Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL TEOREMA EQUIVARIANTE DE DUGUNDJI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DIEGO FAJARDO ROJAS

TUTORA:
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018

1. Datos del alumno

Fajardo

Rojas

Diego

22 21 82 95 94

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

415026260

2. Datos de la tutora

Doctora

Natalia

Jonard

Pérez

3. Datos del sinodal 1

Doctor

Hugo

Juárez

Anguiano

4. Datos del sinodal 2

Doctor

Eugenio

Garnica

Vigil

5. Datos del sinodal 3

Doctor

Sergey

Antonyan

6. Datos del sinodal 4

Doctor

Vinicio Antonio

Gómez

Gutiérrez

7. Datos del trabajo escrito

El Teorema Equivariante de Dugundji

85 p

2018

A mi mamá.

No había un crujido que tu sonrisa no pudiera explicar,
como si desde hace tiempo supieras justo cuando el piso haría eso...
Y él escucho y lo calmaste. Tan poderosa era tu presencia
mientras tiernamente te posabas junto a la cama; que su destino,
alto y embozado, retrocedió detrás del armario, y su inquieto
futuro, retrasado por un instante, se adaptó a los pliegues de la cortina.
R.M. Rilke

A mi papá.

There goes my hero
Watch him as he goes.
Kudos, my hero
Leaving all the best.
Dave Grohl

A mi hermana.

I see you perching on the corner
Of the weeping window pane
You're growing up fast just like the flora
The world is yours, come shine or rain.
Loyle Carner

Agradecimientos

Esta tesis marca la culminación de mis estudios de licenciatura. Considero importante expresar mi sincero agradecimiento a:

Mi mamá, Carmen Rojas Juárez, por su amor interminable, su apoyo incondicional y su inquebrantable esfuerzo por darnos lo mejor. Gracias por estar siempre al pendiente de mi educación, esta tesis es un corolario de las tardes cuando estudiábamos juntos, que comenzaron hace más de dieciséis años.

Mi papá, Juan Fajardo González, por darnos un techo con libros, música, besos y el lujo de no tener hambre. Gracias por darme la posibilidad de estudiar en la Ciudad de México y por ser una persona ejemplar.

Mi hermana, Carmen Fajardo Rojas, por todas las risas y por darme su cariño siempre, especialmente durante los múltiples momentos de estrés que sufrí a través de la carrera.

La doctora Natalia Jonard Pérez por su dirección en la realización de este trabajo y por su excelente labor docente que cultivó mi gusto por la topología. Gracias por tu incesante dedicación a tus alumnos y, sobre todo, por tu amabilidad. Ha sido un privilegio trabajar bajo tu tutela.

Mis sinodales, los doctores Hugo Juárez Anguiano, Eugenio Garnica Vigil, Sergey Antonyan y Vinicio Gómez Gutiérrez, por el tiempo que dedicaron a la lectura de este trabajo y sus oportunas observaciones para mejorarlo. Agradezco especialmente al doctor Sergey Antonyan por su investigación en la cual está basada esta tesis.

El profesor Juan José Parres, quien me mostró por primera vez la intricada belleza que poseen las matemáticas, mediante su admirable esfuerzo en la organización y los entrenamientos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Puebla. Agradezco también a la comunidad de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas por su invaluable labor de divulgación de las matemáticas.

Mis profesores de la licenciatura, especialmente al maestro José Antonio Gómez, al doctor Juan José Alba y a las doctoras Diana Avella y Mónica Clapp, por el conocimiento que lograron transmitirme. También quiero agradecer a Claudia Solís Said y Elie Peña Ruiz por su impecable desempeño como ayudantes.

Danilo Méndez, Julián Pavón y Alex Rosas, por acompañarme en el transcurso de la carrera, por brindarme su ayuda en innumerables ocasiones y por su generosa amistad.

Ángel Fuerte, por allanarme el rocoso camino de la burocracia universitaria.

Mario, Yuika, Raquel, Luisa, Raúl, Michelle, Nicolás, Fernanda, Andrés, Dante, Ernesto, Juan, Sofía, Ambar, Karina, Emmaús, Laura, Josué, Sebastián, Jorge, Aarón, Azucena, Alejandro, Luis y Marah. Gracias por las pláticas a cualquier hora del día, las noches de viernes, las excusas para tomar un descanso, las historias, los consejos, las películas, las canciones. Gracias por compartir su experiencia universitaria conmigo y dejarme compartirles la mía. Gracias por hacer de la casa un hogar.

Mi familia, especialmente a mis tíos y mis tías por los viajes, la comida, las palabras de aliento y las múltiples manifestaciones de cariño.

Los intérpretes de la banda sonora de esta tesis: (principalmente) The Beatles, Leonard Cohen, Joni Mitchell, David Bowie, Luis Eduardo Aute, Silvio Rodríguez, Joaquín Sabina, Hombres G, Café Tacvba, Belle and Sebastian, La Vela Puerca, Hilary Hahn, Arctic Monkeys, Javiera Mena, Jamie T, Vampire Weekend, Florence + The Machine, Gabrielle Aplin, The Staves, La Vida Bohème, Jake Bugg, Monsieur Periné, Wolf Alice, Chvrches, Watsky, Kate Tempest, Loyle Carner, Shame y Dream Wife. A ellos y a todas las personas que hacen, han hecho, y harán posible la maravilla de la música: muchísimas gracias.

Índice General

Introducción

En 1951, en su artículo *An extension of Tietze's theorem* [5], James Dugundji demostró una generalización del Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn (2.2.1) (si pensamos a este restringido a la clase de los espacios metrizables) en la que probó que los subconjuntos convexos de un espacio topológico vectorial localmente convexo son extensores absolutos para la clase de los espacios metrizables. Es decir, si V es un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial localmente convexo, X es un espacio metrizable, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to V$ es una función continua, entonces existe $F : X \to V$ continua cuya definición coincide con f en todos los elementos de A. A este resultado lo conocemos como el Teorema de Extensión de Dugundji.

Partiendo de este teorema, podemos preguntarnos si además de la continuidad, F preserva alguna otra de las propiedades de f. En particular, un problema que motiva la generalización del Teorema de Extensión de Dugundji que perseguiremos en este trabajo es el siguiente: supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y centralmente simétrico ($A = -A$), y que $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una función impar, es decir, f es tal que para todo $x \in A$, $f(-x) = -f(x)$. ¿Será posible encontrar una extensión $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de f que sea impar?

En principio, el teorema de Dugundji no nos provee este tipo de información. Sin embargo podemos atacar esta pregunta desde otra teoría para la cual nuestro planteamiento puede ser formulado en sus términos habituales: la teoría de acciones de grupos topológicos. Si pensamos a $\mathbb{Z}_2$ como el grupo $\{-1, 1\}$ con la multiplicación, provisto de la topología discreta, $\mathbb{Z}_2$ actúa en $\mathbb{R}^n$ de manera continua con la multiplicación entrada a entrada, en otras palabras,

$$\theta_n : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(a, (x_1, \cdots, x_n)) \mapsto (ax_1, \cdots, ax_n)$$

es una acción continua.

Entonces la condición $A = -A$ la podemos enunciar diciendo que A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ invariante bajo la acción de $\mathbb{Z}_2$. Observemos que la propiedad de que $f : A \to \mathbb{R}^m$ sea impar la podemos reescribir diciendo que f es una función tal que para todo $a \in \mathbb{Z}_2$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\theta_n(a, x)) = \theta_m(a, f(x)),$$

tales funciones son denominadas funciones equivariantes. En estos términos, nos preguntamos si podemos encontrar una extensión F de f que también sea equivariante bajo la acción de $\mathbb{Z}_2$.

Tomando en cuenta la terminología introducida en el párrafo anterior, es natural tratar de generalizar nuestra pregunta: ¿para cualquier grupo topológico que actúe continuamente en un espacio metrizable y en un espacio topológico vectorial localmente convexo; y para cualquier función equivariante definida de un subconjunto invariante a un subconjunto invariante y convexo, será cierto que existe una extensión continua y equivariante? Si bien necesitamos hipótesis más fuertes para obtener la generalización del Teorema de Dugundji que presentaremos en este texto, esta será la naturaleza del resultado que buscamos.

Estructura de la Tesis

El propósito principal de esta tesis es demostrar la generalización del Teorema de Extensión de Dugundji a la cual acabamos de dar preludio. Para poder entender tal generalización primero necesitamos exponer la teoría de acciones de grupos topológicos en la que se basa el desarrollo que haremos para llegar a la demostración. Por tanto, en el capítulo 1 desarrollaremos la teoría preliminar que necesitamos referente a acciones de grupos topológicos. En particular, a partir de la sección 1.3 veremos que cuando trabajamos con un grupo compacto los espacios sobre los que este actúa cumplen propiedades particularmente útiles; en la sección 1.5 introduciremos el concepto de rebanada, que será de suma importancia para las demostraciones subsecuentes del capítulo 3.

En el capítulo 3, daremos el enunciado y la demostración del Teorema Equivariante de Dugundji (3.2.2), la generalización deseada del Teorema de Extensión de Dugundji. El capítulo está dedicado exclusivamente a este fin, y plantea cuatro lemas previos que necesitamos para simplificar la demostración del teorema. Para concluir, incluimos algunas consecuencias de nuestra generalización, entre ellas el Teorema de Extensión de Dugundji que obtendremos como un caso particular de nuestro teorema. Este capítulo está basado en el artículo *Equivariant generalization of Dugundji's theorem* de S. Antonyan [1].

Por último, en el capítulo 4 mostraremos ejemplos que son consecuencia de nuestra generalización equivariante, entre ellos daremos respuesta a la interrogante que acabamos de plantear. Sin embargo enfocaremos nuestros esfuerzos en proporcionar un ejemplo menos inmediato: demostraremos que la familia de los subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$, bajo la acción de cierto grupo de isometrías, cumple las hipótesis de un corolario de nuestro teorema (3.2.4) y por lo tanto es un G-extensor absoluto para la clase de los espacios metrizables. Para lograr esto, necesitaremos apoyarnos en dos teoremas, el Teorema de Separación de Hahn-Banach y el Teorema de Hörmander, los cuales demostraremos en las secciones 4.1 y 4.2, respectivamente. Dado que también necesitamos teoría previa para comprender estos teoremas, en el capítulo 2 exponemos información preliminar referente a espacios vectoriales (sección 2.1) e hiperespacios (sección 2.3); además, en este capítulo dedicaremos una sección a exponer el Teorema de Extensión de Dugundji (sección 2.2) con el fin de estar familiarizados con los conceptos que generalizaremos en el capítulo 3.

Parte I

Preliminares

Nota Preliminar

En esta breve sección introduciremos definiciones y cuestiones de notación que utilizaremos a través del texto.

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, denotaremos por el símbolo $\overline{A}$ a la cerradura de A en X y por el símbolo $\operatorname{Int} A$ al interior de A en X.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, lo denotaremos simplemente por X y asumiremos implícitamente la existencia de su norma, que denotaremos por $\|\cdot\|$.

Si (X, d) es un espacio métrico y A un subconjunto de X, definimos para cada $x \in X$, la distancia de x al conjunto A de la siguiente manera:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

Esta notación también será utilizada cuando X sea un espacio vectorial normado, dando por entendido que en la ecuación anterior d denotará a la distancia inducida por la norma en X.

Para denotar las bolas abiertas con centro en algún punto $x \in X$ y radio r utilizaremos dos notaciones, usaremos la una o la otra según consideremos conveniente. La primera de ellas es $B_X(x, r)$. Si en el contexto de la demostración que estemos realizando la métrica d del espacio X es mencionada explícitamente también utilizaremos la notación $B_d(x, r)$.

Si X es un espacio vectorial normado, utilizaremos el símbolo B_X para denotar a la bola unitaria cerrada, es decir:

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Trabajaremos con $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma euclidiana. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{S}^{n-1}$ para denotar a la esfera unitaria y el símbolo $\mathbb{B}^n$ para denotar a la bola unitaria cerrada, es decir:

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

En el espacio dual de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n*}$, utilizaremos el símbolo $\mathbb{B}^{n*}$ para denotar a la bola unitaria cerrada, es decir:

$$\mathbb{B}^{n*} = \{x \in \mathbb{R}^{n*} \mid \|x\|_* \leq 1\}.$$

Si Y es un espacio topológico, al conjunto de las funciones continuas de Y a $\mathbb{R}$ las denotaremos por $C(Y)$. Al subconjunto de las funciones acotadas de $C(Y)$ lo denotaremos como $C_b(Y)$.

Omitiremos las definiciones de conceptos de topología básicos como *para-compacidad, partición de unidad, redes*. Todos los conceptos de topología omitidos pueden ser consultados en [6].

El resto de la notación será introducida a lo largo del texto.

Capítulo 1

Acciones de Grupos Topológicos

Como mencionamos en la Introducción, este capítulo será un breviario de la teoría de acciones de grupos topológicos que necesitaremos en el trancurso del texto. Los conceptos de este capítulo son profundizados en [3] y [9].

Si $(G, *)$ es un grupo, omitiremos el signo $*$ para denotar la operación del grupo y, como es usual, denotaremos el producto de dos elementos $g, h \in G$ por gh.

1.1. Acciones de Grupos Topológicos

Un **grupo topológico** G es un grupo equipado con una topología que hace continuas a su función producto

$$G \times G \to G$$

$$(g, h) \mapsto gh$$

y a la función de inversión

$$G \to G$$

$$g \mapsto g^{-1}.$$

Si además un grupo topológico está provisto de una estructura de n-variedad diferenciable tal que el producto y la inversión son funciones suaves, diremos que es un **grupo de Lie**.

Un ejemplo inmediato de un grupo de Lie es cualquier grupo G de cardinalidad finita con la topología discreta.

Para un ejemplo más sustancioso, podemos considerar al grupo $GL(n)$, el grupo general lineal, que consiste de todas las funciones lineales e invertibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. A cada elemento lo podemos identificar con una matriz cuadrada e invertible de $n \times n$. De esta manera podemos identificar a $GL(n)$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$. La topología de $GL(n)$ es precisamente la que hereda de $\mathbb{R}^{n^2}$. También podemos considerar al grupo ortogonal $O(n)$ que consiste de todas las funciones de $GL(n)$ que preservan el producto interior. A $O(n)$ lo podemos identificar con todas las matrices cuadradas de $n \times n$ cuyas columnas forman una base ortonormal. La topología de $O(n)$ también es la heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$. $O(n)$ es además un grupo de Lie compacto pues por lo anterior es cerrado y acotado.

Definición 1.1.1. *Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una **acción continua** de G en X es una función continua $\theta : G \times X \to X$ que satisface:*

(1) *si e es el neutro de G, para todo $x \in X$, $\theta(e, x) = x$,*

(2) *para todo $g, h \in G$, $x \in X$, $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$.*

En la práctica, si $\theta : G \to X$ es una acción, para $g \in G$ y $x \in X$ es común escribir $\theta(g, x)$ simplemente como gx. Bajo esta convención, para $x \in X$, $g, h \in G$ podemos escribir las propiedades de la definición anterior como sigue:

$$ex = x,$$
$$h(gx) = (hg)x.$$

Para cualquier grupo topológico G, llamaremos **G-espacio** a un par ordenado (X, θ) formado por un espacio topológico X y una acción continua $\theta : G \times X \to X$. Usualmente diremos solamente que G es un grupo para referinos a un grupo topológico; también, al hablar de un G-espacio omitiremos mencionar la acción θ y diremos simplemente que X es un G-espacio. En esta situación, para cada $x \in X$ definimos la **órbita** de x como el conjunto:

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}.$$

Cada $g \in G$ induce una función $\theta_g : X \to X$ con regla de correspondencia

$$\theta_g(x) = gx.$$

La función θ_g recibe el nombre de **transición**. Como θ es continua, para todo $g \in G$, θ_g es continua. Además, para todo $g \in G$ y $x \in X$ se cumple que

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = \theta_g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = x$$
$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g(x) = \theta_{g^{-1}}(gx) = (g^{-1}g)x = x,$$

así que para cada $g \in G$, θ_g es un homeomorfismo de X en X. Una consecuencia inmediata de este hecho que utilizaremos en el transcurso del texto es que para todo $g \in G$, U es abierto en X si y sólo si gU es abierto en X.

Si $A \subset X$ y $H \subset G$, denotaremos por HA a la H**-saturación** de A, es decir, al conjunto:

$$HA = \{ha \mid h \in H,\ a \in A\}.$$

Diremos que $A \subset X$ es G**-invariante** (o invariante si el grupo está implícito en el contexto) si $GA = A$.

Para X, Y G-espacios y $f : X \to Y$ una función, diremos que f es G**-equivariante** (o equivariante si se sobreentiende quién es el grupo en cuestión) si para todo $x \in X$ y $g \in G$:

$$f(gx) = gf(x).$$

En particular, si la acción en Y es trivial, diremos que f es G**-invariante** (o simplemente invariante); es decir, si para todo $x \in X$ y $g \in G$:

$$f(gx) = f(x).$$

Si X es un G-espacio, para cada $x \in X$ definimos el **estabilizador** de x

o **grupo de isotropía** de x como el subconjunto G_x de G de todos los elementos de G que fijan a x, es decir:

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Proposición 1.1.2. *Sean G un grupo y X un G-espacio T_1. Entonces para todo $x \in X$, G_x es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Es fácil ver que G_x es un subgrupo de G pues para cualesquiera $g, h \in G_x$, como $hx = x$, se tiene que $x = h^{-1}x$, así que

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = gx = x.$$

En consecuencia, $gh^{-1} \in G_x$. Por lo tanto G_x es un subgrupo de G.

La acción de G en X es continua. Definamos la función $\theta_x : G \to X$ con regla de correspondencia $\theta_x(g) = gx$. La función θ_x es continua pues θ lo es. Por lo tanto $G_x = \theta_x^{-1}(\{x\})$ es cerrado.

□

Proposición 1.1.3. *Sean G un grupo y X un G-espacio. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$, $g \in G$ tales que $x = gy$, se cumple que $G_x = gG_yg^{-1}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} G_x &= \{h \in G \mid hx = x\} \\ &= \{h \in G \mid hgy = gy\} \\ &= \{h \in G \mid g^{-1}hgy = y\} \\ &= \{h \in G \mid g^{-1}hg \in G_y\} \\ &= \{h \in G \mid h \in gG_yg^{-1}\} \\ &= gG_yg^{-1}. \end{aligned}$$

□

1.2. Espacio Orbital

Notemos que para cualquier G-espacio, sus órbitas inducen en este una partición en clases de equivalencia.

Proposición 1.2.1. *Sean G un grupo y X un G-espacio. Entonces cualesquiera dos órbitas de X son iguales o son ajenas.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$. Entonces existen $g, h \in G$ tales que $gx = hy$, de manera que $x = g^{-1}hy$ y $y = h^{-1}gx$ así que $x \in G(y)$ y $y \in G(x)$. Por lo tanto $G(x) \subset G(y)$ y $G(y) \subset G(x)$, es decir, $G(x) = G(y)$.

□

Denotaremos por X/G al conjunto de órbitas del G-espacio X. A este espacio dotado de la topología cociente inducida por X lo llamaremos el **espacio orbital**, y a la función cociente $p : X \to X/G$ tal que $p(x) = G(x)$ la llamaremos **proyección orbital**.

Proposición 1.2.2. *Sean G un grupo y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una función abierta.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Queremos ver que $p(U)$ es abierto en X/G. Esto pasa si y sólo si $p^{-1}(p(U))$ es abierto en X. Luego

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(U)) &= p^{-1}(\{G(x) \mid x \in U\}) \\ &= \{y \in X \mid G(y) = G(x) \text{ para algún } x \in U\} \\ &= \{y \in G(x) \mid x \in U\} \\ &= GU \\ &= \bigcup_{g \in G} gU, \end{aligned}$$

y como para cada $g \in G$, gU es abierto, se sigue que $p^{-1}(p(U))$ es abierto y por lo tanto p es abierta.

□

1.3. Acciones de Grupos Compactos

Sean G un grupo, X un G-espacio y $\theta : G \times X \to X$ la acción de G en X. Recordemos que para cada $x \in X$, definimos la función $\theta_x : G \to X$ con regla de correspondencia $\theta_x(g) = gx$. La función θ_x es continua pues θ lo es. Además, notemos que $\theta_x(G) = G(x)$ es la órbita de x.

Si G es compacto entonces para cada $x \in X$, por la continuidad de θ_x, $G(x)$ es compacta, así que en este caso las órbitas de X son compactas. Además, si X es T_1, habíamos notado que para toda $x \in X$, G_x es cerrado en G, así que G_x, el estabilizador de x, es compacto en G.

Recordemos que una función f es perfecta si es continua, suprayectiva, cerrada y sus fibras son compactas.

Proposición 1.3.1. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es perfecta.*

Demostración. Sabemos que p es continua y suprayectiva, así que basta ver que es cerrada y que sus fibras son compactas. Sea C un subconjunto cerrado de X. Queremos ver que $p(C)$ es cerrado en X/G. Esto pasa si y sólo si $p^{-1}(p(C))$ es cerrado en X. Gracias a la demostración de la Proposición 1.2.2, sabemos que $p^{-1}(p(C)) = GC$. Sea $(g_\lambda c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red de elementos de GC (tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $g_\lambda \in G$ y $c_\lambda \in C$) que converja a un elemento $x \in X$. Como G es compacto, existen $g \in G$ y una subred de $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a g. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es ella misma. Como tomar inversos en G es una función continua, se sigue que $(g_\lambda^{-1})_{\lambda\in\Lambda}$ converge a g^{-1}. Como la acción es continua, tenemos que $(g_\lambda^{-1} g_\lambda c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $g^{-1}x$, es decir $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $g^{-1}x$. Como C es cerrado, esto implica que $g^{-1}x \in C$, y por lo tanto $x = g(g^{-1}x) \in GC$. Así, $GC = p^{-1}(p(C))$ es cerrado y en consecuencia p es una función cerrada.

Las fibras de p son compactas en X, pues para todo $G(x) \in X/G$, es claro que $p^{-1}(G(x)) = G(x)$. Por lo observado anteriormente, como G es compacto, $G(x)$ también lo es.

$\square$

Supongamos que G es un grupo compacto y X es un G-espacio. Sea $H \leq G$ un subgrupo cerrado. Veamos que H actúa en G de la siguiente manera:

$$H \times G \to G$$

$$(h, g) \mapsto gh^{-1}.$$

Como G es grupo topológico, la acción es continua y es una verificación directa ver que cumple las otras dos propiedades. De esta manera, G es un H-espacio. Consideramos a G/H el espacio orbital asociado a dicha acción y $p : G \to G/H$ la proyección orbital.

Por la forma como actúa H en G, podemos ver a G/H como el conjunto de clases laterales:

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}.$$

Por último, se puede ver que G actúa en G/H por traslaciones izquierdas:

$$G \times G/H \to G/H$$

$$(g, hH) \mapsto ghH,$$

de nuevo por la continuidad del producto en G se sigue que esta acción es continua y por lo tanto G/H es un G-espacio. Revisitaremos esta acción de un subgrupo H de G en G en el transcurso del texto. A continuación analizaremos qué sucede cuando H es el estabilizador de algún elemento de un espacio Hausdorff X.

Proposición 1.3.2. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio Hausdorff. Entonces, para cada $x \in X$, la función $\overline{\theta_x} : G/G_x \to G(x)$ con regla de correspondencia $\overline{\theta_x}(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración. Sean $x \in X$, $\theta : G \times X \to X$ la acción de G en X, $\theta_x : G \to G(x)$ como la definimos al inicio de esta sección, y $p : G \to G/G_x$ la proyección orbital.

Notemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "p"'] & G(x) \\
G/G_x \arrow[ur, dashed, "\overline{\theta_x}"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que θ_x y p tienen las mismas fibras. Para cualesquiera $g, h \in G$ se cumple:

$$\begin{aligned}
p(g) = p(h) &\Leftrightarrow gG_x = hG_x \\
&\Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \\
&\Leftrightarrow h^{-1}gx = x \\
&\Leftrightarrow gx = hx \\
&\Leftrightarrow \theta_x(g) = \theta_x(h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\theta_x}$ está bien definida y es continua.

La suprayectividad de $\overline{\theta_x}$ es clara. Veamos que es inyectiva. Sean $g, h \in G$. Entonces, si $\overline{\theta_x}(gG_x) = \overline{\theta_x}(hG_x)$, se sigue que $gx = hx$, es decir, $h^{-1}g \in G_x$, de donde se sigue que $gG_x = hG_x$. Por lo tanto $\overline{\theta_x}$ es biyectiva. Más aún, como G es compacto y p es continua, G/G_x es compacto; además como $G(x)$ es Hausdorff, se sigue que $\overline{\theta_x}$ es cerrada, así que podemos concluir que $\overline{\theta_x}$ es un homeomorfismo.

Para terminar, veamos que es equivariante. Sean $h \in G$, $gG_x \in G/G_x$, entonces:

$$\overline{\theta_x}(hgG_x) = hgx = h\overline{\theta_x}(gG_x).$$

$\square$

1.4. G-espacios Metrizables

Sea (X, d) un G-espacio métrico. Diremos que la métrica d es G**-invariante** (o simplemente invariante) si para todo $g \in G$, $x, y \in X$ se cumple que

$$d(gx, gy) = d(x, y).$$

Ejemplo 1.4.1. La métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es $O(n)$-invariante, pues los elementos de $O(n)$ preservan el producto interior en $\mathbb{R}^n$.

A continuación presentaremos un par de demostraciones que conciernen a una métrica invariante. Primero, veremos que cuando G es un grupo compacto y X es un G-espacio metrizable, existe una métrica invariante que induce la topología de X; acto seguido veremos que la existencia de esta nos garantiza la metrizabilidad de X/G.

Teorema 1.4.1. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio metrizable. Entonces existe una métrica G-invariante compatible con la topología de X.*

Demostración. Sea ρ una métrica en X que induzca su topología. Afirmamos que la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida con la regla de correspondencia

$$d(x, y) = \sup_{g \in G} \{\rho(gx, gy)\}$$

es la métrica buscada.

Primero, d está bien definida pues G es compacto. Veamos que d es métrica. Solamente probaremos la desigualdad del triángulo pues las demás propiedades son consecuencias inmediatas del hecho de que ρ sea métrica. Sean

$x, y, z \in X$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gz)\} \\ &\leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)+\rho(gy,gz)\} \\ &\leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}+\sup_{g\in G}\{\rho(gy,gz)\} \\ &= d(x,y)+d(y,z), \end{aligned}$$

donde

$$\sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)+\rho(gy,gz)\} \leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}+\sup_{g\in G}\{\rho(gy,gz)\}$$

ya que para todo $h \in G$,

$$\rho(hx,hy)+\rho(hy,hz) \leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}+\sup_{g\in G}\{\rho(gy,gz)\}.$$

Ahora veamos que es G-invariante, sean $h \in G$, $x, y \in X$. Entonces, como multiplicar a G por un elemento fijo de éste es una biyección, se sigue que

$$d(hx,hy) = \sup_{g\in G}\{\rho(ghx,ghy)\} = \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\} = d(x,y).$$

Por último, veamos que las topologías inducidas por ρ y d en X son la misma. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sea $x \in B_d(x_0, \varepsilon)$. Como ρ induce la topología en X, ρ es continua. Por lo tanto $\varphi : X \times G \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $\varphi(z, g) = \rho(gz, gx)$ es continua al ser composición de funciones continuas. Sea $c \in (0, \varepsilon - d(x_0, x))$. Entonces $\varphi^{-1}(-\infty, c)$ es un subconjunto abierto de $X \times G$ tal que $\{x\} \times G \subset \varphi^{-1}(-\infty, c)$, así que por el Lema del Tubo (véase [6, pág. 126]), existe $\delta > 0$ tal que $B_\rho(x, \delta) \times G \subset \varphi^{-1}(-\infty, c)$. Sea $y \in B_\rho(x, \delta)$. Entonces, por lo anterior, para toda $g \in G$, $\varphi(y, g) < c$, es decir $\rho(gy, gx) < c$ por lo que $d(y, x) \leq c$. Por consiguiente,

$$d(x_0,y) \leq d(x_0,x)+d(x,y) \leq d(x_0,x)+c < d(x_0,x)+\varepsilon-d(x_0,x) = \varepsilon.$$

Así, $B_\rho(x, \delta) \subset B_d(x_0, \varepsilon)$ mostrando que $B_d(x_0, \varepsilon)$ es abierto en la topología inducida por ρ.

Para terminar veamos que $B_\rho(x_0,\varepsilon)$ es abierto en la topología inducida por d. Sea $x \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$. Entonces, para $y \in B_d(x,\varepsilon-\rho(x,x_0))$, tenemos que

$$\rho(x_0,y) \leq \rho(x_0,x)+\rho(x,y) \leq \rho(x_0,x)+d(x,y) < \rho(x_0,x)+\varepsilon-\rho(x,x_0) = \varepsilon,$$

por lo que $B_d(x,\varepsilon-\rho(x,x_0)) \subset B_\rho(x_0,\varepsilon)$ y podemos concluir que $B_\rho(x_0,\varepsilon)$ es abierto en la topología inducida por d; demostrando que d induce la misma topología que ρ en X.

□

Teorema 1.4.2. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio metrizable. Entonces X/G es metrizable.*

Demostración. Sea d una métrica invariante que induzca la topología en X (la cual existe por el teorema anterior). Definimos $\widetilde{d} : X/G \times X/G \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{d}(G(x),G(y)) = \inf\{d(u,v) \mid u \in G(x), v \in G(y)\}.$$

Afirmamos que $\widetilde{d}$ es la métrica buscada. Es claro que como d es métrica, $\widetilde{d}$ es simétrica y no negativa. También es claro que para todo $G(x) \in X/G$, $\widetilde{d}(G(x),G(x)) = 0$. Supongamos que $G(x), G(y) \in X/G$ son tales que $\widetilde{d}(G(x),G(y)) = 0$. Afirmamos que entonces $x \in G(y)$, es decir, $G(x) = G(y)$. Observemos que por la invarianza de d:

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{d}(G(x),G(y)) \\
&= \inf\{d(u,v) \mid u \in G(x), v \in G(y)\} \\
&= \inf\{d(gx,hy) \mid g,h \in G\} \\
&= \inf\{d(x,g^{-1}hy) \mid g,h \in G\} \\
&= d(x,G(y)).
\end{aligned}$$

Como ya habíamos notado, al ser G compacto, $G(y)$ es compacto. Como además X es metrizable, se sigue que $G(y)$ es cerrado en X y podemos concluir que $G(x) = G(y)$.

Verifiquemos que también se cumple la desigualdad del triángulo. Utilizando la cadena de igualdades anterior y la invarianza de d, veamos que si

$G(x), G(y), G(z) \in X/G$, entonces:

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}(G(x), G(y)) &= \inf_{g\in G}\{d(x, gy)\} \\
&\leq \inf_{g\in G, h\in G}\{d(x, hz) + d(hz, gy)\} \\
&= \inf_{g\in G, h\in G}\{d(x, hz) + d(z, h^{-1}gy)\} \\
&= d(x, G(z)) + d(z, G(y)) \\
&= \widetilde{d}(G(x), G(z)) + \widetilde{d}(G(z), G(y));
\end{aligned}$$

de esta manera queda demostrado que $\widetilde{d}$ es una métrica en X/G.

Finalmente, veamos que $\widetilde{d}$ induce la topología de X/G. Sean $\varepsilon > 0$, $G(x) \in X/G$ y $\widetilde{V} := B_{\widetilde{d}}(G(x), \varepsilon)$; veamos que $\widetilde{V}$ es abierto en X/G. Sea $V := B_d(x, \varepsilon)$, como por la Proposición 1.2.2 la proyección orbital $p : X \to X/G$ es abierta, $p(V)$ es abierto en X/G. Afirmamos que $\widetilde{V} = p(V)$. Sea $r \in p(V)$, entonces existe $y \in V$ tal que $r = G(y)$, así que

$$\widetilde{d}(G(x), G(y)) = \inf_{g\in G}\{d(x, gy)\} \leq d(x, y) < \varepsilon,$$

de donde se sigue que $r = G(y) \in \widetilde{V}$, así que $p(V) \subset \widetilde{V}$. Para la otra contención, si $G(y) \in \widetilde{V}$, entonces $\widetilde{d}(G(x), G(y)) = \inf_{g\in G}\{d(x, gy)\} < \varepsilon$, así que existe $z \in G(y)$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$, es decir, tal que $z \in V$. Por lo tanto $G(y) = G(z) \in p(V)$, y podemos concluir que $\widetilde{V} = p(V)$ es abierto en X/G. Por otro lado, sean U un abierto en X/G y $G(x) \in U$. Entonces $x \in p^{-1}(U)$. Como p es continua, $p^{-1}(U)$ es abierto en X, así que existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset p^{-1}(U)$. Para terminar, por el desarrollo anterior y como p es suprayectiva tenemos:

$$B_{\widetilde{d}}(G(x), \varepsilon) = p(B_d(x, \varepsilon)) \subset p(p^{-1}(U)) = U,$$

así que U es abierto en la topología inducida por $\widetilde{d}$ en X/G. Por lo tanto, la topología que induce $\widetilde{d}$ es la topología cociente de X/G.

$\square$

1.5. Rebanadas

En este capítulo introduciremos el concepto de rebanada en un G-espacio, y expondremos algunas de sus propiedades. Esta herramienta será fundamental en el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.5.1. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Un subconjunto S de X es una H-**rebanada** con respecto a su saturación GS si cumple:*

(1) *S es cerrado en GS.*

(2) *S es H-invariante.*

(3) *Para cada $g \in G \setminus H$, la intersección $gS \cap S$ es vacía.*

(4) *GS es abierto en X.*

Si S es una rebanada diremos que el conjunto GS es tubular.

Si además $GS = X$, entonces diremos que S es una H-rebanada global.

Usualmente solo diremos que S es una H-rebanada, dando por sentado que es con respecto a su saturación GS. Cuando sea necesario haremos esta aclaración.

A continuación presentaremos un par de resultados que nos serán de utilidad posteriormente acerca de las G_x-rebanadas cuando G es un grupo compacto y X es un G-espacio Hausdorff. Primero necesitamos demostrar el siguiente resultado previo.

Lema 1.5.2. *Sean G un grupo compacto, X y Y G-espacios, C un subconjunto cerrado de X y $\varphi : C \to Y$ una función continua tal que si para $g \in G$ y $c \in C$ se cumple que $c, gc \in C$, entonces $\varphi(gc) = g\varphi(c)$. Entonces existe una única extensión continua equivariante $\psi : GC \to Y$ de φ.*

Demostración. Como queremos que la extensión $\psi : GC \to Y$ sea equivariante, la única manera posible de definirla es con la regla de correspondencia $\psi(gc) = g\varphi(c)$. Primero veamos que ψ está bien definida. Si $g, h \in G$, $c, d \in C$ son tales que $gc = hd$, entonces $c = g^{-1}hd$, por lo que $\varphi(c) = \varphi(g^{-1}hd) = g^{-1}h\varphi(d)$, i.e. $g\varphi(c) = h\varphi(d)$.

Basta ver que ψ es continua. Sea $(g_\lambda c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en GC que converja a un elemento $x \in GC$. Como G es compacto, existen $g \in G$ y una subred de $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a g. Sin pérdida de generalidad supongamos que es ella misma. Como tomar inversos es continuo en G, y la acción de G en X también lo es, tenemos que $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $g^{-1}x$, por lo que $g^{-1}x \in C$, pues C es cerrado. Así, por la continuidad de φ, el límite de $(\varphi(c_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es $\varphi(g^{-1}x)$. Consecuentemente, como la acción de G en Y es continua, el límite de $(g_\lambda\varphi(c_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es $g\varphi(g^{-1}x) = \psi(gg^{-1}x) = \psi(x)$; es decir el límite de $(\psi(g_\lambda c_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es $\psi(x)$, por lo que ψ es continua.

□

Teorema 1.5.3. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio Hausdorff, $S \subset X$ y $x \in S$. Son equivalentes:*

(1) *S es una G_x-rebanada.*

(2) *GS es abierto en X y existe $f : GS \to G(x)$ una retracción equivariante tal que $f^{-1}(x) = S$.*

Demostración. Supongamos que S es una G_x-rebanada. Es inmediato de la definición que GS es abierto en X. Definimos $\varphi : S \to G(x)$ tal que para todo $y \in S$, $\varphi(y) = x$; φ es continua pues es una función constante. Por la definición de rebanada sabemos que S es cerrado en GS. Además, si $g \in G$ es tal que para alguna $y \in S$, $y, gy \in S$, entonces $gS \cap S \neq \emptyset$ así que $g \in G_x$ de manera que $\varphi(gy) = x = gx = g\varphi(y)$. Por lo tanto, se cumplen todas las hipótesis del Lema 1.5.2, por lo que existe $f : GS \to G(x)$ una extensión continua equivariante de φ.

Notemos que para todo $g \in G$, $f(gx) = gf(x) = g\varphi(x) = gx$, así que f es una retracción. Por último, veamos que $f^{-1}(x) = S$. Como f extiende a φ, sabemos que $S \subset f^{-1}(x)$. Veamos que $f^{-1}(x) \subset S$. Si $gs \in f^{-1}(x)$, con $g \in G$, $s \in S$, entonces $f(gs) = x$, de donde se sigue que $x = gf(s) = gx$; consecuentemente $g \in G_x$ y como S es una G_x-rebanada, $gs \in S$. Así $f^{-1}(x) \subset S$ por lo que $f^{-1}(x) = S$, y f cumple todo lo que queremos.

Veamos que también se cumple la otra implicación. Supongamos que $S \subset G$ y $x \in S$ son tales que GS es abierto en X y existe $f : GS \to G(x)$ una retracción equivariante tal que $f^{-1}(x) = S$. Por hipótesis, GS es abierto en X. Luego, como X es Hausdorff, $\{x\}$ es cerrado en X y f es continua, se tiene que $f^{-1}(x) = S$ es cerrado en GS. Ahora, si $g \in G_x$ y $s \in S$, entonces

$f(gs) = gf(s) = gx = x$, es decir, $gs \in f^{-1}(x) = S$, así que S es G_x-invariante. Por último, veamos que si $g \in G$ es tal que $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existe $s \in S$ tal que $gs \in S$, de manera que $x = f(gs) = gf(s) = gx$, es decir, $g \in G_x$. Por lo tanto S es una G_x-rebanada y el teorema queda demostrado.

□

Proposición 1.5.4. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio Hausdorff. Supongamos que para algún $x \in X$ existe una G_x-rebanada S. Entonces para todo abierto $O \subset G$, OS es abierto en X.*

Demostración. Como S es una G_x-rebanada, GS es abierto en X, así que basta ver que OS es abierto en GS.

Sea $f : GS \to G(x)$ la retracción equivariante cuya existencia nos la garantiza el Teorema 1.5.3, pues S es una G_x-rebanada. Sea $g \in G$, gracias a la equivarianza de f tenemos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(gx) &= \{z \in GS \mid f(z) = gx\} \\ &= \{z \in GS \mid f(g^{-1}z) = x\} \\ &= \{z \in GS \mid g^{-1}z \in f^{-1}(x) = S\} \\ &= \{z \in GS \mid z \in gS\} \\ &= gS. \end{aligned}$$

Ahora, por la Proposición 1.3.2, sabemos que $\overline{\theta_x} : G/G_x \to G(x)$ con regla de correspondencia $\overline{\theta_x}(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo equivariante. También, por la Proposición 1.2.2, sabemos que la proyección orbital $p : G \to G/G_x$ es abierta. Por todo lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\overline{\theta_x}(p(O))) &= f^{-1}(\overline{\theta_x}(OG_x)) \\ &= f^{-1}(O(x)) \\ &= \bigcup_{g \in O} gS \\ &= OS \end{aligned}$$

es abierto en GS, que es lo que queríamos demostrar.

□

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de G_x-rebanadas cuando X es un G-espacio completamente regular y G es un grupo de Lie. Para consultar su demostración, véase [3, pág. 86].

Teorema 1.5.5. *(Teorema de la Rebanada.) Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio completamente regular. Entonces, para todo $x \in X$ existe una G_x-rebanada $S \subset X$ tal que $x \in S$.*

Corolario 1.5.6. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio completamente regular. Entonces, para toda vecindad U del neutro de G y para todo $x \in X$, existe V vecindad de x tal que para toda $y \in V$ existe $u \in U$ que satisface que $u^{-1}G_y u \subset G_x$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U una vecindad del neutro e de G. Por el Teorema de la Rebanada (1.5.5), existe una G_x-rebanada S que contiene a x. Por la Proposición 1.5.4, $V := US$ es abierto en X y además $x \in V$. Afirmamos que V es la vecindad buscada.

Sea $y \in V$. Existen $u \in U$ y $s \in S$ tales que $y = us$. Sea $f : GS \to G(x)$ la retracción equivariante cuya existencia nos la garantiza el Teorema 1.5.3, esta es tal que $f^{-1}(x) = S$; consecuentemente $f(s) = x$. Ahora, veamos que $G_s \subset G_{f(s)}$, pues si $g \in G_s$, entonces $gf(s) = f(gs) = f(s)$. Por otro lado, por la Proposición 1.1.3, $G_y = uG_s u^{-1}$; así que

$$G_y = uG_s u^{-1} \subset uG_{f(s)}u^{-1} = uG_x u^{-1},$$

y el resultado deseado es inmediato. □

1.6. Cubiertas Invariantes

Si G es un grupo y X es un G-espacio, entonces diremos que una cubierta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de X es **invariante** si para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ es G-invariante.

Proposición 1.6.1. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio metrizable y $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta e invariante de X. Entonces existe $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$*

una partición de unidad invariante subordinada a $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$*. Es decir, para cada* $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda : X \to [0,1]$ *es una función* G*-invariante, continua y satisface* $\overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)} \subset U_\lambda$.

Demostración. Como X es metrizable, por el Teorema 1.4.2 X/G es metrizable, de manera que X/G es paracompacto. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $V_\lambda := p(U_\lambda)$, donde $p : X \to X/G$ es la proyección orbital. Como por la Proposición 1.2.2 p es abierta, $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X/G. Por lo tanto, existe una partición de unidad $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ subordinada a la cubierta $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos $\varphi_\lambda : X \to [0,1]$ como $\varphi_\lambda = \psi_\lambda \circ p$. Es claro que $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una partición de unidad pues $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ lo es; afirmamos que esta es la que buscamos. Para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ es invariante, así que $p^{-1}(p(U_\lambda)) = U_\lambda$, además $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ está subordinada a la cubierta $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ así que tenemos lo siguiente:

$$\overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)} = \overline{p^{-1}\big(\psi^{-1}((0,1])\big)} \subset p^{-1}\big(\overline{\psi^{-1}((0,1])}\big) \subset p^{-1}(V_\lambda) = U_\lambda,$$

por lo que $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ está subordinada a $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Para terminar, veamos que para cada $\lambda \in \Lambda$, φ_λ es G-invariante; esto se sigue de inmediato por la invarianza de p. Sean $g \in G$ y $x \in X$, entonces:

$$\varphi_\lambda(gx) = \psi_\lambda(p(gx)) = \psi_\lambda(p(x)) = \varphi_\lambda(x).$$

□

Si todos los elementos de una cubierta son conjuntos tubulares, entonces diremos que la cubierta es **tubular**. Una clase de cubiertas tubulares que es de nuestro interés son las cubiertas G-canónicas, que definimos a continuación.

Definición 1.6.2. *Sean* G *un grupo compacto y* X *un* G*-espacio. Supongamos que* U *es un abierto de* X *y* $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es una cubierta tubular de* U*, tal que para todo* $\lambda \in \Lambda$, S_λ *es una* H_λ*-rebanada. Diremos que la cubierta* $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es* G***-canónica*** *con respecto a* X *si:*

(a) $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es localmente finita.*

(b) *Para cualquier* $\lambda \in \Lambda$ *existe* $x \in U$ *tal que* $H_\lambda = G_x$.

(c) *Para cualquier punto* $a \in X \setminus U$ *y cualquier vecindad* V_a *de* a *en* X*, existe una vecindad* W_a *de* a *en* X *tal que* $W_a \subset V_a$ *y tal que si* $g \in G$ *cumple que* $gS_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$*, entonces se cumple lo siguiente:*

(1) $gS_\lambda \subset V_a$.

(2) *Existe* $h \in G$ *tal que* $ha \in V_a$ *y* $H_\lambda \subset g^{-1}G_{ha}g$.

En el capítulo 3 profundizaremos en la existencia y utilidad de tales cubiertas.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales e Hiperespacios

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos fuera de la teoría de G-espacios que necesitaremos a través del texto. En la sección 2.1 introduciremos el concepto de espacio topológico vectorial. En la sección 2.2 expondremos el Teorema de Extensión de Dugundji (cuya demostración original puede ser consultada en [5]). Finalmente, en la sección 2.3 abordaremos conceptos referentes a hiperespacios, que pueden ser profundizados en [2].

2.1. Espacios Vectoriales

Diremos que un espacio vectorial V sobre un campo F ($F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$) es un **espacio topológico vectorial** si la suma

$$V \times V \to V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

y la multiplicación por escalares

$$F \times V \to V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

del espacio vectorial V son funciones continuas.

Ejemplo 2.1.1. Si X es un espacio vectorial normado entonces las propiedades de la norma garantizan la continuidad de las operaciones en X, así que X es un espacio topológico vectorial.

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $C \subset V$, diremos que C es **absolutamente convexo** si las siguientes dos propiedades se cumplen:

(1) C es **convexo**, es decir, para todo $t \in [0,1]$ y $u, v \in C$, $((1-t)u+tv) \in C$.

(2) C es **balanceado**, es decir, para todo $t \in [-1,1]$ y $v \in C$, $tv \in C$.

En esta misma situación, diremos que C es **absorbente** si

$$\bigcup_{t>0} tC = V.$$

Un espacio topológico vectorial es **localmente convexo** si el origen tiene una base local de vecindades absolutamente convexas y absorbentes.

Ejemplo 2.1.2. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces $\big\{B_X(0,r) \mid r>0\big\}$ forman una base local para el origen de vecindades absolutamente convexas y absorbentes, por lo que X es localmente convexo.

Si X es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, denotaremos por X^* a su **dual**, es decir:

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Claramente X^* es un espacio vectorial. Además la función

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} \{|f(x)|\} = \sup_{\|x\|\leq 1} \{|f(x)|\} = \sup_{x\neq 0} \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} \right\}$$

define una norma en X^*, de manera que $(X^*, \|\cdot\|_*)$ es un espacio normado.

2.2. El Teorema de Extensión de Dugundji

Diremos que el espacio topológico Y es un **extensor absoluto** de la clase $\mathcal{K}$ de espacios topológicos ($Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{K})$) si para cualesquiera $X \in \mathcal{K}$, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to Y$ continua, existe $F : X \to Y$ continua tal que $F|_A = f$. Análogamente, diremos que Y es un **extensor absoluto de vecindad** de la clase $\mathcal{K}$ de espacios topológicos ($Y \in \mathrm{ANE}(\mathcal{K})$) si para cualesquiera $X \in \mathcal{K}$, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to Y$ continua, existen $L \subset X$ vecindad de A y $F : L \to Y$ continua tales que $F|_A = f$. Si Y es un extensor absoluto (de vecindad) para la clase de los espacios metrizables, se denota simplemente como $Y \in \mathrm{AE}$ ($Y \in \mathrm{ANE}$).

El teorema de Tietze-Urysohn nos proporciona un primer ejemplo de una familia de extensores absolutos para la clase de los espacios normales.

Ejemplo 2.2.1. (Teorema de Tietze-Urysohn) Sean $\mathcal{N}$ la clase de los espacios normales e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Entonces $I \in \mathrm{AE}(\mathcal{N})$.

El Teorema de Extensión de Dugundji es de alguna manera una generalización del teorema anterior, pues nos proporciona condiciones suficientes para que un espacio sea un extensor absoluto para la clase de los espacios metrizables.

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Extensión de Dugundji.) Sean A un subconjunto cerrado del espacio metrizable X y V un subconjunto convexo de algún espacio topológico vectorial localmente convexo Z. Entonces cada función continua $f : A \to V$ admite una extensión continua $F : X \to V$, en otras palabras, $V \in AE$.*

La demostración de este teorema la obtendremos al final del capítulo 3 como consecuencia de nuestra generalización a G-espacios de este resultado.

2.3. Hiperespacios

Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Por $cb(X)$ denotaremos a la familia de subconjuntos cerrados, acotados, convexos y no vacíos de X. Por $cc(X)$ denotaremos a la familia de subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de X. Es claro que $cc(X) \subset cb(X)$.

Ejemplo 2.3.1. $cb(\mathbb{R}^n) = cc(\mathbb{R}^n)$.

A $cb(X)$ lo equiparemos con la **métrica de Hausdorff** $d_H : cb(X) \times cb(X) \to \mathbb{R}$ asociada a d, definida como sigue:

$$d_H(A, B) = \max\left\{ \sup_{a \in A}\{d(a, B)\}, \sup_{b \in B}\{d(b, A)\} \right\},$$

o equivalentemente:

$$d_H(A, B) = \inf\left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; X \subset \bigcup_{y \in Y} B_d(y, \varepsilon),\; Y \subset \bigcup_{x \in X} B_d(x, \varepsilon) \right\}.$$

Para ver que, efectivamente, d_H es una métrica y estas definiciones son equivalentes, véase [2, pág. 85-86].

En el capítulo 4 estudiaremos en más detalle la topología inducida en $cb(X)$ por d_H y mostraremos que lo podemos encajar isométricamente en un espacio de Banach. Más aún, el encaje también será un encaje algebraico como un cono.

Para poder definir tal encaje, necesitamos definir una suma en $cb(X)$ de manera que sea cerrada. Observemos que si A y B son conjuntos cerrados y convexos, su suma usual

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\; b \in B\}$$

no necesariamente es un conjunto cerrado. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, si consideramos $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $B = \left\{(x, y) \;\middle|\; x > 0,\; y \geq \frac{1}{x}\right\}$, se cumple que A y B son cerrados y convexos, sin embargo su suma

$$\begin{aligned} A+B &= \left\{ (a,0)+(x,y) \;\middle|\; a\in\mathbb{R},\ x>0,\ y\geq \frac{1}{x} \right\} \\ &= \left\{ (a+x,y) \;\middle|\; a\in\mathbb{R},\ x>0,\ y\geq \frac{1}{x} \right\} \\ &= \mathbb{R}\times(0,\infty), \end{aligned}$$

es un subconjunto abierto que no es todo $\mathbb{R}^2$, así que no es cerrado.

Por esta razón, para cualesquiera dos subconjuntos cerrados A y B de un espacio vectorial topológico definimos su suma $\oplus$:

$$A\oplus B=\overline{A+B}.$$

En el capítulo 4, cuando estudiemos a $cb(X)$ en el contexto del Teorema de Hörmander (4.2.4) trabajaremos con la suma $\oplus$ pues una consecuencia inmediata de su definición es que para todo $A,B\in cb(X)$ se cumple que $A\oplus B\in cb(X)$.

Parte II

El Teorema Equivariante de Dugundji

Capítulo 3

El Teorema Equivariante de Dugundji

El propósito de este capítulo es demostrar el resultado principal de esta tesis, la versión equivariante del Teorema de Extensión de Dugundji para G-espacios, introducida por S. Antonyan en [1].

Durante el desarrollo de este capítulo, G denotará a un grupo compacto de Lie. También, diremos función equivariante para referirnos a las funciones que son equivariantes y además son continuas.

3.1. Lemario

A continuación probaremos una serie de resultados necesarios para la demostración del teorema principal de este capítulo.

Lema 3.1.1. *Cualquier cubierta abierta e invariante (tubular) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ del G-espacio paracompacto X tiene un refinamiento abierto, invariante (tubular) y localmente finito.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta e invariante del G-espacio paracompacto X. Sea $p : X \to X/G$ la proyección orbital. Sabemos que p es continua, y por las Proposiciones 1.2.2 y 1.3.1, p es abierta y perfecta; de manera que X/G es paracompacto al ser la imagen perfecta de un espacio paracompacto (véase [6, pág. 311]).

Como p es abierta y suprayectiva, $\{p(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de X/G, así que tiene un refinamiento localmente finito $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Al ser esta última cubierta de X/G, $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es cubierta abierta de X. Además, como para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $V_\lambda \subset p(U_\alpha)$, tenemos que $p^{-1}(V_\lambda) \subset p^{-1}(p(U_\alpha)) = GU_\alpha = U_\alpha$. De esta manera, $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ refina a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Veamos que $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita. Sea $x \in X$, como $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita, existe V vecindad de $p(x)$ que solo intersecta a un número finito de abiertos de la cubierta $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Si definimos $W := p^{-1}(V)$, W es una vecindad de x. Afirmamos que esta solo intersecta a un número finito de elementos de $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. En efecto, si λ es tal que $W \cap p^{-1}(V_\lambda) \neq \emptyset$, entonces $p(W)\cap p(p^{-1}(V_\lambda)) \neq \emptyset$. Pero $p(W)\cap p(p^{-1}(V_\lambda)) \subset V \cap V_\lambda$; por lo que a lo más hay un número finito de índices tales que $p(W) \cap p(p^{-1}(V_\lambda)) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita.

Por último, veamos que es invariante: Sean $\lambda \in \Lambda$, $g \in G$ y $y \in p^{-1}(V_\lambda)$, entonces:

$$\begin{aligned} gy \in p^{-1}(V_\lambda) &\Leftrightarrow p(gy) \in V_\lambda \\ &\Leftrightarrow G(gy) \in V_\lambda \\ &\Leftrightarrow G(y) \in V_\lambda \\ &\Leftrightarrow y \in p^{-1}(V_\lambda), \end{aligned}$$

de manera que $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el refinamiento invariante localmente finito que buscamos.

Ahora, supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es además tubular. Entonces para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $U_\alpha = GS_\alpha$, donde S_α es una H_α-rebanada. Veamos que nuestro refinamiento $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ también es tubular. Sea $\lambda \in \Lambda$. Existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $p^{-1}(V_\lambda) \subset U_\alpha = GS_\alpha$. Notemos que, al ser $p^{-1}(V_\lambda)$ invariante, $Q_\lambda := p^{-1}(V_\lambda) \cap S_\alpha$ cumple:

$$\begin{aligned} GQ_\lambda &= G(p^{-1}(V_\lambda) \cap S_\alpha) \\ &= p^{-1}(V_\lambda) \cap GS_\alpha \\ &= p^{-1}(V_\lambda). \end{aligned}$$

Afirmamos que Q_λ es una H_α-rebanada (y por lo tanto $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es tubular):

(1) *Q_λ es cerrado en GQ_λ.*

Sabemos que $GS_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda) = G(S_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda))$. Como S_α es una H_α-rebanada, se sigue que $GS_\alpha \setminus S_\alpha$ es abierto en GS_α, que a su vez es abierto en X, así que $GS_\alpha \setminus S_\alpha$ es abierto en X. Así:

$$\begin{aligned}(GS_\alpha \setminus S_\alpha) \cap p^{-1}(V_\lambda) &= (GS_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda)) \setminus (S_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda)) \\ &= G(S_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda)) \setminus (S_\alpha \cap p^{-1}(V_\lambda)) \\ &= GQ_\lambda \setminus Q_\lambda.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $GQ_\lambda \setminus Q_\lambda$ es abierto en X, por lo que también lo es en GQ_λ. Consecuentemente, Q_λ es cerrado en GQ_λ.

(2) *Q_λ es H_α-invariante.*

S_α es H_α-invariante y $p^{-1}(V_\lambda)$ es invariante; así que para $h \in H_\alpha$ y $x \in Q_\lambda = p^{-1}(V_\lambda) \cap S_\alpha$, se sigue que $hx \in p^{-1}(V_\lambda) \cap S_\alpha = Q_\lambda$.

(3) *Para todo $g \in G \setminus H_\alpha$, $gQ_\lambda \cap Q_\lambda = \emptyset$.*

Sea $g \in G \setminus H_\alpha$, entonces

$$gQ_\lambda \cap Q_\lambda \subset gS_\alpha \cap S_\alpha = \emptyset.$$

(4) *GQ_λ es abierto en X.*

Como $GQ_\lambda = p^{-1}(V_\lambda)$, esto es claro.

Por lo tanto $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es tubular.

$\square$

Lema 3.1.2. *Sean X un G-espacio metrizable y U un subconjunto abierto de X tales que $U \neq X$. Entonces existe una métrica d compatible con la topología de X tal que para cada $x \in U$, existe una G_x-rebanada R_x que lo contiene y que cumple que* $\operatorname{diám} R_x \leq \frac{1}{2} d(x, X \setminus U)$.

Demostración. Sea d una métrica G-invariante compatible con la topología de X, la cual existe por el Teorema 1.4.1. Afirmamos que esta es la métrica buscada.

Sean $x \in U$ y Q_x una G_x-rebanada que contenga a x (Teorema de la Rebanada 1.5.5). Definamos $r := \frac{1}{4}d(x, X \setminus U)$ y $R_x := Q_x \cap B_d(x, r)$. Es claro que $\operatorname{diám} R_x \leq 2r = \frac{1}{2}d(x, X \setminus U)$, así que R_x cumple la condición deseada.

Veamos que R_x es una G_x-rebanada que contiene a x:

(1) *R_x es cerrado en GR_x.*

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de R_x que converja a algún $y \in GR_x$. Como $R_x \subset Q_x$ y Q_x es cerrado en GQ_x, tenemos que $y \in Q_x$. Como $y \in GR_x$, existen $g \in G$, $z \in R_x$ tales que $y = gz$. Entonces $y \in Q_x \cap gQ_x$ y como Q_x es una G_x-rebanada, se sigue que $g \in G_x$; de donde tenemos que, por la invarianza de d:

$$d(x, y) = d(gx, gy) = d(x, z) < r.$$

Por lo tanto $y \in Q_x \cap B_d(x, r) = R_x$ y R_x es cerrado en GR_x.

(2) *R_x es G_x-invariante.*

Sean $g \in G_x$ y $z \in R_x$. Como Q_x es G_x-invariante y $R_x \subset Q_x$, $gz \in Q_x$. Además, por la invarianza de d, $d(x, gz) = d(gx, gz) = d(x, z) < r$. Así, $gz \in Q_x \cap B_d(x, r) = R_x$ y R_x es G_x-invariante.

(3) *Para todo $g \in G \setminus G_x$, $gR_x \cap R_x = \emptyset$.*

Sea $g \in G \setminus G_x$, entonces

$$gR_x \cap R_x \subset gQ_x \cap Q_x = \emptyset.$$

(4) *GR_x es abierto en X.*

Procederemos por contradicción, supongamos que $X \setminus GR_x$ no es cerrado. Como $X \setminus GR_x$ no es cerrado, existe una sucesión $(g_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $GX \setminus GR_x$ que converge a algún elemento gu, tal que $g \in G$, $u \in R_x$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos $h_n := g^{-1}g_n$. Como la acción de G en X es continua, sabemos que la sucesión $(h_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u. Notemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n x_n \notin GR_x, \tag{3.1}$$

pues si para alguna $n \in \mathbb{N}$, $h_n x_n \in GR_x$, entonces $g_n x_n = gh_n x_n \in GR_x$, lo cual sabemos que no sucede.

Por otro lado, sabemos que $u \in R_x \subset Q_x \subset GQ_x$, al ser Q_x una G_x-rebanada, este último es abierto en X. Como $(h_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_0$, $h_n x_n \in GQ_x$, de tal manera que para toda $n \geq N_0$ existen $j_n \in G$ y $y_n \in Q_x$ tales que $h_n x_n = j_n y_n$. Entonces $(j_n y_n)_{n\geq N_0}$ converge a u. Como G es compacto, existen $j \in G$ y una subsucesión de $(j_n)_{n\geq N_0}$ que converge a j. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es ella misma. Como G es un grupo topológico, tenemos también que $(j_n^{-1})_{n\geq N_0}$ converge a j^{-1}. Por la continuidad de la acción tenemos que $(j_n^{-1} j_n y_n)_{n\geq N_0}$ tiende a $j^{-1}u$, es decir, $(y_n)_{n\geq N_0}$ tiende a $j^{-1}u$.

Q_x es cerrado en GQ_x, además para toda $n \geq N_0$, $y_n \in Q_x$ y $j^{-1}u \in GR_x \subset GQ_x$, por lo que $j^{-1}u \in Q_x$. Así $j^{-1}u \in j^{-1}Q_x \cap Q_x$ y como Q_x es una G_x-rebanada, se sigue que $j^{-1} \in G_x$, o equivalentemente, $j \in G_x$. Entonces podemos deducir que $j^{-1}u \in B_d(x, r)$ pues

$$d(j^{-1}u, x) = d(u, jx) = d(u, x) < r$$

ya que $u \in R_x \subset B_d(x, r)$.

Para terminar veamos que como $(y_n)_{n\geq N_0}$ converge a $j^{-1}u$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N_1$, $y_k \in B_d(x, r)$. Así, tenemos que para toda $k \geq N_1$, $y_k \in Q_x \cap B_d(x, r) = R_x$, de manera que

$$h_k x_k = j_k y_k \in GR_x,$$

lo cual contradice (3.1). Esta contradicción nos permite concluir que $X \setminus GR_x$ es cerrado y por lo tanto GR_x es abierto en X.

□

Lema 3.1.3. *Para cada abierto invariante de un G-espacio metrizable X, existe una cubierta G-canónica de él con respecto a X.*

Demostración. Sea U un abierto invariante de X. Como X es un espacio metrizable, es completamente regular. Si $U = X$, por el Teorema de la Rebanada (1.5.5) existe $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta tubular de X con G_x-rebanadas. Por el Lema 3.1.1, esta tiene un refinamiento tubular $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ localmente finito. Dicho refinamiento es la cubierta G-canónica buscada.

Supongamos que $U \neq X$. Sea d una métrica G-invariante de X, la cual existe por el Teorema 1.4.1. Para cada $x \in U$, sea R_x una G_x-rebanada que lo contenga y tal que diám $R_x \leq \frac{1}{2}d(x, X \setminus U)$. La existencia de tal rebanada está garantizada por el Lema 3.1.2.

Observemos que $R_x \subset U$, pues para cualquier $y \in R_x$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq \text{diám}\, R_x \\ &\leq \frac{1}{2}d(x, X/U) \\ &< d(x, X/U). \end{aligned}$$

Para toda $x \in U$, R_x es una G_x-rebanada que contiene a x. Además, $GR_x \subset U$, pues U es invariante y $R_x \subset U$, de manera que GR_x es abierto en U y $\{GR_x\}_{x\in U}$ es una cubierta tubular de U. Como U es metrizable, es paracompacto así que por el Lema 3.1.1, existe $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un refinamiento tubular localmente finito de $\{GR_x\}_{x\in U}$. Como mostramos en la prueba del lema, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $x \in U$ tal que $U_\lambda = GS_\lambda$, con $S_\lambda = U_\lambda \cap R_x$ una G_x-rebanada; de manera que el refinamiento $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cumple las primeras dos condiciones de la definición de cubierta G-canónica. Para ver que esta es nuestra cubierta buscada, basta probar que cumple la última condición.

Sean $a \in X \setminus U$ y V_a una vecindad de a en X. Sabemos que $\theta_a : G \to X$ definida como $\theta_a(g) = ga$ es continua. Entonces, existe una vecindad E del neutro e en G tal que para todo $g \in E$, $ga \in V_a$. Después, por el Corolario 1.5.6 sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $w \in B_d(a, \varepsilon)$ existe $h \in E$ tal que $h^{-1}G_w h \subset G_a$, de donde se sigue que:

$$G_w \subset hG_a h^{-1} = G_{ha}. \tag{3.2}$$

Sin pérdida de generalidad, como V_a es abierto, podemos suponer que ε es suficientemente pequeño para que $B_d(a, \varepsilon) \subset V_a$.

Definimos $W_a := B_d(a, \frac{\varepsilon}{4})$. Afirmamos que W_a es la vecindad que satisface la definición de cubierta G-canónica. Supongamos que $g \in G$ y $\lambda \in \Lambda$ son tales que $gS_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$. Veamos primero que $gS_\lambda \subset V_a$. Sea $y \in gS_\lambda \cap W_a$. Sabemos que existe $x \in U$ tal que

$$S_\lambda = U_\lambda \cap R_x.$$

Ahora, como $y \in W_a$:

$$d(a, gx) \leq d(a, y) + d(y, gx) < \frac{\varepsilon}{4} + d(y, gx). \tag{3.3}$$

Como U es invariante, entonces $X \setminus U$ también lo es. Observemos que para todo $z \in X \setminus U$, por la invarianza de $X \setminus U$ y de d:

$$d(gx, z) = d(x, g^{-1}z) \geq \inf_{w \in X \setminus U} \{d(x, w)\}.$$

Por lo tanto

$$d(gx, X \setminus U) = \inf_{w \in X \setminus U} \{d(gx, w)\} \geq \inf_{w \in X \setminus U} \{d(x, w)\} = d(x, X \setminus U).$$

En consecuencia, como $\operatorname{diám} R_x \leq \frac{1}{2} d(x, X \setminus U)$ y utilizando de nuevo la invarianza de d, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{diám}(gR_x) &= \operatorname{diám}(R_x) \\ &\leq \frac{1}{2} d(x, X \setminus U) \\ &\leq \frac{1}{2} d(gx, X \setminus U). \end{aligned}$$

Entonces

$$\operatorname{diám}(gR_x) \leq \frac{1}{2} d(gx, X \setminus U). \tag{3.4}$$

Además, $y \in gS_\lambda \subset gR_x$ y $gx \in gR_x$ así que $d(y, gx) \leq \operatorname{diám}(gR_x)$. Como $a \in X \setminus U$, $d(gx, X \setminus U) \leq d(gx, a)$; así que por (3.4) se sigue que $d(y, gx) \leq \frac{1}{2} d(gx, a)$. Juntando esto último con (3.3) tenemos:

$$d(a, gx) < \frac{\varepsilon}{4} + d(y, gx) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} d(gx, a),$$

por lo tanto

$$d(a, gx) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, de (3.4) y lo anterior tenemos:

$$\text{diám}(gR_x) \leq \frac{1}{2}d(gx, X \setminus U) \leq \frac{1}{2}d(gx, a) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $gS_\lambda \subset gR_x$, basta probar que $gR_x \subset B_d(a, \varepsilon) \subset V_a$. Sea $z \in gR_x$, entonces, como $y \in gS_\lambda \cap W_a$:

$$d(a, z) \leq d(a, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{4} + \text{diám}(gR_x) < 2(\frac{\varepsilon}{4}) < \varepsilon,$$

así que $gS_\lambda \subset gR_x \subset V_a$, y W_a cumple la primera de las condiciones que queremos.

Para ver que cumple la segunda, veamos que $gx \in gR_x \subset B_d(a, \varepsilon)$, así que por (3.2), existe $h \in E \subset G$ tal que $G_{gx} \subset G_{ha}$. Pero $G_x = g^{-1}G_{gx}g$; así que $G_x \subset g^{-1}G_{ha}g$. Por último, $ha \in V_a$ pues $h \in E$. Por lo tanto $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es la cubierta G-canónica buscada.

□

Lema 3.1.4. *Sean X un G-espacio Hausdorff, $H \subset G$ tal que existe $x_0 \in X$ con $H = G_{x_0}$, y S una H-rebanada global. Entonces existe una única función equivariante $\widetilde{g} : X \to G/H$ tal que $x \in gS$ para cada $g \in \widetilde{g}(x)$.*

Demostración. Sea S una H-rebanada global, es decir, S cumple que $GS = X$. Entonces, para cada $x \in X$ existe $g_x \in G$ tal que $x \in g_xS$.

Definimos

$$\widetilde{g} : X \to G/H$$
$$x \mapsto g_xH.$$

Veamos que $\widetilde{g}$ está bien definida. Si $g \in G$, $h \in G$ son tales que $x \in gS \cap hS$, entonces existen s, t elementos de S tales que $x = gs = ht$, de donde se sigue que $s = g^{-1}ht$. Así, $s \in S \cap (g^{-1}h)S$ y como S es una H-rebanada, esto implica que $g^{-1}h \in H$, es decir, $gH = hH$. De aquí podemos concluir que $\widetilde{g}$ está bien definida.

Como queremos que $\widetilde{g}$ sea tal que para cada $g \in \widetilde{g}(x)$, $x \in gS$, la función que definimos es la única posible, pues por el párrafo anterior todos los g

tales que $x \in gS$ tienen que ser elementos de la misma clase lateral; así que $\widetilde{g}$ existe y es única.

Veamos que $\widetilde{g}$ es continua. Sean $x \in X$, U una vecindad de $\widetilde{g}(x)$ en G/H, y $p : G \to G/H$ la proyección orbital. Definimos $E := p^{-1}(U)$, que es abierto en G pues p es continua. Definimos $W := ES$, por la Proposición 1.5.4, W es abierto en X. Veamos que W es una vecindad de x tal que $\widetilde{g}(W) \subset U$, probando la continuidad de $\widetilde{g}$. Como $\widetilde{g}(x) \in U$, existe $g_x \in G$ tal que $x \in g_x S$ y $g_x H \in U$. Entonces, $g_x \in p^{-1}(U) = E$, de donde $x \in ES = W$. Por otra parte, si $y \in W$, existe $g \in E$ tal que $y \in gS$. Luego $\widetilde{g}(y) = gH$, y como $g \in E = p^{-1}(U)$, $p(g) = gH \in U$, es decir, $\widetilde{g}(y) \in U$. Por lo tanto $\widetilde{g}$ es continua.

Por último, veamos que $\widetilde{g}$ es equivariante: sean $x \in X$, $h \in G$ y $g \in G$ tal que $x \in gS$. Entonces

$$h\widetilde{g}(x) = h(gH) = (hg)H = \widetilde{g}(hx).$$

$\square$

Lema 3.1.5. *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de G. Definimos a $X[H]$ como el conjunto de H-puntos fijos del G-espacio X, es decir*

$$X[H] = \{x \in X \mid \forall h \in H, hx = x\}.$$

Entonces la función $f : G/H \times X[H] \to X$ definida por

$$f(gH, x) = gx$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Sea $x \in X[H]$ y sean $g \in G$, $h \in G$ tales que $gH = hH$. Entonces $g^{-1}h \in H$ por lo que $g^{-1}hx = x$, es decir, $f(hH, x) = hx = gx = f(gH, x)$. Por lo tanto f está bien definida.

Ahora veamos que f es continua. Sean $p : G \to G/H$ la proyección orbital y U un abierto de X. Denotemos por $\theta : G \times X[H]$ a la restricción de la acción a $G \times X[H]$. θ es continua, así que $\theta^{-1}(U)$ es abierto en $G \times X[H]$. Luego, denotemos por $Id_{X[H]}$ a la identidad en $X[H]$, veamos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{(gH,x) \in G/H \times X[H] \bigm| gx \in U\} \\ &= \{p \times Id_{X[H]}(g,x) \mid (g,x) \in G \times X[H],\ gx \in U\} \\ &= \{p \times Id_{X[H]}(g,x) \mid (g,x) \in \theta^{-1}(U)\} \\ &= p \times Id_{X[H]}(\theta^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Para terminar, recordemos que por la Proposición 1.2.2 p es abierta, e $Id_{X[H]}$ también lo es, por lo que $p \times Id_{X[H]}$ es abierta (pues manda abiertos básicos en abiertos básicos); de manera que $p \times Id_{X[H]}(\theta^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ es abierto en X y por lo tanto f es continua.

$\square$

3.2. El Teorema Equivariante de Dugundji

Gracias al trabajo desarrollado en la sección anterior, estamos listos para presentar la generalización del Teorema de Extensión de Dugundji y también algunos de sus corolarios.

Diremos que el G-espacio Y es un **extensor absoluto** de la clase $\mathcal{K}$ de G-espacios topológicos ($Y \in G$-AE($\mathcal{K}$)) si para cualesquiera $X \in \mathcal{K}$, $A \subset X$ cerrado e invariante y $f : A \to Y$ continua y equivariante, existe $F : X \to Y$ continua y equivariante tal que $F|_A = f$. De la misma manera, diremos que Y es un **extensor absoluto de vecindad** de la clase $\mathcal{K}$ de G-espacios topológicos ($Y \in G$-ANE($\mathcal{K}$)) si para cualesquiera $X \in \mathcal{K}$, $A \subset X$ cerrado e invariante y $f : A \to Y$ continua y equivariante, existen $L \subset X$ vecindad invariante de A y $F : L \to Y$ continua y equivariante tales que $F|_A = f$. Si Y es un extensor absoluto (de vecindad) para la clase de los G-espacios metrizables, simplemente lo denotaremos como $Y \in G$-AE ($Y \in G$-ANE).

Sean Y un G-espacio tal que $Y \in G$-AE($\mathcal{K}$) y Z un G-espacio homeomorfo a Y, (es decir, existe un homeomorfismo $\varphi : Y \to Z$ equivariante tal que $\varphi^{-1} : Z \to Y$ también es equivariante). Sean $X \in \mathcal{K}$, $A \subset X$ cerrado e invariante y $f : A \to Z$ una función equivariante. En el siguiente diagrama sean $h : A \to Y$ tal que $h = \varphi^{-1} \circ f$ y $H : X \to Y$ una extensión equivariante de esta función; donde $\varphi : Y \to Z$ es el homeomorfismo equivariante.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi\circ H"'] & Z \end{tikzcd}$$

Como el diagrama conmuta, es claro que $F : X \to Z$ tal que $F = \varphi \circ H$ es una extensión equivariante de f, así que $Z \in G$-AE($\mathcal{K}$). Podemos hacer un desarrollo análogo para cualesquiera dos G-ANE($\mathcal{K}$) homeomorfos. Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sean Y y Z dos G-espacios homeomorfos. Si $Y \in G$-AE($\mathcal{K}$) ($Y \in G$-ANE($\mathcal{K}$)) entonces $Z \in G$-AE($\mathcal{K}$) ($Z \in G$-ANE($\mathcal{K}$)).*

Diremos que un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un **G-espacio vectorial** si es un G-espacio y además la acción de G en V es lineal, es decir, para todo $g \in G$, $u, v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$g(\lambda u + v) = \lambda gu + gv.$$

Teorema 3.2.2. *(Teorema Equivariante de Dugundji.) Sean A un subconjunto cerrado e invariante del G-espacio metrizable X, y V un subconjunto convexo e invariante de algún G-espacio vectorial localmente convexo Z. Entonces cada función continua y equivariante $f : A \to V$ admite una extensión continua y equivariante $F : L \to V$ a alguna vecindad invariante L de A en X. En otras palabras, $V \in G$-ANE.*

Demostración. Sea d una métrica invariante compatible con la topología de X, que existe por el Teorema 1.4.1.

Sean $a \in A$ y S una G_a-rebanada que contiene a a (Teorema de la Rebanada 1.5.5). Notemos que GS es una vecindad de $G(a)$. Después, notemos que por el Corolario 1.5.6, tenemos que $L_a := GS$ cumple que para todo $x \in L_a$ existe $g \in G$ tal que $G_x \subset gG_ag^{-1}$.

Definimos

$$L := \bigcup_{a\in A} L_a.$$

Como para toda $a \in A$, $GL_a = L_a$, L es una vecindad invariante de A en X.

Afirmamos que L es la vecindad invariante buscada donde podemos definir la extensión equivariante $F : L \to V$ de f.

Sea $U := L \setminus A$. U es invariante pues A y L lo son. Además como A es cerrado, por el Lema 3.1.3, existe una cubierta G-canónica $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de U con respecto a L. Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideramos a H_λ el subgrupo cerrado de G para el cual S_λ es una H_λ-rebanada. Por último, denotamos por A_λ al conjunto de puntos de A que quedan fijos con respecto a H_λ, es decir:

$$A_\lambda := \{a \in A \mid H_\lambda \subset G_a\}.$$

Veamos que para todo $\lambda \in \Lambda$, A_λ es cerrado y distinto de vacío. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$. Al ser $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ G-canónica, sabemos que existe $x_0 \in U$ con $H_{\lambda_0} = G_{x_0}$. Como $x_0 \in U = L \setminus A$, $x_0 \in L_a$ para algún $a \in A$. Entonces por la propiedad de L_a, sabemos que existe $g \in G$ tal que $G_{x_0} \subset gG_ag^{-1}$, y por la Proposición 1.1.3 $gG_ag^{-1} = G_{ga}$. Por lo tanto, tenemos que $H_{\lambda_0} \subset G_{ga}$. De esto último, se sigue que $ga \in A_{\lambda_0}$, por lo que A_{λ_0} es distinto de vacío. Para ver que es cerrado, consideramos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A_{λ_0} que converja a a, para algún $a \in X$. Ahora, $A_{\lambda_0} \subset A$ y A es cerrado, de manera que $a \in A$. Sea $h \in H_{\lambda_0}$; para ver que $a \in A_{\lambda_0}$, basta ver que $ha = a$. Para esto, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $ha_n = a_n$ pues $a_n \in A_{\lambda_0}$, por lo que $(ha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a a. Por otra parte, como la acción de G en X es continua, tenemos que $(ha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a ha. Por último, como X es metrizable, el límite de $(ha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es único, y podemos concluir que $ha = a$. Por lo tanto A_{λ_0} es cerrado.

Sea $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una partición de unidad conformada por funciones invariantes subordinada a la cubierta $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, es decir, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)} \subset GS_\lambda$(Proposición 1.6.1). Esto implica que si $\varphi_\lambda(x) \neq 0$ entonces $x \in GS_\lambda$, y como $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finita, se sigue que para cada $x \in U$, $\varphi_\lambda(x) \neq 0$ sólo para un número finito de índices. Para cada $\lambda \in \Lambda$ elegimos $x_\lambda \in S_\lambda$ y $a_\lambda \in A_\lambda$ tales que $d(x_\lambda, a_\lambda) \leq 2d(x_\lambda, A_\lambda)$.

Entonces podemos definir $F : L \to Z$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ \displaystyle\sum_{\substack{\lambda \\ \varphi_\lambda(x) \neq 0}} \varphi_\lambda(x) f(g_\lambda a_\lambda), & \text{si } x \in U, \end{cases}$$

donde $g_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(x)$ y $\widetilde{g}_\lambda : GS_\lambda \to G/H_\lambda$ es la función del Lema 3.1.4 con respecto al G-espacio GS_λ.

Veamos que F está bien definida: si g, h son elementos de $\widetilde{g}_\lambda(x)$, entonces $h^{-1}g \in H_\lambda$ y como $a_\lambda \in A_\lambda$, se sigue que $h^{-1}ga_\lambda = a_\lambda$, es decir $ga_\lambda = ha_\lambda$. De esta manera, podemos elegir cualquier representante g_λ de $\widetilde{g}_\lambda(x)$ para la función. Además, como A es G-invariante, $h_\lambda a_\lambda$ está en el dominio de f, por lo que F está bien definida. Mas aún, notemos que como V es convexo y el contradominio de f es V, entonces $F(L) \subset V$ y podemos restringir el codominio de F como $F : L \to V$, como en el enunciado del teorema.

Por construcción F extiende a f. A continuación demostraremos que F es continua. Primero, F es continua para todo $a \in \mathrm{Int}(A)$, pues f es continua. Veamos que es continua en $A \cap \overline{U}$. Sean $a \in A \cap \overline{U}$ y Y una vecindad de $F(a)$ en Z, sin pérdida de generalidad podemos suponer que Y es convexa pues Z es localmente convexo. Después, como $a \in A$, $F(a) = f(a)$ y como f es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(A \cap B_d(a, \varepsilon)) \subset Y. \tag{3.5}$$

Definimos $V_a := B_d(a, \frac{\varepsilon}{6})$. Como $a \in A$, $a \notin U$, y como $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta G-canónica de U se sigue que existe W_a vecindad de a en L tal que $W_a \subset V_a$ y tal que si $g \in G$ cumple $gS_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$ entonces:

(1) $gS_\lambda \subset V_a$.

(2) Existe $h \in G$ tal que $ha \in V_a$ y $H_\lambda \subset g^{-1}G_{ha}g$.

Afirmamos que $F(W_a) \subset Y$ y de esta manera F es continua en $A \cap \overline{U}$. Sea $x \in W_a$. Si $x \in A \cap W_a$, como $A \cap W_a \subset A \cap V_a \subset A \cap B_d(a, \varepsilon)$, entonces $F(x) = f(x) \in Y$. Ahora, supongamos que $x \in U \cap W_a$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ todos los índices tales que $\varphi_{\lambda_i}(x) \neq 0$. Por consiguiente:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\lambda_i}(x) f(g_{\lambda_i} a_{\lambda_i}),$$

tal que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $g_{\lambda_i} \in \widetilde{g}_{\lambda_i}(x)$.

Sea $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Por el Lema 3.1.4, como $g_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(x)$, tenemos que $x \in g_\lambda S_\lambda$. Así $x \in g_\lambda S_\lambda \cap W_a$ de manera que $g_\lambda S_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$, y por la propiedad (1) de W_a se sigue que $g_\lambda S_\lambda \subset V_a$. En particular, tenemos que

$$g_\lambda x_\lambda \in V_a = B_d\Big(a, \frac{\varepsilon}{6}\Big). \tag{3.6}$$

De esta manera:

$$d(a, g_\lambda a_\lambda) \leq d(a, g_\lambda x_\lambda) + d(g_\lambda x_\lambda, g_\lambda a_\lambda) < \frac{\varepsilon}{6} + d(x_\lambda, a_\lambda). \tag{3.7}$$

Considerando ahora la propiedad (2) de W_a, existe $h \in G$ tal que $ha \in V_a$ y $H_\lambda \subset g_\lambda^{-1} G_{ha} g_\lambda = G_{g_\lambda^{-1} ha}$, de manera que $g_\lambda^{-1} ha \in A_\lambda$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, a_\lambda) &\leq 2d(x_\lambda, A_\lambda) \\ &\leq 2d(x_\lambda, g_\lambda^{-1} ha) \\ &= 2d(g_\lambda x_\lambda, ha) \\ &\leq 2(d(g_\lambda x_\lambda, a) + d(a, ha)). \end{aligned}$$

Después, por (3.6) y como $ha \in V_a$ tenemos que

$$2(d(g_\lambda x_\lambda, a) + d(a, ha)) < 2\big(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6}\big) = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Así, tenemos que $d(x_\lambda, a_\lambda) < \frac{2\varepsilon}{3}$ y sustituyendo en (3.7):

$$d(a, g_\lambda a_\lambda) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $g_\lambda a_\lambda \in B_d(a, \varepsilon) \cap A$.

Consecuentemente, por lo anterior y por (3.5), se sigue que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(g_{\lambda_i} a_{\lambda_i}) \in Y$. Como Y es convexo $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\lambda_i}(x) f(g_{\lambda_i} a_{\lambda_i}) \in Y$ y por lo tanto $F(W_a) \subset Y$, por lo que podemos concluir que F es continua en $A \cap \overline{U}$.

Para terminar, basta ver que F es continua en U. Sea $x_0 \in U$. Como $\{GS_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finita, existe T vecindad de x_0 tal que $GS_\lambda \cap T \neq \emptyset$ sólo para un número finito de índices; sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales índices. Como la partición de unidad está subordinada a $\{GS_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces para todo $t \in T$:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{\lambda_i}(t),$$

donde para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos $h_\lambda : U \to Z$ de la siguiente manera:

$$h_\lambda(x) = \begin{cases} \varphi_\lambda(x) f(g_\lambda a_\lambda), & \text{si } x \in GS_\lambda \\ 0, & \text{si } x \notin GS_\lambda, \end{cases}$$

donde $g_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(x)$. Se puede ver que h_λ está bien definida. La justificación es análoga a la argumentación de que F está bien definida.

Sea $\lambda \in \Lambda$. Para $x \in GS_\lambda$, que es abierto, del Lema 3.1.5 se sigue que h_λ es continua en x al ser composición de funciones continuas en una vecindad de x. Por otra parte, si $x \notin GS_\lambda$, como $\overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)} \subset GS_\lambda$, entonces $x \notin \overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)}$; al ser este último cerrado, existe W vecindad de x tal que $W \cap \overline{\varphi_\lambda^{-1}\big((0,1]\big)} = \emptyset$. Por lo tanto $h_\lambda(W) = \{0\}$, de donde se sigue que h_λ es continua en x. De esta manera queda demostrado que para toda $\lambda \in \Lambda$, h_λ es continua.

Finalmente, como F es localmente una suma finita de funciones continuas en U, tenemos de inmediato la continuidad de F en U; por lo que F es continua.

Para concluir, basta ver que F es equivariante: sean $g \in G$, $x \in L$. Si $x \in A$, por la equicontinuidad de f y la invarianza de A se cumple que

$$F(gx) = f(gx) = gf(x) = gF(x).$$

Ahora, supongamos que $x \in U$. Por el Lema 3.1.4, $\widetilde{g}_\lambda$ es equivariante y por lo tanto $\widetilde{g}_\lambda(gx) = g\widetilde{g}_\lambda(x)$; de manera que si $h_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(gx)$, entonces $h_\lambda \in g\widetilde{g}_\lambda(x)$, i.e. $g^{-1}h_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(x)$. Así, si tomamos $h_\lambda \in \widetilde{g}_\lambda(gx)$, entonces por lo anterior, la invarianza de las funciones de la partición de unidad, la equivarianza de f y la linealidad de la acción tenemos:

$$\begin{aligned} F(gx) &= \sum_{\substack{\lambda \\ \varphi_\lambda(gx)\neq 0}} \varphi_\lambda(gx) f(h_\lambda a_\lambda) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \\ \varphi_\lambda(x)\neq 0}} \varphi_\lambda(x) f(gg^{-1}h_\lambda a_\lambda) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \\ \varphi_\lambda(x)\neq 0}} \varphi_\lambda(x) gf(g^{-1}h_\lambda a_\lambda) \\ &= g\sum_{\substack{\lambda \\ \varphi_\lambda(x)\neq 0}} \varphi_\lambda(x) f(g^{-1}h_\lambda a_\lambda) \\ &= gF(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto F es equivariante y F es la extensión deseada de f.

□

Para finalizar este capítulo, mostraremos que nuestro teorema es una generalización del Teorema de Extensión de Dugundji. Antes de poder demostrar esto, necesitamos un resultado previo, que enunciaremos a continuación.

Diremos que dos funciones equivariantes $f, g : X \to Y$ de un G-espacio a otro son **G-homotópicas** si existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que para todo $x \in X$, $h \in G$, se cumple que $H(hx, t) = hH(x, t)$. Es decir, la homotopía es equivariante si consideramos que G actúa trivialmente en $[0, 1]$.

Teorema 3.2.3. *Sean X y Y G-espacios, tales que X es metrizable y $Y \in G$-ANE. Además, sea $A \subset X$ cerrado e invariante. Sean $f, g : A \to Y$ funciones equivariantes y G-homotópicas. Entonces, si f tiene una extensión equivariante $\widetilde{f} : X \to Y$, g tiene una extensión equivariante $\widetilde{g} : X \to Y$.*

Demostración. Sea $H : A \times [0, 1] \to Y$ la homotopía equivariante entre f y g, tal que para todo $x \in A$, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Supongamos que $\widetilde{f} : X \to Y$ es una extensión equivariante de f.

Sea $B := (A \times [0, 1]) \cup (X \times \{0\})$, definimos la función $J : B \to Y$ de la siguiente manera:

$$J(x,t) = \begin{cases} \widetilde{f}(x), & \text{si } t = 0 \\ H(x,t), & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Notemos que J está definida por partes como funciones continuas en subconjuntos cerrados de B, así que para ver que es continua, por el Lema del Pegado, basta ver que en su intersección las definiciones coinciden, es decir, que cuando $t = 0$ y $x \in A$, $H(x,0) = \widetilde{f}(x)$; pero esto último es cierto al ser $\widetilde{f}$ una extensión de f. También, como $\widetilde{f}$ y H son equivariantes, J lo es, considerando la acción trivial de G en $[0,1]$.

Como Y es un G-ANE y $B \subset X \times [0,1]$ es cerrado (pues es unión finita de cerrados) e invariante, existen U una vecindad de B en $X \times [0,1]$ y $\widetilde{J} : U \to Y$ una extensión equivariante de J. Ahora, como $[0,1]$ es compacto, por el Lema del Tubo, para cada $x \in A$ existe V_x vecindad de $x \in X$ tal que $V_x \times [0,1] \subset U$.

Definimos

$$V := \bigcup_{x \in A} V_x,$$

V es una vecindad de A en X y por el párrafo anterior $V \times [0,1] \subset U$. Veamos que si $V = X$, entonces $U = X \times [0,1]$ y si definimos a $\widetilde{g} : X \to Y$ como $g(x) = \widetilde{J}(x,1)$, el problema está terminado. Entonces supongamos que $V \neq X$.

Por la Proposición 1.3.1, la proyección orbital $p : X \to X/G$ es cerrada, así que $p(A)$ y $p(X \setminus V)$ son cerrados en X/G. Además, $p(A) \cap p(X \setminus V) = \emptyset$, ya que si suponemos que existe $y \in p(A) \cap p(X \setminus V)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in X \setminus V$ tales que $p(a) = p(b) = y$. Así, existe $h \in G$ tal que $ha = b$, y como A es invariante se sigue que $b \in A$, lo cual es una contradicción pues al ser V vecindad de A, se cumple que $A \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Por otra parte, por el Teorema 1.4.2 X/G es metrizable pues X lo es, así que por el Lema de Urysohn existe $s : X/G \to [0,1]$ una función continua tal que $s(p(A)) = \{1\}$ y $s(p(X \setminus V)) = \{0\}$.

Definimos $K : X \times [0,1] \to Y$ de la siguiente manera:

$$K(x,t) = \widetilde{J}(x, s(p(x)) \cdot t).$$

Veamos que K está bien definida. Sean $x \in X$, $t \in [0,1]$. Si $x \in X \setminus V$, $s(p(x)) = 0$, de manera que $(x, s(p(x)) \cdot t) = (x, 0) \in B \subset U$. Si $x \in V$, $V \times [0,1] \subset U$ así que $(x, s(p(x)) \cdot t) \in U$. Por lo tanto K está bien definida. Además, K es continua al ser composición de funciones continuas.

Por último, definimos $\widetilde{g} : X \to Y$ con la regla de correspondencia $\widetilde{g}(x) = K(x,1)$. Es continua pues K lo es. Más aún, $\widetilde{g}$ cumple que para toda $a \in A$:

$$\widetilde{g}(a) = K(a,1) = \widetilde{J}(a, s(p(a))) = \widetilde{J}(a,1) = J(a,1) = H(a,1) = g(a);$$

así que $\widetilde{g}$ es una extensión de g. Para concluir que $\widetilde{g}$ es la extensión buscada, veamos que es equivariante. Para $x \in X$, $h \in G$, gracias a la equivarianza de $\widetilde{J}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(hx) &= K(hx, s(p(hx))) \\ &= K(hx, s(p(x))) \\ &= \widetilde{J}(hx, s(p(x))) \\ &= h\widetilde{J}(x, s(p(x))) \\ &= hK(x,1) \\ &= h\widetilde{g}(x). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.4. *Bajo las hipótesis del Teorema Equivariante de Dugundji (3.2.2), si además el conjunto de puntos fijos $V[G] = \{v \in V \mid \forall g \in G, gv = v\}$ es distinto de vacío, entonces en el enunciado de tal teorema podemos sustituir a L por X. En otras palabras, $V \in G$-AE.*

Demostración. Sea $v \in V[G]$. Definimos la función $\Phi : A \times [0,1] \to V$ de la siguiente manera:

$$\Phi(x,t) = tf(x) + (1-t)v,$$

que como V es convexo está bien definida, y es continua al ser composición de funciones continuas.

Además, para todo $x \in X$, $g \in G$ y $t \in [0,1]$, $\Phi(x,0) = v$, $\Phi(x,1) = f(x)$; y como f es equivariante, la acción es lineal y $v \in V[G]$:

$$\begin{aligned}\Phi(gx,t) &= tf(gx) + (1-t)v \\ &= tgf(x) + (1-t)gv \\ &= g(tf(x) + (1-t)v) \\ &= g\Phi(x,t),\end{aligned}$$

así que Φ es una homotopía equivariante entre f y c_v, donde $c_v : A \to V$ es la función constante v.

Por último, si $\widetilde{c}_v : X \to V$ es la función constante v, $\widetilde{c}_v$ es una extensión equivariante de c_v. De esta manera, estamos en las condiciones del Teorema 3.2.3, ya que por el Teorema 3.2.2 V es un G-ANE. Por lo tanto f tiene una extensión $\widetilde{f} : X \to V$, es decir, V es un G-AE.

□

Observemos que si en el corolario anterior consideramos $G = \{e\}$, entonces $V[G] = V \neq \emptyset$ y como G actúa trivialmente en X y Z, obtenemos el Teorema de Extensión de Dugundji.

Teorema 3.2.5. *(Teorema de Extensión de Dugundji.) Sean A un subconjunto cerrado del espacio metrizable X y V un subconjunto convexo de algún espacio topológico vectorial localmente convexo Z. Entonces cada función continua $f : A \to V$ admite una extensión continua $F : X \to V$, en otras palabras, $V \in AE$.*

Capítulo 4

Ejemplos

En este momento ya estamos en condiciones de dar respuesta a la pregunta de la función impar que planteamos en la Introducción, pues si en el enunciado del Corolario 3.2.4 consideramos $G = \mathbb{Z}_2$, $Z = V = \mathbb{R}^n$ y la acción de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{R}^n$ definida en la Introducción, entonces el origen es un punto fijo y por lo tanto $\mathbb{R}^n[\mathbb{Z}_2] \neq \emptyset$. De aquí podemos concluir que $\mathbb{R}^n \in \mathbb{Z}_2$-AE. Por lo tanto podemos asegurar que toda función impar definida en un subconjunto cerrado y $\mathbb{Z}_2$-invariante de $\mathbb{R}^m$ siempre tendrá una extensión a $\mathbb{R}^m$ que preserve la propiedad de ser impar.

Otro ejemplo inmediato del Teorema Equivariante de Dugundji es el siguiente: si en el enunciado consideramos $G \leq O(n)$ cerrado, $Z = \mathbb{R}^n$ y $V = \mathbb{B}^n$; como G es un grupo de isometrías, $\mathbb{B}^n$ es G-invariante y además es convexo, podemos concluir que $\mathbb{B}^n \in G$-ANE. Más aún, como el origen siempre es un punto fijo de la acción que pertenece a $\mathbb{B}^n$, por el Corolario 3.2.4 podemos asegurar que $\mathbb{B}^n \in G$-AE. Análogamente podemos afirmar que la bola unitaria abierta es un extensor absoluto para la clase de los G-espacios metrizables.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar que podemos utilizar el Corolario 3.2.4 del Teorema Equivariante de Dugundji para demostrar un ejemplo un poco más elaborado: que la familia de los subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$ con la topología heredada de la métrica de Hausdorff bajo la acción de cierto grupo de isometrías G es un G-extensor absoluto para la clase de los espacios metrizables. Para lograr este fin, necesitamos desarrollar cierta herramienta, específicamente el Teorema de Hörmander, el cual se apoya en el Teorema de Separación de Hahn-Banach, con el cual empezaremos el desarrollo de este capítulo.

4.1. Teorema de Separación de Hahn-Banach

En esta sección demostraremos el Teorema de Separación de Hahn-Banach que, como su nombre lo dice, es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach. Con este fin en mente, probaremos algunos resultados previos que nos serán útiles para la demostración.

Consideremos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Diremos que una función $f : V \to \mathbb{R}$ es **sublineal** si para todo $\alpha > 0$ y $x, y \in V$:

(1) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (f es **homogénea positiva**).

(2) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (f es **subaditiva**).

Proposición 4.1.1. *Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y $C \subset X$ convexo tal que $0 \in \operatorname{Int} C$. Entonces el funcional de Minkowski $p : V \to \mathbb{R}$ dado por*

$$p(v) = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 \mid v \in \lambda C\},$$

está bien definido y es sublineal.

Demostración. Como $0 \in \operatorname{Int} C$, para todo $v \in X$, existe $\lambda > 0$ tal que $v \in \lambda C$ así que el conjunto $\{\lambda > 0 \mid v \in \lambda C\}$ es no vacío y está acotado inferiormente por 0. Consecuentemente p está bien definida.

Veamos la homogeneidad positiva, sean $v \in X$ y $\alpha > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} p(\alpha v) &= \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 \mid \alpha v \in \lambda C\} \\ &= \alpha \operatorname{ínf}\left\{\frac{\lambda}{\alpha} > 0 \;\middle|\; v \in \frac{\lambda}{\alpha} C\right\} \\ &= \alpha p(v), \end{aligned}$$

así que p es homogénea positiva.

Para ver que p es subaditiva: sean $u, v \in X$. Consideremos $\varepsilon > 0$. Sean $\mu, \lambda > 0$ tales que para ciertos $c_1, c_2 \in C$: $u = \lambda c_1$, $v = \mu c_2$, $\lambda < p(u) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mu < p(v) + \frac{\varepsilon}{2}$. Luego:

$$\begin{aligned} u + v &= \lambda c_1 + \mu c_2 \\ &= (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} c_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} c_2), \end{aligned}$$

de manera que $(u + v) \in (\lambda + \mu)C$, pues C es convexo. Por lo tanto se sigue que

$$p(u + v) = \inf\{\alpha > 0 \mid v \in \alpha C\} \leq \lambda + \mu < p(u) + p(v) + \varepsilon.$$

Como esto sucede para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $p(u+v) \leq p(u)+p(v)$. $\square$

Antes de continuar, recordemos el enunciado del Teorema de Hahn-Banach, uno de los teoremas más importantes del análisis funcional, que es fundamental para la demostración del siguiente lema. Su demostración puede ser consultada en [8, pág. 132-134].

Teorema 4.1.2. *(Teorema de Hahn-Banach.) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, U un subespacio vectorial de V, $p : V \to \mathbb{R}$ sublineal y $f : U \to \mathbb{R}$ lineal. Si para todo $x \in U$ se cumple que $f(x) \leq p(x)$, entonces existe $F : V \to \mathbb{R}$ lineal tal que:*

(1) *para todo $x \in V$, $F(x) \leq p(x)$*

(2) $F|_U = f$.

Lema 4.1.3. *Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, $C \subset X$ un subconjunto con interior no vacío y $x_0 \in X \setminus C$. Entonces existe un funcional distinto de cero, lineal y continuo $F : X \to \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in C$, $F(x) \leq F(x_0)$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in \mathrm{Int}(C)$, pues de otra manera trasladamos a C y la demostración es análoga.

Definimos $W := \mathrm{span}(\{x_0\})$ y $f : W \to \mathbb{R}$ con la regla de correspondencia:

$$f(\lambda x_0) = \lambda;$$

notemos que $W \leq X$ y que f es un funcional lineal en W.

Sea p el funcional de Minkowski de C. Por la Proposición 4.1.1, p es sublineal. Además, observemos que como $x_0 \notin C$, entonces para toda $\lambda \neq 0$, $\lambda x_0 \notin \lambda C$. De esta manera, si tenemos $\lambda > 0$:

$$p(\lambda x_0) = \inf\{\alpha > 0 \mid \lambda x_0 \in \alpha C\} \geq \lambda = f(\lambda x_0).$$

Por otra parte, si $\lambda \leq 0$:

$$p(\lambda x_0) = \inf\{\alpha > 0 \mid \lambda x_0 \in \alpha C\} \geq 0 \geq \lambda = f(\lambda x_0).$$

Por lo tanto concluimos que para todo $x \in W$, $f(x) \leq p(x)$.

Entonces, por el Teorema de Hahn-Banach (4.1.2), existe $F : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que $F|_W = f$. Afirmamos que F es el funcional buscado. Veamos que si $x \in C$, se cumple que:

$$F(x) \leq p(x) \leq 1 = f(x_0) = F(x_0),$$

donde $p(x) \leq 1$ ya que $x \in C$.

Para terminar, veamos que F es continua. Como F es lineal, basta ver que es continua en 0. Sea $\varepsilon > 0$. Como $0 \in C$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_X(0, \delta_1) \subset C$. Definimos $\delta := \frac{\varepsilon\delta_1}{2}$. Entonces, para $y \in B_X(0, \delta)$, se cumple que $\|y\| < \frac{\varepsilon\delta_1}{2}$, es decir, $\|\frac{2y}{\varepsilon}\| < \delta_1$. Por lo tanto, $\frac{2y}{\varepsilon} \in B_X(0, \delta_1) \subset C$, de donde se sigue que:

$$F\Big(\frac{2y}{\varepsilon}\Big) \leq 1,$$

$$F\Big(-\frac{2y}{\varepsilon}\Big) \leq 1.$$

De estas últimas ecuaciones, podemos concluir que $-\frac{\varepsilon}{2} \leq F(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de donde $|F(y)| < \varepsilon$ y por lo tanto F es continua en 0.

$\square$

Teorema 4.1.4. *(Teorema de Separación de Hahn-Banach.) Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y $A, B \subset X$ subconjuntos convexos y no vacíos, tales que A tiene interior no vacío y $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe un* *hiperplano que* ***separa*** *a A de B; es decir, existen $F : X \to \mathbb{R}$ funcional lineal y continuo distinto de cero y $c \in \mathbb{R}$ tales que para todo $(a,b) \in A \times B$, $F(a) \geq c \geq F(b)$. En este caso diremos que el hiperplano $F^{-1}(c)$ separa a A de B.*

Demostración. Sea $Z := B - A$. Entonces Z es convexo pues si $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$, por la convexidad de A, B tenemos que:

$$t(b_1 - a_1) + (1-t)(b_2 - a_2) = (tb_1 + (1-t)b_2) - ((ta_1 + (1-t)a_2)) \in B - A.$$

Veamos que $\mathrm{Int}(Z) \neq \emptyset$. Sea $a_0 \in \mathrm{Int}(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(a_0, \varepsilon) \subset A$. Afirmamos que para todo $b \in B$, el punto $b - a_0$, es un punto interior de Z. Para demostrar esto, veamos que $B_X(b - a_0, \varepsilon) \subset Z$. Sea $x \in B_X(b - a_0, \varepsilon)$, entonces $\|b - a_0 - x\| < \varepsilon$. Definimos $y := b - x$, entonces $x = b - y$ y además $\|b - a_0 - (b - y)\| = \|y - a_0\| < \varepsilon$. Así, $y \in B_X(a_0, \varepsilon) \subset A$, por lo que $x = b - y \in Z$. Por último, notemos que como $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin Z$.

Entonces Z y 0 cumplen las hipótesis del Lema 4.1.3, así que existe $F \neq 0$ funcional lineal y continuo en X tal que para todo $x \in Z$, $F(x) \leq F(0) = 0$. Luego, para todo $(a,b) \in A \times B$, se cumple que $F(b - a) = F(b) - F(a) \leq 0$, de donde se sigue que $F(b) \leq F(a)$. Por lo tanto

$$-\infty < \sup_{b \in B}\{F(b)\} \leq \inf_{a \in A}\{F(a)\} < \infty,$$

así que F y cualquier $c \in [\sup_{b \in B}\{F(b)\}, \inf_{a \in A}\{F(a)\}]$ cumple las condiciones del teorema.

□

4.2. Teorema de Hörmander

Como en la sección anterior, antes de poder probar el Teorema de Hörmander necesitamos desarrollar herramienta previa. Toda esta herramienta nos facilitará el manejo de conceptos que aparecen en el enunciado del teorema, como las funciones soporte o la topología inducida por la métrica de Hausdorff en los subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de un espacio vectorial normado. Para profundizar en estos conceptos, véase [2].

Antes de comenzar, recodemos un hecho que utilizaremos frecuentemente en el desarrollo de esta sección sin hacer mayor hincapié en este. Si X es un espacio vectorial normado, entonces

$$\overline{B_X(0,1)} = B_X.$$

Proposición 4.2.1. *(Fórmula de Ascoli.) Sean X un espacio vectorial normado, $f \in X^*$ distinto del funcional 0 y $\alpha \in f(X)$. Entonces para cada $x \in X$ se cumple que*

$$d(x, f^{-1}(\alpha)) = \frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|_*}.$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $w \in f^{-1}(\alpha)$, entonces:

$$\frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|_*} = \frac{|f(x - w)|}{\|f\|_*} \leq \|x - w\|,$$

así que, como $w \in f^{-1}(\alpha)$ fue arbitrario,

$$\frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|_*} \leq \inf_{w \in f^{-1}(\alpha)} \{\|x - w\|\} = d(x, f^{-1}(\alpha)).$$

Veamos que la otra desigualdad también es cierta. Sea $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|_*} < \mu.$$

De inmediato tenemos que $|f(x) - \alpha| < \mu\|f\|_*$. Como f es lineal

$$\mu\|f\|_* = \sup_{y \in \mu B_X} \{|f(y)|\},$$

así que en μB_X, f alcanza todos los valores posibles en $(-\mu\|f\|_*, \mu\|f\|_*)$. Como $|f(x) - \alpha| < \mu\|f\|_*$, existe $u \in \mu B_X$ tal que $f(u) = \alpha - f(x)$. Entonces, si definimos $v := u + x$, $f(v) = \alpha$ y $v \in (x + \mu B_X)$. Por lo tanto, $(x + \mu B_X) \cap f^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$. De esto último, es claro que $d(x, f^{-1}(\alpha)) \leq \mu$; entonces se sigue

que
$$d(x, f^{-1}(\alpha)) \leq \frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|_*},$$
y podemos concluir que $d(x, f^{-1}(\alpha)) = \frac{|f(x)-\alpha|}{\|f\|_*}$.

□

Lema 4.2.2. *Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $C \subset X$ un subconjunto convexo tal que $d(0, C) = \alpha$. Entonces existe $f \in X^*$ de norma uno tal que $f^{-1}(\alpha)$ separa a αB_X de C.*

Demostración. Afirmamos que $\alpha B_X(0,1) \cap C = \emptyset$. Esto se cumple ya que $\operatorname{ínf}_{x\in C}\{\|x\|\} = d(0, C) = \alpha$, así que para todo $x \in C$, $\|x\| \geq \alpha$, de manera que $C \subset X \setminus \alpha B_X(0,1)$. Además, como $\alpha B_X(0,1)$ es abierto, $\operatorname{Int}(\alpha B_X(0,1)) = \alpha B_X(0,1) \neq \emptyset$; entonces por el Teorema de Separación de Hahn-Banach (4.1.4), existen $F : X \to \mathbb{R}$ funcional lineal y continuo y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que
$$\sup_{x\in\alpha B_X(0,1)} \{F(x)\} \leq \beta \leq \operatorname*{ínf}_{c\in C}\{F(x)\}.$$

Dividiendo la ecuación anterior entre $\|F\|_*$ tenemos la siguiente ecuación:
$$\sup_{x\in\alpha B_X(0,1)} \left\{\frac{F}{\|F\|_*}(x)\right\} \leq \frac{\beta}{\|F\|_*} \leq \operatorname*{ínf}_{c\in C}\left\{\frac{F}{\|F\|_*}(x)\right\}.$$

Si definimos $f := \frac{F}{\|F\|_*}$ y $\gamma := \frac{\beta}{\|F\|_*}$, se tiene que $\|f\|_* = 1$ y
$$\sup_{x\in\alpha B_X(0,1)} \{f(x)\} \leq \gamma \leq \operatorname*{ínf}_{c\in C}\{f(c)\}. \tag{4.1}$$

Consecuentemente, $f\big(\alpha B_X(0,1)\big) \subset (-\infty, \gamma]$, así que $\overline{f\big(\alpha B_X(0,1)\big)} \subset (-\infty, \gamma]$, por lo que, utilizando la continuidad de f, conluimos que
$$f(\alpha B_X) = f\Big(\alpha\overline{B_X(0,1)}\Big) \subset \overline{f\big(\alpha B_X(0,1)\big)} \subset (-\infty, \gamma].$$

Es decir, $f^{-1}(\gamma)$ separa a αB_X de C.

Para terminar el problema, basta demostrar que $\alpha = \gamma$. Como

$$\sup_{x \in B_X} \{f(x)\} = \sup_{x \in B_X} \{|f(x)|\} = \|f\|_* = 1,$$

por el párrafo anterior se sigue que, $0 < \alpha = \sup_{x \in \alpha B_X} \{f(x)\} \leq \gamma$.

Por último, afirmamos que $\alpha \geq \gamma$. Supongamos por contradicción que $\alpha < \gamma$, esto es equivalente a

$$\alpha = d(0, C) = \inf_{x \in C} \{\|x\|\} < \gamma.$$

Por lo tanto, existe $x_0 \in C$ tal que $\alpha \leq \|x_0\| < \gamma$. Luego, por la ecuación (4.1), sabemos que $0 < \gamma \leq f(x_0)$. Entonces se sigue que $\|x_0\| < \gamma \leq |f(x_0)|$ de donde concluimos que

$$1 < \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} \leq \|f\|_* = 1,$$

lo cual es una contradicción. Así $\alpha \geq \gamma$, por lo tanto $\alpha = \gamma$ y f es el funcional deseado.

□

Si X es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, para cada subconjunto convexo distinto de vacío A de X, definimos su **función soporte** $s(\cdot, A) : X^* \to (-\infty, \infty]$ con regla de correspondencia

$$s(y, A) = \sup_{a \in A} \{y(a)\}.$$

Las funciones soporte nos ayudarán a comprender a los subconjuntos convexos de X y nos servirán para encajar $cb(X)$ en un espacio de Banach (Teorema de Hörmander (4.2.4)).

Proposición 4.2.3. *Sean X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Entonces para cada par A, B de subconjuntos convexos y no vacíos de X, se cumple que*

$$\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = \sup \left\{ s(y, A) - s(y, B) \;\middle|\; y \in B_{X^*}, s(y, B) < \infty \right\}.$$

Demostración. Sean A, B subconjuntos convexos y no vacíos de X. Definimos

$$\lambda := \sup \left\{ s(y, A) - s(y, B) \;\middle|\; y \in B_{X^*}, s(y, B) < \infty \right\}.$$

Si denotamos por f_0 al funcional 0, entonces $f_0 \in B_{X^*}$ y además $s(f_0, A) - s(f_0, B) = 0$, así que $\lambda \geq 0$.

Empezaremos demostrando que $\sup_{a \in A}\{d(a, B)\} \leq \lambda$. Si $\sup_{a \in A}\{d(a, B)\} = 0$, esto se cumple. Supongamos que $\sup_{a \in A}\{d(a, B)\} > 0$. Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \sup_{a \in A}\{d(a, B)\}$. Entonces existe $a_0 \in A$ tal que $\alpha < d(a_0, B)$; definimos $\beta := d(a_0, B)$, que cumple:

$$\beta = \inf_{b \in B}\{\|a_0 - b\|\} = \inf_{b \in B}\{\|0 - (a_0 - b)\|\} = d(0, a_0 - B).$$

Como B es convexo, es inmediato que $(a_0 - B)$ lo es, así que por el Lema 4.2.2, existe $y \in X^*$ tal que $\|y\| = 1$ y $y^{-1}(\beta)$ separa a βB_X de $(a_0 - B)$. En particular, $\inf_{b \in B}\{y(a_0 - b)\} \geq \beta > \alpha$. Como y es lineal, $y(a_0) - \sup_{b \in B}\{y(b)\} > \alpha$, así que en particular $\infty > y(a_0) - \alpha > \sup_{b \in B}\{y(b)\} = s(y, B)$. Además,

$$s(y, A) - s(y, B) = \sup_{a \in A}\{y(a)\} - \sup_{b \in B}\{y(b)\} > \alpha.$$

Por lo tanto y cumple que $y \in B_{X^*}$, $s(y, B) < \infty$ y $s(y, A) - s(y, B) > \alpha$, por lo que $\alpha < \lambda$. Entonces podemos concluir que $\sup_{a \in A}\{d(a, B)\} \leq \lambda$.

Para concluir la demostración, veamos que $\sup_{a \in A}\{d(a, B)\} \geq \lambda$. Si $\lambda = 0$, esto es claro. Supongamos que $\lambda > 0$ y sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \lambda$. Sea $y \in X^*$ tal que $y \in B_{X^*}$, $s(y, B) < \infty$ y $s(y, A) - s(y, B) > \alpha$ (este existe por la definición de λ). Como $s(y, A) - s(y, B) > \alpha$, se tiene que $y \neq f_0$. Definimos $z := \frac{y}{\|y\|_*}$. Claramente $z \in B_{X^*}$, además

$$s(z, B) = \sup_{b \in B}\left\{\frac{y}{\|y\|_*}(b)\right\} = \frac{1}{\|y\|_*}\sup_{b \in B}\{y(b)\} = \frac{1}{\|y\|_*}s(y, B),$$

así que $s(z, B) < \infty$. De esta última cadena de igualdades también podemos concluir que:

$$s(z,A) - s(z,B) = \frac{1}{\|y\|_*}\big(s(y,A) - s(y,B)\big) > \frac{1}{\|y\|_*}\alpha \geq \alpha.$$

Definimos $\gamma := s(z,B)$. Entonces, por la ecuación anterior, $s(z,A) > \gamma + \alpha$. Así, existe $a_1 \in A$ tal que $z(a_1) > \gamma + \alpha$. Luego, $z^{-1}(\gamma)$ separa a a_1 de B, pues para todo $b \in B$:

$$z(b) \leq s(z,B) = \gamma < \gamma + \alpha < z(a_1).$$

Entonces, que $z^{-1}(\gamma)$ separe a a_1 de B implica que $d(a_1, z^{-1}(\gamma)) \leq d(a_1, B)$, pues por la Proposición 4.2.1,

$$z(a_1) - \gamma = \frac{|z(a_1) - \gamma|}{\|z\|_*} = d(a_1, z^{-1}(\gamma)),$$

y por el párrafo anterior tenemos que para todo $b \in B$, $-z(b) \geq -\gamma > -z(a_1)$, sumando $z(a_1)$ y recordando que $\|z\|_* = 1$, obtenemos lo siguiente:

$$\|a_1 - b\| \geq z(a_1 - b) \geq z(a_1) - \gamma = d(a_1, z^{-1}(\gamma)) > 0,$$

que a su vez implica que $d(a_1, z^{-1}(\gamma)) \leq d(a_1, B)$.

Finalmente, concluimos que:

$$0 < \alpha < z(a_1) - \gamma = d(a_1, z^{-1}(\gamma)) \leq d(a_1, B) \leq \sup_{a \in A}\{d(a,B)\}.$$

Por lo tanto $\sup_{a\in A}\{d(a,B)\} \geq \lambda$ y concluimos que $\sup_{a\in A}\{d(a,B)\} = \lambda$.

□

Sea V un espacio vectorial topológico. Recordemos que un subconjunto C de V es un **cono convexo** si para todo $x, y \in C$, $\alpha > 0$ se cumple que $x+y \in C$ y $\alpha x \in C$.

Diremos que $f : (cb(X), \oplus) \to (V, +)$ es un **encaje algebraico como un cono convexo** si f es un encaje y para todo $A, B \in cb(X)$, $\alpha > 0$ se cumple que:

$$f(A \oplus B) = f(A) + f(B)$$
$$f(\alpha A) = \alpha f(A).$$

Observemos que si f es un encaje algebraico como un cono convexo entonces su imagen es un cono convexo en V.

Teorema 4.2.4. *(Teorema de Hörmander.) Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.*

Definimos $f : \big(cb(X), d_H, \oplus\big) \to \big(C_b(B_{X^*}), \|\cdot\|_\infty, +\big)$ con la regla de correspondencia $f(A) = s(\cdot, A)$.

Entonces f es un encaje isométrico y algebraico como un cono convexo en el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas en la bola unitaria cerrada de X^*.

Demostración. Primero veamos que f está bien definida. Sean $A \in cb(X)$, $y \in X^*$. Como A es acotado, existe $M > 0$ tal que para todo $a \in A$, $\|a\| \leq M$; así que tenemos

$$|s(y, A)| = |\sup_{a\in A}\{y(a)\}| \leq \|y\|_* \sup_{a\in A}\{\|a\|\} \leq M\|y\|_*.$$

Por lo tanto $s(\cdot, A) : X^* \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua y su restricción a B_{X^*} es acotada, de manera que f está bien definida.

Ahora probaremos que f es un encaje isométrico. Sean $A, B \in cb(X)$, entonces gracias a la Proposición 4.2.3 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a\in A}\{d(a, B)\}, \sup_{b\in B}\{d(b, A)\}\} \\
&= \max\left\{ \sup_{y\in B_{X^*}} \big\{s(y, A) - s(y, B)\big\}, \sup_{y\in B_{X^*}} \big\{s(y, B) - s(y, A)\big\} \right\} \\
&= \sup_{y\in B_{X^*}} \big\{|s(y, A) - s(y, B)|\big\} \\
&= \|s(\cdot, A) - s(\cdot, B)\|_\infty \\
&= d_\infty(s(\cdot, A), s(\cdot, B)).
\end{aligned}$$

Veamos que f es un encaje algebraico como un cono convexo. Sea $\alpha > 0$. Entonces es claro que $\alpha A \in cb(X)$ y además $f(\alpha A) = s(\cdot, \alpha A)$. Luego, para todo $y \in B_{X^*}$:

$$s(y, \alpha A) = \sup_{a\in A}\{y(\alpha a)\} = \alpha \sup_{a\in A}\{y(a)\} = \alpha s(y, A).$$

Por lo tanto $f(\alpha A) = s(\cdot, \alpha A) = \alpha s(\cdot, A) = \alpha f(A)$.

Por último, basta demostrar que $f(A \oplus B) = f(A) + f(B)$. Sea $y \in B_{X^*}$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} s(y, A) + s(y, B) &= \sup_{a\in A}\{y(a)\} + \sup_{b\in B}\{y(b)\} \\ &= \sup_{a\in A, b\in B}\{y(a + b)\} \\ &= \sup_{x\in A+B}\{y(x)\} \\ &\leq \sup_{x\in A\oplus B}\{y(x)\} \\ &= s(y, A \oplus B). \end{aligned}$$

Para terminar, veamos que $s(y, A \oplus B) \leq s(y, A) + s(y, B)$. Supongamos por contradicción que $s(y, A \oplus B) > s(y, A) + s(y, B)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $s(y, A \oplus B) > s(y, A) + s(y, B) + \varepsilon$. Entonces existe $x \in A \oplus B$ que cumple que $y(x) > s(y, A) + s(y, B) + \varepsilon$. Como $x \in A \oplus B$, existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A y B respectivamente, tales que $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Como x es tal que $y(x) > s(y, A) + s(y, B) + \varepsilon$, en particular cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$y(x) > y(a_n + b_n) + \varepsilon.$$

De esta última ecuación se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon < |y(x - (a_n + b_n))| \leq \|y\|_* \|x - (a_n + b_n)\|,$$

lo cual contradice que $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a x. Por lo tanto $s(y, A \oplus B) \leq s(y, A) + s(y, B)$ así que $s(y, A \oplus B) = s(y, A) + s(y, B)$.

□

4.3. Hiperespacios de Subconjuntos Convexos

Finalmente hemos desarrollado toda la herramienta necesaria para mostrar nuestro ejemplo. Dedicaremos esta sección a exponerlo.

Proposición 4.3.1. *Sea $G \leq O(n)$. Entonces $\theta : G \times (C(\mathbb{S}^{n-1}), \|\cdot\|_\infty) \to (C(\mathbb{S}^{n-1}), \|\cdot\|_\infty)$ con regla de correspondencia $\theta(g, f) = gf$ es una acción continua y lineal; donde $gf : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ está definida para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ como $gf(u) = f(g^{-1}u)$.*

Demostración. Como $G \leq O(n)$, para todo $(g, f) \in G \times C(\mathbb{S}^{n-1})$, gf está bien definida, pues $O(n)$ son isometrías lineales así que para todo $g \in G$, $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ se cumple que $g^{-1}u \in \mathbb{S}^{n-1}$; además como G es un grupo topológico, la función inversión es continua en G, de manera que gf es continua al ser composición de funciones continuas. Consecuentemente θ también está bien definida. Veamos que θ es acción. Es claro que para toda $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$, $ef = f$, donde e es el neutro de G. Sean $h, g \in G$, $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces:

$$h(gf)(u) = (gf)(h^{-1}u) = f(g^{-1}h^{-1}u) = f((hg)^{-1}u) = (hg)f(u),$$

así que $h(gf) = (hg)f$, y θ es acción.

Ahora demostremos que θ es continua. Sean $(g_0, f_0) \in G \times C(\mathbb{S}^{n-1})$ y $\varepsilon > 0$.

G es un subgrupo de $O(n)$, cuya topología es la heredadada por $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, las matrices de $n \times n$ con entradas reales. Después, a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ lo podemos ver también como funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, y como es un espacio vectorial de dimensión finita, su topología es inducida por cualquiera de sus normas. Consideremos la norma $\|\cdot\|_* : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de las funciones lineales y continuas, es decir, para cualquier $g \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$\|g\|_* = \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \{\|gx\|\}.$$

En particular, la topología de $O(n)$ es la inducida por esta norma.

Como f_0 es continua y $\mathbb{S}^{n-1}$ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que si $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$

son tales que $\|u-v\|<\delta$, entonces $|f_0(u)-f_0(v)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Luego, como G es grupo topológico, la función inversión $\cdot^{-1}: G\to G$ es continua, así que existe U vecindad de g_0 tal que para todo $g\in U$,

$$\sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{\|g_0^{-1}(x)-g^{-1}(x)\|\}=\|g_0^{-1}-g^{-1}\|_*<\delta,$$

donde la resta es la resta en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Afirmamos que $\theta\big(U\times(B_\infty(f_0,\frac{\varepsilon}{2}))\big)\subset B_\infty(\theta(g_0,f_0),\varepsilon)$, demostrando así que θ es continua. Sea $(g,f)\in U\times(B_\infty(f_0,\frac{\varepsilon}{2}))$. Como $g\in U$, $\sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{\|g_0^{-1}(x)-g^{-1}(x)\|\}<\delta$, así que:

$$\begin{aligned}
\|\theta(g_0,f_0)-\theta(g,f)\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|g_0f_0(x)-gf(x)|\}\\
&= \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|f_0(g_0^{-1}x)-f(g^{-1}x)|\}\\
&\le \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|f_0(g_0^{-1}x)-f_0(g^{-1}x)|+|f_0(g^{-1}x)-f(g^{-1}x)|\}\\
&\le \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|f_0(g_0^{-1}x)-f_0(g^{-1}x)|\}+\sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|f_0(g^{-1}x)-f(g^{-1}x)|\}\\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\|f_0-f\|_\infty\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por último, la linealidad es inmediata: sean $\varphi,\psi\in C(\mathbb{S}^{n-1})$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
g(\varphi+\lambda\psi)(u) &= (\varphi+\lambda\psi)(g^{-1}u)\\
&= \varphi(g^{-1}u)+\lambda\psi(g^{-1}u)\\
&= g\varphi(u)+\lambda(g\psi)(u).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.2. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio vectorial normado tal que G actúa isométricamente en X, es decir, si d es la métrica inducida por la norma en X, entonces esta métrica es G-invariante. Entonces $\varphi: G\times cc(X)\to cc(X)$ con regla de correspondencia $\varphi(g,A)=gA$ es una acción continua.*

Demostración. Sea d la métrica inducida por la norma de X. Como la acción de G en X es lineal y continua, φ está bien definida. Que sea acción es una consecuencia inmediata de la acción de G en X. Basta probar que φ es continua.

Sean $(g_0, A_0) \in G \times cc(X)$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos por $\theta : G \times X \to X$ a la acción de G en X y por $\theta_1 : G \times A_0 \to X$ a su restricción a $G \times A_0$. Después,

$$A_0 + B_d\Big(0, \frac{\varepsilon}{3}\Big) = \bigcup_{a \in A_0} B_d\Big(a, \frac{\varepsilon}{3}\Big)$$

es abierto en X, de manera que $\theta_1^{-1}(A_0 + B_d(0, \frac{\varepsilon}{3}))$ es abierto en $G \times A_0$. Luego, A_0 es compacto y además $\{e\} \times A_0 \subset \theta_1^{-1}(A_0 + B_d(0, \frac{\varepsilon}{3}))$, donde e es el neutro de G. Entonces por el Lema del Tubo, existe W vecindad de e en G tal que $W \times A_0 \subset \theta_1^{-1}(A_0 + B_d(0, \frac{\varepsilon}{3}))$. Por otra parte, si denotamos por $i : G \to G$ a la función que a cada elemento le asocia su inverso, sabemos que al ser G grupo topológico, i es continua. Ahora, definimos $U := i^{-1}(W) \cap W$; U es abierto en G y no vacío, pues $e \in U$. Por último, como vimos en los preliminares, $V := g_0 U$ es abierto.

Recordemos que a $cc(X)$ lo equipamos con la topología inducida por d_H, la métrica de Hausdorff correspondiente a d. Afirmamos que $\varphi(V \times B_{d_H}(A_0, \frac{\varepsilon}{3})) \subset B_{d_H}(g_0 A_0, \varepsilon)$ y, en consecuencia, que φ es continua. En efecto, sea $(g, A) \in V \times B_{d_H}(A_0, \frac{\varepsilon}{3})$. Entonces $g = g_0 h$ para algún $h \in U$, o equivalentemente, $g_0^{-1} g \in U$. De esto último, se sigue que para todo $a \in A_0$, $g_0^{-1} g a \in (A_0 + B_d(0, \frac{\varepsilon}{3}))$, y $(g_0^{-1} g)^{-1} a \in (A_0 + B_d(0, \frac{\varepsilon}{3}))$; de donde podemos deducir inmediatamente que $d(g_0^{-1} g a, A_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y que $d((g_0^{-1} g)^{-1} a, A_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto, tomando en cuenta la invarianza de d, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_H(g_0^{-1} g A_0, A_0) &= \text{máx}\Big\{ \sup_{a \in A_0} \{d(g_0^{-1} g a, A_0)\}, \sup_{a \in A_0} \{d(a, g_0^{-1} g A_0)\}\Big\} \\ &= \text{máx}\Big\{ \sup_{a \in A_0} \{d(g_0^{-1} g a, A_0)\}, \sup_{a \in A_0} \{d((g_0^{-1} g)^{-1} a, A_0)\}\Big\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Notemos que una consecuencia inmediata de la invarianza de d es la invarianza de d_H, tomando en cuenta el párrafo anterior y este hecho, se sigue que:

$$\begin{aligned} d_H(g_0A_0, gA) &\leq d_H(g_0A_0, gA_0) + d_H(gA_0, gA) \\ &= d_H(A_0, g_0^{-1}gA_0) + d_H(A_0, A) \\ &< 2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que $\varphi(V \times B_{d_H}(A_0, \frac{\varepsilon}{3})) \subset B_{d_H}(g_0A_0, \varepsilon)$. Por lo tanto φ es continua. $\square$

Es importante resaltar que restringirnos a considerar $cc(X)$ es una hipótesis fundamental, pues en una familia más grande de subconjuntos de X la continuidad de la acción no siempre es cierta. A continuación mostraremos un ejemplo de un G-espacio de Banach L donde G actúa isométricamente en L, tal que la misma acción definida en $cb(L)$ no es continua.

Sea $G := \mathbb{Z}_2^\infty$ el grupo de Cantor, con $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Los elementos de G son sucesiones con elementos en $\mathbb{Z}_2$; es un hecho conocido que la topología producto en G es metrizable y ésta hace de G un grupo topológico siendo su operación la multiplicación entrada a entrada. Sea $L := (C(G), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de las funciones continuas de G en $\mathbb{R}$ equipado con la norma del supremo, como G es compacto y $\mathbb{R}$ es de Banach, L es un espacio de Banach. Definimos la acción $\theta : G \times L \to L$ con regla de correspondencia $\theta(g, f) = gf$; donde $gf : G \to \mathbb{R}$ es tal que para todo $x \in G$, $gf(x) = f(g^{-1}x)$. Como G es grupo topológico, θ está bien definida. Además por una demostración análoga a la proporcionada en la Proposición 4.3.1, θ es una acción continua y lineal. Así, L es un G-espacio de Banach. Como la multiplicación por un elemento fijo de G es una biyección en G, es claro que G actúa isométricamente en L.

Ejemplo 4.3.1. $(C(\mathbb{Z}_2^\infty), \|\cdot\|_\infty)$ es un $\mathbb{Z}_2^\infty$-espacio de Banach, donde $\mathbb{Z}_2^\infty$ actúa isométricamente en $C(\mathbb{Z}_2^\infty)$ con la acción θ definida como en la Proposición 4.3.1, tal que la acción $\varphi : G \times cb(L) \to cb(L)$ con regla de correspondencia $\varphi(g, A) = gA$ no es continua.

Demostración. Sean e el neutro de $G = \mathbb{Z}_2^\infty$ y $A := \{f : G \to [0,1] \mid f(e) =$

$0\}$. Definimos $L = (C(G), \|\cdot\|_\infty)$. Veamos que $A \in cb(L)$. Claramente A es acotado pues como $f(G) \subset [0,1]$, $f \in B_L$. También, A es convexo pues si $f_1, f_2 \in A$, entonces para cualquier $t \in [0,1]$, $tf_1(e) + (1-t)f_2(e) = 0$ y para todo $g \in G$, $0 \leq tf_1(g) + (1-t)f_2(g) \leq 1$, de manera que $(tf_1 + (1-t)f_2) \in A$. Por último, A es cerrado pues si tenemos una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converja uniformemente a alguna función $f \in L$, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$:

$$|f_k(e) - f(e)| \leq \|f_k - f\|_\infty;$$

como esta última diferencia tiende a 0, se sigue que $|f_k(e) - f(e)|$ converge a 0 cuando k tiende a infinito. Como para toda $k \in \mathbb{N}$, $f_k(e) = 0$, se sigue que $f(e) = 0$. Que $f(G) \subset [0,1]$ se sigue de un argumento análogo. Por lo tanto, $A \in cb(L)$.

Para probar nuestra afirmación, veamos que φ no es continua en la pareja (e, A). Sean Q una vecindad de e y $y \in Q \setminus \{e\}$. Como G es metrizable, por el Lema de Urysohn existe una función $f : G \to [0,1]$ tal que $f(e) = 0$, $f(y^{-1}) = 1$; de esta manera $f \in A$. Sea $\psi \in A$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\psi - yf\|_\infty &= \sup_{x\in G}\{|\psi(x) - yf(x)|\} \\ &\geq |\psi(e) - yf(e)| \\ &= |\psi(e) - f(y^{-1})| \\ &= |0 - 1| = 1. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\sup_{x\in A} d(yx, A) \geq d(yf, A) = \inf_{\psi\in A}\{\|\psi - yf\|_\infty\} \geq 1,$$

de donde se sigue inmediatamente que $d_H(A, yA) \geq 1$, por lo que, como Q y y fueron arbitrarias, φ no puede ser continua.

□

4.3.1. Hiperespacios de Subconjuntos Compactos y Convexos de $\mathbb{R}^n$

Antes de poder concluir con el ejemplo que buscamos, necesitamos recordar el siguiente importante teorema de análisis. (Véase [4, pág. 389].)

Teorema 4.3.3. *(de representación de Fréchet-Riesz.) Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces existe un único $w \in H$ tal que para todo $u \in H$, $T(u) = \langle w, u \rangle$. Más aún, si denotamos por $T_w : H \to \mathbb{R}$ a la función que a toda $u \in H$ le asocia $\langle w, u \rangle$, entonces la función $i : H \to H^*$ con regla de correspondencia $i(w) = T_w$ es un isomorfismo lineal y una isometría con respecto a la norma $\| \cdot \|_*$ en H^*.*

Gracias al Teorema de Hörmander (4.2.4), si restringimos nuestra atención a $\mathbb{R}^n$ y a sus subconjuntos cerrados, acotados, convexos y no vacíos (equivalentemente, sus subconjuntos compactos convexos no vacíos), $cc(\mathbb{R}^n)$, sabemos que $f : cc(\mathbb{R}^n) \to C_b\big(\mathbb{B}^{n*}\big)$ con la regla de correspondencia $f(A) = s(\cdot, A)$ es un encaje isométrico y algebraico como un cono convexo. Por otra parte, por el teorema anterior, como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, existe $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n*}$ una isometría que a su vez es un isomorfismo lineal. Denotemos para cada $T \in \mathbb{R}^{n*}$, $x_T := i^{-1}(T)$.

Veamos que podemos definir una función análoga a la función soporte que definimos para el dual de un espacio echando mano del isomorfismo que nos proporciona el Teorema de Fréchet-Riesz. Para cada $A \in cc(\mathbb{R}^n)$, definimos $s(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para toda $y \in \mathbb{R}^n$, $s(y, A) = \sup_{a \in A}\{\langle y, a \rangle\}$, a esta le llamaremos la función soporte de A en $\mathbb{R}^n$. Utilizaremos la misma notación para la función soporte en el dual y en el espacio debido a la equivalencia entre éstas que nos proporciona el Teorema de Fréchet-Riesz, pues para $T \in \mathbb{R}^{n*}$:

$$s(T, A) = \sup_{a \in A}\{T(a)\} = \sup_{a \in A}\{\langle x_T, a \rangle\} = s(x_T, A).$$

Otra consecuencia inmediata del Teorema de Fréchet-Riesz es que si $T \in \mathbb{B}^{n*}$, entonces $x_T \in \mathbb{B}^n$. Esto, aunado al Teorema de Hörmander nos permite deducir inmediatamente que $F : cc(\mathbb{R}^n) \to C\big(\mathbb{B}^n\big)$ con regla de correspondencia $F(A) = s(\cdot, A)$ es un encaje isométrico y algebraico (con $\oplus$ para que la suma sea un elemento de $cc(X)$) como un cono convexo en el espacio de Banach de las funciones continuas en la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$ con la norma de la convergencia uniforme. Más aún, podemos restringir este a un encaje en el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{S}^{n-1}$. Que el encaje algebraico se sigue preservando cuando cambiamos $\mathbb{B}^n$ por $\mathbb{S}^{n-1}$ es claro. Veamos que la isometría también lo hace. Sean $A, B \in cc(\mathbb{R}^n)$, $a \in A$, $b \in B$ y $x \in \mathbb{B}^n$ tales que $\langle x, a-b\rangle \geq 0$ (esto siempre se puede hacer pues si x no cumple podemos considerar a $-x$) . Entonces

$$0 \leq \langle x, a-b\rangle \leq \frac{1}{\|x\|}\langle x, a-b\rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, a-b \right\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{B}^n\\ a\in A\\ b\in B}}\{\langle x, a-b\rangle\} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{S}^{n-1}\\ a\in A\\ b\in B}}\{\langle x, a-b\rangle\},$$

y la otra desigualdad es clara, así que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{B}^n\\ a\in A\\ b\in B}}\{\langle x, a-b\rangle\} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{S}^{n-1}\\ a\in A\\ b\in B}}\{\langle x, a-b\rangle\}$$

de manera que las normas infinito de $s(\cdot, A) - s(\cdot, B)$ coinciden en $\mathbb{B}^n$ y en $\mathbb{S}^{n-1}$, demostrando que $F : cc(\mathbb{R}^n) \to C\big(\mathbb{S}^{n-1}\big)$ es un encaje isométrico y algebraico.

Resumiendo, podemos encajar a $cc(\mathbb{R}^n)$ en el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{S}^{n-1}$ isométrica y alegbráicamente como un cono convexo por medio de las funciones soporte. Ahora, sea $G \leq O(n)$ cerrado, actuando en $cc(\mathbb{R}^n)$ y en $C(\mathbb{S}^{n-1})$ como en las Proposiciones (4.3.2) y (4.3.1) respectivamente. Veamos que nuestro encaje F es equivariante con respecto a estas acciones. Sean $g \in G$, $A \in cc(\mathbb{R}^n)$, y $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, como $G \leq O(n)$:

$$\begin{aligned}
F(gA)(x) &= s(x, gA) \\
&= \sup_{a\in A}\{\langle x, ga\rangle\} \\
&= \sup_{a\in A}\{\langle g^{-1}x, g^{-1}ga\rangle\} \\
&= \sup_{a\in A}\{\langle g^{-1}x, a\rangle\} \\
&= s(g^{-1}x, A) \\
&= gF(A)(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(gA) = gF(A)$; es decir F es un encaje equivariante y $F(cc(\mathbb{R}^n))$ es G-invariante en $C(\mathbb{S}^{n-1})$. Una consecuencia inmediata de este hecho es que la función inversa $F^{-1} : F(cc(\mathbb{R}^n)) \to cc(\mathbb{R}^n)$ también es equivariante. Además, $F(cc(\mathbb{R}^n))$ es convexo pues al ser encaje algebraico como un cono convexo en $C(\mathbb{S}^{n-1})$, para cualesquiera $t \in [0,1]$, $A, B \in cc(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$tF(A) + (1-t)F(B) = F(tA \oplus (1-t)B)$$

y al ser A, B compactos, y la multiplicación continua en $\mathbb{R}^n$, tA y $(1-t)B$ son compactos también, de donde se sigue inmediatamente que $tA \oplus (1-t)B$ es acotado. Como además, por definición, es cerrado, se sigue que $tA \oplus (1-t)B \in cc(\mathbb{R}^n)$, demostrando así la convexidad de $F(cc(\mathbb{R}^n))$. También, recordemos que $C(\mathbb{S}^{n-1})$ es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_\infty$, en particular es un G-espacio localmente convexo. Por último, notemos que como $G \leq O(n)$ es cerrado en $O(n)$, es un grupo compacto de Lie pues $O(n)$ lo es. De esta manera, en este último párrafo mostramos que, bajo F, $cc(\mathbb{R}^n)$ está encajado de manera equivariante en $C(\mathbb{S}^{n-1})$ de manera que su imagen cumple las hipótesis del Teorema Equivariante de Dugundji (3.2.2).

Más aún, observemos que $\mathbb{B}^n \in cc(\mathbb{R}^n)$ y que al ser G un grupo de isometrías en $\mathbb{R}^n$, cualquier $g \in G$ cumple que $g\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n$, así que también cumple que:

$$gF(\mathbb{B}^n) = F(g\mathbb{B}^n) = F(\mathbb{B}^n);$$

de donde podemos concluir que $\big(F(cc(\mathbb{R}^n))\big)[G] \neq \emptyset$. Por lo tanto, por el Corolario 3.2.4 y el Teorema 3.2.1 tenemos el ejemplo deseado.

Ejemplo 4.3.2. La familia de los subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$, $cc(\mathbb{R}^n)$, bajo la acción de un subgrupo cerrado G de $O(n)$, es un G-extensor absoluto para la clase de los espacios metrizables.

Por último, observemos que esta demostración nos sirve para proporcionar más ejemplos de G-extensores absolutos para la clase de los espacios metrizables. Definamos los siguientes subconjuntos de $cc(\mathbb{R}^n)$:

$$cc_0(\mathbb{R}^n) = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid 0 \in A\}$$

$$cc_*(\mathbb{R}^n) = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Int} A \neq \emptyset\}$$

$$cc_s(\mathbb{R}^n) = \{A \in cc(\mathbb{R}^n) \mid \text{si } x \in A \text{ entonces } (-x) \in A\}.$$

Denotemos por $\mathcal{H}$ a cualquiera de las familias anteriores y sea G un subgrupo cerrado de $O(n)$. Es claro que al ser G un grupo de isometrías, $\mathcal{H}$ es G-invariante. Además, para todo $A, B \in \mathcal{H}$, $tA \oplus (1-t)B \in \mathcal{H}$. Entonces $F(\mathcal{H})$ es un subconjunto convexo y G-invariante de $C(\mathbb{S}^{n-1})$. Finalmente, notemos que $\mathbb{B}^n \in \mathcal{H}$. Por lo tanto podemos concluir que $cc_0(\mathbb{R}^n)$, $cc_*(\mathbb{R}^n)$ y $cc_s(\mathbb{R}^n)$ son G-extensores absolutos para la clase de los espacios metrizables.

De esta manera, en este capítulo logramos exponer varios ejemplos que evidencian la utilidad del resultado principal de la tesis, el Teorema Equivariante de Dugundji (3.2.2), así como del Corolario 3.2.4. Desde la pregunta planteada en la Introducción acerca de la extensión de una función impar, hasta estos últimos ejemplos sobre familias de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, pudimos constatar la importancia del Teorema Equivariante de Dugundji.

Bibliografía

[1] S. A. Antonyan, *Equivariant generalization of Dugundji's theorem*, Mathematical Notes, vol. 38 no.4 (1985), 844-848.

[2] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[3] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.

[4] M. Clapp, *Análisis Matemático*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

[5] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 1 no. 3 (1951), 353-367.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlín, 1989.

[7] N. Jonard-Pérez, *Equivariant absolute extensor property on hyperspaces of convex sets*, Topology and its Applications 177 (2014), 88-96.

[8] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York, 1975.

[9] S. de Neymet, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.