Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada

La homogeneidad del seudoarco

Tesis

que para optar el grado de:

Maestro en Ciencias

Presenta:

Erick Ivan Rodríguez Castro

Director de tesis:
Dr. Alejandro Illanes Mejía

Entidad de adscripción: Instituto de Matemáticas

Ciudad de México, Febrero de 2018

Índice

Agradecimientos

"Se prepara el caballo para el día de la batalla,
pero la victoria es de Yahveh"
Proverbios 21:31

Agradezco a Dios por todo lo que Él me da, incluyendo la oportunidad de este trabajo.

A mi madre Consuelo Castro Villagómez por el apoyo incondicional que siempre me ha brindado. A mi hermano Diego Alfonso Rodríguez Castro, por motivarme desde su silencio a luchar.

Al doctor Alejandro Illanes Mejía, por su generosidad y su paciencia, así como por el magnífico testimonio de lo que un matemático es.

Al doctor Pawel Krupski por las charlas y su amabilidad para compartir un artículo esencial para la elaboración de este trabajo.

Al jurado que aceptó revisar este trabajo, gracias por su amabilidad, trabajo y tiempo.

Finalmente, a Verónica por su amor en tiempos revueltos.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto: "Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II" (IN101216) del programa PAPIIT, DGAPA, UNAM.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, conexo, compacto y con más de un punto.

Un continuo es *indescomponible* si no se puede poner como unión de dos subcontinuos propios.

En este trabajo supondremos que el lector está familiarizado con la teoría básica de los continuos. En particular, supondremos que conoce el Teorema del Cable Cortado, el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo dado y los arcos ordenados. Los resultados de la teoría de continuos que usamos pueden encontrarse en [1].

Entonces nuestro lector ya sabrá que mientras que es fácil encontrar continuos descomponibles, no es tan fácil producir continuos indescomponibles. Pero seguramente ya sabrá que el arcoiris de Knaster es indescomponible.

Cuando Knaster estudió el arcoiris, surgió la pregunta de si era posible construir un continuo X que no sólo fuera indescomponible, sino también hereditariamente indescomponible, esto quiere decir que no sólo X sea indescomponible, sino que todos sus subcontinuos no degenerados sean indescomponibles. Por supuesto que el arcoiris no califica, pues sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, y los arcos son descomponibles. Investigar esta pregunta, fue el tema de tesis de doctorado de Knaster. Finalmente pudo producir tal fenómeno, en el plano.

Resultó que tuvo que construir un continuo bastante complicado. Su tesis constó de 40 páginas dedicadas a construir el monstruo y probar que era hereditariamente indescomponible. Fue un reto interesante, le sirvió a B. Knaster para doctorarse, pero los topólogos interesados en estos temas lo vieron como una curiosidad digna de construirse y tenerla en la vitrina de los ejemplos raros. La tesis de Knaster fue publicada en 1922, en la revista Fundamenta Mathematicae.

En 1920, en el primer volumen de Fundamenta, Knaster y K. Kuratowski hicieron una pregunta muy natural. ¿Es la circunferencia el único continuo homogéneo del plano?

En 1924, S. Mazurkiewicz mostró que la circunferencia es el único continuo homogéneo localmente conexo. En 1937, Z. Waraszkiewicz, en un momento de ofuscación, soñó que resolvía esta pregunta, escribió un artículo probando que esta pregunta tiene una respuesta positiva, es decir, que la circunferencia es el único. Fue tan bueno su sueño que consiguió engañar a un árbitro de los Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris que le publicó su artículo. No sólo engañó al árbitro sino que, entre otros, también engañó a G. Choquet, quien basándose en el resultado de Waraszkiewicz publicó un artículo en los Comptes, clasificando a todos los compactos homogéneos del plano. Según esta clasificación falsa, estos compactos son: (a) los conjuntos finitos, (b) la circunferencia, (c) el conjunto de Cantor, (d) una unión finita y ajena de circunferencias, y (e) el producto cartesiano del conjunto de Cantor con la circunferencia. Algo rescatable tuvo el trabajo de Waraszkiewicz, en realidad probó que la circunferencia es el único continuo homogéneo que cumple algunas condiciones extra, no las detallaremos pues queremos caminar por otro sendero.

En 1921, S. Mazurkiewicz se preguntó si el intervalo $[0,1]$ es el único continuo *hereditariamente equivalente*. Esto quiere decir: ¿es $[0,1]$ el único continuo X tal que todos los subcontinuos no degenerados de X son homeomorfos a X? Es claro que $[0,1]$ es hereditariamente equivalente pues sus subcontinuos no degenerados también son intervalos y son homeomorfos a $[0,1]$.

Resulta que en 1948, E. E. Moise publicó su tesis doctoral, en la que construyó un continuo en el plano que es hereditariamente equivalente y que no es un arco, por compartir esta propiedad con el arco le llamó Seudoarco.

Por esa época Moise y RH Bing estaban empeñados en perseguir los problemas más importantes de la teoría de los continuos y produjeron resultados muy profundos. Bing también estaba investigando ideas parecidas a las de Moise.

Un detalle curioso y extraño, con el que se constata que hay que leer con cuidado lo que son las cadenas torcidas para entenderlas es el siguiente.

El famoso libro topología de J. G. Hocking y G. S. Young tiene dos ediciones, la primera de Addison-Wesley de 1961, y la segunda de Dover de 1988. En la primera incluyen un dibujo terrible que titulan: tres pasos en la construcción del seudoarco. En la segunda edición, por lo que dicen, parece que lo único que corrigieron fue precisamente ese dibujo, por favor búsquelo y verá que se trata de otro dibujo terrible.

El gran salto de las propiedades del seudoarco lo dio Bing en 1948, cuando probó que el seudoarco es homogéneo.

Este resultado fue verdaderamente sorpresivo, espectacular y contraintuitivo. Más adelante daremos la construcción del seudoarco. Éste se construye usando una sucesión de cadenas anidadas.

Si uno piensa un poco en su construcción, puede notar que las cadenas que definen al seudoarco pueden empezar todas en un punto p_0 y terminar en otro punto q_0. Entonces uno podría pensar que esos dos puntos tienen alguna peculiaridad que los hace diferentes de los demás. Como ocurre con el intervalo $[0,1]$, el 0 y el 1 son los extremos de $[0,1]$, ocupan una posición diferente de los demás y no hay homeomorfismos que envíen el 0 a un elemento de $(0,1)$. Bueno pues esa es la impresión que se tenía del seudoarco cuando se construyó. El teorema de Bing resultó tan inesperado y de lectura tan complicada que no fue aceptado inmediatamente. Por cierto, en 1949, Moise, pisándole los talones a Bing, publicó una ligera simplificación de la prueba de Bing.

En 1953, I. Kapuano publicó un artículo en los Comptes "probando" que Bing estaba equivocado y que el seudoarco no es homogéneo, como se vio que la "prueba" tenía una falla, el mismo Kapuano "corrigió" su artículo con otro artículo publicado en los mismos Comptes (que no se ve que tuviera tan buenos árbitros). Las pruebas de Kapuano no estaban bien pero sembró la desconfianza.

En 1955, Esenin-Vol'pin, refiriéndose a esta situación, y en relación al problema de la existencia de continuos homogéneos del plano publicó en el "Referativni Zhurnal" lo siguiente: "a la luz de esto, el problema de Knaster y Kuratowski permanece abierto".

Intrigado, el mismo Knaster le pidió a sus destacados alumnos A. Lelek y M. Rochowski, que revisaran con cuidado la prueba de Bing y la expusieran con todo detalle en su seminario en Polonia. Esto se hizo y Lelek escribió una monografía completa de 60 páginas (en Polaco) con los detalles. De maneras similares, los topólogos se fueron convenciendo poco a poco de que Bing tenía razón.

El seudoarco ha resultado toda una caja de sorpresas. Bing también mostró que sólo hay (salvo homeomorfismos, claro) un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible. Con esto, obtuvo como corolario que el continuo que hemos descrito arriba, el que construyó Moise y el que construyó Knaster en su tesis doctoral son el mismo.

De manera que el seudoarco no sólo es homogéneo sino que también es hereditariamente equivalente.

Existe una tesis de maestría de 1989 escrita por Evan Innerst de la San Jose State University en la que se prueban algunas propiedades del seudoarco, entre ellas la homogeneidad. Sin embargo, la prueba que se presenta es compleja entre otras cosas por no ser tan generosa en detalles y porque arrastra conceptos complicados en la demostración de los resultados previos, lo cual la hace menos fácil de seguir.

El objetivo de este trabajo, es el de dar una prueba simplificada y explicada con todos sus detalles, de la homogeneidad del seudoarco. En lugar de usar las 60 páginas de Lelek, verá usted que sólo usaremos 25 páginas. En realidad la prueba que damos sigue de cerca la línea dada por Bing y Moise. W. Lewis la ha simplificado un poco. El profesor Lewis ha trabajado en el proyecto de escribir un libro sobre el seudoarco desde hace más de 20 años. Aunque le falta mucho para completarlo, ya ha escrito algunos capítulos entre los que se encuentra el que prueba la homogeneidad del seudoarco. El estilo con que está presentado el manuscrito es complicado y difícil de seguir, así que nuestra idea original era descifrar, entender y escribir la parte del manuscrito en el que se prueba la homogeneidad del seudoarco. Para nuestra fortuna, a la hora de leer esta prueba, encontramos varios elementos superfluos y le estamos ofreciendo una prueba más simple (y mejor explicada, por supuesto).

1. Cadenas

Definición 1. Dada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\langle n \rangle = \{0, 1, ..., n\}$.

Una **cadena** en un continuo X es una sucesión finita $\mathcal{U} = \{U_0, ..., U_n\}$ de subconjuntos de X tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Diremos que la cadena $\mathcal{U} = \{U_0, ..., U_n\}$ es **tensa** si se cumple que $cl(U_i) \cap cl(U_j) \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

A los conjuntos U_i les llamaremos **eslabones** de la cadena $\mathcal{U}$.

La **amplitud** de la cadena $\mathcal{U}$ se define como el número $\delta(\mathcal{U}) = \text{máx}\{\text{diámetro}(U_i) : i \in \langle n \rangle\}$.

Si $p \in U_0$ y $q \in U_n$, decimos que la cadena **va de** p **a** q.

Denotamos por $\bigcup \mathcal{U}$ a la unión de los elementos de $\mathcal{U}$. Dados $0 \leq i \leq j \leq n$, el tramo de la cadena que va de U_i a U_j es denotado por $\mathcal{U}(i, j)$. Así que $\mathcal{U}(i, j) = \{U_i, ..., U_j\}$.

Decimos que la cadena $\{U_0, ..., U_n\}$ es **abierta** si cada U_i es abierto y decimos que **cubre** a X si $X = U_0 \cup ... \cup U_n$, también decimos que **cubre propiamente a** X si además de cubrirlo se tiene que $U_0 \setminus cl(U_1) \neq \emptyset \neq U_n \setminus cl(U_{n-1})$.

El continuo X se dice que es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cadena abierta $\mathcal{U} = \{U_0, ..., U_n\}$, que cubre a X y que tiene amplitud menor que ε.

Lema 2. *Sean X un espacio normal y $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$ de X tal que $cl(D_i) \subseteq C_i$ para toda $i \in \langle n \rangle$.*

Demostración. Primero veamos que existe un conjunto abierto D_0 de X tal que $\mathcal{D}_0 = \{D_0, C_1, ..., C_n\}$ es una cubierta abierta de X y $cl(D_0) \subseteq C_0$.

Consideremos los conjuntos cerrados $A = X \setminus (C_1 \cup ... \cup C_n)$ y $B = X \setminus C_0$. Ya que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, ningún punto puede estar tanto en el complemento de $C_1 \cup ... \cup C_n$ como en el de C_0, por lo que A y B son ajenos. La normalidad de X implica que existen dos conjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Definimos $D_0 = U$.

Como $U \subseteq X \setminus V$ y V es abierto, $cl(D_0) = cl(U) \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus B = C_0$. De modo que $cl(D_0) \subseteq C_0$.

Para ver que $\mathcal{D}_0$ es cubierta de X, tomemos $x \in X$. En el caso en que $x \in A$, entonces $x \in D_0$, y si $x \notin A$, entonces $x \in C_1 \cup ... \cup C_n$. Por tanto $\mathcal{D}_0$ cubre a X.

En resumen, hemos sustituido a C_0 por un conjunto abierto D_0 de tal manera que $\{D_0, C_1, ..., C_n\}$ es una cubierta abierta de X y $cl(D_0) \subseteq C_0$.

Como segundo paso, con un proceso similar, podemos sustituir a C_1 por un conjunto abierto D_1 de tal manera que $\{D_0, D_1, C_2, ..., C_n\}$ es una cubierta abierta de X y $cl(D_1) \subseteq C_1$.

Procediendo de esta manera podemos sustituir a todos los conjuntos C_i para obtener la cubierta requerida. $\square$

Lema 3. *Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ una familia de abiertos de X que cubre a Y. Supongamos que $Y \cap C_0 \neq \emptyset$, $Y \cap C_n \neq \emptyset$ y que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de que si $i, j \in \langle n \rangle$ y $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, entonces $|i - j| \leq 1$. Entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $C_{i-1} \cap C_i \cap Y \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $i \in \{1, ..., n\}$, tal que $C_{i-1} \cap C_i \cap Y = \emptyset$. Sean $U = C_0 \cup ... \cup C_{i-1}$ y $V = C_i \cup ... \cup C_n$. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos de Y, $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$, $\emptyset \neq C_0 \cap Y \subseteq U \cap Y$, $\emptyset \neq C_n \cap Y \subseteq V \cap Y$ y, como sólo se pueden intersectar elementos consecutivos de la familia $\mathcal{C}$, tenemos que $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = C_{i-1} \cap C_i \cap Y = \emptyset$. Esto contradice la conexidad de Y y prueba el lema. $\square$

Lema 4. *Sean X un continuo y $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ una cadena abierta que cubre propiamente a X. Entonces existe una cadena abierta tensa $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_n\}$ que cubre propiamente a X y que cumple que $cl(D_i) \subseteq C_i$ para toda $i \in \langle n \rangle$.*

Demostración. Por el Lema 2, existe una cubierta abierta $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_n\}$ de X tal que $cl(D_i) \subseteq C_i$ para toda $i \in \langle n \rangle$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, $C_0 \neq \emptyset \neq C_n$. Dados $i, j \in \langle n \rangle$, si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, como $D_i \cap D_j \subseteq C_i \cap C_j$, tenemos que $|i - j| \leq 1$.

Si ocurre que $D_0 \subseteq cl(D_1)$, entonces $C_0 \subseteq X = D_0 \cup ... \cup D_n \subseteq cl(D_1 \cup ... \cup D_n) \subseteq cl(C_1 \cup ... \cup C_n)$. Como C_0 es abierto y $C_0 \cap (D_2 \cup ... \cup D_n) = \emptyset$, tenemos que $C_0 \cap cl(D_2 \cup ... \cup D_n) = \emptyset$, de manera que $C_0 \subseteq cl(C_1)$, lo cual contradice que $\mathcal{C}$ cubre propiamente a X. Esto prueba que $D_0 \setminus cl(D_1) \neq \emptyset$. Similarmente, se tiene que $D_n \setminus cl(D_{n-1}) \neq \emptyset$.

De manera que $\mathcal{D}$ satisface las hipótesis del Lema 3 con $Y = X$, por lo que tenemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$. En particular, tenemos que $D_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \langle n \rangle$.

Por tanto, $\mathcal{D}$ es una cadena abierta tensa que cubre propiamente a X. $\square$

Lema 5. *Sean $m \geq 1$, X un continuo, A y B dos conjuntos cerrados no vacíos de X y $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ una cadena abierta tensa de X que cubre a X tales que $A \subseteq C_0 \setminus cl(C_1)$ y $B \subseteq C_n \setminus cl(C_{n-1})$. Entonces para toda $j \in \langle n \rangle$, existe una cadena de abiertos $\{U_1, ..., U_m\}$ de X tal que $C_j = U_1 \cup ... \cup U_m$, la familia $\mathcal{D} = \{C_0, ..., C_{j-1}, U_1, ..., U_m, C_{j+1}, ..., C_n\}$ (con los conjuntos numerados en el orden en el que están escritos) es una cadena abierta tensa de X que cubre a X. Además, A está contenido en la diferencia del primer eslabón de $\mathcal{D}$ menos la cerradura del segundo, y B está contenido en la diferencia del último eslabón de $\mathcal{D}$ menos la cerradura del penúltimo.*

Demostración. Observemos que este lema afirma que para toda $m \geq 1$, cualquier eslabón C_j se puede sustituir (expandir) por m eslabones. En el caso $m = 1$, el lema es trivial porque basta poner $U_1 = C_j$. Supongamos entonces que $m \geq 2$.

Vamos a probar el lema para $m = 2$. Esto bastará pues una vez que podemos sustituir el eslabón C_j por dos eslabones U_1 y U_2, podemos aplicar otra vez el caso $m = 2$, para sustituir el eslabón U_2 por dos eslabones V_2 y V_3 y tendremos que C_j se puede sustituir por los eslabones U_1, V_2 y V_3. Así que C_j se puede sustituir por 3 eslabones. Si repetimos el proceso y sustituimos a V_3 por 2 eslabones, tendremos a C_j sustituido por 4 eslabones. Si continuamos de esta manera, podemos sustituir a C_j por cualquier número de eslabones.

Probemos entonces el lema para $m = 2$.

Hacemos $C_{-1} = A$ y $C_{n+1} = B$. Entonces $C_{-1} \cap (cl(C_1 \cup ... \cup C_n)) = \emptyset = cl(C_0 \cup ... \cup C_{n-1}) \cap C_{n+1}$.

Como $\mathcal{C}$ es tensa, los conjuntos $K = cl(C_{-1} \cup ... \cup C_{j-1})$ y $L = cl(C_{j+1} \cup ... \cup C_{n+1})$ son dos cerrados ajenos de X. Por la normalidad de X, existen dos abiertos ajenos V y W de X tales que $K \subseteq V$ y $L \subseteq W$. Consideremos el conjunto $E = X \setminus (V \cup W) \subseteq C_j$. Como E es ajeno a $K \cup L$, otra vez la normalidad de X implica que existe un abierto Y de X tal que $E \subseteq Y \subseteq cl(Y) \subseteq X \setminus (K \cup L) \subseteq C_j$.

Definimos

$$U_1 = (V \cap C_j) \cup Y \text{ y } U_2 = W \cap C_j.$$

Entonces U_1 y U_2 son abiertos y $U_1 \cup U_2 \subseteq C_j$. Para ver la inclusión contraria, tomemos $x \in C_j$. Si $x \in V \cup W$, claramente $x \in U_1 \cup U_2$. Supongamos entonces que $x \in X \setminus (V \cup W) \subseteq Y$. Esto implica que $x \in U_1$. Hemos probado entonces que $C_j \subseteq U_1 \cup U_2$. Por tanto, $C_j = U_1 \cup U_2$. Entonces $X = C_0 \cup ... \cup C_{j-1} \cup U_1 \cup U_2 \cup C_{j+1} \cup ... \cup C_n$. Por lo que $\mathcal{D} = \{C_0, ..., C_{j-1}, U_1, U_2, C_{j+1}, ..., C_n\}$ es cubierta abierta de X.

Como $U_1 \subseteq C_j$ y $\mathcal{C}$ es tensa, tenemos que $cl(C_0 \cup ... \cup C_{j-2}) \cap cl(U_1) = \emptyset$. Ya que $cl(V \cup Y) \cap L = \emptyset$, tenemos que $cl(U_1) \cap cl(C_{j+1} \cup ... \cup C_n) = \emptyset$. Esto prueba que $cl(U_1)$ sólo puede intersectar a la cerradura del eslabón inmediato anterior (C_{j-1}) y el inmediato posterior (U_2) de $\mathcal{D}$. Similarmente, $cl(U_2)$ sólo puede intersectar a la cerradura del eslabón inmediato anterior (U_1) y el inmediato posterior (C_{i+1}) de $\mathcal{D}$. Ahora es claro que cada C_i, con $i \neq j$, también tiene la propiedad de que sólo puede intersectar a la cerradura del eslabón inmediato anterior y el inmediato posterior de $\mathcal{D}$.

Como $A \subseteq C_0$ y $B \subseteq C_n$, tenemos que $C_0 \neq \emptyset \neq C_n$. De modo que podemos aplicar el Lema 3 para concluir que cada dos elementos consecutivos de $\mathcal{D}$ se intersectan. Por tanto, $\mathcal{D}$ es una cadena abierta tensa de X.

Veamos que A está contenido en la diferencia del primer eslabón de $\mathcal{D}$ menos la cerradura del segundo.

En el caso en que $1 \leq j$, el primer eslabón de $\mathcal{D}$ es C_0. Por hipótesis, $A \subseteq C_0$ y como la unión de los otros eslabones de $\mathcal{D}$ está contenida en $cl(C_1 \cup ... \cup C_n)$ y

A no intersecta a este conjunto, ya terminamos.

En el caso en que $j = 0$, el primer eslabón de $\mathcal{D}$ es U_1, el segundo es U_2, $A = K \subseteq V$ y $A \subseteq C_0$. Así que $A \subseteq U_1$. Como $U_2 \subseteq W \subseteq X \setminus V$, tenemos que $cl(U_2) \subseteq X \setminus V$. Por tanto, $A \cap cl(U_2) = \emptyset$.

Finalmente, veamos que B está contenido en la diferencia del último eslabón de $\mathcal{D}$ menos la cerradura del penúltimo.

En el caso en que $j \leq n-1$, el último eslabón de $\mathcal{D}$ es C_n. Por hipótesis, $B \subseteq C_n$ y como la unión de los otros eslabones de $\mathcal{D}$ está contenida en $cl(C_0 \cup ... \cup C_{n-1})$ y B no intersecta a este conjunto, ya terminamos.

En el caso en que $j = n$, el último eslabón de $\mathcal{D}$ es U_2, el penúltimo es U_1, $B = L \subseteq W$ y $B \subseteq C_n$. Así que $B \subseteq U_2$. Ya que $cl(Y) \cap L = \emptyset$, tenemos que $cl(Y) \cap B = \emptyset$. Dado que $V \subseteq X \setminus W$, tenemos que $cl(V) \subseteq X \setminus W$. De manera que $cl(V) \cap B = \emptyset$. Por tanto, tenemos que $cl(U_1) \cap B = \emptyset$. $\square$

2. Puntos Terminales y Puntos Finales

Definición 6. Sean X un continuo encadenable X y $p \in X$. Decimos que p es **terminal** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una cadena $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ que cubre propiamente a X tal que $p \in C_0 \setminus C_1$ y la amplitud de $\mathcal{C}$ es menor que ε.

Decimos que p es **final** si ocurre que para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X que tienen a p se cumple que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Definición 7. Sean X un continuo, $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ una cadena que cubre propiamente a X y Y un subcontinuo no degenerado de X. Dados $j, k \in \langle n \rangle$ tales que $j \leq k$, decimos que la subcadena $\mathcal{C}(j,k)$ **recubre** a Y si $Y \subseteq C_j \cup ... \cup C_k$ y $Y \cap C_i \neq \emptyset$ para cada $j \leq i \leq k$.

Definimos $\langle Y \rangle = \{i \in \langle n \rangle : Y \cap C_i \neq \emptyset\}$ y escogemos un subconjunto minimal $[Y]$ de $\langle n \rangle$ que satisface que $Y \subseteq \bigcup\{C_i : i \in [Y]\}$ y $Y \cap C_i \neq \emptyset$ para toda $i \in [Y]$. Notemos que $[Y] \subseteq \langle Y \rangle$ y que la contención puede ser propia.

Si Z es un subcontinuo de X, decimos que la pareja (Y, Z) es un **escalón** si Y no es degenerado, $Y \subseteq Z$ y se cumple una de las siguientes dos condiciones:

(a) existen $j, k, l \in \langle n \rangle$ tales que $0 \leq j < k \leq l \leq n$, la subcadena $\mathcal{C}(k,l)$ recubre a Y, la subcadena $\mathcal{C}(j,l)$ recubre a Z y $Z \cap C_j \setminus Y \neq \emptyset$, o

(b) existen $j, k, l \in \langle n \rangle$ tales que $0 \leq l \leq k < j \leq n$, la subcadena $\mathcal{C}(l,k)$ recubre a Y, la subcadena $\mathcal{C}(l,j)$ recubre a Z y $Z \cap C_j \setminus Y \neq \emptyset$.

En el caso en que se cumple (a) se dice que (Y, Z) es un **escalón izquierdo** mientras que en el caso en que se cumple (b), (Y, Z) es un **escalón derecho**. En ambos casos decimos que el escalón (Y, Z) **empieza** en l y **termina** en j.

Lema 8. *Sean X un continuo y $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ una cadena que cubre propiamente a X. Sean Y, Z dos subcontinuos de X tales que (Y, Z) es un escalón* *que empieza en l y termina en j. Sea $p \in Y$ tal que p es un punto final de X. Supongamos que existe una cadena $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_m\}$ de abiertos de X que satisface las siguientes propiedades:*

(a) *$\mathcal{D}$ cubre a Y,*

(b) *$\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$,*

(c) $p \in D_0 \setminus D_1$,

(d) $D_m \subseteq C_l$.

Entonces existe una cadena $\mathcal{E} = \{E_0, ..., E_r\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumple las siguientes propiedades:

(a') *$\mathcal{E}$ cubre a Z,*

(b') *$\mathcal{E}$ refina a $\mathcal{C}$,*

(c') $p \in E_0 \setminus E_1$,

(d') $E_r \subseteq C_j$.

Demostración. Como (Y, Z) es un escalón, puede ser derecho o izquierdo. Supondremos que es izquierdo, el caso en que es derecho se hace en forma similar. Sean $j, k, l \in \langle n \rangle$, como en la condición (a) de la Definición 7 ((Y, Z) empieza en l y termina en j).

Entonces podemos elegir un punto $z_0 \in Z \cap C_j \setminus Y$.

Ya que $\mathcal{D}$ recubre a Y, tenemos que $Y \cap D_m$ es un abierto no vacio en el continuo Y y entonces no es degenerado. Entonces podemos elegir un punto $w \in Y \cap D_m \setminus \{p\}$. Elegimos un abierto W de X tal que $w \in W$, $W \subseteq D_m$, $z_0 \notin W$ y $p \notin W$.

Sea F la componente de $X \setminus W$ que contiene a p. Entonces F y Y son dos subcontinuos de X que tienen a p. Ya que p es un punto final de X, tenemos que F y Y son comparables con la inclusión. Como $w \in Y \setminus F$, concluimos que $F \subseteq Y$.

Sea $R = \bigcup \mathcal{D}$. Entonces R es un abierto en X tal que $F \subseteq Y \subseteq R$ y $W \subseteq R$.

Aplicamos el Teorema del Cable Cortado (véase Teorema 5.2 en [1]) al espacio $X \setminus W$ y los cerrados $X \setminus R$ y F. Entonces existen dos cerrados L y M en $X \setminus W$ (y entonces cerrados en X) tales que $F \subseteq L$, $X \setminus R \subseteq M$, $L \cap M = \emptyset$ y $X \setminus W = L \cup M$. Notemos que $L \subseteq R$.

Por la normalidad de X, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V de X tales que $L \subseteq U$ y $M \subseteq V$. Ya que $L \subseteq R$, podemos suponer que $U \subseteq R$. Como $L \subseteq Y$ y $z_0 \notin Y$, podemos suponer que $z_0 \notin U$.

Estamos listos para definir la cadena requerida $\mathcal{E} = \{E_0, ..., E_r\}$.

Hacemos $r = m + l - j$. Definimos:

$$
\begin{gathered}
E_0 = D_0 \cap U, E_1 = D_1 \cap U, ..., E_{m-1} = D_{m-1} \cap U; \\
E_m = D_m \cup (C_l \cap V); \\
E_{m+1} = C_{l-1} \cap V, E_{m+2} = C_{l-2} \cap V, ..., E_{m+(l-j)} = C_j \cap V.
\end{gathered}
$$

Veamos que $\mathcal{E}$ satisface las condiciones (a')-(d').

Como $D_m \subseteq C_l$ y $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{E}$ refina a $\mathcal{C}$.

Veamos que dos eslabones no consecutivos de $\mathcal{E}$ no se pueden intersectar. Tomemos entonces dos eslabones no consecutivos de $\mathcal{E}$. Si ambos eslabones son del primer renglón, entonces son ajenos porque $\mathcal{D}$ es cadena; si pertenecen al tercer renglón, son ajenos porque $\mathcal{C}$ es cadena. Los del primer renglón con los del tercero son ajenos porque U y V lo son. Cuando uno de los eslabones es E_m, no se intersecta con los del primero porque $\mathcal{D}$ es cadena y $U \cap V = \emptyset$, y no se intersecta con los del tercero porque $D_m \subseteq C_l$ y $\mathcal{C}$ es cadena. Por tanto dos eslabones no consecutivos de $\mathcal{E}$ no se pueden intersectar.

Ahora veremos que $\mathcal{E}$ cubre a Z. Recordemos que $Z \subseteq \mathcal{C}(j,l)$ y que $X = L \cup W \cup M = U \cup W \cup V$.

Sea $z \in Z$. Sea $i \in \{j, ..., l\}$ tal que $z \in C_i$.

Si $z \in V$, dependiendo de i, z pertenece a E_m o a algún E_s del tercer renglón.

Si $z \in U \subseteq R$, existe $t \in \langle m \rangle$ tal que $z \in D_t$. Dependiendo de t, tenemos que z pertenece a E_m o a algún E_s del primer renglón.

Si $z \in W$, entonces $z \in D_m \subseteq E_m$.

Esto termina la prueba de que $\mathcal{E}$ cubre a Z.

Como $p \in D_0 \setminus D_1$ y $p \in F \subseteq L \subseteq U$, tenemos que $p \in E_0 \setminus E_1$. Ya que $z_0 \notin W \cup U$, tenemos que $z_0 \in V$, y como $z_0 \in C_j$, concluimos que $z_0 \in E_r$. Por el Lema 3, concluimos que $\mathcal{E}$ es una cadena que cubre a Z.

Como claramente $E_r \subseteq C_j$, concluimos que $\mathcal{E}$ satisface las propiedades requeridas. $\square$

Lema 9. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ una cadena que cubre propiamente a X con $n \geq 3$. Entonces existe una sucesión finita $\{p\} \subsetneq A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq ... \subsetneq A_m = X$ tal que para cada $i \in \{1, ..., m\}$, el par (A_{i-1}, A_i) es un escalón, y la sucesión cumple alternadamente las propiedades (a) y (b) en la definición de escalón. Esto significa que si un par (A_{i-1}, A_i) satisface una de las dos condiciones, entonces la pareja (A_i, A_{i+1}) satisface la otra condición. Además la pareja (A_i, A_{i+1}) empieza donde termina la pareja (A_{i-1}, A_i).*

Demostración. Sea $i_0 \in \langle n \rangle$ tal que $p \in C_{i_0}$.

Elegimos un subcontinuo no degenerado A_0 de X tal que $p \in A_0 \subseteq C_{i_0}$. Remarcamos que éstas son las únicas propiedades que le pediremos a A_0.

Notemos que existen $k, l \in \langle n \rangle$ tales que $k \leq l$ y $\langle A_0 \rangle = \{k, ..., l\}$. Notemos que $\mathcal{C}(k,l)$ recubre a A_0 y que $k \leq i_0 \leq l$.

Como $n \geq 3$ y $A_0 \subseteq C_{i_0}$, tenemos que el conjunto $G = \langle n \rangle \setminus \langle A_0 \rangle$ no es vacío.

Sean $s_M = \max\{i \in \langle n \rangle :$ existe un subcontinuo Z de X tal que $A_0 \subseteq Z$ y $\mathcal{C}(k,i)$ recubre a $Z\}$ y $s_m = \min\{i \in \langle n \rangle :$ existe un subcontinuo Z de X tal que $A_0 \subseteq Z$ y $\mathcal{C}(i,l)$ recubre a $Z\}$.

Como $Z = A_0$ es recubierto por $\mathcal{C}(k,l)$, tenemos que s_M y s_m son el máximo y el mínimo de un conjunto acotado y no vacío de números enteros. Por lo tanto, s_M y s_m están bien definidos y $s_m \leq k$ y $l \leq s_M$.

Afirmamos que $s_m < k$ o que $l < s_M$.

Para ver esto, tomemos un arco ordenado (véase Definición 6.9 y Teorema 6.10 de [1]) $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A_0$ y $\alpha(1) = X$.

Sean $U = \bigcup\{C_i : i \in \langle A_0 \rangle\}$ y $V = \bigcup\{C_i : i \in G\}$. Entonces U y V son abiertos en X tales que $X = U \cup V$, $A_0 \subseteq U$ y $V \neq \emptyset$.

Sean $P = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \subseteq U\}$ y $Q = \{t \in [0,1] : \alpha(t) \cap V \neq \emptyset\}$. Entonces P y Q son conjuntos abiertos de $[0,1]$ tales que $[0,1] = P \cup Q$. Como $\alpha(0) = A_0 \subseteq U$ y $\alpha(1) = X$, tenemos que $0 \in P$ y $1 \in Q$. La conexidad de $[0,1]$ implica que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_0) \in P \cap Q$.

Sean $B = \alpha(t_0)$. Entonces $B \subseteq C_k \cup ... \cup C_l$ y existe $j \in \langle n \rangle \setminus \{k, ..., l\}$ tal que $B \cap C_j \neq \emptyset$. De manera que $j = k-1$ o $j = l+1$.

Ya que $A_0 \subseteq B$, tenemos que B intersecta cada uno de los conjuntos $C_k, ..., C_l$.

Analizaremos el caso en que $j = l+1$. Como siempre, la situación es simétrica cuando $j = k-1$ y un tratamiento similar resolvería también este caso. Aunque no es importante, podría ocurrir que B intersectara tanto a C_{k-1} como a C_{l+1}, pero esa situación no afecta lo que discutiremos a continuación.

Ya que $B \subseteq C_k \cup ... \cup C_l \subseteq C_k \cup ... \cup C_l \cup C_{l+1}$, y B intersecta a todos estos conjuntos, tenemos que $\mathcal{C}(k, l+1)$ recubre a B. Por tanto $l+1$ está en el conjunto del cual s_M es máximo. Por tanto $l+1 \leq s_M$ y $l < s_M$.

De la definición de s_M tenemos que existe un subcontinuo A_1 de X tal que $A_0 \subseteq A_1$ y $\mathcal{C}(k, s_M)$ recubre a A_1. Como $\langle A_0 \rangle = \{k, ..., l\}$ y $l < s_M$, tenemos que $A_0 \cap C_{s_M} = \emptyset$. Y $A_1 \cap C_{s_M} \neq \emptyset$, entonces tenemos que $A_1 \cap C_{s_M} \setminus A_0 \neq \emptyset$. Por tanto la pareja (A_0, A_1) es un escalón derecho. Esto termina el primer paso de la inducción.

Para hacer el paso inductivo de la construcción, supondremos que ya hemos construido los subcontinuos $A_0, ..., A_r$, con $r \geq 1$, tales que existe $k, l \in \langle n \rangle$ tales que $0 \leq k \leq l \leq n$, $\mathcal{C}(k,l)$ recubre a A_{r-1}, y se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) (A_{r-1}, A_r) es un escalón derecho y A_r está recubierto por $\mathcal{C}(k, s_M)$, donde $s_M = \max\{i \in \langle n \rangle$: existe un subcontinuo Z de X tal que $A_{r-1} \subseteq Z$ y $\mathcal{C}(k,i)$ recubre a $Z\}$, o

(2) (A_{r-1}, A_r) es un escalón izquierdo y A_r está recubierto por $\mathcal{C}(s_m, l)$, donde $s_m = \min\{i \in \langle n \rangle$: existe un subcontinuo Z de X tal que $A_{r-1} \subseteq Z$ y $\mathcal{C}(i,l)$ recubre a $Z\}$.

Veamos que si $\langle A_r \rangle \neq \langle n \rangle$, entonces podemos continuar la construcción encontrando un subcontinuo A_{r+1} satisfaciendo las condiciones descritas y también la condición adicional de que $[A_r] \subsetneq [A_{r+1}]$. Supondremos que se satisface la condición (1). Esto bastará pues las condiciones (1) y (2) son simétricas y similares. Entonces estaremos suponiendo que (A_{r-1}, A_r) termina en s_M.

Si $s_M = n$, hacemos $A_{r+1} = X$. Ya que $\langle A_r \rangle \neq \langle n \rangle$ y $\{k, ..., s_M\} \subseteq \langle A_r \rangle$, tenemos que $0 < k \leq s_M = n$. Entonces la subcadena $\mathcal{C}(k,n)$ recubre a A_r, la subcadena $\mathcal{C}(0,n)$ recubre a X y como $\mathcal{C}$ cubre propiamente a X, concluimos que $\emptyset \neq X \cap C_0 \setminus (C_1 \cup ... \cup C_n) \subseteq A_{r+1} \cap C_0 \setminus A_r$. De manera que (A_r, A_{r+1}) es un escalón izquierdo que empieza en $n = s_M$ (que es donde termina (A_{r-1}, A_r)), y con esto terminaríamos la construcción de la sucesión y la prueba del teorema. Por tanto, podemos suponer que $s_M < n$.

Si $k = 0$, entonces la subcadena $\mathcal{C}(0,n)$ recubre a X. La maximalidad de s_M implica que $n \leq s_M$, lo que contradice nuestra suposición. Por tanto, $0 < k$.

Definimos $L = X \setminus (C_{s_M+1} \cup ... \cup C_n)$. Entonces L es cerrado en X.

Si $A_r \cap C_{s_M+1} \neq \emptyset$, como $\mathcal{C}(k, s_M)$ recubre a A_r, tenemos que $\mathcal{C}(k, s_M + 1)$ también recubre a A_r, y ya que $A_{r-1} \subseteq A_r$, tenemos una contradicción con la maximalidad de s_M. Ya que $A_r \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M}$, concluimos que $A_r \subseteq L$.

Sea $\beta : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado (véase Definición 6.9 y Teorema 6.10 de [1]) tal que $\beta(0) = A_r$ y $\beta(1) = X$.

Como $\beta(0) \subseteq L$, podemos definir $t_0 = \text{máx}\{t \in [0,1] : \beta(t) \subseteq L\}$. Sea $Q = \beta(t_0)$. Entonces $A_r \subseteq Q \subseteq L$.

Aseguramos que $Q \cap C_{k-1} \setminus C_k \neq \emptyset$. Supongamos que esto no ocurre. Como $A_r \subseteq Q$, tenemos que $C_k \cap Q \neq \emptyset$. Esto implica que $Q \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M}$. Ya que $C_k \cup ... \cup C_{s_M}$ es abierto en X, existe $t_1 \in (t_0, 1)$ tal que $\beta(t_1) \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M}$. Por la maximalidad de t_0, tenemos que $\beta(t_1) \nsubseteq L$, así que $\beta(t_1) \cap (C_{s_M+1} \cup ... \cup C_n) \neq \emptyset$. Ya que $\beta(t_1) \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M}$, tenemos que $A_{r-1} \subseteq \beta(t_1) \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M+1}$, e intersecta a todos estos uniendos. De modo que $\mathcal{C}(k, s_M + 1)$ recubre a $\beta(t_1)$. Esto contradice la maximalidad de s_M y termina la prueba de que $Q \cap C_{k-1} \setminus C_k \neq \emptyset$.

Definimos $t_m = \text{mín}\{i \in \langle n \rangle :$ existe un subcontinuo Z de X tal que $A_r \subseteq Z$ y $\mathcal{C}(i, s_M)$ recubre a $Z\}$.

Sea $l_0 = \text{mín}\{i \in \langle n \rangle : Q \cap C_i \neq \emptyset\}$. Entonces $l_0 \leq k - 1$. Ya que $Q \subseteq L$, tenemos que $Q \subseteq C_{l_0} \cup ... \cup C_{s_M}$. Dado que $A_r \subseteq Q$ y $A_r \cap C_{s_M} \neq \emptyset$, tenemos que la subcadena $\mathcal{C}(l_0, s_M)$ recubre a Q. Entonces $t_m \leq l_0 \leq k - 1$.

Elegimos un subcontinuo A'_{r+1} de X tal que $A_r \subseteq A'_{r+1}$ y $\mathcal{C}(t_m, s_M)$ recubre a A'_{r+1}. Definimos $A_{r+1} = A'_{r+1} \cup Q$. Entonces A_{r+1} es un subcontinuo de X, $A_r \subseteq A_{r+1} \subseteq C_{t_m} \cup ... \cup C_{s_M}$ e intersecta a cada uno de los uniendos. Por tanto, $\mathcal{C}(t_m, s_M)$ recubre a A_{r+1}. Además $A_{r+1} \cap C_{k-1} \setminus C_k \neq \emptyset$.

En resumen, $0 \leq t_m < k \leq s_M \leq n$, la subcadena $\mathcal{C}(k, s_M)$ recubre a A_r y la subcadena $\mathcal{C}(t_m, s_M)$ recubre a A_{r+1}. Para ver que (A_r, A_{r+1}) es un escalón izquierdo, sólo nos falta ver que $A_{r+1} \cap C_{t_m} \setminus A_r \neq \emptyset$.

En el caso en que $t_m = k - 1$, ya sabemos que $A_{r+1} \cap C_{k-1} \setminus C_k \neq \emptyset$, y como $A_r \subseteq C_k \cup ... \cup C_{s_M}$, concluimos que $A_{r+1} \cap C_{k-1} \setminus A_r \neq \emptyset$.

En el caso en que $t_m < k - 1$, sabemos que $A_{r+1} \cap C_{t_m} \neq \emptyset$. En este caso, $A_{r+1} \cap C_{t_m} \subseteq X \setminus (C_k \cup ... \cup C_{s_M})$, por lo que $A_{r+1} \cap C_{t_m} \setminus A_r \neq \emptyset$.

Esto termina la prueba de que (A_r, A_{r+1}) es un escalón izquierdo.

Notemos que (A_r, A_{r+1}) empieza en s_M, que es justo donde termina la pareja (A_{r-1}, A_r).

Ya que $\mathcal{C}(k, s_M)$ recubre a A_r, tenemos que $[A_r] \subseteq \{k, ..., s_M\}$. Como $A_r \subseteq A_{r+1}$ y $A_{r+1} \cap C_{k-1} \setminus C_k \neq \emptyset$, tenemos que $k-1 \in [A_{r+1}]$ y entonces $[A_r] \subsetneq [A_{r+1}]$. Esto termina la construcción inductiva.

Hemos mostrado que, mientras que $[A_r] \neq \langle n \rangle$, es posible seguir construyendo los continuos A_i. Como se tienen las contenciones $[A_0] \subsetneq [A_1] \subsetneq ...$, y todos los conjuntos $[A_r]$ son subconjuntos de $\langle n \rangle$, tenemos que este proceso no puede seguir indefinidamente. Por tanto existe $r \geq 0$ tal que $[A_{r+1}] = \langle n \rangle$.

De nuevo, por simetría, suponemos que (A_{r-1}, A_r) satisface la condición (1).

Entonces $A_{r+1} \cap C_0 \neq \emptyset$. Ya que $A_{r+1} \cap C_{s_M} \neq \emptyset$ y $A_{r+1} \subseteq C_{t_m} \cup ... \cup C_{s_M}$, tenemos que $A_{r+1} \subseteq C_0 \cup ... \cup C_{s_M}$ e intersecta a todos los uniendos. De manera que la subcadena $\mathcal{C}(0, s_M)$ recubre a A_{r+1}. La minimalidad de t_m implica que $t_m = 0$.

Antes vimos que si $s_M = n$, entonces es posible terminar la construcción de la sucesión. Podemos suponer entonces que $s_M < n$. Ya que $\mathcal{C}$ cubre propiamente a X, tenemos que $\emptyset \neq X \cap C_n \setminus (C_0 \cup ... \cup C_{s_M}) \subseteq X \cap C_n \setminus A_{r+1}$. De manera que la subcadena $\mathcal{C}(0, s_M)$ recubre a A_{r+1}, la subcadena $\mathcal{C}(0, n)$ recubre a X y $X \cap C_n \setminus A_{r+1} \neq \emptyset$. Esto muestra que la pareja (A_{r+1}, X) es un escalón derecho. Entonces si definimos $A_{r+2} = X$ se termina la construcción de la sucesión deseada. □

Teorema 10. *Sean X un continuo encadenable y $p \in X$. Entonces p es un punto terminal si y sólo si p es un punto final.*

Demostración. Supongamos primero que p es un punto final. Mostraremos que p es un punto terminal. Tomemos entonces $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar una cadena de abiertos que cubra a X, que tenga amplitud menor que ε y que tenga a p en su primer eslabón.

Sea $\mathcal{F} = \{F_0, ..., F_k\}$ una cadena de abiertos de X, que cubre propiamente a X, tal que la amplitud de $\mathcal{F}$ es menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ y que el $\frac{diámetro(X)}{6}$. Entonces $k \geq 6$.

Elegimos $j_0 \in \langle k \rangle$ tal que $p \in F_{j_0}$.

Si $j_0 \leq 2$, podemos considerar la cadena $\mathcal{F}_1 = \{F_0 \cup F_1 \cup F_2, F_3, ..., F_k\}$ la cual tiene amplitud menor que ε, cubre propiamente a X y tiene a p en el primer eslabón, así que ya no hay nada más que hacer. Si $k-2 \leq j_0$, podemos agrupar los últimos 3 eslabones e invertir los índices para obtener la cadena deseada. Podemos suponer entonces que $3 \leq j_0 \leq k-3$.

Consideramos la siguiente cadena.

$\mathcal{C} = \{F_0, F_1, ..., F_{j_0-2}, F_{j_0-1} \cup F_{j_0} \cup F_{j_0+1}, F_{j_0+2}, ..., F_k\}$, la escribimos en la forma $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ y hacemos $C_{i_0} = F_{j_0-1} \cup F_{j_0} \cup F_{j_0+1}$. Entonces $n \geq 3$, $\mathcal{C}$ cubre propiamente a X y $p \in F_{j_0} \subseteq C_{i_0} \setminus (C_1 \cup ... \cup C_{i_0-1} \cup C_{i_0+1} \cup ... \cup C_n)$.

Sea $\{p\} \subsetneq A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq ... \subsetneq A_m = X$ una sucesión finita como en el Lema 9. Como observamos al principio de la demostración de ese lema, podemos elegir cualquier subcontinuo A_0 de X que satisfaga que $\{p\} \subsetneq A_0 \subseteq C_{i_0}$. Entonces elegimos A_0 como un continuo no degenerado de X tal que $\{p\} \subsetneq A_0 \subsetneq F_{j_0}$. Con esto conseguimos la propiedad extra para A_0 de que $A_0 \subseteq C_{i_0}$ y A_0 no intersecta a ningún otro C_i.

Supondremos que (A_0, A_1) es un escalón izquierdo. Como siempre, por la simetría de las definiciones, el otro caso se puede tratar con argumentos similares. Veremos inductivamente que cada A_i puede ser cubierto por una cubierta de abiertos de X que refina a $\mathcal{C}$ y que cumple que el único eslabón que contiene a p es el primero. Como $X = A_m$, tendremos que todo esto vale también para X, de modo que la conclusión será que p es punto terminal.

El primer paso de la inducción es el siguiente.

Como (A_0, A_1) es un escalón izquierdo, existen $j_1, k, l \in \langle n \rangle$ tales que $0 \leq j_1 < k \leq l \leq n$, la subcadena $\mathcal{C}(k, l)$ recubre a A_0, la subcadena $\mathcal{C}(j_1, l)$ recubre a A_1 y $A_1 \cap C_{j_1} \setminus A_0 \neq \emptyset$. Como $\mathcal{C}(k, l)$ recubre a A_0, tenemos que A_0 intersecta a cada uno de los eslabones $C_k, ..., C_l$. Por la manera en que escogimos A_0, tenemos que $k = i_0 = l$. Para este paso definimos la cadena $\mathcal{D}_1 = \{C_{i_0}, ..., C_{j_1}\}$ (los índices van descendiendo). Notemos que $\mathcal{D}_1$ tiene las siguientes propiedades: $\mathcal{D}_1$ cubre a A_1, $\mathcal{D}_1$ refina a $\mathcal{C}$, p pertenece únicamente al primer eslabón de $\mathcal{D}_1$, el último eslabón de $\mathcal{D}_1$ está contenido en C_{j_1}. Notemos que la pareja (A_0, A_1) termina en j_1.

Como (A_1, A_2) es un escalón derecho y por hipótesis empieza en j_1, entonces existe $j_2 \in \langle n \rangle$ tal que $0 \leq j_1 < l < j_2 \leq n$, la subcadena $\mathcal{C}(j_1, l)$ recubre a A_1, la subcadena $\mathcal{C}(j_1, j_2)$ recubre a A_2 y $A_2 \cap C_{j_2} \setminus A_1 \neq \emptyset$. Entonces el escalón (A_1, A_2) empieza en j_1 y termina en j_2. Como el último eslabón de $\mathcal{D}_1$ está contenido en C_{j_1}, podemos aplicar el Lema 8 y obtener una cadena de abiertos $\mathcal{D}_2$ de X tal que $\mathcal{D}_2$ cubre a A_2, $\mathcal{D}_2$ refina a $\mathcal{C}$, p pertenece únicamente al primer eslabón de $\mathcal{D}_2$ y el último eslabón de $\mathcal{D}_2$ está contenido en C_{j_2}.

El argumento del párrafo anterior se puede repetir para cada una de las parejas (A_2, A_3), (A_3, A_4), etc. Por tanto, podemos concluir que existe una cadena de abiertos $\mathcal{D}_m$ tal que $\mathcal{D}_m$ cubre a X, $\mathcal{D}_m$ refina a $\mathcal{C}$ y p pertenece únicamente al primer eslabón de $\mathcal{D}_m$.

Esto termina la prueba de que p es un punto terminal de X.

Ahora supongamos que p es un punto terminal de X. Para probar que p es un punto final de X, supongamos que esto no ocurre. Entonces existen dos subcontinuos A y B de X tales que $p \in A \cap B$, $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$. Elegimos puntos $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ y $B(b, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Por hipótesis existe una cadena $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_n\}$ tal que $p \in C_0$ y la amplitud de $\mathcal{C}$ es menor que ε. Sean $i, j \in \langle n \rangle$ tales que $a \in C_i$ y $b \in C_j$. Podemos suponer que $i \leq j$. Como B es conexo e intersecta a los eslabones C_0 y C_j, tenemos que B intersecta al eslabón i. Por tanto existe $q \in B \cap C_i$. Esto implica que $q \in B \cap B(a, \varepsilon)$, lo cual contradice la elección de ε. Esto termina la prueba de que p es punto final de

X. $\square$

3. Patrones

Definición 11. Un **patrón** es una función suprayectiva $\lambda : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ tal que $|\lambda(i) - \lambda(i+1)| \leq 1$ para cada $i \in \langle m-1\rangle$.

Un patrón λ es **estricto** si cumple que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(m) = n$ y $|\lambda(i)-\lambda(i+1)| = 1$ para cada $i \in \langle m-1\rangle$.

Un patrón estricto λ es **no trivial** si $m > n$.

Un **doblez** para un patrón λ es una cuádrupla de enteros (i, j, k, l) que satisface lo siguiente:

(a) $0 \leq i < j < k < l \leq m$,

(b) $\lambda(i) = \lambda(k) \neq \lambda(j) = \lambda(l)$, y

(c) $\min\{\lambda(i), \lambda(j)\} \leq \lambda(r) \leq \max\{\lambda(i), \lambda(j)\}$ para toda $r \in \{i, ..., l\}$.

El doblez (i, j, k, l) es **recto** si λ resulta una función estrictamente monótona cuando la restringimos a cada uno de los conjuntos $\{i, ..., j\}$, $\{j, ..., k\}$ y $\{k, ..., l\}$. En este caso tenemos que $l-k = k-j = j-i$, así que $j-l = j-k+k-l = 2(i-j)$.

Dadas dos cadenas $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ y $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, ..., D_m\}$ y un patrón $\lambda : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ decimos que $\mathcal{D}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$ si para cada $i \in \langle m\rangle$ se tiene que $D_i \subseteq C_{\lambda(i)}$.

Lema 12. *Si $\lambda : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$ es un patrón estricto no trivial, entonces λ tiene un doblez recto.*

Demostración. Primero probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 13. Si $s, t \in \langle m\rangle$ son tales que $s < t$, $\min\{\lambda(s), \lambda(t)\} \leq \lambda(r) \leq \max\{\lambda(s), \lambda(t)\}$ para cada $r \in \{s, ..., t\}$, y λ no es monótona en $\{s, ..., t\}$, entonces λ tiene un doblez en $\{s, ..., t\}$.

Para probar esta afirmación, notemos que como λ es estricto, $\lambda(s+1) = \lambda(s)+1$ o $\lambda(s+1) = \lambda(s)-1$. Supongamos que $\lambda(s+1) = \lambda(s)+1$. El otro caso es similar. En este caso $\lambda(s) < \lambda(s+1)$, y entonces $\lambda(s) \leq \lambda(r) \leq \lambda(t)$ para toda $r \in \{s, ..., t\}$.

Sea $j = \max\{r \in \{s, ..., t\} : \lambda \text{ es monótona en } \{s, ..., r\}\}$. Este conjunto es no vacío porque tiene al menos a $s+1$. Como $\lambda(s) < \lambda(s+1)$ y λ es estricto, tenemos que λ es estrictamente creciente en $\{s, ..., j\}$.

Notemos que $\lambda(s) < \lambda(j)$.

Por nuestra suposición, $s + 1 \leq j < t$.

Por la maximalidad de j, tenemos que $\lambda(j + 1) = \lambda(j) - 1$.

Ya que λ es estricto, los valores de λ avanzan de uno en uno. Como $\lambda(j+1) < \lambda(j)$, los valores de λ avanzan de uno en uno y el valor máximo de λ en $\{s, ..., t\}$ es $\lambda(t)$, tenemos que existe $l \in \{j + 1, ..., t\}$ tal que $\lambda(l) = \lambda(j)$. Si tomamos la l

mínima que cumple esto y $r \in \{j+1, ..., l\}$, no puede ocurrir que $\lambda(r) > \lambda(l)$, pues de lo contrario podríamos usar nuevamente que los valores de λ avanzan de uno en uno para encontrar una l' entre $j+1$ y r con la propiedad de que $\lambda(l') = \lambda(l)$, y entonces contradiríamos la minimalidad de l. De manera que $\lambda(r) \leq \lambda(l) = \lambda(j)$ para toda $r \in \{j+1, ..., l\}$.

Sea $k \in \{j, ..., l\}$ tal que $\lambda(k)$ es el mínimo de $\lambda(\{j, ..., l\})$.

Como $\lambda(j) = \lambda(l)$ y $\lambda(j+1) < \lambda(j)$, tenemos que $\lambda(k) \leq \lambda(j+1)$. Esto implica que $j < k < l$. Como $\lambda(k)$ es mínimo, tenemos que $\lambda(k) \leq \lambda(r) \leq \lambda(j)$ para toda $r \in \{j, ..., l\}$.

Dado que $\lambda(s) \leq \lambda(k) < \lambda(j)$ y los valores de λ avanzan de uno en uno, tenemos que existe $i \in \{s, ..., j\}$ tal que $\lambda(i) = \lambda(k)$. Como λ es estrictamente creciente en el conjunto $\{s, ..., j\}$, tenemos que $\lambda(i) \leq \lambda(r) \leq \lambda(j)$ para toda $r \in \{i, ..., j\}$.

Entonces la cuádrupla (i, j, k, l) satisface las condiciones para ser un doblez de λ. Esto termina la prueba de la afirmación.

Dado que λ es un patrón no trivial tenemos que $m > n$, por lo que λ no puede ser inyectiva. Por tanto λ no puede ser estrictamente monótona, y como λ es estricto, tampoco puede ser monótona. Entonces λ satisface las hipótesis de la afirmación cuando hacemos $s = 0$ y $t = m$. Por lo que λ tiene un doblez en $\{0, ..., m\}$.

Entonces podemos tomar un doblez (i, j, k, l) de λ donde $l - i$ es mínimo.

Veamos entonces que (i, j, k, l) es un doblez recto de λ.

Si λ no es monótona en $\{i, ..., j\}$, entonces podemos aplicar la afirmación y concluir que λ tiene un doblez (i', j', k', l') en $\{i, ..., j\}$. Entonces $l' - i' \leq j - i < l - i$, lo que contradice la minimalidad de $l - i$. Por tanto λ es monótona en $\{i, ..., j\}$ y como λ es estricto, tenemos que λ es estrictamente monótona en $\{i, ..., j\}$.

Similarmente se muestra que λ es estrictamente monótona en cada uno de los intervalos $\{j, ...k\}$ y $\{k, ..., l\}$. Por tanto λ es un doblez recto. $\square$

4. Continuos hereditariamente indescomponibles

Lema 14. *Sean X un continuo hereditariamente indescomponible, A y B subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos de X y, U_0 y V_0 subconjuntos abiertos de X tales que $A \subseteq U_0$ y $B \subseteq V_0$. Entonces existen tres conjuntos cerrados F_0, F_1 y F_2 de X tales que $X = F_0 \cup F_1 \cup F_2$, $F_0 \cap F_2 = \emptyset$, $A \subseteq F_0$, $B \subseteq F_2$, $F_0 \cap F_1 \subseteq V_0$ y $F_1 \cap F_2 \subseteq U_0$.*

Demostración. Sean U, V abiertos ajenos de X tales que $A \subseteq U \subseteq cl(U) \subseteq U_0$, $B \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq V_0$ y $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$.

Sean $A_0 = \bigcup\{D \in C(X) : D$ es componente de $X \setminus V$ y $D \cap A \neq \emptyset\}$ y $B_0 = \bigcup\{D \in C(X) : D$ es componente de $X \setminus U$ y $D \cap B \neq \emptyset\}$.

Usando propiedades básicas de la convergencia en hiperespacios y el hecho de $C(X)$ es compacto es posible probar que A_0 y B_0 son cerrados en X.

Aseguramos que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un punto $p \in A_0 \cap B_0$. Entonces existen componentes D de $X \setminus V$ y E de $X \setminus U$ tales que $D \cap A \neq \emptyset \neq E \cap B$ y $p \in D \cap E$. Como X es hereditariamente indescomponible y $D \cap E \neq \emptyset$, tenemos que $D \subseteq E$ o $E \subseteq D$. Supongamos, por ejemplo, que $D \subseteq E$. Entonces $E \subseteq X \setminus U$ y $\emptyset \neq A \cap D \subseteq U \cap E$. Esta contradicción prueba que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$.

Entonces los conjuntos A_0 y $B_0 \setminus V$ son dos cerrados ajenos de X contenidos en $X \setminus V$. Como A_0 es una unión de componentes de $X \setminus V$, tenemos que si una componente D de $X \setminus V$ intersecta a A_0, entonces $D \subseteq A_0$. Esto muestra que ninguna componente de $X \setminus V$ intersecta tanto a A_0 como a $B_0 \setminus V$. Por tanto podemos aplicar el Teorema del Cable Cortado (véase Teorema 5.2 en [5]) al espacio $X \setminus V$ y a sus cerrados A_0 y $B_0 \setminus V$, y de esta manera obtener dos cerrados ajenos D_1 y D_2 de $X \setminus V$ (y entonces cerrados en X) tales que $X \setminus V = D_1 \cup D_2$, $A_0 \subseteq D_1$ y $B_0 \setminus V \subseteq D_2$.

Ya que B_0 es una unión de componentes de $X \setminus U$, tenemos que si una componente D de $X \setminus U$ intersecta a B_0, entonces $D \subseteq B_0$. Ya que $D_1 \subseteq X \setminus V$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y $B_0 \subseteq D_2 \cup V$, tenemos que $D_1 \cap B_0 = \emptyset$. De modo que podemos aplicar el Teorema del Cable Cortado (véase Teorema 5.2 en [5]) al espacio $X \setminus U$ y a sus cerrados $D_1 \setminus U$ y B_0, y con esto obtener dos cerrados ajenos E_1 y E_2 de $X \setminus U$ (y entonces cerrados en X) tales que $X \setminus U = E_1 \cup E_2$, $B_0 \subseteq E_1$ y $D_1 \setminus U \subseteq E_2$.

Ya podemos definir los conjuntos requeridos. Sean

$$\begin{gathered} F_0 = D_1 \cup (cl(V) \cap E_2), \\ F_1 = (D_2 \cap E_2) \cup (cl(U) \cap D_2) \cup (cl(V) \cap E_2), \text{ y} \\ F_2 = E_1 \cup (cl(U) \cap D_2). \end{gathered}$$

Claramente los conjuntos F_0, F_1 y F_2 son cerrados en X.

Como $A \subseteq A_0 \subseteq D_1 \subseteq F_0$ y $B \subseteq B_0 \subseteq E_1 \subseteq F_2$, tenemos que $A \subseteq F_0$ y $B \subseteq F_2$.

Ya que $U \subseteq X \setminus V = D_1 \cup D_2$, tenemos que $U \subseteq D_1 \cup (U \cap D_2)$, además $V \subseteq X \setminus U = E_1 \cup E_2$, así que $V \subseteq E_1 \cup (V \cap E_2)$. Entonces $U \cup V \subseteq D_1 \cup (U \cap D_2) \cup E_1 \cup (V \cap E_2) \subseteq F_0 \cup F_2$. Por tanto $U \cup V \subseteq F_0 \cup F_2$.

Veamos que $X = F_0 \cup F_1 \cup F_2$. Sea $p \in X$. Si $p \in U \cup V$, por el párrafo anterior, $p \in F_0 \cup F_2$. Supongamos entonces que $p \in X \setminus (U \cup V) = (X \setminus U) \cap (X \setminus V) = (E_1 \cup E_2) \cap (D_1 \cup D_2)$. Ya que $D_1 \subseteq F_0$ y $E_1 \subseteq F_2$, podemos suponer que $p \in D_2 \cap E_2 \subseteq F_1$. Esto termina la prueba de que $X = F_0 \cup F_1 \cup F_2$.

Dada $p \in F_0 \cap F_1$, si $p \notin cl(V)$, observando la definición de F_0 y F_1, tenemos que $p \in D_1 \cap D_2$, lo cual es absurdo. Por tanto $F_0 \cap F_1 \subseteq cl(V) \subseteq V_0$.

Dada $p \in F_1 \cap F_2$, si $p \notin cl(U)$, observando la definición de F_1 y F_2, tenemos que $p \in E_1 \cap E_2$, lo cual es absurdo. Por tanto $F_1 \cap F_2 \subseteq cl(U) \subseteq U_0$.

Ahora veamos que $F_0 \cap F_2 = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un punto $p \in F_0 \cap F_2$. Como $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $cl(V) \cap cl(U) = \emptyset$, observando la definición de F_0 y F_2, concluimos que $p \in D_1 \cap E_1$. Dado que $E_1 \subseteq X \setminus U$, tenemos que $p \in (D_1 \setminus U) \cap E_1 \subseteq E_2 \cap E_1 = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por tanto, $F_0 \cap F_2 = \emptyset$. $\square$

Teorema 15. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible.*

Sea $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, ..., C_n\}$ una cadena tensa que cubre a X. Sean A y B dos subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $A \subseteq C_0 \setminus cl(C_1)$ y $B \subseteq C_n \setminus cl(C_{n-1})$. Sea $\lambda : \langle m \rangle \to \langle n \rangle$ un patrón tal que $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(m) = n$, donde $m \geq n$. Entonces existe una cadena tensa $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, ..., D_m\}$ que cubre a X, que sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$ y que cumple que $A \subseteq D_0 \setminus cl(D_1)$ y $B \subseteq D_m \setminus cl(D_{m-1})$.

Demostración. Distinguimos dos casos.

Primer paso. Probaremos que el teorema es válido cuando λ es un patrón estricto.

Primero construiremos una cadena $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, ..., E_m\}$ que cumpla las condiciones requeridas con la posible excepción de que $\mathcal{E}$ sea tensa. Haremos esto por inducción en m.

En el caso en que $m = n$, como λ es estricto se tiene que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(n) = n$, además los valores de λ avanzan de uno en uno, por lo que λ es suprayectiva, y por tanto también es inyectiva. Esto implica que λ es la identidad. En este caso ponemos $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

Ahora supongamos que $m > n$ y que el teorema se cumple para los números $n, n+1, ..., m-1$. Veamos que también se cumple para m.

Como λ es un patrón estricto, por el Lema 12, concluimos que λ tiene un doblez recto (i, j, k, l).

Definiremos otro patrón μ a partir de λ, para aprovechar la hipótesis de inducción. Sea $\mu : \{0, 1, ..., m+j-l\} \to \{0, 1, ..., n\}$ definido como sigue:

$$\mu(r) = \begin{cases} \lambda(r) & si\ 0 \leq r \leq j; \\ \lambda(r+l-j) & si\ j \leq r \leq m+j-l. \end{cases}$$

Notemos que μ sigue el patrón λ hasta el índice j. Como, con la segunda definición, $\mu(j) = \lambda(l) = \lambda(j)$, $\mu(j+1) = \lambda(l+1)$,...,$\mu(m+j-l) = \lambda(m)$, tenemos que μ está bien definida y que a partir del índice j se pasa a los valores $\lambda(j) = \lambda(l)$, $\lambda(l+1)$,...,$\lambda(m)$. De esta manera, lo que hace μ es simplemente eliminar el doblez. Ya que $0 \leq i < j < l \leq m$, tenemos que $1 \leq m+j-l < m$. Claramente, también se tiene que para toda $r \in \{0, 1, ..., m+j-l-1\}$, $|\mu(r) - \mu(r+1)| = 1$. Además, $\mu(0) = \lambda(0) = 0$ y $\mu(m+j-l) = \lambda(m) = n$. Por tanto, μ es un patrón estricto. Esto implica que μ es suprayectiva. De manera que $n \leq m+j-l$.

Podemos entonces aplicar la hipótesis de inducción. De modo que existe una cadena $\mathcal{G} = \{G_0, G_1, ..., G_{m+j-l}\}$ de conjuntos abiertos de X tal que $\mathcal{G}$ cubre a X, $\mathcal{G}$ sigue el patrón μ en $\mathcal{C}$, $A \subseteq G_0 \setminus cl(G_1)$ y $B \subseteq G_{m+j-l} \setminus cl(G_{m+j-l-1})$.

Ahora necesitamos recuperar el doblez que eliminamos cuando definimos μ. Para hacer esto comenzamos definiendo algunos conjuntos.

Sean

$$
\begin{aligned}
U &= G_0 \cup ... \cup G_i, \\
V &= G_j \cup ... \cup G_{m+j-l}, \\
A_0 &= X \setminus (G_{i+1} \cup ... \cup G_{m+j-l}) \text{ y} \\
B_0 &= X \setminus (G_0 \cup ... \cup G_{j-1}).
\end{aligned}
$$

Notemos que A_0 y B_0 son cerrados. Como $i \leq j-1$, $G_0 \cup ... \cup G_i \subseteq G_0 \cup ... \cup G_{j-1}$, así que $G_0 \cup ... \cup G_{j-1} \cup G_{i+1} \cup ... \cup G_{m+j-l} = X$. Esto implica que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ y que $A_0 \subseteq U$.

Como $B_0 \subseteq V$, $\emptyset \neq A \subseteq A_0$ y $\emptyset \neq B \subseteq B_0$, podemos aplicar el Lema 14 al continuo X, a los cerrados A_0 y B_0, y a los abiertos U y V, entonces existen tres conjuntos cerrados F_0, F_1 y F_2 de X tales que

$$
X = F_0 \cup F_1 \cup F_2, F_0 \cap F_2 = \emptyset, A_0 \subseteq F_0, B_0 \subseteq F_2, F_0 \cap F_1 \subseteq V \text{ y } F_1 \cap F_2 \subseteq U.
$$

Definimos $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, ..., E_m\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{gathered}
E_0 = G_0 \setminus (F_1 \cup F_2), E_1 = G_1 \setminus (F_1 \cup F_2), ..., E_{j-1} = G_{j-1} \setminus (F_1 \cup F_2); \\
E_j = G_j \setminus F_2; \\
E_{j+1} = G_{j-1} \setminus (F_0 \cup F_2), E_{j+2} = G_{j-2} \setminus (F_0 \cup F_2), ..., \\
E_{j+(j-i-1)} = G_{j-(j-i-1)} \setminus (F_0 \cup F_2) = G_{i+1} \setminus (F_0 \cup F_2); \\
E_{2j-i} = G_i \setminus F_0; \\
E_{2j-i+1} = G_{i+1} \setminus (F_0 \cup F_1), E_{2j-i+2} = G_{i+2} \setminus (F_0 \cup F_1), ..., \\
E_{2j-i+(m-2j+i)} = E_m = G_{i+m-2j+i} \setminus (F_0 \cup F_1) = G_{m-2j+2i} \setminus (F_0 \cup F_1).
\end{gathered}
$$

Claramente, para cada $i \in \{0, 1, ..., m\}$, E_i es un subconjunto abierto de X.

Ahora veamos que $\mathcal{E}$ cubre a X. Tomemos $p \in X$ analizaremos cinco casos.

Caso 1. $p \in G_0 \cup ... \cup G_{i-1} \subseteq U$.

Como $\mathcal{G}$ es cadena e $i < j$, tenemos que $p \in A_0 \subseteq F_0$ y $p \notin V$. De modo que $p \notin F_2$ y como $F_0 \cap F_1 \subseteq V$, tenemos que $p \notin F_1$. Entonces $p \notin F_1 \cup F_2$. Esto implica que $p \in E_0 \cup ... \cup E_{i-1}$.

Caso 2. $p \in G_i \subseteq U$.

Si $p \notin F_0$, entonces $p \in E_{2j-i}$. Supongamos entonces que $p \in F_0$. Entonces $p \notin F_2$. Si $p \notin F_1$, entonces $p \in E_i$. Supongamos entonces que $p \in F_1$. Entonces $p \in F_0 \cap F_1 \subseteq V$, así que $p \in U \cap V$. Como $\mathcal{G}$ es cadena, $p \in G_i \cap G_j$. Por tanto $p \in E_j$.

Caso 3. $p \in G_{i+1} \cup ... \cup G_{j-1}$.

Si $p \notin F_0 \cup F_2$, entonces $p \in E_{j+1} \cup ... \cup E_{2j-i}$. Supongamos entonces que $p \in F_0 \cup F_2$.

Supongamos primero que $p \in F_0$. Entonces $p \notin F_2$. Si $p \notin F_1$, entonces $p \notin F_1 \cup F_2$, así que $p \in E_{i+1} \cup ... \cup E_{j-1}$. Si $p \in F_1$, entonces $p \in F_0 \cap F_1 \subseteq V$. De manera que $p \in G_{j-1} \cap G_j$. Por tanto $p \in E_j$.

Ahora supongamos que $p \in F_2$. Entonces $p \notin F_0$. Si $p \notin F_1$, entonces $p \notin F_0 \cup F_1$, así que $p \in E_{2j-i+1} \cup ... \cup E_m$. Si $p \in F_1$, entonces $p \in F_1 \cap F_2 \subseteq U$. De manera que $p \in G_i \cap G_{i+1}$. Por tanto $p \in E_{2j-i}$.

Caso 4. $p \in G_j \subseteq V$.

Si $p \notin F_2$, entonces $p \in E_j$. Supongamos entonces que $p \in F_2$. Entonces $p \notin F_0$. Si $p \notin F_1$, entonces $p \in E_{2j-i+(j-i)}$. Si $p \in F_1$, entonces $p \in F_1 \cap F_2 \subseteq U$. De manera que $p \in U \cap V$. Entonces $p \in G_i \cap G_j$. Por tanto $p \in E_{2j-i}$.

Caso 5. $p \in G_{j+1} \cup ... \cup G_{m-2j+2i}$.

Como $\mathcal{G}$ es cadena e $i < j$, tenemos que $p \in B_0 \subseteq F_2$ y $p \notin U$. De modo que $p \notin F_0$ y como $F_1 \cap F_2 \subseteq U$, tenemos que $p \notin F_1$. Entonces $p \notin F_0 \cup F_1$. Esto implica que $p \in E_{2j-i+(j-i+1)} \cup ... \cup E_{m-2j+2i}$.

Ya que (i, j, k, l) es un doblez recto en λ tenemos que $j - l = 2(i - j)$. De manera que $G_{m+j-l} = G_{m-2j+2i}$. Por tanto estos cinco casos abarcan todas las posibilidades. Hemos demostrado entonces que $\mathcal{E}$ cubre a X.

Veamos que si $E_r \cap E_s \neq \emptyset$, entonces $|r - s| \leq 1$. Es decir, que los conjuntos E_r sólo se pueden intersectar si tienen índices consecutivos.

Los conjuntos $E_0, E_1, ..., E_m$ están definidos en tres grupos no ajenos a saber, $E_0, ..., E_j; E_j, ..., E_{2j-i}$ y $E_{2j-i}, ..., E_m$. La definición de los E_r en cada grupo está dada por elementos consecutivos de la cadena $\mathcal{G}$. De manera que los elementos de cada grupo sólo se pueden intersectar si son consecutivos. Como los elementos de $E_0 \cup ... \cup E_{j-1}$ no están en $F_1 \cup F_2$ y los de $E_{j+1} \cup ... \cup E_m$ no están en F_0, y además $X = F_0 \cup F_1 \cup F_2$, tenemos que $(E_0 \cup ... \cup E_{j-1}) \cap (E_{j+1} \cup ... \cup E_m) = \emptyset$. Similarmente, $(E_j \cup ... \cup E_{2j-i-1}) \cap (E_{2j-i+1} \cup ... \cup E_m) = \emptyset$. De aquí que los conjuntos E_r sólo se pueden intersectar si tienen índices consecutivos.

Dado $p \in A \subseteq A_0 \subseteq F_0$, como $p \in G_0 \setminus cl(G_1)$, tenemos que $p \notin V$. De modo que $p \notin F_2$ y como $F_0 \cap F_1 \subseteq V$, tenemos que $p \notin F_1$. Entonces $p \in E_0$. Esto prueba que $A \subseteq E_0$ y como $cl(E_1) \subseteq cl(G_1)$, concluimos que $A \subseteq E_0 \setminus cl(E_1)$. similarmente, $B \subseteq E_m \setminus cl(E_{m-1})$.

Aplicando el Lema 3, obtenemos que para toda $r \in \{1, ..., m\}$, se tiene que $E_{r-1} \cap E_r \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{E}$ es una cadena de conjuntos abiertos que cubren a X. Ya que $\emptyset \neq A \subseteq E_0 \setminus cl(E_1)$ y $\emptyset \neq B \subseteq E_m \setminus cl(E_{m-1})$, tenemos que $\mathcal{E}$ cubre propiamente a X.

Veamos que $\mathcal{E}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$. Sea $r \in \langle m \rangle$. Analicemos tres casos.

Caso 1. $0 \leq r \leq j$.

En este caso, como $\mathcal{G}$ sigue el patrón μ en $\mathcal{C}$, tenemos que $G_r \subseteq C_{\mu(r)}$, y como

$\mu(r) = \lambda(r)$, la definición de E_r implica que $E_r \subseteq G_r \subseteq C_{\mu(r)} = C_{\lambda(r)}$.

Caso 2. $j+1 \leq r \leq 2j-i$.

En este caso, por la definición de E_r, tenemos que $E_r \subseteq G_{j-(r-j)}$. Notemos que $2j-(j+1) \geq 2j-r \geq 2j-(2j-i)$, por lo que $i \leq 2j-r \leq j-1$. Ya que $\mathcal{G}$ sigue el patrón μ en $\mathcal{C}$, tenemos que $G_{2j-r} \subseteq C_{\mu(2j-r)} = C_{\lambda(2j-r)}$. Recordemos que λ es un doblez recto. Esto implica que λ es estrictamente monótona en $\{i, ..., j\}$ y en $\{j, ..., k\}$. En el caso en que $\lambda(i) < \lambda(j)$, λ toma valores en forma creciente, de uno en uno, en el segmento $\{i, ..., j\}$ y después toma valores en forma decreciente, de uno en uno, en el segmento $\{j, ..., k\}$. De manera que $\lambda(j+1) = \lambda(j-1)$, $\lambda(j+2) = \lambda(j-2)$, etc. Entonces $\lambda(2j-r) = \lambda(j+j-r) = \lambda(j-(j-r)) = \lambda(r)$. De modo que $E_r \subseteq C_{\lambda(r)}$. El caso en que $\lambda(i) > \lambda(j)$ se trata de manera similar.

Caso 3. $2j-i+1 \leq r \leq m$.

Por la definición de E_r, tenemos que $E_r \subseteq G_{r-2j+2i} \subseteq C_{\mu(r-2j+2i)}$. Ya que $2j-i+1 \leq r$, tenemos que $i+1 \leq r-2j+2i$. Si $i+1 \leq r-2j+2i < j$, por la definición de μ, tenemos que $\mu(r-2j+2i) = \lambda(r-2j+2i)$; además $2j-i+1 \leq r < 2j-i+(j-i)$, por lo que existe $s_0 \in \{1, ..., j-1\}$ tal que $r = 2j-i+s_0$. Como (i,j,k,l) es un doblez recto de λ, entonces $\lambda(2j-i+s) = \lambda(i+s)$ si $1 \leq s < j-i$. Por tanto, $\mu(r-2j+2i) = \lambda(r-2j+2i) = \lambda((2j-i+s_0)-2j+2i) = \lambda(i+s_0) = \lambda(2j-i+s_0) = \lambda(r)$. Por otro lado, si $j \leq r-2j+2i$, tenemos que $\mu(r-2j+2i) = \lambda(r-2j+2i+l-j)$. Como (i,j,k,l) es un doblez recto de λ, tenemos que $j-l = 2(i-j)$. De modo que $r-2j+2i+l-j = r-2j+2i-2(i-j) = r$. En ambos casos tenemos que $\mu(r-2j+2i) = \lambda(r)$, por lo que $E_r \subseteq C_{\lambda(r)}$.

Esto termina la prueba de que $\mathcal{E}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$.

Por el Lema 4, existe una cadena tensa $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, ..., D_m\}$ que cubre propiamente a X y que cumple que para toda $r \in \langle m \rangle$ se tiene que $cl(D_r) \subseteq E_r$.

Dada $p \in A$, $p \in E_0 \setminus cl(E_1)$. De modo que $p \notin cl(E_1 \cup ... \cup E_m)$ y entonces $p \notin cl(D_1 \cup ... \cup D_m)$. Y como $\mathcal{D}$ cubre a X, obtenemos que $p \in D_0 \setminus cl(D_1)$. Por tanto, $A \subseteq E_0 \setminus cl(E_1)$. Similarmente, $B \subseteq D_m \setminus cl(D_{m-1})$.

Con esto terminamos la prueba de que el teorema es válido para el caso en que λ es un patrón estricto.

Segundo paso. Ahora veremos que el teorema es válido para cualquier patrón. Primero dividiremos el conjunto $\{0, 1, ..., m\}$ en bloques de la siguiente manera.

Sea j_0 el último elemento en $\{0, 1, ..., m\}$ tal que λ es constante en el conjunto $\{0, ..., j_0\}$. Por supuesto que puede ocurrir que $j_0 = 0$. Como $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(m) = n \geq 1$, tenemos que $j_0 < m$. Notemos que $\lambda(j_0+1) \neq \lambda(j_0)$.

Sea j_1 el último elemento en $\{j_0+1, ..., m\}$ tal que λ es constante en el conjunto $\{j_0+1, ..., j_1\}$. También puede ocurrir que $j_1 = j_0+1$. Si $j_1 < m$, tenemos que $\lambda(j_1+1) \neq \lambda(j_1)$.

Si $j_1 < m$, podemos definir j_2 como el último elemento en $\{j_1+1, ..., m\}$ tal que λ es constante en el conjunto $\{j_1+1, ..., j_2\}$.

Continuando de esta manera es posible definir una sucesión

$$0 \leq j_0 < j_1 < ... < j_r = m$$

tal que λ es constante en los bloques $\{0, ..., j_0\}$, $\{j_0 + 1, ..., j_1\}$, $\{j_1 + 1, ..., j_2\}$,...,$\{j_{r-1} + 1, ..., j_r\}$ y además $1 \leq r$ y $\lambda(j_0) \neq \lambda(j_0 + 1) = \lambda(j_1) \neq \lambda(j_1 + 1) = \lambda(j_2) \neq ... \neq \lambda(j_{r-2} + 1) = \lambda(j_{r-1}) \neq \lambda(j_{r-1} + 1) = \lambda(j_r)$.

Ya que λ es un patrón, tenemos que $|\lambda(j_0) - \lambda(j_1)| = |\lambda(j_1) - \lambda(j_2)| = ... = |\lambda(j_{r-1}) - \lambda(j_r)| = 1$.

Definimos $\gamma : \langle r\rangle \to \langle n\rangle$ dada por $\gamma(k) = \lambda(j_k)$. Entonces γ es un patrón estricto tal que $\gamma(r) = \lambda(j_r) = \lambda(m) = n$ y $\gamma(0) = \lambda(j_0) = \lambda(0) = 0$.

Por el primer paso, existe una cadena tensa $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, ..., F_r\}$, que cubre a X, que sigue el patrón γ en $\mathcal{C}$ y que cumple que $A \subseteq F_0 \backslash cl(F_1)$ y $B \subseteq F_r \backslash cl(F_{r-1})$.

Por el Lema 5, el eslabón F_0 puede ser sustituido por $j_0 + 1$ eslabones para obtener una cadena tensa $\mathcal{D}_0 = \{D_0, ..., D_{j_0}; F_1, ..., F_r\}$. Por el mismo Lema 5, podemos sustituir F_1 por $j_1 - j_0$ eslabones para obtener una cadena tensa $\mathcal{D}_1 = \{D_0, ..., D_{j_0}; D_{j_0+1}, ..., D_{j_1}; F_2, ..., F_r\}$. En $\mathcal{D}_1$ sustituimos F_2 por $j_2 - j_1$ eslabones. Seguimos este proceso hasta obtener una cadena tensa

$$\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_{j_0}; D_{j_0+1}, ..., D_{j_1}; ...; D_{j_{r-1}+1}, ..., D_{j_r}\}.$$

De acuerdo con el Lema 5, tenemos las siguientes propiedades:

$F_0 = D_0 \cup ... \cup D_{j_0}$, $F_1 = D_{j_0+1} \cup ... \cup D_{j_1}$,...,$F_r = D_{j_{r-1}} \cup ... \cup D_{j_r}$, $A \subseteq D_0 \backslash cl(D_1)$ y $B \subseteq D_{j_r} \setminus cl(D_{j_r-1})$ y $\mathcal{D}$ es una cadena tensa de abiertos que cubre a X.

Dada $i \in \{0, 1, ..., m\} = \{0, 1, ..., j_r\}$, existe $k \in \{0, 1, ..., r\}$ tal que $i \in \{j_{k-1} + 1, ..., j_k\}$, donde para hacer la notación uniforme definimos $j_{-1} = -1$. Notemos que $D_i \subseteq F_k$.

Como λ es constante en el bloque $\{j_{k-1} + 1, ..., j_k\}$, tenemos que $\lambda(i) = \lambda(j_k) = \gamma(k)$. Ya que $\mathcal{F}$ sigue el patrón γ en $\mathcal{C}$, tenemos que $F_k \subseteq C_{\gamma(k)}$. De manera que $D_i \subseteq C_{\gamma(k)} = C_{\lambda(i)}$. Por tanto, $\mathcal{D}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$.

$\square$

5. Construcción del Seudoarco

El seudoarco se construye tomando una sucesión $\{\mathcal{U}_r\}_{r=1}^{\infty}$ de cadenas en el plano $\mathbb{R}^2$. La propiedad más importante que les vamos a pedir a estas cadenas es que $\mathcal{U}_{n+1}$ esté torcida en $\mathcal{U}_n$.

Decimos que $\mathcal{V}$ *está torcida* en $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ y para que una subcadena de $\mathcal{V}$ avance desde un eslabón de $\mathcal{U}$ a otro que esté al menos cuatro eslabones aparte, primero tiene que visitar el penúltimo y después el segundo. Esto se precisa a continuación

Definición 16. $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, ..., V_m\}$ ***está torcida*** en $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, ..., U_n\}$ si además de que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ se tiene que si $k, l \in \langle n \rangle$ con $k + 3 \leq l$ e $i, j \in \langle m \rangle$ son tales que $V_i \subset U_k$ y $V_j \subset U_l$, entonces existen $r, s \in \langle m \rangle$ tales que $V_r \subset U_{l-1}$ y $V_s \subset U_{k+1}$ y se cumple que $i < r < s < j$ o $j < s < r < i$.

En la figura se ilustra cómo funciona el torcimiento. En la figura se empieza con una cadena $\mathcal{U}$ de seis eslabones y se mete en ella una cadena $\mathcal{V}$, el primer eslabón de $\mathcal{V}$ se encuentra en el primer eslabón de $\mathcal{U}$, para poder construir un eslabón de $\mathcal{V}$ situado en el último eslabón de $\mathcal{U}$, primero se tiene que visitar el quinto eslabón de $\mathcal{U}$ y después se tiene que visitar el segundo eslabón de $\mathcal{U}$.

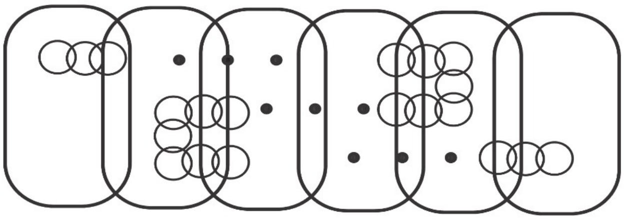

Figura 1: Torcimiento

Por supuesto que en esta figura los puntos suspensivos representan partes de la cadena que no hemos dibujado. Para hacer la figura completa, necesitamos hacer el torcimiento cuando vamos del primer al cuarto eslabón, cuando vamos del segundo al quinto, etc. En la siguiente figura se muestra una manera de completar la figura anterior.

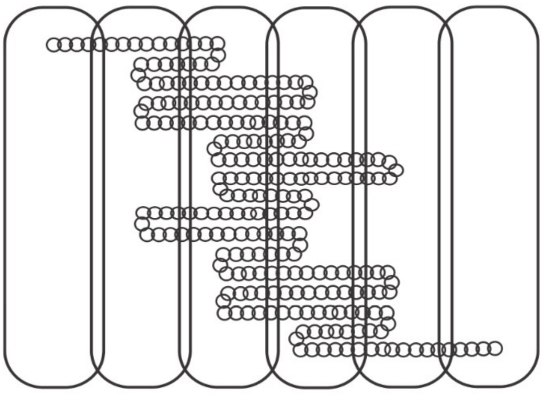

Figura 2: Torcimiento en seis eslabones

La figura anterior muestra cómo se puede construir una cadena torcida dentro de una cadena de seis eslabones. En el caso en que empecemos con una cadena de siete eslabones $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_6\}$, ya sabemos cómo se puede hacer una cadena torcida en la cadena $\{U_0, \ldots, U_5\}$ que vaya de U_0 a U_5, como ya sabemos hacer torcimientos en una cadena de cinco eslabones, podemos prolongarla a una que vaya del eslabón U_5 al U_1. Y como ya sabemos cómo construir cadenas torcidas en una de seis eslabones, podemos prolongarla torcidamente con una que vaya del eslabón U_1 al U_6. De esta manera, el resultado final será una cadena que vaya del eslabón U_0 al U_6 y que esté torcida en $\mathcal{U}$.

Este argumento puede generalizarse por inducción para construir cadenas torcidas dentro de cadenas con cualquier número de eslabones.

Con lo que hemos argumentado, es posible construir una sucesión de cadenas $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots$ en el plano tal que

(a) $\mathcal{U}_{n+1}$ está torcida en $\mathcal{U}_n$,

(b) la amplitud de $\mathcal{U}_n$ es menor que $\frac{1}{2^n}$,

(c) el primer elemento de $\mathcal{U}_{n+1}$ está contenido en el primero de $\mathcal{U}_n$ y el último elemento de $\mathcal{U}_{n+1}$ está contenido en el último de $\mathcal{U}_n$.

Estamos listos para construir el seudoarco.

Para $n \in \mathbb{N}$, ponemos $\mathcal{U}_n = \{U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \ldots, U_{m_n}^{(n)}\}$ y hacemos $A_n = cl(\bigcup \mathcal{U}_n)$. Entonces A_n es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ y $A_{n+1} \subset A_n$. Sea $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, éste es el pseudoarco.

De la definición del seudoarco se puede obtener fácilmente una de sus propiedades más importantes, la cual veremos a continuación.

Teorema 17. *El seudoarco es hereditariamente indescomponible, esto quiere decir que todos los subcontinuos no degenerados de P son indescomponibles.*

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo descomponible X del seudoarco. Entonces existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Elegimos puntos $a \in X \setminus B \subset A$ y $b \in X \setminus A \subset B$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap B(b, \varepsilon) = \emptyset$, $B(a, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ y $B(b, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 3$ y $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Consideramos las cadenas $\mathcal{U}_N = \{U_0^{(N)}, U_1^{(N)}, \ldots, U_{m_N}^{(N)}\}$ y $\mathcal{U}_{N+1} = \{U_0^{(N+1)}, U_1^{(N+1)}, \ldots, U_{m_{N+1}}^{(N+1)}\}$. Sabemos que $X = A \cup B \subset U_0^{(N+1)} \cup \ldots \cup U_{m_{N+1}}^{(N+1)}$. Sean $r, s \in \langle m_{N+1} \rangle$ tales que $a \in U_r^{(N+1)}$y $b \in U_s^{(N+1)}$. Sean $i, j \in \langle m_N \rangle$ tales que $U_r^{(N+1)} \subset U_i^{(N)}$ y $U_s^{(N+1)} \subset U_j^{(N)}$. Entonces $a \in U_i^{(N)}$ y $b \in U_j^{(N)}$.

Supongamos, por ejemplo, que $i < j$. Consideremos la subcadena $\{U_i^{(N)}, ..., U_j^{(N)}\}$. Sabemos que $U_i^{(N)} \cap U_{i+1}^{(N)} \neq \emptyset$, diámetro$(U_i^{(N)}) < \frac{1}{2^{N-2}}$ y diámetro$(U_{i+1}^{(N)}) < \frac{1}{2^{N-2}}$. Por lo tanto diámetro$(U_i^{(N)} \cup U_{i+1}^{(N)}) < \varepsilon$ y $U_i^{(N)} \cup U_{i+1}^{(N)} \subset B(a, \varepsilon)$. De manera similar obtenemos que $U_{j-1}^{(N)} \cup U_j^{(N)} \subset B(b,\varepsilon)$. Así que $U_{i+1}^{(N)} \notin \{U_{j-1}^{(N)}, U_j^{(N)}\}$, lo cual implica que $i < i+1 < j-1 < j$. Así que $3 \leq j-i$.

Podemos suponer que $r < s$, el caso opuesto se trata de manera similar.

Como $\mathcal{U}_{N+1}$ está torcida en $\mathcal{U}_N$, existen $u, v \in \langle m_{N+1} \rangle$ tales que $r < u < v < s$, tales que $U_u^{(N+1)} \subset U_{j-1}^{(N)}$ y $U_v^{(N+1)} \subset U_{i+1}^{(N)}$. Entonces $U_v^{(N+1)} \subset B(a,\varepsilon)$ y $U_u^{(N+1)} \subset B(b,\varepsilon)$. De manera que $U_v^{(N+1)} \cap B = \emptyset$ y $U_u^{(N+1)} \cap A = \emptyset$.

Como $X \cap U_r^{(N+1)} \neq \emptyset$, $X \cap U_s^{(N+1)} \neq \emptyset$, X es conexo y $r < v < s$, tenemos que $X \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$. Elegimos $p \in X \cap U_v^{(N+1)}$, entonces $p \notin B$, lo cual implica que $p \in A$, por tanto, $A \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$. Tenemos entonces que $A \cap U_v^{(N+1)} \neq \emptyset$, $r < u < v$ y A es conexo, lo cual implica que $A \cap U_u^{(N+1)} \neq \emptyset$. Ya habíamos observado que esto no ocurre. Hemos obtenido una contradicción que nació de suponer que P contiene un subcontinuo descomponible. Por lo tanto el seudoarco es hereditariamente indescomponible. $\square$

6. Homogeneidad del Seudoarco

Recordemos que dado un continuo X, 2^X denota el hiperespacio

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

A 2^X se le considera con la métrica de Hausdorff H_X (véase página 22 de [1]).

Lema 18. *Sean X y Y dos continuos encadenables, $x \in X$ y $y \in Y$. Supongamos que existen dos sucesiones de cadenas tensas de abiertos $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$, que cubren respectivamente a X y a Y, y que son tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:*

(a) $\mathcal{C}_n = \{C_0^{(n)}, ..., C_{m_n}^{(n)}\}$ y $\mathcal{D}_n = \{D_0^{(n)}, ..., D_{m_n}^{(n)}\}$,

(b) la amplitud de cada una de las cadenas $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$ es menor que $\frac{1}{2^n}$,

(c) existe un patrón $\lambda_n : \langle m_{n+1} \rangle \to \langle m_n \rangle$ tal que $\mathcal{C}_{n+1}$ (respectivamente, $\mathcal{D}_{n+1}$) sigue el patrón λ_n en $\mathcal{C}_n$ (respectivamente, en $\mathcal{D}_n$).

(d) para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_0^{(n)}$ y $y \in D_0^{(n)}$.

Entonces existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(x) = y$.

Demostración. Sean d_X y d_Y las respectivas métricas que usamos para X y Y. Dada $p \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir $i_n \in \langle m_n \rangle$ tal que $p \in C_{i_n}^{(n)}$.

Veremos que la sucesión $\{cl(D_{i_n}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el hiperespacio 2^Y y como 2^Y es compacto (véase Teorema 4.2 de [1]) tendremos que es convergente, veremos que converge a un conjunto unipuntual y al único punto en el límite le llamaremos $h(p)$. Probaremos que h es una función bien definida, h es un homeomorfismo y $h(x) = y$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{C}_{n+1}$ y $\mathcal{D}_{n+1}$ siguen el patrón λ_n en $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$, respectivamente, tenemos que $C^{(n+1)}_{i_{n+1}} \subseteq C^{(n)}_{\lambda_n(i_{n+1})}$ y $D^{(n+1)}_{i_{n+1}} \subseteq D^{(n)}_{\lambda_n(i_{n+1})}$. Por la elección de i_n e i_{n+1}, $p \in C^{(n+1)}_{i_{n+1}} \cap C^{(n)}_{i_n} \subseteq C^{(n)}_{\lambda_n(i_{n+1})} \cap C^{(n)}_{i_n}$. Esto implica que $|\lambda_n(i_{n+1}) - i_n| \leq 1$, así que $D^{(n)}_{\lambda_n(i_{n+1})} \cap D^{(n)}_{i_n} \neq \emptyset$. Ya que estos dos conjuntos tienen diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$, tenemos que $D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)} \subseteq N(D^{(n)}_{i_n}, \frac{1}{2^n})$ y $D^{(n)}_{i_n} \subseteq N(D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)}, \frac{1}{2^n})$, por lo que $H_Y(cl(D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)}), cl(D^{(n)}_{i_n})) < \frac{1}{2^n}$. Como $D^{(n+1)}_{i_n+1} \subseteq D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)}$ y el diámetro de $D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)}$ es menor que $\frac{1}{2^n}$, tenemos que $H_Y(cl(D^{(n+1)}_{i_n+1}), cl(D^{(n)}_{\lambda_n(i_n+1)})) < \frac{1}{2^n}$. La desigualdad del triángulo nos dice que $H_Y(cl(D^{(n)}_{i_n}), cl(D^{(n+1)}_{i_n+1})) < \frac{2}{2^n}$. Esto implica que, para toda $m \geq n$, $H_Y(cl(D^{(n)}_{i_n}), cl(D^{(m)}_{i_m})) < \frac{4}{2^n}$.

Esta última desigualdad implica que:

(1) la sucesión $\{cl(D^{(n)}_{i_n})\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por tanto, convergente en el hiperespacio 2^Y, y

(2) para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_Y(cl(D^{(n)}_{i_n}), \lim_{k\to\infty} cl(D^{(k)}_{i_k})) \leq \frac{4}{2^n}$.

Como el diámetro de $cl(D^{(n)}_{i_n})$ es menor que $\frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que el límite de la sucesión $\{cl(D^{(n)}_{i_n})\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto unipuntual.

Veamos que este límite no depende de la elección de los índices i_n. Supongamos entonces que también, para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos índices $k_n \in \langle m_n \rangle$ tales que $p \in C^{(n)}_{k_n}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, $p \in C^{(n)}_{k_n} \cap C^{(n)}_{i_n}$. Esto implica que $|i_n - k_n| \leq 1$, de manera que $D^{(n)}_{k_n} \cap D^{(n)}_{i_n} \neq \emptyset$. Por (b) obtenemos que $H_Y(cl(D^{(n)}_{k_n}), cl(D^{(n)}_{i_n})) < \frac{1}{2^n}$. Esto implica que las dos sucesiones $\{cl(D^{(n)}_{i_n})\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{cl(D^{(n)}_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ tiene el mismo límite.

Definimos $h : X \to Y$ por $h(p)$ es el único punto en Y tal que $\lim_{n\to\infty} cl(D^{(n)}_{i_n}) = \{h(p)\}$.

Veamos que h es continua. Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{10}{2^r} < \varepsilon$. Sea $i_r \in \langle m_r \rangle$ tal que $p \in C^{(r)}_{i_r}$.

Si tomamos un punto q en la vecindad $C^{(r)}_{i_r}$ de p, para la definición tanto de $h(p)$ como de $h(q)$, para el entero r, podemos elegir el eslabón $C^{(r)}_{i_r}$. Llamemos $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ (respectivamente, $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$) a la sucesión de índices que usamos para definir $h(p)$ (respectivamente, $h(q)$). Entonces $l_r = i_r$. Por la propiedad (2), tenemos que $H_Y(cl(D^{(r)}_{i_r}), \lim_{k\to\infty} cl(D^{(k)}_{i_k})) \leq \frac{4}{2^r}$ y $H_Y(cl(D^{(r)}_{l_r}), \lim_{k\to\infty} cl(D^{(k)}_{l_k})) \leq \frac{4}{2^r}$. Es decir, $H_Y(cl(D^{(r)}_{i_r}), \{h(p)\}) \leq \frac{4}{2^r}$ y $H_Y(cl(D^{(r)}_{l_r}), \{h(q)\}) \leq \frac{4}{2^r}$. Como $cl(D^{(r)}_{i_r}) = cl(D^{(r)}_{l_r})$, tenemos que $H_Y(\{h(p)\}, \{h(q)\}) \leq \frac{8}{2^r}$. Esto implica que $d_Y(h(p), h(q)) < \varepsilon$. Por tanto, h es continua.

Veamos que h es inyectiva. Supongamos que $p, q \in X$ son tales que $h(p) = h(q)$. Dada $r \in \mathbb{N}$, sea $t_r \in \langle m_r \rangle$ tal que $h(p) \in D^{(r)}_{t_r}$. Llamemos $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ (respectivamente, $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$) a la sucesión de índices que usamos para definir $h(p)$ (respectivamente, $h(q)$). Como $\{h(p), h(q)\} \subseteq D^{(r)}_{t_r}$, $\lim_{n\to\infty} cl(D^{(n)}_{i_n}) \cup$

$\lim_{n\to\infty} cl(D_{l_n}^{(n)}) \subseteq D_{t_r}^{(r)}$. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > r$ y para toda $n \geq N$, $D_{i_n}^{(n)} \cup D_{l_n}^{(n)} \subseteq D_{t_r}^{(r)}$. Como para toda $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{k+1}$ y $\mathcal{D}_{k+1}$ siguen el patrón λ_k en $\mathcal{C}_k$ y $\mathcal{D}_k$, respectivamente, tenemos que $D_{i_n}^{(n)} \subseteq D_{\lambda_{n-1}(i_n)}^{(n-1)} \subseteq D_{\lambda_{n-2}(\lambda_{n-1}(i_n))}^{(n-2)} \subseteq ... \subseteq D_s^{(r)}$ y $C_{i_n}^{(r)} \subseteq C_s^{(r)}$ donde $s = (\lambda_r \circ \lambda_{r+1} \circ ... \circ \lambda_{n-2} \circ \lambda_{n-1})(i_n)$. Entonces $D_s^{(r)} \cap D_{t_r}^{(r)} \neq \emptyset$, así que $|s - t_r| \leq 1$. De modo que $C_s^{(r)} \cap C_{t_r}^{(r)} \neq \emptyset$. Ya que $p \in C_{i_n}^{(r)}$, tenemos que $p \in C_s^{(r)}$. Por tanto, p pertenece a un eslabón de $\mathcal{C}_r$ adyacente al eslabón $C_{t_r}^{(r)}$. Similarmente, q pertenece a un eslabón de $\mathcal{C}_r$ adyacente al eslabón $C_{t_r}^{(r)}$. Esto muestra que $d_X(p,q) \leq \frac{3}{2^r}$. Como esto ocurre para toda $r \in \mathbb{N}$, concluimos que $p = q$. Por tanto, h es inyectiva.

Mostremos que h es suprayectiva. Sean $z \in Y$ y $r \in \mathbb{N}$. Sea $t_r \in \langle m_r \rangle$ tal que $z \in D_{t_r}^{(r)}$. Elegimos un punto $p \in C_{t_r}^{(r)}$. Entonces para definir $h(p)$ podemos elegir el eslabón $C_{t_r}^{(r)}$ en la cadena $\mathcal{C}_r$. Por la propiedad (2), $H_Y(cl(D_{i_r}^{(r)}), h(p)) \leq \frac{4}{2^r}$. Ya que $z \in D_{t_r}^{(r)}$, concluimos que $d_Y(z, h(p)) \leq \frac{5}{2^r}$. Como r es un número natural cualquiera, $z \in cl(h(X)) = h(X)$. Por tanto, h es suprayectiva. Con esto concluimos la prueba de que h es un homeomorfismo.

Finalmente probemos que $h(x) = y$. Por (d), para definir $h(x)$, podemos tomar la sucesión de eslabones $\{C_0^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $\{h(x)\} = \lim_{n\to\infty} cl(D_0^{(n)})$. Como este conjunto es unipuntual y tiene a y, concluimos que $h(x) = y$. □

Teorema 19. *El seudoarco P es homogéneo.*

Demostración. Sean $p, q \in P$. Mostraremos inductivamente que es posible encontrar dos sucesiones de cadenas tensas de abiertos $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$, que cubren respectivamente a P, y que son tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{C}_n = \{C_0^{(n)}, ..., C_{m_n}^{(n)}\}$ y $\mathcal{D}_n = \{D_0^{(n)}, ..., D_{m_n}^{(n)}\}$,

(b) la amplitud de cada una de las cadenas $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$ es menor que $\frac{1}{2^n}$,

(c) existe un patrón $\lambda_n : \langle m_{n+1} \rangle \to \langle m_n \rangle$ tal que $\mathcal{C}_{n+1}$ (respectivamente, $\mathcal{D}_{n+1}$) sigue el patrón λ_n en $\mathcal{C}_n$ (respectivamente, en $\mathcal{D}_n$),

(d) para toda $n \in \mathbb{N}$, $p \in C_0^{(n)} \setminus cl(C_1^{(n)})$ y $q \in D_0^{(n)} \setminus cl(D_1^{(n)})$.

Como P es hereditariamente indescomponible, todos sus puntos son terminales, y entonces, por el Teorema 10, todos ellos también son finales. Dado que P es encadenable, por el Lema 5 existen dos cadenas $\mathcal{C}_1 = \{C_0^{(1)}, ..., C_{m_1}^{(1)}\}$ y $\mathcal{D}_1 = \{D_0^{(1)}, ..., D_{m_1}^{(1)}\}$, de amplitud menor que $\frac{1}{2}$ y que cumple $p \in C_0^{(1)} \setminus cl(C_1^{(1)})$ y $q \in D_0^{(1)} \setminus cl(D_1^{(1)})$. Con esto tenemos completado el primer paso de la inducción.

El paso inductivo será consecuencia de lo siguiente.

Afirmación 20. Sean $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_m\}$ y $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_m\}$, dos cadenas tensas de abiertos de P, que cubren a P. Sean $\varepsilon > 0$, $x \in C_0 \setminus cl(C_1)$ y $y \in D_0 \setminus cl(D_1)$. Entonces existen dos cadenas tensas de abiertos $\mathcal{E} = \{E_0, ..., E_r\}$ y $\mathcal{F} = \{F_0, ..., F_r\}$

de P, que cubren a P y existe un patrón $\lambda : \langle r\rangle \to \langle m\rangle$ tales que $\mathcal{E}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$, $y \in E_0 \setminus cl(E_1)$, $x \in F_0 \setminus cl(F_1)$ y las amplitudes de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son menores que ε.

Probemos esta afirmación. Fijamos un punto $z \in D_m \setminus cl(D_{m-1})$. Como P es encadenable y y es un punto final de P, tenemos que existe una cadena tensa $\mathcal{E} = \{E_0, ..., E_r\}$ que cubre a P, $\mathcal{E}$ refina a $\mathcal{D}$, $y \in E_0 \setminus cl(E_1)$ y con la amplitud de $\mathcal{E}$ menor que ε. Notemos que $r \geq m$.

Para cada $i \in \langle r\rangle$, E_i está contenido en $D_{\lambda(i)}$ para alguna $\lambda(i) \in \langle m\rangle$. Notemos que D_0 es el único elemento de $\mathcal{D}$ que tiene a y. Como $y \in E_0$, tenemos que E_0 sólo puede estar contenido en D_0. Así que $\lambda(0) = 0$. Dado que D_m es el único elemento de $\mathcal{D}$ que contiene a z, tenemos que existe $j_0 \in \langle r\rangle$ tal que $\lambda(j_0) = m$.

Dada $i \in \{1, ..., r\}$, tenemos que $\emptyset \neq E_{i-1} \cap E_i \subseteq D_{\lambda(i-1)} \cap D_{\lambda(i)}$, por lo que $|\lambda(i-1) - \lambda(i)| \leq 1$. Por tanto, λ es un patrón, y por definición, $\mathcal{E}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{D}$.

Definimos una función $\mu : \langle 2r - j_0\rangle \to \langle m\rangle$ de la siguiente manera

$$\mu(i) = \begin{cases} \lambda(i) & si\ 0 \leq i \leq r; \\ \lambda(2r - i) & si\ r \leq i \leq 2r - j_0. \end{cases}$$

Como $\mu(2r - j_0) = \lambda(2r - (2r - j_0)) = \lambda(j_0) = m$, tenemos que μ hace el mismo recorrido que λ en los primeros $r + 1$ pasos y después lo recorre en sentido contrario hasta llegar al índice j_0, donde μ vale m.

La definición de la función μ se divide en dos segmentos de enteros que se intersectan en r. Como λ es un patrón, en cada uno de estos segmentos, se cumple la condición $|\lambda(i+1) - \lambda(i)| \leq 1$. Por lo que μ también la cumple, y entonces μ es un patrón. Notemos que $\mu(0) = 0$.

Elegimos un punto $w \in C_m \setminus cl(C_{m-1})$.

Aplicamos el Teorema 15 a la cadena $\mathcal{C}$, a los conjuntos $A = \{x\}$, $B = \{w\}$ y al patrón μ. Tenemos entonces que existe una cadena tensa $\mathcal{G} = \{G_0, ..., G_{2r-j_0}\}$ que cubre a P, que sigue el patrón μ en $\mathcal{C}$ y que cumple que $x \in G_0 \setminus cl(G_1)$ y $w \in G_{2r-j_0} \setminus cl(G_{2r-j_0-1})$.

Recordemos que el patrón μ es una extensión especial del patrón λ. Ahora definiremos la cadena $\mathcal{F}$ la cual usará el patrón λ a partir del patrón μ.

Definimos entonces $\mathcal{F} = \{F_0, ..., F_r\}$ como sigue:

$$\begin{gathered} F_0 = G_0, ..., F_{j_0-1} = G_{j_0-1}, \\ F_{j_0} = G_{j_0} \cup G_{2r-j_0}, F_{j_0+1} = G_{j_0+1} \cup G_{2r-j_0-1}, ..., F_{r-1} = G_{r-1} \cup G_{r+1}, \\ F_r = G_r. \end{gathered}$$

Veamos que $\mathcal{F}$ es una cadena.

Sea $i \in \{1, ..., r\}$. Como $\emptyset \neq G_{i-1} \cap G_i \subseteq F_{i-1} \cap F_i$, tenemos que $F_{i-1} \cap F_i \neq \emptyset$.

Notemos que $F_{j_0} \cup ... \cup F_r = G_{j_0} \cup ... \cup G_{2r-j_0}$, por lo que ninguno de los conjuntos $cl(F_0), ..., cl(F_{j_0-2})$ intersecta a ninguno de los conjuntos $cl(F_{j_0}), ..., cl(F_r)$. Dada $i \geq j_0$, $cl(F_i \cup ... \cup F_r) = cl(G_i \cup ... \cup G_{2r-j_0-i})$ por lo que este conjunto no puede ser intersectado por $cl(G_{i-2} \cup G_{2r-j_0-i+2}) \supseteq cl(F_{i-2})$. De manera que la intersección de dos conjuntos $cl(F_j)$ sólo puede ser distinta del vacío cuando éstos tienen índices consecutivos. Por tanto, $\mathcal{F}$ es una cadena tensa.

Claramente los elementos de $\mathcal{F}$ son abiertos y en la unión de los elementos de $\mathcal{F}$ se encuentran todos los conjuntos G_i por lo que la unión de $\mathcal{F}$ es X.

Veamos que $\mathcal{F}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$.

Sea $i \in \langle r \rangle$. Si $0 \leq i < j_0$, entonces $F_i = G_i \subseteq C_{\mu(i)} = C_{\lambda(i)}$. Si $j_0 \leq i \leq r$, entonces $F_i = G_i \cup G_{2r-i} \subseteq C_{\mu(i)} \cup C_{\mu(2r-i)}$. Como $r \leq 2r - i \leq 2r - j_0$, tenemos que $\mu(2r-i) = \lambda(i)$. De manera que $C_{\mu(i)} \cup C_{\mu(2r-i)} = C_{\lambda(i)}$, y entonces $F_i \subseteq C_{\lambda(i)}$. Esto termina la prueba de que $\mathcal{F}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}$.

Como $x \in G_0$ y x no está en ningún conjunto $cl(G_1), ..., cl(G_{2r-j_0})$, tenemos que $x \in F_0 \setminus cl(F_1)$.

Esto termina la prueba de la afirmación.

Ya podemos hacer el paso inductivo. Supongamos que se han construido las cadenas $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_n$ con las propiedades requeridas.

Por la afirmación 20, aplicada al número $\frac{1}{2^n}$ a las cadenas $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$, y a los puntos p y q, tenemos que existen dos cadenas tensas de abiertos $\mathcal{E} = \{E_0, ..., E_r\}$ y $\mathcal{F} = \{F_0, ..., F_r\}$ de P, que cubren a P y existe un patrón $\lambda : \langle r \rangle \to \langle m_n \rangle$ tales que $\mathcal{E}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{F}$ sigue el patrón λ en $\mathcal{C}_n$, $q \in E_0 \setminus cl(E_1)$, $p \in F_0 \setminus cl(F_1)$ y la amplitud de $\mathcal{E}$ es menor que $\frac{1}{2^{n+1}}$. Aplicamos otra vez la afirmación, pero ahora al número $\frac{1}{2^{n+1}}$, a las cadenas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{E}$, y a los puntos q y p. Con lo que obtenemos dos cadenas tensas $\mathcal{C}_{n+1} = \{C_0^{(n+1)}, ..., C_{m_{n+1}}^{(n+1)}\}$ y $\mathcal{D}_{n+1} = \{D_0^{(n+1)}, ..., D_{m_{n+1}}^{n+1}\}$ de abiertos de P, que cubren a P y existe un patrón $\delta : \langle m_{n+1} \rangle \to \langle r \rangle$ tales que $\mathcal{C}_{n+1}$ sigue el patrón δ en $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}_{n+1}$ sigue el patrón δ en $\mathcal{E}$, $p \in C_0^{(n+1)} \setminus cl(C_1^{(n+1)})$, $q \in D_0^{(n+1)} \setminus cl(D_1^{(n+1)})$ y la amplitud de $\mathcal{C}_{n+1}$ es menor que $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Como cada elemento de $\mathcal{D}_{n+1}$ está contenido en uno de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ tiene amplitud menor que $\frac{1}{2^{n+1}}$, tenemos que $\mathcal{D}_{n+1}$ tiene amplitud menor que $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Hacemos $\lambda_{n+1} : \langle m_{n+1} \rangle \to \langle m_n \rangle$ dada por $\lambda_{n+1} = \lambda \circ \delta$. Entonces λ_{n+1} es un patrón, $\mathcal{C}_{n+1}$ sigue el patrón λ_n en $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_{n+1}$ sigue el patrón λ_n en $\mathcal{D}_n$.

Esto termina la construcción inductiva.

Sea $h : P \to P$ el homeomorfismo cuya existencia se garantiza por el Lema 18. Ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, $p \in C_0^{(n)}$, tenemos que $h(p) \in cl(D_0^{(n)})$. Dado que para toda $n \in \mathbb{N}$, $q \in cl(D_0^{(n)})$, concluimos que la distancia de $h(p)$ a q es menor que $\frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $h(p) = q$.

Esto termina la prueba de que P es homogéneo.

□

Referencias

[1] A. Illanes Mejía, *Hiperespacios de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, Textos **28**, Nivel Medio, (2004).

[2] A. Illanes, P. Minc y F. Sturm, *Extending Surjections Defined on Reminders of Metric Compactifications of* $[0, \infty)$, Houston Journal of Mathematics, Volume 41, **4**, (2015), 1325-1340.

[3] J. Krasinkiewicz y P. Minc, *Mappings onto indecomposable continua*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, **25** (1977), 675-680.

[4] W. Lewis *Proyecto de Libro sobre el Seudoarco*

[5] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., (1992).