UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

FORMAS DE DIRICHLET

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
FRANCISCO MANUEL SETIÉN AMADOR

DIRECTOR DE LA TESIS: ROBERTO QUEZADA BATALLA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA- IZTAPALAPA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., FEBRERO 2018

Índice general

0.1. INTRODUCCIÓN

En la teoría (clásica) del potencial, dado un campo de fuerzas F irrotacional o conservativo en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ uno busca, al menos localmente, potenciales U tales que $F = \nabla U$. Uno de los logros más importantes del análisis del siglo diecinueve fue la solución del problema de Dirichlet, i.e., la determinación del potencial U armónico en Ω cuando se conocen sus valores en la frontera $\partial\Omega$ de Ω, bajo ciertas hipótesis sobre la regularidad de $\partial\Omega$. Uno de los métodos desarrollados para resolver este problema consiste en la construcción de los núcleos de Green o de Poisson en Ω, a través de los cuales U admite una representación integral en términos de sus valores en $\partial\Omega$. Un segundo método para resolver el problema de Dirichlet consiste en buscar el potencial U como el único minimizador de la integral de energía de Dirichlet

$$\mathcal{E}[u] = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

cuando u se mueve entre las funciones continuas con los valores en la frontera de Ω prescritos por el problema. A éste se le conoce como el método variacional. Una importante propiedad de este funcional de energía es que no se incrementa cuando se reemplaza una función u por $u \wedge 1 := \text{ínf}(u, 1)$, i.e.,

$$\mathcal{E}(u \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u). \tag{1}$$

Con el propósito de generalizar la teoría del potencial a espacios localmente compactos, las formas de Dirichlet conmutativas (o clásicas) hicieron su aparición en dos artículos seminales de Arne Berluing y J. Deny (1958-1959) [4, 5]. Su enfoque se basa en la noción de funcional de energía siguiendo el método variacional mencionado arriba, donde el potencial aparece como un objeto derivado. En esta teoría, un espacio de Dirichlet es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto equipado con una forma de Dirichlet $\mathcal{E} : C_0(X) \mapsto (-\infty, \infty]$, i.e., un funcional cuadrático semicontinuo inferiormente definido sobre el álgebra $C_0(X)$ de las funciones que se anulan en infinito, que es finito sobre un subespacio denso y satisface la propiedad de contracción (1). En el estudio de estos potenciales, es natural usar los métodos de espacios de Hilbert. Se sabe (ver [Mok]) que existe una medida positiva de Radon m sobre X tal que $\mathcal{E}$ admite una extensión semicontinua inferiormente al espacio $L_2(X, m)$. En otras palabras, el funcional $\mathcal{E}$ se puede considerar como la forma cuadrática cerrada de un operador autoadjunto H sobre $L_2(X, m)$. A. Beurling y J. Deny descubrieron una caracterización dinámica de la propiedad de contracción del funcional de energía $\mathcal{E}$ sobre $L_2(X, m)$: en términos del semigrupo $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ generado por $-H$, la propiedad de contracción de $\mathcal{E}$ es equivalente a la Markovianidad, que consiste en la preservación de la positividad, i.e., para cada $t \geq 0$, e^{-tH} envía funciones positivas en funciones positivas y la contractividad del semigrupo, i.e., para cada $t \geq 0$, e^{-tH} es una contracción en la norma de $L_2(X, m)$ y respecto a la norma uniforme del álgebra $L_\infty(X, m)$. A su vez, por un argumento de interpolación y dualidad, esto implica contractividad con respecto a toda la escala de espacios de Lebesgue $L_p(X, m)$. En otras palabras, la solución generalizada $u(t) = e^{-tH}u_0$ de la ecuación del calor $u'(t) = -Hu(t)$, $u(0) = u_0$, satisface un principio del máximo.

El trabajo de S. Albeverio y R. Hoegh-Krohn en [2, 3], es pionero en el estudio de formas de Dirichlet en el contexto no conmutativo de un álgebra C^* o de von Neumann M y una traza τ semidefinida sobre ella. En particular, ellos obtuvieron una generalización de la caracterización de Beurling-Deny de semigrupos de Markov en términos de formas de Dirichlet. Esta teoría fue desarrollada posteriormente por J.-L. Sauvageot [22, 23] E. B. Davies-J. M. Lindsay [14, 15] y ha encontrado varias aplicaciones. Por ejemplo, en la teoría de los sistemas cuánticos abiertos y en la teoría cuántica de mediciones, los semigrupos de Markov (también llamados semigrupos dinámicos cuánticos) aparecen de manera natural como soluciones de las ecuaciones maestras que modelan la dinámica disipativa de un sistema cuántico acoplado a un baño térmico o sujeto a un proceso continuo de mediciones. En particular, en el capítulo 6 describiremos a la forma de Dirichlet asociada con el semigrupos cuántico de Markov del proceso de absorción y emisón de n fotones, como ejemplo de forma de Dirichlet no conmutativa.

En este trabajo se presentará un panorama general autocontenido de las formas de Dirichlet, siguiendo el trabajo de Z.M. Ma y M. Röckner [25] para el caso conmutativo y el artículo de F. Cipriani [7] en el caso no conmutativo. Aunque las formas de la etapa conmutativa se pueden ver como un caso particular de las formas no conmutativas, consideramos apropiado presentarlas en la primera parte de esta tesis como un caso independiente. Después, en la segunda parte, las formas conmutativas se usan como modelo para obtener las formas de Dirichlet no conmutativas. Ponemos más énfasis a esta segunda parte, ya que las formas no conmutativas son más recientes que las conmutativas y, por lo tanto, menos difundidas.

Además de una presentación autocontenida de las formas de Dirichlet conmutativas y no conmutativas, la aportación principal de este trabajo (capítulo 6) consiste en generalizar al caso de absorción y emisión de n fotones algunos de los resultados obtenidos en [8]. Para esto se aprovecha el estudio del hueco espectral del proceso de absorción emisión de n fotones, realizado en [17].

Parte I

Formas de Dirichlet conmutativas

En la primera mitad del siglo XIX Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), planteó un problema que marcaría el rumbo de una buena parte de la investigación matemática de aquella época. El llamado "Problema de Dirichletçonsiste en encontrar una función armónica U sobre una región R (en el plano), tal que U asuma ciertos valores en la frontera ∂R. Una manera de resolver este problema, (ver [9]), es mediante una integral de Dirichlet en particular:

$$\mathcal{E}[u] = \int_R |\bigtriangledown u(x)|^2 dx$$

donde u es una función continua que toma los valores preestablecidos en la frontera para U, y $\bigtriangledown$ es el operador gradiente. La solución será aquella (única) u que minimiza la integral. Una característica conspicua de esta integral, es que no incrementa su valor con respecto al que tiene con u si cambiamos ésta última función por la función $u \wedge 1 \equiv \text{ínf}(u, 1)$:

$$\mathcal{E}[u \wedge 1] \leq \mathcal{E}[u]$$

Tomando lo anterior como punto de partida Berluing y Deny definieron un Espacio de Dirichlet como el par $(\mathcal{E}, X)$, donde $\mathcal{E} : C^0(X) \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ es un funcional lineal, llamado Forma de Dirichlet, semicontinuo inferiormente y que satisface la propiedad contractiva: $\mathcal{E}[u \wedge 1] \leq \mathcal{E}[u]$; X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $C_0(X)$ es al álgebra de funciones continuas que se anulan en el infinito. Se sabe que siempre es posible encontrar una medida positiva de Radon, μ, de tal manera que el funcional $\mathcal{E}$ se puede extender al Espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$; esto último conlleva la ventaja de poder utilizar los potentes métodos de los espacios de Hilbert.

En esta primera parte se desarrollarán las formas de Dirichlet clásicas (o conmutativas) siguiendo el enfoque de [25], que es el más actual.

Capítulo 1

Formas bilineales coercivas cerradas

Las formas bilineales son la materia prima con la que trabajaremos en esta primera parte. Empezaremos por definirlas, para después estudiar un tipo de productos internos y de normas que se derivan a partir de ellas. En términos de estas normas se definirán las condiciones de continuidad y cerradura; condiciones que deben cumplir las formas bilineales para poder ser llamadas coercivas y cerradas. Al adicionarles a estas últimas unas propiedades contractivas obtenemos finalmente las formas de Dirichlet clásicas (conmutativas).

1.1. Formas bilineales

Aquí consideraremos un espacio real de Hilbert $\mathcal{H}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $|| \cdot || = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ fijos.

Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio vectorial y $\mathcal{E} : D \times D \to \mathbb{R}$ un mapeo bilineal, el cual denotaremos como $(\mathcal{E}, D)$. Recordemos que los mapeos bilineales son lineales en ambas entradas:

$$\mathcal{E}(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \mathcal{E}(u, w) + \beta \mathcal{E}(v, w)$$

$$\mathcal{E}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{E}(u, v) + \beta \mathcal{E}(u, w)$$

con $u, v, w \in D$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se supondrá que $(\mathcal{E}, D)$ es positivo definido, es decir, para cualquier u en D, $\mathcal{E}(u, u) \geq 0$. Recordemos que una forma bilineal es simétrica si $\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}(v, u)$; en este sentido definimos la parte simétrica de cualquier forma bilineal como:

$$\tilde{\mathcal{E}}(u, v) \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{E}(u, v) + \mathcal{E}(v, u)).$$

Es claro que si la forma bilineal es simétrica, entonces $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}$.

Ahora para cualquier $\alpha > 0$ definimos:

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v) \equiv \mathcal{E}(u,v) + \alpha\langle u,v\rangle \qquad u,v \in D.$$

Observemos que al ser $(\mathcal{E}, D)$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positivos definidos, para todo u en D se tiene que $\mathcal{E}(u,u) + \alpha\langle u,u\rangle = 0$ implica: $\alpha\langle u,u\rangle = 0$ y por lo tanto $u = 0$; de aquí se deduce que $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,v) \equiv \tilde{\mathcal{E}}(u,v) + \alpha\langle u,v\rangle$ es un producto interior en D. Ahora veremos que las normas inducidas por los productos internos $\tilde{\mathcal{E}_\alpha}$ en D para $\alpha > 0$, son todas equivalentes:

Sean $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha \leq \beta$. Entonces, para cualquier u en D tenemos:

$$\alpha\langle u,u\rangle \leq \beta\langle u,u\rangle \Longleftrightarrow \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \alpha\langle u,u\rangle} \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \beta\langle u,u\rangle}.$$

Por lo tanto, $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,u)} \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\beta(u,u)}$. Ahora, tenemos que $1 \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Supongamos que existe u en D tal que:

$$\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \beta\langle u,u\rangle} > \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \alpha\langle u,u\rangle} \geq 0.$$

Entonces,

$$\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \beta\langle u,u\rangle > \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\mathcal{E}}(u,u) + \alpha\langle u,u\rangle) \Longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}(u,u) > \frac{\beta}{\alpha}\tilde{\mathcal{E}}(u,u),$$

lo cual es una contradicción, pues:

$$1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \Longrightarrow \forall u \in D \quad \tilde{\mathcal{E}}(u,u) \leq \frac{\beta}{\alpha}\tilde{\mathcal{E}}(u,u).$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,u)} \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\beta(u,u)} \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,u)} \quad u \in D.$$

1.2. Formas coercivas cerradas

.

Ahora, usando las normas arriba definidas, se definirán las formas coercivas cerradas. Puesto que $\mathcal{E}(u,u) = \tilde{\mathcal{E}}(u,u)$ tenemos que $\mathcal{E}_1(u,u) = \tilde{\mathcal{E}}_1(u,u)$, por lo que, para mayor simplicidad, de ahora en adelante las normas se escribiran sin la tilde.

Decimos que $(\mathcal{E}, D)$ satisface la condición sectorial débil cuando existe una constante $K > 0$ (llamada constante de continuidad) tal que:

$$|\mathcal{E}_1(u,v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v,v)}; \quad \forall u,v \in D$$

es decir, la condición sectorial débil establece que $\mathcal{E}_1$ tiene que ser continua con respecto a la norma $\sqrt{\mathcal{E}_1}$.

En el siguiente lema veremos que la condición sectorial débil es equivalente a la continuidad de las demás $\mathcal{E}_\alpha$ con respecto a sus respectivas normas y a su vez a la continuidad de la forma bilineal original, $\mathcal{E}$, con respecto a cualesquiera de las normas $\mathcal{E}_\alpha$.

Lema 1.2.1. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma bilineal positiva definida, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a).- $(\mathcal{E}, D)$ satisface la condición sectorial débil.

(b).- Para toda $\alpha > 0$ existe $K_\alpha > 0$ tal que, para todas $u, v \in D$:

$$|\mathcal{E}_\alpha(u, v)| \leq K_\alpha \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u, u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v, v)}$$

(c).- Para toda $\alpha > 0$ existe $K'_\alpha > 0$ tal que, para todas $u, v \in D$:

$$|\mathcal{E}(u, v)| \leq K'_\alpha \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u, u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v, v)}$$

Demostración. Primero observemos que, para cualesquiera $\alpha > 0$ y $u, v \in D$, $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$ y $|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}$ implican:

$$\alpha|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\alpha\langle u, u\rangle\alpha\langle v, v\rangle} = \sqrt{\alpha\langle u, u\rangle}\sqrt{\alpha\langle v, v\rangle}$$

por otro lado: $0 \leq \alpha\langle w, w\rangle \leq \alpha\langle w, w\rangle + \mathcal{E}(w, w)$, para cualquier $w \in D$. Por lo tanto:

$$|\alpha\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\mathcal{E}(u, u) + \alpha\langle u, u\rangle}\sqrt{\mathcal{E}(v, v) + \alpha\langle v, v\rangle} = \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)}$$

$(a) \Rightarrow (b)$. Sea $K > 0$ tal que $|\mathcal{E}_1(u, v)| \leq K\sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$, para cualesquiera $u, v \in D$. Tomando en cuenta que para $\alpha = 1$ tenemos $|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$, para cualesquiera $u, v \in D$, obtenemos .

$$|\mathcal{E}(u, v)| = |\mathcal{E}_1(u, v) - \langle u, v\rangle| \leq |\mathcal{E}_1(u, v)| + |\langle u, v\rangle| \leq (K + 1)\sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$$

para cualesquiera $u, v \in D$. Ahora, por la equivalencia de las normas, para cualquier $\alpha > 0$, existe $b_\alpha > 0$, tal que $\sqrt{\mathcal{E}_1(w)} \leq b_\alpha\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(w)}$, para toda $w \in D$; por lo que: $|\mathcal{E}(u, v)| \leq (K + 1)b_\alpha^2\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)}$. Por lo tanto, para $\alpha > 0$ y $u, v \in D$:

$$|\mathcal{E}_\alpha(u, v)| \leq |\mathcal{E}(u, v)| + |\alpha\langle u, v\rangle| \leq [(K + 1)b_\alpha^2 + 1]\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)}$$

Si definimos $K_\alpha \equiv (K + 1)b_\alpha^2 + 1 > 0$, obtenemos el resultado.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sea $\alpha > 0$, entonces, por hipótesis, existe $K_\alpha > 0$ tal que: $|\mathcal{E}(u,v) + \alpha\langle u, v\rangle| \leq K_\alpha \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)}$, para todo $u, v \in D$. Por lo tanto:

$$|\mathcal{E}(u,v)| \leq K_\alpha \sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)} + |\alpha\langle u,v\rangle| \leq (K_\alpha + 1)\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(u)}\sqrt{\mathcal{E}_\alpha(v)}$$

Si definimos $K'_\alpha \equiv K_\alpha + 1 > 0$ obtenemos el resultado.

$(c) \Rightarrow (a)$ Si $\alpha = 1$, entonces: $|\mathcal{E}(u,v)| \leq K'_1 \sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$, para todo $u, v \in D$; y puesto que: $|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$, entonces, para todo $u, v \in D$, tenemos:

$$|\mathcal{E}_1(u,v)| = |\mathcal{E}(u,v) + \langle u,v\rangle| \leq |\mathcal{E}(u,v)| + |\langle u,v\rangle| \leq (K'_1 + 1)\sqrt{\mathcal{E}_1(u)}\sqrt{\mathcal{E}_1(v)}$$

$\square$

Ahora se definirá la principal herramienta de esta parte.

Definición 1.2.2. *El par $(\mathcal{E}, D)$ es una forma coerciva cerrada si su dominio D es un subespacio vectorial denso en $\mathcal{H}$ y se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

(i).- La parte simétrica $(\tilde{\mathcal{E}}, D)$ es positiva definida y cerrada, es decir, D es completo con respecto a la norma $\sqrt{\mathcal{E}_1}$.

(ii).- $(\mathcal{E}, D)$ satisface la condición sectorial débil.

Lema 1.2.3. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma coerciva cerrada y $(u_n) \in D, n \in \mathbb{N}$ tal que $sup\{\mathcal{E}(u_n, u_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Si $u_n \longrightarrow u$ en $(\mathcal{H}, ||\centerdot||)$, entonces se cumple lo siguiente:*

1.- $u \in D$

2.- $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en el espacio de Hilbert $(D, \tilde{\mathcal{E}}_1)$

3.- $\mathcal{E}(u,u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n)$

Demostración. Supondremos que u_n no es la sucesión constante igual a cero, pues de lo contrario el lema es inmediato. Puesto que $u_n \longrightarrow u$ en $\mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{E}_1(u_n, u_n) = \mathcal{E}(u_n, u_n) + \langle u_n, u_n\rangle \leq k$ para todo n y algún $k > 0$, lo cual implica que $\sup\{\mathcal{E}_1(u_n, u_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Sea (v_m) cualquier subsucesión no cero de (u_n) y sea $\alpha \equiv \sup\{\mathcal{E}_1(v_m, v_m) : m \in \mathbb{N}\} > 0$; entonces:

$$\sqrt{\mathcal{E}_1(v_m, v_m)} \leq \sqrt{\alpha} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{\mathcal{E}_1(v_m, v_m)}}{\sqrt{\alpha}} \leq 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} v_m$ se encuentra en la bola unitaria cerrada:

$$B_1 \equiv \{x \in D : \sqrt{\mathcal{E}_1(x,x)} \leq 1\} \subseteq D.$$

Por otro lado, puesto que los espacios de Hilbert son reflexivos, el teorema de Banach-Alaoglu (ver apéndice 7.6) implica que B_1 es compacta en la topología débil, por lo que $(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_m)$ tiene una subsucesión $(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}v_{m_k})$ que converge débilmente en $(D, \mathcal{E}_1)$ a $z \in B_1$. Por lo tanto, (v_{m_k}) converge débilmente a $\sqrt{\alpha}z$ en $(D, \mathcal{E}_1)$. Ahora, si f es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{H}$, entonces para cada $u \in D$, tenemos que $|f(u)| \leq k\|u\| \leq k\sqrt{\mathcal{E}_1(u,u)}$, i.e., f es un funcional lineal continuo sobre $(D, \mathcal{E}_1)$. Consecuentemente, $f(v_{m_k}) \to f(\sqrt{\alpha}z)$, i.e., v_{m_k} converge débilmente a $\sqrt{\alpha}z$ en $\mathcal{H}$. Pero sabemos que v_{m_k} converge a u en $\mathcal{H}$, entonces $u = \sqrt{\alpha}z \in D$. Como (v_m) es una subsucesión arbitraria de (u_n), podemos concluir que u_m converge débilmente en $(D, \mathcal{E}_1)$. Por último, tenemos que $\tilde{\mathcal{E}}(u, u_n) \leq \tilde{\mathcal{E}}(u,u)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{E}}(u_n, u_n)^{\frac{1}{2}}$ y tomando límites inferiores, la convergencia débil en $(D, \mathcal{E}_1)$ implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,u) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}(u, u_n) = \liminf_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}(u, u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u)}\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)} \\ &= \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u,u)}\sqrt{\liminf_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)}\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

1.3. Formas de Dirichlet

Definiremos las formas de Dirichlet clásicas sobre el espacio de Hilbert $L_2(E, m)$, donde $(E, \mathcal{B}, m)$ es un espacio de medida.

Definición 1.3.1. *Una forma coerciva cerrada $(\mathcal{E}, D)$ sobre $L^2(E, m)$ es de Dirichlet si para cada $u \in D$ se satisface lo siguiente:*

1.- $u^+ \wedge 1 \in D$

2.- $\mathcal{E}(u + (u^+ \wedge 1), u - (u^+ \wedge 1)) \geq 0$

3.- $\mathcal{E}(u - (u^+ \wedge 1), u + (u^+ \wedge 1)) \geq 0$

En caso de que la forma sea simétrica, $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}$, con un poco de álgebra se prueba que las condiciones anteriores son equivalentes a:

$u^+ \wedge 1 \in D$ y $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u,u)$

y la forma recibe el nombre de Forma de Dirichlet simétrica.

Verificar que una forma coerciva cerrada es de Dirichlet directamente de la definición es complicado, así que veremos unos criterios útiles para tal fin. La siguiente proposición establece un criterio para verificar que una forma coerciva cerrada sea de Dirichlet.

Proposición 1.3.2. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma cerrada coerciva en $L^2(E,m)$. Sea $u \in D$ y supóngase que para toda $\epsilon > 0$ existe $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow [-\epsilon, 1+\epsilon]$ tal que:*

1.- $\varphi_\epsilon(t) = t$ *con* $t \in [0,1]$

2.- $0 \leq \varphi_\epsilon(t_2) - \varphi_\epsilon(t_1) \leq t_2 - t_1$ *, si* $t_1 \leq t_2$

3.- $\varphi_\epsilon \circ u \in D$

4.- $\liminf_{\epsilon \to 0} \mathcal{E}(u \pm \varphi_\epsilon \circ u \ , \ u \mp \varphi_\epsilon \circ u) \geq 0$

Entonces, las tres condiciones de la Definición 1.3.1 se cumplen. De aquí se concluye que $(\mathcal{E}, D)$ es una forma de Dirichlet si y sólo si existe una función φ_ϵ que cumpla con las cuatro condiciones anteriores para cada $u \in D$.

Demostración. Primero veremos que $\varphi_\epsilon \circ u$ converge a $u^+ \wedge 1$ en $L^2(E,m)$. Si $u \leq 0$ entonces $\forall \epsilon > 0$ tenemos que $0 \leq \varphi_\epsilon(0) - \varphi_\epsilon(u) \leq 0 - u \iff 0 \leq -\varphi_\epsilon(u) \leq -u \iff (\varphi_\epsilon(u))^2 \leq u^2$,por lo que $(\varphi_\epsilon(u))^2$ es integrable; además por definición, $-\epsilon \leq \varphi_\epsilon(u) \iff 0 \leq -\varphi_\epsilon(u) \leq \epsilon \iff 0 \leq (\varphi_\epsilon(u))^2 \leq \epsilon^2$; por lo tanto $\lim_{\epsilon \to 0} (\varphi_\epsilon(u))^2 = 0$. Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada (TCD),

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{[u \leq 0]} (\varphi_\epsilon(u))^2 dm = \int_{[u \leq 0]} \lim_{\epsilon \to 0} (\varphi_\epsilon(u))^2 dm = 0.$$

Análogamente, si $1 \leq u$ entonces $\forall \epsilon > 0$, $0 \leq \varphi_\epsilon(u) - \varphi_\epsilon(1) \leq u - 1 \leq u \Longrightarrow (\varphi_\epsilon(u) - 1)^2 \leq u^2$ por lo que $(\varphi_\epsilon(u) - 1)^2$ es integrable y puesto que $0 \leq \varphi_\epsilon(u) - 1 \Longrightarrow 1 \leq \varphi_\epsilon(u) \leq 1 + \epsilon \iff 0 \leq \varphi_\epsilon(u) - 1 \leq \epsilon$ se sigue que, $\lim_{\epsilon \to 0} (\varphi_\epsilon(u) - 1)^2 = 0$ y por el TCD, $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{[1 \leq u]} (\varphi_\epsilon(u) - 1)^2 dm = 0$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||\varphi_\epsilon \circ u - u^+ \wedge 1||^2 = \int_E (\varphi_\epsilon \circ u - u^+ \wedge 1)^2 dm = \int_{[u \leq 0]} (\varphi_\epsilon(u))^2 dm \\ + \int_{[0 < u < 1]} (u - u)^2 dm + \int_{[1 \leq u]} (\varphi_\epsilon(u) - 1)^2 dm \end{aligned}$$

implica que $\lim_{\epsilon \to 0} ||\varphi_\epsilon \circ u - u^+ \wedge 1||^2 = 0$

Ahora sea (ϵ_n) cualquier sucesion decreciente, $\epsilon_n \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$; sumando las dos desigualdades del inciso *4*,

$$0 \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{E}(u + \varphi_{\epsilon_n} \circ u \ , \ u - \varphi_{\epsilon_n} \circ u) + \liminf_{n \to \infty} \mathcal{E}(u - \varphi_{\epsilon_n} \circ u \ , \ u + \varphi_{\epsilon_n} \circ u)$$

$$\leq \liminf_{n \to \infty} [\mathcal{E}(u + \varphi_{\epsilon_n} \circ u \ , \ u - \varphi_{\epsilon_n} \circ u) + \mathcal{E}(u - \varphi_{\epsilon_n} \circ u \ , \ u + \varphi_{\epsilon_n} \circ u)]$$

$$= \liminf_{n \to \infty} [2\mathcal{E}(u, u) - 2\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n} \circ u, \varphi_{\epsilon_n} \circ u]$$

$= 2[\mathcal{E}(u,u) + \text{lím inf}_{n\to\infty}(-\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u))]$

$= 2[\mathcal{E}(u,u) - \text{lím sup}_{n\to\infty}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u)].$

Por lo tanto: $\text{lím sup}_{n\to\infty}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u) \le \mathcal{E}(u,u)$.

La desigualdad anterior implica que debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup\{\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_i}\circ u, \varphi_{\epsilon_i}\circ u) : n \le i\} < \infty.$$

Por lo tanto, por el Lema 1.2.3, $u^+ \wedge 1 \in D$ y $(\varphi_{\epsilon_n}\circ u)$ converge débilmente a $u^+ \wedge 1$ en $(D, \hat{\mathcal{E}}_1)$ y, además,
$\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \le \text{lím inf}_{n\to\infty}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u)$.

Equivalentemente,

$$-\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \ge -\liminf_{n\to\infty}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u) = \limsup_{n\to\infty} -\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u)$$

.

Por otro lado, por la convergencia débil, $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u) = \text{lím}_{n\to\infty}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, u)$ y $\mathcal{E}(u, u^+ \wedge 1) = \text{lím}_{n\to\infty}\mathcal{E}(u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u \pm (u^+ \wedge 1), u \mp (u^+ \wedge 1)) =&\mathcal{E}(u,u) \mp \mathcal{E}(u, u^+ \wedge 1) \pm \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u) \\ &- \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\ge \limsup_{n\to 0}\mathcal{E}(u,u) \mp \limsup_{n\to 0}\mathcal{E}(u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u) \pm \limsup_{n\to 0}\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, u) \\ &+ \limsup_{n\to 0} -\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}\circ u, \varphi_{\epsilon_n}\circ u) \ge \limsup_{n\to 0}\mathcal{E}(u \pm \varphi_{\epsilon_n}\circ u, u \mp \varphi_{\epsilon_n}\circ u) \\ &\ge \liminf_{n\to\infty}\mathcal{E}(u \pm \varphi_{\epsilon_n}\circ u, u \mp \varphi_{\epsilon_n}\circ u) \ge 0.\end{aligned}$$

Con esto se ha probado la suficiencia de la condición. Si tomamos $\varphi_\epsilon(t) = (t \vee 0) \wedge 1$, para todo $\epsilon > 0$ queda establecido que la condición es necesaria. □

Algunos autores (véase por ejemplo [16]) definen una forma coerciva como markoviana si ésta satisface un caso particular del criterio anterior: que exista una función φ_ϵ con las características mencionadas, independiente de u, para toda $u \in D$. Obsérvese que en la prueba de la Proposición 1.3.2 no es necesario ésto. En esta línea, dichos autores definen una forma de Dirichlet como una forma coerciva cerrada y markoviana. En nuestro caso, el suponer que una sola φ_ϵ funciona para toda $u \in D$ permitirá demostrar que no es necesario aplicar la Proposición 1.3.2 a todo el conjunto D, bastará considerar un subconjunto $A \subset D$ denso con respecto a la norma $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1}$, (ver Prop. 1.3.4).

Por otro lado, observemos que si $\varphi_\epsilon \circ u \in D(\mathcal{E})$ y sustituimos las dos desigualdades de *4* por las siguientes:

5.- $\text{lím inf}_{\epsilon\to 0}\mathcal{E}(\varphi_\epsilon\circ u, u - \varphi_\epsilon\circ u) \ge 0$ y $\text{lím inf}_{\epsilon\to 0}\mathcal{E}(u - \varphi_\epsilon\circ u, \varphi_\epsilon\circ u) \ge 0$, entonces el resultado de la la proposición sigue siendo válido. Para ver esto sumamos las dos desigualdades anteriores:

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u - \varphi_\epsilon \circ u) + \liminf_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(u - \varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)\\ &\leq \liminf_{\epsilon\to 0}[\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u) - 2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)].\end{aligned}$$

Ahora apliquemos la desigualdad $\liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \liminf(y_n)$:

$$\begin{aligned}&\leq \liminf_{\epsilon\to 0}[\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u) - 2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)]\\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0}[\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u)] + \liminf_{\epsilon\to 0} -2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u).\end{aligned}$$

Por otro lado, $\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n) \Longleftrightarrow -\limsup(-x_n) = \liminf(x_n)$; por lo que $\liminf_{\epsilon\to 0} -2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u) = -\limsup_{\epsilon\to 0} 2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)$.

Por lo tanto, juntando todas las piezas:

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u - \varphi_\epsilon \circ u) + \liminf_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(u - \varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)\\ &\leq \liminf_{\epsilon\to 0}[\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u) - 2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)]\\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0}[\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u)] + \liminf_{\epsilon\to 0} -2\mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)\\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, u) + \limsup_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(u, \varphi_\epsilon \circ u) - 2\limsup_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u)\\ &= \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u) + \mathcal{E}(u, u^+ \wedge 1) - 2\limsup_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u).\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $\varphi_\epsilon \circ u \longrightarrow u^+ \wedge 1$ en $L^2(E,m)$. Entonces por el Lema 1.2.3, $u^+ \wedge 1 \in D$ y $\varphi_\epsilon \circ u \longrightarrow u^+ \wedge 1$ débilmente en $(D, \tilde{\mathcal{E}}_1)$. Por lo tanto, tenemos,

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\epsilon \circ u, \varphi_\epsilon \circ u) \leq \frac{1}{2}[\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u) + \mathcal{E}(u, u^+ \wedge 1)] < \infty$$

y se continúa como en la demostración de la Proposición 1.3.2

Con el siguiente lema se establecerá el principal resultado de ésta sección.

Lema 1.3.3. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma coerciva cerrada en el espacio $L^2(E,m)$ y sea $B : L^2(E,m) \to L^2(E,m)$ un mapeo continuo tal que para algún $A \subset D$ denso en D con respecto a la norma $\sqrt{\mathcal{E}_1}$, y tal que para todo $u \in A$*

(i)

$$B(u) \in D, \quad \mathcal{E}(u \pm B(u), u \mp B(u)) \geq 0,$$

o

(ii)

$$B(u) \in D, \quad \mathcal{E}(B(u), u - B(u)) \geq 0, \;\; \mathcal{E}(u - B(u), B(u)) \geq 0$$

Entonces (i) y (ii) se cumplen para toda $u \in D$.

Demostración. Sean $u \in D$ y $u_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $(D, \tilde{\mathcal{E}}_1)$. Supongamos que se cumple la condición (i). Desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(u + B(u), u - B(u)) \geq 0. \text{ Equivalentemente,} \\ &\mathcal{E}(u,u) - \mathcal{E}(u, B(u)) + \mathcal{E}(B(u), u) - \mathcal{E}(B(u), B(u)) \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(u - B(u), u + B(u)) \geq 0. \text{ Equivalentemente,} \\ &\mathcal{E}(u.u) + \mathcal{E}(u, B(u)) - \mathcal{E}(B(u), u) - \mathcal{E}(B(u), B(u)) \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ahora sumamos las desigualdades (1.1) y (1.2) para obtener:

$$2\mathcal{E}(u,u) - 2\mathcal{E}(B(u), B(u)) \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\sup\{\mathcal{E}(B(u_n), B(u_n)) : n \in \mathbb{N}\} < \infty. \tag{1.3}$$

Además, $B(u_n) \longrightarrow B(u)$ en $L^2(E, m)$. Por lo tanto, por el lema 1.2.3 se sigue que $B(u) \in D$, $B(u_n) \longrightarrow B(u)$ débilmente en D y $\mathcal{E}(B(u), B(u)) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n), B(u_n))$. Así, siguiendo el mismo procedimiento usado en la prueba de la Proposición 1.3.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(u \pm B(u), u \mp B(u)) \\ &= \mathcal{E}(u,u) \pm \mathcal{E}(B(u), u) \mp \mathcal{E}(u, B(u)) - \mathcal{E}(B(u), B(u)) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n) \pm \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n), u_n) \mp \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, B(u_n)) \\ &- \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n), B(u_n)) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} [\mathcal{E}(u_n, u_n) \pm \mathcal{E}(B(u_n), u_n) \mp \mathcal{E}(u_n, B(u_n)) - \mathcal{E}(B(u_n), B(u_n))] \\ &= \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n \pm B(u_n), u_n \mp B(u_n)) \geq 0, \end{aligned}$$

pues $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n), u_n) = \mathcal{E}(B(u), u)$. Esto se sigue de que $\mathcal{E}(B(u_n), u_n) = \mathcal{E}(B(u_n), u_n - u + u) = \mathcal{E}(B(u_n), u_n - u) + \mathcal{E}(B(u_n), u)$, pero por el inciso (c) del Lema 1.2.1, $|\mathcal{E}(B(u_n), u_n - u)| \leq \sqrt{\mathcal{E}_1(B(u_n), B(u_n))}\sqrt{\mathcal{E}_1(u_n - u, u_n - u)} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Ahora, (1.3) y $B(u_n) \longrightarrow B(u)$ en $L^2(E, m)$ implican que $\mathcal{E}_1(B(u_n), B(u_n))$ está acotada y por otro lado la convergencia débil implica que $\mathcal{E}(B(u_n), u) \longrightarrow \mathcal{E}(B(u), u)$.
Ahora supongamos que se cumple la condición (ii). Sumando las dos desigualdades obtenemos:

$$\mathcal{E}(B(u_n), B(u_n)) \leq \frac{1}{2}[\mathcal{E}(B(u_n), u_n) + \mathcal{E}(u_n, B(u_n))] = \tilde{\mathcal{E}}(u_n, B(u_n))$$

puesto que $\tilde{\mathcal{E}}(u,v)$ es un semi-producto interno, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)) \leq \tilde{\mathcal{E}}(u_n,B(u_n)) \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)}\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(B(u_n),B(u_n))}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay un número infinito de índices n tales que $\mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)) > 0$, pues de lo contrario es claro que $\sup\{\mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Para dicho conjunto de índices tenemos que $\mathcal{E}(B(u_n),B(u_n))^2 \leq \tilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)\tilde{\mathcal{E}}(B(u_n),B(u_n))$ implica que:

$$\mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)) \leq \tilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n) \leq \tilde{\mathcal{E}}_1(u_n,u_n) \leq K,$$

pues (u_n) converge a u en $(D,\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1})$. Por lo tanto, igual que en el caso anterior, concluimos que $B(u) \in D$, $B(u_n) \longrightarrow B(u)$ débilmente en D y,

$$\mathcal{E}(B(u),B(u)) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u-B(u),B(u)) &= \mathcal{E}(u,B(u)) - \mathcal{E}(B(u),B(u)) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n,B(u_n)) - \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(B(u_n),B(u_n)) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} [\mathcal{E}(u_n,B(u_n)) - \mathcal{E}(B(u_n),B(u_n))] \\
&= \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n - B(u_n),B(u_n)) \geq 0.
\end{aligned}$$

De manera análoga, $\mathcal{E}(B(u),u-B(u)) \geq 0$. □

Como se anotó anteriormente, en lo que sigue supondremos que la φ_ϵ que aparece en la proposición 1.3.2 es la misma para toda $u \in D$.

Proposición 1.3.4. *Una forma coerciva cerrada $(\mathcal{E},D)$ sobre $L^2(E,m)$ es de Dirichlet si y sólo si las condiciones en la Definición 1.3.1, la proposición 1.3.2 (o la condición 5 en lugar de 4) se cumplen para toda u en un subconjunto denso de D con respecto a $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija. Definamos $B : L^2(E,m) \to L^2(E,m)$ un mapeo dado por $B(u) = \varphi_\epsilon(u)$ y tal que $u \in D \Rightarrow \varphi_\epsilon(u) \in D$. B es continua pues por las propiedades de φ_ϵ, de hecho,

$$||B(u_n) - B(u)||^2 = \int_E (\varphi_\epsilon(u_n) - \varphi_\epsilon(u))^2 dm \leq \int_E (u_n - u)^2 dm = ||u_n - u||^2.$$

Por lo tanto, si $u_n \longrightarrow u$ en $L^2(E,m)$, entonces $||B(u_n) - B(u)||^2 \longrightarrow 0$. La conclusión se sigue del lema anterior. □

1.4. Cerrabilidad

En la definición de forma coerciva, es requisito que dicha forma sea cerrada, sin embargo en las aplicaciones rara vez ocurre esto, por lo que el concepto de cerrabilidad es crucial. El principal resultado de esta sección establece que, bajo ciertas condiciones, dada una forma coerciva es posible encontrarle una extensión cerrada. A dicha extensión se le conoce como la cerradura de la forma coerciva.

Definición 1.4.1. *Sea $\mathcal{E}$ una forma bilineal positiva definida con dominio $D \subset \mathcal{H}$. Decimos que $(\mathcal{E}, D)$ es cerrable (sobre $\mathcal{H}$) si para toda sucesión $(u_n) \in D$ que sea $\mathcal{E} - Cauchy$ y tal que $u_n \longrightarrow 0$ en $\mathcal{H}$,cuando $n \longrightarrow \infty$,tenemos que $\mathcal{E}(u_n, u_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$*

Proposición 1.4.2. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma bilineal positiva definida con dominio $D \subset \mathcal{H}$. Consideremos el espacio pre-Hilbert $(D, \tilde{\mathcal{E}}_1)$ con producto interior $\tilde{\mathcal{E}}_1$. Ahora denotemos su completación abstracta con respecto a la norma $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1}$,como $(\bar{D}, \bar{\mathcal{E}}_1)$. Entonces existe un único mapeo continuo $T : \bar{D} \to \mathcal{H}$ que extiende la inclusión $i : D \hookrightarrow \mathcal{H}$; además, $(\mathcal{E}, D)$ es cerrable si y sólo si $T : \bar{D} \to \mathcal{H}$ es inyectivo.*

Demostración. Puesto que $(\bar{D}, \bar{\mathcal{E}}_1)$ es la completación de $(\mathcal{E}, D)$, existe un isomorfismo $A : D \longrightarrow W$ entre D y un subespacio $W \subset \bar{D}$ denso en $\bar{D}$, dado por $Ax = [x]$, donde $[x]$ es la clase de la sucesión constante $(x, x, x, ...x, ...)$ y tal que $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. Ahora para $[x_n] \in \bar{D}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad c \in \mathcal{H}$, definamos $T : \bar{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ por $T[x_n] = c$. Observemos que esta definición no depende de la elección del representante de la clase, pues si $y_n \in [x_n]$ entonces:

$$||y_n - c|| = ||y_n - c + x_n - x_n|| \leq ||x_n - c|| + ||y_n - x_n|| \leq ||x_n - c|| + \tilde{\mathcal{E}}_1[y_n - x_n]$$

por lo que $\lim y_n = c$.

T es un operador lineal, pues si $[x_n], [y_n] \in \bar{D}$ tales que $x_n \longrightarrow c, \quad y_n \longrightarrow b$ entonces $\alpha x_n + y_n \longrightarrow \alpha c + b$ y por lo tanto

$$T(\alpha[x_n] + [y_n]) = T([\alpha x_n + y_n]) = \alpha c + b = \alpha T[x_n] + T[y_n].$$

Por otro lado, tenemos que $T|_W = A^{-1} : W \longrightarrow D$; $A^{-1}([x_n]) = x$, entonces

$$\bar{\mathcal{E}}_1([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}_1(x, y) = \tilde{\mathcal{E}}_1(x, y) = \tilde{\mathcal{E}}_1(A^{-1}[x], A^{-1}[y])$$

es decir, A^{-1} preserva el producto interior. Además, como $||A^{-1}[x]|| \leq \bar{\mathcal{E}}_1([x], [x])$ concluimos que A^{-1} es continuo. Por lo tanto, al ser W denso en $\bar{D}$, A^{-1} tiene una única extensión acotada $S : \bar{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por $S([f_n]) = g$, para $[f_n] \in \bar{D}$ y $g = \lim_{n\to\infty} A^{-1}([x]_n)$ con $\lim_{n\to\infty} [x]_n = [f_m]$.

Ahora se probará que $T = S$. La desigualdad $\bar{\mathcal{E}}_1[[x]_n - [f_m]] < \epsilon$ para $n \geq N_\epsilon$ implica que $\lim_{m\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}_1[x^{(n)} - f_m] < \epsilon$ para $n \geq N_\epsilon$, donde $x^{(n)}$ es la sucesión constante $(x^{(n)}, x^{(n)}, ...)$ con $x^{(n)} \in [x]_n$ y $n \geq N_\epsilon$. Si tomamos $x_m \in [x]_m$, $m \geq 1$ lo anterior implica que $\lim_{m\to\infty} \bar{\mathcal{E}}_1[x_m - f_m] = 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||f_m - g|| &= ||f_m - g + x_m - x_m|| \\ &\leq ||f_m - x_m|| + ||x_m - g|| \\ &\leq \bar{\mathcal{E}}_1[f_m - x_m] + ||x_m - g|| \to 0, \end{aligned}$$

cuando $m \longrightarrow \infty$. Por lo tanto $T[f_m] = g$ y $T = S$. Por otro lado, es claro que $\imath(T) : \bar{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ extiende a $\imath(A^{-1}) : W \longrightarrow \mathcal{H}$.

Sea $(\mathcal{E}, D)$ cerrable. Sean $[x_n], [y_n] \in \bar{D}$ tales que $T[x_n] = T[y_n] = c$, entonces $||x_n - y_n|| = ||x_n - c + c - y_n|| \leq ||x_n - c|| + ||y_n - c||$, por lo tanto $x_n - y_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y puesto que $x_n - y_n \in D$ y $\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1[x_n - y_n - (x_m - y_m)]} \leq \sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1[x_n - x_m]} + \sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1[y_n - y_m]}$ tenemos que $x_n - y_n$ es $\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1}$-Cauchy. Por hipótesis $\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1[x_n - y_n]} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $(x_n) \sim (y_n)$ y $[x_n] = [y_n]$. Por lo tanto T es inyectiva.

Reciprocamente, si $(u_n) \in D$, (u_n) es $\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1}$-Cauchy y $u_n \longrightarrow 0$, entonces $T[u_n] = T[0_n]$ y por la inyectividad $[u_n] = [0_n]$, es decir $(u_n) \backsim (0_n)$, por lo que $\sqrt{\bar{\mathcal{E}}_1[u_n]} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ □

Veamos en concreto cómo funciona la proposición anterior. Puesto que $\tilde{\mathcal{E}}_1 = \tilde{\mathcal{E}}(u, v) + \langle u, v\rangle, \quad u, v \in D$ es un producto interior, si $(u_n), (v_n)$ son sucesiones $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1} - Cauchy$, entonces $\lim \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1[u_n - v_n]}$ y $\lim \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1[u_n + v_n]}$ existen, y puesto que $\lim\langle u_n, v_n\rangle$ también existe, tenemos que

$$\lim_n \tilde{\mathcal{E}}(u_n, v_n) = \frac{1}{4} \lim_n (\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1[u_n + v_n]} - \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1[u_n - v_n]}) - \lim_n \langle u_n, v_n\rangle$$

existe, por lo que si $\bar{D}$ es la completación de D con respecto a $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_1}$ entonces para $[x_n], [y_n] \in \bar{D}$ definimos $\bar{\mathcal{E}}([x_n], [y_n]) = \lim \tilde{\mathcal{E}}(x_n, y_n)$. Si $(x_n) \sim (w_n)$ y $(y_n) \sim (z_n)$ entonces los límites son iguales pues $\langle u_n, v_n\rangle = \frac{1}{4}||u_n + v_n|| - ||u_n - v_n||)$

Ahora por la proposición anterior $T : \bar{D} \longrightarrow T(\bar{D}) \subseteq \mathcal{H}$ es inyectiva por lo que podemos definir la forma bilineal simétrica $[\mathcal{E}] : T(\bar{D}) \times T(\bar{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$[\mathcal{E}](x, y) = \bar{\mathcal{E}}(T^{-1}x, T^{-1}y).$$

Claramente $D \subseteq T(\bar{D})$ pues D es isomorfo a $W \subset \bar{D}$ y, para $u, v \in D$, tenemos

$$[\mathcal{E}](u, v) = \bar{\mathcal{E}}(T^{-1}u, T^{-1}v) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \tilde{\mathcal{E}}(u, v)$$

por lo tanto $[\mathcal{E}](u, v)$ es una extensión de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Capítulo 2

Ejemplo

En este capítulo desarrollaremos en detalle un ejemplo de forma de Dirichlet. Otros ejemplos se pueden consultar en la referencia [25]. Empezaremos construyendo una función φ_ϵ, como la requerida en la Proposición 1.3.2.

2.1. Funciones regularizantes

Sea J una función real, no negativa, tal que $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, y que además cumpla con las siguientes propiedades:

1.- $J(x) = 0$ si $|x| \geq 1$

2.- $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$.

La función regularizante estándar es la siguiente

$$J(x) = \begin{cases} k\exp(\frac{-1}{1-|x|^2}) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde $k > 0$ es una constante que se escoge de tal manera que la condición 2, arriba mencionada, se cumpla.

Para lo que sigue necesitamos definir otra función, partiendo de la anterior. Sean $\delta > 0$ y $n \geq 1$ un entero. La función

$$j_\delta(x) = \delta^{-n} J(\frac{x}{\delta})$$

es no negativa, pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y satisface

1.- $j_\delta(x) = 0$ si $|x| \geq \delta$

2.- $\int_{\mathbb{R}^n} j_\delta(x)dx = 1$.

Esta última función, j_δ, recibe el nombre de función regularizante. Con esta función definiremos una convolución, la cual jugará el papel de la función φ_ϵ, requerida en la Proposición 1.3.2. Sean $\delta, \epsilon > 0$ tales que $\delta < \epsilon$. Definimos la convolución:

$$\varphi_\epsilon(t) = j_\delta * \psi_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} j_\delta(t-s)\psi_\epsilon(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} J(\frac{t-s}{\delta})\psi_\epsilon(s)ds$$

donde $\psi_\epsilon(s) \equiv (-\epsilon \vee s) \wedge (1+\epsilon)$ en $\mathbb{R}$. Ahora demostraremos que $\varphi_\epsilon(t)$ satisface las propiedades requeridas.

1.- Se tiene que $-\epsilon \leq \varphi_\epsilon(t) \leq 1+\epsilon$. Para demostrar esto, sea $\epsilon > 0$. Puesto que $-\epsilon \leq (-\epsilon \vee s) \wedge (1+\epsilon) \leq 1+\epsilon$ y $\forall t, s \in \mathbb{R},\ J(\frac{t-s}{\delta}) = J(\frac{s-t}{\delta}) \geq 0$, entonces

$$\frac{-\epsilon}{\delta}\int_{\mathbb{R}} J(\frac{s-t}{\delta})ds \leq \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}} J(\frac{s-t}{\delta})\psi_\epsilon(s)ds \leq \frac{1+\epsilon}{\delta}\int_{\mathbb{R}} J(\frac{s-t}{\delta})ds$$

y haciendo el cambio de variable $z = \frac{s-t}{\delta}$, $dz = \frac{1}{\delta}ds$ obtenemos el resultado.

2.- También se cumple que $0 \leq \varphi_\epsilon(t_2) - \varphi_\epsilon(t_1) \leq t_2 - t_1$, para $t_2 > t_1$. Para demostrar esto obsérvese que

$$\begin{aligned}\frac{\mathtt{d}\varphi_\epsilon(t)}{\mathtt{dt}} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta^2} J'(\frac{t-s}{\delta})\psi_\epsilon(s)ds = \frac{1}{\delta}[\epsilon\int_{-\infty}^{-\epsilon} -\frac{1}{\delta}J'(\frac{t-s}{\delta})ds \\ &- \int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} -\frac{1}{\delta}sJ'(\frac{t-s}{\delta})ds - (1+\epsilon)\int_{1+\epsilon}^{\infty} -\frac{1}{\delta}J'(\frac{t-s}{\delta})ds]\end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} -\frac{1}{\delta}sJ'(\frac{t-s}{\delta})ds = sJ(\frac{t-s}{\delta})|_{-\epsilon}^{1+\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} J(\frac{t-s}{\delta})ds$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} J(\frac{s-t}{\delta})ds = \int_{\frac{-\epsilon-t}{\delta}}^{\frac{1+\epsilon-t}{\delta}} J(z)dz \qquad z = \frac{s-t}{\delta}; dz = \frac{1}{\delta}ds$$

Pero por hipótesis

$$0 \leq \int_{\frac{-\epsilon-t}{\delta}}^{\frac{1+\epsilon-t}{\delta}} J(z)dz \leq 1$$

es decir, $\forall t \in \mathbb{R}\quad 0 \leq \varphi'_\epsilon(t) \leq 1$. Ahora, por el teorema del valor medio, para $t_2 > t_1$ existe $c \in \mathbb{R}, \quad t_1 < c < t_2$, tal que:

$$0 \leq \frac{\varphi_\epsilon(t_2) - \varphi_\epsilon(t_1)}{t_2 - t_1} = \varphi'_\epsilon(c) \leq 1$$

3.- Además se cumple que $\varphi_\epsilon(t) = t, \quad t \in [0,1]$. Esto se demuestra de la siguiente manera. Como $t \geq 0$, entonces $-\epsilon - t \leq -\epsilon$ y dado que $0 < \delta < \epsilon$

entonces $-\frac{\epsilon}{\delta} < -1$, por lo tanto: $\frac{-\epsilon - t}{\delta} \leq -\frac{\epsilon}{\delta} < -1$.

Por otro lado,

$$-1 \leq -t \leq 0 \Rightarrow \epsilon \leq (1+\epsilon) - t \Rightarrow 1 < \frac{\epsilon}{\delta} \leq \frac{(1+\epsilon)-t}{\delta}$$

. Por lo tanto

$$\varphi'_\epsilon(t) = \int_{\frac{-\epsilon-t}{\delta}}^{\frac{(1+\epsilon)-t}{\delta}} J(z)dz = \int_{-1}^{1} J(z)dz = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Ahora, vemos que si $t = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi_\epsilon(0)| &= |\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} J(\frac{s-0}{\delta})\psi_\epsilon(s)ds| \\
&= \frac{1}{\delta}| -\epsilon\delta \int_{-\infty}^{\frac{-\epsilon}{\delta}} J(z)dz + \delta^2 \int_{\frac{-\epsilon}{\delta}}^{\frac{1+\epsilon}{\delta}} zJ(z)dz + (1+\epsilon)\delta \int_{\frac{1+\epsilon}{\delta}}^{\infty} J(z)dz| \\
&= \frac{1}{\delta}|\delta^2 \int_{-1}^{1} zJ(z)dz| = 0
\end{aligned}$$

pues $zJ(z)$ es impar. Por lo tanto, si $0 \leq t \leq 1$ entonces $\frac{\varphi_\epsilon(t) - \varphi_\epsilon(0)}{t-0} = 1$

Más aún $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{|\varphi_\epsilon(t) - \varphi_\epsilon(0)|}{|t-0|} \leq 1 \Longrightarrow |\varphi_\epsilon(t)| \leq |t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

2.2. La integral de Dirichlet

Consideremos un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ y sea $L^2(D, dx)$ el espacio de las funciones cuadrado sumables sobre D con la medida de Lebesgue dx. Sea $W^{1,2}(D)$ el espacio de Sobolev de orden 1, i.e.,

$$W^{1,2}(D) \equiv \{u \in L^2(D, dx) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D, dx), 1 \leq i \leq d\}$$

Las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ son en el sentido de distribuciones de Schwarz.

Para $u, v \in W^{1,2}(D)$ definimos la forma bilineal

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{d} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Observemos que para cada $u, v \in W^{1,2}(D)$,

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{d} \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2}\sum_{1}^{d} \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\mathtt{d}x_i} dx = \mathcal{E}(v,u)$$

Entonces $(\mathcal{E}, W^{1,2}(D))$ es una forma simétrica. La completez de $(\mathcal{E}, W^{1,2}(D))$, véase el Teorema 3.3, pg. 60, en [1], implica que $(\mathcal{E}, W^{1,2}(D))$ es una forma simétrica cerrada.

Ahora demostraremos que las condiciones en la Proposición 1.3.2 se cumplen. Las condiciones 1 y 2 ya fueron verificadas en la seccción anterior (propiedades 2 y 3, en la página 22). Ahora se demostrará que se cumple con la condición 3; es decir, que $\varphi_\epsilon \circ u \in W^{1,2}(D)$ para cada $u \in W^{1,2}(D)$. Para esto usaremos la siguiente caracterización de los elementos de $W^{1,2}(D)$ (véanse los teoremas 1 y 2 de la subsección 1.1.3 de [21]): $u \in W^{1,2}(D)$ si y solo si (posiblemente después de una modificación en un subconjunto de medida cero) su restricción a casi cualquier línea paralela a los ejes coordinados es absolutamente continua y su derivada pertenece a $L^2(D)$. Sea u^i la restricción de u a una línea paralela al eje x_i, puesto que u^i es absolutamente continua, por la propiedad 2 de φ_ϵ tenemos que

$$\varphi_\epsilon(u^i(t_2)) - \varphi_\epsilon(u^i(t_1)) \leq u^i(t_2) - u^i(t_1)$$

entonces $\varphi_\epsilon(u^i)$ es absolutamente continua en casi toda linea paralela a x_i. Por otro lado, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \varphi_\epsilon(u^i(x))}{\partial x_i} = \varphi'_\epsilon(u^i(x)) \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i}$$

y puesto que $0 \leq \varphi'_\epsilon(t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$0 \leq |\varphi_\epsilon(u^i(x))| |\frac{\partial (u^i(x))}{\partial x_i}| \leq |\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i}|$$

lo cual implica

$$\int_D |\frac{\partial \varphi_\epsilon(u^i(x))}{\partial x_i}|^2 dx \leq \int_D |\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i}|^2 dx < \infty$$

Esto demuestra que $\varphi_\epsilon \in W^{1,2}(D)$.

Por último, para probar que se cumple la condición 4, tenemos que

$$\mathcal{E}(\varphi_\epsilon(u), \varphi_\epsilon(u)) = \frac{1}{2} \sum_1^d \int_D [\frac{\partial \varphi_\epsilon(u)}{\partial x_i}]^2 dx = \frac{1}{2} \sum_1^d \int_D [\varphi'_\epsilon(u^i) \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i}]^2 dx$$

Ahora para cada i, por la propiedad 2 de φ_ϵ, tenemos que

$$0 \leq (\varphi'_\epsilon(u^i(x)))^2 \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq (\varphi'_\epsilon(u^i(x)))^2 (\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2 \leq (\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2$$

para cada x, entonces

$$\int_D (\varphi'_\epsilon(u^i(x)))^2 (\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2 dx \leq \int_D (\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2 dx.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\varphi_\epsilon(u),\varphi_\epsilon(u)) &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{d}\int_D (\varphi_\epsilon'(u^i))^2(\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{1}^{d}\int_D (\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_i})^2 dx \\
&= \mathcal{E}(u,u)
\end{aligned}
$$

Es consecuencia inmediata que $\sup\{\mathcal{E}(\varphi_{\epsilon_n}(u),\varphi_{\epsilon_n}(u)) : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ para cada sucesión $\epsilon_n \to 0$. Lo cual demuestra (1.3), y se continúa como en la demostración de la Proposición 1.3.2.

Parte II

Formas de Dirichlet no conmutativas

El primer obstáculo que surge al tratar de extender las formas de Dirichlet clásicas a un marco no conmutativo tiene que ver con la esencia misma de éstas: su propiedad contractiva. En la primera parte, las formas de Dirichlet fueron definidas en términos de la contracción: $u \wedge 1 \equiv \text{ínf}(u, 1)$, la cual, como veremos, es el vínculo entre la forma de Dirichlet y la Markovianidad de los semigrupos. El problema es que, si el espacio de Hilbert no es una latiz, no hay manera de definir el ínfimo, por lo que debemos encontrar otra manera de definir la contracción. Empecemos por analizar qué hace exactamente la función $u \wedge 1$.

Para cualquier $u \in L^2(X, \mu)$, tenemos que $u \wedge 1 \leq 1$, por lo que $u \wedge 1$ pertenece al subconjunto cerrado convexo, $\{v \in L^2(X, \mu) : v(x) \leq 1\}$. Ahora tomemos cualquier v de éste subconjunto. Si $u \leq 1$ entonces $(u - u \wedge 1)^2 = 0 \leq (u - v)^2$, y si $u > 1$ entonces $0 < u - 1 = u - u \wedge 1 \leq u - v$; de esto último se sigue que $(u - u \wedge 1)^2 \leq (u - v)^2$. Por lo tanto, por la definición de norma en $L^2(X, \mu)$, tenemos $\|u - u \wedge 1\| \leq \|u - v\|$, para toda $v \in \{v \in L^2(X, \mu) : v \leq 1\}$.

De esta última desigualdad podemos concluir que la función $u \wedge 1$ es realmente la proyección ortogonal de u sobre el conjunto cerrado convexo $\{v \in L^2(X, \mu) : v(x) \leq 1\}$. De manera similar podemos deducir que $u^+ \equiv u \vee 0 \equiv \sup(u, 0)$ es la proyección ortogonal de u sobre el cono positivo $L^2_+(X, \mu)$. Si juntamos las dos piezas podemos concluir que la función $u^+ \wedge 1$ es la proyección ortogonal de u sobre el conjunto cerrado convexo $\{v \in L^2_+(X, \mu) : v(x) \leq 1\}$; al cual denotaremos simplemente como $1 - L^2_+(X, \mu)$. Todo esto sugiere que para generalizar las formas de Dirichlet a espacios de Hilbert arbitrarios debemos sustituir la contracción original, $u \wedge 1 \equiv \text{ínf}(u, 1)$, por proyecciones ortogonales sobre los espacios adecuados, análogos a $1 - L^2_+(X, \mu)$.

Para tomar el enfoque más general posible usaremos en lo sucesivo formas estandarizadas, a las cuales denotaremos como: $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, J)$, que se introducen en el capítulo 4.

Las formas de Dirichlet introducidas en la primera parte están diseñadas para actuar sobre un espacio de Hilbert específico: el espacio de las funciones cuadrado integrables $L^2(E, m)$; por esta razón, en su definición aparecen elementos que no pueden ser extendidos al caso general, no conmutativo. Lo mismo ocurre con algunos de los criterios plasmados en los teoremas. Por este motivo, la definición de forma de Dirichlet presentada en esta parte difiere un poco de la que se presentó en el caso conmutativo de la primera parte. Sin embargo, mantienen aspectos esenciales en común, como la propiedad contractiva; por lo tanto, las formas de Dirichlet tal como son presentadas en esta segunda parte, junto con los resultados relativos a ellas (capítulo 5) son aplicables dentro de un marco conmutativo.

Capítulo 3

Estructuras de orden

Los conos autopolares son parte fundamental de las formas estandarizadas, pues son la base para crear intervalos que implican un orden, por ejemplo $[0, \xi]$. Además, dan origen a un subespacio real muy importante: H^J. Los conjuntos necesarios para definir las proyecciones ortogonales mencionadas arriba forman parte de este espacio real y, por ende, también del dominio de las formas de Dirichlet. Los conos autopolares también dan origen a una descomposición propia de ellos, que los distingue de los conos que no son autopolares, llamada descomposición de Jordan. Con ella demostraremos propiedades relativas a H^J y sus subconjuntos, asi como propiedades de las formas de Dirichlet.

3.1. Conos autopolares

Definición 3.1.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A cualquier subconjunto de $\mathcal{H}$. Se define el polar de A (o el dual de A) como*

$$A^P = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, a \rangle \geq 0, \ \ \forall a \in A\}$$

Obsérvese que $A \subseteq (A^P)^P$, pues si $a \in A$, entonces $0 \leq \langle \eta, a \rangle = \langle a, \eta \rangle$ para cualquier $\eta \in A^P$

Diremos que A es autopolar (o autodual) si $A = A^P$.

Para lo que sigue necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 3.1.2. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real. Una cuña (wedge) es un conjunto $P \subset \mathcal{V}$, no vacio, con las siguientes propiedades:*

(a) Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$

(b) Si $x \in P$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \in P$

Nótese que una cuña es un conjunto convexo.

Si P es una cuña en un espacio vectorial real $\mathcal{V}$ entonces podemos definir un orden en $\mathcal{V}$ de la siguiente manera: para $x, y \in \mathcal{V}$ se tiene que $x \leq y$ si y sólo si $y - x \in P$

Una propiedad importante del conjunto A^P es que es una cuña cerrada, lo que se demuestra usando la linealidad y continuidad del producto interior. En efecto, sea $\eta \in A$ y $\lambda \geq 0$ Si $x, y \in A^P$ entonces $\langle x+y, \eta\rangle = \langle x, \eta\rangle + \langle y, \eta\rangle \geq 0$ y $\langle \lambda x, \eta\rangle = \lambda\langle x, \eta\rangle \geq 0$ Por lo tanto $x+y, \lambda x \in A^P$. Para probar que el conjunto es cerrado, tomemos una sucesión (x_n) en A^P tal que $x_n \longrightarrow x$; entonces,para cualquier $n \in \mathbb{N}$,tenemos $\langle x_n, \eta\rangle \geq 0$ y por la continuidad del producto interior $\langle x_n, \eta\rangle \longrightarrow \langle x, \eta\rangle \geq 0$, es decir, $x \in A^P$.

En el siguiente capítulo veremos una manera de construir un cono autopolar.

3.2. Descomposición de Jordan

Ahora consideremos una cuña H^+ en un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$. A la descomposición (única) dada por $h = h_+ - h_-$, para cada $h \in \mathcal{H}$, con $h_+, h_- \in H^+$ y $\langle h_+, h_-\rangle = 0$, se le conoce como la descomposición de Jordan. En el siguiente lema se establece que la autopolaridad de una cuña H^+ es equivalente a que a cada vector $h \in \mathcal{H}$ se le pueda aplicar la descomposición de Jordan.

Lema 3.2.1. *Sea H^+ una cuña en un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$. H^+ es autopolar si y sólo si todo elemento h de $\mathcal{H}$ se descompone de manera única como $h = h_+ - h_-$ con $h_+, h_- \in H^+$ ortogonales.*

Demostración. Sea H^+ autopolar. Para cualquier $h \in \mathcal{H}$, sea h_+ su proyección ortogonal sobre H^+, y definamos $h_- \equiv h_+ - h$. Sean $u \in H^+$ y $\lambda > 0$, por la definición de proyección ortogonal, se tiene que

$$||h - h_+||^2 \leq ||h - (h_+ + \lambda u)||^2 = ||h - h_+||^2 - 2\lambda\langle h - h_+, u\rangle + \lambda^2||u||^2$$

Cancelando obtenemos $0 \leq -2\langle h - h_+, u\rangle + \lambda||u||^2$ y haciendo $\lambda \to 0$ obtenemos que
$\langle h - h_+, u\rangle \leq 0$, y por lo tanto, $\langle h_+ - h, u\rangle \geq 0$. Con esto hemos probado que $h_- \in (H^+)^P = H^+$. Para probar la ortogonalidad observemos que, si $\lambda < 0$ entonces $1 - \lambda > 1$ y por lo tanto $h_+ - \lambda h_+ = (1-\lambda)h_+ \in H^+$. Siguiendo el razonamiento anterior

$$||h - h_+||^2 \leq ||h - (1-\lambda)h_+||^2 = ||h - h_+||^2 + 2\lambda\langle h - h_+, h_+\rangle + \lambda^2||h_+||^2$$

Cancelando obtenemos $0 \leq 2\langle h - h_+, h_+\rangle + \lambda||h_+||^2$ y haciendo $\lambda \to 0$ obtenemos $0 \leq \langle h - h_+, h_+\rangle$. Entonces, $\langle h_+ - h, h_+\rangle \leq 0$. Si en la desigualdad que se obtuvo arriba, $\langle h_+ - h, u\rangle \geq 0$, sustituimos $u = h_+$, obtenemos la otra desigualdad y podemos concluir que $\langle h_-, h_+\rangle = 0$. Por último, es claro que $h = h_+ - (h_+ - h) = h_+ - h_-$.

Para probar la unicidad supongamos que el elemento h tiene dos descomposiciones, $h_+ - h_-$ y $\eta_+ - \eta_-$. Entonces

$$\begin{aligned}
||h_+ - \eta_+||^2 =& \langle h_+ - \eta_+, h_+ - \eta_+\rangle = \langle h_+ - \eta_+, h + h_- - (h + \eta_-)\rangle \\
=& \langle h_+ - \eta_+, h_- - \eta_-\rangle + \langle h_+, h_- - \eta_-\rangle - \langle \eta_+, h_- - \eta_-\rangle \\
=& 0 - \langle h_+, \eta_-\rangle - \langle \eta_+, h_-\rangle + 0 + 0 - \langle h_+, \eta_-\rangle - \langle \eta_+, h_-\rangle + 0 \\
=& -2(\langle h_+, \eta_-\rangle + \langle \eta_+, h_-\rangle) \leq 0
\end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a que $h_+, h_-, \eta_+, \eta_- \in H^+ = (H^+)^P$ y por lo tanto $\langle h_+, \eta_-\rangle \geq 0$ y $\langle \eta_+, h_-\rangle \geq 0$. Entonces, $h_+ - \eta_+ = 0$ y $\eta_- = \eta_+ - h = h_+ - h = h_-$.

Recíprocamente, supongamos que a cada elemento de $\mathcal{H}$ se le puede aplicar la descomposición de Jordan. Sea $h = h_+ - h_- \in (H^+)^P$, con $h_+, h_- \in H^+$ ortogonales; entonces, por definición, $0 \leq \langle h_-, h\rangle = \langle h_-, h_+\rangle - \langle h_-, h_-\rangle = -||h_-||^2$; de aquí se sigue que $h_- = 0$ y por lo tanto $h = h_+ \in H^+$ y $(H^+)^P \subseteq H^+$. Para la otra contención primero probaremos que $H^+ = ((H^+)^P)^P$. Para ello utilizaremos el argumento anterior que se usó para probar $(H^+)^P \subseteq H^+$, pero ahora usando como cuña a $(H^+)^P$. Aplicando la descomposición de Jordan, si $h = h_+ - h_- \in ((H^+)^P)^P$, con $h_+, h_- \in (H^+)^P$ ortogonales, siguiendo el argumento anterior obtenemos la contención: $((H^+)^P)^P \subseteq (H^+)^P$. Por lo tanto, por transitividad, $((H^+)^P)^P \subseteq H^+$. Por otro lado, ya sabemos que $H^+ \subseteq ((H^+)^P)^P$. Por lo tanto, $H^+ = ((H^+)^P)^P$. Con esta igualdad obtendremos la contención que falta: $H^+ \subseteq (H^+)^P$.

Sea $h \in H^+$ y sea η la proyección ortogonal de h sobre $(H^+)^P$, aplicaremos a h y η el mismo argumento que se uso en la primera parte de la demostración. Sean $u \in (H^+)^P$ y $\lambda > 0$, por la definición de proyección ortogonal, se tiene que

$$||h - \eta||^2 \leq ||h - (\eta + \lambda u)||^2 = ||h - \eta||^2 - 2\lambda\langle h - \eta, u\rangle + \lambda^2||u||^2$$

.

Cancelando y haciendo $\lambda \to 0$ llegamos a la desigualdad $\langle \eta - h, u\rangle \geq 0$ para cualquier $u \in (H^+)^P$. Por lo tanto $\eta - h \in ((H^+)^P)^P$. De igual modo, aplicando el mismo argumento que se usó para probar la ortogonalidad de h_+ y h_-, obtenemos $\langle \eta - h, \eta\rangle = 0$.

En conclusión, $\eta, \eta - h \in ((H^+)^P)^P = H^+$, con $\eta - h$ y η ortogonales. De esta manera, la descomposición $h = \eta - (\eta - h) \in H^+$ es de Jordan y por unicidad $\eta - h = 0$, es decir, $h = \eta \in (H^+)^P$. Así tenemos $H^+ \subseteq (H^+)^P$ y, por lo tanto, H^+ es autopolar.

□

En resumen, h_+ es la proyección ortogonal de h sobre H^+ y h^- se define como la diferencia $h_- \equiv h_+ - h$.

Observemos que:

$$\begin{aligned}\langle h, h\rangle &= \langle h_+ - h_-, h_+ - h_-\rangle = \langle h_+, h_+\rangle - \langle h_-, h_+\rangle - \langle h_+, h_-\rangle + \langle h_-, h_-\rangle \\ &= \langle h_+, h_+\rangle + \langle h_-, h_-\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle |h|, |h|\rangle &= \langle h_+ + h_-, h_+ + h_-\rangle = \langle h_+, h_+\rangle + \langle h_-, h_+\rangle + \langle h_+, h_-\rangle + \langle h_-, h_-\rangle \\ &= \langle h_+, h_+\rangle + \langle h_-, h_-\rangle\end{aligned}$$

y por lo tanto: $\langle |h|, |h|\rangle = \langle h, h\rangle$

3.3. El subespacio real H^J

El siguiente subespacio que se definirá en un espacio de Hilbert complejo es el análogo del conjunto de los números reales. Este subespacio es al espacio de Hilbert complejo del cual se deriva, lo que los reales son a los números complejos.

Definición 3.3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Definimos el conjunto*

$$H^J \equiv \{h \in \mathcal{H} : \langle h, \eta\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \eta \in H^+\}$$

donde H^+ es un cono cerrado, convexo y autopolar.

Es claro que H^J es un subespacio real de $\mathcal{H}$ y $H^+ \subseteq H^J$. Los elementos de H^J reciben el nombre de J-reales.

El cono $H^+ \subseteq H^J$ da lugar a una estructura de orden en H^J: para cualesquiera $h_1, h_2 \in H^J$, $h_1 \leq h_2 \Longleftrightarrow h_2 - h_1 \in H^+$. Por lo tanto, podemos definir el intervalo

$$[h_1, h_2] \equiv \{h \in H^J : h_1 \leq h \leq h_2\}$$

Algunas propiedades adicionales de H^J, que justifican la nota introductoria de esta sección, son las siguientes

(a) $\mathcal{H}$ es la complexificación de H^J, i. e.,

$$\mathcal{H} = H^J \oplus H^J i$$

es decir, para todo $h \in \mathcal{H}$ existen $h_1, h_2 \in H^J$, tal que $h = h_1 + h_2 i$.

(b) El cono H^+ da origen a la involución antiunitaria: $J : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$

$$J(h_1 + h_2 i) \equiv h_1 - h_2 i; \qquad J(h) \equiv h \quad \forall h \in H^J,$$

análoga a la conjugación compleja.

(c) Puesto que el cono H^+ es autopolar, a cada J-real h se le puede aplicar la descomposición de Jordan:

$$h = h_+ - h_-; \qquad h_+, h_- \in H^+.$$

Capítulo 4

Formas estandarizadas y teoría modular

Con las herramientas de la teoría modular, (en particular, la teoría de Tomita-Takesaki, que discutiremos en este capítulo), es posible definir conos autopolares en cualquier espacio de Hilbert, siempre y cuando éste cuente con un vector cíclico y separante. Adicionalmente obtenemos un mapeo J equivalente al definido en el capítulo anterior. Con ellos dos tenemos completa una forma estándar para un álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$. Un estudio profundo de la teoría modular iría más alla del alcance de este trabajo, por lo que en este capítulo sólo se presentarán los resultados que sean necesarios, algunos de ellos sin demostración. Para una exposición detallada de estos temas véanse las referencias [6, 10, 19, 20].

4.1. Álgebras de Von Neumann

Sea $\mathfrak{V}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$. Decimos que $\mathfrak{V}$ es un álgebra si existe una función $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$, que a cada par ordenado $(A, B) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ le asocia el producto $AB \in \mathfrak{V}$, de tal manera que se cumplan las conocidas propiedades de asociatividad y distributividad

1).- $A(BC) = (AB)C$

2).- $A(B + C) = AB + AC$

3).- $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

El álgebra $\mathfrak{V}$ es conmutativa o abeliana si $AB = BA$. Por simplicidad, supondremos que toda álgebra $\mathfrak{V}$ considerada en este trabajo es unital, es decir $\mathfrak{V}$ tiene una identidad denotada por $\mathbb{1}_{\mathfrak{V}}$.

Un subespacio $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{V}$ que también es un álgebra con las operaciones definidas en $\mathfrak{V}$ es llamado una subálgebra.

Un mapeo $\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ dado por $A \mapsto A^*$ es llamado una involución, si satisface las siguientes propiedades:

1).- $(A^*)^* = A$

2).- $(A + B)^* = A^* + B^*$

3).- $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$; donde $\bar{\alpha}$ es el conjugado complejo

4).- $(AB)^* = B^* A^*$

Un álgebra con una involución es llamada una *-álgebra. Un subconjunto $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{V}$ es llamado autoadjunto si $A \in \mathfrak{U}$ implica que $A^* \in \mathfrak{U}$.

Si el álgebra $\mathfrak{V}$ tiene asociada una norma que, además de satisfacer las propiedades usuales, satisface la propiedad

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

entonces decimos que $\mathfrak{V}$ es un álgebra normada. La norma define una topología en $\mathfrak{V}$, conocida como la topología uniforme. La vecindad de un elemento $A \in \mathfrak{V}$ viene dada por

$$B(A; \epsilon) = \{B \in \mathfrak{V} : \|B - A\| < \epsilon\}.$$

Si $\mathfrak{V}$ es completa con respecto a la topología uniforme, entonces $\mathfrak{V}$ recibe el nombre de álgebra de Banach.

Si $\mathfrak{V}$ es un álgebra de Banach con involución, es decir, una *-álgebra de Banach, cuya norma satisface

$$\|A^* A\| = \|A\|^2$$

para toda $A \in \mathfrak{V}$, entonces $\mathfrak{V}$ recibe el nombre de C^*- álgebra.

Ejemplo 4.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert real o complejo, y sea $B(H)$ el conjunto de todos los operadores acotados que actúan en H. Definamos la suma y el producto de elementos de $B(H)$ de la manera usual. La norma sobre $B(H)$ sería la norma de operadores*

$$\|A\| = \sup\{\|Au\| : u \in H, \|u\| = 1\}$$

A cualquier elemento $A \in B(H)$ le podemos asociar su adjunto Hilbertiano, A^*, y de esta manera queda definida una involución sobre $B(H)$. Además,

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \sup\{\langle Au, Au\rangle : u \in H, \|u\| = 1\} \\
&= \sup\{\langle u, A^* Au\rangle : u \in H, \|u\| = 1\} \\
&\leq \sup\{\|A^* Au\| : u \in H, \|u\| = 1\} \\
&= \|A^* A\|,
\end{aligned}$$

por lo que $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$. *Por otro lado* $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$ *y por lo tanto* $\|A^*A\| = \|A\|^2$*, lo cual demuestra que* $B(H)$ *es una* C^**-álgebra.*

Si $\mathfrak{U} \subseteq B(H)$ es una subálgebra cerrada en la topología uniforme inducida por la anterior norma y además es autoadjunta, entonces $\mathfrak{U}$ es una C^*-subálgebra de $B(H)$.

Sea $\mathfrak{V}$ una C^*-álgebra. Un elemento $A \in \mathfrak{V}$ es hermitiano si $A^* = A$. Si $A \in \mathfrak{V}$ es hermitiano y existe un elemento $B \in \mathfrak{V}$ tal que $A = B^*B$, entonces decimos que A es positivo y lo denotamos como $A \geq 0$. Al conjunto de todos los valores positivos de $\mathfrak{V}$ lo denotamos como $\mathfrak{V}^+$. Entonces por lo dicho arriba,

$$\mathfrak{V}^+ = \{B^*B : B \in \mathfrak{V}\}.$$

Este conjunto es un cono.

Sea $\mathfrak{M}$ cualquier subconjunto de $B(H)$. Denotaremos como $\mathfrak{M}'$ a su conmutante, es decir, al conjunto de operadores en $B(H)$ que conmutan con todos los elementos de $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M}' \equiv \{B \in B(H) : AB = BA, \forall A \in \mathfrak{M}\}$$

$\mathfrak{M}'$ es un álgebra de Banach que contiene a la unidad. Si $\mathfrak{M}$ es autoadjunto (i.e., $m \in \mathfrak{M}$ implica que $m^* \in \mathfrak{M}$), entonces $\mathfrak{M}'$ es una C^*-álgebra. También podemos definir al conmutante del conmutante (doble conmutante): $\mathfrak{M}'' \equiv (\mathfrak{M}')'$, el cual es el conjunto de operadores en $B(H)$ que conmutan con todos los elementos de $\mathfrak{M}'$. Es inmediato que $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}''$

Definición 4.1.2. *Un álgebra de von Neumann es una *-subálgebra* $\mathfrak{M}$ *de* $B(H)$*, tal que* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$

Ahora, dado un vector $u \in \mathcal{H}$ fijo, consideremos el conjunto

$$\mathfrak{M}u \equiv \{Tu : T \in \mathfrak{M}\}.$$

A la cerradura de span$\{\mathfrak{M}u\}$ la denotaremos como $[\mathfrak{M}u]$.

Definición 4.1.3. *Si* $[\mathfrak{M}u] = \mathcal{H}$*, es decir,* span$\{\mathfrak{M}u\}$ *es denso en* $\mathcal{H}$*, entonces decimos que* u *es cíclico para* $\mathfrak{M}$*.*

Por otro lado, si para cualquier $T \in \mathfrak{M}$*,* $Tu = 0$ *implica que* $T \equiv 0$*, entonces diremos que* u *es separante para* $\mathfrak{M}$*.*

La siguiente proposición vincula ambos conceptos mediante una relación de dualidad entre el álgebra y su conmutante.

Proposición 4.1.4. *Un vector es cíclico para un álgebra de von Neumann* $\mathfrak{M}$ *si y sólo si es separante para su conmutante* $\mathfrak{M}'$*.*

Demostración. Sea u un vector cíclico para $\mathfrak{M}$ y tomemos cualquier $A' \in \mathfrak{M}'$. Si $A'u = 0$, entonces, para cualquier $A \in \mathfrak{M}\mathfrak{u}$, tenemos $A'Au = AA'u = 0$. Pero, por la continuidad de A' y por el hecho de que $Au \in \operatorname{span}\{\mathfrak{M}u\}$ y $[\mathfrak{M}u] = \mathcal{H}$, tenemos que $A'h = 0$ para toda $h \in \mathcal{H}$, es decir $A' = 0$ y por lo tanto u es separante para $\mathfrak{M}'$.

Recíprocamente, sea u separante para $\mathfrak{M}'$ y supongamos que u no es cíclico para $\mathfrak{M}$, entonces existe una proyección ortogonal $E' \in \mathfrak{M}'$ con rango en el subespacio cerrado $[\mathfrak{M}u]$, distinta de la identidad I, es decir $I - E' \neq 0$, además $I - E' \in \mathfrak{M}'$. Ahora, puesto que $u \in [\mathfrak{M}u]$ ($\mathbb{1}_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$), se sigue que $E'u = u$ y por lo tanto, $(I - E')u = 0$ esto implica que u no es separante para $\mathfrak{M}'$, lo cual es una contradicción.

□

La pregunta que surge ahora es si será posible que un álgebra de von Neumann tenga un vector u que sea cíclico y a la vez separante para dicha álgebra. La respuesta es afirmativa, pero el álgebra tiene que cumplir con cierta característica.

Un elemento $E \in B(\mathcal{H})$ es una proyección ortogonal si es autoadjunto y $E^2 = E$. Por simplicidad llamaremos proyección a toda proyección ortogonal. Si E es una proyección en $B(\mathcal{H})$, entonces es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Ran}(E)$ y $\operatorname{Ker}(E) = \operatorname{Ran}(E)^{\perp}$.

Una familia de proyecciones $(E_i)_{i \in I}$ es mutuamente ortogonal si para cualesquiera $i, j \in I$ distintos, se tiene que $E_i E_j = 0$, equivalentemente, si los respectivos rangos son subespacios ortogonales: $E_i(\mathcal{H}) \perp E_j(\mathcal{H})$.

Definición 4.1.5. *Un álgebra de Von Neumann es σ-finita si cualquier familia de proyecciones mutuamente ortogonales es numerable.*

En particular, si el espacio de Hilbert sobre el que actúa el álgebra es separable, entonces la cantidad de proyecciones es numerable, pues sólo hay una cantidad numerable de subespacios mutuamente ortogonales. En este caso el álgebra de Von Neumann es σ-finita.

La siguiente proposición establece cómo tienen que ser las álgebras de von Neumann para que puedan tener un vector cíclico y separante. La demostración puede consultarse en [6],proposición 2.5.6. Antes de enunciar la proposición son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 4.1.6. *Un funcional lineal, $f : \mathfrak{M} \longmapsto \mathbb{C}$, es:*

- *Positivo. Si para todo $x \in \mathfrak{M}^+$ se tiene que $f(x) \geq 0$.*
- *Estado. Si f es positivo y continuo, con $\|f\| = 1$.*
- *Fiel. Si f es un estado y para todo $x \in \mathfrak{M}^+$, con $x \neq 0$, se tiene que $f(x) > 0$. Equivalentemente, f es inyectivo.*
- *Normal. Si f es positivo y para toda red, (x_α), creciente y acotada superiormente, de elementos positivos, $x_\alpha \in \mathfrak{M}^+$, se tiene que $f(\sup_\alpha\{x_\alpha\}) = \sup_\alpha\{f(x_\alpha)\}$.*

Proposición 4.1.7. *Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de Von Neumann actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) *$\mathfrak{M}$ es σ- finita.*

(ii) *Existe un subconjunto contable de $\mathcal{H}$ que es separante para $\mathfrak{M}$.*

(iii) *Existe un estado normal y fiel sobre $\mathfrak{M}$*

(iv) *$\mathfrak{M}$ es isomorfa a una álgebra de von Neumann (representación fiel) $\pi(\mathfrak{M})$, la cual admite un vector cíclico y separante.*

Antes de definir las formas estandarizadas para cualquier álgebra de von Neumann recordemos que un operador es conjugado lineal si $T(\alpha x) = \bar{\alpha}Tx$. Otra manera de referirse a ellos es como operadores antilineales, esta última denominación es la que utilizaremos.

Definición 4.1.8. *Sea $\mathfrak{M}$ un álgebra de von Neumann actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Una forma estándar de $\mathfrak{M}$ consiste de un cono convexo, cerrado y autopolar $\mathcal{H}^+$, y de una involución antilineal J, tales que se cumple lo siguiente*

(i) $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$

(ii) $JxJ = x^*$, *para todo x en el centro de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$.*

(iii) $Jx = x$, *para todo $x \in \mathcal{H}^+$.*

(iv) $xJxJ(\mathcal{H}^+) \subseteq \mathcal{H}^+$, *para todo $x \in \mathfrak{M}$.*

Denotaremos una forma estándar del álgebra $\mathfrak{M}$ actuando sobre $\mathcal{H}$, mediante $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, J)$

Es decir, una forma estándar le asocia a un álgebra de von Neumann, $\mathfrak{M}$ y al espacio de Hilbert sobre el que actúa, $\mathcal{H}$, un cono cerrado, convexo y autopolar $\mathcal{H}^+ \subseteq \mathcal{H}$, y una involución antilineal J, que satisfacen las condiciones (i)-(iv) de la definición anterior.

Con $\mathcal{H}^+$ se puede construir el espacio real H^J de la sección anterior, y J cumple con la propiedad $J(h_1+h_2i) = h_1-h_2i$ para todo $h_1, h_2 \in H^J$ y $Jh = h$, para toda $h \in H^J$.

Cuando el álgebra es conmutativa, todas las formas estandarizadas tienen la estructura siguiente:

$$(L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu), L^2(X, \mathcal{B}, \nu), L^2_+(X, \mathcal{B}, \nu), J)$$

donde $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ es el álgebra abeliana de von Neumann de las clases de funciones esencialmente acotadas, definidas sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, con μ sigma finita. $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ es el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables con respecto a una medida ν, equivalente a μ. $L^2_+(X, \mathcal{B}, \nu)$ es el cono de las funciones en $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$, que son positivas ν-cdq. Por último, J es la conjugación compleja de funciones $Jf = \bar{f}$.

Si tomamos el álgebra no conmutativa $B(H)$ de todos los operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert H, entonces podemos escoger como $\mathcal{H}$ al espacio de los operadores Hilbert-Schmidt, $L^2(H)$, y al cono autoadjunto $L^2_+(H)$ de los operadores Hilbert-Schmidt positivos, como $\mathcal{H}^+$. La involución J sería el mapeo que a cada elemento de $L^2(H)$ le asigna su adjunto, $JA = A^*$. Asi tendríamos la forma estándar

$$(B(H), L^2(H), L^2_+(H), J).$$

La pregunta que surge ahora es: ¿cómo podemos asociar una forma estándard a cualquier álgebra de von Neumann? Dado un par $(\mathfrak{M}, \mathcal{H})$, necesitamos encontrar $\mathcal{H}^+$ y J. En el caso en que el álgebra sea σ- finita, la teoría de Tomita-Takesaki da una respuesta.

4.2. Teoría modular de Tomita-Takesaki

La base de la teoría de Tomita-Takesaki son dos mapeos cuya definición requiere de un vector cíclico y separante. Por la Proposición 4.1.5 sabemos que un álgebra σ- finita cumple con esto, por lo que, a partir de este momento, el álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$ será σ- finita, y por lo tanto tendrá un vector u cíclico y separante.

El punto de partida de la teoría de Tomita-Takesaki es la observación de que los siguientes mapeos antilineales son cerrables.

$$\begin{aligned} S_0 : \mathfrak{M}u \longrightarrow \mathcal{H}; \qquad & S_0 Au = A^*u \qquad A \in \mathfrak{M} \\ F_0 : \mathfrak{M}'u \longrightarrow \mathcal{H}; \qquad & F_0 A'u = A'^*u \qquad A' \in \mathfrak{M}'. \end{aligned}$$

Los dominios de ambos operadores son densos, pues como u es cíclico para $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}u$ es denso en $\mathfrak{M}$ y, por otra parte, como u es separante para $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$, por la proposición 4.1.4 es cíclico para $\mathfrak{M}'$ y, consecuentemente, $\mathfrak{M}'u$ es denso en $\mathfrak{M}'$.

Vamos a probar que efectivamente los operadores anteriores son cerrables. Denotaremos a la cerradura y al adjunto de S_0 como S y S^*, respectivamente.

Lema 4.2.1. *El operador S_0 es cerrable y su cerradura satisface $S^* = F$, su adjunto F es una extensión de F_0. Además tenemos que $D(S^2) = D(S)$ y $D(F^2) = D(F)$ y para $y \in D(S)$, $z \in D(F)$ se cumplen*

$$S^2 y = y \qquad F^2 z = z.$$

Demostración. Sean $A \in \mathfrak{M}$ y $A' \in \mathfrak{M}'$; entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle S_0 Au, A'u\rangle &= \langle A^*u, A'u\rangle = \langle A'^* A^* u, u\rangle = \langle (AA')^* u, u\rangle \\ &= \langle (A'A)^* u, u\rangle = \langle A^* A'^* u, u\rangle = \langle A'^* u, Au\rangle. \end{aligned}$$

Puesto que $D(S^0) = \mathfrak{M}u$, entonces $A'u \in D(S_0^*)$, donde

$$D(S_0^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} : \exists \eta \in \mathcal{H}, \langle S_0\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \eta\rangle, \forall \psi \in Dom(S_0)\}$$

(y $S_0^*\varphi = \eta$); además, $S_0^*A'u = A'^*u$, por lo que S_0^* es una extensión de F_0. Por lo tanto, S_0^* es densamente definido, por lo tanto S_0 es cerrable y $S^* = S_0^*$ (véase el Teorema 5.3, pg. 90 de [26]).

Por otro lado, sean $z \in D(S^*)$ y $A \in \mathfrak{M}$, entonces

$$\langle S_0Au, S^*z\rangle = \langle A^*u, S_0^*z\rangle = \langle S_0A^*u, z\rangle = \langle Au, z\rangle$$

pues $S^* = S_0^*$ y $D(S_0) = \mathfrak{M}u$. Pero $\langle S_0Au, S^*z\rangle = \langle Au, S^*S^*z\rangle$, consecuentemente $S^*z \in D(S^*)$ y $(S^*)^2z = z$, i.e., $F^2z = z$, $z \in D(F)$. Ahora, sea $y \in D(S)$, de lo anterior tenemos que, si $z \in D(S^*)$ entonces $S^*z \in D(S^*)$ y

$$\langle z, y\rangle = \langle (S^*)^2z, y\rangle = \langle S^*z, Sy\rangle = \langle z, S^2y\rangle.$$

Por lo tanto, $Sy \in D(S^{**}) = D(S)$ y

$$S^2y = y.$$

□

Recordemos que, dado un operador $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, cerrado,densamente definido, de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$ a otro espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$, su descomposición polar viene dada por

$$T = U|T| = |T^*|U$$

donde $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ y el operador U es una isometría parcial con dominio inicial $\overline{Ran(|T|)}$ y dominio final $\overline{Ran(T)}$.

Ahora consideremos la descomposición polar de la cerradura de S_0,

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$$

donde $\Delta \equiv S^*S$. Δ es llamado el operador modular asociado con el par $(\mathfrak{M}, u)$ y J el operador de conjugación modular. Se pueden establecer algunos hechos básicos sobre ambos operadores.
Del lema anterior se sigue que S y F son invertibles y $S^{-1} = S$ y $F^{-1} = F$; por lo tanto son inyectivos y $D(S) = D(S^{-1}) = Ran(S)$, $D(F) = D(F^{-1}) = Ran(F)$, por lo que sus dominios y rangos coinciden y estos últimos también son densos.

Con respecto al operador Δ observamos que es invertible, ya que S y F lo son y $\Delta = S^*S = FS$, por lo que, $\Delta^{-1} = (FS)^{-1} = S^{-1}F^{-1} = SF$. Por otro lado, $Ran(\Delta)^{\perp} = ker(\Delta) = ker(FS) = 0$, pues S y F son inyectivos, por lo tanto el rango de Δ es denso. Por último, vemos que $\Delta = \Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}$ implica que

$$D(\Delta) = D(\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}) = D(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap Ran(\Delta^{\frac{1}{2}}) \subseteq Ran(\Delta^{\frac{1}{2}})$$

y por lo tanto el rango de $\Delta^{\frac{1}{2}}$ también es denso.

El siguiente teorema debido a Tomita y Takesaki es crucial para la teoría modular. Debido a su complejidad no se demostrará en su totalidad.

Teorema 4.2.2. *(i) La aplicación J es una isometría de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}$*

(ii) Δ es un operador invertible positivo (autoadjunto) de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$, tal que $\Delta = FS$ y $\Delta^{-1} = SF$

(iii) $S = J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J$, $F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}J$, $J^{-1} = J^*$, y $J^2 = I$, (es decir, $J^{-1} = J^* = J$)

(iv) Para cualquier real t se tiene que, $J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$

(v) $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$ y $\Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it} = \mathfrak{M}$, con t cualquier real.

Demostración. (i) Se sigue del hecho de que el dominio inicial de J es $\overline{Ran(\Delta^{\frac{1}{2}})} = \mathcal{H}$ y por lo tanto, para cualesquiera h, k en $\mathcal{H}$, $\langle Jh, Jk\rangle = \langle h, k\rangle$. Por otro lado, el espacio final de J es $Ran(J) = \overline{Ran(S)} = \mathcal{H}$.

(ii) La positividad y adjunticidad de Δ se siguen del Teorema 7.20 en [26]. Por el lema anterior, $\Delta = S^*S = FS$ y $\Delta^{-1} = (FS)^{-1} = S^{-1}F^{-1} = SF$, pues F y S son invertibles y coinciden con su inversa.

(iii) Por el lema anterior

$$\begin{aligned} S =& J\Delta^{\frac{1}{2}} = J(S^*S)^{\frac{1}{2}} = J|S| = |S^*|J = |F|J = (F^*F)^{\frac{1}{2}}J = (SF)^{\frac{1}{2}}J \\ =& (\Delta^{-1})^{\frac{1}{2}}J = \Delta^{-\frac{1}{2}}J. \end{aligned}$$

Análogamente, puesto que $\Delta^{\frac{1}{2}}$ es autoadjunto,

$$F = S^* = (J\Delta^{\frac{1}{2}})^* = \Delta^{\frac{1}{2}}J^*, \text{ y } F = F^{-1} = (\Delta^{\frac{1}{2}}J)^{-1} = J\Delta^{-\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, vimos en (i) que J es una isometría de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}$ (un isomorfismo) y por lo tanto J es unitario y $J^{-1} = J^*$. Además, puesto que $D(S)$ es denso en $\mathcal{H}$, tenemos que para toda x en $\mathcal{H}$

$$x = S^2x = J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}Jx = J^2x.$$

Por lo tanto, $J^2 = I$ y $J = J^{-1} = J^*$.

(iv) Por el inciso anterior tenemos que $\Delta^{-1} = SF = J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}J = J\Delta J$, entonces, si Δ tiene resolución espectral $\{E_\lambda\}$, se sigue que la resolución espectral de $\Delta^{-1} = J\Delta J$ es $\{JE_\lambda J\}$. Ahora, para cualquier función acotada

Borel-medible f sobre $\mathcal{C}$, se tiene que, para toda x en $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\langle f(\Delta^{-1})x, x\rangle =& \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle JE_\lambda Jx, x\rangle \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle Jx, E_\lambda Jx\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda Jx, Jx\rangle \\ =& \langle f(\Delta)Jx, Jx\rangle = \langle Jx, \bar{f}(\Delta)Jx\rangle = \langle J\bar{f}(\Delta)Jx, x\rangle\end{aligned}$$

donde $\bar{f}(\lambda)$ denota la conjugación compleja. Por lo tanto, $\langle f(\Delta^{-1})x, x\rangle = \langle J\bar{f}(\Delta)Jx, x\rangle$ para toda x en los reales implica que:

$$f(\Delta^{-1}) = J\bar{f}(\Delta)J = J\overline{f(\Delta)}J.$$

Si hacemos $f(z) = z^{-it}$ para cualquier real t, entonces tenemos:

$$f(\Delta^{-1}) = \Delta^{it} = J\Delta^{it}J.$$

Puesto que $J = J^{-1}$ se sigue que los dos operadores conmutan: $\Delta^{it}J = J\Delta^{it}$.

(v) La demostración se puede consultar en [6], Teorema 2.5.14.

□

Ahora ya podemos definir $\mathcal{H}^+$ y J. Para definir el primero, necesitamos el siguiente isomorfismo

Definición 4.2.3. *Sea $j : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ el isomorfismo involutivo antilineal definido por el teorema de Tomita-Takesaki (inciso (v)),*

$$j(A) = JAJ.$$

Definición 4.2.4. *El cono estándar positivo H^+, asociado con $(\mathfrak{M}, u)$, donde u es un vector cíclico separante, se define de la siguiente manera*

$$H^+ \equiv \overline{\{Aj(A)u : A \in \mathfrak{M}\}} \subseteq H$$

donde la barra denota cerradura.

Este cono es el análogo al cono de las funciones positivas cuadrado integrables en L^2, en el caso de un álgebra $\mathfrak{M}$ conmutativa, lo cual queda manifiesto en la siguiente proposición; las pruebas pueden consultarse en [6],sección 2.5.4.

Proposición 4.2.5. *El conjunto cerrado H^+ tiene las siguientes propiedades:*

(i) H^+ es un cono cerrado, convexo y autopolar.

(ii) Si $v \in H^+$, entonces $Jv = v$

(iii) Si $A \in \mathfrak{M}$, entonces $Aj(A)H^+ \subseteq H^+$.

Capítulo 5

Semigrupos de Markov y formas de Dirichlet

En este capítulo definimos el principal objeto de estudio de este trabajo, que son las formas de Dirichlet no conmutativas. El punto de partida para definirlas serán las formas cuadráticas. Como en el caso clásico, decidir si una forma cuadrática es de Dirichlet conlleva una gran dificultad, por lo que se establecerán criterios para facilitar este trabajo. La razón de ser de las formas de Dirichlet son los semigrupos Markovianos, por lo que empezaremos con un esbozo de ellos. Veremos en el primer teorema de la sub-sección 5.4, que la Markovianidad de un semigrupo está ligada con el hecho de que su forma cuadrática asociada sea de Dirichlet.

5.1. Semigrupos y resolventes

Sea $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, H^+, J)$ la forma estandar de un álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$ y sea $\eta \in H^+$ un vector cíclico y separante.

Definición 5.1.1. *Sea V un espacio de Banach y sea $(T_t)_{t\geq 0} \equiv \{T_t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0, T_t : V \to V\}$ una familia de operadores acotados. Decimos que $(T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo si*

$$T_t T_s = T_{t+s},\ s, t \geq 0$$
$$T_0 = I$$

Si además, para todo $v \in V$ y $t \geq 0$ tenemos que

$$\|T_t v\| \leq \|v\|$$

o, equivalentemente, que

$$\|T_t\| \leq 1,$$

entonces $(T_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo.

Un semigrupo es fuertemente continuo si para toda $v \in V$

$$\lim_{t\to 0} \|T_t(v) - v\| = 0$$

Esto último lo escribiremos así: $\mathrm{s} - \lim_{t\to 0} T_t v = v$.

Definición 5.1.2. *Un mapeo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es*

(i) Positivo si $T(H^+) \subseteq H^+$.

(ii) Markoviano con respecto a η si es positivo y $T\eta \le \eta$.

(iii) J- real si $JT = TJ$, donde J es el mapeo involutivo, antilineal, de la forma estándar.

Un semigrupo $(T_t)_{t\ge 0}$ en $\mathcal{H}$ es positivo (respectivamente Markoviano) si para toda $t \ge 0$ se tiene que T_t es positivo (respectivamente Markoviano).

La propiedad de Markovianidad con respecto a η es equivalente a que el mapeo T deje invariante el intervalo $[0, \eta] \subset \mathcal{H}^+$, es decir,

$$0 \le h \le \eta \Longrightarrow 0 \le Th \le \eta$$

Los siguientes operadores están estrechamente vinculados con los semigrupos.

Definición 5.1.3. *Sea L un operador lineal con dominio $D(L)$ sobre un espacio de Banach V. El conjunto resolvente de L, $\rho(L)$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador lineal $(\lambda I - L) : D(L) \longrightarrow V$ es biyectivo y su inverso $((\lambda I - L))^{-1}$ es continuo.*

Derivado del conjunto resolvente tenemos el siguiente concepto.

Definición 5.1.4. *El espectro de L es el conjunto $\sigma(L) \equiv \mathbb{C}\backslash\rho(L)$. El resolvente de L en λ es el operador lineal $R_\lambda := (\lambda I - L)^{-1}$ con $\lambda \in \rho(L)$.*

Los operadores T_t y R_λ están relacionados de la siguiente manera para $\lambda > 0$ y $t > 0$, (ver [12] capítulos 1 y 2)

(i) $R_\lambda = \int_0^\infty e^{-t\lambda} T_t dt$

(ii) $T_t = \lim_{n\to\infty} [\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}}]^n$

Si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ es la familia de resolventes simétrica y fuertemente continua, asociada a un semigrupo de operadores simétricos y fuertemente continuo, $(T_t)_{t\ge 0}$, entonces diremos que $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ es Markoviana con respecto a η, si para toda $\lambda > 0$ se tiene que λR_λ es Markoviano, es decir, λR_λ es positivo y $\lambda R_\lambda \eta \le \eta$, o equivalentemente, $0 \le h \le \eta \Longrightarrow 0 \le \lambda R_\lambda h \le \eta$.

En la siguiente proposición se establece el hecho de que la Markovianidad (y por ende la positividad) de un semigrupo es equivalente a la Markovianidad (y positividad) de su resolvente asociado.

Proposición 5.1.5. *Sea* $(T_t)_{t\geq 0}$ *un semigrupo de operadores simétricos, fuertemente continuo y* $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ *su resolvente asociado. Para* $\eta \in H^+$, $(T_t)_{t\geq 0}$ *es Markoviano con respecto a* η *si y sólo si* $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ *es Markoviano con respecto a* η.

Demostración. Sea $(T_t)_{t\geq 0}$ Markoviano. Si $h \in \mathcal{H}^+$ se tiene que: $\lambda R_\lambda h = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} T_t h \mathrm{d}t \in \mathcal{H}^+$ y $\eta - \lambda R_\lambda \eta = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}(I - T_t)\eta \mathrm{d}t \in \mathcal{H}^+$ pues, por hipótesis, $T_t h, (I - T_t)\eta \in H^+$ y H^+ es cerrado bajo combinaciones lineales positivas y contiene a sus puntos límite. Por lo tanto, $\lambda R_\lambda(H^+) \subseteq H^+$ y $\lambda R_\lambda \eta \leq \eta$.

De manera análoga, si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ es Markoviano y $h \in H^+$ entonces:

$$T_t h = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}})^n h \in H^+$$

y

$$\eta - T_t\eta = \eta - \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}})^n \eta = \lim_{n\to\infty} (I - (\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}})^n)\eta \in H^+$$

con $(I - (\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}})^n)\eta \in H^+$, puesto que, por hipótesis, para cualquier $h \in H^+$ se tiene que

$$\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}} h \in H^+ \Longrightarrow (\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}})^n h \in H^+.$$

□

5.2. Formas cuadráticas

Sea $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, J)$ una forma estándar fija. Al igual que en la primera parte, comenzaremos con una forma bilineal con valores en los reales, pero con dominio D en el espacio de Hilbert de la forma estándar $\mathcal{E} : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ahora consideremos su forma cuadrática asociada $\mathcal{E} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\mathcal{E}[h] \equiv \mathcal{E}(h, h), \ \ \forall h \in D.$$

De ahora en adelante denotaremos como $(\mathcal{E}, D)$ a la forma cuadrática $\mathcal{E}[h]$, definida sobre $D \subseteq \mathcal{H}$.

Definición 5.2.1. $(\mathcal{E}, D)$ *es acotada por abajo si existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\mathcal{E}[h] \geq \beta ||h||^2, \ \ \forall h \in \mathcal{H}$$

La forma es no negativa si $\beta \geq 0$.

Definición 5.2.2. $(\mathcal{E}, D)$ *es* J*-real si*

$$\mathcal{E}[Jh] = \mathcal{E}[h], \ \ \forall h \in \mathcal{H}$$

donde J es el mapeo antilineal de la forma estándar.

Los productos internos $\mathcal{E}_\alpha(u,v) \equiv \mathcal{E}(u,v) + \alpha\langle u,v\rangle, \quad u,v \in D$ y las normas que se derivan de ellos, $\|\cdot\|_\alpha$, (sección 1.2), aplican directamente aquí, si $\alpha > \beta$. De igual manera, decimos que una forma cuadrática es cerrada si su dominio D es completo con respecto a cualquiera de las normas $\|\cdot\|_\alpha$ y cerrable si la forma cuadrática admite una extensión cerrada (sección 1.4).

Ahora, dada un una forma cuadrática, $(\mathcal{E}, D)$ y el resolvente asociado R_λ, si al dominio D le asociamos la norma $\|\cdot\|_\lambda$, entonces una característica importante del resolvente es que puede ser visto como el adjunto, I^*, de la inmersión:

$$I : (D, \|\cdot\|_\lambda) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|).$$

(ver [12] capítulos 1 y 2).

Definición 5.2.3. *Un núcleo para la forma $(\mathcal{E}, D)$ es una subvariedad lineal $C \subseteq D$ la cual es densa en D con respecto a $\|\cdot\|_\alpha$.*

Dado un semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$, la siguiente construcción será útil más adelante. Definamos $\mathcal{E}^t[h] \equiv \frac{1}{t}\langle (I - T_t)h, h\rangle$, para $t > 0$. Entonces, asociada al semigrupo, tenemos la siguiente forma cuadrática $\mathcal{E} : D \longrightarrow \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} D \equiv& \{h \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \mathcal{E}^t[h] \in \mathcal{H}\} \\ \mathcal{E}[h] \equiv& \lim_{t\to 0} \mathcal{E}^t[h] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por conveniencia, vamos a hacer una ligera modificación a las formas cuadráticas que emplearemos. Dada una forma cuadrática $(\mathcal{E}, D)$, $D \subseteq \mathcal{H}$, definimos la forma cuadrática $\mathcal{E}' : \mathcal{H} \longrightarrow (-\infty, \infty]$ como

$$\mathcal{E}'[h] = \begin{cases} \mathcal{E}[h] & \text{si } h \in D \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que el dominio de la forma original de $(\mathcal{E}, D)$ es

$$D = \{h \in \mathcal{H} : \mathcal{E}'[h] < \infty\}$$

y que $\mathcal{E}'$ es cerrada si y sólo si $\mathcal{E}'$ es semicontinua por debajo. Para no complicar la notación, de ahora en adelante usaremos $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ en vez de $(\mathcal{E}', \mathcal{H})$.

5.3. Proyecciones ortogonales

Aquí retomaremos los elementos del capítulo 3. Consideremos dos vectores h y η en H^J y una cuña cerrada $H^+ \subseteq H^J$. El conjunto

$$\{h \in H^J : -h \leq \eta\} = \{h \in H^J : \eta + h \in H^+\}$$

es igual al conjunto $\eta + H^+$. Análogamente, el conjunto $\{h \in H^J : h \leq \eta\} = \{h \in H^J : \eta - h \in H^+\}$ es igual al conjunto $\eta - H^+$. Demostremos esto último:

sea $h \in \{h \in H^J : \eta - h \in H^+\}$, entonces $h = \eta - (\eta - h) \in \eta - H^+$ y por lo tanto $\{h \in H^J : \eta - h \in H^+\} \subseteq \eta - H^+$. Ahora, sea $h \in \eta - H^+$, entonces $h \in H^J$ y existe $u \in H^+$ tal que $h = \eta - u \iff u = \eta - h \in H^+$, es decir, $h \in \{h \in H^J : h \leq \eta\}$ y por lo tanto $\eta - H^+ \subseteq \{h \in H^J : h \leq \eta\}$.

La prueba de que $\eta + H^+ = \{h \in H^J : -h \leq \eta\}$ es similar. Ahora veamos dos propiedades más que tienen ambos conjuntos, las cuales serán indispensables en lo siguiente.

El conjunto $\eta - H^+$ es convexo. En efecto, sean $h_1, h_2 \in \eta - H^+$ y sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Por definición $\eta - h_1, \eta - h_2 \in H^+$, y al ser H^+ convexo se tiene que $\alpha(\eta - h_1) + (1 - \alpha)(\eta - h_2) \in H^+$, pero

$$\alpha(\eta - h_1) + (1 - \alpha)(\eta - h_2) = \eta - \alpha h_1 - (1 - \alpha)h_2 = \eta - (\alpha h_1 + (1 - \alpha)h_2) \in H^+$$

.

Veamos ahora que el conjunto $\eta - H^+$ es cerrado. Sea (h_n) sucesión de elementos en $\eta - H^+$ tal que $h_n \longrightarrow x$; entonces $\eta - h_n \longrightarrow \eta - x$, y puesto que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\eta - h_n \in H^+$ se sigue que $\eta - x \in H^+$, pues H^+ es cerrado.

Con esto vemos que el conjunto $\eta - H^+$ es el análogo del conjunto $1 - L^2_+(X, \mu)$ del caso conmutativo.

El conjunto $\eta + H^+$ también es convexo y cerrado. Las pruebas son similares a las anteriores.

A la proyección ortogonal de h sobre el conjunto $\eta + H^+$ la denotaremos como $h \vee \eta$, y a la proyección ortogonal de h sobre el conjunto $\eta - H^+$ la denotaremos como $h \wedge \eta$. Estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades.

Lema 5.3.1. *Sean $h, \eta \in H^J$; entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $h \vee 0 = h_+$

(ii) $h \wedge 0 = -h_-$

(iii) $h \vee \eta = \eta + (h - \eta)_+$

(iv) $h \wedge \eta = \eta - (h - \eta)_-$

Demostración.

(i) Por definición, $h \vee 0$ es la proyección ortogonal de h sobre $0 + H^+ = H^+$, la cual es igual a h_+.

(ii) Si definimos como E la proyección ortogonal del inciso anterior, entonces $I - E$ es la proyección ortogonal sobre el conjunto complemento ortogonal, $-H^+$ y es igual a $(I - E)(h_+ - h_-) = h_+ - h_- - h_+ = -h_-$.

(iii) Puesto que $(h - \eta)_+ \in H^+$ es la proyección ortogonal del vector $h - \eta$, se tiene que,

$$||h - (\eta + (h - \eta)_+)|| = ||(h - \eta) - (h - \eta)_+)|| \leq ||(h - \eta) - u|| = ||h - (\eta + u)||$$

para cualquier $u \in H^+$. Por lo tanto $\eta + (h-\eta)_+$ es la proyección ortogonal de h sobre $\eta + H^+$.

(iv) Por (ii) tenemos que $-(h-\eta)_- \in (-H^+)$ es la proyección ortogonal del vector $h-\eta$, entonces

$$\begin{aligned} ||h-(\eta-(h-\eta)_-)|| =& ||(h-\eta)+(h-\eta)_-|| = ||(h-\eta)-(-(h-\eta)_-)|| \\ \leq& ||(h-\eta)-(-u)|| = ||(h-\eta)+u|| = ||h-(\eta-u)|| \end{aligned} \tag{5.2}$$

para cualquier $u \in H^+$. Por lo tanto $\eta - (h-\eta)_-$ es la proyección ortogonal de h sobre $\eta + H^+$.

□

5.4. Markovianidad y Formas de Dirichlet

Sea $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, H^+, J)$ una forma estandar de un álgebra de Von Neumann $\mathfrak{M}$ y sea $\eta \in H^+$ un vector cíclico y separante.

Definición 5.4.1. *Una forma cuadrática J-real $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ es markoviana, con respecto a η, si*

$$\mathcal{E}[h \wedge \eta] \leq \mathcal{E}[h] \qquad \forall h \in H^J.$$

A una forma markoviana cerrada se le conoce como forma de Dirichlet (con respecto a η).

El siguiente teorema demuestra que la propiedad de Markovianidad para un semigrupo es equivalente a que la forma cuadrática asociada sea de Dirichlet. Obsérvese cómo la segunda parte de la prueba se apoya fuertemente en la propiedad contractiva de la forma: $\mathcal{E}[h \wedge \eta] \leq \mathcal{E}[h]$.

Teorema 5.4.2. *Sea $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, H^+, J)$ una forma estandar de un álgebra de Von Neumann $\mathfrak{M}$ y sea $\eta \in H^+$ un vector cíclico y separante. Sea $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo, J-real, simétrico y contractivo sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to [0, \infty]$, la forma cuadrática cerrada y J- real asociada. Son equivalentes,*

(i) $(T_t)_{t\geq 0}$ es markoviano con respecto a η.

(ii) $\mathcal{E}$ es una forma de Dirichlet con respecto a η.

Antes de demostrar este teorema se probarán dos lemas necesarios para la prueba. Las hipótesis de ambos lemas son las mismas que las que aparecen en el teorema. También es conveniente introducir la siguiente notación: denotaremos por C al conjunto cerrado convexo $\eta - H^+$ y por h_C a la proyección ortogonal del vector $h \in H^J$ sobre C.

Lema 5.4.3. *Con las hipótesis del teorema anterior y con la notación anterior, se cumple la siguiente desigualdad*

$$\langle h - h_C, T_t h_C - h_C \rangle \le 0.$$

Demostración.
Puesto que $h, \eta \in H^J$ entonces $h - \eta \in H^J$ y aplicando la descomposición de Jordan, $h - \eta = (h-\eta)_+ - (h-\eta)_-$, con $(h-\eta)_+, (h-\eta)_- \in H^+$. Por lo tanto, tenemos
$\eta + h - \eta = \eta + (h-\eta)_+ - (h-\eta)_- \iff h = (h-\eta)_+ + \eta - (h-\eta)_- =$

$(h-\eta)_+ + h_C \iff h - h_C = (h-\eta)_+ \in H^+.$

Como H^+ es autopolar y T_t es Markoviano para toda $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \le \langle h - h_C, \eta - T_t h_C \rangle =& \langle h - h_C, (h-\eta)_- - (h-\eta)_- + \eta - T_t h_C \rangle \\ =& \langle h - h_C, (h-\eta)_- + \eta - (h-\eta)_- - T_t h_C \rangle. \end{aligned}$$

Pero, por la propiedad (iv) en el lema anterior, $h_C = h \wedge \eta = \eta - (h-\eta)_-$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \le& \langle h - h_C, (h-\eta)_- + \eta - (h-\eta)_- - T_t h_C \rangle \\ =& \langle h - h_C, (h-\eta)_- + h_C - T_t h_C \rangle \\ =& \langle h - h_C, (h-\eta)_- \rangle + \langle h - h_C, h_C - T_t h_C \rangle = 0 + \langle h - h_C, h_C - T_t h_C \rangle \\ =& \langle h - h_C, -(T_t h_C - h_C) \rangle = -\langle h - h_C, T_t h_C - h_C \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.4. *Consideremos el funcional $F : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ dado por*

$$F(x) = \lambda^{-1} \mathcal{E}[x] + ||x - h||^2$$

Si para cada $h \in C$ definimos $h_0 = \lambda R_\lambda h$, entonces se tiene que

$$F(x) - F(h_0) = ||(\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (x - h_0)||^2.$$

Demostración. Observemos que $F(h_0) = \lambda^{-1}\mathcal{E}[h_0] + ||h_0 - h||^2$ y por lo tanto, si L es el generador infinitesimal de $(T_t)_{t \geq 0}$, entonces

$$\begin{aligned} F(x) - F(h_0) =& \lambda^{-1} \langle Lx, x \rangle - \lambda^{-1} \langle Lh_0, h_0 \rangle + \langle x - h, x - h \rangle - \langle h_0 - h, h_0 - h \rangle \\ =& \langle \lambda^{-1} Lx, x \rangle - \langle \lambda^{-1} Lh_0, h_0 \rangle + \langle x, x \rangle - \langle h, x \rangle - \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle \\ & - \langle h_0, h_0 \rangle + \langle h, h_0 \rangle + \langle h_0, h \rangle - \langle h, h \rangle \\ =& \langle \lambda^{-1} Lx, x \rangle - \langle \lambda^{-1} Lh_0, h_0 \rangle + \langle x, x \rangle - \langle h, x \rangle - \langle x, h \rangle - \langle h_0, h_0 \rangle \\ & + \langle h, h_0 \rangle + \langle h_0, h \rangle \end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva:

$$\langle \lambda^{-1} Lx, x\rangle + \langle x, x\rangle = \langle (\lambda^{-1}L + I)x, x\rangle$$

y,

$$-\langle \lambda^{-1} Lh_0, h_0\rangle - \langle h_0, h_0\rangle = -\langle (\lambda^{-1}L + I)h_0, h_0\rangle.$$

Por otro lado, usando que $h_0 = \lambda R_\lambda h \iff h = (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0$ podemos reescribir $\langle h, x\rangle = \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, x\rangle$, $\langle x, h\rangle = \langle x, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle$, $\langle h, h_0\rangle = \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, h_0\rangle$, $\langle h_0, h\rangle = \langle h_0, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle$ y así obtenemos

$$\begin{aligned} F(x) - F(h_0) =& \langle (\lambda^{-1}L + I)x, x\rangle - \langle (\lambda^{-1}L + I)h_0, h_0\rangle \\ & - \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, x\rangle - \langle x, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle \\ & + \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, h_0\rangle + \langle h_0, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle. \end{aligned}$$

Ahora, usando la identidad $\lambda R_\lambda = (\lambda^{-1}L + I)^{-1} \iff \lambda^{-1}L + I = (\lambda R_\lambda)^{-1}$, reemplazamos

$$\langle (\lambda^{-1}L + I)x, x\rangle = \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} x, x\rangle$$

y,

$$\langle (\lambda^{-1}L + I)h_0, h_0\rangle = \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, h_0\rangle,$$

para obtener

$$\begin{aligned} F(x) - F(h_0) =& \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} x, x\rangle - \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, h_0\rangle - \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, x\rangle \\ & - \langle x, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle + \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, h_0\rangle + \langle h_0, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle \\ =& \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} x, x\rangle - \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0, x\rangle - \langle x, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle \\ & + \langle h_0, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle \\ =& \langle (\lambda R_\lambda)^{-1} (x - h_0), x\rangle + \langle h_0 - x, (\lambda R_\lambda)^{-1} h_0\rangle. \end{aligned}$$

Por último, dado que

$$(\lambda R_\lambda)^{-1} = (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

y $(\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ es un operador simétrico, obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x) - F(h_0) =& \langle (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (x - h_0), (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} x\rangle - \langle (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (x - h_0), (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} h_0\rangle \\ =& \langle (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (x - h_0), (\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}} (x - h_0)\rangle. \end{aligned}$$

□

Demostración. (Del teorema 5.4.2)
Supongamos cierta la propiedad (i). Si $h \in H^J$ entonces $h_C \in C$ y por hipótesis, para cualquier $t \geq 0$, $T_t h_C \in C$ y $\langle h - h_C, T_t h_C - h_C\rangle \leq 0$ para toda $t > 0$, (lema 5.4.3).
Ahora definamos la forma cuadrática

$$\mathcal{E}^t[\cdot] \equiv t^{-1} \langle (I - T_t)\cdot, \cdot\rangle \quad \forall t > 0.$$

La desigualdad $\langle h - h_C, T_t h_C - h_C\rangle \leq 0$ implica que: $\langle (I - T_t)h_C, h_C\rangle \leq \langle (I - T_t)h_C, h\rangle$, y esto en términos de la forma cuadrática: $\mathcal{E}^t[h_C] \leq \mathcal{E}^t(h_C, h)$. Obsérvese que $\mathcal{E}^t$ es no negativa, pues al ser T_t una contracción, $||T_t u|| \leq ||T_t||||u|| \leq ||u||$. Por lo tanto,

$$\langle T_t u, T_t u\rangle \leq \langle u, u\rangle \Longleftrightarrow \langle T_t T_t u, u\rangle \leq \langle u, u\rangle \Longleftrightarrow \langle T_{2t} u, u\rangle \leq \langle u, u\rangle$$

la segunda desigualdad es por la propiedad de simetría y la tercera por la propiedad de semigrupo. Por lo tanto, reetiquetando el índice, tenemos:

$$\langle T_t u, u\rangle \leq \langle u, u\rangle.$$

De ésta última desigualdad se concluye que:

$$\langle (I - T_t)u, u\rangle = \langle u, u\rangle - \langle T_t u, u\rangle \geq 0.$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$0 \leq \mathcal{E}^t[h_C] \leq \mathcal{E}^t(h_C, h) \leq \sqrt{\mathcal{E}^t[h_C]}\sqrt{\mathcal{E}^t[h]},$$

obtenemos $\mathcal{E}^t[h_C] \leq \mathcal{E}^t[h]$, para toda $t > 0$. Finalmente, usando la definición del generador infinitesimal de $(T_t)_{t\geq 0}$ en esta última desigualdad

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{E}^t[h_C] = \langle \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(I - T_t)h_C, h_C\rangle \leq \lim_{t\to 0} \mathcal{E}^t[h] = \langle \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(I - T_t)h, h\rangle$$

obtenemos $\mathcal{E}[h_C] = \langle Lh_C, h_C\rangle \leq \langle Lh, h\rangle = \mathcal{E}[h]$.

Recíprocamente, supongamos cierta la propiedad (ii). Se probará que el resolvente asociado $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ es Markoviano. Para ello consideremos el funcional, $F : \mathcal{H} \to [0, \infty]$, dado por: $F(x) = \lambda^{-1}\mathcal{E}[x] + ||x - h||^2$. Por el Lema 5.4.4, para $h_0 = \lambda R_\lambda h$ y $h \in C$, $F(x) - F(h_0) = ||(\lambda R_\lambda)^{-\frac{1}{2}}(x - h_0)||^2$. De esto último observamos que h_0 es el único elemento que minimiza F. Ahora definamos como $\gamma \in C$ a la proyección ortogonal de h_0 sobre C. Por el teorema de la proyección ortogonal y puesto que $h \in C$, tenemos $\langle h, h_0 - \gamma\rangle \leq \langle \gamma, h_0 - \gamma\rangle$ y de aquí obtenemos la siguiente desigualdad

$$0 \leq \langle \gamma, h_0 - \gamma\rangle - \langle h, h_0 - \gamma\rangle = \langle \gamma - h, h_0 - \gamma\rangle = \langle \gamma - h, h_0\rangle - \langle \gamma - h, \gamma\rangle$$

es decir, $\langle \gamma - h, \gamma\rangle \leq \langle \gamma - h, h_0\rangle$. Con esta desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} ||\gamma - h||^2 =& \langle \gamma - h, \gamma - h\rangle = \langle \gamma - h, \gamma\rangle - \langle \gamma - h, h\rangle \\ \leq& \langle \gamma - h, h_0\rangle - \langle \gamma - h, h\rangle = \langle \gamma - h, h_0 - h\rangle \leq ||\gamma - h||||h_0 - h|| \end{aligned}$$

y por lo tanto $||\gamma - h|| \leq ||h_0 - h||$.

Por hipótesis, $\mathcal{E}[\gamma] \leq \mathcal{E}[h_0]$ y, usando la desigualdad anterior,

$$F(\gamma) = \lambda^{-1}\mathcal{E}[\gamma] + ||\gamma - h||^2 \leq \lambda^{-1}\mathcal{E}[h_0] + ||h_0 - h||^2 = F(h_0).$$

Por la unicidad del elemento minimizador, $\lambda R_\lambda h = h_0 = \gamma \in C$ es decir, el resolvente asociado $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ es Markoviano y por la Proposición 5.1.5 el semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$ es Markoviano.

Para probar la siguiente caracterización necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.4.5. *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado, simétrico y positivo. Definimos la forma cuadrática del operador $I - T$ como $\mathcal{E}_T[h] \equiv \langle h, (I-T)h \rangle$ con $h \in \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{E}_T[|h|] \leq \mathcal{E}_T[h]$.*

Demostración. Al desarrollar, por la simetría del operador obtenemos

$$\langle h_-, Th_+ \rangle = \langle Th_-, h_+ \rangle = \langle h_+, Th_- \rangle$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T[h_+ - h_-] - \mathcal{E}_T[h_+ + h_-] =& \langle h_+ - h_-, h_+ - h_- - T(h_+ - h_-) \rangle \\ & - \langle h_+ + h_-, h_+ + h_- - T(h_+ + h_-) \rangle \\ =& 4\langle h_+, Th_- \rangle - 4\langle h_+, h_- \rangle = 4\langle h_+, Th_- \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

pues al ser T positivo, $Th_- \in H^+$.

□

Teorema 5.4.6. *(Caracterización de los semigrupos positivos mediante formas cuadráticas) Sea $(\mathfrak{M}, \mathcal{H}, H^+, J)$ una forma estándard de una álgebra de Von Neumann $\mathfrak{M}$. Sea $(T_t)_{t \geq 0}$ un Semigrupo simétrico, $J-$ real, fuertemente continuo, sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ la forma cuadrática asociada, $J-$ real y cerrada. Las siguientes propiedades son equivalentes*

(i) $(T_t)_{t \geq 0}$ *es positivo,*

(ii) $\mathcal{E}[|h|] \leq \mathcal{E}[h]$ *para toda* $h \in \mathcal{H}$*. En particular, si* $h \in D(\mathcal{E})^J$ *entonces* $|h| \in D(\mathcal{E})^J$*.*

(iii) Si $h \in D(\mathcal{E})^J$*, entonces* $h_+, h_- \in D(\mathcal{E})^J$ *y* $\mathcal{E}(h_+, h_-) \leq 0$*.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Si $(T_t)_{t \geq 0}$ es positivo, entonces por el lema anterior tenemos que, para cualesquiera $t > 0$ y $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{E}^t[|h|] = \langle (I - T_t)|h|, |h| \rangle \leq \mathcal{E}^t[h] = \langle (I - T_t)h, h \rangle$. Ahora haciendo $t \to 0$, obtenemos la desigualdad $\mathcal{E}[|h|] \leq \mathcal{E}[h]$. Si $h \in D(\mathcal{E})^J$ entonces $\mathcal{E}[h] < \infty$ y por la desigualdad anterior, $\mathcal{E}[|h|] < \infty$ por lo que $|h| \in D(\mathcal{E})$ y dado que $|h| = h_+ + h_- \in H^J$, obtenemos $|h| \in D(\mathcal{E})^J$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Se probará la positividad del resolvente asociado (R_λ), que es equivalente a la positividad del semigrupo. Como se vió en la sección 5.2, R_λ puede ser representado como el adjunto $I^* : \mathcal{H} \to D(\mathcal{E})$ de $I : D(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}$. Ahora observemos que al ser $(T_t)_{t \geq 0}$ J- real:

$$R_\lambda J = \int_0^\infty \exp -t\lambda T_t J dt = J \int_0^\infty \exp -t\lambda T_t dt = J R_\lambda$$

por lo que R_λ es también J- real y por lo tanto la imagen:

$$I^*(H^+) = R_\lambda(H^+) \subseteq D(\mathcal{E})^J = D(\mathcal{E}) \cap \mathcal{H}^J.$$

Sea $u \in R_\lambda(H^+)$; entonces existe $v \in H^+$ tal que $u = I^*v$. Entonces, para cualquier $h \in D(\mathcal{E})^J$ tenemos,

$$\langle |h|, u\rangle_\lambda = \langle |h|, I^*v\rangle_\lambda = \langle I|h|, v\rangle = \langle |h|\rangle \geq 0.$$

Ahora, dado que H^+ es autopolar tenemos: $\langle h_-, v\rangle \geq 0$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\langle h_-, v\rangle \geq -\langle h_-, v\rangle &\Longleftrightarrow \langle h_+, v\rangle + \langle h_-, v\rangle \geq \langle h_+, v\rangle - \langle h_-, v\rangle \\ &\Longleftrightarrow \langle |h|\rangle \geq \langle h_+ - h_-, v\rangle\end{aligned}$$

Asi llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\langle |h|, u\rangle_\lambda = \langle |h|, v\rangle \geq |\langle h, v\rangle| = |\langle Ih, v\rangle| = |\langle h, I^*v\rangle_\lambda| = |\langle h, u\rangle_\lambda|.$$

Por otro lado, por hipótesis $|h| \in D(\mathcal{E})^J$, por lo que también tenemos la siguiente desigualdad:

$$|||h|||_\lambda^2 = \mathcal{E}[|h|] + \lambda\langle |h|, |h|\rangle \leq \mathcal{E}[h] + \lambda\langle |h|, |h|\rangle = \mathcal{E}[h] + \lambda\langle h, h\rangle = ||h||_\lambda^2$$

pues $\langle |h|, |h|\rangle = \langle h, h\rangle$. Aplicando el Lema 1.3.1 en [13] al espacio de Hilbert real $D(\mathcal{E})^J$ con el cono $R_\lambda(H^+)$ y con $\tilde{h} = |h|$, obtenemos que $R_\lambda(H^+) \subseteq H^+$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Tenemos las siguientes identidades: $|h|+h = h_++h_-+h_+-h_- = 2h_+$ y $|h| - h = h_+ + h_- - h_+ + h_- = 2h_-$. Puesto que $D(\mathcal{E})^J$ es un subespacio vectorial y por hipótesis, $h, |h| \in D(\mathcal{E})^J$, se sigue que $h_+ = \frac{1}{2}(|h| + h), h_- = \frac{1}{2}(|h| - h) \in D(\mathcal{E})^J$. Para concluir observemos la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[|h|] - \mathcal{E}[h] =& \mathcal{E}(h_+ + h_-, h_+ + h_-) - \mathcal{E}(h_+ - h_-, h_+ - h_-) \\ =& \mathcal{E}(h_+ + h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+ + h_-, h_-) - [\mathcal{E}(h_+ - h_-, h_+ - \mathcal{E}(h_+ - h_-, h_-)] \\ =& \mathcal{E}(h_+, h_+) + \mathcal{E}(h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+, h_-) + \mathcal{E}(h_-, h_-) \\ & - [\mathcal{E}(h_+, h_+) - \mathcal{E}(h_-, h_+) - \mathcal{E}(h_+, h_-) + \mathcal{E}(h_-, h_-)] \\ =& \mathcal{E}(h_+, h_+) + \mathcal{E}(h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+, h_-) + \mathcal{E}(h_-, h_-) \\ & - \mathcal{E}(h_+, h_+) + \mathcal{E}(h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+, h_-) - \mathcal{E}(h_-, h_-) \\ =& \mathcal{E}(h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+, h_-) + \mathcal{E}(h_-, h_+) + \mathcal{E}(h_+, h_-) \\ =& 4\mathcal{E}(h_+, h_-)\end{aligned}$$

y por hipótesis $4\mathcal{E}(h_+, h_-) = \mathcal{E}[|h|] - \mathcal{E}[h] \leq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Si $\mathcal{E}(h_+, h_-) \leq 0$, entonces por la identidad anterior, $\mathcal{E}[|h|] - \mathcal{E}[h] = 4\mathcal{E}(h_+, h_-) \leq 0$. Por otro lado, si $h_+, h_- \in D(\mathcal{E})^J$ entonces $|h| = h_+ + h_- \in D(\mathcal{E})^J$; pues $D(\mathcal{E})^J$ es un subespacio vectorial.

$\square$

El siguiente resultado proporciona un criterio más sencillo que el teorema anterior para decidir si una forma cuadrática dada es de Dirichlet.

Teorema 5.4.7. *Sea $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ una forma cuadrática cerrada, no negativa y J- real y sea $\eta_0 \in H^+$ tal que se satisfacen los siguientes enunciados:*

i) $\eta_0 \in D(\mathcal{E})$ y $\mathcal{E}(\eta_0, h) \geq 0$ para toda $h \in D(\mathcal{E}) \cap H^+$;

ii) $\mathcal{E}[|h|] \leq \mathcal{E}[h]$, para toda $h \in H^J$.

entonces $\mathcal{E}$ es una forma de Dirichlet con respecto a η_0.

Demostración. Puesto que $\eta_0 \in D(\mathcal{E})$, usando el Lemma 5.3.1 (iv), tenemos que $h \wedge \eta_0 = \eta_0 - (h - \eta_0)_-$ y, usando la representación $h = \eta_0 + (h - \eta_0)$, podemos ver que la propiedad Markoviana $\mathcal{E}[h \wedge \eta_0] \leq \mathcal{E}[h]$ es equivalente a $-2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_+) \leq \mathcal{E}[h - \eta_0] - \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-]$:

$$\mathcal{E}(\eta_0 - (h - \eta_0)_-, \eta_0 - (h - \eta_0)_-) \leq \mathcal{E}(\eta_0 + (h - \eta_0), \eta_0 + (h - \eta_0)) \iff$$

$$\mathcal{E}[\eta_0] - 2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_-) + \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-] \leq \mathcal{E}[\eta_0] + 2\mathcal{E}(\eta_0, h - \eta_0) + \mathcal{E}[h - \eta_0].$$

Dado que $(h - \eta_0)_- = (h - \eta_0)_+ - (h - \eta_0)$, entonces:

$$-2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_-) = -2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_+) + 2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0))$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{E}[\eta_0] - 2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_-) + \mathcal{E}[h - \eta_0] \leq \mathcal{E}[\eta_0] + 2\mathcal{E}(\eta_0, h - \eta_0) + \mathcal{E}[h - \eta_0] \iff$$

$$-2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_+) + 2\mathcal{E}(\eta_0, h - \eta_0) + \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-] \leq 2\mathcal{E}(\eta_0, h - \eta_0)$$

$$+\mathcal{E}[h - \eta_0] \iff -2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_+) \leq \mathcal{E}[h - \eta_0] - \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-].$$

Ahora estableceremos la última desigualdad. Puesto que $\eta_0 \in H^+ \subseteq H^J$ y por hipótesis i) $\eta_0 \in D(\mathcal{E})$, se sigue que $\eta_0 \in D(\mathcal{E})^J$; análogamente $h \in H^+ \subseteq H^J$ y $h \in D(\mathcal{E})$ implican que $h \in D(\mathcal{E})^J$. Por lo tanto $h - \eta_0 \in D(\mathcal{E})^J$; y dado que también se cumple $(h - \eta_0)_+ \in H^+ \subseteq H^J$ y la hipótesis ii) es equivalente a iii) del teorema anterior, se sigue que $(h - \eta_0)_+ \in D(\mathcal{E})$. Por lo tanto, por la hipótesis i), $-2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta)_+) \leq 0$. Ahora se probará que $\mathcal{E}[h - \eta_0] - \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-] \geq 0$. En efecto, esto último es equivalente a probar que, para todo elemento ς de $D(\mathcal{E})^J$, se tiene que:

$$\mathcal{E}[\varsigma_-] \leq \mathcal{E}[\varsigma] = \mathcal{E}[\varsigma_+] - 2\mathcal{E}(\varsigma_+, \varsigma_-) + \mathcal{E}[\varsigma_-] \iff 0 \leq \mathcal{E}[\varsigma_+] - 2\mathcal{E}(\varsigma_+, \varsigma_-).$$

Por la no negatividad $\mathcal{E}[\varsigma_+] \geq 0$ y como la condición ii) de este teorema es equivalente a iii) del anterior, también tenemos que $-2\mathcal{E}(\varsigma_+, \varsigma_-) \geq 0$. Por lo tanto $-2\mathcal{E}(\eta_0, (h - \eta_0)_+) \leq \mathcal{E}[h - \eta_0] - \mathcal{E}[(h - \eta_0)_-]$ y con esto queda establecida la propiedad Markoviana.

$\square$

Capítulo 6

Ejemplo

En este capítulo se presenta un ejemplo de forma de Dirichlet no conmutativa; corresponde a probabilidad cuántica, y trata sobre la absorción y emisión de n fotones por un sistema cuántico abierto (átomo o molécula interactuando con su entorno). Es un trabajo inédito, que generaliza los resultados para un fotón de [8] al caso de absorción y emisión de n fotones, aprovechando la referencia [17], donde se estudia el hueco espectral.

6.1. Ejemplo: Absorción y emisión de n-fotones

Para poder desarrollar este ejemplo necesitamos introducir algunos operadores de multiplicación y sus derivaciones, asi como probar algunos hechos relativos a estos operadores. Después se hará una generalización de los conocidos operadores cuánticos de creación y aniquilación, necesarios para construir la forma de Dirichlet. Para mayor generalidad, $\mathcal{H}$ denotará cualquier espacio de Hilbert separable complejo y, después, en la construcción de la forma de Dirichlet, denotará al espacio $l^2(\mathbb{N})$. Siguiendo la costumbre, el álgebra de Von Neumann de todos los operadores acotados que actúan sobre $\mathcal{H}$, se denotará como $B(\mathcal{H})$,y sus elementos con letras minúsculas latinas: x, y, z, w,etc. $L^2(\mathcal{H})$ es la clase de operadores Hilbert-Schmidt, actuando sobre h, cuyos elementos se denotarán con letras griegas $\xi, \nu, etc.$ $L^2_+(\mathcal{H})$ es el cono cerrado, convexo, autopolar, de los operadores Hilbert-schmidt positivos. En este caso, J es simplemente: $J\xi = \xi^*$, donde ξ^* es el adjunto Hilbertiano de ξ. De esta manera tenemos la forma estándar para $B(\mathcal{H})$

$$(B(\mathcal{H}), L^2(\mathcal{H}), L^2_+(\mathcal{H}), J).$$

6.1.1. Operadores de multiplicación

Ya que tenemos la forma estándar definamos operadores (no acotados) de multiplicación y derivaciones en $L^2(\mathcal{H})$. Sea X un operador cerrado densamente definido sobre $\mathcal{H}$, cuyo dominio denotamos como $D(X)$. Ahora consideremos cualquier operador $\xi \in L^2(\mathcal{H})$. La composición $X\xi$ es cerrada, pero no necesariamente densamente definida. Por otro lado, la composición ξX es densamente definida pero no necesariamente cerrada. En vista de esto, definiremos, para X un operador cerrado densamente definido sobre $\mathcal{H}$, los operadores de multiplicación por la derecha y de multiplicación por la izquierda de la siguiente manera

Definición 6.1.1. *Operador de multiplicación por la izquierda*

$$L_X : Dom(L_X) \subseteq L^2(\mathcal{H}) \longmapsto L^2(\mathcal{H})$$

con dominio

$$Dom(L_X) = \{\xi \in L^2(\mathcal{H}) : D(X\xi) = \mathcal{H}, \quad X\xi \in L^2(\mathcal{H})\}$$

y con regla de correspondencia

$$L_X(\xi) = X\xi.$$

Definición 6.1.2. *Operador de multiplicación por la derecha*

$$R_X : Dom(R_X) \subseteq L^2(\mathcal{H}) \longmapsto L^2(\mathcal{H})$$

con dominio

$$Dom(R_X) = \{\xi \in L^2(\mathcal{H}) : \xi X \quad es \quad acotado, \quad cerrable \quad y \quad [\xi X] \in L^2(\mathcal{H})\}$$

y con regla de correspondencia

$$R_X(\xi) = [\xi X]$$

donde $[\xi X]$ es la cerradura del operador ξX (en caso de tenerla).

Con estos dos operadores definiremos el siguiente

$$\delta_X : Dom(L_X) \cap Dom(R_X) \longmapsto L^2(\mathcal{H})$$

con regla de correspondencia

$$\delta_X \xi = L_X \xi - R_X \xi$$

Notemos dos cosas. Si ξX es acotado y cerrable, entonces $[\xi X] \in B(\mathcal{H})$ y el hecho de que $D(X\xi) = \mathcal{H}$ implica que $X\xi \in B(\mathcal{H})$.

Ahora se probarán algunos lemas referentes a estos operadores, indispensables para la construcción de una de las formas de Dirichlet que veremos. De ahora en adelante el espacio $L^2(\mathcal{H})$ se abreviará como L^2.

Lema 6.1.3. *Sea X un operador cerrado y densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Entonces se cumple lo siguiente*

(i) $JDom(L_X) = Dom(R_{X^*}), \quad JL_XJ = R_{X^*}$.

(ii) L_X *es un operador cerrado densamente definido en* L^2*, que satisface*

$$L_{X^*} \subset (L_X)^*; \qquad Dom(L_X) = Dom(L_{|X|}).$$

(iii) R_X *es un operador cerrado densamente definido en* L^2*, que satisface*

$$R_{X^*} \subset (R_X)^*; \qquad Dom(R_X) = Dom(R_{|X^*|}).$$

Demostración. (i)Sea $\epsilon \in Dom(L_X)$, entonces $Dom(X\epsilon) = \mathcal{H}$ y $X\epsilon \in L^2$. Sea $v \in Dom(\epsilon^* X^*)$ y $u \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle u, \epsilon^* X^* v\rangle = \langle \epsilon u, X^* v\rangle = \langle (X\epsilon)u, v\rangle = \langle u, (X\epsilon)^* v\rangle$$

la primera igualdad se sigue del hecho de que $Dom(\epsilon) = \mathcal{H}$, la segunda por $Dom(X\epsilon) = \mathcal{H}$, de donde se sigue que $\epsilon u \in Dom(X)$ y la tercera por $Dom((X\epsilon)^*) = \mathcal{H}$ ya que $Dom(X\epsilon) = \mathcal{H}$ y $X\epsilon$ es acotado. De la igualdad del primer término con el último se sigue que $\epsilon^* X^* v = (X\epsilon)^* v, \quad v \in Dom(\epsilon^* X^*) \subset \mathcal{H} = Dom((X\epsilon)^*)$; es decir, para todo $\epsilon \in Dom(L_X)$ se tiene que $\epsilon^* X^* \subset (X\epsilon)^*$. Como $X\epsilon \in L_2$ tenemos que

$$tr(((X\epsilon)^*)^*(X\epsilon)^*) = tr((X\epsilon)(X\epsilon)^*) = tr((X\epsilon)^*(X\epsilon)) < \infty$$

concluimos que $(X\epsilon)^* \in L^2$, lo cual implica que $\epsilon^* X^*$ es acotado y densamente definido en $\mathcal{H}$. Por la unicidad de la extensión $[\epsilon^* X^*] = (X\epsilon)^*$, por lo tanto $\epsilon^* \in Dom(R_{X^*})$ y $JDom(L_X) \subset Dom(R_{X^*})$. Por definición $JDom(L_X) = \{\epsilon^* | \epsilon \in Dom(L_X)\}$. Ahora definamos el operador $JL_X J : JDom(L_X) \longrightarrow L^2$ dado por

$$JL_X J(\epsilon^*) = (X\epsilon)^* = (L_X \epsilon)^*$$

(recordar que $Dom(X\epsilon) = \mathcal{H}$ y que $X\epsilon$ es cerrado). Dado que

$$\forall \epsilon \in Dom(L_X) \qquad [\epsilon^* X^*] = (X\epsilon)^* \Longleftrightarrow (X\epsilon) = [\epsilon^* X^*]^* \Longleftrightarrow L_X \epsilon = (R_{X^*}\epsilon^*)^*$$

y puesto que $R_{X^*}\epsilon^* = [\epsilon^* X^*]$ es cerrado, entonces $(L_X\epsilon)^* = R_{X^*}\epsilon^* \qquad \forall \epsilon \in Dom(L_X)$ y por lo tanto $JL_X J(\epsilon^*) = R_{X^*}(\epsilon^*) \qquad \forall \epsilon^* \in JDom(L_X)$.

Recíprocamente, sea $\eta \in Dom(R_{X^*})$, entonces ηX^* es acotado y $[\eta X^*] \in L^2$. Sean $u \in Dom(X^*)$ y $v \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle u, [\eta X^*]^* v\rangle = \langle [\eta X^*]u, v\rangle = \langle \eta X^* u, v\rangle = \langle X^* u, \eta^* v\rangle,$$

es decir, dada $v \in \mathcal{H}$, existe un único $[\eta X^*]^* v$ tal que

$$\langle X^* u, \eta^* v\rangle = \langle u, [\eta X^*]^* v\rangle, \;\; \forall \;\; u \in Dom(X^*).$$

Por lo tanto $\eta^* v \in Dom((X^*)^*) = Dom(X)$, pues X es cerrado. De aquí se sigue que $[\eta X^*]^* v = X(\eta^* v) = (X\eta^*)v, \;\; \forall \; v \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $X\eta^* = [\eta X^*]^* \in L^2$ y esto implica que $Dom(R_{X^*}) \subset JDom(L_X)$.

(ii) Consideremos n, m fijos. El operador de rango uno $|e_n\rangle\langle f_m|$ (ver apéndice 7.5) tiene como rango $\mathbb{C}\epsilon_n \in Dom(X)$ (pues es subespacio) para toda $v \in h$. Ahora definamos el conjunto $C_{00}[e,f] \equiv \text{span}\{|e_n\rangle\langle f_m|\}$; observemos que $C_{00}([e,f]) \subset Dom(X)$. Por lo tanto, $Dom(X(\sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}|)) = h$ y, puesto que $X(\sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}|)$ es cerrado, también es acotado. Por otro lado:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}||X(\sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}|)f_i|| &= \sum_{i=0}^{\infty}||X(\sum_{k=1}^{n}\langle f_{m_k}, f_i\rangle e_{n_k})|| \\ &= \sum_{k=1}^{n}||X(\langle f_{m_k}, f_{m_k}\rangle e_{n_k})|| < \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X(\sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}|) \in L^2$ y $C_{00}([e,f]) \subset Dom(L_X)$. Por otro lado, $\epsilon \in \Gamma Dom(L_X)$ si y sólo si $\epsilon^* \in Dom(L_X)$ (con ϵ cerrado y densamente definido). Sea:

$$\epsilon \equiv \sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}| \Rightarrow (\sum_{k=1}^{n}|e_{n_k}\rangle\langle f_{m_k}|)^* = \epsilon^* \equiv \sum_{k=1}^{n}|f_{n_k}\rangle\langle e_{m_k}|$$

entonces para cualquier $u \in h, \qquad \epsilon^* u = \mathbb{C}f_{m_1} + ... + \mathbb{C}f_{m_k} \in Dom(X^*)$ y por lo que se probó arriba $\epsilon^* \in Dom(L_{X^*})$ y por lo tanto $\epsilon \in \Gamma Dom(L_{X^*}) = Dom(R_X)$ es decir $C_{00}([e,f]) \subset Dom(R_X) \cap Dom(L_X)$. Consecuentemente, L_X, R_X y δ_X están densamente definidos.

Sea $X = \nu|X|$ la descomposición polar de X, entonces $|X| = \nu^* X$. Si $\epsilon \in Dom(L_{|X|})$ entonces $Dom(X\epsilon) = Dom(\nu|X|\epsilon) = Dom(|X|\epsilon) = \mathcal{H}$ y $X\epsilon = \nu|X|\epsilon \in L^2$, por ser L^2 ideal y $|X|\epsilon \in L^2$. Por lo tanto $\epsilon \in Dom(L_X)$. Si $\epsilon \in Dom(L_{X^*})$ y $\eta \in Dom(L_X)$, entonces $X\eta \in L^2$ por lo que $\epsilon^* X\eta \in L^1$ y $Dom(\epsilon^* X\eta) = Dom(X\eta) = h$. Por otro lado, $Dom(X^*\epsilon) = h$ y $X^*\epsilon \in L^2$ implica que $(X^*\epsilon)^* \in L^2$. Asi $\epsilon^* X \subseteq (X^*\epsilon)^*$ implica que $\epsilon^* X\eta \subseteq (X^*\epsilon)^*\eta$, es decir, $h \subseteq Dom((X^*\epsilon)^*\eta)$ y $(X^*\epsilon)^*\eta u = \epsilon^* X\eta u$ para toda $u \in \mathcal{H}$ por lo tanto $(X^*\epsilon)^*\eta = \epsilon^* X\eta$ y por otro lado tenemos que:

$$\langle \epsilon, L_X\eta\rangle = Tr(\epsilon^* X\eta) = Tr((X^*\epsilon)^*\eta) = \langle L_{X^*}\epsilon, \eta\rangle.$$

Por lo tanto $L_{X^*} \subset (L_X)^*$

(iii) Sea $(\epsilon_n) \subset Dom(R_X)$ tal que $\epsilon_n \longrightarrow \epsilon$ y $R_X\epsilon_n \longrightarrow \eta$ en L^2. Por (i) tenemos que $(\epsilon_n^*) \subset Dom(L_{X^*})$ por lo que para todo $n \in \mathbb{N}$, $Dom(X^*\epsilon_n^*) = \mathcal{H}$, $X^*\epsilon_n^* \in L^2$. Por otro lado, sabemos que $\epsilon_n X \subset (X^*\epsilon_n^*)^*$ y puesto que $\epsilon_n X$ es acotado y densamente definido para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $[\epsilon_n X] = (X^*\epsilon_n^*)^*$ o equivalentemente $[\epsilon_n X]^* = X^*\epsilon_n^*$ pues $X^*\epsilon_n^*$ es cerrado. Ahora bien, por hipótesis, $\epsilon_n^* \longrightarrow \epsilon^*$ y $[\epsilon_n X]^* \longrightarrow \eta^*$ en L^2. Por lo tanto, $L_{X^*}\epsilon_n^* = X^*\epsilon_n \longrightarrow \eta^*$ y como L_{X^*} es cerrado, tenemos que $\epsilon^* \in Dom(L_{X^*})$ y $L_{X^*}\epsilon^* = \eta^*$ si y sólo si $JL_{X^*}J\epsilon = \eta$, es decir, $\eta \in JDom(L_{X^*}) = Dom(R_X)$ y $R_X\epsilon = JL_{X^*}J\epsilon = \eta$. Por lo tanto R_X es cerrado. $\square$

Lema 6.1.4. *Sea X un operador cerrado densamente definido en $\mathcal{H}$, entonces δ_X es un operador cerrable densamente definido que satisface*

$$\delta_X \subset (\delta_{X^*})^*$$

. Además, si $Dom(L_{|X|}) = Dom(L_{|X^*|})$ entonces $Dom(\delta_X)$ es J- invariante, i.e., $JDom(\delta_X) \subseteq Dom(\delta_X)$.

Demostración. Sea $\epsilon \in Dom(R_{X^*}) \cap Dom(L_{X^*})$, entonces por el lema anterior $Dom(R_{X^*}) \cap Dom(L_{X^*}) \subset Dom(R_X^*) \cap Dom(L_X^*)$ y $L_{X^*}\epsilon = L_X^*\epsilon$, $\quad R_{X^*}\epsilon = R_X^*\epsilon$, equivalentemente, $-R_{X^*}\epsilon = -R_X^*\epsilon$. Por lo tanto $L_{X^*}\epsilon - R_{X^*}\epsilon = L_X^*\epsilon - R_X^*\epsilon$, es decir, $L_{X^*} - R_{X^*} \subset L_X^* - R_X^*$.

Ahora consideremos $\eta \in Dom(R_X) \cap Dom(L_X)$ y $\epsilon \in Dom(R_X^*) \cap Dom(L_X^*)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \epsilon, (L_X - R_X)\eta \rangle =& \langle \epsilon, L_X\eta - R_X\eta \rangle = \langle \epsilon, L_X\eta \rangle - \langle \epsilon, R_X\eta \rangle \\ =& \langle L_X^*\epsilon, \eta \rangle - \langle R_X^*\epsilon, \eta \rangle = \langle L_X^*\epsilon - R_X^*\epsilon, \eta \rangle = \langle (L_X^* - R_X^*)\epsilon, \eta \rangle \end{aligned} \tag{6.1}$$

asi tenemos que $Dom(R_X^*) \cap Dom(L_X^*) \subseteq Dom((L_X - R_X)^*)$ y $L_X^* - R_X^* \subset (L_X - R_X)^*$, por lo tanto $(\delta_X)^* = (L_X - R_X)^* \supset L_X^* - R_X^* \supset L_{X^*} - R_{X^*} = \delta_{X^*}$. Por último intercambiando X por X^* obtenemos $(\delta_{X^*})^* \supset \delta_X$, consecuentemente, δ_X es cerrable.

Para probar la última aseveración, observemos que, si $Dom(L_{|X|}) = Dom(L_{|X^*|})$, entonces $Dom(L_X) = Dom(L_{X^*})$, por lo que $Dom(R_X) = JDom(L_{X^*}) = JDom(L_X) = Dom(R_{X^*})$. Por lo tanto, $J[Dom(L_X) \cap Dom(R_X)] = Dom(R_{X^*}) \cap Dom(L_{X^*}) = Dom(R_X) \cap Dom(L_X)$, es decir, $JDom(\delta_X) = Dom(\delta_X)$. $\square$

Como consecuencia de este lema, denotaremos a la cerradura del operador δ_X mediante d_X.

Lema 6.1.5. *Sea X un operador cerrado densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Los dominios $Dom(L_X)$ y $Dom(R_X)$ tienen la siguiente caracterización:*

(i)

$$\begin{aligned} Dom(L_X) = \{\epsilon \in L^2 : X\epsilon\epsilon^*X^* \ &\textit{es acotado, densamente definido y tiene} \\ &\textit{cerradura en los operadores de traza finita}\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Además,

$$\forall \epsilon \in Dom(L_X), \ \ ||X\epsilon||_2^2 = Tr([X\epsilon\epsilon^*X^*])$$

.

(ii)

$$\begin{aligned} Dom(R_X) = \{\epsilon \in L^2 : X^*\epsilon^*\epsilon X \ &\textit{es acotado, densamente definido y tiene} \\ &\textit{cerradura en los operadores de traza finita}\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Además,

$$\forall \epsilon \in Dom(R_X), \ \ ||[\epsilon X]||_2^2 = Tr([X^*\epsilon^*\epsilon X])$$

.

(iii) Adicionalmente, las partes reales de $Dom(L_X)$, $Dom(R_X)$ y $Dom(\delta_X)$ son invariantes bajo la aplicación valor absoluto: $\epsilon \mapsto |\epsilon| = \sqrt{\epsilon^*\epsilon}$ *en* L^2

Demostración. (i) Sea $\epsilon \in L^2$ y sea $T_0 = X\epsilon\epsilon^*X^*$. $Dom(T_0) = Dom(X^*) \subseteq Dom(X\epsilon(X\epsilon)^*) = \mathcal{H}$ pues $X\epsilon \in L^2$ es acotado. Puesto que para toda u en $Dom(X^*)$ se tiene que $\epsilon^*X^*u = (X\epsilon)^*u$, se sigue que $X\epsilon(\epsilon^*X^*u) = X\epsilon((X\epsilon)^*u)$, es decir $T_0 \subset X\epsilon(X\epsilon)^*$ y puesto que $X\epsilon \in L^2$ y $(X\epsilon)^* \in L^2$ se sigue que $T_0 \subset X\epsilon(X\epsilon)^* \in L_1$. Por lo tanto T_0 es acotado en su dominio y densamente definido, por lo que su cerradura $[X\epsilon\epsilon^*X^*]$ es igual a $X\epsilon(X\epsilon)^* \in L_1$. Ahora, por el lema 6.1.3 (i) $JL_XJ = R_{X^*}$, equivalentemente, $L_X = JR_{X^*}J$, por lo que

$$||X\epsilon||_2^2 = ||[\epsilon^*X^*]||_2^2 = Tr([\epsilon^*X^*]^*[\epsilon^*X^*]).$$

Ahora, como $\epsilon^* \in Dom(R_{X^*})$ entonces por la prueba de 6.1.3(i) $X\epsilon = [\epsilon^*X^*]^*$ y por lo tanto $Tr(X\epsilon(X\epsilon)^*) = Tr([X\epsilon\epsilon^*X^*])$.

Ahora supongamos que T_0 es densamente definido, acotado y $[X\epsilon\epsilon^*X^*] \in L_1$. Puesto que $X\epsilon\epsilon^*X^* \subset X\epsilon(X\epsilon)^* = |(X\epsilon)^*|^2$ con $|(X\epsilon)^*|^2$ cerrado (pues $|(X\epsilon)^*|^2 = |(X\epsilon)^*||(X\epsilon)^*| = |(X\epsilon)^*|^*|(X\epsilon)^*|$) y por la unicidad de la extensión (cerrada) tenemos que $X\epsilon(X\epsilon)^* = [X\epsilon\epsilon^*X^*] \in L_1$, es decir, $Tr\{((X\epsilon)^*)^*(X\epsilon)^*\} < \infty$, por lo que $(X\epsilon)^* \in L_2$.

Por otro lado $|(X\epsilon)^*|^2 = [X\epsilon\epsilon^*X^*]$ está definido en todo $\mathcal{H}$ y puesto que $Dom(|(X\epsilon)^*|^2) \subseteq Dom(|(X\epsilon)^*|)$ tenemos $Dom(|(X\epsilon)^*|) = h$ y por la descomposición polar $Dom((X\epsilon)^*) = \mathcal{H}$ y puesto que $\epsilon^*X^* \subset (X\epsilon)^*$ se sigue que ϵ^*X^* es acotado, densamente definido y por la unicidad $[\epsilon^*X^*] = (X\epsilon)^* \in L_2$, de aquí se deduce que $\epsilon^* \in Dom(R_{X^*})$, por lo tanto $\epsilon \in Dom(L_X)$.

(ii) Por el Lema 6.1.3 (i) si $\epsilon \in Dom(R_X) = JDom(L_{X^*})$ entonces $\epsilon^* \in Dom(L_{X^*})$, es decir, $X^*\epsilon^*\epsilon X$ es acotado,densamente definido y tiene cerradura de traza finita. Recíprocamente si $\epsilon \in L^2$ y $X^*\epsilon^*\epsilon X$ es acotado, densamente definido y tiene cerradura de traza finita, entonces $\epsilon^* \in Dom(L_{X^*})$, por lo que $\epsilon \in JDom(L_{X^*}) = Dom(R_X)$; además si $\epsilon \in Dom(R_X)$ entonces $[\epsilon X]^* = X^*\epsilon^*$ (ver prueba de 6.1.3 (i)) y $\epsilon^* \in Dom(L_{X^*})$. Por lo tanto,

$$||[\epsilon X]||_2^2 = ||[\epsilon X]^*||_2^2 = ||X^*\epsilon^*||_2^2 = Tr([X^*\epsilon^*\epsilon X]).$$

Para probar (iii) se demostrará que $A \equiv |Dom(L_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}| \subset Dom(L_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Observemos que $A = \{|\epsilon| : \epsilon \in Dom(L_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}\}$. Sea $|\epsilon| \in A$, entonces $\epsilon \in Dom(L_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}$, por lo que $X\epsilon\epsilon^*X^*$ es acotado, densamente definido y con cerradura de traza finita $[X\epsilon\epsilon^*X^*] \in L_1$. Por definición, $|\epsilon^*|^2 = \epsilon\epsilon^*$, por lo que $X\epsilon\epsilon^*X^* = X|\epsilon^*|^2X^* = X|\epsilon^*||\epsilon^*|X^*$ y como ϵ y $|\epsilon|$ son autoadjuntos tenemos $X|\epsilon^*||\epsilon^*|X^* = X|\epsilon||\epsilon|^*X^*$. Por lo tanto, $|\epsilon| \in Dom(L_X)$.

Análogamente, sea $B \equiv |Dom(R_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}|$. Sea $|\epsilon| \in B$, entonces $\epsilon \in Dom(R_X) \cap L^2_{\mathbb{R}}$, por lo que $X^*\epsilon^*\epsilon X$ es acotado, densamente definido y tiene cerradura de traza finita. Por definición $|\epsilon|^2 = \epsilon^*\epsilon$ por lo tanto $X^*\epsilon^*\epsilon X = X^*|\epsilon|^2X = X^*|\epsilon||\epsilon|X = X^*|\epsilon|^*|\epsilon|X$; así concluimos que $|\epsilon| \in Dom(R_X)$.

Por otro lado, sea $\eta \in L^2_+ \subset L^2$, entonces η es compacto y autoadjunto, consecuentemente existe una base ortonormal $\{e_j\} \subset \mathcal{H}$ tal que $\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j |e_j\rangle\langle e_j|$ con $\eta_j \geq 0$ los valores propios de η. Para $|\epsilon|$ en A o en B tenemos

$$\langle |\epsilon|, \eta\rangle_2 = Tr(|\epsilon|^* \eta) = Tr(|\epsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j |e_j\rangle\langle e_j|) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j Tr(|\epsilon||e_j\rangle\langle e_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j Tr(||\epsilon| e_j\rangle\langle e_j|) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \langle e_j, |\epsilon| e_j\rangle \geq 0$$

pues $|\epsilon|$ es positivo. Por lo tanto $|\epsilon| \in L^2$. $\square$

6.1.2. Operadores de creación y aniquilación

En esta parte introduciremos los bien conocidos operadores cuánticos de creación

$$Ae_n = \begin{cases} \sqrt{n} e_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y aniquilación

$$A^* e_n = \sqrt{n+1} e_{n+1},$$

donde $(e_n)_{n \geq 0}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$.

Para $n \in \mathbb{N}$ fija y $j = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ definimos

$$[j+n]_n = \frac{(j+n)!}{j!} = \prod_{r=1}^{n} (j+r)$$

y

$$[j]_n = \frac{j!}{(j-n)!} = \prod_{r=0}^{n-1} (j-r), \quad para \ \ j \geq n$$

Si $0 \leq j \leq n-1$ entonces $[j]_n = 0$.

Ahora observemos que si $0 \leq j \leq n-1$ entonces $[j+n]_n > [j]_n = 0$, pero, si $j \geq n \geq 1$ entonces $0 \leq j - r < j + r$ para $1 \leq r \leq n-1$, por lo que $0 < \prod_{r=1}^{n-1} (j-r) < \prod_{r=1}^{n-1} (j+r)$ y puesto que $j < j+n$, multiplicando ambas desigualdades obtenemos $\prod_{r=0}^{n-1} (j-r) < \prod_{r=1}^{n} (j+r)$, es decir, $[j]_n < [j+n]_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, definimos los siguientes operadores lineales.

$[J+n]_n : l^2 \longmapsto l^2$, dado por $[J+n]_n e_j = [j+n]_n e_j$ con dominio

$$Dom([J+n]_n) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} ([j+n]_n |\alpha_j|)^2 < \infty\}.$$

Por ejemplo, para cada n fijo: $[J+n]_n e_5 = [5+n]_n e_5 = \dfrac{(5+n)!}{5!} e_5$, $[J+n]_n e_0 = [0+n]_n e_0 = \dfrac{(0+n)!}{0!} e_0$, etc. y por lo tanto tenemos el mapeo lineal

$$\alpha_j \longmapsto \frac{(j+n)!}{j!} \alpha_j$$

siendo α_j la j-ésima entrada del vector $\alpha \in l^2$.

De manera análoga definimos el operador $[J]_n : l^2 \longmapsto l^2$, dado por $[J]_n e_j = [j]_n e_j$ con dominio

$$Dom([J]_n) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} ([j]_n |\alpha_j|)^2 < \infty\}.$$

Se observa que ambos operadores son positivos y por lo tanto simétricos

$$\langle [J+n]_n \alpha, \alpha \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} [j+n]_n |\alpha_j|^2 \geq 0$$

$$\langle [J]_n \alpha, \alpha \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} [j]_n |\alpha_j|^2 \geq 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fija.

Lema 6.1.6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fija, tenemos que $Dom([J+n]_n = Dom([J]_n))$*

Demostración. $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{([J+n]_n |\alpha|)^2}{([J]_n |\alpha|)^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (\dfrac{[J+n]_n}{[J]_n})^2 =$
$\lim\limits_{j\to\infty} ((\frac{j+1}{j-1})(\frac{j+2}{j-2})...(\frac{j+(n-1)}{j-(n-1)}(\frac{j+n}{j}))^2 =$
$(\lim\limits_{j\to\infty} ((1+\frac{2}{j-1})(1+\frac{4}{j-2})...(1+\frac{2(n-1)}{j-(n-1)})(1+\frac{n}{j}))^2 = 1.$

Por lo tanto $\sum_{j=0}^{\infty} ([j]_n |\alpha|)^2$ converge si y sólo si $\sum_{j=0}^{\infty} ([j+n]_n |\alpha|)^2$ converge. Por lo tanto los dominios son iguales.

$\square$

Como estos operadores son positivos, podemos definir $\sqrt{[J+n]_n} : l^2 \longmapsto l^2$, $\alpha_j \longmapsto \sqrt{[j+n]_n} \alpha_j$ y $\sqrt{[J]_n} : l^2 \longmapsto l^2$, $\alpha_j \longmapsto \sqrt{[j]_n} \alpha_j$.

Y al igual que los dos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} Dom(\sqrt{[J+n]_n}) =& \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} [j+n]_n (|\alpha_j|)^2 < \infty\} = Dom(\sqrt{[J]_n}) \\ =& \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} [j]_n (|\alpha_j|)^2 < \infty\} \end{aligned}$$

la prueba es similar a la anterior y se omitirá.

Ahora veremos que los operadores $[J+n]_n$ y $[J]_n$ son autoadjuntos y por lo tanto cerrados. La misma afirmación es válida para los operadores $\sqrt{[J+n]_n}$ y $\sqrt{[J]_n}$.

Lema 6.1.7. *Los operadores* $[J+n]_n$ *y* $[J]_n$ *son autoadjuntos.*

Demostración. Puesto que $[J+n]_n$ y $[J]_n$ son simétricos, entonces $[J+n]_n \subset [J+n]_n^*$ y $[J]_n \subset [J]_n^*$. Sea $u \in Dom([J]_n^*)$, entonces existe un único $v \in l^2$ tal que

$$\langle [J]_n \omega, u\rangle = \langle \omega, v\rangle \qquad \forall \omega \in Dom([J]_n).$$

Sea e_j un elemento de la base canónica. Puesto que $e_j \in Dom([J]_n)$ tenemos que $\langle e_j, v\rangle = \langle [J]_n e_j, u\rangle = [J]_n\langle e_j, u\rangle$.

Ahora, si $u = \sum u_j e_j$ y $v = \sum v_j e_j$ entonces $\langle e_j, v\rangle = \bar{v}_j$ y $\langle e_j, u\rangle = \bar{u}_j$, por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\bar{v}_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_j, v\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} [J]_n^2 |\langle e_j, u\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} [J]_n^2 |\bar{u}_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} [J]_n^2 |u_j|^2$$

pero, como $v \in l^2$ tenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} |\bar{v}_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2 < \infty$, entonces se cumple que $\sum_{j=0}^{\infty} [J]_n^2 |u_j|^2 < \infty$ y $u \in Dom([J]_n)$.

Por lo tanto $Dom([J]_n^*) = Dom([J]_n)$ y $[J]_n = [J]_n^*$. La prueba para $[J+n]_n$ es análoga.

$\square$

Con estos últimos consideraremos potencias de los operadores de creación y aniquilación.

Sea $\{e_j\}_{j=0}$ la base canónica de l^2 y $n \in \mathbb{N}$ fijo, definimos

$A^n : l^2 \longmapsto l^2$ dado por

$$A^n e_j = \begin{cases} \sqrt{[j]_n} \quad e_{j-n} & si \quad j \geq n \\ 0 & si \quad j < n \end{cases}$$

y su adjunto $A^{n*} : l^2 \longmapsto l^2$ dado por $A^{n*} e_j = \sqrt{[j+n]_n} e_{j+n}$.

Por ejemplo si $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$ entonces

$$A^n \alpha = (\sqrt{[n]_n}\alpha_n, \sqrt{[n+1]_n}\alpha_{n+1}, \sqrt{[n+2]_n}\alpha_{n+2}, \sqrt{[n+3]_n}\alpha_{n+3}, ...)$$

$$A^{n*} \alpha = (0, 0, 0, ..., 0, \sqrt{[n]_n}\alpha_0, \sqrt{[n+1]_n}\alpha_1, \sqrt{[n+2]_n}\alpha_2, \sqrt{[n+3]_n}\alpha_3, ...)$$

donde el segundo vector tiene ceros en sus primeras $(n-1)$ entradas.

Puesto que $[j]_n = 0$ para $j < n$ los dominios quedan asi

$$Dom(A^n) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} [j]_n |\alpha_j|^2 < \infty\} = Dom\{[J]_n\}$$

$$Dom(A^{n*}) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} [j+n]_n |\alpha_j|^2 < \infty\} = Dom\{[J+n]_n\}$$

y por lo que se probó anteriormente, $Dom(A^n) = Dom(A^{n*})$

Ahora veremos que el adjunto de A^n es precisamente A^{n*} (y viceversa). Para toda $x, y \in Dom(A^n)$ tenemos

$$\langle A^n x, y\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{[j]_n} x_j \bar{y}_j = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{[j+n]_n} x_j \bar{y}_j = \langle x, A^{n*} y\rangle$$

es decir $A^{n*} \subseteq (A^n)^*$. Para ver que $Dom(A^{n*}) = Dom(A^n)^*$ se sigue el mismo razonamiento que en la prueba anterior, tomamos $u \in Dom(A^n)^*$ y por lo tanto existe un único $v \in l^2$ tal que $\langle A^n w, u\rangle = \langle w, v\rangle$ para toda $w \in Dom(A^n)$. Por lo tanto tenemos

$$\bar{v}_j = \langle e_j, v\rangle = \langle A_n e_j, u\rangle = \langle \sqrt{[j]_n} e_{j-n}, u\rangle = \sqrt{[j]_n} \bar{u}_j.$$

Así obtenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |[j]_n u_j|^2$.

Por lo tanto $u \in Dom([J]_n) = Dom(A^n) = Dom(A^{n*})$. La prueba de que $(A^{n*})^* = A^n$ es similar.

Por último, tenemos las siguientes igualdades.

- $A^{n*} A^n = [J]_n$
- $A^n A^{n*} = [J+n]_n$

Para probar la primera observemos que, si $\alpha \in l^2, \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$ entonces

$$\begin{aligned} A^{n*} A^n \alpha =& A^{n*}(A^n \alpha) \\ =& A^{n*}(\sqrt{[n]_n}\alpha_n, \sqrt{[n+1]_n}\alpha_{n+1}, \sqrt{[n+2]_n}\alpha_{n+2}, \sqrt{[n+3]_n}\alpha_{n+3}, ...) \\ =& (0, 0, ..., 0, [n]_n \alpha_n, [n+1]_n \alpha_{n+1}, [n+2]_n \alpha_{n+2}, [n+3]_n \alpha_{n+3}, ...) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Dom(A^{n*} A^n) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} ([j]_n)^2 |\alpha_j|^2 < \infty\} = Dom([J]_n).$$

Análogamente tenemos que

$$A^n A^{n*} \alpha = ([n]_n \alpha_0, [n+1]_n \alpha_1, [n+2]_n \alpha_2, [n+3]_n \alpha_3, ...)$$

y $Dom(A^n A^{n*}) = Dom([J+n]_n)$.

De lo anterior se deduce que

$$|A^n| = \sqrt{A^{n*} A^n} = \sqrt{[J]_n}$$

y

$$|A^{n*}| = \sqrt{A^n A^{n*}} = \sqrt{[J+n]_n}.$$

Anteriormente vimos que, para una $n \in \mathbb{N}$ fija y $j = 0, 1, 2, 3...$, se tiene que $[j+n]_n > [j]_n$. Usando esta propiedad definimos el operador lineal

$\sqrt{[J+n]_n - [J]_n} : l^2 \longmapsto l^2$, dado por $\sqrt{[J+n]_n - [J]_n} e_j = \sqrt{[j+n]_n - [j]_n} e_j$ con dominio

$$Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}) = \{\alpha \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} ([j+n]_n - [j]_n)|\alpha_j|^2 < \infty\}.$$

Sea $\alpha \in Dom(\sqrt{[J+n]_n})$, puesto que $[j+n]_n - [j]_n \leq [j+n]_n$, entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty} ([j+n]_n - [j]_n)|\alpha_j|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} [j+n]_n |\alpha_j|^2 < \infty.$$

Por lo tanto:

$$\alpha \in Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n})$$

y

$$Dom(\sqrt{[J+n]_n}) \subseteq Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}).$$

Lema 6.1.8. *(i)* $Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}})$.

(ii) $Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}})$.

Demostración. (i) Sea $\xi \in Dom(L_{\sqrt{[J]_n}})$, entonces $Dom(\sqrt{[J]_n}) = l^2$ y $\sqrt{[J]_n}\xi \in L^2$. Ahora consideremos $x \in Dom(\sqrt{[J]_n})$, entonces $\xi x \in Dom(\sqrt{[J]_n}) \subseteq Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n})$ y por lo tanto $x \in Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi)$ es decir, $l^2 \subseteq Dom(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
&Tr((\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi)^*(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi)) \\
=&Tr(\xi^* \sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi) = Tr(\xi^*([J+n]_n - [J]_n)\xi) \\
=&Tr(\xi^*[J+n]_n\xi - \xi^*[J]_n\xi) = Tr(\xi^*\sqrt{[J+n]_n}\sqrt{[J+n]_n}\xi) - Tr(\xi^*\sqrt{[J]_n}\sqrt{[J]_n}\xi) \\
=&Tr((\sqrt{[J+n]_n}\xi)^*(\sqrt{[J+n]_n}\xi)) - Tr((\sqrt{[J]_n}\xi)^*(\sqrt{[J]_n}\xi)) < \infty,
\end{aligned}$$

pues $\xi \in Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n}})$. Por lo tanto, $\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi \in L^2$

(ii) Por el inciso anterior $\Gamma Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq \Gamma Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}})$, donde Γ denota la operación de tomar adjuntos (que en la sección anterior denotamos por J), el resultado se sigue del Lema 6.1.3.

□

Lema 6.1.9. $Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n}})$.

Demostración. Sea $\xi \in Dom(R_{\sqrt{[J]_n}})$ entonces por el Lema 6.1.3 (i) $\xi^* \in Dom(L_{\sqrt{[J]_n}})$ por lo que $Dom(\sqrt{[J]_n}\xi^*) = l^2$. Tomemos $x \in Dom(\sqrt{[J]_n}\xi^*)$, entonces $\xi^* x \in Dom(\sqrt{[J]_n}) = Dom(\sqrt{[J+n]_n})$, lo cual implica que $x \in Dom(\sqrt{[J+n]_n}\xi^*)$, es decir $Dom(\sqrt{[J+n]_n}\xi^*) = l^2$. Ahora observemos que, al ser $\sqrt{[J+n]_n}$ cerrado y ξ^* acotado, $\sqrt{[J+n]_n}\xi^*$ es cerrado y, puesto que su dominio es cerrado, tenemos que $\sqrt{[J+n]_n}\xi^*$ es acotado (y densamente definido). Por lo tanto $(\sqrt{[J+n]_n}\xi^*)^*$ es acotado y su restricción $\xi\sqrt{[J+n]_n}$ también es acotada en su dominio $Dom(\xi\sqrt{[J+n]_n}) = Dom(\sqrt{[J+n]_n})$, el cual es densamente definido (pues contiene a la base canónica).

Por último probaremos que la extensión $[\xi\sqrt{[J+n]_n}] = (\sqrt{[J+n]_n}\xi^*)^*$ está en L^2. Sea (e_j) la base canónica de l^2, entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty} ||(\sqrt{[J+n]_n}\xi^*)^* e_j|| = \sum_{j=0}^{\infty} ||\xi\sqrt{[J+n]_n} e_j|| = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{[j+n]_n}||\xi e_j||.$$

Por otro lado

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\sqrt{[j+n]_n}||\xi e_j||}{\sqrt{[j]_n}||\xi e_j||} = \sqrt{1} = 1$$

y puesto que, por hipótesis

$$\sum_{j=0}^{\infty} ||[\xi\sqrt{[J]_n}]e_j|| = \sum_{j=0}^{\infty} ||\xi\sqrt{[J]_n}e_j|| = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{[j+n]_n}||\xi e_j|| < \infty,$$

concluimos que $\sum_{j=0}^{\infty} ||(\sqrt{[J+n]_n}\xi^*)^* e_j|| < \infty$. Por lo tanto $\xi \in Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n}})$. La otra contención se prueba de manera análoga.

□

Como una consecuencia inmediata del lema anterior y del Lema 6.1.3 (i) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.1.10. $Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n}}) = Dom(L_{\sqrt{[J]_n}})$.

Demostración. Denotando mediante Γ a la operación de tomar adjuntos (que en la sección anterior denotamos por J), tenemos que

$$Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) = \Gamma Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) = \Gamma Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n}}) = Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n}})$$

.

□

Por último tenemos

$$Dom(L_{A^n}) = Dom(L_{A^{n*}}) = Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n}})$$

$$Dom(R_{A^n}) = Dom(R_{A^{n*}}) = Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n}})$$

Para probar la primera serie de igualdades simplemente observemos que, por el Lema 6.1.3 (ii), tenemos

$$\begin{aligned} Dom(L_{A^n}) =& Dom(L_{|A^n|}) = Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \\ Dom(L_{A^{n*}}) =& Dom(L_{|A^{n*}|}) = Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n}}) \end{aligned}$$

y el resultado se obtiene por el corolario anterior. Para la segunda usamos 6.1.3 (i).

$$Dom(R_{A^n}) = \Gamma Dom(L_{A^{n*}}) = \Gamma Dom(L_{|A^{n*}|}) = Dom(R_{|A^{n*}|}) = Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n}})$$

y

$$Dom(R_{A^{n*}}) = \Gamma Dom(L_{A^n}) = \Gamma Dom(L_{|A^n|}) = Dom(R_{|A^n|}) = Dom(R_{\sqrt{[J]_n}})$$

y el resultado se obtiene por el lema anterior.

6.1.3. La forma de Dirichlet del proceso de absorción y emisión de n fotones

Se construirá una forma de Dirichlet sobre $L^2 = L^2(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores Hilbert-Schmidt actuando sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$. Sea $[e] \equiv \{e_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ la base canónica de $\mathcal{H}$, y sea $C_{00}[e] \equiv \text{span}\{|e_n\rangle\langle e_m|\}$. Abreviaremos $C_{00}[e]$ como C_{00}. Por último para $\mu > \lambda > 0$ y $\nu = \frac{\lambda^{2/n}}{\mu^{2/n}}$, consideremos $\xi_\nu = \frac{(1-\nu)}{(1-\nu^n)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j\geq 0} \nu^{j/2} |e_j\rangle\langle e_j| \in L^2$.

Proposición 6.1.11. *Sea $\xi \in D \equiv Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}})$, las siguientes expresiones son finitas y coinciden*

(a) $\frac{1}{2}\{||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi||^2 + ||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi^*||^2\}$;

(b) $\frac{1}{2}\{||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi||^2 + ||(\mu R_{A^{n*}} - \lambda L_{A^{n*}})\xi||^2\}$;

(c)

$$\begin{aligned} &\lambda\mu||d_{A^n}\xi||^2 + \frac{1}{2}(\lambda-\mu)^2\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2\} \\ &+ \frac{1}{2}\lambda\{(\lambda - 2\mu)\|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2 + \lambda\|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2\}; \end{aligned}$$

(d)

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}|\mu\sqrt{[j+n]_n}x_{j+n,k+n}-\lambda\sqrt{[k+n]_n}x_{j,k}|^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}|\mu\sqrt{[k+n]_n}x_{j+n,k+n}-\lambda\sqrt{[j+n]_n}x_{j,k}|^2$$
$$+\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n(|x_{j+n,k}|^2+|x_{k,j+n}|^2).$$

Demostración. Para probar que son finitas, observemos que, por el Lema 6.1.3 (i), si $\xi \in Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(L_{A^n})$ entonces $\xi^* \in Dom(R_{A^{n*}}) = Dom(R_{A^n})$ y si $\xi \in Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) = Dom(R_{A^{n*}})$, entonces $\xi \in \Gamma Dom(L_{A^n})$ y por lo tanto, $\xi^* \in Dom(L_A)$. De esta forma tenemos que $L_{A^n}\xi - R_{A^n}\xi$, $\mu L_{A^n}\xi - \lambda R_{A^n}\xi$, $\mu L_{A^n}\xi^* - \lambda R_{A^n}\xi^*$ y $\mu L_{A^{n*}}\xi - \lambda R_{A^{n*}}\xi$ pertenecen a L^2, de aqui se sigue que cada sumando desde (a) hasta (c) es finito.

Ahora se probará que (a) y (b) coinciden. Por el Lema 6.1.3 tenemos

$$\begin{aligned}||\mu R_{A^{n*}}\xi - \lambda L_{A^{n*}}\xi||^2 =&||\mu J L_{A^n} J\xi - \lambda J R_{A^n} J\xi||^2 = ||\mu J L_{A^n}\xi^* - \lambda J R_{A^n}\xi^*||^2\\ =&||J(\mu L_{A^n}\xi^* - \lambda R_{A^n}\xi^*)||^2 = ||\mu L_{A^n}\xi^* - \lambda R_{A^n}\xi^*||^2\\ =&||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi^*||^2\end{aligned}$$

puesto que $||JA|| = ||A||$ para toda $A \in L^2$.

□

Las identidades restantes se demostrarán en los siguientes lemas.

Lema 6.1.12. (b) *y* (c) *coinciden.*

Demostración.

$$\begin{aligned}||L_{A^{n*}}||^2 =&Tr((A^{n*}\xi)^*A^{n*}\xi) = Tr(\xi^*A^nA^{n*}\xi) = Tr(\xi^*[J+n]_n\xi)\\ =&Tr(\xi^*[J]_n\xi + \xi^*[J+n]_n\xi - \xi^*[J]_n\xi)\\ =&Tr(\xi^*[J]_n\xi) + Tr(\xi^*[J+n]_n\xi - \xi^*[J]_n\xi)\\ =&Tr(\xi^*[J]_n\xi) + Tr(\xi^*([J+n]_n - [J]_n)\xi)\\ =&Tr(\xi^*\sqrt{[J]_n}\sqrt{[J]_n}\xi) + Tr(\xi^*\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\xi)\\ =&Tr((\sqrt{[J]_n}\xi)^*\sqrt{[J]_n}\xi) + Tr((\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\xi)^*\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\xi)\\ =&||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2||R_{A^{n*}}||^2\\ =&Tr((\xi A^{n*})^*\xi A^{n*}) = Tr(A^n\xi^*\xi A^{n*}) = Tr(\xi A^{n*}A^n\xi^*) = Tr(\xi[J]_n\xi^*)\\ =&Tr(\xi\sqrt{[J]_n}\sqrt{[J]_n}\xi^*) = Tr(\sqrt{[J]_n}\xi^*\xi\sqrt{[J]_n})\\ =&Tr((\xi\sqrt{[J]_n})^*\xi\sqrt{[J]_n}) = ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2||L_{A^n}\xi||^2 = Tr((A^n\xi)^*A^n\xi)\\ =&Tr(\xi^*A^{n*}A^n\xi) = Tr(\xi^*[J]_n\xi) = Tr(\xi^*\sqrt{[J]_n}\sqrt{[J]_n}\xi)\\ =&Tr((\sqrt{[J]_n}\xi)^*(\sqrt{[J]_n}\xi)) = ||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
||R_{A^n}\xi||^2 =& Tr((\xi A^n)^*\xi A^n) = Tr(A^{n*}\xi^*\xi A^n)\\
=& Tr(\xi A^n A^{n*}\xi^*) = Tr(\xi[J+n]_n\xi^*)\\
=& Tr(\xi[J+n]_n\xi^* - \xi[J]_n\xi^* + \xi[J]_n\xi^*)\\
=& Tr(\xi([J+n]_n - [J]_n)\xi^*) + Tr(\xi\sqrt{[J]_n}\sqrt{[J]_n}\xi^*)\\
=& Tr(\xi\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi^*) + Tr(\sqrt{[J]_n}\xi^*\xi\sqrt{[J]_n})\\
=& Tr(\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}\xi^*\xi\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}) + Tr((\xi\sqrt{[J]_n})^*\xi\sqrt{[J]_n})\\
=& Tr((\xi\sqrt{[J+n]_n - [J]_n})^*\xi\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}) + Tr((\xi\sqrt{[J]_n})^*\xi\sqrt{[J]_n})\\
=& ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2\\
=& Tr((\xi A^{n*})^*A^{n*}\xi) = Tr(A^n\xi^*A^{n*}\xi)\\
=& Tr(\xi^*A^{n*}\xi A^n) = Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) \qquad (i)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$Tr((A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*}) = Tr(\xi^*A^n\xi A^{n*}) = Tr(A^{n*}\xi^*A^n\xi) = Tr((\xi A^*)^*A^n\xi) \quad (ii) \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
&||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi||^2\\
&= Tr((\mu A^n\xi - \lambda\xi A^n)^*(\mu A^n\xi - \lambda\xi A^n)\\
&= Tr([\mu(A^n\xi)^* - \lambda(\xi A^n)^*](\mu A^n\xi - \lambda\xi A^n))\\
&= Tr(\mu^2(A^n\xi)^*A^n\xi - \lambda\mu(\xi A^n)^*A^n\xi - \lambda\mu(A^n\xi)^*\xi A^n + \lambda^2(\xi A^n)^*\xi A^n)\\
&= \mu^2Tr((A^n\xi)^*A^n\xi) - \lambda\mu Tr((\xi A^n)^*A^n\xi) - \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) + \lambda^2Tr((\xi A^n)^*\xi A^n)\\
&= \mu^2||L_{A^n}\xi||^2 - \lambda\mu Tr((\xi A^n)^*A^n\xi) - \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) + \lambda^2||R_{A^n}\xi||^2\\
&= \mu^2||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 - \lambda\mu Tr((\xi A^n)^*A^n\xi) - \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n)\\
&+ \lambda^2||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + \lambda^2||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 \qquad (1)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
&||(\mu R_{A^{n*}} - \lambda L_{A^{n*}})\xi||^2\\
&= Tr((\mu\xi A^{n*} - \lambda A^{n*}\xi)^*(\mu\xi A^{n*} - \lambda A^{n*}\xi))\\
&= Tr([\mu(\xi A^{n*})^* - \lambda(A^{n*}\xi)^*](\mu\xi A^{n*} - \lambda A^{n*}\xi))\\
&= Tr(\mu^2(\xi A^{n*})^*\xi A^{n*} - \lambda\mu(\xi A^{n*})^*A^{n*}\xi - \lambda\mu(A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*} + \lambda^2(A^{n*}\xi)^*A^{n*}\xi)\\
&= \mu^2Tr((\xi A^{n*})^*\xi A^{n*}) - \lambda\mu Tr((\xi A^{n*})^*A^{n*}\xi) - \lambda\mu Tr((A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*}) + \lambda^2Tr((A^{n*}\xi)^*A^{n*}\xi)\\
&= \mu^2||R_{A^{n*}}\xi||^2 - \lambda\mu Tr((\xi A^{n*})^*A^{n*}\xi) - \lambda\mu Tr((A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*}) + \lambda^2||L_{A^{n*}}\xi||^2\\
&= \mu^2||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 - \lambda\mu Tr((\xi A^{n*})^*A^{n*}\xi) - \lambda\mu Tr((A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*})\\
&+ \lambda^2||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + \lambda^2||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 \qquad (2)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Sumando los lados derechos de (6.6) y (6.7) obtenemos

$$\frac{1}{2}\mu^2(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2) + \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)$$
$$- \frac{1}{2}\lambda\mu Tr((\xi A^n)^* A^n\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) - \frac{1}{2}\lambda\mu Tr((\xi A^{n*})^* A^{n*}\xi)$$
$$- \frac{1}{2}\lambda\mu Tr((A^{n*}\xi)^*\xi A^{n*}) + \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2).$$

Pero por (6.4) y (6.5) la expresión anterior se convierte en

$$\frac{1}{2}\mu^2(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2) + \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)$$
$$- \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) - \lambda\mu Tr(\xi(A^n)^* A^n\xi)$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)$$

Ahora, si a esta expresión le sumamos y restamos $\lambda\mu(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2+||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)$, obtenemos

$$\frac{1}{2}(\mu^2 - 2\lambda\mu + \lambda^2)\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)\}$$
$$- \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) - \lambda\mu Tr(\xi(A^n)^* A^n\xi)$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)$$
$$+ \lambda\mu(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2).$$

Pero

$$\begin{aligned}\lambda\mu(||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2) =&\lambda\mu(||L_{A^n}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{A^n}}\xi||^2 - ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)\\ =&\lambda\mu Tr((A^n\xi)^* A^n\xi) + \lambda\mu Tr((\xi A^n)^*\xi A^n)\\ &- \lambda\mu||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}(\mu - \lambda)^2\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)\} + \lambda\mu Tr((A^n\xi)^* A^n\xi)$$
$$- \lambda\mu Tr((A^n\xi)^*\xi A^n) - \lambda\mu Tr(\xi(A^n)^* A^n\xi)$$
$$+ \lambda\mu Tr((\xi A^n)^*\xi A^n) + \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)$$
$$- \lambda\mu||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2$$

y por la linealidad de la traza

$$\frac{1}{2}(\mu - \lambda)^2\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)\}$$
$$+ \lambda\mu Tr((A^n\xi)^* A^n\xi - (A^n\xi)^*\xi A^n - (\xi A^n)^* A^n\xi + (\xi A^n)^*\xi A^n)$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 + ||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2) - \lambda\mu||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2.$$

Factorizando dentro de la traza queda

$$\frac{1}{2}(\mu-\lambda)^2\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2+||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)\}$$
$$+\lambda\mu Tr((A^n\xi-[\xi A^n])^*(A^n\xi-[\xi A^n]))$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2+||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)-\lambda\mu||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2$$

Por lo tanto obtenemos

$$||\delta_{A^n}||^2+\frac{1}{2}(\mu-\lambda)^2\{||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2+||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2)\}$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2(||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2+||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2)-\lambda\mu||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2$$

con lo cual se concluye la demostración de la igualdad entre (b) y (c).

Lema 6.1.13. *(c) y (d) coinciden, consecuentemente (d) es finito.*

Demostración. Sea $(e_j)_{j\geq 0}$ la base canónica de l^2. Consideremos $\xi\in L^2$, $\xi=\sum_{j,k\geq 0}x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k|$, $\quad x_{j,k}\in\mathbb{C}$ y $\sum_{j,k}|x_{j,k}|^2<\infty$. Sustituyendo en (c) se obtiene

$$\begin{aligned}||\delta_{A^n}\xi||^2&=||\sum_{j,k\geq 0}x_{j,k}|A^ne_j\rangle\langle e_k|-\sum_{j,k\geq 0}x_{j,k}|e_j\rangle\langle (A^n)^*e_k| \quad ||^2\\ &=||\sum_{j\geq n,k\geq 0}x_{j,k}\sqrt{[j]_n}|e_{j-n}\rangle\langle e_k|-\sum_{j,k\geq 0}x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|e_j\rangle\langle e_{k+n}| \quad ||^2\end{aligned}$$

ajustando los índices tenemos que la última expresión es igual a

$$\begin{aligned}&||\sum_{j,k\geq 0}x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_k|-\sum_{j\geq 0,k\geq n}x_{j,k-n}\sqrt{[k]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2\\ &=||\sum_{j\geq 0,k\geq n}x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_k|+\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_k|\\ &-\sum_{j\geq 0,k\geq n}x_{j,k-n}\sqrt{[k]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2\\ &=||\sum_{j\geq 0,k\geq n}(x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}-x_{j,k-n}\sqrt{[k]_n})|e_j\rangle\langle e_k|\\ &+\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2\end{aligned}\tag{6.8}$$

Ahora observemos lo siguiente: para $r=0,1,2,...n-1$ y $k\geq n$ tenemos que

$$Tr(|e_k\rangle\langle e_r|)=\sum_{i=0}^{\infty}\langle e_i,|e_k\rangle\langle e_r|e_i\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}\langle e_i,\langle e_k,e_i\rangle e_r\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}\langle e_k,e_i\rangle\langle e_i,e_r\rangle$$

por otro lado, $\langle e_k, e_i\rangle$ y $\langle e_i, e_r\rangle$ son diferentes de cero simultáneamente si y sólo si $k = i = r$. Pero esto es imposible, pues $k > r$, de aquí se sigue que $Tr(|e_k\rangle\langle e_r|) = \sum_{i=0}^{\infty}\langle e_k, e_i\rangle\langle e_i, e_r\rangle = 0$. Por lo tanto

$$\langle |e_j\rangle\langle e_k|, |e_j\rangle\langle e_r|\rangle_2 = Tr(|e_k\rangle\langle e_j||e_j\rangle\langle e_r|) = Tr(|e_k\rangle\langle e_r|) = 0;$$

es decir, los vectores $|e_j\rangle\langle e_k|$ y $|e_j\rangle\langle e_r|$ son mutuamente ortogonales. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras, la última expresión en (6.8) se convierte en

$$\begin{aligned}&|| \sum_{j\geq 0, k\geq n} (x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n} - x_{j,k-n}\sqrt{[k]_n})|e_j\rangle\langle e_k|\,||^2 \\ &+ ||\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1} x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_k|\,||^2\end{aligned}$$

Y por la definición de norma en L^2 esta última es $\sum_{j\geq 0,k\geq n}|x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n} - x_{j,k-n}\sqrt{[k]_n}|^2 + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}|x_{j+n,k}\sqrt{[j+n]_n}|^2$.

Por lo tanto, ajustando los índices

$$||\delta_{A^n}\xi||^2 = \sum_{j\geq 0,k\geq 0}|x_{j+n,k+n}\sqrt{[j+n]_n} - x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|^2 + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2$$

También tenemos las siguientes identidades, (recordar que $[j]_n = 0$ si $j < n$)

$$\begin{aligned}||L_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 &= ||\sqrt{[J]_n}\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\ &= ||\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|\sqrt{[J]_n}e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 = ||\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}\sqrt{[j]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\ &= \sum_{j,k\geq 0}|x_{j,k}\sqrt{[j]_n}|^2 = \sum_{j,k\geq 0}[j]_n|x_{j,k}|^2 \\ &= \sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||R_{\sqrt{[J]_n}}\xi||^2 &= ||\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k|\sqrt{[J]_n} \quad ||^2 \\ &= ||\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k(\sqrt{[J]_n})^*| \quad ||^2 = ||\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}\sqrt{[k]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\ &= \sum_{j,k\geq 0}|x_{j,k}\sqrt{[k]_n}|^2 = \sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2 \\ &= \sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 + \sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}[k+n]_n|x_{j,k+n}|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 &= ||\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\
&=|| \sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\
&= || \sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}\sqrt{[j+n]_n-[j]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\
&= \sum_{j,k\geq 0} |x_{j,k}\sqrt{[j+n]_n-[j]_n}|^2 = \sum_{j,k\geq 0}([j+n]_n-[j]_n)|x_{j,k}|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi||^2 &= || \sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k|\sqrt{[J+n]_n-[J]_n} \quad ||^2 \\
&= || \sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}|e_j\rangle\langle e_k(\sqrt{[J+n]_n-[J]_n})^*| \quad ||^2 \\
&= || \sum_{j,k\geq 0} x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n-[k]_n}|e_j\rangle\langle e_k| \quad ||^2 \\
&= \sum_{j,k\geq 0} |x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n-[k]_n}|^2 = \sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n-[k]_n)|x_{j,k}|^2.
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos estas igualdades en (c). Nótese que en algunos casos no se usa la última igualdad de la cadena, sino una anterior. Después de sustituir, (c) toma la forma

$$\begin{aligned}
&\lambda\mu(\sum_{j\geq 0,k\geq 0}|x_{j+n,k+n}\sqrt{[j+n]_n}-x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|^2+\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2) \\
&+\frac{1}{2}\lambda^2(\sum_{j,k\geq 0}[j]_n|x_{j,k}|^2+\sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2) \\
&-\lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2+\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2+\sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+\frac{1}{2}\mu^2(\sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2+\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2 \\
&+\sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2+\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}[k+n]_n|x_{j,k+n}|^2) \\
&-\lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n-[k]_n)|x_{j,k}|^2) \\
&+\frac{1}{2}\lambda^2(\sum_{j,k\geq 0}([j+n]_n-[j]_n)|x_{j,k}|^2+\sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n-[k]_n)|x_{j,k}|^2)
\end{aligned}$$

distribuyendo los parámetros $\lambda, \mu, \lambda\mu$ obtenemos

$$\lambda\mu\Big(\sum_{j\geq 0,k\geq 0}|x_{j+n,k+n}\sqrt{[j+n]_n}-x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|^2\Big)+\lambda\mu\Big(\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}[j]_n|x_{j,k}|^2+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2)$$
$$-\lambda\mu\sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2-\lambda\mu\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2-\lambda\mu\sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2$$
$$\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2+\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2$$
$$+\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2+\frac{1}{2}\mu^2\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}[k+n]_n|x_{j,k+n}|^2$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}([j+n]_n-[j]_n)|x_{j,k}|^2+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n-[k]_n)|x_{j,k}|^2)$$
$$-\lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n-[k]_n)|x_{j,k}|^2)$$

El tercero y el séptimo sumando se cancelan. En el sumando once intercambiamos los índices j y k y obtenemos

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}[k+n]_n|x_{j,k+n}|^2)=\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{k,j+n}|^2)$$

y así podemos juntar los sumandos diez y once para obtener

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mu^2(\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n|x_{j+n,k}|^2+\sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}[k+n]_n|x_{j,k+n}|^2)\\&=\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n(|x_{j+n,k}|^2+|x_{k,j+n}|^2)\end{aligned}$$

Asociamos los sumandos 3 y 12

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}[j]_n|x_{j,k}|^2+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}([j+n]_n-[j]_n)|x_{j,k}|^2\\&=\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}([j]_n+[j+n]_n-[j]_n)|x_{j,k}|^2=\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j,k}|^2\end{aligned}\tag{6.9}$$

y 4 con 13 para obtener

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n - [k]_n)|x_{j,k}|^2) \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j,k}|^2).
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

También podemos asociar los sumandos 7 y 14 para obtener

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\mu \sum_{j,k\geq 0}[k]_n|x_{j,k}|^2 - \lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}([k+n]_n - [k]_n)|x_{j,k}|^2) \\
&= \lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}(-[k]_n - [k+n]_n + [k]_n)|x_{j,k}|^2) = -\lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j,k}|^2).
\end{aligned}
$$

Así obtenemos,

$$
\begin{aligned}
&\lambda\mu(\sum_{j\geq 0,k\geq 0}|x_{j+n,k+n}\sqrt{[j+n]_n} - x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|^2) \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j,k}|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 \\
&- \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0}[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 - \lambda\mu(\sum_{j,k\geq 0}[k+n]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n(|x_{j+n,k}|^2 + |x_{k,j+n}|^2).
\end{aligned}
$$

Ahora asociamos 2 con 5 , 3 con 4 y 6 con 7 para obtener,

$$
\begin{aligned}
&\lambda\mu(\sum_{j\geq 0,k\geq 0}|x_{j+n,k+n}\sqrt{[j+n]_n} - x_{j,k}\sqrt{[k+n]_n}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}(\mu^2[k+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2[j+n]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}(\mu^2[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2[k+n]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+ \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0}(-[j+n]_n|x_{j+n,k+n}|^2 - [k+n]_n|x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n(|x_{j+n,k}|^2 + |x_{k,j+n}|^2).
\end{aligned}
$$

Observemos el primer sumando de esta última expresión. Puesto que, para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2Re(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Si para cualquier $j, k \geq 0$ hacemos $z_j = \sqrt{[j+n]_n} x_{j+n,k+n}$ y $w_k = \sqrt{[k+n]_n} x_{j,k}$, entonces

$$|\sqrt{[j+n]_n} x_{j+n,k+n} - \sqrt{[k+n]_n} x_{j,k}|^2 = [j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - 2Re(z_j \bar{w_k}) + [k+n]_n |x_{j,k}|^2.$$

Por lo tanto, asociando el primer sumando con el sexto

$$\begin{aligned}
&\lambda\mu \sum_{j,k\geq 0} ([j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - 2Re(z_j \bar{w_k}) + [k+n]_n |x_{j,k}|^2) \\
&+ \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0} (-[j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - [k+n]_n |x_{j,k}|^2) \\
&= \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0} ([j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - 2Re(z_j \bar{w_k}) + [k+n]_n |x_{j,k}|^2 \\
&- [j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - [k+n]_n |x_{j,k}|^2) = \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0} (-2Re(z_j \bar{w_k})) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (-2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k} - 2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k}).
\end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente resultado,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [k+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2 [j+n]_n |x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2 [k+n]_n |x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} -2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k} + \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} -2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k}) \\
&+ \lambda\mu \sum_{j,k\geq 0} (-[j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - [k+n]_n |x_{j,k}|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j\geq 0} \sum_{k=0}^{n-1} [j+n]_n (|x_{j+n,k}|^2 + |x_{k,j+n}|^2).
\end{aligned}$$

Por último, al asociar 1 con 3

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [k+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2 [j+n]_n |x_{j,k}|^2) + \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} -2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [k+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - 2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k} + \lambda^2 [j+n]_n |x_{j,k}|^2)
\end{aligned}$$

y 2 con 4

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 + \lambda^2 [k+n]_n |x_{j,k}|^2) + \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} -2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k\geq 0} (\mu^2 [j+n]_n |x_{j+n,k+n}|^2 - 2\lambda\mu Re(z_j \bar{w_k} + \lambda^2 [k+n]_n |x_{j,k}|^2)
\end{aligned}$$

obtenemos (usando que $2\lambda\mu Re(z_j\bar{w_k}) = \mu z_j\lambda\bar{w_k} + \lambda\bar{w_k}\mu z_j$),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}|\mu\sqrt{[j+n]_n}x_{j+n,k+n} - \lambda\sqrt{[k+n]_n}x_{j,k}|^2 \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j,k\geq 0}|\mu\sqrt{[k+n]_n}x_{j+n,k+n} - \lambda\sqrt{[j+n]_n}x_{j,k}|^2 \\
&+\frac{1}{2}\mu^2\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{n-1}[j+n]_n(|x_{j+n,k}|^2 + |x_{k,j+n}|^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto (c) y (d) coinciden y, consecuentemente, (d) es finito.

□

Teorema 6.1.14. *Sea $D \equiv Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}})$ y sea $\mathcal{E} : D \to \mathbb{R}^+$ el mapeo definido por cualquiera de las expresiones (a)-(d) del teorema anterior. Entonces $\mathcal{E}$ es una forma de Dirichlet con respecto a ξ_ν. Además C_{00} es una esencia (o dominio esencial) de D.*

Demostración. Usando la caracterización 6.1.11 (a) vemos que:

$$||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi||^2 \geq 0y||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi^*||^2 \geq 0$$

por lo que $\mathcal{E}$ es una forma cuadrática no negativa.

Ahora probaremos que $\mathcal{E}$ es J- real. Sea $\xi \in D$. Como $\xi \in L^2$ es acotado, $(\xi^*)^* = \xi$ y por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{E}[\xi^*] = \frac{1}{2}\{||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi^*||^2 + ||(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})(\xi^*)^*||^2\} = \mathcal{E}[\xi],$$

es decir, $\mathcal{E}[J\xi] = \mathcal{E}[\xi]$. Por otro lado, para probar que el dominio es J- invariante usaremos la última parte del Lema 6.1.4. Puesto que $\sqrt{[J]_n} = (\sqrt{[J]_n})^*$, tenemos $Dom(L_{|\sqrt{[J]_n}|}) = Dom(L_{|(\sqrt{[J]_n})^*|})$ y por lo tanto, por dicho lema,

$$J(Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}})) \subseteq Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}).$$

Ahora se demostrará que $\mathcal{E}$ es cerrada. Por el Lema 6.1.3 tenemos que $\|L_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2$, $\|R_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2$, $\|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2$ y $\|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2\}$ son formas cuadráticas cerradas. Por lo tanto las sumas $\|L_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2 + \|R_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2$ y $\|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2 + \|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2\}$ tambén son formas cuadráticas cerradas. Por el Lema 6.1.4, $\|d_{A^n}\xi\|$ es una forma cuadrática cerrada, por lo que, usando la caracterización 6.1.11 (c), $\mathcal{E}$ es una forma cuadrática cerrada, al ser la suma de formas cuadráticas cerradas.

Para establecer que C_{00} es una esencia primero recordemos que, $C_{00} \subseteq D$, según se demostró en el inciso (ii) del Lema 6.1.3; ahora consideremos la siguiente desigualdad:

$$\|d_{A^n}\xi\|^2 = \|L_{A^n}\xi - R_{A^n}\xi\|^2 \leq 2(\|L_{A^n}\xi\|^2 + \|R_{A^n}\xi\|^2).$$

Usando (c) y lo anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\xi] \leq \frac{1}{2}(\lambda+\mu)^2\{\|L_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2 + \|R_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2\} \\ + \frac{1}{2}\lambda[(\lambda-2\mu)\|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2 + \lambda\|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2].\end{aligned} \tag{6.11}$$

Por otro lado, por lo que se estableció antes

$$Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}})$$

y

$$Dom(L_{\sqrt{[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(R_{\sqrt{[J]_n}}) \subseteq Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}).$$

Por lo tanto, $D \subseteq Dom(L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}) \cap Dom(R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}})$. Ahora tomemos $p_k = \sum_{m=0}^{k}|e_m\rangle\langle e_m|$ y $\xi \in D$, entonces $p_k\xi p_k \in C_{00} \cap D$ y tenemos que

- $p_k\xi p_k \longrightarrow \xi$
- $\sqrt{[J]_n}p_k\xi p_k \longrightarrow \sqrt{[J]_n}\xi$
- $[p_k\xi p_k\sqrt{[J]_n}] \longrightarrow [\xi\sqrt{[J]_n}]$
- $\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}p_k\xi p_k \longrightarrow \sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\xi$
- $\left[p_k\xi p_k\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\right] \longrightarrow \left[\xi\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}\right]$

Por lo tanto C_{00} es una esencia para la forma en el lado derecho de (6.11) y por la desigualdad (6.11) también lo es para $\mathcal{E}$.

Para probar que se satisface la hipótesis (i) del Teorema 5.4.7, consideremos el operador autoadjunto (estado), $\xi_\nu = \frac{(1-\nu)}{(1-\nu^n)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j\geq 0}\nu^{j/2}|e_j\rangle\langle e_j|$ con

$\nu = \dfrac{\lambda^{2/n}}{\mu^{2/n}} < 1$. Claramente $\xi_\nu \in D$. Para una n fija:

$$\begin{aligned}
L_{A^n}\xi_\nu = A^n\xi_\nu =&(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq 0}\nu^{j/2}|A^n e_j\rangle\langle e_j| \\
=&(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq n}\nu^{j/2}|\sqrt{[j]_n}e_{j-n}\rangle\langle e_j| \\
=&(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq n}\nu^{j/2}\sqrt{[j]_n}|e_{j-n}\rangle\langle e_j| \\
=&(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq 0}\nu^{j+n/2}\sqrt{[j+n]_n}|e_j\rangle\langle e_{j+n}| \\
=&\nu^{n/2}(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq 0}\nu^{j/2}|e_j\rangle\langle\sqrt{[j+n]_n}e_{j+n}| \\
=&\nu^{n/2}(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq 0}\nu^{j/2}|e_j\rangle\langle A^{n*}e_j| \\
=&\nu^{n/2}(1-\nu)^{1/2}\sum_{j\geq 0}\nu^{j/2}|e_j\rangle\langle e_j|A^n \\
=&\nu^{n/2}\xi_\nu A^n = \nu^{n/2}R_{A^n}\xi_\nu = \frac{\lambda}{\mu}R_{A^n}\xi_\nu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu L_{A^n}\xi_\nu = \lambda R_{A^n}\xi_\nu$, y puesto que $\xi_\nu = \xi_\nu^*$, usando la caracterización 6.1.11 (a) obtenemos:

$$\mathcal{E}[\xi_\nu] = \|(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi_\nu\|^2 + \|(\mu L_{A^n} - \lambda R_{A^n})\xi_\nu^*\|^2 = 0.$$

De ésto último obtenemos que, para cualquier $\xi \in D(\mathcal{E}) \cap \mathcal{H}$ se tiene

$$|\mathcal{E}(\xi_\nu, \xi)| \leq (\mathcal{E}[\xi_\nu]\mathcal{E}[\xi])^{1/2} = 0$$

y por lo tanto $\mathcal{E}(\xi_\nu, \xi) = 0$.

Para probar que se cumple la condición (ii) primero necesitamos demostrar que, si $\xi \in D$ entonces $\xi_+, \xi_- \in D$. Para ello observemos que, por el Lema 6.1.5, $D^J = D \cap L^2_{\mathbb{R}}$ es invariante bajo el mapeo $\xi \to |\xi|$, es decir, si $\xi \in D$ entonces $|\xi| \in D^J$. Por otro lado, al ser ξ autoadjunto y compacto, por el teorema espectral tenemos que $\xi = \xi_+ - \xi_-$ y $|\xi| = \xi_+ + \xi_-$, por lo que $\xi_+ = \frac{1}{2}(|\xi| + \xi)$ y $\xi_- = \frac{1}{2}(|\xi| - \xi)$. Por lo tanto, al ser D subespacio, $\frac{1}{2}(|\xi| + \xi), \frac{1}{2}(|\xi| - \xi) \in D$. Ahora, para $\xi \in D$, por el Lema 6.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|R_{\sqrt{[J]_n}}|\xi|\|^2 &= Tr([(\sqrt{[J]_n})^*|\xi|^*|\xi|(\sqrt{[J]_n})]) \\
&= Tr([(\sqrt{[J]_n})^*|\xi|^2(\sqrt{[J]_n})]) \\
&= Tr([(\sqrt{[J]_n})^*\xi^*\xi(\sqrt{[J]_n})]) \\
&= Tr([(\sqrt{[J]_n})^*\xi^*\xi(\sqrt{[J]_n})]) \\
&= \|R_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

De manera análoga para $L_{\sqrt{[J]_n}}$,

$$\begin{aligned}
\|L_{\sqrt{[J]_n}}|\xi|\|^2 &= Tr([\sqrt{[J]_n}|\xi||\xi|^*(\sqrt{[J]_n})^*]) \\
&= Tr([\sqrt{[J]_n}|\xi|^2(\sqrt{[J]_n})^*]) \\
&= Tr([\sqrt{[J]_n}\xi^*\xi(\sqrt{[J]_n})^*]) \\
&= Tr([\sqrt{[J]_n}\xi\xi^*(\sqrt{[J]_n})^*]) \\
&= \|L_{\sqrt{[J]_n}}\xi\|^2.
\end{aligned}$$

El cambio en la cuarta igualdad se debe a que ξ es autoadjunto. Obsérvese que este mismo argumento se puede usar cambiando $\sqrt{[J]_n}$ por $\sqrt{[J+n]_n - [J]_n}$; por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}|\xi|\|^2 &= \|L_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2; \\
\|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}|\xi|\|^2 &= \|R_{\sqrt{[J+n]_n-[J]_n}}\xi\|^2.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Por último se demostrará que $\|d_{A^n}|\xi|\|^2 \leq \|d_{A^n}\xi\|^2$, pero antes es necesario probar que $[A^{n*}\xi_- A^n], [A^n\xi_- A^{n*}] \in L^2_+$ y $A^n\xi_- - \xi_- A^n \in Dom(R_{A^{n*}})$. Para ello, consideremos, $\xi \in C_{00} \cap L^2_{\mathbb{R}} \subset D \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Por el Lema 6.1.5 $\xi_+, \xi_- \in Dom(\delta_{A^n}) \subset Dom(d_{A^n})$ donde

$$\xi = \xi_+ - \xi_- = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j |e_j\rangle\langle e_j| - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |e_j\rangle\langle e_j|$$

donde el primer sumando corresponde a $\alpha_j > 0$ y el segundo a $\alpha_j < 0$. Con esta última caracterización se probará lo siguiente:

Para $[A^{n*}\xi_- A^n] \in L^2$ observemos que

$$A^{n*}\xi_- A^n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |A^{n*}e_j\rangle\langle A^{n*}e_j| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|$$

es acotado y su dominio es todo $\mathcal{H}$. Por lo tanto, para $m \in \mathbb{N}$

$$\|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|e_m\| = \|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n \langle e_{j+n}, e_m\rangle e_{j+n}\|.$$

Si $e_m = e_{j+1}$ entonces

$$\|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|e_m\| = \|\alpha_j [j+n]_n e_{j+n}\| = \alpha_j [j+n]_n$$

y en otro caso

$$\|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|e_m\| = 0.$$

De esto se sigue que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|[A^{n*}\xi_- A^n]e_m\| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n < \infty.$$

Por otro lado, sea $u \in \mathcal{H}$, entonces,
$\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|u, u\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n \langle |e_{j+n}\rangle\langle e_{j+n}|u, u\rangle =$

$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n \langle\langle e_{j+n}, u\rangle e_{j+n}, u\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n \langle e_{j+n}, u\rangle\langle e_{j+n}, u\rangle \geq 0.$

La prueba para $A^n\xi_- A^{n*}$ es similar. Ahora, para probar que $A^n\xi_- - \xi_- A^n \in Dom(R_{A^{n*}})$ primero observemos que

$$A^{n*}A^n\xi_- = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |A^{n*}A^n e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j]_n |e_j\rangle\langle e_j|$$

y claramente $Dom(A^{n*}A^n\xi_-) = h$, $A^{n*}A^n\xi_- \in L^2$. Por otro lado, $A^{n*}[\xi_- A^n] = A^{n*}\xi_- A^n$, por lo que $A^n\xi_- - [\xi_- A^n] \in Dom(L_{A^{n*}})$; de manera análoga, $[A^n\xi_- A^{n*}] = A^n\xi_- A^{n*}$ y

$$\begin{aligned}\xi_- A^n A^{n*} &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sqrt{[j+n]_n} |e_j\rangle\langle e_{j+n}| A^{n*} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sqrt{[j+n]_n} |e_j\rangle\langle A^n e_{j+n}| \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_j\rangle\langle e_j|\end{aligned}$$

es acotado y tiene dominio $\mathcal{H}$, además

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n |e_j\rangle\langle e_j|e_m\| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [j+n]_n < \infty.$$

Por lo tanto $A^n\xi_- - \xi_- A^n \in Dom(R_{A^{n*}})$.

Con lo anterior ya establecido, podemos retomar la prueba de que $\|d_{A^n}|\xi|\|^2 \leq \|d_{A^n}\xi\|^2$. Definamos la forma

$$\mathcal{E}^1(\xi) \equiv \|d_{A^n}\xi\|^2 = \langle d_{A^n}\xi, d_{A^n}\xi\rangle; \qquad \xi \in C_{00}(e) \cap L^2_{\mathbb{R}} \subset D \cap L^2_{\mathbb{R}}$$

y consideremos su correspondiente forma sesquilineal

$$\mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_-) = \langle d_{A^n}\xi_+, d_{A^n}\xi_-\rangle; \qquad \xi_+, \xi_- \in Dom(\delta_{A^n}) \subset Dom(d_{A^n}).$$

Entonces tenemos que
$\mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_-) = \langle d_{A^n}\xi_+, d_{A^n}\xi_-\rangle = \langle \delta_{A^n}\xi_+, \delta_{A^n}\xi_-\rangle = \langle \delta_{A^n}\xi_+, L_{A^n}\xi_- - R_{A^n}\xi_-\rangle =$

$\langle \delta_{A^n}\xi_+, A^n\xi_- - [\xi_- A^n]\rangle = \langle \xi_+, \delta^*_{A^n}(A^n\xi_- - [\xi_- A^n])\rangle =$

$\langle \xi_+, \delta_{A^{n*}}(A^n\xi_- - [\xi_- A^n])\rangle =$

$\langle \xi_+, A^{n*}A^n\xi_- - [A^{n*}\xi_- A^n] - [A^n\xi_- A^{n*}] + [\xi_- A^n A^{n*}]\rangle =$

$\langle \xi_+, A^{n*}A^n\xi_-\rangle - \langle \xi_+, [A^{n*}\xi_- A^n]\rangle - \langle \xi_+, [A^n\xi_- A^{n*}]\rangle + \langle \xi_+, [\xi_- A^n A^{n*}]\rangle =$

$\langle \xi_+, A^{n*}A^n\xi_-\rangle + \langle \xi_+, [\xi_- A^n A^{n*}]\rangle - (\langle \xi_+, [A^{n*}\xi_- A^n]\rangle + \langle \xi_+, [A^n\xi_- A^{n*}]\rangle)$

pero, dado que $L^2_+ = \{\xi \in L^2 : \langle \xi, \eta\rangle \geq 0, \forall \eta \in L^2_+\}$, entonces:

$\langle \xi_+, [A^{n*}\xi_- A^n]\rangle \geq 0$ y $\langle \xi_+, [A^n\xi_- A^{n*}]\rangle \geq 0$.

Por lo tanto,
$\langle \xi_+, A^{n*}A^n\xi_-\rangle + \langle \xi_+, [\xi_- A^n A^{n*}]\rangle - (\langle \xi_+, [A^{n*}\xi_- A^n]\rangle + \langle \xi_+, [A^n\xi_- A^{n*}]\rangle)$

$\leq \langle \xi_+, A^{n*}A^n\xi_-\rangle + \langle \xi_+, [\xi_- A^n A^{n*}]\rangle = \langle A^n\xi_+, A^n\xi_-\rangle + \langle \xi_+, \xi_- A^n A^{n*}\rangle$.

Ahora, por el Lema 6.1.5 $\|X\xi\|^2 = \langle X\xi, X\xi\rangle = Tr([X\xi\xi^* X^*])$, cuya forma polarizada es: $\langle X\xi, X\eta\rangle = Tr([X\xi\eta^* X^*])$; por lo que la última igualdad queda

$$\langle A^n\xi_+, A^n\xi_-\rangle + \langle \xi_+, \xi_- A^n A^{n*}\rangle = Tr([A^n\xi_+\xi_-^* A^{n*}]) + Tr(\xi_+^*\xi_- A^n A^{n*}) = 0$$

pues $\xi_+\xi_- = 0$. Por lo tanto, para $\xi \in C_{00} \cap L^2_{\mathbb{R}}$
$\mathcal{E}^1(|\xi|) = \mathcal{E}^1(\xi_+ + \xi_-, \xi_+ + \xi_-) = \mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_+) + \mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_-) + \mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_+) +$

$\mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_-) \leq \mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_+) + \mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_-) \leq \mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_+) + \mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_-) - \mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_-) -$

$\mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_+) = \mathcal{E}^1(\xi_+ - \xi_-, \xi_+ - \xi_-) = \mathcal{E}^1(\xi)$

pues $-(\mathcal{E}^1(\xi_+, \xi_-) + \mathcal{E}^1(\xi_-, \xi_+)) \geq 0$. Así hemos probado que, para $\xi \in C_{00} \cap L^2_{\mathbb{R}}$ tenemos la desigualdad, $\|d_{A^n}|\xi|\| \leq \|d_{A^n}\xi\|$. Este último resultado junto con los resultados (6.12) y (6.13) probados arriba, permiten establecer la siguiente desigualdad

$$\mathcal{E}(|\xi|) \leq \mathcal{E}(\xi)$$

para $\xi \in C_{00} \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Ahora, sea $\xi \in D \cap L^2_{\mathbb{R}}$ y sea (ξ_n) una sucesión en $C_{00} \cap L^2_{\mathbb{R}}$ tal que $\xi_n \longrightarrow \xi$ en la norma inducida por $\mathcal{E}$. Claramente $|\xi_n| \longrightarrow |\xi|$, por lo que, por la semicontinuidad inferior de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}[|\xi|] \leq \liminf \mathcal{E}[|\xi_n|] \leq \liminf \mathcal{E}[\xi_n] = \mathcal{E}[\xi].$$

Por lo tanto, $\mathcal{E}[|\xi|] \leq \mathcal{E}[\xi]$ para cualquier $\xi \in D \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Con esto queda establecida la condición (ii) del Teorema 5.4.7 y, por lo tanto $\mathcal{E}$, dada por cualquiera de las formas equivalentes (a)- (d), es una forma de Dirichlet con respecto a ξ_ν.

$\square$

Capítulo 7

APÉNDICE

7.1. Inmersiones simétricas

Los siguientes mapeos son indispensables para inducir semigrupos en un álgebra de von Neumann y en su predual, a partir de semigrupos definidos en un espacio de Hilbert, o viceversa; (ver [7] y [9]).

Definición 7.1.1. *Las inmersiones simétricas asociadas a una forma estándar* $(\mathfrak{M}, H, H^+, J)$ *y a un vector cíclico y separante* $\xi_0 \in H^+$ *se definen como:*

i) $i_0 : \mathfrak{M} \to H \qquad i_0 \equiv \Delta_0^{1/4} x \xi_0 \qquad x \in \mathfrak{M}$

ii) $i_{0*} : H \to \mathfrak{M}_* \qquad \langle i_{0*}(\xi), y \rangle = \langle i_0(y^*), \xi rangle = \langle \Delta_0^{1/4} y^* \xi_0, \xi \rangle \qquad \xi \in H, y \in \mathfrak{M}$

iii) $j_0 : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_* \qquad \langle j_0(x), y \rangle = \langle J_0 y \xi_0, x \xi_0 \rangle \qquad x, y \in \mathfrak{M}.$

Se puede demostrar que i_0 es un isomorfismo de orden entre los intervalos $[0, 1]$ en $\mathfrak{M}$ y $[0, \xi_0]$ en H; y que i_{0*} es un isomorfismo de orden entre los intervalos $[0, \xi_0]$ en H y $[0, \omega_0]$ en $\mathfrak{M}_*$ (ver op. cit).

7.2. Operadores de Hilbert-Schmidt y de traza finita

Un tipo especial de operadores compactos, de gran importancia, son los operadores de Hilbert-Schmidt. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $A \in B(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, si existe una base ortonormal $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ en H tal que:

$$\sum_{\alpha \in I} \|Ae_\alpha\|^2 < \infty.$$

Es común denotar a esta clase de operadores como $B_2(H)$.

Teorema 7.2.1. *Un operador $A \in B(H)$ es un operador Hilbert- Schmidt si y sólo si A^* es un operador Hilbert-Schmidt, además*

$$\|A\| \leq (\sum_{\alpha\in I} \|Ae_\alpha\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{\beta\in K} \|A^* e'_\beta\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

para cualesquiera bases ortonormales $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{e'_\beta : \beta \in K\}$ de H.

La demostración se puede consultar en [26].

Por el teorema anterior la siguiente norma, llamada la norma de Hilbert-Schmidt, está bien definida (pues no depende de la base usada)

$$\|A\|_2 \equiv [\sum_{\alpha\in I} \|Ae_\alpha\|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

En el teorema anterior se demostró que $\|A\| \leq \|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

Derivados de estos últimos tenemos los operadores de traza finita, $B_1(H) \equiv \{AB : A, B \in B_2(H)\}$, donde H es un espacio de Hilbert. El nombre viene del hecho de que podemos definir una traza de la siguiente manera: $Tr : B_1(H) \to \mathbb{C}$

$$Tr(T) = \sum_{\alpha\in I} \langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle$$

donde $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ es una base ortonormal de H. La expresión anterior es finita, pues, Si $T \in B_1(H)$, por hipótesis existen operadores $A \in B_2(H)$ y $B \in B_2(H)$ tales que $T = AB$ y por lo tanto

$$Tr(T) = \textstyle\sum_{\alpha\in I} |\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle| = \sum_{\alpha\in I} |\langle ABe_\alpha, e_\alpha\rangle| = \sum_{\alpha\in I} |\langle Be_\alpha, A^* e_\alpha\rangle|$$

$$\leq (\textstyle\sum_{\alpha\in I} \|Be_\alpha\|^2 \sum_{\alpha\in I} \|A^* e_\alpha\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Además la definición de la traza no depende de la base ortonormal utilizada, lo cual se demuestra mediante un sencillo cálculo: si $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{f_\gamma : \gamma \in C\}$ son cualesquiera bases ortonormales de H , entonces

$$\textstyle\sum_{\alpha\in I} \langle ABe_\alpha, e_\alpha\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle Be_\alpha, A^* e_\alpha\rangle = \sum_\alpha \sum_\gamma \langle Be_\alpha, f_\gamma\rangle\langle f_\gamma, A^* e_\alpha\rangle$$

$$= \textstyle\sum_\gamma \sum_\alpha \langle e_\alpha, B^* f_\gamma\rangle\langle Af_\gamma, e_\alpha\rangle = \sum_{\gamma\in C} \langle BAe_\gamma, e_\gamma\rangle.$$

Todas las sumas tienen a lo más un número contable de sumandos y son absolutamente convergentes. Si escogemos otra base ortonormal, $\{e'_\beta : \beta \in K\}$ de H, entonces de lo anterior se sigue

$$\sum_{\alpha\in I} \langle ABe_\alpha, e_\alpha\rangle = \sum_{\gamma\in C} \langle BAe_\gamma, e_\gamma\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle ABe'_\alpha, e'_\alpha\rangle$$

y por lo tanto la definición de la traza no depende de la elección de la base.

La prueba anterior establece una propiedad muy importante de la traza, la ciclicidad

$$Tr(AB) = \sum_{\alpha \in I} \langle ABe_\alpha, e_\alpha \rangle = \sum_{\gamma \in C} \langle BAe_\gamma, e_\gamma \rangle = Tr(BA).$$

Con los axiomas de linealidad que satisface la traza, podemos definir un producto interno en $B_2(H)$ dado por $\langle A, B \rangle = Tr(B^* A)$.

7.3. Semigrupos fuertemente continuos

Sea V un espacio de Banach; y sea $(T_t)_{t \geq 0} \equiv \{T_t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0, T_t : V \to V\}$ una familia de operadores acotados. Decimos que $(T_t)_{t \geq 0}$ es un semigrupo si

$T_t T_s = T_{t+s} \qquad s, t \geq 0 \qquad$ y

$T_0 = I.$

Si además, para todo $v \in V$ y $t \geq 0$ tenemos que

$$\|T_t v\| \leq \|v\| o, equivalentemente, que \|T_t\| \leq 1,$$

entonces $(T_t)_{t \geq 0}$ es un semigrupo contractivo.

Un semigrupo es fuertemente continuo si para toda $v \in V$:

$$\lim_{t \to 0} \|T_t(v) - v\| = 0.$$

Esto último lo escribiremos así: $\lim_{t \to 0} T_t v = v$.

A continuación se enunciaran algunos resultados importantes sobre los semigrupos y sus generadores; las demostraciones pueden consultarse en [25], capítulo 1.

Lema 7.3.1. *Un semigrupo es fuertemente continuo si y sólo si el mapeo* $t \mapsto T_t v$ *es continuo sobre* $[0, \infty)$ *para toda* $v \in V$

Sea $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach V. El operador lineal $L : D(L) \to V$ dado por

$D(L) \equiv \{v \in V : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t(v) - v) \in V\}$

$Lv \equiv \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t(v) - v)$

es el generador (infinitesimal) de $(T_t)_{t \geq 0}$.

Lema 7.3.2. *Si $v \in D(L)$ entonces para toda $t \geq 0$, $T_t v \in D(L)$ y*

$$\frac{d}{dt} T_t v = L T_t v = T_t L v.$$

Proposición 7.3.3. *Sea $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo sobre V, con generador L, entonces L es cerrado.*

Usando resolventes se puede probar que L es además densamente definido.

Reciprocamente, si partimos de un operador L, por el teorema de Hille- Yosida, L es generador de un semigrupo $(T_t)_{t \geq 0}$ si y sólo si

(i) L es densamente definido;

(ii) $(0, \infty) \subset \rho(L)$;

(iii) $\|(\lambda I - L)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para toda $\lambda > 0$.

En este caso tenemos la relación: $T_t = e^{-tL}$.

Otra relación importante es la relativa a cómo obtener el generador L partiendo de una forma coerciva cerrada, ([25] 2.16):

Proposición 7.3.4. *Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma coerciva cerrada, sobre un espacio de Hilbert H. Definamos:*

$$D(L) \equiv \{u \in D : v \mapsto \mathcal{E}(u, v) \textit{es continua respecto a la norma de } H \textit{ en } D\}$$

Definamos como Lu el único elemento en H tal que $\langle -Lu, v \rangle = \mathcal{E}(u, v)$, para toda $v \in H$; entonces L genera un resolvente contractivo, fuertemente continuo.

7.4. Representaciones de C^*-álgebras

Si A es una C^*-álgebra, una representación de A es un par (π, H), donde H es un espacio de Hilbert y $\pi : A \to B(H)$ es un *- homomorfismo. Si A tiene elemento identidad e, entonces se asume que: $\pi(e) = e$.

Una representación (π, H) es cíclica si existe un vector $u \in H$ tal que $\overline{\pi(A)u} = H$; en este caso u es un vector cíclico para (π, H).

Recordemos que A^+ es el conjunto de los elementos positivos; es decir, $a \in A^+$ si y sólo si a es hermitiano y $a = x^* x$, para algún $x \in A$. Si $f : A \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que $f(a) \geq 0$ para toda $a \in A^+$, entonces decimos que f es positivo. Si adeḿas f tiene norma uno, decimos que f es un estado.

Sea (π, H) una representación cíclica de un álgebra A, con vector cíclico u. Definamos $f : A \to \mathbb{C}$ por $f(a) = \langle \pi(a)u, u\rangle$; entonces f es un funcional lineal acotado, con $\|f\| \leq \|u\|^2$. Ahora, puesto que $f(e) = \|u\|$, entonces $\|f\| \leq \|u\|^2$. Más aún:

$$f(a^*a) \equiv \langle \pi(a^*a)u, u\rangle = \langle \pi(a^*)\pi(a)u, u\rangle = \|\pi(a)u\|^2 \geq 0.$$

Esto demuestra que una representación cíclica da lugar a un funcional lineal positivo. El recíproco también es cierto, como lo establece el siguiente teorema, comunmente conocido como la construcción de Gelfand-Naimark-Segal.

Teorema 7.4.1. *Sea A una $C*$-álgebra con identidad. Si f es un funcional lineal positivo en A, entonces f da lugar a una representación cíclica (π_f, H_f) de A con vector cíclico u tal que $f(a) = \langle \pi_f(a)u, u\rangle$ para toda $a \in A$.*

La demostración puede consultarse en [10] capítulo 8.

7.5. Operadores de rango uno

Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Dados $v \in H_1$ y $u \in H_2$, definimos el operador lineal, (de rango 1), $|u\rangle\langle v| : H_1 \to H_2$, mediante la correspondencia:

$$|u\rangle\langle v|w = \langle v, w\rangle u.$$

La función $(u, v) \to |u\rangle\langle v|$ de $H \times H$ a $B(H)$ satisface las siguientes propiedades:

a).- $|u\rangle\langle v|$ es lineal en u y lineal conjugada en v;

b).- $(|v\rangle\langle u|)^* = |u\rangle\langle v|$; en particular $|u\rangle\langle u|$ es autoadjunto;

c).- $|u\rangle\langle v||\psi\rangle\langle\varphi| = \langle v, \psi\rangle|u\rangle\langle\varphi|$;

d).- $\||u\rangle\langle v|\| = \|u\|\|v\|$;

e).- Si $A \in B(H)$, entonces $A|u\rangle\langle v| = |Au\rangle\langle v|$ y $|u\rangle\langle v|A = |u\rangle\langle A^*v|$.

f).- $Tr(A|u\rangle\langle v|) = \langle v, Au\rangle$ para cualesquiera $u, v \in H$.

7.6. Teorema de Banach-Alaoglu

Teorema 7.6.1. *Sea B un espacio de Banach con norma $\|\|$ y sea B' su dual, con la norma de operadores; entonces la bola unitaria B'_1 en B' es compacta en la topología débil estrella.*

La demostración se encuentra en el apéndice de [25].

Bibliografía

[1] R. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces, Second Edition*, Pure and Applied Mathematics Series 140, (2003), Academic Press, (Elsevier Ltd).

[2] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, Dirichlet forms and Markovian semigroups on C^*-algebras, Comm. Math. Phys. 56 (1977), 173-187.

[3] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, Frobenius theory for positive maps on von Neu- mann algebras, Comm. Math. Phys. 64 (1978), 83-94.

[4] A. Beurling and J. Deny, Espaces de Dirichlet I: le cas élémentaire, Acta Math. 99 (1958), 203-224.

[5] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. 45 (1959), 208-215.

[6] O. Bratteli, D.W. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1.* Text and Monographs in Physics, second edition (1987), Springer- Verlag.

[7] F. Cipriani: *Dirichlet Forms and Markovian Semigroups on Standard Forms of von Neumann Algebras.* Journal of Functional Analysis 147 (1997), 259 - 300.

[8] F. Cipriani, F. Fagnola, J.M. Lindsay: *Spectral Analysis and Feller Property for Quantum Ornstein-Uhlenbeck Semigroups* . Communications in Mathematical Physics 210 (2000), 85 - 105.

[9] F. Cipriani: *Quantum Potential Theory.* Lectures Notes in Mathematics (2008), 161 - 272, Springer- Verlag.

[10] J.B. Conway: *A Course in Functional Analysis* . Graduate texts in Mathematics; v 69, segunda edición (1990), Springer- Verlag.

[11] E.B. Davies: *Quantum Theory of Open Systems.* Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976.

[12] E.B. Davies: *One Parameter Semigroups.* Academic Press, London/New York/San Francisco, 1980.

[13] E.B. Davies: *Heat Kernel and spectra Theory.* Academic Press, London/New York/San Francisco, 1980.

[14] E.B. Davies, J.M. Lindsay, Non?commutative symmetric Markov semigroups, Math. Z. 210 (1992), 379-411.

[15] E.B. Davies, J.M. Lindsay, Superderivations and symmetric Markov semigroups, Comm. Math. Phys. 157 (1993), 359-370.

[16] M. Fukushima: *Dirichlet Forms and Markov Processes.* Amsterdam-Oxford-New York: North Holland (1980).

[17] R. Hermida, R.Quezada: *On the Spectral Gap of the N-Photon Absorption-Emission Process.* Proceedings of the 32nd Conference on Quantum Probability and Related Topics, Quantum Probability and Related Topics, QP-PQ Volume XXIX, 143-159, 2013.

[18] B. Iochum: *Cônes Autopolaires et Algèbres de Jordan.* Lecture Notes in Mathematics; v 1049, (1984), Springer-Verlag.

[19] R.V. Kadison, J.R. Ringrose: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, volume 1: Elementary Theory.* Graduate Studies in Mathematics; v 15, segunda edición (1997), American Mathematical Society.

[20] R.V. Kadison, J.R. Ringrose: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, volume 2: Advanced Theory.* Graduate Studies in Mathematics; v 16, segunda edición (1997), American Mathematical Society.

[21] V.G. Maz'ja, Sobolev Spaces, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer Verlag, 1980.

[22] J.-L. Sauvageot, Tangent bimodule and locality for dissipative operators on C^* algebras, Quantum Probability and Applications IV, Lecture Notes in Math. 1396 (1989), 322-338.

[23] J.-L. Sauvageot, Quantum differential forms, differential calculus and semigroups, Quantum Probability and Applications V, Lecture Notes in Math. 1442 (1990), 334-346.

[24] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, volume 1: Functional Analysis.* (1980), Academic Press.

[25] Z.M. Ma, M. Röckner: *Introduction to the Theory of (Non- Symmetric) Dirichlet Forms.* Universitext (1992), Springer-Verlag.

[26] J. Weidmann: *Linear Operators in Hilbert Spaces.* Graduate texts in Mathematics; v 68, (1980), Springer- Verlag.