



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

EFFECTO CASIMIR DINÁMICO EN ÓPTICA CUÁNTICA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
RICARDO ROMÁN ANCHEYTA

TUTOR  
DR. JOSÉ FRANCISCO RÉCAMIER ANGELINI  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. WOLF LUIS MOCHÁN BACKAL  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN  
SISTEMAS, UNAM

CUERNAVACA MORELOS, ENERO 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Efecto Casimir dinámico en óptica cuántica

**Ricardo Román Ancheyta**

Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo.  
Postal 48-3, Cuernavaca, Morelos 62251, México

E-mail: [ancheyta6@gmail.com](mailto:ancheyta6@gmail.com)

10 Enero 2018

**Resumen.** En este trabajo se realiza un estudio del efecto Casimir dinámico en dos escenarios del campo de la óptica cuántica. El efecto Casimir dinámico representa la generación de fotones reales provenientes del estado de vacío, como resultado de una amplificación paramétrica de las fluctuaciones cuánticas asociadas, debido a cambios no adiabáticos en las condiciones de frontera del campo electromagnético. En el primer escenario se investiga cómo la producción de fotones se ve afectada drásticamente cuando se consideran medios lineales y no lineales dentro de las cavidades no estacionarias. En el segundo, se propone un esquema experimental factible, basado en un arreglo de guías de onda acopladas en el cual se desarrolla una simulación clásica del efecto Casimir dinámico. Por último, mediante una ecuación maestra microscópica se estudia el efecto que tiene la decoherencia y disipación sobre los fotones generados.

**Abstract.** In this work we study the dynamical Casimir effect in two scenarios of quantum optics. The dynamical Casimir effect is the generation of real photons from the vacuum state, as a result of parametric amplification of vacuum fluctuations, due to non-adiabatic changes in the boundary conditions of the field. In the first scenario we investigate how the photon production is drastically affected by inclusion of linear and nonlinear mediums inside nonstationary cavities. In the second scenario, we propose a feasible experimental setup, based on a photonic array of coupled waveguides on which a classical simulation of the dynamical Casimir effect is performed. Finally, using a microscopic master equation we studied the effect of dissipation and decoherence upon created photons.

## Publicaciones

Esta tesis está basada en las siguientes publicaciones:

- R. Román-Ancheyta, M. Berrondo and J. Récamier, “*Parametric oscillator in a Kerr medium: evolution of coherent states*,” J. Opt. Soc. Am. B **32**, (8) 1651-1655 (2015).
- R. Román-Ancheyta, C. González-Gutiérrez and J. Récamier, “*Influence of the Kerr nonlinearity in a single nonstationary cavity mode*,” J. Opt. Soc. Am. B **34**, (6) 1170-1176 (2017).
- R. Román-Ancheyta, I. Ramos-Prieto, A. Perez-Leija, K. Busch, and R. de J. León-Montiel, “*Dynamical Casimir effect in stochastic systems: Photon harvesting through noise*,” Phys. Rev. A **96**, 032501 (2017).
- R. Román-Ancheyta, O. de los Santos-Sánchez, and C. González-Gutiérrez, “*Damped Casimir radiation and photon correlation measurements*”, accepted in J. Opt. Soc. Am. B (2018).

Publicaciones no incluidas en la tesis:

- H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta and L. Gutiérrez, “*Phase-dependent fluctuations of intermittent resonance fluorescence*,” Phys. Rev. A **93**, 033801 (2016).
- C. González-Gutiérrez, R. Román-Ancheyta, D. Espitia and R. Lo Franco, “*Relations between entanglement and purity in non-Markovian dynamics*,” Int. J. Quantum Inf. **14**, (7) 1650031 (2016).
- L. Gutiérrez, H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta and L. Horvath, “*Large and time-asymmetric quantum fluctuations of a V-type three-level atom resonance fluorescence*” J. Opt. Soc. Am. B **34**, (11) 2301-2309 (2017).

	3
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Efecto Casimir dinámico: Hamiltoniano efectivo</b>	<b>7</b>
2.1. Hamiltoniano efectivo de una cavidad no estacionaria . . . . .	7
2.2. Desarrollo de Moore . . . . .	11
2.3. Cavidad vacía unimodal . . . . .	12
2.4. Resumen de capítulo . . . . .	15
<b>3. Efecto Casimir dinámico con un medio de Kerr</b>	<b>16</b>
3.1. Hamiltoniano de cavidad más el medio de Kerr . . . . .	17
3.2. Generación de fotones de vacío . . . . .	22
3.3. Enfoque semiclásico . . . . .	24
3.4. Resumen de capítulo . . . . .	28
<b>4. Efecto Casimir dinámico en redes fotónicas</b>	<b>30</b>
4.1. Simulación del efecto Casimir dinámico en guías de onda . . . . .	34
4.2. Incrementando la producción de fotones a través del ruido . . . . .	37
4.3. Efectos térmicos en arreglos fotónicos . . . . .	38
4.4. Resumen de capítulo . . . . .	40
<b>5. Efecto Casimir dinámico con disipación</b>	<b>41</b>
5.1. Enfoque fenomenológico . . . . .	42
5.2. Ecuación maestra microscópica . . . . .	44
5.3. Generación y correlación de fotones . . . . .	46
5.4. Resumen de capítulo . . . . .	49
<b>6. Conclusiones y prespectivas</b>	<b>50</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>53</b>

## 1. Introducción

En 1970 Moore predijo teóricamente que en una cavidad electromagnética unidimensional hecha con espejos planos perfectamente conductores, donde uno de ellos está fijo y el otro puede moverse, se podrían generar fotones reales provenientes del estado de vacío cuántico [1]. Tal efecto se conoce hoy en día como efecto Cásimir dinámico de cavidades, DCE (por su siglas en inglés *Dynamical Casimir effect*) y puede ser entendido como la amplificación paramétrica de las fluctuaciones cuánticas del estado de vacío, como consecuencia de cambios no adiabáticos en las condiciones de frontera dependientes del tiempo del campo electromagnético. A diferencia del efecto Casimir estático, el corrimiento Lamb o la emisión espontánea, los cuales son evidencia indirecta de las fluctuaciones cuánticas de vacío del campo electromagnético, el DCE es considerado como una prueba directa de la existencia de dichas fluctuaciones [2]. Desde entonces han surgido una amplia variedad de trabajos teóricos sobre el DCE [3]; por ejemplo, la generación y detección de los fotones generados ha sido estudiada en cavidades oscilantes en una [4] y tres dimensiones [5]. Sin embargo, observaciones experimentales del efecto no se habían logrado sino hasta hace poco. El DCE fue demostrado experimentalmente usando un metamaterial de Josephson superconductor, el cual estaba formado por un arreglo de 250 SQUIDs (*Superconducting quantum interference devices*) los cuales simulaban en conjunto, un índice de refracción efectivo dependiente del tiempo, que a su vez cambia la longitud efectiva del resonador, comportándose entonces como un sustituto de uno de los espejos de la cavidad dinámica, el cual oscilaba a velocidades que son una fracción significativa de la velocidad de la luz [6].

Por otro lado, en 1976 se demostró teóricamente que el DCE también se puede manifestar cuando se tiene un solo espejo (sin necesidad de la cavidad), que se mueve con aceleraciones no uniformes en espacio libre [7], lo cual fue confirmado en una observación experimental realizada en [8]. Además, bajo ciertas trayectorias específicas del espejo, es posible generar una radiación que tenga exactamente el mismo espectro de la radiación térmica de Hawking producida en la evaporación de agujeros negros [9]. Más aún, se ha demostrado que existe una equivalencia entre los efectos Unruh, Hawking, Casimir dinámico y la amplificación paramétrica [2, 10]. Por tal motivo se presume que el DCE está relacionado con la creación de partículas en la evolución temprana del universo.

En el capítulo 2 de esta tesis se describe y se desarrolla el marco teórico referente a los Hamiltonianos efectivos, éstos serán adoptados con el fin de realizar un estudio del DCE con la notación y la jerga de la óptica cuántica. Además de ser un resultado importante desde el punto de vista fundamental de la teoría cuántica de campos, el efecto Casimir dinámico ha sido investigado en varios contextos tales como: iones atrapados [11] (generación de fonones en lugar de fotones), refrigeradores cuánticos [12], medios tipo Kerr [13] y más recientemente, en sistemas estocásticos [14]. Aplicaciones del efecto Casimir dinámico como recurso para generar estados altamente entrelazados utilizando circuitos cuánticos han sido propuestas en [15].

Mencionado brevemente e indirectamente en el párrafo anterior, el efecto Kerr [16] es un efecto óptico cuántico no lineal bien conocido, en donde el índice de refracción de un material es proporcional a la intensidad de la luz [17]. Es comúnmente utilizado para generar estados no clásicos de la luz. El ejemplo típico [18] del efecto es cuando un estado coherente que atraviesa un medio de Kerr, evoluciona en una superposición macroscópicamente distinguible de múltiples estados coherentes conocidos como estados de gatos de Schrödinger de varias componentes [19]. Resultados experimentales de la realización del efecto Kerr a nivel de un solo fotón en circuitos cuánticos superconductores se han conseguido recientemente en [20]. Se demostró en [21] que no linealidades tipo Kerr deberían tomarse en cuenta en una descripción realista del DCE. Es por esto que en el capítulo 3 de esta tesis, la motivación central será estudiar un sistema en el que ambos efectos, Casimir dinámico y Kerr se manifiestan simultáneamente. En este trabajo se quiere contestar la siguiente pregunta: ¿cómo se modifica la generación de fotones del estado de vacío cuando se incluye la presencia de un medio no lineal tipo Kerr en una cavidad no estacionaria? Para contestarla, lo que se hará es proponer un Hamiltoniano que represente a los dos efectos, realizar una serie de aproximaciones a ese Hamiltoniano y con ello obtener el operador de evolución del sistema, para así poder transformar cualquier observable física de interés que se desee. En este caso será el operador de número y después se hará su valor esperado con respecto al estado de vacío.

Debido a que la realización del DCE incluyendo no linealidades tipo Kerr es un efecto cuántico muy difícil de lograr experimentalmente, el propósito del capítulo 4 será, plantear la simulación clásica del DCE con interacciones lineales y no lineales utilizando una plataforma de arreglos fotónicos, formados por guías de ondas acopladas mediante ondas evanescentes. Tales arreglos permiten el mapeo de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del DCE en una dinámica equivalente, que describe la propagación lineal de luz clásica la cual emula la generación de luz cuántica proveniente del estado de vacío. Con ello será interesante observar, que efectos provenientes del campo de la materia condensada como las oscilaciones de Bloch y las transiciones de fase, se llegan a manifestar en dichos arreglos fotónicos. Al final del capítulo 4 se realiza un estudio del efecto que tiene la temperatura en la producción de fotones y se da simultáneamente una propuesta experimental para su implementación. Dado lo genérico del Hamiltoniano de sitios que modela los arreglos de guías de onda, éstas han sido exitosas en el modelaje de otro tipo de fenómenos físicos cuánticos complicados de realizar experimentalmente, como lo es un condensado de Bose-Einstein [22], la localización de Anderson [23] las caminatas aleatorias cuánticas con [24] y sin [25] interacción entre partículas, por mencionar algunos.

En general el DCE se ha estudiado ampliamente en diferentes sistemas, incluyendo cavidades no estacionarias con uno [26] o dos [27] átomos de dos niveles en su interior y que interactúan de manera dipolar con el campo de la cavidad; así como también en medios dieléctricos dependientes del tiempo [28]. Sin embargo, en la mayoría de esos trabajos el efecto que tiene el inevitable entorno que todo sistema físico debe

experimental es ignorado. Es pues el propósito del capítulo 5, estudiar cuál es el efecto que tiene la decoherencia y la pérdida de energía sobre los fotones generados en una cavidad dinámica. Para ello se deriva una ecuación maestra microscópica adecuada a la cavidad dentro de las aproximaciones de Born y Markov, así como en régimen donde la producción de fotones está acotada. Esto permite calcular los vectores y operadores propios del sistema, aplicar la fórmula cuántica de regresión y obtener la función de correlación de segundo orden; dicha función será usada para entender cuál es la estadística de los fotones que son generados del estado de vacío. Con base en los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis las conclusiones y perspectivas serán presentadas en el capítulo 6.



## 2. Efecto Casimir dinámico: Hamiltoniano efectivo

Los primeros estudios del efecto Casimir dinámico fueron realizados en la representación de Heisenberg, donde el operador cuántico del campo eléctrico se construye utilizando el conjunto completo de soluciones de la ecuación de onda bidimensional de Klein-Gordon (KG), junto con el producto interno de KG [2]. En este marco, la caracterización del estado del campo se hace a través del tensor de energía-momento. Sin embargo, debido a que la invarianza conforme ya no es útil en 3D, diversas estrategias para estudiar el DCE han surgido [29]. De entre ellas, nosotros usaremos el enfoque de Hamiltonianos efectivos [3], el cual describe la dinámica del campo en la representación de Schrödinger.

En este capítulo nos enfocaremos en trabajos previos realizados del DCE en el área de cavidades electromagnéticas. En particular nos guiaremos de la referencia [30] para obtener y cuantizar un Hamiltoniano efectivo que describa al campo electromagnético dentro de una cavidad no estacionaria unidimensional. Veremos también el efecto que tiene sobre la generación de fotones el hecho de incluir una temperatura finita en el sistema. Esto sentará las bases para hacer un estudio subsecuente del efecto Casimir dinámico en otros sistemas de la óptica cuántica.

### 2.1. Hamiltoniano efectivo de una cavidad no estacionaria

Consideremos una cavidad unidimensional que posea en sus extremos espejos perfectamente reflectores (reflejan todas las longitudes de onda incidentes) y que no tenga algún medio dieléctrico dentro, i.e.,  $\epsilon(x, t) = 1$ . Con ello las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.2)$$

Vamos a trabajar con el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  definido como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  ya que una vez conocido éste, será posible mediante (2.1) encontrar el campo eléctrico y por lo tanto la solución al problema clásico. Si trabajamos en la norma de Lorentz  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$  con  $V$  el potencial escalar, entonces el potencial vectorial satisface la siguiente ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

donde hicimos  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 1$ . Como estamos trabajando en una dimensión el potencial vectorial es  $\mathbf{A}(\vec{r}, t) = \hat{e}_x A(x, t)$ , suponemos que las polarizaciones están desacopladas. La cavidad es no estacionaria en el sentido de que el espejo izquierdo está fijo en  $x=0$  y el espejo derecho se puede mover en alguna trayectoria  $x=q(t)$  durante un intervalo de tiempo  $0 < t < T$ , de esta manera las condiciones de frontera son

$$A(0, t) = A(q(t), t) = 0. \quad (2.4)$$

La dinámica del sistema está completamente especificada por las ecuaciones (2.3) y (2.4).

Vamos a definir un conjunto de coordenadas generalizadas  $\{Q_k(t)\}$  dadas por

$$Q_k(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \int_0^{q(t)} dx A(x, t) \sin \frac{k\pi x}{q(t)}, \quad (2.5)$$

donde  $k=1, 2, 3, \dots$  y  $Q_k(t)$  es básicamente la descomposición modal del campo, pero a diferencia de la situación estática, las funciones modales base usadas aquí están determinadas por la frecuencia instantánea de la cavidad  $\omega_k(t)=k\pi/q(t)$ , la cual depende de la posición instantánea del espejo. Dado que la base de modos es completa, podemos escribir al potencial vectorial de la siguiente manera

$$A(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin \frac{k\pi x}{q(t)}, \quad (2.6)$$

el cual satisface de manera automática las condiciones de frontera. Para que el potencial cumpla la ecuación de onda lo que tenemos que hacer es sustituirlo en dicha ecuación y así obtener las ecuaciones diferenciales de las coordenadas  $Q_k(t)$ . Primero recordemos la regla de la cadena aplicada a la función  $\varphi_k$  que abrevia

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin \frac{k\pi x}{q(t)}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = \dot{q}(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial q}, \quad (2.7)$$

donde el punto representa la derivada temporal. Las derivadas del potencial vectorial involucradas en la ecuación de onda son

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2(t) Q_k(t) \varphi_k, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Q}_k(t) \varphi_k + 2\dot{q}(t) \dot{Q}_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial q} + \ddot{q}(t) Q_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial q} + \dot{q}^2(t) Q_k(t) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q^2} \right\}. \quad (2.9)$$

Si igualamos las dos ecuaciones anteriores, multiplicamos el resultado por  $\varphi_j$ , integramos cada término con respecto a  $dx$  en el intervalo  $[0, q(t)]$  y utilizamos las siguientes propiedades de las funciones ortonormales  $\varphi_k$

$$g_{kj} = q(t) \int_0^{q(t)} \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial q} dx, \quad \sum_k g_{jk} g_{lk} = q^2(t) \int_0^{q(t)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q} dx, \quad (2.10)$$

$$\delta_{kj} = \int_0^{q(t)} \varphi_k \varphi_j dx, \quad (2.11)$$

obtenemos las ecuaciones diferenciales para las funciones  $Q_k(t)$ :

$$\ddot{Q}(t)_k + \omega_k^2(t) Q_k(t) = 2\lambda(t) \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j(t) + \dot{\lambda}(t) \sum_j g_{kj} Q_j(t) + \lambda^2(t) \sum_{j,l} g_{jk} g_{jl} Q_l(t), \quad (2.12)$$

donde definimos  $\lambda(t)=\dot{q}(t)/q(t)$ . En el último término del lado derecho de la ecuación (2.12) está implícito que  $j \neq k$  en la doble suma, debido a que el coeficiente adimensional

y antisimétrico  $g_{kj}$  se puede escribir (dada la ortonormalidad de  $\varphi_k$ ) como

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2}, & k \neq j, \\ 0, & k = j. \end{cases} \quad (2.13)$$

Observemos que a  $t < 0$  la cavidad posee una longitud fija  $L_0 = q(0)$  y la solución de (2.12) es  $Q_k(t) = \exp[-i\omega_k(0)t]$ , que es la conocida dependencia temporal armónica del potencial vectorial (2.6) que resuelve el problema estático. Si consideramos que (2.12) son las ecuaciones de movimiento provenientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces lo que debemos hacer es encontrar un Lagrangiano que reproduzca dichas ecuaciones de movimiento. Sin mucha complicación es posible demostrar que un Lagrangiano que da origen a (2.12) es el siguiente:

$$\mathcal{L}(Q_k, \dot{Q}_k) = \frac{1}{2} \sum_k \{ \dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(t) Q_k^2 \} - \lambda(t) \sum_{j,k} g_{kj} \dot{Q}_k Q_j + \frac{1}{2} \lambda^2(t) \sum_{j,k,l} g_{kj} g_{kl} Q_l Q_j. \quad (2.14)$$

Para obtener el respectivo Hamiltoniano debemos usar la definición del momento canónico conjugado (omitiendo la dependencia temporal en la notación)

$$P_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k - \lambda(t) \sum_j g_{kj} Q_j, \quad (2.15)$$

hacer una transformación de Legendre

$$\mathcal{H}(P_k, Q_k) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{L}(Q_k, \dot{Q}_k), \quad (2.16)$$

para finalmente obtener un Hamiltoniano que reproduzca las ecuaciones de movimiento (2.12) y que represente al campo electromagnético dentro de la cavidad no estacionaria

$$\mathcal{H}(P_k, Q_k) = \frac{1}{2} \sum_k \{ P_k^2 + \omega_k^2(t) Q_k^2 \} + \lambda^2(t) \sum_{k,j} g_{kj} P_k Q_j. \quad (2.17)$$

Podemos identificar fácilmente que en la estructura de (2.17), el primer término del lado derecho corresponde a un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia dependiente del tiempo. Adicionalmente aparece un acoplamiento bilineal de las coordenadas y los momentos generalizados que también es dependiente del tiempo. Dicho acoplamiento se elimina cuando  $\lambda(t)=0$ , es decir, cuando el espejo que se mueve adquiere una posición fija. El Hamiltoniano clásico (2.17) sienta la base con la cual podemos realizar una cuantización canónica estándar. Ésta consiste en promover a las variables  $Q_k(t)$  y  $P_k(t)$  a ser operadores que obedecen las siguientes reglas de conmutación (haciendo  $\hbar = 1$ )

$$[\hat{Q}_k(t), \hat{P}_j(t)] = i\delta_{kj}, \quad [\hat{Q}_k(t), \hat{Q}_j(t)] = [\hat{P}_k(t), \hat{P}_j(t)] = 0. \quad (2.18)$$

Usando a  $\hat{\mathcal{H}}$  en la ecuación de movimiento  $\dot{O}_H = i[\hat{\mathcal{H}}, O_H]$ , siendo  $O_H$  un operador en la representación de Heisenberg, se obtienen las derivadas temporales de los operadores

$$\frac{d\hat{Q}_k(t)}{dt} = \hat{P}_k(t) + \lambda(t) \sum_j g_{kj} \hat{Q}_j(t), \quad (2.19)$$

$$\frac{d\hat{P}_k(t)}{dt} = -\omega_k^2(t) \hat{Q}_k(t) - \lambda(t) \sum_j g_{jk} \hat{P}_j(t). \quad (2.20)$$

Para describir al sistema en el espacio de Fock, debemos introducir los operadores bosónicos de creación y aniquilación “instantáneos” dados por:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}}[\omega_k(t)\hat{Q}_k(t) + i\hat{P}_k(t)], \quad (2.21)$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}}[\omega_k(t)\hat{Q}_k(t) - i\hat{P}_k(t)], \quad (2.22)$$

los cuales satisfacen  $[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}$ . Seguidamente haremos las derivadas temporales de (2.21) y (2.22) tomando en cuenta que términos extras aparecerán debido a la dependencia explícita en el tiempo de  $\omega_k(t)$ . Con ayuda de (2.19) y (2.20) conseguimos

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k(t)a_k + \chi_k(t)a_k^\dagger + \frac{\lambda(t)}{2} \sum_j \left\{ g_{kj} \sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}} (a_j + a_j^\dagger) + g_{jk} \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}} (a_j^\dagger - a_j) \right\}, \quad (2.23)$$

$$\frac{da_k^\dagger}{dt} = i\omega_k(t)a_k^\dagger + \chi_k(t)a_k + \frac{\lambda(t)}{2} \sum_j \left\{ g_{kj} \sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)}} (a_j + a_j^\dagger) + g_{jk} \sqrt{\frac{\omega_j(t)}{\omega_k(t)}} (a_j - a_j^\dagger) \right\}. \quad (2.24)$$

Si consideramos que las ecuaciones (2.23) y (2.24) son las provenientes de la ecuación de movimiento de Heisenberg, entonces realizando un poco de álgebra se puede demostrar que el Hamiltoniano efectivo que las origina es [30]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\text{eff}} = & \sum_k \omega_k(t) a_k^\dagger a_k + i \sum_k \chi_k(t) (a_k^{\dagger 2} - a_k^2) \\ & + \frac{i}{2} \sum_{k,j} \mu_{kj}(t) \{ a_k^\dagger a_j^\dagger + a_k^\dagger a_j - a_j a_k - a_j^\dagger a_k \}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

con la abreviación de las siguientes funciones

$$\omega_k(t) = \frac{k\pi}{q(t)}, \quad \chi_k(t) = \frac{1}{4\omega_k(t)} \frac{d\omega_k(t)}{dt}, \quad \mu_{kj}(t) = \lambda(t) g_{kj} \left[ \frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)} \right]^{1/2}. \quad (2.26)$$

De esta manera, (2.25) representa el Hamiltoniano efectivo dependiente del tiempo correspondiente al campo electromagnético cuantizado dentro de una cavidad no estacionaria unidimensional sin un medio dieléctrico dentro, y será la base para todos los subsecuentes tratamientos. Notemos que el Hamiltoniano posee términos cuadráticos en los operadores de creación, más adelante veremos que éstos términos serán los responsables de la generación de fotones provenientes del vacío cuántico. Además se observa una interacción entre todos los modos de la cavidad dada por el término que multiplica  $\mu_{kj}(t)$ . Dicha interacción es posible que actúe como un ambiente externo que haga disminuir la producción de fotones. Es importante mencionar que el operador  $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{eff}}$  se encuentra en la representación de Schrödinger y que los operadores de creación y aniquilación que lo forman son independientes del tiempo y no deben confundirse con los definidos en (2.21) y (2.22).

Si hubiésemos supuesto que la cavidad estuviera llena con un medio dieléctrico lineal,

no dispersivo, sin pérdidas y con una permitividad con dependencia espacial y temporal  $\epsilon(x, t)$ , entonces el Hamiltoniano efectivo que describe al campo cuántico en dichas condiciones tendría exactamente la misma estructura que (2.25), pero en la definición de las funciones (2.26) aparecerían términos adicionales (30).

## 2.2. Desarrollo de Moore

Por completez vamos a comentar brevemente el resultado de un método alternativo pero equivalente al desarrollado unas paginas atrás, que también es muy útil en la descripción del campo cuántico dentro de la cavidad unidimensional no estacionaria. El tratamiento fue desarrollado inicialmente por Moore y en general consiste en encontrar los modos normales de un campo escalar sin masa  $A(x, t)$  que satisface la ecuación de onda bidimensional de Klein-Gordon (KG)  $\partial_x^2 A(x, t) = \partial_t^2 A(x, t)$  con condiciones de frontera (2.4). La solución se obtiene haciendo una transformación de coordenadas conformal que deja invariante la métrica y la ecuación de KG, en dichas coordenadas el sistema es estático y la solución es trivial, las funciones modales en las coordenadas originales se expresan como

$$\phi_n(x, t) = (4\pi n)^{-1/2} [e^{-i\pi n R(t+x)} - e^{-i\pi n R(t-x)}], \quad (2.27)$$

donde  $R(\xi)$  debido a las condiciones de frontera (2.4), satisface la ecuación funcional

$$R(t + q(t)) - R(t - q(t)) = 2. \quad (2.28)$$

Resolver la ecuación (2.28) representa un verdadero reto, generalmente éste se aborda desde el enfoque del “problema inverso”, el cual consiste en extraer de (2.28) la función desconocida  $q(t)$  dada previamente, una dependencia particular de  $R(\xi)$ . Soluciones numéricas eficientes a la ecuación funcional han sido desarrolladas recientemente (31). Los modos  $\phi_n(x, t)$  son ortonormales con respecto al producto interno  $** \langle \phi_p, \phi_q \rangle = i/\hbar [\bar{\phi}_p(t) \dot{\phi}_q(t) - \phi_q(t) \dot{\bar{\phi}}_p(t)]$  y pueden ser utilizados en una cuantización canónica estándar del campo

$$A(x, t) = \sum_n a_n \phi_n(x, t) + a_n^\dagger \bar{\phi}_n(x, t), \quad (2.29)$$

donde  $\bar{\phi}$  significa conjugación compleja. La caracterización del estado del campo se puede hacer mediante el tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}(x, t)$ . Si el estado inicial del campo es el vacío cuántico, entonces el valor esperado de los campos eléctrico y magnético son cero a cualquier tiempo. Sin embargo, dado que la cavidad es no estacionaria, el espejo vibrante u oscilante puede alterar como función del tiempo las fluctuaciones en algún punto espacial dentro de la cavidad. Es de interés calcular estas fluctuaciones locales utilizando la densidad de energía del campo dada por

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left\langle \left( \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left( \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right\}, \quad (2.30)$$

\*\*En teoría cuántica de campos con dimensiones espacio-temporales mayores a la cerodimensional como la usada en éste trabajo, el producto interno es llamado producto de KG.

donde el valor esperado se realiza con respecto al estado de vacío. Debido a las contribuciones provenientes de frecuencias arbitrariamente altas se sabe que (2.30) es divergente; el cálculo del tensor requiere, para obtener resultados finitos, de un procedimiento de regularización que en general no es único. Si la trayectoria  $q(t)$  del espejo desarrolla un movimiento cercano al armónico, entonces la densidad de energía adquiere una estructura no trivial en forma de dos paquetes de onda contrapropagantes que oscilan de un extremo al otro de la cavidad amplificando la fuerza de Casimir en cada periodo [32]. Mas importante aún, el número promedio de fotones del estado de vacío está relacionado con el flujo de energía  $\langle T_{01}(x, t) \rangle$ . Solamente con trayectorias que posean un movimiento acelerado no uniforme es posible obtener  $\langle T_{01}(x, t) \rangle \neq 0$  [7]. A este resultado a menudo se le conoce como efecto Casimir dinámico. Es importante mencionar que con este método alternativo, no es posible encontrar un Hamiltoniano fundamental y consistente con la teoría una vez asumidas las condiciones de frontera (2.4). Por lo tanto, todo el tratamiento es llevado a cabo en el esquema de Heisenberg.

### 2.3. Cavidad vacía unimodal

Es bien sabido que un sistema, sea clásico o cuántico, que dependa explícitamente del tiempo, a menudo puede responder de manera resonante cuando es modulado bajo ciertas frecuencias. Una solución analítica completamente general de la ecuación de Schrödinger utilizando el Hamiltoniano (2.25) para cualquier ley de movimiento  $q(t)$  no se conoce por ahora (hasta donde sabemos). Soluciones perturbativas [33] y aproximadas han sido investigadas para tiempos cortos [30] y largos [34]. Las soluciones perturbativas pueden llegar a fallar cuando el sistema se encuentra en algún tipo de resonancia. Las resonancias de (2.25) las podemos encontrar cuando el espejo móvil desarrolla un movimiento del tipo oscilatorio a una frecuencia cercana al doble de la frecuencia propia de algún modo de la cavidad en reposo, es decir, resonancias paramétricas. En estos casos los términos que oscilan muy rápido pueden despreciarse y con ello  $\tilde{\mathcal{H}}_{eff}$  se reduce de manera considerable. Si la cavidad fuese tridimensional y rectangular, entonces el Hamiltoniano efectivo bajo estas condiciones de resonancia paramétrica se simplifica al de un solo oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Esto sucede debido al carácter no equi-espaciado entre las frecuencias propias de los modos de una cavidad en tres dimensiones  $\omega_{mnl} = \pi[(m/L_x)^2 + (n/L_y)^2 + (l/L_z(t))^2]^{1/2}$ . Más aún, si consideramos que la cavidad descrita en la sección anterior puede soportar solamente un modo del campo, entonces la interacción intramodal automáticamente desaparece y nos quedamos con el término del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo\*\*.

Ya sea que la cavidad no estacionaria pueda soportar un solo modo o que ésta se encuentre bajo las condiciones de resonancia paramétrica arriba mencionadas, el Hamiltoniano efectivo  $\tilde{\mathcal{H}}_{eff}$  es reducido a su expresión más simple no trivial, capaz de

\*\*Es interesante ver que los campos libres en un espacio-tiempo curvo son similares a una colección de osciladores armónicos con frecuencia dependiente del tiempo [35].

describir en ausencia de disipación el campo electromagnético dentro de la cavidad; dicha simplificación está dada por [5, 26, 27, 30]

$$H_c = \omega(t)a^\dagger a + i\chi(t)(a^{\dagger 2} - a^2), \quad \chi(t) = \frac{1}{4\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (2.31)$$

Hemos omitido la etiqueta del subíndice  $k$  en todos los operadores debido a que estamos trabajando con un solo modo electromagnético, para el cual  $[a, a^\dagger] = 1$ . Recordemos que  $\omega(t)$  es la frecuencia instantánea de la cavidad, la cual vamos a considerar que tiene la siguiente dependencia armónica

$$\omega(t) = \omega_0[1 + \epsilon \sin(2\omega_0 t)], \quad (2.32)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia del modo fundamental (resonante o seleccionado) cuando ambos espejos la cavidad están fijos en su posición equilibrio,  $\epsilon$  es la llamada amplitud de modulación y  $2\omega_0$  la frecuencia de modulación, que para espejos masivos no puede estar en el régimen óptico; debe estar en el de microondas. En la literatura del efecto Casimir dinámico,  $H_c$  es conocido como *Hamiltoniano de cavidad vacía*. Se sabe que el número promedio de fotones generados a partir del estado de vacío cuántico bajo la acción de  $H_c$ , crece de manera exponencial con el tiempo [5]. Para mostrar tal resultado notemos que en el régimen de perturbación pequeña, esto es, si  $\epsilon \ll 1$  uno puede escribir  $\omega(t) \approx \omega_0$  ya que la influencia de la modulación solamente es relevante en el coeficiente de compresión  $\chi(t)$  [36]. Haciendo  $\chi(t) \approx (\epsilon\omega_0/2) \cos(2\omega_0 t)$  podremos tener un Hamiltoniano aproximado de la siguiente forma

$$H_c \approx \omega_0 a^\dagger a + (i\epsilon\omega_0/2) \cos(2\omega_0 t)(a^{\dagger 2} - a^2). \quad (2.33)$$

Si nos movemos a un marco de referencia generado por la transformación unitaria  $U_1 = \exp(-i\omega_0 t a^\dagger a)$  conseguimos

$$H_c^I = (i\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} - a^2 + a^{\dagger 2}e^{i4\omega_0 t} - a^2e^{-i4\omega_0 t}). \quad (2.34)$$

En la expresión anterior los dos últimos términos del lado derecho oscilan muy rápido y mediante el uso de la aproximación de onda rotante (RWA) podemos eliminarlos, ya que al realizar la integración los dos primeros serán dominantes. Así obtenemos un Hamiltoniano de cavidad vacía en la representación de interacción que es independiente del tiempo

$$H_c^I \approx (i\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} - a^2), \quad (2.35)$$

cuyo operador de evolución temporal es  $U_c^I = \exp[\frac{1}{2}r(a^{\dagger 2} - a^2)]$ , el cual podemos identificar claramente como el operador de compresión  $S(r)$ , donde  $r = \epsilon\omega_0 t/2$  viene siendo el parámetro de compresión dependiente del tiempo. Para encontrar la evolución temporal de  $a$  y  $a^\dagger$  usaremos al operador  $U_c^I$  el cual genera una transformación de Bogoliubov en cada uno de los operadores del campo, el resultado de dicha transformación se escribe como:

$$a(t) = a^\dagger \sinh(r) + a \cosh(r), \quad a^\dagger(t) = a^\dagger \cosh(r) + a \sinh(r). \quad (2.36)$$

El número promedio de fotones en el estado de vacío,  $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$ , se puede calcular a un tiempo arbitrario utilizando la transformación anterior dando como resultado

$$\langle 0|a^\dagger(t)a(t)|0\rangle = \sinh^2(\epsilon\omega_0 t/2), \quad (2.37)$$

donde para  $\epsilon\omega_0 t > 1$  se observa el bien conocido crecimiento exponencial en la generación de fotones. Este crecimiento es una manifestación puramente cuántica de una amplificación paramétrica de las fluctuaciones de vacío.

Dado que el operador de evolución resultó ser el operador de compresión, se sabe que el estado de vacío evolucionará en el estado de vacío comprimido  $|0, t\rangle = S(r)|0\rangle$  dado por

$$|0, t\rangle = [\cosh(r)]^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} [\tanh(r)]^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} |2m\rangle, \quad (2.38)$$

con la correspondiente distribución de probabilidad  $P_{2m}(0, t) = |\langle 2m|0, t\rangle|^2 \neq 0$  y  $P_{2m+1}(0, t) = |\langle 2m+1|0, t\rangle|^2 = 0$ ; esto indica que la distribución es oscilatoria. Tales oscilaciones son una clara evidencia de la naturaleza no clásica del estado de vacío comprimido. Otra evidencia es que existe una compresión exponencial en la dispersión de la cuadratura del campo  $X_2 = -i(a - a^\dagger)/\sqrt{2}$ , a expensas de un crecimiento en la cuadratura  $X_1 = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ . Las correspondientes varianzas y producto de dispersiones de las cuadraturas como función del tiempo son

$$[\Delta X_1(t)]^2 = \exp(\epsilon\omega_0 t)/2, \quad [\Delta X_2(t)]^2 = \exp(-\epsilon\omega_0 t)/2, \quad \Delta X_1(t)\Delta X_2(t) = 1/2. \quad (2.39)$$

Del último término de la ecuación anterior se infiere que el estado de vacío comprimido mantiene durante toda su evolución, la característica de ser un estado de mínima incertidumbre semejante al del estado coherente. Recordemos que los resultados de las ecuaciones (2.38) y (2.39) se han realizado en la representación de interacción. Para trasladarlos a la representación de Schrödinger habría que utilizar al operador de evolución total dado por la transformación  $U_1 U_c^\dagger$ .

### *Temperatura finita*

Si en lugar de elegir al estado de vacío como el estado inicial se considera que es un estado térmico, entonces el número promedio de fotones  $\langle a^\dagger a \rangle_{th} = \text{tr}[\rho_{th}(0)a^\dagger(t)a(t)]$ , estará dado como

$$\langle a^\dagger a \rangle_{th} = (1 + 2\bar{n}_{th}) \sinh^2(\epsilon\omega_0 t/2) + \bar{n}_{th}, \quad (2.40)$$

donde  $\bar{n}_{th} = (\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1)^{-1}$  es el número de fotones térmicos en la cavidad y está dado por la distribución de Bose-Einsten, ésta última es usada en la definición del estado inicial:  $\rho_{th}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{n}_{th}^n |n\rangle\langle n| / (1 + \bar{n}_{th})^{n+1}$ . Observemos que el número promedio de fotones en el DCE (Ec. (2.37)), se ve incrementado por el factor  $1 + 2\bar{n}_{th}$  (Ec. (2.40)) debido a los efectos de temperatura finita [36]. Si se considera que el sistema está a temperatura ambiente, para la cual las longitudes de onda térmicas se encuentran en el rango de microondas, el incremento puede llegar a ser del orden  $10^3$  [36]. Este resultado es importante ya que los experimentos del DCE se realizan a una temperatura distinta de



cero. Tomar en cuenta tal incremento en el número promedio de fotones puede ayudar a discernir, entre una posible amplificación paramétrica de fotones térmicos de una verdadera amplificación de las fluctuaciones cuánticas de vacío. Por último observemos que el sistema evolucionará en un estado *térmico comprimido* [37]

$$\rho_{ST} = S(r)\rho_{th}(0)S^\dagger(r). \quad (2.41)$$

#### 2.4. Resumen de capítulo

Obtuvimos el Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica, en la representación de Schrödinger, de una cavidad electromagnética unidimensional que posee espejos perfectamente reflectores, uno fijo y el otro movable. El Hamiltoniano en cuestión posee un término de interacción intramodal el cual hace que obtener una solución analítica general sea muy complicado. Se recurrió entonces a dos aproximaciones, la primera consistió en suponer que la cavidad solo puede soportar un solo modo y que además el espejo oscila en condiciones de resonancia, es decir, a dos veces la frecuencia fundamental de la cavidad. Con estas suposiciones se encontró que los fotones producidos del estado de vacío tienen un crecimiento exponencial seguido por (2.37). A su vez, el efecto de considerar una temperatura inicial en el sistema de cavidad dinámica, hace que la generación de fotones se vea incrementada por un factor que puede llegar a ser ordenes de magnitud mayor, ver (2.40).

### 3. Efecto Casimir dinámico con un medio de Kerr

En este capítulo se estudia el DCE dentro de una cavidad electromagnética no estacionaria de un solo modo que contiene un medio de Kerr. Se obtendrá una expresión aproximada para el operador de evolución que es válida para tiempos cortos y/o un número promedio bajo de fotones. Se encuentra que la generación de fotones del vacío cuántico se ve fuertemente afectada por la presencia del medio de Kerr. En el dominio del tiempo ésta presenta fuertes oscilaciones, cuya frecuencia aumenta con la intensidad del medio no lineal, compartiendo características físicas similares al caso de dos átomos de dos niveles dentro de una cavidad con paredes oscilantes. Usando un enfoque semi-clásico se mostrará que las no linealidades tipo Kerr, repercuten en la tasa de producción de fotones con un decremento mucho más rápido que la reportada en estudios previos, los cuales consideran cavidades no estacionarias cuasiresonantes. También se observa que el estado de vacío puede evolucionar en un estado gato de Schrödinger.

Parte del contenido de este capítulo se encuentra en [13].

#### *Hamiltoniano de Kerr*

Una manera muy común de estudiar efectos no lineales en óptica clásica y/o cuántica es a través de la inclusión de medios materiales que respondan de manera no lineal a la interacción con un campo electromagnético. De entre ellos están materiales que manifiestan un índice de refracción dependiente de la intensidad del campo, esto se denomina como efecto Kerr. En el régimen cuántico el efecto Kerr se utiliza para generar estados no clásicos de la luz. Por ejemplo en la referencia [20], mediante una arquitectura de circuitos cuánticos superconductores, los autores reportaron la realización experimental de superposiciones macroscópicamente distinguibles de estados coherentes, conocidos como estados de gato de Schrödinger o gatos ópticos usando el Hamiltoniano de Kerr [18, 38]

$$H_K = \frac{K}{2} a^\dagger a^2, \quad (3.1)$$

donde el parámetro  $K$  es el cambio de frecuencia por fotón, el cual es proporcional a la susceptibilidad no lineal de tercer orden  $\chi^{(3)}$ , que en general es un número pequeño [17], lo cual requiere de intensidades muy grandes del campo para poder manifestarse. Se puede demostrar que el tiempo de reactivación o avivamiento (*revival* en inglés) para el Hamiltoniano  $H_K$  está dado por  $T_K = 2\pi/K$  [19]. El operador de evolución correspondiente es  $U_K = \exp(-iKta^\dagger a^2/2)$ . Su acción sobre un estado coherente del oscilador armónico,  $|z\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n / \sqrt{n!} |n\rangle$ , es  $|z(t)\rangle = U_K |z\rangle = \exp(-iKt(a^\dagger a)^2/2) |ze^{iKt/2}\rangle$ . Exactamente a la mitad del tiempo de avivamiento  $t = T_K/2$  el estado coherente evoluciona en

$$|z(\pi/K)\rangle = e^{-i\pi/4} (|iz\rangle + |i\rangle - |z\rangle) / \sqrt{2}. \quad (3.2)$$

El estado cuántico (3.2) lo podemos identificar, salvo un factor de fase, como un estado de Yurke-Stoler [18], esto es, un estado de gato. Además el operador de evolución  $U_K$

genera la siguiente transformación en los operadores del campo

$$a^\dagger(t) = a^\dagger e^{iKt(a^\dagger a)}, \quad a(t) = e^{-iKt(a^\dagger a)} a. \quad (3.3)$$

Debe observarse que al realizar la evolución temporal del valor esperado del operador de número, bajo la acción del Hamiltoniano de Kerr, el valor esperado permanece sin cambio alguno. Ésto sucede debido a la conmutatividad entre ambos operadores  $[H_K, a^\dagger a] = 0$ .

### 3.1. Hamiltoniano de cavidad más el medio de Kerr

Motivados por las observaciones experimentales del efecto Casimir dinámico [8] y del efecto Kerr [20] en circuitos cuánticos superconductores, hemos decidido estudiar un sistema donde ambos efectos estén presentes simultáneamente. Nuestra propuesta está basada en un Hamiltoniano compuesto de dos partes: la primera corresponde a un modo resonante del campo electromagnético dentro de una cavidad con paredes oscilantes y la segunda se refiere a un medio de Kerr que llena la cavidad, esto es:

$$H(t) = \omega(t)a^\dagger a + i\chi(t)(a^{\dagger 2} - a^2) + \frac{K}{2}a^{\dagger 2}a^2. \quad (3.4)$$

Un Hamiltoniano similar fue estudiado recientemente en [39] donde no linealidades de Kerr explícitamente dependientes del tiempo fueron analizadas. En dicho trabajo estados gato de Schrödinger con compresión fueron reportados. Debemos enfatizar que el sistema representado por la Ec. (3.4) es ligeramente diferente al sistema de un modo del campo electromagnético que interacciona con un espejo movible cerca de su posición de equilibrio a través de la presión de radiación (sistema optomecánico). En ese sistema los grados de libertad del espejo que oscila son tratados cuánticamente, reduciendo el problema a un sistema de dos osciladores armónicos cuánticos acoplados [40]. Para ilustrar éste sistema consideremos el Hamiltoniano que describe tal interacción [41]:

$$H_{\text{opt}} = \omega_c a^\dagger a + \omega_m b^\dagger b - g a^\dagger a (b^\dagger + b), \quad (3.5)$$

donde  $\omega_m$  ( $\omega_c$ ) es la frecuencia de oscilación del espejo (cavidad). Los operadores de creación y aniquilación del espejo son  $b^\dagger$  y  $b$  respectivamente. La constante de acoplamiento es  $g = \frac{\omega_c}{L} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$ , con  $L$  la longitud de cavidad y  $m$  la masa del espejo movible. Para obtener el operador de evolución asociado a  $H_{\text{opt}}$ , debemos realizar la siguiente transformación unitaria:  $D_b^\dagger(g/\omega_m)H_{\text{opt}}D_b(g/\omega_m) = H_{\text{opt}}^l + H_{\text{opt}}^{\text{nl}}$ , siendo

$$H_{\text{opt}}^l = \omega_c a^\dagger a + \omega_m b^\dagger b, \quad H_{\text{opt}}^{\text{nl}} = -(g^2/\omega_m)(a^\dagger a)^2, \quad (3.6)$$

los Hamiltonianos lineal y no lineal respectivamente. La transformación  $D_b(g/\omega_m) = \exp[a^\dagger a (b^\dagger - b)(g/\omega_m)]$  la identificamos como un tipo de operador de desplazamiento de Glauber en los operadores bosónicos del espejo, pero que tiene como argumento al operador de número de la cavidad  $a^\dagger a$ . El operador de evolución correspondiente a (3.5) es

$$U_{\text{opt}} = D_b(g/\omega_m) \exp(-itH_{\text{opt}}^l) \exp(-itH_{\text{opt}}^{\text{nl}}) D_b^\dagger(g/\omega_m). \quad (3.7)$$

La presencia del término  $H_{\text{opt}}^{\text{nl}}$  en uno de los exponentes de  $U_{\text{opt}}$  puede dar lugar a la generación de estados no clásicos de la luz [42], por ejemplo, estados de gato de

Schrödinger. He aquí la confusión que podría surgir entre los Hamiltonianos (3.4) y (3.5); uno podría llegar a pensar que ambos describen la misma dinámica, sin embargo, en el sistema optomecánico el medio de Kerr solamente es inducido a través de la transformación  $D_b(g/\omega_m)$ . Además, en este sistema las frecuencias  $\omega_m$  y  $\omega_c$  difieren por varios órdenes de magnitud, típicamente  $\omega_m \ll \omega_c$ . Debido a eso los operadores cuadráticos de compresión de la cavidad se desprecian en el Hamiltoniano, siendo difícil el poder hacer un estudio del efecto Casimir dinámico.

Regresando al estudio de (3.4) observemos que, el Hamiltoniano es explícitamente dependiente del tiempo, los operadores que lo constituyen no conmutan entre sí y ni siquiera forman un álgebra de Lie. Resolver pues la ecuación de Schrödinger resulta ser un desafío ya que el sistema presenta una complejidad algebraica alta. Con el objetivo de tener expresiones más fáciles de manipular, usaremos nuevamente las aproximaciones realizadas en la obtención de  $H_c^I$  pero ahora aplicadas y desarrolladas en  $H(t)$ . De esta manera podemos obtener el siguiente Hamiltoniano aproximado independiente del tiempo

$$\mathcal{H} = (i\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} - a^2) + (K/2)a^{\dagger 2}a^2. \quad (3.8)$$

Este Hamiltoniano es bien conocido en el contexto de óptica cuántica no lineal [43] y fue propuesto para estudiar características, huellas o señales de caos cuántico [44]. Hasta donde hemos investigado una solución analítica completamente general no se conoce. El operador de evolución correspondiente es  $U_{\mathcal{H}} = \exp(-i\mathcal{H}t)$ . Desafortunadamente, esta forma del operador de evolución es poco conveniente debido a que los operadores que constituyen al hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , siguen no conmutando (no formando un álgebra de Lie) entre sí, haciendo que el operador de evolución no se pueda escribir como un producto de exponenciales. Más aún, si estuviéramos buscando la transformación  $O(t) = U_{\mathcal{H}}^{\dagger} O U_{\mathcal{H}}$  siendo  $O$  cualquier observable física de interés del sistema, resultaría altamente complicado realizar dicha transformación. Lo ideal sería conseguir un operador de evolución que se pudiera escribir como un producto de exponenciales. Para encontrarlo, primero pasaremos a la representación de interacción generada por la transformación unitaria  $U_2 = \exp(-iKt(a^{\dagger}a)^2/2)$  la cual genera

$$\mathcal{H}_I = i\frac{\epsilon\omega_0}{4} \left( a^{\dagger 2} e^{i2Kt(a^{\dagger}a+1)} - e^{-i2Kt(a^{\dagger}a+1)} a^2 \right) - \frac{K}{2} a^{\dagger} a, \quad (3.9)$$

donde la identidad  $aF(a^{\dagger}a) = F(a^{\dagger}a + 1)a$  fue utilizada, siendo  $F(a^{\dagger}a)$  una función arbitraria del operador  $a^{\dagger}a$ . Renombrando a los operadores que están presentes en el Hamiltoniano como

$$L_0 = \frac{1}{2} (a^{\dagger}a + 1/2), \quad L_+(t) = \frac{1}{2} a^{\dagger 2} e^{i2Kt(a^{\dagger}a)}, \quad L_-(t) = \frac{1}{2} e^{-i2Kt(a^{\dagger}a)} a^2, \quad (3.10)$$

y definiendo la función  $f(t) = i g e^{i2Kt}$  con  $g = \epsilon\omega_0/2$ , podemos reescribir al Hamiltoniano en la representación de interacción como  $\mathcal{H}_I = -KL_0 + f(t)L_+(t) + f^*(t)L_-(t) + K/4$ . Observemos que el término  $K/4$  conmuta con todos los otros elementos del Hamiltoniano

y por lo tanto sólo generará una fase global ( $e^{-iKt/4}$ ) en la dinámica. Los operadores restantes dependientes del tiempo satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[L_-(t), L_+(t)] = 2L_0, \quad [L_0, L_\pm(t)] = \pm L_\pm(t), \quad (3.11)$$

las cuales podemos identificar como las reglas de conmutación del álgebra de Lie  $su(1,1)$  [45]. Dado que  $\mathcal{H}_I$  es una combinación lineal de generadores de un álgebra de Lie, es importante mencionar que es posible encontrar una transformación unitaria que diagonalice al Hamiltoniano  $\mathcal{H}_I$  y lo haga independiente del tiempo. Consideremos al operador de compresión generalizado  $T_\zeta(t) = \exp[\zeta L_+(t) - \zeta^* L_-(t)]$  con las constricciones:  $\tanh(2|\zeta|) = -2g/K$  y  $\zeta = |\zeta|e^{i2Kt+i\pi/2}$ . Haciendo uso de las fórmulas de descomposición estándar [46] para el álgebra  $su(1,1)$  el operador de compresión generalizado se puede factorizar como

$$T_\zeta(t) = e^{\frac{\zeta}{|\zeta|} \tanh(|\zeta|) L_+(t)} e^{-2 \ln \cosh(|\zeta|) L_0} e^{-\frac{\zeta^*}{|\zeta|} \tanh(|\zeta|) L_-(t)}, \quad (3.12)$$

que junto con las relaciones de conmutación (3.11) es posible realizar la transformación del Hamiltoniano  $\mathcal{H}_I$  como sigue:  $T_\zeta(t) \mathcal{H}_I T_\zeta^\dagger(t) = -\sqrt{K^2 - 4g^2} L_0$ . Si usamos la base de Fock  $|n\rangle$  y la definición del operador  $L_0$  llegamos a la ecuación de valores propios

$$\mathcal{H}_I |n\rangle_t = -\sqrt{(K/2)^2 - g^2} (n + 1/2) |n\rangle_t, \quad (3.13)$$

donde  $n$  es un entero no negativo y  $|n\rangle_t = T_\zeta^\dagger(t) |n\rangle$  son un tipo de estados de número comprimidos dependientes del tiempo, que generan una base completa en la cual el Hamiltoniano en la representación de interacción es diagonal. Es interesante ver que los valores propios de  $\mathcal{H}_I$  están igualmente espaciados a cualquier tiempo justo como los valores propios del llamado invariante de Ermakov-Lewis correspondiente al oscilador armónico cuántico con frecuencia dependiente del tiempo [47]. Para encontrar la evolución del estado cuántico bajo la acción de  $\mathcal{H}_I$ , debemos resolver la ecuación de Schrödinger en el marco de referencia generado por la transformación  $T_\zeta(t)$ , esta se escribe como

$$i\partial_t |\psi_d(t)\rangle = [-\sqrt{K^2 - 4g^2} L_0 - iT_\zeta(t) \partial_t T_\zeta^\dagger(t)] |\psi_d(t)\rangle, \quad (3.14)$$

siendo  $|\psi_d(t)\rangle = T_\zeta(t) |\psi(t)\rangle$  el vector de estado transformado. Debido a que la transformación realizada depende del tiempo, el término  $T_\zeta(t) \partial_t T_\zeta^\dagger(t)$  que aparece extra en (3.14) será distinto de cero. Este involucra derivadas temporales de los generadores del álgebra de Lie, dejando una estructura que en general es más complicada y difícil de resolver que la ecuación de Schrödinger en el marco de interacción. Sin embargo, la transformación  $T_\zeta(t)$  permite explorar un poco la simetría intrínseca del sistema.

Notemos que los operadores que forman  $\mathcal{H}$  inicialmente no son cerrados bajo conmutación, estos al ser transformados a la representación de interacción mediante  $U_2$  se vuelven cerrados bajo conmutación generando un álgebra de Lie (3.11). Esto podría llevar a pensar (erróneamente) que podemos hacer uso del teorema de Wei-Norman el cual nos permitiría escribir al operador de evolución asociado a  $\mathcal{H}_I$  como un producto de exponenciales de los operadores que forman el álgebra. Sin embargo, para poder utilizar dicho teorema es necesario que los operadores que forman el álgebra sean independientes

del tiempo. De la ecuación (3.10) vemos claramente que la dependencia temporal se encuentra el término  $e^{\pm i2Kt(a^\dagger a)}$  que multiplica a los operadores cuadráticos de creación y aniquilación respectivamente, por lo tanto, no podemos aplicar dicho teorema. Sin embargo, para un intervalo de tiempo infinitesimalmente corto de  $t$  a  $t + \delta t$ , el operador de evolución siempre se puede escribir como (19)

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{H}_I}(t + \delta t, t) &\cong \exp[-i\mathcal{H}_I\delta t], \\ &= \exp[i\delta t K L_0 - i\delta t f(t)L_+(t) - i\delta t f(t)^*L_-(t)], \\ &= \exp[g_1(t)L_+] \exp[g_2(t)L_0(t)] \exp[g_3(t)L_-(t)], \end{aligned} \quad (3.15)$$

siendo  $g_n(t)$  son funciones complejas dependientes del tiempo que se determinan fácilmente utilizando las fórmulas generales de factorización (46). Para un intervalo de tiempo finito, digamos de 0 a  $T$ , el operador de evolución es

$$U_{\mathcal{H}_I}(T, 0) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \mathcal{T} \prod_{l=0}^{T/\delta t} e^{g_1(t_l)L_+} e^{g_2(t_l)L_0(t_l)} e^{g_3(t_l)L_-(t_l)}, \quad (3.16)$$

con  $\mathcal{T}$  el operador de ordenamiento temporal y  $t_l = l\delta t$ . Notemos que para cada tiempo  $t_l$  el operador de evolución factoriza como un producto de exponenciales, que poseen en los exponentes, a los generadores del álgebra. Si el término de la exponencial del operador de número no estuviera presente, entonces tendríamos que el operador de evolución sería un operador de compresión, pero ese no es el caso y entonces estamos tratando con un tipo de operador de compresión modificado. El operador de evolución total tiene la forma:  $U(t) \approx U_1 U_{\mathcal{H}} = e^{-iKt/4} U_1 U_2 U_{\mathcal{H}_I}$ .

El problema se trasladó a poder encontrar una forma eficiente de calcular los productos del operador  $U_{\mathcal{H}_I}$ , aplicarlos a algún estado inicial y/o transformar observables físicas de interés. Tal tarea continúa siendo muy complicada, sin embargo, dada la forma inicial de  $\mathcal{H}$  en la Ec. (3.8), el correspondiente operador de evolución, Ec. (3.16), no es un resultado obvio. Vamos a recurrir a una tercera aproximación en el Hamiltoniano  $\mathcal{H}_I$  con el fin de tener soluciones analíticas, que puedan ser de fácil interpretación y que posteriormente nos ayuden a entender los resultados numéricos exactos.

La aproximación consiste en hacer  $e^{\pm i2Kt(a^\dagger a)} \approx 1$  en los generadores del álgebra de Lie  $su(1, 1)$  (3.10). Ésto puede ser justificado cuando el valor esperado del operador de número es mucho menor que uno, lo cual en general sucede a tiempos realmente cortos cuando la generación de fotones está comenzando. Es decir, estudiaremos una evolución temprana del sistema en tiempos mucho menores que el tiempo de avivamiento. Comparando, este último es generalmente mucho más grande que el periodo clásico (49). Con dicha aproximación los operadores que constituyen al Hamiltoniano se vuelven independientes del tiempo

$$\mathcal{H}_I \approx -KL_0 + f(t)L_+ + f^*(t)L_- = \tilde{\mathcal{H}}_I. \quad (3.17)$$

\*\*En la referencia (48) con un Hamiltoniano similar a  $\mathcal{H}_I$  se hizo un remplazo de  $\exp[\pm i2Kt(a^\dagger a)]$  por  $\langle \exp[\pm i2Kt(a^\dagger a)] \rangle$ , donde el valor esperado se realiza con respecto a un estado coherente obteniendo buenos resultados solo cuando el estado inicial del sistema es distinto del vacío cuántico.

Antes de seguir con los cálculos hay unos puntos importantes que debemos enfatizar acerca de  $\tilde{\mathcal{H}}_I$ . La información del medio de Kerr todavía sigue contenida en (3.17) dado que la función  $f(t)$  posee una dependencia del parámetro  $K$ , mas aún, el operador  $U_2$  posee en su exponente el término cuadrático del operador de número. La estructura de  $\tilde{\mathcal{H}}_I$  es muy parecida al hamiltoniano de un amplificador paramétrico degenerado [38]. Observemos que es dependiente del tiempo y aparte no conmuta a diferentes tiempos, por lo tanto, el operador de evolución no puede escribirse como  $U_{\tilde{\mathcal{H}}_I} = \exp(-i \int \tilde{\mathcal{H}}_I dt)$ . Sin embargo, está constituido por un conjunto de operadores independientes del tiempo que siguen preservando el álgebra  $su(1, 1)$ . En este punto podemos utilizar el teorema de Wei-Norman [50] y escribir al operador de evolución como un producto de exponenciales

$$U_{\tilde{\mathcal{H}}_I} = e^{\alpha(t)L_+} e^{\beta(t)L_0} e^{\gamma(t)L_-}, \quad (3.18)$$

donde  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$  son funciones dependientes del tiempo en general complejas, las cuales satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas [45]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= -i \{ f(t) - K\alpha(t) + f^*(t)\alpha^2(t) \}, \\ \dot{\beta}(t) &= -i \{ -K + 2f^*(t)\alpha(t) \}, \\ \dot{\gamma}(t) &= -if^*(t)e^{\beta(t)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde el punto representa una derivada temporal. Las ecuaciones diferenciales anteriores se obtienen mediante la sustitución del operador de evolución en la ecuación de Schrödinger en el marco de interacción. Observemos que la ecuación para la función  $\alpha(t)$  es la conocida ecuación diferencial de Ricatti. Si encontramos su solución, entonces las funciones  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$  se pueden obtener de forma fácil usando integración directa. Las condiciones iniciales son  $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0$ , debido a que esto garantiza que a  $t = 0$  el operador de evolución es el operador identidad. Las soluciones a las ecuaciones diferenciales con las ya mencionadas condiciones iniciales son

$$\alpha(t) = \frac{ge^{i2Kt} \sinh(t\eta)}{\eta \cosh(t\eta) + i(K/2) \sinh(t\eta)} \quad (3.20)$$

$$\beta(t) = i2Kt + 2 \ln(\eta) - 2 \ln[\eta \cosh(t\eta) + i(K/2) \sinh(t\eta)] \quad (3.21)$$

$$\gamma(t) = \frac{-g \sinh(t\eta)}{\eta \cosh(t\eta) + i(K/2) \sinh(t\eta)} \quad (3.22)$$

donde hemos definido  $\eta = \sqrt{g^2 - (K/2)^2}$ . Debemos tomar en cuenta que si  $K/2 > g$ , entonces las funciones hiperbólicas que aparecen en las soluciones deben ser remplazadas por sus contrapartes trigonométricas, y  $\eta$  debe ser remplazado por  $\tilde{\eta} = \sqrt{(K/2)^2 - g^2}$ . De esta manera conseguimos un operador de evolución aproximado para el sistema total de la forma  $U(t) \approx e^{-iKt/4} U_1 U_2 U_{\tilde{\mathcal{H}}_I} = \mathcal{U}(t)$ . Sustituyendo la forma explícita de cada producto en términos de los operadores del campo resulta en

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \exp\left[\frac{\beta(t)}{4} - \frac{iKt}{4}\right] \exp\left[-i\omega_0 t a^\dagger a - \frac{iKt}{2} (a^\dagger a)^2\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\alpha(t)}{2} a^{\dagger 2}\right] \exp\left[\frac{\beta(t)}{2} a^\dagger a\right] \exp\left[\frac{\gamma(t)}{2} a^2\right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La ecuación anterior es uno de los resultados principales de este trabajo, debido a que tenemos una forma analítica para el operador de evolución del sistema a tiempos cortos. Notemos que  $\mathcal{U}(t)$  está formado por una parte de compresión generada por los términos  $a^{\dagger 2}$ ,  $a^2$ , una parte de evolución lineal  $a^\dagger a$  y no lineal  $(a^\dagger a)^2$ ; esta última podrá dar origen a superposiciones de estados coherentes. Armados con el operador de evolución del sistema podemos entonces realizar la transformación de cualquier observable físico de interés.

### 3.2. Generación de fotones de vacío

Ahora estamos en una posición desde la cual podemos estudiar uno de los objetivos principales de este trabajo, esto es, queremos analizar hasta qué punto se ve afectada la generación de fotones del vacío cuántico durante el efecto Casimir dinámico cuando existe la presencia de un medio no lineal tipo Kerr. Esto puede ser relevante incluso en etapas tempranas de la evolución del sistema. Para llevar a cabo dicha tarea necesitamos escribir al operador de número  $N = a^\dagger a$  en la representación de Heisenberg:

$$N(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) a^\dagger a \mathcal{U}(t) = \Phi_1 a^{\dagger 2} + \Phi_2 a^\dagger a + \Phi_3 a^2 + \Phi_4, \quad (3.24)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \alpha(t) e^{-\beta(t)}, & \Phi_3 &= \alpha(t) \gamma(t)^2 e^{-\beta(t)} - \gamma(t), \\ \Phi_2 &= 1 - 2\alpha(t) \gamma(t) e^{-\beta(t)}, & \Phi_4 &= -\alpha(t) \gamma(t) e^{-\beta(t)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Debemos mencionar que el operador  $N(t)$  aunque no parece hermitiano, sí es hermitiano, ya que proviene de una transformación dada por el operador  $\mathcal{U}(t)$  y este es unitario por construcción, ya que se obtuvo mediante el teorema de Wei-Norman. Si hubiera alguna duda sobre la hermiticidad del operador  $N(t)$  podría deberse a que hicimos varias aproximaciones, sin embargo, las aproximaciones se realizaron en el Hamiltoniano y tales aproximaciones nunca comprometieron la hermiticidad del mismo. Entonces no hay ningún motivo para dudar que el operador  $N(t)$  sea hermitiano. De hecho, si uno sustituye la forma explícita de las funciones  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$  encontramos que  $\Phi_1 = \Phi_3^*$ , siendo  $\Phi_2$  y  $\Phi_4$  funciones reales.

Dado que ya tenemos al operador  $N(t)$  en la representación de Heisenberg, resulta sencillo calcular el número promedio de fotones de estado de vacío  $\langle N \rangle_0 = \langle 0 | N(t) | 0 \rangle = \Phi_4$ :

$$\langle N \rangle_0 = \frac{g^2}{g^2 - (K/2)^2} \sinh^2 \left( t \sqrt{g^2 - (K/2)^2} \right). \quad (3.26)$$

De la Ec. (3.26) podemos identificar tres regímenes distintos: *i*) para  $K/2 < g$ , tenemos pues un crecimiento exponencial en la producción de fotones de vacío. De hecho esta fórmula es una generalización de la Ec. (2.37), evidentemente ambas ecuaciones coinciden cuando  $K$  es despreciable:

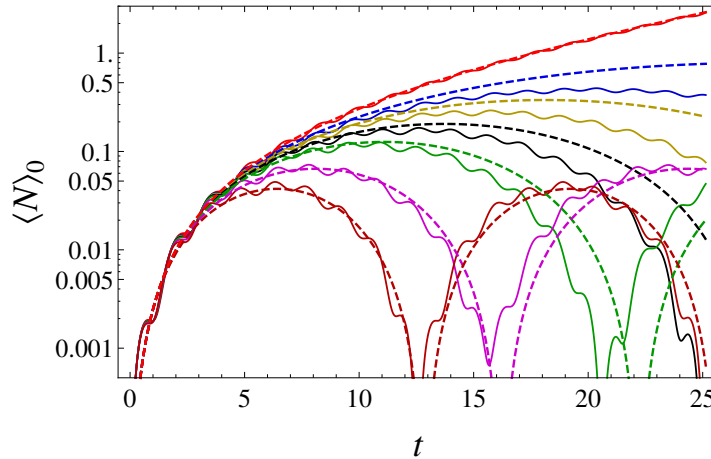
$$\lim_{K \rightarrow 0} \langle N \rangle_0 = \sinh^2 (\epsilon \omega_0 t / 2). \quad (3.27)$$



*ii)* Para  $K/2 > g$ , la expresión toma su contraparte trigonométrica y tendremos oscilaciones en el número promedio de fotones, siendo nula a tiempos  $t = 2m\pi/\tilde{\eta}$  con  $m$  un entero positivo. *iii)* Para  $K/2 \rightarrow g$ ,  $\langle N \rangle_0$  crece como  $t^2$ . El último caso es de especial interés, debido a que el efecto Casimir dinámico y el efecto Kerr ambos contribuyen de igual manera en la dinámica y la producción de fotones crece monotónicamente, pero de una manera más lenta que en el caso *i*). Dicha función cuadrática es precisamente la separatriz entre el crecimiento exponencial y el comportamiento oscilatorio sugerido por la fórmula (3.26).

En la figura 1 se muestra  $\langle N \rangle_0$  como función del tiempo usando el resultado analítico dado por la Ec. (3.26), así como también el cálculo numérico convergido considerando el Hamiltoniano que proponemos sin ninguna aproximación expresado en la Ec. (3.4). Hemos fijado los parámetros  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  dando  $g = 0,05$  y usamos distintos valores relevantes de  $K$ . Escogimos este valor pequeño de  $\epsilon$  de forma que  $\omega(t) \approx \omega_0$  y al mismo tiempo se valiera la RWA. Como referencia cuando  $K=0$  se tiene (línea roja-clara) el esperado crecimiento exponencial de la ecuación (2.37). Sin embargo, para  $K \neq 0$  se observa como el número de fotones de vacío decrece rápidamente acompañado de pronunciadas oscilaciones, tal y como son predichas por la Ec. (3.26) para  $K/2 > g$ . Físicamente, estas oscilaciones podrían deberse a efectos de saturación del medio no lineal [17]. La solución numérica presenta adicionalmente pequeñas oscilaciones que no posee la solución analítica; estas fueron eliminadas mediante la aproximación de onda rotante. El tiempo de avivamiento más pequeño que se maneja en los resultados es  $T_{0,5} = 4\pi \approx 12$ , que corresponde al valor más grande de  $K$  utilizado en la figura. Los otros tiempos de revival evidentemente son mayores. Dicho esto, podemos confiar en que tenemos un buen acuerdo entre el cálculo analítico y numérico para tiempos  $t < 12$  y valores  $\langle N \rangle_0 \simeq 0,1$ . Después de este tiempo, es natural notar diferencias sustanciales. Para saber qué pasa con la dinámica a tiempos más largos y poder explorar el régimen donde número promedio de fotones es grande, lo que se hará es desarrollar un cálculo puramente numérico haciendo la evolución con el Hamiltoniano del sistema completo dado en la Ec. (3.4). Para la diagonalización del Hamiltoniano en cuestión, se incluyeron hasta  $10^3$  términos de la base de Fock para alcanzar la convergencia deseada. Los resultados se muestran en la figura 2. En la región que se encuentra antes de la línea punteada vertical, esto es, para los tiempos menores a 60 unidades, la imagen global es muy similar a la figura 1, sin embargo, existen diferencias importantes. En la solución numérica, para cualquier valor del parámetro  $\epsilon$  y procurando que el coeficiente de Kerr  $K$  fuese distinto de cero, el comportamiento oscilatorio siempre está presente, esto es, el aparente crecimiento exponencial desaparece aún si  $K/2 < g$ . Cuando  $K$  es extremadamente pequeño, este comportamiento se manifiesta a una escala de tiempo muy larga; esta es la razón del por qué un aparente crecimiento exponencial en la producción de fotones se refleja en el caso *i*).

En el régimen donde  $\langle N \rangle_0$  es grande no se espera que nuestra solución aproximada coincida con la numérica. Sin embargo, es posible reproducir cualitativamente el



**Figura 1.** Número promedio de fotones del estado de vacío. Líneas punteadas (sólidas) corresponden al cálculo analítico (numérico). Los parámetros son  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  y  $K = 0$  (rojo-claro), 0,15 (azul), 0,2 (amarillo), 0,25 (negro), 0,3 (verde), 0,4 (magenta) y 0,5 (rojo-oscuro).

comportamiento en dicho régimen mediante un ajuste del parámetro  $K$  a valores ligeramente más grandes en la ecuación (3.26). El análisis numérico además sugiere la imposibilidad de un crecimiento asintótico en los fotones de vacío. Esta es la principal diferencia con el resultado arrojado por la ecuación (3.26). De hecho, en la referencia [21] los autores probaron que la producción de fotones aún en el caso no disipativo siempre está limitada, para ello usaron una versión del Hamiltoniano (3.4) independiente del tiempo, resolviendo aparentemente una larga controversia sobre la divergencia que aparece en la generación de fotones dentro de cavidades con espejos oscilantes y que además son perfectamente reflectores.

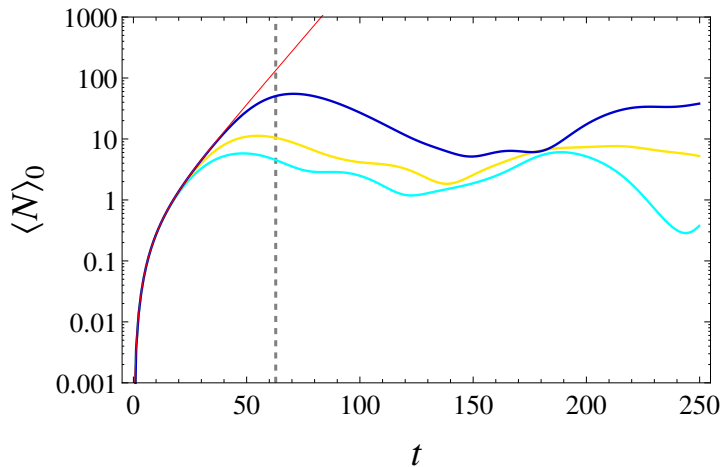
### 3.3. Enfoque semiclásico

Para obtener una aproximación válida para tiempos más largos y/o valores del número promedio de fotones grandes, vamos a utilizar un enfoque diferente al algebraico usado previamente. Lo que se hará es una exploración semiclásica de los valores esperados asociados a algunos operadores y observables de interés del sistema. Consideremos nuevamente el Hamiltoniano independiente del tiempo de la Ec. (3.8); la evolución temporal del valor esperado para un operador  $O$  arbitrario en la representación de Heisenberg está dado por:  $\langle \dot{O} \rangle = i\langle [\mathcal{H}, O] \rangle$ , donde el punto representa la derivada temporal. De esta manera, dado los operadores  $N$ ,  $a^2$  y  $a^{\dagger 2}$  se tiene que:

$$\langle \dot{N} \rangle = \epsilon\omega_0(\langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle a^2 \rangle)/2, \quad (3.28)$$

$$\langle \dot{a}^2 \rangle = \epsilon\omega_0(\langle N \rangle + 1/2) - iK\langle a^2 \rangle - 2iK\langle Na^2 \rangle, \quad (3.29)$$

$$\langle \dot{a}^{\dagger 2} \rangle = \epsilon\omega_0(\langle N \rangle + 1/2) + iK\langle a^{\dagger 2} \rangle + 2iK\langle a^{\dagger 2} N \rangle. \quad (3.30)$$

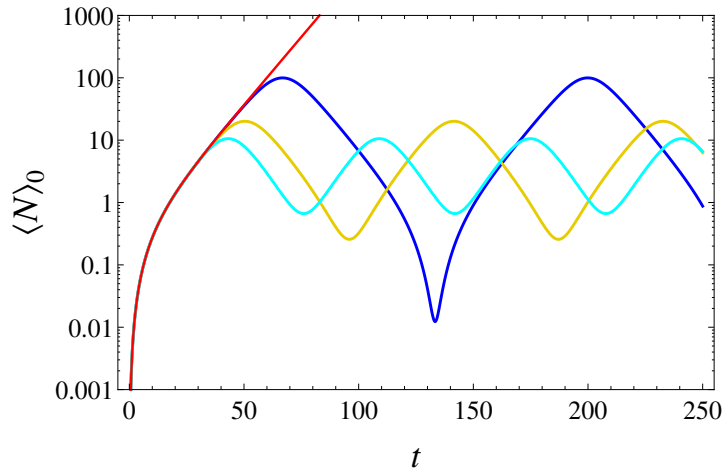


**Figura 2.** Generación de fotones del estado de vacío. Hemos fijado  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  y tomando distintos valores de  $K = 0$  (rojo oscuro),  $0,001$  (asul),  $0,005$  (amarillo) y  $0,01$  (azul cielo).

Los últimos términos del lado derecho de las Ecs. (3.29) y (3.30) representan la llamada auto-interacción o auto-correlación generada por el medio de Kerr. Tratar de resolver estas ecuaciones no es una tarea fácil, ya que primero se deben conocer las ecuaciones de evolución temporal para las variables  $\langle Na^2 \rangle$  y  $\langle a^{\dagger 2} N \rangle$ , lo cual usando la ecuación de Heisenberg se observa que estas dependerán de ordenes superiores en los productos de los operadores de campo y de número, y así sucesivamente. Esto establece un número infinito de ecuaciones diferenciales lineales acopladas. Sin embargo, si ignoramos los términos de auto-interacción, es relativamente fácil probar que la Ec. (3.26) es solución de las ecuaciones arriba mencionadas considerando que el estado inicial es el estado de vacío. Para tomar en cuenta dichos términos, asumiremos que, para un número alto de fotones, el estado del campo dentro de la cavidad puede aproximarse por un estado coherente  $|\alpha\rangle$ , a esto se le conoce como aproximación semiclassical, donde las posibles correlaciones cuánticas se supone que son despreciables; de acuerdo con esto  $\langle Na^2 \rangle \approx \langle N \rangle \langle a^2 \rangle$  junto con el respectivo complejo conjugado. Entonces, tomaremos el valor esperado las ecuaciones arriba mencionadas con respecto a un estado coherente. Dentro de este nivel de aproximación, el conjunto infinito de ecuaciones diferenciales lineales es ahora truncado a un conjunto finito de tres ecuaciones no lineales de primer orden que pueden resolverse numéricamente de manera sencilla.

En la figura 3 mostramos el número promedio de fotones provenientes del vacío cuántico usando parámetros tales que, la generación de fotones toma valores más grandes que los reportados en la figura 2. Estos corresponden a  $K = 0,0, 0,001, 0,005$  y  $0,001$  (parámetros para los cuales  $\langle N \rangle_0$  es más grande o igual que uno, como se muestra en la figura 2). Los primeros pasos de la evolución temporal, de  $t = 0$  a  $t = t_1 = 25$  se han calculado utilizando la Ec. (3.26), la cual ha probado ser una buena aproximación a tiempos cortos. A partir de  $t = t_1$ , se evalúa el número promedio de

fotones a través del resultado analítico y posteriormente usarlo para encontrar el valor inicial del estado coherente  $\langle N(t_1) \rangle = |\alpha(t_1)|^2$  y también obtener los valores esperados  $\langle a^2(t_1) \rangle = \langle 0|\mathcal{U}^\dagger(t_1, t_0)a^2\mathcal{U}(t_1, t_0)|0 \rangle = \alpha^2(t_1)$ , los cuales son usados como condición inicial para las ecuaciones diferenciales no lineales.

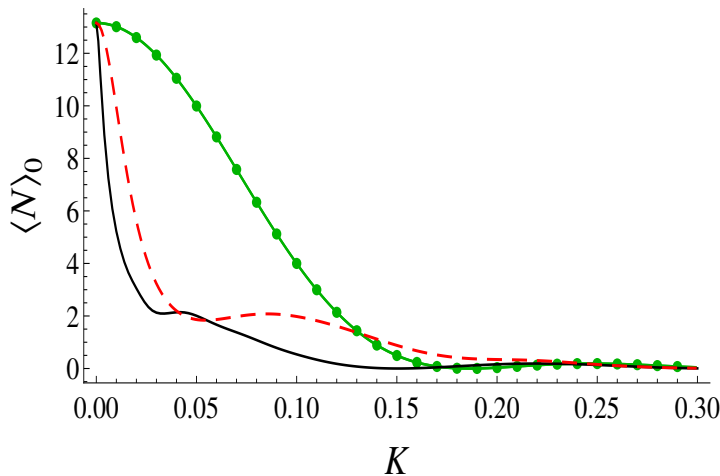


**Figura 3.** Generación de fotones del estado de vacío como función del tiempo usando la aproximación semiclásica en las Ecs. (3.29) y (3.30). Hemos fijado  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  y tomando distintos valores de  $K = 0$  (rojo),  $0,001$  (azul),  $0,005$  (amarillo) y  $0,01$  (azul cielo).

De la figura 3 podemos ver que la aproximación semiclásica reproduce cualitativamente el comportamiento en la evolución temporal de la generación de fotones del estado de vacío cuántico. Es importante notar que aún para valores de  $K/2 \ll g$  el crecimiento exponencial desaparece, lo cual está en buen acuerdo con lo encontrado en el cálculo puramente numérico.

Una forma alternativa de ver cómo es que el medio de Kerr dentro de la cavidad afecta de manera dramática la producción de fotones, es graficar esta última como función del parámetro  $K$  a un tiempo dado y una amplitud de modulación  $\epsilon$  fija. Tales resultados se muestran en la figura 4, donde se ha escogido  $t = 40$  unidades de tiempo, porque cuando no está presente el medio de Kerr, se obtiene una producción de más de una docena de fotones utilizando  $\epsilon\omega_0/2 = 0,05$  (ver Fig. 2). En la figura 4 se muestra la producción de fotones del estado de vacío; los resultados numéricos convergidos utilizando el Hamiltoniano de la Ec. (3.8) están representados por la línea sólida negra, el resultado aproximado dado de la Ec. (3.26) se muestra mediante la línea verde sólida-punteada y el cálculo semiclásico aproximado discutido previamente está dado por la línea roja punteada. La curva verde sólida-punteada tiene un comportamiento similar a una distribución de Breit-Wigner con oscilaciones adicionales debido a la función seno, tal distrubición aparece típicamente en procesos resonantes. Podemos observar un buen (mal) acuerdo de la Ec. (3.26) para valores pequeños (grandes) de  $\langle N \rangle_0$ . Por el contrario, para valores pequeños de  $K$ , la curva punteada roja obtenida mediante el remplazo del

valor esperado de la correlación cuántica por su forma factorizada está relativamente cerca y por encima del resultado numérico, esto es, sobrestima el efecto del parámetro de Kerr. Sin embargo, existen algunos puntos donde ambas curvas se intersecan.



**Figura 4.** Producción de fotones debido al DCE como función de coeficiente  $K$  de Kerr. La línea sólida-punteada (verde) corresponde a la Ec. (3.26), la línea punteada (rojo) es la solución semiclásica de la Ec. (3.28) y la línea sólida (negro) es la solución puramente numérica del Hamiltoniano  $\mathcal{H}$ . Hemos fijado  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  y  $t = 40$ .  $t_1 = 25$  para las tres curvas.

En general conforme el valor del parámetro  $K$  aumenta, la tasa de producción de fotones disminuye drásticamente, esto tiene una interpretación sencilla; para valores grandes del coeficiente de Kerr es posible tratar al Hamiltoniano efectivo del DCE como una perturbación, y por consiguiente la dinámica futura estará dominada por dicho término de Kerr, el cual conmuta con el operador de número, por lo tanto impidiendo la generación de fotones.

Debemos mencionar que la fórmula (3.26) ha sido obtenida recientemente en la referencia [34] pero en un contexto ligeramente diferente. En ese trabajo, los autores consideran solamente el Hamiltoniano de cavidad vacía, Ec. (2.31), junto con la ley de movimiento armónica, Ec. (2.32), y en lugar de que la frecuencia de oscilación del espejo movable sea exactamente  $2\omega_0$ , los autores permiten un pequeño desfaseamiento  $\kappa \ll 1$  pasando a estudiar una oscilación de frecuencia  $2\omega_0(1 + \kappa)$ . Aunque en nuestro caso el comportamiento en la producción de fotones a tiempos cortos haya resultado similar a la reportada en [34], el operador de evolución correspondiente a dicha referencia seguirá siendo un operador de compresión y de ninguna manera podrá generar superposiciones coherentes del tipo gatos de Schrödinger, esto debido a que el Hamiltoniano de cavidad vacía por ser de naturaleza lineal siempre transformará estados Gaussianos en estados Gaussianos, y eso incluye al estado de vacío cuántico; sin embargo, con la aparición del operador de número al cuadrado en uno de los exponentes de  $\mathcal{U}(t)$ ,

existe la posibilidad de que en nuestro sistema propuesto sí podamos obtener dichas superposiciones.

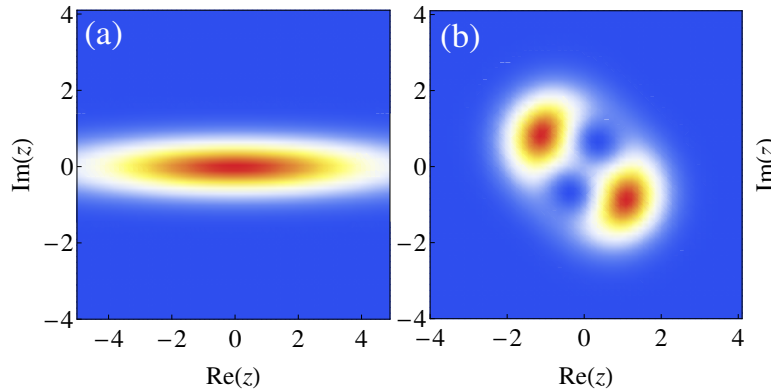
Comportamientos de  $\langle N \rangle_0$  bastante similares a los obtenidos en este capítulo son presentados en [27], donde dos átomos de dos niveles dentro en una cavidad con paredes oscilantes son usados como fotodetectores, mostrando que también  $\langle N \rangle_0$  es del orden de 0,1 o menos. Podemos relacionar sus resultados con los nuestros e inferir que los dos átomos de dos niveles podrían estar comportándose como un índice de refracción dependiente de la intensidad del campo dentro de la cavidad. Esto es semejante al modelo de Jaynes-Cummings donde el estado del campo que inicialmente se supone coherente, evoluciona en superposiciones cuánticas distinguibles parecidas a las generadas por un medio no lineal tipo Kerr [51].

### *Función de Husimi*

Para visualizar la superposición generada por el Hamiltoniano de Kerr de un estado coherente  $|z\rangle$ , usualmente se trabaja en la representación de espacio fase cuántico, con una función de distribución de cuasi-probabilidad como la función de Wigner o Husimi [19]. Esta última es fácil de calcular y además tiene la ventaja de ser siempre positiva en cualquier punto del espacio fase. La función de Husimi está definida como el valor esperado del operador densidad entre estados coherentes:  $Q(z, t) = \langle z | \rho(t) | z \rangle$ . Para el estado de inicial del vacío  $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$ , se tiene que  $Q(z, t) = |\langle z | 0, t \rangle|^2$ , donde  $|0, t\rangle$  es el estado de vacío evolucionado. Para su cálculo, vamos a usar una integración puramente numérica de  $\mathcal{H}_I$  en la Ec. (3.9). Los resultados son mostrados en la figura 5, donde  $Q(z, t)$  es evaluada a  $t = 40$  con los parámetros correspondientes a la joroba mostrada en la Fig. 4 cerca de  $K = 0,05$  asociada a la curva sólida negra. Se puede observar la formación de superposiciones cuánticas pequeñas pero distinguibles que surgen del estado de vacío [52], lo cual podríamos llamar *estado gato de vacío*, ver Fig. 5 (b). Si no se hubiese añadido  $H_K$  al Hamiltoniano efectivo del DCE, la cuadratura  $X_2$  del campo en estado de vacío es comprimida indefinidamente, mientras que  $X_1$  se expande a medida que el tiempo avanza (ver las dispersiones del segundo y primer término de la Ec. (2.39) respectivamente) deslocalizando el estado tal como se muestra en la figura 5 (a). Entonces, la consecuencia de la inclusión de no linealidades de Kerr a cavidades no estacionarias es crear localización en el espacio fase, además de la generación de estados gato de vacío, los cuales no serían posibles si solamente se tomase en cuenta el efecto Kerr o el DCE por separado.

### *3.4. Resumen de capítulo*

Estudiamos lo que consideramos fue la forma más simple de un Hamiltoniano que represente al efecto Casimir dinámico y al efecto Kerr combinados en uno solo, esto es Ec. (3.4), de tal manera que obtuvimos un operador de evolución aproximado de todo el sistema. El operador de evolución se pudo escribir como un producto de exponenciales, el



**Figura 5.** Evolución de la función de Husimi para el estado de vacío bajo la acción de  $\mathcal{H}_I$ . Se han usado los mismos parámetros de la Fig. 4; haciendo (a)  $K=0$  se tiene al estado de vacío comprimido y con (b)  $K=0.05$  se observa un estado gato de vacío, el cual es una manifestación simultánea del efecto Kerr y del DCE.

cual posee tres tipos de evolución: lineal, no lineal y compresión. También obtuvimos una expresión analítica y cerrada para el número promedio de fotones del vacío, Ec. (3.26), la cual comparamos con la solución puramente numérica, obteniendo resultados que están en buen acuerdo en el régimen de  $\langle N \rangle_0 \ll 1$  y tiempos cortos.

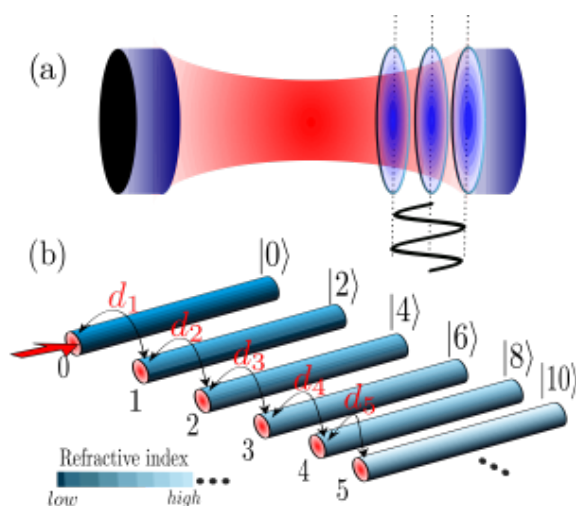
Para probar valores grandes de los parámetros, escribimos la ecuación de movimiento de Heisenberg para el operador de número y los operadores de campo cuadráticos; posteriormente tomamos los respectivos valores esperados dentro de la aproximación semiclassical donde las correlaciones cuánticas factorizan. Dentro de la aproximación semiclassical, observamos claramente una desviación muy notoria del comportamiento predicho por la Ec. (3.26) en el régimen donde la producción de fotones es mayor que uno. Se encontró que  $\langle N \rangle_0$ , el cual inicialmente tiene un rápido crecimiento, puede exhibir, debido a la presencia del medio de Kerr, un decremento más rápido que el reportado en trabajos similares [34]. Este comportamiento se vuelve más pronunciado con el aumento del parámetro  $K$  y está presente a cualquier escala de tiempo, pequeña o larga, así como también cuando  $\langle N \rangle_0$  es mucho más grande que uno.

Para la evolución del estado del campo en el espacio fase, se encontró que las no linealidades de Kerr añadidas al DCE tienden a localizar y crear estados gato de Schrödinger provenientes del estado de vacío inicial. Finalmente se compararon y discutieron estos resultados con trabajos previos, estableciendo un enlace entre dos sistemas diferentes; ya sea usando un medio de Kerr o dos átomos de dos niveles que se encuentren dentro de una cavidad con espejos oscilantes, obtuvimos que  $\langle N \rangle_0$  muestra en ambos casos una conducta bastante similar. De ello podemos inferir que el sistema de dos átomos puede actuar como un medio no lineal con un índice de refracción dependiente de la intensidad del campo.

#### 4. Efecto Casimir dinámico en redes fotónicas

Proveer de un sistema físico del que se tenga un alto grado de control y sea capaz de simular las características y/o comportamientos de otro sistema físico siempre es deseable. Estudiar de manera experimental la evolución temporal de sistemas físicos que manifiestan una naturaleza cuántica como los átomos individuales, los fotones de la luz o su respectiva interacción, requiere de sofisticados aparatos que generalmente son costosos. Se ha recurrido entonces a investigar, diseñar y construir sistemas clásicos que emulen una dinámica cuántica y que sean más baratos y más fáciles de hacer.

En particular, en este capítulo se estudia un análogo clásico del efecto Casimir dinámico en una red fotónica. Se propone un esquema experimental factible basado en un arreglo de guías de ondas semi-infinito no homogéneo, ver Fig. 6 (b), en el cual la propagación lineal de luz clásica inyectada, emula la generación de luz cuántica proveniente del vacío cuántico, asociada a una cavidad electromagnética unidimensional no estacionaria como la estudiada en el capítulo anterior, ver Fig. 6 (a). El arreglo de guías de ondas posee un gradiente transversal lineal en su índice de refracción, curiosamente, éste genera una transición de fase del tipo metal-aislante, pasando de una generación exponencial a un flujo muy bajo de fotones debido a la aparición de oscilaciones tipo Bloch. Estas últimas causan una fuerte localización de la excitación inicial, haciendo difícil conseguir intensidades de luz que puedan ser accesibles a una medición experimental realista. Para romper dicha localización y superar esta situación, se introduce un mecanismo de desfaseamiento (*dephasing* en inglés) el cual activa el fenómeno de transporte cuántico de energía asistido por ruido, incrementando por órdenes de magnitud el número promedio de fotones en la fase aislante. También se considera el efecto de una temperatura finita en la producción de fotones del sistema, con la diferencia de que ahora sí se dará una propuesta para su implementación en el sistema fotónico.



**Figura 6.** (a) Representación esquemática de una cavidad no estacionaria en la cual el efecto Casimir dinámico se manifiesta. (b) Propuesta del arreglo de guías de ondas semi-infinito comprimido para la simulación de la producción de fotones de vacío.



Parte del contenido de este capítulo se encuentra en [14].

Primero reescribamos el Hamiltoniano de la Ec. (3.8) de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_{\text{NL}} = (i\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} - a^2) - (K/2)a^{\dagger}a + (K/2)(a^{\dagger}a)^2, \quad (4.1)$$

el cual recordemos representa al campo electromagnético dentro de una cavidad no estacionaria en 1D que soporta un solo modo y que además posee un medio no lineal tipo Kerr. Del capítulo anterior sabemos que este Hamiltoniano es no lineal y tratar de resolverlo en términos algebraicos resultó ser una tarea difícil. Sin embargo, si se elimina el término  $(a^{\dagger}a)^2$ , la dinámica se vuelve lineal y es posible encontrar una solución analítica cerrada. Para tener una conexión directa y congruente con los futuros parámetros del arreglo de guías de ondas, se trabajará en un marco de referencia rotado por  $\pi/4$ , mediante la aplicación de la transformación unitaria  $T_2 = \exp(-i\pi a^{\dagger}a/4)$  a la previa simplificación de  $\mathcal{H}_{\text{NL}}$ , con ello se obtiene:

$$\mathcal{H}_{\text{NL}} \approx \mathcal{H}_{\text{L}} = -(\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} + a^2) - (K/2)a^{\dagger}a. \quad (4.2)$$

Es precisamente con  $\mathcal{H}_{\text{L}}$  que se hará el análisis subsecuente durante el resto capítulo. Cabe mencionar que es posible obtener a  $\mathcal{H}_{\text{L}}$  suponiendo que la dependencia armónica en la frecuencia de oscilación del espejo derecho de la cavidad, ver Fig. 6 (a), se encuentre ligeramente fuera de las condiciones de resonancia [14], es decir, que la Ec. (2.32) se vea modificada de la siguiente manera:  $\omega(t) = \omega_0[1 + \epsilon \sin(2\omega_0 t + Kt)]$ , donde  $K \ll 1$  deja de ser el coeficiente de Kerr y pasa a representar, de ahora en adelante, un corrimiento muy pequeño en la frecuencia. De esta manera se considera que la Ec. (4.2) es el Hamiltoniano efectivo más simple para el cual la producción de fotones en el DCE, exhibe un umbral debido a la condición de fuera de resonancia. Si insertamos  $\mathcal{H}_{\text{L}}$  en la ecuación de Schrödinger,  $i d|\Psi(t)\rangle/dt = \mathcal{H}_{\text{L}}|\Psi(t)\rangle$  y expandimos el vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$  en términos de los estados de la base de Fock:  $|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m(t)|m\rangle$ , se obtendrá un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas para las amplitudes de probabilidad de transición  $\mathcal{A}_m(t)$ :

$$i\dot{\mathcal{A}}_m(t) + \lambda_m \mathcal{A}_{m-2}(t) + \lambda_{m+2} \mathcal{A}_{m+2}(t) + Km \mathcal{A}_m(t)/2 = 0, \quad (4.3)$$

donde  $\lambda_m = (\epsilon\omega_0/4)\sqrt{m(m-1)}$ . La ecuación (4.3) puede integrarse formalmente, la solución se obtiene de los elementos matriciales  $\langle m|U_{\text{L}}(t)|\Psi(0)\rangle = \mathcal{A}_m(t)$ , donde  $U_{\text{L}}(t) = \exp(-i\mathcal{H}_{\text{L}}t)$  y  $|\Psi(0)\rangle$  es un estado inicial puro. Para evaluar  $U_{\text{L}}(t)$  es conveniente expresar al operador exponencial  $\exp(-i\mathcal{H}_{\text{L}}t)$  en forma de productos; observemos que  $\mathcal{H}_{\text{L}}$  posee la simetría del álgebra  $su(1,1)$  independiente del tiempo y es la misma que la asociada al Hamiltoniano de la Ec. (3.17), por lo tanto, el operador de evolución correspondiente a  $\mathcal{H}_{\text{L}}$  utilizando las fórmulas de descomposición [46] está dado por:

$$U_{\text{L}}(t) = \beta_0^{1/4} \exp(\beta a^{\dagger 2}) \exp(a^{\dagger}a \ln \beta_0) \exp(\beta a^2), \quad (4.4)$$

$$\beta = i\beta_0^{1/2}(1/2\eta) \sinh(\eta\epsilon\omega_0 t/2), \quad \eta = \sqrt{1 - (K/\epsilon\omega_0)^2} \quad (4.5)$$

$$\beta_0 = [\cosh(\eta\epsilon\omega_0 t/2) - i(K/\epsilon\omega_0\eta) \sinh(\eta\epsilon\omega_0 t/2)]^{-2}. \quad (4.6)$$

Para estimar la producción de fotones del estado vacío, se calcula el valor esperado

$$\langle a^\dagger a \rangle_0 = \sum_{m=0}^{\infty} m |\mathcal{A}_m(t)|^2 = -4\beta^2 \beta_0^{-1}, \quad (4.7)$$

substituyendo los valores correspondientes de  $\beta$  y  $\beta_0$  se obtiene:

$$\langle a^\dagger a \rangle_0 = \eta^{-2} \sinh^2(\eta \epsilon \omega_0 t / 2), \quad (4.8)$$

que es idéntica a la fórmula reportada en (3.26). Tal resultado era de esperarse dado que  $\mathcal{H}_L$  posee, salvo factores de fase, los mismos coeficientes y operadores que  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  en la Ec. (3.17). Recordemos los tres regímenes de excitación, los cuales dependen de si el cociente  $K/\epsilon\omega_0$  es menor, mayor o igual que uno. En el caso donde  $K/\epsilon\omega_0 < 1$ , la generación de fotones crece exponencialmente; por el contrario, para  $K/\epsilon\omega_0 > 1$ , la producción de fotones se convierte en oscilatoria, siendo cero a valores  $\epsilon\omega_0 t / 2 = n\pi / \sqrt{(K/\epsilon\omega_0)^2 - 1}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Como tercera opción, se tenía que si  $K/\epsilon\omega_0 = 1$  la producción de fotones era cuadrática, lo cual indicaba un umbral entre los dos primeros comportamientos, dicho límite se ve explícitamente como:

$$\lim_{K \rightarrow \epsilon\omega_0} \langle a^\dagger a \rangle_0 = \left( \frac{\epsilon\omega_0 t}{2} \right)^2. \quad (4.9)$$

Como antecedente, en los trabajos [4] y [53] se demostró que si se toma en cuenta la interacción entre todos los modos de la cavidad, es decir, considerando todos los operadores que multiplican a  $\mu_{k_j}(t)$  en  $\tilde{\mathcal{H}}_{eff}$  de la Ec. (2.25), el número de fotones  $\mathcal{N}_n$  generados del estado vacío en el  $n$ -ésimo modo (modo par) crece *linealmente* con el tiempo en el régimen asintótico  $\epsilon\omega_1 t / 2 \gg 1$ , mientras que el número total de fotones  $\mathcal{N}_{tot} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$  crece *cuadráticamente* con el tiempo. Con ello se puede interpretar que el sistema compuesto de un solo modo al cual se le tiene fuera de las condiciones de resonancia, emula en lo concerniente a la generación de fotones, el efecto de toda la interacción intramodal que aparece en  $\tilde{\mathcal{H}}_{eff}$ . Recordemos que solamente se está refiriendo a la dinámica del número total de fotones generados en todos los modos.

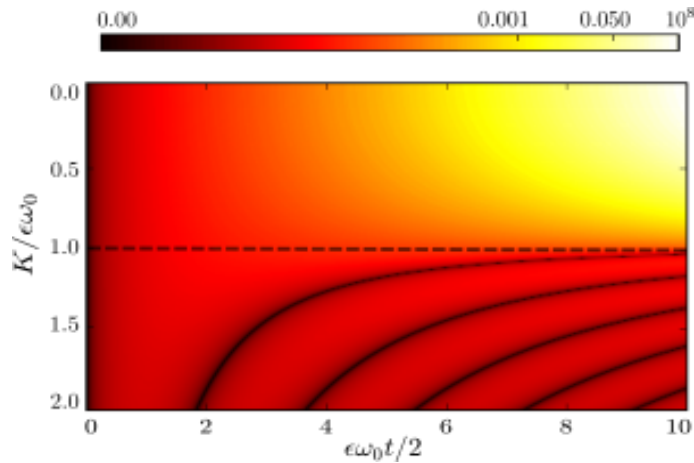
Los tres regímenes mencionados están representados en la figura 7, la cual muestra un panorama global de la producción de fotones evaluada en las tres regiones diferentes; el umbral es marcado por una línea horizontal punteada la cual separa el comportamiento oscilatorio del exponencial. Una manera sencilla de entender porqué existen estos tres comportamientos en la producción de fotones, es a través de un estudio del espectro energético de  $\mathcal{H}_L$ . En particular, para  $K/\epsilon\omega_0 > 1$ , se sabe que  $\mathcal{H}_L$  puede diagonalizarse utilizando el operador de compresión:

$$S(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} (a^{\dagger 2} - a^2) \right], \quad r = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{K - \epsilon\omega_0}{K + \epsilon\omega_0} \right), \quad (4.10)$$

con él se realiza la siguiente transformación:

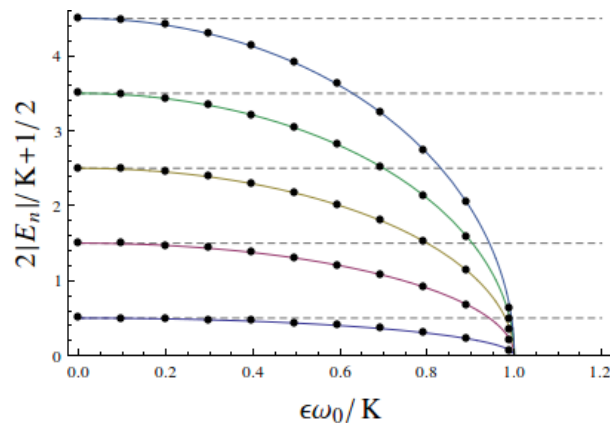
$$2S^\dagger(r) \mathcal{H}_L S(r) = -\epsilon\omega_0 \sqrt{(K/\epsilon\omega_0)^2 - 1} (a^\dagger a + 1/2) + K/2. \quad (4.11)$$

Al evaluar la expresión de arriba entre los estados  $|n\rangle$  de Fock, se observa claramente la presencia de un espectro ligado que está igualmente espaciado y que es similar al



**Figura 7.** Generación de fotones del estado de vacío,  $\langle a^\dagger a \rangle_0$ , producidos por una cavidad vibrante. La línea punteada indica el umbral del sistema que separa el crecimiento exponencial de fotones (arriba) del comportamiento oscilatorio (abajo). Las líneas sólidas muestran los valores donde la producción de fotones se desvanece.

del oscilador armónico. Esto implica que cualquier estado inicial, se espera que realice avivamientos periódicos a instantes de tiempo particulares, dados por los ceros de la función  $\langle a^\dagger a \rangle_0$  que describe la producción de fotones. En la figura 7 los ceros se manifiestan como las áreas o zonas oscuras. Por otro lado para  $K/\epsilon\omega_0 < 1$  el sistema exhibe un espectro continuo lo cual resulta en una generación de fotones significativa. Finalmente, en el umbral todos los valores propios se comprimen hasta coalescer en un solo punto, ver Fig. 8.



**Figura 8.** Espectro de energía asociado al Hamiltoniano  $\mathcal{H}_L$  de la Ec. (4.2). Se muestran los primeros cinco valores propios como función del cociente  $K/\epsilon\omega_0$ . Conforme éste se aproxima a 1 todo el espectro se comprime a un solo punto.

Es importante notar que existe una similitud muy grande de los cálculos arriba presentados con la discusión hecha entre las ecuaciones (3.11) y (3.14); esto debido a que ambos sistemas poseen la misma simetría, pero con la diferencia de que ahora estamos trabajando en un espacio de Hilbert independiente del tiempo, contrario a lo

que pasaba en la ecuación de valores propios (3.13).

#### 4.1. Simulación del efecto Casimir dinámico en guías de onda

Para trasladar los conceptos del DCE al terreno de guías de ondas en el régimen óptico, debemos mapear los elementos matriciales del operador  $\mathcal{H}_L$ , sobre los canales de acoplamiento y las constantes de propagación del arreglo presentado en la Fig. 6 (b). La teoría de modos acoplados, en el régimen de acoplamiento a primeros vecinos y junto con la aproximación denominada “envolvente lentamente variable” (SVEA *slowly varying envelope approximation* por sus siglas en inglés), establece que las ecuaciones diferenciales que describen la propagación de la luz y que están asociadas a las amplitudes ópticas normalizadas del campo  $\{\mathcal{E}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ , dentro de cada guía de onda mono modal que forma el arreglo fotónico de la Fig. 6 (b) están dadas por:

$$i d\mathcal{E}_n(z)/dz + \mathcal{C}_n \mathcal{E}_{n-1}(z) + \mathcal{C}_{n+1} \mathcal{E}_{n+1}(z) + \alpha n \mathcal{E}_n(z) = 0, \quad (4.12)$$

donde  $z$  representa la distancia de propagación a lo largo de una guía de onda. Tales ecuaciones representan un modelo genérico de amarre fuerte (*tight-binding* en inglés) con energías de sitio no idénticas. Para establecer una conexión uno a uno entre las amplitudes del campo del arreglo de guías de ondas, Ec. (4.3), y las amplitudes de probabilidad descritas por la Ec. (4.12), se definen los coeficientes de acoplamiento por ser  $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_1 \sqrt{2n(2n-1)}$ , para  $n \geq 0$ , con  $\mathcal{C}_1$  representando el acople entre las guías de ondas 0 y 1. Mas aún, las energías de sitio  $\alpha n$  corresponden a las constantes de propagación de cada guía de onda, éstas generan un gradiente transversal lineal en el índice de refracción del arreglo, que para valores experimentales de  $\alpha$  pequeños, se supone no afectan los coeficientes de acoplamiento. Hay que notar que en un arreglo de guías de onda real, el acoplamiento evanescente entre los sitios  $n$  y  $n-1$  separados por una distancia  $d_n$ , está dado por

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_1 \exp[-(d_n - d_1)/s], \quad (4.13)$$

donde  $d_1$  y  $s$  vienen siendo parámetros de ajuste de  $\mathcal{C}_1$  el cual depende del ancho de la guía de onda y de la longitud de onda de la luz láser empleada en el experimento. Con el fin de obtener los  $\mathcal{C}_n$  deseados, las guías de onda deben construirse con una separación

$$d_n = d_1 - (s/2) \ln[2n(2n-1)], \quad (4.14)$$

es decir, las primeras dos son las más separadas de todo el arreglo, mientras que las siguientes guías se van construyendo cada vez más juntas de tal manera que el correspondiente acoplamiento evanescente vaya aumentando dada su proximidad.

Para el sistema que se está considerando aquí, la completa representación del espacio de estados, es el espacio del oscilador armónico dividido en dos subespacios de paridad par e impar. Sin embargo, debido a la naturaleza cuadrática de  $\mathcal{H}_L$ , las ecuaciones de movimiento para el sistema en cuestión solamente conectan estados con la misma paridad. Debido al interés en la evolución del sistema cuando éste inicialmente se encuentra preparado en el estado de vacío (un estado par), el arreglo de guías de onda

mostrado en la Fig. 6 (b) es el apropiado para simular la dinámica del DCE, una vez que se ha identificado que  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \epsilon\omega_0/4$  y  $\alpha \rightarrow K/2$ , con  $z$  jugando el papel del tiempo. Bajo estas premisas la Ec. (4.12) y los elementos pares de la Ec. (4.3) son equivalentes. Esta es la razón del por qué podemos mapear la interacción del DCE que es a segundos vecinos, en una red fotónica en interacción a primeros vecinos. Si se quisieran simular los términos impares de la Ec. (4.3), una red fotónica independiente debería construirse en la misma forma que el esquema de la Fig. 6 (b), la diferencia solamente estaría en elaborar adecuadamente los acoplamientos impares; de hecho, el sistema cuántico completo podría simularse diseñando ambos arreglos, uno encima del otro, con una separación suficientemente grande tal que las posibles interacciones entre ellos sean despreciables.

Para llevar a cabo la simulación fotónica del DCE deberemos inyectar un haz de luz clásica en la primer guía de onda (etiquetada como el sitio 0), lo cual significa restringirse al régimen de una sola excitación en el sistema de amarre fuerte. De acuerdo a esto la amplitud del campo  $\mathcal{E}_n(z)$  puede ser obtenida escribiendo  $\mathcal{E}_m(z) = \langle 2m|U_L(z)|0\rangle$ . Donde  $U_L(z)$  representa al operador de evolución de la sección anterior pero con los parámetros del arreglo de guías de onda correspondiente. La intensidad de luz a la salida del arreglo  $I_m(z_{out}) = |\mathcal{E}_m(z_{out})|^2$  a una distancia  $z_{out}$  es una cantidad medible que usualmente se detecta con una cámara CCD. Por el contrario, la técnica de imágenes por fluorescencia permite la visualización de la propagación de la luz dentro del arreglo para un valor continuo de  $z$ . Por lo tanto, la intensidad en la guía  $m$ -ésima a una distancia  $z$  habiendo inyectado inicialmente luz en el primer sitio está dada por:

$$I_m(z) = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \frac{\langle a^\dagger a \rangle_0^m}{(1 + \langle a^\dagger a \rangle_0)^{m+\frac{1}{2}}}, \quad I_{2m+1}(z) = 0, \quad (4.15)$$

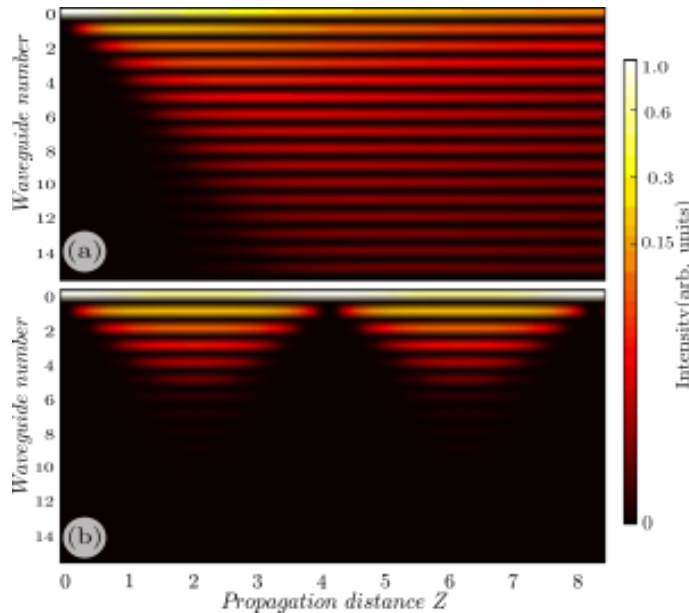
la cual es similar a la distribución de probabilidad de un campo de radiación térmico excepto por el factor extra multiplicativo. En este contexto óptico, la *producción de fotones*  $\langle a^\dagger a \rangle_0$  puede expresarse como  $\langle a^\dagger a \rangle_0 = \sinh^2(2\mathcal{C}_1 z \eta_x) \eta_x^{-2}$ , con  $\eta_x^2 = 1 - x^2$  y  $x = \alpha/2\mathcal{C}_1$ . Se observa que ahora toda la dinámica de la red fotónica, estará gobernada solamente por el cociente entre el gradiente transversal lineal y el primer coeficiente de acoplamiento. Alternativamente, es posible escribir la producción de fotones en términos de la intensidad de la luz de la guía  $m$ -ésima como:

$$\langle a^\dagger a \rangle_0^{\text{clas}} = 2 \sum_{m=0}^N m I_m(z). \quad (4.16)$$

La ecuación (4.16) constituye el análogo clásico de la generación de fotones provenientes del estado de vacío Ec. (4.8), a una distancia  $z$ , siendo el factor de 2 consecuencia de considerar únicamente los estados con paridad par y  $N$  es el número máximo de guías de ondas inscritas.

La figura 9 muestra las distribuciones de intensidad  $I_m(z)$ , para las primeras catorce guías de ondas de dos arreglos fotónicos distintos en dos posibles escenarios, esto es, por arriba y por debajo del umbral. Las guías de ondas están diseñadas con parámetros

experimentales realistas. Para  $x < 1$  [Fig. 9 (a)], la propagación de la excitación inicial, como función de la distancia escalada  $Z = 2C_1z$ , muestra rápidamente una deslocalización a través de todo el arreglo. Por el contrario, para  $x > 1$  [Fig. 9 (b)] el espectro del sistema forma una escalera del tipo Wannier-Stark, causando una localización espacial de modos y dando lugar a avivamientos de tipo Bloch a valores  $Z_{\text{rev}} = n\pi/\sqrt{x^2 - 1}$ . De hecho, tal efecto de localización puede entenderse notando que la condición  $x > 1$  implica que  $\alpha > 2C_1$ . Físicamente, esto ocasiona que las amplitudes de probabilidad se propaguen bajo la influencia de un gradiente de potencial lineal asociado al índice de refracción, con una pendiente dada por el parámetro  $\alpha$ , lo cual produce un espectro de tipo Bloch equidistante que finalmente conlleva a la localización del estado de vacío.



**Figura 9.** Propagación de luz en el arreglo de guías de ondas mostrado en la Fig. 6 (b) cuando el primer (estado de vacío) sitio es excitado inicialmente; con las constante de propagación  $\alpha = 0,5\text{cm}^{-1}$ . (a) Propagación extendida de la excitación inicial (fase metal) con  $C_1 = 0,26\text{cm}^{-1}$ . (b) Localización de la excitación (fase aislante) para  $C_1 = 0,2\text{cm}^{-1}$ .

Es interesante notar que el cambio espectral entre una excitación que es extendida y una localizada, es muy parecido a una transición de fase del tipo metal-aislante, con un umbral en  $x = 1$ . En ese sentido, la Fig. 9 (a) muestra la dinámica del sistema en la fase metal, mientras que la Fig. 9 (b) ilustra la fase aislante. Es importante enfatizar que mientras los fotones producidos en la fase metálica del DCE podrían ser fácilmente detectados, la correspondiente observación de la fase aislante resulta ser más desafiante. Por lo tanto, es de interés buscar e imaginar herramientas que permitan acceder a la fase aislante del DCE.

#### 4.2. Incrementando la producción de fotones a través del ruido

Como se ha discutido en la sección previa, cuando el sistema que presenta el DCE se encuentra en la fase aislante, casi toda la excitación inicial permanece localizada o “atrapada.” alrededor de la primer guía de onda, es decir, el estado de vacío. Por lo tanto, valores de intensidad distintos de cero en guías adyacentes son difíciles de obtener. Todo esto resulta en una producción de fotones muy baja que solamente a distancias específicas podría llegar a medirse. Para sobrepasar esta situación, se introducirá un mecanismo de *desfasamiento* puro, el cual simulará el efecto de un ambiente de naturaleza Markoviana, que se encuentre interactuando con el sistema fotónico. Esta interacción ayuda a que la excitación del primer sitio escape, llegando a poblar los siguientes sitios resultando en una deslocalización, lo cual conlleva a un incremento en la producción de fotones; a este fenómeno se le conoce como *transporte cuántico asistido por el entorno o ruido*. De hecho para implementar este mecanismo en el arreglo de guías de ondas, uno necesita incluir fluctuaciones Gaussianas diagonales sobre las energías de los sitios, es decir, sobre las constantes de propagación de cada guía de onda, generando un índice de refracción aleatorio a lo largo de la misma. Esto se puede implementar experimentalmente cambiando aleatoriamente la velocidad a la cual cada guía de onda es inscrita o grabada, ver las referencias [54] y [55] para los detalles de fabricación de dichos sistemas. Notablemente, en el contexto de una cavidad electromagnética no estacionaria, este fenómeno podría ser observado mediante la adición de fluctuaciones estocásticas al pequeño corrimiento de frecuencia  $K$ .

Bajo diferentes consideraciones sobre fluctuaciones aleatorias, se decide incorporar un proceso de desfasamiento puro para el operador densidad del campo electromagnético  $\rho$ . Con ello se estudiará la acción sobre  $\rho$  del generador  $\mathcal{L}[x]$  definido en la forma de Lindblad como  $\mathcal{L}[x]\rho = x\rho x^\dagger - (x^\dagger x\rho + \rho x^\dagger x)/2$ , con el cual la ecuación maestra a resolver es

$$\dot{\rho} = -i[\mathcal{H}, \rho] + \gamma\mathcal{L}[a^\dagger a]\rho, \quad (4.17)$$

donde  $\gamma$  es la tasa de desfasamiento. Si inspeccionamos el término  $\langle n|D[a^\dagger a]\rho|m\rangle = -(n-m)^2\rho_{n,m}/2$ , vemos que sólo los elementos no diagonales de la matriz densidad están siendo directamente afectados por las fluctuaciones aleatorias, lo cual es considerado como una huella digital asociada a un proceso de desfasamiento puro.

Ahora calculemos el valor esperado del operador de número así como de los operadores de campo cuadráticos; de la ecuación maestra se obtienen las ecuaciones de movimiento correspondientes:

$$d\langle a^\dagger a \rangle/d\tau = i(\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^2 \rangle), \quad (4.18)$$

$$d\langle a^2 \rangle/d\tau = 2\tilde{K}_\gamma\langle a^2 \rangle + i(2\langle a^\dagger a \rangle + 1), \quad (4.19)$$

$$d\langle a^{\dagger 2} \rangle/d\tau = 2\tilde{K}_\gamma^*\langle a^{\dagger 2} \rangle - i(2\langle a^\dagger a \rangle + 1), \quad (4.20)$$

donde  $\tau = \epsilon\omega_0 t/2$  y  $\tilde{K}_\gamma = iK/\epsilon\omega_0 - 2\gamma/\epsilon\omega_0$ . Notemos que la generación de fotones, Ec. (4.18), depende indirectamente de  $\gamma$  a través de las Ecs. (4.19) y (4.20).

Si consideramos las condiciones iniciales  $\langle a^\dagger a \rangle|_{\tau=0} = \langle a^2 \rangle|_{\tau=0} = \langle a^{\dagger 2} \rangle|_{\tau=0} = 0$ , las cuales corresponden al estado de vacío, es posible resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento arriba mencionadas.

La figura 10 (a) muestra la producción de fotones  $\langle a^\dagger a \rangle$  como función de la tasa de desfaseamiento cuando el sistema está en la fase aislante y a tiempos específicos donde, en ausencia de ruido o desfaseamiento, la producción de fotones es mínima (esto es, cerca los avivamientos de Bloch). Para el caso donde el ruido es bajo o simplemente está ausente, el índice de refracción de las guías de onda es esencialmente inalterado y las oscilaciones tipo Bloch ocurren. Sin embargo, para un incremento moderado de la tasa de desfaseamiento uno puede observar que las oscilaciones tipo Bloch dejan de existir, Fig. 10 (b), resultando en un mejoramiento considerable sobre la generación de fotones. El mecanismo que está detrás de dicho incremento de fotones es que, valores moderados de desfaseamiento rompen el espectro equidistante de valores propios y como resultado esto previene la manifestación de oscilaciones de Bloch. Para ilustrar mejor el efecto del desfaseamiento, en la Fig. 10 (b) se examinan los elementos diagonales de la matriz densidad  $\langle 2n|\rho|2n \rangle$  como función del tiempo. Debido a la interacción del sistema con el ambiente, la deslocalización del primer sitio es rota, lo cual induce una gran contribución a la producción de fotones dado que  $\langle a^\dagger a \rangle = \sum_n n \rho_{n,n}$ . Se observa que la deslocalización es más drámatica en las regiones que se encuentran cerca de los avivamientos de Bloch, esto es, en los puntos donde la producción es cero en ausencia del desfaseamiento. Finalmente, para valores altos de desfaseamiento, los términos de interferencia cruzada entre sitios diferentes son completamente eliminados y el estado de propagación difusiva pura, donde la probabilidad de la excitación de permanecer en su estado inicial es máxima, es alcanzado. La ecuación maestra se ha resuelto numéricamente utilizando el paquete computacional QuTip [56].

### 4.3. Efectos térmicos en arreglos fotónicos

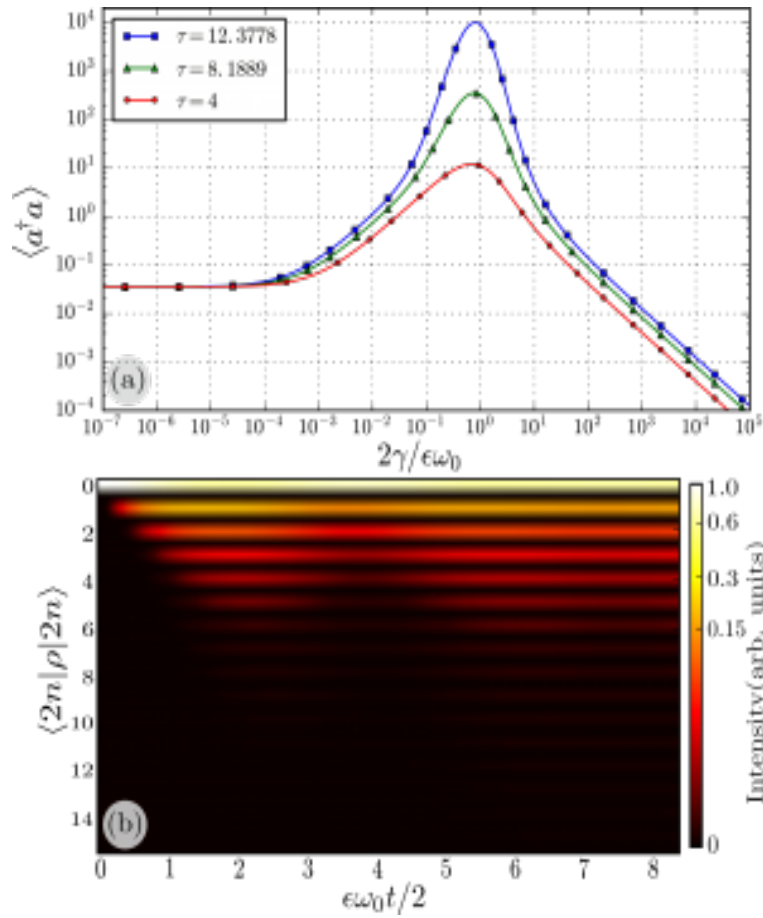
Por otro lado, del capítulo 2 se sabe que el efecto de una temperatura finita sobre el DCE es el de incrementar por órdenes de magnitud la producción de fotones, ver Ec. (2.40). En este caso usando el Hamiltoniano  $\mathcal{H}_L$ , la evolución en el número promedio de fotones para el campo térmico inicial  $\rho_{th}(0)$  es:

$$\langle a^\dagger a \rangle_{th} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \langle a^\dagger a \rangle_n = \frac{1 + 2\bar{n}_{th}}{1 - x^2} \sinh^2(2\mathcal{C}_1 z \sqrt{1 - x^2}) + \bar{n}_{th}, \quad (4.21)$$

donde  $P_n$  es la distribución de Bose-Einstein asociada a  $\rho_{th}(0)$ ,  $\langle a^\dagger a \rangle_n = (1 + 2n)\langle a^\dagger a \rangle_0 + n$ , es la producción de fotones que se obtiene cuando el sistema es preparado en un estado de Fock  $|n\rangle$ .

Un campo térmico en el contexto fotónico podría generarse, usando de manera independiente, una estructura finita de guías de ondas desordenadas, dicha estructura es caracterizada por tener una simetría quiral inmune al desorden; en ella la inyección de un estado coherente inicial evolucionará en una mezcla incoherente [57]. El análogo





**Figura 10.** (a) Incremento en la producción de fotones como función de la tasa de desfaseo escalada,  $2\gamma/\epsilon\omega_0$ , a tres tiempos de reactivación. (b) Evolución temporal de los elementos diagonales de la matriz densidad del sistema usando  $2\gamma/\epsilon\omega_0 = 0,04$ .

clásico de la Ec. (4.21) está dado como:

$$\langle a^\dagger a \rangle_{th}^{clas} = \sum_{n=0}^M P_n \left[ \sum_{m=0}^N m I_{n,m}(z) \right], \quad (4.22)$$

donde  $I_{n,m}(z)$  es la intensidad de luz clásica inyectada en el sitio  $n$  y medida en la  $m$ -ésima guía de onda a su salida. De nueva cuenta  $N$  es el número de guías inscritas y  $M$  es la etiqueta asociada, a la máxima contribución del estado de número  $|M\rangle$  en la distribución  $P_n$ , para el cual la correspondiente propagación de luz a través de la red fotónica no alcanza el borde derecho, por lo tanto  $M < N$ . De acuerdo a esto,  $\bar{n}_{th}$  no deberá ser mayor a 10 si queremos usar un arreglo fotónico de algunos cientos de guías de onda. Por ejemplo, en la fase aislante el número promedio de fotones usualmente es menor a uno, entonces para  $\bar{n}_{th} = 4,5$  debido al factor extra multiplicativo  $1 + 2\bar{n}_{th}$ ,  $\langle a^\dagger a \rangle_{th}$  será diez veces más grande que la contribución de vacío pura. Hay que mencionar que ahora los sitios donde el haz de luz es inyectado, son pares e impares. Un arreglo fotónico independiente, de simetría impar, debe ser construido para simular los estados impares. Por lo tanto, la evolución completa será la suma de las dinámicas de ambos arreglos. Debido a que la implementación de ambos sistemas se realiza con la

misma tecnología de óptica integrada, sería posible diseñar ambos arreglos en tándem, de tal manera que las pérdidas en el acoplamiento del estado térmico a nuestro sistema propuesto será despreciable.

#### *4.4. Resumen de capítulo*

Se propuso un sistema fotónico novedoso para la implementación de una simulación clásica del efecto Casimir dinámico. Se mostró que la generación de fotones provenientes del estado de vacío presenta un cambio, pasando de una generación exponencial a un comportamiento oscilatorio, lo cual se asemeja a una transición de fase del tipo metal-aislante. Además, se encontró que la fase aislante surge como consecuencia de la aparición de oscilaciones tipo Bloch en la dinámica del sistema. Esto causa una fuerte localización de la excitación inicial en la primer guía de onda, dejando una contribución muy pobre para la radiación tipo Casimir, haciendo difícil una posible detección. Para sobrellevar esta situación se discutieron dos soluciones posibles. Como primera opción se usó un mecanismo de desfaseamiento, en el cual la evolución coherente del sistema es rota debido a su interacción con un entorno Markoviano. La reducción de la coherencia del sistema causa una deslocalización de la excitación, incrementando entonces la producción de fotones hasta dos órdenes de magnitud en los primeros dos avivamientos tipo Bloch. El segundo mecanismo estuvo basado en la consideración de efectos térmicos sobre el DCE, se mostró que en este caso la producción de fotones es mejorada por un factor que depende del número promedio de fotones del campo térmico inyectado inicialmente en el sistema.

Finalmente, se hace hincapié, que las modificaciones que puede tener el DCE debido a la inclusión de no linealidades tipo Kerr, como las predichas en el capítulo anterior, también pueden ser probadas en este sistema fotónico, simplemente cambiando el gradiente transversal lineal en el índice de refracción de las guías de ondas por un gradiente cuadrático.

## 5. Efecto Casimir dinámico con disipación

En tiempos recientes el tema de decoherencia ha tenido mucho interés, debido principalmente a que los nuevos sistemas cuánticos que se están implementando como herramientas para el computo y simulaciones cuánticas, se construyen a escalas macroscópicas donde la decoherencia y la disipación de energía son unas de las principales causas que afectan el correcto funcionamiento de dichos dispositivos. Como se sabe cualquier sistema físico no puede estar aislado completamente de un entorno; se necesita entonces conocer cómo el sistema interactúa con sus alrededores.

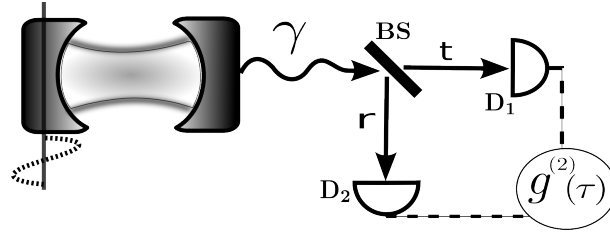
Hasta este momento no nos hemos preocupado por considerar los posibles efectos de pérdida de energía y coherencia cuántica que podrían llegar a suceder dentro y fuera una cavidad dinámica. Es de nuestro interés particular, el querer detectar y correlacionar los fotones generados del vacío cuántico durante la manifestación del DCE en cavidades unidimensionales como las estudiadas en los capítulos anteriores. Para ello es necesario acoplar los fotones generados a un entorno del cual se pueda extraer la información deseada.

Siguiendo estas líneas de investigación, pocos trabajos han surgido con el objetivo de incorporar efectos disipativos en cavidades electromagnéticas no estacionarias. Por ejemplo, en [58] y [59] se consideraron los efectos de amortiguamiento en amplitud y fase respectivamente; así como también una ecuación maestra dependiente del tiempo bastante complicada fue derivada de primeros principios en [60]. Sin embargo, a pesar de estos esfuerzos, un consenso acerca del cómo analizar apropiadamente los efectos de disipación en el DCE no se ha alcanzado todavía.

Lo que se pretende en este capítulo es desarrollar a través de un modelo algebraico sencillo, una ecuación maestra microscópica efectiva para la matriz densidad reducida de una cavidad dinámica, vista como un sistema cuántico abierto, capaz de describir bajo ciertas condiciones del entorno y del sistema, cómo son las modificaciones en la generación de fotones del estado de vacío, cuando se toman en cuenta efectos de decoherencia y con ello poder detectar y correlacionar dichos fotones. En particular, el modelo estará restringido al régimen donde la generación de fotones está acotada, es decir, estaremos trabajando en el equivalente a la fase aislante descrita con detalle en el capítulo 4.

Parte del contenido de este capítulo se encuentra en [61].

El sistema óptico del proceso del que se está hablando se encuentra descrito y esquematizado en la Fig. 11. De acuerdo con la figura 11, primero los fotones son generados en la cavidad no estacionaria, posteriormente las fluctuaciones cuánticas asociadas son analizadas mediante la función de correlación (coherencia) de segundo orden  $g^{(2)}(\tau)$ , la cual se mide con un interferómetro de intensidades llamado *Hambury-Brown y Twiss*. Los detalles específicos del modelo efectivo y el preciso conjunto de parámetros al cual se estará enfocando el estudio se darán a continuación.



**Figura 11.** Esquema óptico para la detección de la radiación de Casimir. Izquierda. Cavidad no estacionaria con disipación donde el DCE se manifiesta. Derecha. Los fotones creados que salen de la cavidad son detectados y correlacionados por un interferómetro de Hanbury-Brown y Twiss compuesto de un divisor de haz, (BS), y dos foto-detectores  $D_1$  y  $D_2$ , para desempeñar las mediciones de  $g^{(2)}(\tau)$ .

Del capítulo anterior se sabe que el Hamiltoniano efectivo más simple con el cual se puede describir el DCE dentro de una cavidad que es unidimensional, no estacionaria, monomodal y sin pérdidas, cuya frecuencia instantánea sea  $\omega(t) = \omega_0[1 + \epsilon \sin(\nu t)]$  está dado por (4.2):

$$\mathcal{H}_L = (\epsilon\omega_0/4)(a^{\dagger 2} + a^2) + (K/2)a^{\dagger}a, \quad (5.1)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia fundamental de la cavidad, y  $\epsilon(\nu)$  es la amplitud (frecuencia) de modulación. Este Hamiltoniano independiente del tiempo es un modelo algebraico efectivo obtenido bajo condiciones cerca resonancia, esto es  $\nu = 2\omega_0 + K$ , siendo  $K$  un pequeño corrimiento en la frecuencia; y  $H_{\text{eff}}$  está escrito en un marco de referencia rotante donde la aproximación de onda rotante fue usada. De la ecuación (4.8) sabemos que el número promedio de fotones creados es:

$$\langle a^{\dagger}a \rangle_0 = \sinh^2(\eta\epsilon\omega_0 t/2)/\eta^2. \quad (5.2)$$

Lo primero que se hará es calcular las modificaciones de la ecuación anterior cuando se considera un enfoque fenomenológico de la disipación en el modo, es decir, se supondrá que la pérdida de energía y/o coherencia cuántica de una cavidad estática (ambos espejos fijos) es la misma que la de una cavidad dinámica.

### 5.1. Enfoque fenomenológico

La ecuación maestra fenomenológica asociada al operador densidad  $\rho$  del campo dentro de una cavidad no estacionaria y disipativa se asumirá que está dada por [58]:

$$\dot{\rho} = -i[\mathcal{H}_L, \rho] + \kappa(1 + \bar{n}_{\text{en}})\mathcal{L}[a]\rho + \kappa\bar{n}_{\text{en}}\mathcal{L}[a^{\dagger}]\rho \quad (5.3)$$

donde  $\kappa$  es la tasa de decaimiento del modo la cual es inversamente proporcional al factor de calidad de la cavidad y  $\bar{n}_{\text{en}}$  es el número promedio de fotones térmicos de un entorno de osciladores armónicos, y está dado por la distribución de Boltzman  $\bar{n}_{\text{en}} = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ . El operador  $\mathcal{L}[a]\rho$  representa la parte disipativa del sistema el cual está escrito en la forma de Lindblad, ver (4.17). Las ecuaciones diferenciales de

los valores de expectación asociados a los operadores de número y de campo son:

$$d\langle a^\dagger a \rangle / dt = i\epsilon\omega_0(\langle a^2 \rangle - \langle a^{\dagger 2} \rangle) / 2 - 2\kappa\langle a^\dagger a \rangle + 2\kappa\bar{n}_{\text{en}}, \quad (5.4)$$

$$d\langle a^2 \rangle / dt = -i\epsilon\omega_0(\langle a^\dagger a \rangle + 1/2) - iK\langle a^2 \rangle - 2\kappa\langle a^2 \rangle, \quad (5.5)$$

$$d\langle a^{\dagger 2} \rangle / dt = i\epsilon\omega_0(\langle a^\dagger a \rangle + 1/2) + iK\langle a^{\dagger 2} \rangle - 2\kappa\langle a^{\dagger 2} \rangle \quad (5.6)$$

Observemos cómo la ecuación maestra (5.3), a diferencia de (4.17), sí afecta de manera directa a los elementos diagonales de la matriz densidad, prueba de ello son los dos últimos términos que aparecen en (5.4). Es posible encontrar una solución analítica al sistema de ecuaciones diferenciales arriba mencionado, sin embargo, tal solución es muy engorrosa para presentarla. En lugar de ello, lo que se hará es mostrar la solución simplificada del número promedio de fotones generados del vacío cuando el entorno se encuentra a una temperatura  $T = 0$ , es decir, el número de fotones térmicos es  $\bar{n}_{\text{en}} = 0$ , esto implica una modificación a la Ec. (5.2) que se ve la siguiente manera:

$$\langle a^\dagger a \rangle^{\text{ph}} = -2\bar{n}_{\text{st}}^{\text{ph}} e^{-2\kappa t} [\sinh^2(\eta\epsilon\omega_0 t / 2) + 1/2 + (\kappa/\eta\epsilon\omega_0) \sinh(\eta\epsilon\omega_0 t)] + \bar{n}_{\text{st}}^{\text{ph}}, \quad (5.7)$$

donde

$$\bar{n}_{\text{st}}^{\text{ph}} = \frac{1}{2} [(2\kappa/\epsilon\omega_0)^2 + (K/\epsilon\omega_0) - 1]^{-1}, \quad (5.8)$$

es el valor estacionario del número promedio de fotones generados siempre y cuando  $2\kappa > \eta\epsilon\omega_0$ ; se puede ver que dicho valor estacionario depende de la tasa de decaimiento del modo dentro de la cavidad.

En condiciones de resonancia, esto es  $K = 0$ , la Ec. (5.7) reproduce el resultado de la referencia [58], el cual establece que la tasa de producción de fotones crece de manera exponencial siempre y cuando la amplitud de modulación (compresión o *squeezing*), supere al proceso de disipación. Por otro lado, en [59] se demostró que si sólo se consideran efectos de desfaseamiento en la Ec. (5.3), es decir, usar términos proporcionales a  $\mathcal{L}[a^\dagger a]\rho$ , tales efectos de desfaseamiento sólo tienden a ralentizar la generación de fotones. Este resultado no está en contradicción con el fenómeno de transporte asistido por ruido estudiado en el capítulo anterior, ya que en [59] la cavidad dinámica, contrario al sistema de guías de onda, se encuentra en condiciones de resonancia exacta.

El enfoque fenomenológico resulta poco útil al querer describir de manera analítica funciones de correlación cuánticas, debido a que no se conoce de manera explícita el estado estacionario del sistema, lo cual es indispensable en el cálculo de los valores iniciales, que surgen cuando es aplicada la fórmula de regresión cuántica [62]. Una discusión detallada sobre las deficiencias que aparecen al usar el tratamiento fenomenológico se puede encontrar en [58] y [60].

Se estudiará entonces la derivación de una ecuación maestra microscópica adecuada al sistema no estacionario y que esté dentro de la aproximación Born-Markov. Tal enfoque resultará adecuado en la descripción de la disipación en el DCE siempre y cuando el sistema se encuentre en el régimen donde la generación de fotones esté acotada.

## 5.2. Ecuación maestra microscópica

El Hamiltoniano (5.1) será el punto de partida para la derivación de una ecuación maestra microscópica que describa la disipación de la cavidad no estacionaria. Del capítulo 4 se encontró que para  $K/\epsilon\omega_0 > 1$ ,  $\mathcal{H}_L$  puede diagonalizarse mediante la transformación generada por el operador de compresión  $S(r) = \exp[r(a^2 - a^{\dagger 2})/4]$ , siendo el parámetro de compresión  $r = \frac{1}{2} \ln[(K + \epsilon\omega_0)/(K - \epsilon\omega_0)]$ . Los valores y vectores propios correspondientes están dados por (4.11):

$$2E_n = \epsilon\omega_0 \sqrt{(K/\epsilon\omega_0)^2 - 1} (n + 1/2) - K/2, \quad (5.9)$$

$$|r, n\rangle = S(r)|n\rangle, \quad (5.10)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y los vectores propios  $|r, n\rangle$  son los llamados estados de número comprimidos. Utilizando el operador de compresión se pueden introducir los llamados pseudooperadores de creación y aniquilación  $b$  y  $b^\dagger$ , definidos como una transformación de Bogoliubov de los operadores de campo  $a$  y  $a^\dagger$  dada por

$$b = S(r)aS^\dagger(r) = \cosh(r/2)a + \sinh(r/2)a^\dagger, \quad (5.11)$$

$$b^\dagger = S(r)a^\dagger S^\dagger(r) = \cosh(r/2)a^\dagger + \sinh(r/2)a, \quad (5.12)$$

evidentemente se cumple que  $[b, b^\dagger] = 1$ . Con estos pseudooperadores es posible escribir al Hamiltoniano (5.1) en una forma diagonal

$$H_S = \Omega(b^\dagger b + 1/2) - K/4, \quad (5.13)$$

donde  $\Omega = \tilde{\eta}\epsilon\omega_0/2$ . Se puede probar fácilmente que (5.10) son estados propios del llamado pseudooperador de número  $b^\dagger b$  y que además, los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  actúan sobre (5.10) de la siguiente manera

$$b|r, n\rangle = \sqrt{n}|r, n-1\rangle, \quad b^\dagger|r, n\rangle = \sqrt{n+1}|r, n+1\rangle, \quad (5.14)$$

lo cual deja claro el porqué son llamados pseudooperadores de creación y aniquilación. Estos actúan sobre la base de estados de número comprimidos de la misma forma en que los operadores de campo actúan sobre la base de los estados de Fock, es decir, agregan y quitan  $\pm 1$  excitación. Al realizar la conmutación de estos pseudooperadores con  $H_S$  se encuentra que

$$[H_S, b] = -\Omega b, \quad [H_S, b^\dagger] = \Omega b^\dagger, \quad (5.15)$$

identificando a  $b$  y  $b^\dagger$  como operadores propios del Hamiltoniano  $H_S$ . Este hecho motiva la posibilidad de considerar el derivar una ecuación maestra aproximada en el régimen de un acoplamiento débil, así como Markoviano, para poder explorar la dinámica disipativa del sistema descrito por (5.1) pero desde un punto de vista algebraico.

Primero se asume a la cavidad dinámica (5.1) como un sistema cuántico abierto el cual puede ser estructurado de la siguiente manera

$$H = H_S + H_E + H_{SE}, \quad (5.16)$$

donde  $H_S$  representa al sistema central de interés (cavidad no estacionaria unidimensional),  $H_E$  representa el Hamiltoniano del entorno el cual se supone que está descrito por un baño de oscilador armónicos dado por

$$H_E = \sum_k \omega_k B_k^\dagger B_k \quad (5.17)$$

donde  $B_k$  y  $B_k^\dagger$  son los operadores de creación y aniquilación del  $k$ -ésimo oscilador armónico de frecuencia  $\omega_k$  respectivamente, su conmutador es  $[B_i, B_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ .  $H_{SE}$  representa el Hamiltoniano de interacción entre el sistema central y el entorno. Tal interacción se asumirá que es lineal entre la amplitud del campo  $x = a + a^\dagger$  y las amplitudes del entorno  $X_k = B_k + B_k^\dagger$ , esto es

$$H_{SE} = (a + a^\dagger) \sum_k g_k (B_k + B_k^\dagger), \quad (5.18)$$

siendo  $g_k$  los coeficientes de acoplamiento. Es interesante notar, que la interacción (5.18) es muy parecida al Hamiltoniano de acoplamiento multimodal conseguido en [60] (ver Ec. (57) de dicha referencia), en el cual un espejo dispersivo, modelado como un potencial delta de Dirac, es introducido cerca de la pared vibrante de una cavidad electromagnética de longitud muy grande; al colocar el espejo dispersivo se crean dos cavidades acopladas, la pequeña se considera como el sistema central mientras que la más grande juega el papel de entorno o ambiente. Es conveniente escribir la interacción (5.18) en términos de los operadores naturales del campo  $b$  y  $b^\dagger$ , así como también escribirla en la representación de interacción generada por  $H_S$  y  $H_E$ , todo ello resulta en

$$\tilde{H}_{SE}(t) = (be^{-i\Omega t} + b^\dagger e^{i\Omega t}) \sum_k g_k(r) (B_k e^{-i\omega_k t} + B_k^\dagger e^{i\omega_k t}), \quad (5.19)$$

donde el coeficiente de acoplamiento  $g_k(r) = e^{-r/2} g_k$  ahora es dependiente del parámetro de compresión  $r$ . Basándose en la aproximación de Born-Markov y dentro del marco de ecuaciones maestras, es posible escribir al operador densidad reducido, asociado al sistema central como [63]:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = - \int_0^\infty d\tau Tr_E \{ [\tilde{H}_{SE}(t), [\tilde{H}_{SE}(t - \tau), \tilde{\rho}(t) \otimes \rho_E]] \}. \quad (5.20)$$

Para la obtención de ésta última expresión no es necesario conocer explícitamente la interacción que tiene lugar entre el sistema central y su entorno. La tilde sobre el operador densidad en (5.20) significa que éste se encuentra en la representación de interacción,  $Tr_E$  indica la traza sobre los grados de libertad del entorno,  $\rho_E$  representa la matriz densidad del entorno en la cual la aproximación de Born ha sido utilizada,  $\rho_E(t) \approx \rho_E(0) = \rho_E$ , es decir, se supone que la evolución del estado del ambiente es constante y está determinada por la distribución de Boltzman  $\rho_E = e^{-H_E/k_B T} Tr \{ e^{-H_E/k_B T} \}$ .

Sustituyendo  $\tilde{H}_{SE}(t)$  en (5.20), aplicando la aproximación de onda rotante al resultado obtenido y posteriormente regresando a la representación de Schrödinger, se obtiene la siguiente ecuación maestra del tipo Lindblad, que modela la dinámica disipativa de una cavidad no estacionara que interactúa con un baño de osciladores armónicos en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ :

$$\dot{\rho} = -i[H_S, \rho] + \gamma_r (1 + \bar{n}_\Omega) \mathcal{L}[b]\rho + \gamma_r \bar{n}_\Omega \mathcal{L}[b^\dagger]\rho. \quad (5.21)$$

Aquí,  $\gamma_r = e^{-r}\gamma$  es la tasa de decaimiento global, donde  $\gamma = \pi h(\Omega)|g(\Omega)|^2$  tiene un valor que es aproximadamente constante siempre y cuando se considere que el entorno posee una densidad espectral plana;  $h(\Omega)$  y  $|g(\Omega)|^2$  son respectivamente, la densidad de estados del sistema y el acoplamiento sistema-entorno dados a una frecuencia  $\Omega$ ; además,  $\bar{n}_\Omega = (e^{h\Omega/k_B T} - 1)^{-1}$  es el número promedio de fotones térmicos del entorno.

La dependencia de la ecuación maestra resultante en el parámetro de compresión  $r$  es implícita desde el punto de vista del esquema algebraico en el que se está trabajando; cada conjunto de parámetros  $\{K, \epsilon, \omega\}$ , genera un valor diferente de  $r$  lo cual define un oscilador descrito por el Hamiltoniano algebraico (5.13), que para un valor dado de los parámetros involucrados, su espectro de energía es igualmente espaciado (5.9). Entonces, para cada valor del cociente  $K/\epsilon\omega_0$  se tienen pseudooperadores  $\{b, b^\dagger\}$  que describen las transiciones permitidas inducidas por el entorno y que toman lugar con una tasa  $\gamma_r$  y una frecuencia de transición específica  $\Omega$ , entre los niveles de energía involucrados de acuerdo con las relaciones de conmutación (5.15).

Es importante mencionar que se puede tomar ventaja del esquema algebraico utilizado hasta el momento y observar, que debido a que la ecuación maestra microscópica (5.21) está escrita en términos de los operadores naturales del sistema  $\{b, b^\dagger\}$ , esto permite utilizar la técnica estándar de super-operadores descrita en [64]; ya que con dicha técnica se encuentra la solución  $\rho(t)$  a la matriz densidad reducida. Con ello es posible confirmar que el estado estacionario asociado al operador densidad reducido se aproxima, en el límite asintótico, a un estado térmico comprimido (2.41):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \sum_n \frac{\bar{n}_\Omega^n}{(1 + \bar{n}_\Omega)^{n+1}} |r, n\rangle \langle r, n| = \rho_{st}. \quad (5.22)$$

Cuando el entorno se encuentra a temperatura cero ( $\bar{n}_\Omega = 0$ ), el estado estacionario del sistema es el estado de vacío de comprimido

$$\rho_{st} \rightarrow |r, 0\rangle \langle r, 0|, \quad (5.23)$$

que es justamente el estado de mínima energía del sistema (ver (5.10)) descrito por el Hamiltoniano (5.1). Este resultado es muy útil al querer evaluar las condiciones iniciales que aparecen durante la aplicación de la fórmula de regresión cuántica en el cálculo de  $g^{(2)}(\tau)$ , tales valores iniciales están directamente relacionados con los valores esperados de los operadores de campo en el estado estacionario.

Es interesante notar que si la ecuación maestra (5.21) se reescribe en términos de los operadores de creación y aniquilación  $a$  y  $a^\dagger$ , el resultado será similar a una ecuación maestra correspondiente un sistema bosónico acoplado a un entorno que es sensible a la fase [65] y adicionalmente, será semejante a la ecuación maestra derivada en [60].

### 5.3. Generación y correlación de fotones

Ahora se calculará y discutirá la evolución amortiguada del número promedio de fotones generados y de la función de correlación de segundo orden. Para ello se observa



que el valor esperado del operador de número  $a^\dagger a$  se puede escribir en términos de los pseudooperadores de campo de la siguiente manera

$$\langle a^\dagger a \rangle = \cosh(r) \langle b^\dagger b \rangle - \sinh(r) (\langle b^{\dagger 2} \rangle + \langle b^2 \rangle) / 2 + \sinh^2(r/2). \quad (5.24)$$

Se requiere conocer cómo son las ecuaciones de movimiento asociadas a los pseudooperadores; esto se logra utilizando la ecuación maestra (5.21), con ella se obtienen de manera directa las ecuaciones:

$$d\langle b^\dagger b \rangle / dt = -2\gamma_r \langle b^\dagger b \rangle + 2\gamma_r \bar{n}_\Omega, \quad (5.25)$$

$$d\langle b^2 \rangle / dt = -(2i\Omega + 2\gamma_r) \langle b^2 \rangle, \quad (5.26)$$

$$d\langle b \rangle / dt = -(i\Omega + \gamma_r) \langle b \rangle. \quad (5.27)$$

La solución este sistema ecuaciones es fácil de obtener y más aún si se consdiera que el estado inicial de la matriz densidad del sistema es el estado de vacío  $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$ . Entonces, sustituyendo la respectiva solución de (5.25) y (5.26) en (5.24) se obtiene

$$\langle a^\dagger a \rangle = e^{-2\gamma_r t} \sin^2(\tilde{\eta} \epsilon \omega_0 t / 2) / \tilde{\eta}^2 + (1 - e^{-2\gamma_r t}) \bar{n}_{st}, \quad (5.28)$$

donde  $\bar{n}_{st} = \bar{n}_{st,0}(1 + 2\bar{n}_\Omega) + \bar{n}_\Omega$  y

$$\bar{n}_{st,0} = [(1 - (\epsilon \omega_0 / K)^2)^{-1/2} - 1] / 2, \quad (5.29)$$

representan el valor estacionario del número promedio de fotones generados del estado de vacío cuando el entorno o ambiente se ecuentra a una temperatura distinta e igual a cero respectivamente. Es importante notar que  $\bar{n}_{st,0}$ , a diferencia de  $\bar{n}_{st}^{ph}$  en (5.8), es independiente de la tasa a la cual el sistema central tiende a decaer.

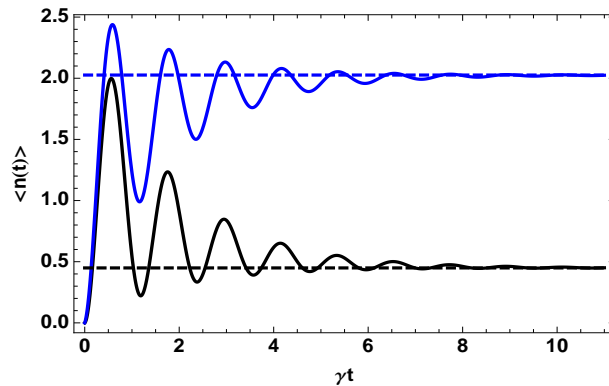
En la figura 12 se muestra la evolución amortiguada de los fotones generados del estado de vacío mediante una cavidad no estacionaria que interactúa con un ambiente de osciladores armónicos y cuya dinámica está descrita completamente por la ecuación maestra (5.21). Recordemos que la cavidad dinámica está en el régimen de parámetros correspondiente a la fase aislante, es decir, la generación de fotones es pequeña y oscilatoria; esto se ve reflejado directamente en la figura 12 durante los inicios de la evolución del sistema. Además, se observa claramente cómo los fotones generados tienden al valor estacionario  $\bar{n}_{st}$  o  $\bar{n}_{st,0}$  según sea el caso.

La ecuación (5.28) es uno de los resultados principales de este capítulo y podría, en principio, probarse experimentalmente midiendo la distribución de probabilidad de los fotones que salen de la cavidad a diferentes intervalos de tiempo.

En lo que respecta a la función de correlación intensidad-intensidad del campo electromagnético, su expresión estándar y normalizada es

$$g^{(2)}(\tau) = \langle a^\dagger(0) a^\dagger(\tau) a(\tau) a(0) \rangle / \langle a^\dagger a \rangle_{st}^2. \quad (5.30)$$

Esta función de correlación es intrínsecamente simétrica, representa una medida relativa de la probabilidad conjunta de detectar dos fotones separados por un tiempo de retraso  $\tau$ , también permite discernir si dos procesos de detección están correlacionados o son independientes uno del otro. De acuerdo al esquema óptico mostrado en la Fig. 11, para



**Figura 12.** Número promedio de fotones (5.28) como función del tiempo escalado  $\gamma t$ . Se visualiza el periodo de transición oscilatoria del sistema, así como el límite del estado estacionario para  $\bar{n}_\Omega = 0$  (línea negra) y  $\bar{n}_\Omega \neq 0$  (línea azul), de tal manera que  $\hbar K/k_B T = 3$ ,  $K/\gamma = 10$  y  $\epsilon\omega_0/K = 0,85$ .

obtener el valor de  $g^{(2)}(\tau)$ , los fotones generados y que salen de la cavidad se hacen pasar por un divisor de haz 50/50, la señal transmitida y registrada por el detector  $D_1$  es multiplicada por la señal reflejada y registrada por  $D_2$ , posteriormente éstas son promediadas sobre todo el rango de valores de detección, el resultado generalmente se varía como función de la diferencia de tiempos.

Si se aplica la fórmula cuántica de regresión [62], junto con el conocimiento de (5.28), esto permite obtener el siguiente resultado

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2\gamma\tau} [C_1 + C_2 \cos(2\Omega\tau)], \quad (5.31)$$

especificando las siguientes constantes

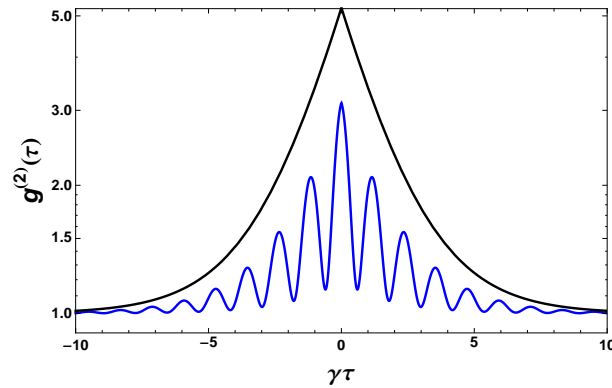
$$C_1 = \{(1 + 2\bar{n}_{st,0}) [\bar{n}_{st} - \bar{n}_\Omega (\bar{n}_{st} + \bar{n}_{st,0} + 2)] + (1 + 2\bar{n}_{st,0})^2 (2\bar{n}_\Omega^2 + \bar{n}_\Omega)\} / \bar{n}_{st}^2, \quad (5.32)$$

$$C_2 = \bar{n}_\Omega (\bar{n}_\Omega + 1) / \bar{n}_{st,0} \tilde{\eta}^2. \quad (5.33)$$

La ecuación (5.31) se comporta diferente como función del tiempo de retraso  $\tau$ , dependiendo de si los fotones térmicos del entorno juegan un papel o no, esto se muestra claramente en la figura 13. A un temperatura  $T = 0$  (línea negra) la función de correlación revela un evidente comportamiento de amontonamiento de fotones, conocido como *bunching* en inglés, para tiempos de retraso cortos; en particular se tiene que

$$g^{(2)}(0)|_{N_\Omega=0} = 3 + \frac{1}{\bar{n}_{st,0}}, \quad (5.34)$$

esto representa un comportamiento super-térmico o super-caótico en la estadística de los fotones detectados, lo cual está en buen acuerdo con el resultado previo que se conoce del DCE, esto es, los fotones del estado de vacío se crean en pares [30]. Cuando la temperatura del entorno es distinta de cero (línea azul), en adición al comportamiento previo, aparecen unas oscilaciones en la función de correlación de frecuencia  $2\Omega$ , que de



**Figura 13.** Función de correlación de segundo normalizada (5.31) como función del tiempo de retraso escalado  $\gamma\tau$ . El conjunto de parámetros es el mismo que los de la Fig. 12

acuerdo con (5.33), provienen de haber considerado los fotones térmicos del entorno a través de la naturaleza cuadrática del sistema central.

#### 5.4. Resumen de capítulo

Un modelo algebraico efectivo visto como un sistema abierto, se ha propuesto con el fin de entender mejor los efectos que tiene la decoherencia en la detección y correlación, de los fotones generados en un cavidad no estacionaria con pérdidas y en la cual el DCE se ve manifestado. Para que el modelo sea válido, se debe estar restringido al regimen de parámetros para los cuales la generación de fotones está acotada, esto es, cuando la desigualdad  $K/\epsilon\omega_0 > 1$  se cumple, de esta manera el sistema permanece en la llamada fase aislante. Basándose en la ecuación maestra markoviana microscópica derivada, el estado estacionario del sistema correspondió a un estado térmico comprimido, que a una temperatura cero éste se reduce al estado de vacío comprimido, el cual es el estado de mínima energía del sistema central; este resultado, a diferencia del tratamiento fenomenológico, permite tratar de manera sencilla y analítica, el cálculo de la función de correlación de segundo orden la cual revela una estadística de amontonamiento en los fotones generados del estado de vacío.

## 6. Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se realizó un estudio del efecto Casimir dinámico de cavidades electromagnéticas y cómo la generación de fotones del estado de vacío se ve afectada cuando se introducen medios ópticos lineales y no lineales dentro de cavidades con condiciones de frontera dependientes del tiempo. En particular en el capítulo 3 se encontró que la no linealidad del tipo Kerr disminuía de manera drástica, la generación de fotones provenientes del estado de vacío que tiene lugar dentro de una cavidad unidimensional no estacionaria monomodal e ideal, donde el efecto Casimir dinámico de cavidades es manifestado. La caída en la disminución de fotones es más abrupta que la reportada en los trabajos previos que estudian el DCE en cavidades cuasiresonantes y con átomos de dos niveles en su interior. La generación de fotones presentó distintos comportamientos dependiendo de que tan intensa era la presencia del medio no lineal. Además, se observó que debido a la competencia entre los efectos Kerr y Casimir dinámico que tienen lugar dentro de la cavidad, el estado de vacío del campo electromagnético experimenta una localización, que a su vez evoluciona en una superposición macroscópicamente distinguible la cual se ha llamado: *estado gato de vacío*.

Con el fin de establecer un análogo clásico del DCE, en el capítulo 4 se realizó una propuesta experimental factible basada en un arreglo de guías de onda acopladas de manera evanescente, en las cuales la propagación de luz clásica simulaba la generación de luz cuántica de una cavidad dinámica como la descrita en el capítulo 3. En este sistema se incluyeron primero medios lineales los cuales generaban, como función de la distancia de propagación, oscilaciones de tipo Bloch debido al gradiente en el índice de refracción del arreglo. Además, la luz dentro de estas guías presentó un comportamiento similar al de una transición de fase del tipo metal-aislante. En la fase metal la excitación inicial (inyección de luz en la primer guía de onda) podía poblar varias de las guías vecinas, sin embargo, en la fase aislante casi toda la luz se localizaba en el estado de vacío, generando así una medición muy pobre del número promedio de fotones. Para romper dicha localización, se introdujo un mecanismo de desfaseamiento el cual activaba el transporte cuántico asistido por ruido el cual aumentaba por órdenes de magnitud la producción de fotones; haciendo accesible una posible medición y por lo tanto corroborar la fase aislante del efecto Casimir dinámico. Todo esto establece una conexión de algunos fenómenos del campo de la materia condensada, como las oscilaciones de Bloch y transiciones de fase, con sistemas fotónicos y de cavidades comúnmente estudiados en óptica cuántica. Surge pues la posibilidad de utilizar conceptos y herramientas que se conozcan muy bien en uno de estos campos y aplicarlos en el estudio del otro y viceversa.

En el capítulo 5 se realizó un estudio del efecto Casimir dinámico tomando en cuenta posibles efectos de decoherencia y pérdida de energía. Para ello se consideró a la cavidad dinámica de los capítulos previos como un sistema cuántico abierto que interacciona con un entorno modelado por un baño de osciladores armónicos en equilibrio

térmico. Con ello fue posible derivar una ecuación maestra microscópica con la cual, el amortiguamiento en la generación de fotones alcanza un estado estacionario que corresponde al estado de mínima energía del sistema. También se calculó la función de correlación de segundo orden la cual confirmó que los fotones producidos tienen una estadística de amontonamiento; lo cual está en buen acuerdo con el conocimiento previo que se tiene, esto es, que los fotones generados del estado de vacío cuántico en el efecto Casimir dinámico son creados en pares.

La puerta queda abierta para investigar diferentes temas que relacionen directa o indirectamente al efecto Casimir dinámico. Por ejemplo, se puede pensar que si en vez de inyectar un haz de luz clásico en el arreglo de guías de onda que simula el DCE se inyecta un fotón individual, el resultado no cambiará, sin embargo si se inyectan dos fotones individuales que sean indistinguibles, la correspondiente interferencia cuántica dará lugar a patrones de amontonamiento o anti-amontonamiento en las correlaciones del tipo Hanbury-Brown y Twiss, lo cual todavía no se ha estudiado en redes fotónicas como la presentada en esta tesis; más aún, quizá sea interesante saber cómo son dichas correlaciones justo en el punto de la transición de fase que distingue al arreglo del capítulo 4. Dicho arreglo estuvo sujeto a un desorden dinámico, qué pasaría si ahora se considera un desorden estático, ya sea en las energías de sitios o en los coeficientes de acoplamiento, en tal caso, existiría una competencia entre la localización de Anderson y la deslocalización provocada por el DCE.

En lo referente a la parte disipativa del DCE, la obtención de la ecuación maestra microscópica del capítulo 5, permite de manera directa el estudio de un espectro estacionario asociado a la cavidad oscilante, sin embargo, dada la naturaleza dinámica del sistema, sería preferible investigar en el espacio de frecuencia, la evolución asociada al espectro físico dependiente del tiempo introducido por Eberly y Wódkiewicz en [66]. Por otro lado, un tipo de medición que podría cuantificar adecuadamente las fluctuaciones cuánticas dependientes de la fase, sería el espectro de compresión (*Spectrum of squeezing*), así como también la función de correlación amplitud-intensidad del campo electromagnético, tal función podría resultar, a diferencia de  $g^{(2)}(\tau)$ , temporalmente asimétrica [67].

Por último, en la referencia [68] usando modelos paradigmáticos de interacción radiación-materia hicimos un estudio de la dinámica no Markoviana reducida de un sistema central formado por dos qubits (átomos de dos niveles) sin interacción entre ellos. Se estudió el modelo de Tavis-Cummings dentro de la configuración espectador (uno de los dos qubits se asume completamente aislado de cualquier ambiente) y se obtuvieron relaciones explícitas del entrelazamiento medido con la concurrencia, como función de la pureza, esto permitió establecer umbrales de pureza y entrelazamiento necesarios para la realización de tareas tales como la teleportación cuántica con ruido. Se analizó también la naturaleza de la operación local generada por la dinámica y cómo es que su acción sobre un estado de Bell inicial se puede caracterizar en un diagrama concurrencia-pureza. Sería interesante saber de qué manera se ven afectados los resultados conseguidos en [68],

si se considera que los qubits ahora se localizan dentro de una cavidad no estacionaria en la cual el efecto Casimir dinámico juega un papel importante en la evolución del estado del campo.

## 7. Referencias

- [1] G. T. Moore, “Quantum theory of the electromagnetic field in a variablelength onedimensional cavity,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, no. 9, 1970.
- [2] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and F. Nori, “*Colloquium* : Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, pp. 1–24, Jan 2012.
- [3] V. V. Dodonov, “Current status of the dynamical casimir effect,” *Physica Scripta*, vol. 82, no. 3, p. 038105, 2010.
- [4] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, “Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary,” *Phys. Rev. A*, vol. 53, pp. 2664–2682, Apr 1996.
- [5] V. Dodonov, “Photon creation and excitation of a detector in a cavity with a resonantly vibrating wall,” *Physics Letters A*, vol. 207, no. 34, pp. 126 – 132, 1995.
- [6] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J. Hassel, and P. J. Hakonen, “Dynamical casimir effect in a josephson metamaterial,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 110, no. 11, pp. 4234–4238, 2013.
- [7] S. A. Fulling and P. C. W. Davies, “Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: Conformal anomaly,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 348, no. 1654, pp. 393–414, 1976.
- [8] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, F. Duty, T. Nori, and P. Delsing, “Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit,” *Nature*, vol. 479, pp. 376–379, Nov 2011.
- [9] P. C. Davies and S. A. Fulling, “Radiation from moving mirrors and from black holes,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 356, no. 1685, pp. 237–257, 1977.
- [10] E. Yablonovitch, “Accelerating reference frame for electromagnetic waves in a rapidly growing plasma: Unruh-davies-fulling-dewitt radiation and the nonadiabatic casimir effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, pp. 1742–1745, Apr 1989.
- [11] N. Trautmann and P. Hauke, “Quantum simulation of the dynamical casimir effect with trapped ions,” *New Journal of Physics*, vol. 18, no. 4, p. 043029, 2016.
- [12] N. Freitas and J. P. Paz, “Fundamental limits for cooling of linear quantum refrigerators,” *Phys. Rev. E*, vol. 95, p. 012146, Jan 2017.
- [13] R. Román-Ancheyta, C. González-Gutiérrez, and J. Récamier, “Influence of the kerr nonlinearity in a single nonstationary cavity mode,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 34, pp. 1170–1176, Jun 2017.
- [14] R. Román-Ancheyta, I. Ramos-Prieto, A. Perez-Leija, K. Busch, and R. d. J. León-Montiel, “Dynamical casimir effect in stochastic systems: Photon harvesting through noise,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 032501, Sep 2017.
- [15] S. Felicetti, M. Sanz, L. Lamata, G. Romero, G. Johansson, P. Delsing, and E. Solano, “Dynamical casimir effect entangles artificial atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 093602, Aug 2014.
- [16] M. Fox, *Optical properties of solids*. Oxford New York: Oxford University Press, 2010.
- [17] R. Boyd, *Nonlinear optics*. Burlington, MA: Academic Press, 2008.
- [18] B. Yurke and D. Stoler, “Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 13–16, Jul 1986.
- [19] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory quantum optics*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2005.
- [20] G. Kirchmair, B. Vlastakis, Z. Leghtas, S. E. Nigg, H. Paik, E. Ginossar, M. Mirrahimi, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon kerr effect,” *Nature*, vol. 495, pp. 205–209, March 2013.
- [21] I. M. de Sousa and A. V. Dodonov, “Microscopic toy model for the cavity dynamical casimir effect,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 48, no. 24, p. 245302, 2015.
- [22] S. Longhi, “Optical realization of the two-site bosehubbard model in waveguide lattices,” *Journal*

- of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 44, no. 5, p. 051001, 2011.
- [23] L. Martin, G. D. Giuseppe, A. Perez-Leija, R. Keil, F. Dreisow, M. Heinrich, S. Nolte, A. Szameit, A. F. Abouraddy, D. N. Christodoulides, and B. E. A. Saleh, “Anderson localization in optical waveguide arrays with off-diagonal coupling disorder,” *Opt. Express*, vol. 19, pp. 13636–13646, Jul 2011.
- [24] P. M. Preiss, R. Ma, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, P. Zupancic, Y. Lahini, R. Islam, and M. Greiner, “Strongly correlated quantum walks in optical lattices,” *Science*, vol. 347, no. 6227, pp. 1229–1233, 2015.
- [25] A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, N. Matsuda, A. Politi, K. Poulios, X.-Q. Zhou, Y. Lahini, N. Ismail, K. Wörhoff, Y. Bromberg, Y. Silberberg, M. G. Thompson, and J. L. O’Brien, “Quantum walks of correlated photons,” *Science*, vol. 329, no. 5998, pp. 1500–1503, 2010.
- [26] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, “Approximate analytical results on the cavity dynamical casimir effect in the presence of a two-level atom,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 015805, Jan 2012.
- [27] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, “Dynamical casimir effect in two-atom cavity qed,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 055805, May 2012.
- [28] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and D. E. Nikonov, “Quantum phenomena in nonstationary media,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, pp. 4422–4429, May 1993.
- [29] D. A. R. Dalvit, P. A. M. Neto, and F. D. Mazzitelli, *Fluctuations, Dissipation and the Dynamical Casimir Effect*, pp. 419–457. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [30] C. K. Law, “Effective hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium,” *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 433–437, Jan 1994.
- [31] D. T. Alves and E. R. Granhen, “A computer algebra package for calculation of the energy density produced via the dynamical casimir effect in one-dimensional cavities,” *Computer Physics Communications*, vol. 185, no. 7, pp. 2101 – 2114, 2014.
- [32] C. K. Law, “Resonance response of the quantum vacuum to an oscillating boundary,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, pp. 1931–1934, Oct 1994.
- [33] L. Celeri, F. Pascoal, M. de Ponte, and M. Moussa, “Number of particle creation and decoherence in the nonideal dynamical casimir effect at finite temperature,” *Annals of Physics*, vol. 324, no. 10, pp. 2057 – 2073, 2009.
- [34] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, “Photon statistics in the dynamical casimir effect modified by a harmonic oscillator detector,” *Physica Scripta*, vol. 2013, no. T153, p. 014017, 2013.
- [35] T. Jacobson, *Lectures on Quantum Gravity*, ch. Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect, pp. 39–89. Boston, MA: Springer US, 2005.
- [36] G. Plunien, R. Schützhold, and G. Soff, “Dynamical casimir effect at finite temperature,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 1882–1885, Feb 2000.
- [37] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira, and P. L. Knight, “Properties of squeezed number states and squeezed thermal states,” *Phys. Rev. A*, vol. 40, pp. 2494–2503, Sep 1989.
- [38] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*. Berlin: Springer, 2008.
- [39] R. de J León-Montiel and H. M. Moya-Cessa, “Generation of squeezed schrödinger cats in a tunable cavity filled with a kerr medium,” *Journal of Optics*, vol. 17, no. 6, p. 065202, 2015.
- [40] C. K. Law, “Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation,” *Phys. Rev. A*, vol. 51, pp. 2537–2541, Mar 1995.
- [41] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, “Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 4175–4186, Nov 1997.
- [42] S. Mancini, V. I. Man’ko, and P. Tombesi, “Ponderomotive control of quantum macroscopic coherence,” *Phys. Rev. A*, vol. 55, pp. 3042–3050, Apr 1997.
- [43] C. C. Gerry and S. Rodrigues, “Time evolution of squeezing and antibunching in an optically bistable two-photon medium,” *Phys. Rev. A*, vol. 36, pp. 5444–5447, Dec 1987.
- [44] G. J. Milburn, “Coherence and chaos in a quantum optical system,” *Phys. Rev. A*, vol. 41, pp. 6567–6570, Jun 1990.



- [45] A. Klimov, *A group-theoretical approach to quantum optics : models of atom-field interactions*. Weinheim: Wiley-VCH, 2009.
- [46] M. Ban, “Decomposition formulas for  $su(1, 1)$  and  $su(2)$  lie algebras and their applications in quantum optics,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 10, pp. 1347–1359, Aug 1993.
- [47] H. R. Lewis, “Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 18, pp. 510–512, Mar 1967.
- [48] R. Román-Ancheyta, M. Berrondo, and J. Récamier, “Parametric oscillator in a kerr medium: evolution of coherent states,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 1651–1655, Aug 2015.
- [49] R. Robinett, “Quantum wave packet revivals,” *Physics Reports*, vol. 392, no. 12, pp. 1 – 119, 2004.
- [50] J. Wei and E. Norman, “On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials,” *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 15, pp. 327–334, 1964.
- [51] S. Haroche, *Exploring the quantum atoms, cavities and photons*. Oxford New York: Oxford University Press, 2006.
- [52] N. Bartolo, F. Minganti, W. Casteels, and C. Ciuti, “Exact steady state of a kerr resonator with one- and two-photon driving and dissipation: Controllable wigner-function multimodality and dissipative phase transitions,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 033841, Sep 2016.
- [53] V. V. Dodonov, “Resonance photon generation in a vibrating cavity,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, no. 49, p. 9835, 1998.
- [54] D. Guzman-Silva, R. de J. León-Montiel, M. Heinrich, J. P. Torres, H. Moya-Cessa, A. Perez-Leija, and A. Szameit, “Observation of noise-assisted energy transport in dynamically disordered photonic lattices,” in *2016 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO)*, pp. 1–2, June 2016.
- [55] F. Caruso, A. Crespi, A. G. Ciriolo, F. Sciarrino, and R. Osellame, “Fast escape of a quantum walker from an integrated photonic maze,” *Nat. Commun.*, vol. 7, p. 11682, 2016.
- [56] J. Johansson, P. Nation, and F. Nori, “Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems,” *Computer Physics Communications*, vol. 184, no. 4, p. 1234, 2013.
- [57] H. E. Kondakci, A. F. Abouraddy, and B. E. A. Saleh, “A photonic thermalization gap in disordered lattices,” *Nature Physics*, vol. 11, no. 11, pp. 930–935, 2015.
- [58] V. V. Dodonov, “Dynamical casimir effect in a nondegenerate cavity with losses and detuning,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, pp. 4147–4152, Nov 1998.
- [59] R. Schtzhold and M. Tiersch, “Decoherence versus dynamical casimir effect,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 7, no. 3, p. S120, 2005.
- [60] G. Schaller, R. Schützhold, G. Plunien, and G. Soff, “Dynamical casimir effect in a leaky cavity at finite temperature,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 023812, Aug 2002.
- [61] R. Román-Ancheyta, O. Santos-Sánchez, and C. González-Gutiérrez, “Damped casimir radiation and photon correlation measurements,” *arXiv preprint arXiv:1709.09685*, 2017.
- [62] H. Carmichael, *An open systems approach to quantum optics*, vol. 18. Springer Science & Business Media, 1993.
- [63] C. W. Gardiner and H. Haken, *Quantum noise*, vol. 26. Springer Berlin, 1991.
- [64] H. Moya-Cessa, “Decoherence in atomfield interactions: A treatment using superoperator techniques,” *Physics Reports*, vol. 432, no. 1, pp. 1 – 41, 2006.
- [65] A. K. Ekert and P. L. Knight, “Canonical transformation and decay into phase-sensitive reservoirs,” *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 487–493, Jul 1990.
- [66] J. H. Eberly and K. Wódkiewicz, “The time-dependent physical spectrum of light\*,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 67, pp. 1252–1261, Sep 1977.
- [67] H. M. Castro-Beltrán, R. Román-Ancheyta, and L. Gutiérrez, “Phase-dependent fluctuations of intermittent resonance fluorescence,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 033801, Mar 2016.
- [68] C. A. González-Gutiérrez, R. Román-Ancheyta, D. Espitia, and R. Lo Franco, “Relations between entanglement and purity in non-markovian dynamics,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 14, no. 07, p. 1650031, 2016.