UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

FIBRACIONES SOBRE SUPERFICIES REGLADAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
MARGARITA CASTAÑEDA SALAZAR

TUTOR: Dr. ALEXIS MIGUEL GARCÍA ZAMORA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

MORELIA, MICHOACÁN, MARZO 2018.

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial al Dr. Alexis Miguel García Zamora por aceptarme para realizar esta tesis doctoral bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo para guiarla. Le agradezco el haberme facilitado los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades desarrolladas durante estos cuatro años.

Deseo agradecer al Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH por su apoyo y facilidades prestadas para el desarrollo del presente trabajo; así mismo, a cada uno de los investigadores del instituto que marcaron cada etapa de mi camino profesional, que me ayudaron en asesorías y dudas, por sus obervaciones que han permitido mejorar mi tesis. A CONACyT por la beca otorgada durante este tiempo.

A mi madre Florina por su motivación constante, por haberme apoyado en todo momento, su confianza y amor incondicional. A mi padre Antonio que con su ejemplo me ha mostrado el camino del trabajo y la perfección, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor. A mi hermana Jacqueline y tíos Estela y Francisco por todo su apoyo y cariño.

A mis amigos, que nos apoyamos mutuamente en nuestra formación profesional, muy en especial a Alejandra Fabiola Huitrado Mora y a Juan Bosco Frías Medina por su tiempo y orientación en todo momento.

Así mismo, quiero agradecer a mi esposo Marco Antonio por estar a mi lado en cada etapa de mi preparación profesional, por su comprensión en los momentos de estrés, por su confianza, pero más que nada, por su amor.

Finalmente, dedico mi tesis a mi hijo Mauricio y a mi esposo Marco Antonio, a quienes les he robado parte de su tiempo para entregarle a mi preparación profesional así como a la creación y desarrollo de la presente tesis.

Mauricio y Marco Antonio

INTRODUCCIÓN

1. Inclinación y Clasificación

El presente trabajo tiene como objeto de estudio el análisis de fibraciones, en particular estamos interesados en los siguientes dos objetivos:

- Obtener una cota inferior para la inclinación de una fibración definida en una superficie racional.
- Clasificar fibraciones con cinco fibras singulares.

Estudiaremos ambos problemas para superficies proyectivas, irreducibles y no singulares. Dada una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$, es decir, un morfismo sobreyectivo con fibras conexas podemos asociarle su gavilla canónica relativa $K_f = K_X \otimes f^*\omega_{\mathbb{P}^1}^{-1}$ y tomando en cuenta la identificación usual de divisores y sus gavillas asociadas podemos escribir $K_f = K_X + 2F$, y por lo tanto definir los invariantes numéricos: autointersección de la gavilla canónica relativa y el grado de su imagen directa f_*K_f. En otras palabras

$$K_f^2 = K_X^2 + 8(g-1) \quad \text{y} \quad \deg f_*K_f = \chi(O_X) + (g-1).$$

Es bien conocido que si la fibración es no isotrivial, es posible definir el invariante principal asociado a una fibración, **la inclinación** λ_f, como el cociente entre dichos invariantes numéricos. De la Fórmula de Noether se sigue que $0 < \lambda_f \leq 12$. Si f es relativamente minimal y g el género de la fibra general es al menos 2, Xiao en [**20**] demostró que la inclinación λ_f satisface:

$$\lambda_f \geq 4\frac{g-1}{g}.$$

Y la igualdad ocurre si y sólo si la fibra general es hiperelíptica. Así,

$$4\frac{g-1}{g} \leq \lambda_f \leq 12.$$

Harris y Morrison en [**12**] propusieron una importante conjetura llamada **conjetura de la inclinación:**

$$\lambda_f \geq 6 + \frac{12}{g-1}.$$

En [**11**] Farkas y Popa construyeron contraejemplos para la conjetura de la inclinación, sin embargo aunque la conjetura fue refutada las preguntas que aún permanecen son: si la inclinación de cualquier divisor efectivo es al menos 6 o una cota cercana a este.

En el caso particular, en que X es una superficie racional, se tiene que $\lambda_f = K_f^2/g$, entonces y por lo tanto el estudio de la inclinación se reduce al análisis de K_f^2. Por [**13**] y [**17**] se sabe que en el caso que X es una superficie de dimensión de Kodaira no negativa y la fibración semiestable y no isotrivial la desigualdad $6(g-1) \leq K_f^2$ es válida.

Sin embargo, es un problema difícil determinar en que fibraciones sobre superficies regladas la desigualdad $6(g-1) \leq K_f^2$ es válida. Este problema esta relacionado con otro problema importante, el determinar el mínimo numero de fibras singulares. Si $f : X \to B$ es una fibración semiestable y no isotrivial, de [**16**] y [**18**] es conocido que la **desigualdad canónica estricta** $K_f^2 < (2g_B - 2 + s)(2g-2)$ es válida, donde s es el número de fibras singulares de f. De esta forma, en el caso particular, $B = \mathbb{P}^1$, se tiene que $K_f^2 < (s-2)(2g-2)$, en consecuencia una cota inferior de la forma $K_f^2 \geq n(g-1)$ induce una cota para s en términos de g. Por lo tanto, tiene sentido fijar como objetivo obtener una cota inferior para K_f^2.

En [**1**] Claudia R. Alcántara, Abel Castorena y Alexis G. Zamora demostraron que si X es una superficie racional y $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una fibración relativamente minimal, no isotrivial de género $g \geq 11$ y la gonalidad de la fibra general F es al menos 5, entonces $(5 + \frac{1}{2})(g-1) - 5 \leq K_f^2$, entendemos por gonalidad el mínimo grado de una aplicación de F en $\mathbb{P}^1$; también establecieron condiciones para que la desigualdad $6(g-1) \leq K_f^2$ sea válida. Ellos analizaron el sistema lineal n-adjunto, $|nK_X + F|$, donde F es la fibra general en el caso $n = 2$ y 3, en particular, dieron las condiciones para que dicho sistema cumpla las siguientes condiciones:

1. El divisor $nK_X + F$ sea efectivo y
2. $|nK_X + F|$ defina una aplicación birracional.

La primera condición con el objetivo de obtener su descomposición de Zariski-Fujita y la segunda para que la parte positiva sea big, es decir su autointersección es no negativa y diferente de cero, y de esta forma utilizar los Teoremas de Anulamiento de Mumford y Riemann Roch, de donde se obtienen algunas cotas inferiores para K_f^2. Así, motivados en [**1**] uno de los principales objetivos de esta tesis es generalizar este método para cualquier $n \in \mathbb{N}$, deduciendo una cota inferior para la inclinación de una fibración en términos de n y g.

Por otro lado, es bien conocido que una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ no isotrivial y semiestable admite un número de fibras singulares s. En [**6**] Beauville demostró que éste número s es al menos 4 y dió un ejemplo de una fibración de género 3 con cinco fibras singulares y dió una serie de ejemplos con 6 fibras singulares para todo $g > 1$. Beauville conjeturó que para $g \geq 2$ no existen fibraciones con 4 fibras singulares. En [**7**] Beauville clasificó todas las fibraciones elípticas de base $\mathbb{P}^1$ con 4 fibras singulares.

Luego en [**16**], Tan estableció que si $g \geq 2$, entonces $s \geq 5$ y construyó un ejemplo de una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ de género 2 con 5 fibras singulares. En [**17**] se deduce información acerca de la estructura de la superficie cuando tiene 5 ó 6 fibras singulares. En otras palabras, se demuestra que si $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una fibración semiestable y no isotrivial de género $g \geq 2$, entonces:

1. Si $s = 5$, entonces X es birracionalmente reglada,
2. Si $s = 6$ y $g = 2, 3, 4$, entonces X no es de tipo general,
3. Si $s = 6$, $g = 5$ y X es de tipo general, entonces el modelo minimal S de X satisface

$$K_S^2 = 1, \quad p_g(S) = 2 \quad q(S) = 0.$$

También conjeturaron que si X es de tipo general, entonces $s \geq 7$. De lo anterior, es natural intentar dar una clasificación de fibraciones semiestables, no isotriviales de base $\mathbb{P}^1$ con $s = 5$.

2. Estructura de la tesis

A continuación describiremos cómo se estructura la presente tesis.

En el Capítulo 1 fijamos la notación a utilizar en el presente trabajo. Definiremos los conceptos básicos como superficie reglada, superficie geométricamente reglada e incluiremos lo necesario para describir los modelos minimales de superficies de la forma $B \times \mathbb{P}^1$, donde B es una curva no singular. Además, mencionaremos algunas propiedades de sus invariantes numéricos. Abordaremos el concepto de fibración y mencionaremos algunos de sus resultados principales sin demostración, pero incluyendo su respectiva referencia. En el Capítulo 2, demostraremos el siguiente resultado:
Teorema 2.18. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal sobre X una superficie racional, $n \in \mathbb{N}$ fijo. Si $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ y gon $F \geq 2n + 3$, entonces*

$$\frac{6n+5}{n+1} g - \frac{9n+12}{2} \leq K_f^2.$$

En particular,

$$\frac{6n+5}{n+1} - \frac{9n+12}{2g} \leq \lambda_f.$$

Los cálculos para obtener la desigualdad anterior utilizan la descomposición de Zariski-Fujita aplicada a los sistemas lineales n-adjuntos a la fibra general, $|nK_X + F|$. Así las primeras dos secciones contienen el material preliminar para realizar los cálculos necesarios, por ejemplo: la definición de divisor pseudo-efectivo, el Teorema de descomposición Zariski-Fujita y algunas de sus consecuencias útiles, el concepto y propiedades de un ciclo (-1), la descripción de la parte negativa de un sistema lineal n-adjunto a un divisor nef (en otras palabras su intersección con toda curva irreducible es no negativa) o curva irreducible en términos de ciclos (-1), la definición de los invariantes asociados a una fibración y su relación con los invariantes de la superficie.

El Capítulo 3 está basado en el contenido del artículo del autor [**9**] en coautoría con Alexis G. Zamora. En este capítulo se demuestra:

Teorema 3.1. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial, obtenida de la explosión del lugar base del pincel Λ sobre la superficie minimal S. Si $s = 5$, entonces*

$$(K_X + F)^2 = 0$$

excepto posiblemente cuando S modelo minimal de X es racional y $g \leq 17$.

La demostración está basada en la versión vertical de la desigualdad de Miyaoka-Vojta-Tan y las propiedades del divisor canónico relativo de f. La primera sección contiene los resultados inciales acerca del mínimo número de fibras singulares para una fibración base $\mathbb{P}^1$ y la segunda sección incluye una discusión de la versión vertical de la desigualdad de Miyaoka-Vojta-Tan.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijaremos la notación y definiremos los conceptos en común a los dos objetivos del presente trabajo. La organización de éste capítulo es como se describe a continuación: en la primera sección estableceremos la notación estándar sobre superficies, enseguida definiremos el tipo de superficie que estamos interesados en analizar, daremos la descripción y propiedades de invariantes de los modelos minimales de superficies de la forma $B \times \mathbb{P}^1$ donde B es una curva no singular, el concepto de fibración y algunas de sus propiedades. Finalmente definiremos los principales invariantes asociados a una fibración y mencionaremos las propiedades necesarias para los próximos capítulos.

Nada de este capítulo es material original del autor, así que en cada sección se procurará dar las referencias pertinentes, excepto la primera sección pues, como se mencionó antes, sólo se presentan notaciones y definiciones estándares.

1. Notación

Trabajaremos sobre el campo de los números complejos. En todo este trabajo X y B denotarán una superficie y curva respectivamente, ambas proyectivas irreducibles y no singulares. Utilizaremos la notación estándar en la teoría de superficies: K_X denotará la gavilla canónica, $q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$ la irregularidad de X, $p_g(X) = h^2(X, \mathcal{O}_X)$ el género geométrico, $P_n(X) = h^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))$ el plurigénero para $n \geq 1$, $\kappa(X)$ la dimensión de Kodaira, etc.

Entederemos por **grupo de Picard de X** el grupo de clases de isomorfismos de gavillas invertibles sobre X. Identificaremos Pic X con el grupo de clases de divisores sobre X módulo equivalencia lineal, denotada por $\equiv$. Por $\mathcal{O}_X(D)$ denotamos la gavilla invertible asociada a D y $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ o simplemente $H^i(D)$, el espacio vectorial complejo de cohomología de la gavilla $\mathcal{O}_X(D)$ y $h^i(D)$ su dimensión.

Dado D un divisor denotaremos por $|D|$ el **sistema lineal completo** asociado a D, es decir, $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$. Un **sistema lineal** $\Lambda \subset |D|$ corresponde a un subespacio vectorial $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Recordemos que si $\Lambda \neq \emptyset$ define una aplicación racional $\varphi_\Lambda : X \dashrightarrow \mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V^*)$ donde $r = \dim \Lambda$. Si $r = 1$, decimos que Λ es un **pincel**.

2. Superficies regladas

Definición 1.1. [**5**, Definición III.1] Una superficie X es **reglada** si es birracionalmente equivalente a $B \times \mathbb{P}^1$, donde B es una curva no singular. Si además $B = \mathbb{P}^1$ se dice que X es **racional**.

Ejemplo 1.2. [**5**, Ejemplos III.2]

- $B \times \mathbb{P}^1$ es un ejemplo de superficie reglada.
- El proyectivizado $\mathbb{P}_B(\xi)$, donde ξ es un fibrado vectorial de rango 2 sobre B, es otro ejemplo de superficie reglada.

Con el objetivo de determinar los modelos minimales de superficies regladas es necesario considerar los siguientes conceptos:

Definición 1.3. [**5**, Definición III.3] Sea B una curva no singular. Una **superficie geométricamente reglada de base B**, es una superficie X y un morfismo $\gamma : X \to B$ tales que todas sus fibras son isomorfas a $\mathbb{P}^1$.

Ejemplo 1.4. Los ejemplos 1.2 son ejemplos de superficies geométricamente regladas.

No es evidente a priori que superficies geométricamente regladas son regladas; esto es consecuencia inmediata del siguiente teorema:

Teorema 1.5. [**5**, Teorema III.4] *Sea X una superficie, $\gamma : X \to B$ un morfismo sobre una curva B no singular. Si existe $x \in B$, tal que γ es no singular en x y que la fibra $\gamma^{-1}(x)$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$, entonces existe un abierto U de B que contiene a x y un isomorfismo de $\gamma^{-1}(U)$ sobre $U \times \mathbb{P}^1$, tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} \gamma^{-1}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\gamma"'] & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

En particular, X es reglada.

La siguiente proposición describe las superficies geométricamente regladas.

Proposición 1.6. [**5**, Proposición III.7] *Toda superficie geométricamente reglada de base B es B-isomorfa a $\mathbb{P}_B(\xi)$, donde ξ es un fibrado vectorial de rango 2 sobre B.*

Además, $\mathbb{P}_B(\xi)$, $\mathbb{P}_B(\xi')$ son B-isomorfos, si y sólo si, existe un haz lineal L sobre B tal que $\xi' \cong \xi \otimes L$.

Definición 1.7. [**5**, Definición II.15] Una superficie X se dice **minimal** si todo morfismo birracional $\varphi : X \to Y$, donde Y es una superficie no singular, es un isomorfismo.

Teorema 1.8. [**5**, Teorema II.11]***(Estructura de morfismos birracionales)*** *Sea $f : X \to X_0$ una aplicación birracional de superficies no singulares. Existen explosiones de puntos $\epsilon_k : X_k \to X_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$ y un isomorfismo $u : X \xrightarrow{\sim} X_n$ tal que $f = \epsilon_1 \circ \ldots \circ \epsilon_n \circ u$.*

Teorema 1.9. [**5**, Teorema II.17] ***(Contractibilidad de Castelnuovo)*** *Sea X una superficie, $E \subset X$ una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$ tal que $E^2 = -1$, entonces E es una curva excepcional sobre X.*

Observación 1.10. *Tomando en cuenta los Teoremas 1.8 y 1.9, la definición (1.7) es equivalente a que la superficie X no contenga curvas (-1).*

Proposición 1.11. [**3**, Proposición III.2.2] *Una curva irreducible $E \subset X$ es una curva (-1), si y sólo si*

$$E^2 < 0 \quad y \quad K_X.E < 0.$$

Cabe mencionar que los modelos minimales no son únicos.

Ejemplo 1.12. $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ son birracionalmente equivalentes y ambos son modelos minimales, dado que ellos no contienen curvas (-1).

Proposición 1.13. [**5**, Proposición II.16] *Toda superficie admite una aplicación birracional a una superficie minimal.*

Notemos que el resultado anterior garantiza la existencia de modelos minimales. Por lo tanto el estudio birracional de superficies se reduce al análisis de superficies minimales. Ahora tenemos los conceptos y resultados necesarios para describir los modelos minimales de superficies de la forma $B \times \mathbb{P}^1$. Desde este momento denotaremos por S un modelo minimal.

Lema 1.14. [**5**, Lema III.8] *Sea S una superficie minimal, B una curva no singular y $\gamma : S \to B$ un morfismo con fibra general isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Entonces S es geométricamente reglada por γ (es decir, B-isomorfa a un fibrado proyectivo $\mathbb{P}_B(\xi)$).*

Teorema 1.15. [**5**, Teorema III.10] *Sea B una curva suave no racional. Los modelos minimales de las superficies de la forma $B \times \mathbb{P}^1$, son las superficies geométricamente regladas de base B, es decir, fibrados proyectivos $\mathbb{P}_B(\xi)$.*

Proposición 1.16. [**5**, Proposición III.15.i)] *Todo fibrado vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$ se descompone. En particular, toda superficie geométricamente reglada de base $\mathbb{P}^1$ es isomorfa a una superficie*

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$$

para algún $n \geq 0$.

Sea $S = \mathbb{P}_B(\xi)$, $\gamma : S \to B$ su morfismo estructural. El haz $\gamma^*\xi$ sobre S tiene un haz lineal N como un sub-haz de manera natural: sobre cada punto $s \in S$, le corresponde una recta $N_s \subset \xi_{\gamma(s)}$, es decir s considerado como subespacio lineal en $\xi_{\gamma(s)}$ e induce la siguiente sucesión:

$$0 \to N \to \gamma^*\xi \to^u \mathcal{O}_S(1) \to 0,$$

donde $\mathcal{O}_S(1)$ es un haz lineal llamado **haz tautológico de S**.

Proposición 1.17. [**5**, Proposición III.18] *Sea $S = \mathbb{P}_B(\xi)$ una superficie geométricamente reglada de base B, $\gamma : S \to B$ el morfismo estructural. Denotemos por h la clase en Pic S de la gavilla estructural $\mathcal{O}_S(1)$. Entonces:*

i) *Pic $S \cong \gamma^*$Pic $B \oplus \mathbb{Z}h$.*
ii) *$H^2(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\Gamma \oplus \mathbb{Z}h$, donde Γ denota la clase de una fibra.*
iii) *$h^2 = deg\ \xi$.*
iv) *$[K] = -2h + (deg\ \xi + 2g(B) - 2)\Gamma$ en $H^2(S,\mathbb{Z})$.*

Algunos invariantes numéricos de superficies regladas de base B que serán de utilidad para el presente trabajo se coleccionan en la siguiente proposición:

Proposición 1.18. [**5**, Proposición III.21] *Sea X una superficie reglada de base B, entonces:*

$$q(X) = g(B); \quad p_g(X) = 0; \quad P_n(X) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Si X es geométricamente reglada, entonces, $K_X^2 = 8(1 - g(B))$.

Proposición 1.19. [**5**, Proposición IV.1] *Sea $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ una superficie geométricamente reglada de base $\mathbb{P}^1$. Denotemos por h (resp. Γ) la clase en Pic $\mathbb{F}_n$ del fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$ (resp. de una fibra), entonces:*

i) *Pic $\mathbb{F}_n = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\Gamma$, con:*

$$\Gamma^2 = 0, \quad \Gamma.h = 1, \quad h^2 = n.$$

ii) *Si $n > 0$ existe una única curva irreducible sobre $\mathbb{F}_n$ con autointersección negativa; si Δ denota su clase en Pic $\mathbb{F}_n$, entonces:*

$$\Delta = h - n\Gamma, \quad \Delta^2 = -n.$$

iii) *$\mathbb{F}_n$ no es isomorfa a $\mathbb{F}_m$ para $n \neq m$; $\mathbb{F}_n$ es minimal excepto para $n = 1$. La superficie $\mathbb{F}_1$ es isomorfa a $\mathbb{P}^2$ explotada en un punto.*

3. Fibraciones

DEFINICIÓN 1.20. Una **fibración** es una triada (X, B, f) formada por X una superficie no singular y un morfismo $f : X \to B$ sobre una curva no singular B sobreyectiva y con fibras conexas.

DEFINICIÓN 1.21. Dada una fibración $f : X \to B$:

- B se dice **base** y las curvas $F_b = f^{-1}(B),\ b \in B$, se dicen **fibras**.
- Una curva $C \subset X$ es **vertical** si está contenida en alguna fibra de f (equivalentemente $f(C)$ es un punto en B).
- Una curva $C \subset X$ es **horizontal** si no está contenida en una fibra (equivalentemente f induce un cubriente $C \to B$).
- f se dice **relativamente minimal** si no existen curvas (-1) verticales.
- f es **isotrivial** si existe un abierto de Zariski $U \subset B$ tal que todas las fibras sobre puntos de U son todas isomorfas entre sí, en caso contrario decimos que f es **no isotrivial.**

DEFINICIÓN 1.22. [**3**, Definición III.10.1] Una fibra F_b, $b \in B$, es **semiestable**, si ésta tiene las siguientes tres propiedades:

1. F_b es reducido,
2. las únicas singularidades de F_b son nodos,
3. F_b no contiene curvas (-1).

La fibración f es **semiestable**, si todas las fibras F_b son semiestables.

Notemos que en particular, toda fibración semiestable es relativamente minimal. Por otro lado, dada una fibración $f : X \to B$ tenemos las siguientes propiedades importantes:

- La fibra general de f es irreducible y no singular.
- Para $i = 0, 1$, y todo $x \in B$ si denotamos por F_x la fibra de f en x, entonces $h^i(F_x, \mathcal{O}_{F_x})$ es constante [**3**, Lema III.11.1]. En particular, las fibras no singulares tienen todas el mismo género geométrico, denotado por g y llamado **género de f**.
- Si F es cualquier fibra, entonces $F^2 = 0$. Por lo tanto, si F es una fibra no singular, entonces $\mathcal{O}_F(K_X) = \mathcal{O}_F(K_F)$ y por lo tanto $K_X.F = 2(g-1)$ [**5**, Proposición I.8.i]. Lo mismo es cierto si sustituimos K_X por $K_X(f^*D)$ para cualquier divisor D en B.

EJEMPLO 1.23.

- Sean B y C curvas proyectivas suaves y $\pi : B \times C \to B$ la proyección. Entonces π es una fibración de género g_C. Este tipo de fibraciones son ejemplos de fibraciones tales que todas sus fibras son no singulares. Además son ejemplos de fibraciones triviales.

- Sean C_1, C_2 dos cónicas planas proyectivas irreducibles; consideramos el pincel Λ generado por ellas. Supongamos además que ellas se intersectan transversalmente en cuatro puntos diferentes. Después de explotar los cuatro puntos base de Λ obtenemos una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$. Esta fibración tiene 3 fibras singulares que corresponden a las cónicas degeneradas que pasan a través de los cuatro puntos base. Además dos fibras generales (por ejemplo, las transformadas propias de C_1 y C_2) son isomorfas, pero no todas las fibras lo son, por la existencia de fibras singulares. Este ejemplo es un ejemplo de fibración isotrivial, pero no semiestable ni tampoco trivial.
- El ejemplo anterior se puede generalizar al considerar cualquier par de curvas planas proyectivas irreducibles F y G del mismo grado. Resolviendo el lugar de indeterminación del pincel generado por ellas, se obtiene una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$, donde X es una superficie racional y en general no es isotrivial.

Lo anterior implica lo siguiente:

Observación 1.24. 1. *Para cualquier $g \in \mathbb{Z}_+$ existe una superficie racional X y una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ de género g.*

2. *Sea S cualquier superficie proyectiva no singular, entonces existe una superficie proyectiva no singular X y un morfismo birracional $g : X \to S$, tal que X admite una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$. En efecto, podemos considerar una sección hiperplana H de S y un pincel $\Lambda \subset |H|$ generada por dos curvas irreducibles. Explotando una vez más el lugar de indeterminación del pincel Λ se obtiene la fibración deseada.*

4. Invariantes de una fibración

Definición 1.25. [**3**, Definición III.12] Sea $f : X \to B$ una fibración. El haz lineal $K_f := K_X \otimes f^*K_B^{-1}$ sobre X es llamado el **divisor canónico relativo de f**.

Observación 1.26. *Entre las propiedades más importantes de un divisor canónico relativo K_f se encuentran: para cualquier fibra no singular F de f, la restricción $\mathcal{O}_F(K_f) = \omega_F$. En particular, para cualquier fibra F, $K_f.F = 2(g_F - 1)$ donde g_F es el género aritmético de F.*

Los invariantes básicos asociados a una fibración $f : X \to B$ son:

$$K_f^2, \quad \text{y} \quad \deg f_*K_f.$$

De la sucesión espectral de Leray $\deg f_*K_f$ coincide con la característica relativa de Euler $\chi_f = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_B)\chi(\mathcal{O}_F)$, donde $\chi(\mathcal{O}_X) = \sum(-1)^i h^i(X, \mathcal{O}_X)$. Por lo tanto, los invariantes relativos están conectados a los invariantes de la superficie X mediante las siguientes formulas:

$$\begin{aligned} K_f^2 &= K_X^2 - 8(b-1)(g-1), \\ \deg f_*K_f &= \chi(\mathcal{O}_X) - (b-1)(g-1), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde b es el género de la base. Es conocido que la no negatividad de estos invariantes es equivalente a la no isotrivialidad en el caso en que f es semiestable.

Teorema 1.27. *Sea $f : X \to B$ una fibración semiestable:*

- *Si f es no isotrivial, entonces K_f es big y nef (*[**2**],[**15**]*);*
- *Si $g \geq 2$, entonces deg $f_*K_f \geq 0$, y deg $f_*K_f = 0$ si y sólo si f es isotrivial (*[**3**] *Teorema III.18.2).*

Capítulo 2

Inclinación de una fibración sobre una superficie racional

En este capítulo estudiaremos la inclinación de una fibración sobre una superficie racional, más específicamente, daremos una cota inferior para la autointersección de la gavilla canónica relativa. La organización es como sigue: en la primera sección se darán los conceptos y resultados que hacen referencia a la descomposición Zariski-Fujita, enseguida incluiremos el concepto de ciclo (-1) y algunas propiedades de sistemas lineales n-adjuntos. Más especificamente, se calculará la parte negativa de un sistema lineal n-adjunto de una curva efectiva o nef en términos de ciclos (-1), luego dada una fibración no isotrivial definiremos la inclinación de la fibración. En particular analizaremos la inclinación de una fibración definida sobre una superficie racional, después enunciaremos el Teorema de Reider y algunos de sus resultados. Finalmente presentaremos la generalización del método encontrado en [**1**] y demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 2.18. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal sobre X una superficie racional, $n \in \mathbb{N}$ fijo. Si $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ y gon $F \geq 2n+3$, entonces*

$$\frac{6n+5}{n+1}g - \frac{9n+12}{2} \leq K_f^2.$$

En particular,

$$\frac{6n+5}{n+1} - \frac{9n+12}{2g} \leq \lambda_f.$$

Las primeras tres secciones no son material original del autor, así que en cada sección se darán las referencias pertinentes.

1. Descomposición Zariski-Fujita

Definición 2.1. Un haz lineal L sobre X es **amplio** si para algún entero positivo no cero n, $H^0(X, O_X(L^n))$ define un encaje $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$.

El siguiente Teorema da una caracterización útil para la amplitud de un divisor.

Teorema 2.2. [**4**, Teorema 1.22] ***(Criterio de Nakai-Moishezon)*** *L un haz lineal sobre X es amplio si y sólo si para toda curva irreducible $C \subset X$, $L.C > 0$ y $L^2 > 0$. Además, si $h^0(L) \neq 0$ podemos omitir $L^2 > 0$.*

Definición 2.3. [**4**, Definición 14.4] Sea D un divisor sobre una superficie X. Entonces:

- D es **pseudo-efectivo** si para cada divisor amplio H sobre X, $D.H \geq 0$.
- D es **nef** si para cada curva irreducible C sobre X, $D.C \geq 0$.
- D es **big** si $D^2 > 0$.

Teorema 2.4. [**4**, Teorema 14.14] ***(Zariski-Fujita)*** *Sea D un $\mathbb{Q}$-divisor pseudo-efectivo sobre la superficie X. Entonces D puede ser escrito de manera única en la forma $D = P + N$, donde P es un $\mathbb{Q}$-divisor nef yN es efectivo. Además, para todo $i = 1, \ldots, q$, $(P.C_i) = 0$, la matriz de intersección $I(C_1, \ldots, C_q) = \|(C_i.C_j)\|_{i,j=1,\ldots,q}$ es definida negativa, donde $C_1, \ldots, C_q$ son las componentes irreducibles (reducidas) de $Sop(N)$.*

Definición 2.5. [**4**, Definición 14.16] La descomposición $D = P+N$ de un $\mathbb{Q}$-divisor D sobre la superficie X como en el Teorema 2.4 es llamada la **descomposición de Zariski de D**. P es llamado **parte positiva** y N la **parte negativa** de D.

Notemos que del Teorema 2.2 todo divisor efectivo es pseudo-efectivo, por lo tanto, en el presente trabajo estaremos aplicando el Teorema 2.4 a divisores efectivos. En particular, dada una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ donde X es una superficie racional, daremos las condiciones necesarias para que el divisor $nK_X + F$ sea efectivo, donde F es la fibra general y n es un natural $n \geq 3$.

Algunos resultados de la descomposición de Zariski-Fujita que serán utiles en la última sección se enuncian a continuación:

Lema 2.6. [**4**, Lemma 14.17] *Sea $D = P + N$ la descomposición de Zariski de un divisor pseudo-efectivo D sobre la superficie X. Entonces para cada $n \geq 0$ se tiene que $H^0(X, O_X(nD)) = H^0(X, O_X(nP))$.*

Lema 2.7. [**4**, Corolario 14.18] *Sea D un divisor pseudo-efectivo sobre la superficie X y $D = P + N$ su descomposición Zariski de D. Entonces $\kappa(X, D) = 2$, si y sólo si P es big.*

2. Propiedades de ciclos (-1) y sistemas lineales m-adjuntos

El material que se presenta en está sección corresponde a [**8**].

Definición 2.8. Sea X una superficie no singular y $Z > 0$ un divisor sobre X. Decimos que Z es un **ciclo (-1)**, si existe una superficie no singular X' y un morfismo birracional $f : X \to X'$ tal que:

- $f(Z)$ es un punto $p \in X'$,
- $\mathcal{O}_X(-Z) \cong f^*(I_{X',p})$ y
- $f : X - Z \to X' - p$ es un isomorfismo.

En este caso se dice que f contrae a Z.

Si Z es irreducible, entonces es el divisor excepcional de una explosión. En caso contrario, f es la composición de explosiones

$$f : X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_{n-1} \to X_n = X'.$$

Si $j > i$, denotamos por $f_{i,j}$ el morfismo $X_i \to X_j$ y denotamos por $Z_{i,j}$ el ciclo (-1) correspondiente sobre X_i. Entonces Z es la transformada total de $Z_{i,n}$ vía la aplicación $f_{0,i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Lema 2.9. [**8**, Lema 3.1] *Sea Z un ciclo (-1) sobre una superficie X, y sea $f : X \to X'$ el morfismo birracional que contrae a Z. Entonces:*

$$K_X \equiv f^*(K_{X'}) + \sum_{i=1}^{n} Z_{0,i}.$$

Lema 2.10. [**8**, Lema 3.3] *Si Z es un ciclo (-1) sobre una superficie X, entonces:*

$$K_X.Z = Z^2 = -1 \quad y \quad p_a(Z) = 0.$$

Definición 2.11. Una curva C irreducible y no singular se dice una **curva (-k)** si $p_a(C) = 0$ y $C^2 = -k$.

Proposición 2.12. [**8**, Proposición 4.2] *Sea C un divisor sobre una superficie X, tal que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

i: *C es nef o*
ii: *C es efectivo, irreducible y no es una curva (-k), con $1 \leq k \leq 3$.*

Sea $n > 0$ un entero. Supongamos que $|C + nK_X| \neq \emptyset$; si estamos en el caso (ii), $n \geq 2$ y C es racional. Entonces existe una única expresión

$$C + nK_X \equiv P + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{h_i} (n-i)\Theta_{i,j},$$

donde P es nef y los $\Theta_{i,j}$ son ciclos (-1) tales que:

1. $P.\Theta_{i,j} = 0$ *para cada* (i, j),
2. $\Theta_{i,j}.\Theta_{h,k} = 0$ *para* $(h, k) \neq (i, j)$,

3. *la matriz de intersección de las componentes irreducibles de*

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{h_i} (n-i)\Theta_{i,j}$$

es definida negativa,

4. $C.\Theta_{i,j} = i$ *para cada* (i, j) *y*
5. $h^0(X, \mathcal{O}_X(C + nK_X)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(P))$.

Los divisores P y N que aparecen en la Proposición 2.12 son la parte positiva y negativa, respectivamente de $C + nK_X$.

Observación 2.13. *En el caso, C un divisor nef y $n = 1$, se tiene:*

1. *De la Proposición 2.12.3, sabemos que $N = \sum \Theta_i$, donde los Θ_i son ciclos (-1) reducidos.*
2. *Del Lema 2.10 y Proposición 2.12.2 se sigue que $N^2 = \sum \Theta_i^2 = N.K_X$.*

En nuestro caso, dada una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ definida en X una superficie racional, dado que la fibra general F es nef, estamos interesados en aplicar el resultado anterior al sistema lineal n-adjunto a F, es decir, $|nK_X + F|$; tales resultados se encuentran en la última sección de este capítulo.

3. Teorema de Reider

En esta sección vamos a enunciar el **Teorema de Reider** y enseguida algunos de sus resultados que serán de gran utilidad en la demostración de la Proposición 2.24. El Teorema de Reider da condiciones necesarias para que el sistema lineal adjunto a un divisor nef tenga puntos base o separe puntos.

Teorema 2.14. [**19**, Teorema 1] ***(Teorema de Reider)*** *Sea X una superficie y L un divisor nef sobre X.*

i) *Si $L^2 \geq 5$ y p es un punto base de $|K_X + L|$, entonces existe E divisor efectivo que pasa por p, tal que:*

$$\begin{aligned} L.E &= 0, \qquad E^2 = -1, \\ L.E &= 1, \qquad E^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ii) *Si* $L^2 \geq 9$, p *y* q *no son separados por* $|K_X + L|$, *entonces existe* E *divisor efectivo que pasa por* p *y* q, *tal que:*

$$\begin{aligned} L.E &= 0, & E^2 &= -2 \quad ó \quad -1, \\ L.E &= 1, & E^2 &= -1 \quad ó \quad 0, \\ L.E &= 2, & E^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

iii) *Si* $L^2 = 9$, p *y* q *no son separados por* $|K_X + L|$, *entonces existe* E *divisor efectivo que pasa por* p *y* q, *tal que* $L \equiv 3E$ *y* $E^2 = 1$.

Lema 2.15. *Sea L un divisor nef sobre X.*

i. *Si* $L^2 \geq 5$ *y* $|L+K_X| = \emptyset$, *entonces X contiene un pincel libre de puntos base* $|E|$ *con* $E.L = 1$.
ii. *Si* $L^2 \geq 10$ *y* $|L + K_X|$ *no es birracional, entonces X contiene un pincel libre de puntos base E con* $E.L = 1$ *ó* 2.

Cabe señalar que ii) aparece en [**19**] como Corolario 2 y la demostración de i) es análoga.

Definición 2.16. Sea C una curva sobre X una superficie, la **gonalidad de C** es 0el mínimo grado de una aplicación de C en $\mathbb{P}^1$ y se denota como gon C.

4. Inclinación de una fibración

En esta sección introduciremos el concepto de inclinación de una fibración arbitraria; y analizaremos en particular la inclinación de una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ definida en una superficie racional X.

Definición 2.17. Sea $f : X \to B$ una fibración no isotrivial, se define la **inclinación de f** como

$$\lambda_f := \frac{K_f^2}{\deg f_* K_f}.$$

En particular, para el caso de nuestro interés X una superficie racional y $B = \mathbb{P}^1$se tiene que

$$\lambda_f = \frac{K_f^2}{g},$$

por lo tanto, el estudio de la inclinación de una fibración sobre una superficie racional se restringe al análisis de K_f^2 y en la siguiente sección daremos una cota inferior para K_f^2.

5. Inclinación de una fibración sobre una superficie racional

En esta sección $f : X \to \mathbb{P}^1$ denotará una fibración definida sobre X una superficie racional y $n \in \mathbb{N}$ fijo.

El principal objetivo es demostrar:

Teorema 2.18. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal X, $n \in \mathbb{N}$ fijo. Si* $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ *y gon $F \geq 2n+3$, entonces*

$$\frac{6n+5}{n+1}g - \frac{9n+12}{2} \leq K_f^2.$$

En particular,

$$\frac{6n+5}{n+1} - \frac{9n+12}{2g} \leq \lambda_f.$$

La demostración se divide en dos partes. Primero, daremos una cota para K_f^2 suponiendo que el sistema lineal $|(lK_X + F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional para todo $1 \leq l \leq n$ (Proposición 2.21). Luego, daremos condiciones suficientes para que el sistema $|(lK_X + F)_+ + K_X|$ defina una aplicación birracional (Proposición 2.24).

Antes de enunciar y demostrar la Proposición 2.21 necesitamos el siguiente Lema y algunas de sus consecuencias, que son pieza clave en nuestros cálculos. Dado D un divisor efectivo sobre X, escribiremos $D = D_+ + D_-$ para su descomposición de Zariski, entendiendo que D_+ y D_- son su parte positiva y negativa respectivamente.

Lema 2.19. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal sobre X una superficie racional. Si $(n-1)K_X + F$ y $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ son efectivos, entonces:*

1. *$nK_X + F$ es efectivo,*
2. $(nK_X + F)_+ = (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_+$ *y*
   $(nK_X + F)_- = ((n-1)K_X + F)_- + (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-$
3. $((n-1)K_X + F)_-.(((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_- = ((n-1)K_X + F)_-.K_X$.

Demostración. Dado que el divisor $(n-1)K_X + F$ es efectivo podemos escribir

$$nK_X + F = ((n-1)K_X + F)_+ + K_X + ((n-1)K_X + F)_-. \tag{5.1}$$

Comencemos por demostrar 1), como $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ y $((n-1)K_X + F)_-$ son efectivos, de (5.1) y la sucesión inducida por

$$0 \to \mathcal{O}_X(((n-1)K_X + F)_+ + K_X) \to \mathcal{O}_X(nK_X + F) \to \mathcal{O}_{((n-1)K_X+F)_-}(nK_X + F) \to 0,$$

se sigue que el divisor $nK_X + F$ es efectivo.

2) Tomando en cuenta que el divisor $((n-1)K_X+F)_+ + K_X$ es efectivo, (5.1) se puede escribir:

$$nK_X + F = (((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+ + (((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_- + ((n-1)K_X+F)_-. \tag{5.2}$$

Se va a demostrar que (5.2) es la descomposición de Zariski. Por la unicidad de la descomposición de Zariski y dado que $(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+$ es nef de (5.2) es suficiente demostrar:

a) $(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+.((n-1)K_X+F)_- = 0$.
b) La matriz de intersección de las componentes irreducibles de

$$\mathrm{Sop}\,((((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_- + ((n-1)K_X+F)_-) = \mathrm{Sop}(N)$$

es definida negativa.

Vamos a demostrar (a). De la Proposición 2.12 aplicada a $(n-1)K_X+F$ sabemos que:

$$((n-1)K_X+F)_- = \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{h_i}(n-1-i)\Theta_{ij},$$

donde Θ_{ij} son ciclos (-1). Dado que $\Theta_{ij}.((n-1)K_X+F)_+ = 0$ del Lema 2.12 se sigue que $\sum_i\sum_j\Theta_{ij} < (((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_-$ y de esto a) es cierto. Además:

$$\mathrm{Sop}((((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_- + ((n-1)K_X+F)_-) = \mathrm{Sop}((((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_-)$$

de donde se sigue b), y por lo tanto se tiene 2)

3) Tomando en cuenta que:

$$(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_- = -(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+ + ((n-1)K_X+F)_+ + K_X,$$

3) es consecuencia inmediata de la afirmación a) de 2). ❑

Fijemos algo de notación. Desde ahora, $(lK_X+F)_+ + K_X$ efectivo, entenderemos que lK_X+F también es efectivo, respectivamente para el caso $(lK_X+F)_- + K_X$. El siguiente Corolario da otra forma de escribir la parte negativa de un divisor n-adjunto a la fibra general, así como expresiones para su autointersección e intersección con el divisor canónico K_X, que serán utiles más adelante.

Corolario 2.20. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal sobre X una superficie racional. Si para todo $1 \le l \le n-1$, $(lK_X+F)_+ + K_X$ es efectivo, entonces:*

1. $(nK_X+F)_- = \sum_{l=1}^{n-1}((lK_X+F)_+ + K_X)_-$.
2. $(nK_X+F)_-.K_X = \sum_{l=1}^{n-1}((lK_X+F)_+ + K_X)_-^2$.
3. $(nK_X+F)_-^2 = \sum_{l=1}^{n-1}(2(n-l)-1)((lK_X+F)_+ + K_X)_-^2$.

4. $p_a((nK_X + F)_-) - 1 = \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1)$.
5. $\dfrac{n}{n+1}2p_a((nK_X + F)_- - 1) - (nK_X + F)_-^2 = \sum_{l=1}^{n-1}\left(\dfrac{-2(n-l)}{n+1} + 1\right)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1)$.

Demostración. Dado que $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ es efectivo del Lema 2.19.1, $nK_X + F$ también es efectivo.

1) La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 2$, de [**1**] Lema 2.2, $K_X + F$ es nef, entonces podemos escribir $2K_X + F = (K_X + F)_+ + K_X$ y claramente el Corolario es cierto para $n = 2$. Supongamos que $n > 2$ y se satisface:

$$((n-1)K_X + F)_- = \sum_{l=1}^{n-2}((lK_X + F)_+ + K_X)_-. \tag{5.3}$$

Del Lema 2.19.2 podemos escribir:

$$(nK_X + F)_- = ((n-1)K_X + F)_- + (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-,$$

y sustituyendo (5.3) obtenemos 1).

2) Intersectando 1) con K_X obtenemos

$$(nK_X + F)_-.K_X = \sum_{l=1}^{n-1}((lK_X + F)_+ + K_X)_-.K_X. \tag{5.4}$$

Por otro lado, dado que para todo $1 \leq l \leq n-1$, $(lK_X + F)_+ + K_X$ es el 1-sistema lineal adjunto del divisor $(lK_X + F)_+$ nef, de la Observación 2.13.2 sabemos que:

$$((lK_X + F)_+ + K_X)_-^2 = ((lK_X + F)_+ + K_X)_-.K_X,$$

y sustituyendo en (5.4) se tiene 2).

3) La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 2$, el Corolario es válido por 1). Supongamos que $n > 2$ y se cumple que:

$$((n-1)K_X + F)_-^2 = \sum_{l=1}^{n-2}(2(n-l) - 3)((lK_X + F)_+ + K_X)_-^2. \tag{5.5}$$

Del Lema 2.19 partes 2 y 3 podemos escribir:

$$(nK_X + F)_-^2 = ((n-1)K_X + F)_-^2 + 2((n-1)K_X + F)_-.K_X + (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-^2.$$

Luego, utilizando el inciso anterior y sustituyendo (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned}(nK_X+F)_-^2 &= \sum_{l=1}^{n-2}(2(n-l)-1)((lK_X+F)_++K_X)_-^2 + (((n-1)K_X+F)_++K_X)_-^2\\ &= \sum_{l=1}^{n-1}(2(n-l)-1)((lK_X+F)_++K_X)_-^2.\end{aligned}$$

4) Se sigue de utilizar 2) y 3). En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(nK_X+F)_-.((nK_X+F)_-+K_X) &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}(2(n-l)-1)((lK_X+F)_++K_X)_-^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}((lK_X+F)_++K_X)_-^2\\ &= \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)((lK_X+F)_++K_X)_-^2.\end{aligned}$$

5) Análogamente, se sigue de 3) y 4), pues:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}(nK_X+F)_-.((nK_X+F)_-+K_X)-(nK_X+F)_-^2 &= \frac{2n}{n+1}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)((lK_X+F)_++K_X)_-^2\\ &\quad-\sum_{l=1}^{n-1}(2(n-l)-1)((lK_X+F)_++K_X)_-^2.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned}\frac{2n(n-l)}{n+1}-(2(n-l)-1) &= \frac{2(n-l)}{n+1}(n-(n+1))+1\\ &= -\frac{2(n-l)}{n+1}+1,\end{aligned}$$

obtenemos 5). ❏

Ahora estamos preparados para demostrar nuestra primera Proposición:

Proposición 2.21. *Si para todo* $1 \le l \le n-1$*, los sistemas lineales* $|(lK_X+F)_++K_X|$ *son no vacíos y* $|((n-1)K_X+F)_++K_X|$ *define una aplicación birracional, entonces*

$$\frac{6n-1}{n}g-\frac{3(3n+1)}{2} \le K_f^2.$$

Demostración. Primero necesitamos:

Lema 2.22. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración relativamente minimal sobre X una superficie racional. Si $((n-1)K_X+F)_+ + K_X$ es efectivo y $|((n-1)K_X+F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional, entonces $(nK_X + F)_+$ es big y*

$$0 \leq h^0((nK_X + F)_+ + K_X) = \frac{1}{2}n(n+1)K_f^2 - (4n^2+2n-1)(g-1) - (p_a((nK_X+F)_-) - 1) + 1.$$

Demostración. Dado que $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ es efectivo, del Lema 2.19 parte (1) sabemos que el divisor $nK_X + F$ es efectivo y de la parte (2) podemos escribir:

$$(nK_X + F)_+ = (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_+. \tag{5.6}$$

Ahora, utilizando que el sistema lineal definido por $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ define una aplicación birracional, se sigue que $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ es big. Del Lema 2.6,

$$H^0(((n-1)K_X + F)_+ + K_X) \cong H^0((((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_+),$$

en consecuencia el divisor $(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+$ también es big y de (5.6) se sigue que $(nK_X+F)_+$ es big. Tomando en cuenta que el divisor $(nK_X + F)_+$ es big y nef, el Teorema de Anulamiento de Mumford seguido del Teorema de Riemann-Roch dan:

$$0 \leq h^0((nK_X + F)_+ + K_X) = \frac{1}{2}(nK_X + F)_+.((nK_X + F)_+ + K_X) + 1.$$

Sustituyendo $(nK_X + F)_+ = nK_X + F - (nK_X + F)_-$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq h^0((nK_X + F)_+ + K_X) &= \frac{1}{2}(nK_X + F - (nK_X + F)_-).(nK_X + F - (nK_X + F)_- + K_X) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(nK_X + F).[(n+1)K_X + F] \\ &+ \frac{1}{2}(nK_X + F)_-.((nK_X + F)_- - 2(nK_X + F) - K_X) + 1. \end{aligned}$$

Por la descomposición de Zariski, $(nK_X+F).(nK_X+F)_- = (nK_X+F)_-^2$, entonces la igualdad anterior da:

$$0 \leq h^0((nK_X + F)_- + K_X) = \frac{1}{2}(nK_X + F).[(n+1)K_X + F] - \frac{1}{2}(nK_X + F)_-.((nK_X + F)_- + K_X) + 1.$$

La igualdad se sigue de considerar que $K_X^2 = K_f^2 - 8(g-1)$, pues:

$$\begin{aligned} (nK_X + F).((n+1)K_X + F) &= n(n+1)K_X^2 + (2n+1)K_X.F \\ &= n(n+1)(K_f^2 - 8(g-1)) + 2(2n+1)(g-1) \\ &= n(n+1)K_f^2 + 2(-4n(n+1) + 2n + 1)(g-1) \\ &= n(n+1)K_f^2 - 2(4n^2 + 2n - 1)(g-1). \end{aligned}$$

❏

Y

Lema 2.23. *Si* $(lK_X + F)_+ + K_X$ *es un divisor efectivo, entonces*

$$K_f^2 - p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) + 1 \leq 8(g-1) + 9.$$

Demostración. Tomando en cuenta que $((lK_X + F)_+ + K_X)_-$ es una suma de ciclos (-1) podemos contraer su soporte y obtener una superficie no singular T con

$$K_X = \pi^* K_T + ((lK_X + F)_+ + K_X)_-,$$

donde $\pi : X \to T$ es la aplicación contracción. Por lo tanto,

$$K_X^2 = (\pi^* K_T)^2 + ((lK_X + F)_+ + K_X)_-^2 = (\pi^* K_T)^2 + p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1.$$

Sustituyendo $K_f^2 = K_X^2 + 8(g-1)$ y tomando en cuenta que T es racional, $K_T^2 \leq 9$ se sigue el Lema.

❏

Regresemos a la demostración de la Proposición 2.21. Dado que

$$\frac{n(n-1)}{2}(K_f^2 - 8(g-1) - 9) = (\sum_{l=1}^{n-1}(n-l))(K_f^2 - 8(g-1) - 9).$$

Aplicando el Lema 2.23 a cada $1 \leq l \leq n-1$:

$$\frac{n(n-1)}{2}(K_f^2 - 8(g-1) - 9) \leq \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)[p_a((lK_X + F)_+ + K_X) - 1].$$

Luego combinando el Corolario 2.20.4 y el Lema 2.22 obtenemos

$$\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)[p_a((lK_X + F)_+ + K_X) - 1] + (4n^2 + 2n - 1)(g-1) \leq \frac{n(n+1)}{2}K_f^2 + 1,$$

en otras palabras

$$\frac{n(n-1)}{2}(K_f^2 - 8(g-1) - 9) + (4n^2 + 2n - 1)(g-1) \leq \frac{n(n+1)}{2}K_f^2 + 1.$$

De esto se sigue la Proposición. ❏

Proposición 2.24. *Si* $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ *y la gonalidad gon* F *de la fibra general* F *es al menos* $2n+3$, *entonces* $|(nK_X + F)_+ + K_X| \neq \emptyset$ *y define una aplicación birracional.*

Demostración. La demostración esta basada en el Método de Reider aplicado al sistema lineal $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$. El siguiente Lema será útil pues dará un estimado de la autointersección de $(nK_X + F)_+$:

LEMA 2.25. *Si para todo* $1 \leq l \leq n-1$, $(lK_X + F)_+ + K_X$ *es un divisor efectivo y el sistema lineal* $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$ *define una aplicación birracional entonces:*

1.
$$(n-1)(n+2)(p_a((((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-) - 1) \geq$$
$$-2(2n+1)(g-1) - 9n(n+1) - 2 + 2\sum_{l=1}^{n-2}(n-l)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1).$$

2. *Si, además, para todo* $1 \leq l \leq n-1$, $|(lK_X + F)_+ + K_X|$ *define una aplicación birracional, entonces*
$$n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 \geq -\frac{(n-1)}{(n+2)}\Big(2(n+3)(g-1) + 3n^2 + 12n + 20\Big).$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Dado que $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ es efectivo, del Lema 2.19.1 aplicado a $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ se sigue que $nK_X + F$ también es efectivo, entonces $(nK_X + F)_+$ es nef. Luego, como $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional, del Lema 2.22, $(nK_X + F)_+$ es big y
$$h^0((nK_X + F)_+ + K_X) = \frac{1}{2}n(n+1)K_f^2 - (4n^2 + 2n - 1)(g-1) - (p_a((nK_X + F)_-) - 1) + 1.$$
Utilizando que para todo $1 \leq l \leq n-1$, $(lK_X + F)_+ + K_X$ es efectivo del Corolario 2.20.4:
(5.7)
$$h^0((nK_X+F)_+ + K_X) = \frac{1}{2}n(n+1)K_f^2 - (4n^2+2n-1)(g-1) - \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(p_a(((lK_X+F)_+ + K_X)_-) - 1) + 1.$$
Tomando en cuenta que $h^0((nK_X + F)_+ + K_X) \geq 0$, del Lema 2.23, (5.7) se convierte:
$$0 \leq \frac{1}{2}n(n+1)(8(g-1)+9) - (4n^2 + 2n - 1)(g-1)$$
$$-\sum_{l=1}^{n-2}(n-l)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1) + \left(\frac{1}{2}n(n+1) - 1\right)(p_a((((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-) + 1) + 1.$$
Finalmente, como
$$(4n(n+1) - (4n^2 + 2n - 1))(g-1) = (2n+1)(g-1)$$
y
$$\frac{1}{2}n(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2) = \frac{1}{2}(n+2)(n-1)$$
podemos escribir
$$(n-1)(n+2)(p_a(((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-) - 1) \geq -2(2n+1)(g-1) - 9n(n+1) - 2$$
$$+ 2\sum_{l=1}^{n-2}(n-l)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1).$$

2) La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 2$, tomando en cuenta que $K_X + F$ es nef del Lema 2.19.2 podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2(2K_X + F)_-.K_X - (2K_X + F)_-^2 &= 2((K_X + F)_+ + K_X)_-.K_X - ((K_X + F)_+ + K_X)_-^2 \\ &= ((K_X + F)_+ + K_X)_-^2. \end{aligned}$$

Dado que $|(K_X + F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional, del inciso anterior la proposición es cierta para $n = 2$.

Supongamos que $n > 2$. Dado que $((n-1)K_X + F)_+ + K + X$ es efectivo del Lema 2.19 parte (1), $nK_X + F$ es efectivo y de la parte (2) podemos escribir:

$$\begin{aligned} n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 &= n[((n-1)K_X + F)_- + (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-].K_X \\ &\quad - [((n-1)K_X + F)_- + (((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-]^2 \\ &= (n-1)((n-1)K_X + F)_-.K_X - ((n-1)K_X + F)_-^2 \\ &\quad - ((n-1)K_X + F)_-.K_X + (n-1)(((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-^2. \end{aligned}$$

Dado que para todo $1 \leq l \leq n-1$, $(lK_X + F)_+ + K_X$ define una aplicación birracional, en particular es efectivo del Corolario 2.20.2 aplicado a $((n-1)K_X + F)_-$ tenemos que

$$\begin{aligned} n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 &= (n-1)((n-1)K_X + F)_-.K_X - ((n-1)K_X + F)_-^2 \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n-2}(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1) \\ &\quad + (n-1)(p_a((((n-1)K_X + F)_+ + K_X)_-) - 1). \end{aligned}$$

Usando que $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional, del inciso anterior

$$\begin{aligned} n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 &\geq (n-1)((n-1)K_X + F)_-.K_X - ((n-1)K_X + F)_-^2 \\ &\quad + \frac{1}{n+2}(-2(2n+1)(g-1) - 9n(n+1) - 2) \\ &\quad + \frac{1}{n+2}\sum_{l=1}^{n-2}(-2(l+1) + n)(p_a(((lK_X + F)_+ + K_X)_-) - 1). \end{aligned}$$

Luego del Corolario 2.20.5 aplicado a $((n-1)K_X + F)_-$ obtenemos

$$\begin{aligned} n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 &\geq \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)((n-1)((n-1)K_X + F)_-.K_X - ((n-1)K_X + F)_-^2) \\ &\quad - \frac{1}{n+2}(2(2n+1)(g-1) + 9n(n+1) + 2). \end{aligned}$$

Utilizando la hipotesis de inducción

$$\begin{aligned} n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 &\geq -\frac{n-2}{n+2}(2(n+2)(g-1) + 3(n-1)^2 + 12(n-1) + 20) \\ &\quad - \frac{1}{n+2}(2(2n+1)(g-1) + 9n(n+1) + 2) \\ &= -\frac{1}{n+2}(S_1(g-1) + S_2) \end{aligned}$$

donde $S_1 = 2(n^2-4) + 2(2n+1)$ y $S_2 = (n-2)(3(n-1)^2 + 12(n-1) + 20) + 9n(n+1) + 2$, de donde se sigue que $S_1 = 2(n+3)(n-1)$ y

$$\begin{aligned} S_2 &= 3(n-1)^2(n-2) + 12(n-1)(n-2) + 20(n-2) + 9n(n+1) + 2 \\ &= 3(n-1)^2(n-2) + 12(n-1)(n-2) + 20(n-1) - 20 + 9n(n-1) + 18n + 2 \\ &= (n-1)(3(n-1)(n-2) + 12(n-2) + 20 + 9n + 18) \\ &= (n-1)(3(n-2)(n+3) + 9n + 38) \\ &= (n-1)(3n^2 + 12n + 20) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$n(nK_X + F)_-.K_X - (nK_X + F)_-^2 \geq -\frac{(n-1)}{(n+2)}\Big(2(n+3)(g-1) + 3n^2 + 12n + 20\Big)$$

como se quiere. ❑

Regresemos a la demostración de la Proposición 2.24. La demostración es por inducción sobre n. Si $n = 1$, de [**1**] Teorema 3.3.ii) sabemos que $(K_X + F)_+ + K_X$ es efectivo y de la demostración del Teorema 3.3.iii) se deduce que $(K_X + F)_+ + K_X$ define una aplicación birracional.

Ahora, supongamos que $n > 1$, $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ y gon $F \geq 2n + 3$. Dado que $3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$ y $2n + 5$ son funciones crecientes en la variable n, vemos usando la inducción que para todo $1 \leq l \leq n-1$, $(lK_X + F)_+ + K_X$ es efectivo y define una aplicación birracional. En particular, sabemos que $((n-1)K_X + F)_+ + K_X$ es efectivo, por lo tanto del Lema 2.19.1, $nK_X + F$ es efectivo.

Desde ahora y para el resto de esta demostración vamos a denotar por $P = (nK_X + F)_+$ y $N = (nK_X + F)_-$. Nuestro primer objetivo es demostrar que $P^2 \geq 9$. Dado que $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$ define una aplicación birracional, del Lema 2.22, P es big y

$$\frac{2}{n+1}\Big[(4n^2 + 2n - 1)(g-1) + (p_a(N) - 1) - 1 \leq nK_f^2\Big]. \tag{5.8}$$

Dado que $P^2 = (nK_X + F)^2 - N^2$ y $K_X^2 = K_f^2 - 8(g-1)$ obtenemos de (5.8):

$$\begin{aligned} P^2 \geq & \frac{2n}{n+1}\left[(4n^2+2n-1)(g-1) + \frac{1}{2}N.(N+K_X) - 1\right] \\ & - 4n(2n-1)(g-1) - N^2, \end{aligned}$$

después de reagrupar obtenemos:

$$\begin{aligned} P^2 \geq & \frac{2n}{n+1}((4n^2+2n-1) - 2(2n-1)(n+1))(g-1) - 1) \\ & + \left(\frac{n}{n+1}N.(N+K_X) - N^2\right). \end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción y el Lema 2.25.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} P^2 \geq & \frac{2n}{n+1}((g-1)-1) \\ & - \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)}\left((n+3)(g-1) + \frac{3n^2+12n+20}{2}\right) \\ = & \frac{2}{(n+1)(n+2)}(P_1(g-1) - P_2), \end{aligned}$$

donde

$$P_1 = n(n+2) - (n-1)(n+3) = 3$$

y

$$P_2 = n(n+2) + \frac{1}{2}(n-1)(3n^2+12n+20) = \frac{1}{2}(3n^3+11n^2+12n-20).$$

Por lo tanto

$$P^2 \geq \frac{6}{(n+1)(n+2)}(g-1) - \frac{1}{(n+1)(n+2)}(3n^3+11n^2+12n-20),$$

Dado que $6(g-1) \geq 3n^3 + 20n^2 + 39n - 2$:

$$\begin{aligned} P^2 \geq & \frac{6}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{6}(3n^3+20n^2+39n-2)\right) \\ & - \frac{1}{(n+1)(n+2)}(3n^3+11n^2+12n-20) = 9 \end{aligned} \tag{5.9}$$

En otras palabras, la desigualdad $3n^3 + 20n^2 + 39n - 2 \leq 6(g-1)$ implica que $P^2 \geq 9$. Primero demostraremos que $P + K_X$ es efectivo. Supongamos que $|P + K_X| = \emptyset$, entonces por el método de Reider (Lema 2.15.1) X contiene un pincel libre de puntos base $|E|$ tal que

$$E.P = 1. \tag{5.10}$$

Si las fibras de $|E|$ son no racionales, entonces la aplicación definida por $|P|$ contrae a E. Ahora, del Lema 2.19.2, $P = (((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+$ y del Lema 2.6 sabemos que $H^0((((n-1)K_X+F)_+ + K_X)_+) =$

$H^0(((n-1)K_X+F)_+ + K_X)$. Así, E es contraido por $|((n-1)K_X+F)_+ + K_X|$, que es una contradicción a la hipótesis de inducción.

De lo anterior podemos concluir que las fibras de $|E|$ son racionales. Afirmamos que el soporte de N es $|E|$-vertical. En efecto, dado que P es big y nef, y estamos suponiendo que $|P + K_X| = \emptyset$, obtenemos:

$$0 = h^0(P + K_X) = \frac{1}{2}P.(P + K_X) + 1,$$

$$P.(P + K_X) = -2. \tag{5.11}$$

En lo que sigue vamos a considerar el divisor $2P + K_X$ y demostraremos que es efectivo. Sabemos que el divisor $2P + K_X$ es el adjunto de $2P$ divisor big y nef, entonces del Teorema de anulamiento de Mumford sabemos que

$$h^0(2P + K_X) = P^2 + P.(P + K_X) + 1,$$

tomando en cuenta que $P^2 \geq 9$ y (5.11) se sigue que $2P + K_X$ es efectivo. Luego, de (5.10), $E.(2P + K_X) = 0$, por lo tanto $2P + K_X = \sum E_i$, donde E_i son curvas $|E|$-verticales. Se sigue $(2P + K_X)_+$ es la suma de un número finito de curvas linealmente equivalentes a E y $(2P + K_X)_-$ está formado por una suma de curvas $|E|$-verticales propiamente contenidas en las fibras de $|E|$. Usando la descripción de la parte negativa de $2P + K_X$ como la colección de ciclos (-1) Θ que satisfacen $P.\Theta = 2P.\Theta = 0$ (Proposición 2.12.1) se sigue que N es $|E|$-vertical. Por lo tanto:

$$1 = P.E = (nK_X + F - N).E = -2n + E.F,$$

que es una contradicción a la hipótesis sobre la gonalidad de F. De lo anterior concluimos que $P + K_X$ es efectivo.

En lo que resta vamos a demostrar que $|P + K_X|$ define una aplicación birracional. Dado que $P + K_X$ es efectivo, de (5.9) deducimos que $P^2 \geq 10$. Supongamos que $|P + K_X|$ no define una aplicación birracional, por el Método de Reider (Lema 2.15.2) X contiene un pincel $|E|$ libre de puntos base, tal que:

$$E.P = 1 \quad \text{ó} \quad 2.$$

Vamos a analizar el caso $E.P = 1$. Si las fibras de $|E|$ son racionales, entonces $E.(P+K_X) = -1$, que es una contradicción con el hecho de que $P + K_X$ es efectivo. Si las fibras de $|E|$ son no racionales, argumentamos como antes y concluimos que E es contraido por $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$.

Así, la única posibilidad es $E.P = 2$. Vamos a analizar dos casos: si las fibras de $|E|$ son no racionales, entonces el sistema $|P|$ define sobre E una involución hiperelíptica. Por lo tanto

$|P|$ no separa puntos; un argumento como en los casos anteriores vemos que esto implica que $|((n-1)K_X + F)_+ + K_X|$ no define una aplicación birracional.

Finalmente, si $E.P = 2$ y y las fibras de $|E|$ son racionales, una vez más podemos demostrar que N es $|E|$-vertical, en este caso usando que $P + K_X$ es efectivo y $E.(P + K_X) = 0$ se sigue que $P + K_X$ es una suma de divisores $|E|$-verticales efectivos. Finalmente obtenemos:

$$2 = E.P = E.(nK_X + F - N) = -2n + E.F,$$

de donde se sigue $E.F = 2n+2$, que es una contradicción a la gonalidad de F. Por lo tanto, $|P+K_X|$ define una aplicación birracional $\square$

Conclusión del Teorema 2.18.

Dado que $3n^3+20n^2+39n-2$ y $2n+5$ son funciones crecientes en la variable n, de la Proposición 2.24 para todo $1 \leq l \leq n$, tenemos que $(lK_X + F)_+ + K_X$ es efectivo y define una aplicación birracional. Así el Teorema 2.18 se sigue de la Proposición 2.21 aplicada a $|(nK_X + F)_+ + K_X|$. Y la última afirmación de Teorema se sigue de tomar en cuenta que X es racional y que deg $f_*K_f = g$.

Para finalizar este capítulo, a continuación mencionaé algunos de los problemas que me gustaría estudiar mas adelante:

1. Estudiar la inclinación de fibraciones $f : X \to \mathbb{P}^1$ sobre X una superficie reglada no racional. En particular, estudiar las condiciones para que la desigualdad $6(g-1) \leq K_f^2$ sea válida.
2. Construir ejemplos de fibraciones que muestren la desigualdad del inciso anterior.

Capítulo 3

Fibraciones sobre $\mathbb{P}^1$ con cinco fibras singulares

En el presente capítulo estudiaremos fibraciones semiestables, no isotriviales de base $\mathbb{P}^1$, en particular estamos interesados en fibraciones con cinco fibras singulares. La organización del capítulo es como sigue: en la primera sección recordaremos los resultados principales acerca del mínimo número de fibras singulares para una fibración de base $\mathbb{P}^1$, posteriormente enunciaremos algunos resultados útiles como la desiguadad de Miyaoka-Vojta-Tan y finalmente daremos una clasificación de las fibraciones con cinco fibras singulares. Más específicamente, tomando en cuenta que el divisor adjunto a la fibra general es nef demostraremos:

Teorema 3.1. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial, obtenida como resultado de la explosión del lugar base del pincel Λ sobre el modelo minimal S. Si $s = 5$, entonces*

$$(K_X + F)^2 = 0$$

excepto posiblemente cuando S modelo minimal de X es racional y $g \leq 17$.

La última sección está basado en el contenido del artículo [**9**] del autor en co-autoría con Alexis Miguel García Zamora.

1. Mínimo número de fibras singulares

Un problema clásico es intentar dar respuesta al problema de Szpiro:

Pregunta 3.2. Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial de género g. ¿Cuál es el mínimo número s de fibras singulares de f?

En 1981 Beauville dió una cota inferior para el número de fibras:

Teorema 3.3. [**6**, Proposición 1.1, Teorema 1.1] *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración no isotrivial, si $g \geq 1$, entonces:*

1. *f admite al menos 3 fibras singulares.*
2. *si f es semiestable, entonces $s \geq 4$.*

También Beauville conjeturó que si $g \geq 2$, entonces $s \geq 5$. En 1982 en [**7**] clasificó todas las fibraciones elípticas semiestables sobre $\mathbb{P}^1$ con 4 fibras singulares. En 1995 Tan mejoró la cota de s y demostró:

Teorema 3.4. [**16**, Teorema 1] *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial. Si el género de la fibra general es al menos 2, entonces $s \geq 5$.*

En el 2004, si $s = 5$, Tan, Tu y Zamora demostraron:

Teorema 3.5. [**17**, Corolario 2.2] *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial de género $g \geq 2$. Si $s = 5$, entonces X es birracionalmente reglada.*

Proposición 3.6. [**17**, Demostración del Teorema 2.1] *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial. Si $g \geq 2$, entonces el divisor $K_X + F$ es nef.*

En particular, $(K_X + F)^2 \geq 0$.

2. Desigualdad de Miyaoka-Vojta-Tan

En [**14**] Miyaoka demostró la desigualdad:

$$3\sum_i (1 + \mu_i - \frac{1}{1+\mu_i}) + K_S^2 \leq 3e(S),$$

donde μ_i es la longitud de cadena de curvas (-2), $e(S)$ es la característica topológica de Euler y K_S nef. Luego, en [**18**] Teorema 2.1, Vojta adaptó dicha desigualdad al caso vertical, después fue desarrollada por Tan en [**16**] Lema 2.3. En efecto, sea $f : X \to B$ una fibración semiestable de género $g \geq 2$ y $q_1, \ldots, q_r$ las singularidades racionales obtenidas después de contraer todas las cadenas de curvas verticales (-2) y μ_q la longitud de la cadena correspondiente. Para un punto singular q en una fibra no contenida en ninguna cadena de curvas verticales (-2) escribimos $\mu_q = 0$. Sea:

$$r_f := \sum \frac{1}{1+\mu_q}.$$

Entonces, para cualquier entero $e \geq 2$:

$$\frac{1}{3}e^2(K_X^2 - 2(g-1)(6(g_B - 1) + s - s/e)) \leq r_f \leq e_f.$$

Con e_f denotando el número total de nodos en las fibras de f. En particular, si $B = \mathbb{P}^1$ y $s = 5$ obtenemos

$$\frac{1}{3}e((K_X^2 + 2(g-1))e + 10(g-1)) \leq r_f \leq e_f. \tag{2.1}$$

Varias formas útiles de esta desigualdad se reúnen en el siguiente lema:

LEMA 3.7. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable, no isotrivial de género $g \geq 2$. Si $s = 5$, entonces evaluando (2.1) obtenemos:*

i) *Si $e = 3$, $K_S^2 + 3(g-1) \leq 3\chi(\mathcal{O}_S) + m$.*
ii) *Si $e = 4$, $19K_S^2 + 60(g-1) \leq 36\chi(\mathcal{O}_S) + 19m$.*
iii) *Si $e = 5$, $7K_S^2 + 22(g-1) \leq 9\chi(\mathcal{O}_S) + 7m$.*
iv) *Si $e = 6$, $13K_S^2 + 40(g-1) \leq 12\chi(\mathcal{O}_S) + 13m$.*

Donde $m = K_S^2 - K_X^2$.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos el caso i), el resto son análogos. Después de evaluar (2.1) en $e = 3$ obtenemos:

$$3K_X^2 + 16(g-1) \leq e_f.$$

Dado que f es semiestable de [**3**] Proposición III.11.4 sabemos que $e_f = 4(g-1) + e(X)$, así la desigualdad anterior se convierte:

$$3K_X^2 + 12(g-1) \leq e(X).$$

Tomando en cuenta que $m = K_S^2 - K_X^2 = e(X) - e(S)$:

$$3(K_S^2 - m) + 12(g-1) \leq m + e(S),$$

luego de la Fórmula de Noether, $e(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X) - K_X^2$ obtenemos:

$$4K_X^2 + 12(g-1) \leq 4m + 12\chi(\mathcal{O}_X)$$

de donde claramente se sigue i). ❑

Ahora estamos preparados para enunciar y demostrar los resultados principales de este capítulo.

3. Clasificación

En esta sección 3 dada $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración entenderemos que existe un morfismo $\pi : X \to S$ sobre una superficie minimal S tal que f es obtenida como la explosión del lugar base de un pincel $\Lambda \neq \emptyset$ sobre S.

Así mismo, para una fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ con cinco fibras singulares del Teorema 3.5 sabemos que X es birracionalmente reglada, entonces y por lo tanto para el resto de esta sección vamos a utilizar la notación del Capítulo 1, sección 2.

Finalmente antes de enunciar y demostrar los resultados principales de esta sección, notemos que de la Proposición 3.6 el propósito de esta sección es demostrar en que casos ocurre $(K_X + F)^2 =$

0 o no; vamos a estudiar por separado los casos S racional y no racional; el siguiente teorema analiza el caso S no racional.

Teorema 3.8. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial, obtenida como la explosión del lugar base de un pincel Λ sobre una superficie minimal no racional S. Si $s = 5$, entonces:*

a) $(K_X + F)^2 = 0$.
b) *Si C es el elemento general de Λ, entonces $C \equiv 2\Delta + 2\Gamma$, donde Δ es la sección de γ con $\Delta^2 = -n$ y Γ es una fibra de γ. La fibración f es inducida por un cubriente 2:1, $X \to \mathbb{P}^1 \times B$, vía la primera proyección.*
c) *C es no singular.*

Demostración. Dado que $s = 5$, del Lema 3.7.i tenemos:

$$3(g-1) - 5(q-1) \leq m.$$

Usando la definición de m y la fórmula de Riemann-Roch, obtenemos:

$$\begin{aligned} m = K_S^2 - K_X^2 &= \chi(2K_S) - \chi(2K_X) \\ &= 9(1-q) + h^1(2K_X) - h^2(2K_X) \end{aligned}$$

y de esto:

$$3(g-1) - 5(q-1) \leq m = 9(1-q) + h^1(2K_X) - h^2(2K_X). \tag{3.1}$$

a) La demostración es por contradicción. Supongamos que $K_X + F$ es big, entonces la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(2K_X) \to \mathcal{O}_X(2K_X + F) \to \omega_F^{\otimes 2} \to 0,$$

y el Teorema de Anulamiento de Mumford dan:

$$3(g-1) = h^0(2K_X + F) + h^1(2K_X).$$

Por lo tanto, de (3.1) resulta que:

$$h^0(2K_X + F) = h^2(2K_X) = 0, \text{ y } q = 1.$$

Sustituyendo esta igualdad en el Lema 3.7.ii, obtenemos $g - 1 \leq 0$ que es una contradicción con la hipótesis $g \geq 2$.

b) De [**17**] demostración del Teorema 2.1 sabemos que si $(K_X + F)^2 = 0$ entonces el sistema lineal libre de puntos base $|3(K_X + F)|$ esta compuesto con una fibración $p' : X \to B'$ sobre una curva no singular B' y con su fibra general F' satisfaciendo $F' \cong \mathbb{P}^1$ y $F.F' = 2$. Esta construcción da un cubriente 2:1

$$X \to \mathbb{P}^1 \times B',$$

induciendo la fibración vía la primera proyección. Sea $p = \gamma \circ \pi$, donde γ es el morfismo estructural. Dado que $F' \cong \mathbb{P}^1$, se sigue que cada F' debe ser vertical con respecto a p. Tenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"'] & B' \\ B. \arrow[ur, "1:1"'] & \end{tikzcd}$$

La aplicación de B a B' es definida a traves de la sección Δ. Esta aplicación es 1:1 porque las fibras de p' son conexas. Por lo tanto, la fibra general de p es una curva en la misma clase algebraica de Γ. Se sigue que $F.\Gamma = F.F' = 2$. Además, $C.\Gamma = \pi^*C.\pi^*\Gamma = F.\Gamma = 2$. Si escribimos $C \equiv a\Delta + b\Gamma$, con a y b enteros positivos, entonces usando $C.\Gamma = 2$ obtenemos que $a = 2$.

c) De $C \equiv 2\Delta + b\Gamma$ se sigue que:

$$C.K_S = 4(q-1) - 2(b-n) \tag{3.2}$$

$$C^2 = 4(b-n). \tag{3.3}$$

Dado que $(K_X + F)^2 = 0$ y $m = K_S^2 - K_X^2$ tenemos:

$$m = 4(g-1) - 8(q-1).$$

Ahora, denote por r_i la multiplicidad de C en el conjunto de puntos infinitamente cercanos, tomando en cuenta que $2(g-1) = C.K_S + \sum_{i=1}^m r_{p_i}$ y (3.2) obtenemos

$$m = -4(b-n) + 2\sum_{i=1}^m r_{p_i}.$$

Usando (3.3) deducimos

$$C^2 = 2\sum_{i=1}^m r_{p_i} - m.$$

Por otro lado, $C^2 = \sum_{i=1}^m r_{p_i}^2$. Por lo tanto, de la igualdad $\sum_{i=1}^m r_{p_i}^2 = 2\sum_{i=1}^m r_{p_i} - m$, resulta que $\sum_{i=1}^m (r_{p_i} - 1)^2 = 0$, por lo tanto para todo $i = 1 \ldots, m$, $r_i = 1$, así C es no singular. ❑

TEOREMA 3.9. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial obtenida como la explosión del lugar base de un pincel Λ sobre una superficie racional minimal S. Si $s = 5$ y $K_X + F$ es big, entonces:*

a) *$h^0(2K_X + F) = 0$ y $g - 1 \leq 16$, o*

b) $h^0(2K_X + F) = 1$ y $g - 1 \leq 9$.

Demostración. Demostraremos a) suponiendo que S no es el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, i.e., supongamos que $K_S^2 = 8$. Las demostraciones de b) y los casos con $S = \mathbb{P}^2$ son análogos. Dado que $s = 5$, del Lema 3.7.iv tenemos:

$$40(g-1) + 92 \leq 13m.$$

Usando

$$\begin{aligned} m = K_S^2 - K_X^2 &= \chi(2K_S) - \chi(2K_X) \\ &= 9 + h^1(2K_X) - h^2(2K_X) \end{aligned}$$

obtenemos

$$40(g-1) + 92 \leq 13m = 13(9 + h^1(2K_X) - h^2(2K_X)). \tag{3.4}$$

Dado que $K_X + F$ es big y nef, el Teorema de Anulamiento de Mumford y la sucesión exacta

$$0 \to O_X(2K_X) \to O_X(2K_X + F) \to \omega_F^{\otimes 2} \to 0,$$

da:

$$3(g-1) = h^0(2K_X + F) + h^1(2K_X).$$

Esto combinado con (3.4) da $h^0(2K_X + F) \leq 1$. Supongamos $h^0(2K_X + F) = 0$. Usando que $K_X + F$ es big y nef y el Teorema de Riemann Roch

$$0 = \chi(2K_X + F) = \frac{(2K_X + F).(K_X + F)}{2} + 1.$$

Por lo tanto,

$$3(g-1) = -1 - K_X^2. \tag{3.5}$$

Del Lema 3.7.iii), (3.5) y $m = K_S^2 - K_X^2 = 8 - K_X^2$ tenemos $g - 1 \leq 16$. Si $h^0(2K_X + F) = 1$, usamos argumentos similares con $3(g-1) = -K_X^2$. ❑

Observación 3.10. *Por analogía a el caso en que S no es racional, la condición $(K_X + F)^2 = 0$ implica que F es hiperéliptica ([**17**] demostración del Teorema 2.1).*

Proposición 3.11. *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración semiestable y no isotrivial, obtenida de la explosión del lugar base de un pincel Λ sobre $S = \mathbb{P}^2$. Si $s = 5$ y C el elemento general de Λ es no singular, entonces el divisor $K_X + F$ es big y el grado d de C es $d = 4, 5, 6$.*

Demostración. Para demostrar que el divisor $K_X + F$ es big, la prueba es por contradicción. Supongamos que $(K_X + F)^2 = 0$, entonces $4(g-1) = -K_X^2$. Dado que $S = \mathbb{P}^2$ y $m = K_S^2 - K_X^2$, obtenemos que:

$$m = 4(g-1) + 9. \tag{3.6}$$

Usando que C es no singular, sabemos que $m = d^2$ y $2(g-1) = d(d-3)$, y sustituendo en (3.6) se tiene que $d = 3$, por lo tanto $g = 1$, que es una contradicción a la hipótesis sobre g. Así queda demostrado que el divisor $K_X + F$ es big.

Ahora utilizando que el divisor $K_X + F$ es big, de la demostración del teorema anterior sabemos que $h^0(2K_X + F) \leq 1$, además de la demostración se tiene que:

1. $h^0(2K_X + F) = 0$ y $m = 10 + 3(g-1)$, o
2. $h^0(2K_X + F) = 1$ y $m = 9 + 3(g-1)$.

Veamos el caso 1), usando que C es no singular, tenemos que $d^2 = 10 + \frac{3}{2}d(d-3)$ entonces $d^2 - 9d + 20 = 0$, en otras palabras $(d-4)(d-5) = 0$, por lo tanto $d = 4$ o 5. Un cálculo análogo para 2) permite concluir que $d = 6$. ❑

Existen ejemplos conocidos de fibraciones con exactamente 5 fibras singulares. En [**16**] Tan construyó una fibración de género 2 sobre una superficie racional satisfaciendo $(K_X + F)^2 = 0$. Por otro lado, el pincel de Wiman-Edge en [**10**] es un ejemplo clásico de una fibración de género 6, obtenida de la resolución del lugar base de un pincel Λ, tal que el elemento general C de Λ es una curva plana de grado 6 con 4 nodos como singularidades y $(K_X + F)^2 = 5$.

Para finalizar este capítulo en lo que resta, describiré los problemas que me gustaría estudiar en un futuro:

1. Mejorar las cotas para g del Teorema 3.9, ó
2. Construir ejemplos de fibraciones que cumplan la igualdad, en otras palabras fibraciones con $g - 1 = 16$ o $g - 1 = 9$.

Bibliografía

[1] Alcántara, R. C, Castorena, A., Zamora, A. G. *On the slope of relatively minimal fibrations on rational complex surfaces*. Collect. Math **62**: pp. 1-15, 2011.

[2] Arakelov, S.J. *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, Math. USSR-Izv. **5** (1971).

[3] Barth, W.; Hulek C.; Peters, C.; Van de Ven, A. *Compact complex surface*. Springer-Verlang, 2003.

[4] Lucian Bădescu. *Algebraic surface*. Springer-Verlang, 2001

[5] Beauville, A. *Surfaces algébriques complexes*. Asterisque, **54** (SMF 1978).

[6] Beauville, A. *Le nombre minimum de fibres singulières d'un coubre stable sur* $\mathbb{P}^1$*, In: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, (L.Szpiro, ed.)*. Astérisque **86**: pp. 97-108, 1981.

[7] Beauville, A. *Les familles stables de courbes elliptiques sur* $\mathbb{P}^1$ *admettant quatre fibres singulières*. C.R. Acad. Sci. Paris **294**: pp. 657-660 1982.

[8] Calabri, A., Ciliberto, C. *Birational classification of curves on rational surfaces*. Nagoya Math. J. (199), 43-93, 2010.

[9] Castañeda Salazar M., Zamora, A. G. *Semistable fibrations over* $\mathbb{P}^1$ *with five singular fibers*. Bol. Soc. Mat. Mex., pp: 1-7, 2017.

[10] Edge, W. L. *A pencil of four-nodal plane sextics*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **89**: pp. 413-421, 1981.

[11] G. Farkas, M. Popa. *Effective divisors on* $\overline{\mathbb{M}}_g$*, curves on* $K3$ *surfaces and the Slope Conjecture*. Journal of Algebraic Geometry. **14**: pp. 151-174, 2005.

[12] J. Harris, I. Morrison. *Slopes of effective divisors on the moduli spaces of stable curves*. Invent. Math. **99**: pp. 321-355, 1990

[13] Kitagawa, S., Konno, K. *Fibred rational surfaces with extremal Mordell-Weill latices*. Mathematische Zeitschrift **251**, pp. 179-204, 2005.

[14] Miyaoka, Y. *The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with Given Numerical Invariants*. Math. Ann. **268**, pp. 159-171, 1984.

[15] Parshin, A. *Algebraic curves over functions fields* Izvest. Akad. Nauk. **32**, 1968.

[16] Tan, S. L. *The minimal number of singular fiber of a semistable curve over* $\mathbb{P}^1$. J. Algebraic Geom. **4**: pp. 591-596, 1995.

[17] Tan, S. L., Tu, Y., Zamora, A. G. *On complex surfaces with 5 or 6 semistable singular fibers over* $\mathbb{P}^1$. Mathematische Zeitschrift **249**: pp. 427-438, 2005.

[18] Vojta, P. *Diophantine Inequalities and Arakelov Theory. Appendix to Introduction to Arakelov theory by S. Lang*. Springer , Berlin, pp. 155-178, 1988.

[19] Reider, I. *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*. Ann. Math. **127**: pp. 309-316, 1988.

[20] Xiao, G. *Fibered algebraic surfaces with low slope*. Math. Ann. **276**: pp. 449-466, 1987.