UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos Resultados Sobre Espacios de Grothendieck.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Jonathan Giovanni Gil Juárez.

TUTORA

Dra. Carmen Martínez Adame Isais.

Ciudad Universitaria, CDMX 2018.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del Alumno:
   Jonathan Giovanni Gil Juárez.
   No. Cta.308221433
   Tel. 11082822
   Universidad Nacional Autónoma de México.
   Facultad de Ciencias.
2. Datos del tutor.
   Doctora
   Martínez Adame
   Isais
   Carmen
3. Datos del sinodal 1.
   Doctora
   Jonard
   Pérez
   Natala
4. Datos del sinodal 2.
   Doctor
   Marcos Martínez
   Montejano
   Jorge Marcos
5. Datos del sinodal 3.
   M.en C.
   Ramos
   Martínez
   Pavel

6. Datos del sinodal 4.
   Doctor
   Torres
   Ayala
   Francisco Javier
7. Datos del trabajo escrito.
   Algunos Resultados Sobre Espacios de Grothendieck.
   96 páginas.
   2017

Agradeciemientos

Agradezco a mi familia. A Juana Juárez por ser mucho más que una buena madre. A mi papá Francisco Gil por esperar demasiado de mí. Agradezco a ambos por el apoyo durante la carrera. A mis hermanas y buenas amigas Coco, Adriana y Nancy por sus buenos comentarios.

Agradezco a mi asesora Carmen por haber confiado en mí, aceptar dirigir este trabajo con mucha amabilidad y por todo el tiempo que ocupó para revisar la tesis. También agradezco las oportunidades académicas que me brindó en los semestres 2017-1 y 2017-2.

Agradezco a los sinodales por aceptar revisar mi trabajo, especialmente a Pavel.

Agradezco al profesor César Guevara por darme la oportunidad de trabajar en su proyecto a pesar de no conocerme.

Y por supuesto, a Nancy Pineda *Because you are my medicine when you are close to me.*

También agradezco a los profesores que me han dado la oportunidad de ser ayudante en la Facultad de Ciencias, Carmen, Mucuy, Pavel y Noel.

A mis hermanos menores, Óscar, David y Denysse.
A mis sobrinos.
A la memoria de mi abuelo Francisco Juárez.
A mis amigos, conocidos, profesores y alumnos de la maravillosa Facultad de Ciencias.

Índice general

Introducción.

Dados un espacio topológico (X, τ) y una familia de funciones continuas $F = \{f_i : (X, \tau) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto de índices y $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, existe una única topología $\Im$ que hace continuas a las funciones de la familia F y es la mínima (respecto a la contención) con esta propiedad. Como consecuencia de esto, una sucesión $(x_n)_n$ converge en X respecto a la topología $\Im$ si y sólo si $(f_i(x_n))_n$ converge para todo $i \in I$.

Ahora bien, dado un espacio de Banach, la motivación para el estudio de la topología débil es la carencia de subconjuntos compactos. Sean X un espacio de Banach y X^* su dual topológico (todas la funciones definidas en X que toman valores en el campo y que además son lineales y continuas) y considérense las familias de funciones $F_1 = X^{**}$(el dual de X^*) y $F_2 = \{\overline{y}_x\}_{x \in X} \subseteq X^*$ donde $\overline{y}_x(z^*) = z^*(x)$, las cuales son lineales y continuas. Es posible considerar a las topologías débiles respecto a las familias F_1 y F_2, y estas son llamadas topología débil y débil* respectivamente. En general la topología débil es más fina que la topología débil*. Toda esta *histeria* por debilitar topologías es justificada en el capítulo 2, más precisamente con el teoremas de Banach-Alaoglu, el cual dice que los conjuntos $B_r(a) = \{x \in X : \|a - x\| \leq r, r > 0, a \in X\}$ son compactos respecto a la topología débil*, y el Eberlein-Smulian, el cual dice que un subconjunto de X es compacto relativo a la topología débil (es decir que su cerradura es compacto respecto a la topología débil) si y sólo si cada sucesión de dicho subconjunto tiene una subsucesión convergente respecto a la topología débil. Estas propiedades en general se pierden con la topología que induce una norma, por ejemplo, en X la bola unitaria ($\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$) no es compacta, de hecho, la bola unitaria es compacta si y sólo si X es de dimensión finita (Teorema 1.4.23 [10])

Naturalmente surge la pregunta ¿cuándo coinciden estas topologías?

Un espacio de Banach X es llamado de Grothendieck si cada sucesión en X^* que converge respecto a la topología débil* converge respecto a la topología débil.

En 1953 Grothendieck demostró en [5] que $C(K)$, el espacio de funciones continuas definidas en un espacio topológico compacto y de Hausdorff, que toman valores en el campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), cumple que toda sucesión que converge respecto a la topología débil también converge respecto a la topología débil*, donde K es totalmente disconexo (esta definición puede verse en [12]. En 1960 T. Ando, demostraron que si K es un espacio topológico compacto y de Haussdorf que satisface que cada conjunto $F_\sigma \subseteq K$ (que es unión numerable de conjuntos cerrados) que es abierto cumple que que su cerradura es un conjunto abierto, entonces $C(K)$ es de Grothendieck.

El objetivo de este trabajo es estudiar este tipo de espacios y en particular se demostrarán los resultados que dan respuesta a las preguntas ¿Cuándo es $C(K, X)$ un espacio de Grothendieck? ¿Qué condiciones deben satisfacer X y K, para que $C(K, X)$ sea un espacio de Grothendieck? (donde K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, X es un espacio de Banach y $C(K, X)$ es el espacio de Banach de funciones continuas definidas en K y que toman valores en X).

Se espera que el lector tenga las nociones básicas del análisis matemático y la topologia general. Este tipo de resultados pueden consultarse en [12] y [15]. También se busca que este trabajo esté lo más autocontenido posible. Para lograr este objetivo, este trabajo esta organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presentan los conceptos y teoremas fundamentales para el estudio de los espacios de Banach y serán la base del resto de los capítulos. Entre ellos se encuentran la definición de espacios de Banach, trasformaciones lineales entre estos espacios, teoremas de Hahn-Banach, Mapeo Abierto, Gráfica cerrada, Acotamiento Uniforme y el concepto de espacio reflexivo. También se han incluido algunos ejemplos de espacios de Banach y el cálculo de sus espacios duales.

En el capítulo 2 se presenta el concepto de convexidad para así poder introducir la definición de espacios localmente convexos. También se construyen las topologías débil y débil estrella, se demuestran algunos resultados de gran relevancia para este trabajo y se demuestra que un espacio dotado con cualquiera de estas topologías es localmente convexo.

En el tercer capítulo se estudian los operadores en espacios de Banach. Primero se construye el adjunto de un operador y en seguida se demuestran sus propiedades y teoremas centrales. Después, en este capítulo, se tratan los operadores débilmente compactos, sus propiedades y algunos resultados que relacionan el adjunto de un operador con los operadores debilmente compactos. Finalmente, después de dar la definición de espacio de Grothendieck, se concluye el capítulo con el teorema 3.25, que da una serie de equivalencias, en términos de operadores debilmente compactos, a la definición de espacio de Grothendieck.

El capítulo 4 desarrolla la teoría necesaria para demostrar el teorema de Khurana (teorema 4.31), el cual es el punto culminante de este trabajo ya que da condiciones suficientes y necesaria para que el espacio $C(K, X)$ sea de Grothendieck. Para este fin se introducen el producto tensorial de espacios de Banach y sus propiedades, y también se tratan algunos resultados respecto a medidas en espacios de Banach, como convergencia de estas funciones, y otros de gran importancia en la demostración del teorema de Khurana, como el teorema de representación para medidas vectoriales.

Capítulo 1

Espacios de Banach.

En este capítulo se introduce el concepto de espacio de Banach, sus propiedades y algunos ejemplos de estos espacios que son importantes para este trabajo. También se trata el espacio dual de un espacio de Banach, el cual tambien es de Banach, asi como algunas de sus propiedades. Finalmente se incluyen los teoremas centrales en el estudio de dichos espacios.

1.1. Definición y ejemplos de espacios de Banach.

Definición 1.1. *Una norma en un espacio vectorial* X *es un mapeo* $\| \, \| : X \longrightarrow [0, \infty)$ *que satisface:*

1. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $\lambda \in F$, $x \in X$.

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$.

En este caso se dice que $(X, \| \, \|)$ *es un espacio normado.*

Toda norma induce una métrica d dada por $d\,(x, y) = \|x - y\|$. En efecto, si $x \in X$ se tiene que

$$d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0,$$

esta última igualdad se tiene por la primera propiedad de la norma. Ahora, si $x, y \in X$ entones aplicando la segunda propiedad de la norma se tiene que

$$d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|x - y\| = \|(-1)(x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Finalmente si $x, y, z \in X$, entonces usando la tercera propiedad de la norma se tiene que

$$d(x,z) = \|x - z\| = \|x + (-y + y) - z\| =$$

$$\|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Esto permite dar la siguiente definición.

Definición 1.2. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si (X,d) es un espacio métrico completo donde d es la métrica inducida por la norma en X.*

En este trabajo se denotará como $C(K,X)$ al conjunto de funciones continuas definidas en un espacio topológico (K,τ) y que toman valores en un espacio normado $(X, \|\|)$. En el caso donde el espacio X sea $\mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto, éste espacio se denotará como $C(K)$.

Ejemplo 1.3. *$\mathbb{R}$ con el valor absoluto como norma y $\mathbb{C}$ con la norma*

$$\|(x,y)\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

son espacios de Banach.

Ejemplo 1.4. *$\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana definida para*

$$\xi = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

dada por:

$$\|\xi\| = \|\,(x_1, x_2, ..., x_n)\,\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es un espacio de Banach.

Para el siguiente ejemplo es necesario recordar el concepto de convergencia uniforme. Sea S un conjunto y (X,d) un espacio métrico. Una sucesión de funciones $f_k : S \longrightarrow X$ converge uniformemente en S a una función $f : S \longrightarrow X$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > k_0$ y para todo $x \in S$.

Ejemplo 1.5. $(C([0,1]), \| \|_\infty)$ *es un espacio de Banach donde* $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. *Se pueden verificar fácilmente las propiedades 1) y 2) de norma para* $\|f\|_\infty$. *Para verificar que se cumple 3), sean* $f_1, f_2 \in C([0,1])$ *y nótese que para cada* $t \in [0,1]$ *se tiene que*

$$|(f_1 + f_2)(t)| = |f_1(t) + f_2(t)| \leqslant |f_1(t)| + |f_2(t)|$$

Por la definición de la norma se tiene que

$$|f_1(t)| \leqslant \|f_1\|_\infty$$

y

$$|f_2(t)| \leqslant \|f_2\|_\infty,$$

por tanto la propiedad 3) es válida.
Falta ver que $C([0,1])$ *es completo. Para esto sea* $(f_n)_n$ *una sucesión de Cauchy en* $C([0,1])$, *esto es, una sucesión que cumple que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(f_m, f_k) < \varepsilon$ *si* $m, k \geq N$. *Sea* $\varepsilon > 0$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_m(t) - f_k(t)| \leq \|f_m - f_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $m, k > N$ *y* $t \in [0,1]$. *En particular* $(f_n(t))_n$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$ *para cada* $t \in [0,1]$ *y en consecuencia es convergente. Ahora, se puede definir para cada* $t \in [0,1]$ *la función* $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ *y se sigue que*

$$|f(t) - f_k(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(t) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

siempre que $n, m > N$. *Si* $m > N$

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup\{|f(t) - f_m(t)| : t \in [0,1]\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

entonces $(f_n)_n$ *converge uniformemente a* f. *Falta ver que f es continua en* $[0,1]$, *esto es,* $f \in C([0,1])$, *para ello se toma* f_n *con* $n > N$, *como* f_n *es continua en* $[0,1]$ *existe* $U_t \subseteq K$ *abierto que contiene a* t *tal que si* $s \in U_t$ *entonces*

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así, si $s \in U_t$ *entonces*

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| <$$
$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

así f *es continua en* $[0,1]$ *y por tanto* $C([0,1])$ *es de Banach.*

Ejemplo 1.6. *Haciendo una demostración análoga al ejemplo anterior se tiene que si K es un espacio topológico de Hausdorff y compacto, entonces $(C(K,X), \| \|_\infty)$, donde la norma está dada por $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in K\}$, es un espacio de Banach.*

1.2. Espacios vectoriales topológicos.

Para poder estudiar las propiedades básicas de los espacios de Banach es importante mostrar que la topología que induce la norma y la estructura vectorial se relacionan muy bien entre sí.

En este trabajo se considerará el producto de dos espacios normados $(X, \|\|_X)$ y $(Y, \|\|_Y)$, como otro espacio normado $(X\times Y, \|\|_{X\times Y})$, donde la norma está dada por

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y,$$

para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Teorema 1.7. *La suma y el producto en un espacio normado $(X, \|, \|)$ son mapeos continuos, esto es, las funciones*

$$\varphi : X \times X \longrightarrow X$$

$$\psi : F \times X \longrightarrow X$$

dadas por $\varphi(y,x) = y + x$ y $\psi(\lambda, x) = \lambda x$, son continuas.

Demostración. Si una función $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ entre espacios métricos cumple que para todo $x, y \in X$, $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda(d(x,y))$ con $\lambda > 0$ (condición de Lipschitz), entonces f es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, si $d(x,y) < \delta$ tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ se tiene que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. De este modo se obtienen las siguientes desigualdades:

1. $\|\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)\| = \|(x_1+y_1) - (x_2+y_2)\| = \|(x_1-x_2) + (y_1-y_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$

2. $\|\psi(\lambda,x) - \psi(\gamma,y)\| = \|\lambda x - \gamma y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \gamma y\| \leqslant \|\lambda x - \lambda y\| + \|\lambda y - \gamma y\| = |\lambda|\|x-y\| + |\lambda - \gamma|\|y\|$

para todo $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$ y $\lambda \in F$, que implican la continuidad de φ y ψ. □

Este resultado permite, de cierta manera, ver qué topologías son más convenientes que otras.

Definición 1.8. *Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial con una topología respecto a la cual las operaciones de suma y producto por escalar son continuas.*

Una observación inmediata es que cualquier espacio normado es un espacio vectorial topológico con la topología que induce la norma.

Proposición 1.9. *Sea X un espacio vectorial topológico donde $\{0\}$ es cerrado, entonces X es de Hausdorff.*

La demostración puede verse en [14].

Proposición 1.10. *En un espacio vectorial topológico X las funciones*

$$h_\lambda(x) = \lambda x \quad (\lambda \neq 0)$$

y

$$t_a(x) = a + x,$$

son homeomorfismos de X en X para cada $\lambda \in F$ y $a \in X$ fijos.

Demostración. Considérese la función

$$F : X \longrightarrow X \times X$$

dada por

$$x \longmapsto (a, x).$$

Sean π_1 y π_2 las proyecciones en la primera y segunda entrada respectivamente. Entonces $\pi_1 \circ F$ es la función constante a y $\pi_2 \circ F$ es la función identidad en X, así F es continua. Como la función suma φ es continua se tiene que $\varphi \circ F = t_a$ es continua. Análogamente, considerando la función

$$G : X \longrightarrow F \times X$$

dada por

$$x \longmapsto (\lambda, x)$$

y la función producto por escalar ψ se tiene que $\psi \circ G = h_\lambda$ es continua. Las funciones $h_{\frac{1}{\lambda}}$ y t_{-a} son continuas y son inversas de h_λ y t_a respectivamente, por tanto h_λ y t_a son homeomorfismos. $\square$

Proposición 1.11. *En un espacio vectorial topológico la función*

$$\gamma : (F \times X)^n \longrightarrow X$$

dada por

$$\gamma(\lambda_1, ..., \lambda_n, x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

es continua.

La demostración se deduce de la proposición anterior, haciendo un razonamiento análogo.

Teorema 1.12. *La cerradura de un subespacio vectorial Y de un espacio vectorial topológico (X, τ) es un subespacio vectorial de X.*

Demostración. Sean

$$\xi : X \times X \longrightarrow X$$

el mapeo dado por

$$\xi(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ fijos y Y un subespacio de X. Y es cerrado bajo las operaciones, así tenemos que $Y \times Y \subseteq \xi^{-1}(Y)$ y como $Y \subseteq \overline{Y}$ entonces $\xi^{-1}(Y) \subseteq \xi^{-1}(\overline{Y})$. Ahora como ξ es continuo $\xi^{-1}(\overline{Y})$ es cerrado. Entonces $\overline{Y} \times \overline{Y} = \overline{Y \times Y} \subseteq \overline{\xi^{-1}(Y)} \subseteq \xi^{-1}(\overline{Y})$, por tanto $\overline{Y}$ es cerrado bajo las operaciones suma y producto. □

Si X es un espacio vectorial y $Y \subseteq X$ es un subespacio vectorial se puede obtener de cierta forma un nuevo espacio vectorial. Si $x, z \in X$, se define la relación $x \sim z$ si y sólo si $x - z \in Y$. Es fácil verificar que en efecto $\sim$ es una relación de equivalencia.

Si $z - x \in Y$ entonces $z - x = y$ para algún $y \in Y$, entonces $z = x + y$, por tanto se denota a la clase de x por $[x] = x + Y$. El espacio de clases suele denotarse por $\frac{X}{Y}$. De manera natural se puede inducir una estructura de espacio vectorial definiendo las operaciones como $[x] + [y] = [x + y]$ y $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Es posible dotar a $\frac{X}{Y}$ de una norma al definir $\|x+Y\| = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$. Si $x \in \overline{Y} \setminus Y$ entonces $\|x + Y\| = 0$ y $[x] \neq [0]$, por tanto es necesario que Y sea un subespacio cerrado de X para que $\|x + Y\|$ sea una norma.

Ejemplo 1.13. *Sea X un espacio de Banach y Y un subespacio cerrado de X, entonces el espacio $\frac{X}{Y}$ es un espacio de Banach.*

Más aún, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.14. *Sea X un espacio vectorial normado, Y subespacio cerrado de X y*

$$\pi : X \longrightarrow \frac{X}{Y}$$

el mapeo dado por

$$\pi(x) = x + Y.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

1. *$\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$.*
2. *Si X es de Banach entonces $\frac{X}{Y}$ es de Banach.*
3. *Un subconjunto V de $\frac{X}{Y}$ es abierto si sólo si $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X.*
4. *π es un mapeo abierto (si U es abierto en X entonces $\pi(U)$ es abierto en $\frac{X}{Y}$).*

Demostración. 1) $\|\pi(x)\| = \|x+Y\| = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\} \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ pues $0 \in Y$.

2) Sea $(x_n+Y)_n$ una sucesión de Cauchy en $\frac{X}{Y}$, entonces $\|(x_k - x_m) + Y\| \longrightarrow 0$ si $n, m \longrightarrow 0$.

Es posible elegir $y_0 = 0$ y $y_2 \in Y$ tal que

$$\|(x_{n_1} - x_{n_2}) + y_2\| \leq \|(x_{n_1} - x_{n_2}) + Y\| + \frac{1}{2} < 2(\frac{1}{2}),$$

y_3 tal que

$$\|(x_{n_2} + y_2) - (x_{n_3} + y_3)\| \leq \|(x_{n_2} - x_{n_3}) + Y\| + (\frac{1}{2})^2 < 2(\frac{1}{2})^2.$$

Inductivamente se obtiene $(y_k)_n$ sucesión en Y tal que

$$\|(x_{n_k} - +y_k) - (x_{n_{k+1}} + y_{k+1})\| < 2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

donde $(x_{n_k})_k$ es subsucesión de $(x_n)_n$. Así $(x_{n_k} + y_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en X y por tanto converge a x_o en X. Como π es continua $\pi(x_{n_k}) = x_{n_k} + Y \longrightarrow \pi(x_0) = x_0 + Y$, de este modo se tiene una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente, por tanto es convergente, esto es, $(x_n+Y)_n$ converge a x_0+Y.

3) Si $V \in \frac{X}{Y}$ es abierto, la continuidad de π (puesto que es lineal y acotada) implica que $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X. Ahora suponiendo que $\pi^{-1}(V)$ es abierto sea $r > 0$ y $B_r(0) = \{x \in X : \|x\| < r\}$. Si $x \in B_r(0)$, por 1) $\|x+Y\| < r$, así $\pi(B_r(0)) \subseteq \{x+Y \in \frac{X}{Y} : \|x + Y\| < r\}$. Por otro lado si $\|x+Y\| < r$ se puede elegir $y \in Y$ tal que $\|x+y\| < r$, así se tiene que $x+Y = \pi(x+y) \in \pi(B_r(0))$, por tanto $\pi(B_r(0)) = \{x+Y : \|x+Y\| < r\}$. Sea $x_0+Y \in V$, $x_0 \in \pi^{-1}(V)$ y $\pi^{-1}(V)$ es abierto, como $V = \pi(\pi^{-1}(V)) \supseteq x_0 + B_r(0) \supseteq \{x+Y : \|x - x_0 + Y\|\}$, así V es abierto.

4) Sea $U \in X$ abierto, se puede notar que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U + Y = \{u + y : y \in Y, u \in U\}$$

como t_y es homeomorfismo de X en X, entonces $t_y(U) = y + U$ es abierto en X para cada $y \in Y$, así $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en X y por 3) $\pi(U)$ es abierto en $\frac{X}{Y}$.

□

Teorema 1.15. *Sea X un espacio de Banach y Y subespacio de X cerrado. Entonces para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $z \in X$ tal que $[z] = [x]$ y $\|z\| < \|[x]\| + \varepsilon$.*

La demostración puede verse en [10]

Ejemplo 1.16. *Sea Ω un conjunto, el espacio $B(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f$ es acotada$\}$ es un espacio de Banach con la norma dada por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$ y con las operaciones $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

1.3. Propiedades de espacios de Banach.

Definición 1.17. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Se dice que la sucesión es*

1. *Absolutamente sumable si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.*

2. *Sumable si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = x$ para algún $x \in X$.*

Teorema 1.18. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado, X es un espacio de Banach si y sólo si cada sucesión absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. $\Rightarrow$). Por hipótesis X es un espacio de Banach, sea $(x_n)_n$ una sucesión absolutamente sumable en X. Considérese la sucesión $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$, entonces si $n \geqslant m$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, entonces la sucesión $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ es de Cauchy, puesto que X es completo es convergente. En otras palabras $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ existe en X, así $(x_n)_n$ es sumable.

$\Leftarrow$). Ahora por hipótesis cada sucesión absolutamente sumable es sumable en X. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X, entonces

$\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ si $n, m \geqslant k$ y $k \longrightarrow \infty$. Sea $s_k = \sup\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}$. Esto permite elegir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n_1} \leqslant 1$, n_2 tal que $n_2 > n_1$ y $s_{n_2} \leqslant \frac{1}{2}$, $n_3 > n_2$ y $s_{n_3} \leq (\frac{1}{2})^2$, así inductivamente se obtiene una subsucesión $(x_{n_k})_{n_k}$ de $(x_n)_n$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ $s_{n_k} \leq (\frac{1}{2})^{k-1}$. Para cada k se tiene que

$$x_{n_k} = (\ x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + ... + (x_{n_2} - x_1) + x_1,$$

por construcción para cada k, $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq (\frac{1}{2})^{k-1}$, así

$$\|x_{n_k}\| = \|(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + ... + (x_{n_2} - x_{n_1}) + x_{n_1}\| \leq$$

$$\|x_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \|x_{n_i}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \leq \|x_{n_1}\| + 2.$$

Por tanto la sucesión $(x_{n_1}, x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}), x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}), ...)$ es absolutamente sumable, en consecuencia es sumable, esto es, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ existe en X y como $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces $(x_n)_n$ converge, así se concluye que X es de Banach. □

Ejemplo 1.19. *Para $1 \leq p < \infty$ se define el espacio vectorial $\ell_p = \{(x_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sum_n |x_n|^p < \infty\}$ con las operaciones definidas como $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ y $\lambda(x_n)_n = (\lambda x_n)_n$, donde $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son elementos de ℓ_p y λ es un número real. Este es un espacio de Banach con la norma $\|(x_n)_n\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Para comprobar esto es necesario recordar las desigualdades:

1. *Desigualdad de Young.* $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$ *con* $0 \leq \alpha \leq 1$, $a, b \geq 0$.

2. *Desigualdad de Hölder. Si* $(x_n)_n \in \ell_p$ *y* $(y_n) \in \ell_q$ *con* $p, q \geq 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces* $\sum_n |x_n y_n| \leq (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_n |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}$*.Esta última desigualdad dice que si* $(x_n)_n \in \ell_p$ *y* $(y_n) \in \ell_q$, *entonces* $(x_n y_n)_n \in \ell_1$.

3. *Desigualdad de Minkowski. Si* $(x_n)_n \in \ell_p$, $(y_n)_n \in \ell_q$ *con* $p \geq 1$, *entonces* $(\sum_n |x_n y_n|_p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_n |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Para ver que $\| \|_p$ es norma, las propiedades 1) y 2) de norma se verifican fácilmente, la propiedad 3) se deduce de la desigualdad de Minkowski que a su vez se deduce de las desigualdades de Hölder y Young.

Falta ver que ℓ_p es completo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en ℓ_p, donde cada x_n es a su vez una sucesión, $x_n = (x_m^n)$. Así dado

$\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 > N$ $\|x_{n_1} - x_{n_2}\|_p^p = \sum_m |x_m^{n_1} - x_m^{n_2}|^p \leq \varepsilon^p$. Entonces para cada m fijo (x_m^n) converge a un real $x_0 = x_m^0$, así para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=1}^{k} |x_m^0 - x_m^n|^p = \sum_{m=1}^{k} |\lim_{j\to\infty} x_m^j - x_m^n|^p = \lim_{j\to\infty} \sum_{m=1}^{k} |x_m^j - x_m^n|^p < \varepsilon^p$$

si $n \geq N$. Entonces $\|x_{n_0} - x_n\|_p^p < \varepsilon^p$ si $n \geq N$, por tanto $x_0 - x_n \in \ell_p$ si $n \geq N$, puesto que $x_n \in \ell p$, $x_0 = (x_0 - x_n) + x_n \in \ell_p$ por la estructura vectorial de ℓ_p. Por lo anterior si $n \geq N$, $\|x_0 - x_n\|_p < \varepsilon$, esto es, $x_n \longrightarrow x_0$ en ℓ_p. Se concluye que $(\ell_p, \| \|_p)$ es un espacio de Banach.

Observación 1.20. *$\ell_p \subseteq \ell_q$ si $1 \leq p \leq q < \infty$, además se cumple que $\|x\|_p \geqslant \|x\|_q$.*

Ejemplo 1.21. *Se denotará por c_o al espacio de sucesiones que convergen a 0 en $\mathbb{R}$, esto es, $c_o = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, el cual es un espacio vectorial con las operaciones definidas de manera análoga al espacio ℓ_p. Para cada $(x_n)_n \in c_0$ se define la norma $\|(x_n)_n\|_\infty \doteq \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ y se tiene que $(c_0, \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.22. *Ahora, considerando el conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ convergentes, denotado por $c = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = x, x \in \mathbb{R}\}$, que es un espacio vectorial con las operaciones definidas análogamente a las del espacio ℓ_p. Con la norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$, se tiene que $(c, \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Observación 1.23. *Es claro que $c_0 \subseteq c$ y que las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ son funciones acotadas definidas en $\mathbb{N}$ y que toman valores reales, esto es, $c \subseteq B(\mathbb{N})$.*

Ejemplo 1.24. *El espacio normado $B(\mathbb{N})$ se denota ℓ_∞. Este espacio también es un espacio de Banach y es un caso particular del ejemplo 1.2.2.*

Teorema 1.25. *El espacio normado $(\ell_\infty, \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \in \ell_\infty$ una sucesión de Cauchy. Nótese que cada x_n se puede escribir como una sucesión acotada, sea $x_n = (x_i^n)_i$ dicha sucesión. Como es de Cauchy $\|x_k - x_m\| = \sup\{|x_i^k - x_i^m| : i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow 0$ si $k, m \longrightarrow \infty$, así para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que $|x_i^k - x_i^m| \longrightarrow 0$, es decir que la sucesión es de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces tiene límite en $\mathbb{R}$. Sea x_i dicho límite, esto para cada $i \in \mathbb{N}$ y considérese la sucesión $(x_i)_i$, la cual claramente está acotada (por construcción). Falta ver que esta sucesión es el límite de $(x_n)_n$. Sea ε positivo, nótese que como $(x_n)_n$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i^k - x_i^m| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $m, k \geq N$ y como la sucesión $(x_i^n)_n$ converge a x_i para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $|x_i^k - x_i| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $k > N$. Entonces para cada i y $n > N$ se tiene que

$$|x_i^n - x_i| \leq |x_i^n - x_i^k| + |x_i^k - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

con $k > N$, así

$$\|(x_n) - (x_i)\| = \sup\{|x_i^n - x_i| : i \in \mathbb{N}\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

esto es, $(x_n)_n$ converge en ℓ_∞. □

A continuación se definirá un concepto muy importante en los espacios de Banach, este dará información sobre la estructura de ciertos espacios.

Definición 1.26. *Un espacio normado se llama separable si tiene un subconjunto denso y numerable.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, con la topología determinada por la norma euclidiana, son separables, y los subconjuntos densos son $E = \mathbb{Q}^n$ y $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ respectivamente. $(C\,[0,1]\,, \|\ \|_\infty)$ es separable considerando polinomios con coeficientes racionales y ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es separable considerando $D = \{(x_n) \in \ell_p : x_n \,\text{es racional}, x_n = 0 \,\text{para casi toda}\ n \in \mathbb{N}\}$. También c y c_0 con la norma $\|\ \|_\infty$ son separables, donde el subconjunto denso es el mismo que el del espacio ℓ_p.

Proposición 1.27. $(\ell_\infty, \|\ \|_\infty)$ *no es separable.*

Demostración. Si $(x_n)_n$ es numerable en ℓ_∞, cada x_n se puede escribir como $x_n = (x_m^n)_m$. Sea $y = (y_n)_n \in \ell_\infty$ dada por

$$y_n = \begin{cases} x_n^n + 1 \text{ si } |x_n^n| \leq 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

entonces la k-ésima entrada de $y - x_k$ es $y_k - x_k^k$ y $|y_k - x_k^k| \geq 1$, así $\|y - x_k\| \geq 1$, entonces $(x_n)_n$ no puede ser denso y por tanto ℓ_∞ no es separable. □

1.4. Operadores lineales en espacios normados.

Definición 1.28. *Sean X y Y espacios normados. Una función*

$$T : X \longrightarrow Y$$

es un operador lineal si satisface las condiciones siguientes:

1. *$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ para cada $x_1, x_2 \in X$.*

2. *$T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para cada $\lambda \in F$ y $x \in X$.*

Además se dice que T es un operador lineal acotado si existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.29. *Sean X y Y espacios normados y*

$$T : X \longrightarrow Y$$

un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *T es acotado.*

2. *T es uniformemente continuo.*

3. *T es continuo.*

4. *T es continuo en 0.*

Demostración. Las implicaciones 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\rightarrow$ 4) se verifican fácilmente. Falta ver que 4) $\Rightarrow$ 1). Si T es continuo en 0, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| = \|x - 0\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| < 1$. Sea $x \in X$ distinto de cero, $(\frac{\delta}{2\|x\|}x) \in X$ satisface que $\|(\frac{\delta}{2\|x\|})x\| < \delta$ y entonces $\|T((\frac{\delta}{2\|x\|})x)\| < 1$. Así $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$ y es claro que $0 = \|T(0)\| \leq \|0\|$, como x es arbitrario se sigue que T es acotado. $\square$

Definición 1.30. *Se define $B(X, Y)$ como el conjunto de operadores lineales acotados entre X y Y, el cual es un espacio vectorial normado y la norma está dada por*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

$B(X, X)$ será denotado por $B(X)$.

A partir de las propiedades de la norma en Y, se puede verificar que, en efecto,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

es una norma.

Proposición 1.31. *Sea $T \in B(X,Y)$. Entonces*

$$\|T\| =$$

$$\sup_{x\in X}\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \text{ínf}\{K > 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \, \forall x \in X\} =$$

$$\sup\left\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\right\}.$$

Demostración. Para demostrar la igualdad

$$\sup_{x\in X}\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \text{ínf}\{K > 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \, \forall x \in X\}$$

sean

$$L = \sup_{x\in X}\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

y

$$M = \text{ínf}\{K > 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \, \forall x \in X\}.$$

Sea $x \in X$ distinto de cero. Entonces $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq L$, entonces $\|T(x)\| \leq L\|x\|$, esto implica que $L \in \{K > 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \, \forall x \in X\}$, por tanto $L \geq M$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $M + \frac{1}{n} \in \{K > 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \, \forall x \in X\}$ por la propiedad del ínfimo, entonces para todo $x \in X$ distinto de cero se cumple que $\|T(x)\| \leq (M + \frac{1}{n})\|x\|$ y haciendo tender n a infinito se obtiene la desigualdad $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ y en consecuencia $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M$, por tanto $L \leq M$. Finalmente $L = M$.

Las otras desigualdades son sencillas de demostrar.

□

Proposición 1.32. *$B(X,Y)$ es un espacio de Banach si Y es de Banach.*

Demostración. Supongase que Y es un espacio de Banach. Sea $(T_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$ y $x \in X$, entonces se tiene que

$$\|T_m(x) - T_k(x)\| = \|(T_m - T_k)(x)\| \leq \|T_m - T_k\|\|x\|$$

si $k, m \in \mathbb{N}$. De aquí se puede decir que $(T_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en Y y por tanto convergente. Sea

$$T : X \longrightarrow Y$$

dado mediante la fórmula

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Se sigue de la continuidad de las operaciones de Y que T es lineal. Dado que $(T_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, existe $M \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para cada n, así que $\|T_n(x)\| \leq M$ para cada x tal que $\|x\| \leq 1$. Ahora si $n \longrightarrow \infty$ se tiene que $\|T(x)\| \leq M$ si $\|x\| \leq 1$, por tanto T es acotado. Sea δ positivo, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ y $\|x\| \leq 1$ se tiene que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| < \delta$, cuando $m \longrightarrow \infty$ sucede que $\|T_n(x) - T(x)\| < \delta$. Así se tiene que $\|T_n - T\| < \delta$ si $n > N$, por tanto $T_n \longrightarrow T$. □

Proposición 1.33. *Sean X, Y y Z espacios normados, $T \in B(X, Y)$ y $S \in B(Y, Z)$, entonces $ST \in B(X, Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Demostración. Se sigue de la desigualdad

$$\|ST(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

para todo $x \in X$.

□

Teorema 1.34. *Sea X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Si $X_1 \subseteq X$ es un subespacio vectorial denso y*

$$T_1 : X_1 \longrightarrow Y$$

es un operador lineal acotado, entonces T_1 tiene una única extensión continua

$$T : X \longrightarrow Y.$$

Demostración. Sea $x_0 \in X$, como $\overline{X_1} = X$, existe $(x_n)_n \subseteq X_1$ tal que $\|x_0 - x_n\| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$. Ahora se considera la sucesión $(T_1(x_n)) \subseteq Y$, como T_1 es acotado, existe $M > 0$ tal que $\|T_1(x)\| \leq M\|x\|$ para cada $x \in X_1$, entonces

$$\|T_1(x_n) - T_1(x_m)\| = \|T_1((x_n - (x_m)\| \leq M\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$$

sí $m, n \longrightarrow \infty$, así $(T_1(x_n))$ es de Cauchy en Y y por tanto convergente. Sea y_0 el límite de $(T_1(x_n))$, definiendo $T(x_0) = y_o$, se extiende T_1 a todo X. Si (y_n) es una sucesión en X_1 tal que $y_n \longrightarrow x_0$ entonces

$$\|x_n - y_n\| = \|x_n - x_0 + x_0 - y_n\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow 0$, así

$$\|(T_1(x_n) - (T_1(y_n)\| = \|T_1(x_n - y_n)\| \leq M\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0,$$

como $T_1(x_n) \longrightarrow y_0$ entonces

$$\|y_0 - T_1(y_n)\| = \|y_0 - T_1(x_n) + T_1(x_n) - T_1(y_n)\| \leq$$

$$\|y_0 - T_1(x_n)\| + \|T_1(x_n) - T_1(y_n)\| \longrightarrow 0,$$

esto es, $T_1(y_n) \longrightarrow y_0$, por lo tanto el valor de $T(x_0)$ no depende de la sucesión que se tome. Por la construcción de T se sigue que es única.

Sean $x_n \longrightarrow x_0$ y $y_n \longrightarrow y_0$ sucesiones en X, entonces $x_n + y_n \longrightarrow x_0 + y_0$ (dado que $+$ es continua), así

$$T_1(x_0 + y_0) = \lim_{n\to\infty} T_1(x_n + y_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_1(x_n) + T_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} T_1(x_n) + \lim_{n\to\infty} T_1(y_n)$$

$$= T(x_0) + T(y_0),$$

análogamente se verifica que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Por tanto T es un operador lineal.

Sea $(x_n) \in X_1$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ en X. Por la continuidad de $\|,\|$ se tiene que:

$$\|T(x_0)\| = \|\lim_{n\to\infty} T_1(x_n)\| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_1(x_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_1\|\|x_n\| = \|T_1\|\|x_0\|$$

como x_0 es arbitrario se sigue que T es acotado. □

1.5. Espacios duales.

Definición 1.35. *Sea X un espacio normado, se define el espacio dual topológico o simplemente el dual de X como $B(X, \mathbb{R})$ denotado como X^*. A los elementos de este espacio se les llama funcionales lineales.*

Proposición 1.36. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces se tiene que $(X \times Y)^*$ es isomorfo a $X^* \times Y^*$.*

Demostración. Defínase la función

$$T : X^* \times Y^* \longrightarrow (X \times Y)^*$$

dada por

$$T(x^*, y^*) = x^* \times y^*$$

para todo $x^* \in X^*$ y $y^* \in Y^*$, donde

$$(x^* \times y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y)$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. La cual es claramente lineal.

Es claro que $\ker(T) = 0$. Ahora, si $z^* \in (X \times Y)^*$ entonces $z^* \mid_X$ y $z^* \mid_Y$ son elementos de X^* y Y^*, respectivamente. Así se tiene que $T(z^* \mid_X, z^* \mid_Y)(x, y) = z^* \mid_X (x, 0) + z^* \mid_Y (y, 0) = z^*(x, y)$ y así T es suprayectiva. $\square$

Definición 1.37. *Sean X y Y espacios normados. Una función*

$$T : X \longrightarrow Y$$

es una isometría si para todo $x \in X$ se tiene que $\|x\| = \|T(x)\|$.

Observación 1.38. *Como $\mathbb{R}$ con la norma dada por el valor absoluto es completo entonces X^* es completo.*

Observación 1.39. *Como X^* es un espacio normado tiene sentido considerar el dual de este espacio, es decir $(X^*)^*$. A este espacio se le llama bidual de X y se denota por X^{**}. La norma en este espacio se define a través de*

$$\|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{f \in x^*} \{|\xi(f)| : \|f\| \leq 1\,, \xi \in X^{**}\}.$$

Definición 1.40. *Sea X un espacio normado. Se define la inyección canónica como la función*

$$j : X \longrightarrow X^{**}$$

dada por $j(x) = \overline{x}$ donde $\overline{x}(y^*) = y^*(x)$ para todo $y^* \in X^*$, la cual claramente es un operador lineal.

Ejemplo 1.41. $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.42. *$c_0^* = \ell_1$. Sea x^* un funcional lineal definido en c_0. Si $x \in c_0$ entonces x tiene la forma $x = (x_n)_n$, con $x_n \longrightarrow 0$ y $x = \sum_n x_n e_n$ donde e_n es el vector cuya única entrada distinta de cero es la n-ésima y esta es igual a 1. Por la continuidad de x^* se tiene*

$$x^*(x) = x^*\left(\sum_n x_n e_n\right) = \sum_n x_n x^*(e_n)$$

Ahora sea $x^*(e_n) = x_n^*$, así se tiene que

$$x^*((x_n)_n) = \sum_n x_n x_n^*$$

y esta serie converge. Sea $N \in \mathbb{N}$, se define

$$x(N) = \begin{cases} \frac{|x_n^*|}{x_n^*} & \text{si } |x_n^*| \neq 0 \; y \; n \geq N \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción $x(N) \doteq (x(N))_n \in c_0$ y claramente $\|(x(N))_n\| = 1$, por tanto $|x^*(x(N))| \leq \|x^*\|\|x(N)\| \leq \|x^*\|$. Por otro lado $|x^*(x(N))| =$

$$\left|x^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} x(N)_k e_k\right)\right| = \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{N} x(N)_k e_k\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} x^*(x(N)_k e_k)\right| =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(N)_k x^*(e_k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} x(N)_k x_k^*\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} |x_k^*|\right| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^*|.$$

Combinando las desigualdades anteriores se deduce que

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^*| \leq \|x^*\|,$$

para N arbitrario, así $(x_k^*)_k \in \ell_1$ y $\|(x_k^*)_k\| = \|x^*\|$.

Por otro lado, cada elemento de ℓ_1 puede ser representado de ésta forma. Dada $(x_n^*)_n \in \ell_1$ arbitraria y $(x_n)_n \in c_0$ se tiene que

$$\sum_k |x_k^* x_k| \leq (\sup\{|x_k : k \in \mathbb{N}\}) \left(\sum_n |x_k^*|\right) = \|(x_k)_k\|\|(x_k^*)_k\|$$

entonces a cada $(x_n^*)_n \in \ell_1$ le corresponde un funcional lineal continuo vía la fórmula $x^*((x_k)_k) = \sum_k x_k^* x_k$. En otras palabras el mapeo entre $(c_0)^*$ y ℓ_1 dado por $(x_n^*)_n \longmapsto x^*$ es lineal, acotado y es una isometría (como es isometría, es inyectivo).

Ejemplo 1.43. *De manera similar se puede probar que* $c^* = \ell_1$

Cabe mencionar que aunque c_0 y c tienen como dual a(ℓ_1), no son isométricamente equivalentes, este resultado puede verse en [10].

Ejemplo 1.44. $(\ell_p)^* = \ell_q$ *donde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dado $x^* \in (\ell_p)^*$ *se le asociará un elemento* $(x_n^*)_n \in \ell_q$ *con la fórmula* $x^*(x) = \sum_n x_n x_n^*$ *que resultará un isomorfismo isométrico, donde* $x = (x_n)_n \in \ell_p$.

Nótese que si $x = (x_n)_n \in \ell_p$ *entonces*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow \infty$. *Se sigue que* $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, *así dado* $x^* \in (\ell_p)^*$ *por su continuidad y linealidad se tiene que*

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x^*(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k^*.$$

Se define la función signo para funciones que toman valores reales como

$$\mathrm{sgn}(g(x)) = \begin{cases} 1 \text{ si } g(x) \geq 0 \\ -1 \text{ si } g(x) < 0 \end{cases}$$

Y cumple que $g(x)\mathrm{sgn}(g(x)) = |g(x)|$. *Ahora fijando* $N \in \mathbb{N}$ *y considerando el vector* $x = (x_n)_n$ *dado por*

$$x_n = \begin{cases} |x_n^*|^{q-1}\mathrm{sgn}(x_n^*) \text{ si } 1 \leq n \leq N \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

se cumple que $x_n x_n^* = |x_n^*|^{q-1}\mathrm{sgn}(x_n^*)x_n^* = |x_n^*|^{q-1}|x_n^*| = |x_n^*|^q = |x_n|^p$, *pues* $p(q-1) = q$ *(se sigue de la relación* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*). Entonces*

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_n |x_n^*|^q) \right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$x^*(x) = x^* \left(\sum_n x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{N} x_n x_n^* = \sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q.$$

Por tanto $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|_p$ *y se obtiene*

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q \leq \|x^*\| (\sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces

$$\|x^*\| \geq \frac{\sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q}{\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^*|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como N es arbitrario $\|x^*\| \geq (\sum_{n=1} |x_n^*|^q)^{\frac{1}{q}}$, es decir $(x_n^*)_n \in \ell_q$ y $\|(x_n^*)_n\|_q \leq \|x^*\|$.

Por otro lado sea $(x_n^*)_n \in \ell_q$, entonces definimos $x^* \in (\ell_p)^*$ por $x^*((x_n)) = \sum_n x_n x_n^*$ para cada $(x_n)_n \in \ell_p$. Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$|x^*(x)| \leq \left(\sum_n |x_n^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n^*)_n\|_q \|(x_n)_n\|_p,$$

entonces $\|x^*\| \leq \|(x_n^*)_n\|_q$.

Así se tiene $\|x^*\| = \|(x_n^*)_n\|_q$. Dado que es isometría, es inyectiva, entonces se tiene un isomorfismo isométrico.

Ejemplo 1.45. *$\ell_1^* = \ell_\infty$ El mapeo dado por $u(x) = \sum_n x_n u_n$ con $u \in \ell_1^*$ y $(u_n)_n \in \ell_\infty$ donde $u_n = u(e_n)$, es un isomorfismo isométrico entre ℓ_1^* y ℓ_∞. Sea $x = (x_n)_n \in \ell_1$, se tiene que*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\| = \|(0, 0, ..., x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\| \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow \infty$, así $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Sea $u \in \ell_1^*$, usando la linealidad y continuidad se tiene que $u(x) = \sum_n x_n u(e_n) = \sum_n x_n u_n$. El mapeo $u \longrightarrow (u_n)_n$ es claramente lineal. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, entonces

$$\begin{aligned} |u_n| = \frac{|u_n|}{u_n} u_n = \frac{|u_n|}{u_n} u(e_n) = \\ u\left(\frac{|u_n|}{u_n} e_n\right) = \left|u\left(\frac{|u_n|}{u_n} e_n\right)\right| \leq \|u\| \left\|\frac{|u_n|}{u_n} e_n\right\| \\ \leq \|u\|. \end{aligned}$$

Como n es arbitrario

$$\|(u_n)_n\| = \sup\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|u\|,$$

entonces $(u_n)_n \in \ell_\infty$ y es continuo. Si $(u_n)_n$ es la sucesión cero, entonces $u_n = 0$ para cada n, así u es la función cero, por tanto la asociación es uno a uno. Finalmente nótese que

$$|u(x)| = \left|\sum_n x_n u_n\right| \leq \sum_n |x_n u_n| \leq \sup\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\} \left(\sum_n |x_n|\right) =$$

$$\|(x_n)_n\|\|u\|.$$

por tanto u es una isometría.

1.6. Algunos teoremas fundamentales y sus implicaciones.

En esta sección se enuncian sin demostración algunos de los teoremas fundamentales en la teoría de los espacios de Banach y sus implicaciones. Las demostraciones puede verse en [11],[14],[10] y [2]

Teorema 1.46 (Hahn-Banach)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y S un subespacio de X. Sea*

$$p : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface lo siguiente:

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
2. $p(\lambda x) \leq \lambda p(x)$. *Para todo $\lambda > 0$ y $x, y \in X$.*

Si

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

es un funcional lineal que satisface $f(s) \leq p(s)$ para todo $s \in S$. Entonces existe un funcional lineal

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que extiende a f, es decir $F(s) = f(s)$ para toda $s \in S$, además $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Corolario 1.47. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado y Y subespacio vectorial de X. Si $y^* \in Y^*$, entonces y^* se puede extender a $x^* \in X^*$ y $\|y^*\| = \|x^*\|$.*

Demostración. Se define $p(x) = \|y^*\|\|x\|$. p satisface las hipótesis del teorema de Hahn-Banach y $y^*(y) \leq |y^*(y)| \leq \|y^*\|\|x\| = p(x)$ para cada $y \in Y$. Entonces existe $x^* \in X^*$ que extiende a y^* y $x^*(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$, esto es, $|x^*(x)| \leq \|y^*\|\|x\|$, así $\frac{|x^*|}{\|x\|} \leq \|y^*\|$ para cada $o \neq x \in X$, por tanto $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Como x^* extiende a y^*, $\|y^*\| \leq \|x^*\|$, así $\|x^*\| = \|y^*\|$. $\square$

Corolario 1.48. *Sea X un espacio normado y Y subespacio vectorial de X. Si $x \in X$ es tal que $d = \text{ínf}\{\|x-y\| : y \in Y\} > 0$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que, $x^*(x) = 1$, $\|x^*\| = \frac{1}{d}$ y $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$,*

Demostración. Sea $Z = \langle Y, \{x\}\rangle = \{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i) + \lambda_{n+1}x : \lambda_i \in \mathbb{R},\ y_i \in Y\}$, el cual es subespacio vectorial de X. Se puede ver que cada $z \in Z$ se puede escribir de manera única como $z = y + \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$. Definiendo $z^*(y + \lambda x) = \lambda$ se tiene que z^* es lineal, $z^*(x) = 1$ y $z^*(y) = 0$.

Falta ver que z^* es continuo:

$$\frac{|z^*(y+\lambda x)|}{\|y+\lambda x\|} =$$

$$\frac{|\lambda|}{\|y+\lambda x\|} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|\|\frac{y}{\lambda}+x\|} = \frac{1}{\|\frac{y}{\lambda}+x\|} = \frac{1}{\|x-(-\frac{y}{\lambda})\|} \leq \frac{1}{d}$$

Por tanto $\|z^*\| \leq \frac{1}{d}$.

Para concluir, si $(y_n)_n \subseteq Y$ y es tal que $\|x - y_n\| \longrightarrow d$ si $n \longrightarrow \infty$, entonces $1 = |z^*(x-y_n)| \leq \|z^*\|\|x-y_n\|$, pero si $\|x-y_n\| \longrightarrow d$ se tiene que $1 \leq \|z^*\|d$, así $\frac{1}{d} \leq \|z^*\| \leq \frac{1}{d}$, por lo cual $\|z^*\| = \frac{1}{d}$. Aplicando el corolario 1.6.2 existe una extensión $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \frac{1}{d}$, $x^*(y) = z^*(y) = 0$ para cada $y \in Y$ y $x^*(x) = z^*(x) = 1$. □

Corolario 1.49. *Sea X un espacio normado y $0 \neq x \in X$. Entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$.*

Observación 1.50. *Si $x^* \in X^*$, entonces $\ker(x^*) = (x^*)^{-1}(0)$ es cerrado.*

Corolario 1.51. *Sea X un espacio normado y Y subespacio de X. Entonces la cerradura de Y, se escribe como*

$$\overline{Y} = \cap\{\ker(x^*) \mid x^* \in X^*,\ Y \subseteq \ker(x^*)\}$$

.

Demostración. Si $Y \subseteq \ker(x^*)$, entonces $\overline{Y} \subseteq \overline{\ker(x^*)} = \ker(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$, así $\overline{Y} \subseteq \cap\{\ker(x^*) \mid x^* \in X^*,\ Y \subseteq \ker(x^*)\}$.

Por otro lado si x no está en $\overline{Y}$, entonces $\text{ínf}\{\|x-y\| : y \in Y\} > 0$, por el corolario 1.46 , existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = 1$, $x^*(y) = 0$ para cada $y \in Y$, así x no está en $\cap\{\ker(x^*) \mid x^* \in X^*,\ Y \subseteq \ker(x^*)\}$, por tanto $\cap\{\ker(x^*) \mid x^* \in X^*,\ Y \subseteq \ker(x^*)\} \subseteq \overline{Y}$. □

Corolario 1.52. *Sea X espacio normado y Y subespacio vectorial de X. Entonces Y es denso en X si, y sólo si, el único elemento de X^* que anula a Y es $x_0^* = 0$.*

Demostración. Si el único funcional que anula a Y es x_0, entonces $\{x^* \in X^* : Y \subseteq \ker(x^*)\} = \{x_o\}$, por tanto $\overline{Y} = \cap\{\ker(x^*) \mid x^* \in X^*, Y \subseteq \ker(x^*)\} = \ker(x_0) = X$, así Y es denso en X.

Ahora si Y es denso, $\overline{Y} = X$. Sea $x^* \in X^*$, si x^* anula a Y, entonces $X = \overline{Y} \subseteq \ker(x^*) \subseteq X$, entonces $\ker(x^*) = X$, así $x^* = 0$. □

Corolario 1.53. *Sea X un espacio normado y $x \in X$. Entonces $\|x\| = \sup_{x^* \in X^*}\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\}$.*

Demostración. Se tiene que $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\|$, entonces

$$\sup_{x^* \in X^*} \{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\} \leq \|x\|,$$

por el corolario 1.47 , se tiene que existe $x^* \in x^*$ tal que $x^*(x) = \|x\|$, por lo tanto se da la igualdad. □

Observación 1.54. *Sea X un espacio normado y*

$$j : X \longrightarrow X^{**}$$

la inyección canónica, entonces j es una isometría sobre su imagen pues

$$\|j(x)\| = \sup\{|j(x)(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\} =$$
$$\sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leq 1\} = \|x\|.$$

También se deduce que j es acotada.

Corolario 1.55. *Sea X un espacio normado y X^* el dual de X. Si X^* es separable entonces X lo es.*

Demostración. Sea $(x_n^*)_n$ una sucesión densa en $U_{X^*} = \{x^* \in x^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Se elige $(x_n) \subseteq X$ tal que x_n es de norma uno para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que $|x^*| \geq \xi$ con $\xi > 1$. Sea $Z =< x_1, x_2, ..., x_k, ... >$ subespacio vectorial de X. Si $Z \neq X$ por el corolario 1.46 existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = 0$ para cada $x \in Z$, entonces se tiene que $x^*(x_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\xi < |x_n^*(x_n)| = |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| \leq \|x_n^* - x^*\|\|x_n\| = \|x_n^* - x^*\|,$$

así $(x_n^*)_n$ no puede ser denso en U_{X^*}, pues existe algún elemento de U_{X^*} que está a una distancia fija de T_n. Entonces solo queda el caso

$Z = X$, tomando todas la combinaciones lineales de elementos de $(x_n)_n$ con coeficientes racionales, se tiene que cualquier elemento de X es límite de una sucesión formada por estas combinaciones, por tanto este es el conjunto es denso numerable buscado. □

Observación 1.56. *El recíproco del corolario anterior en general es falso, esto es, si X es separable, X^* puede no serlo. Por ejemplo, como se demostró anteriormente $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ y ℓ_1 es separable mientras que ℓ_∞ no lo es.*

Teorema 1.57 (Banach-Steinhaus)**.** *Sean X y Y dos espacios de Banach y sea $\{T_i : i \in I\}$ una familia de operadores lineales continuos de X en Y. Si $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < \infty$ para todo $x \in X$, entonces $\sup\{\|T_i\| : i \in I\} < \infty$, esto es, existe una constante C tal que $\|T_i(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $i \in I$.*

Teorema 1.58 (Mapeo abierto)**.** *Sean X y Y espacios de Banach y T un operador lineal continuo de X en Y. Entonces T mapea conjuntos abiertos de X en conjuntos abiertos de Y.*

Corolario 1.59. *Sean X y Y espacios de Banach y T un operador lineal continuo biyectivo de X en Y. Entonces T^{-1} es continuo.*

Corolario 1.60. *Sea X un espacio con $\| \|_1$ y $\| \|_2$ dos normas definidas en X que lo hacen un espacio de Banach y que generan la misma topología, entonces las normas son equivalentes, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2$ y $\|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Tomando la función identidad

$$\imath : (X, \|\|_1) \longrightarrow (X, \|\|_2),$$

la cual es lineal, biyectiva y continua, entonces existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, para todo $x \in X$. La otra desigualdad se obtiene de manera análoga. □

Observación 1.61. *Ahora si se considera*

$$\imath : (X, \|\|_2) \longrightarrow (X, \|\|_1)$$

se obtiene k tal que $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$, para todo $x \in X$. Entonces existe una única estructura de espacio de Banach para X.

Teorema 1.62 (Gráfica cerrada)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Si*

$$T : X \longrightarrow Y$$

es un operador lineal suprayectivo tal que su gráfica $Gf(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\}$ *es cerrado en* $X \otimes Y$ *con la norma de la suma, entonces* T *es continuo. En otras palabras, si* $x_n \longrightarrow x$ *y* $y_n \longrightarrow y$ *con* $y_n = T(x_n)$*, entonces* $T(x) = y$*, implica que* T *es continuo.*

Observación 1.63. *El recíproco es obviamente cierto pues la gráfica de cada mapeo continuo es un conjunto cerrado.*

Teorema 1.64. *Sea* X *un espacio normado y* X_1 *un subespacio vectorial de* X*. Sea*

$$t : X_1 \longrightarrow \ell_\infty$$

un operador lineal continuo, entonces t *tiene una extensión lineal continua*

$$T : X \longrightarrow \ell_\infty$$

tal que $\|t\| = \|T\|$*.*

Demostración. Si $x_1 \in X_1$, $t(x_1) = (t_n(x_1)) \in \ell_\infty$ (sea $t_n(x_1) = t(x)_n$ la n-ésima entrada de $t(x_1)$, para cada $x_1 \in X$), entonces

$$|t_n(x_1)| = |t(x)_n| \leq \sup\{|t(x)_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|t(x_1)\| \leq \|t\|\|x_1\|.$$

Sea $p(x) = \|t\|\|x\|$, claramente satisface las hipótesis de teorema de Hahn-Banach, entonces t_n se puede extender a una función lineal definida en todo X denotada por T_n. Se satisface $\|T_n\| \leq \|t\|\|x\|$ para todo $x \in X$. Ahora como t_n es lineal entonces el mapeo $T : X \longrightarrow \ell_\infty$ dado por $T(x) = (T_n(x)) = (T(x))_n$ es lineal. De la condición $\|T_n\| \leq \|t\|\|x\|$ se tiene que $(T(x))_n \in \ell_\infty$ es una sucesión acotada y T es continuo. $\square$

Definición 1.65. *Sea* X *un espacio normado y sean* A *y* B *subconjuntos de* X *y* X^* *respectivamente. Se define:*

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0, \forall x \in A\}$$

$$^\perp B = \{x \in X : x^*(x) = 0, \forall x^* \in B\}$$

que son llamados el anulador y preanulador de A *y* B *respectivamente.*

Proposición 1.66. *Sea* X *un espacio normado y sean* A *y* B *subconjuntos de* X *y* X^* *respectivamente. Entonces:*

1. $A^\perp$ *y* $^\perp B$ *son subespacios cerrados de* X^* *y* X *respectivamente.*
2. $^\perp(A^\perp) = \overline{< A >}$

3. $^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{A}$, *si* A *es subespacio de* X.

Demostración. Puesto que $^{\perp}B = \cap\{ker(x^*) : x^* \in B\}$ se tiene que $^{\perp}B$ es subespacio cerrado de X. Claramente $0 \in A^{\perp}$, si α y β son escalares y $x^*, y^* \in A^{\perp}$ entonces $\alpha x^* + \beta y^* \in A^{\perp}$, así $A^{\perp}$ es subespacio de X^*. Si $(z_n^*)_n$ es una sucesión en $A^{\perp}$ tal que $z_n^* \longrightarrow z^*$ con $z^* \in X^*$ se tiene que $|z^*(a)| = |z_n^*(a) - z^*(a)| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow 0$ para cada $a \in A$, entonces $z^* \in A^{\perp}$, por tanto $A^{\perp}$ es subespacio cerrado de X^*. Esto prueba 1).

Para ver que se cumple 2) primero notese que $^{\perp}(A^{\perp})$ es un subespacio cerrado de X que contiene a A por ende $\overline{< A >} \subseteq {}^{\perp}(A^{\perp})$. Ahora suponemos que $x_0 \in X \setminus \overline{< A >}$, por el corolario 1.48 existe $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*(x_0) \neq 0$ y $\overline{< A >} \subseteq ker(x_0^*)(x_0)$, se sigu que x_0 no está en $^{\perp}(A^{\perp})$. Asi se tiene que 2) es cierto. 3) se sigue inmediatamente de 2).

□

Teorema 1.67. *Sea* Y *un subespacio de un espacio normado* X. *Entonces existe un isomorfismo isométrico*

$$T : \frac{X^*}{Y^{\perp}} \longrightarrow Y^*$$

dado por $T(x^* + Y^{\perp}) = x^* \mid_Y$.

Demostración. Si $x_1^*, x_2^* \in X^*$ entonces $x_2^* + Y^{\perp} = x_1^* + Y^{\perp}$, si sólo si $x_2^* - x_1^* \in Y^{\perp}$, si y sólo si $(x_2^* - x_1^*)(y) = 0$ para cada $y \in Y$, si y sólo si $x_2^* \mid_Y = x_1^* \mid_Y$. Es decir que T está bien definida y es inyectiva. Claramente T es lineal. Si $y^* \in Y^*$ tomando su extension $x_{y^*}^*$ (que existe por el teorema de Hahn-Banach) se tiene que $T(x_{y^*}^* + Y^{\perp}) = y^*$, por tanto es suprayectiva y así T es un isomorfismo.

Ahora sea $x^* + Y^{\perp} \in \frac{X^*}{Y^{\perp}}$ y $y^* = T(x^* + Y^{\perp})$. Puesto que y^* tiene una extensión (Hahn-Banach) $x_{y^*}^*$ a todo X y $x_{y^*}^* + Y^{\perp} = x^* + Y^{\perp}$, entonces $\|y^*\| = \|x^*\|$ (corolario 1.47). Sea $z^* \in Y^{\perp}$, si se identifica $y^* = x^* + z^*$ entonces

$$\|y^*\| = \sup\{|(x^* + z^*)(y)| : y \in Y \; \|y\| \leq 1\} \leq$$

$$\sup\{|(x^* + z^*)(x)| : x \in X \; \|x\| \leq 1\} = \|x^* + z^*\|.$$

También se tiene que:

$$\|y^*\| \leq \inf\{\|x^* + z^*\| : z^* \in Y^{\perp}\} = \|x^* + Y^{\perp}\| \leq \|x^*\| = \|y^*\|,$$

así

$$\|T(x^* + Y^{\perp})\| = \|y^*\| = \|x^* + Y^{\perp}\|,$$

entonces T es una isometría. Por tanto T es un isomorfismo isométrico. $\square$

Teorema 1.68. *Sea X un espacio de Banach y Y subespacio cerrado de X. Considérese el mapeo cociente*

$$\pi : X \longrightarrow \frac{X}{Y},$$

entonces

$$\psi : \left(\frac{X}{Y}\right)^* \longrightarrow Y^\perp$$

dado por $\psi(f) = f \circ \pi$ para cada $f \in (\frac{X}{Y})^*$, es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Primero nótese que ψ está bien definida pues si $f \in (\frac{X}{Y})^*$, entonces $(f \circ \pi)(y) = 0$ para todo $y \in Y$, así $f \circ \pi \in Y^\perp$. Es fácil ver que es inyectiva y lineal. Sea $x^* \in Y^\perp$, entonces $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$, tomando $f(x+Y) \doteq x^*(x)$ está bien definido pues si $x+Y = z+Y$ entonces $x-z \in Y$. Esto implica que $x^*(x-z) = 0$ y equivale a que $x^*(x) = x^*(z)$, por definición $f(x+Y) = f(z+Y)$. $f \in (\frac{X}{Y})^*$ y por tanto ψ es suprayectiva. Puesto que π es el mapeo cociente se cumple: $\|\psi\| \leq \|f\|$. Para ver la otra desigualdad sea $\|f\| \leq 1$ y $(x_n + Y)_n$ una sucesión en $\frac{X}{Y}$ tal que $\|x_n + Y\| \leq 1$ y $|f(x_n + Y)| \longrightarrow \|f\|$. Eligiendo una sucesión $(y_n) \in Y$ tal que $\|x_n + y_n\| \leq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene.

$$\|\psi(f)\| \geq |\psi(f)(x_n + y_n| = |f(x_n + Y)| \longrightarrow \|f\|.$$

Por tanto $\|\psi\| \geq 1$ y entonces ψ es un isomorfismo isométrico.

$\square$

Capítulo 2

Topología débil y débil*.

En este capitulo se introduce el concepto de convexidad para poder definir lo que es un espacio topologíco localmente convexo. Después se introduce el concepto de espacio reflexivo y algunos resultados que muestran la importancia de esos espacios. Además se construyen las topologias débil y débil*, que hacen a los espacios que están dotados con ellas, localmente convexos. Estas topologías son el concepto central este trabajo y finalmente se dan sus propiedades y algunos teoremas importantes referentes a ellas que justifican su construcción.

A partir de aquí se considerarán espacios vectoriales reales.

2.1. Espacios localmente convexos.

Definición 2.1. *Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$. Se dice que A es convexo si $\alpha x + \beta y \in A$ siempre que $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \in A$.*

Ejemplo 2.2. *Sea X un espacio normado, entonces el conjunto $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$, es convexo, pues si $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$, se tiene que*

$$\|(\alpha x+\beta y)-x_0\| = \|(\alpha x+\beta y)-(\alpha+\beta)x_0\| = \|\alpha(x-x_0)+\beta(y-x_0)\| \leq$$

$$\|\alpha(x - x_0)\| + \|\beta(y - x_0)\| \leq \alpha\|(x - x_0)\| + \beta\|(y - x_0)\|$$
$$< \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon = (\alpha + \beta)\varepsilon = \varepsilon$$

por tanto $\alpha x + \beta y \in B_\varepsilon(x_0)$ y así es convexo.

Observación 2.3. *Si X es un espacio vectorial se cumple que*

1. *Si $A, B \subseteq X$ son convexos, entonces $A + B = \{a + b : a \in A\,, b \in B\}$ es convexo.*

2. *Si* $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos convexos de* X *entonces* $\bigcap\{A_i : i \in I\}$ *es convexo.*

Proposición 2.4. *Sea* X *un espacio vectorial y* $A \subseteq X$ *convexo. Entonces* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in A$*, donde* $a_i \in A$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *con* $\lambda_i \geq 0$*, para cada* $i \in \{1, ..., n\}$*.*

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ es obvio y para $n = 2$ es la definición de conjunto convexo. Supóngase que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i \in A$ y definiendo $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, $\beta = \lambda_n$ y $\gamma_i = \lambda_i / \alpha$, se tiene que $\alpha + \beta = 1$, así

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a_i \right) + \beta a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in A.$$

□

Definición 2.5. *Sea* X *un espacio vectorial y* $A \subseteq X$*. Se define la envolvente convexa de* A *como:*

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \, a_i \in A, \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este es el convexo más pequeño que contiene a A*.*

Definición 2.6. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $x_0 \in X$ *y* $B \subseteq \tau$*. Se dice que* B *es base local en* x_0 *si:*

1. $x_0 \in V$ *para todo* $V \in B$*.*

2. *Si* $x_0 \in U$ *y* U *in*τ*, existe* $V \in B$ *tal que* $x_0 \in V \subseteq U$*.*

Dado que en un espacio vectorial topológico la función

$$t_a : X \longrightarrow X$$

dada por $t_a(x) = a + x$, es un homeomorfismo de X, se tiene que un subconjunto U de X es abierto si y solo si $a + U$ es abierto para cada $a \in X$, entonces la topología de X está totalmente determinada por una base local de 0.

Definición 2.7. *Sea* X *un espacio vectorial topológico. Se dice que* X *es localmente convexo si* 0 *tiene una base local de vecindades convexas.*

Obviamente los espacios normados son localmente convexos.

Definición 2.8. *Sea X un espacio vectorial y $A \subseteq X$. Se dice que A es:*

1. *Balanceado si $\lambda A \subseteq A$ con $|\lambda| \leq 1$.*
2. *Absorbente si para cada $x \in X$ existe ρ_x (que depende de x) tal que si $|\rho| > \rho_x$ entonces $x \in \rho A$.*

Observación 2.9. *Si X es un espacio vectorial y $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de subconjuntos absorbentes, balanceados y convexos, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es absorbente, balanceado y convexo.*

Teorema 2.10 (De separación de Hahn-Banach)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico y $A, B \subseteq X$ convexos ajenos. Si X es localmente convexo, A es cerrado y B compacto, entonces existe x^* funcional lineal continuo y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$x^*(a) < \alpha < x^*(b)$$

para cada $a \in A$ y $b \in B$.

La demostración puede verse en [14]

2.2. Definición y propiedades de la topología débil.

Se denotará por $\wp(X)$ al conjunto potencia de X.

Definición 2.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $B \subseteq \wp(X)$. Se dice que B es base para la topología τ si se cumple que*

1. *$B \subseteq \tau$*
2. *Para todo $U \in \tau$, si $p \in U$, existe $\beta \in B$ tal que $x \in \beta$ y $\beta \subseteq U$.*

Teorema 2.12. *Sea X un conjunto y $S \subseteq \wp(X)$, entonces $B_S = \{\bigcap_{i=1}^n s_i : s_i \in S, n \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$ es base para la topologia $\tau_S = \{\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha : V_\alpha \in B_S\}$. Además τ_S es la mínima topología que contiene a S.*

Demostración. Es claro que τ_S es una topología para X. Primero se demostrará que B_S es base. En efecto, pues es claro que $B_S \subseteq \tau_S$. Ahora, sea $U \in \tau_S$, entonces $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, donde A es un conjunto y $V_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} s_i$, con $s_i \in S$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n_\alpha\}$ y $n_\alpha \in \mathbb{N}$.

Sea $p \in U$, entonces existe $\alpha \in A$ tal que $p \in V_\alpha$ y como $V_\alpha \in B_S$ se cumple la segunda condición para ser base.

Ahora resta ver que τ_S es la mínima topología que contiene a S. Sea τ una topología que contiene a S. Sea $U \in \tau_S$, entonces $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, donde A es un conjunto y $V_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} s_i$, con $s_i \in S$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n_\alpha\}$ y $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Primero notamos que Como $S \subseteq \tau$, entonces $V_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in A$, pues es intersección finita de elementos de τ. Además U por ser unión de elementos de τ debe ser elemento de dicha topología y esto demuestra que $\tau_S \subseteq \tau$. $\square$

Sea X un espacio vectorial topológico. El dual de X denotado por X^*, es el espacio vectorial formado por las funcionales lineales continuas definidas en X.

Considerando la familia $S = \{x^{*-1}(w) : x^* \in X^*,\ w \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}\}$ de subconjuntos abiertos de X, se tiene por el teorema 2.12 que τ_S es la mínima topología que contiene a S, es decir, la mínima topología con respecto a la cual los elementos de X^* son continuos.

Claramente la topología τ_S está contenida en la topologá original de X y en general la contención es propia.

A la topología τ_S se le llama topología débil de X y se denota $\sigma(X, X^*)$.

Observación 2.13. *Si $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, en vista del teorema 2.12 el conjunto:*

$$V(x_0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{*-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) =$$

$$\{x \in X : |x_i^*(x - x_o)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

con $a_i = x_i^*(x_0)$ y $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \subset X^*$, es una vecindad de x_0 en la topología débil $\sigma(X, X^*)$.

En la siguiente proposición consideramos a $X \times X$ con la topología producto.

Proposición 2.14. $(X, \sigma(X, X^*))$ *es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Demostración. Sean $x_0, y_0 \in X$ y U abierto en la topología débil tal que $x_0 + y_0 \in U$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \subset X^*$ tal que

$$x_0 + y_0 \in V(x_0 + y_0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon) \subseteq U.$$

Si

$$(x, y) \in V(x_0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon/2) \times V(y_0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon/2),$$

entonces,

$$|x_i^*((x+y)-(x_0+y_0))| \leq |x_i^*(x-x_0)|+|x_i^*(y-y_0))| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$, así

$$x + y \in V(x_0 + y_o, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon).$$

Por tanto la suma es continua.

Sean $x_0 \in X, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ y U un abierto en la topología débil que contiene a $\lambda_0 x_0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \subset X^*$ tal que $\lambda_0 x_0 \in V(\lambda_0 x_0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon) \subseteq U$. Por otro lado se tiene que

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0 =$$

$$(\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0) - (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 =$$

$$(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0.$$

Entonces por la igualdad anterior:

$$|x_i^*(\lambda x - \lambda_0 x_0)| \leq$$

$$|(\lambda - \lambda_0)||x_i^*(x - x_0)| + |\lambda_0||x_i^*(x - x_0)| + |(\lambda - \lambda_0)||x_i^*(x_0)|.$$

Si

$$(\lambda, x) \in B_\delta(x_0) \times V(\lambda_0 x_0, x_1^*, ..., x_n^*, \delta),$$

entonces,

$$|x_i^*(\lambda x - \lambda_0 x_0)| \leq \delta^2 + |\lambda_0|\delta + \delta|x_i^*(x_o)|,$$

esto para cada $i \in \{1, ..., n\}$.Ahora, al tomar delta suficientemente pequeño se tiene que $|x_i^*(\lambda x - \lambda_0 x_0)| \leq \varepsilon$, por tanto el producto por escalar es continuo.

Claramente $x_i^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ es convexo para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y por la observación 2.9 se tiene que

$$V(0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon)$$

es una vecindad convexa de 0. Variando épsilon y $n \in \mathbb{N}$ se tiene una base de vecindades convexas de 0.

Por tanto $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo. □

Proposición 2.15. *El conjunto* $V = V(0, x_1^*, ..., x_n^*, \varepsilon)$ *es absorbente y balanceado para cada* $\varepsilon > 0$ *y* $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \subset X$.

Demostración. Si $y \in x_i^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ y $|\lambda| < 1$ entonces,

$$|x_i^{*-1}(\lambda y)| = |\lambda||x_i^{*-1}(y)| < |\lambda|\varepsilon \leq \varepsilon$$

por tanto $x_i^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ es balanceado para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Sea $x \in X$, defínase $\rho_x = \frac{|x_i^*|}{\varepsilon}$, entonces si $|\rho| > |\rho_x|$, se tiene que:

$$|x_i^*(\frac{x}{\rho})| = \frac{1}{|\rho|}|x_i^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|x_i^*(x)|}|x_i^*(x)| = \varepsilon,$$

por tanto $x_i^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ es absorbente para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Por la observación 2.9 se tiene que V es absorbente y balanceado. □

Proposición 2.16. *Sea X localmente convexo tal que $\{0\}$ es cerrado, entonces $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio topológico de Hausdorff.*

La demostración puede verse en [14].

Demostración. Sean $x, z \in X$ distintos. Considérese los subconjuntos $\{x\}$ y $\{z\}$ de X, los cuales son cerrados y además compactos, como X es localmete convexo, por el teorema de Hahn-Banach, existen $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x^*(x) < \alpha < x^*(z).$$

Considérese los conjuntos $U = x^{*-1}(-\infty, \alpha)$ y $V = x^{*-1}(\alpha, \infty)$, los cuales son abiertos en la topología débil, ajenos y contienen a x y z respectivamente, entonces se tiene la afirmación. □

Teorema 2.17. *Sea X localmente convexo y $C \subseteq X$ convexo. La cerradura de C en la topología débil coincide con la cerradura de C en la topología fuerte (la topología original de X).*

Demostración. Sea $\overline{C}$ la cerradura fuerte de C y $\overline{C}^w$ la cerradura débil de C. Dado que $\overline{C}^w$ es un conjunto débilmente cerrado entonces también es fuertemente cerrado, como la cerradura de C es el menor cerrado que contiene a C, entonces $\overline{C}^w \supseteq \overline{C}$. Sea $x \in X/\overline{C}$, como X es localmente convexo, $\{x\}$ compacto y $\overline{C}$ cerrado, por el teorema de Hahn-Banach existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x^* \in X^*$ tal que

$$x^*(x) < \alpha < x^*(c),$$

para cada $c \in \overline{C}$. Entonces $U = x^{*-1}(-\infty, \alpha)$ es débilmente abierto, contiene a x y no intersecta a C, por tanto x no está en $\overline{C}^w$, así se tiene que $\overline{C} \supseteq \overline{C}^w$. □

Corolario 2.18 (Mazur). *Sea X localmente convexo y $C \subseteq X$ convexo. Entonces:*

1. *C es débilmente cerrado si y sólo si C es fuertemente cerrado.*
2. *Si X es un espacio normado y $(x_n)_n$ es una sucesión en X que converge débil a $x_0 \in X$, entonces existe una sucesión $(y_n)_n$ formada por combinaciones convexas de elementos de $(x_n)_n$ que converge fuerte a x_0.*

Demostración. (1) Es inmediato del teorema.

(2) Sea C=co$(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\})$ la envolvente convexa de $(x_n)_n$, como $x_n \longrightarrow x_0$ débilmente, entonces x_0 está en $\overline{C}^*$ la cerradura débil que coincide con $\overline{C}$ la cerradura fuerte, por tanto $x_0 \in \overline{C}$. Como X es normado y $x_0 \in \overline{C}$, existe una sucesión en C que converge fuerte a x_0, así se tiene la afirmación. □

Proposición 2.19. *Sea X localmente convexo, $x \in X$ y $(x_n)_n \subseteq X$. Entonces $x_n \longrightarrow x$ en la topología débil si y sólo si $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$ para cada $x^* \in X^*$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $x_n \longrightarrow x$ en la topología débil entonces $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$, pues cada x^* es continuo respecto a esta topología.

($\Leftarrow$) Supóngase que $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$ para cada $x^* \in X^*$, Sea U vecindad de x en la topología débil, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, entonces $x_i^*(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, así existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que si $k > m_i$ se tiene que $x_i^*(x_k) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, esto para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Tomando $m = \max\{m_i : i \in \{1, ..., n\}\}$, se tiene que $x_i(x_n) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ si $n > m$, entonces $x_n \in V \subseteq U$ si $n > m$, así $x_n \longrightarrow x$ en la topología débil. □

Proposición 2.20. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces*

$$Id : (X \times Y, \sigma(X, X^*) \times \sigma(Y, Y^*)) \longrightarrow (X \times Y, \sigma(X \times Y, X^* \times Y^*))$$

es un homeomorfismo, es decir, las topologías coinciden.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $\{y_1^*, ..., y_n^*\} \in Y^*$ y $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \in X^*$ Considérese los conjuntos

$$V = V\left(x_1^*, ..., x_n^*, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{x \in X : |x_i^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, 1 < i < n\right\}$$

y

$$U = U\left(y_1^*, ..., y_n^*, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{y \in Y : |y_i^*(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, 1 < i < n\right\},$$

los cuales son abiertos básicos en la topologia débil de X y Y respectivamente. Nótese que

$$U \times V \subseteq W = W(x_1^* \times y_1^*, ..., x_n^* \times y_n^*, \varepsilon)$$

$$= \{(x, y) \in X \times Y : |x_i^*(x) + y_i^*(y)| < \varepsilon, 1 < i < n\}$$

y W es un abierto básico en la topología $\sigma(X \times Y, X^* \times Y^*)$. Cómo los elementos de $X^* \times Y^*$ son continuos respecto a la topología $\sigma(X, X^*) \times \sigma(Y, Y^*)$, entonces esta topología contiene a la topología $\sigma(X \times Y, X^* \times Y^*)$. Por tanto ambas topologías coinciden. □

2.3. Definición y propiedades de la topología débil*.

Sea X un espacio normado, hasta aquí se tienen dos topologías en X^*:

1. La topología usual (fuerte) determinada por la norma.
2. La topologia débil $\sigma(X^*, X^{**})$.

Ahora se obtendrá una tercera topología en X^* llamada la topología débil* y denotada por $\sigma(X^*, X)$, la cual está definida sólo para espacios duales.

Cada $x \in X$ determina un funcional lineal definido en X^* por la siguiente asociación

$$x \longrightarrow \overline{y}_x \in X^{**}$$

donde $\overline{y}_x(z^*) = z^*(x)$ para cada $z^* \in X^*$. De esta manera se obtiene una familia $(\overline{y}_x)_{x \in X} \subseteq X^{**}$ y en general esta contención es propia.

La topología débil* que se construye de manera análoga a la sección 2.2, es la mínima con respecto a la cual los elementos de la familia $(\overline{y}_x)_{x \in X}$ son continuos y en general se tiene que $\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**})$.

Observación 2.21. *Sea $x_0^* \in X^*$; dado $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ finito y $\varepsilon > 0$, en vista del teorema 2.12 el conjunto:*

$$V(x_0^*, x_1, ..., x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{y}_{x_i}^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) =$$

$$\{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

donde $a_i = x_0^*(x_i)$, es una vecindad de x_0^* en la topología débil.*

Proposición 2.22. $(X^*, \sigma(X^*, X))$ *es un espacio vectorial topológico localmente convexo donde los conjuntos* $V(0, x_1, ..., x_n, \varepsilon)$ *son absorbentes y balanceados.*

La demostración es análoga a la de la topología débil.

Proposición 2.23. $(X, \sigma(X^*, X))$ *es un espacio topológico de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x_1^*, x_2^* \in X^*$ distintos, entonces existe $x \in X$ tal que $x_1^*(x) \neq x_2^*(x)$ (esto por ser funciones distintas). Supóngase sin pérdida de generalidad que $x_1^*(x) < x_2^*(x)$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_1^*(x) < \alpha < x_2^*(x).$$

Sean $U = \overline{y}_x^{-1}(-\infty, \alpha)$ y $V = \overline{y}_x^{-1}(\alpha, \infty)$ los cuales son abiertos en la topología débil*, $x_1^* \in U$, $x_2^* \in V$ y son ajenos. Por tanto se tiene la afirmación. □

Proposición 2.24. *Sea* X *un espacio normado,* $(x_n^*)_n \subseteq X^*$ *y* $x_0^* \in X^*$*. Entonces* $x_n^* \longrightarrow x_0^*$ *en* $\sigma(X^*, X)$ *si y sólo si* $x_n^*(x) \longrightarrow x_0^*(x)$ *para todo* $x \in X$*.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que

$$x_n^* \longrightarrow x_0^*$$

en la topología $\sigma(X^*, X)$, como $\overline{x}_x$ es continuo respecto a la topología débil* entonces

$$\overline{x}_x(x_n^*) \longrightarrow \overline{x}_x(x_0^*)$$

para todo $x \in X$, esto es $x_n^*(x) \longrightarrow x_0^*(x)$ para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$) Ahora supóngase que $x_n^*(x) \longrightarrow x_0^*(x)$ para todo $x \in X$. Sea U abierto en la topología débil* tal que $x_0^* \in U$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ tal que $x_0^* \in \bigcap_{i=1}^n \overline{x}_{x_i}^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$, esto es $x_0^*(x_i) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, como $x_n^*(x_i) \longrightarrow x_o^*(x_i)$ entonces existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que si $k > m$ se tiene que $x_k^*(x_i) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, esto para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $m = \text{máx}\{m_i : i \in \{1, ..., n\}\}$, así se tiene que si $k > m$ entonces $x_k^*(x_i) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, esto es $x_k^* \in \bigcap_{i=1}^n \overline{x}_{x_i}^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, por tanto $x_n^* \longrightarrow x_0^*$ en la topología débil* □

En la demostración del siguiente teorema se usa fuertemente el teorema de Tychonoff, el cual dice que el producto de espacios topológicos compactos dotado de la topología débil respecto a las funciones proyección es compacto. La demostración de este resultado puede verse en [12].

Teorema 2.25 (Banach-Alaoglu)**.** *La bola unitaria* $U_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ *es compacta en la topología débil*.*

Demostración. Considérese el producto

$$Y = \mathbb{R}^X = \prod_{x \in X} \mathbb{R}_x$$

donde $\mathbb{R}_x = \mathbb{R}$, que son todos los mapeos de X sobre $\mathbb{R}$.

Dado que X^* es el espacio de los funcionales lineales acotadas definidas en X sobre $\mathbb{R}$, se puede considerar a X^* como subespacio de Y mediante la asociación $\Phi(x^*) = (x^*(x))_{x \in X}$.

La función Φ es inyectiva pues si $(x_1^*(x))_{x \in X} = (x_2^*(x))_{x \in X}$ entonces $x_1^*(x) = x_2^*(x)$ para todo $x \in X$, por tanto $x_1^* = x_2^*$.

Nótese que Φ es continua pues $(\pi_x \circ \Phi)(x^*) = x^*(x)$ es continua para cada $x \in X$, donde π_x es la proyección en la entrada x.

También Φ^{-1} definida en $\Phi(X^*)$ es continua pues si $V = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{x}_{x_i}^{-1}(a_i + \varepsilon, a_i + \varepsilon)$ es un abierto básico en la topología débil* entonces:

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{x}_{x_i}^{-1}(a_i + \varepsilon, a_i + \varepsilon)\right) = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_1}^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)\right) \cap \Phi(X^*)\right)$$

es un abierto básico en $\Phi(X^*)$ con la topología heredada de Y, por tanto $\Phi \mid_{U_{X^*}}: U_{X^*} \longrightarrow \Phi(U_{X^*})$ es un homeomorfismo.

Por otro lado si $\|x^*\| \leqslant 1$ entonces $|x^*(x)| \leqslant \|x\|\|x^*\| \leqslant \|x\|$, por tanto $\Phi(U_{X^*}) \subseteq K$ donde

$$K = \{\omega = (\omega_x)_{x \in X} \in Y : |\omega_x| \leqslant \|x\|\} =$$

$$\prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|] \subseteq \prod_{x \in X} \mathbb{R}_x$$

y por el teorema de Tychonoff K es compacto.

Ahora considérese los conjuntos:

$$K_1 = \{\omega \in Y : \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

$$K_2 = \{\omega \in Y : \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\},$$

como las proyecciones son continuas entonces las funciones:

$$\omega \longrightarrow \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$$

$$\omega \longrightarrow \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x$$

son continuas, por tanto K_1 y K_2 son subconjuntos cerrados de Y.

Así, claramente $\Phi(U_{X^*}) = K \cap K_1 \cap K_2$, es cerrado y está contenido en K que es compacto, por tanto es compacto, entonces U_{X^*} es compacto en la topología débil*. $\square$

Definición 2.26. *Sea X un espacio normado. Se dice que X es reflexivo si la inyección canónica $j : X \longrightarrow X^{**}$ es suprayectiva.*

Lema 2.27 (Goldstine)**.** *Sea X un espacio normado y $j : X \longrightarrow X^{**}$ la inyección canónica. Entonces $j(U_X)$ es débil* denso en $U_{X^{**}}$.*

Demostración. Sea S la cerradura de $j(U_X)$ en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$. $U_{X^{**}}$ es cerrado en $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ pues es compacto respecto a la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$, así se tiene que $S \subseteq U_{X^{**}}$.

Supóngase que esta contención es propia y sea $x^{**} \in U_{X^{**}} \setminus S$. Como $\sigma(X^{**}, X^*)$ es localmente convexa, entonces por el teorema de Hahn-Banach existen $x^{***}_{x^*} \in X^{***}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^{***}_{x^*}(s) < \alpha < x^{***}_{x^*}(x^{**}).$$

Para todo $s \in S$, entonces

$$s(x^*) < \alpha < x^{**}(x^*)$$

$$\sup\{s(x^*) : s \in S\} < x^{**}(x^*).$$

Y como $S \supseteq j(U_x)$,

$$\sup\{\overline{x}_x(x^*) : \overline{x}_x \in j(U_X)\} < x^{**}(x^*),$$

$$\sup\{|x^*(x)| : x \in U_X\} < x^{**}(x^*).$$

Por tanto:

$$\|x^*\| < x^{**}(x^*) \leq \|x^{**}\|\|x^*\| \leq \|x^*\|,$$

lo cual es contradictorio y por tanto $S = j(U_X)$. □

Teorema 2.28. *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y sólo si U_X es compacto en la topología $\sigma(X, X^*)$.*

Demostración. (⇒) Supóngase que X es reflexivo, entonces la inyección canónica

$$j : X \longrightarrow X^{**}$$

es una isometría biyectiva y por tanto $j(X) = X^{**}$, así la topología débil del dual y la topología débil* coinciden. Como j es una isometría biyectiva entonces $j(U_X) = U_{X^{**}}$. También se tiene que

$$j : (U_X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow (U_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*))$$

es un homeomorfismo. Por el teorema de Banach-Alaoglu, $U_{X^{**}}$ es compacto en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ y por tanto U_X es débilmente compacto.

($\Leftarrow$) Ahora supóngase que U_X es compacto en la topología débil, como

$$j : (U_X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow (j(U_X), \sigma(X^{**}, X^*))$$

es biyectiva y continua, entonces $j(U_X)$ es compacto respecto a la topología débil* y por tanto cerrado (en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$). Por el teorema de Goldstine se tiene que

$$j(U_X) = \overline{j(U_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = U_{X^{**}}$$

□

Proposición 2.29. *Sean X y Y espacios de Banach. Sean*

$$j_X : X \longrightarrow X^{**} \quad y \quad j_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$$

las inyecciones canónicas de X y Y en X^{**} y Y^{**} respectivamente. Entonces se tiene que

$$j_{X \times Y} = (j_X, j_Y)$$

y

$$Id : (X^* \times Y^*, \sigma(X^*, X) \times \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^* \times Y^*, \sigma(X^* \times Y^*, X \times Y))$$

es un homeomorfismo, es decir, las topologías coinciden.

Demostración. Análoga a la proposición 2.20. □

Este resultado y la proposición 2.20 serán de gran utilidad en el capítulo 4.

2.4. Teorema de Eberlein-Smulian.

Definición 2.30. *Sea X un espacio normado y $F \subseteq X^*$. Se dice que F separa puntos si $f(x) = 0$ para todo $f \in F$ implica que $x = 0$.*

Observación 2.31. *Si X es separable, entonces X^* contiene un conjunto numerable de elementos de norma 1 que separa puntos. Sea $D \subseteq X$ denso y numerable, para cada $x \in D$, por el corolario 1.47 del teorema de Hahn-Banach, existe $y_x^* \in X^*$ tal que $\|y_x^*\| = 1$ y $y_x^*(x) = \|x\|$. Si $x \in X$ y $x \neq 0$ existe $(x_n)_n \subseteq D$ tal que $x_n \longrightarrow x$, entonces $\lim_{n\to\infty} y_x^+(x_n) = \|x\| > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_x^*(x_n) > 0$ y por tanto $C = \{y_x : x \in D\}$ separa puntos.*

Definición 2.32. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A es*

1. *Relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

2. *Relativamente compacto por sucesiones si cada sucesión de elementos de A contiene una subsucesión que converge en X.*

3. *Relativa y numerablemente compacto si cada sucesión de elementos de A tiene un punto de acumulacion en X.*

Lema 2.33. *Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Entonces A es acotado si y sólo si para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*(A)$ es acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $x^* \in X^*$. Si A es acotado entonces $\|a\| \leq M$ para todo $a \in A$, para alguna $M \in \mathbb{R}$, así $|x^*(a)| \leq \|x^*\|M$ para todo $a \in A$, por tanto $x^*(A)$ es acotado.

($\Leftarrow$) Supóngase que $x^*(A)$ es acotado para todo $x^* \in X^*$, entonces $(\overline{x}_a(x^*))_{a\in A}$ (donde $\overline{x}_a(x^*) = x^*(a)$ para todo $x^* \in X^*$) es acotado, por el teorema de Banach-Steinhaus $(\overline{x}_a)_{a\in A} = j(A)$ es acotado y en consecuencia A es acotado. □

Lema 2.34. *Sea X un espacio de Banach y $A \subseteq X$. Si toda sucesión en A tiene un punto de acumulación débil, entonces $x^*(A)$ es relativamente compacto.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ tal que toda sucesión $(a_n)_n \subseteq A$ tiene un punto de acumulación débil. Sea $x^* \in X^*$ y supóngase que $x^*(A)$ no es acotado, entonces existe una sucesión $(a_n)_n \subseteq A$ tal que $|x^*(a_n)| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $(a_n)_n$ tiene un punto de acumulación x_0, es decir $x_0 \in \overline{A}^*$. El conjunto $U_k = \{x \in X : |x^*(x) - x^*(x_0)| < \frac{1}{k}\}$, donde $k > 1$, es un abierto que tiene a x_0 en la topología débil para todo k, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que

$$|x^*(a_{n_k}) - x^*(x_0)| < \frac{1}{k},$$

entonces

$$|n_k| < |x^*(a_{n_k})| < \frac{1}{k} + |x^*(x_0)|,$$

para todo k, lo cual es una contradicción, por tanto $x^*(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$. □

Observación 2.35. *Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Si A es débilmente compacto, entonces A es acotado en X.*

Sea $x^* \in X^*$, como x^* es continuo respecto a la topología débil se tiene que $x^*(A)$ es acotado puesto que es compacto en $\mathbb{R}$, por el lema 2.32 A es acotado.

Lema 2.36. *Sea X un espacio de Banach tal que X^* contiene un subconjunto numerable que separa puntos. Entonces si $K \subseteq X$ es débilmente compacto, K es metrizable.*

Demostración. Sea K es un subconjunto de X débilmente compacto y $(x_n^*)_n$ el subconjunto de X^* que separa puntos. Es posible suponer que $\|x_n^*\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Defínase:

$$d(k_1, k_2) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(k_1 - k_2)| 2^{-n}.$$

d está bien definida puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(k_1 - k_2)| 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|k_1 - k_2\| 2^{-n} =$$

$$\|k_1 - k_2\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) < \infty.$$

Tomando en cuenta que $(x_n^*)_n$ separa puntos y que $|\ |$ es una norma, es fácil verificar que d es una métrica.

Considérese la función identidad:

$$I : (K, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow (K, d).$$

Sean $k_o \in K$ y $\varepsilon > 0$, para ver que I es continua basta ver que existe una vecindad V en la topología débil tal que $V \subseteq B_\varepsilon(k_0)$. Si $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^*(k_1 - k_2)| 2^{-n} < \delta$$

y sea $V = V\left(k_0, x_1^*, ..., x_N^*, \frac{\delta_1}{N\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right)}\right)$ vecindad de K_0 en la topología débil donde $\delta_1 > 0$. Si $k \in V$ entonces

$$d(k_0, k) = \sum_{n=1}^{N} |x_n^*(k_0 - k)| 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n(k_1 - k_2)| 2^{-n} \leq$$

$$N \left(\frac{\delta_1}{N\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right)} \right) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n(k_1 - k_2)| 2^{-n} < \delta_1 + \delta.$$

Eligiendo δ_1 y δ suficientemente pequeños se tiene que $d(k_0, k) < \varepsilon$, es decir $k \in B_\varepsilon(k_o)$, así $V \subseteq B_\varepsilon(k_0)$, por tanto I es continua. Como $(K, \sigma(X, X^*))$ es compacto y (K, d) es de Hausdorff, se tiene que I es un homeomorfismo y por tanto $(K, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

$\square$

Lema 2.37. *Sea X un espacio normado y $X_0 \subseteq X$ un subespacio vectorial. Entonces la topología débil $\sigma(X_0, X_0^*)$ de X_0 coincide con la topología inducida por $(X, \sigma(X, X^*))$ en X_0.*

Demostración. Se demostrará que la convergencia de una sucesión en ambas topologías coincide. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X_0 y $x_0 \in X_0$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ en $\sigma(X, X^*)$, entonces $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x_0)$ para todo $x^* \in X^*$. Sea $x_0^* \in X_0^*$, por el teorema de Hahn-Banach existe $\overline{x} \in X^*$ extensión de x_0^* y entonces

$$x_0^*(x_n) = \overline{x}(x_n) \longrightarrow \overline{x}(x_0) = x_0^*(x_0),$$

esto es, $x_n \longrightarrow x_0$ en $\sigma(X_0, X_0^*)$

Conversamente supóngase que $x_n \longrightarrow x_0$ en $\sigma(X_0, X_0^*)$. Sea $x^* \in X^*$, como $x^* \mid_{X_0} \in X_0^*$ entonces

$$x^*(x_n) = x^* \mid_{X_0} (x_n) \longrightarrow x^* \mid_{X_0} (x_0) = x^*(x_0),$$

esto es, $x_n \longrightarrow x_0$ en $\sigma(X, X^*)$

Por tanto $(X_0, \sigma(X_0, X_0^*)) = (X_0, \sigma(X, X^*) \mid_{X_0})$

□

Lema 2.38. *Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq X^*$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Entonces existe $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ tal que $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y para todo $x^* \in F$ se cumple*

$$\|x^*\| \geq 2 \max_{i \in \{1,...,n\}} \{|x^*(x_i)|\}$$

Demostración. Sea $E = \{x^* \in F : \|x^*\| = 1\}$, como F es de dimensión finita entonces E es compacto. Puesto que E es compacto, existe $\{x_1^*, ..., x_n^*\} \subseteq F$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{n} B_{\frac{1}{4}}(x_i^*),$$

entonces, dado $x^* \in F$ de norma 1, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\|x^* - x_i^*\| < \frac{1}{4}$. Ahora como para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $\|x_i^*\| = 1$, entonces existe $x_i \in X$ de norma 1 tal que

$$|x_i^*(x_i)| > \frac{3}{4}.$$

Se tiene entonces que

$$|x^*(x_i)| = |x_i^*(x_i) - (x_i^*(x_i) - x^*(x_i))|$$

$$\geq ||x_i^*(x_i)| - |x_i^*(x_i - x^*(x_i)|| > \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto

$$2\,\text{máx}\{|x^*(x_i)| : i\{1, ..., n\}\} \geq 1 = \|x^*\|.$$

$\square$

Teorema 2.39 (Eberlein-Smulian)**.** *Sea X un espacio de Banach y $A \subseteq X$. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1. *A es relativa y débilmente compacto.*

2. *A es relativa y débilmente compacto por sucesiones.*

3. *A es relativa, numerable y débilmente compacto.*

Demostración. 1)⇒2) Sea $A \subseteq X$ relativa y débilmente compacto, entonces $\overline{A}^*$ es débilmente compacto. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en A y considérese $X_0 = \overline{< (a_n)_n >}^{\|\,\|}$ la cerradura del subespacio generado por $(a_n)_n$, el cual es separable y por el teorema de Mazur es débilmente cerrado. Por el lema 2.37 se tiene que $X_0 \cap \overline{A}^*$ es $(X_0, \sigma(X_0, X^*))$-cerrado en $\overline{A}^*$ que es compacto y por tanto compacto. Como X_0^+ es separable X_0^* contiene un subconjunto que separa puntos, por el lema 2.36 $(X_0, \sigma(X_0, X_0^*))$ es metrizable. Por tanto $(a_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.

2)⇒ 3)Es claro.

3)⇒ 1)Sea $A \subseteq X$ relativa, numerable y débilmente compacto, entonces por el lema 2.34 $x^*(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $x^* \in X^*$ y por el lema 2.33 A es acotado. También se tiene que $j(A) \subseteq X^{**}$ es acotado y por el teorema de Banach-Alaoglu es relativamente compacto en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$. Sea $\overline{j(A)}^*$ la cerradura de $j(A)$ en la topología débil. Sea $x_1^* \in X^*$ de norma 1 y $x_0^{**} \in \overline{j(A)}^*$. Entonces

$$U_1 = \{x^{**} \in X^{**} : |(x_0^{**} - x^{**})(x_1^*)| < 1\} \cap j(A) \neq \varnothing,$$

es decir, existe $a_1 \in A$ tal que

$$|(x_0^{**} - j(a_1))(x_1^*)| < 1.$$

Sea $F_1 = \langle x_0^{**}, x_0^{**} - j(a_1)\rangle$ el cual es de dimensión finita, por el lema 2.38 existe $\{x_2^*, ..., x_{n_2}^*\} \in X^*$ tal que $\|x_2^*\| = ... = \|x_{n_2}^*\| = 1$ y

$$\|y^{**}\| \leqslant 2\,\text{máx}\{|y^{**}(x_i^*)| : 2 \leq i \leq n_2\} \leqslant 2\,\text{máx}\{|y^{**}(x_i^*)| : 1 \leq i \leq n_2\},$$

para todo $y^{**} \in F_1$. Ahora

$$U_2 =$$

$$\left\{x^{**} \in X^{**} : |(x_0^{**} - x^{**})(x_1^*)| < \frac{1}{2}\right\} \cap ... \cap$$

$$\left\{x^{**} \in X^{**} : |(x_0^{**} - x^{**})(x_{n_2}^*)| < \frac{1}{2}\right\}$$

es una vecindad de x_0^{**} que contiene un elemento $j(a_2)$, con $a_2 \in A$ tal que

$$|(x_0^{**} - j(a_2))(x_1^*)| < \frac{1}{2}, ..., |(x_0^{**} - j(a_2))(x_{n_2}^*)| < \frac{1}{2}.$$

Análogamente considérese $F_2 = \langle x_0^{**}, x_0^{**} - j(a_1), x_0^{**} - j(a_2) \rangle$ el cual es de dimensión finita y se obtiene$\{x_{n_2+1}^*, ..., x_{n_3}^*\} \in X^*$ tal que $\|x_{n_2+1}^*\| = ... = \|x_{n_3}^*\| = 1$ y

$$\|y^{**}\| \leqslant 2 \max\{|y^{**}(x_i^*)| : n_{2+1} \leq i \leq n_3\} \leqslant$$

$$2 \max\{|y^{**}(x_i^*)| : 1 < i < n_3\},$$

e inductivamente se obtienen sucesiones $(a_n)_n \in A$ y $(x_n^*)_n \subseteq X$ que satisfacen

$$\|y^{**}\| \leq 2 \max\{|y^{**}(x_i^*)| : n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_k\}$$

para todo $y^{**} \in \langle x_0^*, x_0^* - j(a_1), ..., x_0^* - j(a_{k-1}) \rangle$

$$\max\{|(x_0^* - j(a_k))(x_i^*) : 1 \leq i \leq n_k\} < \frac{1}{k}$$

Por hipótesis $(a_n)_n$ tiene un punto de acumulación $x_0 \in X$ y $j(x_0) = x_0^{**}$. En efecto pues $x_0 \in \overline{\langle (a_n)_n \rangle}^*$ y esto implica que:

$$x_0^{**} - j(x_0) \in \overline{\langle (x_0^{**} - j(a_n)_n \rangle}^*$$

$$\subseteq \overline{\langle x_0^{**}, x_0^{**} - j(a_1), x_0^{**} - j(a_2), ... \rangle}^*.$$

Además por construcción se tiene para cada $y^{**} \in F_m$:

$$\|y^{**}\| \leq 2 \max\{|y^{**}(x_i)| : 1 \leq i \leq m\} \leq 2 \sup\{|y^{**}(x_i)| : 1 \leq i \leq \infty\}.$$

Por tanto, tomando límite

$$\|y^{**}\| \leq 2 \sup\{|y^{**}(x_i)| : 1 \leq i < \infty\},$$

para cada $y^{**} \in \overline{\langle x_0^{**}, x_0^{**} - j(a_1), x_0^{**} - j(a_2), ...\rangle}^*$, en particular para $y^{**} = x_0^{**} - j(x_0)$ se tiene que

$$\|x_0^{**} - j(x_0)\| \leq 2\sup\{|y^{**}(x_i)| : 1 \leq i < \infty\}.$$

Ahora se demostrará que $(x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*) = 0$ para todo k. Si $k < n_p < n$ entonces $|x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*)| < \frac{1}{p}$ por construcción. Como x_0 es punto de acumulación de $(a_n)_n$, si $N > k$ existe a_n tal que $|x_k(a_n - x_o)| < \frac{1}{N}$, siempre que $n > N > k$. En consecuencia cuando $n > n_N > k$ se tiene que:

$$|(x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*)| \leq |(x_0^{**} - j(a_n)(x_k^*)| + |x_k^* - (a_n - x_0)| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N},$$

entonces

$$|(x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*))| \leq 2\frac{2}{N} = \frac{4}{N}.$$

Como N es arbitrario se tiene que $|(x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*)| = 0$ para todo K, entonces $\|(x_0^{**} - j(x_0)(x_k^*)\| = 0$. Así $\overline{j(A)}^* \subseteq j(X)$ y es débilmente compacto, también $A \subseteq j^{-1}((\overline{j(A)}^*)$ y $j^{-1}((\overline{j(A)}^*)$ es compacto, pues es fácil ver que $j : (X, w) \longrightarrow (j(X), w^*)$ es un homeomorfismo donde w denota la topologia débil y w^* la topología débil*, entonces A es relativa y débilmente compacto.

□

Teorema 2.40. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es reflexivo.*
2. *Cada subespacio vectorial cerrado de X es reflexivo.*
3. *Cada subespacio vectorial cerrado y separable de X es reflexivo.*
4. *Cada sucesión acotada en X tiene una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Sea X_0 un subespacio vectorial cerrado de X, por el corolario de Mazur (2.18) X_0 es débilmente cerrado. Como X es reflexivo la bola unitaria es débilmente compacto, por tanto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \cap X_0 = \{x \in X_0 : \|x\| \leq 1\}$ es débilmente compacto, pero este conjunto es la bola unitaria en X_0, por tanto X_0 es reflexivo.

2)$\Rightarrow$3)Es claro.

3)$\Rightarrow$ 4)Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X y $X_0 = \overline{\langle (x_n)_n \rangle}$ el subespacio vectorial cerrado generado por esta sucesión, entonces X_0 es separable y por hipótesis reflexivo. Como $(x_n)_n \subseteq X_0$ es acotado existe $r \in \mathbb{R}$ tal que la sucesión está contenida en $B_r(0)$, como X_0 es reflexivo, $B_r(0)$ es débilmente compacto, por tanto $(x_n)_n$ es relativa y débilmente compacto. Por el teorema de Eberlein-Smulian $(x_n)_n$ es relativamente compacto por sucesiones, entonces $(x_n)_n$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge en $\sigma(X_0, X_0^*)$, por el lema 2.37 $(x_{n_k})_k$ converge en la topología $\sigma(X, X^*)$.

4)$\Rightarrow$1) Sea (x_n) una sucesión en U_X, entonces esta sucesión es acotada y por hipótesis tiene una subsucesión que converge débilmente, entonces U_X es relativamente y débilmente compacto por sucesiones. Por el teorema de Eberlein-Smulian U_X es relativa y débilmente compacto, pero $\overline{U_X}^* = \overline{U_X} = U_X$, por tanto U_x es débilmente compacto, por el teorema 2.28 X es reflexivo.

□

Teorema 2.41. *Sea X un espacio de Banach, entonces:*

1. *X es separable si y sólo si U_{X^*} es metrizable en la topología débil*.*

2. *X^* es separable si y sólo si U_X es metrizable en la topología débil.*

Demostración. 1)

($\Rightarrow$) Súpongase que X es separable. Sea $(x_n)_n$ una sucesión densa en U_X. Si $x^* \in X^*$ cumple que $x^*(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x^* = 0$, es decir $(\overline{x}_{x_n})_n$ separa puntos en X^*, pues si $x^*(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x^* \neq 0$ entonces

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in U_X\} > 0,$$

así existe $x \in U_X$ tal que $|x^*(x)| > 0$ y por tanto $x \in U_X \setminus (x_n)_n$. Como $\overline{(x_n)_n} = U_X$ existe una sucesión $(y_n)_n \subseteq (x_n)_n$ tal que $y_n \longrightarrow x$, dado que x^* es continua entonces $x^*(y_n) \longrightarrow x^*(x)$, pero $x^*(y_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $x^*(x) = 0$, lo cual es absurdo.

Por el teorema de Banach-Alaoglu U_{X^*} es compacto en la topología débil* y también $(\overline{x}_{x_n})_n$ separa puntos, por el lema 2.36 U_{X^*} es metrizable dotado de la topología débil*.

($\Leftarrow$) Ahora si U_{X^*} es metrizable en la topología débil*, entonces 0 tiene una base numerable en la topología $\sigma(X^*, X)$ y es posible suponer que dicha base está formada por abiertos básicos. Sea $(U_n^*)_n$ la base local donde

$$U_n^* = V(0, x_1^n, ..., x_{m_n}^n, \varepsilon_n),$$

con $\varepsilon_n > 0$ y $A_n = \{x_1^n, ..., x_{m_n}^n\} \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq X$ el cual es numerable, entonces el subespacio cerrado $\overline{\langle A\rangle}$ es separable y es todo X, pues sea $x^* \in X^+$ tal que $x^*(a) = 0$ para todo $a \in A$, entonces $x^* \in U_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $x^* = 0$, así $\overline{\langle A\rangle}$ es el anulador de $\{0\} \in X^*$, por el tanto $\overline{\langle A\rangle} = X$. De este modo se tiene que X es separable.

2)

($\Rightarrow$) Supóngase que X^* es separable, entonces por 1) $U_{X^{**}}$ es débilmente* metrizable, como $j(U_X) \subseteq U_{X^{**}}$, es débilmente* metrizable, entonces dado que

$$j : (U_X, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow (j(U_X), \sigma(X^{**}, X^*))$$

es un homeomorfismo se sigue que U_X es débil metrizable.

($\Leftarrow$) Ahora supongáse que U_X es débil metrizable y sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de 0 numerable. Es posible suponer que

$$U_n = \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon_n,\ 1 \leq i \leq m_n\},$$

donde $\varepsilon_n > 0$ y $\{x_1^*, ..., x_{m_n}^*\} \in X^*$. Sea $A_n^* = \{x_1^*, ..., x_{m_n}^*\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^*$ (el cual es numerable), entonces $\overline{X} = \overline{\langle A^*\rangle}$ el subespacio cerrado generado por A^* es separable. Basta ver que $\overline{X} = X^*$, supongáse que no se da la igualdad, sea $x_0^* \in X^* \setminus \overline{X}$, como $\overline{X}$ es cerrado se tiene que:

$$d = \text{ínf}\{\|x^* - x_o^*\| : x^* \in \overline{X}\} > 0.$$

Por el corolario 1.46 del teorema de Hahn-Banach existe $x_0^{**} \in X^{**}$ con $\|x_0^{**}\| = \frac{1}{d}$, $x_0^{**}(x^*) = 0$ para todo $x^* \in \overline{X}$ y $x_0^{**}(x_0^*) = 1$. Ahora considérese

$$V = \{x \in U_X : |x_0^*(x)| < \frac{d}{2}\}$$

el cual es un abierto que contiene a 0 en la topologéa débil de U_X, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} \subseteq V$.

Dados

$$V_1\left(dx_0^{**}, x_0^*, \frac{d}{2}\right) = \left\{x^{**} \in X^{**} : |dx_0^{**} - x^{**})(x_0^*)| < \frac{d}{2}\right\},$$

$$V_2(dx_0^{**}, A_{n_0}^*, \varepsilon_{n_0}) = \bigcap_{A_{n_0}^*} \{x^{**} \in X^{**} : |(x_0^{**} - x^{**})(x^*)| < \varepsilon_{n_0}\}$$

que son vecindades en la topología débil* de dx_0^{**}, se tiene que $V_1 \cap V_2$ también es vecindad de dx_0^{**}. Como $\|dx_0^{**}\| = 1$, por el teorema de

Goldstine existe $\overline{x}_{x_1} \in V_1 \cap V_2$ tal que $x_1 \in U_X$, entonces se tiene que

$$|dx_0^{**}(x_0^*) - x_0^*(x_1))| < \frac{d}{2}$$

y

$$|d(x_0^{**}(x^*) - x^*(x_1)| < \varepsilon_{n_0}$$

para todo $x^* \in A_{n_0}^*$. Por construcción se tiene que

$$dx_0^{**}(x_0^*) = d$$

y

$$dx_0^{**}(x^*) = 0$$

para todo $x^* \in \overline{X}$, entonces $dx_0^{**}(x^*) = 0$ para todo $x^* \in A_{n_0}$, así se obtiene que:

$$|d - \overline{x}_{x_1}(x_o^*)| = |d - x_0^*(x_1)| < \frac{d}{2}$$

esto equivale a que $|x_0^*(x_1)| > \frac{d}{2}$, y

$$|\overline{x}_{x_1}(x^*)| = |x^*(x_1)| < \varepsilon_{n_0},$$

para todo $x^* \in A_{n_0}^*$. Pero la desigualdad $|x_0^*(x_1)| > \frac{d}{2}$ dice que x_1 no está en V y de $|x^*(x_1)| < \varepsilon_{n_0}$ se deduce que $x_1 \in U_{n_0}$, lo cual contradice que $V \supseteq U_{n_0}$, por tanto x_0^* no existe y así $\overline{X} = X^*$.

□

Corolario 2.42. *Sea X un espacio de Banach tal que X^* es separable. Entonces:*

1. *X es separable;*

2. *Cada sucesión acotada $(x_n)_n$ en X tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $(x^*(x_{n_k}))_k$ converge para todo $x^* \in X^*$.*

Demostración. 1) Es el corolario 1.53 del teorema de Hahn-Banach.

2) Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X y sin pérdida de generalidad supóngase que $\|x_n\| \leq 1$. Como $j((x_n)_n) = (\overline{x}_{x_n})_n \subseteq U_{X^{**}}$ y $U_{X^{**}}$ es métrico y compacto, $(\overline{x}_{x_n})_n$ tiene una subsucesión que converge en la topologá débil*, sea $(\overline{x}_{x_{n_k}})_k$ dicha subsucesión y $x_0^{**} \subseteq U_{X^{**}}$ su límite, entonces

$$\overline{x}_{x_{n_k}}(x^*) \longrightarrow x_0^{**}(x^*)$$

para todo $x^* \in X^*$, esto es

$$x^*(x_{n_k}) \longrightarrow x_0^{**}(x^*)$$

para todo $x^* \in X^*$, entonces $x^*(x_{n_k})$ converge para todo $x^* \in X^*$. □

Corolario 2.43. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces U_{X^*} es débil* compacto y metrizable.*

En consecuencia, en los duales de espacios de Banach separables las sucesiones acotadas tienen subsucesiones convergentes en la topología $\sigma(X^*, X)$.

Teorema 2.44 (Banach-Mazur)**.** *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces X es isométricamnte isomorfo a un subsepacio $C([0,1])$.*

Este teorema está demostrado en [11] (Teorema 3.12).

Capítulo 3

Operadores débilemnte compactos y espacios de Grothendieck.

En este capítulo se desarrolla la teoría básica de operadores débilmente compactos y operadores adjuntos para después dar una serie de equivalencias a la definición de espacio de Grothendieck en términos de dichos operadores, precisamente en el teorema 3.25.

En este capítulo se denotará a $T(x)$ como $\langle T, x\rangle$ o simplemente Tx.

3.1. Operadores adjuntos.

Sean X y Y espacios normados, a cada $T \in B(X,Y)$ se le asociará un operador T^* que será llamado su adjunto.

Proposición 3.1. *Sea $T \in B(X,Y)$, entonces existe un único operador $T^* \in B(Y^*,X^*)$ que satisface que $\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle$ para todo $x \in X$ y $y^* \in Y^*$*

Demostración. Sea $y^* \in Y^*$. Defínase $T^*(y^*) = y^* \circ T$, como esta funcion es la composición de dos operadores lineales y continuos entonces $T^*y^* \in X^*$ y se satisface que $\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle$ para todo $x \in X$. Como esta propiedad se tiene para toda $x \in X$, T^*y^* está determinado de manera única.

Ahora, si $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ entonces

$$\langle T^*(y_1^* + y_2^*), x\rangle = \langle (y_1^* + y_2^*), Tx)\rangle = \langle y_1^*, Tx\rangle + \langle y_2^*, Tx\rangle =$$

$$\langle T^*y_1^*, x\rangle + \langle T^*y_2^*, x\rangle = \langle (T^*y_1^* + T^*y_2^*), x\rangle\,,$$

para cada $x \in X$ y análogamente se demuestra que $T^*(\alpha y^*) = \alpha T^* y^*$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo que T^* es lineal.

Por otro lado $\|T^* y^*(x)\| = \|y^*(Tx)\| \leq \|y^*\| \|T\| \|x\|$ y se sigue que T^* es continuo. Además se tiene que $\|T^*\| = \|T\|$, pues

$$\|T^*\| = \sup\{\|T^*(y^*)\| : \|y^*\| \leq 1\} =$$

$$\sup\{\sup\{|\langle T^*(y^*), x\rangle| : \|x\| \leq 1\} : \|y^*\| \leq 1\} =$$
$$\sup\{\sup\{|\langle T^*(y^*), x\rangle| : \|y^*\| \leq 1\} : \|x\| \leq 1\} =$$
$$\sup\{\sup\{|\langle y^*, T(x)\rangle| : \|y^*\| \leq 1\} : \|x\| \leq 1\} =$$
$$\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \|T\|.$$

□

Teorema 3.2. *La función*

$$u : B(X, Y) \longrightarrow B(Y^*, X^*)$$

dada por $u(T) = T^*$, es un operador lineal.

Demostración. Sean $T, T_1, T_2 \in B(X, Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que

$$\langle (T_1 + T_2)^* y^*, x\rangle =$$
$$\langle y^*, (T_1 + T_2)x\rangle = \langle y^*, T_1 x + T_2 x\rangle =$$
$$\langle y^*, T_1 x\rangle + \langle y^*, T_2 x\rangle =$$
$$\langle T_1^* y^*, x\rangle + \langle T_2^* y^*, x\rangle$$

para todo $x \in X$. Se sigue que $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, es decir, $u(T_1 + T_2) = u(T_1) + u(T_2)$.

También se tiene que

$$\langle (\lambda T)^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \lambda T x\rangle = \lambda \langle y^*, Tx\rangle = \lambda \langle T^* y^*, x\rangle$$

para cada $x \in X$. Por tanto $(\lambda T)^* = \lambda T^*$, es decir, $u(\lambda T) = \lambda u(T)$.

□

Observación 3.3. *$u : B(X, Y) \longrightarrow B(Y^*, X^*)$ es un operador lineal isométrico.*

Proposición 3.4. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $S \in B(X, Y)$ y $T \in B(Y, Z)$, entonces $(ST)^* = T^* S^*$.*

2. *Si I_X y I_{X^*} denotan la identidad en X y X^* respectivamente, entonces $(I_X)^* = I_{X^*}$.*

Demostración. 1) Sean $z^* \in Z^*$ y $x \in X$, por definición se tiene que

$$\langle (ST)^* z^*, x\rangle = \langle z^*, (ST)x\rangle =$$

$$\langle z^*, STx\rangle = \langle (S^* z^*, Tx\rangle =$$

$$\langle T^* S^* z^*, x\rangle = \langle (S^* T^*) z^*, x\rangle\,,$$

por tanto $(TS)^* = S^* T^*$.

2)Para cada $x \in X$ y $x^* \in X^*$ se tiene que

$$\langle I^* x^*, x\rangle = \langle x^*, Ix\rangle = \langle x^*, x\rangle\,,$$

por tanto $I^* x^* = x^*$ para cada $x^* \in X^*$, esto es $I_X^* = I_{X^*}$. □

Proposición 3.5. *Sea $T \in B(X, Y)$ invertible. Entonces T^* es invertible y se cumple que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Demostración. Sea $y^* \in Y^*$, si $T^*(y^*) = 0$, entonces

$$y^*(y) = \left\langle y^*, TT^{-1}y\right\rangle = \left\langle T^* y^*, T^{-1}y\right\rangle = 0$$

para cada $y \in Y$, así $y^* = 0$ y por tanto $\ker(T^*) = \{0\}$, es decir T^* es inyectiva. Sea $x^* \in X^*$, entonces

$$\langle x^*, x\rangle = \left\langle x^* T^{-1}, Tx\right\rangle = \left\langle T^* x^* T^{-1}, x\right\rangle\,,$$

para cada $x \in X$, entonces $T^*(x^* T^{-1}) = x^*$ y por tanto T^* es suprayectiva. Así T^* es un isomorfismo.

Sean $x^* \in X^*$ y $y \in Y$, entonces

$$\left\langle (T^{-1})^* x^*, y\right\rangle = \left\langle x^*, T^{-1}y\right\rangle =$$

$$\left\langle T^*(T^*)^{-1}x^*, T^{-1}y\right\rangle = \left\langle (T^*)^{-1}x^*, TT^{-1}y\right\rangle$$

$$= \left\langle (T^*)^{-1}x^*, y\right\rangle.$$

Por tanto $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Proposición 3.6. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $(T^*)^* \mid_X = T^{**} \mid_X = T$*

Demostración. Sean
$$j_X : X \longrightarrow X^{**}$$
y
$$j_Y : Y \longrightarrow Y^{**},$$
la inyección canónica de X y Y respectivamente. Sea $x \in X$, entonces
$$\langle T^{**} j_X(x), y^* \rangle =$$
$$\langle j_X(x), T^* y^* \rangle = \langle \overline{x}_x, T^* y^* \rangle =$$
$$\langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle =$$
$$\langle j_Y(Tx), y^* \rangle$$
para todo $y^* \in Y^*$. Por tanto $T^{**} j_X(x) = j_Y(Tx)$ para todo $x \in X$. □

Teorema 3.7. *Sea $T \in B(X,Y)$. Entonces*
$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$$
es continuo.

Demostración. Sea $(y_n^*)_n \subseteq Y^*$ una sucesión que converge a $y_0^* \in Y^*$ en la topología $\sigma(Y^*, Y)$, entonces
$$\langle T^*, y_n^* \rangle \longrightarrow \langle T^*, y_0^* \rangle$$
débilmente*, si y sólo si
$$\langle T^* y_n^*, x \rangle \longrightarrow \langle T^* y_0^*, x \rangle \text{ , para todo} \, x \in X,$$
si y sólo si
$$\langle y_n^*, Tx \rangle \longrightarrow \langle y_0^*, Tx \rangle \text{ , para todo} \, x \in X.$$
Como $y_n^* \longrightarrow y_o^*$ en la topología $\sigma(Y^*, Y)$, entonces $y_n^* y \longrightarrow y_o^* y$ para todo $y \in Y$, en particular para los elementos de $T(X)$. Por tanto $\langle T^*, y_n^* \rangle \longrightarrow \langle T^*, y_0^* \rangle$ débil*. Así T^* es débilmente* continuo. □

Proposición 3.8. *Supóngase que X y Y son espacios de Banach y sea $T \in B(X,Y)$. Entonces*
$$\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp} \quad y \quad \ker(T) = ^{\perp} \mathrm{Im}(T^*).$$

Demostración. $y^* \in \ker(T^*)$ si $\langle T^*, y^*\rangle = 0$, entonces $\langle T^*y^*, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, entonces $\langle y^*, Tx\rangle = 0$ para todo $x \in X$, así $y^* \in \text{Im}(T)^\perp$. Por tanto $\ker(T^*) \subseteq \text{Im}(T)^\perp$.

Notese que las implicaciones en el otro sentido también son ciertas, entonces $\ker(T^*) \supseteq \text{Im}(T)^\perp$ y así se tiene la igualdad.

Ahora,

$$x \in \ker(T)$$

si y sólo si $Tx = 0$, si y sólo si

$$\langle y^*, Tx\rangle = 0$$

para todo $y^* \in Y^*$, si y sólo si

$$\langle T^*y^*, x\rangle = 0$$

para todo $y^* \in Y^*$, si y sólo si $x \in {}^\perp\text{Im}\,(T^*)$. Por tanto $\ker(T) = {}^\perp\text{Im}(T^*)$.

□

Proposición 3.9. *Sea X un espacio normado, $A \subseteq X$ y B subespacio vectorial de X^*. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$A^\perp$ es un subespacio débilmente* cerrado de X^*.*

2. *$({}^\perp B)^\perp$ coincide con la cerradura de B en la topología débil*.*

Demostración. 1) Se tiene la igualdad

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \ \ , x \in A\} = \bigcap\{\ker j(x) : x \in A\}.$$

Como $j(x)$ es débilmente* continuo para todo $x \in X$, $A^\perp$ es un subespacio débil* cerrado.

2) Primero nótese que $({}^\perp B)^\perp$ es un subespacio débil* cerrado que contiene a B, entonces $\overline{B}^*$ está contenido en $({}^\perp B)^\perp$. Ahora sea $x_0^* \in X^* \setminus \overline{B}^*$, por el corolario 1.46 existe $\overline{x}_{x_0} \in X^*$ tal que $\overline{x}_{x_0}(x_0^*) = x_0^*(x_0) = 1$ y $\overline{x}_{x_0}(x^*) = x^*(x_0) = 0$ para todo $x^* \in \overline{B}^*$, es decir $\overline{B}^* \subseteq \ker(j(x_0))$, entonces $x_0 \in X \setminus^\perp B)$ y así x_0^* no está en $({}^\perp B)^\perp$.

Por tanto $({}^\perp B)^\perp = \overline{B}^*$. □

Corolario 3.10. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. $\ker(T^*)$ *es débil* cerrado en Y^*.*

2. $\text{Im}(T)$ *es denso en Y si y sólo si T^* es inyectiva.*

3. *T es inyectivo si y sólo si* $\mathrm{Im}T^*$ *es débil* denso en* X^*

Demostración. Por 3.9 y 3.8 (2) se tiene que $\ker(T)^\perp = ({}^\perp\mathrm{Im}(T^*))^\perp = \overline{T^*(Y^*)}^*$ y ${}^\perp\ker(T^*) = ^\perp(\mathrm{im}(T)^\perp) = \overline{T(X)}$.

Ahora, T^* es inyectiva si y sólo si $\ker(T^*) = \{0\}$, si y sólo si $\ker(T^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y = \overline{T(X)}^*$, si y sólo si $\mathrm{Im}T$ es denso en Y.

Análogamente se demuestra que $\mathrm{Im}(T)$ es denso en Y si y sólo si T^* es inyectiva. □

Lema 3.11. *Sean U_X y U_Y las bolas unitarias en los espacios de Banach X y Y respectivamente. Si $T \in B(X,Y)$ y $\delta > 0$, entonces* 1.) $\Rightarrow$ 2.) $\Rightarrow$ 3.) $\Rightarrow$ 4.)*, donde*

1. $\|T^*y^*\| \geq \delta\|y^*\|$.
2. $\overline{T(U_X)} \supseteq \delta U_Y$.
3. $T(U_X) \supseteq \delta U_Y$.
4. $T(X) = Y$.

Demostración. Supóngase 1. y sea $y_0 \notin \overline{T(U_X)}$. Como $\overline{T(U_X)}$ es convexo, por el teorema de Hahn-Banach existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(y_0) > 1$ y $y^*(y) \leq 1$ para todo $y \in \overline{T(U_X)}$. Si $x \in U_X$, entonces

$$\langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle \leq 1,$$

por tanto $\|T^*y^*\| \leq 1$. Entonces por la hipótesis

$$\delta < \delta|y^*(y_0)| \leq \delta\|y^*\|\|y_0\| \leq \|T^*y^*\|\|y_0\| \leq \|y_0\|,$$

así y_0 no esta en δU_Y. Por tanto se sigue que $y \in \overline{T(U_X)}$ si $\|y\| < \delta$ y así se tiene 2.

Ahora supóngase 2. y sin pérdida de generalidad sea $\delta = 1$, entonces $\overline{T(U_X)} \supseteq U_Y$ y por tanto $\overline{T(U_X)} \supset \overline{U_Y}$. Para cada $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| \leq \|y\|$ y $\|y - Tx\| < \varepsilon$. Sea $y_1 \in U_X$, elegimos $(\varepsilon_n)_n$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|.$$

Supóngase que $n > 1$ y que se tiene y_n. Entonces existe x_n tal que $\|x_n\| < \|y_n\|$ y $\|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$. Sea $y_{n+1} = y_n - Tx_n$ e inductivamente obtenemos sucesiones $(y_n)_n$ y $(x_n)_n$ tales que $\|x_{n+1}\| < \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$. Así

$$\sum_{n}^{\infty} \|x_n\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1.$$

Entonces se sigue que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in U_X$ y

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} Tx_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} y_m - y_{m+1} = y_1.$$

Por tanto $y_1 = Tx \in T(U_X)$ y así se tiene 3.

Finalmente 3. implica 4. es claro.

$\square$

Teorema 3.12 (Banach)**.** *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Im}(T)$ *es cerrado en* Y.
2. $\mathrm{Im}(T^*)$ *es débilmente** *cerrado.*
3. $\mathrm{Im}(T^*)$ *es cerrado.*

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Por el corolario 3.10 se tiene que $\ker(T)^{\perp}$ es la cerradura en la topología débil* de $\mathrm{Im}(T^*)$, entonces basta ver que $\mathrm{Im}(T^*) \supseteq \ker(T)^{\perp}$.

Sea $x^* \in \ker(T)^{\perp}$, defínase el funcional f sobre $\mathrm{Im}(T)$ dado por $f(Tx) = x^*(x)$. El funcional está bien definido pues si $Tx_2 = Tx_1$, entonces $T(x_1 - x_2) = 0$, es decir $x_1 - x_2 \in \ker(T)$, así $x^*(x_1 - x_2) = 0$, por tanto $x^*(x_1) = x^*(x_2)$.

Como $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado en Y, entonces es de Banach. Por el teorema del mapeo abierto

$$T : \frac{X}{\ker T} \longrightarrow T(X)$$

$$T([x]) = T(x)$$

es un homeomorfismo, así existe $K > 0$ tal que $\|[x]\| \leq K\|Tx\|$ para todo $x \in X$, entonces

$$|f(Tx)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|[x]\| \leq K\|Tx\|\|x^*\|,$$

por tanto f es acotado. Así por el teorema de Hahn-Banach existe $y^* \in Y^*$ que extiende a f, es decir, para cada $x \in X$

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle f, Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle \,,$$

entonces

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle x^*, x\rangle \,,$$

por lo que $T^* y^* = x^*$, así x^* es un elemento de la imagen de T^*.

2)$\Rightarrow$ 3) Es claro.

3)$\Rightarrow$ 1) Sea Z la cerradura de $\mathrm{Im}(T)$ en Y y defínase $S \in B(X,Z)$ como $Sx = Tx$, entonces $\mathrm{Im}(S)$ es denso en Z, por el corolario 3.10 (2) S^* es inyectiva. Si $z^* \in Z^*$ por ser acotado, tiene una extensión por el teorema de Hahn-Banach. Sea $y^* \in Y^*$ la extensión de z^*, entonces se tiene lo siguiente:

$$\langle T^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle =$$

$$\langle z^*, Sx\rangle = \langle S^* z^*, x\rangle .$$

Se sigue que $S^* z^* = T^* y^*$, es decir, S^* y T^* tiene la misma imagen, entonces por hipótesis $\mathrm{Im}(S^*)$ es cerrado. Por el teorema del mapeo abierto se tiene que S^* es un isomorfismo sobre su imagen, así existe una constante $C > 0$ tal que

$$C\|z^*\| \leq \|S^* z^*\|$$

para todo $z^* \in Z^*$. Por el lema anterior se tiene que $S(X) = Z$, pero la imagen de T es igual a la imagen de S, entonces $T(X) = Z$ y Z es un subespacio cerrado de Y. $\square$

3.2. Operadores débilmente compactos.

Definición 3.13. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Se dice que T es débilmente compacto si $T(U_X)$ es relativa y débilmente compacto, es decir, la cerradura de $T(U_X)$en la topología débil es débilmente compacto en Y.*

Observación 3.14. *La definición 3.13 es equivalente a decir que un operador $T \in B(X,Y)$ es débilmente compacto, si $T(B)$ es relativa y débilmente compacto para cada $B \subseteq X$ acotado en norma.*

Proposición 3.15. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *T es débilmente compacto.*
2. *Si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X, entonces $T((x_n))_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Supóngase que T es débilmente compacto y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X, entonces $(T(x_n))_n$ es rélativa y débilmente compacto, y por el teorema de Eberlein-Smulian, es relativa y débilmente compacto por sucesiones, así la sucesión $(T(x_n))_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente.

Supóngase que T es tal que si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X, entonces $T((x_n))_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente. Sea B subconjunto de X acotado y sea $(y_n)_n \subseteq T(B)$ una sucesión, entonces existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq B$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $(x_n)_n$ es acotada en X, entonces $(y_n)_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente. Así por el teorema de Eberlein-Smulian $T(B)$ es relativa y débilmente compacto y por tanto T es débilmente compacto. $\square$

Se denotará a la colección de operadores débilmente compactos en $B(X,Y)$ como $WB(X,Y)$.

Teorema 3.16. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Entonces, $T \in WB(X,Y)$ si y sólo si*

$$(T^*)^* = T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$$

es tal que $T^{**}(X^{**}) \subseteq j(Y)$.

Demostración. Se denotará como $\overline{A}^w$ y $\overline{A}^{w^*}$ a la cerradura débil y débil* de A respectivamente.

($\Rightarrow$) Supóngase que T es débilmente compacto. Por el teorema 3.7,

$$T^{**} : (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \longrightarrow (Y^{**}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$$

es débilmente continuo y así

$$\begin{aligned} T^{**}(U_{X^{**}}) = \; & T^{**}(\overline{j(U_X)}^{w^*}) \quad \text{(Por el teorema de Goldstine)} \\ \subseteq \; & \overline{T^{**}(j(U_X))}^{w^*} \quad \text{(Por la continuidad de } T^{**}\text{)} \\ = \; & \overline{(j(T(U_X))}^{w^*} \quad \text{(Pues } T^{**} \text{ extiende a } T\text{)} \\ & \subseteq \overline{(j(\overline{T(U_X)}^{w})}^{w^*}. \end{aligned}$$

Como $\overline{T(U_X)}^w$ es débilmente compacto, entonces

$$j(\overline{T(U_X)}^w)$$

es débilmente* compacto y por tanto es débilmente* cerrado. Entonces

$$T^{**}(U_{X^{**}}) \subseteq \overline{(j(\overline{T(U_X)}^w)}^{w^*} \subseteq j(\overline{T(U_X)}^w) \subseteq j(Y).$$

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que $T^{**}(X^{**}) \subseteq j(Y)$. Por el teorema 3.7, T^{**} es débilmente* continuo, entonces $T^{**}(U_{X^{**}})$ es débilmente* compacto en $j(Y)$, pues por el teorema de Banach-Alaoglu $U_{X^{**}}$ es débilmente* compacta en X^{**}, pero la topología débil* de $j(Y)$ coincide con la topología débil de Y heredada a $j(Y)$ como subespacio topológico, por tanto T es débilmente compacto. $\square$

Teorema 3.17. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $S, T \in WB(X,Y)$ entonces $S+T \in WB(X,Y)$.*

2. *Si $\lambda \in F$ y $T \in WB(X,Y)$, entonces $\lambda T \in WB(X,Y)$.*

Demostración. Primero supóngase que $S, T \in WB(X,Y)$ y sea $(x_n)_n \subseteq X$ acotada. Como $T \in WB(X,Y)$, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $(T((x_{n_k})))_k$ converge débilmente. Como $(x_{n_k})_k$ está acotada y $S \in WB(X,Y)$ existe una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_j$ tal que $(S((x_{n_{k_j}})))_j$ converge débilmente, así $((S+T)((x_{n_{k_j}})))_j$ converge débilmente. Por tanto $S+T \in WB(X,Y)$

De manera similar se demuestra que si $\lambda \in F$ y $T \in WB(X,Y)$, entonces $\lambda T \in WB(X,Y)$. □

Teorema 3.18. *Sean $R \in B(W,X)$ y $T \in B(Y,Z)$, si $S \in WB(X,Y)$ entonces TS y SR son débilmente compactos.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en W, entonces $(R((x_n)))_n$ es acotada. Como S es débilmente compacto entonces $(S(R((x_n))))_n = (SR(((x_n))))_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente, así SR es débilmente compacto.

Si $(x_n)_n$ es acotada en X, entonces $(S(x_n))_n$ tiene una subsucesión débilmente convergente $(S(x_{n_k}))_k$. Como T es débilmente continuo entonces $(TS(x_{n_k}))_k$ es débilmente convergente, así TS es débilmente compacto.

□

Teorema 3.19. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $T \in B(X,Y)$ es débilmente compacto si y sólo si el operador adjunto*

$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$$

es continuo.

Demostración. Primero supóngase que T es débilmente compacto, entonces por el teorema 3.16, $T^{**}(X^{**}) \subseteq j(Y)$. Así, dado $x^{**} \in X^{**}$, existe $y \in Y$ tal que

$$\langle x^{**}, T^* y^* \rangle = \langle T^{**} x^{**}, y^* \rangle = j(y)(y^*) = y^*(y)$$

para todo $y^* \in Y^*$. Sea $(y_n^*)_n \subseteq Y^*$ débilmente* convergente a algún $y_0^* \in Y^*$, entonces $(y_n^*(y))_n$ converge a $y_0^*(y)$ para todo $y \in Y$, así

$\langle x^{**}, T^*y_n^*\rangle \longrightarrow \langle x^{**}, T^*y_0^*\rangle$. Entonces $T^*(y_n^*) \longrightarrow T^*(y_0^*)$ débilmente y por tanto

$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$$

es continuo.

Ahora Supóngase que

$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$$

es continuo. Sea $x_0^{**} \in X^{**}$, por el teorema 3.16, basta ver que $T^{**}x_0^{**} \in j(Y)$. Sea $(y_n^*)_n \subseteq Y^*$ débilmente* convergente a $y_0^* \in Y^*$, entonces $T^*y_n^* \longrightarrow T^*y_0^*$ débilmente, así $\langle x_0^{**}, T^*y_n^*\rangle \longrightarrow \langle x_0^*, T^*y_0^*\rangle$, esto implica que $\langle T^{**}x_0^{**}, y_n^*\rangle \longrightarrow \langle T^{**}x_0^*, y_0^*\rangle$, esto es, $T^{**}x_0^{**}$ es débilmente* continuo, es decir $T^{**}x_0^{**} \in j(Y)$, por tanto $T^{**}(X^{**}) \subseteq j(Y)$. $\square$

Teorema 3.20 (Gantmacher-Nakamura). *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces un operador $T \in B(X, Y)$ es débilmente compacto, si y sólo si, $T^* \in B(Y^*, X^*)$ es débilmente compacto.*

Demostración. Supóngase que T es débilmente compacto, entonces por el teorema anterior

$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X^{**})$$

es continuo, así por el teorema de Banach-Alaoglu U_{Y^*} es débilmente* compacto y por tanto $T^*(U_{Y^*})$ es débilmente compacto. Entonces T^* es debilmente compacto.

Ahora supóngase que T^* es débilmente compacto, por el teorema 3.19

$$T^{**} : (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \longrightarrow (Y^{**}, \sigma(Y^{**}, Y^{***}))$$

es continuo. Entonces

$$\begin{aligned} T^{**}(U_{X^{**}}) &= T^{**}(\overline{j(U_X))}^{w^*}) \quad \text{(por teorema de Goldstine)} \\ &\subseteq \overline{T^{**}(j(U_X))}^{w} \quad \text{(por la continuidad de } T^{**}) \\ &= \overline{j(T(U_X)}^{w} \quad \text{(pues } T^{**} \text{ extiende a } T) \\ &= \overline{j(T(U_X))}^{\|\|} \quad \text{(por el corolario de de Mazur)} \end{aligned}$$

y $\overline{j(T(U_X))}^{\|\|} \subseteq j(Y)$ pues $(j(Y), \|\|)$ es completo. Por el teorema 3.16 T es débilmente compacto. $\square$

3.3. Espacios de Grothendieck.

Definición 3.21. *Un espacio de Banach X es llamado de* ***Grothendieck****, si cada sucesión $(x_n^*)_n \subseteq X^*$ débilmente* convergente es débilmente convergente.*

Teorema 3.22 (Amir-Lindenstrauss)**.** *La bola unitaria U_{X^*} en el dual de un espacio de Banach X es débilmente* compacta por sucesiones si existe $K \subseteq X$ débilmente compacto tal que $X = \overline{\langle K \rangle}$ (esta cerradura esta tomada respecto a la topología que induce la norma).*

Observación 3.23. *El teorema original de Amir-Lindenstrauss es más fuerte que lo que se presenta en este trabajo. Este resultado fué probado por Daniel Amir y Joram Lindenstrauss en 1968, en [1].*

Definición 3.24. *Sea X un espacio de Banach. Una base de Schauder en X es una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$, tal que para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_n$, donde*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Teorema 3.25. *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio de Grothendieck.*
2. *Si $T \in B(X,Y)$ y $Y = \overline{\langle K \rangle}^{\|\|}$, donde $K \subseteq Y$ es débilmente compacto, entonces $T \in WB(X,Y)$.*
3. *Si Y es un espacio de Banach, $(T_n)_n \subseteq WB(X,Y)$ y*
$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T_0(x)$$
(en la topología débil) existe para todo $x \in X$, entonces $T_0 \in WB(X,Y)$.
4. *Si Y es un espacio de Banach, $(T_n)_n \in WB(X,Y)$ y*
$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T_0(x)$$
existe para todo $x \in X$, entonces $T_0 \in WB(X,Y)$.
5. *Si $T \in B(X,Y)$ y Y es separable, entonces $T \in WB(X,Y)$.*
6. *Si $T \in B(X,c_0)$, entonces $T \in WB(X,c_0)$*

Demostración. 1)⇒2) Sea $T \in B(X,Y)$ donde $Y = \overline{\langle K \rangle}^{\|\|}$ y $K \subseteq Y$, es débilmente compacto. Por el teorema de Gantmacher-Nakamura, basta ver que T^* es débilmente compacto. Sea $(y_n^*)_n$ una sucesión acotada en Y^*, por el teorema de Amir-Lindenstrauss, existe una subsucesión $(y_{n_k}^*)_k$ que converge débilmente*, como T^* es débilmente continuo, entonces $(T^* y_{n_k}^*)_k$ es débilmente* convergente en X^*, así $(T^* y_{n_k}^*)_k$ converge débil pues X es de Grothendieck. Por tanto T^* es débilmente compacto.

2)⇒3) Nótese que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T_0(x)$ (en la topología débil) es un operador acotado, pues si $y^* \in Y^*$ entonces, $\lim_{n\to\infty} y^*(T_n(x)) = y^* T_0(x) < \infty$ para todo $x \in X$, por el teorema de Banach-Steinhause, $y^* \circ T_0$ es acotado para todo $y^* \in Y^*$, entonces T_0 es acotado.

Nótese que

$$T_0(X) \subseteq \overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(X) \right\rangle}^{\|\,\|},$$

pues como

$$T_0(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

en la topología débil, entonces

$$T_0(X) \subseteq \overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(X) \right\rangle}^{\sigma(Y,Y^*)} = \overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(X) \right\rangle}^{\|\,\|}$$

por el corolario de Mazur.

De esta forma, basta ver que

$$\overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(X) \right\rangle}^{\|\,\|} = \overline{\langle K \rangle}^{\|\|}$$

para algún K que es débilmente compacto. Como T_n es débilmente compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $B_n = T_n(U_X)$ es relativa y débilmente compacto y por tanto acotado en norma, es decir, existe M_n tal que $\|T_n(x)\| \leq M_n$ para todo $x \in U_X$, así se tiene que $\frac{1}{M_n} B_n \subseteq U_Y$ y el conjunto $\frac{1}{nM_n} B_n$ es relativa y débilmente compacto. Defínase $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{nM_n} B_n$. Sea $(s_n)_n$ una sucesión en K, entonces hay dos posibles casos

1) Una cantidad infinita de términos de la sucesión están contenidos en un sólo $\frac{1}{nM_n} B_n$,

2) Sólo un número finito de elementos de la sucesión están contenidos en cada $\frac{1}{nM_n} B_n$.

En el primer caso se tiene una subsucesión $(s_{n_k})_k \subseteq (s_n)_n$ tal que $(s_{n_k})_k \subseteq \frac{1}{jM_j}B_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, como $\frac{1}{jM_j}B_j$ es relativa y débilmente compacto, entonces $(s_{n_k})_k$ tiene una subsucesión débilmente convergente.

En el segundo caso es posible encontrar una sucesión creciente de naturales $(m_n)_n$ tal que $s_{m_n} \in \frac{1}{m_n M_{m_n}} B_{m_n}$ y claramente $s_{m_n} \longrightarrow 0$ y es una subsucesión de $(s_n)_n$.

Entonces, en ambos casos, K es relativa y débilmente compacto por el teorema de Eberlein-Smulian.

Como

$$\left\langle \frac{1}{nM_n} B_n \right\rangle = \langle T_n(X) \rangle \, ,$$

entonces

$$\overline{\langle K \rangle}^{\| \|} = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(X) \right\rangle}^{\| \|} .$$

Así, por hipótesis como

$$T_0 : X \longrightarrow \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(X) \right\rangle}^{\| \|} = Y_0 \subseteq Y,$$

y

$$\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(X) \right\rangle}^{\| \|} = \overline{\langle K \rangle},$$

entonces T_0 es débilmente compacto, es decir, $\overline{T_0(U_X)}^{\sigma(Y_0, Y_0^*)}$ es compacto en la topología $\sigma(Y_0, Y_0^*)$, Entonces por el lema 2.37, $T \in WB(X,Y)$.

3)⇒4) Es claro, pues la convergencia en norma es más fuerte que la convergencia débil.

4)⇒5) Considérense dos casos, cuando Y tiene una base y cuando no.

En el primer caso, supóngase que Y tiene una base de Schauder $(y_n)_n$, entonces para todo $x \in X$, $T(x)$ se escribe de manera única como

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n,$$

y

$$\left\| T(x) - \sum_{i=1}^{n} a_n y_n \right\| \longrightarrow 0.$$

Sea $T_n = \sum_{i=1}^n a_i y_i$ entonces $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ (en norma). Sea $\sum_{i=1}^n a_i y_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cada T_n tiene rango de dimensión finita y por tanto es débilmente compacto, así por hipótesis, $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ (en norma), es débilmente compacto.

Ahora, en el segundo caso, si Y no tiene base, como Y es separable, entonces por el teorema de Banach-Mazur, Y es isométricamente isomorfo a un subsepacio de $C([0,1])$ y este espacio tiene una base (véase [11]), entonces por un argumento similar al anterior, T es débilmente compacto.

5)⇒6) Como c_0 es separable el resultado es inmediato.

6)⇒1) Sea $(x_n^*)_n$ una sucesión que converge a 0 débilmente* en X^*, entonces $(x_n^*(x))_n$ converge a 0 para todo $x \in X$. Defínase

$$T : X \longrightarrow c_0$$

como $T(x) = (x_n^*(x))_n$, la cual está bien definida y es lineal, pues x_n^* es lineal para todo $n \in \mathbb{N}$. También T es acotado pues

$$\|T(x)\| = \|(x_n^*(x))_n\| =$$

$$\sup\{|x_n^*(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|x_n^*\|\|x\| : n \in \mathbb{N}\} \leq$$
$$\|x\| \sup\{\|x_n^*\| : n \in \mathbb{N}\},$$

como $(x_n^*)_n$ converge débilmente* entonces es acotada, entonces T es acotado. Por hipótesis se tiene que T es débilmente compacto y entonces por el teorema 3.16, $T^{**}(X^{**}) \subseteq j(c_o) \cong c_0$. Sea

$$S : X^{**} \longrightarrow c_0^{**}$$

el operador dado por $S(x^{**}) = (x^{**}(x_n^*))_n$. Entonces S es acotado y por tanto débilmente continuo, también T^{**} es débilmente continuo. Nótese que si $x \in X$,

$$S(j(x)) = (j(x)(x_n^*))_n = (x_n^*(x))_n = T(x) = T^{**}(j(x)),$$

entonces $S\mid_{j(X)} = T^{**}\mid_{j(X)}$. Como $j(X)$ es débilmente* denso en X^{**} y la topología débil (de ℓ_∞) es Hausdorff, entonces $S = T^{**}$. Como $T^{**}(x^{**}) = (x^{**}(x_n^*))_n$ y $(x^{**}(x_n^*))_n$ converge a cero para todo $x^{**} \in X^{**}$, $(x_n^*)_n$ converge débilmente a 0. Por tanto X es de Grothendieck.

□

Capítulo 4

El espacio $C(K, X)$

En este capítulo se estudiará el espacio de Banach $C(K, X)$, con la norma definida en el primer capítulo. K será un espacio topológico de Hausdorff y X un espacio de Banachl objetivo es dar condiciones suficientes y necesarias para que este espacio sea de Grothendieck.

4.1. Producto tensorial de espacios de Banach.

Sean X y Y espacios vectoriales sobre un campo F =($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)). Una función

$$h : X \times Y \longrightarrow F$$

es bilineal si cumple que

1. $h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 h(x_1, y) + \lambda_2 h(x_2, y)$
2. $h(x, \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = \gamma_1 h(x, y_1) + \gamma_2 h(x, y_2)$

para todo $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$, y $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in F$.

Al conjunto de todas las funciones bilineales definidas en $X \times Y$ que toman valores en el campo F se le denotará $H(X, Y)$.

Cada $(x, y) \in X \times Y$ induce un funcional lineal definido en $H(X, Y)$ de la siguiente manera:

$$(x \otimes y)(h) = h(x, y),$$

donde $h \in H(X, Y)$.

Definición 4.1. *Sean X y Y espacios vectoriales. Se define el producto tensorial de X y Y como el espacio vectorial*

$$X \otimes Y = \langle \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\} \rangle =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \otimes y_i) : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in F, x_i \in X, y_i \in Y \right\}.$$

Proposición 4.2. *Sean X y Y espacios vectoriales. Entonces se cumple que:*

1. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
3. $\lambda(x \otimes y) = \lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y$
4. $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$

Para cada $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $\lambda \in F$.

Es posible dotar al producto tensorial de dos espacios X y Y, de una norma. Sea $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, se define la norma de u como

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \right| : x^* \in U_{X^*}, y^* \in U_{Y^*} \right\}.$$

La demostración de que, en efecto, es una norma, puede verse en [16].

Proposición 4.3. *Sean X y Y espacios normados y*

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y.$$

Entonces

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \right| : x^* \in U_{X^*}, y^* \in U_{Y^*} \right\} =$$

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i \right\| : x^* \in U_{X^*} \right\} =$$

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} y^*(y_i) x_i \right\| : y^* \in U_{Y^*} \right\}.$$

La demostración puede verse en [16]

4.2. El espacio $C(K)\otimes X$.

Definición 4.4. *Sea (K,τ) un espacios topológico. Una familia de funciones $\{g_i : K \longrightarrow [0,1]\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C(K)$ se llama partición de la unidad si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) = 1$$

para todo $t \in K$.
Además, dada una cubierta abierta $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de X, decimos que la partición está subordinada a esta cubierta si el soporte de la función g_i, $\{t \in X : g_i(t) \neq 0\}$, está contenido en V_i para toda $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.5. *Sea (K,τ) un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces dada una cubierta abierta del espacio K, existe una partición de la unidad subordinada a dicha cubierta.*

La demostración puede verse en [17]

Teorema 4.6. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y X un espacio de Banach. Entonces $C(K)\otimes X$ es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C(K,X)$.*

Demostración. Considérese el mapeo

$$\Re : C(K)\otimes X \longrightarrow C(K,X)$$

dado por

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes x_i \longmapsto \Re\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes x_i\right)$$

donde

$$\Re\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes x_i\right)(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i$$

para todo $t\in K$. Es claro que $\Re$ es lineal.

Falta ver que la norma de $C(K,X)$ restringida a los elementos de la imagen de $\Re$ coincide con la norma del producto tensorial. Sea $u=\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes x_i \in C(K)\otimes X$, entonces

$$\|\Re(u)\| = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\right\| : t\in K\right\} =$$

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_t(f_i)x_i\right\| : t\in K\right\}$$

donde $\delta_t \in C(K)^*$ y $\delta_t(f) = f(t)$ para toda $f \in C(K)$.

$$co\{\delta_t : t\in K\} = U_{C(K)^*},$$

por tanto

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_t(f_i)x_i\right\| : t\in K\right\} = \|u\|$$

□

Teorema 4.7. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y X un espacio de Banach. Entonces $C(K)\otimes X$ es denso en $C(K,X)$.*

Demostración. Sea $f \in C(K,X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Considérese la cubierta abierta $\{B_\varepsilon(f(t)) : t \in K\}$ de $f(K)$, entonces existe una subcubierta finita $\{B_\varepsilon(f(t_i))\}_{i=1}^n$. Para cada $i \in \{1,2,3,...,n\}$ sea

$$v_i = \{t\in K : \|f(t)-f(t_i)\| < \varepsilon\},$$

entonces los abiertos $\{v_i\}_{i=1}^n$ cubren a K. Sea $\{g_1,...,g_n\}$ una partición de la unidad subordinada a esta cubierta y sea

$$u = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f(t_i)$$

entonces $u \in C(K)\otimes X$. Ahora

$$\|\Re(u) - f\| = \sup_{t\in K}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(t)f(t_i) - f(t)\right\|\right\} \leq$$

$$\sup_{t\in K}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(t)(f(t_i) - f(t))\right\|\right\} < \varepsilon$$

pues para cada $t \in K$, $\|f(t_i) - f(t)\| < \varepsilon$ si $t \in v_i$ o $g_i(t) = 0$ si t no está en v_i, pues el soporte de g_i está contenido en v_i. □

Proposición 4.8. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y sea X un espacio de Banach. Entonces $C(K)\otimes X^{**}$ y $C(K)^{**}\otimes X$ son subespacios de $C(K,X)^{**}$*

La demostración puede verse en [16]

4.3. Teorema de Khurana.

Definición 4.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

1. *Se dice que A es denso en ninguna parte si el interior de la cerradura de A es vacío (equivalentemente A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X).*

2. *Se dice que A es de primera categoría en X si A es la unión de una familia finita o numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte.*

3. *Se dice que A es residual si $X \setminus A$ es de primera categoría en X.*

Definición 4.10. *Sea (X, τ) un espacio topológio y (Y, d) un espacio métrico. Una familia $\Im$ de funciones de X en Y es equicontinua en el punto $x_0 \in X$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $U_{x_0} \in \tau$ vecindad de x_0 tal que*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

para toda $f \in \Im$, si $x \in U_{x_0}$.

Proposición 4.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Si una sucesión de funciones continuas*

$$f_n : (X, \tau) \longrightarrow (Y, d), \ \ n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente a una función

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, d)$$

y cumple que dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen una vecindad u_{x_0} y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_p(x), f_k(x)) < \varepsilon$$

si $x \in u_{x_0}$ y $p \geq k$, entonces $(f_n)_n$ es equicontinua en x_0.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existen una vecindad u_{x_0} y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_p(x), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $x \in u_{x_0}$ y $p \geq k$. Como $(f_n(x_0))_n$ converge, se tiene que existe k_1 (sin pérdida de generalidad supóngase que $k = k_1$) tal que

$$d(f_p(x_0), f_k(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $p \geq k$.

Como f_k es continua, existe $v_{x_0} \in \tau$ vecindad de x_0 tal que

$$d(f_k(x_0), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $x \in v_{x_0}$.

Ahora, para todo $i < k$, f_i es continua. Entonces para todo $i < k$, existe $u^i_{x_o}$ vecindad de x_0 tal que

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon$$

si $x \in u_{x_0}$. Si $u = (u_{x_0} \cap v_{x_0}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} u^i_{x_0}\right)$, entonces u es una vecindad abierta de x_0 y es fácil ver que si $x \in u$, entonces

$$d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon.$$

Luego, por el lema anterior, se tiene que $(f_n)_n$ es equicontinua en x_0.

□

En el siguiente lema A° denotará el interior de A.

Lema 4.12 (Osgood). *Sea*

$$f_n : (X,\tau) \longrightarrow (Y,d)$$

una sucesión de funciones continuas donde (X,τ) es un espacio topológico y (Y,d) es un espacio métrico. Supóngase que la sucesión converge puntualmente a una función

$$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,d).$$

Entonces existe un subconjunto residual de X en el cual $(f_n)_n$ es equicontinua.

Demostración. Considérese el conjunto

$$K_{n,k} = \left\{ x \in X : d(f_k(x), f_p(x)) < \frac{1}{n},\ p \geq k \right\},$$

y sean

$$K_n = \bigcup_k (K_{n,k})^\circ$$

y

$$K = \bigcap_n K_n.$$

La afirmación es que $(f_n)_n$ es equicontinua en K. Sea $\varepsilon > 0$, $x_0 \in K$ y $f_m \in \{f_n\}_n$, como $x_0 \in K$ entonces $x_0 \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$x_0 \in \bigcup_k (K_{n,k})^\circ.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Así se tiene que

$$x_0 \in \bigcup_k \left(\left\{ x \in X : d(f_p(x), f_k(x)) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon, p \geq k \right\} \right)^\circ$$

y entonces existe k_0 tal que

$$x_0 \in \left(\left\{ x \in X : d(f_p(x), f_k(x)) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon, p \geq k_0 \right\} \right)^\circ$$

y este conjunto es una vecindad de x_0. Así $(f_n)_n$ es equicontinua en K.

Nótese que $X = \bigcup_k \{K_{n,k}\}$. En efecto, sea $x \in X$, como $(f_n(x))_n$ es de Cauchy, dado $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_p(x), f_{k_0}(x)) < \frac{1}{n_0}$$

si $p \geq k_0$. Por tanto $x \in K_{n_0,k_0} \subseteq \bigcup_k \{K_{n_0,k}\}$. También se tiene que

$$X \setminus K_n = \bigcup_k \{K_{n,k}\} \setminus \bigcup_k \{(K_{n,k})^\circ\} \subseteq \bigcup_k \{K_{n,k} \setminus (K_{n,k})^\circ\}$$

y $\bigcup_k \{K_{n,k} \setminus (K_{n,k})^\circ\}$ es de primera categoría en X. Por tanto $X \setminus K_n$ es de primera categoría en X. Así,

$$X \setminus \bigcap_n \{K_n\} = \bigcup_n \{X \setminus K_n\}$$

es de primera categoría y por tanto K es residual en X. $\square$

Considérese el conjunto potencia de los números naturales

$$\wp(\mathbb{N}) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}_i$$

con la topología producto.
Es necesario recordar la definición de medida:

Definición 4.13. *Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de una conjunto $\mathcal{X}$ y X un espacio de Banach. Una medida es una función μ definida en Σ que toma valores en X y satisface que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Si* $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de elementos de* Σ *ajenos dos a dos, supóngase que* $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$ *converge, entonces debe cumplirse que*
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i).$$

Definición 4.14. *Sea* (K, τ) *un espacio topológico. La* σ*-álgebra de Borel de subconjuntos de* K *es la mínima* σ*-álgebra que contiene a* τ.

Sea Σ *una* σ*-álgebra de Borel de subconjuntos de* K *que contiene a la* σ*-álgebra de Borel de* K*. Una medida* μ *en* (K, Σ) *que toma valores en un espacio de Banach* X *se dice regular si para cada* $A \in \Sigma$*, dado* $\varepsilon > 0$*, existen un compacto* $k \in K$ *y un abierto* $U \in K$*, tal que* $k \subseteq A \subseteq U$ *y si* $B \subseteq U \setminus K$*, entonces* $\|\mu(B)\| < \varepsilon$.

Definición 4.15. *Sea* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de un conjunto* $\mathcal{X}$*,* X *un espacio de Banach y* $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ *una medida. Se define la variación de* μ *denotada por* $|\mu|$*, como*
$$|\mu|(A) =$$
$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\right\}$$
donde $\mathcal{A}$ *es el conjunto de particiones finitas de* A *en subconjuntos medibles.*

Además se dice que μ *es de variación finita, o acotada, si* $|\mu|(A) < \infty$ *para todo* $A \in \Sigma$.

Observación 4.16. *Sea* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de un espacio topológico* $\mathcal{X}$ *y* X *un espacio de Banach. Entonces es fácil ver que el conjunto de medidas de Borel de variación finita definidas en* Σ *y que toman valores en* X^* $M(\mathcal{X}, X^*)$*, es una espacio normado. La norma se define como:*
$$\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$$

Definición 4.17. *Sea* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de un conjunto* $\mathcal{X}$*,* X *un espacio de Banach y* $\mu : \Sigma \longrightarrow X^*$ *una medida. Se dice que* μ *es de semivariación acotada si*
$$\sup\{|\mu(A_i)(x_i)|\} < \infty$$
donde el supremo se toma sobre las particiones finitas $(A_i)_i^n \subseteq \Sigma$ *de* K *y subconjuntos finitos* $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq U_X$.

Proposición 4.18. *Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$, X un espacio de Banach y $\mu : \Sigma \longrightarrow X^*$ una medida. Entonces, μ es de variación acotada si y solo si es de semivariación acotada.*

La demostración puede verse en [18]

Sea (K, τ) un espacio topológico y de Hausdorff. Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de K. Una función f es simple si es de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i$, donde $\{A_i\}_1^n \subseteq \Sigma$ es una partición de K. Si $\mu : \Sigma \longrightarrow X^*$ es una medida, se define la integral de una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x_i$ como

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i).$$

Proposición 4.19. *Sea X un espacio de Banach y K un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces cada función $f \in C(K, X)$ es límite uniforme de funciones simples.*

Nótese que $T(f) = \int f d\mu$, para $f \in C(K, X)$ define un funcional lineal y como cada función $f \in C(K, X)$ es límite uniforme de funciones simples, se tiene un funcional lineal definido en $C(K, X)$.

Teorema 4.20 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces la función definida en las medidas de Borel regulares de variación finita $M(K, \mathbb{R})$ y que toma valores en $C(K)^*$, dado por*

$$\mu \longmapsto \int (\ \ ) d\mu$$

es un isomorfismo isométrico.

La demostración puede verse en [4].

Nótese que cada medida $\mu : \Sigma \longrightarrow X^*$ determina una medida $\mu_x : \Sigma \longrightarrow F$ de la siguiente manera

$$\mu_x(A) = \langle \mu(A), x \rangle$$

y sí $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$ es una función simple

$$\int f d\mu_x = \sum_{i=1}^{n} \mu_x(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x) = \int \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes x d\mu.$$

Proposición 4.21. *Sea μ una medida que toma valores en X^* donde X es un espacio de Banach. Entonces μ es regular si y sólo si cada μ_x es regular.*

La demostración puede verse en [18].

Teorema 4.22 (Teorema de representación de Riesz ($C(K,X)$))**.** *Sea (K,τ) compacto y de Hausdorff, y X un espacio de Banach. Entonces el espacio $C(K,X)^*$ es isomorfo al espacio $M(K,X^*)$ (el espacio de medidas regulares y de variación acotada definidas en la σ-álgebra de Borel determinada por τ).*

Demostración. Considérese el mapeo

$$T : M(,X^*) \longrightarrow C(K,X)^*$$

dado por $T(\mu) = T_\mu$, donde $T_\mu(f) = \int f d\mu$ y nótese que T_μ es lineal.

Si $\int \chi_A \otimes x d\mu = 0$ para toda función simple $\chi_A \otimes x$, entonces $\int \chi_A d\mu_x = 0$ para toda función simple. Por el teorema de representación de Riesz para funciones escalares se tiene que $\mu_x = 0$ para cada x y por tanto $\mu = 0$, así se tiene que T es inyectiva.

Sea $f^* \in C(K,X)^*$. Para cada $x \in X \setminus \{0\}$, el conjunto

$$C_x = \{g \otimes x : g \in C(K)\}$$

es isomorfo a $C(K)$. Entonces $f^* |_{C(X)} = f_x^*$ determina un elemento de $C(K)^*$, entonces existe una única medida μ_x regular de variación acotada tal que

$$f^*(g \otimes x) = \int g d\mu_x.$$

Defínase μ para cada A boreliano como $\mu(A)(x) = \mu_x(A)$. El mapeo $t(x) = \mu_x$ es lineal, pues si $x, y \in X$, entonces por el teorema de representación para funciones escalares se tiene que

$$\mu_x + \mu_y = f^*(a \otimes x) + f^*(a \otimes y) =$$

$$f^*(a \otimes x + a \otimes y) = f^*(a \otimes (x+y)) = \mu_{x+y},$$

entonces se tiene que

$$\mu(A)(x+y) =$$

$$\mu_{x+y}(A) = \mu_x(A) + \mu_y(A) = \mu(A)(x) + \mu(A)(y),$$

esto es, μ es aditiva.

Ahora se demostrará que si $(x_n)_n \subseteq X$ converge a 0, entonces se cumple que $(f_{x_n}^*)_n$ converge a 0. Esto implica que el mapeo

$$x \longmapsto \mu_x$$

es continuo y en consecuencia μ tomará valores en X^*. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $f \in C(K, X)$, como f^* es continua entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|f\| < \delta$, entonces $|f^*(f)| < \varepsilon$. Entonces si $f(K) \subseteq B_\delta(0)$ se tiene que $\|f\| < \delta$ y por tanto $|f^*(f)| < \varepsilon$. Por otro lado como $x_n \longrightarrow 0$ entonces $a \otimes x_n \longrightarrow 0$, así para $B_\delta(0)$, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $(a \otimes x_n)(K) \subseteq B_\delta(0)$. Entonces se tiene que, dado $\varepsilon > 0$

$$\|f^*_{x_n}\| = \sup\{|f^*(a \otimes x_n)| : a \in U_{C(K)}\} < \varepsilon,$$

si $x_n \longrightarrow 0$.

Sea $(A_i) \subseteq K$ una partición en borelianos de K. Como μ_x es regular, para cada A_i y $r > 0$, existen borelianos k_i compactos y u_i abiertos, tales que

$$k_i \subseteq A_i \subseteq u_i,$$

y si $B \subseteq u_i \setminus k_i$, entonces $\mu(B) < r$. Como K es compacto y Hausdorff, entonces K es regular. Así por el lema de Urysson, existe una función continua

$$f_i : K \longrightarrow [0, 1]$$

tal que $f_i(k) = 1$ para todo $k \in k_i$ y $f_i(x) = 0$ para todo $x \in K \setminus u_i$. Así, si $\delta > 0$ existen funciones $(f_i) \in C(K)$ con soportes ajenos de norma 1 tales que

$$\left|\sum \mu(A_i)(x_i)\right| \leq \left|T\left(\sum f_i \otimes x_i\right)\right| + \delta < \infty.$$

De aquí se sigue que μ es de semivariación acotada y en consecuencia es de variación acotada. $\square$

Proposición 4.23. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y X un espacio de Banach. Sea $\mu \in M(K, X^*)$ y $f \in C(K, X)$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int \|f\| d|\mu|,$$

donde donde $\|f\|$ denota la función $g \in C(K)$ dada por $g(x) = \|f(x)\|$.

La demostración puede verse en [18]

Más adelante, en vista del teorema de representación de Riesz y por comodidad, en vez de escribir $\left|\int f d\mu\right| \leq \int \|f\| d|\mu|$, se escribirá $|\mu(f)| \leq |\mu|(\|f\|)$.

Lema 4.24. *Sea $\lambda_n : \wp(\mathbb{N}) \longrightarrow F$ (donde $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$) una sucesión de medidas tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(A)$ existe para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $(\lambda_n)_n$ converge uniformemente en $\wp(\mathbb{N})$. En particular se tiene que $\lambda_n(\{n\}) \longrightarrow 0$.*

Demostración. Se sigue del lema de Osgood (lema 4.12) que $(\lambda_n)_n$ es equicontinua en un conjunto residual, pues dicha sucesión converge puntuaalmente. Dado que $2^{\mathbb{N}}$ es compacto se tiene el resultado . □

4.3.1. Teorema de Nissenzweig.

Definición 4.25. *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n^*)_n \subseteq X^*$.*

1. *Se dice que (x_n^*) converge tipo ℓ_2 si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*(x))^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \varepsilon \|x\|.$$

2. *Se dice que X tiene la propiedad de convergencia secuencial (c.s.) si existe $(x_n^*)_n$ convergente a cero débilmente* e $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| > 0$.*

3. *Se dice que X tiene la propiedad de convergencia secuencial ℓ_2 (ℓ_2 c.s.) si existe $(x_n^*)_n$ que converge tipo ℓ_2 e $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| > 0$.*

Definición 4.26. *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión*

$$(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$$

es semi ℓ_1 si para cada $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n^*\| \leq 1$, y si existe $r > 0$, tal que para cualesquiera números naturales $p, q, n_1 < ... < n_{p+q}$ y para cualesquiera reales no negativos $a_1 < ... < a_{p+q}$, se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} a_i x_{n_i}^* - \sum_{i=p+1}^{p+q} a_i x_{n_i}^*\right\| \geq r \sum_{i=1}^{p+q} a_i.$$

Observación 4.27. *Si X tiene la propiedad ℓ_2 c.s. entonces tiene c.s.*

Teorema 4.28 (Helly)**.** *Sea X un espacio normado. Sean*

$$\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\} \subseteq X^*$$

y

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subseteq F$$

no vacíos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Existe* $x_0 \in X$ *tal que* $x_i^*(x_0) = \alpha_i$ *para todo* $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

2. *Existe* $M \geq 0$ *tal que para todo subconjunto* $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\} \subseteq F$ *se tiene que*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_1\right| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*\right\|.$$

Además, si existe un número $M \geq 0$ *que satisfaga la segunda condición, entonces para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $x_0 \in X$ *tal que* x_0 *cumple la primera condición y* $\|x_0\| \leq M + \varepsilon$.

La demostración puede verse en [2].

Teorema 4.29. *Sea* X *un espacio de Banach. Si* X *no es reflexivo entonces para cada* $r < 1$, *existen sucesiones* $(x_n)_n \subseteq X$, $(x_n^*)_n \subseteq X^*$, *cuyos elementos tienen norma 1 y que satisfacen que* $x_n^*(x_i) > r$ *si* $n \leq i$ *y* $x_n^*(x_i) = 0$ *si* $n > i$.

Demostración. Sea $r < 1$ y sea X un espacio de Banach no reflexivo. Considérese el cociente $X^{**}/j(X)$, el cual es un espacio de Banach puesto que $j(X)$ es de Banach y por tanto cerrado.

Como X no es reflexivo es posible elejir $y^{**} \in X^{**} \setminus j(X)$, entonces $[y^*] \neq 0$. Sea $\delta \in (r, 1)$ y defínase $z^{**} = \frac{\delta}{\|[y^{**}]\|} y^{**}$. Nótese que

$$\|[z^{**}]\| = \left\| \left[\frac{\delta}{\|[y^{**}]\|} y^{**} \right] \right\| = \left(\frac{\delta}{\|[y^{**}\|} \right) \|[y^{**}]\| = \delta < 1.$$

Por el teroema 1.14 y 1.15, para $1 - \|[z^*\| > 0$ existe $u^{**} \in X^{**}$ tal que

$$[u^{**}] = [z^{**}],$$

$$\|u^{**}\| < \|[z^{**}]\| + (1 - \|[z^{**}]\| = 1$$

y

$$\|u^{**}\| > \|[u^{**}]\| = \|[z^{**}]\| > r.$$

Como $\|u^{**}\| = \sup\{|u^{**}(x^*)| : x^* \in U_{X^*}\} > r$, existe $y^* \in U_{X^*}$ tal que $|u^{**}(y^*)| > r > 0$. Sea $y_1^* = \frac{r}{u^{**}(y^{**}} y^*$. Nótese que

$$u^{**}(y_1^*) = u^{**}(\frac{r}{u^{**}(y^{**}} y^*) = r$$

y

$$\|y_1^*\| = \|\frac{r}{u^{**}(y^*} y^*\| = \frac{r}{|u^{**}(y^*|} \|y^*\| = \frac{r}{|u^{**}(y^*|} < 1.$$

Tambien, $r = |u^{**}(y_1^*)| \leq \|u^*\| \|y_1^*\| \leq \|y_1^*\|$.

Con un procediemiento análogo a la construcción de y_1^*, es posible construir $y_1 \in X$ tal que $\|y_1\| \leq 1$ y $y_1^*(y_1) = r$.

La manera de proceder será inductiva, entonces supóngase que se tiene $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq X$ y $\{y_1^*, ..., y_n^*\} \subseteq X^*$ que satisfacen las condiciones:

1. $\|y_n^*\| \leq 1$ y $\|y_n\| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $y_n^*(y_j) = 0$ si $n > j$ y $y_n^*(y_j) = r$ si $n \leq j$.
3. $u^{**}(y_n^*) = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $M = \frac{r}{\|[u^{**}]\|}$, nótese que $r < M < 1$.

Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$r = M\|[u^{**}]\| \leq M \left\| u^{**} + \sum_{i=1}^{n} a_i j(y_i) \right\|$$

Pues $a_i j(y_i) \in j(X)$. Sean $c_1 = c_2 = c_n = 0$ y $c_{n+1} = r$, además sean $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} b_i c_i \right| = |b_{n+1}| r,$$

Y suponiendo que b_{n+1} no es cero y considerando $a_j = \frac{b_j}{b_{n+1}}$ se tiene que

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} b_i c_i \right| = |b_{n+1}| r \leq$$

$$M|b_{n+1}| \left\| u^{**} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_{n+1}} j(y_i) \right\| = M \left\| b_{n+1} u^{**} + \sum_{i=1}^{n} b_i j(y_i) \right\|.$$

Así, como $0 < M < 1$, por el teorema de Helly, para $1 - M > 0$ se tiene que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| \leq M + (1 - M) = 1$ y $j(y_j)(x^*) = x^*(y_j) = c_j = 0$ para $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Defínase $y_{n+1}^* = x^*$, entonces se cumple que $\|y_{n+1}^*\| \leq 1$ y $y_{n+1}^*(y_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ y $u^*(y_{n+1}) = r$. Ahora resta encontrar $y_{n+1} \in X^*$ tal que $\|y_{n+1}\| \leq 1$ y $y_j^*(y_{n+1}) = r$ para todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n+1\}$. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i r \right| = \sum_{i=1}^{n+1} r u^{**}(y_i^*) = \left| u^{**} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i y_i^* \right) \right| \leq \|u^{**}\| \left\| \sum_{1=1}^{n+1} \gamma_i y_i^* \right\|.$$

Aplicando el teorema de Helly para $1-\|u^{**}\| > 0$ se tiene que existe $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1 - \|u^{**}\| + \|u^{**}\| = 1$ y $y_i(x) = r$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$. Defínase $y_{n+1} = x$ y de esta manera se concluye el paso inductivo. Finalmente, se obtuvieron sucesiones $(y_n)_n \subseteq X$ y $(y_n^*)_n \subseteq X^*$ tales que $\|y_n^*\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n^*(y_j) = r$ si $n \leq j$ y $y_n^*(y_j) = 0$ si $n < j$. Así, tomando $x_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$ y $x_n^* = \dfrac{y_n^*}{\|y_n^*\|}$ se obtienen las sucesiones buscadas. □

Teorema 4.30. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $(x_n^*)_n \subseteq X^*$ una sucesión semi ℓ_1. Supóngase que no existe $(y_n^*)_n \subseteq \langle\{x_n\}_n\rangle$, tal que, que converge a 0 en la topología débil* y que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\|y_n^*\|\} > 0$. Entonces X tiene LA PROPIEDAD ℓ_2 c.s.*

Este resultado fué probado en [13].

Teorema 4.31 (Nissenzweig)**.** *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión $(x_n^*)_n \subseteq X^*$ que converge a 0 en la topología débil* y $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n^*\|\} > 0$.*

Demostración. Primero supóngase que X no es reflexivo, entonces por el teorema 4.28, existe una sucesión $(x_n)_n$ semi ℓ_1 (por construcción la sucesión satisface las condiciones semi ℓ_1). Entonces si no existe $(y_n^*)_n \subseteq \langle\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ que satisface que converge débil* y que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\|y_n\|\} > 0$, entonces es consecuencia inmediata del teorema anterior que X tiene la propiedad ℓ_2 c.s. y en consecuencia tiene la propiedad c.s.; si sí existe tal sucesión, entonces no hay nada que demostrar.

Si X es reflexivo, entonces es posible encontrar una familia de subespacios cerrados de X, $(X_n)_n$, cuya unión es densa en X. Por el corolario 1.48 es posible encontrar $x_n^* \in X^*$ tal que $x_n(x) = 0$ para todo $x \in X_n$ y $\|x^*\| = 1$. Como $\bigcup_n X_n$ es densa en X, se sigue que $(x_n^*)_n$ converge débil* y así X tiene la propiedad c.s.

□

4.3.2. Demostración del teorema de Khurana.

Teorema 4.32 (Khurana.)**.** *Sea K un espacio topológico de Hausdorff y X un espacio de Banach. Entonces $C(K, X)$ es de Grothendieck si y sólo sí alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

1. *K es finito y X es de Grothendieck.*

2. *X es de dimensión finita y $C(K)$ es de Grothendieck.*

Demostración. Primero, si se satisface 1), el espacio $C(K,X) = X^{|K|}$ y en vista de la proposición 1.36 y la proposición 2.29, se tiene que

$$(C(K,X)^*, \sigma(C(K,X)^*, C(K,X))) = \left((X^*)^{|K|}, \tau\right)$$

donde X^* está dotado de la topología débil* y τ es la topología producto. Entonces, como X es de Grothendieck, se sigue que $C(K,X)$ es de Grothendieck.

Ahora, si se satisface 2), como X es de dimensión finita, entonces es isomorfo al espacio F^n, donde n es la dimensión de X. Entonces el espacio $C(K,X)$ es isomorfo al espacio $\prod_{i=1}^n C(K)$ y en vista de la proposición 1.36 y la proposición 2.29 se tiene que

$$(C(K,X)^*, \sigma(C(K,X)^*, C(K,X))) = \left(\prod_{i=1}^n C(K)^*, \tau\right).$$

Como $C(K)$ es de Grothendieck, se sigue que $C(K,X)$ es de Grothendieck.

Ahora supóngase que 1) y 2) no se satisfacen y que $C(K,X)$ es un espacio de Grothendieck.

Sea $(k_n)_n$ una sucesión en K, como este espacio es infinito podemos suponer que los puntos de la sucesión son todos distintos. Como X es de dimensión infinita por el teorema de Nissenzweig es posible elegir una sucesión en X^* que converja débil* y que no converja en norma, es decir, $(x_n^*)_n$ una sucesión en X^* tal que

$$x_n^* \longrightarrow 0$$

en la topología débil* y $\|x_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $\|x_n^*\| = \sup\{|x_n^*(x)| : x \in U_X\}$, entonces es posible encontrar una sucesión $(x_n)_n \subseteq U_X$ tal que $|x^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora defínase

$$\mu_n(A) = \begin{cases} x_n^* & \text{si } k_n \in A \\ 0 & \text{si } k_n \notin A \end{cases}$$

para cada A en la σ-álgebra de Borel de (K,τ). Visto como elemento de $C(K,X)^*$, μ_n es igual a la función dada por

$$\mu_n(\chi_A \otimes x) = \xi_{k_n}(\chi_A)x_n^*(x) = \chi_A(k_n)x_n^*(x), \quad (1)$$

donde $x \in X$ y ξ_{k_n} es la función evaluación en k_n, pues

$$\int (\chi_A \otimes x)d\mu_n = \mu_n(A)(x),$$

lo cual coincide con (1).

Nótese que $(\mu_n)_n \subseteq C(K,X)^* = M(K,X^*)$ y que

$$\|\mu_n\| = |\mu_n|(X) =$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\|\mu_k(A_i)\| : \{A_i\}_{i=1}^{n} \text{ es partición de K}, \ k \in \mathbb{N}\right\} \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, sea $f \in C(K)$ y $x \in X$. entonces

$$\mu_n(f \otimes x) = T(\mu_n) = \int (f \otimes x)d\mu_n = f(x_n)x_n^*(x) \longrightarrow 0$$

pues x_n^* converge en la topología débil*.

Para cada $M \subseteq \mathbb{N}$ defínase

$$L_M : C(K,X)^* \longrightarrow F$$

como $L_M(\mu) = \sum_{n\in M}\mu(\chi_{k_n} \otimes x_n)$ y nótese que

$$|L_M(\mu)| \leq$$

$$\sum_{n\in M}|\mu(\chi_{k_n} \otimes x_n)| \leq$$

$$\sum_{n\in M}|\mu|\|\chi_{k_n} \otimes x_n\| \leq \sum_{n\in M}|\mu|(\chi_{k_n}) = |\mu|\sum_{n\in M}\chi_{k_n} < \infty,$$

pues $\|\chi_{k_n} \otimes x_n\| \leq \chi_{k_n}$, donde $\|\chi_{k_n} \otimes x_n\|$ es la función mencionada en 4.22. De la desigualdad anterior se sigue que $L_M \in C(K,X)^{**}$ (pues es fácil verificar que es lineal). Como μ_n converge a 0 en la topologia débil* de $C(K,X)^*$ y puesto que $C(K,X)$ es de Grothendieck, se tiene que μ_n converge a 0 en la topología $\sigma(C(K,X)^*, C(K,X)^{**})$, es decir, $x^{**}(\mu_n)$ converge a 0 para todo $x^{**} \in C(K,X)^{**}$, en particular $L_M(\mu_n)$ converge a 0 para todo $M \subseteq \mathbb{N}$. Defínase

$$\lambda_n : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow F$$

como

$$\lambda_n(M) = L_M(\mu_n),$$

la cual es claramente una medida. Por el lema 4.23 se tiene que

$$\lambda_n(\{n\})) \longrightarrow 0,$$

esto es

$$L_{\{n\}}(\lambda_n) = \lambda_n(\chi_{k_n} \otimes x_n) = \chi_{k_n}(k_n)x_n^*(x_n) = x_n^*(x_n) \longrightarrow 0,$$

pero $x_n^*(x_n) \geq \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. □

Bibliografía

[1] Amir, D. and Lindenstrauss, J. *The Structure of Weakly Compact Sets in Banach Spaces*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 88, No. 1 (1968), pp. 35-46.

[2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer. 2010.

[3] Capultitla, Hernández J.C.,*Caracterización de Espacios Reflexivos.* México: Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM; 2017.

[4] Cohen, Donald L. *Measure Theory*, Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1980.

[5] Grothendieck, A., *Sur Les Aplications lineaires Faiblements Compacts D'space Du Type C(K).* Canadian J. of Math.5 ,(1953) 129-173.

[6] Horváth, J. *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley Publishing Company.

[7] Kelley J. L., Namioka I., *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Company, 1963.

[8] Khurana S. S., *Convergent Sequences of Regular Measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. S6r. Math. Astronom. Phys., vol. 24 (1976), pp. 37-42.

[9] Khurana S. S. *Grothendieck Spaces* Illinous Journal Of Mathematics Vol. 22. No. 1 (1978) pp. 79-80.

[10] Megginson, Robert E. *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Vrlag, 1998.

[11] Morrison, T. J. *Functional Analysis. An Introduction to Banach Space Theory*, A Wiley-Interscience Publication. 2000.

[12] Munkres, J. *Topology* 2° ed. Prentice Hall, Inc. (2000)

[13] Nissenzweing A., *w*-sequential Converence*, Israel J. Math., vol. 22 (1975), pp. 266-272.

[14] Rudin, W. *Functional Analysis*, Second edition McGraw Hill, 1991.

[15] Rudin, W. *Priniples of Mathematical Analysis.* (2da. edición) México, McGrow-Hill, 1980.

[16] Ryan, Raymond A. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer 2002, XIV, 226 p.

[17] Schubert, H. *Topologie*, Teubner, Stuttgart, 1964.

[18] Schuchat A., *lntegral Representation Theorems in Topoloical Vector Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 172 (1972), pp. 373-397.

[19] Seever G.L., *A Peculiar Banach Function Space.* Proc. Amer. Math. Soc.,16,(1965),662-664.