



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LÍMITES DE MEDIDAS LOCALIZADAS EN HOROSFERAS Y
SERIES DE EISENSTEIN

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
OTTO HÉCTOR ROMERO GERMÁN

COMITÉ TUTOR
DR. ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ, IMATE CUERNAVACA.
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO, IMATE CU.
DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA, IMATE CUERNAVACA.

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO DEL 2018.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Límites de medidas localizadas en horoesferas y series de Eisenstein

TESIS

Otto Héctor Romero Germán ¹

9 de enero de 2018

¹Instituto de Matemáticas, (Unidad Cuernavaca) UNAM. Av. Universidad s/n. Col. Lomas de Chamilpa. CP 62210, Cuernavaca, México. ottohrg@gmail.com

Agradecimientos

A mi madre.

A mi padre por enseñarme a dudar de las cosas, por estar siempre presente.

A Mary por su amor y compañía.

A mis hermanos Araceli, Juan y Cecilia.

A mis amigos y compañeros con los que he aprendido y vivido muchas cosas, Noel, Renato, Hugo, Olga, Efraín, Eleazar, Josefita, Chavita, Cesar, Odín, Rodas, Erick, Andrés, Vivanco, Onofre, Tacubayo, José R., Rocío R., Adrián, Julio, Frías, Ana, Esteban, Iván, Ivonne, Alexander, Janet, José Juan, Juan Manuel, Adriana, Jesús, Anayeli, Héctor, Martín L., Jon, Elyoenai.

A mis profesores Joaquín Osorio, Silvestre Cardenas, Martha Takane, Max Neumann, Ernesto Rosales, Ana Rechtman, Emilio Lluís, Micho, Shirley, Ernesto Lacomba.

A mis sinodales Pablo Suárez, Salvador Pérez, Manuel Cruz, Gregor Weingar y Edwin León.

A mi asesor Alberto Verjovsky por sugerirme el problema, además de su constante apoyo. A Santiago López de Medrano por sus consejos, ayuda y por permitirme exponer en su seminario los avances aún informales. A Gregor Weingar por su paciencia y disposición en todo este tiempo.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 5 |
| 1. Preliminares de Teoría de Números | 12 |
| 1.1. Campos de números y la función zeta de Dedekind | 12 |
| 1.2. Caracteres de Hecke y funciones L de Hecke | 17 |
| 1.3. Función φ_D de Euler y la función $\phi_{m,\bar{0}}(s)$ | 20 |
| 2. Preliminares de Grupos y Álgebras de Lie | 35 |
| 2.1. Conceptos generales | 35 |
| 2.2. Transformación Adjunta | 36 |
| 2.3. Operadores diferenciables y álgebra envolvente universal | 37 |
| 2.4. Espacios débilmente simétricos | 41 |
| 3. Preliminares de Geometría Hiperbólica y Análisis | 42 |
| 3.1. Espacio hiperbólico y descomposición de Iwasawa | 42 |
| 3.2. Grupos de Bianchi y orbidades de Bianchi | 46 |
| 3.3. Armónicos esféricos y matriz de Wigner | 47 |
| 3.3.1. Armónicos esféricos | 48 |
| 3.3.2. Cálculo de la matriz de Wigner $D_{km}^l(R)$ | 51 |
| 3.4. Simplificación de la matriz pequeña de Wigner $d_{km}^l(\chi)$ | 64 |
| 3.4.1. Caso $d_1 = l + m$. | 66 |
| 3.4.2. Caso $d_1 = l - m$. | 67 |
| 3.4.3. Caso $d_1 = l + k$. | 68 |
| 3.4.4. Caso $d_1 = l - k$. | 69 |
| 4. Series de Eisenstein | 71 |
| 4.1. Rotaciones $R(d\sigma, z, \lambda)$, propiedades y equivalencias | 72 |
| 4.2. Propiedades de las matrices de Wigner $D_{km}^l(R)$ | 85 |
| 4.3. Definición y propiedades de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$. | 87 |
| 4.4. Definición y propiedades de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$. | 89 |
| 4.5. Relación entre las series $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ y las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ | 90 |
| 4.6. Conjetura | 92 |
| 5. Expansión de Fourier de series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ | 93 |
| 5.1. Funciones argumento y módulo, ángulos de Euler | 93 |
| 5.2. Preliminares | 96 |
| 5.3. Integrales y funciones que aparecen en la expansión de Fourier | 105 |

| | |
|---|------------|
| 5.4. Coeficiente general $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$ | 111 |
| 5.5. Coeficiente cero | 117 |
| 5.5.1. Coeficiente cero $b_{km}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$, donde $k \neq -m$ | 117 |
| 5.5.2. Coeficiente cero caso $b_{k,-k}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$, donde $m = -k$ y $k \geq 0$ | 117 |
| 5.5.3. Coeficiente cero caso $b_{0,0}^0(\lambda, s)_{\bar{0}}$ | 119 |
| 5.5.4. Coeficiente cero caso $b_{-m,m}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$, donde $k = -m$ y $m \geq 0$ | 119 |
| 5.6. Expansión de Fourier de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ | 120 |
| 6. Operadores H-invariantes en $SL(2, \mathbb{C})$ | 122 |
| 6.1. Métrica en $SL(2, \mathbb{C})$ e isometrías | 124 |
| 6.2. Descomposición polar | 130 |
| 6.3. Espacio débilmente simétrico $((G, g), H, \mu)$ | 135 |
| 6.4. \mathcal{A} es un álgebra conmutativa | 141 |
| 7. Operadores diferenciables y series de Eisenstein | 152 |
| 7.1. Nueva base de $sl(2, \mathbb{C})$ y sus exponenciales | 152 |
| 7.2. Funciones hipergeométricas y cálculo de la constante ϑ_{km}^l | 155 |
| 7.3. Operadores y series de Eisenstein | 159 |
| 8. Equidistribución | 169 |
| 8.1. Conjetura \implies Equidistribución | 170 |
| 8.2. Lemas | 178 |
| Bibliografía | 187 |

Introducción

Como motivación e introducción a la equidistribución recordamos un ejemplo clásico además de histórico. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ un número irracional y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$x_n = n\xi \bmod 1.$$

La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **está equidistribuida** (o uniformemente densa) en el intervalo $(0, 1)$ **con respecto a la medida de Lebesgue** μ . Esto significa que si como ejemplo tomamos el subconjunto $I_2 := (0, \frac{1}{2})$, entonces para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande aproximadamente la mitad de los términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^m$ cae en el intervalo I_2 . Si ahora $I_3 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ aproximadamente una tercera parte de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^m$ cae dentro del intervalo I_3 . Más formalmente, sea I el intervalo $(a, b) \subset (0, 1)$, y si

$$m_I = \#\{a_n \in I; 1 \leq n \leq m\},$$

entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_I}{m} = \mu(I) = b - a. \quad (1)$$

Entre los años 1909 – 1919, Bohl, Sierpinski y Weyl (independientemente) probaron la fórmula (1), ver [30]. Pero Weyl en 1916 da origen a la teoría de equidistribución, la cual aparece en muchas áreas de matemáticas, incluyendo teoría de números, combinatoria, probabilidad, análisis armónico, teoría ergódica y caos (quantum chaos).

Daremos un breve resumen de algunos resultados en equidistribución con el fin de motivar nuestro trabajo. Sea Q el polinomio homogéneo de grado 2 en 3 variables dado por

$$Q(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Si $d \in \mathbb{Z}$, es interesante estudiar las representaciones de los enteros positivos $|d|$ por Q , esto es, estudiar los subconjuntos

$$V_{Q,|d|}(\mathbb{Z}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3; Q(a, b, c) = |d|\}$$

al proyectarlos a la variedad

$$V_{Q,1}(\mathbb{R}) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; Q(a, b, c) = 1\} = \mathbb{S}^2$$

como sigue

$$\mathcal{J}_d = |d|^{-\frac{1}{2}} \cdot V_{Q,|d|}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{S}^2.$$

Linnik usando teoría ergódica demuestra el siguiente teorema, ver [17].

Teorema. (Linnik) Si Ω_1, Ω_2 son subconjuntos compactos de \mathbb{S}^2 (“no patológicos”) entonces:

$$\lim_{|d| \rightarrow \infty} \frac{\#\{ |d|^{-\frac{1}{2}} \cdot V_{Q,|d|}(\mathbb{Z}) \cap \Omega_1 \}}{\#\{ |d|^{-\frac{1}{2}} \cdot V_{Q,|d|}(\mathbb{Z}) \cap \Omega_2 \}} = \frac{\mu_{\mathbb{S}^2}(\Omega_1)}{\mu_{\mathbb{S}^2}(\Omega_2)},$$

donde $\mu_{\mathbb{S}^2}$ es la medida de Lebesgue de \mathbb{S}^2 .

Usando herramientas de análisis armónico, teoría de números, teoría ergódica, Duke prueba el siguiente teorema.

Teorema. (Duke) [8] Para cuando $d \rightarrow -\infty$, $d \not\equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$, los conjuntos \mathcal{J}_d están equidistribuidos en \mathbb{S}^2 con respecto a la medida de Lebesgue $\mu_{\mathbb{S}^2}$.

Una variante del problema anterior resulta de considerar el polinomio homogéneo

$$Q(a, b, c) = b^2 - 4ac, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

el cual es el discriminante de la siguiente forma cuadrática:

$$q_{a,b,c}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En este caso, el conjunto

$$V_{Q,|d|}(\mathbb{Z}) = \{ (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3; Q(a, b, c) = d \}$$

se identifica con el conjunto \mathcal{L}_d de formas cuadráticas binarias de discriminante d . Existe una acción de $PSL(2, \mathbb{Z})$ en \mathcal{L}_d mediante un cambio de variable, es decir, si $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ entonces

$$\gamma * q_{a,b,c} = (x \ y) \gamma \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \gamma^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La acción anterior preserva el discriminante y $\#\{ \mathcal{L}_d / PSL(2, \mathbb{Z}) \} = h(d)$, donde $h(d) < \infty$ es el número de clase de $\mathbb{Q}\sqrt{d}$. Para $d < 0$ uno puede asociar a cada clase $[q_{a,b,c}] \in \mathcal{L}_d / PSL(2, \mathbb{Z})$ un punto

$$z_{[q]} \in \mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z}),$$

para esto se usa la única raíz de $q_{a,b,c}(x, 1) = 0$ contenida en \mathbb{H}^2 . Estos puntos son llamados **puntos de Heegner** de discriminante d . Resumiendo, para $d < 0$ hay $h(d)$ puntos de Heegner en la superficie modular, conjunto el cual denotamos por \mathcal{H}_d , esto es,

$$\mathcal{H}_d = \{ z_{[q]}; [q] \in \mathcal{L}_d / PSL(2, \mathbb{Z}) \}.$$

Teorema. (Duke) [8] Para cuando $d \rightarrow -\infty$, $d \equiv 0, 1 \pmod{4}$, los conjuntos \mathcal{H}_d están equidistribuidos en $\mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z})$ con respecto a la medida de área hiperbólica (normalizada) $\mu = \frac{3}{\pi} \frac{dx dy}{y^2}$.

Para $d > 0$ se puede asociar a cada clase $[q_{a,b,c}] \in \mathcal{L}_d / PSL(2, \mathbb{Z})$ una geodésica orientada $\alpha_{[q]}$ en $\mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z})$, la cual es la imagen, bajo la proyección de \mathbb{H}^2 en $\mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z})$, de la geodésica en \mathbb{H}^2 determinada por las dos raíces reales de $q_{a,b,c}(x, 1) = 0$. Esta es una geodésica cerrada en la superficie modular, de hecho toda geodésica cerrada en la superficie modular es de esa forma. Sea

$$\mathcal{G}_d = \{ \alpha_{[q]}; [q] \in \mathcal{L}_d / PSL(2, \mathbb{Z}) \},$$

el conjunto de geodésicas de discriminante d . Al respecto tenemos el siguiente resultado:

Teorema. (Duke) [8] Para cuando $d \rightarrow +\infty$, $d \equiv 0, 1 \pmod{4}$, d no cuadrado perfecto, los conjuntos \mathcal{G}_d están equidistribuidos en el haz tangente unitario a la superficie modular $\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ con respecto a la medida de Liouville (normalizada) $\mu = \frac{3}{\pi} \frac{dx dy d\theta}{y^2 2\pi}$.

En otras palabras, el flujo geodésico en el haz tangente unitario está equidistribuido cuando las geodésicas se ordenan por su discriminante.

En 1979 Zagier trabajó sobre equidistribución del flujo horocíclico en la superficie modular y su relación con series de Eisenstein. Para cada $y > 0$, el horociclo $\{x + iy; x \in \mathbb{R}\}$ en \mathbb{H}^2 se proyecta a $\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ en una curva cerrada α_y de longitud hiperbólica $\frac{1}{y}$. Cuando $y \rightarrow 0$ la curva está equidistribuida en $\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ con respecto a la medida de área hiperbólica $\nu = \frac{dx dy}{y^2}$.

Teorema. (Zagier) [37] Si $f : \mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable y con soporte compacto, entonces:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x + iy) dx = \frac{1}{\nu(\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z}))} \int_{\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})} f(x + iy) \frac{dx dy}{y^2},$$

equivalentemente,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \nu(y) = \nu \quad (\text{débilmente}), \quad (2)$$

donde $\nu(y)$ son medidas de probabilidad en $\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ con soporte en los horociclos cerrados α_y y ν es la medida de área hiperbólica normalizada.

Si $U \subset \mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ es un abierto, aproximando la función característica χ_U por funciones diferenciables en $\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$ y usando la identidad (2) Zagier obtiene la siguiente fórmula:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{Long}(\alpha_y \cap U)}{\text{Long}(\alpha_y)} = \frac{\text{Área}(U)}{\text{Área}(\mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z}))}, \quad (3)$$

donde Long y Área se refieren a longitud y área hiperbólicas. Esta fórmula es el análogo de (1).

Por otro lado, Sarnak considera $M_\Gamma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ una superficie hiperbólica no compacta pero de área finita con n cúspides, aunque para este resumen suponemos que $n = 1$. Ahora se consideran las medidas de probabilidad $\nu(y)$ localizadas en los horociclos levantados a el haz tangente unitario usando un campo vectorial constante, obtiene el siguiente resultado,

Teorema. (Sarnak) [25] Existen números $1 > s_1 > s_2 > \dots > s_p > \frac{1}{2}$ (p puede ser cero, en ese caso no hay tales números) y ciertas distribuciones correspondientes $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^p$ en $T_1 M_\Gamma$ tal que si $f : T_1 M_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable y con soporte compacto entonces:

$$\nu(y)(f) = \nu(f) + y^{1-s_1} \nu^1(f) + \dots + y^{1-s_p} \nu^p(f) + o(y^{\frac{1}{2}}) \quad (y \rightarrow 0),$$

donde $\nu = \frac{1}{2\pi \text{Área}(M_\Gamma)} \frac{dx dy d\theta}{y^2}$ es la medida de Liouville (normalizada) en $T_1 M_\Gamma$.

El problema de la equidistribución correspondiente de la foliación horocíclica en 3 orbidades hiperbólicas fue por ejemplo abordado en [7].

En esta tesis trabajamos con la equidistribución de la foliación horocíclica en el haz tangente unitario a 3 orbidades de Bianchi con una cúspide. Asumiendo una conjetura sobre continuación meromorfa (o analítica) de series de Eisenstein, conjetura (4.6.1), obtenemos el siguiente resultado, el cual es el análogo del teorema de Sarnak en dimensión 3.

Teorema 0.0.1. Sean $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ y M_D^3 orbidades de Bianchi con una cúspide en ∞ . Existen números $1 > s_1 > s_2 > \dots > s_p > 0$ (p puede ser cero, en ese caso no hay tales números) y ciertas distribuciones correspondientes $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^p$ en $T_1 M_D^3$ tal que si $f : T_1 M_D^3 \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable y con soporte compacto entonces:

$$\nu(\lambda)(f) = \nu(f) + \lambda^{1-s_1} \nu^1(f) + \dots + \lambda^{1-s_p} \nu^p(f) + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow 0),$$

donde $\nu = \frac{1}{4\pi \text{Vol}(M_D^3)} \frac{\sin \vartheta dx dy d\lambda d\vartheta d\varphi}{\lambda^3}$ es la medida de Liouville normalizada en $T_1 M_D^3$.

Corolario.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \nu(\lambda) = \nu \quad (\text{débilmente}).$$

En el capítulo 1 repasaremos sobre teoría de números. En particular sobre campos cuadráticos imaginarios. En este trabajo usaremos los campos $\mathbb{Q} \sqrt{-D}$ con $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, estos campos tienen un anillo de enteros \mathcal{O}_D que es dominio de Dedekind, un dominio de factorización única y un dominio de ideales principales. En cierto sentido son lo más parecidos a \mathbb{Z} . Las orbidades de Bianchi $M_D^3 = \mathbb{H}^3 / \widehat{\Gamma}_D$, donde $\widehat{\Gamma}_D = PSL(2, \mathcal{O}_D)$, son 3 orbidades hiperbólicas de volumen finito con una sola cúspide en ∞ .

En el capítulo 2 de preliminares de grupos y álgebras de Lie recordamos por ejemplo: la representación adjunta (sección 2), operadores diferenciables, ciertas acciones, el álgebra envolvente universal (sección 3) y los espacios débilmente simétricos (sección 4).

Nuestra herramienta principal para probar el teorema (0.0.1) son las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$, donde $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Además de sus “proyecciones”: las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$. Para poder definir las series anteriores necesitaremos las matrices de Wigner $D_{km}^l(R)$, con $R \in SO(3)$. Éstas surgen de rotar los armónicos esféricos $Y_m^l(\vartheta, \varphi)$ (sección 3, capítulo 3) y vienen de las representaciones de los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$, en el capítulo 3 repasamos los cálculos de Wigner [29] para obtener las fórmulas

$$D_{km}^l(R) = D_{km}^l(ROT(\theta, \chi, \phi)) = e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi},$$

$$Y_m^l(R^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{k=-l}^l D_{km}^l(R) \cdot Y_k^l(\vartheta, \varphi),$$

donde R es expresada usando sus ángulos de Euler como $R = ROT(\theta, \chi, \phi)$. Además $d_{km}^l(\chi)$ con $\chi \in [0, \pi]$ es conocida como matriz pequeña de Wigner, definida en la sección 3. En la sección 4 del mismo capítulo damos la demostración de un lema técnico para obtener una expresión manejable para $d_{km}^l(\chi)$, importante para encontrar los coeficientes de Fourier de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

El capítulo 4 está dedicado a los resultados básicos de series de Eisenstein, por ejemplo: definiciones, convergencia, invarianza, expansión de Fourier. Al final del capítulo (sección 4) presentamos una conjetura sobre la continuación meromorfa (o analítica) de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$, esta conjetura es tomada (y asumida) en la tesis de doctorado de B. Louvel [18], que estudia el comportamiento asintótico de ciertas sumas análogas a sumas de Kloosterman. También, en la tesis de L. Guleska [12] asumen

dicha conjetura, Guleska estudia una generalización a campos cuadráticos imaginarios de una fórmula que relaciona los coeficientes de Fourier de formas modulares real analíticas a sumas de Kloosterman.

En el capítulo 8 (capítulo principal de la tesis) demostraremos el teorema (0.0.1), esto, asumiendo la conjetura sobre la continuación meromorfa (o analítica) de las series de Eisenstein. Siguiendo las ideas de Zagier [31] y Sarnak [25] nosotros generalizamos el Método de Rankin-Selberg en este contexto, que explicamos brevemente. Para cada $\lambda > 0$ consideramos las medidas de probabilidad $\nu(\lambda)$ en $T_1M_D^3$ (sección 1, definición (8.1.2)). Sea $f \in C_0^\infty(T_1M_D^3)$, es decir, f es diferenciable y con soporte compacto, consideramos la transformada de Mellin de la siguiente función

$$\lambda \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \nu(\lambda)(f) \in \mathbb{C},$$

es decir,

$$\mathfrak{M}(f, s) = \int_0^\infty \nu(\lambda)(f) \lambda^{s-2} d\lambda,$$

y donde

$$\nu(\lambda)(f) = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) dx dy,$$

con Λ_D la retícula asociada a \mathcal{O}_D , además, $|\Lambda_D|$ indica el área de \mathbb{R}^2/Λ_D . Probaremos en el capítulo 8, sección 1, que:

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}{|\Lambda_D|} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) H_{km}^l(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3},$$

donde F_D es un dominio fundamental de Γ_D , $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ son módulo una constante las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$. Además, $\widehat{f}_k^l(z, \lambda)$ son los coeficientes en la expansión de Laplace de f restringida a las fibras \mathbb{S}^2 .

Tomando residuos en $s = 1$ en la fórmula anterior, demostraremos que:

$$\text{Res}(\mathfrak{M}(f, s), s = 1) = \nu(f),$$

donde ν es la medida canónica Riemanniana normalizada en $T_1M_D^3$.

La demostración del teorema (0.0.1) se sigue de utilizar el Teorema del residuo de Cauchy para la función $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(s) = \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}$ en la franja $\{s \in \mathbb{C}; 0 \leq \text{Re}(s) \leq 3\}$.

Una buena parte de nuestro trabajo se hizo con la idea de poder demostrar la continuación meromorfa (o analítica) de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$. Como al final conjeturamos eso, los resultados al respecto no son requeridos en la demostración del teorema (0.0.1).

Como mencionamos antes las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ admiten un desarrollo en series de Fourier:

$$E_{km}^l(z, \lambda, s) = \sum_{\gamma \in \Lambda_D^*} b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma e^{2\pi i \langle z, \gamma \rangle},$$

donde Λ_D^* es la retícula dual a Λ_D . Siguiendo las ideas de Selberg en [16], un primer paso para demostrar la continuación meromorfa (o analítica) es probar que el coeficiente cero de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\vec{0}$ definido

para $\text{Re}(s) > 1$ admite una continuación meromorfa (o analítica) a todo \mathbb{C} . En el capítulo 5, sección 2, subsección 3, calculamos el coeficiente general de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$ de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$. En particular, calculamos el coeficiente cero de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\bar{0}$ en casos (sección 2, subsecciones 4,5,6 y 7). Por ejemplo, sea

$$R_D = \begin{cases} 2 & \text{si } D = 1 \\ 3 & \text{si } D = 3 \\ 1 & \text{si } D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}. \end{cases}$$

Si $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_D k \in [0, l]$ probaremos que:

$$b_{R_D k, -R_D k}^l(\lambda, s)_\bar{0} = \frac{F_{R_D}^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} \delta_k + \lambda^{1-s} \frac{2\pi}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} (l + R_D k)! (l - R_D k)! \cdot \frac{L(s, \chi_{-2R_D k})}{L(s+1, \chi_{-2R_D k})} \cdot \Theta_{R_D k, -R_D k}^l(s),$$

donde $\Theta_{R_D k, -R_D k}^l(s)$ es una cierta función que involucra funciones gamma. Además, $L(s, \chi_m)$ con $m \in \mathbb{Z}$ (dependiendo del campo de números $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$) son funciones L de Hecke asociadas al caracter χ_m . Ver capítulo 1, para caracteres de Hecke y funciones L de Hecke. Si $l = k = m = 0$ tenemos que:

$$b_{00}^0(\lambda, s)_\bar{0} = \lambda^{1+s} + \pi \lambda^{1-s} \frac{1}{s |\Lambda_D| [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{\zeta_D(s)}{\zeta_D(s+1)}.$$

El coeficiente cero es bien conocido ya que es el coeficiente cero de la serie de Eisenstein clásica $E(z, \lambda, s)$.

Otro paso importante para demostrar la continuación meromorfa es el hecho de que cierta álgebra de operadores es conmutativa. Explicamos brevemente los resultados en dimensión 2. La teoría se puede seguir en el libro de Kubota [16], capítulo VI (Generalizations of Eisenstein Series). Sea $G = SL(2, \mathbb{R})$ con cierta métrica Riemanniana g , el grupo $H = SL(2, \mathbb{R}) \times SO(2)$ actúa de manera natural en $SL(2, \mathbb{R})$, además, actúa transitivamente y por isometrías. Por otro lado, existe una cierta isometría $\mu : G \rightarrow G$ tal que el triple $((G, g), H, \mu)$ es un espacio débilmente simétrico (ver capítulo 2, sección 4 para definiciones y resultados de espacios débilmente simétricos). Lo anterior implica que el álgebra \mathcal{A} generada por:

$$\mathcal{A} = \langle A_1, X_1^2 + X_2^2 \rangle$$

es conmutativa. Esto es,

$$[A_1, X_1^2 + X_2^2] = 0, \tag{4}$$

y donde

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es conveniente decir que en este caso es fácil probar directamente que \mathcal{A} es conmutativa demostrando la identidad (4). Dicha álgebra es isomorfa a un álgebra $L(\mathcal{A})$ de operadores diferenciables H -invariantes en $SL(2, \mathbb{R})$. Un hecho fundamental en la teoría de series de Eisenstein es que son eigenfunciones de tales operadores diferenciables. En este caso, para los generadores tenemos que:

$$\begin{aligned} L(A_1) E_n(g, s) &= -in \cdot E_n(g, s), \\ L(X_1^2 + X_2^2) E_n(g, s) &= c(s, n) \cdot E_n(g, s), \end{aligned}$$

para cierta constante $c(s, n)$.

En el capítulo 6, sección 1, consideramos $G = SL(2, \mathbb{C})$ con cierta métrica Riemanniana g construida usando la forma bilineal de Killing. El grupo $H = SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ actúa en $G = SL(2, \mathbb{C})$ transitivamente y por isometrías. Por medio de la descomposición polar de $SL(2, \mathbb{C})$ (sección 2) damos una isometría $\mu : G \rightarrow G$. Usando una equivalencia de espacios débilmente simétricos debida a Ziller [32], demostramos que el triple $((G, g), H, \mu)$ es un espacio débilmente simétrico (sección 3). Como consecuencia de los resultados de Selberg en [26], el álgebra $L(\mathcal{A})$ de operadores diferenciables de todos los órdenes y H -invariantes en $SL(2, \mathbb{C})$ es conmutativa. En la sección 4 damos los generadores $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ y \mathcal{O}_3 de \mathcal{A} y probamos directamente que es conmutativa. Esto es, demostramos que

$$[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] = [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] = 0.$$

En el capítulo 7 probamos que las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ son eigenfunciones de los operadores en $L(\mathcal{A})$, para los generadores tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ son eigenfunciones de los operadores $L(\mathcal{O}_1)$, $L(\mathcal{O}_2)$ y $L(\mathcal{O}_3)$. Si $k = m$ tenemos que:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= -k^2 \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= (1 + s)^2 \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= iks \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s). \end{aligned}$$

Si $k \neq m$ entonces

$$L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = 0.$$

Preliminares de Teoría de Números

En la sección 1 de este capítulo daremos un repaso sobre campos de números algebraicos, su anillo de enteros, ideales, el grupo de clases de ideales y la función zeta de Dedekind, haciendo énfasis en los campos cuadráticos imaginarios de clase 1, que son los que utilizaremos en esta tesis.

En la sección 2 repasaremos sobre caracteres de Hecke y la función L de Hecke asociada a dichos caracteres, de nuevo, haciendo énfasis en los caracteres que usaremos.

En la sección 3 recordaremos la función φ_D de Euler asociada a \mathcal{O}_D , el anillo de enteros de $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$, análoga a la función φ de Euler asociada a \mathbb{Z} .

Si $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, en el coeficiente cero de Fourier de la serie de Eisenstein asociada a Γ aparece la función $\phi(s)$, con $\text{Re}(s) > 1$, dada por:

$$\phi(s) = \sum_{\substack{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ c > 0, d \pmod{c}}} \frac{1}{|c|^{2+2s}}.$$

Se cumple la siguiente identidad:

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{2s+2}} = \frac{\zeta(2s+1)}{\zeta(2s+2)}, \quad (1.1)$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann. En el capítulo 3 estudiaremos una generalización de las series de Eisenstein asociadas a grupos de Bianchi Γ_D . En el coeficiente cero de su expansión de Fourier aparecerá una cierta función $\phi_{m, \vec{0}}(s)$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. El resultado principal de la sección 3 (y de el capítulo 1) será demostrar un análogo de la fórmula (1.1) como sigue:

$$\phi_{m, \vec{0}}(s) = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^m}{|c|^{2+2s}} = \frac{L(s, \chi_m)}{L(s+1, \chi_m)},$$

donde m depende del campo cuadrático $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$, y $L(s, \chi_m)$ es la función L de Hecke asociada a un cierto caracter de Hecke χ_m .

1.1 — Campos de números y la función zeta de Dedekind

Definición. Los números naturales denotados \mathbb{N} son el conjunto siguiente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Definición. Un **campo de números algebraico** es una extensión algebraica finita de el campo de los números racionales \mathbb{Q} .

Ejemplo. $\mathbb{Q}\sqrt{D}$, con $D \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.

Ejemplo. $\mathbb{Q}(\epsilon_n)$, donde $\epsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Definición. Un **campo de números cuadrático imaginario** es un campo de números algebraico de la forma $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$ donde $D \in \mathbb{N} - \{0\}$ y libre de cuadrados. Denotamos a estos campos por K_D .

Ejemplo. $K_1 = \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $K_3 = \mathbb{Q}\sqrt{-3}$, $K_5 = \mathbb{Q}\sqrt{-5}$.

El campo de números \mathbb{Q} contiene al anillo de enteros \mathbb{Z} . Un campo de números algebraico K también tiene asociado un anillo de enteros \mathcal{O}_K dado por la siguiente:

Definición. El **anillo de enteros** de un campo de números algebraico K (denotado \mathcal{O}_K), es el anillo de elementos contenidos en K que son raíces de polinomios mónicos con coeficientes enteros.

Ejemplo 1.1.1. El **anillo de enteros** del campo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$ (denotado \mathcal{O}_D), donde $D \in \mathbb{N} - \{0\}$ y libre de cuadrados, está definido por la siguiente tabla (ver teorema 4.2.2 de [27], página 63, para una demostración).

$$\mathcal{O}_D = \begin{cases} \mathbb{Z}[i\sqrt{D}] & \text{si } D \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } D \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (1.2)$$

Algunos ejemplos concretos son los siguientes:

- $\mathcal{O}_1 = \mathbb{Z}[i]$, llamados **enteros de Gauss**.
- $\mathcal{O}_3 = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, llamados **enteros de Eisenstein**.
- $\mathcal{O}_5 = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

Definición. Sea $w_D \in \mathbb{H}^2$ con $\text{Im}(w_D) > 0$ dada por

$$w_D := \begin{cases} i\sqrt{D} & \text{si } D \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ \frac{1+i\sqrt{D}}{2} & \text{si } D \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Definición. El anillo \mathcal{O}_D nos da una retícula $\Lambda_D \subset \mathbb{C}$ generada por 1 y w_D , esto es,

$$\Lambda_D = \mathbb{Z} + w_D\mathbb{Z} = \mathcal{O}_D. \quad (1.3)$$

La norma en K_D es una función que mide el “tamaño” de los elementos. Se puede definir para cualquier campo K pero aquí solo daremos la definición para los campos que ocuparemos.

Definición 1.1.2. La **norma** en K_D es una función $N : K_D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2,$$

con $\alpha \in K_D \subset \mathbb{C}$.

Definición. $\alpha \in \mathcal{O}_K$ es una **unidad** si tiene inverso multiplicativo en \mathcal{O}_K , es decir, si existe $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que $\alpha \cdot \beta = 1$. Denotaremos por \mathcal{O}_K^\times al conjunto de unidades de \mathcal{O}_K y por \mathcal{O}_D^\times al conjunto de unidades del anillo de enteros \mathcal{O}_D de K_D .

Definición 1.1.3. Un elemento $p \in \mathcal{O}_D$, $p \neq 0$ y $p \notin \mathcal{O}_D^\times$ es **primo** si no puede ser descompuesto como $p = ab$ con $a, b \in \mathcal{O}_D$, a menos que a ó b sean unidades.

Lema 1.1.4. Si $\alpha \in \mathcal{O}_D$ entonces $N(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Demostración. Existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\alpha = \begin{cases} a + bi\sqrt{D} & \text{si } D \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ a + b\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } D \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

- Si $D \equiv 1, 2 \pmod{4}$ tenemos que $N(\alpha) = (a + bi\sqrt{D})(a - bi\sqrt{D}) = a^2 + b^2D \in \mathbb{N}$.
- Si $D \equiv 3 \pmod{4}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D = 3 + 4m$. Luego

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= \left(a + \frac{b}{2} + i\frac{b}{2}\sqrt{D}\right)\left(a + \frac{b}{2} - i\frac{b}{2}\sqrt{D}\right) = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2D}{4} \\ &= a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2D}{4} = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}(3 + 4m) \\ &= a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + b^2m = a^2 + ab + b^2 + b^2m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.1.5. $\alpha \in \mathcal{O}_D^\times \iff \alpha \in \mathcal{O}_D$ y cumple que $N(\alpha) = 1$.

Demostración. ■ Si $\alpha \in \mathcal{O}_D^\times$ existe $\beta \in \mathcal{O}_D$ tal que $\alpha \cdot \beta = 1$, luego

$$\begin{aligned} 1 &= N(1) = N(\alpha \cdot \beta) \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{(\alpha \cdot \beta)} = \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \bar{\beta} \\ &= N(\alpha)N(\beta). \end{aligned}$$

Pero por el lema (1.1.4) sabemos que $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{N}$, por lo que necesariamente $N(\alpha) = 1$.

- Inversamente, si $\alpha \in \mathcal{O}_D$ y cumple la condición $N(\alpha) = 1$ entonces $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = 1$, donde $\bar{\alpha} \in \mathcal{O}_D$, luego $\alpha \in \mathcal{O}_D^\times$.

□

Las unidades de \mathcal{O}_D están dadas por el siguiente lema.

Lema 1.1.6.

$$\mathcal{O}_D^\times = \begin{cases} \{\pm 1, \pm i\} & \text{si } D = 1 \\ \{\pm 1, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}, e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}\} & \text{si } D = 3 \\ \{\pm 1\} & \text{si } D = 2, 7, 11, 19, 43, 67, 163. \end{cases}$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Si $a + bi \in \mathcal{O}_1$ entonces $N(a + bi) = a^2 + b^2$, luego

$$N(a + bi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a = \pm 1 \text{ y } b = 0 \\ \text{ó} \\ a = 0 \text{ y } b = \pm 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad a + bi \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

- Si $a + bi\sqrt{2} \in \mathcal{O}_2$ entonces $N(a + bi\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2$, luego

$$N(a + bi\sqrt{2}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1 \text{ y } b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + bi\sqrt{2} \in \{\pm 1\}.$$

- Si $a + \frac{b}{2} + \frac{ib}{2}\sqrt{3} \in \mathcal{O}_3$ entonces $N(a + \frac{b}{2} + \frac{ib}{2}\sqrt{3}) = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2$, luego

$$a^2 + ab + b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a = \pm 1 \text{ y } b = 0 \\ \text{ó} \\ a = 0 \text{ y } b = \pm 1 \\ \text{ó} \\ a = 1 \text{ y } b = -1 \\ \text{ó} \\ a = -1 \text{ y } b = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad a + \frac{b}{2} + \frac{ib}{2}\sqrt{3} \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\}.$$

- Sea $D \in \{11, 19, 43, 67, 163\}$, por lo que $D \equiv 3 \pmod{4}$. Consideremos $a + \frac{b}{2} + \frac{bi}{2}\sqrt{D} \in \mathcal{O}_D$, luego

$$\begin{aligned} N\left(a + \frac{b}{2} + \frac{bi}{2}\sqrt{D}\right) = 1 &\quad \Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2 D}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1 \text{ y } b = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad a + \frac{b}{2} + \frac{bi}{2}\sqrt{D} \in \{\pm 1\}. \end{aligned} \quad \square$$

Definición. El **discriminante** (denotado d_D) de un campo cuadrático imaginario $K_D = \mathbb{Q}\sqrt{-D}$ está dado por

$$d_D = \begin{cases} -4D & \text{si } D \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ -D & \text{si } D \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (1.4)$$

El discriminante aparecerá más adelante en la fórmula de clase. Ahora recordamos los conceptos de ideales para dar la definición del grupo de clases de ideales y número de clase.

Definición. Sea $I \subseteq \mathcal{O}_K$, I es un **ideal integral** si $(I, +)$ es un subgrupo de $(\mathcal{O}_K, +)$ y absorbe la multiplicación, es decir, si $\alpha \in \mathcal{O}_K$, $x \in I$ entonces $\alpha \cdot x \in I$.

Definición. Un ideal I es un **ideal integral primo** si $\forall a, b \in \mathcal{O}_K$ tal que $a \cdot b \in I$ entonces $a \in I$ ó $b \in I$.

Definición. Un ideal \mathfrak{a} es un **ideal integral principal** si está generado por un elemento, es decir, si existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tal que

$$\mathfrak{a} = (\alpha) = \alpha \cdot \mathcal{O}_K.$$

Definición. Denotamos por P_K al conjunto de todos los ideales integrales principales de \mathcal{O}_K y por P_D al conjunto de todos los ideales integrales principales de \mathcal{O}_D .

Recordaremos la función zeta de Dedekind, pero para eso necesitamos el concepto de norma de un ideal, que es una generalización del concepto de norma de elementos en un campo.

Definición. La norma de un ideal integral \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K está definida por la fórmula siguiente

$$N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|.$$

Si $\mathfrak{a} = (\alpha)$ es un ideal integral principal de \mathcal{O}_D entonces,

$$N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_D/\mathfrak{a}| = N(\alpha).$$

Definición. Sea $J \subseteq K$, J es un **ideal fraccionario** de K si $(J, +)$ es un subgrupo de $(K, +)$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $J = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, donde $\alpha, \beta \in K$ y son linealmente independientes sobre \mathbb{Z} .
2. Existe $\delta \in K$ tal que $\delta \cdot J \subseteq J$.

El elemento δ elimina los “denominadores” lo cual justifica el nombre, sin embargo, los ideales fraccionarios son una nueva clase de objetos, no son ideales con una propiedad extra. Además, no necesariamente están contenidos en \mathcal{O}_K , cuando esto sucede, dichos ideales fraccionarios son de hecho ideales integrales de \mathcal{O}_K . Este párrafo fué tomado de [27], página 77. Un subconjunto importante de los ideales fraccionarios son los siguientes.

Definición. Sea $\delta \in K - \{0\}$, el conjunto

$$\delta \cdot \mathcal{O}_K = \{\delta \cdot \alpha ; \alpha \in \mathcal{O}_K\} \subset K$$

es un **ideal principal fraccionario**.

Ejemplo. En $K_1 = \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}\mathbb{Z}[i]$ es un ideal principal fraccionario de K_1 que no es un ideal integral de $\mathbb{Z}[i]$.

Si J es un ideal fraccionario de K , entonces

$$J^{-1} := \{\alpha \in J ; \alpha \cdot J \subseteq \mathcal{O}_K\}$$

es también un ideal fraccionario. Si J_2 es otro ideal fraccionario, se puede definir el producto $J \cdot J_2$ el cual es de nuevo un ideal fraccionario. Se tiene el siguiente teorema, para una demostración consultar [27], página 78.

El conjunto de todos los ideales principales fraccionarios de K forman un grupo, denotado I_K , cuyo neutro es \mathcal{O}_K .

Sea $\alpha \in K^\times$, existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \cdot \beta = 1$. Podemos considerar el ideal principal fraccionario $(\alpha) \in I_K$, y definimos el homomorfismo $div : K^\times \rightarrow I_K$ dado por

$$div(\alpha) = (\alpha) \in I_K.$$

Definición. El **grupo de clases de ideales** de K , denotado Cl_K está dado por

$$Cl_K = I_K/Im(div).$$

El grupo Cl_K es un grupo finito, ver teorema 4.11 en [19], página 128, para una demostración. Por lo que tiene sentido la siguiente:

Definición. El **número de clase** de K , denotado h_K , está dado por la fórmula

$$h_K = |Cl_K|.$$

El siguiente teorema nos dice cuales son todos los campos cuadráticos imaginarios de clase 1,

Teorema. (*Stark-Heegner*) Sea $K_D = \mathbb{Q}\sqrt{-D}$ con $D \in \mathbb{N} - \{0\}$ y libre de cuadrados. El número de clase de K_D es 1 $\iff D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

El anillo de enteros \mathcal{O}_K de cualquier campo de números K es un dominio de Dedekind. Un teorema general de álgebra nos dice que \mathcal{O}_K es un dominio de factorización única $\iff \mathcal{O}_K$ es un dominio de ideales principales. El siguiente teorema nos da cuales de los \mathcal{O}_D son dominios de factorización única,

Teorema. (*Gauss-Baker-Stark*) Sea \mathcal{O}_D el anillo de enteros de un campo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$, $D \in \mathbb{N} - \{0\}$. \mathcal{O}_D es un dominio de factorización única $\iff D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

Resumiendo, si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces \mathcal{O}_D es un dominio de Dedekind, un dominio de factorización única y un dominio de ideales principales.

Informalmente, el grupo de clases de ideales de K mide la falla de \mathcal{O}_D a ser un dominio de factorización única. Esto explica la coincidencia entre los anillos de enteros de campos cuadráticos imaginarios de número de clase 1 (Teorema de Stark-Heegner) y los anillos de enteros de campos cuadráticos imaginarios que son dominios de factorización única (Teorema de Gauss-Baker-Stark).

Definición. La **función zeta de Dedekind** de K_D está definida por las series

$$\zeta_D(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{[N(\mathfrak{a})]^s},$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$, y la suma es sobre todos los ideales integrales \mathfrak{a} (no cero) de \mathcal{O}_D .

Dedekind demostró que las series anteriores convergen absolutamente para $\text{Re}(s) > 1$. Además, que $\zeta_D(s)$ admite una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} con polos simples en $s = 1$ y $s = 0$. El residuo en $s = 1$ está dado por la **fórmula de número de clase**,

$$\text{Res}(\zeta_D(s), s = 1) = \frac{2\pi \cdot h_D}{w_D \sqrt{|d_D|}},$$

donde d_D es el discriminante de K_D , h_D es el número de clase de K_D y $w_D := |\mathcal{O}_D^\times|$.

1.2 — Caracteres de Hecke y funciones L de Hecke

Sea K_D un campo cuadrático imaginario de clase 1 y consideremos $\mathfrak{m} := \mathcal{O}_D$ ideal trivial de K_D . Siguiendo la definición de caracteres de Hecke y el ejemplo 1.5.7 en [6], página 14, tenemos la siguiente definición adaptada a las condiciones anteriores. Solo ocuparemos dichos caracteres.

Definición 1.2.1. Un **caracter de Hecke** de peso χ_n y módulo trivial \mathfrak{m} en K_D es un homomorfismo

$$\chi_n : \mathcal{P}_D \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C},$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$ y definido mediante la siguiente igualdad

$$\chi_n(\mathfrak{a}) = \chi_n((\alpha)) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^n, \quad \forall \mathfrak{a} = (\alpha) \in \mathcal{P}_D,$$

recordamos aquí que \mathcal{P}_D es el conjunto de todos los ideales integrales principales de \mathcal{O}_D . Simplemente diremos que χ_n es un caracter de Hecke.

En los capítulos posteriores necesitaremos considerar la función M ,

Definición. La función módulo $M : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ se define por la siguiente regla:

$$M(z) = \frac{z}{|z|}.$$

Si $c \in \mathcal{O}_D$ entonces la relación entre los caracteres de Hecke y la función M está dada por

$$\chi_n((c)) = M(c)^n. \quad (1.5)$$

Lema 1.2.2. Si \mathfrak{a} es un ideal integral principal de \mathcal{O}_D y $\alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que $\mathfrak{a} = (\alpha)$ entonces

$$\mathfrak{a} = (\alpha) = (\varepsilon\alpha), \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times.$$

Demostración. Si $\varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times$ entonces probaremos primero que

$$\varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_D. \quad (1.6)$$

- \subseteq) Sea $\phi \in \varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{O}_D$ entonces $\phi = \varepsilon^{-1} \cdot \gamma$ con $\gamma \in \mathcal{O}_D$. Además, $\varepsilon^{-1} \in \mathcal{O}_D$ ya que $\varepsilon \in \mathcal{O}_D$ y \mathcal{O}_D es un anillo. Por lo que el producto $\phi = \varepsilon^{-1} \cdot \gamma \in \mathcal{O}_D$.
- \supseteq) Sea $\phi \in \mathcal{O}_D$, tenemos que $\phi = \varepsilon^{-1}(\varepsilon \cdot \phi)$, pero $\varepsilon \cdot \phi \in \mathcal{O}_D$ ya que $\varepsilon, \phi \in \mathcal{O}_D$ y \mathcal{O}_D es un anillo. Por tanto, $\phi \in \varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{O}_D$.

Por otra parte, tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= (\alpha) = \alpha \cdot \mathcal{O}_D \\ &= \varepsilon\alpha \cdot \varepsilon^{-1}\mathcal{O}_D \\ &= \varepsilon\alpha \cdot \mathcal{O}_D && \text{por (1.6)} \\ &= (\varepsilon\alpha). \end{aligned}$$

□

Sea χ_n un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D , si \mathfrak{a} es un ideal principal integral de \mathcal{O}_D , por el lema (1.2.2),

$$\mathfrak{a} = (\alpha) = (\varepsilon\alpha)$$

con $\varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \chi_n(\mathfrak{a}) &= \left(\frac{\varepsilon\alpha}{|\varepsilon\alpha|} \right)^n && \text{por la definición (1.2.1)} \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right)^n \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^n \\ &= \varepsilon^n \cdot \chi_n(\mathfrak{a}) && \text{por el lema (1.1.5)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por la fórmula en (1.7) concluimos que la condición sobre $n \in \mathbb{Z}$ para que χ_n sea un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D es la siguiente:

$$\varepsilon^n = 1, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times. \quad (1.8)$$

En capítulos posteriores necesitamos conocer todos los caracteres de Hecke en \mathcal{O}_D .

Lema. χ_n es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D (definición (1.2.1)) siempre que

$$n \in \begin{cases} 4\mathbb{Z} & \text{si } D = 1 \\ 6\mathbb{Z} & \text{si } D = 3 \\ 2\mathbb{Z} & \text{si } D = 2, 7, 11, 19, 43, 67, 163 \end{cases}$$

Demostración. Por (1.8) basta verificar que $\varepsilon^n = 1 \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times$. Recordemos que por el lema (1.1.6)

$$\mathcal{O}_D^\times = \begin{cases} \{\pm 1, \pm i\} & \text{si } D = 1 \\ \{\pm 1, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}, e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}\} & \text{si } D = 3 \\ \{\pm 1\} & \text{si } D = 2, 7, 11, 19, 43, 67, 163. \end{cases}$$

- Como $(\pm 1)^4 = (\pm i)^4 = 1$, tenemos que $\varepsilon^{4n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_1^\times$.
- Como $(\pm 1)^6 = (e^{\pm i\frac{\pi}{3}})^6 = (e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}})^6 = 1$, tenemos que $\varepsilon^{6n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_3^\times$.
- Sea $D \in \{11, 19, 43, 67, 163\}$, como $(\pm 1)^2 = 1$, tenemos que $\varepsilon^{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times$.

□

Hecke define las siguientes series,

Definición 1.2.3. Sea χ_m un caracter de Hecke para K_D , las **funciones L de Hecke** están definidas por la fórmula:

$$L(s, \chi_m) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_m(\mathfrak{a})}{[N(\mathfrak{a})]^s} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{1 - \chi_m(p) \cdot |p|^{-2s}},$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$ y la suma es sobre todos los ideales integrales \mathfrak{a} no cero de \mathcal{O}_D .

Hecke probó que las series anteriores convergen absolutamente para $\text{Re}(s) > 1$. La continuación, en este caso analítica, está dada por el siguiente teorema,

Teorema 1.2.4. (Hecke) Si $\chi_n \neq 1$ ($n \neq 0$) es un caracter de Hecke no trivial y primitivo en \mathcal{O}_D entonces la función L de Hecke $L(s, \chi_n)$ admite una continuación analítica a todo \mathbb{C} .

Ejemplo 1.2.5. Sea $n = 0$ y consideramos K_D un campo cuadrático imaginario de clase 1 con \mathcal{O}_D su anillo de enteros. Si $\mathfrak{a} = (\alpha)$ un ideal integral no cero de \mathcal{O}_D (todo ideal no cero es ideal principal en \mathcal{O}_D), se tiene que

$$\chi_0(\mathfrak{a}) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^0 = 1.$$

Por lo que

$$L(s, \chi_0) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_n(\mathfrak{a})}{[N(\mathfrak{a})]^s} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{[N(\mathfrak{a})]^s} = \zeta_D(s).$$

1.3 — Función φ_D de Euler y la función $\phi_{m,\bar{0}}(s)$

Primero recordaremos lo que ocurre en dimensión 2, es decir, la función φ de Euler, y la función $\phi(s)$ que aparece en el coeficiente cero de Fourier de la serie de Eisenstein asociada a $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$. La función $\phi(s)$ es un cociente de la función zeta de Riemann.

Definición 1.3.1. Si $x, y, c \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}c} \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = cn.$$

Definición 1.3.2. Sean $I := (0, 1]$, $c, d \in \mathbb{R}$, definimos $d(\pmod{\mathbb{Z}c}) \in \mathbb{R}$ como el único número real tal que cumple las siguientes condiciones:

- $d \equiv d(\pmod{\mathbb{Z}c}) \pmod{\mathbb{Z}c}$.
- $d(\pmod{\mathbb{Z}c}) \in cI$.

Observamos que $0 < d(\pmod{\mathbb{Z}c}) \leq c$. Para no cargar la notación omitiremos la retícula \mathbb{Z} , es decir, nos referiremos a $d(\pmod{\mathbb{Z}c})$ simplemente como $d(\pmod{c})$.

Sea $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ y consideramos la función $\phi(s)$, que aparece en el coeficiente cero de Fourier de las series de Eisenstein asociadas a Γ , y definida como sigue:

$$\phi(s) := \sum_{\substack{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ c > 0, d(\pmod{c})}} \frac{1}{|c|^{2+2s}} = \sum_{0 \neq c \in \mathbb{N}} \left[\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ d = d(\pmod{c})}} \frac{1}{|c|^{2s+2}} \right] = \sum_{0 \neq c \in \mathbb{N}} \frac{\varphi_{\Gamma}(c)}{|c|^{2s+2}}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma}(c) &= \#\left\{d(\pmod{c}) \in \mathbb{R}; \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\pmod{c}) \end{pmatrix} \in \Gamma\right\} \\ &= \#\left\{d \in \mathbb{N}; 0 < d \leq c, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\pmod{c}) \end{pmatrix} \in \Gamma\right\} \\ &= \#\left\{d \in \mathbb{N}; 0 < d \leq c, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right\} \\ &= \#\left\{d \in \mathbb{N}; 0 < d \leq c, (c, d) = 1\right\} \\ &= \varphi(c), \end{aligned}$$

reconocemos la función φ de Euler. Por tanto,

$$\phi(s) = \sum_{0 \neq c \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(c)}{|c|^{2s+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{2s+2}}.$$

Por otra parte, si $\text{Re}(s) > 2$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \tag{1.9}$$

ver [1], página 231, para una demostración.

Ahora, si $\text{Re}(s) > 1$ entonces $\text{Re}(2s + 2) = 2\text{Re}(s) + 2 > 2 + 2 = 4 > 2$, aplicando la identidad en (1.9) concluimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{2s+2}} = \frac{\zeta(2s+2-1)}{\zeta(2s+2)} = \frac{\zeta(2s+1)}{\zeta(2s+2)}.$$

Resumiendo, si $\text{Re}(s) > 1$ entonces

$$\phi(s) = \frac{\zeta(2s+1)}{\zeta(2s+2)}.$$

Regresamos al caso complejo. Sean $z, w, c \in \mathbb{C}$, decimos que $z \equiv w \pmod{\Lambda_D c} \iff \exists \alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que $z - w = c\alpha$. Veremos que esto define una relación de equivalencia.

- $z \equiv z \pmod{\Lambda_D c}$, ya que $\vec{0} \in \mathcal{O}_D$ y $z - z = \vec{0} = c\vec{0}$.
- Si $z \equiv w \pmod{\Lambda_D c}$, existe $\alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que $z - w = c\alpha \iff w - z = c(-\alpha) \iff w \equiv z \pmod{\Lambda_D c}$.
- Si $z \equiv w \pmod{\Lambda_D c}$ existe $\alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que $z - w = c\alpha$.
Si $w \equiv v \pmod{\Lambda_D c}$ existe $\beta \in \mathcal{O}_D$ tal que $w - v = c\beta$.

Por tanto, $z - v = c(\alpha + \beta) \implies z \equiv v \pmod{\Lambda_D c}$.

Ejemplo.

$$z \equiv w \pmod{\Lambda_1 1} \iff \exists \alpha \in \mathcal{O}_1 \text{ tal que } z - w = 1\alpha = \alpha \iff z - w \in \mathbb{Z}[i].$$

Ejemplo. Se cumple que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \equiv \sqrt{2}i \pmod{\Lambda_1} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}i &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{2i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) (-i) \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} (-i). \end{aligned}$$

Definición 1.3.3. Sea P_D la región delimitada por el paralelogramo fundamental de la retícula Λ_D , ver figura (1.1). Sean $c, d \in \mathbb{C}$, $d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \in \mathbb{C}$ es el único número complejo tal que cumple las siguientes condiciones:

- $d \equiv d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \pmod{\Lambda_D c}$.
- $d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \in cP_D$.

Notamos que si $c, d \in \mathcal{O}_D$ entonces $d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \in \mathcal{O}_D$. Por otra parte, usaremos el siguiente resultado.

Lema 1.3.4. Sea $\Gamma_D = SL(2, \mathcal{O}_D)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \iff \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D.$$

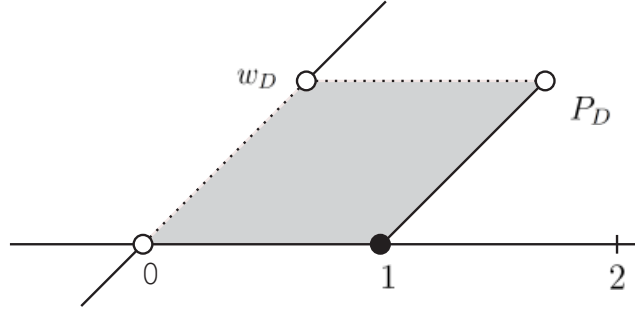


Figura 1.1: La región P_D .

Demostración. \Rightarrow) $\exists a, b \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$ad - bc = 1. \quad (1.10)$$

Por la definición (1.3.3) existe $\alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$d - d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) = c\alpha \iff d = d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) + c\alpha. \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.11) en (1.10) tenemos

$$\begin{aligned} a(d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) + c\alpha) - bc = 1 &\iff a \cdot d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) + ac\alpha - bc = 1 \\ &\iff a \cdot d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) - c(b - a\alpha) = 1 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{pmatrix} a & b - a\alpha \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D.$$

\Leftarrow) $\exists a, b \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$a(d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)) - bc = 1. \quad (1.12)$$

Por la definición (1.3.3) existe $\alpha \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$d - d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) = c\alpha \iff d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) = d - c\alpha. \quad (1.13)$$

Sustituyendo (1.13) en (1.12) tenemos

$$\begin{aligned} a(d - c\alpha) - bc = 1 &\iff ad - ac\alpha - bc = 1 \\ &\iff ad - c(a\alpha + b) = 1 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{pmatrix} a & a\alpha + b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D.$$

□

Definición 1.3.5. Se define la función $\varphi_D : \mathcal{O}_D \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

$$\varphi_D(c) = \#\left\{d \in \mathcal{O}_D; \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D\right\}, \quad \forall c \in \mathcal{O}_D.$$

La función φ_D es la generalización de la función φ de Euler para el anillo \mathcal{O}_D .

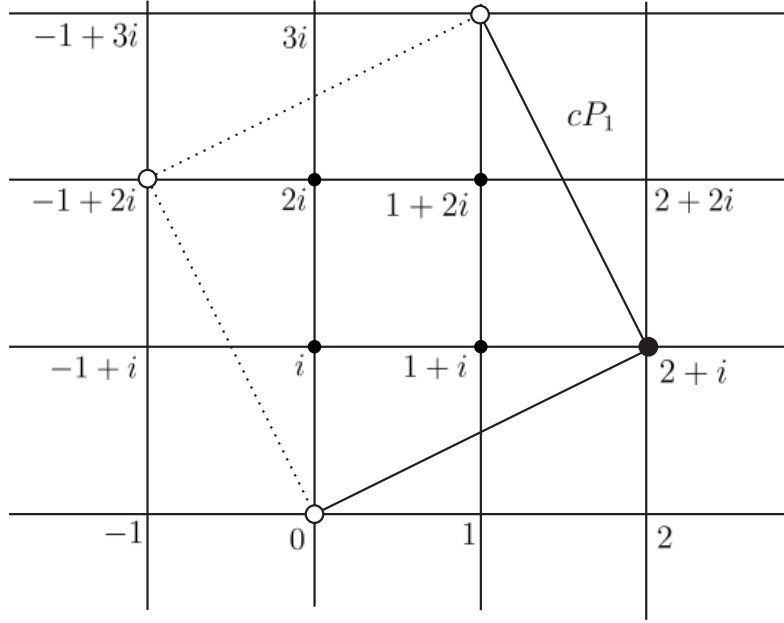


Figura 1.2: $\varphi_1(2+i) = \#\{i, 1+i, 2i, 1+2i\} = 4$.

Ejemplo. Para $D = 1$, se tiene que $\mathcal{O}_1 = \mathbb{Z}[i]$. Sea $c = 2+i$, entonces

$$\varphi_1(2+i) = \#\{i, 1+i, 2i, 1+2i\} = 4,$$

ya que

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2+i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2+i & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2+i & 1+2i \end{pmatrix} \in \Gamma_1.$$

Además, ver figura (1.2), $\{i, 1+i, 2i, 1+2i\} \in (2+i)P_1$.

Lema 1.3.6. Se cumple la siguiente identidad:

$$\varphi_D(c) = \#\left\{d \in \mathcal{O}_D; d \in cP_D, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D\right\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma_D}(c) &= \#\left\{d \in \mathcal{O}_D; \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D\right\} && \text{por la definición (1.3.5)} \\ &= \#\left\{d \in \mathcal{O}_D; d \in cP_D, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D\right\} && \text{por (1.3.3)} \\ &= \#\left\{d \in \mathcal{O}_D; d \in cP_D, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D\right\} && \text{por el lema (1.3.4)} \end{aligned}$$

□

Como mencionamos en la introducción del capítulo, la función $\phi_{m,\vec{0}}(s)$ para $m \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$ aparece en el coeficiente cero de Fourier de las series de Eisenstein generalizadas $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$,

definidas en el capítulo 4. Recordemos que $\Gamma_D = SL(2, \mathcal{O}_D)$, se tiene la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned}
\phi_{m, \bar{0}}(s) &:= \sum_{\substack{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d = d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)}} \frac{M(c)^m}{|c|^{2+2s}} \\
&= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D \text{ tal que}} \left[\sum_{\substack{d \in \mathcal{O}_D \text{ tal que} \\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ d = d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)}} \frac{M(c)^m}{|c|^{2s+2}} \right] \\
&= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \left[\sum_{\substack{d \in \mathcal{O}_D \text{ tal que} \\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ d = d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)}} \frac{M(c)^m}{|c|^{2s+2}} \right] \\
&= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \left[\sum_{\substack{d \in \mathcal{O}_D \text{ tal que} \\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ d = d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)}} 1 \right] \frac{M(c)^m}{|c|^{2s+2}} \\
&= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^m}{|c|^{2+2s}} \quad \text{por la definición (1.3.5)}
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\phi_{m, \bar{0}}(s) = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^m}{|c|^{2+2s}}. \quad (1.14)$$

Ahora damos una definición algebraica para φ_D , análoga a la que se tiene para \mathbb{Z} , es decir, si $n \geq 1$

$$\varphi(n) = \left| \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right)^\times \right|.$$

Lema 1.3.7. *Sea $c \in \mathcal{O}_D$, $c \neq 0$, se tiene que*

$$\varphi_D(c) = \left| \left(\mathcal{O}_D / (c) \right)^\times \right|.$$

Demostración. Sea $c \in \mathcal{O}_D$, $c \neq 0$, consideremos el conjunto $A(c)$ definido como sigue

$$A(c) = \left\{ d \in \mathcal{O}_D ; d \in cP_D, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \right\}.$$

Por el lema (1.3.6)

$$\varphi_D(c) = |A(c)|. \quad (1.15)$$

Sea la función $f : A(c) \rightarrow (\mathcal{O}_D/(c))^\times$ definida por medio de siguiente fórmula:

$$f(d) = [d] = d + c\mathcal{O}_D.$$

Primero verificamos que $[d] \in (\mathcal{O}_D/(c))^\times$. Como $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D$ existen $a, b \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$ad - bc = 1 \iff ad = 1 + bc, \tag{1.16}$$

pero entonces podemos probar que $[d] = d + c\mathcal{O}_D$ tiene inverso multiplicativo, ya que

$$\begin{aligned} [d] \cdot [a] &= (d + c\mathcal{O}_D)(a + c\mathcal{O}_D) \\ &= ad + c\mathcal{O}_D \\ &= 1 + bc + c\mathcal{O}_D && \text{por (1.16)} \\ &= 1 + c\mathcal{O}_D = [1]. \end{aligned}$$

Veamos que f es inyectiva: si $d_1, d_2 \in A(c)$ tal que $f(d_1) = f(d_2)$, entonces

$$\begin{aligned} d_1 + c\mathcal{O}_D = d_2 + c\mathcal{O}_D &\iff d_1 - d_2 \in c\mathcal{O}_D \\ &\iff d_1 \equiv d_2 \pmod{\Lambda_D c}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

pero por hipótesis $d_1, d_2 \in cP_D$, por lo que $d_1 = d_2$ y entonces f es inyectiva.

Veamos ahora que f es sobreyectiva: si $[d] \in (\mathcal{O}_D/(c))^\times$, por ser $[d]$ unidad existe $[a] \in \mathcal{O}_D/(c)$ con $a \in \mathcal{O}_D$ tal que

$$\begin{aligned}
[d][a] = [1] &\iff [da] = [1] \\
&\iff \exists b \in \mathcal{O}_D \text{ tal que } da - 1 = cb \\
&\iff \exists b \in \mathcal{O}_D \text{ tal que } ad - bc = 1 \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\
&\iff \begin{pmatrix} * & * \\ c & d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \end{pmatrix} \in \Gamma_D. \qquad \text{por el lema (1.3.4)}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Pero por la definición (1.3.3) sabemos que $d(\text{mod}_{\Lambda_D} c) \in cP_D$, y que $[d(\text{mod}_{\Lambda_D} c)] = [d]$, luego, $f(d) = [d]$.

Finalmente, por (1.15) y usando que f es una biyección se sigue que:

$$\varphi_D(c) = |A(c)| = \left| \left(\mathcal{O}_D / (c) \right)^\times \right|.$$

□

Si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces \mathcal{O}_D es un dominio de ideales principales. Por lo que si I es un ideal en \mathcal{O}_D existe un único $c \in \mathcal{O}_D$ y posiblemente una unidad $\varepsilon \in \mathcal{O}_D^\times$ tal que $I = (\varepsilon c)$,

$$\begin{aligned}
\varphi_D(\varepsilon c) &= \left| \left(\mathcal{O}_D / (\varepsilon c) \right)^\times \right| \\
&= \left| \left(\mathcal{O}_D / (c) \right)^\times \right| = \varphi_D(c).
\end{aligned}$$

Por lo anterior, la función φ_D también se define en ideales.

Definición 1.3.8. Sean $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, I un ideal en \mathcal{O}_D , existe $c \in \mathcal{O}_D$ tal que $I = (c)$. Se define

$$\varphi_D(I) = \varphi_D(c).$$

Por otra parte, si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces \mathcal{O}_D es un dominio de factorización única. Por lo que para cada ideal I en \mathcal{O}_D existen ideales primos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ en \mathcal{O}_D y $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$I = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{r_m}.$$

Lema 1.3.9. *Se cumple que*

$$\varphi_D(I) = \varphi_D(\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{r_m}) = \varphi_D(\mathfrak{p}_1)^{r_1} \cdots \varphi_D(\mathfrak{p}_m)^{r_m}.$$

Demostración. Usando el Teorema chino del residuo tenemos el siguiente isomorfismo de anillos:

$$\mathcal{O}_D / I \cong \mathcal{O}_D / \mathfrak{p}_1^{r_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_D / \mathfrak{p}_m^{r_m},$$

y entonces

$$\left(\mathcal{O}_D / I \right)^\times \cong \left(\mathcal{O}_D / \mathfrak{p}_1^{r_1} \right)^\times \times \cdots \times \left(\mathcal{O}_D / \mathfrak{p}_m^{r_m} \right)^\times,$$

por tanto

$$\varphi_D(I) = \varphi_{\Gamma_D}(\mathfrak{p}_1^{r_1}) \cdots \varphi_D(\mathfrak{p}_m^{r_m}).$$

Con los mismos argumentos vemos que

$$\varphi_D(\mathfrak{p}^r) = \varphi_D(\mathfrak{p})^r, \quad \forall r \in \mathbb{N}, r \geq 1.$$

□

Otro resultado que nos será útil más adelante es el siguiente.

Lema 1.3.10. Sean $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, \mathfrak{p} un ideal primo en \mathcal{O}_D . Existe $p \in \mathcal{O}_D$ tal que $\mathfrak{p} = (p)$ y se cumple la siguiente igualdad

$$\varphi_D(\mathfrak{p}^n) = q^{n-1}(q-1),$$

donde $n \geq 1$ y

$$q := \left| \mathcal{O}_D / (p) \right| = N(p).$$

Demostración. Existe $p \in \mathcal{O}_D$ tal que $\mathfrak{p} = (p)$, y $\mathfrak{p}^n = (p^n)$. Sea $f : \mathcal{O}_D / (p^n) \rightarrow \mathcal{O}_D / (p)$ la función definida por la siguiente igualdad:

$$f(c + p^n \mathcal{O}_D) = c + p \mathcal{O}_D.$$

Veamos que f está bien definida: si $c_1, c_2 \in \mathcal{O}_D$ son tal que $c_1 + p^n \mathcal{O}_D = c_2 + p^n \mathcal{O}_D$ entonces $c_1 - c_2 \in p^n \mathcal{O}_D$, por lo que existe $t \in \mathcal{O}_D$ tal que $c_1 - c_2 = p^n t = p(p^{n-1}t)$, por esto concluimos que $c_1 + p \mathcal{O}_D = c_2 + p \mathcal{O}_D$ y se sigue que f está bien definida.

Verificaremos ahora que f es un homomorfismo de anillos. Sean $c_1, c_2 \in \mathcal{O}_D$,

$$\begin{aligned} f((c_1 + p^n \mathcal{O}_D) + (c_2 + p^n \mathcal{O}_D)) &= f(c_1 + c_2 + p^n \mathcal{O}_D) \\ &= c_1 + c_2 + p \mathcal{O}_D = (c_1 + p \mathcal{O}_D) + (c_2 + p \mathcal{O}_D) \\ &= f(c_1 + p^n \mathcal{O}_D) + f(c_2 + p^n \mathcal{O}_D). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((c_1 + p^n \mathcal{O}_D) \cdot (c_2 + p^n \mathcal{O}_D)) &= f(c_1 c_2 + p^n \mathcal{O}_D) \\ &= c_1 c_2 + p \mathcal{O}_D = (c_1 + p \mathcal{O}_D) \cdot (c_2 + p \mathcal{O}_D) \\ &= f(c_1 + p^n \mathcal{O}_D) f(c_2 + p^n \mathcal{O}_D). \end{aligned}$$

Veamos que f es sobreyectiva. Sea $c + p \mathcal{O}_D \in \mathcal{O}_D / (p)$; luego, $f(c + p^n \mathcal{O}_D) = c + p \mathcal{O}_D$.

Ahora observamos que $\forall c \in \mathcal{O}_D$ se cumple que $f^{-1}(c + p \mathcal{O}_D) =$

$$\{c + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + p^n \mathcal{O}_D; a_m \in \mathcal{O}_D, 0 \leq N(a_m) \leq q-1, 1 \leq m \leq n-1\}, \quad (1.19)$$

ya que

$$\begin{aligned} f(c + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + p^n \mathcal{O}_D) &= c + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + p \mathcal{O}_D \\ &= c + p \mathcal{O}_D. \end{aligned}$$

Por (1.19) sabemos

$$\left| f^{-1}(c + \mathfrak{p}) \right| = q^{n-1}, \quad \forall c \in \mathcal{O}_D. \quad (1.20)$$

Requerimos demostrar la siguiente igualdad:

$$f^{-1}\left(\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right)^\times\right) = \left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n\right)^\times. \quad (1.21)$$

Para ello necesitamos algunos preliminares. Como \mathcal{O}_D es un dominio de Dedekind y en todo dominio de Dedekind un ideal primo es maximal concluimos que \mathfrak{p} es ideal maximal. Por el ejercicio 2, página 25, de [5] obtenemos que $\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n$ es un anillo local para $n \geq 1$. Esto es, $\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n$ tiene un único ideal maximal dado por:

$$I = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n.$$

Por otro lado, usando el ejercicio 2, página 25, también en [5] tenemos la siguiente identidad:

$$\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n\right)^\times = \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n - I. \quad (1.22)$$

Si $n = 1$ entonces $\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}$ es un campo, luego:

$$\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right)^\times = \mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - [0] = \mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - \mathfrak{p}. \quad (1.23)$$

Usando (1.22) y (1.23) la fórmula (1.21) es equivalente a la siguiente:

$$f^{-1}\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\right) = \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n - \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n. \quad (1.24)$$

⊆) Si $c + \mathfrak{p}^n \in f^{-1}\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\right)$ entonces $f(c + \mathfrak{p}^n) \notin \mathfrak{p}$. Supongamos que $c + \mathfrak{p}^n \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n \implies c \in \mathfrak{p}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} f(c + \mathfrak{p}^n) &= c + \mathfrak{p} \\ &\in \mathfrak{p}, \end{aligned} \quad \text{ya que } c \in \mathfrak{p}$$

pero esto es una contradicción. Concluimos que $c + \mathfrak{p}^n \in \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n - \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n$.

⊇) Sea $c + \mathfrak{p}^n \in \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n - \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n \implies c \notin \mathfrak{p}$.

Supongamos que $c + \mathfrak{p}^n \notin f^{-1}\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\right)$ entonces $f(c + \mathfrak{p}^n) = c + \mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$, pero esto implica que $c \in \mathfrak{p}$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $c + \mathfrak{p}^n \in f^{-1}\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\right)$.

Ahora, por (1.21),

$$\varphi_D(\mathfrak{p}^n) = \left|\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}^n\right)^\times\right| = \left|f^{-1}\left(\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right)^\times\right)\right|,$$

y entonces

$$\varphi_D(\mathfrak{p}^n) = \left|f^{-1}(c + \mathfrak{p})\right| \cdot \left|\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right)^\times\right|, \quad \forall c \in \mathcal{O}_D. \quad (1.25)$$

También sabemos que por (1.23)

$$\begin{aligned} \left|\left(\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right)^\times\right| &= \left|\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}\right| - 1 \\ &= N(\mathfrak{p}) - 1 = q - 1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sustituyendo (1.26) y (1.20) en (1.25) obtenemos que $\varphi_D(\mathfrak{p}^n) = q^{n-1}(q - 1)$. □

Recordamos lo que es una función completamente multiplicativa.

Definición. Decimos que una función $f : \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ es completamente multiplicativa si

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\}.$$

Lema 1.3.11. Sea $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, entonces φ_D es completamente multiplicativa en ideales, es decir, si I y J son ideales en \mathcal{O}_D se cumple que

$$\varphi_D(IJ) = \varphi_D(I) \varphi_D(J).$$

Demostración. Como \mathcal{O}_D es un dominio de factorización única,

$$I = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{r_m},$$

$$J = \mathfrak{p}_{m+1}^{r_{m+1}} \cdots \mathfrak{p}_l^{r_l},$$

donde $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l$ son ideales primos, $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{N} - \{0\}$. Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi_D(IJ) &= \varphi_D(\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{r_m} \cdot \mathfrak{p}_{m+1}^{r_{m+1}} \cdots \mathfrak{p}_l^{r_l}) \\ &= [\varphi_D(\mathfrak{p}_1)^{r_1} \cdots \varphi_D(\mathfrak{p}_m)^{r_m}] [\varphi_D(\mathfrak{p}_{m+1})^{r_{m+1}} \cdots \varphi_D(\mathfrak{p}_l)^{r_l}] && \text{por el lema (1.3.9)} \\ &= [\varphi_D(\mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{r_m})] [\varphi_D(\mathfrak{p}_{m+1}^{r_{m+1}} \cdots \mathfrak{p}_l^{r_l})] && \text{por el lema (1.3.9)} \\ &= \varphi_D(I) \varphi_D(J). \end{aligned}$$

□

Si $m \in \mathbb{Z}$, consideramos la función $f_m : \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_m(c) = \varphi_D(c) \cdot \chi_m((c)), \quad \forall c \in \mathcal{O}_D, \quad (1.27)$$

donde χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D . Ahora, se siguen las siguientes desigualdades e igualdades,

$$\begin{aligned} \varphi_D(c) &= \left| \left(\mathcal{O}_D / (c) \right)^\times \right| && \text{por el lema (1.3.7)} \\ &\leq \left| \mathcal{O}_D / (c) \right| \\ &= N(c) = |c|^2. && \text{por la definición (1.1.2)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f_m(c)| &= |\varphi_D(c)| |\chi_m((c))| && \text{por (1.27)} \\ &= |\varphi_D(c)| \\ &\leq |c|^2. && \text{por (1.28)} \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$|f_m(c)| \leq |c|^2. \quad (1.29)$$

Lema 1.3.12. Sean $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ y χ_m un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D . Entonces las funciones $\varphi_D, \chi_m : \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ son completamente multiplicativas. Y donde

$$\chi_m(c) \equiv \chi_m((c)) = M(c)^m, \quad \forall c \in \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\}.$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{O}_D$, se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\varphi_D(ab) &= \varphi_D((ab)) && \text{por la definición (1.3.8)} && (1.30) \\
&= \varphi_D((a)(b)) \\
&= \varphi_D((a))\varphi_D((b)) && \text{por el lema (1.3.11)} \\
&= \varphi_D(a)\varphi_D(b).
\end{aligned}$$

Por otra parte, para los caracteres vemos que:

$$\begin{aligned}
\chi_m(ab) &= \left(\frac{ab}{|ab|} \right)^m \\
&= \left(\frac{a}{|a|} \cdot \frac{b}{|b|} \right)^m = \left(\frac{a}{|a|} \right)^m \left(\frac{b}{|b|} \right)^m \\
&= \chi_m(a)\chi_m(b).
\end{aligned}$$

□

Por el lema anterior, φ_D y χ_m son completamente multiplicativas, por (1.27) sabemos que f_m es el producto de esas funciones, luego obtenemos el siguiente:

Corolario 1.3.13. *Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D , entonces la función f_m es completamente multiplicativa.*

También, por (1.27)

$$f_m(1) = \varphi_\Gamma(1) \cdot \chi_m(1) = 1 \cdot 1 = 1. \quad (1.31)$$

Por otra parte, de la convergencia de la función zeta de Dedekind tenemos que,

$$\zeta_D(s) = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{1}{[N(c)]^s} = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{1}{|c|^{2s}} \text{ converge} \iff \text{Re}(s) > 1. \quad (1.32)$$

Ver por ejemplo [6], página 7.

Usando la desigualdad (1.29) se sigue que:

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{|f_m(c)|}{|c|^{2s+2}} \leq \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{|c|^2}{|c|^{2s+2}} = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{1}{|c|^{2s}}, \quad (1.33)$$

la cual por (1.32) converge para $\text{Re}(s) > 1$.

Tenemos el siguiente resultado el cual es el teorema 11.6 en [1], página 230, aunque adaptado al anillo de enteros \mathcal{O}_D ,

Teorema 1.3.14. *Sea $f : \mathcal{O}_D - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función multiplicativa, con $f(1) = 1$, y si además*

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{|f(c)|}{|c|^{2s+2}}$$

converge para $\operatorname{Re}(s) > \sigma$, para alguna $\sigma \in \mathbb{R}$, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{f(c)}{|c|^{2s+2}} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{f(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{f(p^2)}{|p|^{4s+4}} + \frac{f(p^3)}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > \sigma$.

Reunimos lo que sabemos acerca de la función f_m . Si $m \in \mathbb{Z}$ tal que χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D entonces por el corolario (1.3.13) $f_m : \mathcal{O}_D - \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función (completamente) multiplicativa, por (1.31) cumple que $f_m(1) = 1$, y por (1.33)

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{|f_m(c)|}{|c|^{2s+2}}$$

converge para $\operatorname{Re}(s) > 1$, por lo que tenemos todas las hipótesis del teorema (1.3.14), por lo que

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{f_m(c)}{|c|^{2s+2}} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{f_m(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{f_m(p^2)}{|p|^{4s+4}} + \frac{f_m(p^3)}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\} \quad (1.34)$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$. Veamos primero el lado izquierdo de la ecuación (1.34),

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{f_m(c)}{|c|^{2s+2}} &= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot \chi_m((c))}{|c|^{2s+2}} && \text{por (1.27)} \\ &= \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^m}{|c|^{2s+2}} && \text{por (1.5)} \\ &= \phi_{m, \bar{0}}(s). && \text{por (1.14)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Resumiendo, el lado izquierdo de la ecuación (1.34) es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{f_m(c)}{|c|^{2s+2}} = \phi_{m, \bar{0}}(s), \quad (1.36)$$

con $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Buscamos transformar el lado derecho de la ecuación (1.34). Para esto primero observamos que si $p \in \mathcal{O}_D$, p primo, entonces $N(p) \neq 0$. Pero también $p \notin \mathcal{O}_D^\times$, por el lema (1.1.5) $N(p) \neq 1$. Resumiendo, $N(p) \geq 2$.

Lema 1.3.15. Si $m \in \mathbb{Z}$ tal que χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D , se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{q \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \right| < 1,$$

donde $q = N(p) = |p|^2$.

Demostración. Como $\operatorname{Re}(s) > 1 \iff 2\operatorname{Re}(s) > 2$, y $|p| > 1$ se cumplen las siguientes desigualdades

$$|p|^{2\operatorname{Re}(s)} > |p|^2 \iff \frac{1}{|p|^{2\operatorname{Re}(s)}} < \frac{1}{|p|^2}. \quad (1.37)$$

Se tiene la siguiente cadena de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \frac{q \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \right| &= \frac{|q| \cdot |\chi_m(p)|}{|p|^{2\operatorname{Re}(s)+2}} \\ &= \frac{|p|^2 \cdot 1}{|p|^{2\operatorname{Re}(s)+2}} = \frac{1}{|p|^{2\operatorname{Re}(s)}} \\ &< \frac{1}{|p|^2} \quad \text{por (1.37)} \\ &= \frac{1}{N(p)} \leq \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

□

Recordamos ahora un hecho básico de series.

Lema 1.3.16. Si $z \in \mathbb{C}$, con $|z| < 1$ entonces

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

El siguiente lema nos da el lado derecho de la igualdad en (1.34).

Lema. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D , se cumple la siguiente identidad:

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{f_m(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{f_m(p^2)}{|p|^{4s+4}} + \frac{f_m(p^3)}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\} = \frac{L(s, \chi_m)}{L(s+1, \chi_m)}. \quad (1.38)$$

Demostración. Sea

$$q = N(p) = |p|^2. \quad (1.39)$$

Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} &\prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{f_m(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{f_m(p^2)}{|p|^{4s+4}} + \frac{f_m(p^3)}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\} \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{\varphi_D(p) \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{\varphi_D(p^2) \cdot \chi_m(p^2)}{|p|^{4s+4}} + \frac{\varphi_D(p^3) \cdot \chi_m(p^3)}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\} \quad \text{por (1.27)} \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)\chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} + \frac{q(q-1)\chi_m(p)^2}{|p|^{4s+4}} + \frac{q^2(q-1)\chi_m(p)^3}{|p|^{6s+6}} + \dots \right\} \quad \text{por (1.3.10)} \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)\chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \left[1 + \left(\frac{q \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \right) + \left(\frac{q \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \right)^2 + \left(\frac{q \cdot \chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \right)^3 + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)\chi_m(p)}{|p|^{2s+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{q\chi_m(p)}{|p|^{2s+2}}} \right\} && \text{por los lemas (1.3.15) y (1.3.16)} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)\chi_m(p)}{\cancel{|p|^{2s+2}}} \cdot \frac{\cancel{|p|^{2s+2}}}{|p|^{2s+2} - q\chi_m(p)} \right\} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)\chi_m(p)}{|p|^{2s+2} - q\chi_m(p)} \right\} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ \frac{|p|^{2s+2} - \cancel{q\chi_m(p)} + \cancel{q\chi_m(p)} - \chi_m(p)}{|p|^{2s+2} - q\chi_m(p)} \right\} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ \frac{|p|^{2s+2} - \chi_m(p)}{|p|^{2s+2} - \chi_m(p)|p|^2} \right\} && \text{por (1.39)} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ \frac{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s-2}}{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s}} \right\} \\
&= \prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}}} \left\{ \frac{\frac{1}{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s}}}{\frac{1}{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s-2}}} \right\} = \frac{\prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s}}}{\prod_{\substack{p \in \mathcal{O}_D \\ p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \chi_m(p)|p|^{-2s-2}}} \\
&= \frac{L(s, \chi_m)}{L(s+1, \chi_m)}. && \text{por la definición (1.2.3)}
\end{aligned}$$

□

Sustituyendo (1.36) y la igualdad en el lema (1.38) en (1.34)

$$\phi_{m, \vec{0}}(s) = \frac{L(s, \chi_m)}{L(s+1, \chi_m)},$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ es tal que χ_m es un caracter de Hecke en \mathcal{O}_D .

Veamos que pasa si m es impar. De la fórmula en (1.14),

$$\phi_{2m+1, \vec{0}}(s) = \sum_{0 \neq c \in \mathcal{O}_D} \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^{2m+1}}{|c|^{2+2s}}. \quad (1.40)$$

Sea $c \in \mathcal{O}_D$, $c \neq 0$, como $-1 \in \mathcal{O}_D$ tenemos que $-c \in \mathcal{O}_D$ y se cumplen la siguiente cadena de igualdades:

$$M(-c)^{2m+1} = \left(\frac{-c}{|-c|} \right)^{2m+1} = - \left(\frac{c}{|c|} \right)^{2m+1} = -M(c)^{2m+1}. \quad (1.41)$$

Por otro lado, del lema (1.3.7) se sigue que,

$$\varphi_D(-c) = \left| \left(\mathcal{O}_D / (-c) \right)^\times \right| = \left| \left(\mathcal{O}_D / (c) \right)^\times \right| = \varphi_D(c). \quad (1.42)$$

Usando las igualdades en (1.41) y (1.42) vemos que

$$\frac{\varphi_D(-c) \cdot M(-c)^{2m+1}}{|-c|^{2+2s}} = - \frac{\varphi_D(c) \cdot M(c)^{2m+1}}{|c|^{2+2s}},$$

pero entonces el valor en la sumatoria (1.40) para $c \in \mathcal{O}_D$ (con $c \neq \vec{0}$) se cancela con el valor en la sumatoria para $-c \in \mathcal{O}_D$. Por tanto,

$$\phi_{2m+1, \vec{0}}(s) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Hemos demostrado el siguiente,

Teorema 1.3.17. *Si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$, entonces*

$$\phi_{2m+1, \vec{0}}(s) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Si $D = 1$ entonces

$$\phi_{4m, \vec{0}}(s) = \frac{L(s, \chi_{4m})}{L(s+1, \chi_{4m})}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Si $D = 3$ entonces

$$\phi_{6m, \vec{0}}(s) = \frac{L(s, \chi_{6m})}{L(s+1, \chi_{6m})}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Si $D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces

$$\phi_{2m, \vec{0}}(s) = \frac{L(s, \chi_{2m})}{L(s+1, \chi_{2m})}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Preliminares de Grupos y Álgebras de Lie

En este capítulo de preliminares recordamos conceptos que usaremos en lo que resta del trabajo.

En la sección 1 recordamos brevemente sobre grupos de Lie, álgebras de Lie y la función exponencial, haciendo énfasis en los ejemplos que utilizaremos.

En la sección 2 vemos las transformaciones adjuntas Ad y ad .

En la sección 3 repasaremos sobre operadores diferenciales invariantes, el álgebra envolvente universal y finalizaremos con dar una acción de $SU(2)$ en el álgebra envolvente universal de $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

En la sección 4 veremos espacios débilmente simétricos, su definición, algo de su motivación y un lema que nos da una manera alternativa de ver cuando un espacio es un espacio débilmente simétrico.

2.1 — Conceptos generales

Un **grupo de Lie** es un grupo que al mismo tiempo es una variedad diferenciable y donde la función $G \times G \ni (g, h) \longrightarrow gh^{-1} \in G$ es una función diferenciable de $G \times G$ en G .

En un grupo de Lie hay naturalmente traslaciones izquierda $L_g : G \longrightarrow G$ y derecha $R_g : G \longrightarrow G$ para todo $g \in G$. Estas están dadas por $L_g(h) = gh$ y $R_g(h) = hg$ respectivamente. Dichas traslaciones son difeomorfismos de G .

Se dice que un campo vectorial X en G es **invariante a la izquierda** si $dL_g X_a = X_{ga}, \forall a, g \in G$. Cada vector $X_I \in T_I G$ genera un campo vectorial X invariante a la izquierda.

El espacio tangente a la identidad I en G , denotado \mathfrak{g} , es el **álgebra de Lie** de G , equivalentemente, es el conjunto de todos los campos vectoriales en G que son invariantes a la izquierda. El grupo de Lie se denota con letras mayúsculas, mientras la correspondiente álgebra de Lie con minúsculas. En el álgebra de Lie \mathfrak{g} hay una multiplicación $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

y que cumple las siguientes condiciones:

- $[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$

Para grupos de Lie de matrices, como todos los que usamos en este trabajo, el corchete está dado por el corchete usual de matrices, es decir, si $X, Y \in M_{n \times n}(K)$ con $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , entonces:

$$[X, Y] = XY - YX,$$

donde XY indica el producto usual de matrices.

Ejemplo. Si $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , entonces:

- $GL(n, K) = \{g \in M_{n \times n}(K); \det g \neq 0\}$, $gl(n, K) \cong M_{n \times n}(K)$.
- $SL(n, K) = \{g \in GL(n, K); \det g = 1\}$, $sl(n, K) = \{X \in gl(n, K); \text{Tr } X = 0\}$.
- $SO(n, K) = \{g \in GL(n, K); \det g = 1, g^{-1} = g^T\}$, $so(n, K) = \{X \in gl(n, K); X^T = -X\}$.
- $SU(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}); \det g = 1, g^{-1} = \bar{g}^T\}$, $su(n) = \{X \in gl(n, \mathbb{C}); \text{Tr } X = 0, \bar{X}^T = -X\}$.

Una relación básica entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie está dada por la **función exponencial** $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. Si $X \in M_{n \times n}(K)$ la exponencial está dada por:

$$exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

Usaremos la notación e^X en lugar de $exp(X)$.

2.2 — Transformación Adjunta

Damos una breve recopilación acerca de representaciones adjuntas. Para cada $q \in G$ sea $\Psi_q : G \longrightarrow G$ dado por

$$\Psi_q(h) = qhq^{-1}, \quad \forall h \in G.$$

Como $\Psi_q(I) = qIq^{-1} = I$, se sigue que $d(\Psi_q)_I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\forall q \in G$.

Definición 2.2.1. Sea $q \in G$, la **transformación Adjunta** $Ad_q : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, es la función definida como:

$$Ad_q(X) = d(\Psi_q)_I(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Como $\Psi_{pq} = \Psi_p \circ \Psi_q$, $\forall p, q \in G$, tenemos que $Ad_{pq}(X) = Ad_p \circ Ad_q(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, y por tanto la función $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ dada por

$$q \longrightarrow Ad_q : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

es una representación de G , llamada **representación Adjunta**.

Definición. Sea $X \in \mathfrak{g}$, la **transformación adjunta** $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ se define por medio de la siguiente identidad:

$$ad_X(Y) = [X, Y], \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Ejemplo. Para grupos de matrices, por ejemplo, $G = SL(2, \mathbb{C})$ ó $G = SU(2)$,

$$\begin{aligned} Ad_q X &= qXq^{-1}, \quad \forall q \in G, \forall X \in \mathfrak{g}. \\ ad_X Y &= [X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Lema 2.2.2. *Propiedades de la representación Ad en los casos $G = SL(2, \mathbb{C})$ ó $G = SU(2)$.*

(a) $Ad_q \circ Ad_p = Ad_{qp}, \quad \forall q, p \in G.$

(b) $Ad_I = Id : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$

(c) $Ad_{q^{-1}} = Ad_q^{-1}, \quad \forall q \in G.$

(d) $Ad_q[X, Y] = [Ad_q X, Ad_q Y], \quad \forall q \in G, \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$

Demostración. ■ (a) Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned} Ad_q \circ Ad_p X &= Ad_q(pXp^{-1}) = q(pp^{-1}X)q^{-1} \\ &= (qp)X(qp)^{-1} = Ad_{qp}X. \end{aligned}$$

■ (b) Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $Ad_I X = IXI^{-1} = X \implies Ad_I = Id.$

■ (c) Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Ad_q \circ Ad_{q^{-1}} &= Ad_{qq^{-1}} && \text{por (a)} \\ &= Ad_I = Id. && \text{por (b)} \end{aligned}$$

■ (d) Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned} Ad_q[X, Y] &= Ad_q(XY - YX) = q(XY - YX)q^{-1} \\ &= qXYq^{-1} - qYXq^{-1} \\ &= (qXq^{-1})(qYq^{-1}) - (qYq^{-1})(qXq^{-1}) \\ &= [Ad_q X, Ad_q Y]. \end{aligned}$$

□

2.3 — Operadores diferenciables y álgebra envolvente universal

En esta sección ocuparemos el caso $G = SL(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$. Sin embargo, los conceptos aplican a cualquier grupo de Lie conexo.

Definición.

$$C^\infty(G) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ es diferenciable} \}.$$

Observamos que $C^\infty(G)$ es, en particular, un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (y sobre \mathbb{C}).

En nuestro trabajo usaremos **operadores diferenciables de orden $\leq k$** , ver una definición completa en [11], página 50. Por el momento solo diremos que un operador diferenciable es una función lineal $\mathcal{D} : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$.

Por otro lado, G actúa en G vía traslaciones izquierdas, esto es,

$$q * h := L_q(h) = qh, \quad \forall q, h \in G.$$

Definición. La acción anterior hereda una acción de G en $C^\infty(G)$ dada por:

$$q * f = L_q f, \quad \forall q \in G, \forall f \in C^\infty(G),$$

donde $L_q f \in C^\infty(G)$ y está definida por

$$(L_q f)(h) := f(L_q(h)) = f(qh), \quad \forall h \in G.$$

Es claro que también hay una acción de G en $C^\infty(G)$ usando traslaciones derechas como sigue:

$$q * f = R_q f, \quad \forall q \in G, \forall f \in C^\infty(G),$$

donde $R_q f \in C^\infty(G)$ y está dada por

$$(R_q f)(h) := f(R_q(h)) = f(hq), \quad \forall h \in G.$$

Definición. Un operador diferenciable de orden $\leq k$, $\mathcal{D} : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$, es G -invariante a la izquierda si

$$L_q(\mathcal{D}f) = \mathcal{D}(L_q f), \quad \forall q \in G, \forall f \in C^\infty(G).$$

Definición. El conjunto de los operadores diferenciables de todos los órdenes y G -invariantes a la izquierda en G forman un álgebra que denotaremos por $IDO(G)$.

Escribimos $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ para referirnos a el álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{C})$ como un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} .

Definición 2.3.1. Cada vector $X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ genera un operador diferencial de orden ≤ 1 , y que denotamos por X^{izq} , está definido por medio de la siguiente igualdad:

$$(X^{izq} f)(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(qe^{tX}), \quad \forall q \in G, \forall f \in C^\infty(G).$$

Es inmediato verificar que $X^{izq} \in IDO(G)$, lo cual motiva la siguiente función

$$L : sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \rightarrow IDO(G)$$

dada por la regla

$$L(X) = X^{izq}.$$

Dada el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ consideramos el álgebra

$$T(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \oplus \dots$$

donde \otimes es el producto tensorial y \oplus la suma directa de espacios vectoriales. Sea I el ideal en $T(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ generado por los elementos como se indica a continuación:

$$I = \langle X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]; \forall X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \rangle$$

Definición. El cociente $T(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})/I$, denotado $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, es el **álgebra envolvente universal** de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Una base para $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ está dada por el **Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt**, y dice que los siguientes elementos generan el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$;

$$X_1^{r_1} \otimes X_2^{r_2} \otimes \cdots \otimes X_6^{r_6}, \quad r_k \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 6\},$$

y donde $X^m \equiv X \otimes \cdots \otimes X$ se multiplica m veces. En todo nuestro trabajo nos referiremos al elemento anterior simplemente como

$$X_1^{r_1} X_2^{r_2} \cdots X_6^{r_6}.$$

$\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ es un álgebra asociativa y fué Poincaré quien la introdujo en 1899 como una cierta álgebra de operadores diferenciables sobre el grupo de Lie. En el caso que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sea el álgebra de Lie de un grupo abeliano, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ es isomorfa a el álgebra de polinomios $\mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, donde $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

De la definición del álgebra envolvente observamos que $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, la función $L : sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \rightarrow IDO(G)$ se puede extender a una función $L : \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \rightarrow IDO(G)$, lo cual hacemos en dos pasos. La idea es que como vectores en el álgebra de Lie equivalen a campos vectoriales invariantes a la izquierda, estos generan operadores diferenciales de orden ≤ 1 G -invariantes a la izquierda, y usando la composición ellos se genera toda el álgebra de operadores diferenciables de todos los órdenes y G -invariantes a la izquierda, es decir, $IDO(G)$.

Sea $\mathfrak{X} = X_1 X_2 \cdots X_m \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, donde $X_1, X_2, \dots, X_m \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, la función L se extiende a monomios como sigue:

$$L(\mathfrak{X}) = X_1^{izq} \circ X_2^{izq} \circ \cdots \circ X_m^{izq}.$$

Ahora consideremos cualquier elemento $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, \mathfrak{X} es una suma finita

$$\mathfrak{X} = \sum_m \mathfrak{X}_m,$$

donde cada \mathfrak{X}_m es un monomio de la forma $\mathfrak{X}_m = X_{m_1} X_{m_2} \cdots X_{m_n}$ con $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n} \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Luego, podemos definir L en \mathfrak{X} por

$$L(\mathfrak{X}) = \sum_m L(\mathfrak{X}_m).$$

Definición 2.3.2. Tenemos una función

$$L : \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \rightarrow IDO(G),$$

tal que cumple

$$L(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = L(\mathfrak{X}_1) \circ L(\mathfrak{X}_2), \quad \forall \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}). \quad (2.1)$$

Otra acción que utilizaremos en el capítulo 7 es como sigue,

Definición 2.3.3. $SU(2)$ actúa en $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$. Sean $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, $K \in SU(2)$, definimos la acción por casos. Si $\mathfrak{X} = X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ entonces:

$$K * \mathfrak{X} := Ad_K X.$$

Si \mathfrak{X} es un monomio dado por $\mathfrak{X} = X_1 X_2 \cdots X_m \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ donde $X_1, X_2, \dots, X_m \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$

$$K * \mathfrak{X} := (Ad_K X_1)(Ad_K X_2) \cdots (Ad_K X_m).$$

Ahora consideremos cualquier elemento $\mathfrak{X} = \sum_m \mathfrak{X}_m$, es una suma finita donde cada \mathfrak{X}_m es un monomio de la forma $\mathfrak{X}_m = X_{m_1} X_{m_2} \cdots X_{m_n}$ con $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n} \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Luego, podemos definir

$$K * \mathfrak{X} := \sum_m Ad_K \mathfrak{X}_m.$$

Para esta acción usamos la notación $K * \mathfrak{X} \equiv Ad_K \mathfrak{X}$.

No es claro que la definición anterior realmente define una acción, por lo que lo probamos ahora. Sean $K_1, K_2 \in SU(2)$, $\mathfrak{X} = X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} K_1 K_2 * X &= Ad_{K_1 K_2} X \\ &= K_1 K_2 X (K_1 K_2)^{-1} = K_1 (K_2 X K_2^{-1}) K_1^{-1} \\ &= Ad_{K_1} (Ad_{K_2} X) \\ &= K_1 * (K_2 * X). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Suponemos ahora que $\mathfrak{X} = X_1 X_2 \cdots X_m \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ donde $X_1, X_2, \dots, X_m \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, entonces

$$\begin{aligned} K_1 * (K_2 * \mathfrak{X}) &= K_1 * \left((Ad_{K_2} X_1)(Ad_{K_2} X_2) \cdots (Ad_{K_2} X_m) \right) \\ &= Ad_{K_1} \left((Ad_{K_2} X_1)(Ad_{K_2} X_2) \cdots (Ad_{K_2} X_m) \right) \\ &= (Ad_{K_1} Ad_{K_2} X_1)(Ad_{K_1} Ad_{K_2} X_2) \cdots (Ad_{K_1} Ad_{K_2} X_m) \\ &= (K_1 * (K_2 * X_1))(K_1 * (K_2 * X_2)) \cdots (K_1 * (K_2 * X_m)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} K_1 K_2 * \mathfrak{X} &= Ad_{K_1 K_2} \mathfrak{X} \\ &= (Ad_{K_1 K_2} X_1)(Ad_{K_1 K_2} X_2) \cdots (Ad_{K_1 K_2} X_m) \\ &= (K_1 * (K_2 * X_1))(K_1 * (K_2 * X_2)) \cdots (K_1 * (K_2 * X_m)). \end{aligned} \quad \text{por } \boxed{2.2} \tag{2.4}$$

De $\boxed{2.3}$ y $\boxed{2.4}$ se sigue que

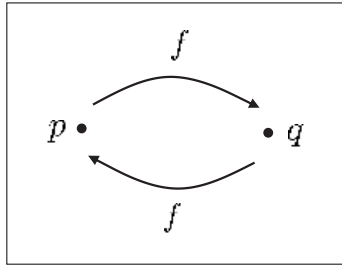
$$K_1 * (K_2 * \mathfrak{X}) = K_1 K_2 * \mathfrak{X}. \tag{2.5}$$

Ahora consideramos $\mathfrak{X} = \sum_m \mathfrak{X}_m$ una suma finita, donde cada \mathfrak{X}_m es un monomio de la forma $\mathfrak{X}_m = X_{m_1} X_{m_2} \cdots X_{m_n}$ con $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n} \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$,

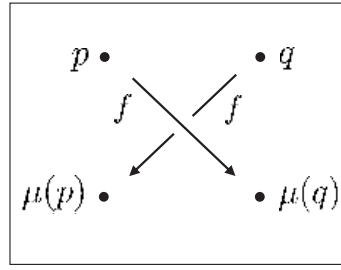
$$\begin{aligned} K_1 * (K_2 * \mathfrak{X}) &= Ad_{K_1} (Ad_{K_2} \mathfrak{X}) \\ &= Ad_{K_1} \left(Ad_{K_2} \sum_m \mathfrak{X}_m \right) = Ad_{K_1} \left(\sum_m Ad_{K_2} \mathfrak{X}_m \right) \\ &= \sum_m Ad_{K_1} (Ad_{K_2} \mathfrak{X}_m) = \sum_m Ad_{K_1 K_2} \mathfrak{X}_m \quad \text{por } \boxed{2.5} \\ &= Ad_{K_1 K_2} \sum_m \mathfrak{X}_m = Ad_{K_1 K_2} \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que

$$K_1 * (K_2 * \mathfrak{X}) = K_1 K_2 * \mathfrak{X}, \quad \forall K_1, K_2 \in SU(2), \forall \mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}).$$



Espacio simétrico



Espacio débilmente simétrico

Figura 2.1: Espacios simétricos.

2.4 — Espacios débilmente simétricos

Los espacios débilmente simétricos fueron introducidos por Selberg [26] en 1956. Su motivación fué generalizar la fórmula de sumación de Poisson a la ahora conocida como fórmula de traza de Selberg.

Definición 2.4.1. El triple $((S, g), H, \mu)$ define un **espacio débilmente simétrico** si:

- (S, g) es una variedad Riemanniana.
- Existe un subgrupo H de el grupo de isometrías $Iso(S, g)$ que actúa transitivamente en S , esto es, para cualesquiera $p, q \in S$ existe una isometría $f \in H$ tal que $f(p) = q$.
- Existe una isometría fija $\mu : S \rightarrow S$ tal que $\mu^2 \in H$ y $\mu G \mu^{-1} = G$.
- Para cualesquiera $p, q \in S$ existe una isometría $f \in H$ tal que

$$f(p) = \mu(q) \quad \text{y} \quad f(q) = \mu(p).$$

Un espacio simétrico es también un espacio débilmente simétrico pero el inverso no siempre es cierto. Ver figura (2.1), tomada de [21]. Como Selberg demostró en [26], los espacios débilmente simétricos (al igual que los simétricos) tienen la propiedad de que el álgebra de operadores diferenciables de todos los órdenes y H -invariantes en S es conmutativa.

Hay una caracterización geométrica de los espacios débilmente simétricos debida a Ziller, sin embargo, nosotros usaremos la siguiente reinterpretación también debida a Ziller, ver [32] y el lema 2.1 en [22].

Lema 2.4.2. *Supongamos que (S, g) es una variedad Riemanniana conexa y $\mu : S \rightarrow S$ una isometría fija tal que $\mu(q) = q$, para algún $q \in S$. Sean H un subgrupo de el grupo de isometrías $Iso(S, g)$ que actúa transitivamente en S , además, $H_q := \{f \in H ; f(q) = q\}$. El triple $((S, g), H, \mu)$ define un espacio débilmente simétrico $\iff \forall v \in T_q S$ existe $f \in H_q$ tal que $d(f \circ \mu)_q(v) = -v$.*

Preliminares de Geometría Hiperbólica y Análisis

En la sección 1 recordaremos los conceptos de espacio hiperbólico y la descomposición de Iwasawa.

En la sección 2, estudiaremos los grupos de Bianchi, orbidades de Bianchi, además de los subgrupos estabilizador y maximal unipotente. Al final de la sección veremos el concepto de cúspide y la retícula Λ_D asociada a un anillo de enteros \mathcal{O}_D .

La sección 3 la dividimos en dos subsecciones, en la subsección 1 estudiaremos los conceptos de polinomios de Legendre, polinomios Legendre generalizados, armónicos esféricos y polinomios de Jacobi. En la subsección 2, repasaremos sobre las representaciones de $SO(3)$ y $SU(2)$, lo que permite recuperar la matriz de Wigner $D_{km}^l(R)$ para $R \in SO(3)$ de una representación de $SO(3)$. También construimos un homomorfismo $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ (definición (3.3.9)) usando la representación adjunta. Veremos coordenadas de Euler para $SU(2)$ y ángulos de Euler para $SO(3)$.

En la sección 4, daremos la demostración de un lema técnico que permite obtener una expresión más manejable de la matriz pequeña de Wigner $d_{km}^l(\chi)$ en términos de los polinomios de Jacobi, expresión encontrada (pero no demostrada) en [4] página 50, esto será fundamental para obtener la expansión de Fourier de series de Eisenstein.

3.1 — Espacio hiperbólico y descomposición de Iwasawa

El modelo del semiespacio superior para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 está dado por la variedad

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, \lambda); z \in \mathbb{C}, \lambda > 0\} = \{(x, y, \lambda); x, y \in \mathbb{R}, \lambda > 0\},$$

con la métrica Riemanniana hiperbólica dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + d\lambda^2}{\lambda^2}.$$

Para facilitar los cálculos usaremos los cuaternios de Hamilton, generados por la base $\{1, i, j, k\}$. Denotaremos un punto $P \in \mathbb{H}^3$ de las siguientes maneras:

$$P = (z, \lambda) = (x, y, \lambda) = z + \lambda j,$$

donde $z = x + iy$, $j = (0, 0, 1)$.

Recordamos que

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

La acción de $PSL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{H}^3 es por isometrías hiperbólicas que preservan orientación. La acción induce un biholomorfismo sobre la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que es la frontera de \mathbb{H}^3 .

El grupo $SL(2, \mathbb{C})$ también actúa en $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La acción en \mathbb{H}^3 está por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + \lambda j) = [a(z + \lambda j) + b] \cdot \frac{1}{c(z + \lambda j) + d}.$$

Equivalentemente, la fórmula explícita que utilizaremos es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + \lambda j) = \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2}{|cz + d|^2 + |c|^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{|cz + d|^2 + |c|^2\lambda^2} j. \quad (3.1)$$

Representamos a los elementos en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ como $[z_1, z_2]$, donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$. Con esta notación, $\infty = [1, 0]$. La acción de $SL(2, \mathbb{C})$ en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [z_1, z_2] = [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2].$$

Lema. (Descomposición de Iwasawa compleja) Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces g se puede escribir de manera única como indica la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{|c|^2 + |d|^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{|c|^2 + |d|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & \frac{-\bar{c}}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & \frac{d}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea $\lambda = |c|^2 + |d|^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} M &:= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\sqrt{\lambda}} & \frac{-\bar{c}}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{c}{\sqrt{\lambda}} & \frac{d}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\sqrt{\lambda}} & \frac{-\bar{c}}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{c}{\sqrt{\lambda}} & \frac{d}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{(a\bar{c} + b\bar{d})c}{\lambda} & -\frac{\bar{c}}{\lambda} + \frac{(a\bar{c} + b\bar{d})d}{\lambda} \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $ad - bc = 1 \iff ad = 1 + bc \iff bc = ad - 1$. Se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{(a\bar{c} + b\bar{d})c}{\lambda} &= \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{a|c|^2}{\lambda} + \frac{b\bar{d}c}{\lambda} \\ &= \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{a|c|^2}{\lambda} + \frac{\bar{d}(ad - 1)}{\lambda} \\ &= \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{a|c|^2 + a|d|^2}{\lambda} - \frac{\bar{d}}{\lambda} \\ &= \frac{a\lambda}{\lambda} = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\bar{c}}{\lambda} + \frac{(a\bar{c} + b\bar{d})d}{\lambda} &= -\frac{\bar{c}}{\lambda} + \frac{a\bar{c}d}{\lambda} + \frac{b|d|^2}{\lambda} \\
&= -\frac{\bar{c}}{\lambda} + \frac{\bar{c}(1+bc)}{\lambda} + \frac{b|d|^2}{\lambda} \\
&= -\frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{\bar{d}}{\lambda} + \frac{b|c|^2 + b|d|^2}{\lambda} \\
&= \frac{b\lambda}{\lambda} = b.
\end{aligned}$$

Concluimos que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Para verificar la unicidad consideremos $w, w' \in \mathbb{C}$, $r, r' > 0$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$ tales que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1. \quad (3.2)$$

Supongamos que existen dos descomposiciones en la forma del lema para g . Es decir, suponemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & w' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & \frac{1}{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} r & \frac{w}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r' & \frac{w'}{r'} \\ 0 & \frac{1}{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} r\alpha - \frac{w}{r}\bar{\beta} & r\beta + \frac{w}{r}\bar{\alpha} \\ -\frac{\bar{\beta}}{r} & \frac{\bar{\alpha}}{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r'\alpha' - \frac{w'}{r'}\bar{\beta}' & r'\beta' + \frac{w'}{r'}\bar{\alpha}' \\ -\frac{\bar{\beta}'}{r'} & \frac{\bar{\alpha}'}{r'} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$r\alpha - \frac{w}{r}\bar{\beta} = r'\alpha' - \frac{w'}{r'}\bar{\beta}', \quad (3.3)$$

$$-\frac{\bar{\beta}}{r} = -\frac{\bar{\beta}'}{r'}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\bar{\alpha}}{r} = \frac{\bar{\alpha}'}{r'}. \quad (3.5)$$

De (3.4) y (3.5)

$$\beta = \beta' \frac{r}{r'}, \quad (3.6)$$

$$\alpha = \alpha' \frac{r}{r'}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.2)

$$1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \frac{r^2}{r'^2}|\alpha'|^2 + \frac{r^2}{r'^2}|\beta'|^2 = \frac{r^2}{r'^2}(|\alpha'|^2 + |\beta'|^2) = \frac{r^2}{r'^2},$$

por lo que al ser r, r' números reales positivos concluimos que $r = r'$. Luego por (3.6) vemos que $\beta = \beta'$, por (3.7) se sigue que $\alpha = \alpha'$. Finalmente, de (3.3) obtenemos que $w = w'$. Entonces la descomposición de Iwasawa es única. \square

Usando la descomposición de Iwasawa daremos coordenadas a $SL(2, \mathbb{C})$.

Definición. Sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$. Las **coordenadas de Iwasawa** de g están dadas por las siguientes fórmulas:

$$z = \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{|c|^2 + |d|^2}, \quad \lambda = |c|^2 + |d|^2, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\sqrt{\lambda}} & \frac{-\bar{c}}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{c}{\sqrt{\lambda}} & \frac{d}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \in SU(2), \quad (3.8)$$

y son las únicas que cumplen la identidad

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{|c|^2 + |d|^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{|c|^2 + |d|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{d}}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & \frac{-\bar{c}}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} & \frac{d}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \end{pmatrix}.$$

Usando las coordenadas de Iwasawa denotaremos a g como sigue:

$$g = g_{z + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}j, A}.$$

Inversamente, si $z \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$ y $A \in SU(2)$, denotaremos por $g_{z + \lambda j, A}$ a la matriz en $SL(2, \mathbb{C})$ dada por:

$$g_{z + \lambda j, A} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} A.$$

Otra identidad que nos será muy útil (caso particular de la fórmula (3.1)) es la siguiente:

$$g_{z + \lambda j, A}(j) = z + \lambda^2 j. \quad (3.9)$$

El grupo de Lie $SU(2)$ es homeomorfo a la 3-esfera \mathbb{S}^3 . A continuación observamos que debido a la descomposición de Iwasawa compleja el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ es topológicamente $\mathbb{H}^3 \times SU(2)$.

Lema. $SL(2, \mathbb{C})$ es homeomorfo a $\mathbb{H}^3 \times SU(2)$.

Demostración. Sea $f : \mathbb{H}^3 \times SU(2) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ dada por medio de la siguiente fórmula:

$$f(z, \lambda, A) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} A = g_{z + \lambda j, A} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

con $z = x + iy$, $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, $A \in SU(2)$. Sabemos que f es sobreyectiva por la descomposición de Iwasawa, además que f es inyectiva por la unicidad de la descomposición de Iwasawa. Luego f es una biyección.

Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$, luego

$$g_{z + \lambda j, A} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{z}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha - \frac{z}{\lambda}\bar{\beta} & \lambda\beta + \frac{z}{\lambda}\bar{\alpha} \\ -\frac{\bar{\beta}}{\lambda} & \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Ahora, como $\lambda\alpha - \frac{z}{\lambda}\bar{\beta}$, $\lambda\beta + \frac{z}{\lambda}\bar{\alpha}$, $-\frac{\bar{\beta}}{\lambda}$, $\frac{\bar{\alpha}}{\lambda}$ son funciones continuas de $x, y, \lambda, \alpha, \beta$, se concluye que f es continua. Por otra parte, sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ se tiene que

$$f^{-1}(g) = (z, \mu, A),$$

donde

$$z = \frac{a\bar{c} + b\bar{d}}{|c|^2 + |d|^2}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu\bar{d} & -\mu\bar{c} \\ \mu c & \mu d \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Luego z, μ, A son funciones continuas en las variables a, b, c, d , por lo que f^{-1} es continua, entonces f es un homeomorfismo. \square

3.2 — Grupos de Bianchi y orbidades de Bianchi

Definición. Un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es llamado **discreto** si y sólo si su imagen inversa en $SL(2, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ (bajo el mapeo $\Pi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$) es discreto con la topología del espacio vectorial, esto es, la topología heredada de la norma

$$|A| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2},$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Definición. Un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es llamado **discontinuo** si y sólo si para todo $P \in \mathbb{H}^3$ y para toda sucesión $\{T_n\}_{n \geq 1}$ de elementos distintos de Γ , la sucesión $\{T_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene un punto de acumulación en \mathbb{H}^3 . En este caso decimos que Γ **actúa discontinuamente** en \mathbb{H}^3 .

Se tiene el siguiente teorema de Poincaré en [23], tomo II, página 268.

Teorema 3.2.1. (Poincaré) *Un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es discontinuo si y sólo si Γ es discreto en $PSL(2, \mathbb{C})$.*

Tenemos el siguiente teorema en [9], página 311.

Teorema 3.2.2. *Sea K_D un campo cuadrático imaginario de discriminante $d_D < 0$ (ver definición (1.4)). El grupo $PSL(2, \mathcal{O}_D)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $\widehat{\Gamma}_D := PSL(2, \mathcal{O}_D) = SL(2, \mathcal{O}_D) / \{\pm I\}$ son los **grupos de Bianchi**.
2. $PSL(2, \mathcal{O}_D)$ es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$.
3. $PSL(2, \mathcal{O}_D)$ es no cocompacto pero tiene covolumen finito, esto es, $\mathbb{H}^3 / PSL(2, \mathcal{O}_D)$ no es compacto pero tiene volumen finito.
4. Se tiene que

$$Vol(\mathbb{H}^3 / PSL(2, \mathcal{O}_D)) = \frac{|d_D|^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2} \zeta_{K_D}(2).$$

5. $PSL(2, \mathcal{O}_D)$ tiene un dominio fundamental \mathcal{F}_D acotado por un número finito de superficies geodésicas.
6. $PSL(2, \mathcal{O}_D)$ es finitamente presentado.

Por el teorema (3.2.2) inciso (2) sabemos que $\widehat{\Gamma}_D$ es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$, por lo que usando el teorema de Poincaré en (3.2.1) concluimos que $\widehat{\Gamma}_D$ actúa discontinuamente en \mathbb{H}^3 . La acción también es propia. Resumiendo, $\widehat{\Gamma}_D$ actúa propia y discontinuamente en \mathbb{H}^3 , por tanto se pueden definir las orbidades M_D^3 como sigue:

Definición. Sean M_D^3 las 3-orbidades hiperbólicas definidas como sigue:

$$M_D^3 = \mathbb{H}^3 / \widehat{\Gamma}_D,$$

llamadas **orbidades de Bianchi**.

Las orbidades de Bianchi no son compactas, pero por el teorema (3.2.2), inciso (4), sabemos que tienen volumen hiperbólico finito dado por

$$\text{Vol}(M_D^3) = \frac{|d_D|^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2} \zeta_{K_D}(2).$$

Definición 3.2.3. El grupo estabilizador $\Gamma_{D,\infty}$ de Γ_D en ∞ está dado como sigue

$$\Gamma_{D,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & z \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} ; \epsilon \in \mathcal{O}_D^\times, z \in \mathcal{O}_D \right\}.$$

Definición 3.2.4. El subgrupo maximal unipotente $\Gamma'_{D,\infty}$ de Γ_D en ∞ está dado por

$$\Gamma'_{D,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathcal{O}_D \right\}.$$

Definición. Decimos que Γ_D tiene una **cúspide** en ∞ si $\Gamma_{D,\infty}$ contiene un grupo abeliano libre de rango 2.

Damos explícitamente los grupos $\Gamma_{D,\infty}$ y $\Gamma'_{D,\infty}$ para Γ_D donde $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$. Si $D = 1$ entonces

$$\Gamma_{1,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & z \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} ; \epsilon \in \{1, i\}, z \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

$$\Gamma'_{1,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

Si $D = 3$ tenemos

$$\Gamma_{3,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & z \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} ; \epsilon \in \{1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}\}, z \in \mathcal{O}_3 \right\}.$$

$$\Gamma'_{3,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathcal{O}_3 \right\}.$$

Si $D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$

$$\Gamma_{D,\infty} = \Gamma'_{D,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathcal{O}_D \right\}.$$

Resumiendo, si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces Γ_D tiene una única cúspide en ∞ . Esto significa que M_D^3 son 3-orbidades hiperbólicas con una cúspide en ∞ . Ver [12], página 4, para una explicación detallada sobre las cúspides.

3.3 — Armónicos esféricos y matriz de Wigner

Consideremos el Laplaciano en \mathbb{S}^1 dado por $\Delta_{\mathbb{S}^1} = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $\psi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ las eigenfunciones del laplaciano de \mathbb{S}^1 , es decir,

$$\psi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta},$$

se tiene que

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} \psi_n = n^2 \psi_n,$$

luego, $\text{Spec}(\Delta_{\mathbb{S}^1}) = \{n^2; n \in \mathbb{Z}\}$. Por lo que solo hay multiplicidad igual a 2 si $n \neq 0$.

Sea $R_\alpha \in SO(2)$ una rotación de ángulo α y consideramos la función $\psi_n \circ R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, tenemos

$$\begin{aligned} \psi_n \circ R_\alpha(e^{i\theta}) &= \psi_n(e^{i(\theta+\alpha)}) \\ &= e^{in(\theta+\alpha)} = e^{in\alpha} e^{in\theta} \\ &= e^{in\alpha} \psi_n(e^{i\theta}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe una representación $\Psi_n : SO(2) \rightarrow M_{1 \times 1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ dada por

$$\Psi_n(R_\alpha) = e^{in\alpha}. \tag{3.11}$$

Sustituyendo (3.11) en (3.10) hemos verificado la siguiente identidad:

$$\psi_n \circ R_\alpha = \Psi_n(R_\alpha) \cdot \psi_n.$$

Luego, las funciones $\psi_n \circ R_\alpha$ y ψ_n son eigenfunciones linealmente dependientes en \mathbb{S}^1 , el coeficiente que aparece en la combinación lineal entre dichas funciones viene de las representaciones de $SO(2)$.

Consideremos ahora el Laplaciano en \mathbb{S}^2 denotado $\Delta_{\mathbb{S}^2}$. Sean $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ con $m \in [-l, l]$, existen funciones (armónicos esféricos) $Y_m^l : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que son las eigenfunciones de $\Delta_{\mathbb{S}^2}$, es decir,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_m^l = l(l+1) Y_m^l,$$

luego, $\text{Spec}(\Delta_{\mathbb{S}^2}) = \{l(l+1); l \in \mathbb{N}\}$, donde hay multiplicidad que crece con l .

Sean $R \in SO(3)$, $Y_m^l \circ R^{-1} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, se puede probar que $\{Y_m^l \circ R^{-1}, Y_k^l\}_{k=-l}^l$ son eigenfunciones linealmente dependientes de \mathbb{S}^2 . Luego, existen constantes $C_{km}^l(R) \in \mathbb{C}$ tal que

$$Y_m^l \circ R^{-1} = \sum_{k=-l}^l C_{km}^l(R) \cdot Y_k^l.$$

En esta sección daremos sentido a las constantes $C_{km}^l(R)$ como los coeficientes de la matriz de Wigner de R , y siguiendo a Wigner, veremos que dichos coeficientes vienen de representaciones $(2l+1)$ dimensionales de $SO(3)$ (y de $SU(2)$). Es claro que esto es análogo a lo que ocurre para \mathbb{S}^1 .

3.3.1 — Armónicos esféricos

Los armónicos esféricos son un conjunto de funciones usados para representar funciones en la esfera \mathbb{S}^2 . Los armónicos esféricos son las eigenfunciones del laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ en \mathbb{S}^2 . Como consecuencia aparecen en las soluciones a ecuaciones diferenciales parciales donde aparece $\Delta_{\mathbb{S}^2}$. Por ejemplo, el laplaciano esférico aparece en la ecuación del calor, ecuación de Schrödinger, ecuación de onda. También los armónicos esféricos aparecen cuando se estudian las órbitas del átomo de hidrógeno. Para definir los armónicos esféricos necesitamos primero recordar los polinomios de Legendre.

Definición. Sea $l \in \mathbb{N}$. Los **polinomios de Legendre** están definidos, vía la fórmula de Rodrigues, como indica la siguiente fórmula:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1. \\ P_1(x) &= x. \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned}$$

Definición. Sean $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Los **polinomios de Legendre generalizados** son definidos por la fórmula:

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x)), \quad \text{si } m \geq 0 \\ P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad \text{si } m \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} P_0^0(x) &= 1. \\ P_1^0(x) &= x. \\ P_1^1(x) &= -\sqrt{1-x^2}. \\ P_2^1(x) &= -3x\sqrt{1-x^2}. \\ P_1^{-1}(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Recordamos que las **coordenadas esféricas** r, ϑ, φ con $r \in [0, \infty)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, están dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ y &= r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ z &= r \cdot \cos \vartheta \end{aligned}$$

con inversas dadas por:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos \frac{z}{r} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Definición. Sean $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ con $m \in [-l, l]$. Los **armónicos esféricos** son funciones $Y_m^l : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definidos por la fórmula:

$$Y_m^l(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \cdot e^{im\varphi}.$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}. \\
Y_0^l(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta). \\
Y_{-1}^1(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi}. \\
Y_1^2(\vartheta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot e^{i\varphi}.
\end{aligned}$$

Los armónicos esféricos son las eigenfunciones del Laplaciano en \mathbb{S}^2 , es decir, son los análogos a las eigenfunciones $e^{in\theta}$ en el círculo \mathbb{S}^1 . Se cumple que

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_m^l(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_m^l(\vartheta, \varphi).$$

Los armónicos esféricos forman una base ortonormal de funciones en \mathbb{S}^2 . Esto es,

$$\langle Y_{m_1}^{l_1}(\vartheta, \varphi), Y_{m_2}^{l_2}(\vartheta, \varphi) \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{Y_{m_1}^{l_1}(\vartheta, \varphi)} Y_{m_2}^{l_2}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

Definición 3.3.1. Sean $x \in \mathbb{R}$, $n, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $n, n + \alpha, n + \beta, n + \alpha + \beta \geq 0$, definimos los **polinomios de Jacobi** por medio de la siguiente ecuación:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (n + \alpha)! (n + \beta)! \sum_{a=0}^n \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-a} \left(\frac{x+1}{2}\right)^a}{(n + \alpha - a)! a! (\beta + a)! (n - a)!}.$$

Más adelante aparecerán los números $d_{km}^l(\chi)$ cuando estudiemos las representaciones de $SU(2)$ y $SO(3)$. Por ahora solo diremos que con los coeficientes de la matriz pequeña de Wigner $d_{km}^l(\chi)$ se construyen las matrices de Wigner $D_{km}^l(R)$.

Definición 3.3.2. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $\chi \in [0, \pi]$. Los coeficientes de la matriz pequeña de Wigner (ver [29], página 167) están dados por medio de la siguiente ecuación:

$$d_{km}^l(\chi) = \sqrt{(l+k)!(l-k)!(l+m)!(l-m)!} \sum_a \frac{(-1)^{k-m+a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2a}}{(l+m-a)! a! (k-m+a)! (l-k-a)!},$$

donde a corre en los enteros tal que los denominadores son enteros no negativos.

Ejemplo 3.3.3.

$$\begin{aligned}
d_{00}^l(\chi) &= P_l(\cos \chi). \\
d_{11}^1(\chi) &= \frac{1}{2}(1 + \cos \chi). \\
d_{10}^1(\chi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \chi. \\
d_{1,-1}^1(\chi) &= \frac{1}{2}(1 - \cos \chi). \\
d_{2,2}^2(\chi) &= \frac{1}{4}(1 + \cos \chi)^2.
\end{aligned}$$

3.3.2 — Cálculo de la matriz de Wigner $D_{km}^l(R)$

En esta sección encontraremos explícitamente los coeficientes de la matriz de Wigner denotados $D_{km}^l(R)$, donde $R \in SO(3)$, para esto necesitaremos los coeficientes de la matriz pequeña de Wigner. La guía será el libro de Wigner [29], aunque hemos cambiado en algunos casos la notación.

Definición. Sea \mathbf{W}_l el espacio vectorial sobre \mathbb{C} de polinomios homogéneos de grado l en tres variables x, y, z .

Ejemplo. $f(x, y, z) = 2x^2y - xyz + 8iz^3 \in \mathbf{W}_3$.

Definición. Decimos que $f(x, y, z) \in \mathbf{W}_l$ es **armónica** si $\Delta f(x, y, z) = 0$, donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ejemplo. $f(x, y, z) = x^2y - yz^2 \in \mathbf{W}_3$ es armónica ya que

$$\Delta f(x, y, z) = (2y) + 0 + (-2y) = 0.$$

Definición. Sea $\mathbf{H}_l \subset \mathbf{W}_l$ definido como sigue:

$$\mathbf{H}_l = \{ f \in \mathbf{W}_l ; f \text{ es armónica} \}.$$

Usando la linealidad del Laplaciano es fácil ver que \mathbf{H}_l es un subespacio vectorial de \mathbf{W}_l .

Definición 3.3.4. Sean $R \in SO(3)$, $f \in \mathbf{W}_l$. Definimos la función $O_R f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la siguiente fórmula:

$$O_R f(x, y, z) = f\left(R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f(R^{-1}(x, y, z)^T).$$

Lema. Si $R \in SO(3)$, $f(x, y, z) \in \mathbf{W}_l$, entonces $O_R f(x, y, z) \in \mathbf{W}_l$.

Demostración. Basta verificarlo para los monomios homogéneos, escogemos $f(x, y, z) = x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}$ con $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ y que satisfacen $m_1 + m_2 + m_3 = l$. Sea

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned} O_R f(x, y, z) &= f(R^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= f(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^{m_1} (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^{m_2} (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^{m_3} \\ &= \prod_{k=1}^3 \left(\sum_{r_k=0}^{m_k} \binom{m_k}{r_k} (a_{k1}x + a_{k2}y)^{m_k-r_k} \cdot (a_{k3}z)^{r_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^3 \left(\sum_{r_k=0}^{m_k} \sum_{s_k=0}^{m_k-r_k} \binom{m_k}{r_k} \binom{m_k-r_k}{s_k} (a_{k1}x)^{m_k-r_k-s_k} \cdot (a_{k2}y)^{s_k} \cdot (a_{k3}z)^{r_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^3 \left(\sum_{r_k=0}^{m_k} \sum_{s_k=0}^{m_k-r_k} \binom{m_k}{r_k} \binom{m_k-r_k}{s_k} (a_{k1})^{m_k-r_k-s_k} (a_{k2})^{s_k} (a_{k3})^{r_k} \cdot x^{m_k-r_k-s_k} y^{s_k} z^{r_k} \right). \end{aligned}$$

Por lo que cada término en $O_R f(x, y, z)$ tiene el mismo orden que el polinomio $\prod_{k=1}^3 x^{m_k - r_k - s_k} y^{s_k} z^{r_k}$, el cual tiene orden $m_1 + m_2 + m_3 = l$. \square

Lema. La función $O_R : \mathbf{W}_l \rightarrow \mathbf{W}_l$ es lineal.

Demostración. Si $f, g \in \mathbf{W}_l$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} O_R(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x, y, z) &= (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(R^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= (\lambda_1 f)(R^{-1}(x, y, z)^T) + (\lambda_2 g)(R^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= \lambda_1 \cdot f(R^{-1}(x, y, z)^T) + \lambda_2 \cdot g(R^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= \lambda_1 \cdot O_R f(x, y, z) + \lambda_2 \cdot O_R g(x, y, z) \\ &= (\lambda_1 \cdot O_R f + \lambda_2 \cdot O_R g)(x, y, z). \end{aligned}$$

Por tanto $O_R(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \cdot O_R f + \lambda_2 \cdot O_R g$. \square

Lema. Si $R_1, R_2 \in SO(3)$, entonces $O_{R_1} \circ O_{R_2} = O_{R_2 \circ R_1}$.

Demostración. Si $f \in \mathbf{W}_l$,

$$\begin{aligned} O_{R_1} \circ O_{R_2} f(x, y, z) &= O_{R_1} \circ f(R_2^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= f(R_1^{-1} \circ R_2^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= f((R_2 \circ R_1)^{-1}(x, y, z)^T) \\ &= O_{R_2 \circ R_1} f(x, y, z). \end{aligned}$$

\square

Lema. Sea $R \in SO(3)$. Si $\Delta f = 0$ entonces $\Delta O_R f = 0$, esto es, \mathbf{H}_l es invariante bajo el operador O_R , para cada $R \in SO(3)$.

Demostración. La prueba está basada en la demostración del lema 2.4, página 15, en [2]. Sean $\bar{u} = (x, y, z)$, $\bar{v} = R^{-1} \bar{u}$, recordamos que

$$\nabla_{\bar{u}} = R^{-1} \nabla_{\bar{v}}, \quad (3.12)$$

donde

$$\nabla_{\bar{u}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}} &= \nabla_{\bar{u}} \cdot \nabla_{\bar{u}} \\ &= (R^{-1} \nabla_{\bar{v}}) \cdot (R^{-1} \nabla_{\bar{v}}) && \text{por (3.12)} \\ &= \nabla_{\bar{v}} \cdot \nabla_{\bar{v}} && \text{ya que } R^{-1} \in SO(3) \\ &= \Delta_{\bar{v}}. \end{aligned}$$

Por lo que hemos verificado la siguiente identidad:

$$\Delta_{\bar{u}} = \Delta_{\bar{v}}. \quad (3.13)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{u}} O_R f(\bar{u}) &= \Delta_{\bar{u}} f(R^{-1}(\bar{u})) \\
&= \Delta_{\bar{u}} f(\bar{v}) && \text{por hipótesis} \\
&= \Delta_{\bar{v}} f(\bar{v}) && \text{por (3.13)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Resumiendo, sea $l \in \mathbb{N}$, $SO(3)$ admite una representación en $\mathbf{H}_l < \mathbf{W}_l$ dada por

$$R \in SO(3) \mapsto O_R : \mathbf{H}_l \longrightarrow \mathbf{H}_l,$$

recordamos que \mathbf{H}_l es el espacio vectorial sobre \mathbb{C} de polinomios homogéneos armónicos de grado l en tres variables x, y, z .

El Laplaciano en \mathbb{R}^3 (denotado Δ_E) en coordenadas esféricas r, ϑ, φ está dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta_E &= \csc^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&= 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta_{\mathbb{S}^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ es el Laplaciano en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 (con la métrica Riemanniana usual), y dado por:

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} = -\csc^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} - \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Sea $f \in \mathbf{H}_l$, usando coordenadas esféricas, se cumple la siguiente identidad:

$$f(x, y, z) = r^l Y^l(\vartheta, \varphi),$$

para alguna función diferenciable $Y^l : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. Luego,

$$0 = \Delta f(x, y, z) = \Delta_E (r^l Y^l(\vartheta, \varphi)),$$

y por (3.14),

$$\begin{aligned}
&\left(2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta_{\mathbb{S}^2}\right)(r^l Y^l(\vartheta, \varphi)) = 0 \\
\iff &2r \cdot l r^{l-1} \cdot Y^l(\vartheta, \varphi) + r^2 l(l-1) r^{l-2} \cdot Y^l(\vartheta, \varphi) - \Delta_{\mathbb{S}^2} r^l \cdot Y^l(\vartheta, \varphi) = 0 \\
\iff &2l r^l Y^l(\vartheta, \varphi) + l(l-1) r^l Y^l(\vartheta, \varphi) - r^l \Delta_{\mathbb{S}^2} Y^l(\vartheta, \varphi) = 0 \\
\iff &r^l \Delta_{\mathbb{S}^2} Y^l(\vartheta, \varphi) = r^l (2l + l(l-1)) Y^l(\vartheta, \varphi),
\end{aligned}$$

pero $2l + l(l-1) = 2l + l^2 - l = l^2 + l = l(l+1)$, por lo que

$$r^l \Delta_{\mathbb{S}^2} Y^l(\vartheta, \varphi) = r^l l(l+1) Y^l(\vartheta, \varphi),$$

haciendo $r = 1$ concluimos que:

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} Y^l(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y^l(\vartheta, \varphi).$$

Existen $2l + 1$ polinomios armónicos $f_k^l \in \mathbf{H}_l$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \in [-l, l]$ tal que

$$f_k^l(r, \vartheta, \varphi) = r^l \cdot Y_k^l(\vartheta, \varphi).$$

Luego,

$$\{ r^l Y_k^l(\vartheta, \varphi) ; k \in [-l, l] \},$$

es una base para \mathbf{H}_l . En particular, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}_l = 2l + 1$. Ver por ejemplo [13] para la teoría de esféricos armónicos y rotaciones en $SO(3)$, sección 4.4 (Representations of $SO(3)$: Angular momentum and spherical harmonics), página 174.

Definición. Dada $R \in SO(3)$, denotaremos por $D^l(R)$ a la matriz de $(2l + 1) \times (2l + 1)$ con entradas en \mathbb{C} asociada al operador lineal $O_R : \mathbf{H}_l \rightarrow \mathbf{H}_l$ en la base $\{ r^l Y_k^l(\vartheta, \varphi) ; k \in [-l, l] \}$, y a cuya entrada nm denotaremos por $D_{nm}^l(R)$.

Se cumple la siguiente identidad:

$$O_R \left(r^l Y_n^l(\vartheta, \varphi) \right) = \sum_{k=-l}^l D_{kn}^l(R) \cdot r^l Y_k^l(\vartheta, \varphi).$$

Haciendo $r = 1$ y por la definición (3.3.4) concluimos que:

$$Y_n^l \left(R^{-1}(\vartheta, \varphi) \right) = \sum_{k=-l}^l D_{kn}^l(R) \cdot Y_k^l(\vartheta, \varphi). \quad (3.15)$$

Siguiendo el método de Wigner para calcular $D^l(R)$ primero se obtendrán representaciones de $SU(2)$. Pero antes necesitamos unos preliminares, análogos a los de $SO(3)$.

Definición. Sea \mathcal{V}_{2l} el espacio vectorial sobre \mathbb{C} de polinomios homogéneos de grado $2l$ en dos variables x, y .

Definición. Sea $A \in SU(2)$, $f \in \mathcal{V}_{2l}$, definimos la función $\mathbf{P}_A f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{P}_A f(x, y) = f \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = f(A^{-1}(x, y)^T).$$

Lema. Sea $A \in SU(2)$. Si $f \in \mathcal{V}_{2l}$ entonces $\mathbf{P}_A f \in \mathcal{V}_{2l}$.

Demostración. Consideremos el monomio $f(x, y) = x^{m_1} y^{m_2}$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ y que satisfacen $m_1 + m_2 = 2l$. Sea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A f(x, y) &= f(A^{-1}(x, y)^T) \\ &= f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y)^{m_1} (a_{21}x + a_{22}y)^{m_2} \\ &= \prod_{k=1}^2 \left(\sum_{r_k=0}^{m_k} \binom{m_k}{r_k} (a_{k1}x)^{m_k-r_k} \cdot (a_{k2}y)^{r_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^2 \left(\sum_{r_k=0}^{m_k} \binom{m_k}{r_k} (a_{k1})^{m_k-r_k} (a_{k2})^{r_k} \cdot x^{m_k-r_k} y^{r_k} \right). \end{aligned}$$

Por lo que cada término en $\mathbf{P}_A f(x, y)$ tiene el mismo orden que el polinomio $\prod_{k=1}^2 x^{m_k - r_k} y^{r_k}$, el cual tiene orden $m_1 + m_2 = 2l$. \square

Resumiendo, sea $l \in \mathbb{N}$, $SU(2)$ admite una representación en \mathcal{V}_{2l} dada por

$$A \in SU(2) \mapsto \mathbf{P}_A : \mathcal{V}_{2l} \longrightarrow \mathcal{V}_{2l}.$$

Definición 3.3.5. Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $f_m \in \mathcal{V}_{2l}$ definida como sigue:

$$f_m(x, y) = \frac{x^{l+m} y^{l-m}}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}.$$

Una base para \mathcal{V}_{2l} está dada por:

$$\{ f_m(x, y) ; m \in [-l, l] \},$$

en particular, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{2l} = 2l + 1$.

Sea $A \in SU(2)$ como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A f_m(x, y) &= f_m \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= f_m \left(\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A f_m(x, y) &= f_m(\bar{\alpha}x - \beta y, \bar{\beta}x + \alpha y) \\ &= \frac{(\bar{\alpha}x - \beta y)^{l+m} (\bar{\beta}x + \alpha y)^{l-m}}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}} \quad \text{por (3.16)} \\ &= \sum_{a=0}^{l+m} \sum_{b=0}^{l-m} \binom{l+m}{a} \binom{l-m}{b} \frac{(\bar{\alpha}x)^{l+m-a} (-\beta y)^a (\bar{\beta}x)^{l-m-b} (\alpha y)^b}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}} \\ &= \sum_{a=0}^{l+m} \sum_{b=0}^{l-m} \frac{(l+m)!}{(l+m-a)! a!} \frac{(l-m)!}{(l-m-b)! b!} \frac{(-1)^a}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}} \cdot \alpha^b \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{l-m-b} \cdot x^{2l-a-b} y^{a+b}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Siguiendo a Wigner, quitaremos los límites para a y b en las sumas anteriores, y la suma en a y b es sobre los enteros tal que los denominadores son enteros no negativos. Esto está justificado por las siguientes identidades:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} l+m-a \geq 0 \\ a \geq 0 \\ l-m-b \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array} & \iff & \begin{array}{l} a \leq l+m \\ a \geq 0 \\ b \leq l-m \\ b \geq 0 \end{array} & \iff & \begin{array}{l} 0 \leq a \leq l+m \\ 0 \leq b \leq l-m. \end{array} \end{array}$$

Usando la convención de Wigner, la fórmula (3.17) queda como sigue:

$$\mathbf{P}_A f_m(x, y) = \sum_a \sum_b \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!} (-1)^a}{a!b!(l+m-a)!(l-m-b)!} \cdot \alpha^b \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{l-m-b} \cdot x^{2l-a-b} y^{a+b}, \quad (3.18)$$

donde las sumas en a y b corren en los enteros tal que los denominadores son enteros no negativos.

Ahora hacemos el cambio de variable de b por k mediante la fórmula siguiente:

$$k = l - a - b \iff b = l - a - k.$$

Veamos como cambian las expresiones en (3.18) con el anterior cambio de variable,

$$\begin{aligned} l - m - b &= l - m - (l - a - k) = l - m - l + a + k = -m + k + a, \\ 2l - a - b &= 2l - a - (l - a - k) = 2l - a - l + a + k = l + k, \\ a + b &= a + (l - a - k) = l - k. \end{aligned}$$

Ahora, como $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces $-a \leq 0$, $-b \leq 0$, por tanto,

$$k = l - a - b \leq l + 0 + 0 = l.$$

Por otra parte, como $-a \geq -l - m$, $-b \geq -l + m$, se sigue que

$$k = l - a - b \geq l - l - m - l + m = -l.$$

Sustituyendo las identidades anteriores en (3.18) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{P}_A f_m(x, y) = \sum_{k=-l}^l \sum_a \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!} (-1)^a}{a!(l-k-a)!(l+m-a)!(-m+k+a)!} \cdot \alpha^{l-k-a} \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{-m+k+a} \cdot x^{l+k} y^{l-k}, \quad (3.19)$$

pero ahora recordamos que por la definición (3.3.5)

$$f_k(x, y) = \frac{x^{l+k} y^{l-k}}{\sqrt{(l+k)!(l-k)!}}. \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.19) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{P}_A f_m(x, y) = \sum_{k=-l}^l \sum_a \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+k)!(l-k)!} (-1)^a}{a!(l-k-a)!(l+m-a)!(-m+k+a)!} \cdot \alpha^{l-k-a} \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{-m+k+a} \cdot f_k(x, y). \quad (3.21)$$

Resumiendo, hemos probado la siguiente identidad:

$$\mathbf{P}_A f_m(x, y) = \sum_{k=-l}^l \mathfrak{U}_{km}^l(A) \cdot f_k(x, y),$$

donde

$$\mathfrak{U}_{km}^l(A) = \sum_a (-1)^a \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+k)!(l-k)!}}{a!(l-k-a)!(l+m-a)!(-m+k+a)!} \cdot \alpha^{l-k-a} \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{-m+k+a}, \quad (3.22)$$

y a corre en los enteros tal que los denominadores son enteros no negativos.

Para relacionar las representaciones de $SU(2)$ y $SO(3)$ necesitaremos dar un homomorfismo entre $SU(2)$ y $SO(3)$, éste no es único, aquí recordamos la elección de Wigner en [29], página 158, acorde con los cálculos anteriores. Primero, elegimos una base $\{S_x, S_y, S_z\}$ (matrices de Pauli) de $su(2)$ (el álgebra de Lie de $SU(2)$) como sigue:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A \in SU(2)$, recordamos que la representación adjunta $Ad_A : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ está dada por:

$$Ad_A H = A H A^{-1}, \quad \forall H \in sl(2, \mathbb{C}),$$

y donde $sl(2, \mathbb{C})$ es el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$.

Definición. Sea $P : su(2) = \langle S_x, S_y, S_z \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$P(\{S_x, S_y, S_z\}) = (\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}),$$

donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base usual de \mathbb{R}^3 .

Una observación útil en lo que sigue es la siguiente: cualquier matriz $H \in su(2)$ la podemos escribir de manera única como

$$\begin{aligned} H &= x \cdot S_x + y \cdot S_y + z \cdot S_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & iy \\ -iy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Definición 3.3.6. Sea $A \in SU(2)$, definimos la transformación lineal $\Phi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por medio de la siguiente fórmula:

$$\Phi_A(\vec{e}_k) = P \circ Ad_A \circ P^{-1}(\vec{e}_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Equivalentemente, si $H \in su(2)$ está dada por:

$$H = x \cdot S_x + y \cdot S_y + z \cdot S_z, \quad \text{con } x, y, z \in \mathbb{R},$$

sea

$$H' := Ad_A H = x' \cdot S_x + y' \cdot S_y + z' \cdot S_z, \quad \text{con } x', y', z' \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\Phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Lema 3.3.7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2),$$

y

$$H = \begin{pmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{pmatrix} = x \cdot S_x + y \cdot S_y + z \cdot S_z \in su(2),$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Entonces

$$H' = Ad_A H = \begin{pmatrix} -z' & x' + iy' \\ x' - iy' & z' \end{pmatrix} = x' \cdot S_x + y' \cdot S_y + z' \cdot S_z,$$

donde

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2)x + \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)y + (\bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta)z \in \mathbb{R}, \\ y' &= \frac{i}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)x + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2)y + i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta)z \in \mathbb{R}, \\ z' &= -(\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta})x + i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})y + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} H' &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha z + \beta x - i\beta y & \alpha x + i\alpha y + \beta z \\ \bar{\beta} z + \bar{\alpha} x - i\bar{\alpha} y & -\bar{\beta} x - i\bar{\beta} y + \bar{\alpha} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -|\alpha|^2 z + \bar{\alpha}\beta x - i\bar{\alpha}\beta y + \alpha\bar{\beta}x + i\alpha\bar{\beta}y + |\beta|^2 z & \alpha\beta z - \beta^2 x + i\beta^2 y + \alpha^2 x + i\alpha^2 y + \alpha\beta z \\ \bar{\alpha}\bar{\beta}z + \bar{\alpha}^2 x - i\bar{\alpha}^2 y - \bar{\beta}^2 x - i\bar{\beta}^2 y + \bar{\alpha}\bar{\beta}z & -|\beta|^2 z - \bar{\alpha}\beta x + i\bar{\alpha}\beta y - \alpha\bar{\beta}x - i\alpha\bar{\beta}y + |\alpha|^2 z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta})x - i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})y - (|\alpha|^2 - |\beta|^2)z & (\alpha^2 - \beta^2)x + i(\alpha^2 + \beta^2)y + 2\alpha\beta z \\ (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2)x - i(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)y + 2\bar{\alpha}\bar{\beta}z & -(\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta})x + i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})y + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para terminar la demostración del lema observamos que

$$\begin{aligned} x' + iy' &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2)x + \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)y + (\bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta)z \\ &\quad - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)x + \frac{i}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2)y - (\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta)z \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)x + i(\alpha^2 + \beta^2)y + 2\alpha\beta z. \\ x' - iy' &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2)x + \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)y + (\bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta)z \\ &\quad + \frac{1}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)x - \frac{i}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2)y + (\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta)z \\ &= (\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2)x - i(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)y + 2\bar{\alpha}\bar{\beta}z. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.8. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

La matriz Φ_A está dada por:

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^2 - \beta^2) & -\operatorname{Im}(\alpha^2 + \beta^2) & 2 \operatorname{Re}(\alpha\beta) \\ \operatorname{Im}(\alpha^2 - \beta^2) & \operatorname{Re}(\alpha^2 + \beta^2) & 2 \operatorname{Im}(\alpha\beta) \\ -2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta) & 2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Phi_A(\vec{e}_1) &= P \circ \operatorname{Ad}_A \circ P^{-1}(\vec{e}_1) \\ &= P \circ \operatorname{Ad}_A(S_x) \\ &= P\left(\frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2)S_x + \frac{i}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)S_y - (\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta})S_z\right) \\ &\hspace{15em} \text{por el lema } \boxed{3.3.7} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - \beta^2 - \bar{\beta}^2) \cdot P(S_x) + \frac{i}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) \cdot P(S_y) - (\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}) \cdot P(S_z) \\ &= \operatorname{Re}(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{Im}(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \vec{e}_2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta) \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\vec{e}_2) &= P \circ \operatorname{Ad}_A \circ P^{-1}(\vec{e}_2) \\ &= P \circ \operatorname{Ad}_A(S_y) \\ &= P\left(\frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2)S_x + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2)S_y + i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})S_z\right) \\ &\hspace{15em} \text{por el lema } \boxed{3.3.7} \\ &= \frac{i}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2 + \beta^2 - \bar{\beta}^2) \cdot P(S_x) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \beta^2 + \bar{\beta}^2) \cdot P(S_y) + i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) \cdot P(S_z) \\ &= -\operatorname{Im}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{Re}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \vec{e}_2 - 2 \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \cdot \vec{e}_3 \\ &= -\operatorname{Im}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{Re}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \vec{e}_2 + 2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}) \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\vec{e}_3) &= P \circ \operatorname{Ad}_A \circ P^{-1}(\vec{e}_3) \\ &= P \circ \operatorname{Ad}_A(S_z) \\ &= P\left((\bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta)S_x + i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta)S_y + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)S_z\right) \\ &\hspace{15em} \text{por el lema } \boxed{3.3.7} \\ &= (\bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta) \cdot P(S_x) + i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta) \cdot P(S_y) + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot P(S_z) \\ &= 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta) \cdot \vec{e}_1 - 2 \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \cdot \vec{e}_2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot \vec{e}_3 \\ &= 2 \operatorname{Re}(\alpha\beta) \cdot \vec{e}_1 + 2 \operatorname{Im}(\alpha\beta) \cdot \vec{e}_2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por lo que el lema se sigue de $\boxed{3.23}$, $\boxed{3.24}$ y $\boxed{3.25}$. □

Por otra parte, si $A \in SU(2)$ entonces $\Phi_A \in SO(3)$, ver por ejemplo $\boxed{29}$, página 159. Por lo que tiene sentido la siguiente:

Definición 3.3.9. Sea $\Phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ dada por

$$\Phi(A) = \Phi_A.$$

Lema 3.3.10. $\Phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ es un homomorfismo, es decir, si $A, B \in SU(2)$, entonces

$$\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B).$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, obtenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}(\vec{v}) &= P \circ Ad_{AB} \circ P^{-1}(\vec{v}) && \text{por la definición (3.3.6)} \\ &= P \circ Ad_A \circ Ad_B \circ P^{-1}(\vec{v}) \\ &= P \circ Ad_A \circ P^{-1} \circ P \circ Ad_B \circ P^{-1}(\vec{v}) \\ &= \Phi_A \circ \Phi_B(\vec{v}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Phi(AB) &= \Phi_{AB} \\ &= \Phi_A \circ \Phi_B && \text{por (3.26)} \\ &= \Phi(A) \circ \Phi(B). \end{aligned}$$

□

A continuación damos coordenadas de Euler a $SU(2)$.

Definición 3.3.11. Sea $A \in SU(2)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

damos a A coordenadas θ, χ, ϕ por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-\frac{1}{2}i\theta} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\phi}, \\ \beta &= -e^{-\frac{1}{2}i\theta} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi}, \end{aligned}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi), \chi \in [0, \pi], \phi \in [-2\pi, 2\pi)$. Denotaremos a A como $A(\theta, \chi, \phi)$.

Usando la definición anterior,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} e^{-i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)} & -\sin \frac{\chi}{2} e^{-i\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)} \\ \sin \frac{\chi}{2} e^{i\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)} & \cos \frac{\chi}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)} \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}} & -\sin \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ \sin \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} & \cos \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}} & -\sin \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}} & \cos \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

por lo que de (3.27) y (3.28) vemos que:

$$A(\theta, \chi, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Aplicaremos ahora el homomorfismo de la definición (3.3.9) a matrices $A \in SU(2)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi(A(\theta, 0, 0)) &= \Phi \left(\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^{-i\theta}) & -\operatorname{Im}(e^{-i\theta}) & 0 \\ \operatorname{Im}(e^{-i\theta}) & \operatorname{Re}(e^{-i\theta}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{por el lema (3.3.8)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \Phi(A(0, \chi, 0)) &= \Phi \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi}{2} & 0 & -2 \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} \\ 0 & \cos^2 \frac{\chi}{2} + \sin^2 \frac{\chi}{2} & 0 \\ 2 \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} & 0 & \cos^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} && \text{por el lema (3.3.8)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por el lema (3.3.10) sabemos que Φ es un homomorfismo, por lo que aplicando Φ a la identidad en (3.29) vemos que:

$$\Phi(A(\theta, \chi, \phi)) = \Phi \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \cdot \Phi \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \cdot \Phi \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

por tanto, de (3.30) y (3.31) tenemos que

$$\Phi(A(\theta, \chi, \phi)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Definición 3.3.12. Denotaremos por $ROT(\theta, \chi, \phi)$ a la matriz en $SO(3)$ determinada por la siguiente ecuación:

$$ROT(\theta, \chi, \phi) := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los ángulos θ, χ, ϕ son llamados **ángulos de Euler** de la matriz $ROT(\theta, \chi, \phi) \in SO(3)$.

Por (3.33), los ángulos para A en $SU(2)$ son los ángulos de Euler de $\Phi(A) \in SO(3)$, es decir:

Corolario 3.3.13.

$$\Phi(A(\theta, \chi, \phi)) = ROT(\theta, \chi, \phi).$$

Ahora calcularemos explícitamente $D_{km}^l(\Phi(A))$. Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \alpha^{l-k-a} &= \left(e^{-\frac{1}{2}i\theta} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\phi} \right)^{l-k-a} \\ &= e^{-\frac{1}{2}i\theta(l-k-a)} \cdot \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{l-k-a} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\phi(l-k-a)}, \\ \bar{\alpha}^{l+m-a} &= \left(e^{\frac{1}{2}i\theta} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi} \right)^{l+m-a} \\ &= e^{\frac{1}{2}i\theta(l+m-a)} \cdot \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{l+m-a} \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi(l+m-a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^a &= \left(-e^{-\frac{1}{2}i\theta} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi} \right)^a \\ &= (-1)^a e^{-\frac{1}{2}i\theta a} \cdot \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^a \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi a}, \\ \bar{\beta}^{-m+k+a} &= \left(-e^{\frac{1}{2}i\theta} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\phi} \right)^{-m+k+a} \\ &= (-1)^{-m+k+a} e^{\frac{1}{2}i\theta(-m+k+a)} \cdot \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{-m+k+a} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\phi(-m+k+a)}. \end{aligned}$$

El coeficiente de θ en el producto $\alpha^{l-k-a} \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{-m+k+a}$ que aparece en la fórmula (3.21) está dado por la suma siguiente:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}i\theta(l-k-a) + \frac{1}{2}i\theta(l+m-a) - \frac{1}{2}i\theta a + \frac{1}{2}i\theta(-m+k+a) \\ &= -\cancel{\frac{1}{2}i\theta l} + \frac{1}{2}i\theta k + \frac{1}{2}i\theta a + \cancel{\frac{1}{2}i\theta l} + \frac{1}{2}i\theta m - \frac{1}{2}i\theta a - \frac{1}{2}i\theta a - \frac{1}{2}i\theta m + \frac{1}{2}i\theta k + \frac{1}{2}i\theta a \\ &= \frac{1}{2}i\theta k + \frac{1}{2}i\theta a + \cancel{\frac{1}{2}i\theta m} - \frac{1}{2}i\theta a - \frac{1}{2}i\theta a - \cancel{\frac{1}{2}i\theta m} + \frac{1}{2}i\theta k + \frac{1}{2}i\theta a \\ &= i\theta k + \cancel{\frac{1}{2}i\theta a} - \cancel{\frac{1}{2}i\theta a} - \frac{1}{2}i\theta a + \frac{1}{2}i\theta a \\ &= i\theta k - \cancel{\frac{1}{2}i\theta a} + \cancel{\frac{1}{2}i\theta a} = i\theta k. \end{aligned}$$

El coeficiente de ϕ está dado por:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}i\phi(l-k-a) + \frac{1}{2}i\phi(l+m-a) + \frac{1}{2}i\phi a - \frac{1}{2}i\phi(-m+k+a) \\ &= -\cancel{\frac{1}{2}i\phi l} + \frac{1}{2}i\phi k + \frac{1}{2}i\phi a + \cancel{\frac{1}{2}i\phi l} + \frac{1}{2}i\phi m - \frac{1}{2}i\phi a + \frac{1}{2}i\phi a + \frac{1}{2}i\phi m - \frac{1}{2}i\phi k - \frac{1}{2}i\phi a \\ &= \frac{1}{2}i\phi k + \cancel{\frac{1}{2}i\phi a} + \frac{1}{2}i\phi m - \cancel{\frac{1}{2}i\phi a} + \frac{1}{2}i\phi a + \frac{1}{2}i\phi m - \frac{1}{2}i\phi k - \frac{1}{2}i\phi a \\ &= \cancel{\frac{1}{2}i\phi k} + i\phi m + \frac{1}{2}i\phi a - \cancel{\frac{1}{2}i\phi k} - \frac{1}{2}i\phi a \\ &= i\phi m + \cancel{\frac{1}{2}i\phi a} - \cancel{\frac{1}{2}i\phi a} = i\phi m. \end{aligned}$$

El exponente de $\cos \frac{\chi}{2}$ está dado por:

$$(l - k - a) + (l + m - a) = 2l + m - k - 2a.$$

El exponente de $\sin \frac{\chi}{2}$ está dado por:

$$a + (-m + k + a) = -m + k + 2a.$$

Por lo que

$$\alpha^{l-k-a} \bar{\alpha}^{l+m-a} \beta^a \bar{\beta}^{-m+k+a} = (-1)^{k-m} \cdot e^{i\theta k} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2l+m-k-2a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{-m+k+2a} e^{i\phi m}. \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.34) en (3.22) obtenemos la siguiente identidad:

$$\mathfrak{U}_{km}^l(A) = e^{ik\theta} \cdot e^{im\phi} \cdot \sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+k)!(l-k)!} \sum_a \frac{(-1)^{k-m+a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{-m+k+2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2l+m-k-2a}}{a!(l-k-a)!(l+m-a)!(-m+k+a)!}.$$

Reconocemos la expresión en el lado derecho como $d_{km}^l(\chi)$, la matriz pequeña de Wigner, definición (3.3.2). Luego hemos demostrado que

$$\mathfrak{U}_{km}^l(A(\theta, \chi, \phi)) = e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi}. \quad (3.35)$$

Por otra parte, por el lema (3.3.10) sabemos que $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ es un homomorfismo, entonces $D^l \circ \Phi, \mathfrak{U}^l : SU(2) \rightarrow M_{(2l+1) \times (2l+1)}(\mathbb{C})$, es decir, tenemos dos representaciones de dimensión $(2l+1)$ para $SU(2)$. Pero entonces $D^l \circ \Phi = \mathfrak{U}^l$ (ver [29], página 166). Equivalentemente,

$$D_{km}^l(\Phi(A)) = \mathfrak{U}_{km}^l(A), \quad \forall A \in SU(2). \quad (3.36)$$

Por el corolario (3.3.13) se cumple la siguiente identidad:

$$\Phi(A(\theta, \chi, \phi)) = ROT(\theta, \chi, \phi). \quad (3.37)$$

De (3.35) y (3.36) tenemos que

$$D_{km}^l(\Phi(A(\theta, \chi, \phi))) = e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi}. \quad (3.38)$$

De (3.37) y (3.38) finalmente obtenemos la siguiente identidad:

$$D_{km}^l(ROT(\theta, \chi, \phi)) = e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi}.$$

Resumiremos los resultados principales, sean $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \in [-l, l]$, $R \in SO(3)$, por la ecuación (3.15)

$$Y_m^l(R^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{k=-l}^l D_{km}^l(R) \cdot Y_k^l(\vartheta, \varphi), \quad (3.39)$$

y si expresamos R en términos de sus ángulos de Euler,

$$R = ROT(\theta, \chi, \phi),$$

entonces

$$D_{km}^l(R) = D_{km}^l(ROT(\theta, \chi, \phi)) = e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi}, \quad (3.40)$$

donde $d_{km}^l(\chi)$ es la matriz pequeña de Wigner, definida en la definición (3.3.2).

3.4 — Simplificación de la matriz pequeña de Wigner $d_{km}^l(\chi)$

Como ya mencionamos en la introducción del capítulo, por completez damos la demostración de un lema técnico que permite obtener una expresión cómoda de la matriz pequeña de Wigner $d_{km}^l(\chi)$.

Lema 3.4.1. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Sean $r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ definidos como sigue

$$d_1 := \min\{l + m, l - m, l + k, l - k\}, \quad (3.41)$$

$$y \text{ si } d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } r_1 := k - m \text{ y } d_2 := k - m \\ l - m & \text{entonces } r_1 := m - k \text{ y } d_2 := 0 \\ l + k & \text{entonces } r_1 := m - k \text{ y } d_2 := 0 \\ l - k & \text{entonces } r_1 := k - m \text{ y } d_2 := k - m. \end{cases} \quad (3.42)$$

$$r_2 := 2l - 2d_1 - r_1. \quad (3.43)$$

Entonces $r_1, r_2, d_1, d_2 \geq 0$ y se cumple que

$$d_{km}^l(\chi) = (-1)^{d_2} \binom{2l - d_1}{d_1 + r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1 + r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{r_1} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{r_2} P_{d_1}^{(r_1, r_2)}(\cos \chi), \quad (3.44)$$

donde $\chi \in [0, \pi]$.

Demostración. Primero observamos que por hipótesis $k, m \in [-l, l]$, luego, $l - k, l + k, l - m, l + m \geq 0$, y por tanto $d_1 \geq 0$.

$$\text{Si } d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } r_2 = 2l - 2(l + m) - (k - m) = 2l - 2l - 2m - k + m = -k - m \\ l - m & \text{entonces } r_2 = 2l - 2(l - m) - (m - k) = 2l - 2l + 2m - m + k = k + m \\ l + k & \text{entonces } r_2 = 2l - 2(l + k) - (m - k) = 2l - 2l - 2k - m + k = -k - m \\ l - k & \text{entonces } r_2 = 2l - 2(l - k) - (k - m) = 2l - 2l + 2k - k + m = k + m. \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\text{Si } d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } l + m \leq l - k \implies r_2 = -k - m \geq 0 \\ l - m & \text{entonces } l - m \leq l + k \implies r_2 = k + m \geq 0 \\ l + k & \text{entonces } l + k \leq l - m \implies r_2 = -k - m \geq 0 \\ l - k & \text{entonces } l - k \leq l + m \implies r_2 = k + m \geq 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\text{Si } d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } l + m \leq l + k \implies r_1 = d_2 = k - m \geq 0 \\ l - m & \text{entonces } l - m \leq l - k \implies r_1 = m - k \geq 0, d_2 = 0 \\ l + k & \text{entonces } l + k \leq l + m \implies r_1 = m - k \geq 0, d_2 = 0 \\ l - k & \text{entonces } l - k \leq l - m \implies r_1 = d_2 = k - m \geq 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Por lo que a partir de (3.45), (3.46) y (3.47) concluimos que $r_1, r_2, d_1, d_2 \geq 0$. Una constante útil es la siguiente:

$$\begin{aligned} B_{km}^l &:= \binom{2l - d_1}{d_1 + r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1 + r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{(2l - 2d_1 - r_1)!}{(2l - r_1)! (d_1 + r_1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(d_1 + r_2)!}{(d_1)! (r_2)!} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(2l - d_1)! (d_1)! (r_2)!}}{\sqrt{(2l - 2d_1 - r_1)! (d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

También nos serán útiles calcular los siguientes mínimos y máximos:

$$\text{si } d_1 = \begin{cases} l+m & \text{entonces } \min\{l+m, l-k\} = l+m \\ l-m & \text{entonces } l-m \leq l+k \implies l-k \leq l+m \implies \min\{l+m, l-k\} = l-k \\ l+k & \text{entonces } l+k \leq l-m \implies l+m \leq l-k \implies \min\{l+m, l-k\} = l+m \\ l-k & \text{entonces } \min\{l+m, l-k\} = l-k. \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\text{si } d_1 = \begin{cases} l+m & \text{entonces } l+m \leq l+k \implies m-k \leq 0 \implies \max\{0, m-k\} = 0 \\ l-m & \text{entonces } l-m \leq l-k \implies m-k \geq 0 \implies \max\{0, m-k\} = m-k \\ l+k & \text{entonces } l+k \leq l+m \implies m-k \geq 0 \implies \max\{0, m-k\} = m-k \\ l-k & \text{entonces } l-k \leq l-m \implies m-k \leq 0 \implies \max\{0, m-k\} = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

De la definición de la matriz pequeña de Wigner en (3.3.2),

$$d_{km}^l(\chi) = \sqrt{(l+k)!(l-k)!(l+m)!(l-m)!} \sum_a \frac{(-1)^{k-m+a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2a}}{(l+m-a)! a! (k-m+a)! (l-k-a)!}, \quad (3.51)$$

donde a corre en los enteros tal que los denominadores son enteros no negativos. Esto es, cuando

$$\begin{array}{l} l+m-a \geq 0 \\ a \geq 0 \\ k-m+a \geq 0 \\ l-k-a \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} a \leq l+m \\ a \leq l-k \\ a \geq 0 \\ a \geq m-k \end{array} \iff \begin{array}{l} a \leq \min\{l+m, l-k\} \\ a \geq \max\{0, m-k\}. \end{array}$$

Para facilitar las cuentas, sustituimos $C_{km}^l := \sqrt{(l+k)!(l-k)!(l+m)!(l-m)!}$ y las desigualdades anteriores en el lado derecho de la expresión (3.51) para $d_{km}^l(\chi)$, vemos que:

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot \sum_{a=\max\{0, m-k\}}^{\min\{l+m, l-k\}} \frac{(-1)^{k-m+a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2a}}{(l+m-a)! a! (k-m+a)! (l-k-a)!}. \quad (3.52)$$

Para efecto de los siguientes cálculos usaremos algunas identidades trigonométricas. Usando la sustitución $x = \cos \chi$ obtenemos,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \cos \chi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} + \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) = -\sin^2 \frac{\chi}{2}, \quad (3.53)$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \cos \chi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} + \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) = \cos^2 \frac{\chi}{2}. \quad (3.54)$$

Ahora consideramos $\alpha, \beta, n \in \mathbb{N}$, sea

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \beta)} &:= \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \chi) \\ &= (n+\alpha)! (n+\beta)! \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^\beta \sum_{a=0}^n \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-a} \left(\frac{x+1}{2}\right)^a}{(n+\alpha-a)! a! (\beta+a)! (n-a)!} \end{aligned}$$

por la definición (3.3.1)

$$= (n + \alpha)! (n + \beta)! \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^\alpha \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^\beta \sum_{a=0}^n \frac{(-1)^{n-a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{2n-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2a}}{(n + \alpha - a)! a! (\beta + a)! (n - a)!},$$

por (3.53) y (3.54)

y por tanto obtenemos la fórmula

$$T_n^{(\alpha, \beta)} = (n + \alpha)! (n + \beta)! \sum_{a=0}^n \frac{(-1)^{n-a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{2n+\alpha-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{\beta+2a}}{(n + \alpha - a)! a! (\beta + a)! (n - a)!}. \quad (3.55)$$

Ahora se demostrará la fórmula (3.44) caso por caso. Usando la notación en (3.41), (3.42) y (3.43) equivale a demostrar que

$$(-1)^{d_2} \cdot B_{km}^l \cdot T_{d_1}^{(r_1, r_2)} = d_{km}^l(\chi). \quad (3.56)$$

3.4.1 — Caso $d_1 = l + m$.

Definimos las siguientes constantes:

$$\alpha = r_1 := k - m, \quad \beta = r_2 := -k - m, \quad n = d_1 := l + m, \quad d_2 := k - m. \quad (3.57)$$

Sustituyendo las identidades en (3.57) en (3.55),

$$T_n^{(\alpha, \beta)} = (l + m + k - m)! (l + m - m - k)! \sum_{a=0}^{l+m} \frac{(-1)^{l+m-a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{2l+2m+k-m-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{-k-m+2a}}{(l + m + k - m - a)! a! (-k - m + a)! (l + m - a)!}.$$

Simplificando,

$$T_n^{(\alpha, \beta)} = (-1)^{l+m} (l + k)! (l - k)! \sum_{a=0}^{l+m} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{k+m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{-k-m+2a}}{(l + k - a)! a! (-k - m + a)! (l + m - a)!}. \quad (3.58)$$

Por otra parte, por (3.49) y (3.50), $\max\{0, m - k\} = 0$ y $\min\{l + m, l - k\} = l + m$, por lo que de la identidad (3.52) se sigue que:

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot \sum_{a=0}^{l+m} \frac{(-1)^{k-m+a} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{k-m+2a} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{-k+m+2l-2a}}{(l + m - a)! a! (k - m + a)! (l - k - a)!}. \quad (3.59)$$

Hacemos el cambio de variable $b = l + m - a \iff a = l + m - b$. Si $a = 0 \implies b = l + m$, si $a = l + m \implies b = 0$. Además,

$$\begin{aligned} k - m + 2a &= k - m + 2l + 2m - 2b = k + m + 2l - 2b, \\ -k + m + 2l - 2a &= -k + m + 2l - 2l - 2m + 2b = -k - m + 2b, \\ l + m - a &= l + m - l - m + b = b, \\ a &= l + m - b, \\ k - m + a &= k - m + l + m - b = l + k - b, \\ l - k - a &= l - k - l - m + b = -k - m + b, \\ (-1)^{k-m+a} &= (-1)^{k-m+l+m-b} = (-1)^{l+k} (-1)^b, \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo las identidades anteriores en (3.59) tenemos que

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l (-1)^{l+k} \cdot \sum_{b=0}^{l+m} \frac{(-1)^b \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2l-2b} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2b}}{b! (l+m-b)! (l+k-b)! (-k-m+b)!}. \quad (3.60)$$

Por otra parte, usando las constantes en (3.57) veamos como se modifica la constante B_{km}^l en (3.48),

$$\begin{aligned} B_{km}^l &= \frac{\sqrt{(2l-d_1)! (d_1)! (r_2)!}}{\sqrt{(2l-2d_1-r_1)! (d_1+r_1)! (d_1+r_2)!}} \\ &= \frac{\sqrt{(2l-l-m)! (l+m)! (-m-k)!}}{\sqrt{(2l-2l-2m-k+m)! (l+m+k-m)! (l+m-m-k)!}} \\ &= \frac{\sqrt{(l-m)! (l+m)! (-m-k)!}}{\sqrt{(-m-k)! (l+k)! (l-k)!}} = \frac{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}{\sqrt{(l+k)! (l-k)!}}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Resumiendo, por (3.58), (3.60) y (3.61) concluimos que

$$(-1)^{k-m} \cdot B_{km}^l \cdot T_n^{(\alpha,\beta)} = d_{km}^l(\chi),$$

es decir, probamos la fórmula (3.56) para el primer caso.

3.4.2 — Caso $d_1 = l - m$.

Definimos las constantes siguientes:

$$\alpha = r_1 := -k + m, \quad \beta = r_2 := k + m, \quad n = d_1 := l - m, \quad d_2 := 0. \quad (3.62)$$

Sustituyendo las constantes (3.62) en (3.55),

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (l-m-k+m)! (l-m+k+m)! \sum_{a=0}^{l-m} \frac{(-1)^{l-m-a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{2l-2m-k+m-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(l-m-k+m-a)! a! (k+m+a)! (l-m-a)!}.$$

Simplificando,

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (-1)^{l-m} (l-k)! (l+k)! \sum_{a=0}^{l-m} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(l-k-a)! a! (k+m+a)! (l-m-a)!}. \quad (3.63)$$

Por otra parte, por (3.49) y (3.50), $\max\{0, m-k\} = m-k$ y $\min\{l+m, l-k\} = l-k$, por lo que de (3.52) obtenemos

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot \sum_{b=m-k}^{l-k} \frac{(-1)^{k-m+b} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2b} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2b}}{(l+m-b)! b! (k-m+b)! (l-k-b)!}. \quad (3.64)$$

Hacemos el cambio de variable $a = l - k - b \iff b = l - k - a$. Si $b = m - k \implies a = l - m$, y si $b = l - k \implies a = 0$. Además,

$$\begin{aligned}
k - m + 2b &= k - m + 2l - 2k - 2a = -k - m + 2l - 2a, \\
-k + m + 2l - 2b &= -k + m + 2l - 2l + 2k + 2a = k + m + 2a, \\
l + m - b &= l + m - l + k + a = k + m + a, \\
b &= l - k - a, \\
k - m + b &= k - m + l - k - a = l - m - a, \\
l - k - b &= l - k - l + k + a = a, \\
(-1)^{k-m+b} &= (-1)^{k-m+l-k-a} = (-1)^{l-m}(-1)^a,
\end{aligned}$$

por lo que sustituyendo las identidades anteriores en (3.64) se sigue

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot (-1)^{l-m} \sum_{a=0}^{l-m} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(k+m+a)!(l-k-a)!(l-m-a)!a!}. \quad (3.65)$$

Usando las constantes en (3.62) veremos como se modifica la constante B_{km}^l en (3.48),

$$\begin{aligned}
B_{km}^l &= \frac{\sqrt{(2l-d_1)!(d_1)!(r_2)!}}{\sqrt{(2l-2d_1-r_1)!(d_1+r_1)!(d_1+r_2)!}} \\
&= \frac{\sqrt{(2l-l+m)!(l-m)!(m+k)!}}{\sqrt{(2l-2l+2m-m+k)!(l-m+m-k)!(l-m+m+k)!}} \\
&= \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(k+m)!}}{\sqrt{(m+k)!(l-k)!(l+k)!}} = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{\sqrt{(l+k)!(l-k)!}}. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Resumiendo, por (3.63), (3.65) y (3.66) concluimos que

$$(-1)^0 \cdot B_{km}^l \cdot T_n^{(\alpha,\beta)} = d_{km}^l(\chi),$$

lo cual prueba (3.56) en el segundo caso.

3.4.3 — Caso $d_1 = l + k$.

Definimos las constantes para este caso como sigue:

$$\alpha = r_1 := -k + m, \quad \beta = r_2 := -k - m, \quad n = d_1 := l + k, \quad d_2 := 0. \quad (3.67)$$

Sustituyendo las constantes (3.67) en (3.55),

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (l+k-k+m)!(l+k-k-m)! \sum_{a=0}^{l+k} \frac{(-1)^{l+k-a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{2l+2k-k+m-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2a}}{(l+k-k+m-a)!a!(-k-m+a)!(l+k-a)!}.$$

Simplificando,

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (-1)^{l+k} (l+m)!(l-m)! \sum_{a=0}^{l+k} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2a}}{(l+m-a)!a!(-k-m+a)!(l+k-a)!}. \quad (3.68)$$

Por otra parte, por (3.49) y (3.50), $\max\{0, m - k\} = m - k$ y $\min\{l + m, l - k\} = l + m$, por lo que de (3.52) tenemos la siguiente igualdad:

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot \sum_{b=m-k}^{l+m} \frac{(-1)^{k-m+b} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2b} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2b}}{(l+m-b)! b! (k-m+b)! (l-k-b)!}. \quad (3.69)$$

Hacemos el cambio de variable $a = l + m - b \iff b = l + m - a$. Si $b = m - k \implies a = l + k$, y si $b = l + m \implies a = 0$. Además,

$$\begin{aligned} k - m + 2b &= k - m + 2l + 2m - 2a = k + m + 2l - 2a, \\ -k + m + 2l - 2b &= -k + m + 2l - 2l - 2m + 2a = -k - m + 2a, \\ l + m - b &= l + m - l - m + a = a, \\ b &= l + m - a, \\ k - m + b &= k - m + l + m - a = l + k - a, \\ l - k - b &= l - k - l - m + a = -k - m + a, \\ (-1)^{k-m+b} &= (-1)^{k-m+l+m-a} = (-1)^{l+k} (-1)^a, \end{aligned}$$

por lo que

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot (-1)^{l+k} \sum_{a=0}^{l+k} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2a}}{a! (l+m-a)! (l+k-a)! (-k-m+a)!}. \quad (3.70)$$

Por otra parte, usando las constantes (3.67) veremos como se transforma la constante B_{km}^l en (3.48),

$$\begin{aligned} B_{km}^l &= \frac{\sqrt{(2l-d_1)! (d_1)! (r_2)!}}{\sqrt{(2l-2d_1-r_1)! (d_1+r_1)! (d_1+r_2)!}} && \text{por (6.4.1) (a)} \\ &= \frac{\sqrt{(2l-l-k)! (l+k)! (-k-m)!}}{\sqrt{(2l-2l-2k+k-m)! (l+k-k+m)! (l+k-k-m)!}} \\ &= \frac{\sqrt{(l-k)! (l+k)! (-m-k)!}}{\sqrt{(-k-m)! (l+m)! (l-m)!}} = \frac{\sqrt{(l-k)! (l+k)!}}{\sqrt{(l+m)! (l-m)!}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Por (3.68), (3.71) y (3.70) obtenemos

$$(-1)^0 \cdot B_{km}^l \cdot T_n^{(\alpha, \beta)} = d_{km}^l(\chi),$$

lo cual prueba (3.56) para el tercer caso.

3.4.4 — Caso $d_1 = l - k$.

Definimos las constantes para el último caso como sigue:

$$\alpha = r_1 := k - m, \quad \beta = r_2 := k + m, \quad n = d_1 := l - k, \quad d_2 := k - m. \quad (3.72)$$

Sustituyendo las constantes (3.72) en (3.55) obtenemos la siguiente identidad:

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (l-k+k-m)!(l-k+k+m)! \sum_{a=0}^{l-k} \frac{(-1)^{l-k-a} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{2l-2k+k-m-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(l-k+k-m-a)! a! (k+m+a)! (l-k-a)!}.$$

Simplificando,

$$T_n^{(\alpha,\beta)} = (-1)^{l-k} (l-m)! (l+m)! \sum_{a=0}^{l-k} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(l-m-a)! a! (k+m+a)! (l-k-a)!}. \quad (3.73)$$

Por otra parte, por (3.49) y (3.50), $\max\{0, m-k\} = 0$ y $\min\{l+m, l-k\} = l-k$, por lo que de (3.52) se sigue que:

$$d_{km}^l(\chi) = C_{km}^l \cdot \sum_{b=0}^{l-k} \frac{(-1)^{k-m+b} \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{k-m+2b} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{-k+m+2l-2b}}{(l+m-b)! b! (k-m+b)! (l-k-b)!}, \quad (3.74)$$

haciendo el cambio de variable $b = l-k-a \iff a = l-k-b$. Si $b = l-k \implies a = 0$ y si $b = 0 \implies a = l-k$. Además,

$$\begin{aligned} k-m+2b &= k-m+2l-2k-2a = -k-m+2l-2a, \\ -k+m+2l-2b &= -k+m+2l-2l+2k+2a = k+m+2a, \\ l+m-b &= l+m-l+k+a = k+m+a, \\ b &= l-k-a, \\ k-m+b &= k-m+l-k-a = l-m-a, \\ l-k-b &= l-k-l+k+a = a, \\ (-1)^{k-m+b} &= (-1)^{k-m+l-k-a} = (-1)^{l-m} (-1)^a, \end{aligned}$$

por lo que

$$d_{km}^l(\chi) = (-1)^{l-m} C_{km}^l \cdot \sum_{a=0}^{l-k} \frac{(-1)^a \left(\sin \frac{\chi}{2}\right)^{-k-m+2l-2a} \left(\cos \frac{\chi}{2}\right)^{k+m+2a}}{(k+m+a)! (l-k-a)! (l-m-a)! a!}. \quad (3.75)$$

Por otra parte, de (3.48) y las constantes en (3.72)

$$\begin{aligned} B_{km}^l &= \frac{\sqrt{(2l-d_1)!(d_1)!(r_2)!}}{\sqrt{(2l-2d_1-r_1)!(d_1+r_1)!(d_1+r_2)!}} \\ &= \frac{\sqrt{(2l-l+k)!(l-k)!(k+m)!}}{\sqrt{(2l-2l+2k-k+m)!(l-k+k-m)!(l-k+k+m)!}} = \frac{\sqrt{(l+k)!(l-k)!}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por (3.73), (3.75) y (3.76)

$$(-1)^{k-m} \cdot B_{km}^l \cdot T_n^{(\alpha,\beta)} = d_{km}^l(\chi),$$

lo cual prueba (3.56) para el cuarto caso. \square

Series de Eisenstein

En la sección 1 veremos como definir las rotaciones $R(d\sigma, z, \lambda) \in SO(3)$, donde $\sigma \in SL(2, \mathbb{C})$ y $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$; y están determinadas por lo que hace la diferencial de σ a la base ortonormal hiperbólica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $T_{(z, \lambda)}\mathbb{H}^3$ (lema (4.1.3)). Para $n = 2$, si $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{H}^2$ entonces $d\sigma_z$ actúa en \mathbb{R}^2 por una rotación en $SO(2)$ compuesto con una homotecia. Como veremos, $R(d\sigma, z, \lambda) \in SO(3)$ y es entonces el análogo para $n = 3$.

Por otro lado, en el capítulo 3 vimos que $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ es un homomorfismo de grupos. Si codificamos el punto (z, λ) del espacio hiperbólico en la matriz $g \in SL(2, \mathbb{C})$ como $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I}$, probaremos en el lema (4.1.4) que la rotación $R(d\sigma, z, \lambda)$ es (módulo conjugación por una matriz constante) la matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$, donde T es el mapeo que da la parte $SU(2)$ de la descomposición de Iwasawa.

En la sección 2 estudiaremos algunas propiedades de la matriz de Wigner que usaremos en el resto del capítulo. Principalmente recordamos cómo cambia la matriz de Wigner de una composición de rotaciones con respecto a las matrices de Wigner de cada una de las rotaciones, por ejemplo, en el lema (4.2.1) veremos que si $R, T \in SO(3)$ entonces

$$D_{bm}^l(R \circ T) = \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot D_{ba}^l(R).$$

En la sección 3, utilizaremos la matriz de Wigner de las rotaciones $R(d\sigma, z, \lambda)$ para definir las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ de Γ_D en la cúspide ∞ , ellas están definidas en $SL(2, \mathbb{C})$ y para s un parámetro complejo tal que $\text{Re}(s) > 1$. También en la sección 3 veremos que dichas series están bien definidas (lema (4.3.3)), que convergen para $\text{Re}(s) > 1$ (lema (4.3.4)) y que son invariantes bajo el subgrupo Γ_D (lema (4.3.5)).

En la sección 4 veremos las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ (definición (4.4.1)). En general, las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ no son series de Eisenstein (salvo el caso $l = k = m = 0$), ya que no son invariantes bajo el grupo Γ_D , sin embargo, son invariantes bajo el grupo $\Gamma'_{D, \infty}$ (lema (4.4.2)), por lo que admiten una expansión de Fourier en la variable z , fijando λ y s . En la sección 9 veremos cómo la expansión de Fourier de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ determina la expansión de Fourier de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$.

En la sección 5 vemos la relación entre las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ y ciertas series $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ que aparecerán naturalmente en el capítulo 8, que resultan cuando consideramos la transformada de Mellin de una función en el haz tangente unitario a una orbidad de Bianchi.

En la sección 6 veremos la conjetura sobre la continuación analítica de las series de Eisenstein.

4.1 — Rotaciones $R(d\sigma, z, \lambda)$, propiedades y equivalencias

Sean $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, con $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, $\vec{v}_{(z,\lambda)} \in T_{(z,\lambda)}\mathbb{R}^3$, denotaremos por $v_{(z,\lambda)} \in T_{(z,\lambda)}\mathbb{H}^3$ el vector definido por la siguiente igualdad:

$$v_{(z,\lambda)} = \text{Im}(z, \lambda) \cdot \vec{v}_{(z,\lambda)}, \quad (4.1)$$

y donde $\text{Im}(z, \lambda) = \lambda$.

Denotaremos vectores con barra a vectores en $T\mathbb{R}^3$, donde cada espacio tangente tiene el producto interior usual de \mathbb{R}^3 , luego, podemos transportar dichos vectores en la manera usual. Mientras que vectores sin barra corresponderán a vectores en $T\mathbb{H}^3$, donde cada espacio tangente está dotado de el producto interior hiperbólico. En ocasiones vamos a omitir el punto base de los vectores.

Definición 4.1.1. Sean $\sigma \in SL(2, \mathbb{C})$, $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, y sea $\vec{v} \in T_0\mathbb{R}^3$, usando el transporte paralelo de \mathbb{R}^3 consideramos $\vec{v} \in T_{(z,\lambda)}\mathbb{R}^3$, ahora, $v \in T_{(z,\lambda)}\mathbb{H}^3$, luego $d\sigma_{(z,\lambda)}v \in T_{\sigma(z,\lambda)}\mathbb{H}^3$. Repitiendo el mismo procedimiento pero a la inversa obtenemos un vector, que denotamos $\overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}}v \in T_0\mathbb{R}^3$. Con la notación anterior, la matriz $R(d\sigma, z, \lambda) \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ está definida como sigue:

$$R(d\sigma, z, \lambda) \vec{v} = \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}}v, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Lema 4.1.2. $R(d\sigma, z, \lambda) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva la norma euclidiana.

Demostración. Sea $v \in T_{(z,\lambda)}\mathbb{H}^3$, de la definición de la métrica hiperbólica tenemos que:

$$\langle v, v \rangle_{(z,\lambda)}^{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{\text{Im}(z, \lambda)^2} \langle v, v \rangle^{\mathbb{R}^3}. \quad (4.2)$$

Pero (4.2) es equivalente a la siguiente identidad:

$$\|v\|_{(z,\lambda)}^{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{\text{Im}(z, \lambda)} \|v\|^{\mathbb{R}^3}. \quad (4.3)$$

Sea $\sigma \in SL(2, \mathbb{C})$, un caso particular de la identidad (4.1) es la siguiente:

$$\overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}}v = \frac{1}{\text{Im} \sigma(z, \lambda)} d\sigma_{(z,\lambda)}v. \quad (4.4)$$

Por otra parte, por ser σ una isometría hiperbólica sabemos que:

$$\|d\sigma_{(z,\lambda)}v\|_{\sigma(z,\lambda)}^{\mathbb{H}^3} = \|v\|_{(z,\lambda)}^{\mathbb{H}^3}. \quad (4.5)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|R(d\sigma, z, \lambda) \vec{v}\|^{\mathbb{R}^3} &= \left\| \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}}v \right\|^{\mathbb{R}^3} && \text{por la definición (4.1,1)} \\ &= \frac{1}{\text{Im} \sigma(z, \lambda)} \|d\sigma_{(z,\lambda)}v\|^{\mathbb{R}^3} && \text{por (4.4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda) \cdot \|d\sigma_{(z, \lambda)} v\|_{\sigma(z, \lambda)}^{\mathbb{H}^3} && \text{por (4.3)} \\
&= \|d\sigma_{(z, \lambda)} v\|_{\sigma(z, \lambda)}^{\mathbb{H}^3} \\
&= \|v\|_{(z, \lambda)}^{\mathbb{H}^3} && \text{por (4.5)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \|v\|^{\mathbb{R}^3} && \text{por (4.3)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \operatorname{Im}(z, \lambda) \cdot \|\vec{v}\|^{\mathbb{R}^3} && \text{por (4.1)} \\
&= \|\vec{v}\|^{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.3. Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$. Se cumple la siguiente identidad:

$$R(d\sigma, z, \lambda) = \left(\overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_1}^T \quad \overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_2}^T \quad \overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_3}^T \right), \quad (4.6)$$

donde $\left(\overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_1}^T \quad \overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_2}^T \quad \overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_3}^T \right)$ indica la matriz cuyas columnas están dadas por las entradas de la transformación lineal $d\sigma_{(z, \lambda)}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_1} &= \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 + z^2 c^2) + 2(\bar{z} c \bar{d} + z c d) + (\bar{d}^2 + d^2) - \lambda^2 (\bar{c}^2 + c^2) \right] \vec{e}_1 \\
&\quad - \frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 - z^2 c^2) + 2(\bar{z} c \bar{d} - z c d) + (\bar{d}^2 - d^2) - \lambda^2 (\bar{c}^2 - c^2) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad - \frac{\lambda}{\Omega} \left[|c|^2 (\bar{z} + z) + (c \bar{d} + \bar{c} d) \right] \vec{e}_3,
\end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_2} &= \frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 - z^2 c^2) + 2(\bar{z} c \bar{d} - z c d) + (\bar{d}^2 - d^2) + \lambda^2 (\bar{c}^2 - c^2) \right] \vec{e}_1 \\
&\quad + \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 + z^2 c^2) + 2(\bar{z} c \bar{d} + z c d) + (\bar{d}^2 + d^2) + \lambda^2 (\bar{c}^2 + c^2) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad - \frac{\lambda i}{\Omega} \left[|c|^2 (\bar{z} - z) + (c \bar{d} - \bar{c} d) \right] \vec{e}_3,
\end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d\sigma_{(z, \lambda)} e_3} &= \frac{\lambda}{\Omega} \left[(\bar{z} c^2 + z c^2) + (c \bar{d} + c d) \right] \vec{e}_1 \\
&\quad - \frac{\lambda i}{\Omega} \left[(\bar{z} c^2 - z c^2) + (c \bar{d} - c d) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad + \frac{1}{\Omega} \left[|c|^2 (|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z} c d + z c \bar{d}) \right] \vec{e}_3,
\end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\Omega := |cz + d|^2 + |c|^2 \lambda^2$. Además, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base ortonormal euclidiana en $T_{(z, \lambda)} \mathbb{R}^3$, mientras que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal hiperbólica en $T_{(z, \lambda)} \mathbb{H}^3$. La relación entre las bases está dada por:

$$\vec{e}_k = \frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} e_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

Demostración. Sea $z = x + iy$, por (3.1),

$$\operatorname{Im} \sigma(z + \lambda j) = \frac{\lambda}{|cz + d|^2 + |c|^2 \lambda^2} = \frac{\lambda}{\Omega}. \quad (4.11)$$

Otra identidad que se sigue de (4.1) y que nos será útil es la siguiente:

$$\overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)} e_k} = \frac{1}{\operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)} d\sigma_{(z,\lambda)} e_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

Demostremos la primer ecuación (4.7). Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por

$$\alpha(t) = z + t + \lambda j = x + t + iy + \lambda j,$$

entonces $\alpha(0) = z + \lambda j$, $\alpha'(0) = 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + t + \lambda j) \\ &= \frac{(a(z+t) + b)(\bar{c}(\bar{z} + t) + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2}{|c(z+t) + d|^2 + |c|^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{|c(z+t) + d|^2 + |c|^2\lambda^2} j \quad \text{por (3.1)} \\ &= \frac{(az + at + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{c}t + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2}{|cz + ct + d|^2 + |c|^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{|cz + ct + d|^2 + |c|^2\lambda^2} j. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Luego, si $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son definidas como sigue,

$$\begin{aligned} F_1(t) &:= (az + at + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{c}t + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(t) &:= |cz + ct + d|^2 + |c|^2\lambda^2 = (cz + ct + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{c}t + \bar{d}) + |c|^2\lambda^2, \end{aligned}$$

entonces por (4.13),

$$g(\alpha(t)) = \frac{F_1(t)}{F_2(t)} + \frac{\lambda}{F_2(t)} j. \quad (4.14)$$

Desarrollando $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= a\bar{c}|z|^2 + a\bar{c}zt + a\bar{d}z + a\bar{c}\bar{z}t + a\bar{c}t^2 + a\bar{d}t + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{c}t + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2 \\ F_2(t) &= |c|^2|z|^2 + |c|^2zt + c\bar{d}z + |c|^2\bar{z}t + |c|^2t^2 + c\bar{d}t + \bar{c}d\bar{z} + \bar{c}dt + |d|^2 + |c|^2\lambda^2. \end{aligned}$$

Evaluable en $t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_1(0) &= a\bar{c}|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(0) &= |c|^2|z|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 \\ &= |cz + d|^2 + |c|^2\lambda^2 = \Omega. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Derivando $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= a\bar{c}z + a\bar{c}\bar{z} + 2a\bar{c}t + a\bar{d} + b\bar{c} \\ F_2'(t) &= |c|^2z + |c|^2\bar{z} + 2|c|^2t + c\bar{d} + \bar{c}d. \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas en $t = 0$,

$$\begin{aligned} F_1'(0) &= a\bar{c}z + a\bar{c}\bar{z} + a\bar{d} + b\bar{c}, \\ F_2'(0) &= |c|^2z + |c|^2\bar{z} + c\bar{d} + \bar{c}d. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando Mathematica encontramos

$$\begin{aligned} F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0) &= \lambda^2bc\bar{c}^2 - \lambda^2ad\bar{c}^2 - bc\bar{d}^2 + a\bar{d}d^2 - 2bcc\bar{d}z + 2ad\bar{c}d\bar{z} - bc\bar{c}^2\bar{z}^2 + ad\bar{c}^2\bar{z}^2 \\ &= (ad - bc)(\bar{c}^2\bar{z}^2 - \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2) \\ &= \bar{c}^2\bar{z}^2 - \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Derivando la ecuación (4.14) y evaluando en $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0)}{F_2(0)^2} - \frac{\lambda F_2'(0)}{F_2(0)^2} j. \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.15), (4.16) y (4.17) en (4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} d\sigma_{(z,\lambda)}\vec{e}_1 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{1}{\Omega^2} [\bar{c}^2\bar{z}^2 - \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2] - \frac{\lambda}{\Omega^2} [|c|^2z + |c|^2\bar{z} + c\bar{d} + \bar{c}d] j \\ &= \frac{1}{\Omega^2} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 - \lambda^2\bar{c}^2] - \frac{\lambda}{\Omega^2} [|c|^2(\bar{z} + z) + (c\bar{d} + \bar{c}d)] j. \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \operatorname{Re} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 - \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_1 + \frac{1}{\Omega^2} \operatorname{Im} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 - \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Omega^2} [|c|^2(\bar{z} + z) + (c\bar{d} + \bar{c}d)] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por otra parte, sea $k \in \{1, 2, 3\}$, tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} d\sigma_{(z,\lambda)}\vec{e}_1 &= d\sigma_{(z,\lambda)} \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} e_k \right] && \text{por (4.10)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} d\sigma_{(z,\lambda)} e_k \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda) \cdot \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)} e_k} && \text{por (4.12)} \\ &= \frac{\operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)} e_k} \\ &= \frac{\lambda}{\Omega} \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)} e_k}, && \text{por (4.11)} \end{aligned}$$

resumiendo,

$$d\sigma_{(z,\lambda)}\vec{e}_k = \frac{1}{\Omega} \cdot \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)} e_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Por lo que de las identidades en (4.19) y (4.20) vemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}e_1} &= \frac{1}{\Omega} \operatorname{Re} \left[\bar{z}^2 \bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 - \lambda^2 \bar{c}^2 \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} \left[\bar{z}^2 \bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 - \lambda^2 \bar{c}^2 \right] \vec{e}_2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Omega} \left[|c|^2(\bar{z} + z) + (c\bar{d} + \bar{c}d) \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Lo cual prueba la primer identidad en (4.7) del lema.

Veamos ahora la segunda ecuación en (4.8). Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por

$$\alpha(t) = z + ti + \lambda j = x + (t + y)i + \lambda j,$$

entonces $\alpha(0) = z + \lambda j$, $\alpha'(0) = i$. Tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + ti + \lambda j) \\ &= \frac{(a(z + ti) + b)(\bar{c}(\bar{z} + t\bar{i}) + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2}{|c(z + ti) + d|^2 + |c|^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{|c(z + ti) + d|^2 + |c|^2\lambda^2} j \quad \text{por (3.1)} \\ &= \frac{(az + ati + b)(\bar{c}\bar{z} - \bar{c}ti + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2}{|cz + cti + d|^2 + |c|^2\lambda^2} + \frac{\lambda}{|cz + cti + d|^2 + |c|^2\lambda^2} j. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Luego, si $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son definidas como sigue,

$$\begin{aligned} F_1(t) &:= (az + ati + b)(\bar{c}\bar{z} - \bar{c}ti + \bar{d}) + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(t) &:= |cz + cti + d|^2 + |c|^2\lambda^2 = (cz + cti + d)(\bar{c}\bar{z} - \bar{c}ti + \bar{d}) + |c|^2\lambda^2, \end{aligned}$$

entonces

$$g(\alpha(t)) = \frac{F_1(t)}{F_2(t)} + \frac{\lambda}{F_2(t)} j. \tag{4.23}$$

Desarrollando $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= a\bar{c}|z|^2 - a\bar{c}zti + a\bar{d}z + a\bar{c}\bar{z}ti + a\bar{c}t^2 + a\bar{d}ti + b\bar{c}\bar{z} - b\bar{c}ti + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(t) &= |c|^2|z|^2 - |c|^2zti + c\bar{d}z + |c|^2\bar{z}ti + |c|^2t^2 + c\bar{d}ti + \bar{c}d\bar{z} - \bar{c}dti + |d|^2 + |c|^2\lambda^2. \end{aligned}$$

Evalutando en $t = 0$,

$$\begin{aligned} F_1(0) &= a\bar{c}|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(0) &= |c|^2|z|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 \\ &= |cz + d|^2 + |c|^2\lambda^2 = \Omega. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Derivando $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -a\bar{c}zi + a\bar{c}\bar{z}i + 2a\bar{c}t + a\bar{d}i - b\bar{c}i, \\ F_2'(t) &= -|c|^2zi + |c|^2\bar{z}i + 2|c|^2t + c\bar{d}i - \bar{c}di. \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas en $t = 0$,

$$\begin{aligned} F_1'(0) &= -a\bar{c}zi + a\bar{c}\bar{z}i + a\bar{d}i - b\bar{c}i, \\ F_2'(0) &= -|c|^2zi + |c|^2\bar{z}i + \bar{c}di - \bar{c}di. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Usando Mathematica obtenemos

$$\begin{aligned} F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0) &= -bc\bar{c}^2\lambda^2i + ad\bar{c}^2\lambda^2i - bc\bar{d}^2i + ad\bar{d}^2i - 2bc\bar{c}d\bar{z}i + 2ad\bar{c}d\bar{z}i - bc\bar{c}^2\bar{z}^2i + ad\bar{c}^2\bar{z}^2i \\ &= (ad - bc)(\bar{c}^2\bar{z}^2 + \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2)i \\ &= (\bar{c}^2\bar{z}^2 + \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2)i. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Derivando la ecuación (4.23) y evaluando en $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0)}{F_2(0)^2} - \frac{\lambda F_2'(0)}{F_2(0)^2} j. \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.24), (4.25) y (4.26) en (4.27) conseguimos

$$\begin{aligned} d\sigma_{(z,\lambda)}\vec{e}_2 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{i}{\Omega^2} [\bar{c}^2\bar{z}^2 + \lambda^2\bar{c}^2 + 2\bar{c}d\bar{z} + \bar{d}^2] - \frac{\lambda i}{\Omega^2} [-|c|^2z + |c|^2\bar{z} + \bar{c}d - \bar{c}d] j \\ &= \frac{i}{\Omega^2} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2] - \frac{\lambda i}{\Omega^2} [|c|^2(\bar{z} - z) + (\bar{c}d - \bar{c}d)] j. \\ &= \frac{i}{\Omega^2} \operatorname{Re} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_1 + \frac{i}{\Omega^2} \operatorname{Im} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_2 \\ &\quad - \frac{\lambda i}{\Omega^2} [|c|^2(\bar{z} - z) + (\bar{c}d - \bar{c}d)] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Por lo que de las identidades en (4.28) y (4.20) concluimos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}e_2} &= \frac{i}{\Omega} \operatorname{Re} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_1 + \frac{i}{\Omega} \operatorname{Im} [\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2z\bar{c}d + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2] \vec{e}_2 \\ &\quad - \frac{\lambda i}{\Omega} [|c|^2(\bar{z} - z) + (\bar{c}d - \bar{c}d)] \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Lo cual prueba (4.8).

Veamos la tercera ecuación en (4.9). Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por

$$\alpha(t) = z + \lambda j + t j = z + (\lambda + t)j,$$

entonces $\alpha(0) = z + \lambda j$, $\alpha'(0) = j$. Tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + (\lambda + t)j) \\ &= \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + a\bar{c}(\lambda + t)^2}{|cz + d|^2 + |c|^2(\lambda + t)^2} + \frac{\lambda + t}{|cz + d|^2 + |c|^2(\lambda + t)^2} j. \end{aligned} \quad \text{por (3.1)} \quad (4.29)$$

Luego, si $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son definidas como sigue

$$\begin{aligned} F_1(t) &:= (az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + a\bar{c}(\lambda + t)^2, \\ F_2(t) &:= |cz + d|^2 + |c|^2(\lambda + t)^2, = (cz + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + |c|^2(\lambda + t)^2, \end{aligned}$$

entonces

$$g(\alpha(t)) = \frac{F_1(t)}{F_2(t)} + \frac{\lambda + t}{F_2(t)} j. \quad (4.30)$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} F_1(t) &= a\bar{c}|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2 + 2a\bar{c}\lambda t + a\bar{c}t^2, \\ F_2(t) &= |c|^2|z|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 + 2|c|^2\lambda t + |c|^2t^2. \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$,

$$\begin{aligned} F_1(0) &= a\bar{c}|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2, \\ F_2(0) &= |c|^2|z|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 \\ &= |cz + d|^2 + |c|^2\lambda^2 = \Omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Derivando $F_1(t)$ y $F_2(t)$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= 2a\bar{c}\lambda + 2a\bar{c}t, \\ F_2'(t) &= 2|c|^2\lambda + 2|c|^2t. \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas en $t = 0$,

$$\begin{aligned} F_1'(0) &= 2a\bar{c}\lambda, \\ F_2'(0) &= 2|c|^2\lambda. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Se sigue la siguiente cadena de identidades,

$$\begin{aligned} F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0) &= 2a\bar{c}\lambda \left(|c|^2|z|^2 + c\bar{d}z + \bar{c}d\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 \right) \\ &\quad - \left(a\bar{c}|z|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d} + a\bar{c}\lambda^2 \right) 2|c|^2\lambda \\ &= 2\lambda \left(\cancel{a\bar{c}|c|^2|z|^2} + \cancel{a|c|^2\bar{d}z} + a\bar{c}^2d\bar{z} + a\bar{c}|d|^2 + \cancel{a\bar{c}|c|^2\lambda^2} \right. \\ &\quad \left. - \cancel{a\bar{c}|c|^2|z|^2} - \cancel{a|c|^2\bar{d}z} - b\bar{c}|c|^2\bar{z} - b|c|^2\bar{d} - \cancel{a\bar{c}|c|^2\lambda^2} \right) \\ &= 2\lambda \left(a\bar{c}^2d\bar{z} + a\bar{c}|d|^2 - b\bar{c}|c|^2\bar{z} - b|c|^2\bar{d} \right) \\ &= 2\lambda \left(a\bar{c}^2d\bar{z} + a\bar{c}d\bar{d} - b\bar{c}^2c\bar{z} - b\bar{c}c\bar{d} \right) \\ &= 2\lambda \left(\bar{c}^2\bar{z}(ad - bc) + \bar{c}d(ad - bc) \right) \\ &= 2\lambda (\bar{c}^2\bar{z} + \bar{c}d). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Derivando la ecuación (4.30),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(\alpha(t)) &= \frac{F_1'(t)F_2(t) - F_1(t)F_2'(t)}{F_2(t)^2} + ((\lambda + t)F_2(t)^{-1})'(t) j \\ &= \frac{F_1'(t)F_2(t) - F_1(t)F_2'(t)}{F_2(t)^2} + \left(\frac{F_2(t) - (\lambda + t)F_2'(t)}{F_2(t)^2} \right) j. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Evaluando en $t = 0$ la ecuación (4.34),

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{F_1'(0)F_2(0) - F_1(0)F_2'(0)}{F_2(0)^2} + \left(\frac{F_2(0) - \lambda F_2'(0)}{F_2(0)^2} \right) j. \quad (4.35)$$

Sustituyendo (4.31), (4.32) y (4.33) en (4.35) obtenemos

$$\begin{aligned} d\sigma_{(z,\lambda)}\vec{e}_3 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g(\alpha(t)) = \frac{1}{\Omega^2} \left[2\lambda(\bar{c}^2\bar{z} + \bar{c}\bar{d}) \right] + \frac{1}{\Omega^2} \left[|c|^2|z|^2 + \bar{c}\bar{d}z + \bar{c}\bar{d}\bar{z} + |d|^2 + |c|^2\lambda^2 - \lambda(2|c|^2\lambda) \right] j \\ &= \frac{2\lambda}{\Omega^2} [\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}] + \frac{1}{\Omega^2} \left[|c|^2(|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z}\bar{c}\bar{d} + zc\bar{d}) \right] j. \\ &= \frac{2\lambda}{\Omega^2} \operatorname{Re}[\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}] \vec{e}_1 + \frac{2\lambda}{\Omega^2} \operatorname{Im}[\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}] \vec{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Omega^2} \left[|c|^2(|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z}\bar{c}\bar{d} + zc\bar{d}) \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por lo que de las identidades en (4.36) y (4.20) concluimos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d\sigma_{(z,\lambda)}e_3} &= \frac{2\lambda}{\Omega} \operatorname{Re}[\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}] \vec{e}_1 + \frac{2\lambda}{\Omega} \operatorname{Im}[\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}] \vec{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Omega} \left[|c|^2(|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z}\bar{c}\bar{d} + zc\bar{d}) \right] \vec{e}_3, \end{aligned}$$

lo cual demuestra (4.9). □

Recordamos ahora brevemente algunos hechos vistos en el capítulo anterior. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Por el lema (3.3.8) la matriz $\Phi_A \in SO(3)$ está dada por:

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^2 - \beta^2) & -\operatorname{Im}(\alpha^2 + \beta^2) & 2 \operatorname{Re}(\alpha\beta) \\ \operatorname{Im}(\alpha^2 - \beta^2) & \operatorname{Re}(\alpha^2 + \beta^2) & 2 \operatorname{Im}(\alpha\beta) \\ -2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta) & 2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

De la definición (3.3.9) y el lema (3.3.10) sabemos que $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ dada por $\Phi(A) = \Phi_A$ es un homomorfismo, es decir, si $A, B \in SU(2)$, entonces

$$\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B. \quad (4.38)$$

Definición. Sea $T : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SU(2)$ el mapeo que da la parte $SU(2)$ de la descomposición de Iwasawa. Es decir, si $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, K} \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces

$$T(g) = K.$$

Lema 4.1.4. Sean $\sigma = \sigma_{z'+\sqrt{\lambda'}j, K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I}$ donde $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\Phi_{T(\sigma g)} = B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B,$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda'} & \frac{z'}{\sqrt{\lambda'}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda'}\alpha - \frac{z'}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} & \sqrt{\lambda'}\beta + \frac{z'}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\alpha} \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Además,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{z}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

De (4.39) y (4.40) se sigue que:

$$\begin{aligned} \sigma g &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda'}\alpha - \frac{z'}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} & \sqrt{\lambda'}\beta + \frac{z'}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\alpha} \\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{z}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda\lambda'}\alpha - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}z'\bar{\beta} & \frac{\sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda}}z\alpha - \frac{zz'}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\beta} + \frac{\sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda}}\beta + \frac{z'}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\alpha} \\ -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} & -\frac{z}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Denotaremos a la matriz σg como:

$$\sigma g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Ahora queremos calcular la matriz $T(\sigma g)$, para esto necesitamos algunos cálculos previos,

$$\begin{aligned} |c'|^2 + |d'|^2 &= \left| -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta} \right|^2 + \left| -\frac{z}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\alpha} \right|^2 \\ &= \frac{\lambda}{\lambda'} |\beta|^2 + \left(-\frac{z}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\alpha} \right) \left(-\frac{\bar{z}}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\beta + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\alpha \right) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda'} |\beta|^2 + \frac{|z|^2}{\lambda\lambda'} |\beta|^2 - \frac{z}{\lambda\lambda'} \alpha\bar{\beta} - \frac{\bar{z}}{\lambda\lambda'} \bar{\alpha}\beta + \frac{1}{\lambda\lambda'} |\alpha|^2 \\ &= \frac{\lambda^2 |\beta|^2 + |z|^2 |\beta|^2 + |\alpha|^2 - (z\alpha\bar{\beta} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta)}{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sea $r := \lambda^2 |\beta|^2 + |z|^2 |\beta|^2 + |\alpha|^2 - (z\alpha\bar{\beta} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta)$, por (4.42) tenemos

$$\sqrt{|c'|^2 + |d'|^2} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda\lambda'}}. \quad (4.43)$$

Además, de (4.41) y (4.43) concluimos

$$\begin{aligned} \frac{c'}{\sqrt{|c'|^2 + |d'|^2}} &= \frac{-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}\bar{\beta}}{\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda\lambda'}}} = -\frac{\lambda\bar{\beta}}{\sqrt{r}}. \\ \frac{d'}{\sqrt{|c'|^2 + |d'|^2}} &= \frac{-\frac{z}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}\bar{\alpha}}{\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda\lambda'}}} = \frac{-z\bar{\beta} + \bar{\alpha}}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Por lo que usando la descomposición de Iwasawa vemos

$$T(\sigma g) = \begin{pmatrix} \frac{-z\bar{\beta} + \alpha}{\sqrt{r}} & \frac{\lambda\beta}{\sqrt{r}} \\ \frac{-\lambda\bar{\beta}}{\sqrt{r}} & \frac{-z\bar{\beta} + \bar{\alpha}}{\sqrt{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ -\bar{\eta} & \bar{\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

La matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$ en (4.37) está dada como sigue:

$$\Phi_{T(\sigma g)} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\mu^2 - \eta^2) & -\operatorname{Im}(\mu^2 + \eta^2) & 2 \operatorname{Re}(\mu\eta) \\ \operatorname{Im}(\mu^2 - \eta^2) & \operatorname{Re}(\mu^2 + \eta^2) & 2 \operatorname{Im}(\mu\eta) \\ -2 \operatorname{Re}(\bar{\mu}\eta) & 2 \operatorname{Im}(\mu\bar{\eta}) & |\mu|^2 - |\eta|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Por otra parte, usando la descomposición de Iwasawa para σ obtenemos

$$T(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con

$$\alpha = \frac{\bar{d}}{\sqrt{t}} \quad \beta = -\frac{\bar{c}}{\sqrt{t}}, \quad (4.46)$$

donde $t := |c|^2 + |d|^2$.

Ahora observaremos como se modifica r usando las identidades en (4.46):

$$\begin{aligned} r &= \lambda^2 |\beta|^2 + |z|^2 |\beta|^2 + |\alpha|^2 - (z\alpha\bar{\beta} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta) \\ &= \lambda^2 \left| \frac{-\bar{c}}{\sqrt{t}} \right|^2 + |z|^2 \left| \frac{-\bar{c}}{\sqrt{t}} \right|^2 + \left| \frac{\bar{d}}{\sqrt{t}} \right|^2 - \left(z \frac{\bar{d}}{\sqrt{t}} \frac{(-c)}{\sqrt{t}} + \bar{z} \frac{d}{\sqrt{t}} \frac{(-\bar{c})}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \lambda^2 \frac{|c|^2}{t} + |z|^2 \frac{|c|^2}{t} + \frac{|d|^2}{t} + \frac{1}{t} (zc\bar{d} + \bar{z}cd) \\ &= \frac{1}{t} (cz + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + \frac{1}{t} \lambda^2 |c|^2. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$rt = |cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2 := \Omega. \quad (4.47)$$

Veamos ahora como cambian μ y η de la matriz en (4.44) usando las identidades en (4.46),

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{-\bar{z}\beta + \alpha}{\sqrt{r}} = \frac{-\bar{z}\frac{(-\bar{c})}{\sqrt{t}} + \frac{\bar{d}}{\sqrt{t}}}{\sqrt{r}} \\
&= \frac{\frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{t}}}{\sqrt{r}} = \frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{rt}} \\
&= \frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}}. \quad \text{por (4.47)}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\lambda\beta}{\sqrt{r}} = \frac{\lambda\frac{(-\bar{c})}{\sqrt{t}}}{\sqrt{r}} \\
&= -\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{rt}} \\
&= -\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}}. \quad \text{por (4.47)}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Resumiendo, de (4.48) y (4.49) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\mu = \frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \quad \eta = -\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}}. \tag{4.50}$$

Ahora calcularemos todas las entradas de la matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$ en (4.45) usando las identidades en (4.50). Primero vemos que:

$$\begin{aligned}
|\mu|^2 - |\eta|^2 &= \left| \frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \right|^2 - \left| -\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[(\bar{z}\bar{c} + \bar{d})(z\bar{c} + d) - \lambda^2|c|^2 \right] \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[|z|^2|c|^2 + \bar{z}\bar{c}d + z\bar{c}\bar{d} + |d|^2 - \lambda^2|c|^2 \right] \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[|c|^2(|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z}\bar{c}d + z\bar{c}\bar{d}) \right].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Tenemos el siguiente producto,

$$\mu\eta = \left(\frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \right) \left(-\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}} \right) = -\frac{\lambda}{\Omega} (\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\text{Re}(\mu\eta) &= -\frac{\lambda}{\Omega} \left[(\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}) + (z\bar{c}^2 + \bar{c}d) \right] \\
&= -\frac{\lambda}{\Omega} \left[(\bar{z}\bar{c}^2 + z\bar{c}^2) + (\bar{c}\bar{d} + \bar{c}d) \right].
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
2\text{Im}(\mu\eta) &= -\frac{\lambda}{\Omega i} \left[(\bar{z}\bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d}) - (zc^2 + cd) \right] \\
&= \frac{\lambda i}{\Omega} \left[(\bar{z}\bar{c}^2 - zc^2) + (\bar{c}\bar{d} - cd) \right].
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Otro producto está dado por

$$\mu\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \right) \left(-\frac{\lambda c}{\sqrt{\Omega}} \right) = -\frac{\lambda}{\Omega} (\bar{z}|c|^2 + \bar{c}\bar{d}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-2\text{Re}(\mu\bar{\eta}) &= -2\text{Re}(\bar{\mu}\eta) = \frac{\lambda}{\Omega} \left[(\bar{z}|c|^2 + \bar{c}\bar{d}) + (z|c|^2 + \bar{c}\bar{d}) \right] \\
&= \frac{\lambda}{\Omega} \left[|c|^2(\bar{z} + z) + (\bar{c}\bar{d} + \bar{c}\bar{d}) \right].
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
2\text{Im}(\mu\bar{\eta}) &= -2\text{Im}(\bar{\mu}\eta) = -\frac{\lambda}{\Omega i} \left[(\bar{z}|c|^2 + \bar{c}\bar{d}) - (z|c|^2 + \bar{c}\bar{d}) \right] \\
&= \frac{\lambda i}{\Omega} \left[|c|^2(\bar{z} - z) + (\bar{c}\bar{d} - \bar{c}\bar{d}) \right].
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Otra suma que necesitamos está dada por

$$\mu^2 + \eta^2 = \left(\frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \right)^2 + \left(-\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}} \right)^2 = \frac{\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2\bar{z}\bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2}{\Omega}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{Re}(\mu^2 + \eta^2) &= \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2\bar{z}\bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2) + (z^2c^2 + 2zcd + d^2 + \lambda^2c^2) \right] \\
&= \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 + z^2c^2) + 2(\bar{z}\bar{c}\bar{d} + zcd) + (\bar{d}^2 + d^2) + \lambda^2(\bar{c}^2 + c^2) \right].
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
-\text{Im}(\mu^2 + \eta^2) &= -\frac{1}{2\Omega i} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2\bar{z}\bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 + \lambda^2\bar{c}^2) - (z^2c^2 + 2zcd + d^2 + \lambda^2c^2) \right] \\
&= \frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 - z^2c^2) + 2(\bar{z}\bar{c}\bar{d} - zcd) + (\bar{d}^2 - d^2) + \lambda^2(\bar{c}^2 - c^2) \right].
\end{aligned} \tag{4.57}$$

La última resta que necesitamos es la siguiente,

$$\mu^2 - \eta^2 = \left(\frac{\bar{z}\bar{c} + \bar{d}}{\sqrt{\Omega}} \right)^2 - \left(-\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{\Omega}} \right)^2 = \frac{\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2\bar{z}\bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 - \lambda^2\bar{c}^2}{\Omega}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{Re}(\mu^2 - \eta^2) &= \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 + 2\bar{z}\bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 - \lambda^2\bar{c}^2) + (z^2c^2 + 2zcd + d^2 - \lambda^2c^2) \right] \\
&= \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2\bar{c}^2 + z^2c^2) + 2(\bar{z}\bar{c}\bar{d} + zcd) + (\bar{d}^2 + d^2) - \lambda^2(\bar{c}^2 + c^2) \right].
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Im}(\mu^2 - \eta^2) &= -\frac{1}{2\Omega i} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 + 2\bar{z}c\bar{d} + \bar{d}^2 - \Omega^2 \bar{c}^2) - (z^2 c^2 + 2zcd + d^2 - \lambda^2 c^2) \right] \\
&= \frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 - z^2 c^2) + 2(\bar{z}c\bar{d} - zcd) + (\bar{d}^2 - d^2) - \lambda^2(\bar{c}^2 - c^2) \right].
\end{aligned} \tag{4.59}$$

La primer columna de la matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$ según la fórmula en (4.45) está dada por las identidades en (4.58), (4.59) y (4.54),

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_1)^T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 + z^2 c^2) + 2(\bar{z}c\bar{d} + zcd) + (\bar{d}^2 + d^2) - \lambda^2(\bar{c}^2 + c^2) \right] \\ -\frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 - z^2 c^2) + 2(\bar{z}c\bar{d} - zcd) + (\bar{d}^2 - d^2) - \lambda^2(\bar{c}^2 - c^2) \right] \\ \frac{\lambda}{\Omega} \left[|c|^2(\bar{z} + z) + (c\bar{d} + \bar{c}d) \right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_1 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_2 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ -\overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_3 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} \quad \text{por el lema (4.1.3)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_1 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_2 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_1, \vec{e}_3 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_1)^T.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

La segunda columna de la matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$ según la fórmula en (4.45) está dada por las identidades en (4.57), (4.56) y (4.55),

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_2)^T &= \begin{pmatrix} \frac{i}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 - z^2 c^2) + 2(\bar{z}c\bar{d} - zcd) + (\bar{d}^2 - d^2) + \lambda^2(\bar{c}^2 - c^2) \right] \\ \frac{1}{2\Omega} \left[(\bar{z}^2 \bar{c}^2 + z^2 c^2) + 2(\bar{z}c\bar{d} + zcd) + (\bar{d}^2 + d^2) + \lambda^2(\bar{c}^2 + c^2) \right] \\ \frac{\lambda i}{\Omega} \left[|c|^2(\bar{z} - z) + (c\bar{d} - \bar{c}d) \right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_1 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_2 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ -\overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_3 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} \quad \text{por el lema (4.1.3)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_1 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_2 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_2, \vec{e}_3 \rangle}^{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_2)^T.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

La tercer columna de la matriz $\Phi_{T(\sigma g)}$ según la fórmula en (4.45) está dada por las identidades en

(4.52), (4.53) y (4.51),

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_3)^T &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\Omega} [(\bar{z}c^2 + zc^2) + (\bar{c}d + cd)] \\ \frac{\lambda i}{\Omega} [(\bar{z}c^2 - zc^2) + (\bar{c}d - cd)] \\ \frac{1}{\Omega} [|c|^2 (|z|^2 - \lambda^2) + |d|^2 + (\bar{z}cd + zc\bar{d})] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \\ -\overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_2 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \end{pmatrix} \quad \text{por el lema (4.1.3)} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_2 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \\ \overrightarrow{\langle d\sigma_{(z,\lambda)} e_3, \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}^3}} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_3)^T. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_1)^T &= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_1)^T \quad \text{por (4.60)} \\
&= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B (\vec{e}_1)^T. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_2)^T &= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_2)^T \quad \text{por (4.61)} \\
&= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B (\vec{e}_2)^T. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(\sigma g)}(\vec{e}_3)^T &= (-B) \circ R(d\sigma, z, \lambda) (\vec{e}_3)^T \quad \text{por (4.62)} \\
&= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) (-\vec{e}_3)^T \\
&= B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B (\vec{e}_3)^T. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Por (4.63), (4.64) y (4.65) hemos demostrado

$$\Phi_{T(\sigma g)} = B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B.$$

□

Corolario 4.1.5. *Del lema anterior, $\det(R(d\sigma, z, \lambda)) = 1$, pero por el lema (4.1.2) $R(d\sigma, z, \lambda)$ preserva la norma Euclidiana, concluimos $R(d\sigma, z, \lambda) \in SO(3)$.*

4.2 — Propiedades de las matrices de Wigner $D_{km}^l(R)$

Lema 4.2.1. *Sean $R, T \in SO(3)$, $l \in \mathbb{N}$, $b, m \in \mathbb{Z}$ tales que $b, m \in [-l, l]$. Entonces*

$$D_{bm}^l(R \circ T) = \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot D_{ba}^l(R).$$

Demostración. Por la identidad en (3.15) se cumple

$$Y_m^l((R \circ T)^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{k=-l}^l D_{km}^l(R \circ T) \cdot Y_k^l(\vartheta, \varphi), \quad (4.66)$$

por (3.15),

$$Y_m^l(T^{-1} \circ R^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot Y_a^l(R^{-1}(\vartheta, \varphi)), \quad (4.67)$$

pero también por (3.15),

$$Y_a^l(R^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{b=-l}^l D_{ba}^l(R) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi). \quad (4.68)$$

Sustituyendo (4.68) en (4.67) tenemos

$$\begin{aligned} Y_m^l(T^{-1} \circ R^{-1}(\vartheta, \varphi)) &= \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \sum_{b=-l}^l D_{ba}^l(R) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{a=-l}^l \sum_{b=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot D_{ba}^l(R) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Pero por la ecuación en (4.66) y renombrando el entero k por b ,

$$Y_m^l(T^{-1} \circ R^{-1}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{b=-l}^l D_{bm}^l(R \circ T) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi), \quad (4.70)$$

e igualando las ecuaciones en (4.69) y (4.70) obtenemos

$$\sum_{b=-l}^l D_{bm}^l(R \circ T) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi) = \sum_{b=-l}^l \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot D_{ba}^l(R) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi),$$

y entonces, $D_{bm}^l(R \circ T) = \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(T) \cdot D_{ba}^l(R)$. □

En particular, si $R = I$, de la identidad en (4.68) se sigue

$$Y_a^l(I^{-1}(\vartheta, \varphi)) = Y_a^l(\vartheta, \varphi) = \sum_{b=-l}^l D_{ba}^l(I) \cdot Y_b^l(\vartheta, \varphi).$$

Corolario 4.2.2. Sean $l \in \mathbb{N}$, $b, m \in \mathbb{Z}$ tales que $b, m \in [-l, l]$, entonces $D_{bm}^l(I) = \delta_{bm}$.

Por otra parte, sean $R, T, S \in SO(3)$, $l \in \mathbb{N}$, $b, m \in \mathbb{Z}$ tales que $b, m \in [-l, l]$. Entonces

$$D_{bm}^l(R \circ (S \circ T)) = \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(S \circ T) \cdot D_{ba}^l(R), \quad (4.71)$$

pero

$$D_{am}^l(S \circ T) = \sum_{c=-l}^l D_{cm}^l(T) \cdot D_{ac}^l(S). \quad (4.72)$$

Por lo que sustituyendo (4.72) en (4.71) tenemos el siguiente resultado básico.

Corolario 4.2.3. Sean $R, S, T \in SO(3)$, $l \in \mathbb{N}$, $b, m \in \mathbb{Z}$ tales que $b, m \in [-l, l]$. Entonces

$$D_{bm}^l(R \circ S \circ T) = \sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l D_{cm}^l(T) \cdot D_{ac}^l(S) \cdot D_{ba}^l(R).$$

Otro resultado básico que nos será útil en la siguiente sección es el siguiente. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{-I}(\vec{v}) &= P \circ Ad_{-I} \circ P^{-1}(\vec{v}) && \text{por la definición (3.3.6)} \\ &= P((-I)P^{-1}(\vec{v})(-I)^{-1}) = P((-I)P^{-1}(\vec{v})(-I)) \\ &= P(P^{-1}(\vec{v})) = \vec{v}. \end{aligned}$$

Corolario 4.2.4.

$$\Phi_{\pm I} = I.$$

4.3 — Definición y propiedades de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$.

Si $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces el subgrupo maximal unipotente $\Gamma'_{D,\infty}$ está dado por

$$\Gamma'_{D,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathcal{O}_D \right\}.$$

Definición 4.3.1. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Se denota por $\Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D$ al conjunto de clases laterales derechas de $\Gamma'_{D,\infty}$. Las series de Eisenstein

$$\widehat{E}_{km}^l(\cdot, s) : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

asociadas a Γ_D en la cúspide ∞ están dadas por medio de la siguiente fórmula:

$$\widehat{E}_{km}^l(g, s) := \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} \text{Im } \sigma g(j)^{1+s},$$

la notación $\text{Im } \sigma g(j)^{1+s}$ corresponde a $(\text{Im } \sigma g(j))^{1+s}$. Nos referiremos al índice $[\Gamma_{D,\infty} : \Gamma'_{D,\infty}]$ simplemente como $[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]$.

Definición 4.3.2. Sea $f_{km}^l(\cdot, s) : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como sigue:

$$f_{km}^l(g, s) = \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(g)^{-1}})} \text{Im } g(j)^{1+s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$.

Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$. Entonces:

$$\widehat{E}_{km}^l(g, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D} f_{km}^l(\sigma g, s). \quad (4.73)$$

Lema 4.3.3. Las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ están bien definidas.

Demostración. Sea $\gamma_\infty g \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D$, con $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j,K} \in \Gamma_D$, y donde $\gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma'_{D,\infty}$ para algún $z \in \mathcal{O}_D$. Es claro que

$$\gamma_\infty g = g_{z+q+\sqrt{\lambda}j,K}. \quad (4.74)$$

De (4.74) concluimos

$$T(\gamma_\infty g) = K. \quad (4.75)$$

Se cumple

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \gamma_\infty g(j) &= \operatorname{Im} g_{z+q+\sqrt{\lambda}j,K}(j) && \text{por (4.74)} \\ &= \lambda && \text{por (3.9)} \\ &= \operatorname{Im} g(j). && \text{por (3.9)} \end{aligned} \quad (4.76)$$

También tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} f_{km}^l(\gamma_\infty g) &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\gamma_\infty g)^{-1}})} \operatorname{Im} \gamma_\infty g(j)^{1+s} && \text{por la definición (4.3.2)} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{K^{-1}})} \operatorname{Im} \gamma_\infty g(j)^{1+s} && \text{por (4.75)} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(g)^{-1}})} \operatorname{Im} g(j)^{1+s} && \text{por (4.76)} \\ &= f_{km}^l(g). \end{aligned}$$

Luego, la función f_{km}^l es constante en clases laterales derechas $\Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D$, por (4.73) concluimos que las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ están bien definidas. \square

Lema 4.3.4. Las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ convergen para $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Demostración. La prueba está tomada (y adaptada) de [12], página 30. Sea

$$\|D_{km}^l\|_\infty = \sup_{A \in SU(2)} |D_{km}^l(A)| < \infty. \quad (4.77)$$

Si $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j,K} \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \widehat{E}_{km}^l(g, s) \right| &= \left| \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} f_{km}^l(\sigma g, s) \right| && \text{por (4.73)} \\ &\leq \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} |f_{km}^l(\sigma g, s)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \left| \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} \operatorname{Im} \sigma g(j)^{1+s} \right| \\
&\leq \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} |D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})| \cdot |\operatorname{Im} \sigma g(j)^{1+s}| \\
&\leq \frac{\|D_{km}^l\|_\infty}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} |\operatorname{Im} \sigma g(j)^{1+s}| \quad \text{por (4.77)} \\
&= \frac{\|D_{km}^l\|_\infty}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+\operatorname{Re}(s)} \quad \text{por (3.9)} \\
&= \frac{\|D_{km}^l\|_\infty}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot E(z, \lambda, \operatorname{Re}(s)). \tag{4.78}
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{Re}(s) > 1$, de la teoría de las series de Eisenstein (usuales) sabemos que $E(z, \lambda, \operatorname{Re}(s))$ converge, por (4.78), las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ convergen. \square

Lema 4.3.5. *Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, entonces:*

$$\widehat{E}_{km}^l(\gamma g, s) = \widehat{E}_{km}^l(g, s), \forall \gamma \in \Gamma_D.$$

Demostración. Tenemos por la definición (4.3.1)

$$\widehat{E}_{km}^l(\gamma g, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma \gamma g)^{-1}})} \operatorname{Im} \sigma \gamma g(j)^{1+s}.$$

Haciendo el cambio de variable $\eta = \sigma \gamma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D$, se reescribe la expresión anterior como sigue:

$$\widehat{E}_{km}^l(\gamma g, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\eta \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\eta g)^{-1}})} \operatorname{Im} \eta g(j)^{1+s},$$

pero la suma anterior corresponde nuevamente a $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$. \square

4.4 — Definición y propiedades de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

Definición 4.4.1. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$, las series

$$E_{km}^l(\cdot, s) : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{C},$$

asociadas a Γ_D en la cúspide ∞ están dadas por medio de la siguiente fórmula:

$$E_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I})^{-1}})} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s}.$$

Equivalentemente, por (3.9) sabemos $g_{z+\sqrt{\lambda}j,I}(j) = (z, \lambda)$, entonces:

$$\widehat{E}_{km}^l(g_{z+\sqrt{\lambda}j,I}, s) = E_{km}^l(z, \lambda, s). \tag{4.79}$$

La fórmula en (4.79) también implica que las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ están bien definidas y que convergen para $\text{Re}(s) > 1$, ya que hemos probado esto para las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$.

Aunque las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ no definen en general (salvo el caso $l = k = m = 0$) series de Eisenstein en \mathbb{H}^3 , si tienen una expansión de Fourier, de hecho, como veremos más adelante, la expansión de Fourier de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ está determinada por la expansión de Fourier de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

Lema 4.4.2. *Si $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Entonces:*

$$E_{km}^l(z + q, \lambda, s) = E_{km}^l(q, \lambda, s), \quad \forall z \in \Lambda_D, \forall q \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Sean $\gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma'_{D, \infty}$ con $z \in \Lambda_D$, y $g = g_{q+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned} E_{km}^l(q, \lambda, s) &= \widehat{E}_{km}^l(g_{q+\sqrt{\lambda}j, I}, s) && \text{por (4.79)} \\ &= \widehat{E}_{km}^l(\gamma_\infty \cdot g_{q+\sqrt{\lambda}j, I}, s) && \text{por el lema (4.3.5)} \\ &= \widehat{E}_{km}^l(g_{z+q+\sqrt{\lambda}j, I}, s) \\ &= E_{km}^l(z + q, \lambda, s). && \text{por (4.79)} \end{aligned}$$

□

Por el lema (4.4.2) las funciones $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ con s y λ fijas son periódicas con respecto a la retícula Λ_D , por lo que tienen una expansión de Fourier en la variable z , esto es,

$$E_{km}^l(z, \lambda, s) = \sum_{\gamma \in \Lambda_D^*} b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma e^{2\pi i \langle z, \gamma \rangle},$$

donde Λ_D^* es la retícula dual a Λ_D , esto es,

$$\Lambda_D^* = \{\gamma \in \mathbb{C}; \langle \gamma, q \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall q \in \Lambda\}.$$

Los coeficientes de Fourier están dados como sigue:

$$b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} E_{km}^l(z, \lambda, s) e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy, \quad (4.80)$$

con $\gamma \in \Lambda_D^*$, $|\Lambda_D|$ denota el área del toro plano \mathbb{R}^2/Λ_D .

4.5 — Relación entre las series $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ y las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$

Si $\text{Re}(s) > 1$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I}$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, por el lema (4.1.4) se cumple

$$\Phi_{T(\sigma g)} = B \circ R(d\sigma, z, \lambda) \circ B, \quad (4.81)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $B = B^{-1}$ de (4.81) tenemos

$$R(d\sigma, z, \lambda) = B \circ \Phi_{T(\sigma g)} \circ B,$$

tomando inversos,

$$R(d\sigma, z, \lambda)^{-1} = B \circ (\Phi_{T(\sigma g)})^{-1} \circ B,$$

pero por (4.38) se cumple que $(\Phi_{T(\sigma g)})^{-1} = \Phi_{T(\sigma g)^{-1}}$, por lo que

$$R(d\sigma, z, \lambda)^{-1} = (-B) \circ \Phi_{T(\sigma g)^{-1}} \circ (-B), \quad (4.82)$$

donde $-B \in SO(3)$.

Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, tales que $k, m \in [-l, l]$. Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1}) &= D_{km}^l((-B) \circ \Phi_{T(\sigma g)^{-1}} \circ (-B)) && \text{por (4.82)} \\ &= \sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l D_{cm}^l(-B) \cdot D_{ac}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) \cdot D_{ka}^l(-B). && \text{por el corolario (4.2.3)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

En la equidistribución del flujo horocíclico (capítulo 8) aparecerán las siguientes series:

$$H_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s}. \quad (4.84)$$

Sustituyendo (4.83) en (4.84) tenemos

$$\begin{aligned} H_{km}^l(z, \lambda, s) &= \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \overline{\sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l D_{cm}^l(-B) \cdot D_{ac}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) \cdot D_{ka}^l(-B)} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s} \\ &= \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l \overline{D_{cm}^l(-B) \cdot D_{ka}^l(-B) \cdot D_{ac}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s} \\ &= \sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l \overline{D_{cm}^l(-B) \cdot D_{ka}^l(-B)} \left[\frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{ac}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s} \right] \\ &= \sum_{a=-l}^l \sum_{c=-l}^l \overline{D_{cm}^l(-B) \cdot D_{ka}^l(-B)} E_{ac}^l(z, \lambda, s). \end{aligned}$$

Pero $-B = ROT(\pi, 0, 0)$, por lo que $D_{ab}^l(-B) = e^{ia\pi} d_{ab}^l(0) = e^{ia\pi} \delta_{ab}$.

Corolario 4.5.1. Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Entonces:

$$H_{km}^l(z, \lambda, s) = e^{-i(k+m)\pi} \cdot E_{km}^l(z, \lambda, s),$$

donde

$$H_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s}.$$

4.6 — Conjetura

Conjetura 4.6.1. *Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Entonces:*

- *Las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ admiten una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} en la variable s .*

Más aún,

- *si $l > 0$ las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ admiten una continuación analítica para $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.*

Lo anterior significa que si $g \in SL(2, \mathbb{C})$ es fijo entonces las funciones

$$\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dadas por

$$s \longrightarrow \widehat{E}_{km}^l(g, s),$$

admiten una continuación meromorfa o analítica a todo \mathbb{C} . En particular, lo anterior es válido para $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I}$ con $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, y por (4.79) la función

$$s \longrightarrow \widehat{E}_{km}^l(g_{z+\sqrt{\lambda}j, I}, s) = E_{km}^l(z, \lambda, s),$$

también admite una continuación meromorfa o analítica a todo \mathbb{C} . Resumiendo, la propiedad de la continuación meromorfa o analítica a todo \mathbb{C} de las series $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ implica la misma propiedad para las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

Expansión de Fourier de series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$

En la sección 1 daremos algunas propiedades de las funciones argumento y la función módulo complejo $M(z)$. Además, recordaremos fórmulas para calcular los ángulos de Euler de una matriz $A \in SU(2)$.

El resultado principal de la sección 2 será encontrar (ver proposición (5.2.4)), una fórmula para $D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})$, el término que aparece en la definición de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

En la sección 3 analizaremos algunas integrales y funciones que aparecen al calcular los coeficientes de Fourier, por ejemplo, aparecen las siguientes integrales:

$$\int_{\mathbb{R}^2 - \left\{-\frac{d}{c}\right\}} M(cz + d)^{k_1} M(z_1)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{\left[|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2\right]^{1+s}} dx dy.$$

Usando lo anterior, en la sección 4 encontraremos el coeficiente general de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$. Es conveniente mencionar, que los usados son esencialmente los mismos que los trucos usados en el libro de Kubota [16] para las series de Eisenstein generalizadas en dimensión 2, capítulo VI (Generalizations of Eisenstein Series), página 63.

En la sección 5 damos el coeficiente cero en varios casos. Un caso inmediato es cuando $k \neq \pm m$ (subsección 1). Después veremos los casos: $m = -k$ con $k \geq 0$ (subsección 2), $l = k = m = 0$ (subsección 3) y finalmente, $k = -m$ con $m \geq 0$ (subsección 4).

5.1 — Funciones argumento y módulo, ángulos de Euler

Un lema básico pero útil para reunir propiedades de la funciones Arg y módulo complejo es:

Lema 5.1.1. Sean $q, q_1 \in \mathbb{C}$ tales que $q \cdot q_1 \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, $M : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $M(z) := \frac{z}{|z|}$. Entonces se cumplen las siguientes identidades:

- | | |
|--|---|
| (a) $\text{Arg}(-q) = \text{Arg}(q) + \pi \text{ mod } 2\pi$ | (b) $\text{Arg}(\bar{q}) = -\text{Arg}(q) \text{ mod } 2\pi$ |
| (c) $\text{Arg}(q \cdot (q_1)^{-1}) = \text{Arg}(q) \pm \text{Arg}(q_1) \text{ mod } 2\pi$ | (d) $\text{Arg}(\lambda q) = \text{Arg}(q) \text{ mod } 2\pi$ |
| (e) $M(q) = e^{i \text{Arg}(q)}$ | (f) $M(\lambda q) = M(q)$ |
| (g) $M(q \cdot q_1) = M(q) \cdot M(q_1)$ | (h) $\overline{M(q)} = M(\bar{q}) = M(q)^{-1}$ |

Lema 5.1.2. Sea $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$ tal que $\alpha \cdot \beta \neq 0$, entonces:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$, $\chi \in (0, \pi)$, $\phi \in [-2\pi, 2\pi)$, cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\chi &= 2 \arccos|\alpha| = 2 \arcsin|\beta|, \\ \theta &= -\text{Arg}(\alpha\beta) - \pi \pmod{2\pi}, \\ \phi &= -\text{Arg}(\alpha\bar{\beta}) - \pi \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Demostración. Por la definición (3.3.11), cada matriz de $SU(2)$ la podemos generar usando los ángulos $\theta \in [0, 2\pi)$, $\chi \in [0, \pi]$, $\phi \in [-2\pi, 2\pi)$ por medio del siguiente producto de matrices:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} & -e^{-i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} & e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} & -e^{-i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} & -e^{-i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\chi}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha = e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \cdot e^{-i\frac{\phi}{2}}, \quad (5.1)$$

$$\beta = -e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \cdot e^{i\frac{\phi}{2}}. \quad (5.2)$$

Si $\chi = \pi$ entonces por (5.1) se tiene que $\alpha = 0$, por lo que $\alpha \cdot \beta = 0$, lo cual es una contradicción, luego, $\chi \in [0, \pi)$. Si $\chi = 0$ por (5.2) se sigue que $\beta = 0$, por lo tanto $\alpha \cdot \beta = 0$, lo cual es una contradicción, luego, $\chi \in (0, \pi)$.

De la identidad en (5.1) y como $\frac{\chi}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos

$$|\alpha| = \left| \cos \frac{\chi}{2} \right| = \cos \frac{\chi}{2}, \quad (5.3)$$

por lo que $\chi = 2 \arccos|\alpha|$.

De la identidad en (5.2) y como $\frac{\chi}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ se sigue

$$|\beta| = \left| \sin \frac{\chi}{2} \right| = \sin \frac{\chi}{2}, \quad (5.4)$$

por lo que $\chi = 2 \arcsin|\beta|$. Resumiendo, de (5.3) y (5.4) demostramos que:

$$\chi = 2 \arccos|\alpha| = 2 \arcsin|\beta|.$$

Por otro lado, de las identidades en (5.1) y (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\beta} &= -\cos \frac{\chi}{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \cdot e^{-i\phi} \\ &= -|\alpha||\beta| e^{-i\phi}\end{aligned} \quad \text{por (5.3) y (5.4)}$$

luego, $-\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\alpha\bar{\beta}|} = e^{-i\phi}$, y entonces se tienen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} -\phi &= \text{Arg}\left(-\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\alpha\bar{\beta}|}\right) \text{ mod } 2\pi \\ &= \text{Arg}\left(\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\alpha\bar{\beta}|}\right) + \pi \text{ mod } 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (a)} \\ &= \text{Arg}(\alpha\bar{\beta}) + \pi \text{ mod } 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (d)} \end{aligned}$$

por tanto, $\phi = -\text{Arg}(\alpha\bar{\beta}) - \pi \text{ mod } 2\pi$.

Por otro lado, multiplicando las identidades en (5.1) y (5.2) se sigue

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= -\cos\frac{\chi}{2} \cdot \sin\frac{\chi}{2} \cdot e^{-i\theta} \\ &= -|\alpha||\beta| e^{-i\theta} && \text{por (5.3) y (5.4)} \end{aligned}$$

luego, $-\frac{\alpha\beta}{|\alpha\beta|} = e^{-i\theta}$, y entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} -\theta &= \text{Arg}\left(-\frac{\alpha\beta}{|\alpha\beta|}\right) \text{ mod } 2\pi \\ &= \text{Arg}\left(\frac{\alpha\beta}{|\alpha\beta|}\right) + \pi \text{ mod } 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (a)} \\ &= \text{Arg}(\alpha\beta) + \pi \text{ mod } 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (d)} \end{aligned}$$

por tanto, $\theta = -\text{Arg}(\alpha\beta) - \pi \text{ mod } 2\pi$. □

Si $\alpha = 0$ tenemos el siguiente resultado:

Lema 5.1.3. Sea $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$, con $\text{Arg}(\beta) \in [0, 2\pi)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix},$$

donde $\theta = 0$, $\chi = \pi$ y $\phi \in [-2\pi, 2\pi)$ cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\phi}{2} = \text{Arg}(\beta) - \pi \text{ mod } 2\pi.$$

Demostración. De la fórmula en (5.1) tenemos que $\alpha = 0 = e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos\frac{\chi}{2} \cdot e^{-i\frac{\phi}{2}}$, por lo que $\chi = \pi$, luego la identidad en (5.2) queda como:

$$\beta = -e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot e^{i\frac{\phi}{2}},$$

haciendo $\theta = 0$, tenemos

$$\beta = -e^{i\frac{\phi}{2}},$$

por lo que obtenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\beta) &= \text{Arg}\left(-e^{i\frac{\phi}{2}}\right) \text{ mod } 2\pi \\ &= \text{Arg}\left(e^{i\frac{\phi}{2}}\right) + \pi \text{ mod } 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (a)} \\ &= \frac{\phi}{2} + \pi \text{ mod } 2\pi \end{aligned}$$

por tanto, $\frac{\phi}{2} = \text{Arg}(\beta) - \pi \text{ mod } 2\pi$. □

Ejemplo. Si $\beta = 1$ entonces $\frac{\phi}{2} = \text{Arg}(1) - \pi \bmod 2\pi = \pi \bmod 2\pi$, luego

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 — Preliminares

Ahora explicamos los resultados técnicos previos necesarios para obtener los coeficientes de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$. Fijamos $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$, con $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$ y sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (5.5)$$

Tenemos por (3.1),

$$\text{Im} \sigma(z, \lambda) = \frac{\lambda}{|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2}.$$

Ahora, obtenemos las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{aligned} \sigma g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & az + b \\ c & cz + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\sqrt{\lambda} & \frac{az+b}{\sqrt{\lambda}} \\ c\sqrt{\lambda} & \frac{cz+d}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por otro lado, observamos

$$\begin{aligned} |c\sqrt{\lambda}|^2 + \left| \frac{cz+d}{\sqrt{\lambda}} \right|^2 &= \lambda|c|^2 + \frac{|cz+d|^2}{\lambda} \\ &= \frac{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Usando la identidad anterior podemos calcular la parte $SU(2)$ de la descomposición de Iwasawa de σg dada en (5.6), y obtenemos

$$T(\sigma g) = \begin{pmatrix} \frac{\overline{cz+d}}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} & -\frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \\ \frac{\lambda c}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} & \frac{cz+d}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \end{pmatrix},$$

por tanto,

$$T(\sigma g)^{-1} := (T(\sigma g))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{cz+d}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} & \frac{\lambda\bar{c}}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \\ -\frac{\lambda c}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} & \frac{cz+d}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Si $z \neq -\frac{d}{c}$ ($\iff cz + d \neq 0$) y $c \neq 0$ podemos usar el lema (5.1.2) y encontrar las coordenadas de Euler $\theta(z, \lambda, \sigma)$, $\chi(z, \lambda, \sigma)$ y $\phi(z, \lambda, \sigma)$ de la matriz $T(\sigma g)^{-1}$ en (5.7), esto es,

$$\chi = 2 \arccos \frac{|cz+d|}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}} = 2 \arcsin \frac{\lambda|c|}{\sqrt{|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2}}. \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
\phi &= -\text{Arg}\left(\frac{cz + d}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \cdot \frac{\lambda c}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}}\right) - \pi \bmod 2\pi \\
&= -\text{Arg}(c \cdot (cz + d)) - \pi \bmod 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (d)} \\
&= \text{Arg}(\bar{c} \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi. && \text{por el lema (5.1.1) (b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= -\text{Arg}\left(\frac{cz + d}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}} \cdot \frac{\lambda \bar{c}}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}}\right) - \pi \bmod 2\pi \\
&= -\text{Arg}(\bar{c} \cdot (cz + d)) - \pi \bmod 2\pi && \text{por el lema (5.1.1) (d)} \\
&= \text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi. && \text{por el lema (5.1.1) (b)}
\end{aligned}$$

Resumiendo, si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$ entonces

$$T(\sigma g)^{-1} = A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)) \in SU(2),$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi &= 2 \arccos \frac{|cz + d|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}} = 2 \arcsin \frac{\lambda|c|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}}, \\
\theta &= \text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi, \\
\phi &= \text{Arg}(\bar{c} \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi.
\end{aligned}$$

Veamos ahora el caso $c \neq 0$ y $z = -\frac{d}{c}$. Por (5.7) tenemos

$$T(\sigma g)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda \bar{c}}{\sqrt{\lambda^2|c|^2}} \\ -\frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda^2|c|^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\bar{c}}{|c|} \\ -\frac{c}{|c|} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$T(\sigma g)^{-1} = A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)) \in SU(2),$$

donde (por el lema (5.1.3)),

$$\theta = 0, \quad \chi = \pi,$$

y $\phi \in [-2\pi, 2\pi)$ cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\phi}{2} = \text{Arg}\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right) - \pi \bmod 2\pi.$$

Consideramos ahora el caso $c = 0$, por (5.7),

$$T(\sigma g)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|d|} & 0 \\ 0 & \frac{d}{|d|} \end{pmatrix},$$

entonces

$$T(\sigma g)^{-1} = A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)) \in SU(2),$$

y si $\text{Arg}(d) \in [0, \pi)$ los ángulos de Euler de $T(\sigma g)^{-1}$ están dados como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2} &= \text{Arg}\left(\frac{d}{|d|}\right) \bmod 2\pi, \\ \chi &= \phi = 0.\end{aligned}$$

Reunimos los resultados anteriores en el siguiente:

Lema 5.2.1. Sean $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces:

$$T(\sigma g)^{-1} = A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)) \in SU(2), \quad (5.9)$$

donde los ángulos de Euler $\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)$ están dados como sigue:

- Si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$ entonces

$$\theta = \text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi, \quad (5.10)$$

$$\chi = 2 \arccos \frac{|cz + d|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2}} = 2 \arcsin \frac{\lambda |c|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2}}, \quad (5.11)$$

$$\phi = \text{Arg}(\bar{c} \cdot \overline{cz + d}) - \pi \bmod 2\pi. \quad (5.12)$$

- Si $c \neq 0$ y $z = -\frac{d}{c}$ entonces

$$\theta = 0, \quad (5.13)$$

$$\chi = \pi,$$

$$\frac{\phi}{2} = \text{Arg}\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right) - \pi \bmod 2\pi. \quad (5.14)$$

- Si $c = 0$ y $\text{Arg}(d) \in [0, \pi)$ entonces

$$\frac{\theta}{2} = \text{Arg}\left(\frac{d}{|d|}\right) \bmod 2\pi,$$

$$\chi = 0,$$

$$\phi = 0.$$

Además, por (3.37) se cumple en todos los casos

$$\Phi_{T(\sigma g)^{-1}} = \Phi_{A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma))} = \text{ROT}(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)). \quad (5.15)$$

Por otra parte, si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$ tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= e^{i[\text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d}) - \pi]} && \text{por (5.10)} \\ &= e^{-i\pi} e^{i\text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d})} \\ &= (-1) M(c \cdot \overline{cz + d}) && \text{por el lema (5.1.1) (e)} \\ &= (-1) M(c) \cdot M(\overline{cz + d}) && \text{por el lema (5.1.1) (g)} \\ &= (-1) M(c) \cdot M(cz + d)^{-1}. && \text{por el lema (5.1.1) (h)}\end{aligned}$$

Resumiendo, si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$

$$e^{ik\theta} = (-1)^k M(c)^k \cdot M(cz + d)^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5.16)$$

También, si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$ tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= e^{i[\text{Arg}(\overline{c} \cdot cz + d) - \pi]} && \text{por (5.12)} \\ &= e^{-i\pi} e^{i\text{Arg}(\overline{c} \cdot cz + d)} \\ &= (-1) M(\overline{c} \cdot cz + d) && \text{por el lema (5.1.1) (e)} \\ &= (-1) M(\overline{c}) \cdot M(cz + d) && \text{por el lema (5.1.1) (g)} \\ &= (-1) M(c)^{-1} \cdot M(cz + d)^{-1}. && \text{por el lema (5.1.1) (h)} \end{aligned}$$

Resumiendo, si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$

$$e^{im\phi} = (-1)^m M(c)^{-m} \cdot M(cz + d)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

Sea $z_1 = z_1(z, \lambda, \sigma)$ definida como sigue:

$$z_1 = |cz + d| + i\lambda|c|. \quad (5.18)$$

Continuando con las hipótesis $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$, de la ecuación en (5.18) tenemos

$$\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(M(z_1)) \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad (5.19)$$

pero también

$$\sin(\text{Arg} M(z_1)) = \frac{\lambda|c|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}}, \quad (5.20)$$

pero por la ecuación (5.8),

$$\sin \frac{\chi}{2} = \frac{\lambda|c|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2}}, \quad (5.21)$$

luego, de (5.19), (5.20) y (5.21) concluimos que $\text{Arg} M(z_1) = \frac{\chi}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\chi}{2}} &= e^{i\text{Arg} M(z_1)} \\ &= M(z_1). \end{aligned} \quad \text{por el lema (5.1.1) (e)} \quad (5.22)$$

De (5.22) se sigue

$$e^{ik\frac{\chi}{2}} = M(z_1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando la parte real de $e^{ik\frac{\chi}{2}}$ en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \cos k\frac{\chi}{2} &= \frac{1}{2} [M(z_1)^k + \overline{M(z_1)^k}], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2} [M(z_1)^k + \overline{M(z_1)^k}], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2} [M(z_1)^k + (M(z_1)^{-1})^k], \quad \forall k \in \mathbb{Z} && \text{por el lema (5.1.1) (h)} \\ &= \frac{1}{2} [M(z_1)^k + M(z_1)^{-k}], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Análogamente, para la parte imaginaria obtenemos

$$\sin k \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2i} \left[M(z_1)^k - M(z_1)^{-k} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

También, bajo las hipótesis $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$, calculamos la matriz de Wigner $D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})$ como sigue: $D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})$

$$\begin{aligned} &= D_{km}^l(ROT(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma))) && \text{por el lema (5.2.1)} \\ &= e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi} && \text{por (3.40)} \\ &= (-1)^k M(c)^k \cdot M(cz + d)^{-k} \cdot d_{km}^l(\chi) \cdot (-1)^m M(c)^{-m} \cdot M(cz + d)^{-m} && \text{por (5.16) y (5.17)} \\ &= (-1)^{k+m} \cdot M(c)^{k-m} \cdot M(cz + d)^{-k-m} \cdot d_{km}^l(\chi). \end{aligned}$$

Resumiendo:

Lema 5.2.2. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $c \neq 0$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $z \neq -\frac{d}{c}$. Por el lema (5.2.1) sabemos

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Arg}(c \cdot \overline{cz + d}) - \pi \text{ mod } 2\pi, \\ \chi &= 2 \arccos \frac{|cz + d|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2}} = 2 \arcsin \frac{\lambda |c|}{\sqrt{|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2}}, \\ \phi &= \text{Arg}(\bar{c} \cdot \overline{cz + d}) - \pi \text{ mod } 2\pi. \end{aligned}$$

Entonces se cumplen las siguientes fórmulas:

$$e^{ik \frac{\chi}{2}} = M(z_1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (5.23)$$

$$\cos k \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} \left[M(z_1)^k + M(z_1)^{-k} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (5.24)$$

$$\sin k \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2i} \left[M(z_1)^k - M(z_1)^{-k} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5.25)$$

Además,

$$D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) = (-1)^{k+m} \cdot M(c)^{k-m} \cdot M(cz + d)^{-k-m} \cdot d_{km}^l(\chi). \quad (5.26)$$

Veamos ahora el caso $c \neq 0$ y $z = -\frac{d}{c}$. Por el lema (5.2.1)

$$T(\sigma g)^{-1} = A(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma)) \in SU(2),$$

donde

$$\theta = 0, \quad \chi = \pi,$$

y $\phi \in [-2\pi, 2\pi)$ está dado por:

$$\frac{\phi}{2} = \text{Arg} \left(\frac{\bar{c}}{|c|} \right) - \pi \text{ mod } 2\pi. \quad (5.27)$$

Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
e^{i\phi} &= e^{2i\text{Arg}\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right)} e^{-2i\pi} && \text{por (5.27)} \\
&= e^{i\text{Arg}\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right)^2} && \text{por el lema (5.1.1) (c)} \\
&= M\left(\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right)^2\right) && \text{por el lema (5.1.1) (e)} \\
&= \left(M\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right)\right)^2 && \text{por el lema (5.1.1) (g)} \\
&= M(\bar{c})^2 && \text{por el lema (5.1.1) (f)} \\
&= \left(M(c)^{-1}\right)^2 && \text{por el lema (5.1.1) (h)} \\
&= M(c)^{-2}. && (5.28)
\end{aligned}$$

Resumiendo, por (5.28)

$$e^{im\phi} = M(c)^{-2m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (5.29)$$

Luego, si $c \neq 0$ y $z = -\frac{d}{c}$,

$$\begin{aligned}
D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) &= D_{km}^l(ROT(\theta(z, \lambda, \sigma), \chi(z, \lambda, \sigma), \phi(z, \lambda, \sigma))) && \text{por el lema (5.2.1)} \\
&= e^{ik\theta} d_{km}^l(\chi) e^{im\phi} && \text{por (3.40)} \\
&= e^{ik0} d_{km}^l(\pi) e^{im\phi} \\
&= M(c)^{-2m} \cdot d_{km}^l(\pi). && \text{por (5.29)}
\end{aligned}$$

Resumimos el caso en el siguiente:

Corolario 5.2.3. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $c \neq 0$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $z = -\frac{d}{c}$. Por el lema (5.2.1) sabemos que $\theta = 0$, $\chi = \pi$, y

$$\frac{\phi}{2} = \text{Arg}\left(\frac{\bar{c}}{|c|}\right) - \pi \text{ mod } 2\pi.$$

Entonces se cumplen las siguiente fórmulas:

$$\begin{aligned}
e^{im\phi} &= M(c)^{-2m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \\
D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) &= M(c)^{-2m} \cdot d_{km}^l(\pi).
\end{aligned}$$

Necesitamos calcular $d_{km}^l(\chi)$. Para eso recurrimos a el lema (3.4.1), que recordamos ahora. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Además, $r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ definidos como sigue

$$d_1 = \min\{l + m, l - m, l + k, l - k\}, \quad (5.30)$$

$$\text{y si } d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } r_1 = k - m \text{ y } d_2 = k - m \\ l - m & \text{entonces } r_1 = m - k \text{ y } d_2 = 0 \\ l + k & \text{entonces } r_1 = m - k \text{ y } d_2 = 0 \\ l - k & \text{entonces } r_1 = k - m \text{ y } d_2 = k - m \end{cases} \quad (5.31)$$

$$r_2 = 2l - 2d_1 - r_1. \quad (5.32)$$

Por el mismo lema tenemos

$$r_1, r_2, d_1, d_2 \geq 0, \quad (5.33)$$

y se cumple la identidad

$$d_{km}^l(\chi) = (-1)^{d_2} \binom{2l - d_1}{d_1 + r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1 + r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{r_1} \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{r_2} P_{d_1}^{(r_1, r_2)}(\cos \chi). \quad (5.34)$$

Como antes, consideramos $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $c \neq 0$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $z \neq -\frac{d}{c}$. Por (5.33) podemos usar la definición (3.3.1). Luego,

$$\begin{aligned} P_{d_1}^{(r_1, r_2)}(\cos \chi) &= (d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)! \sum_{a=0}^{d_1} \frac{\left(\frac{\cos \chi - 1}{2} \right)^{d_1 - a} \left(\frac{\cos \chi + 1}{2} \right)^a}{(d_1 + r_1 - a)! a! (r_2 + a)! (d_1 - a)!} \\ &= (d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)! \sum_{a=0}^{d_1} \frac{(\cos \chi - 1)^{d_1 - a} (\cos \chi + 1)^a}{2^{d_1} (d_1 + r_1 - a)! a! (r_2 + a)! (d_1 - a)!} \\ &= \frac{(d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!}{2^{d_1}} \sum_{a=0}^{d_1} \frac{1}{M_0} \sum_{b=0}^{d_1 - a} \binom{d_1 - a}{b} (\cos \chi)^{d_1 - a - b} (-1)^b \sum_{c=0}^a \binom{a}{c} (\cos \chi)^{a - c} \\ &= \frac{(d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!}{2^{d_1}} \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1 - a} \sum_{c=0}^a \frac{(-1)^b}{M_0} \binom{d_1 - a}{b} \binom{a}{c} (\cos \chi)^{d_1 - b - c}, \end{aligned}$$

donde

$$M_0 = M_0(a, d_1, r_1, r_2) := \frac{1}{(d_1 + r_1 - a)! a! (r_2 + a)! (d_1 - a)!}.$$

Resumiendo,

$$P_{d_1}^{(r_1, r_2)}(\cos \chi) = \frac{(d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!}{2^{d_1}} \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1 - a} \sum_{c=0}^a M_1(a, b, c, d_1, r_1, r_2) \cdot (\cos \chi)^{d_1 - b - c}, \quad (5.35)$$

con

$$\begin{aligned} M_1(a, b, c, d_1, r_1, r_2) &:= (-1)^b \binom{d_1 - a}{b} \binom{a}{c} M_0 \\ &= (-1)^b \binom{d_1 - a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(d_1 + r_1 - a)! a! (r_2 + a)! (d_1 - a)!}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de (5.24) lema (5.2.2) (haciendo $k = 2$) tenemos

$$\cos \chi = \frac{1}{2} \left[M(z_1)^2 + M(z_1)^{-2} \right],$$

por lo que

$$\begin{aligned}
(\cos \chi)^{d_1-b-c} &= \frac{1}{2^{d_1-b-c}} \left[M(z_1)^2 + M(z_1)^{-2} \right]^{d_1-b-c} \\
&= \frac{1}{2^{d_1-b-c}} \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \binom{d_1-b-c}{t} \left(M(z_1)^2 \right)^{d_1-b-c-t} \left(M(z_1)^{-2} \right)^t \\
&= \frac{1}{2^{d_1-b-c}} \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \binom{d_1-b-c}{t} M(z_1)^{2d_1-2b-2c-4t}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Sustituyendo (5.36) en (5.35) tenemos

$$P_{d_1}^{(r_1, r_2)}(\cos \chi) = \frac{(d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!}{2^{2d_1}} \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} M_2(a, b, c, t, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{2d_1-2b-2c-4t}, \tag{5.37}$$

donde

$$M_2(a, b, c, t, d_1, r_1, r_2) := (-1)^b 2^{b+c} \binom{d_1-b-c}{t} \binom{d_1-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(d_1+r_1-a)! a! (r_2+a)! (d_1-a)!}.$$

Por (5.25), lema (5.2.2) (haciendo $k = 1$) obtenemos

$$\sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2i} \left[M(z_1) - M(z_1)^{-1} \right],$$

luego, como $r_1 \geq 0$ (por (5.33)),

$$\begin{aligned}
\left(\sin \frac{\chi}{2} \right)^{r_1} &= \frac{1}{(2i)^{r_1}} \left[M(z_1) - M(z_1)^{-1} \right]^{r_1} \\
&= \frac{1}{(2i)^{r_1}} \sum_{t_1=0}^{r_1} \binom{r_1}{t_1} M(z_1)^{r_1-t_1} \left(-M(z_1)^{-1} \right)^{t_1} \\
&= \frac{1}{(2i)^{r_1}} \sum_{t_1=0}^{r_1} \binom{r_1}{t_1} (-1)^{t_1} M(z_1)^{r_1-2t_1}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

De (5.24) lema (5.2.2) (haciendo $k=1$),

$$\cos \frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} \left[M(z_1) + M(z_1)^{-1} \right],$$

luego, como $r_2 \geq 0$ (por (5.33)),

$$\begin{aligned}
\left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{r_2} &= \frac{1}{2^{r_2}} \left[M(z_1) + M(z_1)^{-1} \right]^{r_2} \\
&= \frac{1}{2^{r_2}} \sum_{t_2=0}^{r_2} \binom{r_2}{t_2} M(z_1)^{r_2-t_2} \left(M(z_1)^{-1} \right)^{t_2} \\
&= \frac{1}{2^{r_2}} \sum_{t_2=0}^{r_2} \binom{r_2}{t_2} M(z_1)^{r_2-2t_2}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Sustituyendo (5.37), (5.38) y (5.39) en (5.34) tenemos la siguiente igualdad:

$$d_{km}^l(\chi) = (-1)^{d_2} \binom{2l-d_1}{d_1+r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1+r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(2i)^{r_1}} \sum_{t_1=0}^{r_1} \binom{r_1}{t_1} (-1)^{t_1} M(z_1)^{r_1-2t_1} \right] \left[\frac{1}{2^{r_2}} \sum_{t_2=0}^{r_2} \binom{r_2}{t_2} M(z_1)^{r_2-2t_2} \right] \\ \left[\frac{(d_1+r_1)!(d_1+r_2)!}{2^{2d_1}} \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} M_2(a, b, c, t, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{2d_1-2b-2c-4t} \right],$$

simplificando y reagrupando, se sigue

$$d_{km}^l(\chi) = \frac{(-1)^{d_2}}{2^{r_1+r_2+2d_1} i^{r_1}} \binom{2l-d_1}{d_1+r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1+r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} (d_1+r_1)! (d_1+r_2)!$$

$$\sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} (-1)^{t_1} \binom{r_1}{t_1} \binom{r_2}{t_2} M_2(a, b, c, t, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t}.$$

Resumiendo, $d_{km}^l(\chi) =$

$$C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t} \quad (5.40)$$

donde

$$C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) := \frac{(-1)^{d_2}}{2^{r_1+r_2+2d_1} i^{r_1}} \binom{2l-d_1}{d_1+r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1+r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} (d_1+r_1)! (d_1+r_2)!, \quad (5.41)$$

$$M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) := (-1)^{t_1} \binom{r_1}{t_1} \binom{r_2}{t_2} M_2(a, b, c, t, d_1, r_1, r_2) \\ = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{r_1}{t_1} \binom{r_2}{t_2} \binom{d_1-b-c}{t} \binom{d_1-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(d_1+r_1-a)! a! (r_2+a)! (d_1-a)!}. \quad (5.42)$$

Por lo que sustituyendo (5.40) en (5.26) del corolario (5.2.3) tenemos

$$D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) = (-1)^{k+m} C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \cdot M(c)^{k-m} \cdot M(cz+d)^{-k-m} \\ \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t}.$$

Resumiremos la sección en la siguiente:

Proposición 5.2.4. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $c \neq 0$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$, $Re(s) > 1$. Además, $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, recordamos que $r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ están definidos en (5.30), (5.31) y (5.32).

- Si $z \neq -\frac{d}{c}$. Entonces

$$D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) = (-1)^{k+m} C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \cdot M(c)^{k-m} \cdot M(cz + d)^{-k-m} \\ \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t}, \quad (5.43)$$

donde por (5.41), (5.42) y (5.18)

$$C_1 = \frac{(-1)^{d_2}}{2^{r_1+r_2+2d_1} i^{r_1}} \binom{2l-d_1}{d_1+r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1+r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} (d_1+r_1)! (d_1+r_2)!, \quad (5.44)$$

$$M_3 = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{r_1}{t_1} \binom{r_2}{t_2} \binom{d_1-b-c}{t} \binom{d_1-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(d_1+r_1-a)! a! (r_2+a)! (d_1-a)!}, \quad (5.45)$$

$$z_1 = |cz + d| + i\lambda|c|.$$

- Si $z = -\frac{d}{c}$. Entonces

$$D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}}) = d_{km}^l(\pi) \cdot M(c)^{-2m}.$$

5.3 — Integrales y funciones que aparecen en la expansión de Fourier

Necesitamos desarrollar ciertas integrales que aparecerán en la expansión de Fourier de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$.

Definición 5.3.1. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $c \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, $\gamma \in \Lambda_D^*$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Definimos la siguiente integral

$$I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^2 - \{-\frac{d}{c}\}} M(cz + d)^{k_1} M(z_1)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2]^{1+s}} dx dy, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

donde $z = x + iy$.

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{w}{c} \iff cz = w$, con $w = w_1 + iw_2$, $c = c_1 + ic_2$, se tiene

$$z = \frac{1}{|c|^2} (c_1 - ic_2)(w_1 + iw_2) = \frac{1}{|c|^2} (w_1 c_1 + w_2 c_2 + i(w_2 c_1 - w_1 c_2))$$

luego,

$$x = \frac{w_1 c_1 + w_2 c_2}{|c|^2} \quad y = \frac{w_2 c_1 - w_1 c_2}{|c|^2},$$

y por tanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(w_1, w_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{c_1}{|c|^2} & \frac{c_2}{|c|^2} \\ \frac{-c_2}{|c|^2} & \frac{c_1}{|c|^2} \end{array} \right| = \frac{|c|^2}{|c|^4} = \frac{1}{|c|^2},$$

además, $z = -\frac{d}{c} \iff w = -d$, entonces,

$$I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{1}{|c|^2} \int_{\mathbb{R}^2 - \{-d\}} M(w + d)^{k_1} M(|w + d| + i\lambda|c|)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle \frac{w}{c}, \gamma \rangle}}{[|w + d|^2 + \lambda^2 |c|^2]^{1+s}} dw_1 dw_2.$$

Haciendo otro cambio $w = z - d \iff w + d = z$, tenemos

$$w_1 = x - d_1 \qquad w_2 = y - d_2,$$

donde $d = d_1 + id_2$, y por tanto,

$$\left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

además, $w = -d \iff z = 0$, entonces,

$$\begin{aligned} I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda) &= \frac{1}{|c|^2} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i\lambda|c|)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle \frac{z}{c} - \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{\left[|z|^2 + \lambda^2 |c|^2 \right]^{1+s}} dx dy \\ &= \frac{e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{|c|^2} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i\lambda|c|)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle \frac{z}{c}, \gamma \rangle}}{\left[|z|^2 + \lambda^2 |c|^2 \right]^{1+s}} dx dy. \end{aligned}$$

Ahora hacemos otro cambio de variable $z = \lambda c \cdot w \iff \frac{z}{\lambda c} = w$, se tiene

$$z = \lambda(c_1 + ic_2)(w_1 + iw_2) = \lambda(w_1 c_1 - w_2 c_2 + i(w_1 c_2 + w_2 c_1))$$

luego,

$$x = \lambda(w_1 c_1 - w_2 c_2) \qquad y = \lambda(w_1 c_2 + w_2 c_1),$$

entonces

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(w_1, w_2)} \right| = \begin{vmatrix} \lambda c_1 & -\lambda c_2 \\ \lambda c_2 & \lambda c_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 (c_1^2 + c_2^2) = \lambda^2 |c|^2,$$

además, $z = 0 \iff w = 0$, por tanto,

$$I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda)$$

$$= \frac{e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{|c|^2} \lambda^2 |c|^2 \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(\lambda c \cdot w)^{k_1} M(\lambda|c|(|w| + i\lambda|c|))^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \langle \lambda w, \gamma \rangle}}{\left[\lambda^2 |c|^2 |w|^2 + \lambda^2 |c|^2 \right]^{1+s}} dw_1 dw_2$$

$$= e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(c \cdot w)^{k_1} M(\lambda|c|(|w| + i))^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle w, \gamma \rangle}}{\left[\lambda^2 |c|^2 (|w|^2 + 1) \right]^{1+s}} dw_1 dw_2$$

$$= e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(c)^{k_1} M(w)^{k_1} M(\lambda|c|(|w| + i))^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle w, \gamma \rangle}}{\left[\lambda^2 |c|^2 (|w|^2 + 1) \right]^{1+s}} dw_1 dw_2$$

$$= \frac{M(c)^{k_1} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{\left[|z|^2 + 1 \right]^{1+s}} dx dy. \quad \text{por el lema (5.1.1) (f)}$$

Resumiendo,

$$I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{M(c)^{k_1} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{\left[|z|^2 + 1 \right]^{1+s}} dx dy.$$

La integral anterior aparecerá en el coeficiente γ de la expansión de Fourier de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$. Para encontrar el coeficiente cero necesitamos hacer $\gamma = \vec{0}$, en ese caso tenemos,

$$I(s, \vec{0}, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{M(c)^{k_1}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{dx dy}{[|z|^2 + 1]^{1+s}}. \quad (5.46)$$

Hacemos un cambio de variable de coordenadas cartesianas a coordenadas polares en la integral en (5.46), es decir, $z = r e^{i\theta}$ con $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Usando que el Jacobiano es r y el lema (5.1.1) (f),

$$I(s, \vec{0}, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{M(c)^{k_1}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} M(e^{i\theta})^{k_1} d\theta \right] M(r + i)^{k_2} \frac{r dr}{[r^2 + 1]^{1+s}},$$

pero

$$\int_0^{2\pi} M(e^{i\theta})^{k_1} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{ik_1\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k_1 = 0. \end{cases}$$

Resumiendo, tenemos el siguiente:

Lema 5.3.2. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ con $c \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, $\gamma \in \Lambda_D^*$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$, entonces:

$$I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{M(c)^{k_1} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.47)$$

Si $\gamma = \vec{0}$ y $k_1 \neq 0$ entonces

$$I(s, \vec{0}, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = 0, \quad \forall k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.48)$$

Si $\gamma = \vec{0}$ y $k_1 = 0$ entonces

$$I(s, \vec{0}, 0, k_2, \sigma, \lambda) = \frac{2\pi}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_0^\infty M(r + i)^{k_2} \frac{r dr}{[r^2 + 1]^{1+s}}, \quad \forall k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Definición 5.3.3. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, $\gamma \in \Lambda_D^*$, $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$, se definen las funciones

$$\widehat{\phi}_{r, k_1, k_2, \gamma}(\lambda, \cdot) : \{s \in \mathbb{C}; \text{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

como sigue,

$$\widehat{\phi}_{r, k_1, k_2, \gamma}(\lambda, s) = \sum_{\substack{\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c}} M(c)^r \cdot I(s, \gamma, k_1, k_2, \sigma, \lambda), \quad \forall r, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.49)$$

Sustituyendo la ecuación (5.47) del lema (5.3.2) en (5.49) tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{r,k_1,k_2,\gamma}(\lambda, s) &= \sum_{\substack{\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c}} M(c)^r \frac{M(c)^{k_1} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{\lambda^{2s} |c|^{2+2s}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy \\ &= \frac{1}{\lambda^{2s}} \left[\sum_{\substack{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c}} \frac{M(c)^{r+k_1} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{|c|^{2+2s}} \right] \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Tambi3n nos ser3n 3tiles las siguientes funciones.

Definici3n 5.3.4. Sean $\gamma \in \Lambda^*$, $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$, las funciones

$$\phi_{m,\gamma}(\cdot) : \{s \in \mathbb{C}; \text{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

est3n definidas por la siguiente igualdad:

$$\phi_{m,\gamma}(s) = \sum_{\substack{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c}} \frac{M(c)^m e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{|c|^{2+2s}}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (5.51)$$

Sustituyendo la identidad (5.51) de la definici3n (5.3.4) en (5.50) tenemos

$$\widehat{\phi}_{r,k_1,k_2,\gamma}(\lambda, s) = \frac{1}{\lambda^{2s}} \phi_{r+k_1,\gamma}(s) \cdot \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy.$$

Si $\gamma = \vec{0}$ y $k_1 \neq 0$ por (5.48) del lema (5.3.2) sabemos que $I(s, \vec{0}, k_1, k_2, \sigma, \lambda) = 0$, y entonces de la definici3n (5.3.3) concluimos que:

$$\widehat{\phi}_{r,k_1,k_2,\vec{0}}(\lambda, s) = 0.$$

Resumimos los resultados anteriores.

Corolario 5.3.5. Sean $\gamma \in \Lambda_D^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 1$. Se cumple:

$$\widehat{\phi}_{r,k_1,k_2,\gamma}(\lambda, s) = \frac{1}{\lambda^{2s}} \phi_{r+k_1,\gamma}(s) \cdot \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k_1} M(|z| + i)^{k_2} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy, \quad \forall r, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Si $\gamma = \vec{0}$ y $k_1 \neq 0$

$$\widehat{\phi}_{r,k_1,k_2,\vec{0}}(\lambda, s) = 0, \quad \forall r, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.52)$$

Si $\gamma = \vec{0}$ y $k_1 = 0$

$$\widehat{\phi}_{r,0,k_2,\vec{0}}(\lambda, s) = \frac{1}{\lambda^{2s}} \phi_{r,\vec{0}}(s) \cdot \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} \frac{M(|z| + i)^{k_2}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy, \quad \forall r, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.53)$$

Resolvemos la integral en la fórmula (5.53) usando la función gamma. La integral del siguiente lema la podemos obtener usando Mathematica.

Lema 5.3.6. Sean $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$n > -1 \quad (5.54)$$

$$n - 2\operatorname{Re}(z) < -1, \quad (5.55)$$

entonces

$$\int_0^\infty \frac{r^n}{(1+r^2)^z} dr = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(z - \frac{1}{2} - \frac{n}{2})}{2\Gamma(z)}.$$

Ejemplo. Si $n = 0$ y $z = 1$ entonces

$$\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Lema 5.3.7. Sean $k_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} M(|z| + i)^{k_2} \frac{dx dy}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} = 2\pi \sum_{n=0}^{k_2} \binom{k_2}{n} i^n \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{k_2}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2\Gamma(1 + s + \frac{k_2}{2})}.$$

Demostración. Pasando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} M(|z| + i)^{k_2} \frac{dx dy}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \frac{(r+i)^{k_2}}{(r^2+1)^{\frac{k_2}{2}}} \frac{dr d\theta}{(r^2+1)^{1+s}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r(r+i)^{k_2} dr}{(r^2+1)^{1+s+\frac{k_2}{2}}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \sum_{n=0}^{k_2} \binom{k_2}{n} r^{k_2-n} i^n \frac{r}{(r^2+1)^{1+s+\frac{k_2}{2}}} dr \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{k_2} \binom{k_2}{n} i^n \int_0^\infty \frac{r^{k_2-n+1}}{(r^2+1)^{1+s+\frac{k_2}{2}}} dr. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Veamos que la integral obtenida en (5.56) cumple las condiciones (5.54) y (5.55) del lema (5.3.6),

$$(k_2 - n + 1) - 2\operatorname{Re}(1 + s + \frac{k_2}{2}) < -1 \iff k_2 - n + 1 - 2 - 2\operatorname{Re}(s) - k_2 < -1 \quad (5.57)$$

$$\iff -n + 1 - 2 - 2\operatorname{Re}(s) < -1$$

$$\iff -n - 1 - 2\operatorname{Re}(s) < -1$$

$$\iff -n - 2\operatorname{Re}(s) < 0$$

$$\iff -2\operatorname{Re}(s) < n$$

$$\iff \operatorname{Re}(s) > -\frac{n}{2}. \quad (5.58)$$

Por otra parte, como

$$n \geq 0 \iff \frac{n}{2} \geq 0 \implies -\frac{n}{2} \leq 0 < 1,$$

pero por hipótesis $\operatorname{Re}(s) > 1$, por lo que $\operatorname{Re}(s) > -\frac{n}{2}$, la cual es justo la desigualdad obtenida en (5.58), por lo que la desigualdad en (5.57) también es válida, condición (5.55) del lema.

Veamos ahora la primera desigualdad (5.54) requerida en el lema (5.3.6). Como

$$n \leq k_2 \iff k_2 - n \geq 0, \quad (5.59)$$

sumando la desigualdad obvia $1 > -1$ a la desigualdad en (5.59) obtenemos que $k_2 - n + 1 > -1$.

Por lo anterior podemos aplicar el lema (5.3.6) a la integral obtenida en (5.56). Primero hacemos las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{k_2 - n + 1}{2} = 1 + \frac{k_2}{2} - \frac{n}{2}. \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} (1 + s + \frac{k_2}{2}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(k_2 - n + 1) &= 1 + s + \frac{k_2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1 + s - 1 + \frac{n}{2} \\ &= s + \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Luego, de (5.56), (5.60) y (5.61) concluimos

$$\int_{\mathbb{R}^2} M(|z| + i)^{k_2} \frac{dx dy}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} = 2\pi \sum_{n=0}^{k_2} \binom{k_2}{n} i^n \frac{\Gamma(1 + \frac{k_2}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2\Gamma(1 + s + \frac{k_2}{2})}.$$

□

Veamos ahora el caso $k_2 \in \mathbb{Z}$ con $k_2 < 0$, tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} M(|z| + i)^{k_2} &:= \left(M(|z| + i)\right)^{k_2} \\ &= \left(M(|z| + i)^{-1}\right)^{-k_2} \\ &= \left(M(\overline{|z| + i})\right)^{-k_2} && \text{por el lema (5.1.1) (h)} \\ &= \left(M(|z| - i)\right)^{-k_2} \\ &\equiv M(|z| - i)^{-k_2}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Combinando (5.62) y tomando en cuenta el cambio de signo de i en la demostración del lema (5.3.7), obtenemos el siguiente:

Corolario 5.3.8. Sean $k_2 \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} M(|z| + i)^{k_2} \frac{dx dy}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} = 2\pi \sum_{n=0}^{|k_2|} \binom{|k_2|}{n} (\operatorname{Sgn} k_2)^n i^n \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{|k_2|}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2\Gamma(1 + s + \frac{|k_2|}{2})},$$

donde

$$\operatorname{Sgn} k_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } k_2 \geq 0 \\ -1 & \text{si } k_2 < 0. \end{cases}$$

5.4 — Coeficiente general $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$.

Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Con los preliminares en las secciones anteriores podemos empezar a calcular los coeficientes de Fourier $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$, recordamos que por (4.80):

$$b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} E_{km}^l(z, \lambda, s) e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} E_{km}^l(z, \lambda, s) e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy, \quad (5.63)$$

con $\gamma \in \Lambda_D^*$. Por la definición (4.4.1) las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ están dadas por:

$$E_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I)})^{-1})} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s},$$

donde hemos cambiado σ por $[\sigma]$ ya que trabajaremos más adelante con otra clase de equivalencia. Sea σ un representante dado por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D.$$

Por (3.1),

$$E_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I)})^{-1})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz + d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}}. \quad (5.64)$$

Hacemos ahora un breve repaso de dobles cocientes. Sean G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Si $x \in G$, la **clase doble** HxH está definida como sigue:

$$[x]^H \equiv HxH = \{h_1 x h_2; \forall h_1, h_2 \in H\}.$$

Sean $x, y \in G$, entonces

$$HxH = HyH \iff \exists h_1, h_2 \in H \text{ tal que } y = h_1 x h_2.$$

El conjunto de todas las clases dobles es denotado por $H \backslash G / H$, esto es,

$$H \backslash G / H = \{[x]^H; x \in G\}.$$

Una propiedad básica de los los dobles cocientes es que si $x, y \in G$, entonces $[x]^H, [y]^H$ son disjuntos o son el mismo.

Consideremos $H = \Gamma'_{D,\infty}$ y $G = \Gamma_D$, luego

$$H \backslash G / H = \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D / \Gamma'_{D,\infty}. \quad (5.65)$$

Si $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D$, $\sigma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_D$, entonces:

$$\Gamma'_{D,\infty} \sigma \Gamma'_{D,\infty} = \Gamma'_{D,\infty} \sigma' \Gamma'_{D,\infty} \iff c' = c \text{ y } d' \equiv d \pmod{\Lambda_D c}.$$

La descomposición de Bruhat de (5.65) se ve como sigue,

$$[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D / \Gamma'_{D,\infty} = [\sigma]^H \text{ donde } \sigma \in \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D ; c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_D ; \alpha \in \mathcal{O}_D^\times \right\}. \quad (5.66)$$

Ver [15], sección 2.5: Double coset decomposition, página 37, o [16], sección 2.2: Fourier expansion of an automorphic function, página 13, para demostraciones en el caso de $SL(2, \mathbb{R})$. Usaremos la siguiente notación,

$$\mathcal{R} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D ; c \neq 0, d \bmod_{\Lambda_D} c \right\}.$$

$$\mathcal{R}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_D ; \alpha \in \mathcal{O}_D^\times \right\}.$$

Por otro lado, tenemos la siguiente integral

$$\int_{\mathbb{R}^2 / \Gamma'_{D,\infty}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy = |\Lambda_D| \delta_{\gamma, \vec{0}}, \quad (5.67)$$

donde

$$\delta_{\gamma, \vec{0}} := \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \vec{0} \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Definición. Sean $D \in \mathbb{Z}$ tal que $D < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $F_k^D \in \mathbb{C}$ a la constante dada por:

$$F_k^D := \sum_{\alpha = e^{-i\frac{\theta}{2}} \in \mathcal{O}_D^\times} e^{ik\theta}. \quad (5.68)$$

Ejemplo. ■ $F_k^1 = \begin{cases} 4 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$

- Si $D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ entonces $F_k^D = 2$.
- Si $D = 3$ entonces $F_k^3 = 2(1 + e^{-\frac{2\pi ki}{3}} + e^{-\frac{4\pi ki}{3}})$.
- $F_0^D = [\Gamma_{D,\infty} : \Gamma'_{D,\infty}]$.

Lema 5.4.1. Sean $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & w \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_D$ con $\alpha \in \mathcal{O}_D^\times$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, I} \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces:

$$\overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} = e^{ik\theta} \delta_{km}, \quad \text{donde } \alpha = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Demostración. Tenemos

$$\sigma g = \begin{pmatrix} \alpha & w \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\lambda} & \frac{\alpha z + w}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \frac{1}{\alpha\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

De la descomposición de Iwasawa,

$$T(\sigma g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = A(\theta, 0, 0), \quad (5.69)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ y cumple que $\alpha = e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Luego,

$$\begin{aligned} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g)^{-1}})} &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{A(\theta, 0, 0)^{-1}})} && \text{por (5.69)} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{A(-\theta, 0, 0)})} \\ &= \overline{e^{-ik\theta} d_{km}^l(0)} && \text{por (3.38)} \\ &= e^{ik\theta} \delta_{km}. && \text{por el corolario (4.2.2)} \end{aligned}$$

□

Sustituyendo (5.64) en (5.63) tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} \sum_{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \\ &= \sum_{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D} \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \\ &= \sum_{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty}} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy. \end{aligned}$$

Pero por la descomposición de Bruhat en (5.66),

$$\begin{aligned} &|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \\ &\sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}_0}} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \\ &+ \sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Transformamos la primer integral de la ecuación (5.70) como sigue:

$$\sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \backslash \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}_0}} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j, I})^{-1}})} \frac{\lambda^{1+s}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D \\ \sigma \in \mathcal{R}_0}} \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} \frac{\overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I)}^{-1})}}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} \lambda^{1+s} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \\
&= \sum_{\substack{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D \\ \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_0}} \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I)}^{-1})}} \lambda^{1+s} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \\
&= \sum_{\substack{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D \\ \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_0}} \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} e^{ik\theta} \delta_{km} \lambda^{1+s} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \quad \text{por el lema (5.4.1)} \\
&= \lambda^{1+s} \delta_{km} \cdot \int_{\mathbb{R}^2/\Gamma'_{D,\infty}} e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle} dx dy \cdot \sum_{\substack{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D \\ \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_0}} e^{ik\theta} \\
&= \lambda^{1+s} \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| \cdot \sum_{\substack{[\sigma] \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D \\ \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_0}} e^{ik\theta} \quad \text{por (5.67)} \\
&= \lambda^{1+s} \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| F_k^D. \quad \text{por (5.68)} \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.71) en (5.70),

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \lambda^{1+s} \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| F_k^D \\
&+ \lambda^{1+s} \sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I)}^{-1})}}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} dx dy. \quad (5.72)
\end{aligned}$$

Ahora, por el lema (5.2.1), si $c \neq 0$ y $z = -\frac{d}{c}$ el valor de $D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I)}^{-1})}$ está bien definido, por esto podemos quitar $z = -\frac{d}{c}$ en la integral de la ecuación (5.72), esto no cambia la integral, luego,

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \lambda^{1+s} \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| F_k^D \\
&+ \lambda^{1+s} \sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{-\frac{d}{c}\}} \frac{\overline{D_{km}^l(\Phi_{T(\sigma g_{z+\sqrt{\lambda}j,I)}^{-1})}}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} dx dy. \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Por (5.15) del lema (5.2.1) la ecuación (5.73) se transforma en:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| F_k^D \\
&+ \sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D/\Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2 - \{-\frac{d}{c}\}} \frac{\overline{D_{km}^l(ROT(\theta, \chi, \phi))}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz+d|^2 + \lambda^2|c|^2]^{1+s}} dx dy, \quad (5.74)
\end{aligned}$$

donde $\theta = \theta(z, \lambda, \sigma)$, $\chi = \chi(z, \lambda, \sigma)$, $\phi = \phi(z, \lambda, \sigma)$.

Ahora recordamos que por la proposición (5.2.4) ecuación (5.43), si $c \neq 0$ y $z \neq -\frac{d}{c}$ entonces

$$D_{km}^l (ROT(\theta, \chi, \phi)) = (-1)^{k+m} C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \cdot M(c)^{k-m} \cdot M(cz + d)^{-k-m}$$

$$\sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t}, \quad (5.75)$$

donde $C_1(r_1, r_2, d_1, d_2)$ y $M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2)$ son constantes dadas en (5.44) y (5.45) respectivamente.

Abreviaremos la suma que aparece en (5.75)

$$\sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} \equiv \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2}.$$

Sustituyendo la fórmula (5.75) en (5.74) tenemos

$$\frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \bar{0}} |\Lambda_D| F_k^D +$$

$$\sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D / \Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2 - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}} (-1)^{k+m} C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \cdot \overline{M(c)^{k-m}} \cdot \overline{M(cz + d)^{-k-m}}.$$

$$\sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot \overline{M(z_1)^{r_1+r_2-2t_1-2t_2+2d_1-2b-2c-4t}} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2]^{1+s}} dx dy.$$

Usando el lema (5.1.1) (h) y reordenando términos,

$$\frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{k,m} \delta_{\gamma, \bar{0}} |\Lambda_D| F_k^D +$$

$$(-1)^{k+m} C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) \sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot \sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D / \Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} M(c)^{-k+m}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2 - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}} M(cz + d)^{k+m} \cdot M(z_1)^{-r_1-r_2+2t_1+2t_2-2d_1+2b+2c+4t} \frac{e^{-2\pi i \langle z, \gamma \rangle}}{[|cz + d|^2 + \lambda^2 |c|^2]^{1+s}} dx dy.$$

Expresión la cual podemos reescribir usando la definición (5.3.1),

$$\frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{km} \delta_{\gamma, \bar{0}} |\Lambda_D| F_k^D + (-1)^{k+m} C_1 \sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2)$$

$$\sum_{\substack{[\sigma]^H \in \Gamma'_{D,\infty} \setminus \Gamma_D / \Gamma'_{D,\infty} \\ \sigma \in \mathcal{R}}} M(c)^{-k+m} \cdot I(s, \gamma, k + m, -r_1 - r_2 + 2t_1 + 2t_2 - 2d_1 + 2b + 2c + 4t, \sigma, \lambda). \quad (5.76)$$

Reconocemos ahora la segunda sumatoria en (5.76) como la sumatoria en la definición (5.3.3), por tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{km} \delta_{\gamma, \bar{0}} |\Lambda_D| F_k^D + \\ & (-1)^{k+m} C_1 \sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \cdot \widehat{\phi}_{-k+m, k+m, -r_1-r_2+2t_1+2t_2-2d_1+2b+2c+4t, \gamma}(\lambda, s). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Finalmente, reescribimos la fórmula (5.77) usando el corolario (5.3.5), concluimos la siguiente:

Proposición 5.4.2. *Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. El coeficiente de Fourier general $b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma$ de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$ está dado por la siguiente fórmula:*

$$\begin{aligned} b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma &= \frac{F_k^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} \delta_{km} \delta_{\gamma, \bar{0}} + \lambda^{1-s} \frac{(-1)^{k+m}}{|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot C_1 \cdot \phi_{2m, \gamma}(s) \\ &\cdot \sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3 \cdot \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(z)^{k+m} M(|z| + i)^{-r_1-r_2+2t_1+2t_2-2d_1+2b+2c+4t} \frac{e^{-2\pi i \lambda \langle z, \gamma \rangle}}{[|z|^2 + 1]^{1+s}} dx dy, \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \min\{l + m, l - m, l + k, l - k\}, \quad (5.78)$$

$$si \ d_1 = \begin{cases} l + m & \text{entonces } r_1 = k - m \ y \ d_2 = k - m \\ l - m & \text{entonces } r_1 = m - k \ y \ d_2 = 0 \\ l + k & \text{entonces } r_1 = m - k \ y \ d_2 = 0 \\ l - k & \text{entonces } r_1 = k - m \ y \ d_2 = k - m \end{cases} \quad (5.79)$$

$$r_2 = 2l - 2d_1 - r_1. \quad (5.80)$$

$$\sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} \equiv \sum_{a=0}^{d_1} \sum_{b=0}^{d_1-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{d_1-b-c} \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2}, \quad (5.81)$$

$$C_1 = C_1(r_1, r_2, d_1, d_2) = \frac{(-1)^{d_2}}{2^{r_1+r_2+2d_1} i^{r_1}} \binom{2l - d_1}{d_1 + r_1}^{\frac{1}{2}} \binom{d_1 + r_2}{r_2}^{-\frac{1}{2}} (d_1 + r_1)! (d_1 + r_2)!, \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M_3(a, b, c, t, t_1, d_1, r_1, r_2) \\ &= (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{r_1}{t_1} \binom{r_2}{t_2} \binom{d_1 - b - c}{t} \binom{d_1 - a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(d_1 + r_1 - a)! a! (r_2 + a)! (d_1 - a)!}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

y con

$$\phi_{2m, \gamma}(s) = \sum_{\substack{(* \ *) \in \Gamma_D \\ c \neq 0, d \text{ mod}_{\Lambda_D} c}} \frac{M(c)^{2m} e^{2\pi i \langle \frac{d}{c}, \gamma \rangle}}{|c|^{2+2s}}.$$

5.5 — Coeficiente cero

5.5.1 — Coeficiente cero $b_{km}^l(\lambda, s)_{\vec{0}}$, donde $k \neq -m$.

Con la notación de la proposición (5.4.2) y la identidad en (5.77) sabemos

$$\begin{aligned} & \frac{|\Lambda_D|}{\lambda^{1+s}} \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot b_{km}^l(\lambda, s)_\gamma = \delta_{km} \delta_{\gamma, \vec{0}} |\Lambda_D| F_k^D + \\ & (-1)^{k+m} C_1 \sum_{a,b,c,t,t_1,t_2} M_3 \cdot \widehat{\phi}_{-k+m, k+m, -r_1-r_2+2t_1+2t_2-2d_1+2b+2c+4t, \vec{0}}(\lambda, s). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Ahora, por el corolario (5.3.5), ecuación (5.52), sabemos que si $k_1 \neq 0$

$$\widehat{\phi}_{r, k_1, k_2, \vec{0}}(\lambda, s) = 0, \quad \forall r, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.85)$$

De las ecuaciones en (5.85) y (5.84) concluimos que si $k \neq -m$ entonces

$$b_{km}^l(\lambda, s)_{\vec{0}} = 0.$$

5.5.2 — Coeficiente cero caso $b_{k,-k}^l(\lambda, s)_{\vec{0}}$, donde $m = -k$ y $k \geq 0$.

De las identidades (5.78), (5.79) y (5.80) calculamos rápidamente que

$$d_1 = l - k, \quad r_1 = d_2 = 2k, \quad r_2 = 0.$$

La suma en (5.81) queda como

$$\sum_{a,b,c,t,t_1} = \sum_{a=0}^{l-k} \sum_{b=0}^{l-k-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{l-k-b-c} \sum_{t_1=0}^{2k}.$$

La constante C_1 en (5.82) se transforma a

$$C_1 = \frac{(-1)^{2k}}{2^{2k+2l-2k} i^{2k}} \binom{2l-l+k}{l-k+2k}^{\frac{1}{2}} \binom{l-k}{0}^{-\frac{1}{2}} (l-k+2k)! (l-k)! = \frac{(-1)^k}{2^{2l}} (l+k)! (l-k)!.$$

La constante M_3 en (5.83) se reduce a

$$M_3 = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{2k}{t_1} \binom{l-k-b-c}{t} \binom{l-k-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(l+k-a)! (l-k-a)! a! a!}.$$

También necesitamos la siguiente suma,

$$\begin{aligned} -r_1 - r_2 + 2t_1 + 2t_2 - 2d_1 + 2b + 2c + 4t &= -2k + 2t_1 - 2(l-k) + 2b + 2c + 4t + \\ &= 2b + 2c + 4t + 2t_1 - 2l. \end{aligned}$$

Por lo que de la proposición (5.4.2), tenemos

$$b_{k,-k}^l(\lambda, s)_{\vec{0}} = \frac{F_k^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} \delta_{k,-k} +$$

$$\lambda^{1-s} \frac{(-1)^k (l+k)! (l-k)!}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \phi_{-2k, \bar{0}}(s) \cdot \sum_{a,b,c,t,t_1} M_3 \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(|z|+i)^{2b+2c+4t+2t_1-2l} \frac{dx dy}{[|z|^2+1]^{1+s}}.$$

Pero por el corolario (5.3.8),

$$\int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} M(|z|+i)^{2b+2c+4t+2t_1-2l} \frac{dx dy}{[|z|^2+1]^{1+s}} = 2\pi \sum_{n=0}^{|k_2|} \binom{|k_2|}{n} (Sgn k_2)^n i^n \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2\Gamma(1+s + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2})}$$

donde

$$k_2 = 2b + 2c + 4t + 2t_1 - 2l.$$

Por lo que obtenemos la siguiente:

Proposición. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \in [0, l]$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. El coeficiente cero de Fourier $b_{k,-k}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$ de las series $E_{k,-k}^l(z, \lambda, s)$ está dado por la siguiente fórmula:

$$b_{k,-k}^l(\lambda, s)_{\bar{0}} = \frac{F_k^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} \delta_{k,-k} + \lambda^{1-s} \frac{2\pi (-1)^k (l+k)! (l-k)!}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \phi_{-2k, \bar{0}}(s) \cdot \Theta_{k,-k}^l(s), \quad (5.86)$$

donde

$$\Theta_{k,-k}^l(s) := \sum_{a,b,c,t,t_1} M_3 \sum_{n=0}^{|k_2|} \binom{|k_2|}{n} (Sgn k_2)^n i^n \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2\Gamma(1+s + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2})},$$

con

$$k_2 = 2b + 2c + 4t + 2t_1 - 2l,$$

y

$$M_3 = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{2k}{t_1} \binom{l-k-b-c}{t} \binom{l-k-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(l+k-a)! (l-k-a)! a! a!}.$$

además, por (5.51)

$$\phi_{-2k, \bar{0}}(s) = \sum_{\substack{c \neq 0, \\ d \pmod{\Lambda_D} c}} \binom{*}{c} \binom{*}{d} \frac{M(c)^{-2k}}{|c|^{2+2s}}.$$

Más aún, sea $R_D \in \mathbb{N}$ definida como sigue:

$$R_D := \begin{cases} 2 & \text{si } D = 1 \\ 3 & \text{si } D = 3 \\ 1 & \text{si } D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}. \end{cases}$$

Por el teorema (1.3.17), si $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_D k \in [0, l]$ se cumple

$$b_{R_D k, -R_D k}^l(\lambda, s)_{\bar{0}} = \frac{F_{R_D}^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} \delta_{k,-k} + \lambda^{1-s} \frac{2\pi (l+R_D k)! (l-R_D k)!}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{L(s, \chi_{-2R_D k})}{L(s+1, \chi_{-2R_D k})} \cdot \Theta_{R_D k, -R_D k}^l(s). \quad (5.87)$$

5.5.3 — Coeficiente cero caso $b_{0,0}^0(\lambda, s)_{\bar{0}}$.

Como $l = k = m = 0$ por el caso anterior tenemos que $d_1 = l$, $r_1 = r_2 = d_2 = 0$. Además, vemos que $M_3 = 1$ y entonces se sigue de (5.87) la siguiente identidad:

$$b_{00}^0(\lambda, s)_{\bar{0}} = \frac{F_0^D}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \lambda^{1+s} + 2\pi \lambda^{1-s} \cdot \frac{1}{|\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{L(s, \chi_0)}{L(s+1, \chi_0)} \cdot \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(s)}{2\Gamma(1+s)}.$$

Como $\text{Re}(s) > 1 > 0$ se cumple que $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s)$, además, $F_0^D = [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]$, por lo que podemos reescribir

$$b_{00}^0(\lambda, s)_{\bar{0}} = \lambda^{1+s} + \lambda^{1-s} \frac{\pi}{s |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{L(s, \chi_0)}{L(s+1, \chi_0)}.$$

Pero en el ejemplo (1.2.5) se vió que $L(s, \chi_0) = \zeta_D(s)$, por lo que

$$b_{00}^0(\lambda, s)_{\bar{0}} = \lambda^{1+s} + \lambda^{1-s} \frac{\pi}{s |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{\zeta_D(s)}{\zeta_D(s+1)}, \quad \text{Re}(s) > 1.$$

5.5.4 — Coeficiente cero caso $b_{-m,m}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$, donde $k = -m$ y $m \geq 0$.

De las identidades (5.78), (5.79) y (5.80) calculamos

$$d_1 = l - m, \quad r_1 = 2m, \quad d_2 = r_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \min\{l - m, l + m\} = l - m. \\ r_1 &= m - k = 2m. \\ d_2 &= 0. \\ r_2 &= 2l - 2(l - m) - 2m = 0. \end{aligned}$$

La suma en (5.81) queda como

$$\sum_{a,b,c,t,t_1} \equiv \sum_{a=0}^{l-m} \sum_{b=0}^{l-m-a} \sum_{c=0}^a \sum_{t=0}^{l-m-b-c} \sum_{t_1=0}^{2m}.$$

La constante C_1 en (5.82) se reduce a

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(-1)^0}{2^{2m+2l-2m} i^{2m}} \binom{2l-l+m}{l-m+2m}^{\frac{1}{2}} \binom{l-m}{0}^{-\frac{1}{2}} (l-m+2m)! (l-m)! \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2l}} (l+m)! (l-m)!. \end{aligned}$$

La constante M_3 en (5.83) queda

$$M_3 = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{2m}{t_1} \binom{l-m-b-c}{t} \binom{l-m-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(l+m-a)! (l-m-a)! a! a!}.$$

También necesitamos la siguiente suma,

$$\begin{aligned} -r_1 - r_2 + 2t_1 + 2t_2 - 2d_1 + 2b + 2c + 4t &= -2m + 2t_1 - 2(l - m) + 2b + 2c + 4t \\ &= 2b + 2c + 4t + 2t_1 - 2l. \end{aligned}$$

El coeficiente cero de Fourier $b_{-m,m}^l(\lambda, s)_{\bar{0}}$ de las series $E_{-m,m}^l(z, \lambda, s)$ está dado por:

$$b_{-m,m}^l(\lambda, s)_{\bar{0}} = \frac{F_{-m}^D}{[\Gamma_{\infty} : \Gamma'_{\infty}]} \lambda^{1+s} \delta_{-m,m} + \lambda^{1-s} \frac{2\pi (-1)^m (l+m)! (l-m)!}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_{\infty} : \Gamma'_{\infty}]} \cdot \phi_{2m, \bar{0}}(s) \cdot \Theta_{-m,m}^l(s),$$

donde

$$\Theta_{-m,m}^l(s) := \sum_{a,b,c,t,t_1} M_3 \sum_{n=0}^{|k_2|} \binom{|k_2|}{n} (\text{Sgn } k_2)^n i^n \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2} - \frac{n}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{n}{2})}{2 \Gamma(1 + s + \frac{|2b+2c+4t+2t_1-2l|}{2})},$$

con

$$k_2 = 2b + 2c + 4t + 2t_1 - 2l,$$

$$M_3 = (-1)^{b+t_1} 2^{b+c} \binom{2m}{t_1} \binom{l-m-b-c}{t} \binom{l-m-a}{b} \binom{a}{c} \frac{1}{(l+m-a)! (l-m-a)! a! a!}.$$

Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $R_D m \in [0, l]$ se cumple

$$\begin{aligned} b_{-R_D m, R_D m}^l(\lambda, s)_{\bar{0}} &= \frac{F_{-R_D m}^D}{[\Gamma_{\infty} : \Gamma'_{\infty}]} \lambda^{1+s} \delta_{-m,m} + \\ &\lambda^{1-s} \frac{2\pi (l + R_D m)! (l - R_D m)!}{2^{2l} \cdot |\Lambda_D| \cdot [\Gamma_{\infty} : \Gamma'_{\infty}]} \cdot \frac{L(s, \chi_{2R_D m})}{L(s+1, \chi_{2R_D m})} \cdot \Theta_{-R_D m, R_D m}^l(s). \end{aligned}$$

5.6 — Expansión de Fourier de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$

En esta sección veremos que la expansión de Fourier de las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ está determinada por la expansión de Fourier de las series $E_{am}^l(z, \lambda, s)$.

Lema 5.6.1. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $B \in SU(2)$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j, K} \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$f_{km}^l(gB, s) = \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}})} \cdot f_{am}^l(g, s).$$

Demostración. De la definición en (4.3.2),

$$f_{km}^l(gB, s) = \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(gB)^{-1}})} \text{Im } gB(j)^{1+s}. \quad (5.88)$$

Pero por (3.9),

$$B(j) = g_{j,B}(j) = j. \quad (5.89)$$

Además,

$$\begin{aligned}
\Phi_{T(gB)^{-1}} &= \Phi_{T(g_{z+\sqrt{\lambda}j,K}B)^{-1}} \\
&= \Phi_{T(g_{z+\sqrt{\lambda}j,K}B)^{-1}} = \Phi_{(KB)^{-1}} \\
&= \Phi_{B^{-1}K^{-1}} = \Phi_{B^{-1}} \circ \Phi_{T(g)^{-1}}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
D_{km}^l(\Phi_{T(gB)^{-1}}) &= D_{km}^l(\Phi_{B^{-1}} \circ \Phi_{T(g)^{-1}}) && \text{por (5.90)} \\
&= \sum_{a=-l}^l D_{am}^l(\Phi_{T(g)^{-1}}) \cdot D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}}). && \text{por el lema (4.2.1)}.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Sustituyendo (5.89) y (5.91) en (5.88) obtenemos que

$$\begin{aligned}
f_{km}^l(gB, s) &= \sum_{a=-l}^l \overline{D_{am}^l(\Phi_{T(g)^{-1}})} \cdot \overline{D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}})} \operatorname{Im} g(j)^{1+s} \\
&= \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}})} \cdot \overline{D_{am}^l(\Phi_{T(g)^{-1}})} \operatorname{Im} g(j)^{1+s} \\
&= \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}})} \cdot f_{am}^l(g, s).
\end{aligned}$$

□

De (4.73) y el lema (5.6.1) anterior obtenemos el siguiente:

Corolario 5.6.2.

$$\widehat{E}_{km}^l(gB, s) = \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{B^{-1}})} \cdot \widehat{E}_{am}^l(g, s).$$

Consideremos ahora $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j,K} \in SL(2, \mathbb{C})$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_{km}^l(g_{z+\sqrt{\lambda}j,K}, s) &= \widehat{E}_{km}^l(g_{z+\sqrt{\lambda}j,I}K, s) \\
&= \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot \widehat{E}_{am}^l(g_{z+\sqrt{\lambda}j,I}, s) && \text{por el corolario (5.6.2)} \\
&= \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot E_{am}^l(z, \lambda, s). && \text{por (4.79)}
\end{aligned}$$

Corolario 5.6.3. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, $g = g_{z+\sqrt{\lambda}j,K} \in SL(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$\widehat{E}_{km}^l(g, s) = \sum_{a=-l}^l \overline{D_{ka}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot E_{am}^l(z, \lambda, s).$$

Operadores H -invariantes en $SL(2, \mathbb{C})$

Hacemos una serie de analogías entre algunos hechos relevantes para las series de Eisenstein en dimensión 2 (usando el grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$) y para dimensión 3 (usando el grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$). Explicaremos todas las afirmaciones para el último caso.

Consideremos el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ y la involución $\Theta : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$ dada por:

$$\Theta(q) = q^{-T}, \quad (6.1)$$

se verifica

$$d\Theta_I(X) = -X^T, \quad \forall X \in sl(2, \mathbb{R}).$$

Usando la forma bilineal de Killing B se puede definir una métrica Riemanniana g izquierda invariante en $SL(2, \mathbb{R})$ por medio de la siguiente fórmula:

$$g(X, Y) = -B(\theta X, Y) = \text{Tr}(ad_{X^T} \circ ad_Y), \quad \forall X, Y \in sl(2, \mathbb{R}),$$

y donde $\theta := d\Theta_I$.

Sea P la subvariedad de $SL(2, \mathbb{R})$ definida por

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & x \\ x & \lambda_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}); \lambda_1 > 0 \right\}. \quad (6.2)$$

La descomposición polar de $SL(2, \mathbb{R})$ permite descomponerlo

$$SL(2, \mathbb{R}) \cong P \cdot SO(2) \quad (6.3)$$

donde

$$P = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}); a > 0, \Theta(q) = q^{-1} \right\}, \quad (6.4)$$

$$SO(2) = \{q \in G; \Theta(q) = q\}. \quad (6.5)$$

Hay también una descomposición en el álgebra de Lie:

$$sl(2, \mathbb{R}) \cong \mathcal{B} \oplus so(2), \quad (6.6)$$

donde

$$\mathcal{B} = \langle X_1, X_2 \rangle, \quad so(2) = \langle A_1 \rangle,$$

con

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Además, se cumple

$$e^{\mathcal{B}} = P, \quad e^{so(2)} = SO(2). \quad (6.8)$$

Hay una acción del grupo $SL(2, \mathbb{R}) \times SO(2)$ en $SL(2, \mathbb{R})$

$$(\gamma, K)q = \gamma q K^{-1}, \quad \forall q \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (6.9)$$

De hecho, el grupo $SL(2, \mathbb{R}) \times SO(2)$ actúa transitivamente y por isometrías en $(SL(2, \mathbb{R}), g)$.

Por otra parte, se puede definir una cierta isometría fija $\mu : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ tal que cumple las siguientes identidades $\mu(I) = I$, $\mu^2 = Id$, además de la siguiente ecuación:

$$d\mu_I(X) = -X, \quad \forall X \in sl(2, \mathbb{R}). \quad (6.10)$$

Esto implica, ver lema (2.4.2), que el triple $((SL(2, \mathbb{R}), g), H, \mu)$ es un espacio débilmente simétrico. Una consecuencia de este hecho es que el álgebra \mathcal{A} generada por los dos siguientes operadores:

$$\mathcal{A} = \langle A_1, X_1^2 + X_2^2 \rangle \quad (6.11)$$

es conmutativa. Esto es,

$$[A_1, X_1^2 + X_2^2] = 0. \quad (6.12)$$

Conviene decir que en este caso es fácil probar directamente la identidad (6.12). Tenemos que el álgebra de operadores diferenciables H -invariantes en $SL(2, \mathbb{R})$, es decir $L(\mathcal{A})$, es conmutativa, donde $L : \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{R})_{\mathbb{R}}) \rightarrow IDO(G)$, ver definición (2.3.2).

Sea $G = SL(2, \mathbb{C})$, en la sección 1 recordamos un teorema sobre involuciones para grupos de Lie semisimples (teorema (6.1.1)) y damos una involución de Cartan $\Theta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ (definición (6.1.2)), que generaliza (6.1). También recordamos la forma bilineal de Killing (definición (6.1.4)), usando la forma de Killing se construye una forma bilineal definida positiva en $sl(2, \mathbb{C})$ (definición (6.1.5)), que nos permite dar una métrica Riemanniana izquierda invariante en G y que se denotará por g .

Además, en la sección 1 estudiaremos la acción del grupo $H = SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ en $SL(2, \mathbb{C})$, análoga a la acción (6.9) en $SL(2, \mathbb{R})$. También daremos algunos lemas técnicos que nos permitirán demostrar que $SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ actúa por isometrías en $(SL(2, \mathbb{C}), g)$ (corolario (6.1.11)).

En la sección 2 introducimos la subvariedad P (definición (6.2.1)), que generaliza a la subvariedad también denotada P de $SL(2, \mathbb{R})$ y definida en (6.2), y nos permite hacer la descomposición polar de $SL(2, \mathbb{C})$ (definición (6.2.4))

$$SL(2, \mathbb{C}) \cong P \cdot SU(2),$$

donde

$$P = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G; a > 0, \Theta(q) = q^{-1} \right\},$$

$$SU(2) = \{q \in G; \Theta(q) = q\}.$$

Hechos que generalizan (6.3), (6.4) y (6.5) respectivamente. De nuevo, hay una descomposición correspondiente en el álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{C})$, veremos

$$\begin{aligned} su(2) &= \{X \in sl(2, \mathbb{C}); \theta(X) = X\}, \\ isu(2) &= \{X \in sl(2, \mathbb{C}); \theta(X) = -X\}, \end{aligned}$$

donde $\theta := d\Theta_I$, entonces:

$$sl(2, \mathbb{C}) \cong isu(2) \oplus su(2).$$

Fórmula análoga a (6.6). Hay una relación

$$e^{isu(2)} = P, \quad e^{su(2)} = SU(2).$$

La primer identidad la probaremos en el lema (6.2.7), las fórmulas anteriores son el análogo a (6.8).

En la sección 3 primero demostraremos que la involución de Cartan Θ es una isometría en (G, g) (lema (6.3.3)). Después definimos una cierta función $f : G \rightarrow G$ (definición (6.3.4)) que resultará ser también una isometría (lema (6.3.6)). Usando f y Θ podemos construir otra isometría $\mu : G \rightarrow G$ que cumple las siguientes condiciones: $\mu(I) = I$, $\mu^2 = Id$ y la siguiente identidad,

$$d\mu_I(X) = -X, \quad \forall X \in sl(2, \mathbb{C}),$$

lo cual generaliza (6.10). Por el lema (2.4.2), el triple $((SL(2, \mathbb{C}), g), H, \mu)$ es un espacio débilmente simétrico. Esto implica que $L(\mathcal{A})$, el álgebra de operadores diferenciables de todos los órdenes y H -invariantes en G es un álgebra conmutativa.

En la sección 4 damos la base del álgebra \mathcal{A} , son tres polinomios de orden dos que denotaremos por $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ y \mathcal{O}_3 . Demostraremos directamente (sin usar espacios débilmente simétricos) que \mathcal{A} es un álgebra conmutativa, verificando

$$[\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1] = [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] = [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] = 0,$$

hechos que demostraremos en los lemas (6.4.6), (6.4.7) y (6.4.8). Dicho resultado generaliza (6.12).

6.1 — Métrica en $SL(2, \mathbb{C})$ e isometrías

En este capítulo usaremos el grupo de Lie $G = SL(2, \mathbb{C})$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$. Por el momento trabajaremos con la base de \mathfrak{g} (tomada de la tesis de Lokvenec-Guleska [12] página 11), y dada por $\{H_1, H_2, V_1, V_2, W_1, W_2\}$ donde,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & V_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & V_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ H_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & W_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & W_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una base para $su(2)$ está dada por:

$$su(2) = \langle H_2, W_1, W_2 \rangle,$$

y una base para $isu(2)$ está dada por:

$$isu(2) = \langle H_1, V_1, V_2 \rangle,$$

ya que

$$\begin{aligned} iH_2 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -H_1, \\ iW_1 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = V_2, \\ iW_2 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -V_1. \end{aligned}$$

Tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$sl(2, \mathbb{C}) \cong su(2) \oplus isu(2) = \langle H_2, W_1, W_2, H_1, V_2, V_1 \rangle.$$

Teorema 6.1.1. *Sea G un grupo de Lie semisimple conexo de tipo no compacto, por ejemplo: $SL(2, \mathbb{C})$, que es el caso que aquí nos interesa. Existe una función, llamada **involución de Cartan**, $\Theta : G \rightarrow G$ (que no es única) tal que cumple las siguientes condiciones:*

- (a) $\Theta^2 = I$.
- (b) $\Theta(h_1 h_2) = \Theta(h_1) \Theta(h_2)$, $\forall h_1, h_2 \in G$.
- (c) $\Theta(h) = h \iff h \in K$, donde K es el **subgrupo compacto maximal**.

Definición 6.1.2. Una involución de Cartan $\Theta : G \rightarrow G$ para $G = SL(2, \mathbb{C})$ está dada por:

$$\Theta(q) = \bar{q}^{-T}.$$

Lema 6.1.3. *Se cumple la siguiente identidad:*

$$d\Theta_I(X) = -\bar{X}^T, \quad \forall X \in sl(2, \mathbb{C}).$$

Demostración. Sean $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = X \in \mathfrak{g}$, la curva toma la forma siguiente:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$X = \alpha'(0) = \begin{pmatrix} a'(0) & b'(0) \\ c'(0) & d'(0) \end{pmatrix},$$

donde

$$\text{Tr } X = a'(0) + d'(0) = 0. \tag{6.13}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha(t)) &= \begin{pmatrix} \overline{a(t)} & \overline{b(t)} \\ \overline{c(t)} & \overline{d(t)} \end{pmatrix}^{-T} && \text{por la definición (6.1.2)} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{d(t)} & -\overline{b(t)} \\ -\overline{c(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \\ -\overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \Theta(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \overline{d'(0)} & \overline{-c'(0)} \\ -\overline{b'(0)} & \overline{a'(0)} \end{pmatrix},$$

pero por (6.13)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 \Theta(\alpha(t)) &= \begin{pmatrix} \overline{-a'(0)} & \overline{-c'(0)} \\ -\overline{b'(0)} & \overline{-d'(0)} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \overline{a'(0)} & \overline{c'(0)} \\ \overline{b'(0)} & \overline{d'(0)} \end{pmatrix} = -\overline{X}^T. \end{aligned}$$

□

Con el fin de no cargar la notación, denotaremos a $d\Theta_I$ como θ , no debería esto confundir porque Θ actúa en el grupo G y θ actúa en vectores de \mathfrak{g} .

Definición 6.1.4. La **forma bilineal de Killing**, $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por la fórmula siguiente:

$$B(X, Y) = \text{Tr}(ad_X \circ ad_Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se cumple que:

$$\begin{aligned} B(H_1, H_1) &= B(V_1, V_1) = B(V_2, V_2) = 4, \\ B(H_2, H_2) &= B(W_1, W_1) = B(W_2, W_2) = -4. \end{aligned}$$

Por lo que B es una forma bilineal de signatura $(3, 3)$.

La acción de θ en la base está dada por:

$$\begin{aligned} \theta(\{H_2, W_1, W_2\}) &= (\{H_2, W_1, W_2\}) \\ \theta(\{H_1, V_1, V_2\}) &= (\{-H_1, -V_1, -V_2\}). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Definición 6.1.5. La **forma bilineal g** en \mathfrak{g} , $g : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida como sigue:

$$g(X, Y) = -B(\theta X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Después de unas cuentas largas pero muy simples se prueba que la forma bilineal g es positiva definida, y donde $\{H_1, V_1, V_2, H_2, W_1, W_2\}$ es una base ortogonal, más exactamente:

$$g(H_1, H_1) = g(V_1, V_1) = g(V_2, V_2) = g(H_2, H_2) = g(W_1, W_1) = g(W_2, W_2) = 4.$$

Podemos extender la forma bilineal g a una métrica Riemanniana izquierda invariante en $G = SL(2, \mathbb{C})$, a la cual también denotaremos como g .

Ponemos aquí la lista (con repeticiones) de la estructura de álgebra de Lie en $sl(2, \mathbb{C})$.

$$\begin{array}{lll}
[H_1, H_1] = 0 & [V_1, H_1] = -W_1 & [V_2, H_1] = -W_2 \\
[H_1, V_1] = W_1 & [V_1, V_1] = 0 & [V_2, V_1] = H_2 \\
[H_1, V_2] = W_2 & [V_1, V_2] = -H_2 & [V_2, V_2] = 0 \\
[H_1, W_1] = V_1 & [V_1, W_1] = -H_1 & [V_2, W_1] = 0 \\
[H_1, W_2] = V_2 & [V_1, W_2] = 0 & [V_2, W_2] = -H_1 \\
[H_1, H_2] = 0 & [V_1, H_2] = -V_2 & [V_2, H_2] = V_1 \\
\\
[H_2, H_1] = 0 & [W_1, H_1] = -V_1 & [W_2, H_1] = -V_2 \\
[H_2, V_1] = V_2 & [W_1, V_1] = H_1 & [W_2, V_1] = 0 \\
[H_2, V_2] = -V_1 & [W_1, V_2] = 0 & [W_2, V_2] = H_1 \\
[H_2, W_1] = W_2 & [W_1, W_1] = 0 & [W_2, W_1] = -H_2 \\
[H_2, W_2] = -W_1 & [W_1, W_2] = H_2 & [W_2, W_2] = 0 \\
[H_2, H_2] = 0 & [W_1, H_2] = -W_2 & [W_2, H_2] = W_1.
\end{array}$$

Necesitaremos también los siguientes resultados.

Lema 6.1.6. Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\Theta(e^X) = e^{\theta(X)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\Theta(e^X) &= \left(\overline{e^X}\right)^{-T} \\
&= \left(e^{\overline{X}}\right)^{-T} = \left(\left(e^{\overline{X}}\right)^{-1}\right)^T \\
&= \left(e^{-\overline{X}}\right)^T = e^{-\overline{X}^T} \\
&= e^{\theta(X)} \qquad \text{por el lema (6.1.3)}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.1.7. Se cumple la siguiente identidad:

$$\theta \circ Ad_K X = Ad_K \theta(X), \quad \forall K \in SU(2), \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\theta \circ Ad_K X &= \theta\left(Ad_K\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tX}\right)\right) \\
&= \theta\left(K\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tX}\right)K^{-1}\right) = \theta\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 K e^{tX} K^{-1}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Theta(K e^{tX} K^{-1}) \qquad \text{ya que } \theta = d\Theta_I \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Theta(K)\Theta(e^{tX})\Theta(K^{-1}) \qquad \text{por el teorema (6.1.1) (b)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 K\Theta(e^{tX})K^{-1} \qquad \text{por el teorema (6.1.1) (c)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 K e^{\theta(tX)} K^{-1} = \frac{d}{dt}\Big|_0 K e^{t\theta(X)} K^{-1} \qquad \text{por el lema (6.1.6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 e^{t\theta(X)} \right) K^{-1} = K\theta(X)K^{-1} \\
&= Ad_K\theta(X).
\end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos dice que la métrica g en G es invariante por la representación Adjunta de $SU(2)$.

Lema 6.1.8. *Si $K \in SU(2)$, entonces*

$$g(Ad_K X, Ad_K Y) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Demostración. Si $Z \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$\begin{aligned}
Ad_K \circ ad_X \circ Ad_{K^{-1}} Z &= Ad_K[X, Ad_{K^{-1}} Z] \\
&= [Ad_K X, Ad_K \circ Ad_{K^{-1}} Z] && \text{por el lema (2.2.2) (d)} \\
&= [Ad_K X, Ad_I Z] && \text{por el lema (2.2.2) (a)} \\
&= [Ad_K X, Z] && \text{por el lema (2.2.2) (b)} \\
&= ad_{Ad_K X} Z.
\end{aligned}$$

Por lo que hemos demostrado la siguiente identidad:

$$ad_{Ad_K X} = Ad_K \circ ad_X \circ Ad_{K^{-1}}. \quad (6.15)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g(Ad_K X, Ad_K Y) &= -B(\theta \circ Ad_K X, Ad_K Y) && \text{por la definición (6.1.5)} \\
&= -B(Ad_K \theta(X), Ad_K Y) && \text{por el lema (6.1.7)} \\
&= -\text{Tr}(ad_{Ad_K \theta(X)} \circ ad_{Ad_K Y}) && \text{por la definición (6.1.4)} \\
&= -\text{Tr}(Ad_K \circ ad_{\theta(X)} \circ Ad_{K^{-1}} \circ Ad_K \circ ad_Y \circ Ad_{K^{-1}}) && \text{por (6.15)} \\
&= -\text{Tr}(Ad_K \circ ad_{\theta(X)} \circ Ad_I \circ ad_Y \circ Ad_{K^{-1}}) && \text{por el lema (2.2.2) (a)} \\
&= -\text{Tr}(Ad_K \circ ad_{\theta(X)} \circ ad_Y \circ Ad_{K^{-1}}) && \text{por el lema (2.2.2) (b)} \\
&= -\text{Tr}(Ad_K \circ ad_{\theta(X)} \circ ad_Y \circ Ad_K^{-1}) && \text{por el lema (2.2.2) (c)} \\
&= -\text{Tr}(ad_{\theta(X)} \circ ad_Y) \\
&= -B(\theta(X), Y) && \text{por la definición (6.1.4)} \\
&= g(X, Y). && \text{por la definición (6.1.5)}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.1.9. *La métrica Riemanniana g de G es invariante a la derecha por $SU(2)$.*

Demostración. Sea $K \in SU(2)$, $R_K : G \rightarrow G$ es la traslación derecha por K , es decir,

$$R_K(h) = hK, \quad \forall h \in G.$$

R_K es una isometría en $(G, g) \iff$

$$g(d(L_{K^{-1}})_K \circ d(R_K)_I X, d(L_{K^{-1}})_K \circ d(R_K)_I Y) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (6.16)$$

Por otro lado, sea $q \in G$ y observemos

$$L_{K^{-1}} \circ R_K(q) = L_{K^{-1}}(qK) = K^{-1}qK = \Psi_{K^{-1}}(q).$$

Esto es,

$$L_{K^{-1}} \circ R_K = \Psi_{K^{-1}}. \quad (6.17)$$

Sea $X \in \mathfrak{g}$, se tiene la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} d(L_{K^{-1}})_K \circ d(R_K)_I X &= d(L_{K^{-1}} \circ R_K)_I X \\ &= d(\Psi_{K^{-1}})_I X && \text{por (6.17)} \\ &= Ad_{K^{-1}} X. && \text{por la definición (2.2.1)} \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$d(L_{K^{-1}})_K \circ d(R_K)_I = Ad_{K^{-1}}. \quad (6.18)$$

Por (6.16) y (6.18) R_K con $K \in SU(2)$ es una isometría en $(G, g) \iff$

$$g(Ad_{K^{-1}} X, Ad_{K^{-1}} Y) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

el lema (6.1.8) prueba esta identidad. □

Definición 6.1.10. El grupo $H := SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ actúa en $G = SL(2, \mathbb{C})$. La acción está dada por la fórmula siguiente:

$$(\gamma, K)q = \gamma q K^{-1}, \quad \forall q \in G.$$

Veamos que esto define una acción. Sean $(\gamma, A), (\sigma, B) \in H, q \in G$, entonces

$$\begin{aligned} (\gamma, A) \left((\sigma, B) q \right) &= (\gamma, A) \left(\sigma q B^{-1} \right) \\ &= \gamma (\sigma q B^{-1}) A^{-1} = (\gamma \sigma) q (B^{-1} A^{-1}) \\ &= (\gamma \sigma) q (AB)^{-1} = (\gamma \sigma, AB) q \\ &= ((\gamma, A) \cdot (\sigma, B)) q. \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $q \in G$, se cumple

$$\begin{aligned} (\gamma, K)q &= \gamma q K^{-1} \\ &= L_\gamma \circ R_{K^{-1}}(q). \end{aligned}$$

Sabemos que la métrica Riemanniana g en G es invariante a la izquierda por $SL(2, \mathbb{C})$, por lo que las traslaciones izquierdas L_γ son isometrías. Por el lema (6.1.9) las traslaciones a la derecha R_K , con elementos en $SU(2)$ son isometrías. Como la composición de isometrías es isometría se sigue que la acción de $SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ en G es por isometrías. Esto es, hemos demostrado el siguiente:

Corolario 6.1.11. H actúa por isometrías en (G, g) .

6.2 — Descomposición polar

Definición 6.2.1. Sea P la subvariedad de $SL(2, \mathbb{C})$ definida por la siguiente igualdad:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix} \in G; \lambda_1 \in \mathbb{R}^+, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lema 6.2.2.

$$\left\{ q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G; a > 0, \Theta(q) = q^{-1} \right\} = P.$$

Demostración. \subseteq) Sea $q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, luego

$$\begin{aligned} \Theta(q) &= \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}^{-T} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pero

$$q^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

por lo que si $\Theta(q) = q^{-1}$ se cumplen las siguientes identidades: $\bar{d} = d$, $\bar{a} = a > 0$, $b = \bar{c}$, luego

$$q = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in P.$$

\supseteq) Sea

$$q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix} \in P \text{ con } \lambda_1 > 0. \text{ Se tiene}$$

$$\begin{aligned} \Theta(q) &= \overline{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix}}^{-T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & z \\ \bar{z} & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-T} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\bar{z} \\ -z & \lambda_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

además,

$$q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\bar{z} \\ -z & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

por lo que $\Theta(q) = q^{-1}$. □

Por el teorema (6.1.1) (c) sabemos que la involución de Cartan Θ fija el subgrupo compacto maximal. Por completez damos la demostración para $G = SL(2, \mathbb{C})$.

Lema 6.2.3.

$$\{q \in G; \Theta(q) = q\} = SU(2).$$

Demostración. \subseteq) Sea $q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Luego

$$\begin{aligned}\Theta(q) &= \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}^{-T} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si $\Theta(q) = q$ se cumplen las siguientes identidades: $d = \bar{a}$ y $c = -\bar{b}$, luego

$$q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

⊇) Sea

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2). \text{ Luego}$$

$$\begin{aligned}\Theta(q) &= \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}}^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-T} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = q.\end{aligned}$$

□

Definición 6.2.4. Si $q \in G$, existen $b \in P$ y $K \in SU(2)$ (únicos) tales que q se puede escribir de manera única como:

$$q = bK.$$

Esta descomposición es conocida como **descomposición polar** de q .

De los lemas (6.2.2) y (6.2.3) vemos que la descomposición polar es equivalente a:

$$G \cong \left\{ q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G; a > 0, \Theta(q) = q^{-1} \right\} \cdot \left\{ q \in G; \Theta(q) = q \right\} = P \cdot SU(2).$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$ se divide naturalmente en dos subespacios vectoriales como sigue:

$$\mathfrak{g} \cong \{X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = -X\} \oplus \{X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = X\} \cong isu(2) \oplus su(2).$$

Las subvariedades P y $SU(2)$ de G se corresponden con los subespacios $isu(2)$ y $su(2)$ de \mathfrak{g} de la siguiente manera,

$$e^{isu(2)} = P, \quad e^{su(2)} = SU(2).$$

Hechos que demostraremos en los siguientes lemas.

Lema 6.2.5.

$$\{X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = X\} = su(2).$$

Demostración. \supseteq) Si $X \in su(2)$, existe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow SU(2) \subset G$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = X$. Por el lema (6.2.3), $\Theta(\alpha(t)) = \alpha(t)$. Derivando,

$$\frac{d}{dt}\Theta(\alpha(t)) = \alpha'(t),$$

y entonces

$$\theta(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Theta(\alpha(t)) = \alpha'(0) = X.$$

\subseteq) Sea $X \in \mathfrak{g}$, existen $a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 + a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2,$$

luego,

$$\begin{aligned} \theta(X) &= \theta(a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 + a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2) \\ &= \theta(a_1H_2) + \theta(a_2W_1) + \theta(a_3W_2) + \theta(a_4H_1) + \theta(a_5V_1) + \theta(a_6V_2) \\ &= a_1\theta(H_2) + a_2\theta(W_1) + a_3\theta(W_2) + a_4\theta(H_1) + a_5\theta(V_1) + a_6\theta(V_2) \\ &= a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 - a_4H_1 - a_5V_1 - a_6V_2. \end{aligned} \quad \text{por identidades (6.14)}$$

Por lo que $\theta(X) = X$ implica que $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, por tanto,

$$X = a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 \in su(2).$$

□

Lema 6.2.6.

$$\{X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = -X\} = isu(2).$$

Demostración. \supseteq) Sea $X \in isu(2)$, existen $a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \theta(X) &= \theta(a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2) \\ &= \theta(a_4H_1) + \theta(a_5V_1) + \theta(a_6V_2) \\ &= a_4\theta(H_1) + a_5\theta(V_1) + a_6\theta(V_2) \\ &= -a_4H_1 - a_5V_1 - a_6V_2. \end{aligned} \quad \text{por identidades (6.14)}$$

Por lo tanto, $\theta(X) = -X$.

\subseteq) Sea $X \in \mathfrak{g}$, existen $a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 + a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2,$$

luego,

$$\begin{aligned} \theta(X) &= \theta(a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 + a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2) \\ &= \theta(a_1H_2) + \theta(a_2W_1) + \theta(a_3W_2) + \theta(a_4H_1) + \theta(a_5V_1) + \theta(a_6V_2) \\ &= a_1\theta(H_2) + a_2\theta(W_1) + a_3\theta(W_2) + a_4\theta(H_1) + a_5\theta(V_1) + a_6\theta(V_2) \\ &= a_1H_2 + a_2W_1 + a_3W_2 - a_4H_1 - a_5V_1 - a_6V_2. \end{aligned} \quad \text{por identidades (6.14)}$$

Por lo que $\theta(X) = -X$ implica que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, por tanto,

$$X = a_4H_1 + a_5V_1 + a_6V_2 \in \text{isu}(2).$$

□

Lema 6.2.7. *Se cumple*

$$e^{\text{isu}(2)} = P.$$

Demostración. \subseteq) Sea $X \in \text{isu}(2)$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \Theta(e^X) &= e^{\theta(X)} && \text{por el lema (6.1.6)} \\ &= e^{-X} && \text{por el lema (6.2.6)} \\ &= (e^X)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, si $g = e^X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $\Theta(g) = g^{-1}$. Por el lema (6.2.2) solo necesitamos probar que $a > 0$, luego, tendremos $g \in P$.

Por el lema (6.2.6) se tiene $\theta(X) = -X \iff \bar{X}^T = X$, esto es, X es una matriz hermitiana y por tanto $g = e^X$ también lo es. Como la signatura (denotada sig) de $e^0 = I$ es $(2, 0)$, por la continuidad de la signatura sabemos que $\text{sig}(g) = (2, 0)$. Un criterio de Hurwitz nos garantiza que no puede haber cambio de signo entre a y $\det(g) = 1$, ya que esto implicaría que $\text{sig}(g) = (0, 2)$, luego $a > 0$.

\supseteq) Sea $q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix} \in P$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ y

$$\lambda_1\lambda_2 - |z|^2 = 1. \tag{6.19}$$

Primero observamos

$$\bar{q}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & z \\ \bar{z} & \lambda_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{z} \\ z & \lambda_2 \end{pmatrix} = q.$$

Luego, q es una matriz hermitiana. Por otro lado, el polinomio característico de q está dado por

$$|\lambda I - q| = 0 \iff \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1\lambda_2 - |z|^2) = 0,$$

el cual podemos reescribir usando la identidad en (6.19) como sigue:

$$\lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0.$$

Los eigenvalores de toda matriz hermitiana son números reales y están dados por:

$$\lambda = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4}}{2}.$$

Analizaremos el signo de la segunda raíz,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4} > 0 &\iff (\lambda_1 + \lambda_2)^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4 && (6.20) \\ &\iff 0 > -4. \end{aligned}$$

Como la última desigualdad se cumple sabemos que los eigenvalores de q son positivos. Usando el Criterio de Sylvester concluimos que q es definida positiva. Recordamos ahora un teorema que utilizaremos.

Teorema 6.2.8. (Sylvester) Si $q \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ es una matriz hermitiana definida positiva, entonces existe una matriz $V \in U(2)$ tal que

$$V^{-1}qV = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, y además $r_1 \cdot r_2 > 0$.

Sea $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ definida como sigue:

$$X := V \begin{pmatrix} \ln r_1 & 0 \\ 0 & \ln r_2 \end{pmatrix} V^{-1}, \quad (6.22)$$

donde V, r_1, r_2 nos los da el Teorema de Sylvester.

Por otra parte, como $V \in U(2)$ sabemos

$$\overline{V}^{-T} = V. \quad (6.23)$$

Tomando determinantes en la ecuación (6.21)

$$\begin{aligned} \det q &= r_1 \cdot r_2 \iff 1 = r_1 \cdot r_2 \\ &\iff \ln r_1 + \ln r_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Sacando la traza de la matriz en (6.22),

$$\begin{aligned} \text{Tr } X &= \ln r_1 + \ln r_2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad \text{por (6.24)}$$

luego $X \in sl(2, \mathbb{C})$. Tenemos

$$\begin{aligned} \theta(X) &= -\overline{X}^T \\ &= -\left[\overline{V} \begin{pmatrix} \ln r_1 & 0 \\ 0 & \ln r_2 \end{pmatrix} \overline{V}^{-1} \right]^T && \text{por (6.22)} \\ &= -\overline{V}^{-T} \begin{pmatrix} \ln r_1 & 0 \\ 0 & \ln r_2 \end{pmatrix} \overline{V}^T \\ &= -V \begin{pmatrix} \ln r_1 & 0 \\ 0 & \ln r_2 \end{pmatrix} V^{-1} && \text{por (6.23)} \\ &= -X. && \text{por (6.22)} \end{aligned}$$

Resumiendo, $X \in sl(2, \mathbb{C})$ y cumple $\theta(X) = -X$, por el lema (6.2.6) concluimos que $X \in isu(2)$. Además,

$$\begin{aligned} e^X &= V \begin{pmatrix} e^{\ln r_1} & 0 \\ 0 & e^{\ln r_2} \end{pmatrix} V^{-1} && \text{por (6.22)} \\ &= V \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} V^{-1} \\ &= V(V^{-1}qV)V^{-1} && \text{por (6.21)} \\ &= q. \end{aligned}$$

□

6.3 — Espacio débilmente simétrico $((G, g), H, \mu)$

Recordamos que por la definición (6.1.2) una involución de Cartan Θ para $G = SL(2, \mathbb{C})$ está dada por $\Theta(q) = \bar{q}^{-T}$. Queremos demostrar que Θ es una isometría, para ello requerimos resultados previos.

Lema 6.3.1. *Si $(\gamma, K) \in H$, se cumple la siguiente identidad:*

$$(\gamma, K)^* \circ \Theta^* g = \Theta^* g,$$

donde estamos pensando que $(\gamma, K), \Theta : G \rightarrow G$, más formalmente,

$$\Theta^* g_q(X_q, Y_q) = g(d\Theta_q(X_q), d\Theta_q(Y_q)), \quad \forall X_q, Y_q \in T_q G.$$

$$(\gamma, K)^* g_q(X_q, Y_q) = g(d(\gamma, K)_q(X_q), d(\gamma, K)_q(Y_q)), \quad \forall X_q, Y_q \in T_q G.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} [(\Theta(\gamma), K) \circ \Theta](q) &= (\Theta(\gamma), K)\Theta(q) \\ &= \Theta(\gamma)\Theta(q)K^{-1} \\ &= \Theta(\gamma)\Theta(q)\Theta(K^{-1}) && \text{por el teorema (6.1.1) (c)} \\ &= \Theta(\gamma q K^{-1}) && \text{por el teorema (6.1.1) (b)} \\ &= [\Theta \circ (\gamma, K)](q), \end{aligned}$$

por lo que hemos demostrado la siguiente identidad:

$$(\Theta(\gamma), K) \circ \Theta = \Theta \circ (\gamma, K). \quad (6.25)$$

Por otra parte, por el corolario (6.1.11) sabemos que H actúa por isometrías en (G, g) , por lo que

$$(\gamma, K)^* g = g, \quad \forall (\gamma, K) \in H. \quad (6.26)$$

Podemos ahora probar el lema,

$$\begin{aligned} (\gamma, K)^* \Theta^* g &= [\Theta \circ (\gamma, K)]^* g \\ &= [(\Theta(\gamma), K) \circ \Theta]^* g && \text{por (6.25)} \\ &= [\Theta^* \circ (\Theta(\gamma), K)^*]^* g \\ &= \Theta^* \circ (\Theta(\gamma), K)^* g \\ &= \Theta^* g. && \text{por (6.26)} \end{aligned}$$

Por lo que $(\gamma, K)^* \circ \Theta^* g = \Theta^* g$. □

Lema 6.3.2. *Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces*

$$B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X, Y).$$

Demostración. La forma de Killing B es invariante ante cualquier automorfismo del álgebra de Lie \mathfrak{g} , por lo que es suficiente verificar que la función $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\theta(X) = -\overline{X}^T$ es un automorfismo, y es lineal por lo que solo demostraremos que preserva el corchete de Lie. Luego,

$$\begin{aligned}
\theta([X, Y]) &= \theta(XY - YX) = -(\overline{XY - YX})^T \\
&= -(\overline{XY} - \overline{YX})^T = -((\overline{XY})^T - (\overline{YX})^T) \\
&= -(\overline{Y^T X^T} - \overline{X^T Y^T}) = \overline{X^T Y^T} - \overline{Y^T X^T} \\
&= (-\overline{X^T})(-\overline{Y^T}) - (-\overline{Y^T})(-\overline{X^T}) \\
&= [\theta X, \theta Y].
\end{aligned}$$

□

Lema 6.3.3. Θ es una isometría en (G, g) .

Demostración. Primero observaremos que las métricas Riemannianas Θ^*g y g coinciden en la identidad. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\Theta^*g)_I(X, Y) &= g_I(d\Theta_I(X), d\Theta_I(Y)) \\
&= g_I(\theta(X), \theta(Y)) \\
&= -B(\theta(\theta(X)), \theta(Y)) && \text{por la definición (6.1.5)} \\
&= -B(\theta(X), Y) && \text{por el lema (6.3.2)} \\
&= g_I(X, Y). && \text{por la definición (6.1.5)}
\end{aligned}$$

Por lo que hemos probado

$$(\Theta^*g)_I = g_I. \tag{6.27}$$

Por el corolario (6.1.11) sabemos que H actúa por isometrías en (G, g) , pero además, por el lema (6.3.1) sabemos que H actúa por isometrías en G con respecto a la métrica Riemanniana Θ^*g . Resumiendo, H actúa en G transitivamente y por isometrías con respecto a g y Θ^*g , pero por (6.27) sabemos que dichas métricas coinciden en la identidad I , luego,

$$\Theta^*g = g.$$

Pero esta igualdad significa que Θ es una isometría en (G, g) . □

Definición 6.3.4. Sea $q = bK \in G$, su descomposición polar. Se define $f : G \rightarrow G$ como sigue:

$$f(q) = f(bK) = bK^{-1}.$$

Antes de probar que f es una isometría requerimos la siguiente observación:

Lema 6.3.5. Si $K \in SU(2)$, $Y \in \mathfrak{isu}(2)$, entonces

$$Ad_K Y \in \mathfrak{isu}(2).$$

Demostración. Existe $X \in \mathfrak{su}(2)$ tal que $Y = iX$, entonces

$$\begin{aligned} Ad_K Y &= KYK^{-1} = K(iX)K^{-1} \\ &= iKXK^{-1} = iAd_K X, \end{aligned}$$

pero $Ad_K X \in su(2)$, luego $Ad_K Y \in isu(2)$. □

Lema 6.3.6. f es una isometría en (G, g) .

Demostración. Sean $q = bK \in G$. Primero consideramos $\hat{X} \in T_q G$ tal que $\hat{X} = d(L_q)_I X$ para algún $X \in su(2)$,

$$\begin{aligned} df_q \hat{X} &= df_q(d(L_q)_I X) \\ &= df_q\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 qe^{tX}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(qe^{tX}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 f(b(Ke^{tX})) = \frac{d}{dt}\Big|_0 b(Ke^{tX})^{-1} && \text{ya que } Ke^{tX} \in SU(2) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 be^{-tX}K^{-1} \\ &= -bXK^{-1}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(q)^{-1} df_q \hat{X} &= (bK^{-1})^{-1}(-bXK^{-1}) && \text{por (6.28)} \\ &= -Kb^{-1}bXK^{-1} = -KXK^{-1} \\ &= -Ad_K X. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$f(q)^{-1} df_q \hat{X} = -Ad_K X. \tag{6.29}$$

Sea $\hat{Y} \in T_q G$ tal que $\hat{Y} = d(L_q)_I Y$ para algún $Y \in isu(2)$. Necesitamos calcular $df_q \hat{Y}$, pero primero necesitamos una identidad. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $b_1(t) := Ke^{tY}K^{-1} = e^{Ad_K tY}$, por el lema (6.3.5) sabemos que $Ad_K tY \in isu(2)$, y por el lema (6.2.7) vemos que $e^{Ad_K tY} \in P$, es decir,

$$b_1(t) = Ke^{tY}K^{-1} \in P, \tag{6.30}$$

y entonces

$$Ke^{tY} = b_1(t)K. \tag{6.31}$$

Retomando $df_q \hat{Y}$, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} df_q \hat{Y} &= df_q(d(L_q)_I Y) \\ &= df_q\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 qe^{tY}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(qe^{tY}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 f(b(Ke^{tY})) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(b b_1(t)K) && \text{por (6.31)} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 b b_1(t)K^{-1} = b \dot{b}_1(0)K^{-1}, \end{aligned}$$

y entonces

$$df_q \hat{Y} = b \dot{b}_1(0) K^{-1}, \quad (6.32)$$

pero de (6.30) se sigue

$$\dot{b}_1(0) = KYK^{-1} = Ad_K Y. \quad (6.33)$$

Por lo que sustituyendo (6.33) en (6.32) obtenemos:

$$df_q \hat{Y} = b(Ad_K Y) K^{-1}. \quad (6.34)$$

Se siguen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} f(q)^{-1} df_q \hat{Y} &= (bK^{-1})^{-1} (b(Ad_K Y) K^{-1}) \\ &= Kb^{-1} b(Ad_K Y) K^{-1} = K(Ad_K Y) K^{-1} \\ &= Ad_K \circ Ad_K Y. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$f(q)^{-1} df_q \hat{Y} = Ad_K \circ Ad_K Y. \quad (6.35)$$

Con el trabajo previo podremos probar que f es una isometría. Sean $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2 \in T_q G$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$ definidas como antes, es decir:

$$\hat{Z}_1 = d(L_q)_I Z_1, \quad \hat{Z}_2 = d(L_q)_I Z_2.$$

Existen $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2 \in T_q G$, que cumplen

$$\hat{Z}_1 = \hat{X}_1 + \hat{Y}_1, \quad \hat{Z}_2 = \hat{X}_2 + \hat{Y}_2,$$

y además $X_1, X_2 \in su(2)$, $Y_1, Y_2 \in isu(2)$, tales que

$$Z_1 = X_1 + Y_1, \quad Z_2 = X_2 + Y_2.$$

Se cumple

$$\begin{aligned} g(df_q \hat{Z}_1, df_q \hat{Z}_2) &= g(df_q(\hat{X}_1 + \hat{Y}_1), df_q(\hat{X}_2 + \hat{Y}_2)) \\ &= g(df_q \hat{X}_1 + df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{X}_2 + df_q \hat{Y}_2) \\ &= g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{X}_2) + g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{Y}_2) \\ &\quad + g(df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{X}_2) + g(df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{Y}_2). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Analizaremos cada sumando de la ecuación (6.36), primero tenemos

$$\begin{aligned} g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{X}_2) &= g(f(q)^{-1} df_q \hat{X}_1, f(q)^{-1} df_q \hat{X}_2) && \text{ya que } g \text{ es izquierda invariante} \\ &= g(-Ad_K X_1, -Ad_K X_2) && \text{por (6.29)} \\ &= g(X_1, X_2). && \text{por el lema (6.1.8)} \end{aligned}$$

Luego,

$$g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{X}_2) = g(X_1, X_2). \quad (6.37)$$

Otro sumando en la ecuación (6.36) se ve como sigue,

$$\begin{aligned}
g(df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{Y}_2) &= g(f(q)^{-1} df_q \hat{Y}_1, f(q)^{-1} df_q \hat{Y}_2) && \text{ya que } g \text{ es izquierda invariante} \\
&= g(Ad_K \circ Ad_K Y_1, Ad_K \circ Ad_K Y_2) && \text{por (6.35)} \\
&= g(Ad_K Y_1, Ad_K Y_2) && \text{por el lema (6.1.8)} \\
&= g(Y_1, Y_2). && \text{por el lema (6.1.8)}
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$g(df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{Y}_2) = g(Y_1, Y_2). \quad (6.38)$$

El sumando cruzado en (6.36) se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}
g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{Y}_2) &= g(f(q)^{-1} df_q \hat{X}_1, f(q)^{-1} df_q \hat{Y}_2) && \text{ya que } g \text{ es izquierda invariante} \\
&= g(-Ad_K X_1, f(q)^{-1} df_q \hat{Y}_2) && \text{por (6.29)} \\
&= g(-Ad_K X_1, Ad_K \circ Ad_K Y_2) && \text{por (6.35)} \\
&= -g(X_1, Ad_K Y_2), && \text{por el lema (6.1.8)}
\end{aligned}$$

pero $X_1 \in su(2)$, $Y_2 \in isu(2)$ y por el lema (6.3.5) sabemos que $Ad_K Y_2 \in isu(2)$, pero $su(2) \perp isu(2)$, por lo que

$$g(df_q \hat{X}_1, df_q \hat{Y}_2) = g(X_1, Ad_K Y_2) = 0 = g(X_1, Y_2). \quad (6.39)$$

Análogamente,

$$g(df_q \hat{Y}_1, df_q \hat{X}_2) = 0 = g(Y_1, X_2). \quad (6.40)$$

Sustituyendo (6.37), (6.38), (6.39) y (6.40) en (6.36) obtenemos

$$\begin{aligned}
g(df_q \hat{Z}_1, df_q \hat{Z}_2) &= g(X_1, X_2) + g(X_1, Y_2) + g(Y_1, X_2) + g(Y_1, Y_2) \\
&= g(Z_1, Z_2).
\end{aligned} \quad (6.41)$$

Ahora, la métrica Riemanniana g es invariante a la izquierda, por lo que se cumple

$$g(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = g(Z_1, Z_2). \quad (6.42)$$

Por (6.41) y (6.42) hemos demostrado la siguiente igualdad:

$$g(df_q \hat{Z}_1, df_q \hat{Z}_2) = g(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2),$$

luego, f es una isometría en (G, g) . □

Definición 6.3.7. Sea $\mu : G \rightarrow G$ la función definida por la fórmula siguiente:

$$\mu(q) = \mu(bK) = b^{-1}K^{-1},$$

donde $q = bK$ es su descomposición polar.

Lema 6.3.8. Se cumple

$$d\mu_I(X) = -X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Demostración. Por linealidad basta ver lo que sucede con los generadores. Sea $H_2 \in su(2)$, existe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = H_2$. Podemos suponer que $\alpha(\mathbb{R}) \subset SU(2)$. Luego,

$$\begin{aligned} d\mu_I(H_2) &= d\mu_I\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tH_2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mu(e^{tH_2}) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (e^{tH_2})^{-1} && \text{ya que } e^{tH_2} \in SU(2) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 e^{-tH_2} = -H_2. \end{aligned}$$

Análogamente para $W_1, W_2 \in su(2)$.

Consideremos ahora $H_1 \in isu(2)$, existe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = H_1$. Por el lema (6.2.7) podemos suponer que $\alpha(\mathbb{R}) \subset P$. Luego,

$$\begin{aligned} d\mu_I(H_1) &= d\mu_I\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tH_1}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \mu(e^{tH_1}) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (e^{tH_1})^{-1} && \text{ya que } e^{tH_1} \in P \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 e^{-tH_1} = -H_1. \end{aligned}$$

Análogamente para $V_1, V_2 \in isu(2)$. □

Sea $q = bK \in G$ (su descomposición polar), se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} f \circ \Theta(q) &= f(\Theta(bK)) \\ &= f(\Theta(b)\Theta(K)) && \text{por el teorema (6.1.1) (b)} \\ &= f(b^{-1}\Theta(K)) && \text{por el lema (6.2.2)} \\ &= f(b^{-1}K) && \text{por el lema (6.2.3)} \\ &= b^{-1}K^{-1} && \text{por la definición (6.3.4)} \\ &= \mu(bK) = \mu(q), \end{aligned}$$

por lo que hemos demostrado

$$\mu = f \circ \Theta.$$

Pero por los lemas (6.3.6) y (6.3.3) sabemos que f y Θ son isometrías en (G, g) , por lo que:

Corolario 6.3.9. μ es una isometría en (G, g) .

Hacemos un resumen y concluimos la sección, tenemos que (G, g) es una variedad Riemanniana y $H = SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ actúa en (G, g) por isometrías (corolario (6.1.11)). Ahora, por el corolario (6.3.9) sabemos que μ es una isometría en (G, g) . Sea $I \in G$, se tiene $\mu(I) = I$ y por el lema (6.3.8) tenemos que $d\mu_I(X) = -X$, $\forall X \in T_I G = \mathfrak{g}$.

Por el lema (2.4.2), $((G, g), H, \mu)$ es un espacio débilmente simétrico. Como consecuencia de los resultados de Selberg en [26], el álgebra $L(\mathcal{A})$ de operadores diferenciales de todos los órdenes y H -invariantes en G es conmutativa.

En las siguientes secciones probaremos directamente que \mathcal{A} es conmutativa (y por tanto $L(\mathcal{A})$ también es conmutativa) viendo que sus 3 generadores conmutan entre sí.

6.4 — \mathcal{A} es un álgebra conmutativa

Consideremos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, el álgebra envolvente de $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &:= H_2^2 + W_1^2 + W_2^2, \\ \mathcal{O}_2 &:= H_1^2 + V_1^2 + V_2^2, \\ \mathcal{O}_3 &:= H_2(iH_2) + W_1(iW_1) + W_2(iW_2) \\ &= -H_2H_1 + W_1V_2 - W_2V_1.\end{aligned}$$

En esta sección probaremos que $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ y \mathcal{O}_3 conmutan entre sí, demostrando que los corchetes dos a dos son cero, lo que implicará que \mathcal{A} es un álgebra conmutativa. Aunque para ello primero requerimos algunos resultados básicos previos. Recordamos

$$H_2 = iH_1, \quad V_2 = iW_1, \quad W_2 = iV_1. \quad (6.43)$$

Lema 6.4.1. Sean $X, Y, A \in \mathfrak{g}$, se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}(a) \quad [X^2, Y] &= X[X, Y] + [X, Y]X & (c) \quad [X, AX] &= [X, A]X \\ (b) \quad [X, Y^2] &= [X, Y]Y + Y[X, Y] & (d) \quad [X, XA] &= X[X, A]\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(a) \quad X[X, Y] + [X, Y]X &= X(XY - YX) + (XY - YX)X \\ &= X^2Y - XYX + XYX - YX^2 \\ &= X^2Y - YX^2 = [X^2, Y].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad [X, Y]Y + Y[X, Y] &= (XY - YX)Y + Y(XY - YX) \\ &= XY^2 - YXY + YXY - Y^2X \\ &= XY^2 - Y^2X = [X, Y^2].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \quad [X, A]X &= (XA - AX)X = XAX - AXX \\ &= X(AX) - (AX)X = [X, AX].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) \quad X[X, A] &= X(XA - AX) = XXA - XAX \\ &= X(XA) - (XA)X = [X, XA].\end{aligned}$$

□

Lema 6.4.2. Sean $X, Y, A \in \mathfrak{g}$, se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}(a) \quad V_1W_1 &= -W_1V_1 & (d) \quad H_1W_1 &= -W_1H_1 \\ (b) \quad V_2W_2 &= -W_2V_2 & (e) \quad V_1H_2 &= -H_2V_1 \\ (c) \quad V_2H_2 &= -H_2V_2\end{aligned}$$

Demostración.

$$(a) \quad V_1 W_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_1 V_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad V_2 W_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix},$$

$$W_2 V_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad V_2 H_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i^2 \\ -i^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 V_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ i^2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i^2 \\ -i^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \quad H_1 W_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_1 H_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \quad V_1 H_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 V_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Lema 6.4.3. Sean $X, Y, A \in \mathfrak{g}$, se cumplen las siguientes identidades:

$$(a) \quad W_1 V_2 - W_2 V_1 = V_2 W_1 - V_1 W_2 = -\frac{i}{2} I$$

$$(d) \quad V_1 H_1 = -H_1 V_1$$

$$(b) \quad W_2 V_1 + H_2 H_1 = \frac{i}{2} I$$

$$(e) \quad V_2 H_1 = -H_1 V_2$$

$$(c) \quad H_1 W_2 = -W_2 H_1$$

Demostración. Primero necesitamos algunos cálculos.

$$H_1^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I. \quad (6.44)$$

$$V_1^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I. \quad (6.45)$$

$$W_1^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} I. \quad (6.46)$$

Podemos ahora demostrar el lema:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad W_1V_2 - W_2V_1 &= W_1(iW_1) - (iV_1)V_1 \\
 &= iW_1^2 - iV_1^2 = i(W_1^2 - V_1^2) \\
 &= i\left(-\frac{1}{4}I - \frac{1}{4}I\right) && \text{por (6.46) y (6.45)} \\
 &= -\frac{i}{2}I.
 \end{aligned}$$

La segunda identidad se sigue directamente de la anterior y de que $[W_1, V_2] = [W_2, V_1] = 0$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad W_2V_1 + H_2H_1 &= (iV_1)V_1 + (iH_1)H_1 \\
 &= iV_1^2 + iH_1^2 = i(V_1^2 + H_1^2) \\
 &= i\left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}I\right) && \text{por (6.45) y (6.44)} \\
 &= \frac{i}{2}I.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad H_1W_2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\
 W_2H_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad V_1H_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 H_1V_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \quad V_2H_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\
 H_1V_2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 6.4.4. *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad H_2W_1 &= -W_1H_2 && (c) \quad W_1W_2 &= -W_2W_1 \\
 (b) \quad V_1W_2 &= W_2V_1 && (d) \quad H_2W_2 &= -W_2H_2
 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad H_2W_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
 W_1H_2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad V_1 W_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$W_2 V_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad W_1 W_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$W_2 W_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$(d) \quad H_2 W_2 = (iH_1)(iV_1)$$

$$= i^2 H_1 V_1$$

$$= -i^2 V_1 H_1 \quad \text{por el lema (6.4.3) (d)}$$

$$= -(iV_1)(iH_1)$$

$$= -W_2 H_2.$$

□

Un lema básico pero útil para no repetir el mismo resultado que nos aparecerá varias veces es el siguiente.

Lema 6.4.5.

$$\text{Si } [X, Y] = 0 \implies [X^2, Y] = 0.$$

Demostración.

$$[X^2, Y] = X[X, Y] + [X, Y]Y \quad \text{por el lema (6.4.1) (a)}$$

$$= X0 + 0X = 0.$$

□

Podemos ahora empezar a demostrar que los operadores $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ conmutan entre sí.

Lema 6.4.6.

$$[\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1] = 0.$$

Demostración. Primero probaremos que $[H_1^2, \mathcal{O}_1] = 0$.

$$[H_1, H_2^2] = [H_1, H_2]H_2 + H_2[H_1, H_2] \quad \text{por el lema (6.4.1) (b)}$$

$$= 0H_2 + H_20 = 0. \quad (6.47)$$

$$[H_1, W_1^2] = [H_1, W_1]W_1 + W_1[H_1, W_1] \quad \text{por el lema (6.4.1) (b)}$$

$$= V_1 W_1 + W_1 V_1$$

$$= V_1 W_1 - V_1 W_1 \quad \text{por el lema (6.4.2) (a)}$$

$$= 0. \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned}
[H_1, W_2^2] &= [H_1, W_2]W_2 + W_2[H_1, W_2] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= V_2W_2 + W_2V_2 \\
&= V_2W_2 - V_2W_2 && \text{por el lema (6.4.2) (b)} \\
&= 0. && (6.49)
\end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
[H_1, \mathcal{O}_1] &= [H_1, H_2^2 + W_1^2 + W_2^2] \\
&= [H_1, H_2^2] + [H_1, W_1^2] + [H_1, W_2^2] \\
&= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.47), (6.48) y (6.49)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

por tanto $[H_1, \mathcal{O}_1] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[H_1^2, \mathcal{O}_1] = 0. \quad (6.50)$$

Ahora vamos a demostrar que $[V_1^2, \mathcal{O}_1] = 0$.

$$\begin{aligned}
[V_1, H_2^2] &= [V_1, H_2]H_2 + H_2[V_1, H_2] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= -V_2H_2 - H_2V_2 \\
&= -V_2H_2 + V_2H_2 && \text{por el lema (6.4.2) (c)} \\
&= 0. && (6.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_1, W_1^2] &= [V_1, W_1]W_1 + W_1[V_1, W_1] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= -H_1W_1 - W_1H_1 \\
&= -H_1W_1 + H_1W_1 && \text{por el lema (6.4.2) (d)} \\
&= 0. && (6.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_1, W_2^2] &= [V_1, W_2]W_2 + W_2[V_1, W_2] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= 0W_2 + W_20 \\
&= 0. && (6.53)
\end{aligned}$$

Se sigue

$$\begin{aligned}
[V_1, \mathcal{O}_1] &= [V_1, H_2^2 + W_1^2 + W_2^2] \\
&= [V_1, H_2^2] + [V_1, W_1^2] + [V_1, W_2^2] \\
&= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.51), (6.52) y (6.53)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

por tanto $[V_1, \mathcal{O}_1] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[V_1^2, \mathcal{O}_1] = 0. \quad (6.54)$$

Por último necesitamos demostrar que $[V_2^2, \mathcal{O}_1] = 0$.

$$\begin{aligned}
[V_2, H_2^2] &= [V_2, H_2]H_2 + H_2[V_2, H_2] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= V_1H_2 + H_2V_1 \\
&= V_1H_2 - V_1H_2 && \text{por el lema (6.4.2) (e)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
[V_2, W_1^2] &= [V_2, W_1]W_1 + W_1[V_2, W_1] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= 0W_1 + W_10 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
[V_2, W_2^2] &= [V_2, W_2]W_2 + W_2[V_2, W_2] && \text{por el lema (6.4.1) (b)} \\
&= -H_1W_2 - W_2H_1 \\
&= -H_1W_2 + H_1W_2 && \text{por el lema (6.4.3) (c)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
[V_2, \mathcal{O}_1] &= [V_2, H_2^2 + W_1^2 + W_2^2] \\
&= [V_2, H_2^2] + [V_2, W_1^2] + [V_2, W_2^2] \\
&= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.55), (6.56) y (6.57)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

por tanto $[V_2, \mathcal{O}_1] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[V_2^2, \mathcal{O}_1] = 0. \tag{6.58}$$

Ahora podemos concluir la demostración del lema como sigue:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1] &= [H_1^2 + V_1^2 + V_2^2, \mathcal{O}_1] \\
&= [H_1^2, \mathcal{O}_1] + [V_1^2, \mathcal{O}_1] + [V_2^2, \mathcal{O}_1] \\
&= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.50), (6.54) y (6.58)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.4.7.

$$[\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] = 0.$$

Demostración. Recordamos que $\mathcal{O}_3 = -H_2H_1 + W_1V_2 - W_2V_1$, pero

$$[H_2, H_1] = 0 \implies H_2H_1 = H_1H_2,$$

$$[W_1, V_2] = 0 \implies W_1V_2 = V_2W_1,$$

$$[W_2, V_1] = 0 \implies W_2V_1 = V_1W_2,$$

por lo que

$$\mathcal{O}_3 = -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2. \quad (6.59)$$

Primero probaremos $[H_1^2, \mathcal{O}_3] = 0$.

$$\begin{aligned} [H_1, -H_1H_2] &= -[H_1, H_1H_2] \\ &= -H_1[H_1, H_2] && \text{por el lema (6.4.1) (d)} \\ &= -H_10 = 0, \end{aligned}$$

por lo que $[H_1, -H_1H_2] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[H_1^2, -H_1H_2] = 0. \quad (6.60)$$

Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} [H_1^2, \mathcal{O}_3] &= [H_1^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] && \text{por (6.59)} \\ &= [H_1^2, -H_1H_2] + [H_1^2, V_2W_1] + [H_1^2, -V_1W_2] \\ &= [H_1^2, V_2W_1] + [H_1^2, -V_1W_2] && \text{por (6.60)} \\ &= (H_1^2V_2W_1 - V_2W_1H_1^2) + (-H_1^2V_1W_2 + V_1W_2H_1^2) \\ &= H_1^2(V_2W_1 - V_1W_2) - (V_2W_1 - V_1W_2)H_1^2 \\ &= H_1^2(-\frac{i}{2}I) - (-\frac{i}{2}I)H_1^2 && \text{por el lema (6.4.3) (a)} \\ &= -\frac{i}{2}H_1^2 + \frac{i}{2}H_1^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Ahora probaremos que $[V_1^2, \mathcal{O}_3] = 0$. Para ello primero vemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [V_1^2, -H_1H_2] &= -V_1^2H_1H_2 + H_1H_2V_1^2 \\ &= -V_1V_1H_1H_2 + H_1H_2V_1V_1 \\ &= +V_1H_1V_1H_2 + H_1H_2V_1V_1 && \text{por el lema (6.4.3) (d)} \\ &= -V_1H_1H_2V_1 + H_1H_2V_1V_1 && \text{por el lema (6.4.2) (e)} \\ &= -V_1H_1H_2V_1 - H_1V_1H_2V_1 && \text{por el lema (6.4.2) (e)} \\ &= -V_1H_1H_2V_1 + V_1H_1H_2V_1 && \text{por el lema (6.4.3) (d)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} [V_1, V_2W_1] &= V_1V_2W_1 - V_2W_1V_1 \\ &= V_1(iW_1)W_1 - (iW_1)W_1V_1 && \text{por (6.4.3)} \\ &= iV_1W_1W_1 - iW_1W_1V_1 \\ &= iV_1W_1W_1 + iW_1V_1W_1 && \text{por el lema (6.4.2) (a)} \\ &= -iW_1V_1W_1 + iW_1V_1W_1, && \text{por el lema (6.4.2) (a)} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.64)$$

por lo tanto $[V_1, V_2W_1] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[V_1^2, V_2W_1] = 0. \quad (6.65)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [V_1, -V_1W_2] &= -V_1[V_1, W_2] && \text{por el lema (6.4.1) (d)} \\ &= -V_10 = 0, \end{aligned}$$

por lo que $[V_1, -V_1W_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[V_1^2, -V_1W_2] = 0. \quad (6.66)$$

Se sigue

$$\begin{aligned} [V_1^2, \mathcal{O}_3] &= [V_1^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] \\ &= [V_1^2, -H_1H_2] + [V_1^2, V_2W_1] + [V_1^2, -V_1W_2] \\ &= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.62), (6.65) y (6.66)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Por último, necesitamos verificar que $[V_2^2, \mathcal{O}_3] = 0$. Primero obtenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} [V_2, -H_1H_2] &= -V_2H_1H_2 + H_1H_2V_2 \\ &= +H_1V_2H_2 + H_1H_2V_2 && \text{por el lema (6.4.3) (e)} \\ &= -H_1H_2V_2 + H_1H_2V_2 && \text{por el lema (6.4.2) (c)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $[V_2, -H_1H_2] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[V_2^2, -H_1H_2] = 0. \quad (6.68)$$

Además,

$$\begin{aligned} [V_2, V_2W_1] &= V_2[V_2, W_1] && \text{por el lema (6.4.1) (d)} \\ &= V_20 = 0, \end{aligned}$$

por lo que $[V_2, V_2W_1] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[V_2^2, V_2W_1] = 0. \quad (6.69)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [V_2, -V_1W_2] &= [V_2, -V_1(iV_1)] \\ &= -i[V_2, V_1^2] \\ &= -i[V_2, \frac{1}{4}I] && \text{por (6.4.5)} \\ &= -\frac{i}{4}[V_2, I] \\ &= -\frac{i}{4}(V_2I - IV_2) \\ &= -\frac{i}{4}0 = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $[V_2, -V_1W_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[V_2^2, -V_1W_2] = 0. \quad (6.70)$$

Usando lo anterior,

$$\begin{aligned}
[V_2^2, \mathcal{O}_3] &= [V_2^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] \\
&= [V_2^2, -H_1H_2] + [V_2^2, V_2W_1] + [V_2^2, -V_1W_2] \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{6.71}$$

por (6.68), (6.69) y (6.70)

Podemos concluir la demostración del lema como sigue:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] &= [H_1^2 + V_1^2 + V_2^2, \mathcal{O}_3] \\
&= [H_1^2, \mathcal{O}_3] + [V_1^2, \mathcal{O}_3] + [V_2^2, \mathcal{O}_3] \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{6.71}$$

por (6.61), (6.67) y (6.71)

□

Lema 6.4.8.

$$[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] = 0.$$

Demostración. Primero requerimos demostrar que $[H_2^2, \mathcal{O}_3] = 0$. Se cumple

$$\begin{aligned}
[H_2, -H_1H_2] &= -[H_2, H_1]H_2 \\
&= 0H_2 = 0,
\end{aligned}
\tag{6.4.1}$$

por el lema (6.4.1) (c)

luego $[H_2, -H_1H_2] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[H_2^2, -H_1H_2] = 0. \tag{6.72}$$

Además,

$$\begin{aligned}
[H_2, V_2W_1] &= H_2V_2W_1 - V_2W_1H_2 \\
&= -V_2H_2W_1 - V_2W_1H_2 \\
&= +V_2W_1H_2 - V_2W_1H_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por el lema (6.4.2) (c)
por el lema (6.4.4) (a)

luego $[H_2, V_2W_1] = 0$, y por el lema (6.4.5) tenemos

$$[H_2^2, V_2W_1] = 0. \tag{6.73}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[H_2, -V_1W_2] &= -H_2V_1W_2 + V_1W_2H_2 \\
&= V_1H_2W_2 + V_1W_2H_2 \\
&= V_1H_2W_2 - V_1H_2W_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por el lema (6.4.2) (e)
por el lema (6.4.4) (d)

luego $[H_2, -V_1W_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[H_2^2, -V_1W_2] = 0. \tag{6.74}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
[H_2^2, \mathcal{O}_3] &= [H_2^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] \\
&= [H_2^2, -H_1H_2] + [H_2^2, V_2W_1] + [H_2^2, -V_1W_2] \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

por (6.72), (6.73) y (6.74) (6.75)

Ahora necesitamos ver que $[W_1^2, \mathcal{O}_3] = 0$.

$$\begin{aligned}
[W_1, -H_1H_2] &= -W_1H_1H_2 + H_1H_2W_1 \\
&= -W_1H_1H_2 - H_1W_1H_2 \\
&= +H_1W_1H_2 - H_1W_1H_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por el lema (6.4.4) (a)
por el lema (6.4.2) (d)

luego $[W_1, -H_1H_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[W_1^2, -H_1H_2] = 0. \tag{6.76}$$

También,

$$\begin{aligned}
[W_1, V_2W_1] &= [W_1, V_2]W_1 \\
&= 0W_1 = 0.
\end{aligned}$$

por el lema (6.4.1) (c)

luego $[W_1, V_2W_1] = 0$, por el lema (6.4.5) tenemos

$$[W_1^2, V_2W_1] = 0. \tag{6.77}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[W_1, -V_1W_2] &= -W_1V_1W_2 + V_1W_2W_1 \\
&= +V_1W_1W_2 + V_1W_2W_1 \\
&= -V_1W_2W_1 + V_1W_2W_1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por el lema (6.4.2) (a)
por el lema (6.4.4) (c)

luego $[W_1, -V_1W_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[W_1^2, -V_1W_2] = 0. \tag{6.78}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
[W_1^2, \mathcal{O}_3] &= [W_1^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] \\
&= [W_1^2, -H_1H_2] + [W_1^2, V_2W_1] + [W_1^2, -V_1W_2] \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

por (6.76), (6.77) y (6.78) (6.79)

Por último demostraremos que $[W_2^2, \mathcal{O}_3] = 0$. Primero vemos

$$\begin{aligned}
 [W_2, -H_1H_2] &= -W_2H_1H_2 + H_1H_2W_2 \\
 &= +H_1W_2H_2 + H_1H_2W_2 && \text{por el lema (6.4.3) (c)} \\
 &= +H_1W_2H_2 - H_1W_2H_2 && \text{por el lema (6.4.4) (d)} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

luego $[W_2, -H_1H_2] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[W_2^2, -H_1H_2] = 0. \quad (6.80)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 [W_2, V_2W_1] &= +W_2V_2W_1 - V_2W_1W_2 \\
 &= -V_2W_2W_1 - V_2W_1W_2 && \text{por el lema (6.4.2) (b)} \\
 &= -V_2W_2W_1 + V_2W_2W_1 && \text{por el lema (6.4.4) (c)} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

luego $[W_2, V_2W_1] = 0$, y por el lema (6.4.5)

$$[W_2^2, V_2W_1] = 0. \quad (6.81)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 [W_2, -V_1W_2] &= -[W_2, V_1]W_2 && \text{por el lema (6.4.1) (c)} \\
 &= 0W_2 = 0.
 \end{aligned}$$

luego $[W_2, -V_1W_2] = 0$, por el lema (6.4.5) tenemos

$$[W_2^2, -V_1W_2] = 0. \quad (6.82)$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
 [W_2^2, \mathcal{O}_3] &= [W_2^2, -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2] \\
 &= [W_2^2, -H_1H_2] + [W_2^2, V_2W_1] + [W_2^2, -V_1W_2] \\
 &= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.80), (6.81) y (6.82)} \\
 &= 0. && (6.83)
 \end{aligned}$$

Podemos concluir

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] &= [H_2^2 + W_1^2 + W_2^2, \mathcal{O}_3] \\
 &= [H_2^2, \mathcal{O}_3] + [W_1^2, \mathcal{O}_3] + [W_2^2, \mathcal{O}_3] \\
 &= 0 + 0 + 0 && \text{por (6.75), (6.79) y (6.83)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Operadores diferenciables y series de Eisenstein

En dimensión 2, las series de Eisenstein generalizadas $E_n(g, s)$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$ y $n \in \mathbb{Z}$, ver [16] página 63, son eigenfunciones de cada operador en $L(\mathcal{A})$ (ver (6.11)) definido en $SL(2, \mathbb{R})$. Para los generadores tenemos que:

$$\begin{aligned} L(A_1) E_n(g, s) &= -in \cdot E_n(g, s), \\ L(X_1^2 + X_2^2) E_n(g, s) &= c(s, n) \cdot E_n(g, s), \end{aligned} \quad (7.1)$$

para cierta constante $c(s, n)$.

En la sección 1 damos una nueva base para $sl(2, \mathbb{C})$, así como sus exponenciales, hechos que serán importantes para la última sección de este capítulo.

En la sección 2 usaremos una fórmula que relaciona la matriz pequeña de Wigner con series hipergeométricas, esto para calcular la constante ϑ_{km}^l definida como sigue:

$$\vartheta_{km}^l = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 d_{km}^l(-2t).$$

En la sección 3 veremos que las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ son eigenfunciones de los operadores $L(\mathcal{O}_1)$, $L(\mathcal{O}_2)$ y $L(\mathcal{O}_3)$ (teorema (7.3.14)). Es decir, probaremos

$$\begin{aligned} L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= c_1(s) \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= c_2(s) \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= c_3(s) \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \end{aligned}$$

donde $c_1(s)$, $c_2(s)$ y $c_3(s)$ son constantes que pueden depender de l, k, m, s y la constante ϑ_{km}^l . Esto generaliza las identidades en (7.1).

7.1 — Nueva base de $sl(2, \mathbb{C})$ y sus exponenciales

Nos será clave en los cálculos siguientes usar una nueva base de $sl(2, \mathbb{C})$, para ello definimos las siguientes matrices:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Además, sean

$$\begin{aligned}
I &:= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2H_2, \\
J &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2W_1, \\
K &:= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -2W_2.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$KJ = -I, \quad JK = I. \tag{7.4}$$

Las matrices $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ las definimos como sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &:= iI = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{J} &:= iJ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{K} &:= iK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes relaciones entre las matrices anteriores,

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= -\tilde{A} = -2H_1, \\
\tilde{J} &= -K - 2\tilde{C} = -2V_2, \\
\tilde{K} &= J + 2\tilde{B} = 2V_1.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Por otra parte, usaremos también la notación clásica para la descomposición de Iwasawa, es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, K \in SU(2)$, entonces

$$\begin{aligned}
a_\lambda &:= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = g_{\sqrt{\lambda}j, I}, \\
n_z &:= \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{z+j, I}.
\end{aligned}$$

luego,

$$g_{z+\sqrt{\lambda}j, K} = n_z a_\lambda K.$$

Ahora notamos que por (3.9) se tiene

$$\text{Im } g_{z+\sqrt{\lambda}j, K}(j) = \lambda = a_\lambda(j). \tag{7.6}$$

Lema 7.1.1. Sean $w \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$a_\lambda \cdot n_w = n_{\lambda w} \cdot a_\lambda.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
a_\lambda \cdot n_w &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} w \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} w \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \lambda w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \\
&= n_{\lambda w} \cdot a_\lambda.
\end{aligned}$$

□

Necesitaremos conocer las exponenciales de las matrices consideradas anteriormente, hacemos ahora la lista de dichos resultados. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{t\tilde{A}} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = a_{e^{2t}}. \quad (7.7)$$

$$e^{t\tilde{B}} = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = n_t. \quad (7.8)$$

$$e^{t\tilde{C}} = e^t \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ti \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = n_{ti}. \quad (7.9)$$

Ahora recordamos que por la identidad en (3.29), la expresión en ángulos de Euler (definición (3.3.11)) para $K \in SU(2)$ está dada por:

$$A(\theta, \chi, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} & -\sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} & \cos \frac{\chi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Usamos la expresión anterior para calcular las exponenciales siguientes:

$$e^{tI} = e^t \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = A(-2t, 0, 0) \in SU(2). \quad (7.10)$$

$$e^{tJ} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = A(0, 2t, 0) \in SU(2). \quad (7.11)$$

$$e^{tK} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -i \sin t \\ -i \sin t & \cos t \end{pmatrix} = A\left(\frac{3\pi}{2}, 2t, -\frac{3\pi}{2}\right) \in SU(2), \quad (7.12)$$

ya que

$$A\left(\frac{3\pi}{2}, 2t, -\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3\pi i}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{3\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3\pi i}{4}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{-\frac{3\pi i}{4}} \cos t & -e^{-\frac{3\pi i}{4}} \sin t \\ e^{\frac{3\pi i}{4}} \sin t & e^{\frac{3\pi i}{4}} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{3\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3\pi i}{4}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & -e^{-\frac{3\pi i}{2}} \sin t \\ e^{\frac{3\pi i}{2}} \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -i \sin t \\ -i \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

7.2 — Funciones hipergeométricas y cálculo de la constante v_{km}^l

Recordamos que las **series hipergeométricas** ${}_2F_1(a, b; c; z)$ están definidas como sigue,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad (7.13)$$

y convergen para $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$. También recordamos que el **símbolo de Pochhammer** para $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ está dado por

$$(q)_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ q(q+1) \cdots (q+n-1) & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Es claro de (7.13) y (7.14)

$${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (7.15)$$

Otra propiedad que usaremos de las series hipergeométricas es la siguiente,

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

Se puede probar la igualdad anterior derivando y usando la identidad $q(q+1)_m = (q)_m(q+m)$, con $q \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.

También nos será útil la siguiente derivada, sea $u = -\tan^2 t$, con $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} {}_2F_1(a, b; c; -\tan^2 t) &= \frac{d}{dt} {}_2F_1(a, b; c; u) \\
&= \frac{d}{du} {}_2F_1(a, b; c; u) \cdot \frac{du}{dt} \\
&= \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; u) \cdot (-2 \tan t \cdot \sec^2 t), \quad \text{por (7.16)}
\end{aligned} \quad (7.17)$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_0 {}_2F_1(a, b; c; -\tan^2 t) &= \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; 0) \cdot (0) && \text{por (7.17)} \\
&= \frac{ab}{c} \cdot 0 = 0. && \text{por (7.15)}
\end{aligned} \quad (7.18)$$

Lema 7.2.1. Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, entonces

$$v_{km}^l = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 d_{km}^l(-2t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k - m \neq \pm 1 \\ \sqrt{(l-k+1)(l+k)} & \text{si } k - m = 1 \\ -\sqrt{(l-m+1)(l+m)} & \text{si } k - m = -1. \end{cases}$$

Ejemplo. Consideremos $l = k = 1$, $m = 0$, entonces $\vartheta_{km}^l = \sqrt{2}$. Por otro lado, en los ejemplos (3.3.3) vimos que

$$d_{10}^1(\chi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \chi,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_{10}^1(-2t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(-2t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t \end{aligned}$$

derivando,

$$\frac{d}{dt} d_{10}^1(-2t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos 2t,$$

y evaluando en $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} d_{10}^1(-2t) \right|_0 = \sqrt{2},$$

lo cual coincide con ϑ_{km}^l como indica la fórmula del lema.

Demostración. Supongamos primero que $k > m$, en particular, $k - m > 0 > -1$, luego

$$k - m + 1 > 0. \quad (7.19)$$

Tenemos la siguiente identidad que relaciona las funciones d_{km}^l con las funciones hipergeométricas:

$$d_{km}^l(\chi) = c_{km}^l \left(\cos \frac{\chi}{2} \right)^{2l+m-k} \left(-\sin \frac{\chi}{2} \right)^{k-m} \cdot {}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 \frac{\chi}{2} \right), \text{ si } k \geq m \quad (7.20)$$

y donde

$$c_{km}^l := \frac{1}{(k-m)!} \left[\frac{(l-m)!(l+k)!}{(l+m)!(l-k)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.21)$$

Ver [24], ecuación (4.14), página 53.

Usando Mathematica vemos que si $\chi \in (-1, 1)$ entonces $|\tan^2 \frac{\chi}{2}| < 1$. Además, por la desigualdad (7.19) $k - m + 1 > 0$, por lo que las series hipergeométricas ${}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 \frac{\chi}{2} \right)$ convergen. Sea $t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, por (7.20)

$$d_{km}^l(-2t) = c_{km}^l (\cos t)^{2l+m-k} (\sin t)^{k-m} \cdot {}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t \right), \quad (7.22)$$

derivando la ecuación (7.22),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d_{km}^l(-2t) &= -c_{km}^l (2l+m-k) (\cos t)^{2l+m-k-1} (\sin t)^{k-m+1} \cdot {}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t \right) \\ &\quad + c_{km}^l (k-m) (\cos t)^{2l+m-k+1} (\sin t)^{k-m-1} \cdot {}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t \right) \\ &\quad + c_{km}^l (\cos t)^{2l+m-k} (\sin t)^{k-m} \cdot \frac{d}{dt} {}_2F_1 \left(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t \right), \end{aligned}$$

evaluando en $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_0 d_{km}^l(-2t) &= -c_{km}^l (2l + m - k) (0)^{k-m+1} \cdot {}_2F_1(k-l, -m-l; k-m+1; 0) \\
&\quad + c_{km}^l (k-m) (0)^{k-m-1} \cdot {}_2F_1(k-l, -m-l; k-m+1; 0) \\
&\quad + c_{km}^l (0)^{k-m} \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_0 {}_2F_1(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t) \\
&= -c_{km}^l (2l + m - k) (0)^{k-m+1} + c_{km}^l (k-m) (0)^{k-m-1} \\
&\quad + c_{km}^l (0)^{k-m} \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_0 {}_2F_1(k-l, -m-l; k-m+1; -\tan^2 t) && \text{por (7.15)} \\
&= -c_{km}^l (2l + m - k) (0)^{k-m+1} + c_{km}^l (k-m) (0)^{k-m-1} && \text{por (7.18)} \\
&= c_{km}^l (k-m) (0)^{k-m-1}. && \text{por (7.19)} \quad (7.23)
\end{aligned}$$

De (7.23) concluimos que si $k > m$ entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 d_{km}^l(-2t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k - m > 1 \\ c_{km}^l & \text{si } k - m = 1. \end{cases} \quad (7.24)$$

Pero si $k - m = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
c_{km}^l &= \frac{1}{(k-m)!} \left[\frac{(l-m)! (l+k)!}{(l+m)! (l-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} && \text{por (7.21)} \\
&= \frac{1}{(1)!} \left[\frac{(l-m)! (l+k)!}{(l-k)! (l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(l-k+1)! (l+k)!}{(l-k)! (l+k-1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{(l-k)! (l-k+1) (l+k-1)! (l+k)}{(l-k)! (l+k-1)!} \right]^{\frac{1}{2}} = [(l-k+1)(l+k)]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo que la identidad en (7.24) nos queda como sigue,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 d_{km}^l(-2t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k - m > 1 \\ \sqrt{(l-k+1)(l+k)} & \text{si } k - m = 1. \end{cases} \quad (7.25)$$

Supongamos ahora que $l \geq 1$ y $k = m$, de la fórmula en (7.22) se sigue que si $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entonces

$$d_{kk}^l(-2t) = c_{kk}^l (\cos t)^{2l} \cdot {}_2F_1(k-l, -k-l; 1; -\tan^2 t), \quad (7.26)$$

derivando la ecuación (7.26),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} d_{kk}^l(-2t) &= 2l c_{kk}^l (\cos t)^{2l-1} (-\sin t) \cdot {}_2F_1(k-l, -k-l; 1; -\tan^2 t) \\
&\quad + c_{kk}^l (\cos t)^{2l} \cdot \frac{d}{dt} {}_2F_1(k-l, -k-l; 1; -\tan^2 t),
\end{aligned}$$

evaluando en $t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{kk}^l(-2t) &= 2lc_{kk}^l(0) \cdot {}_2F_1(k-l, -k-l; 1; 0) \\ &\quad + c_{kk}^l \frac{d}{dt} \Big|_0 {}_2F_1(k-l, -k-l; 1; -\tan^2 t) \\ &= 0 + 0 \qquad \text{por (7.18)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Resumiendo, si $l \geq 1$ y $k = m$ entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 d_{kk}^l(-2t) = 0. \quad (7.27)$$

Por otro lado, como $d_{00}^0(\chi) = 1$, se sigue

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 d_{00}^0(-2t) = 0. \quad (7.28)$$

De las identidades en (7.25), (7.27) y (7.28) concluimos que si $k \geq m$, entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 d_{km}^l(-2t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k - m = 0 \\ \sqrt{(l - k + 1)(l + k)} & \text{si } k - m = 1 \\ 0 & \text{si } k - m > 1. \end{cases} \quad (7.29)$$

Supongamos ahora que $k < m$, una propiedad básica de las funciones d_{km}^l es la siguiente:

$$d_{km}^l(\chi) = (-1)^{k-m} d_{mk}^l(\chi),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{km}^l(-2t) &= (-1)^{k-m} \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{mk}^l(-2t) \\ &= (-1)^{-1} \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{mk}^l(-2t), \qquad \text{ya que } k - m < 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

usando la ecuación (7.24) y (7.30) concluimos que si $k < m$ entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 d_{km}^l(-2t) = \begin{cases} -\sqrt{(l - m + 1)(l + m)} & \text{si } m - k = 1 \\ 0 & \text{si } m - k > 1. \end{cases} \quad (7.31)$$

El lema se sigue de las identidades (7.29) y (7.31). □

7.3 — Operadores y series de Eisenstein

Recordemos que por la definición (6.1.10) tenemos una acción de $H = SL(2, \mathbb{C}) \times SU(2)$ en $G = SL(2, \mathbb{C})$ como sigue:

$$(\gamma, K)q = \gamma q K^{-1}, \quad \forall q \in G. \quad (7.32)$$

La acción anterior induce una acción de H en $C^\infty(G)$.

Definición 7.3.1. H actúa en $C^\infty(G)$ por medio de la siguiente identidad:

$$[(\gamma, K) * f](q) = f((\gamma, K) * q) = f(\gamma q K^{-1}), \quad \forall (\gamma, K) \in H, \forall f \in C^\infty(G), \forall q \in G.$$

Necesitamos el siguiente resultado técnico.

Lema 7.3.2. Si $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, definidos en el capítulo 6, sección 4. Se cumple

$$Ad_K \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n, \quad n = 1, 2, 3, \quad \forall K \in SU(2).$$

Demostración. Cálculos directos. □

Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Recordamos que por la definición (4.3.2), las funciones $f_{km}^l : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ están dadas como sigue:

$$f_{km}^l(g, s) = \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(g)^{-1}})} \operatorname{Im} g(j)^{1+s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (7.33)$$

Lema 7.3.3. Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, entonces $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= 2\delta_{km}(1+s) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \\ L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= \tilde{A}^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{t\tilde{A}}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda a_{e^{2t}}) && \text{por (7.7)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{2t}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \overline{D_{km}^l(\Phi_I)} \operatorname{Im} n_z a_\lambda e^{2t}(j)^{1+s} && \text{por (7.33)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \overline{D_{km}^l(I)} (\lambda e^{2t})^{1+s} && \text{por (7.6)} \\ &= \delta_{km} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\lambda e^{2t})^{1+s} && \text{por el corolario (4.2.2)} \\ &= \delta_{km} \lambda^{1+s} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 e^{2t(1+s)} = 2\delta_{km}(1+s) \cdot \lambda^{1+s} \\ &= 2\delta_{km}(1+s) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda). \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned}
L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= \tilde{B}^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{t\tilde{B}}) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda n_t) && \text{por (7.8)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z n_{\lambda t} a_\lambda) && \text{por el lema (7.1.1)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_{z+\lambda t} a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{D_{km}^l(I)} \operatorname{Im} n_{z+\lambda t} a_\lambda(j)^{1+s} && \text{por (7.33)} \\
&= \overline{D_{km}^l(I)} \frac{d}{dt} \Big|_0 \lambda^{1+s} && \text{por (7.6)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned}
L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= \tilde{C}^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{t\tilde{C}}) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda n_{ti}) && \text{por (7.9)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z n_{\lambda ti} a_\lambda) && \text{por el lema (7.1.1)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_{z+\lambda ti} a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{D_{km}^l(I)} \operatorname{Im} n_{z+\lambda ti} a_\lambda(j)^{1+s} && \text{por (7.33)} \\
&= \overline{D_{km}^l(I)} \frac{d}{dt} \Big|_0 \lambda^{1+s} && \text{por (7.6)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Las igualdades en (7.34), (7.35) y (7.36) prueban el lema. \square

Lema 7.3.4. *Si $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$, entonces $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned}
L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= -2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \\
L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \\
L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda).
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= I^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{tI}) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda A(-2t, 0, 0)) && \text{por (7.10)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(\overline{D_{km}^l(\Phi_{A(-2t, 0, 0)^{-1}})} \cdot \lambda^{1+s} \right) && \text{por (7.33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{D_{km}^l(\Phi_{A(0,0,2t)})} \\
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{d_{km}^l(0) e^{2imt}} && \text{por (3.38)} \\
&= f_{km}^l(n_z a_\lambda) \frac{d}{dt} \Big|_0 (\delta_{km} e^{-2imt}) && \text{por el corolario (4.2.2)} \\
&= -2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda). && (7.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= J^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{tJ}) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda A(0, 2t, 0)) && \text{por (7.11)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(\overline{D_{km}^l(\Phi_{A(0,2t,0)^{-1}})} \cdot \lambda^{1+s} \right) && \text{por (7.33)} \\
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{D_{km}^l(\Phi_{A(0,-2t,0)})} \\
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{d_{km}^l(-2t)} && \text{por (3.38)} \\
&= f_{km}^l(n_z a_\lambda) \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{km}^l(-2t) \\
&= \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda). && \text{por el lema (7.2.1)} && (7.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= K^{izq} f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l(n_z a_\lambda e^{tK}) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 f_{km}^l\left(n_z a_\lambda A\left(\frac{3\pi}{2}, 2t, -\frac{3\pi}{2}\right)\right) && \text{por (7.12)} \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(\overline{D_{km}^l(\Phi_{A(\frac{3\pi}{2}, 2t, -\frac{3\pi}{2})^{-1}})} \cdot \lambda^{1+s} \right) && \text{por (7.33)} \\
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{D_{km}^l(\Phi_{A(\frac{3\pi}{2}, -2t, -\frac{3\pi}{2})})} \\
&= \lambda^{1+s} \frac{d}{dt} \Big|_0 \overline{e^{\frac{3\pi ik}{2}} d_{km}^l(-2t) e^{-\frac{3\pi im}{2}}} && \text{por (3.38)} \\
&= f_{km}^l(n_z a_\lambda) \cdot e^{-\frac{3\pi ik}{2}} \cdot e^{\frac{3\pi im}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_0 d_{km}^l(-2t) \\
&= e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda). && \text{por el lema (7.2.1)} && (7.39)
\end{aligned}$$

Las igualdades en (7.37), (7.38) y (7.39) prueban el lema. \square

Lema 7.3.5. *Se cumple*

$$L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l(n_z a_\lambda) = \left(-m^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Usando las identidades en (7.3) transformamos \mathcal{O}_1 como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= H_2^2 + W_1^2 + W_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}I\right)\left(\frac{1}{2}I\right) + \left(-\frac{1}{2}J\right)\left(-\frac{1}{2}J\right) + \left(-\frac{1}{2}K\right)\left(-\frac{1}{2}K\right) \\ &= \frac{1}{4}I^2 + \frac{1}{4}J^2 + \frac{1}{4}K^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l(n_z a_\lambda) &= \frac{1}{4} L(I) \circ L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} L(J) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} L(K) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &= \frac{1}{4} L(I) \left(-2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{4} L(J) \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} L(K) \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \quad \text{por el lema (7.3.4)} \\ &= -\frac{1}{2} im \delta_{km} \cdot L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} \vartheta_{km}^l \cdot L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &= -\frac{1}{2} im \delta_{km} \left(-2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{4} \vartheta_{km}^l \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \quad \text{por el lema (7.3.4)} \\ &= -m^2 \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &= \left(-m^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda).\end{aligned}$$

□

Lema 7.3.6. *Se cumple*

$$L(\mathcal{O}_2) f_{km}^l(n_z a_\lambda) = \left((1+s)^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Usando las ecuaciones en (7.5) obtenemos,

$$H_1 = \frac{1}{2} \tilde{A}, \quad V_1 = \frac{1}{2} J + \tilde{B}, \quad V_2 = \frac{1}{2} K + \tilde{C}. \quad (7.40)$$

Por lo que usando las identidades en (7.40) vemos que \mathcal{O}_2 se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2 &= H_1^2 + V_1^2 + V_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\tilde{A}\right)\left(\frac{1}{2}\tilde{A}\right) + \left(\frac{1}{2}J + \tilde{B}\right)\left(\frac{1}{2}J + \tilde{B}\right) + \left(\frac{1}{2}K + \tilde{C}\right)\left(\frac{1}{2}K + \tilde{C}\right) \\ &= \frac{1}{4}\tilde{A}\tilde{A} + \frac{1}{4}JJ + \frac{1}{2}J\tilde{B} + \frac{1}{2}\tilde{B}J + \tilde{B}\tilde{B} + \frac{1}{4}KK + \frac{1}{2}K\tilde{C} + \frac{1}{2}\tilde{C}K + \tilde{C}\tilde{C}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $L(\mathcal{O}_2) f_{km}^l(n_z a_\lambda)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} L(\tilde{A}) \circ L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} L(J) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2} L(J) \circ L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} L(\tilde{B}) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + L(\tilde{B}) \circ L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} L(K) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} L(K) \circ L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2} L(\tilde{C}) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + L(\tilde{C}) \circ L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &= \frac{1}{4} L(\tilde{A}) \circ L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4} L(J) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2} L(\tilde{B}) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{4} L(K) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2} L(\tilde{C}) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda)\end{aligned}$$

por el lema (7.3.3)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}L(\tilde{A}) \circ L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}L(J) \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{2}L(\tilde{B}) \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4}L(K) \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{2}L(\tilde{C}) \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\
&\hspace{20em} \text{por el lema (7.3.4)} \\
&= \frac{1}{4}L(\tilde{A}) \left(2\delta_{km}(1+s) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{4}\vartheta_{km}^l \cdot L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2}\vartheta_{km}^l \cdot L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\quad + \frac{1}{4}e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2}e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\hspace{20em} \text{por el lema (7.3.3)} \\
&= \frac{1}{2}\delta_{km}(1+s) \cdot L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}\vartheta_{km}^l \cdot L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\hspace{20em} \text{por el lema (7.3.3)} \\
&= (1+s)^2\delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}\vartheta_{km}^l \cdot L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\hspace{20em} \text{por el lema (7.3.3)} \\
&= (1+s)^2\delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}\vartheta_{km}^l \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{4}e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\
&\hspace{20em} \text{por el lema (7.3.4)} \\
&= (1+s)^2\delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}(\vartheta_{km}^l)^2 \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{4}e^{3i(m-k)\pi} (\vartheta_{km}^l)^2 \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \left((1+s)^2\delta_{km} + \frac{1}{4}(\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4}e^{3i(m-k)\pi} (\vartheta_{km}^l)^2 \right) \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda)
\end{aligned}$$

□

Lema 7.3.7. *Se cumple*

$$L(\mathcal{O}_3) f_{km}^l(n_z a_\lambda) = ims \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Usando las ecuaciones en (7.5) obtenemos,

$$H_1 = \frac{1}{2}\tilde{A}, \quad V_1 = \frac{1}{2}J + \tilde{B}, \quad V_2 = \frac{1}{2}K + \tilde{C}. \quad (7.41)$$

De las identidades en (7.3) tenemos

$$H_2 = \frac{1}{2}I, \quad W_1 = -\frac{1}{2}J, \quad W_2 = -\frac{1}{2}K. \quad (7.42)$$

Por las igualdades en (7.4),

$$KJ = -I, \quad JK = I. \quad (7.43)$$

Recordamos que $\mathcal{O}_3 = -H_2H_1 + W_1V_2 - W_2V_1$, pero como

$$[H_2, H_1] = [W_1, V_2] = [W_2, V_1] = 0,$$

se tiene que $\mathcal{O}_3 = -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2$. Obtenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_3 &= -H_1H_2 + V_2W_1 - V_1W_2 \\
&= \left(-\frac{1}{2}\tilde{A}\right)H_2 + \left(\frac{1}{2}K + \tilde{C}\right)W_1 - \left(\frac{1}{2}J + \tilde{B}\right)W_2 && \text{por (7.41)} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\tilde{A}\right)\left(\frac{1}{2}I\right) + \left(\frac{1}{2}K + \tilde{C}\right)\left(-\frac{1}{2}J\right) - \left(\frac{1}{2}J + \tilde{B}\right)\left(-\frac{1}{2}K\right) && \text{por (7.42)} \\
&= -\frac{1}{4}\tilde{A}I - \frac{1}{4}KJ - \frac{1}{2}\tilde{C}J + \frac{1}{4}JK + \frac{1}{2}\tilde{B}K \\
&= -\frac{1}{4}\tilde{A}I - \frac{1}{4}(-I) - \frac{1}{2}\tilde{C}J + \frac{1}{4}(I) + \frac{1}{2}\tilde{B}K && \text{por (7.43)} \\
&= -\frac{1}{4}\tilde{A}I + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\tilde{C}J + \frac{1}{2}\tilde{B}K.
\end{aligned} \quad (7.44)$$

Por lo tanto, $L(\mathcal{O}_3) f_{km}^l(n_z a_\lambda)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}L(\tilde{A}) \circ L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) + \frac{1}{2}L(I) f_{km}^l(n_z a_\lambda) - \frac{1}{2}L(\tilde{C}) \circ L(J) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\quad + \frac{1}{2}L(\tilde{B}) \circ L(K) f_{km}^l(n_z a_\lambda) && \text{por (7.44)} \\
&= -\frac{1}{4}L(\tilde{A}) \left(-2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{2} \left(-2im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}L(\tilde{C}) \left(\vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) + \frac{1}{2}L(\tilde{B}) \left(e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) && \text{por el lema (7.3.4)} \\
&= \frac{1}{2}im \delta_{km} \cdot L(\tilde{A}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) - im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) - \frac{1}{2} \vartheta_{km}^l \cdot L(\tilde{C}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{\frac{3i(m-k)\pi}{2}} \vartheta_{km}^l \cdot L(\tilde{B}) f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \frac{1}{2}im \delta_{km} \cdot \left(2(1+s)\delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \right) - im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) && \text{por el lema (7.3.3)} \\
&= im(1+s) \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) - im \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda) \\
&= ims \delta_{km} \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda).
\end{aligned}$$

□

Lema 7.3.8. Si $X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, se cumple la siguiente identidad:

$$e^{Ad_K X} = K e^X K^{-1}, \quad \forall K \in SU(2).$$

Demostración. Ver [14], página 127 y lema 1.12 para una demostración. □

Lema 7.3.9. Sean $m \in \mathbb{N}$, $f_k \in C^\infty(G)$ donde $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces

$$(\gamma, K) * \left(\sum_{k=1}^m f_k \right) = \sum_{k=1}^m (\gamma, K) * f_k, \quad \forall (\gamma, K) \in H.$$

Demostración. Sea $h \in SL(2, \mathbb{C})$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\left[(\gamma, K) * \left(\sum_{k=1}^m f_k \right) \right] (h) &= \left(\sum_{k=1}^m f_k \right) ((\gamma, K) h) && \text{por la definición (7.3.1)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^m f_k \right) (\gamma h K^{-1}) && \text{por la definición (7.3.2)} \\
&= \sum_{k=1}^m f_k(\gamma h K^{-1}) \\
&= \sum_{k=1}^m f_k((\gamma, K) h) && \text{por la definición (7.3.2)} \\
&= \sum_{k=1}^m \left[(\gamma, K) * f_k \right] (h) && \text{por la definición (7.3.1)} \\
&= \left[\sum_{k=1}^m (\gamma, K) * f_k \right] (h).
\end{aligned}$$

□

Lema 7.3.10. Si $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, $f \in C^\infty(G)$. Entonces

$$(\gamma, K) * L(\mathfrak{X})f = L(Ad_{K^{-1}}\mathfrak{X})((\gamma, K) * f), \quad \forall (\gamma, K) \in H.$$

Demostración. Sean $q \in G$, $(\gamma, K) \in H$, primero consideramos el caso en que $\mathfrak{X} = X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} [(\gamma, K) * L(X)f](q) &= L(X)f((\gamma, K)q) && \text{por la definición (7.3.1)} \\ &= X^{izq} f((\gamma, K)q) && \text{por la definición (2.3.2)} \\ &= X^{izq} f(\gamma q K^{-1}) && \text{por la definición (7.32)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma q K^{-1} e^{tX}). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} [L(Ad_{K^{-1}}X)((\gamma, K) * f)](q) &= [(Ad_{K^{-1}}X)^{izq}((\gamma, K) * f)](q) && \text{por la definición (2.3.2)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 ((\gamma, K) * f)(q e^{tAd_{K^{-1}}X}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 ((\gamma, K) * f)(q e^{Ad_{K^{-1}}tX}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f((\gamma, K)(q e^{Ad_{K^{-1}}tX})) && \text{por la definición (7.3.1)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma q e^{Ad_{K^{-1}}tX} K^{-1}) && \text{por la definición (7.32)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma q K^{-1} e^{tX} K K^{-1}) && \text{por el lema (7.3.8)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma q K^{-1} e^{tX}). \end{aligned} \quad (7.46)$$

De (7.45) y (7.46) tenemos

$$(\gamma, K) * L(X)f = L(Ad_{K^{-1}}X)((\gamma, K) * f), \quad \forall X \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}. \quad (7.47)$$

Consideremos ahora el caso en que $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ es un monomio, S.P.G. suponemos que $\mathfrak{X} = X_1 X_2$ con $X_1, X_2 \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\gamma, K) * L(X_1 X_2)f &= (\gamma, K) * \left((L(X_1) \circ L(X_2))f \right) && \text{por (2.1)} \\ &= (\gamma, K) * \left(L(X_1)(L(X_2)f) \right) \\ &= L(Ad_{K^{-1}}X_1)((\gamma, K) * L(X_2)f) && \text{por (7.47)} \\ &= L(Ad_{K^{-1}}X_1) \circ L(Ad_{K^{-1}}X_2)((\gamma, K) * f) && \text{por (7.47)} \\ &= L\left((Ad_{K^{-1}}X_1)(Ad_{K^{-1}}X_2) \right)((\gamma, K) * f) && \text{por (2.1)} \\ &= L(Ad_{K^{-1}}X_1 X_2)((\gamma, K) * f). \end{aligned}$$

Por lo que hemos demostrado que si $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ es un monomio entonces

$$(\gamma, K) * L(\mathfrak{X})f = L(Ad_{K^{-1}}\mathfrak{X})((\gamma, K) * f). \quad (7.48)$$

Consideremos ahora cualquier elemento $\mathfrak{X} \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$, \mathfrak{X} es una suma finita

$$\mathfrak{X} = \sum_m \mathfrak{X}_m, \quad (7.49)$$

donde cada \mathfrak{X}_m es un monomio de la forma $\mathfrak{X}_m = X_{m_1} X_{m_2} \cdots X_{m_n}$ con $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n} \in sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Luego, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (\gamma, K) * L(\mathfrak{X})f &= (\gamma, K) * L\left(\sum_m \mathfrak{X}_m\right)f && \text{por (7.49)} \\ &= (\gamma, K) * \left(\sum_m L(\mathfrak{X}_m)f\right) && \text{por la definici3n (2.3.2)} \\ &= \sum_m (\gamma, K) * \left(L(\mathfrak{X}_m)f\right) && \text{por el lema (7.3.9)} \\ &= \sum_m L(Ad_{K^{-1}}\mathfrak{X}_m)((\gamma, K) * f) && \text{por (7.48)} \\ &= L\left(\sum_m Ad_{K^{-1}}\mathfrak{X}_m\right)((\gamma, K) * f) && \text{por la definici3n (2.3.2)} \\ &= L\left(Ad_{K^{-1}}\sum_m \mathfrak{X}_m\right)((\gamma, K) * f) && \text{por la definici3n (2.3.3)} \\ &= L(Ad_{K^{-1}}\mathfrak{X})((\gamma, K) * f). && \text{por (7.49)} \end{aligned}$$

Lo cual prueba el caso general. □

Lema 7.3.11. *Si $K \in SU(2)$, entonces*

$$(I, K^{-1}) * f_{km}^l = \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l.$$

Demostraci3n. Si $h \in SL(2, \mathbb{C})$, $\text{Re}(s) > 1$, se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} f_{km}^l(hK) &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(hK)^{-1}})} \text{Im } hK(j)^{1+s} && \text{por la definici3n (7.33)} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{T(hK)^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} && \text{por (3.9)} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{(T(h)K)^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{K^{-1}T(h)^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} \\ &= \overline{D_{km}^l(\Phi_{K^{-1}} \circ \Phi_{T(h)^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} && \text{por el lema (3.3.10)} \\ &= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{rm}^l(\Phi_{T(h)^{-1}})} \cdot \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} && \text{por el lema (4.2.1)} \\ &= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot \overline{D_{rm}^l(\Phi_{T(h)^{-1}})} \text{Im } h(j)^{1+s} \\ &= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l(h). && (7.50) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[(I, K^{-1}) * f_{km}^l](h) &= f_{km}^l((I, K^{-1})h) && \text{por la definici3n (7.3.1)} \\
&= f_{km}^l(hK) && \text{por la definici3n (7.3.2)} \\
&= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l(h) && \text{por (7.50)} \\
&= \left[\sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l \right](h).
\end{aligned}$$

□

Lema 7.3.12. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Sabemos que por el lema (7.3.5) se cumple

$$L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l(n_z a_\lambda) = \mu_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (7.51)$$

donde $\mu_{km}^l := \left(-m^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right)$. Entonces

$$L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l(h) = \mu_{km}^l \cdot f_{km}^l(h), \quad \forall h \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Demostraci3n. Si $h = n_z a_\lambda K$ su descomposici3n de Iwasawa, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
[L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l](n_z a_\lambda K) &= \left[L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l \right]((I, K^{-1})(n_z a_\lambda)) && \text{por la definici3n (7.3.2)} \\
&= \left[(I, K^{-1}) * L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l \right](n_z a_\lambda) && \text{por la definici3n (7.3.1)} \\
&= \left[L(Ad_K \mathcal{O}_1) ((I, K^{-1}) * f_{km}^l) \right](n_z a_\lambda) && \text{por el lema (7.3.10)} \\
&= \left[L(\mathcal{O}_1) ((I, K^{-1}) * f_{km}^l) \right](n_z a_\lambda) && \text{por el lema (7.3.2)} \\
&= \left[L(\mathcal{O}_1) \left(\sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l \right) \right](n_z a_\lambda) && \text{por el lema (7.3.11)} \\
&= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot L(\mathcal{O}_1) f_{rm}^l(n_z a_\lambda) \\
&= \sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot \mu_{km}^l f_{rm}^l(n_z a_\lambda) && \text{por (7.51)} \\
&= \mu_{km}^l \left[\sum_{r=-l}^l \overline{D_{kr}^l(\Phi_{K^{-1}})} \cdot f_{rm}^l \right](n_z a_\lambda) \\
&= \mu_{km}^l \left[(I, K^{-1}) * f_{km}^l \right](n_z a_\lambda) && \text{por el lema (7.3.11)} \\
&= \mu_{km}^l \cdot f_{km}^l((I, K^{-1}) n_z a_\lambda) && \text{por la definici3n (7.3.1)} \\
&= \mu_{km}^l \cdot f_{km}^l(n_z a_\lambda K). && \text{por la definici3n (7.3.2)}
\end{aligned}$$

□

Es claro que el lema anterior también se puede aplicar a los operadores \mathcal{O}_2 y \mathcal{O}_3 , usando los lemas (7.3.6) y (7.3.7) respectivamente. Luego obtenemos el siguiente:

Corolario 7.3.13. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{O}_1) f_{km}^l &= \left(-m^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot f_{km}^l. \\ L(\mathcal{O}_2) f_{km}^l &= \left((1+s)^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot f_{km}^l. \\ L(\mathcal{O}_3) f_{km}^l &= ims \delta_{km} \cdot f_{km}^l. \end{aligned}$$

Como las funciones f_{km}^l son eigenfunciones de los operadores $L(\mathcal{O}_1)$, $L(\mathcal{O}_2)$ y $L(\mathcal{O}_3)$ que son G -invariantes a la izquierda finalmente concluimos

$$\begin{aligned} L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= \left(-m^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= \left((1+s)^2 \delta_{km} + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 + \frac{1}{4} (\vartheta_{km}^l)^2 e^{3i(m-k)\pi} \right) \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{km}^l(g, s) &= ims \delta_{km} \cdot \widehat{E}_{km}^l(g, s), \end{aligned}$$

donde

$$\vartheta_{km}^l = \begin{cases} 0 & \text{si } k - m \neq \pm 1 \\ \sqrt{(l-k+1)(l+k)} & \text{si } k - m = 1 \\ -\sqrt{(l-m+1)(l+m)} & \text{si } k - m = -1. \end{cases}$$

Trabajando en los casos $k = m$ y $k \neq m$, y utilizando la identidad $e^{\pm 3i\pi} = -1$, obtenemos la siguiente versión final simplificada:

Teorema 7.3.14. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Las series de Eisenstein $\widehat{E}_{km}^l(g, s)$ son eigenfunciones de los operadores $L(\mathcal{O}_1)$, $L(\mathcal{O}_2)$ y $L(\mathcal{O}_3)$. Si $k = m$ tenemos

$$\begin{aligned} L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= -k^2 \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= (1+s)^2 \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s), \\ L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{kk}^l(g, s) &= iks \cdot \widehat{E}_{kk}^l(g, s). \end{aligned}$$

Si $k \neq m$ entonces

$$L(\mathcal{O}_1) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = L(\mathcal{O}_2) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = L(\mathcal{O}_3) \widehat{E}_{km}^l(g, s) = 0.$$

Equidistribución

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$ consideramos la superficie

$$\mathcal{H}_\lambda := \{(z, \lambda, e_1) ; z \in \mathbb{C}\} \subset T_1\mathbb{H}^3.$$

Afirmamos que \mathcal{H}_λ pasa al cociente $T_1M_D^3$ como una 2-orbita cerrada que denotaremos por \tilde{T}_λ . Esto ya que si $\gamma^w := \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_{D,\infty}$, con $w \in \mathcal{O}_D$, entonces:

$$\gamma^w(z + \lambda j) = (z + w) + \lambda j, \tag{8.1}$$

$$d\gamma^w(e_1)_{(z,\lambda)} = (e_1)_{(z+w,\lambda)}. \tag{8.2}$$

Si $D \in \{2, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ tenemos que $\Gamma'_{D,\infty} = \Gamma_{D,\infty}$ (ver capítulo 3, sección 2), y se tiene una construcción clásica para las \tilde{T}_λ . Sea $\Pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow M_D^3$ el cubriente universal. Para cada $\lambda > 0$ consideraremos la horoesfera \mathcal{P}_λ dada por

$$\mathcal{P}_\lambda = \{(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3 ; z \in \mathbb{C}\}.$$

Ver figura (8.1). Por (8.1), $T_\lambda = \Pi(\mathcal{P}_\lambda)$ será un “toro” en M_D^3 . Ahora consideramos el campo vectorial unitario hiperbólico e_1 en \mathbb{H}^3 . Por (8.1) y (8.2) podemos levantar el toro T_λ a un “toro” en $T_1M_D^3$ como sigue (ver figura (8.2))

$$\tilde{T}_\lambda = e_1(T_\lambda).$$

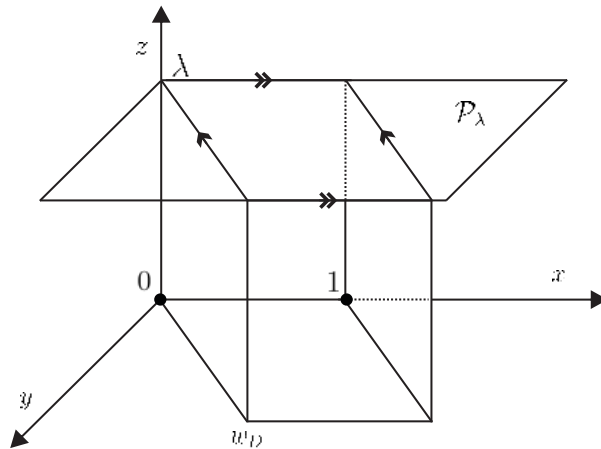


Figura 8.1: La horoesfera \mathcal{P}_λ .

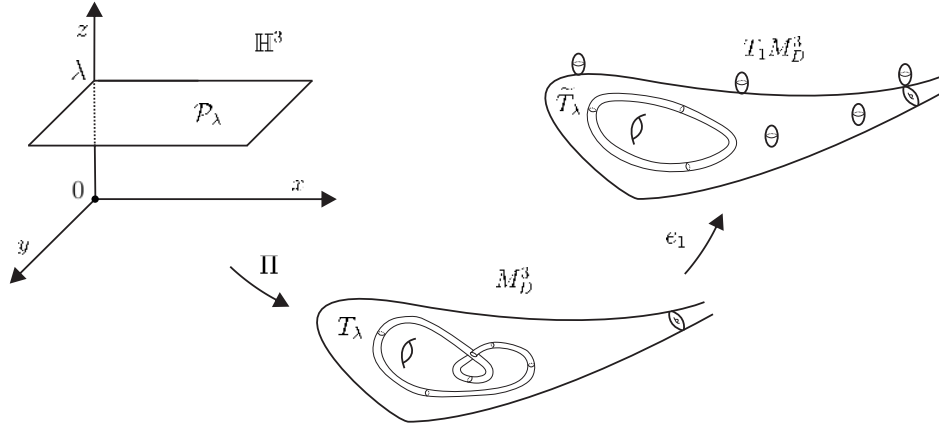


Figura 8.2: Los toros T_λ y \tilde{T}_λ .

Más adelante definiremos las medidas de probabilidad $\nu(\lambda)$ en $T_1 M_D^3$ (definición (8.1.2)), y que están localizadas en las 2 orbidades \tilde{T}_λ . Queremos estudiar que pasa con las medidas $\nu(\lambda)$ cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Cabe mencionar que en este capítulo, al contrario de los anteriores, daremos primero los resultados principales y el teorema, dejando los lemas técnicos para el final.

8.1 — Conjetura \implies Equidistribución

Primero hacemos algunos preliminares y recordatorios.

$$C_0^\infty(T_1 M_D^3) = \{f : T_1 M_D^3 \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ es diferenciable y con soporte compacto}\},$$

$$C_0^0(T_1 M_D^3) = \{f : T_1 M_D^3 \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ es continua y con soporte compacto}\}.$$

El haz tangente unitario a \mathbb{H}^3 está dado por

$$T_1 \mathbb{H}^3 = \bigcup_{(w,\eta) \in \mathbb{H}^3} \mathbb{S}_{(w,\eta)}^{\mathbb{H}^3},$$

donde

$$\mathbb{S}_{(w,\eta)}^{\mathbb{H}^3} = \{v \in T_{(w,\eta)} \mathbb{H}^3; \|v\|_{(w,\eta)}^{\mathbb{H}^3} = 1\}.$$

Además,

$$T_1 M_D^3 = T_1 \mathbb{H}^3 / \Gamma_D^*,$$

donde con Γ_D^* nos referimos a la acción natural de Γ_D en $T_1 \mathbb{H}^3$, es decir, en \mathbb{H}^3 la acción es la usual, y en los vectores tangentes hiperbólicos unitarios la acción está dada por la diferencial.

Sea $(w, \eta) \in \mathbb{H}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base ortonormal hiperbólica en $T_{(w,\eta)} \mathbb{H}^3$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base ortonormal euclidiana en $T_{(w,\eta)} \mathbb{R}^3$ correspondiente. Denotaremos por $\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(w,\eta)}$ al vector en $T_{(w,\eta)} \mathbb{R}^3$ definido como sigue:

$$\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(w,\eta)} = \text{Im}(w, \eta) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \text{Im}(w, \eta) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2 + \text{Im}(w, \eta) \cdot \cos \vartheta \cdot \vec{e}_3. \quad (8.3)$$

Se cumple

$$\|\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(w, \eta)}\|_{\mathbb{R}^3} = \text{Im}(w, \eta). \quad (8.4)$$

$$\|\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(w, \eta)}\|_{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{\text{Im}(w, \eta)} \|\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(w, \eta)}\|_{\mathbb{R}^3} = 1. \quad (8.5)$$

Sea $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, equivalentemente, $f : T_1 \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable, con soporte compacto y además Γ_D invariante. Sea $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, por (8.5) sabemos $\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)} \in \mathbb{S}_{(z, \lambda)}^{\mathbb{H}^3}$, luego, podemos evaluar f en $(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \in T_1 \mathbb{H}^3$, y por la invarianza tenemos que para $\gamma \in \Gamma_D$

$$f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) = f(\gamma(z, \lambda), d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}). \quad (8.6)$$

Restringiendo f a las fibras $\mathbb{S}_{(z, \lambda)}^{\mathbb{H}^3} \xrightarrow[\text{difeo.}]{\cong} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ del haz tangente unitario obtenemos la siguiente función:

$$f(z, \lambda, \vec{v}(\cdot, \cdot)_{(z, \lambda)}) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Como ya comentamos en el capítulo 3, los armónicos esféricos son un conjunto de funciones usados para representar funciones sobre la esfera \mathbb{S}^2 , son eigenfunciones del laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ y son los análogos a las funciones $z \rightarrow z^n$ sobre \mathbb{S}^1 . La serie de Laplace para funciones en \mathbb{S}^2 es el análogo 2-dimensional de la serie de Fourier para funciones en \mathbb{S}^1 .

Suponiendo que f admite una serie de Laplace podemos restringirla a las fibras, tenemos la siguiente expansión:

$$f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{f}_m^l(z, \lambda) \cdot Y_m^l(\vartheta, \varphi), \quad (8.7)$$

(ϑ, φ) denota el punto de \mathbb{S}^2 con coordenadas esféricas $(1, \vartheta, \varphi)$, y

$$\hat{f}_m^l(z, \lambda) = \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \overline{Y_m^l(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi. \quad (8.8)$$

Haciendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ en (8.7) tenemos

$$f(z, \lambda, \vec{v}(\frac{\pi}{2}, 0)_{(z, \lambda)}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{f}_m^l(z, \lambda) \cdot Y_m^l(\frac{\pi}{2}, 0). \quad (8.9)$$

Pero como $\vec{v}(\frac{\pi}{2}, 0)_{(z, \lambda)} = e_{1(z, \lambda)}$, nos referiremos a la ecuación (8.9) simplemente como

$$f(z, \lambda, e_1) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{f}_m^l(z, \lambda) \cdot Y_m^l(\vec{e}_1). \quad (8.10)$$

Lema 8.1.1. Sean $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \in [-l, l]$, $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$. Entonces:

$$\hat{f}_m^l(\gamma(z, \lambda)) = \sum_{k=-l}^l \overline{D_{km}^l(R(d\gamma, z, \lambda)^{-1})} \cdot \hat{f}_k^l(z, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma_D.$$

Demostración. Por (8.8) tenemos

$$\widehat{f}_m^l(\gamma(z, \lambda)) = \int_{\mathbb{S}^2} f(\gamma(z, \lambda), \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)}) \overline{Y_m^l(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (8.11)$$

Por otro lado, recordamos que por (8.3) el vector $\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)} \in T_{\gamma(z, \lambda)}\mathbb{R}^3$ está definido por:

$$\vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)} = \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2 + \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \cos \vartheta \cdot \vec{e}_3. \quad (8.12)$$

Hacemos un cambio de variable en $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando la rotación $R(d\gamma, z, \lambda) \in SO(3)$ que definimos en (4.1.1),

$$R(d\gamma, z, \lambda) \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)} \right] = \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)}. \quad (8.13)$$

Veamos cómo cambian los armónicos esféricos.

$$\begin{aligned} Y_m^l(\vartheta, \varphi) &= Y_m^l \left(\frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)} \right) \\ &= Y_m^l \left(R(d\gamma, z, \lambda) \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)} \right] \right) && \text{por (8.13)} \\ &= \sum_{k=-l}^l D_{km}^l (R(d\gamma, z, \lambda)^{-1}) \cdot Y_k^l \left(\frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)} \right). && \text{por (3.15)} \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$Y_m^l(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=-l}^l D_{km}^l (R(d\gamma, z, \lambda)^{-1}) \cdot Y_k^l(\vartheta', \varphi'). \quad (8.14)$$

Usando la notación en (4.1), tenemos

$$\overrightarrow{d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')} = \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(z, \lambda)} d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}. \quad (8.15)$$

Por otro lado, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}) &= f(\gamma(z, \lambda), d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}) && \text{por (8.6)} \\ &= f \left(\gamma(z, \lambda), \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(z, \lambda)} d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)} \right) \\ &= f \left(\gamma(z, \lambda), \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \overrightarrow{d\gamma_{(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}} \right) && \text{por (8.15)} \\ &= f \left(\gamma(z, \lambda), \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot R(d\gamma, z, \lambda) \left[\overrightarrow{\vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}} \right] \right) && \text{por (4.1.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(\gamma(z, \lambda), \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot R(d\gamma, z, \lambda) \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)} \right]\right) && \text{por (8.4)} \\
&= f\left(\gamma(z, \lambda), \operatorname{Im} \gamma(z, \lambda) \cdot \frac{1}{\operatorname{Im} \gamma(z, \lambda)} \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)}\right). && \text{por (8.13)} \\
&= f(\gamma(z, \lambda), \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)}).
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}) = f(\gamma(z, \lambda), \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{\gamma(z, \lambda)}). \quad (8.16)$$

Además, por ser $R(d\gamma, z, \lambda)$ una isometría en \mathbb{S}^2 tenemos

$$\sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi = \sin \vartheta' \, d\vartheta' d\varphi'. \quad (8.17)$$

Finalmente, sustituyendo (8.14), (8.16) y (8.17) en (8.11)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_m^l(\gamma(z, \lambda)) &= \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}) \overline{\sum_{k=-l}^l D_{km}^l(R(d\gamma, z, \lambda)^{-1}) \cdot Y_k^l(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' \, d\vartheta' d\varphi'} \\
&= \sum_{k=-l}^l \overline{D_{km}^l(R(d\gamma, z, \lambda)^{-1})} \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta', \varphi')_{(z, \lambda)}) \overline{Y_k^l(\vartheta', \varphi')} \sin \vartheta' \, d\vartheta' d\varphi' \\
&= \sum_{k=-l}^l \overline{D_{km}^l(R(d\gamma, z, \lambda)^{-1})} \cdot \widehat{f}_k^l(z, \lambda). && \text{por (8.8)}
\end{aligned}$$

□

Definición 8.1.2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$. Definimos las medidas de probabilidad $\nu(\lambda)$, localizadas en las 2 orbidades $\widetilde{T}_\lambda \subset T_1 M_D^3$, como sigue:

$$\nu(\lambda)(f) := \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) \, dx dy, \quad \forall f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3).$$

Veamos que la definición anterior tiene sentido. Sean $f, g \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, $t \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\nu(\lambda)(f + tg) &= \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} (f + tg)(z, \lambda, e_1) \, dx dy \\
&= \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} [f(z, \lambda, e_1) + tg(z, \lambda, e_1)] \, dx dy \\
&= \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) \, dx dy + t \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} g(z, \lambda, e_1) \, dx dy \\
&= \nu(\lambda)(f) + t \nu(\lambda)(g). && (8.18)
\end{aligned}$$

Para comprobar que $\nu(\lambda)$ es una medida de probabilidad observamos

$$\begin{aligned}
\nu(\lambda)(1) &= \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} dx dy \\
&= \frac{1}{|\Lambda_D|} |\Lambda_D| = 1.
\end{aligned}$$

Definición 8.1.3. Si $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$, la transformada de Mellin $\mathfrak{M}(f, s)$ de $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$ está definida por la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(f, s) &:= \int_0^\infty \nu(\lambda)(f) \lambda^{s-2} d\lambda \\ &= \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) \lambda^{s+1} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}, z = x + iy. \end{aligned}$$

Denotamos por C_D al subconjunto cerrado de \mathbb{C} delimitado por el paralelogramo generado por 1 y w_D . Sea

$$S_D = \{ (z, \lambda) \in \mathbb{H}^3; z \in C_D \}, \quad (8.19)$$

se cumple la siguiente identidad:

$$S_D = \bigcup_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty}/\Gamma_D} \sigma(F_D), \quad (8.20)$$

donde F_D es un dominio fundamental apropiado de Γ_D .

Proposición 8.1.4. Sean $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > 1$. Entonces

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}{|\Lambda_D|} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) H_{km}^l(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3},$$

donde F_D es el dominio fundamental de Γ_D y

$$H_{km}^l(z, \lambda, s) = \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty}/\Gamma_D} \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \text{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s}. \quad (8.21)$$

Demostración. Se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} |\Lambda_D| \cdot \mathfrak{M}(f, s) &= \int_0^\infty \int_{C_D} f(z, \lambda, e_1) \text{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} && \text{por la definición } \boxed{8.1.3} \\ &= \int_0^\infty \int_{C_D} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \widehat{f}_m^l(z, \lambda) Y_m^l(\vec{e}_1) \text{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} && \text{por } \boxed{8.10} \\ &= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{S_D} \widehat{f}_m^l(z, \lambda) \text{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} && \text{por } \boxed{8.19} \\ &= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty}/\Gamma_D} \int_{\sigma(F_D)} \widehat{f}_m^l(z, \lambda) \text{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. && \text{por } \boxed{8.20} \end{aligned}$$

Resumiendo, hasta ahora hemos probado

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{|\Lambda_D|} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D,\infty}/\Gamma_D} \int_{\sigma(F_D)} \widehat{f}_m^l(z, \lambda) \text{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \quad (8.22)$$

Ahora nos ocuparemos de la integral obtenida en la ecuación (8.22), para ello consideramos el siguiente cambio de variable:

$$(z, \lambda) = \sigma(z', \lambda'),$$

donde $\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} / \Gamma_D$. Por lo que si $z' = x' + iy'$ y como $\sigma : F_D \rightarrow \sigma(F_D)$ es una isometría se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(F_D)} \widehat{f}_m^l(z, \lambda) \operatorname{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} &= \int_{F_D} \widehat{f}_m^l(\sigma(z', \lambda')) \operatorname{Im} \sigma(z', \lambda')^{1+s} \frac{dx' dy' d\lambda'}{\lambda^3} \\ &= \int_{F_D} \widehat{f}_m^l(\sigma(z, \lambda)) \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

Pero por el lema (8.1.1),

$$\int_{\sigma(F_D)} \widehat{f}_m^l(z, \lambda) \operatorname{Im}(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} = \int_{F_D} \sum_{k=-l}^l \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \quad (8.23)$$

Reemplazando la identidad (8.23) en la ecuación (8.22) obtenemos la primera identidad de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} |\Lambda_D| \cdot \mathfrak{M}(f, s) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} / \Gamma_D} \int_{F_D} \sum_{k=-l}^l \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) \left[\sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} / \Gamma_D} \overline{D_{km}^l(R(d\sigma, z, \lambda)^{-1})} \operatorname{Im} \sigma(z, \lambda)^{1+s} \right] \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) [\Gamma_{\infty} : \Gamma'_{\infty}] H_{km}^l(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \quad \text{por (8.21)} \end{aligned}$$

□

Por el lema (8.2.1) sabemos que $\mathfrak{M}(f, s)$ está bien definida para $\operatorname{Re}(s) > 1$ y por el lema (8.2.2)

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{M_D^3} f(z, \lambda, e_1) E(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}$$

para $\operatorname{Re}(s) > 1$. Usando la fórmula anterior podemos extender las propiedades de la serie de Eisenstein $E(z, \lambda, s)$ a $\mathfrak{M}(f, s)$, en particular, $\mathfrak{M}(f, s)$ admite una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} , y tiene un polo simple en $s = 1$.

Consideremos ahora la función $\phi(s)$ que aparece en el coeficiente cero de Fourier de la serie de Eisenstein $E(z, \lambda, s)$, esto es,

$$\phi(s) = \frac{\pi}{s |\Lambda_D|} \cdot \frac{\zeta_D(s)}{\zeta_D(s+1)}, \quad (8.24)$$

donde $\zeta_D(s)$ es la función zeta de Dedekind asociada al campo de números $\mathbb{Q}\sqrt{-D}$.

Por el teorema 1.2, página 232, en [9] sabemos que $\phi(s)$ admite una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} , y por el teorema 1.11, página 244, en [9], tiene un número finito de polos simples situados en el intervalo $(0, 1]$, y que denotaremos por s_1, s_2, \dots, s_p , excepto a el polo en 1, además suponemos

$$1 > s_1 > s_2 > \dots > s_p > 0.$$

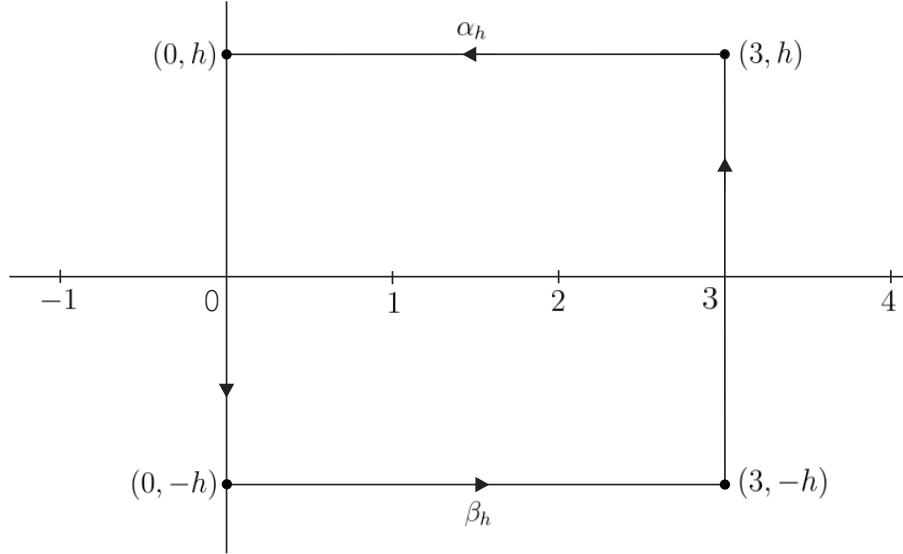


Figura 8.3: Región de integración Ω_h .

Definición 8.1.5. Sean ν^a con $a \in \{1, 2, \dots, p\}$ las distribuciones en $T_1 M_D^3$ definidas como sigue:

$$\nu^a = \text{Res}(E(s), s = s_a).$$

Equivalentemente, si $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$ entonces

$$\nu^a(f) = \text{Res}(\mathfrak{M}(f, s), s = s_a).$$

Definición 8.1.6. Sea ν la medida de probabilidad (medida de Liouville normalizada) en $T_1 M_D^3$ definida como sigue, si $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$ entonces

$$\nu(f) := \frac{1}{4\pi \text{Vol}(M_D^3)} \int_{T_1 M_D^3} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \frac{\sin \vartheta \, dx dy d\lambda d\vartheta d\varphi}{\lambda^3}.$$

Sea $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, retomaremos una idea de Zagier la cual consiste de aplicar el Teorema del residuo de Cauchy a la función

$$h(s) = \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s},$$

en la franja $\{s \in \mathbb{C}; 0 \leq \text{Re}(s) \leq 3\}$. Para esto primero consideramos Ω_h con $h > 0$ la región en \mathbb{C} como indica la figura (8.3). Denotamos por α_h el segmento de recta que va del punto $(3, h)$ al punto $(0, h)$, y como β_h al segmento de recta que va del punto $(0, -h)$ al punto $(3, -h)$.

Por otra parte, la continuación meromorfa de $\mathfrak{M}(f, s)$ nos da la continuación meromorfa de $h(s)$ a todo \mathbb{C} . Los polos de $h(s)$ son los mismos que los polos de $\mathfrak{M}(f, s)$. Pero por el lema (8.2.2) los polos de $\mathfrak{M}(f, s)$ son los mismos que los polos de la serie de Eisenstein $E(z, \lambda, s)$, que a su vez se corresponden con los polos de $\phi(s)$. Resumiendo, los polos de $h(s)$ están en $s_1, s_2, \dots, s_p, 1 \in (0, 1]$.

Por el teorema del residuo,

$$\int_{\Omega_h} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = 2\pi i \text{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s = 1) + 2\pi i \sum_{a=1}^p \text{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s = s_a). \quad (8.25)$$

Una consecuencia del Teorema de Paley-Wiener es

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\alpha_h} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\beta_h} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = 0. \quad (8.26)$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow \infty$ en (8.25) y utilizando las identidades en (8.26) concluimos

$$\int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds + \int_{i\infty}^{-i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = 2\pi i \operatorname{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s=1) + 2\pi i \sum_{a=1}^p \operatorname{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s=s_a). \quad (8.27)$$

Suponiendo la conjetura (4.6.1) y el lema (8.2.4) obtenemos la siguiente identidad

$$\operatorname{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s=1) = \nu(f). \quad (8.28)$$

Por el lema (8.2.5) se cumple la siguiente ecuación

$$\nu(\lambda)(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds. \quad (8.29)$$

Por el lema (8.2.7) se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = o(\lambda) \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow 0. \quad (8.30)$$

Sea $a \in \{0, 1, \dots, p\}$, de la definición (8.1.5) se obtiene la identidad

$$\operatorname{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s=s_a) = \lambda^{1-s_a} \operatorname{Res}(\mathfrak{M}(f, s), s=s_a) = \lambda^{1-s_a} \nu^a(f). \quad (8.31)$$

Sustituyendo (8.28), (8.29), (8.30) y (8.31) en (8.27) concluimos que

$$2\pi i \nu(\lambda)(f) - 2\pi i o(\lambda) = 2\pi i \nu(f) + 2\pi i (\lambda^{1-s_1} \nu^1(f) + \dots + \lambda^{1-s_p} \nu^p(f)).$$

Resumiendo, la conjetura implica el siguiente:

Teorema. Sean $D \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}$ y M_D^3 las orbidades de Bianchi correspondientes. Existen números $1 > s_1 > s_2 > \dots > s_p > 0$ (p puede ser cero, en ese caso no hay tales números) y ciertas distribuciones correspondientes $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^p$ en $T_1 M_D^3$ tal que si $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$ entonces:

$$\nu(\lambda)(f) = \nu(f) + \lambda^{1-s_1} \nu^1(f) + \dots + \lambda^{1-s_p} \nu^p(f) + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow 0),$$

donde ν es la medida de Liouville normalizada en $T_1 M_D^3$.

Corolario.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \nu(\lambda) = \nu \quad (\text{débilmente}).$$

Equivalentemente, si $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, $z = x + iy$, entonces:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) dx dy = \frac{1}{4\pi \operatorname{Vol}(M_D^3)} \int_{T_1 M_D^3} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \frac{\sin \vartheta dx dy d\lambda d\vartheta d\varphi}{\lambda^3}.$$

8.2 — Lemas

Lema 8.2.1. Sean $f \in C_0^0(T_1M_D^3)$, $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$, la función $\langle E(s), \cdot \rangle : C_0^0(T_1M_D^3) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle E(s), f \rangle = \mathfrak{M}(f, s)$$

es una medida en $T_1M_D^3$.

Demostración. La prueba es tomada de [25], página 724. Sea $f \in C_0^0(T_1M_D^3)$, $f : T_1\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ es Γ_D invariante. Definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \in T_1M_D^3} |f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)})| < \infty. \quad (8.32)$$

Consideramos $C \in \mathbb{R}$ una constante suficientemente grande tal que

$$\operatorname{soporte}(f) \subset \{(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) ; z \in \mathbb{C}, \lambda \leq C\} \subset \mathbb{H}^3. \quad (8.33)$$

Entonces, si $\eta = \operatorname{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}(f, s)| &= \left| \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) \lambda^{s+1} \frac{dxdy d\lambda}{\lambda^3} \right| && \text{por la definición (8.1.3)} \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} |f(z, \lambda, e_1) \lambda^{s+1}| \frac{dxdy d\lambda}{\lambda^3} \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} \|f\|_\infty \cdot \lambda^{\operatorname{Re}(s)+1} \frac{dxdy d\lambda}{\lambda^3} && \text{por (8.32)} \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{|\Lambda_D|} \int_0^\infty \lambda^{\eta+1} \left[\int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} dxdy \right] \frac{d\lambda}{\lambda^3} \\ &= \|f\|_\infty \int_0^\infty \lambda^{\eta-2} d\lambda \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^C \lambda^{\eta-2} d\lambda && \text{por (8.33)} \\ &= \|f\|_\infty \frac{C^{\eta-1}}{\eta-1}. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$|\mathfrak{M}(f, s)| < \infty.$$

□

Lema 8.2.2. Sean $f \in C_0^\infty(T_1M_D^3)$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$, se cumple

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{M_D^3} f(z, \lambda, e_1) E(z, \lambda, s) \frac{dxdy d\lambda}{\lambda^3}, \quad (8.34)$$

donde $z = x + iy$.

Demostración. Se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} f(z, \lambda, e_1) E(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} &= \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} f(z, \lambda, e_1) \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\
&= \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} \sum_{\sigma \in \Gamma'_{D, \infty} \setminus \Gamma_D} f(\sigma(z, \lambda), d\sigma_{(z, \lambda)} e_1) \text{Im } \sigma(z, \lambda)^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\
&= \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma'_{D, \infty}} f(z, \lambda, e_1) \lambda^{1+s} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^2/\Lambda_D} f(z, \lambda, e_1) dx dy \right] \lambda^{s-2} d\lambda \\
&= \int_0^\infty \nu(\lambda)(f) \lambda^{s-2} d\lambda = |\Lambda_D| \cdot \mathfrak{M}(f, s).
\end{aligned}$$

□

Lema 8.2.3. Sea $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, $s \in \mathbb{C}$ tal que $s \neq \pm 1$ y s no es un polo de $E(z, \lambda, s)$. Se cumple la siguiente desigualdad

$$|\mathfrak{M}(f, s)| \leq \frac{1}{|s^2 - 1|^2 \cdot |\Lambda_D|} \|\Delta^2 f\|^2 \cdot \|E^T(\cdot, s)\|^2,$$

donde $T = T(f)$ es una constante suficientemente grande. Las series de Eisenstein truncadas $E^T(\cdot, s)$ (ver [9], página 270) están definidas como sigue:

$$E^T(z, \lambda, s) = E(z, \lambda, s) - \alpha(T, z, \lambda, s),$$

con $(z, \lambda) \in \mathbb{H}^3$, y

$$\alpha(T, z, \lambda, s) = \begin{cases} \lambda^{1+s} + \phi(s)\lambda^{1-s} & \text{si } \lambda \geq T \\ 0 & \text{si } \lambda < T. \end{cases}$$

La función $\phi(s)$ es la que aparece en (8.24).

Demostración. Sabemos como consecuencia del lema (8.2.2) que para todo $s \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{|\Lambda_D|} \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} f(z, \lambda, e_1) E(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \quad (8.35)$$

Por otra parte, si s no es un polo de $E(z, \lambda, s)$ tenemos la siguiente identidad:

$$\Delta^2 E(z, \lambda, s) = (s^2 - 1)^2 E(z, \lambda, s). \quad (8.36)$$

Ver teorema 1.2 de [9], página 232, para una demostración.

Sustituyendo (8.36) en (8.35) se sigue que si $s \neq \pm 1$ y s no es un polo de $E(z, \lambda, s)$ entonces

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{(s^2 - 1)^2 \cdot |\Lambda_D|} \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} f(z, \lambda, e_1) \Delta^2 E(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3},$$

integrando por partes,

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{(s^2 - 1)^2 \cdot |\Lambda_D|} \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} \Delta^2 f(z, \lambda, e_1) E(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}.$$

Sea $T = T(f) > 0$ suficientemente grande tal que el soporte de f está contenido en el conjunto $\{(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}); z \in \mathbb{C}, \lambda \leq T\}$, como $f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) = 0$ si $\lambda > T$ y $E^T(z, \lambda, s) = E(z, \lambda, s)$ para $\lambda \leq T$ se cumple que:

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{1}{(s^2 - 1)^2 \cdot |\Lambda_D|} \int_{\mathbb{H}^3/\Gamma_D} \Delta^2 f(z, \lambda, e_1) E^T(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}, \quad (8.37)$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (8.37) concluimos

$$|\mathfrak{M}(f, s)| \leq \frac{1}{|s^2 - 1|^2 \cdot |\Lambda_D|} \|\Delta^2 f\|^2 \|E^T(\cdot, s)\|^2,$$

donde si $z = x + iy$ recordamos

$$\|E^T(\cdot, s)\|^2 = \int_{F_D} |E^T(z, \lambda, s)|^2 \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} < \infty,$$

$$\|\Delta^2 f\|^2 = \int_{F_D} |\Delta^2 f(z, \lambda, e_1)|^2 \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} < \infty.$$

□

Lema 8.2.4. Sea $f \in C_0^\infty(T_1 M_D^3)$, asumiendo la conjetura (4.6.1) se cumple la siguiente identidad:

$$\text{Res}(\mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s}, s = 1) = \text{Res}(\mathfrak{M}(f, s), s = 1) = \nu(f),$$

donde

$$\nu(f) = \frac{1}{4\pi \text{Vol}(M_D^3)} \int_{T_1 M_D^3} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \frac{\sin \vartheta dx dy d\lambda d\vartheta d\varphi}{\lambda^3}.$$

Demostración. Sean $l \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $k, m \in [-l, l]$. Por el corolario (4.5.1) si $\text{Re}(s) > 1$

$$H_{km}^l(z, \lambda, s) = e^{-i(k+m)\pi} \cdot E_{km}^l(z, \lambda, s). \quad (8.38)$$

Suponiendo la conjetura de la sección 6, capítulo 4, tendríamos la continuación meromorfa (o analítica) de las series $E_{km}^l(z, \lambda, s)$, por lo que usando la ecuación (8.38) concluimos que también las series $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ admiten una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} en la variable s . Por lo que la ecuación (8.38) es válida para todo $s \in \mathbb{C}$. Tomando residuos en la ecuación (8.38),

$$\text{Res}(H_{km}^l(z, \lambda, s), s = 1) = e^{-i(k+m)\pi} \cdot \text{Res}(E_{ac}^l(z, \lambda, s), s = 1). \quad (8.39)$$

Recordamos que $E(z, \lambda, s) = [\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty] \cdot E_{00}^0(z, \lambda, s)$. El residuo en $s = 1$ es un resultado clásico dado por

$$\text{Res}(E(z, \lambda, s), s = 1) = \frac{|\Lambda_D|}{\text{Vol}(M_D^3)}. \quad (8.40)$$

Ver teorema 1.11, página 244, de [9] para una demostración.

Asumiendo la conjetura,

$$\operatorname{Res} (E_{km}^l(z, \lambda, s), s = 1) = \begin{cases} \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{|\Lambda_D|}{\operatorname{Vol}(M_D^3)} & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l > 0. \end{cases} \quad (8.41)$$

De (8.39), (8.40) y (8.41) concluimos

$$\operatorname{Res} (H_{km}^l(z, \lambda, s), s = 1) = \begin{cases} \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \cdot \frac{|\Lambda_D|}{\operatorname{Vol}(M_D^3)} & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l > 0. \end{cases} \quad (8.42)$$

La fórmula que relaciona $\mathfrak{M}(f, s)$ con las series $H_{km}^l(z, \lambda, s)$ está dada por la proposición (8.1.4),

$$\mathfrak{M}(f, s) = \frac{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}{|\Lambda_D|} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) H_{km}^l(z, \lambda, s) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (8.43)$$

Ahora, como la transformada de Mellin $\mathfrak{M}(f, s)$ admite una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} en la variable s , la fórmula en (8.43) es válida para todo $s \in \mathbb{C}$. Tomando residuos en $s = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} (\mathfrak{M}(f, s), s = 1) &= \frac{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}{|\Lambda_D|} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l Y_m^l(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_k^l(z, \lambda) \operatorname{Res} (H_{km}^l(z, \lambda, s), s = 1) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} \\ &= \frac{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}{|\Lambda_D|} Y_0^0(\vec{e}_1) \int_{F_D} \widehat{f}_0^0(z, \lambda) \frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]} \frac{|\Lambda_D|}{\operatorname{Vol}(M_D^3)} \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}, \quad \text{por (8.42)} \end{aligned}$$

pero $Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, luego

$$\operatorname{Res} (\mathfrak{M}(f, s), s = 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \operatorname{Vol}(M_D^3)} \int_{F_D} \widehat{f}_0^0(z, \lambda) \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3}. \quad (8.44)$$

Recordamos que por (8.8)

$$\widehat{f}_m^l(z, \lambda) = \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \overline{Y_m^l(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_0^0(z, \lambda) &= \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \overline{Y_0^0(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Sustituyendo (8.45) en (8.44) se sigue

$$\operatorname{Res} (\mathfrak{M}(f, s), s = 1) = \frac{1}{4\pi \operatorname{Vol}(M_D^3)} \int_{F_D} \int_{\mathbb{S}^2} f(z, \lambda, \vec{v}(\vartheta, \varphi)_{(z, \lambda)}) \frac{\sin \vartheta dx dy d\lambda d\vartheta d\varphi}{\lambda^3},$$

y entonces por la definición (8.1.6) concluimos ue

$$\operatorname{Res} (\mathfrak{M}(f, s), s = 1) = \nu(f).$$

□

Lema 8.2.5. Si $f \in C_0^\infty(T_1M_D^3)$, entonces:

$$\nu(\lambda)(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathfrak{M}(f, s+1) \lambda^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds.$$

Demostración. Sea $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\rho(\lambda) = \nu(\lambda)(f), \quad \lambda > 0.$$

Como f es de soporte compacto entonces ρ es cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$. La transformada de Mellin de ρ está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(s) &:= \int_0^\infty \rho(\lambda) \lambda^{s-1} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \nu(\lambda)(f) \lambda^{s-1} d\lambda \\ &= \mathfrak{M}(f, s+1). \end{aligned} \quad \text{por la definición (8.1.3)} \quad (8.46)$$

Por el Teorema de inversión de Mellin,

$$\begin{aligned} \nu(\lambda)(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \tilde{\rho}(s) \lambda^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathfrak{M}(f, s+1) \lambda^{-s} ds. \end{aligned} \quad \text{por (8.46)}$$

La línea vertical en 2 se puede elegir arbitrariamente en cualquier número real. Hacemos un cambio de variable $s+1 = u$, entonces

$$s = 2 \mp i\infty \iff u = 3 \mp i\infty,$$

luego,

$$\nu(\lambda)(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \mathfrak{M}(f, u) \lambda^{1-u} du.$$

□

Lema 8.2.6. Sea $f \in C_0^\infty(T_1M_D^3)$, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{M}(f, it)| dt < \infty.$$

Demostración. Si $t \neq 0$ por el lema (8.2.3) tenemos

$$|\mathfrak{M}(f, it)| \leq \frac{c_f}{|(it)^2 - 1|^2} \|E^T(\cdot, it)\|^2,$$

donde $c_f := \frac{\|\Delta^2 f\|^2}{|\Lambda_D|}$ y $T = T(f)$ es una constante suficientemente grande. Luego,

$$|\mathfrak{M}(f, it)| \leq \frac{c_f}{(t^2 + 1)^2} \|E^T(\cdot, it)\|^2. \quad (8.47)$$

De la fórmula (4.29), página 290, de [9] sabemos

$$\|E^T(\cdot, it)\|^2 = \int_{F_D} |E^T(z, \lambda, it)|^2 \frac{dx dy d\lambda}{\lambda^3} = c_\infty w(t) + h(t), \quad (8.48)$$

donde c_∞ es una constante, $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que depende de $\phi(s)$ (ver (8.24)), más exactamente,

$$w(t) = 1 - \frac{\phi^* I}{\phi^*}(it) \geq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.49)$$

Nota: la desigualdad anterior es demostrada en [9]. Por otro lado, para definir $\phi^*(s)$ recordamos que si s_1, s_2, \dots, s_p son los polos de $\phi(s)$, entonces

$$\phi^*(s) = |c_{\Gamma_D}|^{2s} \phi(s) \prod_{k=1}^p \frac{s - s_k}{s + s_k}, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

La constante $|c_{\Gamma_D}|$ aparece en el lema 3,5, página 271, de [9]. Para definirla primero definimos el subconjunto $H_D \subset \widehat{\Gamma}_D$ como sigue:

$$H_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widehat{\Gamma}_D; c \neq 0 \right\}.$$

Entonces,

$$|c_{\Gamma_D}| = \inf_{g \in H_D} \left\{ |c|; g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Además, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple

$$h(t) = O(1) \text{ cuando } |t| \rightarrow \infty. \quad (8.50)$$

Sustituyendo (8.48) en (8.47) tenemos

$$|\mathfrak{M}_f(it)| \leq \frac{c_f}{(t^2 + 1)^2} (c_\infty w(t) + h(t)),$$

luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{M}_f(it)| dt \leq c_f c_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + c_f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt. \quad (8.51)$$

Analizamos la primer integral en el lado derecho de la desigualdad en (8.51), integrando por partes,

$$\int_{-x}^x \frac{w(t)}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \int_{-x}^x w(u) du + 4 \int_{-x}^x \left[\int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt. \quad (8.52)$$

Por el teorema 4.10 (inciso 3), página 294, en [9]

$$\int_{-R}^R w(u) du = O(R^3) \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \quad (8.53)$$

Por (8.53) existen constantes $R_0, c_1 > 0$ tales que si $R \geq R_0 > 0$ entonces

$$\left| \int_{-R}^R w(u) du \right| \leq c_1 R^3. \quad (8.54)$$

Por la identidad en (8.49) sabemos que $w(u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$, luego,

$$\int_{-R}^R w(u) du = \left| \int_{-R}^R w(u) du \right|. \quad (8.55)$$

De (8.54) y (8.55) vemos que si $x \geq R_0 > 0$ entonces

$$\int_{-x}^x w(u) du \leq c_1 x^3. \quad (8.56)$$

Si $t \geq R_0 > 0$ entonces

$$\int_0^t w(u) du \leq \int_{-t}^t w(u) du \leq c_1 t^3. \quad (8.57)$$

Sea $t \in \mathbb{R}^+$ y

$$\epsilon_t := \begin{cases} 1 & \text{si } t > R_0 \\ 0 & \text{si } t \leq R_0. \end{cases}$$

Se tiene la siguiente desigualdad,

$$\int_0^t w(u) du \leq \int_0^{R_0} w(u) du + \epsilon_t \int_0^t w(u) du, \quad (8.58)$$

que se sigue de w es una función positiva.

Tomando el límite cuando $x \rightarrow \infty$ en la igualdad en (8.52),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(t)}{(t^2 + 1)^2} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \int_{-x}^x w(u) du + \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \int_{-x}^x \left[\int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \quad \text{por (8.52)} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c_1 x^3}{(x^2 + 1)^2} + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left[\int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \quad \text{por (8.56)} \\ &\leq 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left[\int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \\ &\leq 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left[\int_0^{R_0} w(u) du + \epsilon_t \int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \quad \text{por (8.58)} \\ &\leq 4 \left[\int_0^{R_0} w(u) du \right] \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left[\epsilon_t \int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left[\epsilon_t \int_0^t w(u) du \right] \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \epsilon_t c_1 t^3 \frac{t}{(t^2 + 1)^3} dt && \text{por (8.57)} \\
&\leq 4c_1 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \epsilon_t \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \\
&\leq 4c_1 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt && \text{ya que } \epsilon_t \leq 1 \\
&= 4c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt.
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(t)}{(t^2 + 1)^2} dt \leq 4c_1 c_2 < \infty, \quad (8.59)$$

donde $c_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt$. Veamos que $c_2 < \infty$. Por la paridad, $c_2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt + 2 \int_1^{\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt$, pero si $t \neq 0$ entonces $\frac{1}{(t^2+1)^3} \leq \frac{1}{t^6}$, luego

$$\begin{aligned}
c_2 &\leq 2 \int_0^1 \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt + 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \\
&\leq 2 \int_0^1 \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt + 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Analizamos ahora la segunda integral en el lado derecho de la desigualdad en (8.51). Primero observemos que por (8.50) existen constantes $t_0, c_3 > 0$ tales que si $-t_0 \geq t \geq t_0 > 0$ entonces

$$|h(t)| \leq c_3. \quad (8.60)$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt &= \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{-t_0}^{t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{|h(t)|}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{-t_0}^{t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{|h(t)|}{(t^2 + 1)^2} dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{-t_0} \frac{c_3}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{-t_0}^{t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{c_3}{(t^2 + 1)^2} dt && \text{por (8.60)} \\
&\leq \int_{-t_0}^{t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt + c_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt \leq c_4 + c_3 c_5 < \infty, \quad (8.61)$$

donde

$$\begin{aligned}
c_4 &:= \int_{-t_0}^{t_0} \frac{h(t)}{(t^2 + 1)^2} dt < \infty, \\
c_5 &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{\pi}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo (8.59) y (8.61) en (8.51)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{M}(f, it)| dt \leq 4c_f c_{\infty} c_1 c_2, + c_f c_4 + c_f c_3 c_5 < \infty.$$

□

Lema 8.2.7. Sea $f \in C_0^{\infty}(T_1 M_D^3)$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds = o(\lambda) \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0.$$

Demostración. Por el lema (8.2.6) podemos aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue a la función $\mathfrak{M}(f, it)$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(f, it) e^{iut} dt = 0. \quad (8.62)$$

Haciendo el cambio de variable $u = -\log \lambda$, se sigue

$$e^{iut} = e^{-it \log \lambda} = (e^{\log \lambda})^{-it} = \lambda^{-it},$$

además,

$$\lambda \rightarrow 0 \iff u \rightarrow \infty.$$

Por lo que la integral en (8.62) se transforma como sigue,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(f, it) \lambda^{-it} dt = 0,$$

equivalentemente,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(f, it) \lambda^{-it} dt}{\lambda} = 0,$$

esto es,

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(f, it) \lambda^{-it} dt = o(\lambda) \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0. \quad (8.63)$$

Retomamos ahora la integral del lema

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds, \quad (8.64)$$

y consideramos el cambio de variable $s = it$,

$$s = \mp i\infty \iff t = \mp \infty,$$

por tanto, la integral (8.64) se transforma como sigue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathfrak{M}(f, s) \lambda^{1-s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(f, it) \lambda^{1-it} idt \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(f, it) \lambda^{-it} dt \\ &= o(\lambda) \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

por (8.63)

□

Bibliografía

- [1] T. Apostol., *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York-Heidelberg: Springer-Verlag (1976).
- [2] K. Atkinson, W. Han., *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere : An Introduction*, Lecture Notes in Mathematics No. 2044, New York : Springer-Verlag (2012).
- [3] J. Berndt, L. Vanhecke., *Geometry of weakly symmetric spaces*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 48, No. 4, p.p 745-760, (1996).
- [4] L. Biedenharn, J. Louck., *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Volumen 8, (1981).
- [5] S. Bosch., *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Universitext, London-Heidelberg-New York-Dordrecht: Springer (2013).
- [6] D. Bump, J. Cogdell, E. de Shalit, D. Gaitsgory, E. Kowalski, S. Kudla., S. Sthepen., *An introduction to the Langlands program*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2003).
- [7] S. Cosentino., *Equidistribution of parabolic fixed points in the limit set of Kleinian groups*, Ergodic Theory Dynamical Systems 19, No. 6, p.p. 1437-1484, (1999).
- [8] W. Duke., *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent. Math. 92, no. 1, p.p. 7390, (1988).
- [9] J. Elstroedt, F.Grunewald, J. Mennicke., *Groups Acting on Hyperbolic Space: Harmonic Analysis and Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [10] S. Estala., *Distribution of cusp sections in the Hilbert modular orbifold*, J. Number Theory 155 (2015), 202-225.
- [11] M. Furuta., *Index theorem 1*, Translated from the 1999 Japanese original by Kauro Ono. Translations of Mathematical Monographs, 235. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, (2007).
- [12] L. Guleska., *Tesis: Sum Formula for SL_2 over Imaginary Quadratic Number Fields*, Utrecht (2004).
- [13] D. Gurarie., *Symmetries and Laplacians: Introduction to Harmonic Analysis, Group Representations and Applications*, North-Holland, Mathematics Studies 174 (1992).
- [14] S. Helgason., *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, New York-San Francisco-London: Academic Press (1978).

- [15] H. Iwaniec., *Topics in classical automorphic forms*, Graduate studies in mathematics, Vol. 17 (1997).
- [16] T. Kubota., *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Halsted Press USA, (1973).
- [17] J. Linnik., *Ergodic Properties of Algebraic Fields*, Ergebnisse der Math., No. 45, Springer-Verlag Berlin-New York, (1968).
- [18] B. Louvel., *Tesis: Twisted Kloosterman sums and cubic exponential sums*, Göttingen (2008).
- [19] Y. Manin, A. Panchishkin., *Introduction to Modern Number Theory*, Second Edition, Berlin-Heidelberg-New York: Springer (2005).
- [20] P. Michel, A. Venkatesh., *Equidistribution, L-functions and Ergodic theory: on some problems of Yu. V. Linnik*.
- [21] H. Nguyễn., *Weakly symmetric spaces and bounded symmetric domains*, Transf. Groups 2, p.p. 351-374, (1997).
- [22] H. Nguyễn., *Compact weakly symmetric spaces and spherical pairs*, Proc. Amer. Math. Soc. 128, p.p. 3425-3433, (2000).
- [23] H. Poincaré., *Oeuvres*, 11 Vols, Gauthier-Villars, Paris (1916).
- [24] M. Rose., *Elementary Theory of Angular Momentum*, New York :Wiley (1957) (Reprinted by Dover in 1995).
- [25] P. Sarnak., *Asymptotic behaviour of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series*, Comm. in Pure and App. Math., Vol. 34 (1980), p.p. 719–739.
- [26] A. Selberg., *Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces with Applications to Dirichlet Series*, J. Indian Math.Soc. B. 20, p.p. 47-87, (1956).
- [27] M. Trifković., *Algebraic Theory of Quadratic Numbers*, New York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer (2013).
- [28] A. Verjovsky., *Arithmetic, geometry and dynamics in the modular orbifold*, Dynamical Systems (Santiago de Chile 1990) (Pitman Series 285), R. Bamon, R. Labarca, J. Lewowicz, J.Palis, Longman, Essex, UK, (1992), p.p. 263–298.
- [29] E. Wigner., *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, (1959).
- [30] H. Weyl., *it ber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.*, Math. Ann. 77 (3), 313-352, (1916).
- [31] D. Zagier., *Eisenstein series and the Riemann zeta function*, Automorphic forms, representation theory and arithmetic, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1979, Springer-Verlag, p.p. 275-301, (1981).
- [32] W. Ziller., *Weakly symmetric spaces*, Topics in Geometry: Honoring the Memory of J. D'Atri (Birkhäuser, Boston Basel Berlin, p.p. 355-368, (1996).