



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MAPEOS ENTRE FAMILIAS DE
SPERNER DE MATROIDES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ LUIS FIGUEROA GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GILBERTO CALVILLO VIVES
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CUERNAVACA, MORELOS

ENERO DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

MAPEOS ENTRE FAMILIAS DE SPERNER DE MATROIDES

por

José Luis Figueroa González

Tesis presentada para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en el

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Cuernavaca, Morelos, enero de 2018.

“「ひとつ忠告していいかな、俺から」

「いいですよ」

「自分に同情するな」と彼は言った。「自分に同情するのは下劣な人間のやることだ」

「覚えておきましょう」と僕は言った。そして我々は握手をして別れた。”

村上春樹、「ノルウェイの森」

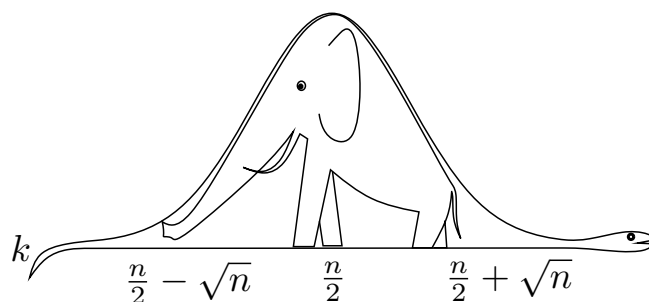
“—¿Puedo darte un consejo?, de mi parte.

—Claro.

—No te compadezcas de ti mismo. Eso sólo lo hacen los mediocres.

—Lo tendré en cuenta —dije. Nos dimos la mano y nos separamos.”

Haruki Murakami. Tokio Blues



“Una gráfica de $\binom{n}{k}$ como función de k en un entorno de $\frac{n}{2}$, o quizás un sombrero o una boa constrictor gigante que se ha tragado a un elefante.”

Jiří Matoušek y Jaroslav Nešetřil. Invitación a la matemática discreta.

Agradecimientos

Doy gracias a mi familia, por todo el apoyo incondicional que me ha brindado; especialmente a mi madre, que me ha acompañado de cerca en momentos difíciles.

Un agradecimiento especial a Dulce, por su cariño y paciencia, especialmente cuando he andado un poco deprimido. Muchas gracias por compartir tu tiempo conmigo. ☺

También quiero agradecer al Dr. Gilberto Calvillo Vives, por haberme recibido como su alumno, por todos los consejos y el enorme apoyo que he recibido de su parte. Estaré siempre en deuda con él. Procuraré seguir su ejemplo como profesor y como persona.

Gracias al Dr. Criel Merino López y a la Dra. María Guadalupe Rodríguez Sánchez por formar parte de mi comité tutorial, por todas sus enseñanzas, sus correcciones y por su paciencia ante las cuestiones burocráticas que implica ser tutor de un alumno.

Debo agradecer también a la Dra. Laura Chávez Lomelí, al Dr. Juan José Montellano Ballesteros y al Dr. David Romero Vargas por las correcciones, comentarios y sugerencias que me hicieron para mejorar este trabajo. Todos los errores que aún pueda tener esta tesis son solo míos.

Un agradecimiento a todos los participantes del primer y segundo “encuentro de matroides”, por aceptarme sin condiciones en los grupos de trabajo; al Dr. Geoff Whittle por sus recomendaciones sobre posibles cursos de la investigación y sobre las revistas en que se podrían publicar.

Agradezco al Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca por el apoyo que me otorgó durante mis estudios de doctorado, ya que siempre tuve todo lo necesario para realizar mis estudios y recibí mucha ayuda del personal que ahí labora. También debo de agradecer al personal administrativo del Instituto de Matemáticas de la UNAM por su valioso apoyo para la realización de solicitudes y trámites.

Agradezco también el intercambio de experiencias y la convivencia con mis compañeros del Instituto de Matemáticas en Cuernavaca y Oaxaca, de la UAM Azcapotzalco y de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Por último, debo de agradecer al CONACyT por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de doctorado.

Índice general

Introducción	vii
I Preliminares	1
Notación; preliminares de álgebra, conjuntos y gráficas	3
1. Familias de Sperner y conjuntos parcialmente ordenados	9
1.1. Mapeos entre tropes	12
1.1.1. Relación entre tropel bloqueador y tropel complementario	14
1.2. Conjuntos parcialmente ordenados	15
1.2.1. Retículos	16
1.2.2. Sistemas de independencia	19
2. Matroides	21
2.1. Conceptos básicos de matroides	21
2.1.1. Bases y circuitos	23
2.1.2. Rango, clausura, cerrados e hiperplanos	24
2.1.3. Matroides isomorfos y dualidad	25
2.1.4. Sistemas de axiomas de matroides	26

2.2. Matroides gráficos	27
2.3. Matroides simples	29
2.4. Matroides conexos	31
2.5. Matroides modulares	32
2.6. Matroides de empedrado	35
2.6.1. Matroides de empedrado ralo	37
2.7. Manguales	38
II El tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide	41
3. Resultados estructurales	45
3.1. Rango dual de los bloqueadores de los hiperplanos de un matroide	45
3.2. Reducción del problema a matroides simples conexos	49
3.2.1. Matroides no simples	49
3.2.2. Matroides no conexos	51
3.3. Otras propiedades del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide	52
3.4. Mapeos de relajación y tensado de hiperplanos, y su efecto en el tropel bloqueador	54
3.5. Menores prohibidos de tropeles de matroides	59
3.5.1. Operaciones de hiperplano-borrado e hiperplano-contracción	59
3.5.2. Una caracterización por menores del tropel de hiperplanos de un matroide	62
3.5.3. Una caracterización por menores del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide y de su tropel complementario	65
3.6. Cadena complemento-bloqueador de un tropel	66
4. El bloqueador de los hiperplanos de algunas familias de matroides	73

4.1. Axiomatización para matroides de rango dos	74
4.2. Matroides gráficos	77
4.2.1. Gráficas completas	84
4.2.2. Gráficas bipartitas completas	85
4.3. Ruedas y rehiletos	89
4.4. Matroides cográficos	93
4.4.1. Gráficas completas	94
4.4.2. Gráficas bipartitas completas	95
4.5. Matroides modulares	99
4.5.1. Geometrías proyectivas	100
4.6. Matroides de empedrado ralo	102
4.6.1. Construcción del bloqueador de los hiperplanos de matroides de empedrado ralo	103
4.7. Manguales con punta	104
4.7.1. Manguales libres con punta	104
4.7.2. Construcción del bloqueador de los hiperplanos de manguales con punta	105
4.8. Arreglos de pseudolíneas	106
5. Programa computacional y ejemplos obtenidos con un ordenador	109
5.1. Programa para listar el bloqueador de un tropel	109
5.2. Algunos ejemplos obtenidos con un ordenador	113
6. Conclusiones	119
Bibliografía	121

Introducción

Un tropel o familia de Sperner sobre un conjunto finito E es una familia \mathcal{F} de subconjuntos de E en la cual ningún miembro es subconjunto propio de algún otro miembro de la familia. Los tropeles son interesantes porque pueden utilizarse para modelar algunos problemas de optimización o describir otras estructuras combinatorias; más aún, como objetos combinatorios, por sí mismos, son motivo de investigación. Hoy en día todavía hay algunos problemas abiertos sobre tropeles; por ejemplo, aún no se conoce una manera eficiente de calcular la cantidad exacta de tropeles sobre un conjunto finito dado.

Por otro lado, un matroide es una estructura combinatoria sobre un conjunto finito que permite emular algunos resultados del álgebra lineal en dicho conjunto. Una de las propiedades más interesantes de los matroides es el hecho de que pueden ser definidos de muchas maneras equivalentes; entre ellas se puede mencionar el listado de los elementos de alguno de los siguientes conjuntos: bases, cobases, circuitos, cocircuitos, hiperplanos o cohiperplanos; resulta interesante que todos estos conjuntos son tropeles y además están relacionados entre sí a través de diversos mapeos. Aunque cualquiera de estos tropeles puede utilizarse para contar los matroides sobre un conjunto finito dado, tampoco se conoce una manera exacta y eficiente de contar matroides.

Esta tesis trata sobre tropeles que surgen en la teoría de matroides, en especial, del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide M sobre un conjunto E . Los conjuntos que componen este tropel son los subconjuntos de E que satisfacen la propiedad de tener intersección no vacía con todos los hiperplanos del matroide M y ser *minimales*¹ (respecto del orden parcial inducido por la contención de conjuntos \subseteq) con dicha propiedad.

¹La palabra *minimal* (respectivamente *maximal*) es un anglicismo técnico que se refiere a los elementos mínimos (respectivamente máximos) de las cadenas de un orden parcial. El uso de las palabras *minimal* y *maximal* está muy extendido entre los matemáticos de habla hispana; sin embargo, debido a que estas palabras no existen oficialmente en el idioma español, hay algunos matemáticos reticentes a su utilización.

Los matroides fueron inventados en la década de los años treinta del siglo XX pero comenzaron a popularizarse a partir de 1964 cuando el artículo de Lehman [1964] permitió extender y resolver el *Shannon switching game*, un juego sobre gráficas planteado por Claude Shannon.

De manera similar, el estudio de las familias de Sperner se remonta al año de 1928 pero comenzó a extenderse a finales de la década de 1960 luego de que las familias de Sperner fueron rebautizadas por Jack Edmonds con el nombre de *clutters*; el término *clutter* se hizo común debido a la relevancia de los resultados que se obtuvieron en esos años en el área de la optimización combinatoria; entre ellos podemos citar: Edmonds [1965], Fulkerson [1966], Fulkerson [1973], Edmonds y Fulkerson [1970], Lawler [1965] y Lehman [1979]; de entre estos, quizá el artículo más conocido es el de Edmonds y Fulkerson [1970] en el que se obtiene una dualidad para los problemas de *Bottleneck extrema* por medio del concepto de bloqueador de un tropel.

Más tarde, el artículo de Seymour [1976] inauguró un área de investigación importante relacionada tanto con matroides como con tropeles al dar una lista de menores prohibidos para la clase de los tropeles binarios; dicha lista está relacionada con teoremas en teoría de matroides.

Para el caso de los matroides, es sabido que dado un subconjunto del conjunto potencia (de un conjunto finito), existe una lista de axiomas que permite determinar con precisión si la colección es el conjunto de independientes, bases, dependientes, circuitos, hiperplanos, cerrados, generadores o no generadores de un matroide. Nicoletti [1979] notó que dada alguna de estas familias, las colecciones de miembros *minimales*, *maximales*, superconjuntos, subconjuntos, o miembros de la potencia que no pertenecen a la familia pueden utilizarse para obtener nuevos objetos (tales como la colección de todos los subconjuntos de circuitos de un matroide) y dar para ellos nuevas axiomatizaciones que definan el concepto de matroide; sin embargo, aún no resulta claro cómo pueden obtenerse estas axiomatizaciones. En particular, dado un matroide M , los conjuntos *minimales* con respecto a no estar contenidos en ningún cocircuito de M constituyen el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide, para el cual no se conoce ninguna axiomatización que sirva para definir el concepto de matroide sin apelar a la utilización de otros conjuntos de M .

Uno de los artículos que fueron de mayor utilidad para la realización de esta tesis es el de Cordovil *et al.* [1991]. En este artículo se exploran los tropeles que son bases o circuitos de matroides usando los mapeos bloqueador y complementario; se definen operaciones de borrado y contracción para tropeles y se establecen condiciones para que un tropel sea el conjunto de circuitos o bases de un matroide.

Actualmente no se sabe si en general el problema de generar una lista explícita de los miembros del tropel bloqueador de un tropel es un problema con tiempo de ejecución polinomial o no: para algunas familias existen algoritmos polinomiales pero para otras los mejores algoritmos conocidos son subexponenciales (ver por ejemplo el artículo de Khachiyan *et al.* [2003]). La generación de una lista explícita de los miembros del tropel bloqueador de un tropel tiene aplicaciones en problemas de minería de datos, que es un campo de la estadística y las ciencias de la computación referido al proceso que intenta descubrir patrones en grandes volúmenes de conjuntos de datos; se puede ver un ejemplo de estas aplicaciones en Pfaltz y Taylor [2002].

A continuación se describe la estructura de las dos partes que conforman esta tesis.

La Parte I está compuesta por los capítulos uno y dos. Al inicio de esta parte se mencionan los conceptos preliminares sobre conjuntos, álgebra y gráficas, así como las convenciones de notación que se utilizan en esta tesis. En el Capítulo 1 y el Capítulo 2 se dan los conceptos básicos sobre tropeles y conjuntos parcialmente ordenados, y matroides, respectivamente, mismos que se necesitarán a lo largo de este documento.

La Parte II consta de los capítulos del tres al seis. Se aborda el estudio del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide, la parte II (salvo donde se indica otra cosa) contiene los resultados originales de esta tesis; para mayor claridad, todos los resultados originales de este trabajo están señalados con una pequeña estrella que acompaña al número de resultado, por ejemplo: **Teorema 117[★]**.

En el Capítulo 3 se dan algunos resultados que relacionan los tropeles bloqueador y complementario de matroides, se reduce el problema de calcular el bloqueador de los hiperplanos de matroides a la clase de los matroides simples conexos, se analiza la operación de relajación de circuitos-hiperplanos y se define la operación inversa para estudiar el efecto de ambas operaciones sobre el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide. Finalmente, se introducen nuevas operaciones de borrado y contracción de

tropeles, con las cuales se determinan los menores excluidos para que un tropel sea el tropel de hiperplanos de un matroide, el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide y el tropel complementario del bloqueador de los hiperplanos de un matroide.

En el Capítulo 4 se da a conocer una axiomatización del bloqueador de los hiperplanos de matroides de rango dos, se caracterizan los transversales de los hiperplanos de matroides gráficos, cográficos y modulares, se caracterizan los bloqueadores de los matroides de gráficas completas, de gráficas bipartitas completas, de ruedas, rehiletes y manguales libres. También se prueban algunos teoremas sobre los bloqueadores de los hiperplanos de subclases de matroides de empedrado ralo y de arreglos de pseudolíneas.

En el Capítulo 5, se da a conocer la herramienta computacional que fue utilizada para el estudio de los tropeles de hiperplanos y de sus bloqueadores, y se muestran algunos ejemplos obtenidos con ayuda de un ordenador.

Por último, en el Capítulo 6 se mencionan las conclusiones a las que se ha llegado a partir de este trabajo. Asimismo, se plantean algunas cuestiones que han surgido y se mencionan algunos de los cursos posibles mediante los cuales puede continuarse la investigación sobre los bloqueadores de los hiperplanos de matroides.

Parte I

Preliminares

Notación; preliminares de álgebra, teoría de conjuntos y teoría de gráficas ²

Desde sus inicios, la teoría de matroides ha sido fuertemente influenciada tanto por la teoría de gráficas como por el álgebra lineal. Estas áreas motivaron su creación, proporcionaron muchos ejemplos básicos y gran parte de su notación. A continuación se exponen brevemente la terminología y notación que se utilizarán en este documento.

Excepto donde se indique lo contrario, todos los conjuntos considerados en este trabajo serán *finitos*. Dado un conjunto E , su colección de subconjuntos y su cardinalidad serán denotados por 2^E y $|E|$, respectivamente. Se llamará *colección* a un conjunto de subconjuntos de un conjunto E ; dada una colección \mathcal{A} de subconjuntos de E a menudo serán de interés los miembros *maximales* de \mathcal{A} , siendo estos los miembros de \mathcal{A} que no están contenidos propiamente en ningún otro miembro de \mathcal{A} . Análogamente, los miembros *minimales* de la colección \mathcal{A} serán los miembros de \mathcal{A} que no contienen propiamente a ningún otro miembro de \mathcal{A} .

Si X e Y son conjuntos, entonces $X - Y$ denotará al conjunto $\{x \in X : x \notin Y\}$, mientras que $X \Delta Y$ denotará al conjunto $(X - Y) \cup (Y - X)$, la *diferencia simétrica* de X e Y . Para conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n contenidos en un conjunto X , la notación $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ se referirá al conjunto $\{x \in X : (x \in X_1) \vee (x \in X_2) \vee \dots \vee (x \in X_n)\}$, la notación $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$ denotará también a dicho conjunto cuando X_1, X_2, \dots, X_n sean conjuntos disjuntos dos a dos. En ocasiones será necesario añadir un solo elemento e a un conjunto X o remover un elemento e de X . En tales casos, usualmente se abreviará $X \cup \{e\}$ y $X - \{e\}$

²Estos preliminares son una adaptación para este documento de los que aparecen en el libro de Oxley [2011].

por $X \cup e$ y $X - e$, respectivamente. En algunos casos especiales, cuando se desee especificar conjuntos o colecciones con más de tres elementos, se optará por escribir $(a_1 a_2 \dots a_n)$ para denotar al conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $((a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_r), \dots)$ para denotar a la colección $\{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{b_1, b_2, \dots, b_r\}, \dots\}$. En cuanto a los conjuntos de los enteros positivos, los enteros, los racionales y los números reales, estos serán denotados por \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} , respectivamente. Si n es un entero positivo, denotaremos por $[n]$ al conjunto $\{1, \dots, n\}$.

El concepto de multiconjunto es útil cuando se trabaja con colecciones de objetos en los cuales pueden ocurrir repeticiones. Formalmente, si S es un conjunto, un *multiconjunto* elegido desde S es una función m de S a los enteros no negativos. Por ejemplo, si $S = \{a, b, c, d, e\}$ y $(m(a), m(b), m(c), m(d), m(e)) = (2, 3, 0, 1, 0)$, entonces se denotará a este multiconjunto por $\{a, a, b, b, b, d\}$.

A continuación se señalan algunos hechos básicos sobre campos. Las demostraciones de estos hechos pueden encontrarse en la mayoría de los libros de texto sobre álgebra abstracta. Si \mathbb{F} es un campo finito, entonces \mathbb{F} tiene exactamente p^k elementos para algún número primo p y para algún entero positivo k . De hecho, para tales p y k , hay un único campo $GF(p^k)$ que tiene exactamente p^k elementos. Este campo se conoce como el *campo de Galois de orden p^k* . El campo $GF(p)$ coincide con \mathbb{Z}_p , el anillo de los enteros módulo p . Es decir, $GF(p)$ tiene como elementos a $0, 1, \dots, p-1$, y la suma y multiplicación de dichos elementos realizada bajo módulo p . Cuando $k > 1$, el campo $GF(p^k)$ puede construirse de la manera siguiente. Sea $h(\omega)$ un polinomio de grado k con coeficientes en el campo $GF(p)$ y supongamos que dicho polinomio es irreducible, esto es, $h(\omega)$ no es producto de dos polinomios sobre $GF(p)$ de grado menor. Es sabido que los polinomios irreducibles siempre existen. Considere el conjunto S de todos los polinomios en ω que tienen grado a lo más $k-1$ y sus coeficientes están en $GF(p)$. Hay exactamente p elecciones para cada uno de los k coeficientes de un miembro de S . Por lo tanto $|S| = p^k$. Más aún, bajo la suma y la multiplicación, ambas efectuadas bajo módulo $h(\omega)$, el conjunto S forma un campo, a saber, $GF(p^k)$. A lo largo de este documento, un campo finito arbitrario será denotado por $GF(q)$, estando implícito que q es potencia de un número primo.

Si \mathbb{F} es un campo y r es un número natural, entonces $V(r, \mathbb{F})$ denotará el espacio vectorial de dimensión r sobre \mathbb{F} . Este espacio vectorial también se escribirá como $V(r, q)$ cuando $\mathbb{F} = GF(q)$.

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto X de vectores en un espacio vectorial V sobre un campo \mathbb{F} , entonces $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ denota el subespacio de V *generado* por X , es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_n . La dimensión de V se denota por $\dim V$.

La notación para matrices que se usará es estándar.

Una *gráfica* G consiste en un conjunto $V(G)$ de *vértices* y un multiconjunto $E(G)$ de *aristas* cada una de las cuales consta de una pareja no ordenada de vértices (posiblemente idénticos). Se acostumbra escribir $G = (V, E)$ para denotar que G es la gráfica cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas es E . La Figura 1 es una representación pictórica de una gráfica en particular. El conjunto de vértices y aristas de esta gráfica son $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_9\}$, respectivamente. Una arista, como por ejemplo e_5 , que une un vértice con él mismo se llama *lazo*. Las aristas como e_1, e_2 y e_3 que unen el mismo par de vértices se llaman *aristas paralelas*. El vértice v_5 , que no toca ninguna arista, es un *vértice aislado*. Los extremos de la arista e_8 son v_3 y v_4 .

En general, si $e \in E(G)$ y $e = \{u, v\}$, donde u y v están en $V(G)$, se dice que u y v son *vecinos* o que son *adyacentes* y que e es *incidente* en u y v , de igual modo, se dice que u y v son incidentes en e . Por ejemplo, en la Figura 1, e_9 es la única arista incidente tanto en v_3 como en v_6 , así que podemos denotarla sin ambigüedad por v_3v_6 , o equivalentemente, v_6v_3 .

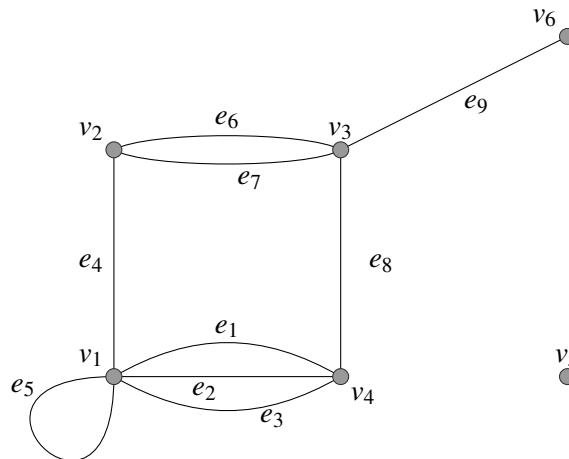


Figura 1 Un ejemplo de gráfica.

Decimos que una gráfica es *simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas. Si $V(G)$ es vacío, entonces también lo es $E(G)$, y G se llama la *gráfica nula* o *vacía*. A menudo las gráficas nulas dan lugar a casos triviales que requieren consideraciones especiales al momento de hacer algunas demostraciones, por esta razón todas las gráficas consideradas en este trabajo serán no nulas.

Una gráfica H es una subgráfica de una gráfica G si $V(H)$ y $E(H)$ son subconjuntos de $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente. Si V' es un subconjunto de $V(G)$, entonces $G[V']$ denota la subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de aristas consiste en las aristas de G que tienen ambos extremos en V' . Se dice que $G[V']$ es la subgráfica de G *inducida* por V' . De manera similar, si E' es un subconjunto de $E(G)$, entonces $G[E']$, la subgráfica de G *inducida* por E' , tiene a E' como su conjunto de aristas y su conjunto de vértices consta de los extremos de las aristas de G que están en E' .

Si G_1 y G_2 son gráficas, su *unión* $G_1 \cup G_2$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G_1) \cup V(G_2)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G_1) \cup E(G_2)$. Si $V(G_1)$ y $V(G_2)$ son disjuntos, entonces también lo son $E(G_1)$ y $E(G_2)$, en ese caso, se dice que G_1 y G_2 son *gráficas disjuntas*.

Dos gráficas G y H son *isomorfas*, lo cual se denota por $G \cong H$, si hay biyecciones $\psi : V(G) \rightarrow V(H)$ y $\theta : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que un vértice v de G es incidente en una arista e de G si y solo si $\psi(v)$ es incidente en $\theta(e)$.

En general, si n es un entero positivo, hay, salvo isomorfismo, una única gráfica con n vértices en la cual cada pareja de vértices distintos está unida por una sola arista. Esta gráfica K_n , se llama la *gráfica completa* sobre n vértices. La gráfica que denotamos por $K_{|X|,|Y|}$ se llama *gráfica bipartita* y es una gráfica cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en dos clases X e Y tales que cada arista tiene un extremo en X y el otro en Y .

Dos gráficas que juegan un importante rol en la teoría de gráficas y en la teoría de matroides son K_5 y $K_{3,3}$. Estas gráficas se muestran en la Figura 2.

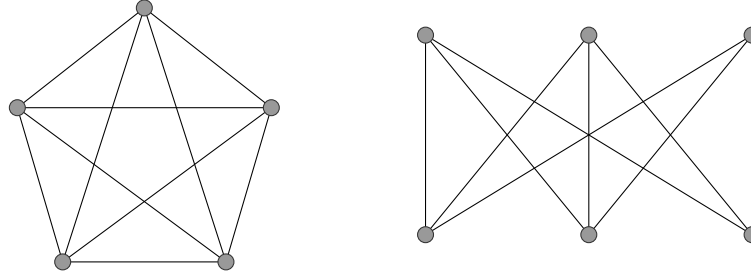


Figura 2 K_5 y $K_{3,3}$.

Un *camino* en una gráfica es una sucesión $v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ tal que v_0, v_1, \dots, v_k son vértices, e_1, e_2, \dots, e_k son aristas, y cada vértice o arista en la sucesión, excepto v_k , es incidente en su sucesor en la sucesión. Ahora, si se supone que los vértices v_0, v_1, \dots, v_k son distintos. Entonces e_1, e_2, \dots, e_k son aristas distintas y el camino es una *trayectoria*. Los *vértices extremos* o *extremos* de esta trayectoria son v_0 y v_k , y se dice que la trayectoria es una (v_0, v_k) -trayectoria o que la trayectoria une v_0 con v_k . Los vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} son los *vértices internos* de la trayectoria. La *longitud* de una trayectoria es el número de aristas que esta contiene. En una gráfica simple, una trayectoria está determinada de manera única por su conjunto de vértices y por lo tanto usualmente se listará solo la sucesión de vértices apropiada.

Una gráfica es *conexa* si cada pareja de vértices distintos está unida por una trayectoria. Una gráfica que no es conexa se llama *disconexa*. En cualquier gráfica G , las subgráficas conexas *maximales* (por contención) se llaman *componentes (conexas)*. Evidentemente los conjuntos de vértices de las componentes de G particionan $V(G)$. El número de estas componentes conexas será denotado por $\omega(G)$.

Si P es una (u, v) -trayectoria en una gráfica G y e es una arista que une u con v pero que no está en P , entonces la subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es $V(P)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(P) \cup e$ se llama *ciclo*. La *longitud* de un ciclo es el número de aristas que el ciclo contiene. Una gráfica G que contiene un ciclo C tal que $V(C) = V(G)$ se llama hamiltoniana. Una gráfica que no tiene ciclos se llama *bosque* y un bosque conexo se llama *árbol*. Claramente una gráfica es un bosque si y solo si cada una de sus componentes conexas es un árbol. Un *árbol generador* de una gráfica conexa G es una subgráfica T de G tal que T es un árbol y $V(T) = V(G)$. Los árboles tienen muchas propiedades atractivas. En particular, para todos los árboles T ,

$$|E(T)| = |V(T)| - 1.$$

Por lo tanto, si T es un árbol generador de una gráfica G , se tiene que $|E(T)| = |V(G)| - 1$.

Si F es una subgráfica de una gráfica G , una *oreja de F en G* es una trayectoria en G de longitud mayor que cero, tal que sus extremos yacen en F pero sus vértices internos no.

Dadas dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, la *suma* o *combinación* de las gráficas G_1 y G_2 es la gráfica G' tal que $V(G') = V_1 \cup V_2$ y $E(G') = E_1 \cup E_2 \cup \{\{x, y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$. Usualmente se denota esta gráfica G' como $G_1 \vee G_2$.

Un *abanico de n varillas* es la suma $P \vee K_1$ de una trayectoria P de longitud $n - 1$ y un solo vértice, esta gráfica se denota por F_n . Una *rueda de n rayos* es la suma $C_n \vee K_1$ de un ciclo de longitud n y un solo vértice, esta gráfica se denota como W_n .

El libro de Matousek y Nešetřil [2008] contiene la mayor parte de los conceptos aquí presentados. Para conocer teoría y terminología adicional sobre teoría de gráficas, se recomienda consultar el libro de Bondy y Murty [2008]; para cuestiones adicionales sobre temas de álgebra se remite al lector al libro de Rotman [2002].

Capítulo 1

Familias de Sperner y conjuntos parcialmente ordenados

El estudio de las familias de Sperner es un campo de investigación muy activo de la combinatoria y de la optimización combinatoria. Se puede asumir que el estudio de las familias de Sperner comenzó a finales de la década de 1920. Entre los primeros investigadores de estos objetos destacan Francis Sowerby Macaulay y Emanuel Sperner.

Definición 3 *Una familia de Sperner sobre un conjunto finito E , es una familia de subconjuntos $(\mathcal{F}; E)$ en la cual ningún subconjunto está contenido en otro. Una familia de Sperner también se conoce como sistema independiente, tropel o clutter.*

Dado un conjunto finito E existen dos *familias de Sperner triviales* sobre E : la familia de Sperner vacía $(\emptyset; E)$, que no contiene subconjuntos de E ; y la familia de Sperner $(\{\emptyset\}; E)$ cuya colección contiene solo al conjunto vacío como miembro.

De aquí en adelante, en este documento se usará la palabra *tropel* para referirse a una familia de Sperner. El Dr. David Romero Vargas propuso (hace 30 años aproximadamente) el uso de este término por ser una traducción apropiada de la palabra *clutter*; además posee la ventaja de ser una palabra corta, lo cual resulta conveniente pues el concepto que define es uno de los que más se utilizan en esta tesis.

Cuando no haya ambigüedad acerca del conjunto sobre el que está definido un tropel $(\mathcal{F}; E)$, a menudo se escribirá solo la familia \mathcal{F} para denotar a dicho tropel.

Definición 4 Dos tropeles $(C_1; E_1)$, $(C_2; E_2)$ son *isomorfos* si existe una función biyectiva $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $A \in C_1$ si y solo si $\psi(A) \in C_2$.

Definición 5 Sea $(C; E)$ un tropel sobre un conjunto E . Un *transversal* de $(C; E)$ es un subconjunto de E que tiene intersección no vacía con todos los miembros de C .

Existen varios aspectos de los tropeles que los hacen interesantes, entre ellos puede destacarse que muchos de sus problemas pueden ser formulados de manera clara y sencilla. La solución de algunos de estos problemas ha requerido mucha creatividad y ha dado lugar al desarrollo de algunas técnicas verdaderamente sorprendentes.

Emanuel Sperner probó el siguiente teorema en 1928. Se considera a este resultado como una piedra angular para toda la teoría sobre tropeles pues durante 30 años se publicaron muy pocos resultados de este tipo. Fue hasta finales de la década de 1960 que el estudio de la combinatoria de los conjuntos finitos experimentó un crecimiento notable. El enunciado de este teorema fue tomado de Engel [1997].

Teorema 6 (Sperner) Sea n un entero positivo y sea \mathcal{F} un tropel sobre el conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$. Entonces

a)

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \binom{n}{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

b) La igualdad se cumple si y solo si

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \{X \subseteq [n] : |X| = \frac{n}{2}\} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{X \subseteq [n] : |X| = \frac{n-1}{2}\} \text{ o } \{X \subseteq [n] : |X| = \frac{n+1}{2}\} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Definición 7 Sea E un conjunto finito de cardinalidad n , y sea k un entero tal que $0 \leq k \leq n$, definimos el **tropel uniforme** de tamaño k como el tropel

$$\binom{E}{k} := (\{A \subseteq E : |A| = k\}; E).$$

Ejemplo 8 Dada una colección \mathcal{F} de subconjuntos de un conjunto finito E , existen dos tropeles asociados con \mathcal{F} , a saber, $\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{F} : \forall F' \in \mathcal{F} - \{F\}, F' \not\subseteq F\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{F \in \mathcal{F} : \forall F' \in \mathcal{F} - \{F\}, F' \not\supseteq F\}$ que son las colecciones de miembros minimales y maximales de \mathcal{F} , respectivamente. \square

Definición 9 Los tropeles del Ejemplo 8 muestran el uso de dos operadores que envían a una familia de conjuntos en un tropel, dichos operadores son el **operador** \max_{\subseteq} y el **operador** \min_{\subseteq} . El operador \min_{\subseteq} envía a una familia \mathcal{F} en el tropel $\min_{\subseteq} \mathcal{F}$ que esta conformado por los miembros de \mathcal{F} que son minimales por contención; similarmente $\max_{\subseteq} \mathcal{F}$ es el tropel que consiste en los miembros de \mathcal{F} que son maximales por contención.

El número de diferentes tropeles sobre un conjunto con n elementos es contado por los números de Dedekind; De estos números solo se conocen los valores 2, 3, 6, 20, 168, 7581, 7828354, 2414682040998 y 56130437228687557907788 que corresponden a los conjuntos desde cero hasta ocho elementos, respectivamente. Los primeros seis de estos números fueron calculados por Church [1940] y el último de ellos fue hallado por Wiedemann [1991].

Richard Dedekind descubrió estos números en 1897 cuando intentaba contar de manera explícita la cantidad de funciones monótonas booleanas. Hoy en día, el problema de encontrar una expresión matemática de forma cerrada para computar estos números se conoce como el *problema de Dedekind* y permanece sin solución. Aunque existen aproximaciones asintóticas que estiman estos números, el cómputo exacto sigue siendo ineficiente. La Tabla 10 muestra los 20 tropeles sobre el conjunto $E = \{1, 2, 3\}$.

Otro resultado interesante es que dado un tropel existe una descomposición única usando una clase de tropeles llamados **tropeles primos**. Dicha factorización fue propuesta por Billera [1970], basándose en un artículo de Shapley [1967] sobre teoría de juegos. El factorizar un tropel es un proceso complicado

No.	Tropes sobre el conjunto E		
1.	(123)		
2.	(12)(13)(23)		
3.	(12)(13)	(12)(23)	(13)(23)
4.	(12)	(13)	(23)
5.	(12)(3)	(13)(2)	(23)(1)
6.	(1)(2)(3)		
7.	(1)(2)	(1)(3)	(2)(3)
8.	(1)	(2)	(3)
9.	$\{\emptyset\}$		
10.	\emptyset		

Tabla 10 Tropes sobre el conjunto $E = \{1, 2, 3\}$. Los tropes sobre un mismo renglón son isomorfos.

pero existe una interesante relación entre esta factorización y el mapeo bloqueador de un tropel; el mapeo bloqueador es uno de los mapeos de tropes que definiremos en la próxima sección. No entraremos en más detalles sobre esta factorización de tropes ya que no la necesitaremos en lo que resta de la tesis.

1.1. Mapeos entre tropes

Las siguientes tres definiciones se tomaron del artículo de Cordovil *et al.* [1991].

Definición 11 *Un mapeo de tropes es una función definida de la clase de todos los tropes en ella misma, que envía un tropel sobre un conjunto S a un tropel sobre el mismo conjunto.*

Definición 12 *El mapeo complementario es el mapeo de tropes que envía a un tropel C sobre un conjunto E al tropel $c(C) = \{E - C : C \in C\}$ sobre el mismo conjunto E . El tropel $c(C)$ se llama **tropel complementario** del tropel C .*

Dado un conjunto finito E , el tropel $(\emptyset; E)$ es el único tropel sobre el conjunto E al que no se le puede aplicar el mapeo complementario. Observe que el mapeo complementario sí puede aplicarse al tropel $(\{\emptyset\}; E)$ y que $c(\{\emptyset\}; E) = (\{E\}; E)$.

Definición 13 El mapeo bloqueador es el mapeo de tropes que envía a un tropel C sobre un conjunto E al tropel $b(C) = \min_{\subseteq} \{D \subseteq E : D \cap C \neq \emptyset, \forall C \in \mathcal{C}\}$ sobre el conjunto E . Llamamos a $b(C)$ el **tropel bloqueador** de C . Es fácil ver que $b(C)$ consta de los transversales de C minimales por contención.

Ejemplo 14 Considere $G = (V, E)$, la gráfica de los puentes de Königsberg, que está representada en la Figura 15, sea $\mathcal{F} = \{(14)(16)(25)(27)\}$ la familia de trayectorias de longitud dos que conectan el vértice A con el vértice B , observe que \mathcal{F} es un tropel sobre el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. No es difícil ver que $c(\mathcal{F}) = \{(23567)(23457)(13467)(13456)\}$ y que $b(\mathcal{F}) = \{(12)(157)(246)(4567)\}$. \square

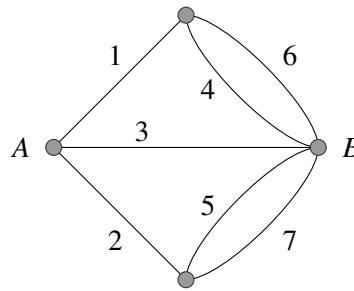


Figura 15 Gráfica de los puentes de Königsberg.

Teorema 16 (Edmonds y Fulkerson) El mapeo bloqueador es un mapeo involutivo. Es decir, si \mathcal{A} es un tropel sobre un conjunto E y b es el mapeo bloqueador, entonces $b(b(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

Definición 17 Sea $(C; E)$ un tropel y sea b el mapeo bloqueador, entonces a la pareja $((C; E), (b(C); E))$ se le llama **par bloqueador**.

Es interesante notar que dado un conjunto finito E , se tiene que $b((\emptyset; E)) = (\emptyset; E)$ y que $b((\emptyset; E)) = (\emptyset; E)$, es decir, los tropes triviales sobre el conjunto E son un par bloqueador.

Otro ejemplo de particular importancia es el siguiente que se menciona en el libro de Oxley [2011].

Ejemplo 18 Sea n un entero positivo, $S = \{1, 2, \dots, n\}$, para cada m en $\{0, 1, \dots, n + 1\}$ sea \mathcal{A}_m la colección de los subconjuntos de S con m elementos. Entonces si b es el mapeo bloqueador, se tiene que $b(\mathcal{A}_m) = \mathcal{A}_{n-m+1}$. \square

1.1.1. Relación entre tropel bloqueador y tropel complementario

Los siguientes dos resultados establecen una relación entre el tropel bloqueador y el tropel complementario de un tropel dado; ambos fueron probados por Dawson [1981].

Teorema 19 *Sea $(C; E)$ un tropel y sea $(\mathcal{H}^*; E)$ su tropel complementario. Sea 2^E el conjunto potencia de E y b el mapeo bloqueador; entonces:*

$$b((C; E)) = (\min_{\subseteq} (2^E - \{A : \exists H \in \mathcal{H}^* \text{ tal que } A \subseteq H\}); E)$$

Demostración: Primero se mostrará que si $B \in 2^E - \{A : \exists B \in \mathcal{H}^* \text{ tal que } A \subseteq H\}$ entonces B es un transversal de C .

Sea $B \in 2^E - \{A : \exists B \in \mathcal{H}^* \text{ tal que } A \subseteq H\}$. Suponga que B no es transversal de $(C; E)$, entonces $\exists C \in C$ tal que $B \cap C = \emptyset$, por lo que $B \subseteq E - C$ pero esto es una contradicción pues $E - C \in \mathcal{H}^*$ y por hipótesis B no está contenido en ningún miembro de \mathcal{H}^* . Se sigue que B es un transversal de $(C; E)$.

Ahora se probará que si B es un transversal del tropel $(C; E)$, entonces $B \in 2^E - \{A : \exists B \in \mathcal{H}^* \text{ tal que } A \subseteq H\}$.

Sea B un transversal de $(C; E)$ y suponga que $B \notin 2^E - \{A : \exists B \in \mathcal{H}^* \text{ tal que } A \subseteq H\}$. Entonces, $\exists H \in \mathcal{H}^*$ tal que $B \subseteq H$, de modo que $B \cap H = B$ y $B \cap (E - H) = \emptyset$ pero $E - H \in C$, esto es una contradicción pues B es un transversal de $(C; E)$.

Como el tropel bloqueador consta de los conjuntos transversales *minimales* el teorema queda demostrado. ■

Corolario 20 *El tropel complementario de un tropel $(C; E)$ es maximal con respecto a no contener como subconjuntos a los miembros del tropel bloqueador de $(C; E)$. Equivalentemente, los miembros del tropel bloqueador son minimales con respecto a no estar contenidos en ningún miembro del tropel complementario.*

Demostración: De la prueba del teorema anterior se sigue que los miembros del tropel complementario y todos sus subconjuntos son los únicos subconjuntos de E que no son transversales del tropel, por tanto,

no pueden contener como subconjunto a ningún miembro del bloqueador. Si a un miembro del tropel complementario se le agrega un elemento de su complemento, este nuevo conjunto no está contenido en ningún miembro del tropel complementario, de modo que dicho conjunto es un transversal del tropel y por lo tanto contiene a un miembro del tropel bloqueador. ■

1.2. Conjuntos parcialmente ordenados

Definición 21 *Un conjunto parcialmente ordenado o copo (P, \leq) consta de un conjunto P (posiblemente infinito) junto con un orden parcial \leq , esto es, una relación binaria, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otras palabras, para todo x, y, z en P , se cumple lo siguiente:*

(P1) $x \leq x$.

(P2) Si $x \leq y, y \leq x$, entonces $x = y$.

(P3) Si $x \leq y, y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si el conjunto P es finito, se dice que el copo es finito.

Definición 22 *Una función $\theta : P \rightarrow Q$ de un copo P a un copo Q se llama **isótona** si satisface*

(FI) $x \leq y$ implica $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Definición 23 *Dos copos P y Q son **isomorfos** si existe una función biyectiva que satisface*

(FI)' $x \leq y \Leftrightarrow \theta(x) \leq \theta(y)$.

Al igual que los tropeles, los copos abundan en las matemáticas. Entre los ejemplos más comunes podemos citar a los números reales con la relación \leq (*menor o igual que*) usual; los subconjuntos de un conjunto dado con la relación \subseteq (*inclusión de conjuntos*); y el conjunto D_n de los divisores enteros positivos de un entero positivo n con la relación $x \leq y$ si y solo si x divide a y .

Ejemplo 24 Considere la colección Π_n de particiones del conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$. Dados α, β miembros de Π_n , definimos la relación $\alpha \leq \beta$ si α es un refinamiento de β , esto es, si todo miembro de la colección α está contenido (como subconjunto) en algún miembro de la colección β . (Π_n, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado. \square

En un conjunto parcialmente ordenado P , si $x \leq y$, algunas veces se escribirá $y \geq x$. Si $x \leq y$ pero $x \neq y$, se escribirá $x < y$ o $y > x$. Si $x < y$ y no hay ningún elemento z de P tal que $x < z < y$, entonces se dice que y **cubre** a x en P .

Un conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) se puede representar mediante un *diagrama de Hasse*, el cual es una gráfica simple cuyos vértices corresponden a los elementos de P . En esta gráfica, si $x > y$, entonces el vértice correspondiente a x es dibujado en un lugar más arriba de la página que el correspondiente a y . Dos vértices x, y están unidos por una arista siempre que x cubre a y . La Figura 25 muestra el diagrama de Hasse de uno de los conjuntos parcialmente ordenados dados en el Ejemplo 24.

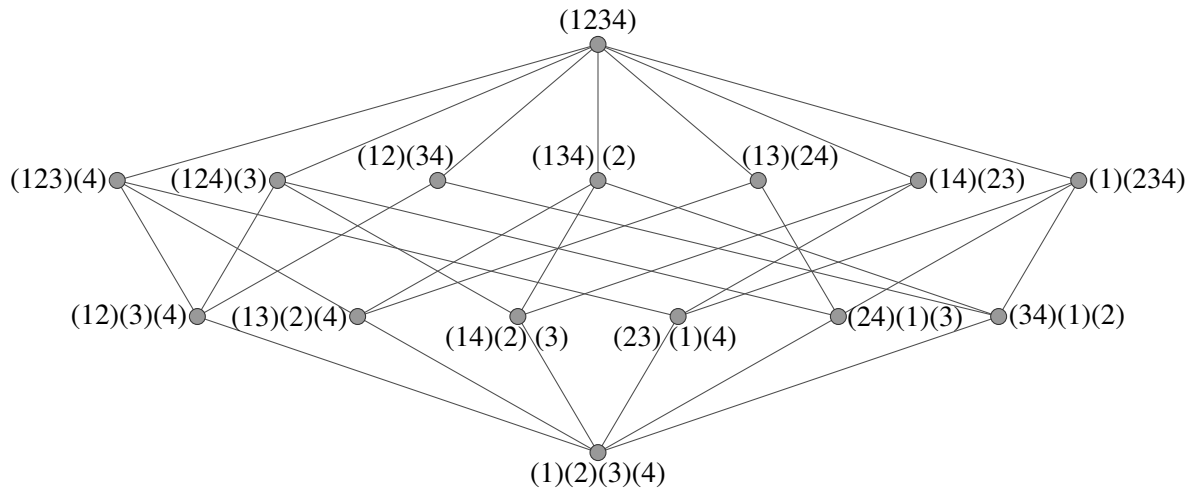


Figura 25 Diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado Π_4 .

1.2.1. Retículos

El conjunto parcialmente ordenado de la Figura 25 ilustra todas las definiciones y posee todas las propiedades que se presentan en esta subsección, se recomienda consultarlo para comprender mejor los conceptos conforme se van introduciendo.

Definición 26 Un **retículo** (\mathcal{L}, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada par de elementos $x, y \in \mathcal{L}$, \mathcal{L} contiene elementos $(x \vee y)$, $(x \wedge y)$, el **supremo** y el **ínfimo**, respectivamente, de $\{x, y\}$, tales que:

(L1) $(x \vee y) \geq x$, $(x \vee y) \geq y$; y si $z \geq x$, $z \geq y$ entonces $z \geq (x \vee y)$;

(L2) $(x \wedge y) \leq x$, $(x \wedge y) \leq y$; y si $z \leq x$, $z \leq y$ entonces $z \leq (x \wedge y)$.

Resulta sencillo verificar que las operaciones \vee y \wedge son conmutativas y asociativas.

Definición 27 Un **subretículo** de un retículo (\mathcal{L}, \leq) es un subconjunto \mathcal{X} de \mathcal{L} , tal que $a \in \mathcal{X}, b \in \mathcal{X}$ implica que $a \vee b \in \mathcal{X}$ y $a \wedge b \in \mathcal{X}$.

Definición 28 Un retículo (\mathcal{L}, \leq) se llama **modular** si se satisface la siguiente propiedad:

(LM) si $x \leq z$, entonces para todo $y \in \mathcal{L}$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Definición 29 El **retículo pentagonal** consiste en los cinco elementos $0, 1, x, a, b$, de modo que, tanto $0 < x < b < 1$ como $0 < a < 1$ son cadenas maximales, y además, el elemento a es incomparable con b y con x . Se denota a este retículo por \mathcal{N}_5 .

Observe que \mathcal{N}_5 es un retículo que no es modular. De hecho, \mathcal{N}_5 es el retículo no modular con el menor número de elementos.

Los subretículos sirven para dar caracterizaciones de algunas clases de retículos, como por ejemplo, los retículos que no son modulares.

Teorema 30 Cualquier retículo no modular (\mathcal{L}, \leq) contiene un subretículo isomorfo al retículo \mathcal{N}_5 cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 31.

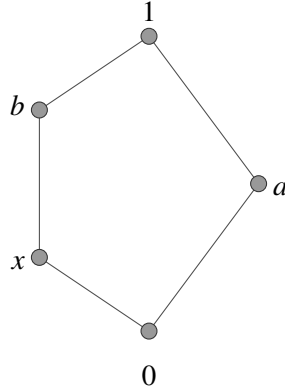


Figura 31 Diagrama de Hasse del retículo N_5 .

Definición 32 Sea (P, \leq) un conjunto parcialmente ordenado con P finito. Una **cadena** en P de x_0 a x_n es un subconjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de P tal que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. La **longitud** de una de estas cadenas es n , y la cadena es **maximal** si x_i cubre a x_{i-1} para todo i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Si para cada pareja $\{a, b\}$ de elementos de P con $a < b$, todas las cadenas maximales de a hasta b tienen la misma longitud, entonces se dice que P satisface la **condición de cadena de Jordan-Dedekind**.

Definición 33 Si el conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) tiene un elemento z tal que $z \leq x$ para todo $x \in P$, se llama a z el **cero** de P y se denota por 0 . De manera similar, si (P, \leq) tiene un elemento w tal que $w \geq x$ para todo $x \in P$, entonces w se llama el **uno** de P y se le denota por 1 .

Definición 34 Si un conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) tiene un cero. Un elemento x se llama **átomo** de P si x cubre al elemento 0 . La **altura** $h(w)$ de un elemento w de P es la longitud máxima de una cadena de 0 a w . En particular, los átomos de P son los elementos de altura uno.

Es un resultado conocido que todo retículo finito tiene un cero y un uno.

Definición 35 Un retículo finito (\mathcal{L}, \leq) se llama **semimodular** si se satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind y para cada pareja x, y de elementos de \mathcal{L} se tiene que,

$$h(x) + h(y) \geq h(x \vee y) + h(x \wedge y).$$

Definición 36 Un retículo finito (\mathcal{L}, \leq) se llama **geométrico** si es semimodular y todo elemento es supremo de algún conjunto (posiblemente vacío) de átomos, esto es, el 0 es supremo del conjunto vacío de átomos y para todo $x \neq 0$ en \mathcal{L} , existen a_1, \dots, a_k átomos de P , tales que $(a_1 \vee \dots \vee a_k) = x$.

Los retículos geométricos están fuertemente relacionados con los matroides, una estructura combinatoria que se describirá en el Capítulo 2.

1.2.2. Sistemas de independencia

Se concluye este primer capítulo con otra importante clase de conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 37 Un sistema de independencia S es una pareja (E, \mathcal{I}) , donde E es un conjunto finito e \mathcal{I} es una colección de subconjuntos de E (llamados conjuntos independientes) con las siguientes propiedades:

SI1) El conjunto vacío es independiente.

SI2) Todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente.

Observe que los miembros maximales de un sistema de independencia son un tropel. Análogamente, dado un tropel $(\mathcal{B}; E)$, la colección $\mathfrak{B} = \{B' \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B}, B' \subseteq B\}$ es un sistema de independencia.

Ejemplo 38 Un **emparejamiento**¹ en una gráfica G es un conjunto de aristas tales que no hay dos de ellas que sean adyacentes. Claramente, el conjunto de emparejamientos de una gráfica G es un sistema de independencia. En la Figura 39 las aristas dibujadas con líneas discontinuas muestran un ejemplo de emparejamiento en la gráfica $K_{4,3}$. \square

¹Los emparejamientos se llaman **matchings** en el idioma inglés.

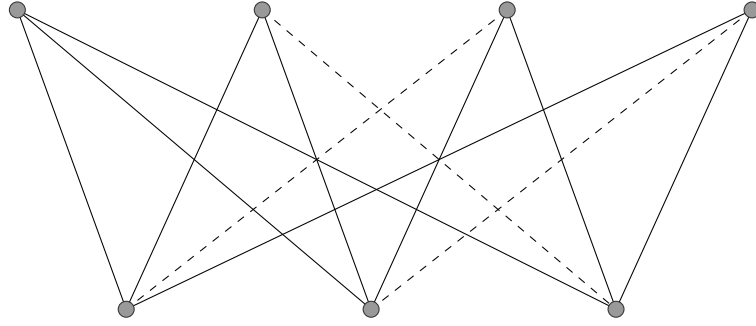


Figura 39 *Un emparejamiento en la gráfica $K_{4,3}$ señalado con líneas discontinuas.*

Al igual que los retículos, los sistemas de independencia están muy relacionados con los matroides, de hecho, en el Capítulo 2 se verá que un matroide es un sistema de independencia con una interesante propiedad adicional.

Capítulo 2

Matroides

Los matroides surgieron debido a la inquietud de crear una teoría abstracta de independencia. En álgebra lineal, por ejemplo, dado un campo, existen alrededor de diez axiomas que definen el concepto de espacio vectorial; algunos matemáticos como Van Der Waerden [1937] comenzaron a interesarse por un conjunto mínimo de axiomas que permitiera emular algunas propiedades de la independencia lineal en conjuntos finitos. Actualmente, se considera que Hassler Whitney [1935] y Takeo Nakasawa ¹, de manera independiente, obtuvieron las primeras axiomatizaciones del concepto de *matroide*. Sorprendentemente, tres axiomas son suficientes para definir a estas estructuras combinatorias.

2.1. Conceptos básicos de matroides

Definición 40 *Un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ consta de un conjunto finito E y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de E (llamados **conjuntos independientes**) tales que satisfacen los siguientes axiomas de independencia:*

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ y $I' \subseteq I$ entonces $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) Si I_1 e I_2 están en \mathcal{I} y $|I_1| < |I_2|$, entonces $\exists e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

¹Los trabajos de Takeo Nakasawa fueron escritos en alemán y publicados en Japón en la década de los años 30 del siglo XX; una serie de eventos desafortunados provocó que dichos artículos permanecieran en el olvido hasta el año 2006 en que se localizaron y posteriormente se editaron en inglés en el libro de Nishimura y Kuroda [2012].

Un subconjunto de E que no pertenece a \mathcal{I} se llama **conjunto dependiente**.

Puede observarse que los matroides son casos especiales de sistemas de independencia. El nombre *matroide* fue acuñado por Hassler Whitney debido a que una clase fundamental de ejemplos de estos objetos surgen de la manera siguiente.

Proposición 41 Sea E el conjunto de etiquetas de las columnas de una matriz A de $m \times n$ sobre un campo \mathbb{F} y sea \mathcal{I} el conjunto de subconjuntos de X de E para los cuales el multiconjunto de columnas etiquetadas por X es linealmente independiente en el espacio vectorial $V(m, \mathbb{F})$. Entonces $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide. Este matroide se llama **matroide de vectores de A** y se denota por $M[A]$.

Definición 42 Si M es un matroide isomorfo al matroide de vectores de una matriz D sobre un campo \mathbb{F} , entonces se dice que M es **representable sobre \mathbb{F}** o que es **\mathbb{F} -representable**. D se llama una **representación para M sobre \mathbb{F}** o una **\mathbb{F} -representación para M** .

Definición 43 Un **matroide binario** es aquel que es representable sobre $GF(2)$ (el campo con únicamente dos elementos). De manera análoga se define a un **matroide ternario** como aquel que es representable sobre $GF(3)$ (el campo con únicamente tres elementos).

Ejemplo 44 Sea A la siguiente matriz sobre el campo \mathbb{R} de los números reales.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & & & & \end{array}$$

Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ el conjunto de etiquetas de las columnas de A e $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ la colección de los subconjuntos X de E para los cuales el multiconjunto de columnas etiquetadas por X es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial $V(2, \mathbb{R})$. Es sencillo comprobar que $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide. \square

Definición 45 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y supongamos que $X \subseteq E$. Sea $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$. Entonces la pareja $(X, \mathcal{I}|X)$ es un matroide. Se llama a este matroide la **restricción de M a X** o el **borrado en M de $E - X$** . Otras notaciones comunes para este matroide son $M \setminus (E - X)$ y $M - (E - X)$.

Ejemplo 46 Considere el matroide del Ejemplo 44, sea $X = \{1, 2, 5\}$, entonces la restricción de M a X es el matroide $M|X = (X, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}\})$. \square

2.1.1. Bases y circuitos

Definición 47 Una **base** de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un subconjunto de E , independiente y maximal (con respecto a la inclusión de conjuntos). Es decir, las bases son el tropel formado por los subconjuntos maximales de \mathcal{I} .

Definición 48 Un **circuito** de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un subconjunto de E dependiente y minimal (con respecto a la inclusión de conjuntos).

Definición 49 Un **istmo** e de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un elemento de E que está contenido en todas las bases de M .

Definición 50 Un **lazo** e de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un elemento de E tal que $\{e\}$ es un circuito. Se dice que dos elementos e, f de E son **paralelos** si $\{e, f\}$ es un circuito.

Ejemplo 51 Sea T la siguiente matriz sobre el campo $GF(3)$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de etiquetas de las columnas de T . Las bases de $M[T]$ son $\{1, 2\}$ y $\{2, 4\}$. Los circuitos de $M[T]$ son $\{3\}$ y $\{1, 4\}$. El elemento 2 es un istmo, 3 es un lazo, y los elementos del conjunto $\{1, 4\}$ son paralelos. \square

2.1.2. Rango, clausura, cerrados e hiperplanos

Definición 52 La *función rango* de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es una función $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ definida por:

$$r(A) := \max\{|X| : X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}$$

El *rango* de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es $r(E)$ (es decir, el rango del conjunto E), a menudo se denota al rango de un matroide M por $r(M)$.

Definición 53 Un subconjunto $A \subseteq E$ es un *cerrado* del matroide $M = (E, \mathcal{I})$ si $\forall x \in E - A$

$$r(A \cup x) = r(A) + 1$$

Definición 54 Sea M un matroide arbitrario sobre un conjunto E y r la función rango de M . Se define al *operador clausura* de M como la función cl de 2^E en 2^E , tal que para todo $X \subseteq E$

$$cl(X) := \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}$$

Definición 55 Un *hiperplano* de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es un subconjunto propio de E que es cerrado y maximal (con respecto a la inclusión de conjuntos).

Definición 56 Una *línea* de un matroide es un cerrado de rango dos.

Teorema 57 Dado un matroide $M = (E, \mathcal{I})$, la colección de cerrados de M parcialmente ordenados por la relación \subseteq (la contención de conjuntos), es un retículo geométrico llamado el *retículo de cerrados de M* ; en dicho retículo, para cualesquiera cerrados X, Y de M se tiene que

$$X \wedge Y = X \cap Y \text{ y } X \vee Y = cl(X \cup Y).$$

Más aún, un retículo \mathcal{L} es geométrico, si y solo si es isomorfo al retículo de cerrados de un matroide.

Lema 58 Si X, Y son cerrados de un matroide M y $X \subseteq Y$, entonces toda cadena maximal de cerrados de X a Y tiene longitud $r(Y) - r(X)$, donde r es la función rango de M .

Definición 59 El *matroide uniforme* de rango r sobre el conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$ es aquel que no tiene circuitos de cardinalidad menor que $r + 1$. Se denota a dicho matroide uniforme por $U_{r,n}$

Como puede verse en el siguiente ejemplo, los matroides uniformes tienen una estructura muy sencilla.

Ejemplo 60 Sea $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{I} = \{X \subseteq [5] : |X| \leq 3\}$. Entonces $U_{3,5} = ([5], \mathcal{I})$ es un matroide uniforme; su tropel de circuitos es $\mathcal{C} = \{(1234)(1235)(1245)(1345)(2345)\}$, el de bases es $\mathcal{B} = \{(123)(124)(125)(134)(135)(145)(234)(235)(245)(345)\}$ y el de hiperplanos es $\mathcal{H} = \{(12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45)\}$. Un diagrama de este matroide se muestra en la Tabla 61. \square

$U_{3,5}$		
Conjuntos dependientes	(12345) (1234)(1235)(1245)(1345)(2345)	Circuitos
Conjuntos independientes	(123)(124)(125)(134)(135)(145)(234)(235)(245)(345) (12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45) (1)(2)(3)(4)(5) \emptyset	Bases Hiperplanos

Tabla 61 Estructura del matroide uniforme $U_{3,5}$.

2.1.3. Matroides isomorfos y dualidad

Definición 62 Dos matroides $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ son *isomorfos*, denotado $M_1 \cong M_2$, si hay una biyección ψ de E_1 a E_2 tal que para todo $X \subseteq E_1$, $\psi(X)$ es independiente en M_2 si y solo si X es independiente en M_1 .

El siguiente teorema permite establecer una dualidad para matroides usando la operación de complemento de un conjunto.

Teorema 63 Si \mathcal{B} es el conjunto de bases de un matroide M sobre E , entonces $\mathcal{B}^* = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$ es el conjunto de bases de un matroide M^* sobre E , dicho matroide se conoce como el *matroide dual* de M . Es decir, $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ donde $\mathcal{I}^* = \{X \subseteq E; \exists B \in \mathcal{B}, X \subseteq E - B\}$.

Definición 64 Si $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide y $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ es el matroide dual de M , las **cobases**, los **cocircuitos** y los **cohiperplanos** de M son respectivamente las bases, los circuitos y los hiperplanos de M^* .

Teorema 65 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sea $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ su matroide dual. Sea r la función rango de M y r^* la función rango de M^* . Entonces para todo X subconjunto de E se tiene la igualdad:

$$r^*(X) = r(E - X) + |X| - r(M)$$

Teorema 66 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sea $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ su matroide dual. Sea cl el operador clausura de M y cl^* el operador clausura de M^* . Sea $(X, Y, \{z\})$ una partición de E donde X o Y puede ser el conjunto vacío. Entonces $z \in cl(X)$ si y solo si $z \notin cl^*(Y)$.

Definición 67 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y T un subconjunto de E . Definimos la **operación contracción de T en M** , como la operación que envía a M en el matroide $M/T := (M^* \setminus T)^*$. Evidentemente M/T tiene a $E - T$ como su conjunto base. M/T se llama la **contracción de T en M** o la **contracción de M sobre $E - T$** .

2.1.4. Sistemas de axiomas de matroides

Como se ha mencionado en la introducción, para los conjuntos de bases, circuitos e hiperplanos, existen una serie de axiomas que permiten determinar con precisión cuando un subconjunto del conjunto potencia de un conjunto E es el conjunto de bases, circuitos o hiperplanos de un matroide sobre E . Los siguientes teoremas pueden consultarse en los primeros dos capítulos del libro de Oxley [2011].

Teorema 68 Un tropel $(\mathcal{B}; E)$ es el conjunto de bases de un matroide sobre E si y solo si:

B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 - B_2$, entonces $\exists y \in B_2 - B_1$, tal que $(B_1 - x) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Teorema 69 Un tropel $(\mathcal{C}; E)$ es el conjunto de circuitos de un matroide sobre E si y solo si:

C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

C2) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, si $x \in C_1 \cap C_2$, entonces $\exists C_3 \in \mathcal{C}$, tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$.

Teorema 70 Un tropel $(\mathcal{H}; E)$ es el conjunto de hiperplanos de un matroide sobre E si y solo si:

H1) $E \notin \mathcal{H}$.

H2) Si $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, si $x \notin H_1 \cup H_2$, entonces $\exists H_3 \in \mathcal{H}$, tal que $H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$.

Teorema 71 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide, sea \mathcal{C} su colección de circuitos, entonces su colección de cocircuitos es el tropel $\mathcal{C}^* = \min_{\subseteq} \{C^* \subseteq E : \forall C \in \mathcal{C}, C^* \cap C \neq \emptyset\}$.

2.2. Matroides gráficos

Definición 72 Sea E el conjunto de aristas de una gráfica G y \mathcal{C} la colección de conjuntos de aristas que forman un ciclo de G . Entonces \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide sobre E . Dicho matroide se conoce como **matroide de ciclos** o **matroide polígono** de G .

Definición 73 Un matroide que es isomorfo a un matroide de ciclos de una gráfica se llama **matroide gráfico**.

Definición 74 Para una gráfica G , se denota por $M^*(G)$ al matroide dual del matroide de ciclos de G . El matroide $M^*(G)$ se conoce como el **matroide de cociclos** de G . Un matroide arbitrario que es isomorfo al matroide de cociclos de una gráfica se dice que es un **matroide cográfico**.

Es un resultado conocido que si M es un matroide gráfico, puede hallarse una gráfica conexa G tal que M es isomorfo a $M(G)$. De este modo, se pueden estudiar todos los matroides gráficos usando solo gráficas conexas.

Definición 75 Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea $f = \{u, v\}$ una arista de E , definimos el **borrado** de f en G como la operación que envía a G en la gráfica $G - f$ obtenida al eliminar la arista f de G , es decir,

$G - f := (V, E - f)$. De manera similar, definimos la **contracción** de f en G como la operación que envía a G en la gráfica G/f obtenida al eliminar la arista f de G e identificar sus extremos en un nuevo vértice w , es decir, $G/f := ((V - \{u, v\}) \cup w, E')$, donde $E' = \{x \in E - f : x \text{ no incide en } u \text{ ni con } v\} \cup \{w, y : \{u, y\} \in E - f \text{ o } \{v, y\} \in E - f\}$, note que $E - f$ y E' al igual que E son multiconjuntos.

Resulta interesante que las operaciones de borrado y contracción para matroides son, hasta cierto punto, una extensión de las respectivas operaciones para gráficas, tal y como lo muestran el Teorema 76 y la Proposición 77 ; ambos resultados fueron tomados del libro de Gordon y McNulty [2012].

Teorema 76 Sea G una gráfica y sea $M(G)$ su matroide de ciclos. Entonces si e es una arista de G que no es un lazo ni un istmo de $M(G)$, se tiene que

$$M(G) - e = M(G - e) \text{ y } M(G)/e = M(G/e).$$

Proposición 77 Sea $M = (E(G), \mathcal{I})$ el matroide de ciclos de una gráfica conexa G , sea X un conjunto de aristas de E , entonces se tiene lo siguiente:

- (i) X es independiente en $M(G)$ si y solo si $G[X]$ es un bosque de G ;
- (ii) X es una base de $M(G)$ si y solo si $G[X]$ es un árbol generador de G ;
- (iii) X es un circuito de $M(G)$ si y solo si $G[X]$ es un ciclo de G ;
- (iv) el rango de X en $M(G)$ es la cantidad de aristas del árbol generador máximo contenido en $G[X]$;
- (v) X es un cerrado de $M(G)$ si y solo si existe una partición Π de $V(G)$, tal que $V(G[X]) \in \Pi$ y $G[X] = G[V(G[X])]$;
- (vi) X es un cocircuito de $M(G)$ si y solo si X es un corte minimal por aristas de G .
- (vii) X es un hiperplano de $M(G)$ si y solo si $G(X)$ es una subgráfica maximal de G con exactamente dos componentes conexas.

2.3. Matroides simples

Ya mencionamos lo que es una gráfica simple, en esta sección se establece un concepto análogo para matroides.

Definición 78 *Un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es **simple** si no tiene circuitos de cardinalidad menor que tres.*

Los matroides simples también se conocen como *geometrías combinatorias*.²

Un matroide es *no simple* si tiene lazos (circuitos de cardinalidad uno) o elementos paralelos (elementos de un mismo circuito de cardinalidad dos).

Dado un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ y un elemento a del conjunto base E , la *clase paralela de a* es el conjunto X de elementos x tales que $\{x, a\}$ es un circuito de M .

En un matroide M no simple, si se borran todos los lazos, y en cada clase paralela X se distingue un elemento y se borran todos los demás elementos de X , se obtiene un matroide que está determinado de manera única salvo un reetiquetado de los elementos distinguidos que fueron elegidos en cada clase paralela. Se denota a este matroide por $si(M)$ y se le llama *el matroide simple asociado con M* .

Un hecho interesante es que dos matroides (no necesariamente isomorfos) cuyos matroides simples asociados son isomorfos, tienen retículos de cerrados isomorfos. Esto significa que el estudio de los matroides simples es equivalente al estudio de los retículos geométricos.

Teorema 79 *Si G es una gráfica no simple y G' se obtiene a partir de G borrando todos los lazos, y eligiendo solo una arista de cada conjunto de aristas paralelas y borrando las demás, entonces $M(G')$ es isomorfo a $si(M(G))$.*

La gráfica G' descrita en el Teorema 79 se llama *gráfica simple asociada* de la gráfica G . Un ejemplo de dicha construcción se ilustra en la Figura 80.

²Nombre introducido por el matemático Gian-Carlo Rota.

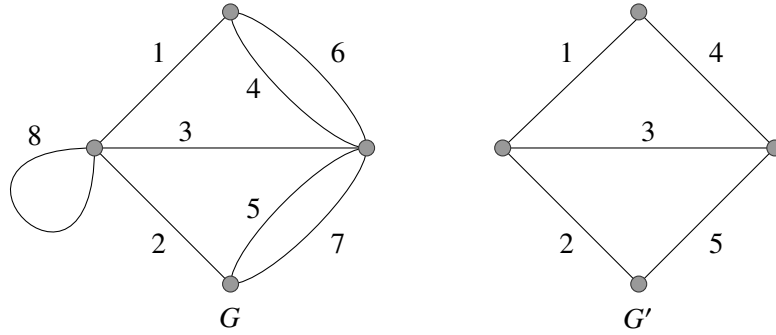


Figura 80 G' es una subgráfica simple asociada de la gráfica G .

Ejemplo 81 Considere las gráficas de la Figura 80. Entonces el tropel de circuitos de $M(G)$ es $C = \{(8)(46)(57)(134)(136)((235)(237)(1245)(1256)(1247)\}$. Si en las clases paralelas $\{4, 6\}, \{5, 7\}$ elegimos los elementos 4, 5 y eliminamos los demás, entonces el tropel de circuitos de $si(M(G))$ es $C' = \{(134)(235)(1245)\}$ que es precisamente el tropel de circuitos de $M(G')$. Se sigue que $M(G')$ es isomorfo a $si(M(G))$. Los retículos de cerrados de estos dos matroides se ilustran en la Figura 82. Observe que aunque $M(G)$ no es isomorfo a $M(G')$, los retículos de cerrados de estos matroides sí son isomorfos, más aún, son isomorfos al retículo de cerrados de $si(M(G))$. □

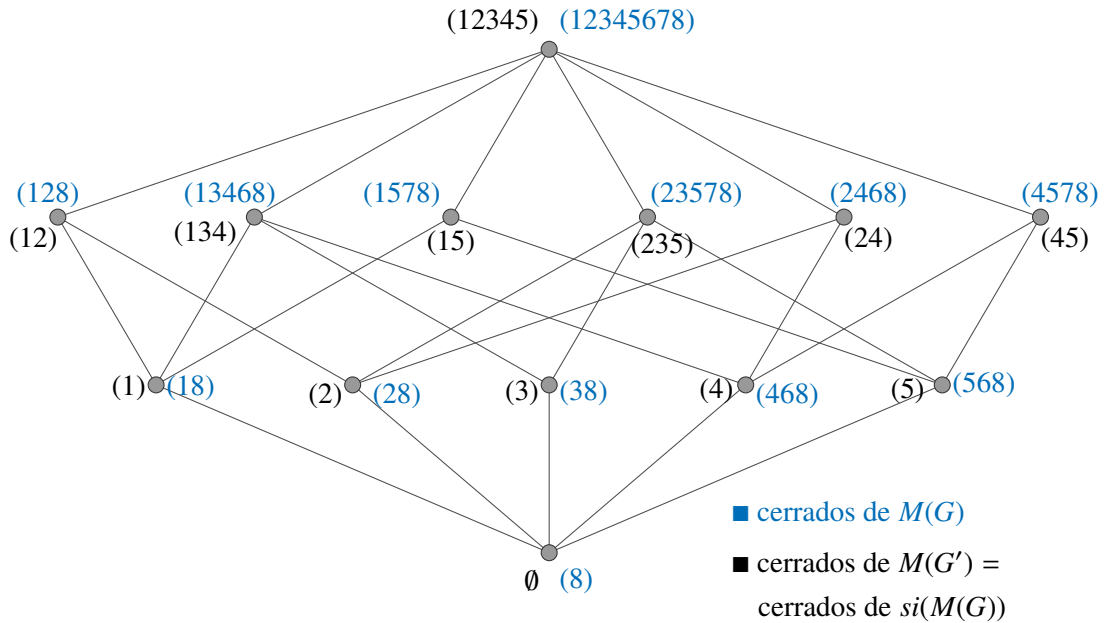


Figura 82 Diagrama de Hasse de los tres retículos del Ejemplo 81.

Otra situación de especial interés es el hecho de que el dual de un matroide simple no es necesariamente un matroide simple. Esta es una diferencia importante con las gráficas. En la teoría de gráficas muchas veces el estudio de ciertas propiedades se centra en la clase de las gráficas simples; por el contrario, en el caso de los matroides, la importancia de la dualidad hace que muchas propiedades se estudien para matroides en general, en vez de solo hacerlo para la clase de los matroides simples.

2.4. Matroides conexos

En el inicio de la Parte I, se mencionaron brevemente los conceptos relacionados con la conexidad de gráficas. Aquí se da a conocer una teoría de conexidad que se desarrolló para los matroides.

A pesar de que una gráfica conexa puede tener un matroide de ciclos no conexo, la conexidad de matroides resulta ser una extensión de la conexidad de gráficas para la clase de las gráficas dos conexas, es decir, las gráficas dos conexas tienen a matroides conexos como sus matroides de ciclos.

Proposición 83 *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide. Para cada $e \in E$ se construye el conjunto $\gamma(e) = \{e\} \cup \{f : M \text{ tiene un circuito que contiene a } e \text{ y a } f\}$. Ahora se define una relación γ sobre E por $e\gamma f$ si y solo si $e \in \gamma(f)$. La relación γ es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia inducidas por γ se conocen como **componentes conexas de M** .*

Definición 84 *Un matroide M es **conexo** si tiene una sola componente conexa; a los matroides que no son conexos se les denomina **matroides disconexos**.*

Proposición 85 *Sean M_1 y M_2 matroides sobre conjuntos disjuntos E_1 y E_2 . Sea $E = E_1 \cup E_2$ e $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}(M_1), I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}$. Entonces $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide; a este matroide se le conoce como **la suma directa** de M_1 y M_2 y se le denota como $M_1 \oplus M_2$.*

Proposición 86 *Si T_1, T_2, \dots, T_k son las componentes conexas de un matroide M , entonces $M = M|T_1 \oplus M|T_2 \oplus \dots \oplus M|T_k$*

Proposición 87 El tropel de hiperplanos de la suma directa de dos matroides M_1 y M_2 es el tropel $\mathcal{H}(M_1 \oplus M_2) = \{H_1 \cup E(M_2) : H_1 \in \mathcal{H}(M_1)\} \cup \{H_2 \cup E(M_1) : H_2 \in \mathcal{H}(M_2)\}$ donde $\mathcal{H}(M_1), \mathcal{H}(M_2)$ son los tropeles de hiperplanos de M_1 y M_2 respectivamente.

2.5. Matroides modulares

Definición 88 Sean P, \mathcal{L} conjuntos disjuntos (llamaremos a P el conjunto de puntos y a \mathcal{L} el conjunto de líneas) e ι una relación de incidencia que satisface las siguientes propiedades:

- (i) Cualesquiera dos elementos a y b , de P , están contenidos exactamente en una línea.
- (ii) Toda línea contiene al menos tres puntos.
- (iii) Si a, b, c y d son cuatro puntos distintos, no estando tres de ellos en una misma línea, y si la línea que contiene a $\{a, b\}$ interseca a la línea que contiene a $\{c, d\}$, entonces la línea que contiene a $\{a, c\}$ interseca a la línea que contiene a $\{b, d\}$.

La triada (P, \mathcal{L}, ι) se llama **geometría proyectiva** o **espacio proyectivo**.

Definición 89 Un **subespacio** de una geometría proyectiva (P, \mathcal{L}, ι) es un subconjunto P_1 de P tal que si a, b son distintos elementos de P_1 , entonces todos los puntos de la línea que contiene a $\{a, b\}$ están en el conjunto P_1 .

Los subespacios de (P, \mathcal{L}, ι) , ordenados por inclusión, forman un conjunto parcialmente ordenado con elemento cero. La **dimensión (proyectiva)** de un subespacio es uno menos que su altura en este conjunto parcialmente ordenado, siempre que la altura sea finita; de otro modo la dimensión de un subespacio es ∞ . El \emptyset se considera de dimensión -1 , mientras que los puntos y líneas tienen dimensiones 0 y 1, respectivamente. Denotaremos la dimensión de un subespacio A por $\dim A$.

Es un hecho conocido que el conjunto parcialmente ordenado de subespacios de una geometría proyectiva (P, \mathcal{L}, ι) es un retículo geométrico y por lo tanto es el retículo de cerrados de un matroide

sobre P ; la función rango de este matroide asigna a un conjunto $A \subseteq P$ la altura (en el retículo) del subespacio \hat{A} más pequeño que contiene a A , es decir, la dimensión de \hat{A} más uno.

Si $V = V(n+1, \mathbb{F})$, entonces el conjunto de subespacios vectoriales de V ordenados por inclusión es una geometría proyectiva de dimensión n que se acostumbra denotar por $PG(V)$ o por $PG(n, \mathbb{F})$. Cuando \mathbb{F} es el campo finito $GF(q)$, usualmente escribiremos $PG(n, q)$ para denotar a $PG(n, \mathbb{F})$.

El siguiente teorema y las dos proposiciones que lo suceden fueron tomados de Graham *et al.* [1995].

Teorema 90 *Sea (P, \mathcal{L}, ι) una geometría proyectiva, entonces se tiene exactamente uno de los siguientes casos:*

(i) $P = \mathcal{L} = \emptyset$;

(ii) $|P| = 1, \mathcal{L} = \emptyset$;

(iii) $|P| \geq 3, \mathcal{L} = \{P\}$;

(iv) (P, \mathcal{L}, ι) es un plano proyectivo;

(v) (P, \mathcal{L}, ι) puede ser identificado con los puntos y líneas de $PG(n, q)$ para algún entero $n > 2$ y alguna potencia de un número primo q .

Proposición 91 *Una estructura que satisfaga la Definición 88 cambiando “tres” por “dos” en el axioma (ii), es una suma directa de geometrías proyectivas.*

A las estructuras mencionadas en la Proposición 91 se les llama **geometrías proyectivas generalizadas**. Observe que por ser sumas directas de matroides que definen geometrías proyectivas, las geometrías proyectivas generalizadas también son matroides. La proposición que aparece a continuación caracteriza a la función rango de una geometría proyectiva generalizada.

Proposición 92 *Un matroide simple con función rango r define una geometría proyectiva generalizada si y solo si r es modular, es decir, para cualesquiera cerrados a y b*

$$r(a \vee b) + r(a \wedge b) = r(a) + r(b).$$

Como consecuencia de esta proposición, si A, B son subespacios de una geometría proyectiva y $\widehat{A \cup B}$ es el subespacio más pequeño que contiene tanto a A como a B , se tiene que $\dim(\widehat{A \cup B}) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$.

Definición 93 Sean X e Y cerrados en un matroide M . Entonces (X, Y) es un **par modular de cerrados** si $r(X) + r(Y) = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$. Si Z es un cerrado de M tal que (Z, Y) es un par modular para todos los cerrados Y , entonces Z se llama un **cerrado modular** de M .

Definición 94 Se dice que un matroide M es **modular** si todos sus cerrados son cerrados modulares.

Por la Proposición 92 se sigue que los matroides simples modulares son exactamente las geometrías proyectivas generalizadas y de este modo obtenemos la Proposición 95 para matroides (observe que esta proposición es análoga a la Proposición 91 sobre geometrías proyectivas generalizadas).

Proposición 95 Un matroide M es modular si y solo si, para cada componente conexa N de M , el matroide simple asociado con N es un matroide libre o una geometría proyectiva finita.

Definición 96 Un cerrado Y en un matroide M es un **complemento** de un cerrado X si $X \cap Y = cl(\emptyset)$ y $cl(X \cup Y) = E(M)$.

Proposición 97 Los siguientes enunciados son equivalentes para un cerrado X en un matroide M :

- (i) X es modular.
- (ii) $r(X) + r(Y) = r(X \cup Y)$ para todos los cerrados Y que intersecan X en $cl(\emptyset)$.
- (iii) $r(X) + r(Y) = r(M)$ para todos los complementos Y de X .

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado (recuerde que en un matroide una **línea** es un cerrado de rango dos).

Corolario 98 En un matroide sin lazos, un hiperplano es modular si y solo si interseca a todas las líneas; y una línea es modular si y solo si interseca a todos los hiperplanos.

La Proposición 99 permite establecer cuando un matroide sin lazos no es modular usando el subretículo \mathcal{N}_5 ; no hemos visto esta construcción en ningún otro sitio pero debido a su sencillez consideramos que debe ser conocida, la agregamos para ilustrar que justamente la existencia de un hiperplano que no es intersecado por una línea implica la aparición del subretículo \mathcal{N}_5 como subretículo del retículo de cerrados de un matroide y dicho subretículo puede construirse de una manera particular.

Proposición 99 *Si un matroide sin lazos no es modular, entonces su retículo de cerrados contiene como subretículo al retículo \mathcal{N}_5 ; más aún, dicho retículo puede construirse con un átomo, una línea, un hiperplano, el conjunto vacío y el conjunto total.*

Demostración: Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide no modular, sin lazos. Como M no es modular, existe un hiperplano H de M que no es modular; es decir, H no interseca a alguna línea L . Sea x un átomo tal que $x \in L$. Entonces $H \cap L = \emptyset$, $H \cap \{x\} = \emptyset$, $cl(H \cup \{x\}) = E$, $cl(H \cup L) = E$ y $L \cap \{x\} = \{x\}$. De este modo, el retículo de la Figura 100 (el cual es isomorfo a \mathcal{N}_5) es un subretículo del retículo de cerrados de M . ■

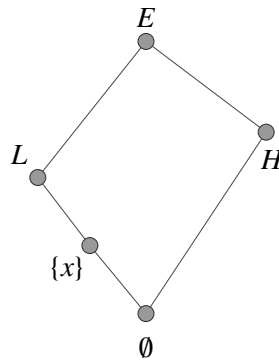


Figura 100 *Subretículo de la Proposición 99.*

2.6. Matroides de empedrado

Definición 101 *Un matroide de empedrado es aquel que no tiene circuitos de cardinalidad menor que $r(M)$, donde $r(M)$ es el rango del matroide M .*

En el idioma inglés estos matroides se conocen como *paving matroids*.

Definición 102 Sean k y m enteros con $k > 1$ y $m > 0$. Si se supone que \mathcal{T} es un conjunto $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ de subconjuntos de un conjunto E tal que cada miembro de \mathcal{T} tiene al menos m elementos y cada subconjunto de E con m elementos está contenido en un único miembro de \mathcal{T} . Entonces se dice que \mathcal{T} es una m -partición.

Proposición 103 Si \mathcal{T} es una m -partición $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ de un conjunto E , entonces \mathcal{T} es el conjunto de hiperplanos de un matroide de empedrado de rango $m + 1$ sobre E . Más aún, para $r \geq 2$, el conjunto de hiperplanos de todo matroide de empedrado de rango r sobre E es una $(r - 1)$ -partición de E .

Ejemplo 104 El matroide de Vámos es un matroide de empedrado de rango cuatro sobre un conjunto con ocho elementos; dichos elementos pueden pensarse como los ocho vértices de un cubo. Todos los conjuntos con tres o menos elementos son independientes, y 65 de los $\binom{8}{4} = 70$ conjuntos con exactamente cuatro elementos son también independientes; las cinco excepciones de conjuntos con cuatro elementos que no son independientes son los circuitos-hiperplanos del matroide. Cuatro de estos cinco circuitos-hiperplanos son caras del cubo (omitiendo una pareja de caras opuestas), el quinto circuito-hiperplano conecta dos aristas opuestas del cubo, cada una de las cuales es compartida por exactamente dos de las cuatro caras elegidas.

La Figura 105 es una representación geométrica del matroide de Vámos. Usando el etiquetado que se muestra, el tropel de hiperplanos de este matroide es $\mathcal{H} = \{(1234) (1256) (3456) (3478) (5678) (127) (128) (135) (136) (137) (138) (145) (146) (147) (148) (157) (158) (167) (168) (178) (235) (236) (237) (238) (245) (246) (247) (248) (257) (258) (267) (268) (278) (357) (358) (367) (368) (457) (458) (467) (468)\}$. No resulta difícil verificar que \mathcal{H} es una 3-partición. □

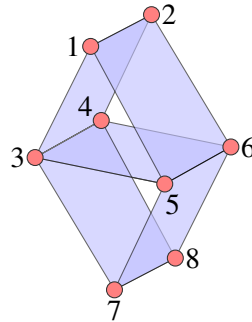


Figura 105 Una representación geométrica del Matroide de Vámos.

2.6.1. Matroides de empedrado ralo

La siguiente información fue tomada de Jerrum [2006] y Mayhew y Royle [2008].

Definición 106 Se dice que un matroide de empedrado M es **ralo** si para cualesquiera dos circuitos distintos C, C' de M se tiene que $|C \cap C'| > 2$.

Proposición 107 Un matroide de rango r es de empedrado ralo si y solo si sus hiperplanos tienen cardinalidad $(r - 1)$ o r .

Proposición 108 Sea M un matroide de empedrado ralo de rango r , entonces los hiperplanos de M de cardinalidad r son circuitos.

Proposición 109 Un matroide de empedrado ralo de rango r está completamente determinado por sus hiperplanos de cardinalidad r .

Recientemente Pendavingh y van der Pol [2014] probaron una conjetura sobre matroides de empedrado ralo. Dicha conjetura fue formulada en los años 70 por Welsh y establecía que los matroides de empedrado ralo predominarían en cualquier enumeración asintótica de matroides. Pendavingh y van der Pol probaron que si m_n y s_n son la cantidad de matroides y la cantidad de matroides de empedrado ralo sobre un conjunto con n elementos, respectivamente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s_n}{\log m_n} = 1.$$

Sistemas de Steiner

Definición 110 Un **sistema de Steiner** $S(t, k, v)$ es una pareja (S, \mathcal{H}) donde S es un conjunto con v elementos y \mathcal{H} es una colección de subconjuntos con exactamente k elementos de S , llamados bloques, tales que todo subconjunto de S de cardinalidad t está contenido en exactamente un bloque.

Ejemplo 111 La 2-partición $\mathcal{H} = \{(123)(147)(159)(168)(249)(258)(267)(348)(357)(369)(456)(789)\}$ es el conjunto de bloques del sistema de Steiner $S(2, 3, 9)$ sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

La Tabla 112 muestra la 3-partición formada por los bloques del sistema de Steiner $S(3, 4, 8)$ sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. □

Bloques de $S(3, 4, 8)$				
(1234)	(1256)	(1278)	(1357)	(1368)
(1458)	(1467)	(2358)	(2367)	(2457)
(2468)	(3456)	(3478)	(5678)	

Tabla 112 Bloques del sistema de Steiner $S(3, 4, 8)$

Los bloques de un sistema de Steiner forman una t -partición de S y por tanto hay un matroide de empedrado de rango $t + 1$ sobre S que tiene a \mathcal{H} como su conjunto de hiperplanos, dicho matroide es ralo puesto que todos los hiperplanos son equicardinales.

2.7. Manguales

Definición 113 Sea $E = \{t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r\}$ un conjunto finito, con $r \geq 3$. Un **mangual**³ de rango r con punta t y piernas $L_1 = \{t, x_1, y_1\}, L_2 = \{t, x_2, y_2\}, \dots, L_r = \{t, x_r, y_r\}$ es un matroide de rango r cuyo conjunto de circuitos consta de la unión de las siguientes colecciones:

M1) $C_1 = \{\{t, x_i, y_i\} : 1 \leq i \leq r\}$

M2) $C_2 = \{\{x_i, y_i, x_j, y_j\} : 1 \leq i < j \leq r\}$

M3) Un subconjunto C_3 (posiblemente vacío) de $\{\{z_1, z_2, \dots, z_r\} : z_i \in \{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq r\}$

M4) Una colección C_4 de todos los subconjuntos con $r + 1$ elementos de E que no contienen a ningún miembro de $C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

En la definición anterior, si C_3 es vacío, el mangual correspondiente se llama **mangual libre con punta** de rango r . En un mangual arbitrario M , cada circuito en C_3 es también un hiperplano. A las parejas de elementos $x_i, y_i \in E - t$ que están contenidos en una misma pierna se les llama **clones**.

³En el idioma inglés estos matroides se conocen como *spikes*. En general, la palabra *spike* denota objetos con pinchos; debido a que no hay una palabra estándar para la traducción al español de este término, he decidido usar la palabra mangual para denotar a estos matroides.

Si a un mangual con punta t se le borra dicha punta, se obtiene nuevamente un mangual, dicho mangual es llamado *mangual sin punta*.

También se puede construir a estos matroides a partir de sus hiperplanos.

Lema 114 Sea $E = \{t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r\}$ un conjunto finito, con $r \geq 3$. Un mangual de rango r con punta t y piernas $L_1 = \{t, x_1, y_1\}, L_2 = \{t, x_2, y_2\}, \dots, L_r = \{t, x_r, y_r\}$ es un matroide de rango r cuyo conjunto de hiperplanos consta de la unión de las siguientes colecciones:

- (i) Los miembros de C_3 mencionados en la Definición 113;
- (ii) Todos los conjuntos de la forma $E - \{x_i, y_i, x_j, y_j\}$ con $1 \leq j \leq r$; y
- (iii) Todos los subconjuntos con $(r - 1)$ elementos de $E - t$ que contienen a lo más un elemento de cada $\{x_i, y_i\}$ y que no están contenidos en ningún miembro de C_3 .

Parte II

El tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide

Los conjuntos de bases, cobases, circuitos, cocircuitos, hiperplanos y cohiperplanos de un matroide son tropeles relacionados entre sí, tal y como lo muestra el siguiente teorema que aparece en el Capítulo 2 del libro de Oxley [2011].

Teorema 115 *Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*, C, C^*, \mathcal{H}, \mathcal{H}^*$ son respectivamente los conjuntos de bases, cobases, circuitos, cocircuitos, hiperplanos y cohiperplanos de un matroide M sobre E , sea c el mapeo complementario de tropeles y b el mapeo bloqueador, entonces se tienen las siguientes relaciones:*

- i. $\mathcal{B} = c(\mathcal{B}^*)$ y $\mathcal{B}^* = c(\mathcal{B})$;
- ii. $c(\mathcal{H}) = C^*$ y $c(C) = \mathcal{H}^*$;
- iii. $C^* = b(\mathcal{B})$ y $C = b(\mathcal{B}^*)$.

Si observamos las relaciones *i-iii* podrá notarse que en ellas no aparece $b(\mathcal{H})$. Las preguntas ¿qué es $b(\mathcal{H})$? y ¿qué propiedades tiene? me fueron planteadas por el Dr. Gilberto Calvillo Vives durante uno de los cursos de maestría en la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Para saber si estas preguntas ya habían sido respondidas o no, busqué referencias en trabajos previos, los siguientes párrafos son una breve descripción de los trabajos que fueron localizados.

Primero, el concepto de tropel bloqueador fue utilizado con este nombre en el artículo de Edmonds y Fulkerson [1970]. En este artículo se prueba la existencia, la unicidad y la propiedad de involución del tropel bloqueador; también se muestra que para cualquier tropel \mathcal{R} sobre un conjunto E , existe un único tropel \mathcal{I} sobre E tal que para cualquier función f de E a los números reales, se tiene que ¹ $\min_{R \in \mathcal{R}} \max_{x \in R} f(x) = \max_{S \in \mathcal{I}} \min_{x \in S} f(x)$, y se muestra que en este caso \mathcal{I} es el tropel bloqueador de \mathcal{R} . En este artículo también se dan algunos ejemplos de tropeles y sus tropeles bloqueadores.

Posteriormente se descubrieron las relaciones entre los tropeles de circuitos y bases de matroides con respecto al concepto de tropel bloqueador. Nicoletti [1979] dio a conocer por primera vez que

¹Aquí los operadores mín y máx se refieren a los valores máximo y mínimo, respectivamente, de un conjunto de números reales.

podían obtenerse más tropes de matroides aplicando mapeos o asociando familias de subconjuntos a los tropes de matroides que se conocían.

Más tarde, en el artículo de Cordovil *et al.* [1991] usando los mapeos bloqueador y complementario se exploraron los tropes que son bases o circuitos de matroides, se definieron operaciones de borrado y contracción para tropes, y se encontraron algunas caracterizaciones por menores prohibidos para que un tropel sea el conjunto de circuitos o bases de un matroide.

Tomando en cuenta este contexto histórico y la bibliografía disponible, el Dr. Gilberto Calvillo Vives planteó que, aunque se ha estudiado mucho los temas referentes a bases, circuitos e hiperplanos, no se ha considerado el conjunto bloqueador de los hiperplanos de un matroide.

Después de realizar las primeras inspecciones noté que en general dicho conjunto no coincide con ninguno de los tropes anteriores (bases, circuitos, hiperplanos, etc) ni parece tener una interpretación sencilla usando la función rango o el operador clausura de un matroide.

Sin embargo, puesto que el mapeo bloqueador es involutivo (aplicarlo dos veces equivale a la operación identidad); el bloqueador de los hiperplanos define bien al conjunto de hiperplanos y por lo tanto define bien a un matroide. Entonces es plausible pensar que el conjunto bloqueador de los hiperplanos de un matroide tiene propiedades específicas que lo definen y por tanto sería posible determinar un conjunto de axiomas que un tropel debe cumplir para ser el conjunto bloqueador de los hiperplanos de un matroide.

El buscar propiedades del tropel bloqueador de los hiperplanos de matroides y lograr caracterizarlo (o por lo menos describirlo) para algunas familias de matroides es el objetivo principal de esta tesis.

Capítulo 3

Resultados estructurales

En este capítulo se estudian las propiedades de los miembros del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide. Primero obtendremos una desigualdad necesaria para que un conjunto sea un transversal *minimal* de los hiperplanos de un matroide. Posteriormente, en las secciones dos y tres de este capítulo, veremos que para estudiar el tropel bloqueador de los hiperplanos, es suficiente considerar solo a la clase de los matroides simples conexos, y que en esta clase, un transversal *minimal* de los hiperplanos de un matroide puede construirse de una manera particular utilizando dos cocircuitos. Las secciones 3.4 y 3.5 se ocupan de algunos mapeos de tropeles y la forma de utilizarlos para obtener caracterizaciones por menores prohibidos. En la última sección de este capítulo se muestra que el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide forma parte de la colección de tropeles que se obtienen al aplicar de manera alternada e iterada los mapeos complementario y bloqueador al tropel de bases de un matroide.

3.1. Rango dual de los bloqueadores de los hiperplanos de un matroide

El siguiente resultado puede establecerse como una consecuencia del Teorema 19 y del Corolario 20.

Corolario 116 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sean $(\mathcal{H}; E)$, $(\mathcal{C}^*; E)$, sus tropeles de hiperplanos y de cocircuitos, respectivamente. Sea $(\mathcal{D}^*; E)$ el tropel bloqueador de $(\mathcal{H}; E)$ y sea $(\Delta; E)$ el tropel com-

plementario de $(\mathcal{D}^*; E)$. Entonces, los miembros de $(C^*; E)$ son maximales con respecto a no contener como subconjuntos a ningún miembro de $(\mathcal{D}^*; E)$; análogamente, los miembros de $(\Delta; E)$ son maximales respecto a no contener como subconjuntos a ningún miembro de $(\mathcal{H}; E)$. Dualmente, los miembros de $(\mathcal{D}^*; E)$ son minimales respecto a no estar contenidos en ningún cocircuito y los miembros de $(\mathcal{H}; E)$ son minimales respecto a no estar contenidos en ningún miembro de $(\Delta; E)$.

Demostración: Se sigue de aplicar el Corolario 20 a los tropes $(\mathcal{H}; E)$ y $(\mathcal{D}^*; E)$. ■

El Corolario 116 permite establecer una caracterización del bloqueador de los hiperplanos de un matroide utilizando la función rango del matroide dual y el operador clausura del matroide dual. Como se verá en la demostración, la idea surgió al observar que los miembros del tropel complementario del tropel bloqueador de los hiperplanos no pueden tener rangos menores que el rango del matroide menos dos.

Teorema 117 ^{*} Sea $M = (E; \mathcal{I})$ un matroide y sea $b(\mathcal{H})$ el tropel bloqueador de los hiperplanos de M . Sea r^* la función rango del matroide dual de M , entonces $r^*(D) \geq |D| - 2$ para todo $D \in b(\mathcal{H})$.

Demostración: En la demostración de este teorema probaremos de hecho un resultado más específico, a saber: si C^* y $b(\mathcal{H})$ son el tropel de cocircuitos de M y el tropel bloqueador de los hiperplanos de M , respectivamente, entonces D es un miembro de $(b(\mathcal{H}); E)$ si y solo si D satisface alguna de las tres propiedades siguientes.

- (i) $r^*(D) = |D| - 2$ y $\forall x \in D, (D - x) \in C^*$.
- (ii) $r^*(D) = |D| - 1$ y $\exists! x \in D$, tal que $(D - x) \in C^*$ y $\forall y \in D, y \neq x, D - \{y\}$ está contenido propiamente en un miembro de C^* .
- (iii) $r^*(D) = |D|$, $\forall x \in D, \exists \hat{A} \supseteq D$ tal que $\hat{A} - x \in C^*$ y $\forall A'$ tal que $D \subseteq A'$ con $r^*(A') = |A'| - 1, \exists x \in D$ tal que $x \notin cl^*(A' - \{x\})$.

Sea $c \circ b(\mathcal{H})$ el tropel complementario de $b(\mathcal{H})$. Por el Corolario 116, los miembros de $c \circ b(\mathcal{H})$ son maximales respecto a no contener a ningún hiperplano, en particular, los miembros de $c \circ b(\mathcal{H})$ no son hiperplanos, de modo que no son cerrados o no tienen rango igual a $r(M) - 1$.

Nótese que si $A \in c \circ b(\mathcal{H})$, debe tenerse que $r(A) \geq r(M) - 2$ pues si $r(A) < r(M) - 2$, entonces, para todo $x \in E - A, r(A \cup \{x\}) < r(M) - 2 + 1 = r(M) - 1$; pero esto es imposible pues $A \cup \{x\}$ contiene

un hiperplano. Se sigue que A solo puede tener rango igual a $r(M)$, $r(M) - 1$ o $r(M) - 2$. Se tienen por tanto los siguientes tres casos:

- ① Si $r(A) = r(M) - 2$, entonces $\forall x \in E - A$, $A \cup \{x\}$ es un hiperplano.

En este caso, puesto que A es *maximal* respecto a no contener hiperplanos, se tiene que $\forall x \in E - A$, $A \cup \{x\}$ contiene un hiperplano, por lo que $r(A \cup \{x\}) \geq r(M) - 1$.

Por otro lado, como $r(A) = r(M) - 2$, se tiene que $r(A \cup \{x\}) \leq r(M) - 2 + 1 = r(M) - 1$.

De estas desigualdades se concluye que $r(A \cup \{x\}) = r(M) - 1$. Por lo tanto, $A \cup \{x\}$ es un hiperplano ya que es un conjunto de rango $r(M) - 1$ que contiene un hiperplano y los hiperplanos son conjuntos *maximales* de rango $r(M) - 1$.

- ② Si $r(A) = r(M) - 1$, entonces $\exists! x \in E - A$ tal que $A \cup \{x\}$ es un hiperplano, y $\forall y \in E - A$ tal que $y \neq x$, $A \cup \{y\}$ contiene propiamente un hiperplano.

En este caso A no es cerrado, pues de lo contrario A sería un hiperplano. Por lo cual $\exists x \in cl(A) - A$. Más aún, x debe ser único, pues si existiera otro elemento $y \neq x$ tal que $y \in cl(A) - A$, entonces $y \in cl(A) = cl(A \cup \{x\})$ y por tanto $A \cup \{x\}$ no sería cerrado (porque no contiene a y) y como $r(A \cup \{x\}) = r(M) - 1$, en particular, $A \cup \{x\}$ no puede contener un hiperplano.

Nótese que como $A \cup \{x\}$ tiene rango $r(M) - 1$, entonces $A \cup \{x\}$ tampoco puede contener propiamente a un hiperplano. Por lo tanto $\exists! x \in cl(A) - A$, es decir, $\exists! x \in E - A$ tal que $A \cup \{x\}$ es un hiperplano. Cualquier otro elemento $y \in E - A$, tal que $y \neq x$, no está en $cl(A)$, de modo que $A \cup \{y\}$ tiene rango $r(M)$ y contiene un hiperplano; observe que como el rango de los hiperplanos es $r(M) - 1$, dicho hiperplano está contenido propiamente en $A \cup \{y\}$.

- ③ $r(A) = r(M)$ y $\forall x \in E - A$, $\exists \hat{A} \subsetneq A$ tal que $\hat{A} \cup \{x\}$ es un hiperplano y $\forall A'' \subsetneq A$ con $r(A'') = r(M) - 1$, $\exists x \in cl(A'') - A$.

En este caso A es generador y no contiene a ningún hiperplano, en particular todos sus subconjuntos de rango $r(M) - 1$ no son cerrados.

Dado $x \in E - A$, $A \cup \{x\}$ debe contener un hiperplano H que contiene a x . Tomando $\hat{A} = H - x$, se tiene que $\hat{A} \subsetneq A$; la contención debe ser propia ya que \hat{A} tiene rango a lo más $r(M) - 1$ y claramente $\hat{A} \cup \{x\} = (H - x) \cup \{x\} = H$ es un hiperplano.

Ahora, si $A'' \subseteq A$ y $r(A'') = r(M) - 1$, entonces $cl(A'')$ es un hiperplano; como A no puede contener hiperplanos, se sigue que $\exists x \in E - A$ tal que $x \in cl(A'') - A$.

Sea \mathcal{H} el tropel de hiperplanos de M . Observe $D \in b(\mathcal{H})$ si y solo si $E - A \in c \circ b(\mathcal{H})$, y $H \in \mathcal{H}$ si y solo si $E - H \in C^*$; si utilizamos la igualdad $r^*(E - X) = r(X) - |E - X| + r(M)$, los casos ①, ② y ③ se pueden reescribir en términos de r^* , cl^* , \mathcal{D}^* y C^* obteniendo ①, ② y ③¹, respectivamente. Por lo tanto, $D \in b(\mathcal{H}) \Rightarrow D$ satisface ①, ② o ③.

Recíprocamente, si D cumple ① o ②, entonces $E - D = A$ cumple ① o ②, y claramente en ambos casos $E - D$ no contiene hiperplanos. Como para todo $x \in D$ se tiene que o bien $(E - D) \cup \{x\}$ es un hiperplano o bien $(E - D) \cup \{x\}$ contiene propiamente un hiperplano, resulta que $E - D$ es *maximal* respecto a la propiedad de no contener hiperplanos. Se sigue que $E - D \in c \circ b(\mathcal{H})$ y por tanto $D \in b(\mathcal{H})$.

Si D cumple ③, entonces $E - D = A$ satisface ③. El conjunto $E - D$ no es un hiperplano puesto que es un conjunto generador. Si $E - D$ contuviera un hiperplano H , se tendría que $H \subsetneq A$ y $r(H) = r(M) - 1$, pero entonces ② implica que $\exists x \in cl(H) - A = H - A = \emptyset$, lo cual es una contradicción; se concluye que $E - D$ no contiene hiperplanos. Ahora, si $x \in E - (E - D) = D$, existe $\tilde{A} \subsetneq E - D$ tal que $\tilde{A} \cup \{x\}$ es un hiperplano. Luego, $E - D$ también es *maximal* respecto a la propiedad de no contener hiperplanos, de modo que $E - D \in c \circ b(\mathcal{H})$ y por tanto $D \in b(\mathcal{H})$. ■

El resultado que acabamos de probar sugiere que el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide M tiene una relación directa con el matroide dual de M . Como se verá más adelante (en los duales de sistemas de Steiner, por ejemplo) en ocasiones el bloqueador de los hiperplanos de un matroide M es más fácil de calcular cuando el matroide dual M^* tiene una estructura combinatoria más rica.

¹El caso ③ requiere una consideración especial: si $x \in \hat{A} = E - \tilde{A}$ entonces $(\hat{A} - \{x\}, \tilde{A} = E - \hat{A}, \{x\})$ es una partición de E . Usando el Teorema 66, tenemos que $x \in cl(\hat{A}) \Leftrightarrow x \notin cl^*(\hat{A} - \{x\})$.

3.2. Reducción del problema a matroides simples conexos

3.2.1. Matroides no simples

En esta sección se da una manera para calcular el bloqueador de los hiperplanos de un matroide no simple usando su matroide simple asociado. Una consecuencia de este resultado es que el problema de calcular el bloqueador de los hiperplanos de un matroide se reduce a la clase de los matroides simples.

Lazos

Teorema 118 [★] Sea M un matroide. Sea $(\mathcal{H}; E)$ el tropel de los hiperplanos de M , y sea $(b(\mathcal{H}); E)$ el bloqueador de $(\mathcal{H}; E)$. Si e es un lazo de M , sea $\mathcal{H} \setminus e := \{H - e : H \in \mathcal{H}\}$ entonces $b((\mathcal{H} \setminus e, E - e))$ es el tropel $(b(\mathcal{H}) - \{e\}, E - e)$.

Demostración: Sea $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$. El tropel $(\mathcal{H} \setminus e, E - e)$ es el tropel $(\{H_1 - e, H_2 - e, \dots, H_m - e\}, E - e)$. El singulete $\{e\}$ es un elemento de $b(\mathcal{H})$ pero no es un transversal de $\mathcal{H} \setminus e$, así que $\{e\}$ no está en $b((\mathcal{H} \setminus e), E - e)$. Un conjunto D está en $b((\mathcal{H} \setminus e), E - e)$ si y solo si D interseca a todos los hiperplanos de M en un elemento distinto de e y es *minimal* con dicha propiedad. Es decir, $b((\mathcal{H} \setminus e; E - e)) = (b(\mathcal{H}) - \{e\}; E - e)$. ■

Corolario 119 [★] Si el tropel $(b(\mathcal{H}); E)$ es el bloqueador de los hiperplanos de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ cuyo tropel de hiperplanos es \mathcal{H} , y $\{e\}$ es un miembro de $b(\mathcal{H})$, entonces $(b(\mathcal{H}) - \{e\}; E - e)$ es el bloqueador de los hiperplanos del matroide $M \setminus e$ cuyo tropel de hiperplanos es $\mathcal{H} \setminus e := \{H - e : H \in \mathcal{H}\}$.

Como consecuencia de los dos resultados anteriores, a los tropeles $(\mathcal{D}^*; E) \neq (\{\emptyset\}; E)$ que son el bloqueador de los hiperplanos de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$, se les puede agregar un singulete con un elemento α nuevo y seguir teniendo un tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide $M' = (E \cup \alpha, \mathcal{I})$.

Elementos paralelos

Definición 120 Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ un sistema de distintos representantes de una colección $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ de conjuntos disjuntos (esto es, $s_i \in S_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$). Para un conjunto $A \subseteq S$, definimos **la expansión de A por \mathfrak{S}** como la colección

$$A \cdot \mathfrak{S} = \{A' : A' \subseteq (\bigcup_{i=1}^k S_i), |A' \cap S_i| = 1 \Leftrightarrow s_i \in A, |A' \cap S_i| = 0 \Leftrightarrow s_i \notin A\}.$$

Si $(\mathcal{K}; \bigcup_{i=1}^k S_i)$ es un tropel, definimos **la expansión de \mathcal{K} por \mathfrak{S}** como la colección

$$\mathcal{K} \cdot \mathfrak{S} = \bigcup \{A \cdot \mathfrak{S} : A \in \mathcal{K}\}.$$

Teorema 121 [★] Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide sin lazos, $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ donde cada E_i es una clase de elementos paralelos y sea $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ el conjunto de clases paralelas de M . Para cada clase paralela E_i distinguimos un único elemento $e_i \in E_i$ para construir $si(M)$ (es decir, $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ es el conjunto base de $si(M)$). Sea $(si(\mathcal{H}), \{e_1, e_2, \dots, e_k\})$ el tropel de hiperplanos de $si(M)$. Si A es un miembro de $b(si(\mathcal{H}); \{e_1, e_2, \dots, e_k\})$ entonces, los conjuntos de la colección $A \cdot \mathcal{E}$ son miembros de $(b(\mathcal{H}); E)$ y por lo tanto:

$$b(\mathcal{H}) = b(si(\mathcal{H})) \cdot \mathcal{E}$$

donde \cdot denota la expansión de $b(si(\mathcal{H}))$ por \mathcal{E} .

Demostración: Los elementos que están en una misma clase paralela están contenidos en un único átomo del retículo de cerrados de M , así que si un hiperplano H de M contiene a un elemento e_i , tal que $e_i \in E_i$, entonces H contiene a todos los elementos de la clase paralela E_i ; consecuentemente, H es un hiperplano de $si(M)$ si y solo si $H' = \bigcup \{E_i : e_i \in H\}$ es un hiperplano de M .

Si $D \in b(\mathcal{H})$, entonces D interseca a cada hiperplano de M en a lo más un solo miembro de cada E_i (de otro modo D no sería un conjunto transversal *minimal* del tropel de hiperplanos), si $A = \{e_i \in \{e_1, e_2, \dots, e_k\} : \exists d \in D \cap E_i\}$, entonces $A \in b(si(\mathcal{H}))$ y $D \in A \cdot \mathcal{E} \subseteq b(si(\mathcal{H})) \cdot \mathcal{E}$.

Ahora probaremos la contención en el otro sentido. Si A es un miembro de $b(si(\mathcal{H}); \{e_1, e_2, \dots, e_k\})$,

entonces A tiene a lo más un miembro de cada E_i . Si $e_i \in A$, el conjunto $A - e_i$ no interseca a todos los miembros de $si(\mathcal{H})$ puesto que A es un transversal *minimal* de los hiperplanos de $si(\mathcal{H})$.

Entonces, los miembros de $(A - e_i) \cdot \mathcal{E}$ no son transversales de los hiperplanos de M (porque no intersecan a los hiperplanos que contienen a E_i), pero si elegimos un elemento $e'_i \in E_i$, los miembros de $((A - e_i) \cup e'_i) \cdot \mathcal{E}$ intersecan a todos los hiperplanos de M y son *minimales*. Por lo tanto, los conjuntos en $A \cdot \mathcal{E}$ son miembros de $(b(\mathcal{H}); E)$.

Aplicando los mismos argumentos con los elementos restantes de $b(si(\mathcal{H}))$, concluimos que $b(\mathcal{H}) = b(si(\mathcal{H})) \cdot \mathcal{E}$. ■

3.2.2. Matroides no conexos

En esta sección se muestra cómo calcular el bloqueador de los hiperplanos de matroides que no son conexos usando los bloqueadores de los hiperplanos del matroide restringido a cada una de las componentes conexas.

Teorema 122 [★] *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide no conexo cuyas componentes conexas son T_1, \dots, T_k y sea \mathcal{H}_i el tropel de hiperplanos de $M|T_i$. Si para $1 \leq i \leq k$, $\mathcal{H}_i \neq \{\emptyset\}$, entonces el bloqueador de los hiperplanos de M es el tropel $b(\mathcal{H}) = \min_{\subseteq} \left\{ \{D \subseteq E(M|T_i) : D \text{ es bloqueador de los hiperplanos de } M|T_i\} \cup \{ \{a, b\} : a \in T_i, b \in T_j; \text{ con } i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j \} \right\}$.*

Demostración: Como $M = M|T_1 \oplus \dots \oplus M|T_k$ y tiene por hiperplanos a la colección $\mathcal{H} = \{H_i \cup (E - E(M|T_i)) : i \in \{1, \dots, k\}\}$.

Note que si D está contenido en una componente T_i y es un miembro del bloqueador de los hiperplanos de $M|T_i$ entonces D bloquea a todos los hiperplanos de M pues todos los hiperplanos de M contienen a $E(M|T_i)$ o son de la forma $H_i \cup (E - E(M|T_i))$ con H_i hiperplano de $M|T_i$; por el contrario, si $D \subseteq E(M|T_i)$ no interseca a un hiperplano H_i de $M|T_i$ entonces no interseca al hiperplano $H_i \cup (E - E(M|T_i))$ de M . Se sigue que los conjuntos contenidos en una misma componente T_i son bloqueadores de M si y solo si son bloqueadores de los hiperplanos de $M|T_i$.

Si se toma un elemento a en una componente T_i y un elemento b en una componente T_j , tal que $T_j \neq T_i$. Cualquier hiperplano contiene a $E(M|T_i)$ o a $E(M|T_j)$, por lo que $\{a, b\}$ es un transversal del tropel \mathcal{H} . ■

3.3. Otras propiedades del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide

Teorema 123 [★] Sea E un conjunto finito, $E' \subsetneq E$ y $M_{E'}$ el matroide cuyo tropel de hiperplanos es $\mathcal{H} = (\{E'\}; E)$, entonces:

- Ⓐ El tropel $(\{\{e\} : e \in E'\}; E)$ es el tropel bloqueador de los hiperplanos del matroide $M_{E'}$.
- Ⓑ Sea M un matroide sobre E y sea $(\mathcal{D}^*; E)$ el tropel bloqueador de los hiperplanos de M ; si $(\mathcal{D}^*; E)$ es distinto de $(\emptyset; E)$, $(\{\emptyset\}; E)$ y de los tropeles definidos en el inciso Ⓐ, entonces $(\mathcal{D}^*; E)$ es una cubierta del conjunto E .

Demostración: En el caso Ⓐ, el bloqueador de $(\{\{e\} : e \in E'\}; E)$ es $(\{E'\}; E)$, el cual cumple trivialmente los axiomas de hiperplanos por ser un tropel con un solo miembro. Observe que el bloqueador de $(\{\{e\} : e \in E\}; E)$ es $(\{E\}; E)$, el cual no puede ser un tropel de hiperplanos de un matroide ya que por definición los hiperplanos son subconjuntos propios del conjunto base.

Para el caso Ⓑ, suponga que $(\mathcal{D}^*; E)$ no es una cubierta de E . Sea $D \in \mathcal{D}^*$ tal que $|D| > 1$, sea $z \in E - D$ y sean $x, y \in D$, $x \neq y$. Sea $(\mathcal{H}; E)$ el tropel de hiperplanos de M . Como $b(b(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$, para llegar a una contradicción bastará probar que z está en un hiperplano H de M (si $z \in H$, debido a que H es un transversal *minimal* de los miembros de $b(\mathcal{H})$, $H - z$ no interseca a algún miembro de $b(\mathcal{H})$, esto es, z pertenece a un miembro de $b(\mathcal{H})$).

$(D - x)$ no interseca a algún hiperplano H_1 , y $(D - y)$ no interseca a algún hiperplano H_2 . Note que $H_1 \neq H_2$ pues de otro modo $x = y$.

Como $z \notin D$, se tienen dos casos posibles:

CASO 1: Si $z \in H_1 \cup H_2$, entonces z está en un hiperplano y no hay nada que demostrar.

CASO 2: Si $z \notin H_1 \cup H_2$, entonces, por los axiomas de hiperplanos, existe un hiperplano H_3 de M tal que $z \in H_3$. ■

El teorema anterior nos da un primer criterio para reconocer cuando un tropel $(\mathcal{D}^*; E)$ no puede ser el bloqueador de los hiperplanos de un matroide M sobre E .

Corolario 124 [★] *Sea E es un conjunto finito de cardinalidad n . Si $(\mathcal{D}^*; E)$ es un tropel distinto de $(\emptyset; E)$ y distinto de $(\{\emptyset\}; E)$, que no cubre E y no es ninguno de los tropeles del inciso (α) , entonces $(\mathcal{D}^*; E)$ no es un tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide.*

Los miembros del bloqueador de los hiperplanos de matroides simples conexos tienen cardinalidad al menos tres, ya que todo conjunto de cardinalidad dos está contenido tanto en un circuito como en un cocircuito. El siguiente lema muestra que cualquier miembro del bloqueador de los hiperplanos de un matroide M simple conexo puede verse de una manera particular usando una pareja de cocircuitos de M .

Lema 125 [★] *Sea \mathcal{D}^* el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ simple conexo. Sea $D \in \mathcal{D}^*$, entonces existen dos cocircuitos C_1, C_2 tales que $D \subseteq (C_1 \cap C_2) \cup \{x, y\}$, donde $x \in C_1 - C_2$, $y \in C_2 - C_1$, y además $D \cap (C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$.*

Demostración: Sea $D \in \mathcal{D}^*$, entonces, como $|D| \geq 3$, existen $x, y, z \in D$. Por el Corolario 116, el conjunto $D - x$ está contenido en un cocircuito C_1 , análogamente, $D - y$ está contenido en un cocircuito C_2 . Note que $C_1 \neq C_2$ ya que $x \in C_2 - C_1$ e $y \in C_1 - C_2$.

Finalmente, como M es conexo, cualesquiera dos elementos de E están contenidos en un cocircuito, de modo que D contiene algún otro elemento de E además de x e y , es decir, $D \cap (C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$. ■

A continuación hacemos un pequeño paréntesis para recordar que dado un tropel, los siguientes dos axiomas sirven para caracterizar a los tropeles que son hiperplanos de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$.

(H1) $E \notin \mathcal{H}$.

(H2) Si $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, si $x \notin H_1 \cup H_2$, entonces $\exists H_3 \in \mathcal{H}$, tal que $H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$.

Es fácil establecer que el axioma (H1) (llamado axioma de no trivialidad) se cumple si y solo si el bloqueador del tropel \mathcal{H} es distinto de $\{\{e\} : e \in E\}$ por lo que el axioma de no trivialidad que debe satisfacer el bloqueador de los hiperplanos \mathcal{H} de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ es:

(D1) $b(\mathcal{H}) \neq \{\{e\} : e \in E\}$.

El principal problema para lograr una axiomatización completa reside en el axioma (H2) (llamado axioma característico); aunque en el Teorema 123 mencionamos algunas implicaciones de que \mathcal{H} satisfaga (H2), no parece sencillo determinar completamente qué propiedades necesarias y suficientes posee el bloqueador de un tropel que satisfaga el axioma (H2).

3.4. Mapeos de relajación y tensado de hiperplanos, y su efecto en el tropel bloqueador

La siguiente proposición aparece en el libro de Oxley [2011].

Proposición 126 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sea $X \subseteq E$ un conjunto que es al mismo tiempo circuito e hiperplano. Sea \mathcal{B} el conjunto de bases de M . Sea $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{X\}$. Entonces \mathcal{B}' es el conjunto de bases de un matroide M' sobre $E(M)$.

El matroide M' de la Proposición 126 se dice que es una **relajación** de M . En particular, diremos que M' es el matroide obtenido al relajar el circuito-hiperplano X en el matroide M .

Definición 127 Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sea $(\mathcal{H}; E)$ su tropel de hiperplanos. Si H es un circuito-hiperplano de M , definimos el **mapeo de relajación de H** como el mapeo que envía al tropel $(\mathcal{H}; E)$ en el tropel $((\mathcal{H} - \{H\}) \cup \{H' : H' \subset H, |H'| = |H| - 1\}; E)$ (es decir, el mapeo que envía al tropel $(\mathcal{H}; E)$ en el tropel de hiperplanos del matroide que se obtiene al relajar el circuito-hiperplano H). Denotaremos a este mapeo por \clubsuit_H .

No es difícil ver que podemos definir una operación inversa a la relajación de un circuito-hiperplano simplemente deshaciendo dicha relajación para obtener nuevamente el matroide original.

Definición 128 Sea $M' = (E, \mathcal{I})$ un matroide de rango r y sea $X \subseteq E$ una base cuyos superconjuntos de cardinalidad $r + 1$ son todos circuitos y cuyos subconjuntos de cardinalidad $r - 1$ son todos hiperplanos. Sea \mathcal{B}' el conjunto de bases de M' . Sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}' - \{X\}$. Si \mathcal{B} es el conjunto de bases de un matroide M sobre $E(M)$, decimos que el matroide M es un **tensado** de M' . En particular, diremos que M es el matroide obtenido al tensar los hiperplanos que están contenidos en la base X de M' .

Definición 129 Sea $M^- = (E, \mathcal{I})$ un matroide y sea $(\mathcal{H}^-; E)$ su tropel de hiperplanos. Si los hiperplanos H_1, H_2, \dots, H_m pueden tensarse en un circuito-hiperplano H , definimos el **mapeo de tensado de H** como el mapeo que envía al tropel $(\mathcal{H}^-; E)$ en el tropel $(\mathcal{H}; E) := ((\mathcal{H}^- \cup \{H\}) - \{H_1, H_2, \dots, H_m\}; E)$. Denotaremos a este mapeo por \spadesuit^H .

Observe que si H , $(\mathcal{H}^-; E)$ y $(\mathcal{H}; E)$ son como en la Definición 129, entonces se tiene que: $\clubsuit_H \circ \spadesuit^H(\mathcal{H}^-; E) = (\mathcal{H}^-; E)$ y $\spadesuit^H \circ \clubsuit_H(\mathcal{H}; E) = (\mathcal{H}; E)$, es decir, la composición de ambos mapeos equivale a aplicar los respectivos mapeos identidad.

Lema 130 \star Si ocurren las condiciones de la Definición 128 y $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide de empedrado ralo o un mangual con punta t , entonces $\mathcal{B}(M) - \{X\}$ es el conjunto de bases de un matroide.

Demostración: Sea $(\mathcal{H}; E)$ el tropel de hiperplanos de M . Si M es un matroide de empedrado ralo, entonces $(\mathcal{H}; E)$ es una $(r - 1)$ -partición que contiene entre sus bloques a todos los subconjuntos de X de cardinalidad $r - 1$, al quitar estos hiperplanos y agregar X al tropel $(\mathcal{H}; E)$, claramente se sigue teniendo una $(r - 1)$ -partición; esta $(r - 1)$ -partición define a un matroide cuyo tropel de bases es $\mathcal{B}(M) - \{X\}$.

Si M es un mangual con punta t , observe que los hiperplanos contenidos en la base X tienen cardinalidad $(r - 1)$, de modo que por el Lema 114, se trata de subconjuntos de $E - t$ que contienen a lo más un elemento de cada pareja de clones y que no están contenidos en ningún circuito-hiperplano. Al quitar estos hiperplanos de $(\mathcal{H}; E)$ y reemplazarlos por X , tenemos un nuevo tropel que consta de:

- (i) Una colección $C_3 \cup \{X\}$, donde C_3 son todos los circuitos-hiperplanos de M ;
- (ii) todos los conjuntos que son complementos de exactamente dos parejas distintas de clones;
- (iii) todos los subconjuntos con $(r - 1)$ elementos de $E - t$ que contienen a lo más un elemento de cada pareja de clones y no están contenidos en ningún miembro de $C_3 \cup \{X\}$

Por el Lema 114 la colección que acabamos de listar será el conjunto de hiperplanos de un mangual si logramos demostrar que X contiene exactamente un elemento de cada pareja de clones.

Supongamos, buscando una contradicción que X no contiene exactamente un elemento de cada pareja de clones.

Puesto que X no contiene a t , ya que todos sus subconjuntos de cardinalidad $r - 1$ son subconjuntos de $E - t$, debe tenerse forzosamente que X contiene a una pareja de clones $\{x_i, y_i\}$ y, por lo tanto, existe un subconjunto H de cardinalidad $r - 1$ que contiene a $\{x_i, y_i\}$. Como H es cerrado en M , debe tenerse que H contiene a toda la pierna $\{t, x_i, y_i\}$; pero las piernas son conjuntos dependientes y esto contradice el hecho de que H estaba contenido en la base X de M . Por lo tanto X contiene exactamente un elemento de cada pareja de clones. Concluimos que la colección de conjuntos enumerada en (i), (ii) y (iii) es el conjunto de hiperplanos de un mangual. ■

Dado el tropel de hiperplanos de un matroide, las operaciones de relajación y tensado tienen efectos reconocibles en el tropel bloqueador de los hiperplanos, dichos efectos se indican en los siguientes dos resultados.

Teorema 131 [★] *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide de rango m sobre un conjunto E de cardinalidad n . Sean $\mathcal{H}_m = \{H_1, H_2, \dots, H_s\}$ sus hiperplanos de cardinalidad mayor o igual que m y $\mathcal{H}_{m-1} = \{\hat{H}_1, \hat{H}_2, \dots, \hat{H}_t\}$ sus hiperplanos de cardinalidad $m - 1$. Sea \mathcal{D}^* el tropel bloqueador de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_m \cup \mathcal{H}_{m-1}$. Supongamos que H_i es un circuito-hiperplano de M . Entonces, si relajamos el circuito-hiperplano $H_i \in \mathcal{H}_m$, el bloqueador de los hiperplanos del matroide M^- obtenido al relajar H_i está dado por:*

$$\mathcal{D}^{*-} = \min_{\subseteq} \{ \{D \in \mathcal{D}^* : |D \cap H_i| > 1\} \cup \{D \cup x : |D \cap H_i| = 1, x \in H_i - D, D \in \mathcal{D}^*\} \}$$

Demostración: Observe que los conjuntos de hiperplanos de M^- de cardinalidades mayor o igual que m y $m - 1$, son respectivamente $\mathcal{H}_m^- = \mathcal{H}_m - \{H_i\}$ y $\mathcal{H}_{m-1}^- = \mathcal{H}_{m-1} \cup \{H_i - x : x \in H_i\}$.

A continuación probaremos que los miembros de $\{D \in \mathcal{D}^* : |D \cap H_i| > 1\}$ son transversales de los hiperplanos de M^- . En efecto, si $D \in \mathcal{D}^*$ y $|D \cap H_i| > 1$, entonces $\forall x \in H_i, |D \cap (H_i - x)| > 0$, es decir, D interseca a los conjuntos de cardinalidad $m - 1$ que son hiperplanos del matroide M^- pero que no son hiperplanos de M . Además, por ser elementos de \mathcal{D}^* , estos conjuntos intersecan a todos los miembros de $(\mathcal{H}_m \cup \mathcal{H}_{m-1}) - \{H_i\}$ ya que dichos conjuntos son hiperplanos de M . Por lo tanto, hemos probado que los miembros de $\{D \in \mathcal{D}^* : |D \cap H_i| > 1\}$ son transversales de los hiperplanos de M^- .

Ahora, si $D \in \mathcal{D}^*$ y $|D \cap H_i| = 1$, entonces $\exists! e \in E$ tal que $D \cap H_i = \{e\}$, por lo que $D \cap (H_i - \{e\}) = \emptyset$; como el conjunto $H_i - \{e\}$ es un hiperplano de M^- , se sigue que D no es transversal de los hiperplanos del matroide M^- . Sin embargo, si elegimos $y \in H_i - \{e\}$, entonces $(D \cup \{y\}) \cap (H_i - \{e\}) = \{y\}$. Como D es transversal de los hiperplanos de M , el conjunto $D \cup \{y\}$ interseca a todos los miembros de $(\mathcal{H}_m \cup \mathcal{H}_{m-1}) - \{H_i\}$, más aún, $D \cup \{y\}$ interseca a todos los miembros de $\{H_i - \{x\} : x \in H_i - \{e\}\}$ ya que todos contienen a y , por lo tanto, $D \cup \{y\}$ es un transversal de los hiperplanos de M^- .

A continuación probaremos lo siguiente:

Todo transversal T de los hiperplanos del matroide M^- contiene un miembro de $\{D \in \mathcal{D}^ : |D \cap H_i| > 1\}$ o existen $D \in \{\hat{D} \in \mathcal{D}^* : |\hat{D} \cap H_i| = 1\}$ y $x \in H_i$ tales que $D \cup \{x\} \subseteq T$.*

Sea T un transversal de los hiperplanos de M^- . Entonces es claro que T es un bloqueador de los hiperplanos de M^- o contiene propiamente a un bloqueador de los hiperplanos de M^- .

CASO 1: Si T contiene a un miembro de $\{D \in \mathcal{D}^* : |D \cap H_i| > 1\}$ entonces no hay nada que demostrar.

CASO 2: Si T solo contiene miembros de \mathcal{D}^* tales que $|D \cap H_i| = 1$, sea D uno de tales miembros, esto es, $D \subseteq T$. Si $D \cap H_i = \{e\}$, entonces $e \in T \cap H_i$ y $H_i - e$ es un hiperplano de M^- . Pero entonces $D \cap (H_i - e) = \emptyset$, de modo que D es un subconjunto propio de T puesto que T sí es transversal de los hiperplanos de M^- , en particular $T \cap (H_i - e) \neq \emptyset$. Sea $x \in T \cap (H_i - e)$, claramente $x \notin D$ pues $D \cap (H_i - e) = \emptyset$, se sigue que $D \cup x \subseteq T$.

Ahora, hemos probado que los miembros de $\{D \cup x : |D \cap H_i| = 1, x \in H_i - D, D \in \mathcal{D}^*\}$ y $\{D \in \mathcal{D}^* : |D \cap H_i| > 1\}$ son transversales de los hiperplanos de M^- y que cualquier transversal de los hiperplanos de M^- contiene un miembro de estas colecciones, en particular, los bloqueadores de los hiperplanos de M^- contienen miembros de estas colecciones y, por la *minimalidad*, son miembros de estas colecciones.

\therefore El bloqueador de los hiperplanos de M^- es el enunciado en el teorema. ■

Definición 132 Al mapeo que envía al tropel \mathcal{D}^* en el tropel \mathcal{D}^{*-} en el Teorema 131, lo llamaremos el *mapeo de b-relajación de H_i* y lo denotaremos por $b_{\clubsuit H_i}$.

Corolario 133 ^{*} Sea $M^- = (E, \mathcal{I})$ un matroide de rango m sobre un conjunto E de cardinalidad n . Sean $\mathcal{H}_m^- = \{H_1, H_2, \dots, H_s\}$ sus hiperplanos de cardinalidad mayor o igual que m y $\mathcal{H}_{m-1}^- = \{\hat{H}_1, \hat{H}_2, \dots, \hat{H}_t\}$ sus hiperplanos de cardinalidad $m-1$. Sea \mathcal{D}^{*-} el tropel bloqueador de los hiperplanos de M^- . Supongamos que se pueden tensor los m hiperplanos $\hat{H}_{i1}, \hat{H}_{i2}, \dots, \hat{H}_{im} \in \mathcal{H}_{m-1}^-$ tales que $|\bigcup_{j=1}^m \hat{H}_{ij}| = m$ en un circuito-hiperplano $H = \bigcup_{j=1}^m \hat{H}_{ij}$. Sea $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{m-1}^- - \{\hat{H}_{i1}, \hat{H}_{i2}, \dots, \hat{H}_{im}\}$. Entonces, el bloqueador de los hiperplanos del matroide M obtenido al tensor $\hat{H}_{i1}, \hat{H}_{i2}, \dots, \hat{H}_{im}$ en H está dado por:

$$\mathcal{D}^* = \min_{\subseteq} \left\{ \mathcal{D}^{*-} \cup \{D : D \in b(\hat{\mathcal{H}}), |D \cap H| = 1\} \cup \{D \cup y : D \in b(\hat{\mathcal{H}}), |D \cap H| = 0, y \in H\} \right\}$$

Demostración: Los miembros de $\{D : D \in b(\hat{\mathcal{H}}), |D \cap H| = 1\} \cup \{D \cup y : D \in b(\hat{\mathcal{H}}), |D \cap H| = 0, y \in H\}$ son precisamente los transversales minimales de los hiperplanos de M que intersecan a H en exactamente un elemento; los transversales minimales restantes pertenecen a \mathcal{D}^{*-} . ■

Este último resultado es de particular importancia pues como veremos más adelante, nos permite calcular el bloqueador de los hiperplanos de rehiletos, matroides de empedrado ralo y manguales con punta t a partir de otros matroides cuyos bloqueadores de hiperplanos son más fáciles de calcular.

Definición 134 Siempre que se tengan las situaciones descritas en el Corolario 133, al mapeo que envía al tropel \mathcal{D}^{*-} en el tropel \mathcal{D}^* , lo llamaremos el *mapeo de b-tensado de H* y lo denotaremos por $b_{\spadesuit H}$.

Las relaciones entre los mapeos presentados en esta sección pueden visualizarse en la Figura 135.

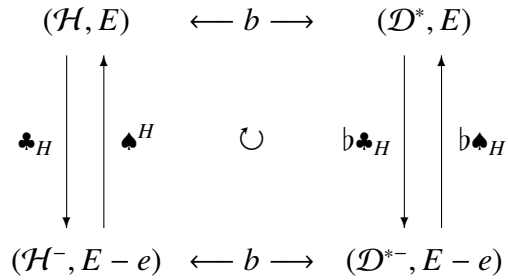


Figura 135 Relaciones entre los mapeos presentados en la Sección 3.4.

3.5. Menores prohibidos de tropes de matroides

En esta subsección, siguiendo las ideas de Cordovil *et al.* [1991] definimos dos operaciones sobre tropes y damos dos caracterizaciones para que un tropel sea el conjunto de hiperplanos de un matroide y una caracterización para que un tropel sea el conjunto bloqueador de los hiperplanos de un matroide.

3.5.1. Operaciones de hiperplano-borrado e hiperplano-contracción

Las dos siguientes definiciones aparecen en el artículo de Cordovil *et al.* [1991], les hemos dado los nombres de “circuito-borrado” y “circuito-contracción” para poder distinguirlas.

Definición 136 Sea C un tropel sobre un conjunto E y $e \in E$. El tropel obtenido por **circuito-borrado** de e , denotado por $C \setminus^c e$, es el tropel $\{C : e \notin C \in C\}$ sobre el conjunto $(E - e)$.

Definición 137 Sea C un tropel sobre un conjunto E y $e \in E$. El tropel obtenido por **circuito-contracción** de e denotado $C /^c e$, es el tropel $\min_{\subseteq} \{C - e : C \in C\}$ sobre el conjunto $(E - e)$.

Basándonos en lo que ocurre con los tropes de hiperplanos cuando se borra o contrae un elemento, proponemos las siguientes dos definiciones:

Definición 138 Sea $(\mathcal{H}; E)$ un tropel y e un elemento de E . El tropel obtenido por **hiperplano-borrado** de e , denotado por $\mathcal{H} \setminus^h e$ es el tropel:

$$\mathcal{H} \setminus^h e := (\max_{\subseteq} \{H - e \subseteq E - e : H \in \mathcal{H}\}, E - e).$$

Definición 139 Sea $(\mathcal{H}; E)$ un tropel y $e \in E$. El tropel obtenido por **hiperplano-contracción** de e , denotado por $\mathcal{H} /^h e$ es:

$$\mathcal{H} /^h e := (\{H - e \subseteq E - e : e \in H \in \mathcal{H}\}, E - e).$$

Teorema 140 [★] Si $(C; E)$ es un tropel y $(\mathcal{H}; E)$ es el tropel complementario de $(C; E)$. Sea $e \in E$ y sea c el mapeo complementario para tropeles. Si consideramos c y las operaciones de $/^c, \setminus^c, \setminus^h, /^h$ definidas previamente, entonces los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} (C, E) & \xleftarrow{c} & (\mathcal{H}, E) \\ \downarrow /^c & \circlearrowleft & \downarrow \setminus^h \\ (C /^c e, E - e) & \xleftarrow{c} & (\mathcal{H} \setminus^h e, E - e) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (C, E) & \xleftarrow{c} & (\mathcal{H}, E) \\ \downarrow \setminus^c & \circlearrowleft & \downarrow /^h \\ (C \setminus^c e, E - e) & \xleftarrow{c} & (\mathcal{H} /^h e, E - e) \end{array}$$

Demostración: Para el primer diagrama es suficiente probar que $c(C /^c e, E - e) = (\mathcal{H} \setminus^h e, E - e)$.

Primero mostraremos que $c(C /^c e, E - e) \subseteq (\mathcal{H} \setminus^h e, E - e)$.

Sea $\hat{C} \in (C /^c e, E - e) = (\min_{\subseteq} \{C - e : C \in C, C - e \neq \emptyset\}, E - e)$. Tenemos que probar que $(E - e) - \hat{C} \in (\mathcal{H} \setminus^h e, E - e)$.

Por definición, $\hat{C} = C_1 - e$ para algún $C_1 \in C$, así que podemos tomar $E - C_1 = H_1 \in (\mathcal{H}; E)$ y entonces tenemos que $(E - e) - \hat{C} = (E - e) - (C_1 - e) = (E - C_1) - e = H_1 - e$. Observamos que $H_1 - e \neq E - e$ porque $\hat{C} \neq \emptyset$.

Ahora, tenemos que probar que $H_1 - e$ es *maximal* en $\{H - e \subsetneq E - e : H \in \mathcal{H}\}$.

Supongamos que $H_1 - e$ no es *maximal*, entonces $\exists H_2 \in \mathcal{H}$ tal que $H_1 - e \subsetneq H_2 - e$. Tenemos los siguientes cuatro casos:

1. Si $e \notin H_1$ y $e \notin H_2$, entonces $H_1 \subsetneq H_2$.
2. Si $e \notin H_1$ y $e \in H_2$, entonces $H_1 \subset H_2 - e \subsetneq H_2$.
3. Si $e \in H_1$ y $e \in H_2$, entonces $H_1 - e \subsetneq H_2 - e$, pero esto implica $H_2 \subsetneq H_1$.
4. $e \in H_1$ y $e \notin H_2$.

Los primeros tres casos no son posibles, porque C es un tropel. Así que debemos tener $e \in H_1 - H_2$.

Sea $C_2 = E - H_2 \in C$, entonces $e \in C_2 - C_1$ y $H_1 - e \subsetneq H_2 - e = H_2$, entonces tomando complementos en E se tiene que $C_2 \subsetneq C_1 \cup e$. Pero $e \in C_2 - C_1$, así que $C_2 - e \subsetneq C_1 = C_1 - e = \hat{C}$, esto es imposible pues contradice la *minimalidad* de \hat{C} .

Por lo tanto $H_1 - e$ es *maximal* en $\{H - e \subsetneq E - e : H \in \mathcal{H}\}$ y hemos probado la primera contención.

Ahora probaremos la contención inversa, es decir, probaremos que $\mathcal{H} \setminus^h e \subseteq c(C/e)$.

Sea $\hat{H} \in \mathcal{H} \setminus^h e = (\max_{\subsetneq} \{H - e \subsetneq E - e : H \in \mathcal{H}\}, E - e)$. Tenemos que probar que $\hat{H} = (E - e) - \hat{C} \in C$ para algún $\hat{C} \in C/e$.

Usando la definición, $\hat{H} = H_1 - e$ para algún $H_1 \in \mathcal{H}$ y entonces $E - H_1 = C_1 \in C$. Así que tenemos

$$\hat{H} = H_1 - e = (E - C_1) - e = (E - e) - (C_1 - e).$$

Notamos que $C_1 - e \neq \emptyset$ porque \hat{H} no puede ser $(E - e)$. Así que solo nos resta probar que $C_1 - e$ es *minimal* en $\{C - e : C \in C, C - e \neq \emptyset\}$.

Supongamos que $C_1 - e$ no es *minimal* en $\{C - e : C \in C, C - e \neq \emptyset\}$, entonces $\exists C_2 \in C$ tal que $C_2 - e \subsetneq C_1 - e$. Tenemos los siguientes cuatro casos:

1. Si $e \notin C_1$ y $e \notin C_2$, entonces $C_2 \subseteq C_1$.
2. Si $e \in C_1$ y $e \notin C_2$, entonces $C_2 = C_2 - e \subseteq C_1 - e \subseteq C_1$.
3. Si $e \in C_1$ y $e \in C_2$, entonces $C_2 - e \subseteq C_1 - e$ implica que $C_2 \subseteq C_1$.
4. $e \notin C_1$ y $e \in C_2$.

Los primeros tres casos no son posibles porque C_1, C_2 son miembros del tropel C . Por lo tanto debe tenerse que $e \in C_2 \setminus C_1$. Sea $H_2 = E - C_2 \in \mathcal{H}$ entonces $e \in H_1 - H_2$. Como $e \notin C_1$ tenemos que

$$C_2 - e \subseteq C_1 - e = C_1,$$

y tomando complementos en E , tenemos que $H_2 \cup \{e\} \supseteq H_1$ y entonces, como $e \notin H_2$:

$$\hat{H} = H_1 - e \subseteq H_2 = H_2 - e.$$

Pero esto contradice la *maximalidad* de $\hat{H} = H_1 - e$. Por lo tanto $C_1 - e$ es *minimal* en $\{C - e : C \in \mathcal{C}, C - e \neq \emptyset\}$ y hemos probado que el primer diagrama es conmutativo.

Para la segunda parte, tenemos que probar que $\mathcal{H}/e = c(C \setminus e)$. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \hat{H} \in \mathcal{H}/e &= (\{H - e \subseteq E - e : e \in H \in \mathcal{H}\}, E - e) \Leftrightarrow \hat{H} = H - e \text{ y } e \in H \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \hat{H} = (E - C) - e \text{ y } e \notin C \in \mathcal{C} \quad (\text{tomando } H = E - C) \\ &\Leftrightarrow \hat{H} = (E - e) - C \text{ y } e \notin C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \hat{H} = (E - e) - C \text{ y } C \in \mathcal{C} \setminus e \\ &\Leftrightarrow c(\{C : e \notin C \in \mathcal{C}\}, E - e) = c(C \setminus e) \ni H \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{H}/e = c(C \setminus e)$ y entonces el segundo diagrama es conmutativo. Esto termina la prueba del teorema. ■

3.5.2. Una caracterización por menores del tropel de hiperplanos de un matroide

El Teorema 141 aparece en la Sección 5 de Cordovil *et al.* [1991]. Aquí, vamos a usarlo para probar el Teorema 142.

Teorema 141 Sea $(C; E)$ un tropel. Entonces $(C; E)$ no es el conjunto de circuitos de un matroide si y solo si se satisface una de las siguientes condiciones:

- i) $(C; E)$ es el tropel $(\{\emptyset\}; E)$;
- ii) Usando las operaciones $\setminus^c, /^c$; $(C; E)$ tiene un menor isomorfo a $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}; \{1, 2, 3\})$.

Teorema 142 [★] Sea $(\mathcal{H}; E)$ un tropel. Entonces $(\mathcal{H}; E)$ es el conjunto de hiperplanos de un matroide si y solo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- Ⓘ $(\mathcal{H}; E)$ no es el tropel $(\{E\}; E)$;
- Ⓢ usando las operaciones $\setminus^h, /^h$; $(\mathcal{H}; E)$ no tiene un menor isomorfo a $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$.

Demostración: El tropel $(\{E\}; E)$ no puede ser el conjunto de hiperplanos de un matroide porque los hiperplanos de un matroide son subconjuntos propios del conjunto sobre el cual está definido el matroide.

También el tropel $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$ no puede ser un menor de $(\mathcal{H}; E)$, porque si aplicamos las operaciones $\setminus^h, /^h$ a un tropel que es el conjunto de hiperplanos de un matroide, los menores son los conjuntos de hiperplanos de los menores del matroide; pero $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$ no es un conjunto de hiperplanos porque $1 \in \{1, 2, 3\} - \{\{2\} \cup \{3\}\}$ pero no hay un conjunto $H_3 \in \{\{2\}, \{3\}\}$ tal que $H_3 \supset (\{\{2\} \cap \{3\}\}) \cup \{1\} = \{1\}$.

Para probar que, si Ⓘ y Ⓢ no se satisfacen entonces \mathcal{H} es el conjunto de hiperplanos de un matroide, probaremos la proposición contrapositiva, es decir, probaremos que si \mathcal{H} no es el conjunto de hiperplanos de un matroide, entonces $(\mathcal{H}; E) = (\{E\}; E)$ o $(\mathcal{H}; E)$ tiene un menor isomorfo al tropel $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$.

Si $\mathcal{H} = (\{E\}; E)$ no hay nada que probar.

Sea $(\mathcal{H}; E)$ un tropel que no es el conjunto de hiperplanos de un matroide y tal que $(\mathcal{H}; E) \neq (\{E\}; E)$. Debemos probar que $(\mathcal{H}; E)$ no tiene un menor isomorfo a $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$. Supongamos por el contrario que $(\mathcal{H}; E)$ no tiene un menor isomorfo a $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$. Entonces $c(\mathcal{H}; E) = (C; E)$ (el tropel complementario de $(\mathcal{H}; E)$) no tiene un menor isomorfo a $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}; \{1, 2, 3\})$ por que

si suponemos que $(C; E)$ tiene un menor isomorfo a $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}; \{1, 2, 3\})$ entonces la sucesión de operaciones $\setminus^c, /^c$ hechas al tropel $(C; E)$ para obtener $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}; \{1, 2, 3\})$ puede ser aplicada al tropel $(\mathcal{H}; E)$ reemplazando \setminus^c con $/^h$, y $/^c$ con \setminus^h y entonces por los diagramas conmutativos $(\mathcal{H}; E)$ debe tener un menor isomorfo a $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$ lo cual contradice nuestra suposición.

Ahora, por el Teorema 141, tenemos que $(C; E)$ es el conjunto de circuitos de un matroide y entonces $c((C; E))$ es el conjunto de hiperplanos de un matroide, lo cual contradice nuestra hipótesis. Entonces, si $(\mathcal{H}; E)$ no es el conjunto de hiperplanos de un matroide sobre un conjunto E y no es $(\{E\}; E)$, $(\mathcal{H}; E)$ debe tener un menor isomorfo a $(\{\{2\}, \{3\}\}; \{1, 2, 3\})$.

Por las dos implicaciones, el teorema queda demostrado. ■

Definición 143 *El mapeo ortogonal es el mapeo \perp de tropeles que envía a un tropel $(C; E)$ en el tropel $\perp((C; E)) = (\min_{\subseteq} \{X : X \subseteq E, X \neq \emptyset \text{ y } |X \cap C| \neq 1, \forall C \in \mathcal{C}\}; E)$. Dualmente, definimos el mapeo **complemento ortogonal** como el mapeo \top de tropeles que envía a un tropel $(\mathcal{H}; E)$ en el tropel $\top((\mathcal{H}; E)) = \max_{\subseteq} \{X : X \subseteq E, X \neq E \text{ y } |E - (X \cup \hat{H})| \neq 1, \forall \hat{H} \in \mathcal{H}\}$.*

El Teorema 144 también aparece demostrado en la Sección 5 de Cordovil *et al.* [1991]. Lo usaremos en la demostración del Teorema 146.

Teorema 144 *Un tropel $(C; E)$ es el conjunto de circuitos de un matroide si y solo si C es un punto fijo del mapeo $b \circ c \circ b \circ \perp$ donde b es el mapeo bloqueador, c es el mapeo complementario y \perp es el mapeo ortogonal.*

Teorema 145 [★] *Sea $(\mathcal{H}; E)$ un tropel, c el mapeo complementario, \perp el mapeo ortogonal y \top el mapeo complemento ortogonal. Entonces $\top((\mathcal{H}; E)) = c \circ \perp \circ c((\mathcal{H}; E))$*

Demostración: Sea \mathcal{H} un tropel sobre un conjunto E . Claramente se tiene que $H \in c \circ \perp \circ c(\mathcal{H})$ si y solo si $E - H \in \perp(c(\mathcal{H}))$ y esto de acuerdo con la definición del operador \perp , ocurre si y solo si $E - H \in \min_{\subseteq} \{X : X \subseteq E, X \neq \emptyset \text{ y } |X \cap C| \neq 1, \forall C \in c(\mathcal{H})\}$, a su vez, (de acuerdo con la definición

del operador \min_{\subseteq}) esto último es equivalente a que $(\emptyset \neq E - H \subseteq E)$, $(|(E - H) \cap C| \neq 1, \forall C \in c(\mathcal{H}))$ y $\forall H' \subseteq E$ tal que $(\emptyset \neq E - H' \subseteq E)$, $(|(E - H') \cap C| \neq 1, \forall C \in c(\mathcal{H}))$ con $E - H' \subseteq E - H$, se tiene necesariamente que $E - H' = E - H$.

Usando complementos podemos reescribir estas últimas expresiones como $(E \neq H \supseteq \emptyset)$, $(|(E - H) \cap (E - \hat{H})| \neq 1, \forall E - \hat{H} \in c(\mathcal{H}))$ y si $(E \neq H' \supseteq \emptyset)$, $(|(E - H') \cap (E - \hat{H})| \neq 1, \forall \hat{H} \in \mathcal{H})$ y $H' \supseteq H$ entonces $H' = H$, que es equivalente a que $H \in \max_{\subseteq}\{X : X \subseteq E, X \neq E \text{ y } |E - (X \cup \hat{H})| \neq 1, \forall \hat{H} \in \mathcal{H}\}$ lo cual ocurre si y solo si $H \in \top(\mathcal{H})$. ■

Teorema 146 [★] *Un tropel \mathcal{H} sobre un conjunto E es el conjunto de hiperplanos de un matroide si y solo si \mathcal{H} es un punto fijo del mapeo $c \circ b \circ c \circ b \circ c \circ \top$.*

Demostración: \mathcal{H} es el conjunto de hiperplanos de un matroide $\Leftrightarrow c(\mathcal{H})$ es el conjunto de circuitos de un matroide $\Leftrightarrow b \circ c \circ b \circ \perp(c(\mathcal{H})) = c(\mathcal{H})$ (por el Teorema 144) $\Leftrightarrow \perp(c(\mathcal{H})) = b \circ c \circ b(c(\mathcal{H}))$

$$\Leftrightarrow c \circ \perp \circ c(\mathcal{H}) = \top(\mathcal{H}) = c \circ b \circ c \circ b \circ c(\mathcal{H}) \text{ (por el Teorema 145)}$$

$$\Leftrightarrow c \circ b \circ c \circ b \circ c \circ \top(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}). \quad \blacksquare$$

3.5.3. Una caracterización por menores del tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide y de su tropel complementario

Ocupando exactamente las mismas ideas podemos extender estos resultados al tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide e incluso al tropel complementario del bloqueador de los hiperplanos de un matroide.

Corolario 147 [★] *Sea b el mapeo bloqueador, \setminus^h la operación de hiperplano-borrado, $/^h$ la operación de hiperplano-contracción. Definimos $\setminus^d := b \circ \setminus^h \circ b$, y $/^d := b \circ /^h \circ b$. Un tropel $(\mathcal{D}^*; E)$ es el conjunto bloqueador de hiperplanos de un matroide si y solo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

i) $(\mathcal{D}^*; E)$ no es el tropel $(\{\{e\} : e \in E\}; E)$;

ii) usando las operaciones $\setminus^d, /^d$; $(\mathcal{D}^*; E)$ no tiene un menor isomorfo a $(\{\{2, 3\}\}; \{1, 2, 3\})$.

Corolario 148 ^{*} Sea c el mapeo complementario, b el mapeo bloqueador, \setminus^h la operación de hiperplano-borrado, $/^h$ la operación de hiperplano-contracción. Definimos $\setminus^\delta := c \circ b \circ \setminus^h \circ b \circ c$, y $/^\delta := c \circ b \circ /^h \circ b \circ c$. Un tropel $(\Delta; E)$ es el conjunto complementario de un tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide si y solo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- i) $(\Delta; E)$ no es el tropel $(\{\{A\} : A \subseteq E, |A| = n - 1\}; E)$;
- ii) usando las operaciones $\setminus^\delta, /^\delta$; $(\Delta; E)$ no tiene un menor isomorfo a $(\{\{1\}\}; \{1, 2, 3\})$.

En este último punto nos gustaría señalar que sería interesante encontrar formas de definir las operaciones $\setminus^d, /^d$ prescindiendo del uso explícito del mapeo bloqueador, sin embargo, por el momento no hemos podido hacer esto.

3.6. Cadena complemento-bloqueador de un tropel

En esta subsección proponemos la definición de cadena complemento-bloqueador de un tropel, y establecemos algunas de sus propiedades.

Observación 149 Si E es un conjunto de cardinalidad n par, entonces el tropel uniforme $\mathcal{A} = \binom{E}{\frac{n}{2}}$ es autocomplementario, es decir, $c(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Observación 150 Si E es un conjunto de cardinalidad n impar, entonces el tropel uniforme $\mathfrak{A} = \binom{E}{\frac{n+1}{2}}$ sobre E es autobloqueable, es decir, $b(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. (Esto es un caso particular para $m = n - m + 1$ del Ejemplo 18).

Definición 151 Sea E un conjunto de cardinalidad n par. Para $m \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, definimos la **cadena complemento-bloqueador de** $\binom{E}{m}$ como la sucesión finita de tropeles: $\Sigma = \emptyset, \{\emptyset\}, \{E\}, \binom{E}{1}, \binom{E}{n-1}, \binom{E}{2}, \binom{E}{n-2}, \dots, \binom{E}{(n/2)+1}, \binom{E}{n/2}, \binom{E}{n/2}, \binom{E}{(n/2)+1}, \dots, \binom{E}{n-2}, \binom{E}{2}, \binom{E}{n-1}, \binom{E}{1}, \{E\}, \{\emptyset\}, \emptyset$.

Definición 152 Sea E un conjunto de cardinalidad n impar. Para $m \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, definimos la **cadena complemento-bloqueador de** $\binom{E}{m}$ como la sucesión finita de tropeles: $\Sigma = \emptyset, \{\emptyset\}, \{E\}, \binom{E}{1}, \binom{E}{n-1}, \binom{E}{2}, \binom{E}{n-2}, \dots, \binom{E}{(n-1)/2}, \binom{E}{(n+1)/2}, \binom{E}{(n+1)/2}, \binom{E}{(n-1)/2}, \dots, \binom{E}{n-2}, \binom{E}{2}, \binom{E}{n-1}, \binom{E}{1}, \{E\}, \{\emptyset\}, \emptyset$.

Proposición 153 ^{*} Sea E un conjunto de cardinalidad n , dado $\binom{E}{m}$ el tropel uniforme de tamaño m , existe $m_1 \in \{0, 1, \dots, n, n + 1\}$ tal que $c(C) = \binom{E}{m_1}$. Más aún, si $0 \leq m \leq n + 1$ entonces existe $m_2 \in \{0, 1, \dots, n, n + 1\}$ tal que $b(C) = \binom{E}{m_2}$.

Demostración: Como $C \neq \emptyset$ podemos aplicar a C el mapeo complementario, de modo que existe $c(C)$. Entonces, por definición $c(C) = \binom{E}{n-m}$. De manera similar, usando el Ejemplo 18, se tiene que $b(C) = \binom{E}{n-m+1}$. ■

Sea C un tropel no uniforme sobre un conjunto E de cardinalidad n ; sean b el mapeo bloqueador y c el mapeo complementario. Consideremos la sucesión $S_n(C) := C, c(C), b \circ c(C), c \circ b \circ c(C), b \circ c \circ b \circ c(C), \dots$; esta sucesión se construye aplicando a C los mapeos complementario y bloqueador de manera alternada e iterada, comenzando con el mapeo complementario. Nótese que la sucesión es infinita (si la sucesión fuese finita, entonces la sucesión tiene que terminar en \emptyset ya que es el único tropel para el cual el mapeo complementario no está definido, pero entonces, $b(\emptyset) = \{\emptyset\}, c \circ b(\emptyset) = \{E\}, \dots$ están en la sucesión, aplicando inductivamente la Proposición 153, se sigue que todos los miembros de la sucesión son tropeles uniformes lo cual es imposible pues C no es de dicha forma por nuestra hipótesis).

Proposición 154 ^{*} Si C es un tropel no uniforme sobre un conjunto E , entonces en la sucesión $\{C, c(C), b \circ c(C), c \circ b \circ c(C), b \circ c \circ b \circ c(C), \dots\}$ existe $n > 1$ impar tal que el término n -ésimo de la sucesión es C .

Demostración: Como ningún miembro de la sucesión es \emptyset siempre puede aplicarse el mapeo complementario y como la cantidad de tropeles sobre un conjunto finito E es finita, debe haber un momento en el que se repite algún miembro de la sucesión.

Primero probaremos que C vuelve a aparecer en la sucesión; sea \hat{C} el primer miembro que se repite en la sucesión, si $\hat{C} = C$ entonces no hay nada que demostrar; si $\hat{C} \neq C$, sea m el número de término que ocupa \hat{C} al aparecer por primera vez en la sucesión, y sea \mathcal{D} el último miembro distinto de \hat{C} que apareció antes de que \hat{C} apareciera por segunda vez.

Por construcción, debe tenerse que $\hat{C} = b(\mathcal{D})$ o que $\hat{C} = c(\mathcal{D})$. Sin embargo, como \hat{C} ya apareció antes en la sucesión, debe tenerse que $b(\hat{C})$ o $c(\hat{C})$ ya aparecieron en la sucesión, y por lo tanto \mathcal{D} ya debió haber aparecido en la sucesión, lo cual sería una contradicción; la única posibilidad es que tal

\mathcal{D} no exista y esto solo ocurre si los términos m y $m + 1$ de la sucesión son ambos iguales a \hat{C} , esto es, $b(\hat{C}) = \hat{C}$ o $c(\hat{C}) = \hat{C}$. Entonces los primeros m términos de la sucesión son: $C, c(C), b \circ c(C), \dots, \hat{C}$. Y del término $m + 1$ al término $2m$ la sucesión continúa como $\hat{C}, \dots, c(C), C$ (nótese que son los mismos primeros m términos pero ahora tomados en orden inverso).

En cualquier caso hemos probado que C vuelve a aparecer en la sucesión.

Si C aparece por segunda vez en un término impar, entonces ya no hay nada que demostrar. Si C aparece por segunda vez en un término par y $b(C) = C$, entonces C aparece en un término impar.

Supongamos entonces que la segunda vez que aparece C en la sucesión es en un término par y que $b(C) \neq C$, sea $2m$ el número de dicho término.

Entonces el término $2m + 1$ es $b(C)$ y es la primera vez que aparece en la sucesión porque si $b(C)$ apareció entre entre los primeros $2m$ términos en una posición impar, entonces C es su antecesor y aparece en una posición par, lo cual es imposible pues C solo ha aparecido antes como primer término de la sucesión. Algo similar ocurre si $b(C)$ apareció entre entre los primeros $2m$ términos de la sucesión en una posición par anterior a $2m$, de modo que la única opción es que $b(C)$ aparezca en la posición $2m$, pero como la posición $2m + 1$ también es $b(C)$, se tendría que $b(C) = C$ contradiciendo nuestra suposición.

Como $b(C)$ aparece por primera vez, consideremos los términos de la sucesión desde el $2m + 1$ hasta que el $2m + m'$ en que aparezca el último término nuevo, esto es, los términos de $\{b(C), \dots, \tilde{C}\}$ aparecen todos por primera vez. Sea \mathcal{D} el sucesor de \tilde{C} . Por construcción, \mathcal{D} ya debió haber aparecido antes. Si \mathcal{D} está entre los primeros $2m$ términos de la sucesión, entonces \tilde{C} también está entre los primeros $2m$ términos, lo cual contradice la elección de \tilde{C} . Si \mathcal{D} es distinto de los primeros $2m$ términos y aparece en una posición μ tal que $\mu \in \{2m + 1, \dots, 2m + m' - 2\}$, entonces se tiene que \tilde{C} ya apareció antes de la posición $2m + m' - 1$ contradiciendo la elección de \tilde{C} . El tropel \mathcal{D} no puede aparecer en la posición $2m + m' - 1$ pues se tendría $c(\tilde{C}) = \mathcal{D} = b(\tilde{C})$ lo cual es imposible. La única opción es que \mathcal{D} aparezca en la posición $2m + m'$, esto es, $\mathcal{D} = \tilde{C}$. Pero entonces, en la sucesión, los términos del $2m + 1$ al $2m + 2m'$ son: $\{b(C), \dots, \tilde{C}, \tilde{C}, \dots, b(C)\}$, observe que el siguiente término es C ocupando la posición $2m + 2m' + 1$ que claramente es impar. ■

Definición 155 Sea C un tropel no uniforme sobre un conjunto E . Llamamos **cadena complemento-bloqueador del tropel C** a los primeros n términos de la sucesión $\{C, c(C), b \circ c(C), c \circ b \circ c(C), b \circ c \circ b \circ c(C), \dots\}$, donde n es el número par más pequeño tal que el término n -ésimo de la sucesión es $b(C)$.

Observación 156 Si C es un tropel no uniforme sobre un conjunto E y la cadena complemento-bloqueador de C consta de n términos, se sigue que en la sucesión $\{C, c(C), b \circ c(C), c \circ b \circ c(C), b \circ c \circ b \circ c(C), \dots\}$ los términos desde $kn + 1$ hasta $(k + 1)n$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ forman una cadena complemento-bloqueador de C . Es decir, la sucesión $\{C, c(C), b \circ c(C), c \circ b \circ c(C), b \circ c \circ b \circ c(C), \dots\}$ es periódica y cada periodo es una cadena complemento-bloqueador.

Ejemplo 157 Consideremos la gráfica representada en la Figura 158.

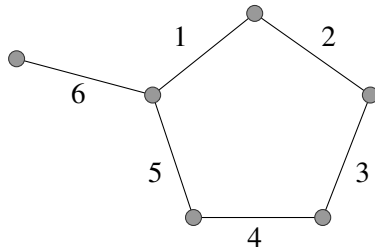


Figura 158 Gráfica del Ejemplo 157

El tropel de bases del matroide de ciclos de esta gráfica es:

$$\mathfrak{B} = \{\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$$

A continuación listamos los miembros de la cadena complemento-bloqueador de \mathfrak{B} . Hemos optado por usar la notación $(a_1 a_2 \dots a_n)$ para representar a un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con el motivo de evitar el uso excesivo de comas y llaves.

$$\Delta = \{(2345), (1345), (1245), (1235), (1234), (456), (356), (346), (256), (246), (236), (156), (146), (136), (126)\}$$

$$\mathcal{D}^* = \{(16), (26), (36), (46), (56), (123), (124), (125), (134), (135), (145), (234), (235), (245), (345)\}$$

$$\mathcal{H} = \{(12345), (3456), (2456), (2356), (2346), (1456), (1356), (1346), (1256), (1246), (1236)\}$$

$$C^* = \{(6), (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45)\}$$

$$\mathfrak{B} = \{(23456), (13456), (12456), (12356), (12346)\}$$

$$\mathfrak{B}^* = \{(1), (2), (3), (4), (5)\}$$

$$C = \{(12345)\}$$

$$\mathcal{H}^* = \{(6)\}$$

Podemos representar la cadena complemento-bloqueador de \mathfrak{B} como en el diagrama de la Figura 159 en el que b y c indican los mapeos bloqueador y complementario respectivamente:

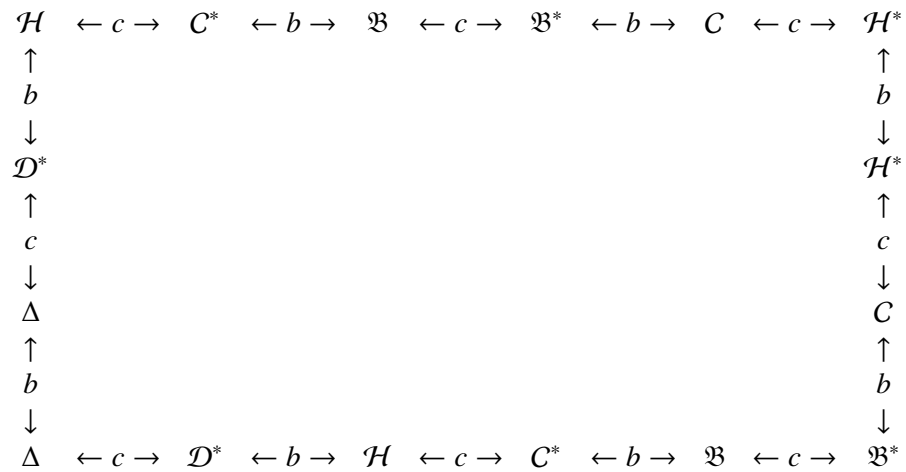


Figura 159 Cadena complemento-bloqueador del tropel \mathfrak{B} del Ejemplo 157.

Nótese que en este caso cada tropel aparece dos veces en la cadena; además Δ y \mathcal{H}^* son “autobloqueables”, es decir, son puntos fijos del mapeo bloqueador. \square

Aunque en el Ejemplo 157 la cadena complemento-bloqueador contiene términos repetidos, hay otros casos en los que todos los términos de la cadena complemento-bloqueador son tropeles distintos; por ejemplo, considere el matroide sobre $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuyo tropel de bases es $\{(13), (14), (23), (24)\}$, la cadena complemento-bloqueador de este tropel consta de 14 tropeles distintos. Otro dato curioso que

hemos notado para los tropes sobre conjuntos de cardinalidad menor que seis es que, más del 50 % de las cadenas complemento-bloqueador que contienen algún tropel isomorfo a las bases de un matroide, tienen la misma cantidad de tropes (contando repeticiones). No sabemos si esto ocurre en general.

La cadena complemento-bloqueador puede utilizarse para dar una relación de equivalencia entre matroides (ignorando isomorfismos), estando relacionados dos matroides si sus tropes de bases aparecen en una misma cadena complemento-bloqueador. Observe que un isomorfismo de matroides envía una cadena complemento-bloqueador en otra y que las operaciones de borrado y contracción de circuitos envían una cadena complemento-bloqueador en otra e inducen nuevas operaciones de “borrado” y “contracción” para cada uno de los eslabones de la cadena.

Capítulo 4

El bloqueador de los hiperplanos de algunas familias de matroides

En este capítulo se utilizan algunos resultados obtenidos en el Capítulo 3 para estudiar los transversales y transversales *minimales* de los hiperplanos de algunas familias de matroides.

A menudo en varias clases de matroides aparecen casos triviales que requieren consideraciones especiales al momento de probar teoremas generales. A continuación se analizan dichos casos con el objeto de referirnos a ellos cuando se requiera de aquí en adelante.

Matroides con a lo más tres hiperplanos

Si en un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ el conjunto de hiperplanos es $\mathcal{H} = \emptyset$, entonces, por vacuidad, cualquier subconjunto de E interseca a todos los hiperplanos de M , en particular \emptyset es *minimal* con dicha propiedad, se sigue que en este caso el bloqueador de los hiperplanos es el tropel $\mathcal{D}^* = \{\emptyset\}$. Análogamente, si en un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ el conjunto de hiperplanos es $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$, entonces, usando la propiedad de involución del mapeo bloqueador, se sigue que el bloqueador de los hiperplanos es el tropel $\mathcal{D}^* = \emptyset$.

Un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ con exactamente un hiperplano H (distinto del vacío) tiene por bloqueador de los hiperplanos al tropel $\mathcal{D}^* = \{\{e\} : e \in H\}$. Un matroide con exactamente dos hiperplanos H_1

y H_2 tiene por bloqueador de los hiperplanos al tropel $\mathcal{D}^* = \{\{e\} : e \in H_1 \cap H_2\} \cup \{\{x, y\} : x \in H_1 - H_2, y \in H_2 - H_1\}$. Un matroide con exactamente tres hiperplanos H_1, H_2, H_3 , tiene por bloqueador de los hiperplanos al tropel $\{\{h\} : h \in H_1 \cap H_2 \cap H_3\} \cup \{\{a, b\} \subseteq E : a \in (H_i \cup H_j) - H_k, b \in H_k, \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i\} \cup \{\{a, b, c\} : a \in H_1 - (H_2 \cup H_3), b \in H_2 - (H_1 \cup H_3), c \in H_3 - (H_1 \cup H_2)\}$.

Matroides uniformes

El matroide uniforme $U_{m,n}$ de rango m sobre $S = \{1, 2, \dots, n\}$ tiene como hiperplanos a todos los subconjuntos de S de cardinalidad $m - 1$. Del Ejemplo 18 se sigue que el bloqueador de los hiperplanos de $U_{m,n}$ consta de los subconjuntos de S de cardinalidad $n - m + 2$.

4.1. Axiomatización para matroides de rango dos

La siguiente es una axiomatización del bloqueador de los hiperplanos para matroides de rango dos. Antes de presentar dicha axiomatización, tenemos que señalar que no parece haber una manera clara de modificar estos axiomas para obtener una axiomatización para matroides en general.

Lema 160 ^{*} *Sea (\mathcal{D}^*, E) un tropel tal que:*

- ⊙ (\mathcal{D}^*, E) es una cubierta pero no consta solo de singuletes.
- ⊕ Dado $D \in \mathcal{D}^*$, si $x \notin D$ y $\{x\} \notin \mathcal{D}^*$ entonces $\exists! y \in D$ tal que $(D - y) \cup x \in \mathcal{D}^*$.
- ⊗ $[\exists D, D' \in \mathcal{D}^*; \exists x, y \in E, x \in D, y \notin D, x \notin D', y \in D', (D - x) \cup y \in \mathcal{D}^*, (D' - y) \cup x \in \mathcal{D}^*]$ si y solo si, $\forall \bar{D} \in \mathcal{D}^*, [(x \in \bar{D}) \Rightarrow y \notin \bar{D}], [(y \in \bar{D}) \Rightarrow x \notin \bar{D}]$.

Entonces (\mathcal{D}^, E) es el bloqueador de los hiperplanos de un matroide de rango dos. Más aún, el recíproco también es cierto.*

Demostración: Los axiomas ⊙, ⊕ y ⊗ a los que se hace referencia en esta demostración son los enunciados en el Lema 160.

Vamos a definir una relación sobre E menos los elementos que son singuletes de (\mathcal{D}^*, E) . Probaremos que dicha relación es de equivalencia y que las clases de equivalencia junto con los elementos que son miembros de singuletes de (\mathcal{D}^*, E) son el tropel bloqueador de (\mathcal{D}^*, E) ; finalmente, como los hiperplanos de un matroide de rango dos forman una partición del conjunto base menos la unión de los istmos (es decir, el conjunto base menos los elementos que pertenecen a todos los hiperplanos), se seguirá que $b(\mathcal{D}^*)$ es el tropel de hiperplanos de un matroide de rango dos.

Sean x, y dos elementos no lazos de (\mathcal{D}^*, E) . Definimos $x \sim y$ si y solo si, $[x = y] \vee [\exists D, D' \in \mathcal{D}^*$ tales que $x \in D, y \notin D, x \notin D', y \in D', (D - x) \cup y \in \mathcal{D}^*, (D' - y) \cup x \in \mathcal{D}^*]$. Por definición la relación \sim es reflexiva y simétrica de manera que solo nos falta probar la transitividad.

Sin pérdida de generalidad sean x, y, z tres elementos no lazos de (\mathcal{D}^*, E) distintos dos a dos, tales que $(x \sim y)$ y $(y \sim z)$. Probaremos que $x \sim z$.

Como $x \sim y$, $x \neq y$ se tiene que $\exists D, D' \in \mathcal{D}^*$ tales que, $x \in D, y \notin D, y \in D', x \notin D', (D - x) \cup y \in \mathcal{D}^*, (D' - y) \cup x \in \mathcal{D}^*$. Como $y \sim z$, $y \neq z$ se tiene que $\exists \hat{D}, \tilde{D} \in \mathcal{D}^*$ tales que, $y \in \hat{D}, z \notin \hat{D}, z \in \tilde{D}, y \notin \tilde{D}, (\hat{D} - y) \cup z \in \mathcal{D}^*, (\tilde{D} - z) \cup y \in \mathcal{D}^*$. Entonces, por el axioma (γ) se tiene que $\forall D \in \mathcal{D}^*, [(x \in D) \Rightarrow (y \notin D)], [(y \in D) \Rightarrow (x \notin D)], [(y \in D) \Rightarrow (z \notin D)], [(z \in D) \Rightarrow (y \notin D)]$.

Luego, $x \in D, y \notin D; y \in D', x \notin D', z \notin D'; y \in \hat{D}, z \notin \hat{D}, x \notin \hat{D}; z \in \tilde{D}, y \notin \tilde{D}$ y por el axioma (ϵ) se tiene que y es único en D' tal que $(D' - y) \cup x \in \mathcal{D}^*$ y $(D' - y) \cup z \in \mathcal{D}^*$.

Ahora $(D' - y) \cup x$ no contiene a z pues $z \notin D'$ ya que $y \in D'$ y además $z \neq x$. Entonces, nuevamente por el axioma (ϵ) se tiene que $\exists! p \in (D' - y) \cup x$ tal que $\mathring{D} = (((D' - y) \cup x) - p) \cup z \in \mathcal{D}^*$. Si $p = x$ ya terminamos, si no, como $y \notin \mathring{D}$ entonces por el axioma (ϵ) $\exists! m \in \mathring{D}$ tal que $(\mathring{D} - m) \cup y \in \mathcal{D}^*$. Esto implica que $z, y \in (\mathring{D} - m) \cup y$ o bien que $x, y \in (\mathring{D} - m) \cup y$ lo cual contradice el axioma (γ) .

Por lo tanto \sim es transitiva, de modo que se trata de una relación de equivalencia.

Ahora vamos a probar que las clases de equivalencia, añadiéndoles los elementos de los lazos, conforman el bloqueador de \mathcal{D}^* .

Sea H una de las clases de equivalencia con los elementos de los lazos añadidos.

Supongamos que $H \cap D = \emptyset$ para algún $D \in \mathcal{D}^*$. Dado $x \in H$ se tiene entonces que $x \notin D$, de modo que por el axioma (\ominus) , $\exists! p \in D$ tal que $\bar{D} = (D - p) \cup x \in \mathcal{D}^*$.

Ahora usando el axioma (\ominus) , puesto que tenemos que $\exists D, \bar{D}, p \in D, x \notin D, x \in \bar{D}, p \notin \bar{D}, (D - p) \cup x \in \mathcal{D}^*, (\bar{D} - x) \cup p \in \mathcal{D}^*$. Pero esto significa que p está en la misma clase de equivalencia que x , es decir, $p \in H$, de modo que $p \in H \cap D = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

De lo anterior, concluimos que H es un transversal de \mathcal{D}^* . Ahora veremos que H es un transversal *minimal*.

Si H consta de una clase de equivalencia con un solo elemento x , y el resto de los elementos son lazos de \mathcal{D}^* , entonces H es *minimal*, ya que si x no está en algún D con $|D| > 1$, el axioma (\ominus) implica que hay algún elemento $p \neq x$ tal que $p \sim x$, contradiciendo que x era una clase de equivalencia de \sim . Claramente no se puede quitar a H un elemento que es lazo de \mathcal{D}^* pues H ya no sería transversal de dicho lazo.

Si H contiene una clase de equivalencia con al menos dos elementos x, y entonces $x \sim y$ y se tiene que $\exists D, D' \in \mathcal{D}^*$ tales que $x \in D, y \notin D, x \notin D', y \in D', (D - x) \cup y \in \mathcal{D}^*, (D' - y) \cup x \in \mathcal{D}^*$.

$H - x$ no interseca a $(D' - y) \cup x$ pues de otro modo si $a \in (H - x) \cap ((D' - y) \cup x)$, dado que $y \notin (D' - y) \cup x$, el axioma (\ominus) implica que $\exists! p \in (D' - y) \cup x$ tal que $((D' - y) \cup x) - p \cup y \in \mathcal{D}^*$, pero entonces este conjunto contiene a $\{x, y\}$ si $p \neq x$, ó a $\{a, y\}$ si $p = x$ contradiciendo el axioma (γ) .

$\therefore H$ es un bloqueador de \mathcal{D}^* .

Ahora solo nos resta demostrar que todos los bloqueadores de \mathcal{D}^* son de esta forma.

Sea H un miembro del tropel bloqueador de \mathcal{D}^* con $|H| \geq 2$ y sea $x \in H$. Por la *minimalidad*, $H - x$ no interseca a un $D \in \mathcal{D}^*$. Sea $y \in H - x$, claramente $y \notin D$, por tanto, por el axioma (\ominus) , se tiene que $\exists! p \in D$ tal que $(D - p) \cup y \in \mathcal{D}^*$.

Se sigue que y está en la clase de equivalencia de p . Sin embargo, como x está en la clase de equivalencia de y , se concluye que x y p están en la misma clase de equivalencia.

Por lo tanto H está contenido en alguna clase de equivalencia de la relación \sim , pero como cada clase de equivalencia es un miembro del bloqueador de \mathcal{D}^* , se concluye que H es una clase de equivalencia.

De lo anterior concluimos que las clases de equivalencia conforman el bloqueador de \mathcal{D}^* y dicho bloqueador tiene la estructura de un tropel de hiperplanos de un matroide de rango dos.

El recíproco también es cierto puesto que los tropeles de hiperplanos de matroides de rango dos consisten en cubiertas tales que al borrarles todos los istmos, dan lugar a una partición del conjunto de elementos del conjunto base que no son istmos. El bloqueador consta claramente de los singuletes de elementos que son istmos, y de conjuntos equicardinales que contienen exactamente un elemento que no es istmo de cada hiperplano. ■

4.2. Matroides gráficos

Es un hecho conocido que dada una gráfica G , se puede encontrar una gráfica conexa G' tal que el matroide de ciclos de G y G' coinciden. Más aún, si G es una gráfica dos conexa, $M(G)$ es un matroide conexo; por otro lado, las gráficas con lazos o aristas paralelas tienen a matroides no simples como sus matroides de ciclos. Por los resultados de las secciones previas sobre matroides simples y conexos, nuestro estudio de los bloqueadores de los hiperplanos de los matroides gráficos se reduce al caso de gráficas simples dos conexas.

Ya se vio en el Capítulo 2 que dada una gráfica conexa G , los circuitos de $M(G)$ son exactamente los conjuntos de aristas E' tales que $G(E')$ es un ciclo, las bases de $M(G)$ son exactamente los conjuntos de aristas T tales que $G(T)$ es un árbol generador de G , los cocircuitos de $M(G)$ son exactamente los conjuntos de aristas C^* tales que $E(C^*)$ es un corte *minimal* por aristas de G y que los hiperplanos de $M(G)$ son exactamente los conjuntos de aristas H tales que $G(H)$ es una subgráfica *maximal* con exactamente dos componentes conexas.

En esta sección se caracteriza al bloqueador de los hiperplanos de los matroides gráficos y se especializa este resultado para los matroides de ciclos de las gráficas completas, bipartitas completas y ruedas.

Teorema 161 [★] Sea G una gráfica dos conexa y sea $M(G)$ el matroide de ciclos de G , entonces, las subgráficas de G cuyos conjuntos de aristas son transversales de los hiperplanos de $M(G)$ pertenecen a una de las siguientes clases:

- (G1) Subgráficas G' que continen un ciclo impar.
- (G2) Subgráficas G' que son bosques, tales que para cualquier bipartición de los vértices de G' en conjuntos estables (W_1, W_2) y cualquier bipartición $\{V_1, V_2\}$ del conjunto de vértices de G con $W_1 \subseteq V_1$ y $W_2 \subseteq V_2$ la gráfica $G[V_1]$ o $G[V_2]$ es desconexa.

Demostración: Sea G' una subgráfica con un ciclo impar. Como todo matroide gráfico es binario y, en los matroides binarios la intersección de un circuito con un cocircuito es par, se sigue que en $M(G)$ la intersección de un circuito con un cocircuito debe ser par, por lo que un circuito impar no puede estar contenido en cocircuito ya que tendría intersección impar. Entonces las aristas de G' intersecan a todos los hiperplanos de $M(G)$ pues el tropel de hiperplanos de $M(G)$ es el tropel complementario de los cocircuitos.

Sea G' como en (G2). Entonces G' no tiene ciclos impares pues una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ciclos impares. Suponga que las aristas de G' no intersecan a algún hiperplano, entonces, las aristas de G' deben estar contenidas en algún corte *minimal* por aristas de G (los cocircuitos de $M(G)$ son los cortes *minimales* por aristas de la gráfica G), dicho corte genera dos componentes conexas G_1 y G_2 . Sean $V_1 = V(G_1)$, $V_2 = V(G_2)$ los conjuntos de vértices de estas componentes (ver la Figura 162). Los conjuntos V_1, V_2 son tales que $W_1 \subseteq V_1$ y $W_2 \subseteq V_2$ (de otro modo habría una arista de G' fuera del corte).

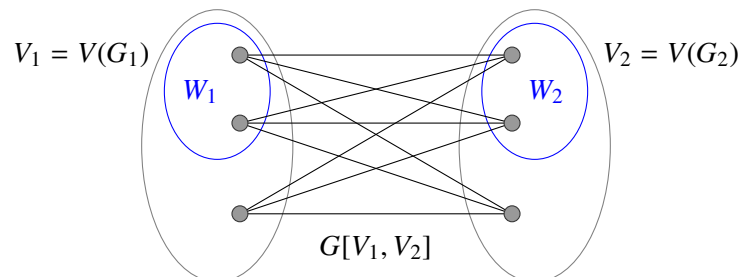


Figura 162 Gráfica $G[V_1, V_2]$ mencionada en la demostración del Teorema 161. El conjunto de aristas de $G[V_1, V_2]$ es un corte minimal por aristas de la gráfica G que contienen a las aristas de G' .

Sea $G[V_1, V_2]$ la subgráfica de G bipartita máxima con bipartición (V_1, V_2) , dicha gráfica debe estar contenida en el corte por aristas pues de lo contrario habría una arista de V_1 a V_2 contradiciendo que V_1 y V_2 son los conjuntos de vértices de las dos componentes conexas generadas por el corte.

Sin embargo, por hipótesis, $G[V_1]$ o $G[V_2]$ es desconexa, lo cual es una contradicción, pues un corte *minimal* por aristas de una gráfica conexa, genera exactamente dos componentes conexas. Luego, las aristas de G' no están contenidas en ningún corte *minimal* por aristas (es decir, no están contenidas en un cocircuito de $M(G)$) y por lo tanto intersecan a todos los hiperplanos de $M(G)$.

Finalmente, sea H una subgráfica sin ciclos de longitud impar pero que contiene al menos un ciclo de longitud par. Se probará que $E(H)$ no puede ser un miembro del bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$. Suponga, buscando una contradicción, que $E(H)$ sí es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$; entonces, $E(H)$ es un conjunto *minimal* por contención respecto a no estar contenido en ningún corte *minimal* por aristas de G .

Sea C una subgráfica de H tal que C es un ciclo par y sea e una arista de C , entonces, $E(H) - e$ está contenido en un corte *minimal* por aristas de G ; dicho corte es una gráfica bipartita $G[X, Y]$ que induce una bipartición $[X', Y']$ de los vértices de la gráfica $C - e$ (ver la Figura 163).

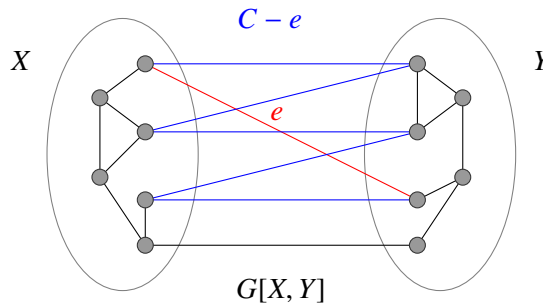


Figura 163 Subgráfica $G[X, Y]$ de la gráfica G mencionada en la demostración del Teorema 161.

Pero entonces $C = C[X', Y'] \subseteq G[X, Y]$ y como $E(H) - e \subseteq E(G[X, Y])$ se sigue que $E(C) \cup (E(H) - e) = E(H) \subseteq E(G[X, Y])$ lo cual contradice que $E(H)$ no está contenido en ningún corte por aristas. ■

Teorema 164 ★ Sea G una gráfica dos conexa. Sea C un ciclo impar de G . Entonces C es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$ si $G[X]$ es conexa $\forall X \subseteq V(C)$ conjunto estable maximal de C .

Demostración: Sea C un ciclo impar tal que $G[X]$ es conexa $\forall X \subseteq V(C)$ conjunto estable maximal de C . Todos los cortes *minimales* por aristas de G son gráficas bipartitas, de modo que C no puede estar contenido en ningún corte *minimal* por aristas ya que las gráficas bipartitas no pueden contener ciclos impares.

Suponga, buscando una contradicción, que C es un transversal de los hiperplanos de $M(G)$, pero que no es *minimal*, entonces $\exists e \in C$ tal que $C - e$ es un transversal de los hiperplanos de $M(G)$. Sea $[X, Y]$ una bipartición de los vértices de $C - e$ en un conjunto estable *maximal* X , y un conjunto estable *maximal* $(Y - v)$, al que se le ha añadido un nuevo vértice v que está conectado por la arista e de C a un vértice de $(Y - v)$.

Se va a construir un corte *minimal* por aristas que contenga a $C - e$ utilizando una descomposición en orejas de la gráfica G (esto es posible ya que G es dos conexa). Para construir dicho corte por aristas, considere el siguiente algoritmo¹:

Paso 1: Hacer $X_0 := X, Y_0 := Y, G_0 := C, i := 0$ e ir al Paso 2;

Paso 2: Si G_i tiene una oreja $T_i = v_i^1 e_i^1 v_i^2 e_i^2 \dots v_i^{r_i} e_i^{r_i} v_i^{r_i+1}$ ir al Paso 3, si no, ir al Paso 5;

Paso 3: De entre los siguientes tres casos verificar cual ocurre y ejecutarlo, luego ir al Paso 4;

CASO 1: Si $v_i^1, v_i^{r_i+1} \in X_i$ hacer $X_{i+1} := X_i \cup \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{r_i+1}\}, Y_{i+1} = Y_i$;

CASO 2: Si $v_i^1, v_i^{r_i+1} \in Y_i$ hacer $Y_{i+1} := Y_i \cup \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{r_i+1}\}, X_{i+1} = X_i$;

CASO 3: Si $v_i^1, v_i^{r_i+1} \notin X_i$ y $v_i^1, v_i^{r_i+1} \notin Y_i$, de entre los siguientes dos subcasos verificar cual de ellos ocurre y ejecutarlo;

SUBCASO 1: Si $v_i^1 \in Y$ y $v_i^{r_i+1} \in X$, entonces tomar $X_{i+1} := X_i, Y_{i+1} := Y_i \cup \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{r_i}\}$;

SUBCASO 2: Si $v_i^1 \in X$ y $v_i^{r_i+1} \in Y$, entonces tomar $Y_{i+1} := Y_i, X_{i+1} := X_i \cup \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{r_i}\}$;

Paso 4: Tomar $G_{i+1} := G_i \cup T_i$, hacer $i := i + 1$ e ir al Paso 2;

Paso 5: Hacer $\hat{X} = X_i, \hat{Y} = Y_i$ y finalizar;

¹En este algoritmo, la asignación de datos a una variable está señalada por el símbolo $:=$ y el final de una instrucción se señala por un símbolo de punto y coma.

Después de ejecutar el algoritmo, se termina con una bipartición $[\hat{X}, \hat{Y}]$ de los vértices de G tal que $E(C - e) \subseteq E(G[\hat{X}, \hat{Y}])$, donde $G[\hat{X}, \hat{Y}]$ es la subgráfica de G bipartita inducida por la bipartición $[\hat{X}, \hat{Y}]$, claramente $E(G[\hat{X}, \hat{Y}])$ es un corte *minimal* por aristas pues tanto $G[\hat{X}]$ como $G[\hat{Y}]$ son conexas. Para ver esto último hay que notar que $G[X]$ y $G[Y - v]$ son conexas por hipótesis, y v está conectado a $(Y - v)$ mediante la arista e . Cualquier otro vértice debe ser vértice interno de alguna oreja y por lo tanto debe estar conectado con algún vértice, ya sea de la componente que contiene a X , o de la que contiene a Y . Se sigue que $C - e$ está contenido en un corte *minimal* por aristas de G , lo cual contradice que $C - e$ es un transversal de los hiperplanos de $M(G)$.

Por lo tanto C es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$. ■

Corolario 165 ^{*} *Sea G una gráfica dos conexa; sea $V' \subseteq V(G)$ tal que $G[V']$ es una gráfica completa. Sea $C \subseteq E(G[V'])$ un circuito impar. Entonces C es un bloqueador de los hiperplanos de $M[G]$.*

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema 164 ya que todos los conjuntos estables *maximales* de un ciclo son de cardinalidad uno y por tanto inducen gráficas conexas con un solo vértice pues $G[C]$ es una gráfica completa. ■

El siguiente teorema se puede deducir como corolario del Teorema 164, lo incluimos aquí porque puede demostrarse de manera más sencilla y porque sirvió de motivación para plantear y demostrar el Teorema 164.

Teorema 166 ^{*} *Sea G una gráfica hamiltoniana dos conexa con un número impar de vértices. Sea C un ciclo hamiltoniano de G . Entonces C es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$ si y solo si $G[X]$ es conexa $\forall X \subseteq V(C)$ conjunto estable maximal de C .*

Demostración: Sea C un ciclo hamiltoniano que es bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$. Sea $X \subseteq V(C)$ un conjunto estable *maximal* en C . Considere la bipartición $[V(C) - X, X]$ de los vértices de G .

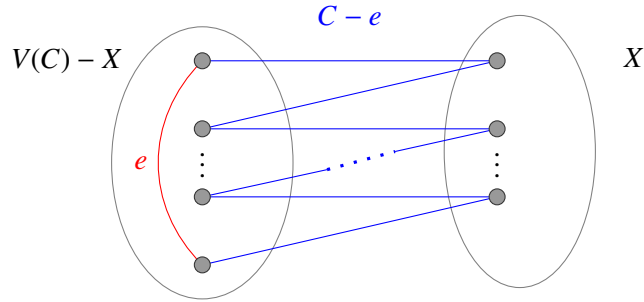


Figura 167 Ciclo hamiltoniano C mencionado en la demostración del Teorema 166.

Necesariamente existe una arista e de C en $G[V(C) - X]$ (ver Figura 167). Suponga que $G[X]$ es disconexa. Entonces $G[V(C) - X, X]$ no es un corte *minimal* por aristas, ya que genera más de dos componentes conexas; sin embargo, ese es el corte más pequeño que contiene a $C - e$, de modo que $C - e$ no está contenido en ningún corte *minimal* por aristas, es decir, $C - e$ es un transversal de los hiperplanos de $M(G)$, pero esto es imposible pues $C - e \subseteq C$, lo cual contradice que C es un transversal *minimal* por contención.

Para probar el recíproco, sea C un ciclo hamiltoniano de G . Suponga, buscando una contradicción que $E(C)$ no es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$; como $E(C)$ sí es transversal de los hiperplanos de $M(G)$, debe existir $e \in E(C)$ tal que $C - e$ es transversal de los hiperplanos de $M(G)$.

$C - e$ es una trayectoria. Sea $X \subseteq V(C)$ un conjunto estable *maximal* de $C - e$; $[V(C) - X, X]$ es una bipartición de $V(G)$ tal que $G[X]$ y $G[V(C) - X]$ son subgráficas conexas. $G[V(C) - X]$ consta de un conjunto estable *maximal* \hat{X} y un vértice v que está conectado a $G[\hat{X}]$ mediante la arista e (ver Figura 168).

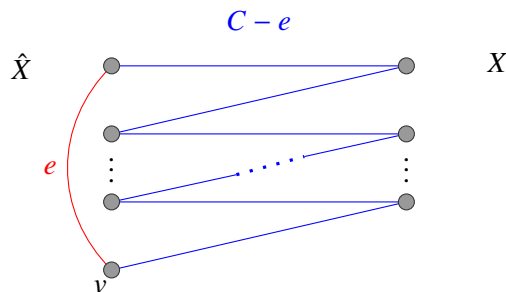


Figura 168 Conjunto X estable maximal de vértices mencionado en la demostración del Teorema 166.

Pero entonces $G[\hat{X} \cup v, X]$ es un corte *minimal* por aristas que contiene a $C - e$, lo cual contradice que G es transversal de los hiperplanos de $M(G)$.

$\therefore E(C)$ es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$. ■

Corolario 169 [★] Sea G una gráfica dos conexa con algún ciclo hamiltoniano C de longitud impar, si existe un subconjunto $V' \subsetneq V(C)$ independiente maximal, tal que $G[V']$ es una gráfica vacía, entonces ningún ciclo hamiltoniano es un bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$.

Demostración: Sea $V' \subsetneq V(C)$ independiente *maximal* en la subgráfica C y tal que $G[V']$ es vacía. Como la cardinalidad de C es impar, existe una arista $e = uv$ de C que no es incidente en ningún vértice de V' . Considere la trayectoria hamiltoniana $C - e$; dicha trayectoria es una gráfica bipartita, más aún, cualquier bipartición $[X, Y]$ de dicha trayectoria nos da una bipartición (como conjunto) de los vértices de la gráfica G (ver la Figura 170); observe que $G[X, Y]$ es el único corte por aristas que puede contener a todas las aristas de $C - e$ pues al recorrer dicha trayectoria se debe pasar de X a Y de manera alternada y solo hay una manera de hacerlo. Sin embargo, las aristas de $G[X, Y]$ no son un corte *minimal* por aristas pues $G - G[X, Y]$ tiene más de dos componentes conexas, pues se tiene que $V' = X$ o $V' = Y$, y $G(V')$ es disconexa. Como no hay ningún corte *minimal* por aristas que pueda contener a $C - e$, se sigue que $C - e$ es un transversal de los hiperplanos de G , y por lo tanto C no es un bloqueador, ya que $C - e \subsetneq C$. Ahora, dado otro ciclo hamiltoniano C' , se puede elegir una arista $e' \in C' \cap G[V - V']$ de modo que $C' - e'$ induzca la misma partición que $C - e$ (ver Figura 170), y haciendo una analogía de lo probado antes para $C - e$, se sigue que ningún ciclo hamiltoniano es miembro del bloqueador de los hiperplanos de $M(G)$. ■

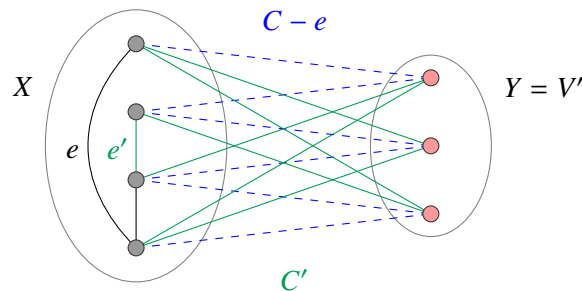


Figura 170 Gráfica que se menciona en la demostración del Corolario 169.

4.2.1. Gráficas completas

Teorema 171 [★] *El conjunto bloqueador de los hiperplanos de una gráfica completa K_n es el tropel formado por los circuitos impares de $M(G)$.*

Demostración: Sea G' (subgráfica de K_n) tal que el conjunto de aristas de G' interseca a todos los hiperplanos de $M(K_n)$.

Afirmación: G' no puede ser bipartita.

Demostración de la afirmación: Para probar esto, suponga (buscando una contradicción) que G' es bipartita y sea (A, B) una bipartición de G' (ver la Figura 172). Sea $K_n[A, V(K_n) - A]$ la subgráfica de K_n que es bipartita maximal con bipartición $(A, V(K_n) - A)$. Como $A \subseteq A$ y $B \subseteq V(K_n) - A$ se tiene que G' es una subgráfica de $K_n[A, V(K_n) - A]$. Sin embargo, el conjunto de aristas de $K_n[A, V(K_n) - A]$ forma un cocircuito de $M(K_n)$, ya que al borrar a K_n las aristas de $K_n[A, V(K_n) - A]$, se obtiene una subgráfica Γ con dos componentes conexas G_1 y G_2 (dichas componentes son las subgráficas de K_n completas sobre A y $V(K_n) - A$) y si a añadimos a Γ una arista de $K_n[A, V(K_n) - A]$ se vuelve a tener una gráfica conexa.

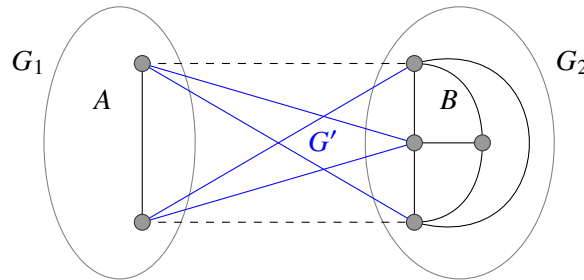


Figura 172 *Gráfica que se menciona en en la demostración del Teorema 171.*

Entonces se tiene una contradicción, pues las aristas de G' están contenidas en el cocircuito formado por las aristas de $K_n[A, V(K_n) - A]$ y por tanto no intersecan al hiperplano formado por las aristas de $K_n - (K_n[A, V(K_n) - A])$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Ahora se sigue que G' tiene un ciclo de longitud impar puesto que una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ciclos de longitud impar. Más aún, por el Corolario 165, los circuitos impares cuyos vértices inducen gráficas completas son miembros del tropel bloqueador de los hiperplanos, por lo tanto, los circuitos impares son precisamente los elementos del tropel bloqueador de los hiperplanos de $M(K_n)$. ■

4.2.2. Gráficas bipartitas completas

Teorema 173 [★] *El conjunto de transversales de los hiperplanos del matroide de ciclos de una gráfica bipartita completa $K_{m,n}$ ($m > 1, n > 1$) con bipartición (V_1, V_2) consta de los árboles que saturan V_1 (respectivamente V_2) y que tocan al menos dos vértices de V_2 (respectivamente V_1); se sigue que los conjuntos minimales de esta colección son el bloqueador de los hiperplanos del matroide de ciclos de $K_{m,n}$ ($m > 1, n > 1$).*

Demostración: Sea T un árbol que satura V_2 y que incide en al menos dos vértices de V_1 . Mostraremos que T no es subconjunto de ningún corte *minimal* por aristas de $K_{m,n}$. Supongamos, buscando una contradicción, que T está contenido en un corte *minimal* por aristas C^* ; como C^* (respectivamente T) es bipartita por ser subgráfica de $K_{m,n}$, los vértices de C^* (respectivamente los vértices de T) pueden acomodarse en una bipartición (W, V_2) con $W \subseteq V_1$ (respectivamente una bipartición (W', V_2) con $W' \subseteq W \subseteq V_1$). Como C^* es corte *minimal* por aristas, la gráfica $K_{m,n} - G[C^*]$ tiene exactamente dos componentes conexas. Sean G_1, G_2 dichas componentes conexas.

El corte C^* debe ser la subgráfica bipartita $G[V(G_1), V(G_2)]$ maximal con bipartición $(V(G_1), V(G_2))$ pues las aristas de dicha subgráfica son un corte *minimal* por aristas de la gráfica $K_{m,n}$ (genera dos componentes conexas y agregando una arista de $G[V(G_1), V(G_2)]$ las dos componentes se reconectan).

Se sigue que una de las componentes conexas, digamos G_2 debe contener a todos los vértices de V_2 y la otra a todo W (de lo contrario habría una arista de C^* dentro de una de las componentes, y al agregarla seguiríamos teniendo un corte, lo cual contradice la *minimalidad*, ver la Figura 174).

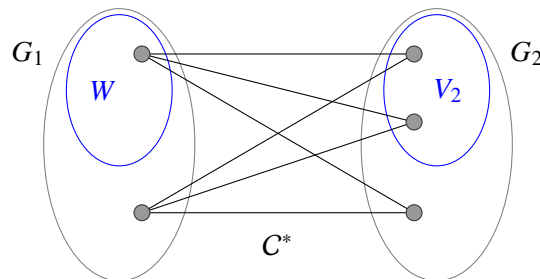


Figura 174 *Componentes conexas G_1 y G_2 mencionadas en la demostración del Teorema 173.*

Ahora, la componente G_1 debe ser una gráfica sin aristas puesto que no contiene vértices de V_2 y como G_1 es conexa, se sigue que G_1 debe tener un solo vértice. Pero C^* contiene a T y, T toca al menos dos vértices de V_1 , de modo que $2 \leq |W'| \leq |W|$ y consecuentemente G_1 tiene al menos dos vértices, esto nos lleva a una contradicción. Se sigue que las aristas de T no están contenidas en ningún corte *minimal* por aristas. Esto es, el conjunto de aristas de T es un transversal de los hiperplanos de $M(K_{m,n})$.

Si G es una subgráfica de $K_{m,n}$ que no contiene un árbol como los descritos en el enunciado del problema, entonces ocurre alguno de los siguientes casos.

Caso 1: G no satura V_1 ni V_2 .

Caso 2: G toca menos de dos vértices de V_1 (respectivamente V_2) y satura V_2 (respectivamente V_1).

Caso 3: G no es conexa.

Para cada uno de estos casos demostraremos que las aristas de G no son un transversal de los hiperplanos de $M(K_{m,n})$.

Caso 1: Si G es una subgráfica de $K_{m,n}$ que no satura V_1 ni V_2 , sean \hat{V}_1, \hat{V}_2 los vértices de V_1 y V_2 respectivamente, que no son vértices de la gráfica G . Nótese que $\hat{V}_1 \neq \emptyset \neq \hat{V}_2, V_1 - \hat{V}_1 \neq \emptyset \neq V_2 - \hat{V}_2$. La subgráfica G está contenida en la subgráfica $G[V_1 - \hat{V}_1, V_2 - \hat{V}_2]$ bipartita maximal con bipartición $(V_1 - \hat{V}_1, V_2 - \hat{V}_2)$. Sea $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2]$ la subgráfica de G bipartita maximal con bipartición (\hat{V}_1, \hat{V}_2) (ver la Figura 175).

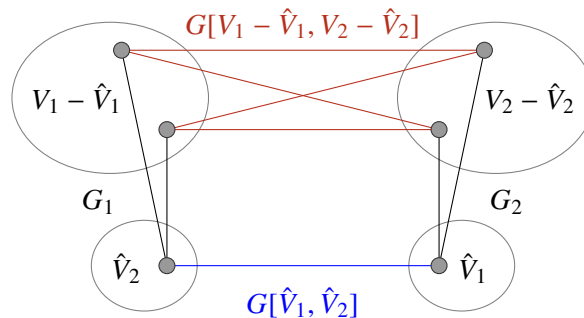


Figura 175 Gráficas $G[V_1 - \hat{V}_1, V_2 - \hat{V}_2]$ y $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2]$ mencionadas en la demostración del Teorema 173.

Las aristas de $G[V_1 - \hat{V}_1, V_2 - \hat{V}_2]$ junto con las de $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2]$ son un corte por aristas C^* pues generan dos componentes conexas G_1, G_2 no vacías (a saber, las subgráficas bipartitas $G[V_1 - \hat{V}_1, \hat{V}_2]$ y $G[V_2 - \hat{V}_2, \hat{V}_1]$, las cuales tienen aristas pues son subgráficas de $K_{m,n}$ y $\hat{V}_1 \neq \emptyset \neq \hat{V}_2, V_1 - \hat{V}_1 \neq \emptyset \neq V_2 - \hat{V}_2$). Además, C^* es *minimal* pues si agregamos una arista de C^* , necesariamente conectamos G_1 con G_2 obteniendo una sola componente conexa. Por lo tanto, las aristas de G están contenidas en un cocircuito C^* y entonces no intersecan a un hiperplano de $M(K_{m,n})$.

Caso 2: Sin pérdida de generalidad, supongamos que G no satura V_1 , satura V_2 pero toca menos de dos vértices de V_1 (el caso en que G no satura V_2 , satura V_1 y toca menos de dos vértices de V_2 es análogo). Si G solo contiene un vértice v de V_1 entonces G está contenida en el corte que consta de las aristas que unen v_1 con cada vértice de V_2 .

Si G no contiene vértices de V_1 , entonces G es una gráfica sin aristas por lo que no puede ser un transversal de los hiperplanos pues el conjunto de hiperplanos es no vacío. Si G contiene un vértice $\hat{w} \in V_1$ y $W_2 \subseteq V_2$ son todos los vértices de V_2 que inciden en \hat{w} y que son vértices de G ; si $W_2 = \emptyset$, entonces de nuevo G es una gráfica sin aristas; si $W_2 = V_2$ entonces G está contenida en el corte *minimal* que consta de todas las aristas que inciden en \hat{w} . Si $W_2 \neq V_2$, entonces $V_2 - W_2 \neq \emptyset$ (Ver la Figura 176).

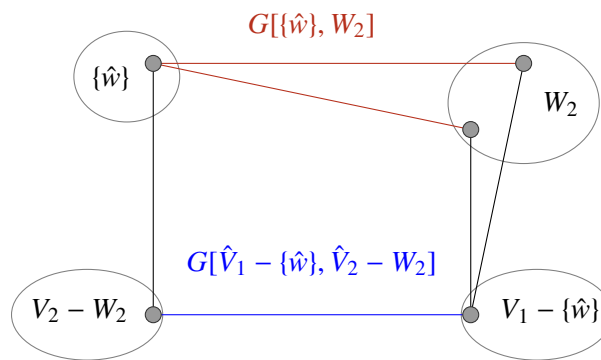


Figura 176 Gráficas $G[\{\hat{w}\}, W_2]$ y $G[V_1 - \{\hat{w}\}, V_2 - W_2]$ mencionadas en la demostración del Teorema 173.

Sean $G[\{\hat{w}\}, W_2]$, $G[V_1 - \{\hat{w}\}, V_2 - W_2]$ las subgráficas bipartitas maximales con biparticiones $(\{\hat{w}\}, W_2)$ y $(V_1 - \{\hat{w}\}, V_2 - W_2)$ respectivamente. Las aristas de $G[\{\hat{w}\}, W_2]$ junto con las de $G[V_1 - \{\hat{w}\}, V_2 - W_2]$ son un corte por aristas pues $W_2 \neq \emptyset \neq V_2 - W_2$, $\{\hat{w}\} \neq \emptyset \neq V_1 - \{\hat{w}\}$, de modo que todo vértice de W_2 está unido con cada vértice de $V_1 - \{\hat{w}\}$ y a su vez $\{\hat{w}\}$ está unido a cada vértice de $V_2 - W_2$. G es subgráfica de $G[\{\hat{w}\}, W_2] + G[V_1 - \{\hat{w}\}, V_2 - W_2]$ pues no hay aristas de G que vayan de \hat{w} a $V_2 - W_2$ (por construcción) y si hubiera una arista de G de un $\tilde{v} \in V_1 - \{\hat{w}\}$ a un $\tilde{w} \in W_2$, entonces G tocaría dos vértices de V_1 (a saber \tilde{w} y \hat{w}). Se sigue que las aristas de G están contenidas en un corte *minimal* por aristas y por tanto, no intersecan a un hiperplano de $M(K_{m,n})$.

Caso 3: Si G no es conexa, supongamos que G no tiene vértices de grado cero, (si a una gráfica se le borran dichos vértices, esto no afecta los cortes por aristas). Sean G_1, G_2, \dots, G_k las componentes conexas de G , cada componente tiene al menos un vértice de V_1 y uno de V_2 (porque no hay vértices de grado cero). Le añadimos a G aristas de su complemento hasta que se tengan exactamente dos componentes conexas \hat{G}_1, \hat{G}_2 .

Sean $\hat{V}_1 = \{v \in V_1 : v \in V(\hat{G}_1)\}$, $\hat{V}_2 = \{v \in V_2 : v \in V(\hat{G}_1)\}$, $\tilde{V}_1 = V_1 - \hat{V}_1$ y $\tilde{V}_2 = V_2 - \hat{V}_2$, nótese que ninguno de estos conjuntos es vacío puesto que las componentes \hat{G}_1 y \hat{G}_2 no tienen vértices de grado cero. Sean $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2]$, $G[\tilde{V}_1, \tilde{V}_2]$ las subgráficas bipartitas completas con bipartición (\hat{V}_1, \hat{V}_2) y $(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$, respectivamente. G es subgráfica de $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2] + G[\tilde{V}_1, \tilde{V}_2]$ y las aristas de $G[\hat{V}_1, \hat{V}_2] + G[\tilde{V}_1, \tilde{V}_2]$ son un corte *minimal* por aristas. Por lo tanto, las aristas de G están contenidas en un cocircuito de $M(K_{m,n})$ de modo que no intersecan a todos los hiperplanos de $M(K_{m,n})$.

Se sigue que las tres condiciones expuestas en los casos 1, 2 y 3 son necesarias para que las aristas de una subgráfica sean un transversal de los hiperplanos de $M(K_{m,n})$. ■

4.3. Ruedas y rehiletos

Para $n \geq 2$, consideremos la rueda W_n con el etiquetado que se muestra en la Figura 177. Las aristas b_1, b_2, \dots, b_n son los rayos, el vértice h es el centro, y el ciclo cuyo conjunto de aristas es $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es el aro.

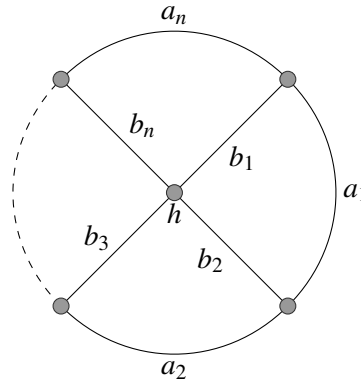


Figura 177 Un ejemplo de rueda.

Lema 178 [★] *El tropel de hiperplanos del matroide \mathcal{W}_n consta de las siguientes colecciones.*

- (H1) *El conjunto de aristas del aro.*
- (H2) *Subgráficas con dos componentes conexas P_2 y F . Donde P_2 es una trayectoria de aristas del aro de longitud r con $0 \leq r \leq n - 2$ y un abanico F con $n - r - 2$ aristas del aro y $n - r - 1$ rayos.*

Demostración: En virtud de la Proposición 77 (vii) tenemos que los hiperplanos del matroide de ciclos de una gráfica G conexa son los conjuntos de aristas de subgráficas maximales con exactamente dos componentes conexas.

Sea h el centro de \mathcal{W}_n , $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V(G) - h$ y $P = v_1 a_1 v_2 \dots v_{n-1} a_n v_{n-1}$ una trayectoria constituida únicamente de aristas del aro. Sea H una subgráfica propia maximal de G con exactamente dos componentes conexas V_1 y V_2 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h \in V_1$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $V_1 = \{h\}$: En este caso, debe tenerse $V_2 = V(G) - \{h\}$ y claramente $E(H)$ consta de las aristas del aro. Es decir, tenemos el caso (HI) del enunciado del Lema 178.

Caso 2: $V_2 \supsetneq \{h\}$: En este caso, debe tenerse que V_1 consta del centro h y un conjunto de vértices V' del aro. Como $G[V_2]$ es conexa, debe haber una trayectoria entre cualesquiera dos vértices de V_2 , pero como V_2 consta solo de vértices del aro, debe tenerse necesariamente que $G[V_2]$ es una trayectoria y esto a su vez implica que $G[V_1]$ es el abanico $G[V'] \vee G[\{h\}]$. ■

De la demostración del lema anterior, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 179 [★] *El conjunto de cocircuitos del matroide \mathcal{W}_n consta de las siguientes colecciones:*

- (i) *El conjunto de todos los rayos.*
- (ii) *Dada una trayectoria de longitud mayor que uno y formada solo con aristas del aro, la primera y la última arista de la trayectoria junto con los rayos que inciden en los vértices internos de la trayectoria.*

Teorema 180 [★] *El bloqueador de los hiperplanos del matroide \mathcal{W}_r consta de las siguientes colecciones.*

- (W1) *Cualesquiera tres aristas del aro.*
- (W2) *Las tres aristas de un triángulo.*
- (W3) *Dados dos rayos b_i, b_j , sean u, v los vértices de los rayos que inciden en el aro, existen exactamente dos (u, v) -trayectorias distintas que son subgráficas del aro, sean T_1 y T_2 dichas trayectorias. Nótese que dichas trayectorias son ajenas por aristas y particionan las aristas del aro. Los rayos b_i, b_j junto con una arista de T_1 y una de T_2 son transversales de los hiperplanos de \mathcal{W}_r .*

Demostración: Nuevamente, sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ el conjunto de aristas del aro y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ el conjunto de todos los rayos, sea h el centro de la rueda, usaremos el etiquetado que se muestra en la Figura 177. Sea $G[A]$ la subgráfica inducida por las aristas del aro.

Cualquier conjunto de tres aristas del aro no es subconjunto de un corte *minimal* por aristas ya que los cortes *minimales* tienen a lo más dos aristas del aro; los conjuntos $\{a_i, a_j\}$ de dos aristas del aro sí son subconjuntos de un corte, basta tomar una trayectoria T , subgráfica de $G[A]$ que comienza en a_i y termina en a_j y construir un corte como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179.

Los triángulos no están contenidos en ningún corte *minimal* por aristas ya que los cortes son acíclicos o contienen exactamente un cuadrilátero (esta última posibilidad ocurre solo cuando en el inciso (ii) del Corolario 179 se elige $T := G[A]$, es decir, T es la trayectoria cerrada que consta de todas las aristas del aro). Los triángulos son *minimales* respecto a no estar contenidos en ningún corte por aristas pues cualesquiera dos rayos están contenidos en el corte *minimal* B ; y un rayo y una arista del aro que estén contenidos en un mismo triángulo, están contenidos en la estrella que consta del rayo y las dos aristas del aro incidentes en dicho rayo (estas estrellas son cortes que surgen del inciso (ii) del Corolario 179 tomando T de longitud dos).

Los conjuntos definidos en (W3) no pueden estar contenidos en el corte que consiste en todos los rayos y tampoco son subconjuntos de ningún corte de los dados en el inciso (ii) del Corolario 179.

Sea $\{e, b_i, b_j, f\}$ un subconjunto como los descritos en (W3) con $e \in T_1$ y $f \in T_2$. Cualquier trayectoria \tilde{T} de $G[A]$ que comience en e y termine en f es incidente en b_i o en b_j pero no es incidente en ambos, por tanto el conjunto de rayos incidentes en los vértices internos de \tilde{T} no contiene al conjunto $\{b_i, b_j\}$.

Luego $\{e, b_i, b_j, f\}$ no está contenido en ningún corte *minimal* por aristas.

El conjunto $\{e, b_i, f\}$ está contenido en un corte *minimal*. Para ver esto, basta considerar una trayectoria \tilde{T} sobre $G[A]$ que comience en e , termine en f y tal que b_i es incidente en un vértice interno de \tilde{T} , luego podemos construir un corte *minimal* por aristas como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179.

El conjunto $\{e, b_i, b_j\}$ está contenido en un corte *minimal*. Basta tomar una $f' \in T_1 - e$, considerar una trayectoria \hat{T} que comience en e , termine en f' y tal que b_i, b_j son incidentes en los vértices internos de \hat{T} . Nuevamente, construimos con \hat{T} un corte *minimal* por aristas como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179.

Ahora mostraremos que cualquier transversal de los hiperplanos de \mathcal{W}_n debe contener un miembro de $(W1)$, $(W2)$ o $(W3)$.

Las gráficas sin aristas del aro, están contenidas en el corte *minimal* B .

Las gráficas G con una arista a del aro, cualquier cantidad de rayos y que no contengan triángulos no son transversales de los hiperplanos de \mathcal{W}_n . Para ver esto, basta notar que como G no contiene triángulos, uno de los vértices de a tiene grado uno; sea u dicho vértice. Tomemos la arista $b \in G[A] - a$ que incide en u . Ahora tomamos en $G[A]$ la trayectoria cerrada C que comienza en a y termina en b , entonces construimos con \hat{C} un corte *minimal* por aristas como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179.

Las gráficas G' con dos aristas $\{a, b\}$ del aro y un rayo b_i no son transversales de los hiperplanos de \mathcal{W}_n , hay una trayectoria \hat{T} en el aro que contiene a las aristas a, b e incide en b_i ; con \hat{T} construimos un corte *minimal* por aristas como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179.

Las gráficas G'' con dos aristas del aro y al menos dos rayos, tales que no contienen ninguna gráfica como las descritas en $(W1)$, $(W2)$, $(W3)$ no son transversales de los hiperplanos de \mathcal{W}_n . Si no existe este tipo de gráficas G'' , entonces terminamos; si existe alguna gráfica G'' , al no contener gráficas de $(W3)$, se tiene que existen b_i, b_j rayos de G'' , cuyos vértices u, v distintos del centro generan dos (u, v) -trayectorias disjuntas T_1 y T_2 tales que todos los rayos de G'' inciden en los vértices internos de T_1 o bien de T_2 . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los rayos de G'' inciden en T_2 , entonces a, b están en T_1 . La trayectoria en $G[A]$ que comienza en a , termina en b y contiene a T_2 se puede usar para construir un corte como los descritos en el inciso (ii) del Corolario 179. ■

Definición 181 Para la rueda \mathcal{W}_n , etiquetada como en la Figura 177, el aro $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es el único circuito-hiperplano de $M(\mathcal{W}_n)$. Definimos \mathcal{W}^n el **rehilete de rango n** , como el matroide obtenido desde $M(\mathcal{W}_n)$ relajando el único circuito-hiperplano.

Aplicando el Teorema 131 y el Teorema 180 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 182 ^{*} El bloqueador de los hiperplanos del rehilete \mathcal{W}^n consta de las siguientes colecciones.

i) Cualesquiera tres aristas del aro.

ii) Las aristas de triángulos más una arista adicional del aro.

iii) Dados dos rayos b_i, b_j , sean u, v los vértices de los rayos que inciden en el aro. Existen exactamente dos (u, v) -trayectorias distintas que son subgráficas del aro, sean T_1 y T_2 dichas trayectorias. Nótese que estas trayectorias son ajenas por aristas y particionan las aristas del aro. Los rayos b_i, b_j junto con una arista de T_1 y una de T_2 son transversales de los hiperplanos de $M(W_r)$.

Demostración: Los conjuntos de aristas de triángulos son los únicos bloqueadores de los hiperplanos de la rueda que intersecan al aro en un conjunto de cardinalidad uno. ■

4.4. Matroides cográficos

En esta sección se caracteriza al conjunto bloqueador de los hiperplanos de los matroides de cociclos de las gráficas completas y bipartitas completas.

Proposición 183 [★] Sea G una gráfica dos conexa; sea $V' \subseteq V(G)$ tal que $G[V']$ es una gráfica completa. Si $C \subseteq E(G[V'])$ es una estrella isomorfa a $K_{1,3}$ o tiene dos componentes una de las cuales consta de un ciclo de $G[V']$ y la otra de una arista de $G[V']$ no adyacente a dicho ciclo, entonces C es un bloqueador de los hiperplanos de $M^*[G]$.

Demostración: Sea C como en la Proposición 183. Claramente C no está contenido en ningún ciclo de K_n . Más aún, a continuación se prueba que C es *minimal* con dicha propiedad.

Si C es una estrella isomorfa a $K_{1,3}$, al borrarle una arista se obtiene una trayectoria de longitud dos, como $G[V']$ es completa, existe un triángulo que contiene a dicha trayectoria.

Sea C con dos componentes conexas, una de las cuales consta de un ciclo de $G[V']$ y la otra de una arista e de $G[V']$ no adyacente a dicho ciclo. Si borramos e de C obtenemos un ciclo, de modo que $C - e$ no es un bloqueador de los hiperplanos de $M^*(G)$. Si borramos una arista de C distinta de e , entonces obtenemos dos trayectorias T_1, T_2 ; sean u_1, v_1 los extremos de T_1 y u_2, v_2 los extremos de T_2 ;

por ser $G[V']$ completa, existen en $G[V']$ las aristas u_1u_2 y v_1v_2 que conectan los extremos de ambas trayectorias, luego $T_1u_1u_2T_2v_2v_1$ es un ciclo que contiene a $T_1 \cup T_2$, por lo tanto $T_1 \cup T_2$ no es un bloqueador de los hiperplanos de $M^*(G)$.

Concluimos que C es un bloqueador de los hiperplanos de $M^*(G)$. ■

4.4.1. Gráficas completas

Teorema 184 [★] *Sea K_n la gráfica completa sobre n vértices y sea $M^*(K_n)$ su matroides de cociclos. Sea \mathcal{H}^* el tropel de hiperplanos de $M^*(K_n)$ y sea b el mapeo bloqueador. Entonces $b(\mathcal{H}^*)$ consta de las siguientes colecciones:*

- (i) *Conjuntos de aristas de subgráficas G de K_n isomorfas a la estrella $K_{1,3}$.*
- (ii) *Conjuntos de aristas de subgráficas G de K_n con dos componentes conexas, una de las cuales consta de un ciclo de K_n y la otra de una arista no adyacente a dicho ciclo.*

Demostración: Si G es una subgráfica de K_n como las descritas en (i) o (ii), entonces por la Proposición 183, las aristas de G son un miembro del bloqueador de los hiperplanos de $M^*(K_n)$.

Nótese que los conjuntos de aristas de subgráficas que cumplen (i) o que cumplen (ii) forman un tropel.

Ahora probaremos que si el conjunto $E(G)$ de aristas de una gráfica G no está contenido en ningún ciclo de $M^*(K_n)$ (es decir, $E(G)$ es un transversal de los hiperplanos de $M^*(K_n)$), entonces G contiene una subgráfica G' cuyo conjunto de aristas cumple (i) o (ii).

Si G no es subgráfica de ningún ciclo de K_n , hay dos posibilidades.

- (a) G es acíclica.
- (b) G contiene al menos un ciclo.

Para el caso (a) probaremos que G tiene un vértice de grado al menos tres y por lo tanto una subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$.

Supongamos que G solo tiene vértices de grado uno y dos. Sean G_1, \dots, G_m las componentes de G . Cada componente consta de trayectorias pues K_n es simple y G es acíclica. Sean V_i, W_i los extremos de la trayectoria de la componente G_i , entonces agregamos a G las aristas (W_i, V_{i+1}) para $i = 1, 2, \dots, m$ y la arista (W_m, V_1) . La gráfica que se obtiene es un ciclo, lo cual contradice la hipótesis de que G no es subgráfica de ningún ciclo de K_n . Por lo tanto G debe contener un vértice de grado al menos tres y como K_n es simple, G debe contener una subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$.

Para el caso (b), si G contiene un ciclo C y no está contenida en ningún ciclo de K_n , entonces G contiene alguna otra arista e . Si e es adyacente a C en un vértice v , entonces v tiene grado tres y por tanto G contiene una subgráfica isomorfa a $K_{1,3}$. Si e no es adyacente a C , entonces las aristas de C junto con e , satisfacen (b).

Hemos probado que toda gráfica cuyo conjunto de aristas es un transversal de los hiperplanos de $M^*(K_n)$ contiene una subgráfica G cuyo conjunto de aristas cumple (i) o (ii). Por lo tanto el bloqueador consta únicamente de conjuntos de aristas de subgráficas G que satisfacen (i) o (ii). Más aún, las gráficas que cumplen (i) no contienen como subgráficas a ninguna gráfica que satisfaga (ii), y viceversa; por lo tanto, el tropel bloqueador de los hiperplanos de $M^*(K_n)$ consta exactamente de los conjuntos de aristas descritos en (i) y (ii). ■

4.4.2. Gráficas bipartitas completas

Teorema 185 [★] *Sea $K_{m,m}$ una gráfica bipartita completa con bipartición (V_1, V_2) sea $M^*(K_{m,m})$ su matroide de cociclos. Sea \mathcal{H}^* el tropel de hiperplanos de $M^*(K_{m,m})$ y sea b el mapeo bloqueador. Entonces $b(\mathcal{H}^*)$ consta de las siguientes colecciones:*

- i) *Conjuntos de aristas de subgráficas G de $K_{m,m}$ isomorfas a la estrella $K_{1,3}$.*
- ii) *Conjuntos de aristas de subgráficas G de $K_{m,m}$ con dos componentes conexas, una de las cuales consta de un ciclo de $K_{m,m}$ y la otra de una arista no adyacente a dicho ciclo.*

Demostración: La prueba es análoga a la del Teorema 184, salvo por la parte en la que se mostró que cualquier gráfica acíclica de grado a lo más dos es subgráfica de un ciclo. Esta afirmación sigue siendo cierta, pero la prueba requiere una construcción diferente.

Sea G una gráfica acíclica de grado a lo más dos. Entonces necesariamente G es una gráfica cuyas componentes conexas son trayectorias.

Sean T_1, T_2, \dots, T_n dichas trayectorias. Sean T_1, \dots, T_q las trayectorias de longitud impar; sean T_{q+1}, \dots, T_{q+r} las trayectorias de longitud par que comienzan y terminan en V_1 ; sean $T_{q+r+1}, \dots, T_{q+r+s}$ las trayectorias de longitud par que empiezan y terminan en V_2 (ver la Figura 186).

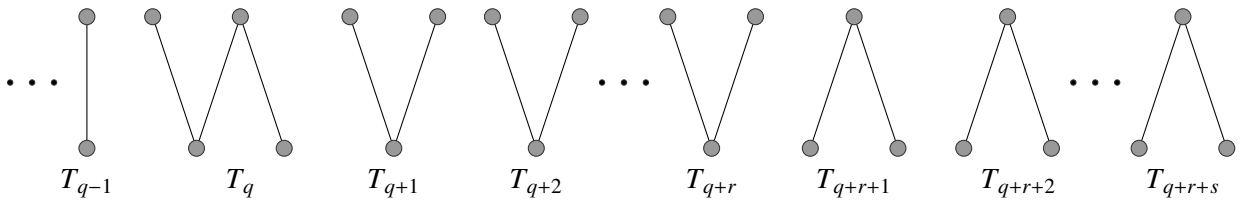


Figura 186 Trayectorias $T_1, \dots, T_{q+r+s=n}$ del Teorema 185.

Construiremos un ciclo que contiene a T_1, T_2, \dots, T_n . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r \leq s$. Primero, para $i < q$ añadimos una arista del extremo de T_i en V_2 al extremo de T_{i+1} en V_1 . Obtenemos una trayectoria Γ_1 que comienza en V_1 y termina en V_2 , contiene a T_1, \dots, T_q y toca los mismos vértices que T_1, \dots, T_q (Ver la Figura 187).

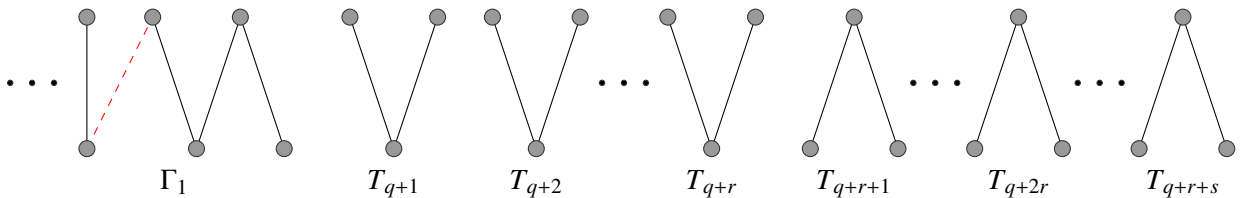


Figura 187 Obtención de la trayectoria Γ_1 del Teorema 185.

A continuación, para $i < r$ añadimos una arista de un extremo de T_{q+i} a un extremo de T_{q+r+i} para obtener una trayectoria \hat{T}_{q+i} que contiene a T_{q+i} y a T_{q+r+i} y que tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 (ver la Figura 188).

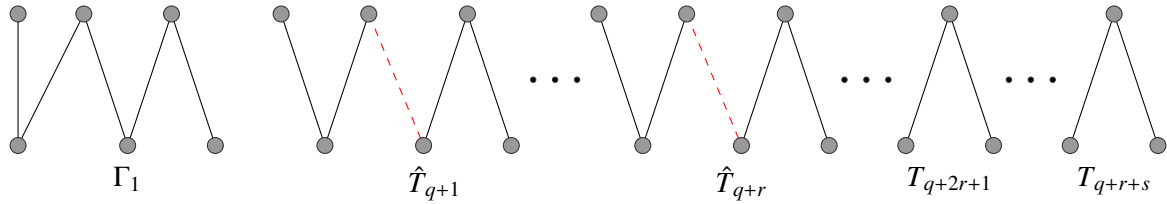


Figura 188 Obtención de las trayectorias $\hat{T}_{q+1}, \dots, \hat{T}_{q+r}$ del Teorema 185.

Ahora, para $i < r$ añadimos una arista del extremo de \hat{T}_{q+i} en V_2 al extremo de \hat{T}_{q+i+1} en V_1 , obtenemos una trayectoria Γ_2 con un extremo en V_1 y el otro en V_2 que contiene a T_{q+1}, \dots, T_{q+r} y a $T_{q+r+1}, \dots, T_{q+r+r}$ y toca los mismo vértices que T_{q+1}, \dots, T_{q+r} y a $T_{q+r+1}, \dots, T_{q+r+r}$ (ver la Figura 189).

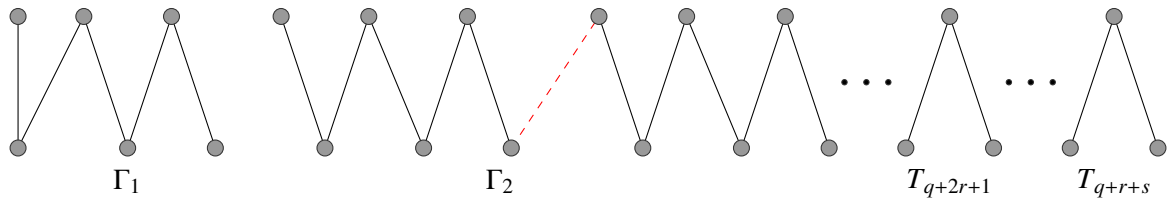


Figura 189 Construcción de la trayectoria Γ_2 del Teorema 185.

A continuación añadimos una arista del extremo en V_2 de Γ_1 al extremo en V_1 de Γ_2 . Obtenemos una trayectoria Γ_3 con un extremo en V_1 y el otro en V_2 , la cual toca la misma cantidad de vértices de V_1 que de V_2 . Si $r = s$, entonces añadimos una arista que una los extremos de Γ_3 y obtenemos un ciclo que contiene a G . Si $r < s$, tenemos la trayectoria Γ_3 y las trayectorias $T_{q+r+r+1}, \dots, T_{q+r+s=n}$ (ver la Figura 190).

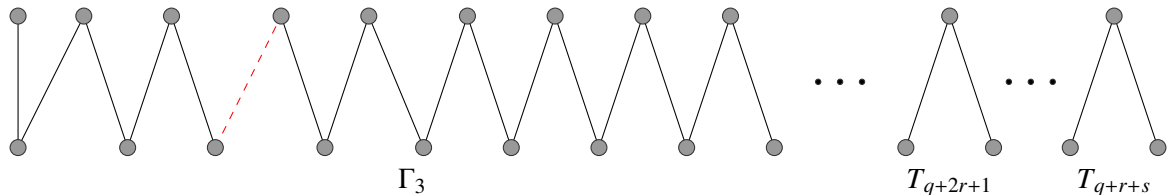


Figura 190 Construcción de la trayectoria Γ_3 del Teorema 185.

Cada trayectoria $T_{q+r+r+1}, \dots, T_{q+r+s=n}$ contiene exactamente un vértice más de V_2 que de V_1 y puesto que son $s - r$ en total, en $K_{m,m}$ hay $s - r$ vértices de V_1 que no tocan a Γ_3 ni a $T_{q+r+r+1}, \dots, T_{q+r+s=n}$.

Sean $v_{q+r+r+1}, v_{q+r+r+2}, \dots, v_{q+r+r+s-r=n}$ dichos vértices. Sean $w_{q+r+r+i}, u_{q+r+r+i}$ los dos extremos de $T_{q+r+r+i}$. Para $i > 0$, añadiremos una arista de $u_{q+r+r+i}$ a $v_{q+r+r+i}$ y una arista de $v_{q+r+r+i}$ a $w_{q+r+r+i+1}$. Se obtiene una trayectoria Γ_4 con un extremo en V_1 y el otro en V_2 . (ver la Figura 191)

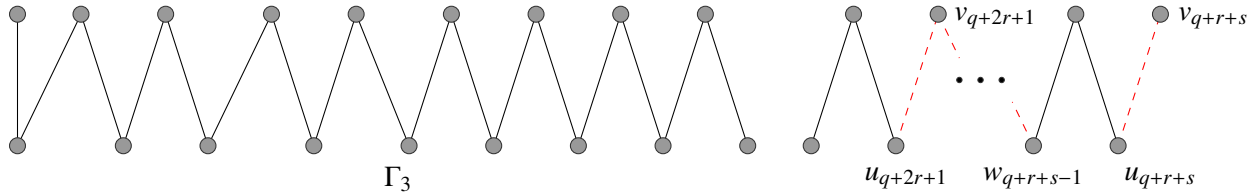


Figura 191 Adición de aristas para construir la trayectoria Γ_4 del Teorema 185.

Uniendo el extremo de Γ_4 en V_1 con el extremo de Γ_3 en V_2 y el extremo de Γ_3 en V_1 con el extremo de Γ_4 en V_2 obtenemos un ciclo que contiene a las trayectorias originales.

Se sigue que, los bosques de grado a lo más dos, no son transversales de los hiperplanos de $M^*(K_{m,n})$ y por tanto el teorema queda demostrado. ■

Teorema 192 ★ Sea $K_{m,n}$ una gráfica bipartita completa con bipartición (V_1, V_2) , con $|V_1| = m < n = |V_2|$ y sea $M^*(K_{m,n})$ su matroide de cociclos. Sea \mathcal{H}^* el tropel de hiperplanos de $M^*(K_{m,n})$. Sea b el mapeo bloqueador. Entonces $b(\mathcal{H}^*)$ consta de los miembros minimales de la unión de las siguientes colecciones:

- i) Conjuntos de aristas de subgráficas G de $K_{m,n}$ isomorfas a la estrella $K_{1,3}$.
- ii) Conjuntos de aristas de subgráficas G de $K_{m,n}$ con dos componentes conexas, una de las cuales consta de un ciclo de $K_{m,m}$ y la otra de una arista no adyacente a dicho ciclo.
- iii) Conjuntos de aristas de subgráficas G de $K_{m,n}$ que son bosques que saturan $m + 1$ vértices de V_2 .

Demostración: La prueba es análoga a la del Teorema 185, salvo que ahora, para una gráfica G que satisfaga el caso *iii*) no hay ningún ciclo que contenga a G . La razón es que cualquier ciclo de $K_{m,n}$ contiene la misma cantidad de vértices de V_1 que de V_2 , pero dado que $m < n$, se necesitarían $m + 1$ vértices de V_1 para poder construir un ciclo que contenga a G , esto es imposible pues V_1 solo tiene m vértices.

Nótese también que ninguna gráfica que satisfaga el caso *iii*) puede estar contenida en una gráfica que satisfaga el caso *ii*), porque las gráficas del caso *ii*) también tocan la misma cantidad de vértices de V_1 que de V_2 de modo que no pueden contener una subgráfica que sature $m + 1$ vértices de V_2 .

Puede ocurrir que una gráfica G del caso *iii*) esté contenida en una gráfica G' del caso *i*). Un ejemplo que lo ilustra ocurre en el matroide de cociclos de $K_{1,3}$, cuyo tropel de hiperplanos consta de los conjuntos de dos aristas y en este caso el tropel bloqueador de los hiperplanos coincide con el propio tropel de hiperplanos. Es por esta razón que se tienen que considerar los conjuntos *minimales* de la unión de las colecciones de los casos *i*), *ii*) y *iii*). ■

4.5. Matroides modulares

Por el Corolario 98 se tiene que, en el caso de los matroides modulares sin lazos, una línea es modular si y solo si interseca a todos los hiperplanos. Para matroides simples, tenemos lo siguiente:

Lema 193 [★] *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide modular simple, entonces las líneas son miembros del bloqueador de los hiperplanos.*

Demostración: Sea L una línea de M , entonces por el Corolario 98 se tiene que L interseca a todos los hiperplanos de M . Vamos a demostrar que L es un transversal *minimal* de los hiperplanos.

Sean x, y dos puntos de L distintos. Puesto que M no tiene elementos paralelos, existe un hiperplano H que no contiene a x pero que sí contiene a y . Al ser L y H modulares, se tiene que $r(L) + r(H) = r(L \cup H) + r(L \cap H)$, de modo que $r(L \cap H) = r(L) + r(H) - r(L \cup H) = 2 + (r - 1) - r = 1$ y como M no tiene lazos, esto significa necesariamente que $H \cap L$ consta únicamente del punto y , luego $L - y$

no interseca al hiperplano H . Como y es un elemento arbitrario de L , se sigue que L es un transversal *minimal* de los hiperplanos de M . ■

Si M es un matroide simple modular de rango $r > 2$, entonces M tiene cerrados de rango dos y estos cerrados son miembros del bloqueador de los hiperplanos de M . Este hecho es interesante pues los matroides simples modulares son una de las pocas clases de matroides para las cuales se tiene una caracterización explícita de algunos miembros del bloqueador de los hiperplanos.

En el caso general, si el matroide no tiene lazos y su rango es mayor o igual que tres todavía podemos buscar bloqueadores de los hiperplanos dentro los cerrados modulares de rango mayor que dos, tal y como lo muestra el siguiente lema.

Lema 194 [★] *Sea M un matroide sin lazos, si F es uno de sus cerrados modulares con rango mayor que dos, entonces F es un transversal de los hiperplanos de M .*

Demostración: Por la Proposición 97, F es un cerrado modular si y solo si $r(F) + r(Y) = r(F \cup Y)$ para todos los cerrados Y que intersecan a F en $cl(\emptyset)$. Supongamos que F no interseca a algún hiperplano H , puesto que M no tiene lazos, esto es $F \cap H = \emptyset = cl(\emptyset)$. Entonces debería tenerse que $r(F) + r(H) = r(F \cup H)$, sin embargo, $r(F) + r(H) \geq 2 + r(M) - 1 = r(M) + 1$ y claramente $r(F \cup H) \leq r(M)$. Luego

$$r(M) + 1 \leq r(F) + r(H) = r(F \cup H) = r(M),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto F interseca a todos los hiperplanos de M . ■

4.5.1. Geometrías proyectivas

Un caso particular de matroides modulares son las geometrías proyectivas. En esta subsección se dará una demostración de que en una geometría proyectiva las líneas son transversales *minimales* de los hiperplanos.

Teorema 195 [★] *En una geometría proyectiva (P, \mathcal{L}, ι) las líneas son miembros del bloqueador de los hiperplanos.*

Demostración: De acuerdo con la clasificación dada en el Teorema 90, si omitimos los casos triviales, podemos suponer que (P, \mathcal{L}, ι) es un plano proyectivo o que (P, \mathcal{L}, ι) puede ser identificado con los puntos y líneas de $PG(n, q)$ para algún entero $n > 2$ y alguna potencia de un número primo q . En esta demostración, dado $A \subseteq P$ denotaremos con \widehat{A} al subespacio más pequeño de (P, \mathcal{L}, ι) que contiene a A .

Dado que cualquier línea tiene al menos tres puntos y que cualesquiera dos puntos están en una única línea, bastará considerar todos los subespacios L generados por exactamente dos puntos $x, y \in P$.

Si $L = \widehat{\{x, y\}}$, cualquier hiperplano que contenga a $\{x\}$ interseca trivialmente a L así que solo nos falta considerar a los hiperplanos que no contienen a x .

Sea H un hiperplano que no contiene a x y sea $y \in P - \{x\}$, tenemos que: $\widehat{H \cup x} \subseteq \widehat{H \cup \{x, y\}} \subseteq P$ y además

$$\dim(\widehat{H \cup x}) = \dim H + \dim x - \dim(H \cap x) = (r - 1) + 0 - (-1) = r.$$

Y de esta igualdad se sigue que $\widehat{H \cup x} = P$. Por otro lado, se tiene que

$$\dim H \cap \widehat{\{x, y\}} = \dim \widehat{\{x, y\}} + \dim H - \dim(\widehat{H \cup \{x, y\}}) = 1 + r - 1 - r = 0.$$

Por lo tanto $\widehat{\{x, y\}}$ interseca a H en un único punto.

Ahora observe que, en particular, si H' es cualquier hiperplano que contiene a y pero no a x , se tiene que $\widehat{\{x, y\}}$ interseca a H' únicamente en y . Por lo tanto $\widehat{\{x, y\}}$ es un transversal *minimal* de los hiperplanos.

Al ser $\{x, y\}$ arbitrarios, se sigue que todas las líneas están en el bloqueador de los hiperplanos. ■

En el caso del plano proyectivo más pequeño (es decir, el matroide de Fano), no es difícil ver que el tropel bloqueador de los hiperplanos es exactamente el tropel de líneas. Esto no es cierto en general, el plano proyectivo $PG(2, 3)$ nos da un ejemplo² de que además de las líneas, pueden existir otros conjuntos en el bloqueador de los hiperplanos.

²Puede consultar este ejemplo en la Sección 5.2 de esta tesis.

4.6. Matroides de empedrado ralo

En esta sección caracterizamos el bloqueador de los hiperplanos de una subclase de los matroides de empedrado ralo en la que todo circuito de cardinal $r(M) + 1$ cubre algún hiperplano.

Teorema 196 [★] *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide de empedrado ralo de rango $r \geq 2$ sobre un conjunto E de cardinalidad n y tal que todo circuito de cardinalidad $r + 1$ contiene un hiperplano. Sean $\mathcal{H}, \mathcal{C}^*$ y \mathcal{B}^* sus tropes de hiperplanos, cocircuitos y cobases respectivamente. Sea $\mathcal{G}^* = \{B^* \in \mathcal{B}^* : B^* \not\subseteq C^*, \forall C^* \in \mathcal{C}^*\}$ y $\mathcal{N}^* = \{A \subseteq E : |A| = (n - r) + 1, A \notin \mathcal{C}^*, \forall B \in \mathcal{G}^*, B \not\subseteq A\}$. Entonces, el bloqueador de los hiperplanos de M es el tropel:*

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{G}^* \cup \mathcal{N}^* \cup \{A \subseteq E : |A| = (n - r) + 2, \forall X \in \mathcal{G}^* \cup \mathcal{N}^*, X \not\subseteq A\}$$

Demostración: Como M es de empedrado ralo, sus hiperplanos tienen cardinalidades r o $(r - 1)$ y además forman una $(r - 1)$ -partición.

Sea A un subconjunto de E de cardinalidad $(n - r) + 2$, A es un transversal de \mathcal{H} pues un subconjunto de E con cardinalidad $(n - r) + 2$ interseca a cualquier subconjunto E con cardinalidad mayor o igual que $(r - 1)$.

Ahora tomemos un subconjunto A' de E de cardinalidad $(n - r) + 1$ tal que no es cocircuito. Su complemento tiene cardinal $r - 1$ y no es un hiperplano; más aún, como no hay hiperplanos de cardinalidad menor o igual que $r - 1$, dicho complemento no contiene ningún hiperplano; se sigue que A' es un transversal de los hiperplanos de M .

Sea $\hat{A} \in \mathcal{B}^*$ tal que \hat{A} no está contenido en ningún cocircuito. \hat{A} interseca a todos los circuitos por ser una cobase, en particular interseca a los circuitos-hiperplanos y como no está contenida en ningún cocircuito, entonces también interseca a todos los hiperplanos de cardinalidad $r - 1$, es decir, \hat{A} es un transversal de \mathcal{H} .

Finalmente, dado $A \subseteq E$ de cardinalidad $(n - r) - 1$, el conjunto $E - A$ tiene cardinalidad $r + 1$. Si $E - A$ es un circuito, entonces por hipótesis, $E - A$ contiene un hiperplano. Si $E - A$ no es un circuito,

entonces $E - A$ debe contener un circuito-hiperplano puesto que es dependiente y de cardinal $r + 1$. En cualquier caso, $E - A$ contiene un hiperplano y por lo tanto A no es transversal de \mathcal{H} . ■

Este teorema nos permite caracterizar a los bloqueadores de los hiperplanos de los matroides que son *duales de sistemas de Steiner de rango r* , puesto que el matroide dual de un sistema de Steiner no tiene circuitos de cardinalidad $(n - r) + 1$, por vacuidad, todos los circuitos cubren a algún hiperplano. Es decir, el bloqueador de los hiperplanos de un matroide de rango $n - r$ que es dual de un sistema de Steiner de rango r , consta de la colección \mathcal{G}^* de bases del sistema de Steiner que no están contenidas en ningún circuito, la colección \mathcal{N}^* de conjuntos de cardinalidad $r + 1$ que no contienen miembros de \mathcal{G}^* y los conjuntos de cardinalidad $r + 2$ que no contienen miembros $\mathcal{G}^* \cup \mathcal{N}^*$.

4.6.1. Construcción del bloqueador de los hiperplanos de matroides de empedrado ralo

Usando el Ejemplo 18 y el Corolario 133 obtenemos el siguiente resultado que nos permite construir de manera más eficiente el bloqueador de los hiperplanos de un matroide de empedrado ralo de rango r a partir del bloqueador de los hiperplanos del matroide uniforme $U_{r,n}$.

Teorema 197 [★] *Sea H un circuito hiperplano de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$. Sea b_{\spadesuit}^H el mapeo de mapeo de b -tensado de H .*

Entonces $(\mathcal{F}; E)$ es un tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide de empedrado ralo de rango r sobre E si y solo si existen $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ conjuntos de tamaño r , no habiendo dos de ellos con intersección de cardinalidad $r - 1$, tales que $\mathcal{F} = (b_{\spadesuit}^{H_1} \circ b_{\spadesuit}^{H_2} \circ \dots \circ b_{\spadesuit}^{H_m})(\mathcal{S})$ donde $\mathcal{S} = \{A \subseteq E : |A| = n - r + 2\}$

Demostración: Se sigue del hecho de que cualquier matroide de empedrado ralo puede obtenerse tensando hiperplanos en el matroide uniforme $U_{r,n}$ y el tropel $(\mathcal{S}; E)$ es el tropel bloqueador de los hiperplanos de $U_{r,n}$. ■

4.7. Manguales con punta

4.7.1. Manguales libres con punta

Cuando en un mangual se relaja un circuito-hiperplano, se obtiene otro mangual. Repitiendo este proceso hasta que todos los circuitos-hiperplanos hayan sido relajados se produce un mangual libre.

El siguiente corolario se deduce fácilmente del Lema 114 y nos da una caracterización de los hiperplanos de un mangual libre.

Corolario 198 [★] Si $E = \{t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r\}$ es un conjunto finito, con $r \geq 3$. Los hiperplanos de un mangual libre de rango r con punta t y piernas $L_i = \{x_i, y_i, t\}$ consisten en la unión de las siguientes colecciones:

HM1) Todos los conjuntos de la forma $E - \{x_i, y_i, x_j, y_j\}$ con $1 \leq j \leq r$;

HM2) Todos los subconjuntos con $(r-1)$ elementos de $E - t$ que contienen a lo más un elemento de cada $\{x_i, y_i\}$.

Teorema 199 [★] El bloqueador de los hiperplanos del mangual libre de rango r sobre el conjunto finito $E = \{t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r\}$ con punta t y piernas $\{\{x_i, y_i, t\} : 0 \leq i \leq r\}$, es el tropel $(\mathcal{S}; E)$ donde \mathcal{S} consta de la unión de las siguientes colecciones:

i) $\mathcal{S}_1 = \{t, x_i, y_i, x_j, y_j\} : 1 \leq i, j \leq r, i \neq j\}$;

ii) $\mathcal{S}_2 = \{\{x_{i_1}, y_{i_1}, x_{i_2}, y_{i_2}, z_{i_3}\} : z_{i_3} \in \{x_{i_3}, y_{i_3}\}, 1 \leq i_j \leq r \text{ para } 1 \leq j \leq 3; i_k \neq i_l \Leftrightarrow k \neq l\}$.

Demostración: A continuación se listan los conjuntos de transversales de las colecciones de los incisos *HM1)* y *HM2)*, respectivamente, listadas en el Corolario 198.

bHM1) Los conjuntos que intersecan a todos los hiperplanos de la forma $E - \{x_i, y_i, x_j, y_j\}$ con $1 \leq j \leq r$ son el conjunto $\{t\}$ y los conjuntos con tres elementos (distintos de la punta t) de piernas distintas.

bHM2) Los conjuntos transversales de los hiperplanos con $(r-1)$ elementos de $E-t$ que contienen a lo más un elemento de cada $\{x_i, y_i\}$ son los conjuntos de cardinalidad cuatro de la forma $\{x_i, y_i, x_j, y_j\}$. (Observe que son *minimales* pues, por ejemplo, el conjunto $\{x_i, y_i, x_j\}$ no interseca al hiperplano $\{x_1, \dots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, x_r\}$).

Entonces, los transversales de todos los hiperplanos son los conjuntos que pertenecen tanto a *bHM1*) como a *bHM2*), es decir, satisfacen lo siguiente:

- (T1) Conjuntos que contienen a t y a un subconjunto $\{x_i, y_i, x_j, y_j\}$;
- (T2) Conjuntos que no contienen a t , contienen tres elementos de piernas distintas y un subconjunto de la forma $\{x_i, y_i, x_j, y_j\}$ (por ejemplo, los conjuntos de cardinalidad cinco $\{x_i, y_i, x_j, y_j, x_k\}$ y $\{x_i, y_i, x_j, y_j, y_k\}$).

Los miembros *minimales* enunciados en (T1) nos dan \mathcal{S}_1 y los enunciados en (T2) nos dan \mathcal{S}_2 . ■

4.7.2. Construcción del bloqueador de los hiperplanos de manguales con punta

Usando el Teorema 199 y el Corolario 133 obtenemos el siguiente resultado que nos permite construir de manera más eficiente el bloqueador de los hiperplanos de un mangual con punta t de rango r a partir del bloqueador de los hiperplanos del mangual libre con punta t de rango r .

Teorema 200 ^{*} Sea H un circuito hiperplano de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$. Sea $b^{\blackspadesuit H}$ el mapeo de b -tensado de H . Entonces $(\mathcal{F}; E)$ es un tropel bloqueador de los hiperplanos de un mangual de rango r sobre $E = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r, t\}$ con piernas $\{\{t, x_i, y_i\} : 1 \leq i \leq r\}$ y punta t si y solo si existen $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ conjuntos de tamaño r , sin la punta t , conteniendo exactamente un miembro de cada pierna y no habiendo dos de ellos con intersección de cardinalidad $r-1$, tales que

$$\mathcal{F} = (b^{\blackspadesuit H_1} \circ b^{\blackspadesuit H_2} \circ \dots \circ b^{\blackspadesuit H_m})(\mathcal{S}),$$

donde \mathcal{S} es el bloqueador de los hiperplanos del mangual libre de rango r sobre E con punta t que se describió en el Teorema 199.

Demostración: Cualquier mangual puede obtenerse tensando hiperplanos en el mangual libre de rango r y el tropel $(S; E)$ es el tropel bloqueador de los hiperplanos del mangual libre de rango r sobre el conjunto $E = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r, t\}$ con piernas $\{\{t, x_i, y_i\} : 1 \leq i \leq r\}$ y punta t . ■

4.8. Arreglos de pseudolíneas

En esta sección caracterizamos el bloqueador de una familia de arreglos simples de pseudolíneas, que dan lugar a una clase particular de matroides de rango tres.

Definición 201 Una *pseudolínea* en el plano proyectivo es una curva homotópicamente equivalente a una recta proyectiva. Un *arreglo simple de pseudolíneas* es un conjunto de pseudolíneas por cuyos puntos de intersección solo pasan dos pseudolíneas.

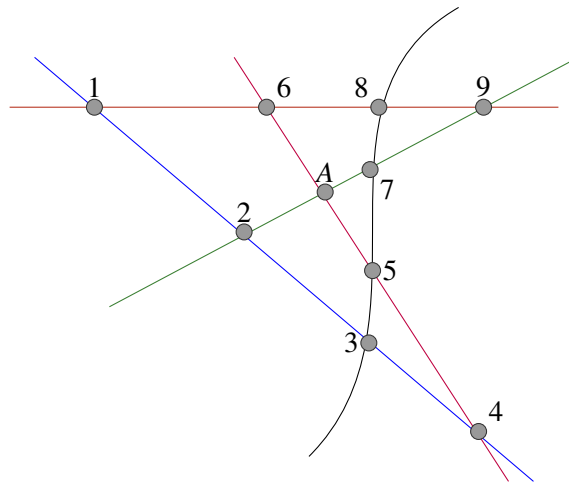


Figura 202 Ejemplo de un arreglo de pseudolíneas

Dado un arreglo simple \mathcal{L} de n pseudolíneas, existe un matroide $M(\mathcal{L})$ de rango tres asociado al arreglo. El conjunto sobre el que está definido $M(\mathcal{L})$ es el conjunto de puntos de intersección de las pseudolíneas; el tropel de hiperplanos de $M(\mathcal{L})$ consta de los conjuntos conformados por todos los puntos de intersección que pertenecen a una misma pseudolínea y todas las parejas de puntos de intersección que no están en una misma pseudolínea. Note que si en el arreglo todas las pseudolíneas se intersecan,

el conjunto sobre el que está definido dicho matroide tiene cardinalidad $n(n-1)/2$ ya que hay n pseudolíneas en el arreglo, cada una de ellas tiene $n-1$ puntos de intersección y cada punto de intersección está en exactamente dos pseudolíneas.

Teorema 203 [★] *Dado un arreglo simple de $n \geq 4$ pseudolíneas en el que cada pseudolínea interseca a todas las demás, el tropel bloqueador de los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$ consta de las siguientes colecciones.*

- i) *El complemento de una pseudolínea L junto con algún punto cualquiera de L .*
- ii) *El complemento de tres puntos que formen un triángulo en el arreglo de pseudolíneas (aquí entenderemos por triángulo a cualesquiera tres puntos no colineales que no contienen hiperplanos de cardinalidad dos).*

Demostración: Sea E el conjunto sobre el que está definido el matroide. Primero probaremos que los conjuntos listados en el enunciado del teorema son bloqueadores de los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$.

Sea D el complemento de una pseudolínea L con algún punto x de L . El conjunto $D = (E - L) \cup x$ contiene propiamente a un cocircuito de $M(\mathcal{L})$ y por lo tanto es un transversal de los hiperplanos; más aún, es *minimal* ya que si le quitamos x , deja de intersecar al hiperplano L y si le quitamos algún $y \neq x$, existen exactamente dos puntos de L , digamos x_1, x_2 tales que $\{y, x_1\}, \{y, x_2\}$ están contenidos en pseudolíneas del arreglo. Como L tiene más de tres puntos, existe x_3 tal que $\{y, x_3\}$ no está contenido en ninguna pseudolínea del arreglo, esto es, $\{y, x_3\}$ es un hiperplano de M al que $D - y$ no interseca.

Si $T = \{x, y, z\}$ es un conjunto de tres puntos no colineales que no contiene como subconjuntos a hiperplanos de tamaño dos. Entonces $E - T$ interseca a todos los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$ que tienen cardinalidad $n-1$ dado que $|T| = 3 < 4 \leq n-1$, T no puede contener uno de dichos hiperplanos. Por otro lado, por definición T tampoco contiene hiperplanos de cardinalidad dos. Ahora, $E - T$ es un transversal *minimal* ya que si le quitamos cualquier punto w , entonces al menos uno de los conjuntos $\{w, x\}, \{w, y\}$ y $\{w, z\}$ es un hiperplano de cardinalidad dos de $M(\mathcal{L})$ a los que $(E - T) - w$ no interseca.

Los dos párrafos anteriores muestran que los conjuntos enunciados en el teorema son miembros del tropel bloqueador de los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$; a continuación demostraremos que cualquier otro transversal de los hiperplanos contiene necesariamente a un conjunto de estas colecciones.

Primero veamos que cualquier conjunto D cuyo complemento contenga dos puntos $\{x, y\}$ no colineales en el arreglo, no es transversal de los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$ ya que no intersecará al hiperplano $\{x, y\}$. Por lo tanto, si A es un transversal de los hiperplanos, para cualesquiera dos puntos de $E - A$ debe existir una pseudolínea del arreglo que los contenga.

Para el caso en que $|E - A| \leq 3$, tenemos que A o bien contiene un conjunto como los del inciso *ii*) del teorema; o bien los tres puntos están en una misma pseudolínea, $|E| - |n - 1| + 1 \leq 3$ y A contiene un conjunto como los descritos en el inciso *i*) (observe que este último caso solo ocurre cuando $n = 4$ o $n = 5$).

Por el contrario, si $E - A \geq 4$ (no es difícil verificar que este caso solo es posible si $n \geq 6$) entonces $E - A$ no puede contener propiamente tres puntos que formen un triángulo en el arreglo de pseudolíneas (ya hemos probado antes que los complementos de tres puntos que forman triángulos en el arreglo \mathcal{L} son transvesales *minimales* de los hiperplanos de $M(\mathcal{L})$).

Se sigue que todos los elementos de $E - A$ deben estar contenidos propiamente en una misma pseudolínea y por lo tanto A debe contener un conjunto como los del inciso *i*) del Teorema 203. ■

Capítulo 5

Programa computacional y ejemplos obtenidos con un ordenador

En este penúltimo capítulo se muestra el código fuente del programa que se ha implementado en lenguaje *Python 3.5* para calcular ejemplos con ayuda de un ordenador. También se muestran algunos ejemplos que se han obtenido con ayuda del programa o que han servido para verificar su correcto funcionamiento.

5.1. Programa para listar el bloqueador de un tropel

El programa lo he reescrito en varias ocasiones con el objetivo de ampliar su capacidad cuando se necesitaba analizar ejemplos de tropeles sobre conjuntos con más elementos; hasta el momento, este programa permite enumerar los elementos del tropel bloqueador de cualquier tropel sobre un conjunto dado, siempre que la capacidad de memoria del ordenador lo permita. En particular, para verificar algunos de los resultados que se incluyeron en esta tesis, trabajé con conjuntos de hasta cardinalidad 21 en un ordenador personal con procesador de dos núcleos de 2.2 GHz y 2GB de memoria DDR3 SDRAM obteniendo el resultado en poco menos de 15 minutos.

En el recuadro gris que aparece en esta página y las tres que le siguen, se muestra el código fuente del programa, tal y como se ve en el editor de código. Los comentarios aparecen señalados con el símbolo # y dan información sobre lo que hace cada sección de código del programa. El símbolo • denota al carácter de espacio en blanco. Para generar el conjunto potencia nos hemos basado en un algoritmo que aparece en el libro de Cameron [1996]; dicho algoritmo está basado en la representación de conjuntos por sucesiones binarias y tiene la particularidad de que al generar un determinado conjunto, todos los subconjuntos de dicho conjunto han sido generados en pasos previos. Nos referiremos a este algoritmo como el algoritmo \mathcal{A} .

Así, dado un tropel C y su conjunto base E , para obtener una lista de los transversales *minimales* de C , el programa comienza con una lista vacía L y genera (con el orden dado por el algoritmo \mathcal{A}) un conjunto A_1 del conjunto potencia 2^E , luego determina si A_1 es un transversal del tropel C y si hay algún subconjunto de A_1 en la lista L : si A_1 es un transversal y no hay ninguno de sus subconjuntos en L , se agrega A_1 a la lista L y se genera un nuevo conjunto A_2 ; en otro caso, solo se genera un nuevo conjunto A_2 . El programa continúa de manera recursiva (haciendo lo mismo que se le hizo a A_1) con los conjuntos $A_2, \dots, A_{|2^E|}$ de 2^E generados por el algoritmo \mathcal{A} y al finalizar la recursión imprime la lista L , que en ese momento consta exactamente de todos los miembros de $b(C)$.

```

1 #•-•-• coding : • utf-8•-•-•-
2 #Pedimos• los• miembros• del• tropel
3 print( ' Introduzca• los• miembros• del• tropel• como• cadenas• sin• repeticiones• (por•
    ejemplo , para• {1 , e , 4}• escriba• 1e4 ) . Cuando• haya• introducido• todos• los•
    miembros• del• tropel , introduzca• el• número• cero• y• pulse• intro• para• comenzar . Si•
    comete• algún• error , escriba• ERROR• y• pulse• intro . ' )
4 tropel = []
5 miembro = ''
6 cuenta = 0
7 while miembro != '0' :
8     • miembro = str( input ( ) )
9     • if miembro != 'ERROR' :
10    • • • if miembro != 0:
11    • • • • cuenta = cuenta + 1
12    • • • • tropel . append ( miembro )

```

```

13  •• else :
14  •••• print('Introduzca el elemento erróneo y pulse intro para eliminarlo')
15  •••• miembro= str(input())
16  •••• a=0
17  •••• for b in tropel :
18  •••••• if b==miembro:
19  •••••••• tropel.remove(miembro)
20  •••••••• cuenta=cuenta-1
21  •••••••• print('El elemento ha sido borrado')
22  •••••••• a=1
23  •••• if a==0:
24  •••••• print('El elemento no está en la lista , no se ha hecho ningún cambio . Puede
        continuar. ')
25  tropel.remove('0')
26  print('')
27  print('TROPEL: ')
28  print(tropel)
29  print('')
30  print('Total de conjuntos introducidos:•')
31  print(cuenta-1)
32
33  #Pedimos el conjunto base
34  print('Introduzca una cadena de caracteres sin repeticiones (por ejemplo 138af) , •
        cada caracter será un miembro del conjunto base del tropel. ')
35  transversales=[]
36  potencialistatemp=[]
37  cadenalista=[]
38  cadenita= str(input('CONJUNTO BASE: '))
39  for c in cadenita :
40  •• cadenalista.append(c)
41  print(cadenalista)
42
43  #Generamos el conjunto potencia y vamos guardando en una lista a los miembros del
        bloqueador.

```

```

44 contadortotal=0
45 percent=0
46 while contadortotal < 2**(len(cadenita))-1:
47     contadortotal=contadortotal+1
48     if int(contadortotal*100/2**(len(cadenita))-1) > percent:
49         print(str(int(contadortotal*100/2**(len(cadenita))-1))+"%");
50         percent=int(contadortotal*100/2**(len(cadenita))-1)
51     i=0
52     for d in cadenalista:
53         if d not in potencialistatemp:
54             i=cadenalista.index(d)+1
55         for e in cadenalista[i-1:len(cadenita)]:
56             if e in potencialistatemp:
57                 potencialistatemp.remove(e)
58             potencialistatemp.append(cadenalista[i-1])
59     com=''
60     soplón=0
61     for p in cadenalista:
62         if p not in potencialistatemp:
63             com=com+p
64         for t in tropel:
65             delator=0
66             for m in t:
67                 if m in com:
68                     delator=delator+1
69                 if delator==len(t):
70                     soplón=1
71         if soplón!=1:
72             tr=''
73             for r in cadenalista:
74                 if r not in com:
75                     tr=tr+r
76             motr=[ji for ji in tr]
77             if len(transversales)==0:

```

```

76 ..... transversales.append(tr)
77 ..... else:
78 ..... marca=0
79 ..... for mot in transversales:
80 .....     epeller=[signe for signe in mot]
81 .....     if set(motr)>set(epeller):
82 .....         marca=1
83 .....     if marca==0:
84 .....         transversales.append(tr)
85
86 #Se imprimen los resultados
87 print('TROPOL: ')
88 print(tropel)
89 print('')
90 print("BLOQUEADOR: ")
91 transversales.sort()
92 transversales.sort(key=len, reverse=False)
93 print(transversales)

```

5.2. Algunos ejemplos obtenidos con un ordenador

Matroide de Vámos

Consideremos V_8 el matroide de Vámos sobre el conjunto $[8] := (12345678)$. Con el etiquetado que se muestra en la Figura 105, el tropel de hiperplanos de este matroide es $\mathcal{H} = \{(1234), (1256), (3456), (3478), (5678), (127), (128), (135), (136), (137), (138), (145), (146), (147), (148), (157), (158), (167), (168), (178), (235), (236), (237), (238), (245), (246), (247), (248), (257), (258), (267), (268), (278), (357), (358), (367), (368), (457), (458), (467), (468)\}$.

El tropel bloqueador de los hiperplanos de este matroide es $b(\mathcal{H}) = \{(134567), (134568), (234567), (234568), (12345), (12346), (12347), (12348), (12356), (12378), (12456), (12478), (12567), (12568), (12578), (12678), (13478), (15678), (23478), (25678), (34578), (34678), (35678), (45678)\}$.

Observe que $b(\mathcal{H})$ esta conformado por conjuntos de cardinalidades cinco y seis.

Matroide de Fano

Consideremos F_7 el matroide de Fano sobre el conjunto $[7] := (1234567)$.

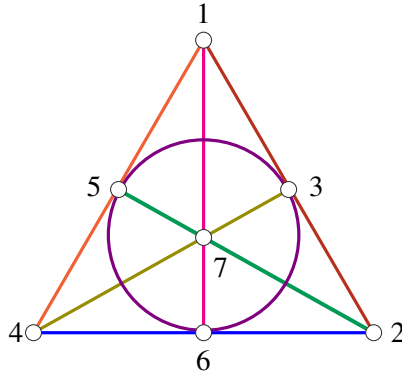


Figura 204 Representación geométrica del matroide de Fano.

Con el etiquetado que se muestra en la Figura 204, el tropel de hiperplanos de este matroide es $\mathcal{H} = \{(123), (145), (167), (246), (257), (347), (356)\}$. A continuación se listan los tropeles que conforman la cadena complemento-bloqueador de este matroide:

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{H} \cup \mathcal{C}^*\};$$

$$\mathfrak{B}^* = \left\{ \binom{[7]}{4} - \mathcal{C}^* \right\};$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \binom{[7]}{3} - \mathcal{H} \right\};$$

$$\mathcal{C}^* = \{(1247), (1256), (1346), (1357), (2345), (2367), (4567)\};$$

$$\mathcal{H} = \{(123), (145), (167), (246), (257), (347), (356)\};$$

La Figura 205 muestra las relaciones entre estos tropeles por medio de los mapeos bloqueador y complementario.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathcal{H} & \leftarrow c & \rightarrow & \mathcal{C}^* & \leftarrow b & \rightarrow & \mathfrak{B} & \leftarrow c & \rightarrow & \mathfrak{B}^* & \leftarrow b & \rightarrow & \mathcal{C} \\
 \uparrow & & & & & & & & & & & & \uparrow \\
 b & & & & & & & & & & & & c \\
 \downarrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
 \mathcal{H} & \leftarrow c & \rightarrow & \mathcal{C}^* & \leftarrow b & \rightarrow & \mathfrak{B} & \leftarrow c & \rightarrow & \mathfrak{B}^* & \leftarrow b & \rightarrow & \mathcal{C}
 \end{array}$$

Figura 205 Cadena complemento-bloqueador del matroide de Fano.

Espacio vectorial $V(3, 3)$ y plano proyectivo $PG(2, 3)$

Las columnas de la siguiente matriz A son los 27 vectores del espacio vectorial de dimensión tres sobre el campo $GF(3)$, denotando los elementos de $GF(3)$ como 0, 1 y 2. El conjunto de etiquetas de la matriz A es $E = \{O, 1, \hat{1}, 2, \hat{2}, 3, \hat{3}, 4, \hat{4}, 5, \hat{5}, 6, \hat{6}, 7, \hat{7}, 8, \hat{8}, 9, \hat{9}, A, \hat{A}, B, \hat{B}, C, \hat{C}, D, \hat{D}\}$. Abusando un poco de la notación, utilizaremos estas etiquetas para referirnos a los respectivos vectores columna.

$$\begin{bmatrix} O & 1 & \hat{1} & 2 & \hat{2} & 3 & \hat{3} & 4 & \hat{4} & 5 & \hat{5} & 6 & \hat{6} & 7 & \hat{7} & 8 & \hat{8} & 9 & \hat{9} & A & \hat{A} & B & \hat{B} & C & \hat{C} & D & \hat{D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que los conjuntos $\{1, \hat{1}\}, \{2, \hat{2}\}, \dots, \{A, \hat{A}\}$ son parejas de vectores linealmente dependientes.

Ahora consideremos $M[A]$, el matroide de vectores de la matriz A . No es difícil verificar que:

- o) El único conjunto cerrado de rango cero consta solo del vector O .
- i) Los cerrados de rango uno son los conjuntos $\{O, 1, \hat{1}\}, \{O, 2, \hat{2}\}, \dots, \{O, A, \hat{A}\}$.
- ii) Las líneas e hiperplanos de $M[A]$ coinciden y son la colección de los siguientes conjuntos
 - $(O1\hat{1}2\hat{2}3\hat{3}8\hat{8})$, $(O1\hat{1}4\hat{4}5\hat{5}9\hat{9})$, $(O1\hat{1}6\hat{6}7\hat{7}B\hat{B})$, $(O1\hat{1}A\hat{A}C\hat{C}D\hat{D})$, $(O2\hat{2}4\hat{4}6\hat{6}A\hat{A})$,
 - $(O2\hat{2}5\hat{5}7\hat{7}C\hat{C})$, $(O2\hat{2}9\hat{9}B\hat{B}D\hat{D})$, $(O3\hat{3}4\hat{4}7\hat{7}D\hat{D})$, $(O3\hat{3}5\hat{5}A\hat{A}B\hat{B})$, $(O3\hat{3}6\hat{6}9\hat{9}C\hat{C})$,
 - $(O4\hat{4}8\hat{8}B\hat{B}C\hat{C})$, $(O5\hat{5}6\hat{6}8\hat{8}D\hat{D})$, $(O7\hat{7}8\hat{8}9\hat{9}A\hat{A})$.
- iii) El único conjunto cerrado de rango tres es el conjunto E .

Observe que $M[A]$ no es un matroide simple. Si borramos el lazo O y para cada una de las clases paralelas de $M[A]$ distinguimos solamente elementos del conjunto $E' = \{123456789ABCD\}$, obtenemos un matroide simple $si(M[A])$ sobre el conjunto E' cuyo retículo de cerrados es isomorfo al retículo de subespacios de la geometría proyectiva $PG(2, 3)$ ordenados por la inclusión de conjuntos. Puesto que la dimensión de $PG(2, 3)$ es igual a dos, esta geometría es un plano proyectivo. En los planos proyectivos las líneas e hiperplanos coinciden.

En la Figura 206 se muestra un diagrama geométrico de $PG(2, 3)$ con el respectivo etiquetado que hemos usado antes para las columnas de la matriz A ; en el diagrama, los puntos que están sobre una misma línea corresponden a las líneas del plano proyectivo.

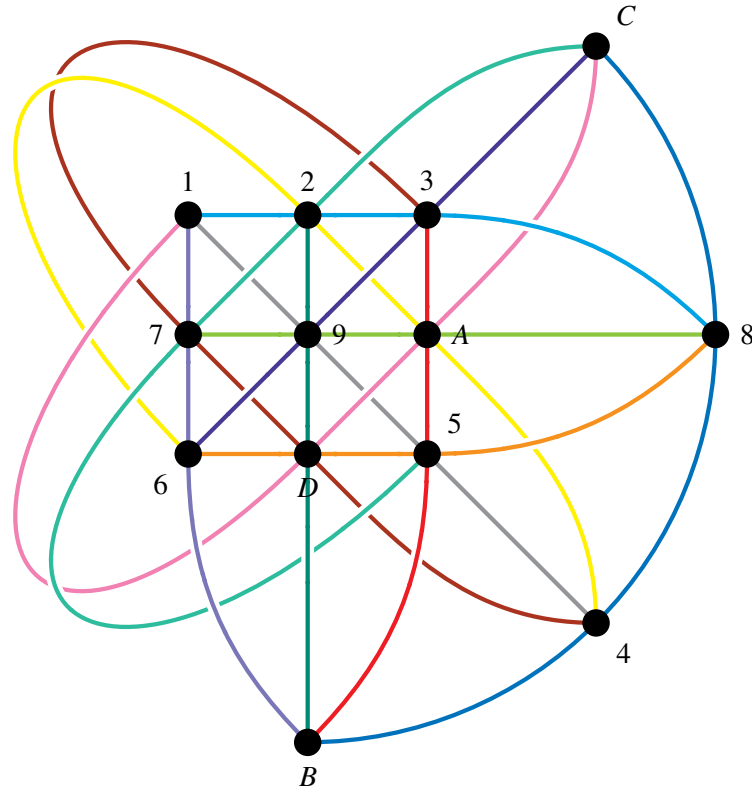


Figura 206 Diagrama geométrico de el plano proyectivo $PG(2, 3)$.

Con el etiquetado mostrado en la Figura 206, el tropel de hiperplanos consta de los siguientes conjuntos:

(1238), (1459), (167B), (1ACD), (246A), (257C), (29BD), (347D), (35AB),
(369C), (48BC), (568D), (789A).

Y el bloqueador de los hiperplanos consta de los siguientes conjuntos ¹:

1238, 1459, 167B, 1ACD, 246A, 257C, 29BD, 347D, 35AB, 369C, 48BC, 568D, 789A, 123457, 12345A, 123467,
123469, 12349D, 1234AD, 12357B, 12359B, 12359C, 1235AC, 12367C, 12369B, 1236AB, 1236AC, 1237BD,
1237CD, 1239CD, 123ABD, 124567, 124568, 12458C, 1245AC, 12468B, 12469B, 12489A, 12489B, 1248AC,
1249AD, 125678, 125789, 12579B, 12589D, 1258CD, 1259CD, 12678A, 1267AC, 1268AD, 1268BD, 126ABD,
12789B, 1278AC, 1278BC, 127BCD, 1289AD, 128BCD, 13457B, 13458B, 13458D, 1345AD, 134679, 134789,

¹Este tropel tiene 247 conjuntos. Para abarcar menos espacio se han omitido los paréntesis y se ha separado a los conjuntos con comas.

13478B, 13489C, 1348CD, 1349CD, 135689, 13568B, 13569B, 13589A, 1358AD, 1359AC, 136789, 13678D, 1367CD, 1368BC, 1368CD, 136ABC, 1378AB, 1378AD, 137ABD, 1389AC, 138ABC, 14567D, 14568B, 1456AB, 1456AD, 1457BC, 1457CD, 1458CD, 145ABC, 14679A, 1467AD, 1469AC, 1469BC, 146ABC, 14789B, 1479AD, 1479BD, 147BCD, 1489AC, 149BCD, 156789, 15679C, 1567CD, 1569BD, 1569CD, 156ABD, 1579AB, 1579AC, 157ABC, 1589AD, 159ABD, 1678AD, 1679AC, 168BCD, 169BCD, 178ABC, 179ABD, 23457A, 23467C, 23468C, 23468D, 23469D, 23478A, 23478C, 2348AB, 2348BD, 234ABD, 23568A, 23568C, 2356AC, 23578A, 23578D, 2357BD, 2358BC, 2358BD, 2359BC, 23689A, 23689D, 2369AB, 23789C, 23789D, 2379CD, 2389AB, 2389BC, 24567D, 24568C, 24569C, 24569D, 24579A, 24579D, 2459AB, 2459BC, 245ABC, 2467BC, 2467BD, 2468BD, 2469BC, 2478AC, 2479AD, 247ACD, 247BCD, 2489AB, 24ABCD, 25678A, 2567AB, 2567BD, 2569CD, 256ABD, 256ACD, 25789D, 2579AB, 258BCD, 25ABCD, 2679AB, 2679AC, 2679BC, 2689AD, 269ACD, 2789BC, 279ACD, 34569A, 34569D, 3456AD, 34579A, 34579C, 3457BC, 3458BD, 3459BC, 3459BD, 34679A, 3467AB, 3467BC, 3468CD, 346ABC, 346ACD, 34789C, 3478AB, 349BCD, 34ABCD, 3567BC, 3567BD, 3567CD, 35689A, 3568BC, 3569BD, 356ACD, 3578AD, 3579AC, 357ACD, 36789D, 3679AB, 3679BD, 379ABD, 379ACD, 389ABC, 39ABCD, 45689A, 45689C, 4568AB, 45789C, 45789D, 4578CD, 4589AB, 4589BD, 4678AB, 4678AD, 4678BD, 4689AC, 468ACD, 4789BD, 478ACD, 56789C, 5678AB, 5678BC, 578ABC, 578ACD, 589ABD, 58ABCD, 6789BC, 6789BD, 689ACD, 689BCD, 89ABCD

Observe que las líneas son los primeros 13 conjuntos de la lista de miembros de $b(\mathcal{H})$ y que estos son los únicos conjuntos cerrados que aparecen en la lista.

Para obtener el bloqueador de los hiperplanos de $M[A]$ basta con agregar a la colección anterior el conjunto $\{O\}$ y todos los conjuntos que se puedan obtener reemplazando cualquier conjunto de vectores v por sus elementos paralelos \hat{v} en los miembros del bloqueador de los hiperplanos de $si(M[A])$; por ejemplo, dado 89ABCD podemos obtener: $\hat{8}9ABCD$, $\hat{8}9A\hat{B}CD$, $89\hat{A}BCD$, $\hat{8}9\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$,..., $\hat{8}\hat{9}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$, etc.

Sistema de Steiner $S(2, 3, 21)$

Los siguientes 70 conjuntos² son los bloques de un sistema de Steiner $S(2, 3, 21)$ sobre el conjunto $S = (123456789ABCDEFGHIJKL)$.

123, 456, 789, ABC, DEF, GHI, JKL, 14E, 157, 1AH, 18D, 1GK, 1BJ, 47H, 48A, 4DK, 4BG, 24J, 7AK, 7BD, 27G, 7JE, 2AD, AEG, 5AJ, 5DG, DJH, 8GJ, 25F, 268, 2BI, 29E, 2HL, 2CK, 58I, 59B, 5EL, 5CH, 35K, 8BL, 8EC, 38H, 8KF, 3BE, BFH, 6BK, 6EH, EIK, 9KH, 36D, 349, 3CG, 37F, 3IJ, 3AL, 69G, 67C, 6FJ, 6AI, 16L, 9CJ, 9AF, 19I, 9DL, 1CF, CDI, 4CL, 4FI, FLG, 7IL.

²Para abarcar menos espacio, en este ejemplo se han omitido los paréntesis y se ha separado a los conjuntos con comas.

El conjunto de transversales *minimales* de los bloques del sistema de Steiner $S(2, 3, 21)$ consta de conjuntos de cuatro cardinalidades³. La siguiente lista muestra todos los miembros de cardinalidad 12 y 15, 20 bloqueadores de cardinalidad 13, y 20 bloqueadores de cardinalidad 14.

Cardinalidad 12

1234579BEFIJ, 1234689ADEHL, 12349BCEGIJK, 1235678CDFGK, 12357ACFGHKL, 12368ABDHIJL, 124567CEFHIJL, 12468BCFGJKL, 12489ACDEFIK, 1256789BDGIL, 1259ABCDFHIJ, 12679AEGHIKL, 134569BDEGKL, 1345789AFHIK, 1348ABCEFGHL, 13567ABEIJL, 13589CDGHIJK, 13678BCDEFHJ, 145678ACEHIL, 1458CDEFGIKL, 1469ABEFGHIK, 15679ABC FHJK, 15789BCDEIJL, 1689BDFGHIJKL, 234568ADFIJK, 23459ACDHJKL, 2346789CEGHJ, 23478BFGHIJL, 23579ABDEFGL, 2367ABCDEGIK, 245689ABFGIJ, 2457BCDFGHIL, 24678ABCDIKL, 2479CDEHIJKL, 2569ADEFGHJL, 26789ACEFGJK, 345679BCDGHK, 34589ABCEGJL, 3467BDEFHIJK, 34789ABDFHKL, 3568ACDEGHIJ, 3578AEFGIJKL

Cardinalidad 13

123456789AFIJ, 123456789BDGK, 123456789CEHL, 12345678ACEHL, 12345678CEFHL,
 12345679BCDGK, 12345679BDEGK, 1234567ABC DGK, 1234567BCDFGK, 1234567BDEFHJ,
 1234567CDFGKL, 1234567CEFGHL, 1234567CFGHIL, 1234567CFGHKL, 1234567CFGJKL,
 12345689ABFIJ, 12345689ADFIJ, 1234568ABCEHL, 1234568ACDEHL, 1234568ADEHJL

Cardinalidad 14

123456789ADFGK, 123456789ADFIK, 123456789ADFIL, 123456789ADGHK, 123456789AEHIL,
 123456789AFHIL, 123456789BDEGJ, 123456789BDEGL, 123456789BDEHL, 123456789BDGIJ,
 123456789BEHIL, 123456789BFGIJ, 123456789CDGHK, 123456789CEFHIJ, 123456789CEFHK,
 123456789CEFIJ, 123456789CEGHK, 123456789CFGIJ, 12345678ACDFHK, 12345678ACDFIK

Cardinalidad 15

1234589ACDFHIJK, 1234678BCEFGHJL, 1235679ABDEGIKL, 1245678BCDFGIKL, 124579BCDEFHIJL,
 1246789ACDEHIKL, 124689ABCEFGIJK, 125679ACEFGHIJKL, 125689ABDFGHIJL, 1345679ABEFHIJK,
 134578ACEFGHIKL, 134589BCDEGIJKL, 134689ABDEFGHKL, 1356789BCDFGHIJK, 135678ABCDEFHIJL,
 2345689ACDEGHJL, 2345789ABEFGIJKL, 234579ABCDFGHKL, 234678ABDFHIJKL, 234679BCDEGHIJK,
 235678ACDEFGIJK

³Más detalladamente, este tropel tiene 2142 conjuntos en total; 42 conjuntos de cardinalidad 12; 630 de cardinalidad 13; 1449 de cardinalidad 14; y 21 de cardinalidad 15.

Capítulo 6

Conclusiones

Después de haber realizado este trabajo, se concluye que, el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide es un objeto que sirve para definir con precisión el concepto de matroide y que en general, este tropel no coincide con los tropeles que se utilizan usualmente para definir matroides.

Se descubrió una desigualdad que deben satisfacer los miembros del bloqueador de los hiperplanos; esta desigualdad involucra la función de rango dual y la cardinalidad de un conjunto. La existencia de esta desigualdad y la caracterización que se obtuvo para los duales de sistemas de Steiner pone en evidencia una estrecha relación entre el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide y el matroide dual.

En este trabajo se notó que, existen maneras de construir el tropel bloqueador de los hiperplanos de un matroide; una de ellas utiliza a los tropeles bloqueadores de los hiperplanos de los matroides simples asociados a las componentes conexas; es decir, para estudiar el tropel bloqueador de los hiperplanos, basta considerar a la clase de los matroides simples conexos.

Dado un matroide M y el tropel bloqueador de sus hiperplanos, parece complicado calcular los tropeles bloqueadores de los hiperplanos para los menores de M por borrado y contracción. No se llegó a resultados interesantes sobre este tema¹, de manera que queda abierto como tema de investigación.

¹El único caso que se tiene es cuando el elemento que se borra o se contrae es un lazo.

A diferencia del borrado y la contracción; la operación de relajación de circuitos-hiperplanos tiene un mejor comportamiento al aplicar el mapeo bloqueador. Se logró determinar como cambia el bloqueador de los hiperplanos de un matroide cuando se relaja un circuito-hiperplano. En este trabajo se mostró que, en algunas ocasiones es posible definir una operación de “tensado”, esta operación resulta ser inversa a la relajación de un circuito-hiperplano; se consiguió entender como cambia el bloqueador de los hiperplanos de un matroide cuando se aplica esta operación.

Se pudo extender los resultados presentados en Cordovil *et al.* [1991] a los tropes de hiperplanos de un matroide mostrando que, es posible definir operaciones de borrado y contracción para los tropes de hiperplanos; más aún, se definió la cadena complemento bloqueador de un tropel, y se notó que, en el caso de los tropes de matroides, se pueden definir operaciones de borrado y contracción para todos los tropes de la cadena complemento-bloqueador. Queda abierto el tema de encontrar caracterizaciones equivalentes de estas operaciones sin utilizar el mapeo bloqueador, y el estudio de las cadenas complemento-bloqueador.

Durante la investigación del bloqueador de los hiperplanos de familias de matroides, se encontró una caracterización para estos tropes, en el caso de los matroides de rango dos; se hallaron condiciones suficientes para que el conjunto de aristas de un ciclo impar, sea un miembro del bloqueador de los hiperplanos del matroide de ciclos de una gráfica; se lograron descripciones del tropel bloqueador de los hiperplanos para los matroides de ciclos y cociclos de las gráficas completas, bipartitas completas y ruedas. También se hallaron caracterizaciones en el caso de los rehiletos, duales de sistemas de Steiner, manguales libres y algunas subclases de los matroides de empedrado.

Finalmente, solo se obtuvo una caracterización parcial para los matroides modulares. El estudio del bloqueador de los hiperplanos de estos matroides parece ser una línea de investigación interesante, ya que está relacionada con cuestiones de representabilidad y con el polinomio cromático de un matroide². Otros matroides que no abordamos en este trabajo, pero que guardan similitudes con los matroides modulares, son las *geometrías de Dowling*³; sería interesante saber hasta que punto, el bloqueador de los hiperplanos de estas geometrías guarda similitud con el de los matroides modulares.

²Ver la sección 13 del Capítulo 9 en el libro de Graham *et al.* [1995]

³Para conocer más sobre estos matroides se puede consultar la Sección 6.10 en el libro de Oxley [2011].

Bibliografía

BILLERA, L.J. *On the Composition and Decomposition of Clutters*. Journal of Combinatorial Theory 11 (1970)

BONDY, J. Y MURTY, U. *Graph Theory*. Berlin: Springer (2008)

CAMERON, P.J. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, (1996)

CHURCH, R. *Numerical Analysis of Certain Free Distributive Structures*. Duke Mathematical Journal (1940)

CORDOVIL, R., FUKUDA, K., Y MOREIRA, M.L. *Clutters and Matroids*. North Holland Discrete Mathematics 89 (1991)

DAWSON, J. *A Simple Approach to Some Basic Results in Matroid Theory*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 84 (1981)

EDMONDS, J. *Paths, Trees, and Flowers*. Canada J. Math. 17 (1965)

EDMONDS, J. Y FULKERSON, D. *Bottleneck Extrema*. Journal of Combinatorial Theory 8 (1970)

ENGEL, K. *Sperner Theory*. Cambridge University Press (1997)

FULKERSON, D.R. *Flow Networks and Combinatorial Operations Research*. Amer. Math. Monthly 73 (1966)

FULKERSON, D.R. *Blocking and Anti-blocking Pairs of Polyhedra*. Math. Programming 1 (1973)

- GORDON, G. Y McNULTY, J. *Matroids: A Geometric Introduction*. Cambridge University Press (2012)
- GRAHAM, R., GRÖTSCHEL, M., Y LOVÁSZ, L. *Handbook of Combinatorics Volume I*. Elsevier Science (1995)
- JERRUM, M. *Two Remarks Concerning Balanced Matroids*. *Combinatorica* 26 (2006)
- KHACHIYAN, L., BOROS, E., ELBASSIONI, Y GURVICH, V. *A New Algorithm for the Hypergraph Transversal Problem*. *Computing and Combinatorics, 11th Annual International Conference, COCOON 2005, LNCS, Vol. 3595* (2003)
- LAWLER, E. *Covering Problems: Duality Relations and a New Method of Solution*. *J. SIAM* 14 (1965)
- LEHMAN, A. *A Solution of the Shannon Switching Game*. *J. SIAM* 12 (1964)
- LEHMAN, A. *On the Width Length Inequality*. *Mathematical Programming* 16 (1979)
- MATOUSEK, J. Y NESETRIL, J. *An Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, (2008)
- MAYHEW, D. Y ROYLE, G. *Matroids With Nine Elements*. *Journal of Combinatorial Theory* 98 (2008)
- NICOLETTI, G. *Generating Cryptomorphic Axiomatizations of Matroids*. *Lecture Notes In Mathematics, Vol. 792, Geometry and Differential Geometry*, edited by R. Artzy and I. Vaisman. Springer-Verlag, Berlin. (1979)
- NISHIMURA, H. Y KURODA, S. *A Lost Mathematician: Takeo Nakasawa, The Forgotten Father of Matroid Theory*. Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, Berlin (2012)
- OXLEY, J. *Matroid Theory*. Oxford University Press, Oxford, (2011)
- PENDAVINGH, R. Y VAN DER POL, J. *On the Number of Matroids Compared to the Number of Sparse Paving Matroids*. *The Electronic Journal of Combinatorics* 21(1) (2014)
- PFALTZ, J.L. Y TAYLOR, C. *Closed Set Mining of Biological Data*. *Workshop on Data Mining in Bioinformatics* (2002)

ROTMAN, J.J. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, Saddle River NJ (2002)

SEYMOUR, P.D. *The Forbidden Minors of Binary Clutters*. J. London Math. Soc. (2) 12 (1976)

SHAPLEY, L.S. *Compound Simple Games III: On Committees*. The RAND Corporation (1967)

VAN DER WAERDEN, B.L. *Modern Algebra*. Springer (Berlin) (1937)

WHITNEY, H. *On the Abstract Properties of Linear Dependence*. American Journal of Mathematics, Vol. 57, No. 3. The Johns Hopkins University Press. (1935)

WIEDEMANN, D. *A Computation of the Eighth Dedekind Number*. Order Journal (1991)

