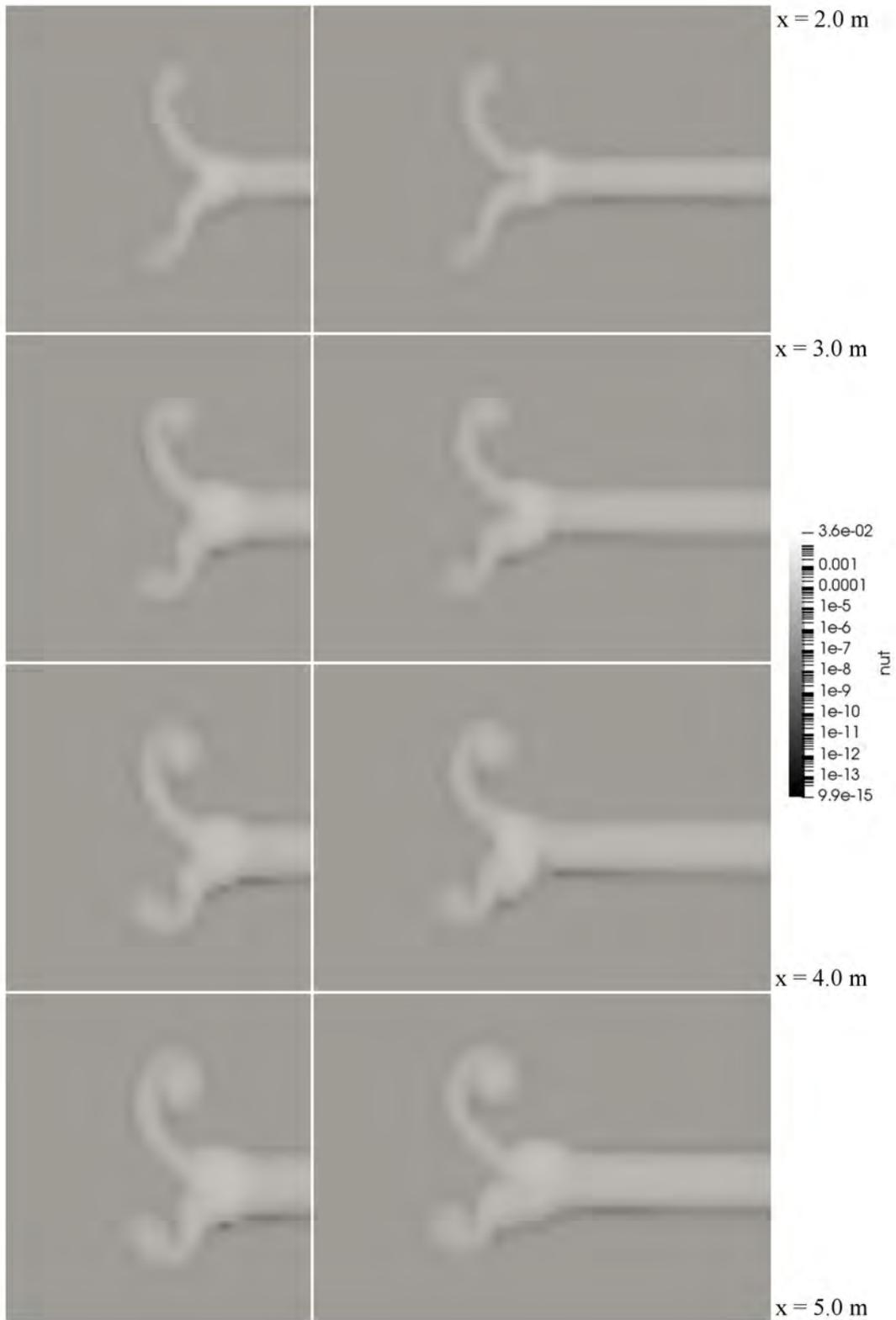


Figura 4.60: Viscosidad turbulenta (ν_t) en distintos planos yz , ala con dispositivo en cuitarra, con vértice (parte 2).

4.9. Coeficientes de arrastre y sustentación

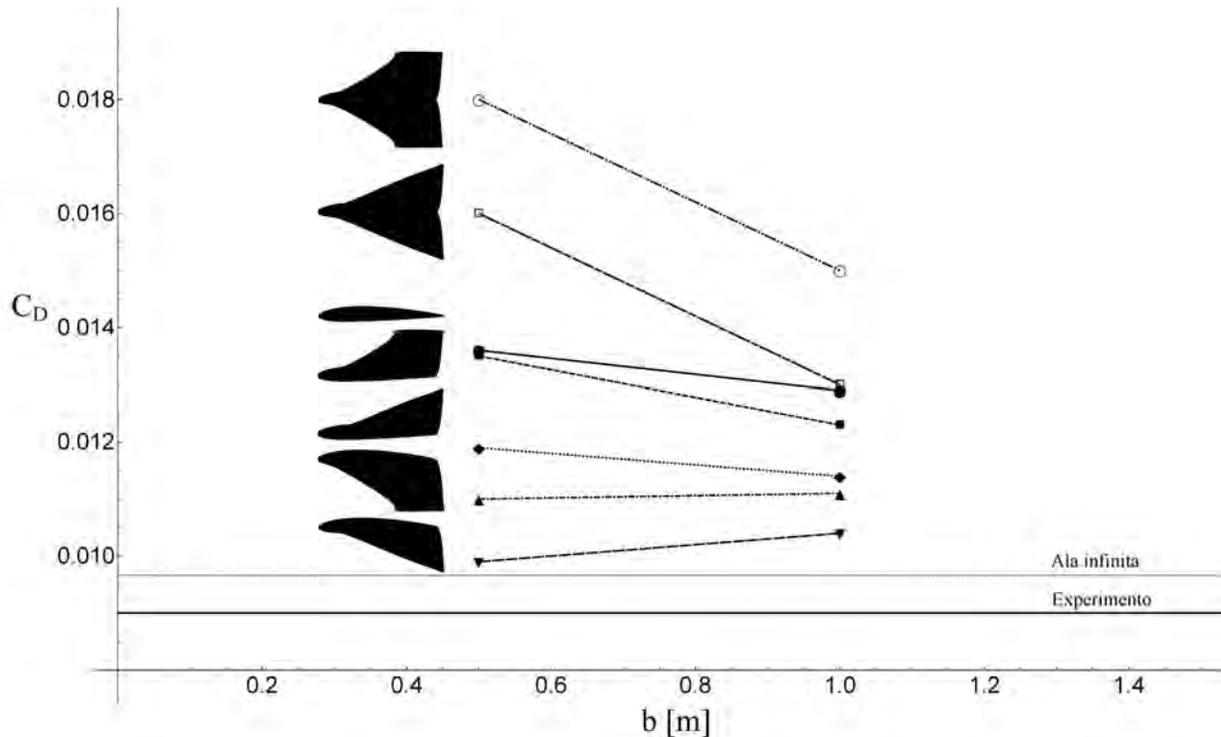


Figura 4.61: Envergadura contra coeficiente de arrastre para alas con distintos dispositivos.

La Figura 4.61 condensa los resultados más importantes de este estudio. Como se podía ver en la Figura 4.3, el arrastre medido en el modelo experimental y el arrastre producido por el ala de envergadura infinita presentan una discrepancia. Desde una perspectiva general, podemos ver que no es equivalente instalar un dispositivo de punta alar en alas de diferentes envergaduras. La diferencia entre los efectos que producen diferentes dispositivos en el arrastre del ala es mayor a envergaduras menores. Además, todas las alas de envergadura finita presentan un arrastre mayor que el ala de envergadura infinita y que el modelo experimental. El arrastre del ala finita sin dispositivo difiere del arrastre presentado por el ala infinita y por el modelo experimental, pero se va pareciendo más al primero a medida que la envergadura se incrementa. Los dispositivos hacia arriba reducen más el arrastre para envergaduras mayores, mientras que los dispositivos hacia abajo lo reducen más para envergaduras menores. Los dispositivos en cimitarra producen un arrastre mayor que el ala sin dispositivo para la envergadura corta. No obstante, conforme la envergadura aumenta, el arrastre asociado disminuye mucho más drásticamente que en cualquiera de los otros casos. A decir verdad, el

arrastre del ala sin dispositivo es similar al arrastre del dispositivo en cimitarra, con vértice, para la envergadura larga. Por otro lado, el arrastre producido por el ala sin dispositivo es muy similar al producido por el ala con dispositivo hacia arriba, sin vértice, para la envergadura corta. Entre pares de dispositivos, ya sean hacia arriba, hacia abajo o en cimitarra, aquél que no termina en vértice siempre produce un arrastre mayor. Los dispositivos hacia abajo son los que más reducen el arrastre para las envergaduras estudiadas y, de éstos, el que termina en vértice produce un arrastre similar que el ala infinita para una envergadura corta.

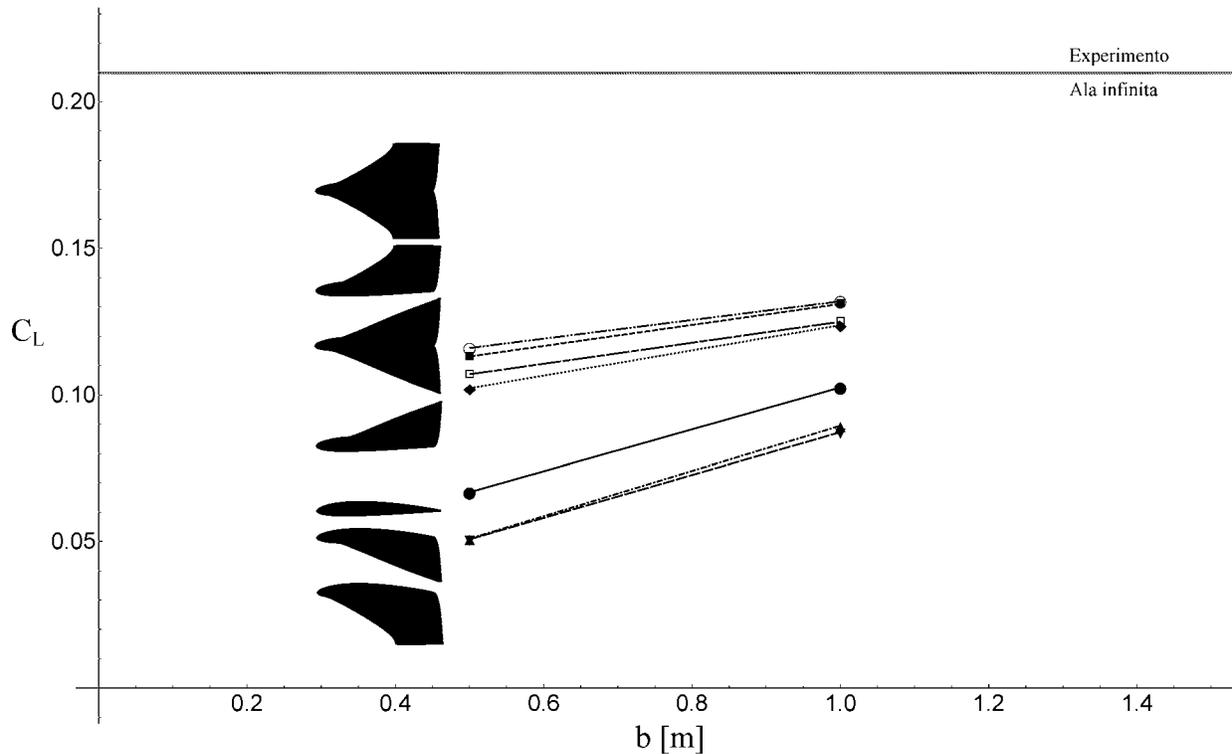


Figura 4.62: Envergadura contra coeficiente de sustentación para alas con distintos dispositivos.

La Figura 4.62 complementa la información obtenida sobre el arrastre. En este caso, como se veía en la Figura 4.4, la sustentación medida experimentalmente y la producida por el ala infinita son iguales. Al igual que con el arrastre, el efecto de los dispositivos no es el mismo para alas de envergadura distinta. La diferencia entre los efectos vuelve a ser más notoria a envergaduras menores que a envergaduras mayores. Asimismo, todas las alas finitas producen menos sustentación que el ala infinita y que el modelo experimental. La discrepancia entre la sustentación producida por el ala finita sin dispositivo y el ala infinita se corrige a medida que se incrementa la envergadura. A diferencia de lo que ocurre con el arrastre, la sustentación siempre aumenta entre mayor es la envergadura, sin importar el dispositivo. Sin embargo,

los dispositivos hacia abajo reducen la sustentación del ala en comparación con el ala sin dispositivo.

Los dispositivos hacia arriba y en cimitarra aumentan la sustentación en comparación con el ala sin dispositivo. De estos cuatro dispositivos, los dos que terminan en vértice incrementan la sustentación menos que los que no terminan en vértice. En cambio, de los dos dispositivos hacia abajo, el que no termina en vértice reduce la sustentación en un mayor grado que el que termina en vértice. Los incrementos más drásticos de sustentación en función de la envergadura los manifiestan las alas con dispositivos hacia abajo y el ala sin dispositivo. El efecto que producen los dispositivos hacia abajo, con y sin vértice, es muy similar para las envergaduras estudiadas. La sustentación producida por el dispositivo hacia arriba y la producida por el dispositivo en cimitarra, ambos terminando en vértice, se vuelven muy similares cuando la envergadura es larga. Ocurre algo análogo para el dispositivo hacia arriba que no termina en vértice y el dispositivo en cimitarra que tampoco termina en vértice.

4.10. Discusión

4.10.1. Simulaciones de ala infinita

En general, los resultados nos muestran una gran cantidad de información acerca de un mismo fenómeno, pero que no parece cambiar fundamentalmente de naturaleza de un caso de estudio al otro. Comenzaremos discutiendo los resultados para ala de envergadura infinita y los rangos de validez del modelo de turbulencia. Lo primero que hay que entender es que el flujo que se observa en las Figuras 4.1 y 4.2, *no es el flujo real, sino un flujo ficticio que resultó de promediar las ecuaciones de Navier-Stokes*[58]. La consecuencia de esto es que las regiones donde el flujo real se comporta de forma realmente estacionaria lucirán iguales que si se hubieran resuelto las ecuaciones sin modelos. En cambio, aquéllas donde el flujo haya sido de carácter transitorio¹¹ no se verán iguales a la realidad. Debido a esto, las interpretaciones de lo que se observa en los resultados se tienen que hacer con cautela.

Tomando en cuenta lo descrito en la Sección 2.1, los campos de ρ , v_x y v_y para ala infinita lucen cualitativamente correctos. Los campos en las regiones sobre el extradós, por debajo del intradós y adyacente al borde de ataque, siempre y cuando no sean junto a la pared del ala, deberían reflejar las características un flujo irrotacional. Es decir que debe de existir una relación clara entre la magnitud de la presión y la magnitud de la velocidad. Ésto es cierto,

¹¹Es decir, las regiones dentro de la capa límite turbulenta y la estela turbulenta en sí.

debido a que las zonas de alta presión corresponden a las de baja velocidad y viceversa. Asimismo, para las regiones de flujo irrotacional, las zonas de valores positivos de v_y son lógicas, dado que se requiere de un flujo ascendente para rodear la geometría. Se cumple lo mismo para zonas de valores negativos de v_y , cuando es necesario que el flujo sea descendente para que rodee el cuerpo.

Cerca del borde de salida, no es posible ver ningún tipo de burbuja de separación¹² en los campos de v_y y v_x . Es difícil decir si esto representa un error en la simulación o no. Podría argumentarse que debido a que los demás campos lucen cualitativamente correctos y que la simulación convergió, la solución numérica de esta ala para $\alpha = 0^\circ$, con el modelo de Spalart-Allmaras y para los valores utilizados de Re , en verdad no predice recirculación alguna¹³. Esto no sería raro, dado que para otros perfiles asimétricos, distintos modelos de turbulencia pueden llegar a predecir recirculación de maneras diferentes, o bien, no predecirla en absoluto[71]. Sin embargo, se sabe a partir de evidencia experimental y de simulaciones numéricas directas, que el comportamiento general de alas es producir separación del flujo sobre el extradós[40], aún para casos donde $\alpha = 0^\circ$. La explicación más sensata es que se perdió información sobre la separación debido a la remoción del borde de salida en nuestra geometría.

Esta remoción tenía como objetivo evitar problemas potenciales con la obtención de la solución numérica debido al borde puntiagudo. Sin embargo, el resultado no nos proporcionó mucha más información sobre cómo se comporta el flujo alrededor de esta zona tan crítica. En otros estudios de alas con el borde de salida recortado, probablemente debido a la resolución de la malla en esta región, aparece una zona de recirculación[83]. En este caso, sólo podemos distinguir una cierta lógica en v_x y v_y hasta una determinada distancia aguas-abajo, donde se refleja la estela. La magnitud de v_x es menor que la de la corriente libre en esta estela, debido a que la viscosidad produce una desaceleración del flujo cercano a la pared del ala. Asimismo, la magnitud de v_y vuelve a hacerse cero rápidamente debido a que ya no hay necesidad de rodear a la geometría¹⁴.

En dado caso, la región de alta presión, menor que la máxima, detrás del borde de salida es cualitativamente correcta. La razón es que esto implica que existe una diferencia de presión entre el borde de ataque y el borde de salida, por lo que el arrastre por presión definitiva-

¹²Aún siendo una solución estacionaria, es posible ver recirculación promedio[62].

¹³Aunque no se incluyeron en este documento, los resultados de las simulaciones para $\alpha = 15^\circ$, realizadas de manera no tan sistemática, sugieren que el modelo predice las burbujas de separación para algún valor de α comprendido entre 10° y 15° .

¹⁴Es cierto que el déficit de flujo en la dirección x dentro de la capa límite induce un flujo secundario en la dirección y , pero esto ocurre precisamente en la región comprendida por la capa, que es demasiado pequeña como para verse en nuestra simulación de ala infinita.

mente es diferente de cero¹⁵. En otras palabras, la solución numérica describe a un flujo real, que no se comporta según la teoría de flujo potencial. Además, la alta presión en el borde de salida y la baja presión sobre el extradós resultan en un gradiente de presión adverso, lo cual es físicamente correcto. De la misma forma, el hecho de que la presión sobre el extradós sea menor que la presión por debajo del intradós concuerda con la existencia de la fuerza de sustentación.

El último campo que queda por discutir es el de ν_t . Si bien *no toda región con vorticidad es turbulenta, la turbulencia siempre puede encontrarse en regiones con vorticidad*¹⁶. Bajo esta lógica es que se planteó que la norma representativa \tilde{S} de la generación de turbulencia, en el modelo de Spalart-Allmaras, estuviera en términos del tensor de vorticidad[83]. Es por eso que, aunque no son totalmente equivalentes, podríamos decir que el campo de ν_t nos proporciona aproximadamente la misma información que si estuviéramos graficando la vorticidad. La ubicación de la zona con altos valores de ν_t es lógica, debido a que la transición de la capa límite al régimen turbulento ocurre en alguna zona alrededor del ala. No podemos decir con exactitud que aquí sea exactamente donde ocurre la transición, dado que la resolución de malla no nos permite capturarla. Además, el algoritmo no tiene modelo de predicción de transición.

Sólo sabemos que el modelo de turbulencia predice que la transferencia de momento turbulenta se vuelve significativa en esta región sobre el extradós y por debajo del intradós. Debido a la resolución de malla mencionada, lo que realmente ocurre en la capa límite queda condensado, en lo que respecta a la simulación, en la función de pared. La construcción del modelo de turbulencia indica que la continuación de la estela aguas-abajo se debe al transporte por advección de la zona de transferencia de momento turbulenta. El ensanchamiento progresivo de la estela se debe a la difusión de esta misma zona debido a la turbulencia misma y debido a la viscosidad. En zonas cercanas a la geometría, la difusión predominante es turbulenta. A medida que nos alejamos aguas-abajo, debido a la transferencia de energía en cascada, la difusión predominante debe ser cada vez más la molecular.

El contraste tan marcado entre la zona de altos valores y bajos valores de ν_t es consistente con la aproximación del flujo alrededor de alas como dos regiones bien distinguibles: una irrotacional y una con alto contenido de vorticidad. El hecho de que lejos de la geometría se tengan los valores de ρ , v_x y v_y definidos para la entrada concuerda con la realidad de que el flujo en esta región debe de ser el de corriente libre. No está de más comentar que

¹⁵No se produce la paradoja de D'Alembert.

¹⁶En aquellas zonas inmediatamente externas a la estela turbulenta, se presentan fluctuaciones en el campo de presión, pero éstas no suelen considerarse propiamente como "turbulencia"[16]. Asimismo, el interior de una capa límite laminar tiene vorticidad, pero no turbulencia.

no se observan inestabilidades de flujo ni estructuras coherentes debido a que éstas han sido promediadas. Todo ésto nos lleva a concluir que *los resultados de la simulación de ala infinita son correctos*. La única característica atípica del flujo promedio que se obtuvo sería la región cercana al borde de salida recortado.

4.10.2. Coeficientes de ala infinita

Los coeficientes C_D y C_L nos proporcionan un panorama más completo de los rangos de validez de las simulaciones. Es evidente que la curva de C_L contra α predicha por las simulaciones es prácticamente idéntica a la curva experimental, siempre y cuando $\alpha \leq 10^\circ$. Sin embargo, para ángulos de ataque mayores, ni siquiera es posible que la simulación converja a una solución estacionaria con los esquemas presentes. Dado que los flujos a altos valores de α sufren de una separación apreciable de la capa límite, realmente son de carácter transitorio. Es por eso que la mayoría de los códigos con ecuaciones promediadas pierden su capacidad de convergencia a una solución. Ésto se debe a que existe más de una sola solución estacionaria válida[58]. Sólo si el vórtice inicial, formado cerca del borde de salida, no es transportado aguas-abajo por advección es que es posible obtener una solución estacionaria[71].

Si bien ésto explica por qué es más fácil encontrar soluciones numéricas para ángulos de ataque bajos, está claro que la predicción numérica de C_D y de C_L no es igual de válida para mismos valores de α . La curva numérica de C_L es reproducida casi a la perfección. Sin embargo, su fidelidad va disminuyendo conforme $\tilde{\nu}$ a la entrada es menor, en especial para valores más elevados de α . Por otro lado, la curva numérica de C_D es completamente diferente a la curva experimental. La única excepción es cuando $\alpha = 0^\circ$ y los valores de $\tilde{\nu}$ son suficientemente pequeños. Ambos comportamientos se deben a la capacidad del modelo de turbulencia para predecir correctamente el flujo¹⁷, ya sea la transición de la capa límite a régimen turbulento o su separación. Cuando $\alpha = 0^\circ$, la predicción de C_D es incorrecta sólo en la medida de qué tan inadecuado es el valor de $\tilde{\nu}$ en la entrada.

Un valor mayor de $\tilde{\nu}$ podría interpretarse, con ciertas reservas, como “más turbulencia”¹⁸ en el flujo de entrada. Al resolver la ecuación del modelo de turbulencia, ésto resultará en valores más altos de ν_t en todo el dominio. Debido al uso de ecuaciones promediadas y a la hipótesis de Boussinesq, los valores más altos de ν_t realmente implican que el fluido simulado tiene una viscosidad efectiva mayor. Como resultado, el arrastre viscoso se incrementa, sin

¹⁷Debido a la sensibilidad que manifiestan C_D y C_L a los cambios en $\tilde{\nu}$.

¹⁸Dado que el flujo no ha sido afectado por ninguna otra geometría antes de ingresar al dominio, no debería tener turbulencia alguna en la entrada.

que la propiedad ν en sí haya cambiado. En otras palabras, *se estaría simulando un flujo turbulento, más viscoso de lo que se pensaba, aún si el modelo de turbulencia no predice separación de la capa límite*. A decir verdad, ésto es consistente con que C_L casi no se vea modificado, pues la sustentación viscosa es despreciable. La razón por la cual C_L pierde fidelidad ligeramente cuando α es mayor no está totalmente clara¹⁹. Ésto confirma que *la fidelidad de las simulaciones de ala infinita es suficiente, siempre y cuando $\alpha = 0^\circ$ y $\tilde{\nu}$ sea pequeña*²⁰.

4.10.3. Simulación de ala finita sin dispositivo

Como ya se mencionó en la Sección 2.1, el flujo tridimensional alrededor de un ala finita es muy similar al flujo bidimensional asociado a un ala finita, con la adición del flujo lateral y la formación de los vórtices[62]. Por lo tanto, es de esperarse que los resultados de ala finita sin dispositivo compartan ciertas características con los correspondientes para ala infinita. Debido a las similitudes que se presentan, es cualitativamente correcto que la región de presión máxima vuelva a localizarse frente al borde de ataque, que la región de presión mínima sea sobre el extradós y que la región de presión alta, menor a la máxima, se ubique atrás del borde de salida. De igual manera, es cualitativamente correcto que el flujo sea ascendente entre el borde de ataque y el extradós, que sea descendente entre el borde de ataque y el intradós, y que sea descendente entre el extradós y el borde de salida.

Al principio no está claro si la formación de dos estructuras vorticosas, con direcciones de rotación contrarias, es un aspecto físico del flujo o un artefacto de la simulación. La estructura del extradós tiene mayor tamaño que el del intradós, ambas parecen difundirse parcialmente y después combinarse, consolidando el vórtice que esperaríamos ver en un flujo de este tipo. En numerosas publicaciones previas[9][19][56][65][72][81][82][91] sobre vórtices en alas a escala, no se menciona la generación de dos estructuras en la punta del ala. Los únicos estudios que muestran más de una estructura, siendo claramente vórtices de estela múltiples, involucran alas con dispositivos hípersustentadores. Entre las pocas excepciones se encuentra el estudio de Ghoreyshi, *et al*, en el que aparecen exactamente estas dos estructuras[28].

En este estudio, que utilizó una combinación de simulación de grandes escalas con el modelo

¹⁹Es cierto que los cambios de ρ en y dentro de una capa límite son despreciables, pero ésto sólo es cierto si son muy delgadas[79]. Ésta condición no se cumple si α es muy grande, debido a la gran separación de la capa.

²⁰La recomendación es que $\tilde{\nu} = 0,1\nu$, aunque ésto puede provocar problemas por la precisión de los cálculos[83].

de turbulencia de Spalart-Allmaras, así como validación experimental en túnel de viento, la explicación que dan es que son estructuras vorticosas²¹ que se forman cuando el fluido rodea el extremo abrupto del ala²² e inevitablemente entra en contacto con la pared. En el trabajo, se observa que efectivamente ambas estructuras se difunden parcialmente y combinan para consolidar el vórtice de punta de ala. Sin embargo, los autores identifican a la estructura superior como el vórtice incipiente²³. En este sentido, los resultados de la Figura 4.7 sugieren que la estructura superior no puede ser el vórtice incipiente, debido a su dirección de rotación. Con base a ésto, es posible concluir que *las estructuras vorticosas de la punta del ala son físicas y que ambas regiones vorticosas eventualmente llegan a conformar el vórtice*.

La consecuencia de la presencia de estas estructuras en un ala de extremo súbito respecto a una de extremo suave serían valores C_D mayores y de C_L menores. Lo anterior se debe a que la energía que se destinaba enteramente a producir sustentación en el caso de ala infinita ahora también se utiliza para producir cada vórtice[8][75], incluyendo el vórtice principal que sí esperaríamos ver en alas finitas. Las demás características de los campos v_y y v_z parecen concordar cualitativamente con las características de un flujo alrededor de un ala finita. Cerca del borde de salida, el flujo descendente a lo largo de toda la envergadura refleja el efecto de la circulación del vórtice principal, como se muestra en la Figura 2.8. La discontinuidad en el campo de v_y detrás del borde de salida es lo que se modela como una hoja matemática de vorticidad[62]. Esta “hoja” es una zona donde se encuentran capas de fluido que estaban previamente separadas y que se mueven en direcciones diferentes[64].

La rotación del vórtice en planos aguas-abajo se debe a que está en su etapa de enrollamiento[37]. Es posible que las distancias en las que se desarrolla el vórtice simulado no correspondan a la realidad física, si comparamos con las cifras dadas por Hernández-Rivera, *et al*[37]. La causa más lógica de ésto sería que el tamaño del dominio aguas-abajo y las condiciones de frontera de la salida están forzando demasiado al fenómeno que se pretende simular. Así como se observa en la Figura 2.7, es de esperarse que *el flujo lateral se presente, a lo largo de toda el ala, en el interior de la capa límite y que la componente lateral sea mayor conforme nos acerquemos a la punta del ala*[62]. La ausencia de flujo lateral positivo en la mayoría de los planos sobre el ala se debe a que realmente no estamos capturando la capa límite. El flujo lateral positivo frente al borde de salida refleja la tendencia del fluido a rodear el ala.

Únicamente vemos flujo lateral negativo en una región significativa hasta que nos acercamos

²¹A diferencia de lo que ocurre en otras publicaciones mencionadas, la razón por la que son distinguibles estas estructuras es que presentan un número de planos de corte sobre el ala.

²²No todas las alas de este tipo terminan de forma abrupta en aeronaves reales, pero sí existen variantes donde éste es el caso.

²³Dado que sólo basan su análisis en isosuperficies de magnitud de vorticidad, no es posible distinguir el sentido de rotación. Ésta sería una ventaja de utilizar gráficas de v_y y de v_z .

al borde de salida, cerca de la punta del ala. Ésto se debe al flujo circulatorio asociado al vórtice principal. Se observa una discontinuidad en v_z detrás del borde de salida, que no es más que la hoja de vorticidad. Es notable que esta discontinuidad en v_z sea visible a una mayor distancia aguas-abajo que la contraparte de v_y . Algunos autores mencionan que, en flujos alrededor de alas finitas, la componente v_y ya está bien asentada en un comportamiento asintótico²⁴ a una distancia de 1 cuerda aguas-abajo, mientras que la componente v_z lo hace a distancias mucho mayores[62]. Ésto es consistente con los resultados de la simulación. El campo de v_t tiene lógica. De hecho, lo que se observa en los planos que cortan al ala es lo que ya mencionó sobre las estructuras vorticosas. El campo también sugiere que la turbulencia y la vorticidad se produce cerca de las paredes del ala.

Aunque no es posible ver la capa límite, sabemos que ésta es la fuente de toda la vorticidad asociada al fenómeno aerodinámico. De hecho, la hoja de vorticidad no se forma en el borde de salida, dado que no puede comenzar en una pared sólida con condición de no-deslizamiento[62][103]. Es una continuación de la vorticidad contenida en la capa límite, que se transporta por advección aguas-abajo. Con todo ésto, la simulación del ala finita sin dispositivo parece incluir exclusivamente aspectos consistentes con la física del fenómeno. Al carecer de resultados experimentales específicos para un ala finita que proporcionen información sobre la topología del flujo, no es posible garantizar que sean del todo correctos. Sin embargo, considerando las limitaciones del estudio actual, se proseguirá asumiendo que *efectivamente los resultados de la simulación de ala finita sin dispositivo son correctos*.

4.10.4. Simulaciones de ala finita con dispositivos

Los campos de ρ , v_y y v_z para las alas con dispositivo conservan ciertas características generales del caso sin dispositivo. Todavía se trata de un flujo externo que, al tener que rodear un obstáculo y entrar en contacto con su pared sólida, sufre cambios en la presión y en la velocidad. Todos los cambios que haya en estos campos, respecto al ala sin dispositivo, deben ser el resultado de las diferencias en la geometría. A su vez, las diferencias que haya en C_D y C_L respecto al caso base deben ser consecuencia de los campos. Sin embargo, en la literatura hay muy poca discusión sobre qué características concretas de éstos explican las ventajas y desventajas que conllevan los dispositivos. Haciendo referencia a los tres efectos de los dispositivos que se mencionaron en la Sección 2.1, se puede distinguir el papel que juegan hasta cierto punto. Empezaremos con lo que se menciona sobre la restricción del flujo

²⁴Donde $v_y \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

lateral.

En general, podemos decir que todos los dispositivos alteran el campo de ρ de la misma forma. Es decir, *lo modifican de tal manera que la región de estancamiento ya no está contenida en un solo plano*. Es la curvatura de la geometría la que provoca que el fluido tenga que rodear al ala en el espacio y no en el plano $x = 0.0$ m. Ésto tiene una consecuencia importante: *al haber una zona de alta presión a lo largo del extremo del ala, se dificulta el flujo que en principio habría ido del intradós al extradós*. En efecto, como indicaban Gupta, *et al*, los dispositivos sirven como una manera de mitigar el flujo lateral hacia la punta del ala[31]. Este flujo lateral tiende a seguir la curvatura de la superficie y la rodea, torciéndose hacia el lado del extradós, hasta que el ala termina súbitamente en un plano en el espacio. En el caso de alas que terminan en vértice, no existe un extremo abrupto, por lo que el flujo de ambos lados del ala debe de encontrarse en una región del espacio muy localizada²⁵.

Lo que se menciona sobre el desplazamiento de la zona de formación del vórtice a una región donde hay inherentemente menos diferencia de presión[31] no parece ser del todo cierta, como otros autores mencionan[36]. En los resultados no se aprecia que los valores de ρ sobre el extradós vayan incrementando gradualmente, hasta alcanzar el valor de la corriente libre, conforme nos acercamos a la punta del dispositivo. Ésto se debe a que el área transversal del ala sigue siendo el mismo perfil, induciendo aproximadamente los mismos cambios de presión a lo largo de toda la envergadura. Está claro que *la región de estancamiento en el espacio es lo único que conlleva un incremento de presión cerca de donde termina el ala*. En este sentido, los efectos de restricción de flujo lateral y de formación de vórtice en una zona de menor diferencia de presión son el resultado del mismo fenómeno.

No se puede hablar solamente de un “desplazamiento” de la zona de formación del vórtice, porque ésto sugiere que los campos de ρ , de v_y y de v_z son independientes de la geometría, y que simplemente alejando la punta del ala de ciertas regiones, tal y como estaban en el ala sin dispositivo, provoca cambios en el flujo. Es posible que haya cierta independencia de los dos factores para dispositivos como la cerca de ala, debido que funcionan más como una pared súbita en la punta. El tercer efecto mencionado, relacionado con la difusión del vórtice, no parece ser más que la consecuencia indirecta de los otros dos. Con “difusión”, otros autores parecieran referirse a la reducción en la magnitud de la vorticidad[36], a la reducción de los valores de v_y y v_z asociadas al vórtice[101], o bien, a la disminución del tamaño del vórtice. En el fondo, las tres cosas están relacionadas. El tamaño del vórtice y las magnitudes v_y y v_z determinan los gradientes de velocidad en la región donde está contenido. Ésto se refleja en la magnitud de la vorticidad en la estructura.

²⁵En otras palabras, el flujo no tiene que rodear la cara con forma del perfil alar, sino solamente la superficie cerrada que termina en un solo punto.

En aeronáutica, a veces se menciona la reducción de la turbulencia asociada al vórtice. Es un poco ambiguo referirse a la “turbulencia” como un fenómeno independiente de la vorticidad y de la presión. Sabemos que la vorticidad del fluido se produce en la capa límite, la cual se localiza alrededor de toda la pared del cuerpo. Una vez que la capa límite transiciona al régimen turbulento es que podemos hablar de turbulencia en el flujo. Los campos de ν_t muestran que las regiones turbulentas inicialmente tienen la forma de la geometría, destacando la íntima relación que hay entre turbulencia y vorticidad. Hasta después es que las regiones vorticosas, o turbulentas, son transportadas por advección en la dirección aguas-abajo. Según la teoría de línea de sustentación de Prandtl[64][77][78], a pesar de que el arrastre inducido se debe a la sustentación y que la sustentación se debe principalmente a la presión, no puede existir sin la circulación²⁶ alrededor del ala.

Es decir, la formación del vórtice de punta de ala sólo es posible gracias a que el fluido es viscoso. Dado que la turbulencia se manifiesta como la viscosidad adicional ν_t en las ecuaciones promediadas, *cualquier reducción de turbulencia asociada al dispositivo de punta alar, al igual que cualquier reducción de la vorticidad en el vórtice de estela, se refleja como una disminución del arrastre viscoso*. Ésto hace referencia a la segunda integral de la Ecuación 3.6. El resto de la discusión ha girado en torno a cambios en la distribución de presión, o bien, todo lo que se relaciona con la primera integral de la Ecuación 3.6. Hay que recordar que en esta primera integral están incluidos tanto el arrastre de forma como el arrastre inducido, que no se pueden separar con claridad dentro del alcance de este estudio. Hasta qué región espacial v_y o v_z dependen de la vorticidad generada y no del campo de presión exclusivamente es incierto.

Entonces, la presencia de una región de estancamiento en el espacio es la diferencia principal en el campo de ρ de un ala con dispositivo respecto al de un ala sin dispositivo. Los efectos de restricción del flujo lateral, de desplazamiento de la zona de formación del vórtice y, hasta cierto punto, el grado de difusión del vórtice quedan englobadas por este aspecto. Ésto se puede relacionar con cualquier cambio en el arrastre por presión, ya sea el arrastre de forma o el arrastre inducido. Factores como la reducción de la vorticidad o de la turbulencia en el vórtice de estela, conceptos comúnmente mencionados al explicar el funcionamiento de los dispositivos, quedarían contenidos en la reducción del arrastre viscoso. Sin embargo, hay que recordar, haciendo referencia a las Ecuaciones 3.6 y 3.7, que el arrastre y la sustentación son cantidades globales²⁷. Cualquier cambio local tiene que ser lo suficientemente relevante como para que se refleje en las cantidades globales.

²⁶Recordemos que la circulación es la manera que tenemos de representar el efecto que produciría la viscosidad en nuestros modelados de flujos invíscidos.

²⁷Que se integran sobre toda la superficie.

Una tercera fuente de diferencias en ambos arrastres²⁸ serían superficies mojadas de distinto tamaño en las diferentes geometrías. En la Tabla 4.1 se comparan los distintos tamaños de superficie para las alas del estudio como un porcentaje de la superficie del ala sin dispositivo²⁹, para cada envergadura.

Tabla 4.1: Tamaños relativos de superficies mojadas para todos los dispositivos

	$b = 0.5 \text{ m}$	$b = 1.0 \text{ m}$
Sin dispositivo	100 %	100 %
Con dispositivo hacia arriba, sin vértice	96.71 %	95.49 %
Con dispositivo hacia arriba, con vértice	88.17 %	90.32 %
Con dispositivo hacia abajo, sin vértice	99.77 %	96.81 %
Con dispositivo hacia abajo, con vértice	90.95 %	91.50 %
Con dispositivo en cimitarra, sin vértice	135.34 %	114.35 %
Con dispositivo en cimitarra, con vértice	118.71 %	104.42 %

Evidentemente sí existen cambios en las superficies mojadas de geometría a geometría. Ésto era inevitable debido a que es complicado establecer un criterio de comparación entre alas sin dispositivo y alas con dispositivo. Es necesario acotar la geometría dentro de una envergadura dada, o bien, tomar la misma ala y agregarle el dispositivo, extendiendo su envergadura efectiva en el proceso. De cualquier forma, el área mojada incrementa o disminuye respecto al ala sin dispositivo, por lo que la forma de calcular C_D y C_L también podría cuestionarse. No obstante, para que exista cierto grado de validez en la comparación, es preferible calcular estos coeficientes respecto a los mismos valores. Por esta razón, es una mejor idea acotar la geometría dentro de la misma envergadura y conservar la misma cuerda en la raíz del ala. Hasta lo que el autor conoce, otros estudios de dispositivos no hacen una comparación del déficit o superávit de superficies mojadas de geometría a geometría.

Como último punto antes de continuar, es necesario hablar sobre los errores en las simulaciones con dispositivos. La anomalía, visible en la estela turbulenta de gran parte de los dispositivos, parece tratarse de la misma estructura. No hay razón para pensar que dicha estructura sea física. Tras una inspección más a detalle, se descubrió un agujero en la malla, cerca del borde de ataque. Este defecto está ubicado en la misma posición en todos los dominios y es consistente con la localización de la anomalía en los distintos campos. Debi-

²⁸Aunque potencialmente más en el viscoso.

²⁹La superficie mojada del ala sin dispositivo fue de 1.0597 m^2 para la envergadura corta y de 2.0377 m^2 para la envergadura larga.

do a la presencia de este defecto, *es necesario hacer hincapié en que la confiabilidad de los resultados ya no puede asegurarse*. Si bien los campos lucen cualitativamente razonables en todos los demás aspectos, sólo una validación experimental podría confirmar hasta qué punto esta anomalía afecta los resultados. Por el momento, se considerará como una limitación del estudio actual y se proseguirá con la discusión dentro del grado de confiabilidad que se tiene.

4.10.5. Efecto de los dispositivos en los coeficientes

Antes que nada, el valor de C_D para el ala sin dispositivo es aproximadamente del 150 % del de ala infinita, mientras que C_L es del 35 % del valor del de ala infinita. Estos resultados son consistentes con simulaciones numéricas tridimensionales del ala ONERA M6, realizadas por la NASA³⁰, utilizando el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras[69]. La presencia de los vórtices implican un déficit de sustentación y un arrastre adicional en la geometría. Una observación importante es que, dado que los resultados experimentales de NACA concuerdan más con la simulación de ala infinita y que en sus publicaciones no mencionan específicamente cómo hicieron su arreglo experimental[2][44][45][46], podemos inferir que el ala fue acoplada a las paredes del túnel de viento por los dos extremos. Cualquier otra instalación habría producido un vórtice y, como consecuencia, un arrastre mayor. Entonces, es cierto que se puede lograr un flujo aproximadamente bidimensional bajo ciertas condiciones.

Existe siempre el fenómeno asociado a las paredes del túnel, pero bajo el argumento planteado, su efecto en C_D y C_L es mínimo en comparación con el efecto de un vórtice de punta de ala. De cualquier forma, estudios previos han demostrado que la mejor manera de atacar el efecto de las paredes es inducir una capa límite más delgada en éstas, utilizando un chorro de aire cerca de donde se acopla el ala[62]. Dado que el concepto idealizado de “ala infinita” se refiere a una envergadura infinita, es lógico pensar que un ala de envergadura cada vez mayor tendrá valores de C_D y C_L más parecidos a aquéllos para la simulación de ala infinita. Este comportamiento se confirma en las Figuras 4.61 y 4.62. Es decir, la envergadura del ala que se simula debe de ser siempre la envergadura del objeto real si se desea que los resultados sean aplicables, aún si ésto implica costos computacionales mayores.

Continuando con el aspecto más importante de esta investigación, lo que diferencia a los valores de C_D y de C_L de dispositivo a dispositivo es una combinación de los factores que ya se mencionaron. Las dos tendencias claras son: (1) todas las alas tienden a aumentar su C_L conforme b es mayor, aunque los dispositivos hacia abajo reducen la sustentación globalmente

³⁰Esta geometría es de calibración de simulaciones numéricas y está disponible en el dominio público.

respecto al ala sin dispositivo; y (2) todas las alas, a excepción de las que tienen dispositivos hacia abajo, tienden a reducir su C_D conforme b aumenta. Las alas no se comportarán necesariamente como alas conforme $b \rightarrow 0$, sino como cuerpos anchos. Los cuerpos anchos se caracterizan porque es el arrastre de forma el que predomina sobre el viscoso[62]. Entonces, la reducción de C_D debido a b en la mayoría de los dispositivos debe reflejar una disminución en el arrastre de forma.

No tendría sentido que esto se explicara por cambios en el arrastre viscoso. El ala sin dispositivo incrementa su superficie mojada al doble cuando pasamos de la envergadura corta a la larga y, a pesar de ello, se reduce su C_D . Debido a que los demás dispositivos conservan la misma geometría para diferentes envergaduras, el mismo argumento debe ser aplicable a ellos. No es así para los cambios de C_D entre distintas geometrías para una misma envergadura. Como la superficie mojada del dispositivo de punta no se conserva, no se puede garantizar que el arrastre viscoso no se vea alterado. Whitcomb menciona que, en vuelo de crucero, las reducciones en el arrastre inducido son prácticamente de la misma magnitud que el arrastre viscoso agregado por los dispositivos[101]. Al mismo tiempo, el arrastre inducido es mayor para envergaduras mayores, pero la efectividad de los dispositivos también crece por la misma razón[42][87][101].

El único aspecto que queda sin explicar de la observación (2) es el incremento del arrastre en los dos dispositivos hacia abajo con el aumento de envergadura. Hasta el momento, no se tiene una argumentación sólida respecto a este fenómeno. Por otro lado, (1) se puede explicar debido al mismo argumento del tipo de cuerpo que realmente representa el ala. Entre mayor es la envergadura, menor es el arrastre de forma y la superficie de levantamiento efectiva también crece. Tampoco se tiene una explicación satisfactoria para la disminución global del C_L de las alas con dispositivo hacia abajo. A decir verdad, al contrario de los resultados de este estudio, Pooladsanj, *et al*, encontraron que los dispositivos hacia abajo incrementan la sustentación más que los dispositivos hacia arriba[75]. Se requiere de una mayor investigación al respecto, pero es posible que tenga que ver con la asimetría del perfil alar.

Otra característica general es que los dispositivos que no terminan en vértice son menos eficaces al reducir C_D que sus contrapartes que sí terminan en vértice. Esto es consistente con los hallazgos de Pooladsanj, *et al*, de que los dispositivos que terminan en vértice son entre 4% y 5% más eficaces que sus contrapartes sin terminación en vértice[75]. En las imágenes de los campos, esto se reflejaba como vórtices más difusos en los dispositivos que terminaban en vértice. Cuantitativamente, esto se refleja en los valores extremos de v_y y v_z , que siempre tienen un valor absoluto menor en configuraciones con vértice que en configuraciones sin vértice. Lo que esto muestra es que *la clave para difundir el vórtice parece ligarse con qué tan localizada es la región donde los flujos, por encima del extradós y por debajo del intradós, se*

encuentran.

Ésto se relaciona no con los valores máximos de ρ , sino con *la forma en la que está distribuida la región de estancamiento en el espacio*. Finalmente, queda explicar las diferencias que hay en C_D y C_L de dispositivo a dispositivo. Las distinciones importantes son los valores extremos de v_y , v_z y ν_t , respecto al ala sin dispositivo. El dispositivo hacia arriba sin vértice disminuye el flujo ascendente, incrementa el flujo descendente, no altera el flujo lateral hacia la punta e incrementa el flujo lateral hacia la raíz. El valor de ν_t en el núcleo del vórtice se reduce a la mitad. Es decir, *el dispositivo hacia arriba sin vértice sólo parece difundir el vórtice en la medida de que se forma en una punta de ala de área transversal menor y suficientemente lejos del ala base*. De alguna manera, la geometría del ala coincide con la dirección que el flujo tiende a tomar debido a la diferencia de presión. El dispositivo hacia arriba con vértice aumenta el flujo ascendente, aumenta el flujo descendente, disminuye el flujo lateral hacia la punta y disminuye el flujo lateral hacia la raíz.

El valor de ν_t en el núcleo del vórtice es del 30 % que en el ala sin dispositivo. En otras palabras, *el dispositivo hacia arriba con vértice difunde el vórtice disminuyendo la magnitud del flujo lateral, a pesar de que se incrementen las componentes ascendente y descendente*. Ésto puede atribuirse nuevamente a la diferencia entre que la superficie termine en vértice o no. El dispositivo hacia abajo sin vértice disminuye el flujo ascendente, disminuye el flujo descendente, disminuye el flujo lateral hacia la punta y disminuye el flujo lateral hacia la raíz. El valor extremo de ν_t es aproximadamente igual al del dispositivo hacia arriba con vértice. Es decir, *el dispositivo hacia abajo sin vértice difunde el vórtice disminuyendo tanto las componentes ascendente y descendente, como las componentes laterales del flujo*. En este caso, la geometría del ala se opone a la dirección que el flujo tiende a tomar.

El dispositivo hacia abajo con vértice hace lo mismo que el que no tiene vértice. Sin embargo, la reducción del flujo ascendente es mucho mayor, el incremento del flujo descendente también es mayor y las magnitudes de las componentes laterales permanecen iguales. La magnitud de ν_t en el núcleo del vórtice es idéntica a la del dispositivo hacia abajo sin vértice. En otras palabras, *el dispositivo hacia abajo con vértice difunde el vórtice a través de los mismos mecanismos que el que no tiene vértice, pero tiene mucha mayor influencia en mitigar el flujo ascendente y descendente*. El dispositivo en cimitarra sin vértice disminuye el el flujo ascendente, incrementa el flujo descendente, disminuye el flujo lateral hacia la punta y disminuye el flujo lateral hacia la raíz. La ν_t máxima es del doble de la del ala sin dispositivo, evidenciando el efecto que tiene la rendija donde se unen las superficies primaria y secundaria.

Se puede decir que *el dispositivo en cimitarra sin vértice realiza una acción combinada de lo que serían los dispositivos hacia arriba y hacia abajo sin vértice, pero su función más significativa es reducir el flujo lateral tanto del lado del intradós como del extradós*. Por último,

el dispositivo en cimitarra con vértice hace lo mismo que el que no tiene vértice en todas las componentes, pero con mayor impacto. Podemos decir que *este dispositivo realiza la acción conjunta de los dispositivos hacia arriba y hacia abajo con vértice, pero el impacto es mayor precisamente debido a que las superficies terminan en vértice*. El valor extremo de ν_t es de la mitad del del valor del otro dispositivo en cimitarra. En cuanto a C_L , el incremento de sustentación asociado a todos los dispositivos hacia arriba y en cimitarra, respecto al ala sin dispositivo, se debe al aumento en área sustentadora efectiva[36].

No es posible estimar cuál sería el efecto real de los defectos de malla en los resultados, por lo que las conclusiones anteriores deben considerarse con cuidado. Existen otras posibles configuraciones de dispositivos que no se estudiaron. Lo que se puede decir es que los resultados concuerdan, en general y de forma cualitativa, con lo que se esperaba obtener. Sin embargo, no por esto implica que ciertos dispositivos sean los mejores para utilizar en una aeronave real. Otros factores, tal y como el aspecto estructural del ala, que no se consideró en esta investigación, podrían determinar si un diseño es utilizable o no[17][37]. En este sentido, el uso de alas de forma cambiante sería una estrategia más viable que sólo cambiar de dispositivo[17].

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.1. Resumen

Dentro de las limitaciones que se tuvieron durante esta investigación, se pudieron establecer ciertas conclusiones generales sobre las simulaciones. Podemos resumirlas de la siguiente manera:

1. Fue posible obtener resultados numéricos razonablemente acertados para el ala infinita e independientes de la malla. Se pudieron validar experimentalmente utilizando los valores de C_D y de C_L . La única condición es que $\alpha = 0^\circ$.
2. La razón de esta restricción es que el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras es incapaz de predecir correctamente los valores de C_D para ángulos de ataque más elevados. Éste puede atribuirse a que, debido a los casos contra los que se calibró originalmente, el modelo no tiene significado físico para flujos con alta separación.
3. Fue posible obtener resultados numéricos lógicos para el ala finita sin dispositivo. Sin embargo, dado que no se verificó formalmente la independencia de malla y que no hay resultados experimentales contra los cuales comparar, su grado de fidelidad es menor que la de las simulaciones de ala infinita. La validez de éstos radica exclusivamente en los valores de C_D y de C_L , así como la apariencia cualitativa de los distintos campos.
4. La magnitud de la envergadura es un factor que afecta directamente los valores de C_D y de C_L de un ala real. No equivale estudiar una misma ala con dos valores diferentes de

- b.* No obstante, los resultados confirmaron que, a medida que la envergadura es mayor, C_D y C_L cambian de la manera esperada si no se tiene dispositivo.
5. No fue posible obtener resultados numéricos totalmente confiables para las alas finitas con dispositivos. Ésto se debió a imperfecciones en la malla que, aunque no parecen afectar significativamente a las variables en todo el dominio, necesariamente deben producir algún efecto.
 6. Asumiendo que el efecto de estos problemas de mallado no es tan relevante, se pudo identificar que los tres fenómenos que producen los dispositivos de punta alar, según diversas fuentes, hablan en realidad de lo mismo. La difusión del vórtice se refiere concretamente a los cambios en las magnitudes de v_y y v_z en el vórtice. El desplazamiento de la región de formación del vórtice a una ubicación sin tanta diferencia de presión no es del todo cierta, pues el campo de ρ no es independiente de la geometría. La restricción del flujo lateral se debe a estos cambios en el campo de ρ y, en última instancia, es lo que permite la difusión del vórtice.
 7. Adicionalmente, la reducción de la turbulencia del vórtice, que a veces se menciona en aeronáutica, puede interpretarse como una disminución de la contribución de las fluctuaciones al arrastre viscoso.
 8. El mecanismo mediante el cual los dispositivos producen la difusión del vórtice es la generación de una región de estancamiento en el espacio. La alta presión se distribuye a lo largo de la curvatura de la superficie del dispositivo, en lugar de en un solo plano sobre el borde de ataque, dificultando el flujo lateral y reduciendo el tamaño de la zona donde los flujos, por encima del extradós y por debajo del intradós, se encuentran.
 9. Debido a este último punto, dispositivos que terminan en vértice siempre reducen más el valor de C_D que aquéllos que no terminan en vértice.
 10. La acción de los dispositivos hacia arriba consiste en reducir las magnitudes de v_y , v_z y ν_t mediante una curvatura de superficie que coincide con la dirección que el flujo tiende a adquirir debido a la diferencia de presión. Por esta razón, estos dispositivos son eficaces en difundir el vórtice, pero no son los que mejores resultados producen.
 11. La acción de los dispositivos hacia abajo consiste en reducir las magnitudes de v_y , v_z y ν_t mediante una curvatura de superficie que se opone a la dirección que el flujo tiende a adquirir debido a la diferencia de presión. Por esta razón, estos dispositivos son los más eficaces en difundir el vórtice de una sola superficie.

12. La acción de los dispositivos en cimitarra consiste en reducir las magnitudes de v_y , v_z y ν_t mediante la combinación de los efectos de los dispositivos hacia arriba y hacia abajo. Siempre y cuando su construcción sea tal que no se incremento demasiado el arrastre debido a la superficie mojada agregada y a la zona de unión de ambas superficies, estos dispositivos serán los más eficaces para difundir el vórtice. Ésto es especialmente cierto para envergaduras mayores.

5.2. Contribuciones

En algunos aspectos, lo que se investigó no es un tema completamente nuevo. Aquellas características del estudio que aportan algo de valor agregado se resumen a continuación.

1. En pocos trabajos publicados se ha tratado de explicar la relación que existe entre las características del flujo y de los campos, inducidas por las diferencias de geometría, y los valores de C_D y C_L que producen. En este estudio se intentó encontrar estas relaciones, tratando de desmentir algunas ideas comunes en las comunidades aeronáutica y científica.
2. En la mayoría de los estudios previos de dispositivos, con la excepción de Heyson, *et al*[38], no se sugiere la influencia que puede tener la envergadura en la efectividad de los dispositivos. En este trabajo se mostró esta dependencia explícitamente.
3. Hasta el conocimiento del autor, ningún estudio publicado a la fecha ha investigado los dispositivos en cimitarra. Ésto se debe a que su desarrollo ha sido relativamente reciente.
4. Existen pocos estudios numéricos de aerodinámica de alas realizados en OpenFoam. En la práctica, el conocimiento adquirido sobre las limitaciones de los modelos, tal y como están implementados en OpenFoam, probablemente será algo de gran utilidad en el futuro.
5. De la misma manera, el conocimiento adquirido sobre cómo mallar geometrías complejas, ya sea en *snappyHexMesh* o en Salome, podría ser relevante a futuro.

5.3. Recomendaciones y trabajo futuro

Existen muchos posibles caminos por los cuales se puede llevar la investigación actual en el futuro. No obstante, se considera que, antes que nada, habría que mejorar los resultados obtenidos hasta un nivel de confiabilidad más aceptable. Entre las recomendaciones más importantes para mejorar la calidad de los resultados se encuentran:

1. Desarrollar un método para mallar eficazmente las geometrías involucradas, así como la región de la estela turbulenta, con una malla hexaédrica estructurada por bloques o una malla híbrida. Hasta el conocimiento del autor, sólo existen pocos programas disponibles que puedan realizar esta tarea para geometrías arbitraria de manera semiautomática. Ninguno de ellos es un programa gratuito, pero es posible mediante productos comerciales como *Centaur*[53].
2. Como alternativa, desarrollar un método para mallar eficazmente las geometrías involucradas con una serie de mallas superpuestas. La dificultad de este tipo de mallado es menor que lo que se especifica en el punto anterior, pero presenta otros problemas. En dicho caso, se requeriría dominar el uso de OpenFoam para mallas superpuestas. Hasta el conocimiento del autor, existe al menos un programa que permite generar mallas superpuestas de manera semiautomática, llamado *ChimeraGridTools*, pero no está disponible para el público en general.
3. Una segunda alternativa sería desarrollar un método sin malla para realizar el mismo estudio. De lograrse y obtenerse resultados coherentes, tendría ventajas enormes para el caso de simulaciones de alas. Sin embargo, en este caso, habría que resolver problemas concretos que tienen estos métodos cerca de fronteras físicas¹.
4. Una tercera alternativa sería desarrollar códigos que permitan obtener resultados igual de confiables con mallas no estructuradas, sin intervenir directamente en la física que representan las ecuaciones a resolver. Dichos códigos son tema de investigación actual en el área[53].
5. La última alternativa, más viable en el corto plazo que las demás y sin la necesidad de adquirir programas comerciales, sería utilizar herramientas como *snappyHexMesh*, pero mejorando la calidad de las superficies y de su mallado al exportar los archivos

¹Problemas que métodos como el de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH) todavía no han resuelto del todo.

del programa de CAD al mallador. Se desconoce hasta qué punto sería posible suavizar la unión y el mallado de bordes y superficies complejas, pero esto podría reducir la aparición de resultados espúreos en las simulaciones.

En cuanto al modelado del fenómeno de estudio, las recomendaciones más relevantes incluyen:

1. Utilizar LES, a pesar de las reservas que se tenían, con el objetivo de comprobar si efectivamente los tiempos computacionales son tan prohibitivos. Por supuesto, esto podría ser viable si se tiene acceso a más recursos computacionales y, a diferencia del uso de DNS, luce como una posibilidad más concebible en el futuro a mediano plazo.
2. Utilizar otros modelos de turbulencia comúnmente aceptados, aunque de planteamiento más robusto que el de Spalart-Allmaras, como son el $k - \varepsilon$, o bien, modelos de esfuerzos de Reynolds (RSM). El propósito sería verificar si los mismos proporcionan mejores resultados para ángulos de ataque elevados.
3. Investigar más a fondo qué diferencias tienen el modelo de Spalart-Allmaras implementado en OpenFoam y los modelos reportados en otros estudios, los cuales aparentemente proporcionan resultados acertados para ángulos de ataque elevados. Esta alternativa sería lo más viable, si es que las modificaciones al modelo no involucran una intervención poco seria en la física de las ecuaciones a resolver.

En cuanto a la validación de las simulaciones, se recomienda:

1. Realizar experimentos en las condiciones que se simularon para los distintos dispositivos de punta alar. Ésto es estrictamente lo que hay que hacer para validar las simulaciones, pero puede ser prohibitivo debido a los recursos requeridos² para cumplir adecuadamente con los principios de semejanza.
2. Realizar experimentos en condiciones distintas a las que se simularon para los distintos dispositivos de punta alar. La viabilidad de esta opción es mayor, pero existirían problemas para asegurar su validez en las condiciones reales.

²En cuanto a tamaños de geometrías y condiciones en túnel de viento, o bien, acceso a aeronaves reales.

En lo que respecta al modelo analítico, existen un par de posibilidades para el trabajo a futuro, que son:

1. Extender el modelo, inicialmente válido sólo para estudios de ala infinitas, a casos de alas finitas con curvatura. Hasta el conocimiento del autor, no existe a la fecha un modelo analítico de este tipo aplicado a este tipo de alas. Debido a los problemas asociados con la teoría de flujo potencial, se desconoce hasta qué punto una teoría tridimensional de este tipo sería útil. No obstante, debido a las dificultades que presentan las simulaciones numéricas mismas de este tipo de casos, existe una posibilidad de que podría servir en el futuro próximo. Dicha teoría se tendría que y podría verificar experimentalmente.
2. Combinar las distintas teorías bidimensionales que existen para el estudio de alas (perfiles alares de forma arbitraria, perfiles con múltiples componentes, para casos transitorios, con modelado de separación, etc.) en una sola teoría unificada. Hasta el conocimiento del autor, no se ha realizado esta tarea a la fecha. Sería un desarrollo útil para estructurar el trabajo que se ha ido realizando desde hace más de un siglo.

Finalmente, en cuanto al estudio como un todo, se podrían explorar otras posibilidades, como son:

1. Estudiar otras geometrías de dispositivos de punta alar existentes o propuestas, ya sean convencionales o no. El objetivo sería investigar la reducción en arrastre inducido que éstos producirían y los problemas asociados serían los mismos que se experimentaron para este trabajo.
2. Estudiar el efecto de las geometrías propuestas para alas con envergadura real, o bien, para aeronaves de tamaño completo. Ésta sería la única manera de verificar realmente la eficacia de los dispositivos para el caso real. Nuevamente, los problemas asociados serían los mismos que se experimentaron en este trabajo, con la adición de tener que controlar mejor la distribución de elementos en el dominio.
3. Realizar las mismas simulaciones pero para flujo transitorio. Esto permitiría ver el desarrollo de distintas estructuras de fluido y entender a mayor detalle la influencia de los dispositivos de punta alar. En este caso, la dificultad adicional que se tendría es que el tiempo computacional requerido podría alargarse mucho, debido a la fineza de la malla utilizada y los cambios que esto conllevaría en el paso de tiempo.

4. Realizar las mismas simulaciones para flujo compresible. El objetivo sería verificar qué efectos tiene la compresibilidad del fluido en los resultados. No se espera que cambien mucho, dado que los obtenidos con el algoritmo de solución para flujo incompresible fueron razonables. Sin embargo, valdría la pena investigar este aspecto, en OpenFOAM, dado que la mayoría de estudios similares siempre consideran al flujo como compresible.

Apéndice A

Desarrollos matemáticos

A.1. Sistema de ecuaciones integrales de Fredholm del segundo tipo

Retomando de la Sección 2.2, se tiene el sistema de ecuaciones integrales formado por las ecuaciones

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (\text{A.1})$$

$$\psi(\varphi) = \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \varepsilon(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \psi(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \quad (\text{A.3})$$

considerando que $\varepsilon_0 = 0$. Estas ecuaciones forman un *sistema de ecuaciones integrales de Fredholm del segundo tipo*. Expresado en forma general, se escribiría

$$y(x) = y_0 + \lambda \int_{x+a}^{x+b} z(t)K(x, t) dt \quad (\text{A.4})$$

$$z(x) = z_0 - \lambda \int_{x+a}^{x+b} y(t)K(x, t) dt \quad (\text{A.5})$$

Haciendo las suposiciones

$$y(x) = y_0 + \sum_{j=1}^N \lambda^j g_j(x) \quad (\text{A.6})$$

$$z(x) = z_0 + \sum_{j=1}^N \lambda^j h_j(x) \quad (\text{A.7})$$

y sustituyéndolas en (A.2) y en (A.3), se llega a

$$\sum_{j=1}^N \lambda^j g_j(x) = \lambda \int_{x+a}^{x+b} (z_0 + \sum_{j=1}^N \lambda^j h_j(t))K(x, t) dt \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda^j h_j(x) = -\lambda \int_{x+a}^{x+b} (y_0 + \sum_{j=1}^N \lambda^j g_j(t))K(x, t) dt \quad (\text{A.9})$$

Al expandir las series e igualar, término a término, se llega a las ecuaciones

$$g_1(x) = \int_{x+a}^{x+b} z_0 K(x, t) dt \quad (\text{A.10})$$

$$h_1(x) = - \int_{x+a}^{x+b} y_0 K(x, t) dt \quad (\text{A.11})$$

$$g_j(x) = \int_{x+a}^{x+b} h_{j-1}(t)K(x, t) dt ; j = 2, 3, 4... \quad (\text{A.12})$$

$$h_j(x) = \int_{x+a}^{x+b} g_{j-1}(t)K(x, t) dt ; j = 2, 3, 4... \quad (\text{A.13})$$

De esta forma, es posible resolver el sistema por integraciones sucesivas de las funciones obtenidas en el paso inmediatamente anterior. En nuestro caso y con nuestras variables, se sabe que $z_0 \equiv \varepsilon_0 = 0$, que $y_0 = \psi_0$ y que $K(\varphi, \tilde{\varphi}) = \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2}$. Ésto implica que

$$g_1(\varphi) = 0 \qquad h_1(\varphi) = -\psi_0 \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \qquad (\text{A.14})$$

$$g_2(\varphi) = \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} h_1(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} dt \qquad h_2(\varphi) = 0 \qquad (\text{A.15})$$

$$g_3(\varphi) = 0 \qquad h_3(\varphi) = \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} g_2(\tilde{\varphi}) \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \qquad (\text{A.16})$$

y así sucesivamente. Ésto quiere decir que

$$\psi(\varphi) = \psi_0 + \lambda^2 g_2(\varphi) + \lambda^4 g_4(\varphi) + \lambda^6 g_6(\varphi) + \lambda^8 g_8(\varphi) + \dots \qquad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_0 + \lambda h_1(\varphi) + \lambda^3 h_3(\varphi) + \lambda^5 h_5(\varphi) + \lambda^7 h_7(\varphi) + \dots \qquad (\text{A.18})$$

Nótese que el intervalo de integración, que iba originalmente de φ a $\varphi + 2\pi$, tal que $\lambda = \frac{1}{2\pi}$; ahora se ha generalizado y está acotado entre $\varphi + a$ y $\varphi + b$, donde ahora $\lambda = \frac{1}{b-a}$. En el fondo, ésto implica que las funciones de las series ya no tienen que ser necesariamente senos y cosenos. Si $b - a = 2\pi$, las integrales se hacen cero y el método de solución es inútil. Ahora, se obtiene la integral del núcleo del sistema. Es decir

$$f(\varphi) = \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} \cot \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2} d\tilde{\varphi} \qquad (\text{A.19})$$

Por sustitución de variable, se llega a que

$$f(\varphi) = 2 \ln |\sin(\varphi + b)| - 2 \ln |\sin(\varphi + a)| \qquad (\text{A.20})$$

Utilizando propiedades de los logaritmos y del valor absoluto, se deduce que

$$f(\varphi) = 2 \ln \left| \frac{\sin(\varphi + b)}{\sin(\varphi + a)} \right| \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo a (A.21) en (A.14), se tiene que

$$h_1(\varphi) = -\psi_0 f(\varphi) \quad (\text{A.22})$$

Proseguimos a sustituir (A.22) en (A.15), teniendo en mente todas las implicaciones de (A.19), con lo que se llega a

$$g_2(\varphi) = -\psi_0 \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} f(\tilde{\varphi}) \frac{df(\tilde{\varphi})}{d\tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \equiv -\psi_0 \int_{\varphi+a}^{\varphi+b} f(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \quad (\text{A.23})$$

A partir de (A.23) concluye que

$$g_2(\varphi) = -\frac{1}{2} \psi_0 f(\varphi)^2 \quad (\text{A.24})$$

De igual manera, se obtiene que

$$h_3(\varphi) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \psi_0 f(\varphi)^3 \quad (\text{A.25})$$

Realizando las sustituciones e integraciones que siguen, de manera sucesiva, eventualmente se llega a la conclusión de que

$$\psi(\varphi) = \psi_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2!} f(\varphi)^2 - \frac{\lambda^4}{4!} f(\varphi)^4 - \frac{\lambda^6}{6!} f(\varphi)^6 - \dots \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_0 - \psi_0 \left(\frac{\lambda}{1!} f(\varphi) + \frac{\lambda^3}{3!} f(\varphi)^3 + \frac{\lambda^5}{5!} f(\varphi)^5 - \dots \right) \quad (\text{A.27})$$

Estas dos ecuaciones son la solución general al sistema y, hasta el momento, no se ha incluido información alguna sobre el perfil alar específico al que queremos mapear. Estas características son las que deben determinar a ψ_0 y a λ .

A.2. Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS)

El uso de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS) sirve como simplificación práctica de los términos no lineales de las ecuaciones originales. Desde un punto de vista totalmente teórico, el propósito es estudiar la turbulencia como un fenómeno estadístico[16]. Por otro lado, la implementación de estas ecuaciones sirve, en términos prácticos, para evitar el uso de mallas demasiado finas en simulaciones numéricas. Para deducirlas, partimos de la ecuación vectorial de Navier-Stokes¹, sin fuerzas de cuerpo, para materiales homogéneos² y considerando un flujo incompresible, tal que[102]

$$N(\mathbf{v}) \equiv \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \nabla p - \mu\nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.28})$$

Se plantea la hipótesis de que la velocidad y la presión se pueden descomponer en una cantidad media $\bar{\mathbf{v}}$ y en una fluctuación \mathbf{v}' , tal que

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (\text{A.29})$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (\text{A.30})$$

Sustituyendo a (A.29) y (A.30) en (A.28), se tiene que

$$\frac{\partial(\rho(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')) + \nabla(\bar{p} + p') - \mu\nabla^2(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = \mathbf{0} \quad (\text{A.31})$$

y desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mathbf{v}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}') + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}'\bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}'\mathbf{v}') = \\ = -\nabla\bar{p} - \nabla p' + \mu\nabla^2\bar{\mathbf{v}} + \mu\nabla^2\mathbf{v}' \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

¹El término *ecuaciones de Navier-Stokes* usualmente hace referencia a las tres ecuaciones escalares, asociadas a la conservación de momento, y a la ecuación escalar de conservación de masa.

²Entendiéndose que $\lambda = cte$ y $\mu = cte$.

Si promediamos a (A.2) en el tiempo, considerando que no hay cambios temporales de las cantidades medias³, se llega a la ecuación

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}) = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \quad (\text{A.33})$$

Por analogía al fenómeno de transferencia de momento que produce el término viscoso, se puede plantear que

$$\mathbf{R} = -\overline{\rho \mathbf{v}' \mathbf{v}'} \quad (\text{A.34})$$

donde \mathbf{R} se conoce como el *tensor de esfuerzos de Reynolds*. Además de (A.34), la hipótesis de Boussinesq nos dice que

$$-\overline{\rho \mathbf{v}' \mathbf{v}'} = \mu_t (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T) \quad (\text{A.35})$$

Donde μ_t se conoce como *viscosidad de remolino*⁴ o *viscosidad turbulenta*. Sin embargo, usualmente estos dos términos se refieren a la versión cinemática de la que se muestra en (A.35), es decir

$$-\overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} = \nu_t (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T) \quad (\text{A.36})$$

Este último representa el coeficiente de difusividad de la turbulencia. La idea es que el transporte de momento adicional debido a la turbulencia se manifestara, a grandes rasgos, como la aparición de esta nueva viscosidad.

A.3. Ecuaciones del algoritmo SIMPLE

Este algoritmo fue propuesto por Spalding y Patankar[74] para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de flujo incompresible y estacionario. Las siglas significan *Método*

³El caso contrario correspondería a las ecuaciones *promediadas de Reynolds transitorias* (URANS).

⁴Traducción literal del inglés para *eddy viscosity*.

*Semi-Implícito para Ecuaciones Ligadas por la Presión*⁵. Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes para flujo estacionario, aplicada a un volumen finito cuyo centro está dado por el nodo C , dada por

$$\oint_{S_C} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_{S_C} \mu \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS - \int_{V_C} \nabla p \, dV + \int_{V_C} \rho \mathbf{b} \, dV \quad (\text{A.37})$$

se procede a separar las integrales de superficie cerrada, quedando

$$\sum_{\alpha} \int_{S_{\alpha}} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \sum_{\alpha} \int_{S_{\alpha}} \mu \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS - \int_{V_C} \nabla p \, dV + \int_{V_C} \rho \mathbf{b} \, dV \quad (\text{A.38})$$

y, en seguida, se aproxima cada integral de superficie como el producto entre un flujo promedio a través de la cara del volumen y el área de dicha cara. De igual manera, las integrales de volumen se aproximan como el producto del volumen del elemento y la fuente promedio por unidad de volumen, obteniéndose

$$\sum_{\alpha} \rho \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha} S_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mu \langle \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha} S_{\alpha} - \langle \nabla p \rangle_C V_C + \rho \langle \mathbf{b} \rangle_C V_C \quad (\text{A.39})$$

Ahora se discretizan las cantidades $\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha}$ y $\langle \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_{\alpha}$ en la ecuación (A.39), quedando en términos de los valores de \mathbf{v} en los centros del elemento de interés C y de los elementos adyacentes. Como resultado, se llega a

$$a_C^c \mathbf{v}_C + \sum_{\beta} a_{\beta}^c \mathbf{v}_{\beta} = a_C^d \mathbf{v}_C + \sum_{\beta} a_{\beta}^d \mathbf{v}_{\beta} + \mathbf{G}_{NL} - \langle \nabla p \rangle_C V_C + \rho \langle \mathbf{b} \rangle_C V_C \quad (\text{A.40})$$

Por un lado, a_C^c y a_{β}^c son coeficientes asociados al término convectivo, mientras que a_C^d y a_{β}^d son coeficientes que surgieron del término difusivo. Además, \mathbf{G}_{NL} es un término no-lineal y las variables a conocer son \mathbf{v}_C y \mathbf{v}_{β} . Podemos simplificar la ecuación (A.40) aún más, llegándose a

$$A_C \mathbf{v}_C + \sum_{\beta} A_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} = \mathbf{G}_{NL} - (\langle \nabla p \rangle_C - \rho \langle \mathbf{b} \rangle_C) V_C \quad (\text{A.41})$$

⁵Traducción literal del inglés para *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*.

donde $A_C = a_C^c - a_C^d$ y $A_\beta = a_\beta^c - a_\beta^d$. La ecuación es válida para un solo volumen y relaciona la cantidad física en éste con las cantidades físicas de los volúmenes adyacentes. Si tomamos las ecuaciones válidas para todos los volúmenes de la malla, nos queda un sistema matricial de ecuaciones no-lineales de la forma

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{G} - \mathbf{Q} \quad (\text{A.42})$$

Cabe mencionar que la forma de los coeficientes A_C y A_β , así como la forma de los términos $\langle \nabla p \rangle$ y $\langle \mathbf{b} \rangle$, dependerá de los esquemas de discretización que se escojan y de si se utiliza una malla escalonada o colocalizada[24][67]. El algoritmo se basa en suponer valores de presión p^n para todos los volúmenes, calcular con ellos una velocidad supuesta \mathbf{v}^n e ir corrigiendo ambas cantidades hasta que cumplan tanto la conservación de moméntum como la conservación de masa[7][24][67]. En otras palabras, se cumplen las relaciones

$$p^{n+1} = p^n + \lambda_p \tilde{p}^n \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \lambda_v \tilde{\mathbf{v}}^n \quad (\text{A.44})$$

entre las cantidades de la siguiente iteración $n + 1$ con los valores supuestos de la iteración actual n y las correcciones \tilde{p} y $\tilde{\mathbf{v}}$. Las cantidades λ_p y λ_v no están incluidos en el algoritmo SIMPLE original[74], pero se agregaron posteriormente para mejorar la convergencia del mismo y se denominan *factores de relajamiento*[67]. En esencia, lo que hacen es mitigar la corrección en cada iteración para evitar cambios demasiado drásticos en las variables. Para construir el algoritmo completo, es necesario obtener ecuaciones para las correcciones. Omitiendo el término de fuerzas de cuerpo en (A.41), se tiene la ecuación

$$A_C \mathbf{v}_C^n + \sum_{\beta} A_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}^n = \mathbf{G}_{NL} - \langle \nabla p^n \rangle_C V_C \quad (\text{A.45})$$

de donde se obtienen las velocidades supuestas a partir de las presiones supuestas. Si le restamos (A.45) a (A.41), sin las fuerzas de cuerpo, llegamos a

$$A_C \tilde{\mathbf{v}}_C^n + \sum_{\beta} A_{\beta} \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^n = -\langle \nabla \tilde{p}^n \rangle_C V_C \quad (\text{A.46})$$

que sólo relaciona las correcciones y, como se observa, se cancela el término no-lineal. Para evitar la necesidad de hacer una resolución directa de las ecuaciones de momento[74], omitimos el segundo término de (A.46), obteniéndose

$$A_C \tilde{\mathbf{v}}_C^n = -\langle \nabla \tilde{p}^n \rangle_C V_C \quad (\text{A.47})$$

Ésta es la ecuación que realmente se utiliza para calcular las correcciones de la velocidad a través de las correcciones de la presión en un elemento dado. Cada una se resuelve, volumen por volumen, de manera secuencial, dado que se han omitido las influencias de los elementos adyacentes. Esta omisión garantiza que no se obtendrá la solución correcta en un solo paso, pero se vuelve irrelevante al final, dado que la solución de la última iteración resultará ser la correcta. Finalmente, para obtener la ecuación de corrección de la presión, se sustituye a (A.44) en (A.46) y a lo que resulta en la ley de conservación de masa discretizada, llegándose a una ecuación de la forma

$$B_C \tilde{p}_C^n + \sum_{\beta} B_{\beta} \tilde{p}_{\beta}^n = F(\mathbf{v}_C^n, \mathbf{v}_{\beta}^n) \quad (\text{A.48})$$

De aquí es posible obtener las correcciones de la presión a partir de las velocidades supuestas y se cierra el sistema.

Apéndice B

Simulación en OpenFoam

B.1. Recomendaciones sobre generación de superficies

Para el uso de la aplicación *snappyHexMesh*, incorporada a OpenFoam, se requiere de un archivo de superficie (.stl) alrededor del cual refinar la malla. La malla debe adaptarse suavemente a la superficie, para no producir resultados espúreos¹. Exportar los archivos de superficie del software de CAD² directamente a OpenFoam puede degradar la calidad máxima del suavizado que se obtiene al mallar. Esto se debe, probablemente, a la forma en la que el software de CAD almacena la información de las curvas que componen a la superficie. Un mejor resultado se obtiene al exportar el archivo del sólido (.stp) a Salome y, una vez ahí, exportar el archivo de superficie como tal a OpenFoam. En las figuras B.1 y B.2 se muestra el frente del perfil alar, como ejemplo.

¹Picos de presión y/o velocidad alrededor de los bordes no suavizados.

²En este caso, Siemens NX.

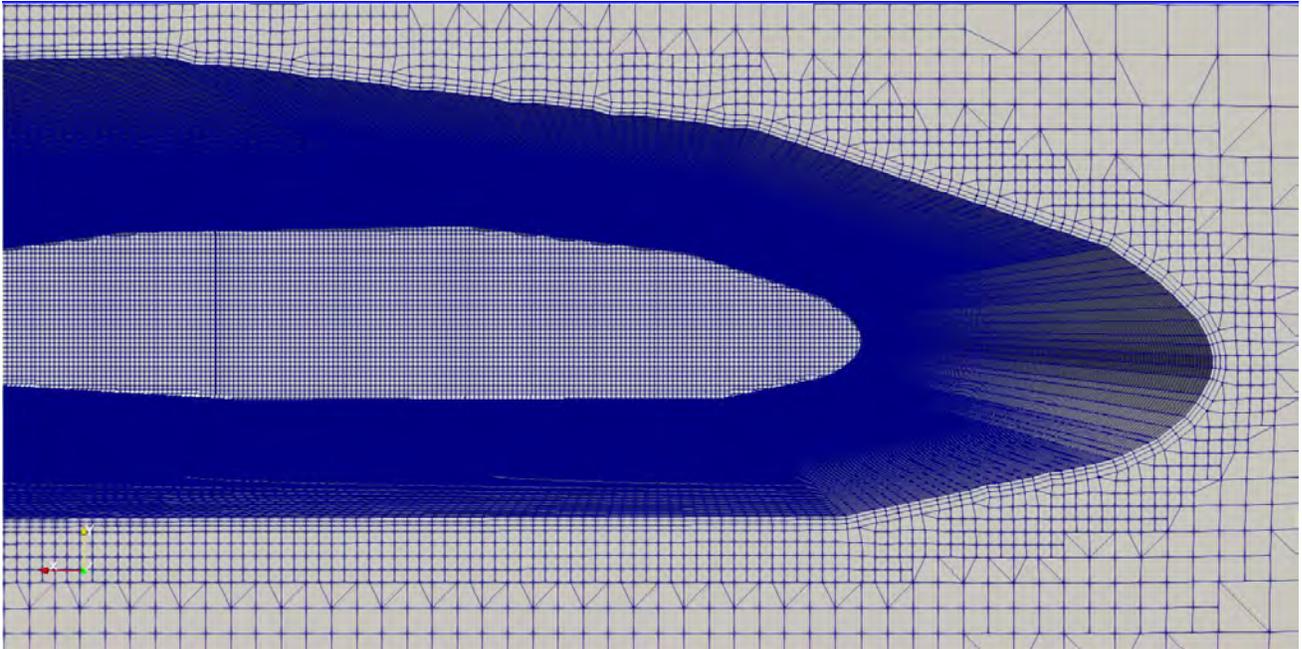


Figura B.1: Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo *.stl* directamente a OpenFoam; frente del perfil.

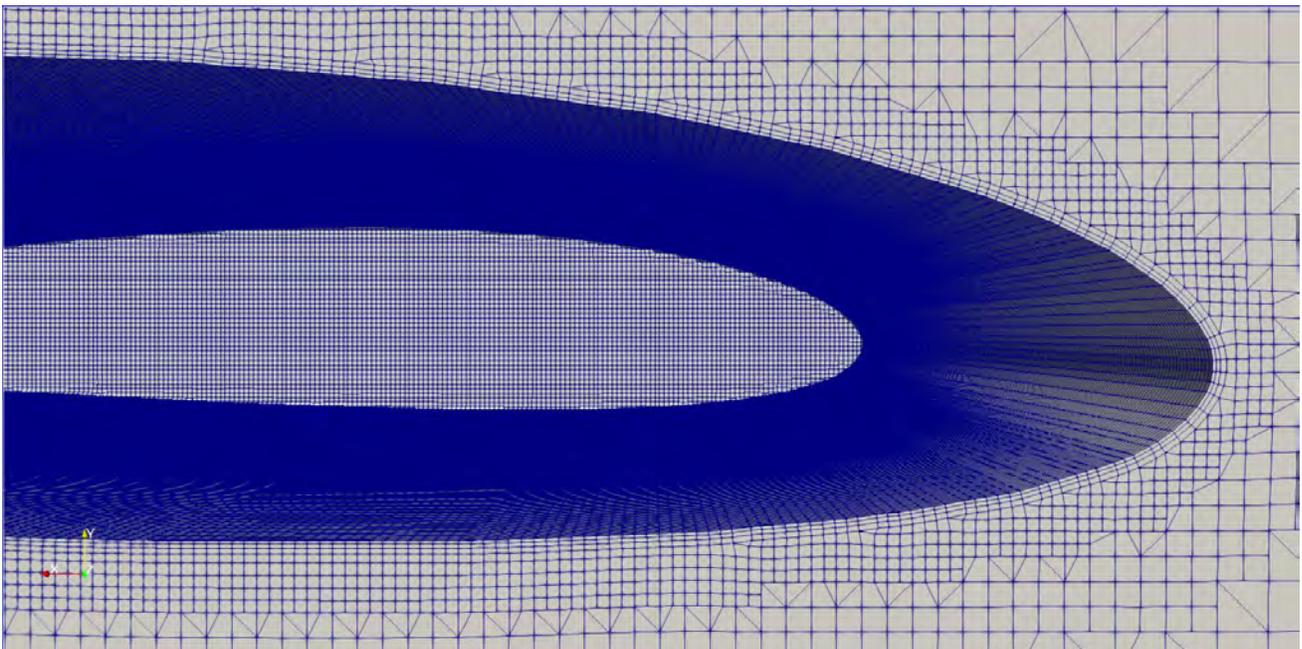


Figura B.2: Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo *.sto* a Salome y luego, una vez allí, el archivo *.stl* a OpenFoam; frente del perfil.

Por otro lado, las figuras B.1 y B.2 muestran la parte posterior del perfil alar.

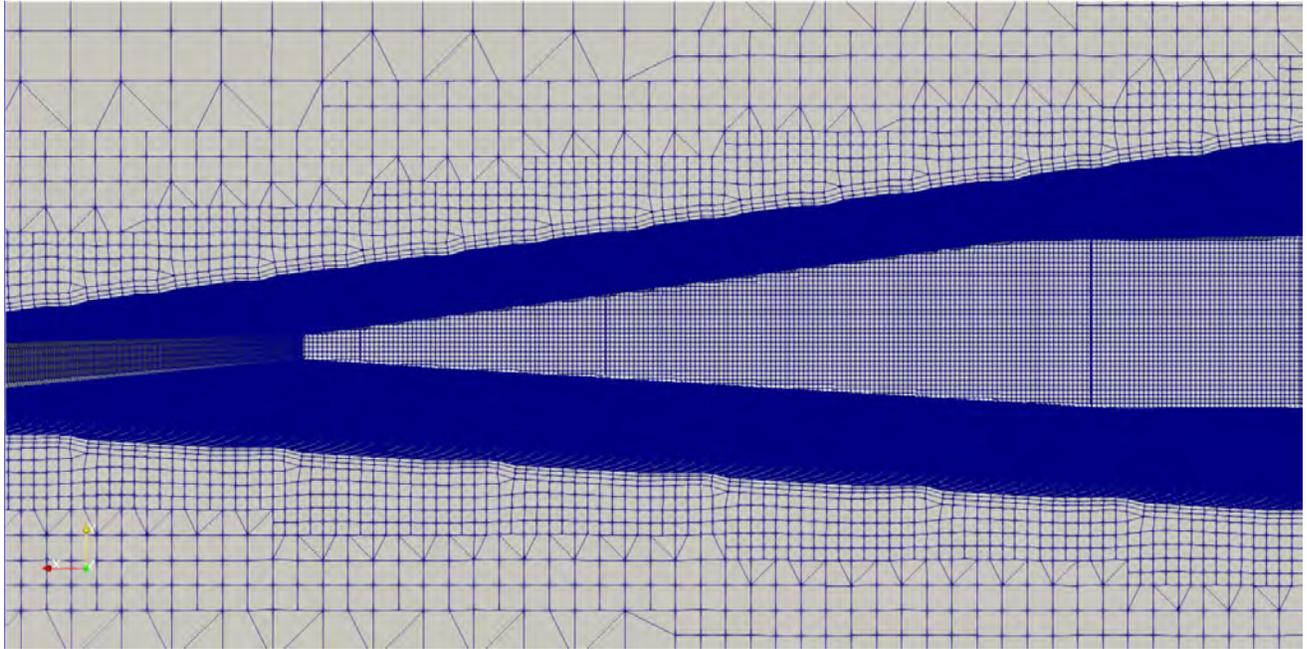


Figura B.3: Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo *.stl* directamente a OpenFoam; parte posterior del perfil.

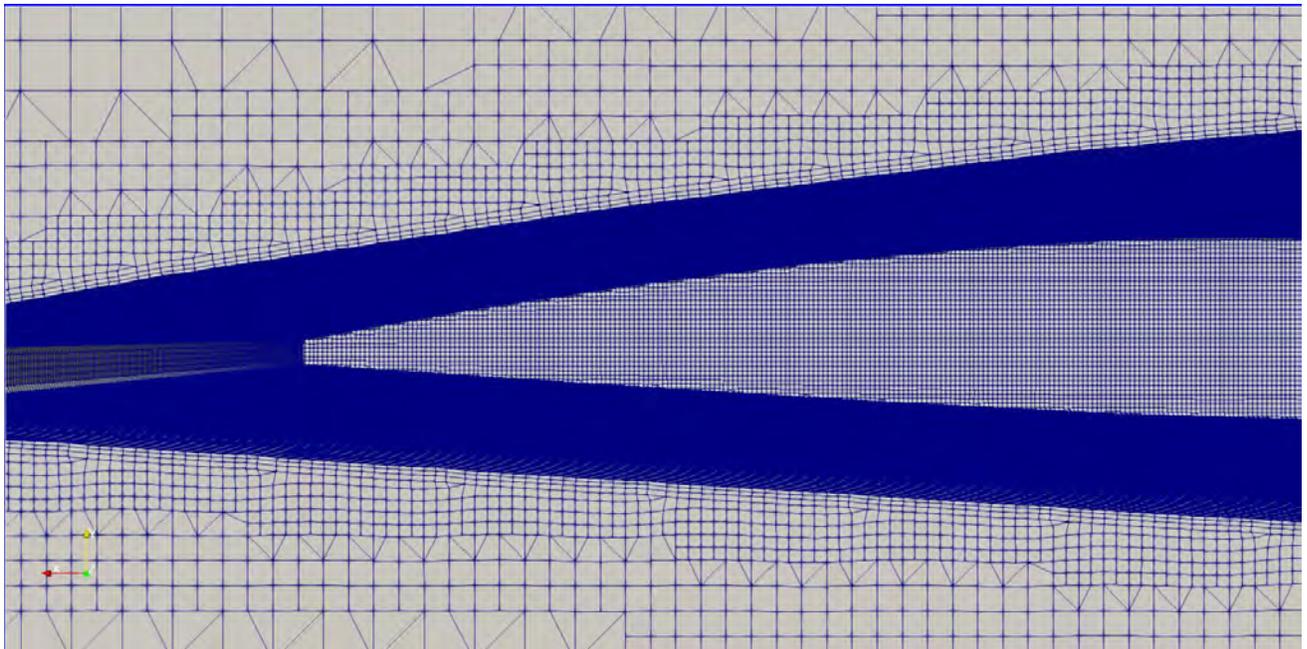


Figura B.4: Malla resultante de usar *snappyHexMesh*, exportando el archivo *.sto* a Salome y luego, una vez allí, el archivo *.stl* a OpenFoam; parte posterior del perfil.

Bibliografía

- [1] *Airbus Industrie*.
- [2] I. Abbott, A. Von Doenhoff, and L. Stivers Jr. Summary of airfoil data. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1945.
- [3] J. Adib. *Interaction between the Wing Trailing Vortex and the Engine Plume*. Thesis, 2005.
- [4] O. Agren, M. Berg, and M. Leijon. A time-dependent potential flow theory for the aerodynamics of vertical axis wind turbines. *Journal of Applied Physics*, 97(10), 2005.
- [5] M. R. Ahmed and S. D. Sharma. An investigation on the aerodynamics of a symmetrical airfoil in ground effect. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 29(6):633–647, 2005.
- [6] F. Amizadeh, G. Alonso, A. Benito, and G. Morales-Alonso. Analysis of the recent evolution of commercial air traffic co2 emissions and fleet utilization in the six largest national markets of the european union. *Journal of Air Transport Management*, 55:9–19, 2016.
- [7] J. D. Anderson Jr. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. Singapur, 1995.
- [8] J. D. Anderson Jr. *Fundamentals of Aerodynamics*. EE UU, 2001.
- [9] T. Barber and P. Kurts. Downstream evolution of wingtip vortices produced from an inverted wing. *Aeronautical Journal*, 119(1216):747–763, 2015.
- [10] J. Boehrer. *CFD Study of Wing Tip Vortex Generation*. Thesis, 2005.
- [11] P. Bourdin. Numerical predictions of wing-tip effects on lift-induced drag. In *International Congress of Aeronautical Sciences*, 2008.

- [12] M. E. Braaten, A. Gopinath, and Asme. *AERO-STRUCTURAL ANALYSIS OF WIND TURBINE BLADES WITH SWEEP AND WINGLETS - COUPLING A VORTEX LINE METHOD TO ADAMS/AERODYN*. Proceedings of the Asme Turbo Expo 2011, Vol 1. 2011.
- [13] G. Bramesfeld and M. Maughmer. Relaxed-wake vortex-lattice method using distributed vorticity elements. *Journal of Aircraft*, 45(2):560–568, 2008.
- [14] G. Couchet. *Les Profils en Aerodynamique Instationnaire et la Condition de Joukowski*. Librairie Scientifique et Technique, 1976.
- [15] E. Daniele, A. De Fenza, and P. Della Vecchia. Conceptual adaptive wing-tip design for pollution reductions. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 23(11):1197–1212, 2012.
- [16] P. A. Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. EE UU, 2004.
- [17] R. De Breuker, M. Abdalla, and Z. Gurdal. Design of morphing winglets with the inclusion of nonlinear aeroelastic effects. *Aeronautical Journal*, 115(1174):713–728, 2011.
- [18] R. De Breuker, M. M. Abdalla, and Z. Gurdal. A generic morphing wing analysis and design framework. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(10):1025–1039, 2011.
- [19] C. del Pino, J. M. Lopez-Alonso, L. Parras, and R. Fernandez-Feria. Dynamics of the wing-tip vortex in the near field of a naca 0012 aerofoil. *Aeronautical Journal*, 115(1166):229–239, 2011.
- [20] M. Dinesh, P. S. Premkumar, J. S. Rao, and C. Senthilkumar. Performance analysis of winglets using cfd simulation. Report, Altair Technology Center, 2013.
- [21] L. Dragos. *Mathematical Methods in Aerodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Rumania, 2003.
- [22] A. M. Elizarov, N. B. Il'insky, and A. V. Potashev. *Mathematical Methods of Airfoil Design*. Akademie Verlag, Rusia, 1997.
- [23] A. F. d. A. (FAA). *The Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge*. EE UU, 2008.
- [24] J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluids Dynamics*. Alemania, 2002.

- [25] I. E. Garrick. On the plane potential flow past a lattice of arbitrary airfoils. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1944.
- [26] N. N. Gavrilovic, B. P. Rasuo, G. S. Dulikravich, and V. B. Parezanovic. Commercial aircraft performance improvement using winglets. *Fme Transactions*, 43(1):1–8, 2015.
- [27] F. C. Gerhardt, R. G. J. Flay, and P. Richards. Unsteady aerodynamics of two interacting yacht sails in two-dimensional potential flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 668:551–581, 2011.
- [28] M. Ghoreyshi, K. Bergeron, A. Jirasek, J. Seidel, A. J. Lofthouse, and R. M. Cummings. Computational aerodynamic modeling for flight dynamics simulation of ram-air parachutes. *Aerospace Science and Technology*, 54:286–301, 2016.
- [29] J. M. R. Gorle, L. Chatellier, F. Pons, and M. Ba. Operation of darrieus turbines in constant circulation framework. *Physics of Fluids*, 29(7), 2017.
- [30] J. L. Guermond. A generalized lifting-line theory for curved and swept wings. *Journal of Fluid Mechanics*, 211:497–513, 1990.
- [31] A. Gupta, R. S. Amano, and Asme. Cfd analysis of wind turbine blade with winglets. *Proceedings of the Asme International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Vol 5*, pages 843–849, 2012.
- [32] R. L. Halfman. Experimental aerodynamic derivatives of a sinusoidally oscillating airfoil in two-dimensional flow. Report, NACA, 1951.
- [33] N. D. Halsey. Potential flow analysis of multielement airfoils using conformal mapping. *Aiaa Journal*, 17(12):1281–1288, 1979.
- [34] N. D. Halsey. Comparison of the convergence characteristics of two conformal mapping methods. *AIAA Journal*, 20(5), 1982.
- [35] J. L. Hantrais-Gervois, R. Grenon, A. Mann, and A. Buscher. Downward pointing winglet design and assessment within the m-daw research project. *Aeronautical Journal*, 113(1142):221–232, 2009.
- [36] S. P. S. Hariyadi, Sutardi, and W. A. Widodo. *Numerical Study of Aerodynamic Analysis on Wing Airfoil NACA 43018 with the addition of Forward and Rearward Wingtip Fence*, volume 1778 of *AIP Conference Proceedings*. 2016.

- [37] R. Hernandez-Rivera, A. Hernandez-Guerrero, C. Rubio-Arana, R. L. Arroyo, and Asme. Numerical study in wing tip vortex for a modified commercial boeing aircraft. *Imece 2008: Heat Transfer, Fluid Flows, and Thermal Systems, Vol 10, Pts a-C*, pages 349–356, 2009.
- [38] H. H. Heyson, G. D. Riebe, and C. L. Fulton. Theoretical parametric study of the relative advantages of winglets and wing-tip extensions. Report, NASA, 1977.
- [39] S. M. Hosseini, D. Simoni, and A. Hanifi. Direct numerical simulation of flow around a turbine blade. *DIVA*, 2015.
- [40] S. M. Hosseini, R. Vinuesa, P. Schlatter, A. Hanifi, and D. S. Henningson. Direct numerical simulation of the flow around a wing section at moderate reynolds number. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 61:117–128, 2016.
- [41] IATA. Report, 2013.
- [42] K. Ishimitsu and D. Zanton. Design and analysis of winglets for military aircraft. Report, Boeing Commercial Airplane Company, 1976.
- [43] D. C. Ives. A modern look at conformal mapping including multiply connected regions. *AAIA*, 14:1006–1011, 1976.
- [44] E. Jacobs and I. Abbott. Airfoil section data obtained in the naca variable-density tunnel as affected by support interference and other corrections. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1939.
- [45] E. Jacobs and A. Sherman. Airfoil section characteristics as affected by variations of the reynolds number. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1937.
- [46] E. Jacobs, K. Ward, and R. Pinkerton. The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1935.
- [47] J. Johansen and N. N. Sorensen. Aerodynamic investigation of winglets on wind turbine blades using cfd. Report, Laboratorio Nacional Riso, 2006.
- [48] R. T. Jones. The unsteady lift of a finite wing. Report, NACA, 1939.
- [49] R. T. Jones. Improving the efficiency of smaller transport aircraft. Report, NASA, 1984.

- [50] M. E. Klonowska and W. J. Prosnak. On an effective method for conformal mapping of multiply connected domains. *Acta Mechanica*, 119(1-4):35–52, 1996.
- [51] F. Kody, G. Bramesfeld, and S. Schmitz. An efficient methodology for using a multi-objective evolutionary algorithm for winglet design. *Technical Soaring*, 37(3):45–56, 2014.
- [52] A. T. Krebs and B. G. Bramesfeld. Using an optimisation process for sailplane winglet design. *Aeronautical Journal*, 120(1233):1726–1745, 2016.
- [53] N. Kroll and J. K. Fassbender. *MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design*, volume 89 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2002.
- [54] I. Kroo. Drag due to lift: Concepts for prediction and reduction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33:587–617, 2001.
- [55] J. Kudva. Overview of the darpa smart wing project. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15:161–167, 2004.
- [56] J. Lamar. A career in vortices and edge forces. *Aeronautical Journal*, 116(1176):101–152, 2012.
- [57] G. S. Langevin and P. Overbey. Concept to reality. Report, NASA, 2003.
- [58] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and its Applications. Holanda, 1997.
- [59] W. Mangler. The lift distribution of wings with end plates. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1938.
- [60] M. D. Maughmer. Design of winglets for high-performance sailplanes. *Journal of Aircraft*, 40(6):1099–1106, 2003.
- [61] P. Mazak. Winglet design for sailplanes. *Free Flight*, 92(2):6–8, 1992.
- [62] D. McLean. *Understanding Aerodynamics*. John Wiley and Sons, Reino Unido, 2013.
- [63] S. Michelin and S. G. L. Smith. An unsteady point vortex method for coupled fluid-solid problems. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 23(2):127–153, 2009.
- [64] M. L. Milne-Thompson. *Theoretical Aerodynamics*. Dover Publications, Inc, EE UU, 1958.

- [65] M. Mokry. The vortex merger factor in aircraft wake turbulence. *Aeronautical Journal*, 109(1091):13–22, 2005.
- [66] H. Monner, D. Sachau, and E. Breitbach. Design aspects of the elastic trailing edge for an adaptative wing. Report, NATO, 1999.
- [67] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*. Fluid Mechanics and Its Applications. Suiza, 2016.
- [68] M. Munk. The minimum induced drag of airfoils. Report, NACA, 1923.
- [69] NASA. 3D ONERA M6 Wing Validation Case. https://turbmodels.larc.nasa.gov/onerawingnumerics_val.html. Consultada el: 2018-05-29.
- [70] A. E. Oñate. *Conocimientos del Avión*. España, 2001.
- [71] A. Panaras. Numerical simulation of airfoil flow at high angle of attack. *Journal of Vortex Science and Technology*, 2(2), 2015.
- [72] A. Panaras and S. G. Voutsinas. Effect of counter-rotating vortices on the development of aircraft wakes. *Aeronautical Journal*, 108(1089):585–592, 2004.
- [73] G. V. Parkinson and W. Yeung. A wake source model for airfoils with separated flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 179:41–57, 1987.
- [74] S. V. Patankar. *Numerical Methods for Heat Transfer and Fluid Flow*. EE UU, 1980.
- [75] S. Pooladsanj, M. Tadjfar, and Asme. *NUMERICAL STUDY OF WINGLET AT LOW REYNOLDS NUMBERS*. Proceedings of the Asme Fluids Engineering Division Summer Meeting, 2013, Vol 1b: Symposia. 2014.
- [76] B. Prananta, A. Namer, J. Maseland, and J. Van Muijden. Winglets on large civil aircraft: impact on wing deformation. Report, National Aerospace Laboratory NLR, 2005.
- [77] L. Prandtl. Theory of lifting surfaces: Part i. Report, NACA, 1918.
- [78] L. Prandtl. Theory of lifting surfaces: Part ii. Report, NACA, 1919.
- [79] L. Prandtl and O. G. Tietjens. *Applied Hydro and Aeromechanics*. Dover Publications, Inc., EE UU, 1934.

- [80] C. Schmieden. Flow around wings accompanied by separation of vortices. Report, NACA, 1987.
- [81] S. Schonhals, M. Steen, and P. Hecker. Wake vortex prediction and detection utilising advanced fusion filter technologies. *Aeronautical Journal*, 115(1166):221–228, 2011.
- [82] P. R. Spalart. Airplane trailing vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30:107–138, 1998.
- [83] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AAIA*, 1992.
- [84] T. Streit, J. Himisch, R. Heinrich, B. Nagel, K. H. Horstmann, and C. Liersch. Design of a retrofit winglet for a transport aircraft with assessment of cruise and ultimate structural loads. *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics Vi*, 96:62–+, 2007.
- [85] T. Streit, A. Ronzheimer, and A. Büscher. Numerical analysis of transport aircraft using different wing tip devices. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics V*, pages 59–68. Springer.
- [86] A. Suddhoo and I. M. Hall. Test cases for the plane potential flow past multi-element aerofoils. *The Aeronautical Journal*, 89(890):403–414, 1985.
- [87] A. B. Taylor. Dc-10 winglet flight evaluation summary report. Report, National Aeronautics and Space Administration, 1987.
- [88] G. I. E. Theodorsen, T. General potential theory of arbitrary wing sections. Report, NACA, 1934.
- [89] T. Theodorsen. Theory of wing sections of arbitrary shape. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1931.
- [90] T. Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Report, National Advisory Committee For Aeronautics, 1935.
- [91] D. Vechtel. Simulation study of wake encounters with straight and deformed vortices. *Aeronautical Journal*, 120(1226):651–674, 2016.
- [92] A. Verhoff. Two-dimensional potential flow solutions with separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 657:238–264, 2010.

- [93] T. Von Kármán. *Aerodynamics*. EE UU, 1963.
- [94] T. Von Kármán and E. Trefftz. Potential flow around given lifting surface cross-sections. *Z. Flugtech. und Motorluftschiffahrt*, 9:111–116, 1918.
- [95] R. Von Mises. On the theory of the carrier surface buoyancy. *Z. Flugtech. und Motorluftschiffahrt*, 11:68–73, 87–89, 1920.
- [96] R. Von Mises. *Theory of Flight*. EE UU, 1959.
- [97] R. Vos, Z. Grdal, and M. Abdalla. Mechanism for warp-controlled twist of a morphing wing. *Journal of Aircraft*, 47(2):450–457, 2010.
- [98] H. Wagner. Uber die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 5(1):17–35, 1925.
- [99] J. Weissinger. The lift distribution of swept-back wings. Report, NACA, 1947.
- [100] P. Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Mathematics. Alemania, 2001.
- [101] R. T. Whitcomb. A design approach and selected wind-tunnel results at high subsonic speeds for wing-tip mounted winglets. Report, Langley Research Center, 1976.
- [102] D. C. Wilcox. *Turbulence Modelling for CFD*. EE UU, 1993.
- [103] J. Z. Wu, H. Y. Ma, and M. D. Zhou. *Vorticity and Vortex Dynamics*. Alemania, 2005.
- [104] W. Yeung. *A mathematical model for airfoils with spoilers or split flaps*. Thesis, 1985.
- [105] W. W. H. Yeung and G. V. Parkinson. A wake singularity potential flow model for airfoils experiencing trailing-edge stall. *Journal of Fluid Mechanics*, 251:203–218, 1993.
- [106] A. F. Zahm, R. M. Bear, and G. C. Hill. Lift and drag effects of wing-tip rake. Report, NACA, 1922.
- [107] N. Zhukovsky. Ueber die konturen der tragflächen der drachenfliege. *Z. Flugtech. und Motorluftschiffahrt*, 1:281–284, 1910.