



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

Hoyo-grafía en Poincaré AdS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
RICARDO ESPÍNDOLA ROMERO

Dr. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

Dr. JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

Dr. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. ENERO 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	3
2. AdS/CFT	7
2.1. Geometrización del Grupo de Renormalización	7
2.2. Dual gravitacional	8
2.3. Interacciones	10
2.4. Ejemplos	12
3. Entrelazamiento	15
3.1. Mecánica cuántica	15
3.2. Teorías de campo	16
3.3. Método holográfico	20
3.3.1. Ejemplos	20
3.4. Entropía Diferencial u Hoyo-grafía	23
3.4.1. Hoyo-grafía General	25
4. Hoyografía en Poincaré AdS	29
4.1. Motivación	29
4.2. Hoyo-grafía a tiempo de Poincaré constante	33
4.2.1. Curvas cerradas	33
4.2.2. Entropía diferencial y la longitud de curvas cerradas	37
4.2.3. Términos de frontera y la longitud de curvas abiertas	39
4.2.4. Puntos	42
4.2.5. Distancias	45
4.3. Hoyo-grafía covariante	49
4.3.1. Curvas arbitrarias	49
4.3.2. Un reto a la hoyo-grafía en Poincaré AdS	52
4.3.3. Resolución vía “alineamiento nulo”	54
4.3.4. Puntos	58
4.3.5. Distancias	62
5. Conclusiones	65

Capítulo 1

Introducción

Tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza pueden describirse bajo el mismo marco teórico llamado Modelo Estándar. Este combina los conceptos de relatividad especial y mecánica cuántica al introducir nuevos objetos físicos denominados *campos cuánticos*. Las partículas elementales aparecen entonces como consecuencia de sus fluctuaciones.

A pesar de todos sus triunfos en física de partículas, el reto de formular una teoría cuántica de gravedad aún está presente en el campo de la física teórica, ya que requiere de la formulación de nuevos conceptos acerca del espacio-tiempo en la escala de la longitud de Planck. Es un hecho conocido que la teoría de Relatividad General de Einstein requiere de un número infinito de datos recolectados por medio de mediciones para ser predictiva a escalas arbitrariamente pequeñas (o equivalentemente a altas energías). Esta es una situación muy desafortunada, pues preguntas muy interesantes no tienen respuesta aún, como por ejemplo, ¿qué es el Big Bang? y ¿qué ocurre en la singularidad de los agujeros negros?

El programa de la teoría de cuerdas nació al final de los años sesenta y a lo largo del tiempo se ha convertido en nuestro mejor formalismo para construir teorías consistentes de gravedad cuántica¹. La teoría de cuerdas es una generalización de las teorías cuánticas de campos, cuyo punto de partida es proponer que las excitaciones básicas no son partículas (objetos 0-dimensionales), sino cuerdas (objetos 1-dimensionales), que podemos visualizar como las cuerdas de un violín con cierta longitud característica, l_s . Estas pueden vibrar en distintas notas, y en su descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula (masa, espín y cargas). Es posible, por tanto, describir un número infinito de partículas a partir de un solo tipo de cuerda. Siendo un poco más precisos, las cuerdas son en realidad fluctuaciones de un *campo de cuerdas* subyacente, al igual que las partículas son manifestaciones de campos. Vale la pena destacar que el propio espacio-tiempo forma parte también de este campo.

Con respecto a la consistencia teórica, un importante éxito formal dentro de la

¹Por esto nos referimos a teorías cuánticas cuyas excitaciones gravitacionales a bajas energías coinciden con la Relatividad General.

teoría de cuerdas ha sido el descubrimiento de la dualidad norma/gravedad, correspondencia holográfica o correspondencia AdS/CFT [1–3], toda una clase de dualidades que han sido exploradas en los últimos veinte años y que incluso van más allá del marco de la teoría de cuerdas. En términos generales, esta correspondencia conjetura la igualdad entre una teoría cuántica de campos en d dimensiones espacio-temporales y una teoría de gravedad cuántica definida en un espacio-tiempo curvo en $d + 1$ dimensiones. La nueva dirección espacial z (conocida como dirección radial), la cual se extiende desde la frontera (situada en $z \rightarrow 0$) hacia el “bulto”, juega un papel crucial en el entendimiento de la dinámica desde la perspectiva de la teoría de campo. Más aún, surge toda una nueva gama de preguntas y un diccionario relacionando distintos tipos de fenómenos desde ambas perspectivas.

En años recientes, ha resultado muy útil pensar en las teorías con dual gravitacional desde la perspectiva de la teoría de información cuántica. Hay una cantidad significativa de evidencia de que la estructura del entrelazamiento cuántico en un estado particular de la teoría está directamente relacionada con la estructura geométrica del espacio-tiempo dual. En particular, la correspondencia sugiere una conexión muy profunda entre la aparición del espacio-tiempo dinámico en el bulto y el patrón de entrelazamiento de un gran número de grados de libertad en la frontera. Una entrada importante en el diccionario de la correspondencia y que se encuentra en esta dirección establece que, en el caso estático, la entropía de entrelazamiento asociada con una región espacial se puede calcular como el área mínima de una superficie extremal de codimensión dos que se extiende dentro del bulto y está anclada a la frontera de la región [5] (ver Sec. 3.3 para más detalles).

Otro paso importante rumbo a la reconstrucción holográfica del bulto se tomó en el artículo [6]. Trabajando en tres dimensiones espacio-temporales (donde las superficies de codimensión dos son geodésicas), descubrieron que es posible reconstruir curvas tipo espacio en el bulto que no son extremales y no están ancladas a la frontera, por medio de sumar y restar inteligentemente las geodésicas tangentes a la curva. Este procedimiento fue propuesto inicialmente en el contexto del hoyo en el bulto delimitado por la curva, y por tanto fue llamado *hoyo-grafía*. Este implica dos ideas que están estrechamente relacionadas entre sí. La primera es que cualquier curva tipo espacio en el bulto puede ser representada por una familia específica de intervalos tipo espacio de la teoría en la frontera, cuyos puntos finales coinciden con aquellos de las geodésicas tangentes a la curva en el bulto. La segunda es que la longitud de la curva, denominada A , se puede calcular en la teoría de campo a través de la entropía diferencial E , una combinación particular de entropías de entrelazamiento de los intervalos correspondientes, cuya definición precisa está dada en la Ec. (3.46) de la Sec. 3.4. La relación concreta entre estas dos cantidades toma la forma $E = A/4G_N$, donde G_N es la constante de Newton.

Los resultados de esta tesis están basados en [4]. Abordamos el problema de reconstrucción del bulto por medio de hoyo-grafía en un espacio-tiempo particular llamado *Poincaré AdS*, el cual tiene coordenadas $x^m := (x^\mu, z)$. Los objetos geométricos que reproducimos en el bulto combinando el patrón de entrelazamiento en la frontera

son curvas tipo espacio (abiertas y cerradas, en contraste con las curvas infinitas y periódicas estudiadas previamente en [7, 8]), puntos, y distancias entre dos puntos arbitrarios. Logramos su reconstrucción tanto en el caso a tiempo constante como el covariante, y encontramos en ambos casos una acción escrita únicamente en términos de las variables de la teoría de campo definida en la frontera, cuya extremización da origen a puntos en el bulto: Ecs. (4.39) y (4.101), respectivamente. Encontramos, además, un reto al método hoyo-gráfico al mostrar que existen curvas con secciones que tienen geodésicas tangentes con puntos finales que terminan en el horizonte (situado en $z \rightarrow \infty$) en lugar de la frontera, y son por tanto segmentos que no parecen poder reconstruirse. De manera más precisa, llamamos segmentos no reconstruibles a aquellos que violan la condición (4.80). Estos segmentos entonces no pueden ser asociados con entropía de entrelazamiento en la frontera por medio de entropía diferencial. Utilizando una variante de hoyo-grafía descubierta en [8], demostramos que existe una solución a este problema basada en reorientar el vector tangente de la familia de geodésicas v^m en cada punto de los segmentos problemáticos por medio de un vector nulo n^m que satisface las constricciones (4.83) y deja invariante la relación entre la longitud de la curva y la entropía diferencial. Este corrimiento en el vector tangente se conoce con el nombre de *alineamiento vectorial nulo*, y con él obtenemos la conclusión principal de esta tesis: *contrario a las apariencias, todas las curvas tipo espacio en Poincaré AdS pueden ser completamente reconstruidas con datos de la frontera, y cada curva tiene de hecho un número infinito de representaciones dentro de la teoría de campo en la frontera.* (Ver Subsecs. 4.3.2 y 4.3.3).

La tesis está estructurada como sigue. En el Capítulo 2, repasamos algunos elementos básicos de la correspondencia AdS/CFT. Comenzamos en la Sec. 2.1, con la idea conceptual de geometrizar el Grupo de Renormalización al promover la escala energética μ de una teoría de campo junto a sus coordenadas x^μ , a un nuevo conjunto de coordenadas definidas en un espacio con una dimensión extra, x^m . En la Sec. 2.2, argumentamos que la geometrización del vacío de una teoría con simetría conforme (CFT) es el espacio anti-de Sitter puro (AdS). Excitaciones por encima del vacío de una CFT son identificadas con los modos normalizables (modos con energía finita) de los campos que se propagan en AdS, mientras que los modos no normalizables (modos con energía infinita) corresponden a cambiar de teoría de campo por medio de deformaciones relevantes de la CFT. En la Sec. 2.3, introducimos la entrada del diccionario para calcular funciones de correlación en la CFT de manera holográfica. Concluimos este capítulo mostrando algunos ejemplos concretos de la correspondencia AdS/CFT en el contexto de la teoría de cuerdas en la Sec. 2.4.

En la Sec. 3.1 del Capítulo 3, introducimos el concepto de entrelazamiento en mecánica cuántica, al igual que la entropía de entrelazamiento asociada a una bipartición del sistema, S_A , como medida del patrón de entrelazamiento entre los grados de libertad del subsistema A y su complemento \bar{A} . En la Sec. 3.2, generalizamos los conceptos anteriores al caso de teorías con un número infinito de grados de libertad, establecemos algunas desigualdades genéricas que satisface S_A , y presentamos el truco de réplica para calcular la entropía de entrelazamiento en una teoría de campo.

El método holográfico es presentado en la Sec. 3.3, donde describimos la receta de Ryu-Takayanagi [5] para calcular S_A en el caso estático y su generalización al caso covariante [9]. En la Subsec. 3.3.1, ejemplificamos el cálculo de S_A en distintos casos en el contexto de AdS/CFT, haciendo particular énfasis en que el procedimiento holográfico es más sencillo que el cálculo directo en la CFT. Presentamos la herramienta principal de esta tesis en la Sec. 3.4: la Entropía Diferencial u Hoyografía, cuya forma final está dada en (3.46). Concluimos con el teorema que establece la igualdad entre la entropía diferencial y la longitud de curvas en el bulto descrito en [8].

En el Capítulo 4, abordamos el tema principal de este trabajo. En la Sec. 4.1, repasamos brevemente los resultados conocidos en hoyo-grafía y presentamos la motivación para estudiar hoyo-grafía directamente en Poincaré AdS, al igual que el reto principal de reconstrucción de curvas, al cual damos solución utilizando una variante de hoyo-grafía. En esa sección presentamos, además, un resumen del contenido de las subsecciones siguientes. En la Sec. 4.2, implementamos la entropía diferencial para lograr la reconstrucción de curvas en el bulto tipo espacio (abiertas y cerradas), definir puntos y calcular distancias entre puntos. En la Sec. 4.3, generalizamos todos los resultados anteriores y damos un criterio para determinar qué regiones sobre las curvas son no reconstruibles, y además, proponemos un método para lograr la reconstrucción de dichas curvas por medio de reorientar las geodésicas tangentes a la curva utilizando el alineamiento nulo propuesto originalmente en [8].

Finalmente, presentamos nuestras conclusiones en el Capítulo 5.

Capítulo 2

AdS/CFT

2.1. Geometrización del Grupo de Renormalización

En general, las interacciones de una teoría de campos se modifican conforme exploramos distintas escalas energéticas μ , que van desde el infrarrojo ($\mu \rightarrow 0$) hasta el ultravioleta ($\mu \rightarrow \infty$). Decimos entonces que los acoplamientos que definen a la teoría “corren” con la escala energética entre el IR y el UV, y con ello, determinan un flujo del grupo de renormalización. A escalas de energía suficientemente altas comparadas con todas las masas y cualquier otra escala intrínseca que pueda poseer la teoría (e.g. Λ_{QCD}), podemos despreciar, para todo efecto práctico, el valor de esas escalas, y por tanto, la teoría con la que terminamos en el UV será invariante de escala. Este tipo de teorías reciben el nombre de *teorías de campos conformes* (CFT por sus siglas en inglés), y como veremos más adelante juegan un papel fundamental en la organización conceptual tanto de las teorías de campos como de su dual gravitatorio en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.

Con características tan especiales, las teorías conformes parecen estar muy alejadas de la realidad. Sin embargo, cualquier teoría de campo bien definida en el UV puede ser concebida como una deformación relevante (a bajas energías) de una teoría conforme, i.e., de un punto fijo en el espacio abstracto de todas las posibles teorías de campos. QCD es un ejemplo concreto de una teoría que a altas energías es invariante de escala, y además, libre. Este fenómeno es conocido como libertad asintótica. Es importante destacar aquí dos cosas. Primero, el hecho de que la teoría sea conforme no va de la mano con que sea libre. En general, existen puntos fijos interactuantes del grupo de renormalización (e.g. el punto interactuante de Wilson-Fisher en la teoría ϕ^4). Segundo, en el párrafo anterior asumimos implícitamente este tipo de comportamiento. No es el caso para cualquier teoría de campo, pues es posible que sus acoplamientos diverjan a energía finita (e.g. el polo de Landau de QED) y no esté, por tanto, bien definida a escalas arbitrariamente altas.

Fundamentalmente, la correspondencia AdS/CFT es una *implementación geométrica del grupo de renormalización* (ver por ejemplo [10]). En este contexto, la idea es

promover la escala energética μ , o equivalentemente la resolución espacial de la teoría $\ell = 1/\mu$, junto con las coordenadas de la teoría de campo $x^\mu := (t, \vec{x})$, a un nuevo conjunto de variables donde x^μ tiene el mismo significado, pero la escala de energía se convierte en una coordenada espacial adicional. Esta nueva coordenada recibe el nombre de coordenada “radial” y es usual denotarla por $u := \mu$ ó $z := \ell = 1/u$. Por supuesto, para que este enunciado tenga completo sentido, las nuevas variables, $x^m := (x^\mu, z)$, deben transformar de manera apropiada bajo las simetrías de la teoría.

Cada valor de la escala μ , define entonces una rebanada $z = 1/\mu$ en un espacio de dimensión más alta. A este espacio que incluye todas las rebanadas se le conoce con el nombre de bulto. Podemos visualizar este espacio como una pila infinita de cartas donde en cada valor particular de su altura, a lo largo de z , hay una copia del espacio-tiempo con coordenadas x^μ . La parte superior ($u \rightarrow \infty$ ó $z \rightarrow 0$), tiene codificada la información de la teoría en el UV, mientras que en la parte inferior ($u \rightarrow 0$ ó $z \rightarrow \infty$) se encuentra la información referente al IR. En otras palabras, mover una excitación en el bulto hacia la frontera corresponde a que se localice más y más en la teoría de campo, i.e., que la longitud de onda de la excitación se vuelva cada vez más pequeña y su energía grande. A la inversa, mover una excitación hacia el interior del bulto espesa la excitación en la QFT sobre un área cada vez más grande.

La correspondencia AdS/CFT afirma el sorprendente enunciado de que existe una teoría física definida en el espacio-tiempo 5-dimensional, la cual captura la misma información que la teoría de campo original. En este sentido, establece una dualidad entre la física de ambas perspectivas, y por tanto, simetrías, grados de libertad y la dinámica en ambos lenguajes deben estar en correspondencia biunívoca.

2.2. Dual gravitacional

Para hacer más preciso el enunciado de la correspondencia conviene comenzar con la geometrización de una teoría conforme. En particular, consideremos el vacío de una teoría conforme, $|\Omega\rangle$, definida en el espacio de Minkowski, $\mathbb{R}^{3,1}$. Además de ser invariante bajo transformaciones de Poincaré, este vacío es también invariante bajo reescalamientos o dilataciones, $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Estas transformaciones tienen como consecuencia el reescalamiento de la escala energética $\mu \rightarrow \lambda^{-1}\mu$ (ó la resolución espacial $\ell \rightarrow \lambda\ell$), y por tanto, al geometrizar la escala energética tendremos como resultado el reescalamiento conjunto, $x^m \rightarrow \lambda x^m$, en el lenguaje 5-dimensional. La invariancia del vacío implica entonces que la geometría dual debe ser también invariante. La única métrica que respeta todas estas simetrías es el espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS)

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) = L^2(u^2(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{du^2}{u^2}), \quad (2.1)$$

donde el parámetro L es el radio de curvatura.

La métrica de AdS (2.1) es solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, tiene curvatura negativa constante y es la geometría dual al

vacío de una CFT definida en $\mathbb{R}^{3,1}$. La región UV localizada en $z \rightarrow 0$ (ó equivalentemente $u \rightarrow \infty$) se encuentra a una distancia propia infinita. Sin embargo, a la luz le toma un tiempo finito llegar a dicha región denominada la frontera de AdS. Por ello, la frontera puede afectar la física que ocurre en el interior del espacio-tiempo, y será entonces imprescindible especificar condiciones de frontera en $z = 0$ para definir cualquier teoría sobre este espacio. Existen, también, trayectorias tipo tiempo que alcanzan el horizonte, situado en $z \rightarrow \infty$, en un tiempo propio finito (i.e., AdS no es geodésicamente completo). Sin embargo, esto toma un tiempo infinito medido con el tiempo de la teoría de campo, con lo cual es posible describir completamente la física de la teoría sin la información de lo que ocurre más allá del horizonte.

Consideremos ahora alguno de los operadores locales en la CFT, $\mathcal{O}(x)$, actuando sobre el vacío para obtener un estado excitado. Por invariancia bajo traslaciones podemos insertar este operador en cualquier punto del espaciotiempo, tomemos el origen para ser concretos, entonces obtenemos $|\psi\rangle = \mathcal{O}(0)|\Omega\rangle$. Este nuevo estado debe encontrar una realización en el lado de gravedad. Sin embargo, no puede ser la geometría de AdS puro porque en general $|\psi\rangle$ no será invariante de escala. Su dual gravitacional será entonces una excitación por encima de AdS, más aún, deben existir tantos operadores en la CFT como maneras de excitar la geometría (2.1). Siendo un poco más precisos, en el lado de campos los estados excitados se parecen al vacío a energías suficientemente altas, mientras que del lado de gravedad, las excitaciones ocurrirán dentro del espacio AdS, y en la frontera ($z \rightarrow 0$), la geometría será nuevamente la de AdS puro. En otras palabras, las configuraciones duales permitidas serán espacios-tiempo asintóticamente anti-de Sitter (aAdS). La manera de excitar el interior de la geometría será a partir de colocar campos *duales* a los operadores $\mathcal{O}(x)$, denotados colectivamente por $\phi(x, z)$, y estarán excitados con un perfil particular según el estado en la CFT al que correspondan. Este mapeo operador/campo implica entonces una correspondencia completa entre estados de la CFT y estados en la teoría 5-dimensional.

El siguiente paso lógico es estudiar la geometrización de una teoría de campo genérica y completa en el UV. Como explicamos en la sección anterior, esta se puede obtener como un flujo de renormalización debido a la deformación, por medio de operadores relevantes en el IR, de una CFT. El vacío de esta teoría no será en general invariante de escala, y por tanto, su dual gravitacional no podrá estar definido en AdS puro, sino en una geometría con dependencia no trivial en z . Sin embargo, similarmente al caso descrito en el párrafo anterior, a altas energías la teoría de campo se vuelve conforme (antes era el estado, $|\psi\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$) y la geometría debe ser nuevamente (2.1), i.e., la dependencia no trivial en el radio z debe anularse suavemente. La diferencia crucial con respecto a apagar una excitación del estado es cuán rápido nos aproximamos a AdS puro cerca de la frontera. En la región $z \rightarrow 0$, AdS tiene un volumen infinito, y por tanto modificar el comportamiento de los campos ahí costaría energía infinita. Llamamos a los modos violentos de excitación de los campos ϕ que modifican las condiciones de frontera, *no normalizables*. Encenderlos corresponde a cambiar de teoría. Mientras que, denominamos *normalizables* a los modos con energía finita que,

en ambos lados de la correspondencia, excitan el estado de la teoría correspondiente.

Finalmente, vale la pena destacar un ejemplo muy importante del mapeo operador/campo de la correspondencia. Como las direcciones del espacio-tiempo, x^μ , son comunes a ambas descripciones, las propiedades de transformación bajo Lorentz de los operadores \mathcal{O} y sus correspondientes campos en AdS ϕ , deben coincidir. Un operador que está presente en cualquier teoría de campos local es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Su contraparte gravitacional debe ser entonces un campo de espín dos, $g_{mn}(x, z)$, donde $m, n = 0, \dots, 4$. Analizando con más detalle sus propiedades, resulta que este campo no es más que la métrica 5-dimensional, o de manera más precisa, el campo del gravitón que describe fluctuaciones de la métrica por encima de su valor esperado en el vacío. Esto nos lleva a la sorprendente conclusión de que *la teoría de campo original (conforme o no) es dual a una teoría donde el espacio-tiempo es dinámico, i.e., una teoría de gravedad cuántica.*

2.3. Interacciones

En la sección anterior aprendimos que cada uno de los campos $\phi_I(x, z)$ (ahora etiquetados de forma colectiva por el índice I) tiene dos comportamientos independientes con una traducción directa al lenguaje de campos. Los modos normalizables pueden fluctuar, están asociados a operadores de creación y aniquilación, y corresponden a estados excitados por encima del vacío de la CFT. En cambio, los modos no normalizables son tan violentos que no están sujetos a cuantización, modifican la condición de frontera en $z \rightarrow 0$ y corresponden a cambiar completamente de teoría. Este último comportamiento es muy familiar en teoría de campos, pues es el mecanismo que utilizamos todo el tiempo para calcular funciones de correlación. Perturbando el Lagrangiano de la CFT con las fuentes $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J_I(x)\mathcal{O}_I$, la función generadora está definida como

$$Z_{\text{CFT}}[J_I] = \left\langle \exp \int J_I \mathcal{O}_I \right\rangle_{\text{CFT}} , \quad (2.2)$$

y tomando derivadas funcionales con respecto a la fuente podemos calcular correladores de n puntos

$$\left\langle \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{I_n}(x_n) \right\rangle = \frac{1}{Z_{\text{CFT}}[0]} \frac{\delta}{\delta J_{I_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J_{I_n}(x_n)} Z_{\text{CFT}}[J_I] \Big|_{J_I=0} , \quad (2.3)$$

los cuales codifican la información de las interacciones de la teoría de campo.

Por otro lado, si los campos duales propagándose en AdS tuvieran masa, el comportamiento dominante cerca de la frontera permitido por las ecuaciones de movimiento sería

$$\lim_{z \rightarrow 0} \phi_I(x, z) = z^{4-\Delta} \phi_I^{(0)}(x) , \quad (2.4)$$

donde Δ es la dimensión del operador \mathcal{O} . Entonces, las condiciones de frontera de los campos duales ϕ_I son especificadas por la función $\phi_I^{(0)}$ definida en la frontera de AdS.

Una entrada crucial en el diccionario de la correspondencia AdS/CFT iguala las funciones de partición de la teoría de campo con la teoría gravitacional, al igual que sus argumentos funcionales [2, 3]

$$Z_{\text{CFT}}[J_I] = Z_{\text{QG}}[\phi_I \rightarrow \phi_I^{(0)}] \quad \text{para} \quad J_I(x) = \phi_I^{(0)}(x) , \quad (2.5)$$

donde Z_{QG} es la función de partición en la teoría gravitacional cuántica evaluada sobre todas las funciones que tienen el valor $\phi_I^{(0)}$ en la frontera de AdS. El valor de frontera $\phi_I^{(0)}(x) := \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-4} \phi_I(x, z)$ se interpreta como la fuente $J_I(x)$ del operador dual $\mathcal{O}_I(x)$. En general, el campo $\phi_I(x, z)$ tendrá, además, otra parte linealmente independiente de la solución determinada por la fuente. Esta parte corresponderá a los modos normalizables descritos en la sección anterior. Por tanto, la identificación entre funciones de partición precisa completamente, en ambos lenguajes, la interpretación de modos normalizables y no normalizables que describimos anteriormente.

Implícito en el enunciado de la ecuación (2.5), se encuentra el mapeo entre operadores de la CFT y campos en AdS, con el cual es natural asumir que en la frontera el acoplamiento $\int \phi_I^{(0)} \mathcal{O}$ efectivamente tiene lugar. En el límite en el cual la gravedad clásica domina, i.e., en el cual la curvatura del espacio-tiempo es pequeña, podemos emplear la aproximación de punto silla para evaluar el lado derecho de (2.5) en la solución a las ecuaciones de movimiento clásicas

$$\left\langle \exp \int \phi^{(0)} \mathcal{O} \right\rangle_{\text{CFT}} \simeq \exp \left(- I_{\text{grav}}[\phi_I \rightarrow \phi_I^{(0)}] \right) , \quad (2.6)$$

donde $I_{\text{grav}}[\phi_I \rightarrow \phi_I^{(0)}]$ denota la acción clásica evaluada en la capa de masa con las condiciones de frontera dadas.

Algunos comentarios están a la orden. El enunciado (2.5) es genérico y válido en todos los ejemplos de la correspondencia AdS/CFT. Sin embargo, nuestra habilidad para construir teorías de gravedad cuántica es limitada. La gran mayoría de los ejemplos de la dualidad se encuentran en el contexto de teorías de cuerdas, i.e., cuando Z_{QG} es una función de partición de cuerdas. Sin embargo, existe todavía otra limitante, pues la cuantización de la cuerda en espacios curvos arbitrarios es todavía un problema abierto. Es por ello que el enunciado (2.6) es más asequible para hacer cálculos y ha pasado numerosas pruebas a lo largo de 20 años. No obstante, este último asume la existencia de un límite clásico en el cual emerge la geometría suave del espacio-tiempo. La experiencia nos ha enseñado que se requieren dos condiciones para que esto ocurra. Primero, la teoría de campo debe tener un gran número de grados de libertad en cada punto del espacio-tiempo, $N \rightarrow \infty$. Para $N \gg 1$, pero no estrictamente infinito, las interacciones entre los campos 5-dimensionales, incluyendo al gravitón, son controladas por el acoplamiento $1/N \sim \ell_p/L$, y pueden ser tratadas perturbativamente. Aun así, para que la dinámica de la teoría gravitacional sea manejable, se requiere tener una separación en el espectro de la teoría, de tal manera que sea una buena aproximación considerar solo al gravitón junto a algunos campos ligeros, en lugar de la torre completa de campos. Del lado de campos, la existencia de

una brecha muy grande en el espectro requiere que el acoplamiento sea muy grande. La situación final es entonces muy afortunada, pues al exigir control cualitativo sobre los cálculos gravitacionales somos llevados, automáticamente, al régimen de acoplamiento fuerte de la teoría de campo. En este régimen, no es posible hacer cálculos perturbativos y es, por tanto, un hecho sorprendente que la entrada del diccionario (2.6) nos permita estudiar fenómenos de acoplamiento fuerte con cálculos de gravedad clásica. A la inversa, cálculos perturbativos con diagramas de Feynman pueden, en principio, enseñarnos acerca de la estructura de la gravedad cuántica.

Finalmente, vale la pena destacar el carácter *holográfico* de la correspondencia AdS/CFT al enunciar que existe una teoría de campo de dimensión más baja que logra describir la misma física que una teoría gravitacional de dimensión más alta. La prescripción (2.6), es una encarnación precisa de esta idea, en la cual las interacciones locales en la frontera de AdS son duales a las interacciones de campos en el bulto. Por supuesto, con la salvedad de que (2.5) establece una dualidad completa entre ambos lenguajes, y no solo en la frontera.

2.4. Ejemplos

Hasta ahora hemos enunciado la correspondencia en el lenguaje 5-dimensional del bulto porque la geometrización de teorías de campo con $d = 4$ resulta más intuitiva. Sin embargo, el alcance de la correspondencia AdS/CFT va mucho más allá. El enunciado más general establece *una dualidad entre teorías cuánticas de campos en $D > d$ dimensiones y teorías de gravedad cuántica en $D > d$ dimensiones*. A continuación, listamos algunos ejemplos concretos comenzando por una teoría conforme.

- $\mathcal{N} = 4$ *super-Yang-Mills* en $\mathbb{R}^{3,1}$ con grupo de norma $SU(N)$ es dual a la teoría de cuerdas tipo IIB en el espacio $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo $F_{(5)}$: El contenido de campos de $\mathcal{N} = 4$ SYM consiste de un campo gluónico, $A_\mu(x)$, seis campos escalares $\Phi^S(x)$ ($S = 1, \dots, 6$), y cuatro fermiones de Weyl, $\psi^F(x)$ ($F = 1, \dots, 4$). Todos ellos no masivos y en la representación adjunta de $SU(N)$. La intensidad de sus interacciones está mediada por una sola constante de acoplamiento, g_{YM} . Es una teoría máximamente supersimétrica (MSYM por sus siglas en inglés), pues en cuatro dimensiones $\mathcal{N} = 4$ es la máxima cantidad de supersimetría que puede tener una teoría sin involucrar a la gravedad. Como consecuencia de esta cantidad de simetría, el acoplamiento g_{YM} no corre con la energía y es, por tanto, una teoría conforme. Esta teoría es otro ejemplo de un punto fijo interactuante en el Grupo de Renormalización. En el lado de gravedad, tenemos una teoría de cuerdas en 10 dimensiones, cuyas excitaciones básicas son cuerdas de longitud característica, l_s . Por otro lado, las excitaciones básicas de la teoría tipo IIB son cuerdas cerradas con modos izquierdos y derechos con la misma quiralidad. El vértice básico en teoría de perturbaciones es una cuerda que se separa en dos, o viceversa, dos cuerdas que se fusionan en una sola, y su intensidad está medida por la constante de acopla-

miento de cuerdas, g_s . Los modos no masivos de la cuerda incluyen al gravitón g_{MN} , ($M, N = 0, \dots, 9$), el dilatón φ , el axión C , y tres potenciales de norma $B_{M,N}, C_{M,N}, C_{MNPQ}$ (o sus intensidades de campo asociadas $H_{(3)}, F_{(5)}$), análogos al potencial electromagnético pero con un mayor número de índices. Estos campos están emparentados con los modos fermiónicos de la cuerda a través de supersimetría $\mathcal{N} = 2$ en $9 + 1$ dimensiones (de ahí el nombre tipo II). El diccionario que relaciona los parámetros entre ambas teorías está dado por

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s, \quad \lambda := g_{\text{YM}}^2 N = L^4/l_s^4, \quad (2.7)$$

que a su vez implica $N \sim L^4/l_p^4$. El rango del grupo $SU(N)$ corresponde al flujo de la 5-forma a través de la 5-esfera, $\int_{S^5} F_{(5)} = N$. Importantemente, decir que consideramos a la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ significa que permitimos excitaciones dinámicas del fondo mientras mantenemos las condiciones de frontera fijas, entonces el espacio-tiempo 10-dimensional es siempre asintóticamente AdS. Los cálculos del lado de teoría de cuerdas IIB están bajo control cuantitativo cuando el acoplamiento de cuerdas es pequeño y el radio de curvatura del espacio-tiempo es grande en unidades de la longitud de la cuerda. De las ecuaciones (2.7), vemos que esto ocurre en el límite de muchos colores y acoplamiento fuerte, i.e., $N \gg 1$ y $\lambda \gg 1$. Históricamente, este ejemplo de la correspondencia fue el primero descubierto por Maldacena [1].

- $\mathcal{N} = 1^*$ SYM en $\mathbb{R}^{3,1}$ con grupo de norma $SU(N)$ es dual a la solución de FGPW que interpola entre dos geometrías AdS en dos puntos críticos de la teoría de supergravedad (SUGRA) normada con $\mathcal{N} = 8$ en $D=5$ [11]: El lado de campos consiste en una deformación relevante de MSYM que se obtiene de añadir masa a uno de los 3 campos quirales, en la representación adjunta, después de reescribir el Lagrangiano en el lenguaje de supercampos, donde la simetría $\mathcal{N} = 1$ es manifiesta. Concretamente, el nuevo superpotencial tiene la forma $W = \text{Tr} \Phi_3[\Phi_1, \Phi_2] + \frac{1}{2} M \text{Tr} \Phi_3^2$. La masa rompe la invariancia conforme de MSYM (al introducir una escala en la teoría) y genera un flujo de renormalización. Sin embargo, al fluir la teoría tiene un punto fijo no trivial a bajas energías. En el lado de gravedad, el contenido de campos corresponde al gravitón $g_{\mu\nu}$, 15 campos de norma A_μ^A , 12 potenciales $B_{\mu\nu}$, 42 campos escalares, ϕ^I , y fermiones que hacen al espectro supersimétrico. Se cree que SUGRA normada con $\mathcal{N} = 8$ es la truncación consistente de SUGRA tipo IIB en $D = 10$ a los campos que involucran sólo al multiplete del gravitón. Tiene, además, cinco puntos críticos de los cuales 3 son inestables y no supersimétricos. Los otros dos, corresponden al número de supersimetría $\mathcal{N} = 8$ y $\mathcal{N} = 2$, y las correspondientes soluciones en el bulto son duales a MSYM a altas energías y a la deformación $\mathcal{N} = 1^*$ SYM a bajas energías, respectivamente. Finalmente, es importante destacar que la geometría del dual gravitacional interpola entre un espacio AdS en el UV y otro espacio, también AdS, en el IR. Este ejemplo de la correspondencia muestra entonces un caso concreto donde se conoce el dual

gravitacional (en el límite donde SUGRA es válida) de una teoría que fluye con el grupo de renormalización.

- *Teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ dual a una teoría de campo conforme en $\mathbb{R}^{1,1}$ con grupo de norma $U(Q_1) \times U(Q_5)$, con supersimetría $\mathcal{N} = 4$ y en la rama de Higgs [12, 13]:* El sistema consiste de Q_1 D1 branas a lo largo de la dirección no compacta, y Q_5 D5 branas con direcciones que envuelven al toro T^4 y, además, las branas son coincidentes en las direcciones transversales no compactas. El radio del espacio $AdS_3 \times S^3$ resulta ser $R^2 = g_6 \sqrt{Q_1 Q_5} l_s^2$, donde g_6 es la constante de acoplamiento de cuerdas 6-dimensional. El volumen del espacio compacto T^4 en la geometría cerca del horizonte es proporcional a Q_1/Q_5 . La teoría conforme 1 + 1 dimensional describe el límite de bajas energías del sistema $D1$ - $D5$ branas. El contenido de campos de esta teoría consiste de dos hipermultipletes que transforman en la representación adjunta de $U(Q_1)$ y $U(Q_5)$, respectivamente. También tiene hipermultipletes que transforman en la representación bi-fundamental de $U(Q_1) \times \overline{U}(Q_5)$. En la rama de Higgs, los escalares dentro de los hipermultipletes tienen valor de expectación distinto de cero.

Como anticipamos desde un inicio, las teorías conformes juegan un papel crucial en ambos lados de la correspondencia. Por un lado, es posible obtener cualquier teoría de campos, bien definida en el UV, como un flujo del Grupo de Renormalización debido a deformaciones relevantes de una CFT. Por otra parte, a través de la correspondencia, se conocen ejemplos concretos donde es posible geometrizar la física en un lenguaje gravitacional, siendo el caso con simetría conforme el dual a AdS puro, y deformaciones específicas de la CFT tienen también un dual gravitacional.

Finalmente, vale la pena mencionar que los ejemplos aquí presentados son parte de una gran cantidad de dualidades que la gente ha estudiado a lo largo de los 20 años de vida de la correspondencia y no se limitan a teorías de campos definidas en Minkowski, a geometrías del tipo aAdS ni a la gravedad clásica de Einstein. (Ver por ejemplo [14]).

Capítulo 3

Entrelazamiento

3.1. Mecánica cuántica

El entrelazamiento cuántico está presente en una gran cantidad de fenómenos físicos y representa una de las propiedades más contraintuitivas de la mecánica cuántica. Consideremos, primero, un sistema cuántico con dos grados de libertad: dos partículas de espín $1/2$ en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2) , \quad (3.1)$$

donde $|\uparrow\rangle_1$ es el eigenestado del primer espín con proyección de espín a lo largo de la dirección z , $s_{1z} = +\frac{1}{2}$, etc. Supongamos que las dos partículas se encuentran alejadas una de la otra de tal manera que el experimento en A no puede afectar el experimento en B . Las componentes del espín se pueden medir con dos arreglos Stern-Gerlach en cada sitio. Si los imanes se alinean en la dirección z , los resultados experimentales en ambos sitios serán opuestos. Esta correlación recibe el nombre de entrelazamiento, y nos referimos a (3.1) como un estado entrelazado.

Una medida conveniente del patrón de entrelazamiento es la entropía de entrelazamiento. En general, si el sistema completo se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$, también es posible caracterizarlo por su matriz de densidad, $\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$. Si en cambio, se encuentra en un estado mezcla únicamente es posible especificar su matriz de densidad. Cuando hablamos de sistemas con un número grande, pero finito, de grados de libertad, no es frecuente tener una descripción completa del sistema, ya sea porque es imposible o innecesario. Basta, en muchas ocasiones, considerar un subsistema particular. Siempre que sea posible separar el sistema cuántico en dos partes, digamos A y su complemento \bar{A} , de tal modo que el espacio de Hilbert se factorice $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_{\bar{A}}$, podemos definir la matriz de densidad reducida asociada al sistema A tomando la traza de la matriz completa sobre los grados de libertad en \bar{A}

$$\rho_A := \text{Tr}_{\bar{A}} \rho . \quad (3.2)$$

Con ello podemos definir la *entropía de entrelazamiento* de A en el estado ρ como la

entropía de Von Neumann de la matriz reducida ρ_A

$$S_A := -\text{Tr} \left(\rho_A \log \rho_A \right) . \quad (3.3)$$

Si el estado del subsistema A es puro, entonces la entropía de entrelazamiento se anula. Por lo cual, podemos decir que (3.3) cuantifica la impureza de la matriz ρ_A , y por tanto, es una medida del entrelazamiento entre los subsistemas A y \bar{A} . Por ejemplo, supongamos que solo podemos hacer mediciones de la proyección de espín de la partícula número 1, i.e. $A = 1$. Calculamos la matriz reducida asociada a la primer partícula, y con ello la entropía de entrelazamiento con lo que se obtiene

$$S_A = \log 2 , \quad (3.4)$$

como consecuencia de que ambas partículas están entrelazadas. De hecho, (3.4) es el valor máximo de entrelazamiento en el estado cuántico más general

$$|\psi(\alpha)\rangle = \cos \alpha |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + \sin \alpha |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle . \quad (3.5)$$

Si consideramos la matriz de densidad en el ensamble térmico

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} , \quad (3.6)$$

y a la región A como el sistema completo entonces

$$S_A = -\text{Tr} \rho \log \rho = \ln Z - \beta \partial_\beta \log Z = -\beta F + \beta E , \quad (3.7)$$

donde F y E son las energías libre y total del sistema, respectivamente. Por tanto, la entropía de entrelazamiento coincide en este caso con la entropía térmica.

3.2. Teorías de campo

Es posible aplicar todas las definiciones de la sección anterior a una teoría cuántica de campos, pero con la salvedad de que ahora tratamos con un sistema con un número infinito de grados de libertad, uno o más por cada punto del espacio-tiempo. Consideremos, pues, una región espacial a tiempo fijo t_0 , y dividámosla nuevamente en dos regiones, A y su complemento \bar{A} . El espacio de Hilbert de una teoría de campos es (típicamente) un producto tensorial de grados de libertad localizados en distintos puntos del espacio. Este hecho es más evidente si uno considera la regularización de la teoría por medio de una retícula en el UV. Entonces, para cualquier región espacial A existe un factor tensorial del espacio de Hilbert \mathcal{H}_A asociado, y tiene sentido tomar la traza sobre los grados de libertad que se encuentran en \bar{A} . Nos podemos hacer entonces la pregunta de cuán entrelazados están los grados de libertad en la región espacial A con su complemento. En d dimensiones espacio-temporales, A es una región $d - 1$ dimensional y su frontera, ∂A , es una región cerrada $d - 2$ dimensional conocida como superficie de entrelazamiento.

Si consideramos el estado del vacío de la teoría $|\Omega\rangle$, aún habría entrelazamiento presente entre los grados de libertad $\phi(\vec{x})|_{\vec{x}\in A}$ y $\phi(\vec{x})|_{\vec{x}\in\bar{A}}$. De hecho, estas mismas correlaciones cuánticas son responsables de que las funciones de correlación tengan valor distinto de cero, por ejemplo, $\langle\Omega|\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle \neq 0$, $(x_1-x_2)^2 > 0$. Las funciones de correlación tienen información básica acerca de las interacciones de la teoría. Sin embargo, en cierto sentido el entrelazamiento es una propiedad más fundamental: mientras que S_A requiere de la especificación del estado y una región espacial A , los correladores requieren de, además del estado, una elección de operadores locales $\mathcal{O}_i(x)$.

En virtud de su definición, en términos de una matriz de densidad reducida ρ_A , la entropía de entrelazamiento satisface un conjunto genérico de desigualdades. Consideremos un conjunto que pueda dividirse en múltiples regiones, i.e. $A = \cup_i A_i$, de tal manera que el espacio de Hilbert completo es $\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_{A_i}$. Las desigualdades son

- *Subaditividad*: Dado un sistema bipartito, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2}$, entonces se cumple

$$S_{A_1} + S_{A_2} \geq S_{A_1 \cup A_2} . \quad (3.8)$$

Esta desigualdad se satisface, usualmente, de manera trivial para regiones que se traslapan, i.e., $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Sin embargo, su validez es más general y nos permite definir una cantidad llamada *Información Mutua*

$$I(A_1, A_2) = S_{A_1} + S_{A_2} - S_{A_1 \cup A_2} \geq 0 . \quad (3.9)$$

- *Desigualdad de Arkai-Lieb*: Dado un sistema bipartito, se satisface

$$|S_{A_1} - S_{A_2}| \leq S_{A_1 \cup A_2} . \quad (3.10)$$

Notemos que si la unión $A_1 \cup A_2$ conforma el sistema completo, el cual se encuentra en un estado puro, i.e., el complemento es $\bar{A}_1 = A_2$ entonces concluimos que $S_{A_1} = S_{\bar{A}_2}$.

Combinando las desigualdades (3.8) y (3.10), podemos acotar el valor de la entropía asociada a $A_1 \cup A_2$, i.e.

$$|S_{A_1} - S_{A_2}| \leq S_{A_1 \cup A_2} \leq S_{A_1} + S_{A_2} . \quad (3.11)$$

- *Subaditividad fuerte*: Dado un sistema bipartito, tal que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, la siguiente desigualdad se cumple

$$S_{A_1 \cap A_2} + S_{A_1 \cup A_2} \leq S_{A_1} + S_{A_2} . \quad (3.12)$$

Dado un sistema tripartito, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{A_3}$, con intersección nula entonces se cumplen

$$S_{A_1 \cup A_2} + S_{A_2 \cup A_3} \geq S_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} + S_{A_2} , \quad (3.13)$$

$$S_{A_1 \cup A_2} + S_{A_2 \cup A_3} \geq S_{A_1} + S_{A_3} . \quad (3.14)$$

Otra sutileza importante de la entropía de entrelazamiento es que presenta divergencias UV y entonces necesita ser regularizada. Más aún, la definición de la matriz reducida ρ_A requiere que consideremos dividir el sistema a través de una superficie de entrelazamiento, y debemos entonces anticipar que la correlación de los campos justo al otro lado contribuyen de manera significativa a la entropía de entrelazamiento. Se requiere entonces introducir un corte UV a cierta distancia ϵ de la superficie de entrelazamiento. De hecho, en teorías de campo libres en d -dimensiones es posible demostrar que los términos divergentes satisfacen una “ley de área” en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ (ver por ejemplo [15])

$$S_A = \gamma \frac{\text{Area}(\partial A)}{\epsilon^{d-2}} + \dots, \quad (3.15)$$

donde hemos omitido términos subdominantes. La contribución dominante es proporcional al área de la región A y no es extensiva en el tamaño de A . El coeficiente γ depende de la teoría específica en consideración. En términos físicos, el resultado (3.15) implica que el entrelazamiento que más contribuye es entre puntos vecinos a lo largo de la frontera ∂A .

Es posible argumentar que la estructura de los términos subdominantes en (3.15) dependen de la geometría intrínseca y extrínseca de la superficie de entrelazamiento ∂A (ver por ejemplo [16])

$$S_A = \begin{cases} a_{d-2}(\frac{L}{\epsilon})^{d-2} + a_{d-4}(\frac{L}{\epsilon})^{d-4} + \dots + a_1 \frac{L}{\epsilon} + (-1)^{\frac{d-1}{2}} \mathcal{S}_A + \mathcal{O}(\epsilon), & \text{si } d \text{ es impar} \\ a_{d-2}(\frac{L}{\epsilon})^{d-2} + a_{d-4}(\frac{L}{\epsilon})^{d-4} + \dots + (-1)^{\frac{d-2}{2}} \mathcal{S}_A \log(\frac{L}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^0), & \text{si } d \text{ es par} \end{cases}, \quad (3.16)$$

donde L es una etiqueta para el tamaño de la región A . Mientras la mayoría de los coeficientes a_i en la expansión de arriba son dependientes del esquema de regularización y, por tanto, no tienen significado físico, la información no trivial está contenida en la parte universal denotada por \mathcal{S}_A . Este término captura información acerca del número de grados de libertad en la teoría de campos. Un caso importante a destacar es $d = 2$, en el cual (3.16) predice únicamente una divergencia logarítmica y, por tanto, la entropía de entrelazamiento no sigue una ley de área.

En una teoría de campo genérica, el cálculo de la entropía de entrelazamiento se realiza por medio del *truco de réplica*. Este consiste en evaluar la cantidad $\text{Tr}_A \rho_A^n$, diferenciarla con respecto a n y después tomar el límite $n \rightarrow 1$, i.e.

$$S_A := -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A = -\frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}_A \rho_A^n \Big|_{n=1}. \quad (3.17)$$

El cálculo de la matriz de densidad ρ_A^n , puede realizarse con el formalismo de la integral de camino. Consideremos una teoría de campo en $1+1$ dimensiones en coordenadas Euclidianas (t_E, x) . Al tiempo $t_E = 0$, tomamos la región A como el intervalo espacial $x \in [-l/2, l/2]$. A continuación, preparamos el estado $|\psi\rangle$ correspondiente al vacío, relevante en la expresión de ρ , utilizando la condición de frontera $\phi(t_E, x) = \phi_0$ en la funcional

$$\psi[\phi_0(x)] = \int_{t_E=-\infty}^{t_E=0} \mathcal{D}\phi e^{-S} \Big|_{\phi(t_E=0, x)=\phi_0(x)}. \quad (3.18)$$

Similarmente, evolucionamos desde $t_E = \infty$ a $t_E = 0$ para obtener la funcional $\bar{\psi}[\phi_0(x)]$. Entonces, para la matriz total del sistema ρ , tenemos que sus elementos de matriz entre las configuraciones ϕ_1 y ϕ_2 son

$$(\rho)_{\phi_0\phi'_0} = \psi[\phi_0(x)] \bar{\psi}[\phi'_0(x)] . \quad (3.19)$$

El elemento de matriz reducido, ρ_A , se obtiene integrando sobre los puntos en la región $x \in \bar{A}$ e igualando ahí las condiciones $\phi_0(x) = \phi'_0(x)$

$$(\rho_A)_{\phi_1\phi_2} = \frac{1}{Z_1} \int_{t_E=-\infty}^{t_E=\infty} \mathcal{D}\phi e^{-S} \prod_{x \in A} \delta(\phi(0 + \epsilon, x) - \phi_1(x)) \delta(\phi(0 - \epsilon, x) - \phi_2(x)) , \quad (3.20)$$

donde Z_1 es un factor de normalización tal que $\text{Tr}_A \rho_A = 1$. En resumen, hemos cortado el plano (t_E, x) al tiempo $t_E = 0$ entre $-l/2$ y $l/2$, y hemos colocado las condiciones de frontera ϕ_1 y ϕ_2 por encima y debajo del corte, respectivamente. El cálculo de $\text{Tr} \rho_A^n$ requiere repetir este procedimiento n veces

$$(\rho_A)_{\phi_1\phi_2} (\rho_A)_{\phi_2\phi_3} \cdots (\rho_A)_{\phi_n\phi_{n+1}} , \quad (3.21)$$

y tomar la traza sucesivamente. En el formalismo de la integral de camino esto se logra identificando las condiciones de frontera $\phi_i(x) = \phi_{i+1}(x)$ e integrando sobre $\phi_i(x)$. De esta manera $\text{Tr}_A \rho_A^n$ está dada en términos de una integral de camino sobre una superficie de Riemann con n hojas \mathcal{R}_n

$$\text{Tr}_A \rho_A^n = \frac{1}{(Z_1)^n} \int_{(t_E, x) \in \mathcal{R}_n} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} =: \frac{Z_n}{Z_1^n} . \quad (3.22)$$

Aunque nos hemos concentrado en el caso $d = 2$, es posible generalizar esta construcción a un mayor número de dimensiones. En ese caso, Z_n se convierte en la integral de camino sobre un espacio singular que se obtiene al pegar n copias del espacio original a lo largo de ∂A , lo que resulta en ángulo de déficit $2\pi(1 - n)$ a lo largo de la superficie de entrelazamiento.

Como con cualquier integral de camino, este método es muy útil para desarrollar intuición. El problema es que en la práctica resulta muy complicado realizar cálculos en dimensión $d > 2$, incluso en teorías de campos libres. Sin embargo, resulta que en $d = 2$ es posible utilizar la simetría conforme para realizar cálculos explícitos en ciertas situaciones. En particular, para un sistema infinitamente largo y un subsistema A de longitud l , el resultado para la entropía de entrelazamiento es [17]

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{l}{\epsilon} , \quad (3.23)$$

donde c es la carga central de la CFT₂. Este resultado no depende de los detalles de la teoría de campo, y al depender únicamente de la carga central, no aprendemos más sobre la naturaleza de los grados de libertad que están entrelazados. Sin embargo, es posible utilizar a S_A como una medida alternativa de la carga central, y es este tipo de razonamiento el que lleva a una prueba para el teorema c basado en entropía de entrelazamiento [18].

3.3. Método holográfico

A pesar de su complejidad, Ryu y Takayanagi propusieron, en el caso estático, una fórmula concreta para calcular la entropía de entrelazamiento en el contexto holográfico, en términos de propiedades del bulto [5]. Más tarde, Hubeny, Rangamani y Takayanagi propusieron la generalización covariante válida, también, para cualquier subsistema en una rebanada espacial de una CFT y para cualquier estado de la CFT asociado con un espacio-tiempo clásico vía la correspondencia AdS/CFT [9]. Consideremos, pues, una teoría de campo definida en una geometría espacio-temporal \mathcal{B} (usualmente, pero no limitada a, $\mathbb{R}^{3,1}$) en algún estado excitado $|\psi\rangle$ asociado con una geometría dual clásica M_ψ . Tomemos ahora una sección espacial $\Sigma_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} y en ella una región arbitraria $A \subset \Sigma_{\mathcal{B}}$. Esta región puede ser conexa o una unión de regiones desconexas. Como la frontera ∂M_ψ de la geometría M_ψ es la misma que \mathcal{B} , podemos definir regiones, A , en ∂M_ψ correspondientes a la sección espacial $\Sigma_{\mathcal{B}}$, así como su complemento $\bar{A} \subset \Sigma_{\mathcal{B}}$. Entonces, la entropía de entrelazamiento S_A asociada al subsistema A es igual al área de cierta superficie de codimensión 2, $\tilde{A} \in M_\psi$ (i.e. una superficie $d - 1$ dimensional para una geometría AdS_{d+1})

$$S(A) = \frac{1}{4G_N} \text{Area}(\tilde{A}) . \quad (3.24)$$

La superficie \tilde{A} satisface las siguientes condiciones:

- La superficie \tilde{A} tiene la misma frontera que la región A .
- La superficie \tilde{A} es homóloga a A . Esto es, la unión $A \cup \tilde{A}$ conforma la frontera de alguna superficie espacial d -dimensional en M_ψ .
- La superficie \tilde{A} extremiza el funcional de área. Si existen múltiples superficies con las propiedades anteriores, será \tilde{A} la que tenga la menor área.

La entrada en el diccionario de la correspondencia, (3.24), relaciona cantidades que son universales en ambos lados. La entropía de entrelazamiento se puede definir en cualquier CFT, mientras que del lado de gravedad, el área de superficies extremales es una cantidad puramente geométrica y, por tanto, relevante en cualquier teoría gravitacional. En el caso estático, podemos ignorar la dirección temporal y decir que la entropía de entrelazamiento para una región A se calcula como el área de una superficie de codimensión dos y de área mínima en el bulto con la misma frontera que A .

3.3.1. Ejemplos

Desde el punto de vista práctico, es sorprendente que la entropía de entrelazamiento, (3.24), tenga una realización tan simple en el lado de gravedad.

- El vacío de una CFT₂ definida en $\mathbb{R}^{1,1}$: Consideremos la región de tamaño $2a$ centrada alrededor del origen, i.e., $A = \{x \in \mathbb{R} | x \in (-a, a)\}$. La geometría dual es el espacio-tiempo Poincaré AdS₃

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + dx^2 + dz^2) , \quad (3.25)$$

con $z \in (0, \infty)$ y $t, x \in (-\infty, \infty)$. En el caso estático, $t = 0$, la entrada del diccionario (3.24) nos instruye a encontrar la geodésica tipo espacio contenida en el plano xz y con la misma frontera que A . Esto se puede hacer escribiendo la métrica inducida sobre la curva y la acción de la geodésica es

$$S = \int d\lambda \sqrt{\gamma_{\lambda\lambda}} = \int d\lambda \frac{L}{z} \sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2} . \quad (3.26)$$

Variando esta acción se puede mostrar que como solución a las ecuaciones de movimiento se obtiene un semicírculo en el plano xz , i.e.,

$$x(\lambda) = a \cos \lambda, \quad z(\lambda) = a \sin \lambda , \quad (3.27)$$

donde $\lambda \in [0, \pi]$, y calculando su longitud obtenemos

$$\text{Longitud} = 2L \int_{\epsilon}^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sin \lambda} = -2L \log \frac{\epsilon}{2} = 2L \log \frac{l}{a} , \quad (3.28)$$

donde hemos utilizado el corte UV ϵ para restringir el dominio del parámetro λ y evitar que la geodésica llegue hasta la frontera, y así su longitud sea infinita. Finalmente, utilizando el resultado de Brown-Henneaux entre la carga central de una CFT y el radio de AdS₃ [19]

$$c = \frac{3L}{2G_N} \quad (3.29)$$

obtenemos la entropía de entrelazamiento

$$S_{\mathcal{A}} = \frac{c}{3} \log \frac{l}{a} , \quad (3.30)$$

la cual coincide con (3.23).

- El vacío de una CFT _{d} definida en $\mathbb{R}^{d-1,1}$: La geometría dual es nuevamente Poincaré AdS. Consideremos, por ejemplo, la región en forma de una tira, i.e., regiones invariantes bajo traslaciones en $(d-2)$ coordenadas espaciales. Dicha región está parametrizada por

$$A_{||} = \{\vec{x}_{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1} | x_1 \in (-a, a), x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 2, 3, \dots, d-1\} . \quad (3.31)$$

La acción para las superficies de área mínima toma entonces la forma,

$$S = \int d^{d-2}x dx_1 \left(\frac{L}{z}\right)^{d-1} \sqrt{1 + z'(x_1)^2}. \quad (3.32)$$

Aprovechando el hecho de que la acción es invariante de la coordenada x_1 , es posible utilizar la correspondiente cantidad conservada para escribir la ecuación de movimiento en la forma

$$z'(x_1)z^{d-1} - \sqrt{z_*^{2(d-1)} - z^{2(d-1)}} = 0, \quad z_* = a \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)} \quad (3.33)$$

donde z_* es el punto de retorno de la superficie que explora el bulto. Es posible resolver esta ecuación analíticamente en términos de funciones hipergeométricas y, a continuación, calcular el área de dicha superficie introduciendo un regulador IR, R , en las $d - 2$ direcciones infinitas, con lo que se obtiene [16]

$$S_{A_{||}} = \frac{L^{d-1}}{d-2} R^{d-2} \left[\frac{2}{\epsilon^{d-2}} - \left(\frac{2}{z_*}\right)^{d-1} \frac{1}{a^{d-2}} \right]. \quad (3.34)$$

El término divergente principal escala como el área de la superficie de entrelazamiento ∂A .

- El vacío de una CFT₂ definida en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$: En este caso la geometría dual en el bulto está dada por el espacio AdS₃ global

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{R^2}{L^2}\right) dt^2 + \frac{dR^2}{1 + \frac{R^2}{L^2}} + R^2 d\theta^2. \quad (3.35)$$

Es útil reescribir esta métrica en los siguientes dos sistemas de coordenados introduciendo $\tau = t/L$ y $R := L \sinh \rho := L \tan \varrho$, en los dominios $\tau \in (-\infty, \infty)$, $\varrho \in [0, \pi/2)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= L^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2) \\ &= \frac{L^2}{\cos^2 \varrho} \left(-d\tau^2 + d\varrho^2 + \sin^2 \varrho d\theta^2 \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

El conjunto de coordenadas (τ, ϱ, θ) cubre completamente el espacio AdS.

Definiendo

$$\begin{aligned} t &= \frac{L \sin \tau}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \theta}, \\ x &= \frac{L \sin \theta \sin \varrho}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \theta} \\ z &= \frac{L \cos \varrho}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \theta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

podemos recuperar la métrica de Poincaré AdS₃ (3.25). Estas coordenadas cubren únicamente la *cuña de Poincaré*, i.e., la porción $\tau \in (-\pi, \pi)$, $\cos \theta > -\cos \tau \csc \varrho$ de AdS₃ global (3.35).

Consideremos la región A como el arco del círculo centrado en el origen y con ancho $2\theta_A$. Similarmente a los casos anteriores, se puede mostrar que la geodesica correspondiente tiene la forma

$$R(\theta) = \frac{L}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_A} - 1}}, \quad (3.38)$$

y calculando su longitud, la entropía de entrelazamiento asociada a A es [16]

$$S_A = \frac{c}{3} \log \left(\frac{\ell_{S^1}}{\pi \epsilon} \sin \left(\frac{2a}{\ell_{S^1}} \right) \right), \quad (3.39)$$

donde ϵ es un corte UV, a es la longitud de arco de la región A , ℓ_{S^1} es el radio propio del círculo y c es la carga central de la teoría conforme.

Para mayores detalles acerca del uso de la entropía de entrelazamiento en teorías de campo y en el contexto de la correspondencia AdS/CFT ver las excelentes referencias [16, 21, 22], que han servido de base para las tres secciones anteriores.

3.4. Entropía Diferencial u Hoyo-grafía

La idea original de *entropía diferencial* fue formulada en [6] estudiando, por medio de la correspondencia AdS/CFT, un espacio-tiempo con un hoyo, por ejemplo, el espacio Rindler esférico embebido en AdS₃. Disparando rayos de luz externos desde un punto en la orilla del agujero (en $R = R_0$) hacia el futuro y al pasado, llegarán a la frontera a un tiempo finito $\pm T_0$. Con esto especificamos un diamante causal, o equivalentemente en dos dimensiones, nos restringimos a observables en la CFT₂ en el dominio causal asociado al intervalo espacial que denotaremos I . Repitiendo este procedimiento para cada punto del hoyo construimos una tira de duración finita $2T_0$. Por medio de subaditividad fuerte, es posible derivar una fórmula que cuantifica el patrón de entrelazamiento remanente después de restringirnos a observables locales a un tiempo finito en la teoría conforme como repasamos a continuación: Consideremos dos intervalos $\{I_1, I_2\} \in \text{CFT}_2$ a tiempo fijo. La entropía de entrelazamiento asociada con cada uno satisface la desigualdad (3.8)

$$S(I_1 \cup I_2) + S(I_1 \cap I_2) \leq S(I_1) + S(I_2), \quad (3.40)$$

la cual puede ser demostrada de manera muy simple utilizando la prescripción holográfica (3.24). Siguiendo la referencia [7], para una familia de intervalos $\{I_k\}$ definimos la “envolvente exterior” como la frontera de la región en el bulto encerrada por las superficies de Ryu-Takayanagi que calculan la entropía de entrelazamiento $S(I_k)$.

Denotemos a la entropía de Bekenstein-Hawking evaluada en dicha envolvente por $\tilde{S}(\{I_k\})$, donde hemos dejado de manifiesto la dependencia en la partición particular de los intervalos de la frontera. Para el caso particular de dos intervalos, las siguientes desigualdades se cumplen

$$S(I_1 \cup I_2) \leq \tilde{S}(I_1, I_2) \leq S(I_1) + S(I_2) - S(I_1 \cap I_2) . \quad (3.41)$$

La desigualdad $S(I_1 \cup I_2) \leq \tilde{S}(I_1, I_2)$ se sigue del hecho de que la superficie que termina en la unión es extremal y ambas se encuentran en la misma clase de homología. Si consideramos n intervalos que se traslapan, obtendríamos la siguiente generalización, como se puede demostrar por inducción

$$S(\cup_k I_k) \leq \tilde{S}(\{I_k\}) \leq \sum_{k=1}^n S(I_k) - \sum_{k=1}^{n-1} S(I_k \cap I_{k+1}) . \quad (3.42)$$

Para cubrir toda la frontera (la tira por ejemplo), debemos añadir un término extra al lado derecho y hacer la identificación de entropías $S(I_n \cap I_{n+1}) = S(I_n \cap I_1)$. En este caso, la envolvente exterior forma una curva cerrada en el bulto. A continuación, en el contexto de Rindler esférico, tomamos la longitud de los intervalos como fijos y su número al infinito. La envolvente será entonces un círculo suave de radio R_0 , y entonces obtenemos

$$\tilde{S}(\{I_k\}) = \frac{2\pi R_0}{4G_N} . \quad (3.43)$$

Sorprendentemente, la segunda desigualdad se satura en este límite. De hecho, este resultado es también válido para *cualquier* curva cerrada en el bulto [20]

$$E := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [S(I_k) - S(I_k \cap I_{k+1})] = \frac{A}{4G_N} , \quad (3.44)$$

donde E es por definición la entropía diferencial y A es la longitud de la curva. Con la ecuación (3.44) a mano, somos capaces de lograr la *reconstrucción* de curvas tipo espacio no extremales, $C \in \text{AdS}_3$, en términos del entrelazamiento en la frontera, ya que cada curva encuentra una representación específica como una familia de intervalos en la CFT_2 . Vale la pena destacar que a pesar de que esta deducción va más allá de teorías con dual gravitacional, pues está basada únicamente en subaditividad fuerte, es sólo en el contexto de la correspondencia AdS/CFT que tenemos una interpretación geométrica del patrón de entrelazamiento resultante.

Se sugirió también en [6], que la entropía diferencial (3.44) podría relacionarse más directamente con la *información holográfica causal* que con entropía de entrelazamiento. Sin embargo, poco después, se señaló en [7] que dicha interpretación es precisa únicamente en el caso $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$. De hecho, una noción de *información holográfica causal diferencial* difiere de la entropía gravitacional por un término divergente. En ese artículo, también se llevo a cabo una extensión de la entropía diferencial a un mayor número de dimensiones con simetría planar y a ciertos fondos gravitacionales más

generales. Más recientemente, en [8] ocurrieron otras extensiones. Llevaron la construcción al caso covariante, en Poincaré AdS, al calcular longitudes de curvas infinitas con condiciones periódicas en infinito. Proporcionaron, también, una demostración de la igualdad $E = A/4G_N$ basada en métodos de mecánica clásica (ver más abajo), la cual aplica en contextos más generales. Se lograron realizar tanto la reconstrucción bulto-frontera como frontera-bulto también.

Siguiendo de cerca la referencia [8], consideremos ahora el límite continuo de la fórmula de entropía diferencial (3.44). Para hacerlo introduzcamos el parámetro arbitrario $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_f]$ en lugar del índice discreto k , i.e., igualamos $\lambda = k/n$ y tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Especificamos la familia de intervalos I_k dando su familia de puntos finales izquierdo y derecho, $\{x_L^\mu(\lambda), x_R^\mu(\lambda)\}$. Además, asumimos periodicidad en λ , i.e., $x_{L,R}^\mu(\lambda_i) = x_{L,R}^\mu(\lambda_f)$, y denotamos la entropía de entrelazamiento del intervalo correspondiente en λ por $S(x_L^\mu(\lambda), x_R^\mu(\lambda))$. El traslape $I_k \cap I_{k+1}$, corresponde a extender el intervalo de $x_L^\mu(\lambda_{k+1})$ asociado a I_{k+1} , a $x_R^\mu(\lambda_k)$ asociado a I_k . Entonces, $S(I_k \cap I_{k+1}) = S(x_L(\lambda_{k+1}), x_R(\lambda_k))$. Por tanto, podemos reescribir la ecuación (3.44) en términos de los puntos finales de cada intervalo como

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} [S(x_L(\lambda_k), x_R(\lambda_k)) - S(x_L(\lambda_{k+1}), x_R(\lambda_k))] . \quad (3.45)$$

En el límite continuo obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [S(x_L(\lambda_k), x_R(\lambda_k)) - S(x_L(\lambda_{k+1}), x_R(\lambda_k))] &= S(x_L(\lambda), x_R(\lambda)) - S(x_L(\lambda + d\lambda), x_R(\lambda)) \\ &= - \frac{dS(S(x_L(\lambda), x_R(\lambda)))}{dx_L^\mu(\lambda)} \frac{dx_L^\mu(\lambda)}{d\lambda} d\lambda , \end{aligned}$$

y finalmente, obtenemos para la entropía diferencial

$$E = - \oint d\lambda \left. \frac{\partial S(x_L(\lambda'), x_R(\lambda))}{\partial \lambda'} \right|_{\lambda'=\lambda} = \oint d\lambda \left. \frac{\partial S(x_L(\lambda), x_R(\lambda'))}{\partial \lambda'} \right|_{\lambda'=\lambda} , \quad (3.46)$$

donde hemos integrado por partes para obtener la segunda igualdad. Esta ecuación es más útil en el sentido práctico y, al igual que su análogo discreto, también logra la reconstrucción de curvas cerradas en los distintos ejemplos antes mencionados.

3.4.1. Hoyo-grafía General

En esta sección repasamos el teorema presentado en [8], que establece la conexión entre longitudes de curvas en el bulto y la fórmula de entropía diferencial (3.46). Sea la curva tipo espacio en el bulto $x^m(s)$, donde s es un parámetro afín sobre la curva y consideremos la acción geométrica

$$S = \int_{s_i}^{s_f} ds \mathcal{L}(x, \dot{x}) . \quad (3.47)$$

Las propiedades relevantes de la acción son que \mathcal{L} es función únicamente de las coordenadas x^m y las “velocidades” correspondientes, $\dot{x}^m := \partial_s x^m$, y que es invariante bajo reparametrizaciones

$$\int_{s_i}^{s_f} ds \mathcal{L}(x, \partial_s x) = \int_{\tilde{s}_i}^{\tilde{s}_f} d\tilde{s} \mathcal{L}(x, \partial_{\tilde{s}} x), \quad s \rightarrow \tilde{s} = \tilde{s}(s). \quad (3.48)$$

La invariancia bajo reparametrizaciones implica que \mathcal{L} es una función homogénea de grado 1 en \dot{x} , i.e.,

$$\mathcal{L}(x, \alpha \dot{x}) = \alpha \mathcal{L}(x, \dot{x}), \quad (\alpha > 0). \quad (3.49)$$

Esto a su vez implica que el Lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \dot{x}^m p_m(x, \dot{x}), \quad (3.50)$$

donde p_m es el momento canónico conjugado

$$p_m := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m}. \quad (3.51)$$

El Hamiltoniano del sistema se anula como consecuencia de que s no es un parámetro físico sino redundante. La ecuación (3.49) implica que p^m es una función homogénea de grado cero en \dot{x} .

Otro elemento importante para esta demostración es el siguiente lema en mecánica clásica: dada una familia de soluciones, $X^m(s; \lambda)$, a las correspondientes ecuaciones de movimiento, continuas y periódicas en el parámetro λ , la cantidad

$$R(s) := \oint d\lambda \left. X'^m p_m \right|_s, \quad (3.52)$$

donde $X'^m := \partial_\lambda X^m$, es independiente de s . Esto se puede probar como sigue: dados dos puntos tales que $s_1 < s_2$, definimos

$$S_{12}(\lambda) := \int_{s_1}^{s_2} ds \mathcal{L}(X, \dot{X}). \quad (3.53)$$

Ahora, como la derivada de la acción en la capa de masa con respecto a la posición final es el momento final, y con respecto a la posición inicial es menos el momento inicial, entonces se cumple

$$\frac{dS_{12}}{d\lambda} = \left. X'^m p_m \right|_{s_2} - \left. X'^m p_m \right|_{s_1}. \quad (3.54)$$

Integrando sobre λ , y utilizando el hecho de que $S_{12}(\lambda)$ es periódica, deducimos que $R(s_1) = R(s_2)$. Por tanto, $R(s)$ es una cantidad conservada asociada con translaciones en λ .

Volviendo a la configuración hoyo-gráfica, la entropía de entrelazamiento $S(x_L, x_R)$ para un intervalo espacial está dada por la acción de una curva extremal, i.e., una solución a las ecuaciones clásicas de movimiento, con puntos finales x_L^μ y x_R^μ . Por invariancia bajo reparametrizaciones, podemos fijar los “tiempos” inicial y final, s_L y s_R , sin pérdida de generalidad. Sea entonces $X(s; \lambda)$ una familia de soluciones (continua y periódica) con puntos finales $x_{L,R}(\lambda) := X(s_{L,R}; \lambda)$, cuya acción iguala $S(x_L(\lambda), x_R(\lambda))$. Entonces de la ecuación (3.46), la entropía diferencial está dada por

$$E = \oint d\lambda \left. \frac{\partial S(x_L(\lambda), x_R(\lambda'))}{\partial \lambda'} \right|_{\lambda'=\lambda} = \oint d\lambda x_R'^m \frac{\partial S(x_L, x_R)}{\partial x_R^m} = \oint d\lambda X'^m p_m \Big|_{s_R} = R(s_R), \quad (3.55)$$

donde en la tercer igualdad hemos utilizado nuevamente el hecho de que la derivada de la acción en la capa de masa con respecto a la posición final es igual al momento final. Como mostramos anteriormente, $R(s)$ es una constante así que también pudimos haber evaluado, equivalentemente, E en cualquier otro valor del parámetro s , por ejemplo s_L .

Supongamos ahora que existe una familia periódica de curvas en el bulto $x^m(\lambda)$ que, para cada valor de λ , es tangente a la solución $X(s; \lambda)$ en algún punto que denominamos $s = s_0(\lambda)$:

$$X^m(s_0(\lambda); \lambda) = x^m(\lambda), \quad \dot{X}^m(s_0(\lambda); \lambda) = \alpha(\lambda) x'^m(\lambda), \quad \alpha(\lambda) > 0. \quad (3.56)$$

Nos referiremos a esta condición como *alineamiento vectorial tangente* (o simplemente, alineamiento tangente). Por invariancia bajo reparametrizaciones, podemos asumir sin pérdida de generalidad, que s_0 es una constante. Evaluando R en s_0 obtenemos

$$R(s_0) = \oint d\lambda X'^m p_m(X, \dot{X}) \Big|_{s_0} = \oint d\lambda x'^m p_m(x, x') = \oint d\lambda \mathcal{L}(x, x'), \quad (3.57)$$

donde hemos utilizado las propiedades de homogeneidad de p_m y \mathcal{L} , (3.50), en la segunda y tercer igualdad, respectivamente. Además, hemos sustituido $X'^m \Big|_{s_0} = x'^m \Big|_{s_0}$ en la segunda igualdad. Como R es constante, hemos mostrado que E es igual a la acción evaluada en la curva $x^m(\lambda)$, i.e., la longitud de la curva A . Es importante destacar que, en general, la curva en el bulto no será extremal.

Vale la pena hacer algunos comentarios adicionales respecto a esta demostración.

- **Validez:** La prueba que hemos repasado en esta sección depende de las propiedades de la acción (3.47). En particular, de que \mathcal{L} dependa únicamente de las coordenadas de la curva x^m y la velocidad x'^m . Por lo cual, es válida en teorías genéricas gravitacionales siempre y cuando la funcional de entropía tenga únicamente primeras derivadas. En un mayor número de dimensiones, sin embargo, se ha asumido implícitamente la existencia de una simetría planar generalizada de la curva en el bulto y su correspondiente familia de superficies extremales. Resulta que los fondos gravitacionales que admiten este tipo de simetría son aquellos que “factorizan” las coordenadas planares $y^a = \{y^1, \dots, y^{d-2}\}$.

- **Generalizaciones:** Podemos hacer un par de generalizaciones relajando la condición de alineamiento tangente (3.56). La primera consiste en remover la restricción $\alpha(\lambda) > 0$ y permitir que los dos vectores tangentes \dot{X}^m y x'^m estén orientados de forma opuesta. Para ello, exigimos que la acción (3.47) sea invariante bajo reparametrizaciones que inviertan la orientación de la curva, al igual que reparametrizaciones que la preserven. Es posible mostrar una segunda generalización un poco más drástica, pues permite que los vectores tangentes no sean colineales como explicaremos más adelante. Esta construcción fue denominada *alineamiento vectorial nulo* (o simplemente, alineamiento nulo) en [8].

- **Reconstrucción bulto-frontera:** Este teorema puede ser empleado para lograr la reconstrucción de curvas arbitrarias en el bulto en el contexto frontera-bulto, i.e., dada una familia general de intervalos en la frontera es posible reconstruir al menos una curva en el bulto. En el caso a tiempo constante es suficiente con que la familia de superficies extremales satisfagan la condición de alineamiento tangente. En el caso covariante, por otra parte, la condición relevante para que ocurra la reconstrucción es la condición de alineamiento nulo [8]. De hecho, se puede mostrar que con una familia de intervalos es posible reconstruir a lo más dos tipos de curvas en el bulto.

Capítulo 4

Hoyografía en Poincaré AdS

4.1. Motivación

Diversos aspectos de hoyo-grafía han sido explorados en [7,8,20,23–31]. En los trabajos [6,20] se llevó a cabo la reconstrucción hoyo-gráfica de una curva cerrada y arbitraria a tiempo constante en AdS_3 global (también se estudiaron los casos de las geometrías BTZ y de defecto cónico). Al encoger una curva cerrada a tamaño cero en un punto arbitrario del bulto, se obtuvo una familia de intervalos particular [20], la cual describe una “curva-punto” de longitud nula. Esta puede ser combinada con una segunda familia asociada a otro punto para calcular la distancia entre los dos. Este marco es capaz de extraer los ingredientes más básicos de de la geometría del bulto, puntos y distancias, a partir del patrón de entrelazamiento en el estado de la teoría de la frontera.

En esta tesis estamos interesados en entender cómo se desarrolla toda esta historia en *Poincaré* AdS_3 , donde el programa hoyo-gráfico enfrenta un serio desafío [4]. Como explicamos al inicio de este trabajo, la geometría de AdS puro, (2.1), es dual al vacío de una CFT definida sobre el espacio-tiempo de Minkowski. En este contexto, el método hoyo-gráfico ha sido examinado antes, a tiempo constante en [7], y para curvas con dependencia no trivial en el tiempo en [8]. Nuestra motivación es distinta, y su esencia puede ser entendida viendo la Figura 4.1, la cual muestra al parche de Poincaré como una cuña dentro de AdS global. El hecho de que Poincaré no cubra todo el espacio AdS implica que algunas curvas dentro de la cuña pueden tener un conjunto de geodésicas tangentes cuyos puntos finales caen fuera de la cuña. Dichas geodésicas no pueden ser asociadas con entrelazamiento en la frontera. Su existencia representa un serio reto a la reconstrucción hoyo-gráfica porque nos deja sin los medios para codificar en el lenguaje de la teoría de campo, lo que en definitiva deberían ser propiedades del vacío, $|\Omega\rangle$.

Hay un problema conceptual que debemos esclarecer. Dado que las descripciones global y de Poincaré están relacionadas por una simple transformación de coordenadas (ver Ec. (3.37)), podría parecer que el éxito de la hoyo-grafía en reproducir curvas, puntos y distancias en coordenadas globales debería extenderse de forma automática

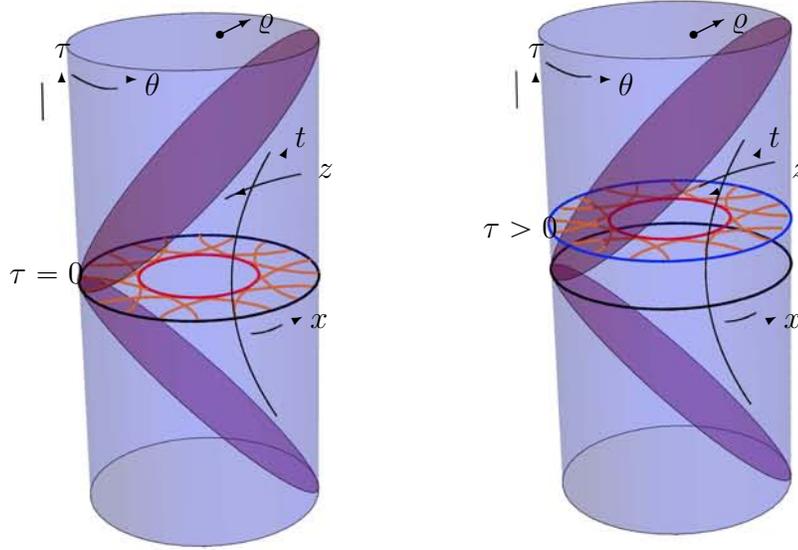


Figura 4.1: Cada uno de estos cilindros sólidos es un diagrama de Penrose de AdS_3 , cubierto totalmente por las coordenadas globales (ϱ, τ, θ) , pero solo en parte por las coordenadas de Poincaré AdS (t, x, z) . Las últimas generan la cuña entre la frontera de AdS $z = 0$ ($\leftrightarrow \varrho = \pi/2$), en la superficie del cilindro, y el horizonte de Poincaré $z \rightarrow \infty$, representado por los discos morados inclinados a 45 grados. Cada cilindro muestra un ejemplo de una curva en el bulto dentro de la cuña (el círculo rojo), junto con geodésicas tangentes (color naranja), que en la descripción global permiten a la curva ser reconstruida hoyo-gráficamente. A la izquierda, la curva está a un tiempo global fijo $\tau = 0$ ($\leftrightarrow t = 0$). En este caso, la reconstrucción de la curva debe ser posible utilizando datos en la teoría de campo definida en Minkowski dual a la cuña de Poincaré, porque todas las geodésicas se encuentran dentro de la cuña. A la derecha, la curva se encuentra a tiempo $\tau > 0$ ($\leftrightarrow t \neq \text{constante}$), y como podemos apreciar, contiene segmentos cuyas geodésicas tangentes salen de la cuña. A pesar de que este segmento es parte de Poincaré AdS, *no puede ser reconstruido* con datos de la teoría de campo utilizando la herramienta de hoyografía estándar.

a Poincaré. La longitud propia, A , de una curva cerrada es ciertamente invariante bajo transformaciones de coordenadas e ingenuamente lo mismo parecería ser cierto para la entropía de entrelazamiento, la cual en el lado de gravedad es también una longitud propia, de acuerdo a la entrada del diccionario (3.24). De hecho, la entropía sin regular (tomando la longitud de la correspondiente geodésica hasta la frontera de AdS) es invariante, pero también es divergente, así que no puede ser utilizada directamente para calcular E . Tan pronto como introduzcamos un corte, introducimos dependencia en las coordenadas. Esta es una propiedad de la entropía de entrelazamiento regulada en la teoría de campo: Su valor depende del esquema de regularización, así que no es invariante bajo transformaciones conformes o de Weyl (ver por ejemplo [32–38]), que es a lo que se reduce la transformación en el bulto de coordenadas globales a Poincaré en la CFT. Como resultado, las ecuaciones que involucran S no se pueden implementar

de un conjunto de coordenadas a otro, lo cual justifica porqué es importante estudiar hoyo-grafía en Poincaré directamente. Esto es lo que hacemos en el presente trabajo, primero abordamos el caso a tiempo constante en la Sec. 4.2 y después a tiempo variable en la Sec. 4.3.

En mayor detalle, comenzamos por preguntarnos cómo reconstruir curvas cerradas, en contraste con las curvas estudiadas en [7, 8], las cuales se extienden hasta infinito, y satisfacen una condición de periodicidad en infinito. Una importante diferencia entre AdS global y Poincaré, es que en AdS global la frontera envuelve todo el bulto. Dada una curva cerrada, es entonces fácil visualizar como la familia de intervalos dará origen a geodésicas que son tangentes a cada punto de la curva. En Poincaré, dada una curva cerrada, la frontera no la envuelve, así que ingenuamente parecería que hacen falta los intervalos/geodésicas que serían tangentes a la porción de la curva más alejada de la frontera. Como explicamos arriba y se puede apreciar en la Fig. 4.1, esto ocurre porque las coordenadas de Poincaré cubren solo una cuña de AdS global. Sin embargo, sabemos que una rebanada a tiempo de Poincaré $t = 0$ coincide completamente con la rebanada a tiempo global $\tau = 0$, así que al menos en este caso, no existe posibilidad de que algunas geodésicas queden fuera. En la Subsec. 4.2.1, nuestra estrategia será entonces tomar los resultados de [20] para curvas a $\tau = 0$, y realizar simplemente el cambio de coordenadas, para obtener la descripción de Poincaré correspondiente. Nuestra conclusión es que curvas arbitrarias cerradas a tiempo $t = 0$ pueden ser reconstruidas, pero con una novedad importante: la familia dual de intervalos debe correr sobre el eje x al menos *dos* veces, pues es en la segunda (o subsecuente) pasada(s) que describimos geodésicas tangentes a la porción más alejada de la curva. Una vez que sabemos como hacer esto a tiempo $t = 0$, la invariancia de la métrica (2.1) bajo traslaciones en t nos permitirá reconstruir curvas y puntos en cualquier otra rebanada a tiempo constante, independientemente del valor de t . (Traslaciones en τ , por otro lado, nos darán ejemplos de curvas a tiempo variable, los cuales examinaremos en la Sec. 4.3.)

En la Subsec. 4.2.2 mostramos que la entropía diferencial E da como resultado la longitud A para una curva cerrada genérica a tiempo constante en Poincaré AdS: al igual que el caso global estudiado en [20], encontramos que $E = A/4G_N$. En esta instancia particular, entonces, no hay ninguna sutileza debida al cambio de coordenadas. Sin embargo, sí hay una sutileza cuando analizamos en la Subsec. 4.2.3 la descripción hoyo-gráfica de curvas abiertas. Se encontró en [20] que para reproducir la longitud de un curva abierta en AdS global, la entropía diferencial debía ser suplementada con una función de frontera específica, f . Encontramos que lo mismo es cierto en Poincaré, pero la función de frontera relevante, Ec. (4.17), no es la traducción directa de su contraparte global. Sin embargo, sigue siendo cierto que f se puede describir de manera geométrica en el bulto, y tiene una interpretación específica en términos de entropía de entrelazamiento en la frontera. Esto es crucial para que curvas abiertas sean reconstruidas puramente con datos de la CFT. Combinamos E con f para definir una entropía diferencial “renormalizada” \mathcal{E} , la cual reproduce directamente la longitud de una curva abierta arbitraria, $\mathcal{E} = A/4G_N$. Obtenemos también una expresión para \mathcal{E}

en términos de datos en la frontera en (4.26).

En la Subsec. 4.2.4 encogemos curvas a tamaño cero para obtener la descripción hoyo-gráfica de puntos en el bulto. Encontramos que esto se puede realizar tanto con curvas cerradas como abiertas, pero en el último caso debemos tomar la pendiente $\partial z/\partial x$ como divergente en los puntos finales de la curva, para aún quedarnos con una colección no trivial de geodésicas en el límite del punto. Siguiendo [20], mostramos que las familias de intervalos de la CFT que resultan estar asociadas con puntos en lugar de curvas de tamaño finito pueden ser obtenidas al extremizar una acción basada en la curvatura extrínseca, la cual puede ser escrita en términos de variables de la frontera (4.39). En la Sección 4.2.5 verificamos que la distancia entre dos puntos arbitrarios puede ser obtenida a partir de entropía diferencial. Esto puede hacerse de dos maneras distintas: usando la ecuación (4.60), la cual es esencialmente la misma receta que en [20], o con la ecuación (4.53), la cual es una generalización basada en describir los puntos como curvas abiertas.

En el caso covariante, presentamos en la Subsec. 4.3.1, siguiendo [8], las fórmulas básicas (4.64)-(4.66) que definen los intervalos y geodésicas asociadas con una curva tipo espacio arbitraria (abierta o cerrada) en el bulto. La correspondiente entropía diferencial más una función de frontera está dada en (4.79), la cual reproduce la longitud de la curva A .

El problema principal abordado en esta tesis se encuentra en la Subsec. 4.3.2, donde mostramos que cualquier segmento de una curva que viola la condición (4.80) es no reconstruible, en el sentido de que las geodésicas tangentes a ella tienen al menos un extremo fuera de la cuña de Poincaré, y consecuentemente no están asociadas con entropías de entrelazamiento en la CFT. En la Subsec. 4.3.3 descubrimos que este reto puede ser superado haciendo uso de una variante de la hoyo-grafía formulada previamente en [8], donde uno tiene permitido disparar desde cada punto sobre la curva una geodésica dirigida en una dirección que difiere de la tangente por un vector nulo que satisface (4.83). Entonces, llegamos a nuestro resultado principal: el enunciado de que, *contrario a las apariencias, la hoyo-grafía puede reconstruir exitosamente cualquier curva tipo espacio abierta o cerrada contenida en Poincaré AdS₃, en términos de entropía diferencial en la CFT₂ definida en el espacio-tiempo de Minkowski.*

En la Subsec. 4.3.4 estudiamos otra vez el límite donde el tamaño de la curva se anula, enfatizando que hay un número infinito de maneras distintas de representar cualquier punto dado en términos de una familia de intervalos en la CFT. Como se expresa en la Ec. (4.92) y se ejemplifica en la Fig. 4.11, hay una familia por cada elección distinta del camino trazado por el centro de los intervalos (o equivalentemente, el camino trazado por cualesquiera de los extremos de los intervalos). Generalizando los resultados de la Subsec. 4.2.4, obtenemos una acción covariante cuya extremización nos conduce a cualesquiera de estas familias asociadas a un punto. En el lado de gravedad está basada en la curvatura normal de la curva en el bulto, y en las variables de la CFT toma la forma (4.101). Finalmente, en la Subsec. 4.3.5, mostramos que dados dos puntos en el bulto, la libertad de elegir una familia representativa de la clase de equivalencia asociada a cada punto nos permite calcular la distancia entre el

par, imitando así el procedimiento a tiempo constante de la Subsec. 4.2.5.

4.2. Hoyo-grafía a tiempo de Poincaré constante

4.2.1. Curvas cerradas

Trabajando en el contexto de la correspondencia $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$, hemos definido en capítulos anteriores las coordenadas de Poincaré, (3.25), y globales, (3.35), así como la transformación de coordenadas entre ellas (3.37).

Dada una curva $R(\theta)$ a tiempo fijo T (que implica τ fijo) en AdS global, la familia asociada de geodésicas tangentes, o equivalentemente, intervalos en la CFT, puede ser clasificada como $\alpha(\theta_c)$, donde θ_c es la localización angular del centro del intervalo a lo largo de la dirección espacial \mathbb{S}^1 , y α es el ángulo medio de apertura. Estas están dadas por [20]

$$\begin{aligned} \tan(\theta - \theta_c) &= \frac{L^2}{L^2 + R^2} \frac{d \ln R}{d\theta}, \\ \tan \alpha &= \frac{L}{R} \sqrt{1 + \frac{L^2}{L^2 + R^2} \left(\frac{d \ln R}{d\theta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Los puntos finales de estas geodésicas/intervalos están localizadas en $\theta_{\pm} := \theta_c \pm \alpha$.

Como explicamos en la Motivación, si para empezar nos concentramos en la rebanada a $\tau = 0$, estamos seguros que estas mismas geodésicas cubrirán completamente la curva en el bulto después de traducir a la rebanada de Poincaré a tiempo $t = 0$. Podemos determinarlas utilizando (3.37) para mapear los dos ángulos θ_{\pm} al eje x . La localización de los puntos finales correspondientes a θ_{\pm} estará denotada por x_{\pm} . A la mitad de estos puntos se encuentran el centro del intervalo,

$$x_c := \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad (4.2)$$

y su radio

$$\ell := \frac{x_+ - x_-}{2}. \quad (4.3)$$

Denotaremos por x_{θ} a la traducción directa del centro angular θ_c , el cual servirá entonces como parámetro que etiquete nuestros intervalos. Conforme θ_c corre alrededor del círculo \mathbb{S}^1 de la CFT definida en la frontera del cilindro, x_{θ} correrá sobre todo el eje espacial de la CFT definida en Minkowski. En general, esperamos que $x_{\theta} \neq x_c$.

Nuestra familia de geodésicas estaba parametrizada con un sólo parámetro θ_c en la configuración global, así que después de traducir a Poincaré, podemos parametrizarla naturalmente con x_{θ} . La geodésica para cada valor de x_{θ} puede ser descrita con el par (x_-, x_+) , o equivalentemente, con (x_c, ℓ) . La última descripción es algunas veces más conveniente. Y en lugar de reportar nuestras geodésicas en la forma paramétrica, $(x_c(x_{\theta}), \ell(x_{\theta}))$, podemos eliminar x_{θ} para obtener $\ell(x_c)$, la cual es ciertamente más

intuitiva, y el análogo directo de la expresión global reportada en [20] en la forma $\alpha(\theta_c)$.

Consideremos primero el caso más simple de una curva cerrada en el bulto: un círculo que en coordenadas globales está centrado en el origen, $R = \text{constante}$. Se sigue inmediatamente de (4.1) que la familia de geodésicas tangentes al círculo es simplemente $\theta_c = \theta$, $\tan \alpha = L/R$. Usando (3.37) a $\tau = 0$, podemos ver que la curva resultante en Poincaré es también un círculo,

$$x^2 + \left(z - \sqrt{L^2 + R^2}\right)^2 = R^2. \quad (4.4)$$

Con la ecuación de enmedio en (3.37) evaluada en $\varrho = \pi/2$, podemos también traducir los parámetros de la geodésica θ, θ_{\pm} . El resultado toma la forma

$$x_{\pm} = \frac{2x_{\theta}L^2\sqrt{L^2 + R^2} \pm L^2(L^2 + x_{\theta}^2)}{L^2(\sqrt{L^2 + R^2} + R) - x_{\theta}^2(\sqrt{L^2 + R^2} - R)}. \quad (4.5)$$

Una muestra representativa de estas geodésicas está graficada en la Fig. 4.2. Como

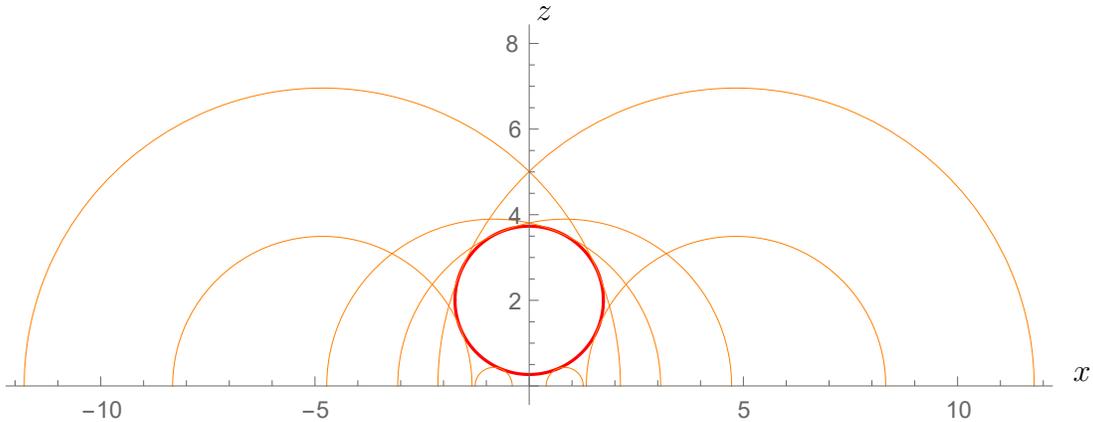


Figura 4.2: El círculo (4.4) en Poincaré AdS a tiempo $t = 0$, con algunas de sus geodésicas tangentes, según (4.5). En esta y todas las gráficas subsecuentes, fijamos $L = 1$. Hemos elegido al círculo centrado en $(x, z) = (0, 2)$, lo que significa que el radio del círculo (tanto en coordenadas globales como de Poincaré) es $R = \sqrt{3}$.

era de esperar, encontramos una geodésica tangente para cada punto sobre el círculo. Pero hay una novedad importante: el denominador en (4.5) se anula en los puntos $x = \pm x_{\infty}$, con

$$x_{\infty} := R + \sqrt{L^2 + R^2}. \quad (4.6)$$

En cada una de estas ubicaciones, uno de los puntos finales cambia de signo. Para $x_{\theta} \in (-x_{\infty}, x_{\infty})$ tenemos el orden esperado $x_- < x_+$, pero para otros valores de x_{θ} los puntos finales se intercambian: conforme x_{θ} incrementa más allá de x_{∞} , el valor de x_+ cruza de $x \rightarrow \infty$ a $x \rightarrow -\infty$, mientras que en $x_{\theta} = -x_{\infty}$, x_- cruza en la dirección opuesta. El hecho de que el intervalo radial (4.9) diverge en estos puntos de cruce implica que la geodésica correspondiente se vuelve vertical, y lo mismo es cierto

entonces para la propia curva, i.e., $\partial_x z \rightarrow \pm\infty$. En estos puntos, $x(x_\theta)$ comienza a retroceder, conforme pasamos de la mitad inferior a la superior del círculo, o viceversa. Este comportamiento se puede apreciar en la Fig. 4.3, donde graficamos los puntos finales (4.5).

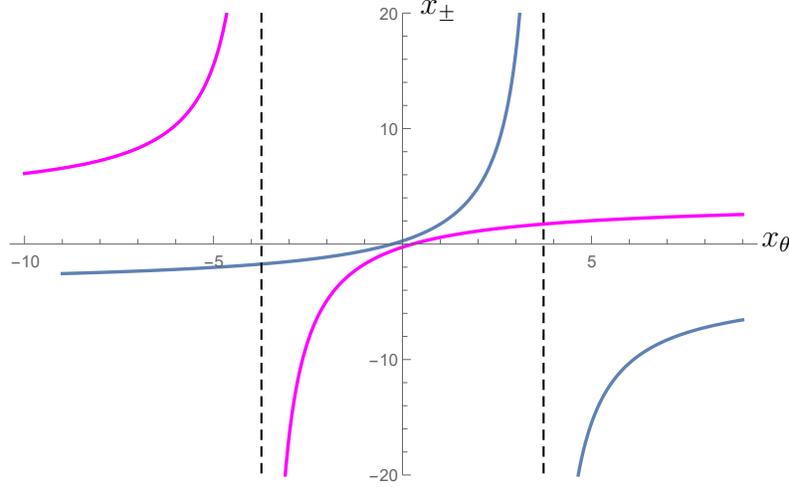


Figura 4.3: La curva azul (morada) muestra el punto final x_+ (x_-) de las geodésicas, dado por (4.5), para el mismo ejemplo que en la Fig. 4.2. Las ubicaciones donde uno de los puntos finales cambia de signo al cruzar a través de infinito, $x_\theta = \pm x_\infty$, son claramente visibles. Es solo la región en medio de la gráfica, $(-x_\infty, x_\infty)$, que los puntos finales están en el orden canónico $x_- < x_+$.

La principal lección aquí es que, el parámetro x_θ corre de $-\infty$ a ∞ , el punto medio del intervalo x_c cubre el mismo rango *dos* veces: una vez para geodésicas tangentes a la parte baja de nuestra curva, la cual tiene $\ell > 0$, y la segunda vez para geodésicas tangentes a la parte superior, que tiene $\ell < 0$ a causa de tener sus puntos finales invertidos.

Esta misma lección aplica en general. Consideremos una curva cerrada arbitraria en el bulto (a tiempo constante t), descrita por $(x(\lambda), z(\lambda))$, con λ algún parámetro sin especificar. Dado que la curva es cerrada, la función $x(\lambda)$ debe ser no monotónica, y podemos encontrar al menos dos valores de λ donde $x' := \partial_\lambda x$ cambia de signo al cruzar cero. En estos puntos, la curva del bulto se vuelve vertical, y el radio y uno de los puntos finales de la correspondiente geodésica va a $\pm\infty$. Lo mismo ocurriría en puntos donde x' se anule sin cambiar de signo. Los $N \geq 2$ puntos donde la curva cerrada es vertical ($x' = 0$) separan a la curva en N segmentos consecutivos. Algunos ejemplos se muestran en la Fig. 4.4. Exigiremos, sin pérdida de generalidad, que el signo del parámetro λ se elija de tal manera que el punto sobre la curva que está más cerca de la frontera de AdS esté en el segmento donde $x' > 0$. Etiquetamos este segmento como $n = 1$, y numeramos los segmentos restantes consecutivamente según aumenta λ . Los bordes del segmento n -ésimo estarán denotados naturalmente por $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. Como en el caso del círculo (donde tenemos $N = 2$), cada segmento conexo estará asociado con una familia de geodésicas tangentes cuyos centros x_c corren

sobre todo el eje x . El signo de x' puede o no cambiar cuando nos movamos de un segmento al siguiente. Nos referiremos a aquellos segmentos donde $x' > 0$ ($x' < 0$) como “positivos” (“negativos”).

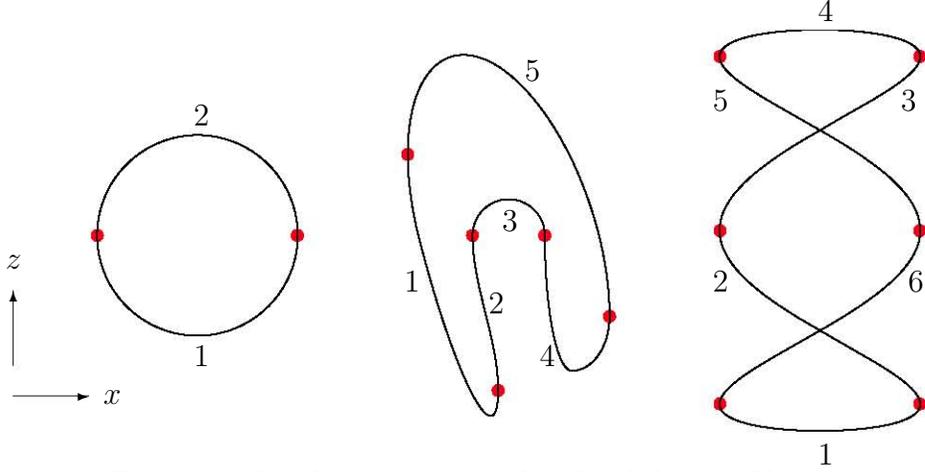


Figura 4.4: Tres ejemplos de curvas cerradas divididas en N segmentos (numerados $n = 1, \dots, N$) en los puntos (indicados en rojo) donde la curva se vuelve vertical ($x' = 0$), implicando que la correspondiente geodésica tangente tiene un punto final en infinito. A través de (4.7), el signo de x' sobre cada segmento determina si las geodésicas tienen sus puntos finales en el orden canónico ($x_- < x_+$) o no. El círculo ya ha sido discutido anteriormente y dibujado en la Fig. 4.2. La segunda curva ilustra el hecho de que N puede ser impar porque x' no cambia necesariamente de signo al ir de un segmento a otro (los segmentos $n = 3, 4$ son positivos). El tercer ejemplo ilustra el hecho de que la curva puede intersectarse a sí misma.

Al traducir los resultados de AdS global de [20], o calculando en Poincaré AdS [8], encontramos que las geodésicas tangentes a nuestra curva tiene los puntos finales en

$$x_{\pm}(\lambda) = x(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)}{x'(\lambda)} \pm \frac{z(\lambda)}{x'(\lambda)} \sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2}. \quad (4.7)$$

Equivalentemente, tienen punto medio

$$x_c(\lambda) = x(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)}{x'(\lambda)}, \quad (4.8)$$

y radio

$$\ell(\lambda) = \frac{z(\lambda)}{x'(\lambda)} \sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2}. \quad (4.9)$$

Hemos elegido el signo del segundo denominador en (4.7) de tal manera que los segmentos positivos de la curva ($x' > 0$) estén asociados con intervalos cuyos puntos finales estén en el orden canónico, $x_- < x_+$, mientras que las partes negativas ($x' < 0$) corresponden a intervalos con los extremos invertidos, $x_- > x_+$. A través de (4.9), esto significa que la designación como positiva o negativa, originalmente referida a un

atributo de la curva en el bulto, también caracteriza el signo de ℓ para la correspondiente familia de intervalos en la CFT. Otra vez, el problema principal aquí es que, para envolver completamente nuestra curva cerrada, necesitamos no una sino $N \geq 2$ familias de intervalos cuyos puntos medios x_c corran sobre todo el eje x .

Alternativamente, podemos pensar en esto como descomponer la curva cerrada en N curvas *abiertas* $z_n(x)$ ($n = 1, \dots, N$), las cuales se unen en los lugares donde la pendiente $\partial z / \partial x$ diverge. Pero si adoptamos esta perspectiva, la pregunta no trivial es si la información de todas las N familias de geodésicas puede ser combinada para obtener una descripción hoyo-gráfica para toda la curva cerrada, dado que sabemos de [20] que para obtener la longitud de curvas abiertas necesitamos añadir un término de superficie a la fórmula de entropía diferencial. Abordaremos esta pregunta explícitamente en la Subsec. 4.2.3.

Notemos que (4.8) implica que $x'_c = (1 + (\partial_x z)^2 + z \partial_x^2 z) x'$. Esto muestra que el centro $x_c(\lambda)$ puede retroceder si $x' < 0$, lo cual ocurre en los segmentos negativos que hemos discutido aquí, o si la curva es suficientemente cóncava, $\partial_x^2 z < -(1 + (\partial_x z)^2)/z$. La última posibilidad ha sido señalada en [7, 8, 20].

Para uso futuro, notemos que (4.8) y (4.9) pueden ser invertidas [8] para dar la curva en el bulto en términos de datos de la frontera,

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= x_c(\lambda) - \frac{\ell(\lambda)\ell'(\lambda)}{x'_c(\lambda)}, \\ z(\lambda) &= \sqrt{\ell^2(\lambda) \left(1 - \frac{\ell'^2(\lambda)}{x'^2_c(\lambda)}\right)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como un chequeo adicional, estas mismas relaciones pueden ser obtenidas tomando el límite de masa cero $R_+ \rightarrow 0$ de las expresiones obtenidas para el agujero negro estático BTZ [40] en las Eqs. (89)-(90) de [20]. En este límite, la métrica BTZ se reduce a Poincaré AdS con $x \simeq x + L$.

4.2.2. Entropía diferencial y la longitud de curvas cerradas

Utilizaremos la definición de entropía diferencial (3.46)

$$E = \int d\lambda \left. \frac{\partial S(x_L(\lambda), x_R(\bar{\lambda}))}{\partial \bar{\lambda}} \right|_{\bar{\lambda}=\lambda}, \quad (4.11)$$

x_L y x_R son los puntos finales izquierdo y derecho¹ ($x_L \leq x_R$) de una familia de intervalos parametrizada por un parámetro arbitrario λ , y S es la correspondiente entropía de entrelazamiento. La definición (4.11) trata a los puntos finales de manera distinta, pero como explican en [8] (y repasamos en el capítulo anterior), integrando por partes podemos intercambiar el rol de x_R y x_L . Las dos definiciones alternativas difieren por un término de frontera, que puede ser despreciado para el tipo de curvas

¹Notemos que $x_L = x_-$ y $x_R = x_+$ solo si $\ell > 0$. Regresaremos a este punto más abajo.

consideradas en [8], pero que será importante para nuestro análisis de curvas abiertas en la Subsec. 4.2.3.

Por conveniencia, desde este punto en adelante reescalaremos la entropía de entrelazamiento por un factor de $4G_N$. Para intervalos a tiempo fijo, la entropía de entrelazamiento es (3.23)

$$S(x_L, x_R) = 2L \ln \left(\frac{x_R - x_L}{\epsilon} \right) , \quad (4.12)$$

donde ϵ es un corte UV^2 .

En el contexto de entropía de entrelazamiento, los autores de [7] fueron los primeros en estudiar curvas en Poincaré AdS₃ a tiempo constante. (Su análisis aplica también para superficies de codimensión dos en Poincaré AdS _{$d+1$} con simetría planar, i.e., invariante bajo traslaciones en las $d - 2$ coordenadas x^i). Ellos restringieron su atención a curvas que se extienden infinitamente a lo largo de la dirección x , y más aún, impusieron condiciones de periodicidad en $x \rightarrow \pm\infty$. Bajo estas condiciones, ellos mostraron que la entropía diferencial (4.11) para la familia de intervalos tangentes a la curva (superficie) reproduce correctamente su longitud (área).

Mostraremos ahora que lo mismo es cierto para las curvas cerradas $(x(\lambda), z(\lambda))$ que consideramos en la subsección previa. Su longitud está dada por

$$A = \int d\lambda \sqrt{\gamma_{\lambda\lambda}} = \int d\lambda \frac{L}{z} \sqrt{x'^2 + z'^2} , \quad (4.13)$$

donde γ es la métrica inducida. Queremos checar que esta coincide con la entropía diferencial asociada a la curva. Las correspondientes geodésicas/intervalos tienen puntos finales localizados en (4.7). Nuestra discusión se enfoca en el caso $N = 2$ (la curva cerrada tiene sólo un segmento positivo y uno negativo), pero la extensión a $N > 2$ es inmediata.

Para la parte positiva de la curva ($x' > 0$), el hecho de que $\ell > 0$ significa que los puntos finales izquierdo y derecho son $x_L = x_-$ y $x_R = x_+$. Usando (4.12), (4.11) se convierte en

$$E = L \int d\lambda \frac{x'_+}{\ell} . \quad (4.14)$$

Para la parte negativa, $\ell < 0$ y entonces los puntos finales se invierten. Por ello, si queremos utilizar (4.11) tal como está, obtendríamos un signo menos adicional, y no seríamos capaces de obtener directamente la longitud de la curva. Pero, por continuidad de la familia de intervalos (crucial para la utilidad de la entropía diferencial, y se ve más claramente refiriéndose al caso AdS global), la prescripción correcta es

²Por comparación, en el caso de AdS global, donde la teoría dual vive en el cilindro, la entropía de entrelazamiento es (ver, e.g., [20])

$$S(\theta_+, \theta_-) = 2L \ln [\sin((\theta_+ - \theta_-)/2\delta)] .$$

Como explicamos en la Motivación, esta ecuación y (4.12) no se mapean la una en la otra por una mera transformación de coordenadas.

partir de una lectura literal de (4.11), y continuar tratando a x_+ como el punto final *derecho* del intervalo. Esto asegura la cancelación correcta de geodésicas finales en la familia positiva con las iniciales en la negativa. Por supuesto, para que el logaritmo en (4.12) sea real, necesitamos utilizar $|x_+ - x_-|$ como su argumento. Esto nos lleva nuevamente a (4.14), así que esta sola expresión aplica para toda la curva cerrada. La periodicidad garantiza entonces, al igual que para las curvas infinitas consideradas en [7], que los términos de superficie puedan ser ignorados.

Veamos explícitamente la relación entre entropía diferencial y la longitud. Usando (4.7) y (4.9), la expresión (4.14) toma la forma

$$\begin{aligned} E &= \oint d\lambda \left\{ \frac{L}{z} \sqrt{x'^2 + z'^2} + L \left[\frac{\ell'}{\ell} + \frac{z''}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} - \frac{z'x''}{x'\sqrt{x'^2 + z'^2}} \right] \right\} \\ &= A + L \oint d\lambda \partial_\lambda \left[\ln \left(\frac{2|\ell|}{\epsilon} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{z'}{|x'|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En la segunda línea hemos reconocido que el primer término reproduce precisamente la longitud (4.13), mientras que los otros forman una derivada total, y no contribuyen. Dentro del logaritmo, hemos elegido un valor particular para la constante de integración en términos del corte UV, ϵ . Esta elección será útil en la siguiente subsección.

4.2.3. Términos de frontera y la longitud de curvas abiertas

Ahora pasamos a considerar (aún a $t = 0$) una curva *abierta* arbitraria $(x(\lambda), z(\lambda))$. Puede o no tener puntos donde $z'/x' \rightarrow \pm\infty$, separando N segmentos como discutimos para curvas cerradas (pero ahora con $N \geq 1$). El análisis de la subsección anterior establece directamente la relación entre su longitud A y la entropía diferencial E para su familia de intervalos asociados. Esta relación está dada nuevamente por (4.15), con la única diferencia de que la integral se extiende ahora sobre un rango finito,

$$\begin{aligned} A &= E - L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \left[\frac{\ell'}{\ell} + \frac{z''}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} - \frac{z'x''}{x'\sqrt{x'^2 + z'^2}} \right] \\ &= E - f(\lambda_f) + f(\lambda_i). \end{aligned} \quad (4.16)$$

En la segunda línea hemos definido

$$f(\lambda) := L \ln \left(\frac{2|\ell|}{\epsilon} \right) + L \sinh^{-1} \left(\frac{z'}{|x'|} \right), \quad (4.17)$$

a la contribución de frontera (ahora distinta de cero en general).

Tratemos de ganar un poco de comprensión acerca de la forma de (4.17). Los autores de [20] mostraron que, cuando consideramos una curva *abierta* en coordenadas globales, $R(\theta)$, con θ corriendo de θ_i a θ_f , la entropía diferencial E no reproduce directamente la longitud A . Los dos integrandos difieren por una derivada total. Para coincidir, debemos añadir a E un término de superficie $f(\theta_f) - f(\theta_i)$, con

$$f(\theta) = 2L \ln \left[\frac{\sin(\alpha + (\theta - \theta_c))}{\sin(\alpha - (\theta - \theta_c))} \right] = 2L \ln \left[\frac{\sin(\theta - \theta_-)}{\sin(\theta_+ - \theta)} \right], \quad (4.18)$$

donde α y θ_c están evaluadas en los valores correspondientes al ángulo en el bulto. (Alternativamente, f puede ser expresada como una función del ángulo en la frontera θ_c). Arriba de su Ec. (12), los autores de [20] explican el significado geométrico de $f(\theta)$: es la longitud del arco de geodésica (θ_c, α) que está contenido en la cuña angular entre θ_c y θ . Explícitamente, esta geodésica está descrita por

$$\tan^2(\theta_g - \theta_c) = \frac{R_g^2 \tan^2 \alpha - L^2}{R_g^2 + L^2}, \quad (4.19)$$

y podemos checar que la longitud en el rango de interés

$$\int_{\theta_c}^{\theta} d\theta_g \sqrt{R_g^2 + \left(1 + \frac{R_g^2}{L^2}\right)^{-1} \left(\frac{dR_g}{d\theta_g}\right)^2}, \quad (4.20)$$

coincide con (4.18).

A *priori*, no es obvio si se puede dar una interpretación similar a la función de frontera en Poincaré (4.17), porque la entropía de entrelazamiento no permanece invariante cuando mapeamos de coordenadas globales a Poincaré AdS. En particular, la condición $\theta = \theta_c$, que anula la función (4.18), no se traduce en $x = x_c$ ó $x = x_\theta$.

Volviendo al caso de la curva abierta arbitraria $(x(\lambda), z(\lambda))$. La geodésica tangente a la curva en un punto λ es

$$z_g = \sqrt{\ell^2 - (x_g - x_c)^2}, \quad (4.21)$$

donde el radio ℓ y el centro x_c están dados por (4.8) y (4.9), y están por tanto fijos para este cálculo. La longitud de arco de geodésica que corre de x a x_c es

$$\int_x^{x_c} dx_g \frac{L}{z_g} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_g}{\partial x_g}\right)^2} = -L \tanh^{-1} \left(\frac{x - x_c}{\ell}\right) = -\frac{L}{2} \ln \left(\frac{x - x_-}{x_+ - x}\right). \quad (4.22)$$

Notemos que, en esta última forma, la longitud (4.22) luce algo análoga a la forma final de (4.18), excepto por un signo menos global debido al hecho de que en (4.16) hemos elegido definir nuestra f con el signo opuesto a [20]. Usando (4.7) y la identidad $\sinh^{-1} a = \ln(a + \sqrt{1 + a^2})$, esta expresión puede reescribirse como

$$\int_x^{x_c} dx_g \frac{L}{z_g} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_g}{\partial x_g}\right)^2} = L \sinh^{-1} \left(\frac{z'}{|x'|}\right), \quad (4.23)$$

la cual coincide con el segundo término de (4.17).

Este acuerdo nos permite adjudicarle al término (4.23) la interpretación de entrelazamiento desarrollada para AdS global en la Sección 4.5 de [20]. La familia de intervalos/geodésicas asociada con nuestra curva abierta termina en el punto del bulto $(x_f, z_f) := (x(\lambda_f), z(\lambda_f))$. El miembro final de la familia está centrado en $x_{c,f} := x_c(\lambda_f)$, y generalmente $x_f \neq x_{c,f}$. Podemos añadir a la familia el conjunto

de intervalos cuyo centro corre de $x_{c,f}$ a x_f , con radios ℓ elegidos de tal manera que las geodésicas correspondientes pasen a través de (x_f, z_f) , lo que significa que esta adición no alarga la curva. (Los intervalos añadidos pertenecen a la familia de la “curva-punto” (x_f, z_f) , como quedará claro en la siguiente subsección). Después de la adición, ya no queda ningún arco en (4.22) que contribuya, lo que significa que el segundo término en (4.17), evaluado en λ_f , representa la entropía diferencial extra debida al conjunto de intervalos añadidos. Lo mismo aplica, por supuesto, para el extremo final opuesto de la curva, λ_i .

Únicamente el logaritmo en (4.17) queda por ser interpretado. Comparando con (4.12), vemos que este término es la mitad de la entropía de entrelazamiento del intervalo en λ_f (o λ_i). Concluimos entonces que la fórmula (4.16) para la longitud de nuestra curva abierta admite una interpretación basada en entrelazamiento de la CFT. En la descripción del bulto, la interpretación es muy simple: la función de frontera (4.17) es la longitud de arco de la correspondiente geodésica, calculada desde el borde de nuestra curva, en x , hasta el punto final derecho de la geodésica, x_+ . Con mayor precisión, a la versión regulada de este punto final,

$$x_+^\epsilon \equiv x_+ - \frac{\epsilon^2}{2\ell}, \quad (4.24)$$

donde la geodésica llega al corte UV $z = \epsilon$. Esta interpretación geométrica se ilustra en la Fig. 4.5.

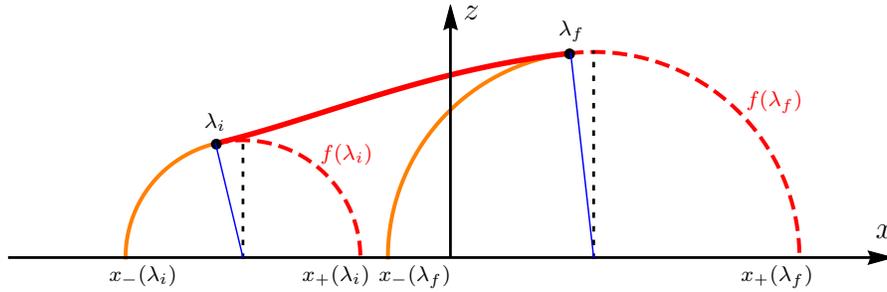


Figura 4.5: Interpretación geométrica del término de frontera en la definición (4.26) de la entropía diferencial renormalizada \mathcal{E} . El valor de f en cada punto final es la longitud de los arcos mostrados en rojo punteado.

Para una curva abierta cuyas geodésicas asociadas cubren todo el eje x , como el semicírculo positivo o negativo que analizamos en la Subsec. 4.2.1, (4.17) es logarítmicamente divergente (porque tanto ℓ y $\partial z/\partial x$ diverge en los puntos finales $\lambda_{i,f}$). En este caso, es más conveniente reexpresar f como la integral sobre λ de una derivada total, de tal manera que puede ser restada directamente del *integrando* E en (4.11), para obtener un resultado finito. Esto nos lleva de vuelta a los términos de derivada

total en la línea superior de (4.15), la cual puede ser rescrita en la forma

$$\begin{aligned} f(\lambda_f) &= L \int^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{\ell'}{\ell} + \frac{z''}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} - \frac{z'x''}{x'\sqrt{x'^2 + z'^2}} \right) \\ &= L \int^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{\ell'}{\ell} + \frac{\ell'x_c'' - \ell''x_c'}{\ell'^2 - x_c'^2} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

En la segunda línea hemos utilizado (4.10) para expresar f puramente en términos de datos de la frontera. Combinando (4.25) con (4.14), podemos definir una entropía diferencial “renormalizada”

$$\mathcal{E}[\ell] := E[\ell] - f(\lambda_f) + f(\lambda_i) = L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{x_c'}{\ell} + \frac{\ell'x_c'' - \ell''x_c'}{x_c'^2 - \ell'^2} \right). \quad (4.26)$$

A partir de nuestro análisis previo, esto reproduce directamente la longitud de una curva abierta arbitraria,

$$A = \mathcal{E}. \quad (4.27)$$

Como ejemplo, consideremos el círculo (4.4), que se muestra en la Fig. 4.2. En el lenguaje de la Subsec. 4.2.1, su mitad inferior es un segmento positivo ($x' > 0$) y está etiquetado por $n = 1$, mientras su mitad superior es un segmento negativo, denotado por $n = 2$. Estos dos semicírculos son curvas abiertas descritas por

$$z_{1,2}(x) = \sqrt{L^2 + R^2} \mp \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (4.28)$$

con x corriendo entre $-R$ y R . Su longitud es

$$A_{1,2} = \pi R \mp 2R \tan^{-1}(R/L). \quad (4.29)$$

Notemos que la longitud de dos semicírculos es distinta, a pesar de que suman la longitud correcta, $A = 2\pi R$. Esto se debe a la dependencia en z de la métrica. Usando (4.26), encontramos

$$\mathcal{E}_{1,2} = \pm A_{1,2}. \quad (4.30)$$

La inversión de signo para el semicírculo negativo es la esperada de la convención adoptada en la subsección previa y no se implementó al escribir (4.29): para un segmento negativo, λ debe correr en la dirección en que x decrece. Es con esta orientación que el círculo completo se traza con el parámetro original θ ó x_θ . De hecho, si tomamos este signo en cuenta, encontramos que al combinar los dos semicírculos la contribución de la función de frontera se cancela, y tenemos

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = E_1 - E_2 = A_1 + A_2 = A. \quad (4.31)$$

4.2.4. Puntos

Ahora que tenemos una fórmula que calcula longitudes de curvas arbitrarias cerradas o abiertas en el bulto en términos de entropías de entrelazamiento en la frontera,

podemos encoger estas curvas como en [20], para obtener puntos. Para describir un punto dado, tenemos dos opciones. Una es comenzar con una curva cerrada, la cual, por simplicidad, consideraremos que tiene un segmento positivo y uno negativo (e.g., un semicírculo). Las curvas cerradas tienen la ventaja de no necesitar términos de frontera, pero requieren una familia de intervalos/geodésicas que cubra el eje x al menos dos veces. La otra opción es empezar con una curva abierta (positiva o negativa) cuya pendiente $\partial z/\partial x$ diverge en los bordes, de tal manera que (vía (4.8) y (4.9)) los intervalos correspondientes cubren completamente el eje³ x . En este caso no tendríamos que lidiar con el doble valor de x_c , pero el precio que pagamos es que debemos incluir la contribución de frontera (4.17).

En cualquier caso, al encoger el tamaño de la curva a cero, obtenemos la familia de intervalos $(x_c(\lambda), \ell(\lambda))$ (equivalentemente, $x_{\pm}(\lambda)$) cuyas geodésicas asociadas pasan a través del punto deseado (x, z) . Estos intervalos pueden ser determinados directamente de (4.21),

$$\ell = \pm\sqrt{(x - x_c)^2 + z^2}, \quad (4.32)$$

donde la familia con el signo superior (inferior) se requiere para describir una “curva-punto” abierta positiva (negativa), y ambas familias se requieren para formar una curva-punto cerrada. Si quisiéramos, podríamos tomar por convención el signo positivo siempre en (4.32), que equivaldría a cambiar nuestra notación a insistir tener siempre $x_+ \geq x_-$. Pero cuando pongamos juntos los segmentos positivos y negativos para reconstruir una curva-punto cerrada, aún necesitaríamos utilizar los signos apropiados. La ecuación (4.32) se puede reescribir en términos de los extremos de los intervalos como

$$(x_+ - x)(x - x_-) = z^2. \quad (4.33)$$

Es interesante preguntar cuál es la propiedad especial que permite al conjunto particular de intervalos en la CFT $\ell(x_c)$ en (4.32) ser indentificado como aquel que describe un punto en el bulto de AdS. Esto es importante si pretendemos la reconstrucción del bulto comenzando solo de la frontera. Tomando la primer y segunda derivada en (4.32), podemos ver que nuestras curvas-punto son soluciones a la ecuación de movimiento

$$\ell\ell'' + \ell'^2 - 1 = 0. \quad (4.34)$$

Este es entonces el análogo de la ecuación (21) en [20]. Como se explica ahí, es natural obtener una ecuación diferencial de segundo orden, ya que debe haber dos constantes de integración, asociadas con las coordenadas del punto, (x, z) . Incidentalmente, nos podemos preguntar porqué, para especificar un punto, estamos utilizando una familia infinita de geodésicas que pasan a través de él, cuando debería ser suficiente con especificar solo *dos* de dichas geodésicas para localizar el punto donde se intersectan. De hecho, dadas dos geodésicas que se intersectan (equivalentemente, dos intervalos que se traslapan en la CFT), sabemos los radios evaluados en los puntos medios,

³Si por el contrario empezáramos con una curva abierta cuya pendiente es no divergente en los puntos finales, entonces el rango x cubierto por los intervalos correspondientes sería finito, y cuando encojamos la curva terminaríamos con nada.

$\ell(x_{c,1})$ y $\ell(x_{c,2})$, y estos dos datos determinan una única solución a (4.34), i.e., una única familia que cubre el eje espacial completo e incluye ambas geodésicas con las que iniciamos. Lo que ganamos al pensar en la familia entera en lugar del par original es que podemos analizar la curva-punto en paralelo con cualquier otra curva en el bulto, y en particular verificar que tiene longitud nula al calcular su entropía diferencial.

Siguiendo [20], esperamos que la ecuación de movimiento (4.34) se siga de un principio de mínima acción basado en extremizar la curvatura extrínseca de curvas cerradas. La idea es la siguiente: en espacios-tiempo con curvatura negativa, el teorema de Gauss-Bonnet establece que

$$\oint_C d\lambda \sqrt{\gamma} K = 2\pi - \int_{\Sigma} d\Sigma \mathcal{R} \geq 2\pi, \quad (4.35)$$

para cualquier curva cerrada C tal que $C = \partial\Sigma$, donde $d\lambda\sqrt{\gamma}$ es el elemento de longitud a lo largo de la curva, K es la curvatura extrínseca y \mathcal{R} es el escalar de Ricci de la superficie Σ acotada por la curva. Evidentemente, si la curva se encoge a un punto la segunda integral se anula, y la igualdad se satura. Entonces, podemos encontrar puntos en el bulto al extremizar el lado izquierdo de (4.35).

La curvatura extrínseca se calcula a partir de

$$K_{mn} = \frac{1}{2} (n^p \partial_p g_{mn} + g_{pn} \partial_m n^p + g_{pm} \partial_n n^p), \quad (4.36)$$

donde n_m es el vector normal unitario y $\gamma_{mn} = g_{mn} + n_m n_n$ es la métrica inducida sobre la curva. La curvatura extrínseca escalar se calcula contrayendo K_{mn} con γ^{mn} .

Para una curva cerrada arbitraria (independiente del tiempo), nuestra acción propuesta es $I := \int d\lambda \mathcal{L}$, con Lagrangiano $\mathcal{L} := \sqrt{\gamma} K$, y toma la forma

$$I = \int d\lambda \frac{x'(\lambda)^3 - z(\lambda)z'(\lambda)x''(\lambda) + x'(\lambda)(z'(\lambda)^2 + z(\lambda)z''(\lambda))}{z(\lambda)(x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2)}. \quad (4.37)$$

Como podemos ver, esta acción contiene derivadas de segundo orden. Sin embargo, las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z''} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{d\lambda^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad (4.38)$$

se simplifican drásticamente, dando como resultado $x'(\lambda) = 0$ y $z'(\lambda) = 0$, respectivamente. La solución define el punto en el bulto (x, z) , el cual sirve como chequeo de consistencia de la funcional (4.37).

En términos de datos de la frontera, podemos reescribir (4.37) como

$$I = 2 \int d\lambda \frac{\sqrt{x'_+(\lambda)x'_-(\lambda)}}{x_+(\lambda) - x_-(\lambda)} = \int d\lambda \frac{\sqrt{x'_c(\lambda)^2 - \ell'(\lambda)^2}}{\ell(\lambda)}. \quad (4.39)$$

En la segunda forma, el Lagrangiano es independiente de x_c , así que existe un momento conservado,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_c} = \frac{x'_c}{\ell \sqrt{x_c'^2 - \ell'^2}} = \Pi. \quad (4.40)$$

Resolviendo para $x'_c(\lambda)$,

$$x'_c(\lambda) = \pm \frac{\Pi \ell(\lambda) \ell'(\lambda)}{\sqrt{\Pi^2 \ell(\lambda)^2 - 1}}, \quad (4.41)$$

y sustituyendo de vuelta en (4.39) obtenemos

$$I = \int \frac{d\lambda}{\ell(\lambda)} \sqrt{\frac{\ell'(\lambda)^2}{\Pi^2 \ell(\lambda)^2 - 1}}. \quad (4.42)$$

La ecuación para ℓ derivada de (4.42) se satisface trivialmente, así que podemos concentrarnos únicamente en (4.41). Podemos deshacernos de λ al escribir (4.41) como

$$\frac{dx_c}{d\ell} = \pm \frac{\Pi \ell}{\sqrt{\Pi^2 \ell^2 - 1}}, \quad (4.43)$$

la cual tiene por solución

$$x_c = \pm \sqrt{\ell^2 - \Pi^{-2}} + \zeta. \quad (4.44)$$

Si identificamos las constantes de integración como $\Pi = z^{-1}$ y $\zeta = x$ recuperamos la ecuación (4.32). Consistentemente con esto, si en (4.39) tomamos $\lambda = x_c$ y extremizamos, recuperamos la ecuación de movimiento (4.34).

4.2.5. Distancias

Ahora estudiaremos como calcular la distancia entre dos puntos en el bulto P y Q , en términos de entropía diferencial. Sea P el punto con coordenadas (x_P, z_P) , y similarmente para Q . En esta subsección elegimos la parametrización específica $\lambda = x_c$, y por tanto denotamos la familia de intervalos en la CFT duales a nuestros puntos por $\ell_P(x_c)$ y $\ell_Q(x_c)$. Para ser concretos, tomaremos a Q a la derecha de P , $x_Q \geq x_P$. La geodésica que conecta los dos puntos, que denotaremos por \overline{PQ} , está centrada en el punto M de la frontera que equidista de ambos puntos, en el sentido de que $\ell_P(x_M) = \ell_Q(x_M)$. La configuración se ilustra en Fig. 4.6. Explícitamente,

$$x_M = \frac{x_Q + x_P}{2} + \frac{z_Q^2 - z_P^2}{2(x_Q - x_P)}, \quad (4.45)$$

y el radio de \overline{PQ} es

$$\ell_M = \frac{1}{2} \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + 2(z_P^2 + z_Q^2) + \frac{(z_P^2 - z_Q^2)^2}{(x_P - x_Q)^2}}. \quad (4.46)$$

La distancia entre P y Q está dada por la longitud de arco a lo largo de esta geodésica. Usando (4.21), esta puede reescribirse como

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \int_{x_P}^{x_Q} dx_g \frac{L}{z_g} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_g}{\partial x_g} \right)^2} \\ &= \frac{L}{2} \left(\ln \left(\frac{x_Q - x_{\overline{PQ}_-}}{x_{\overline{PQ}_+} - x_Q} \right) - \ln \left(\frac{x_P - x_{\overline{PQ}_-}}{x_{\overline{PQ}_+} - x_P} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $z_g(x)$ es la parametrización de \overline{PQ} , y $x_{\overline{PQ}\pm} := x_M \pm \ell_M$ se refiere a los puntos finales izquierdo/derecho (en la frontera de AdS) de la geodésica. La ecuación (4.22), que utilizamos en nuestro análisis de la función de frontera f , es un caso especial de (4.47), con $x_P = x_c$ y $x_Q = x$.

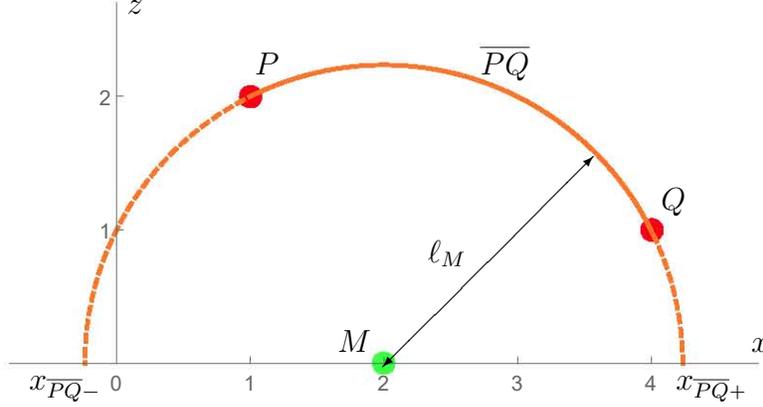


Figura 4.6: Configuración discutida en el texto principal, con dos puntos en el bulto P y Q , en rojo, y la geodésica \overline{PQ} que va a través de ellos, en naranja. El centro de esta geodésica está en M , en verde, su radio se denota por ℓ_M , y sus extremos izquierdo y derecho están etiquetados por $x_{\overline{PQ}\pm}$. La longitud propia del arco que va de P a Q (naranja sólido) define la distancia $d(P, Q)$, dada explícitamente en (4.47).

La expresión (4.47) es lo que queremos reproducir usando entropía diferencial. Notemos que esta fórmula calcula la longitud *signada* entre los puntos, y satisface $d(P, Q) = -d(Q, P)$. Notemos de pasada que de la ecuación (4.33) sabemos que

$$(x - x_{\overline{PQ}-})(x_{\overline{PQ}+} - x) = z^2, \quad (4.48)$$

para cualquier punto sobre la geodésica centrada en x_M , y usando esto podemos reescribir la distancia entre P y Q en la forma simplificada

$$d(P, Q) = L \ln \left(\frac{x_{\overline{PQ}+} - x_P}{x_{\overline{PQ}+} - x_Q} \right). \quad (4.49)$$

Al definir $\ell_P(x_c)$ y $\ell_Q(x_c)$, si pensamos en cada punto como una curva abierta de longitud nula, entonces tomamos solo un signo en (4.32), y x_c corre sobre el eje real una vez. En este caso las longitudes de curvas están determinadas usando la entropía diferencial “renormalizada” (4.26), la cual incluye la contribución de la función de la frontera (4.17). De la Ec. (4.16), sabemos que para una curva abierta y arbitraria $E = A + f(x_{c,f}) - f(x_{c,i})$, que implica que $E = f(+\infty) - f(-\infty)$ para curvas-punto (las cuales tienen $A = 0$). Adicionalmente, en el párrafo arriba de (4.24) aprendimos que la función de frontera $f(x_c)$ tiene una interpretación geométrica sencilla: como se puede ver en la Fig. 4.5, es la distancia entre el borde de la curva al cual la geodésica es tangente, $(x(x_c), z(x_c))$ y el extremo final regularizado de la geodésica centrada en x_c , (x_c^ϵ, ϵ) .

Dados estos resultados, una estrategia natural se sugiere a sí misma. Para ser capaces de extraer información acerca de la geodésica \overline{PQ} , debemos calcular la entropía diferencial no para la familia completa $\ell_P(x_c)$, sino para su truncación en el rango $x_c \in (-\infty, x_M]$, tal que el intervalo final en la familia es precisamente el asociado con \overline{PQ} . Denotaremos la versión truncada por $\hat{\ell}_P(x_c)$, la cual se anula para $x_c > x_M$. La entropía diferencial correspondiente será denotada con el símbolo, $\hat{E}_P := E[\hat{\ell}_P]$. A partir de lo que explicamos en el párrafo anterior, sabemos que

$$\hat{E}_P = -d(\overline{PQ}^{+\epsilon}, P) - f_P(-\infty) , \quad (4.50)$$

donde $\overline{PQ}^{+\epsilon}$ se refiere al extremo derecho regularizado, localizado en $x_{\overline{PQ}^+}^\epsilon$. Para obtener la distancia $d(P, Q)$, podemos combinar esta entropía con la versión de $\ell_Q(x_c)$ truncada en el rango complementario $x_c \in (x_M, +\infty)$, tal que \overline{PQ} está ahora asociada con el intervalo inicial de la familia. Denotaremos esta truncación por $\check{\ell}_Q(x_c)$. (En esta notación, $\ell_P(x_c) = \hat{\ell}_P(x_c) + \check{\ell}_P(x_c)$, y similarmente para ℓ_Q). La entropía diferencial correspondiente es

$$\check{E}_Q = f_Q(+\infty) + d(\overline{PQ}^{+\epsilon}, Q) . \quad (4.51)$$

Definiendo la familia combinada

$$\ell_{PQ}(x_c) := \hat{\ell}_P(x_c) + \check{\ell}_Q(x_c) , \quad (4.52)$$

encontramos que su entropía diferencial es

$$E[\ell_{PQ}] = \hat{E}_P + \check{E}_Q = d(P, Q) - f_P(-\infty) + f_Q(+\infty) . \quad (4.53)$$

Esta es una fórmula para calcular la distancia deseada entre los dos puntos en términos de la entropía diferencial, salvo por el hecho de que los dos términos f (que también pueden ser expresados como distancias) son divergentes: $f_P(-\infty) = \ln((x_P^2 + z_P^2)/\epsilon^2)$ y $f_Q(+\infty) = \ln(4I^2/\epsilon^2)$, con $\epsilon \rightarrow 0$ e $I \rightarrow \infty$. En el camino hemos llegado en (4.52) a la misma familia combinada $\ell_{PQ}(x_c)$ que fue construida en [20], en la forma alternativa

$$\ell_{PQ}(x_c) := \min(\ell_P(x_c), \ell_Q(x_c)) . \quad (4.54)$$

Para evitar tener que lidiar con divergencias que surgen de la función de frontera (4.17), podemos considerar los puntos P , y Q como curvas *cerradas* muy pequeñas. No hay entonces contribución de f , pero x_c cubrirá el eje real $N \geq 2$ veces. Concretamente, nos concentraremos de ahora en adelante en el caso con $N = 2$. En la terminología y notación de la Subsec. 4.2.1, podemos descomponer este tipo de curva cerrada en un segmento positivo y otro negativo, $\ell_P^{(n)}(x_c)$, con $n = 1, 2$ y $x_c \in (-\infty, \infty)$ en cada segmento. Dado que estamos lidiando con un punto, estas dos son de hecho la mismas familias de intervalos/geodésicas, y difieren sólo en la orientación. Los segmentos positivos y negativos se obtienen eligiendo signos opuestos en (4.32), tal que $\ell_P^{(1)} = -\ell_P^{(2)}$ (similarmente para Q). Para la porción $n = 1$ de las curvas, donde $\ell_P, \ell_Q > 0$, formamos la misma combinación que en (4.52),

$$\ell_{PQ}^{(1)}(x_c) := \hat{\ell}_P^{(1)}(x_c) + \check{\ell}_Q^{(1)}(x_c) . \quad (4.55)$$

Para la porción $n = 2$, donde $\ell_P, \ell_Q < 0$, intercambiamos P y Q ,

$$\ell_{PQ}^{(2)}(x_c) := \hat{\ell}_Q^{(2)}(x_c) + \check{\ell}_P^{(2)}(x_c) . \quad (4.56)$$

Este intercambio es necesario en el cálculo que se muestra a continuación, y es también consistente con la definición (4.54) dada en [20].

Con estas definiciones, la entropía diferencial para la porción positiva ($n = 1$) de la familia combinada (4.55) toma la forma

$$\begin{aligned} E[\ell_{PQ}^{(1)}] &= \hat{E}_P^{(1)} + \check{E}_Q^{(1)} \\ &= L \left(\int_{-\infty}^{x_M} \frac{dx_c}{\hat{\ell}_P^{(1)}(x_c)} \left(1 + \partial_{x_c} \hat{\ell}_P^{(1)}(x_c) \right) + \int_{x_M}^{\infty} \frac{dx_c}{\check{\ell}_Q^{(1)}(x_c)} \left(1 + \partial_{x_c} \check{\ell}_Q^{(1)}(x_c) \right) \right) \\ &= L \left(\ln \left(\frac{x_{PQ+} - x_P}{x_{PQ+} - x_Q} \right) - \ln \left(\frac{x_P^2 + z_P^2}{x_Q^2 + z_Q^2} \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que $\int dx_c/\ell$ para $\ell > 0$ puede ser escrito en la forma

$$\int \frac{1}{\pm \sqrt{(x - x_c)^2 + z^2}} = \ln [\pm(x_c - x) + \ell] , \quad (4.58)$$

con la elección del signo superior. Para extraer el segundo logaritmo en el resultado (4.57), es necesario regularizar el punto final $x_c \rightarrow \pm\infty$ de las integrales con $x_c = \pm 1/\delta$, $\delta \rightarrow 0$ al final.

Para la porción negativa ($n = 2$), la entropía diferencial de la familia combinada (4.56) toma la forma

$$\begin{aligned} E[\ell_{PQ}^{(2)}] &= \hat{E}_Q^{(2)} + \check{E}_P^{(2)} \\ &= L \left(\int_{-\infty}^{x_M} \frac{dx_c}{\hat{\ell}_Q^{(2)}(x_c)} \left(1 + \partial_{x_c} \hat{\ell}_Q^{(2)}(x_c) \right) + \int_{x_M}^{\infty} \frac{dx_c}{\check{\ell}_P^{(2)}(x_c)} \left(1 + \partial_{x_c} \check{\ell}_P^{(2)}(x_c) \right) \right) \\ &= L \left(\int_{-\infty}^{x_M} \frac{dx_c}{-\hat{\ell}_Q^{(1)}(x_c)} \left(1 - \partial_{x_c} \hat{\ell}_Q^{(1)}(x_c) \right) + \int_{x_M}^{\infty} \frac{dx_c}{-\check{\ell}_P^{(1)}(x_c)} \left(1 - \partial_{x_c} \check{\ell}_P^{(1)}(x_c) \right) \right) \\ &= L \left(\ln \left(\frac{x_Q - x_{PQ-}}{x_P - x_{PQ-}} \right) + \ln \left(\frac{x_P^2 + z_P^2}{x_Q^2 + z_Q^2} \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.59)$$

Hemos utilizado (4.58) con la elección inferior de signo. Sumando (4.57) y (4.59), dividiendo entre dos y comparando con la ecuación (4.47), llegamos a

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} E[\ell_{PQ}(x_c)] . \quad (4.60)$$

Esta expresión tiene exactamente la misma forma que la fórmula deducida para AdS global en [20]. Concluimos entonces que podemos calcular distancias en Poincaré AdS utilizando la entropía de entrelazamiento en la CFT, a través de las ecuaciones (4.53) o (4.60).

4.3. Hoyo-grafía covariante

4.3.1. Curvas arbitrarias

Pasando al escenario covariante, consideremos una curva arbitraria tipo espacio en el bulto

$$x^m(\lambda) = (t(\lambda), x(\lambda), z(\lambda)) , \quad (4.61)$$

parametrizada por algún parámetro λ . Para cada valor de λ , hay una geodésica tipo espacio tangente a la curva, con extremos finales en $x_{\pm}^{\mu}(\lambda) := (t_{\pm}(\lambda), x_{\pm}(\lambda))$. Si hacemos un empujón al marco, denominado $*$, donde ambos puntos finales son simultáneos (i.e., $t_+^* = t_-^*$), la geodésica será un semicírculo, centrado en $x_c^{*\mu}$, la versión empujada de

$$x_c^{\mu}(\lambda) := \frac{1}{2} (x_+^{\mu}(\lambda) + x_-^{\mu}(\lambda)) , \quad (4.62)$$

y con radio

$$\ell(\lambda) := \sqrt{\ell^{\mu}\ell_{\mu}} , \quad \ell^{\mu}(\lambda) := \frac{1}{2} (x_+^{\mu}(\lambda) - x_-^{\mu}(\lambda)) . \quad (4.63)$$

Después de empujar de vuelta al marco original, es posible mostrar que la familia entera de geodésicas tangentes toma la forma [8]

$$\begin{aligned} X^m(s, \lambda) = & \left(t(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)t'(\lambda)}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} - \frac{t'(\lambda)\ell(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} \cos s , \right. \\ & \left. x(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)x'(\lambda)}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} - \frac{x'(\lambda)\ell(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} \cos s , \ell(\lambda) \sin s \right) , \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde $0 \leq s \leq \pi$ es un parámetro que corre a lo largo de cada geodésica, y

$$\ell(\lambda) = z(\lambda) \sqrt{1 + \frac{z'(\lambda)^2}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} . \quad (4.65)$$

Los puntos finales de la geodésica $X^{\mu}(\frac{\pi}{2}, \lambda) = x_{\pm}^{\mu}(\lambda) = (t_{\pm}, x_{\pm})$ están dados por

$$\begin{aligned} t_{\pm}(\lambda) &= t(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)t'(\lambda)}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} \pm \frac{t'(\lambda)\ell(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} , \\ x_{\pm}(\lambda) &= x(\lambda) + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)x'(\lambda)}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} \pm \frac{x'(\lambda)\ell(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} . \end{aligned} \quad (4.66)$$

Usando (4.64), podemos checar que, para cualquier valor fijo de λ , todos los puntos sobre la geodésica (dados por todos los valores de s) se encuentran en la versión empujada del semicírculo (4.32),

$$-(t - t_c)^2 + (x - x_c)^2 + z^2 = \ell^2 , \quad (4.67)$$

o equivalentemente, de (4.33),

$$(x_+ - x)^{\mu}(x - x_-)_{\mu} = z^2 . \quad (4.68)$$

Las expresiones (4.65)-(4.66) pueden ser invertidas utilizando las relaciones de frontera-bulto dadas en la Sección 4.4 de [8]. Esto lleva a

$$\begin{aligned} x^\mu(\lambda) &= x_c^\mu(\lambda) - \ell^\mu(\lambda)\chi(\lambda) , \\ z(\lambda) &= \ell(\lambda)\sqrt{1 - \chi(\lambda)^2} , \\ \chi(\lambda) &:= \frac{\ell^x(\lambda)t'_c(\lambda) - \ell^t(\lambda)x'_c(\lambda)}{\ell^x(\lambda)\ell^t(\lambda) - \ell^t(\lambda)\ell^x(\lambda)} . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Como ejemplo concreto, consideremos un círculo con ondulaciones en el tiempo, centrado en $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$, con radio r y amplitud de ondulación a :

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \bar{t} - a \cos n\lambda , \\ x(\lambda) &= \bar{x} - r \cos \lambda , \\ z(\lambda) &= \bar{z} - r \sin \lambda . \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. Para que la curva sea tipo espacio en todos lados, debemos exigir que

$$x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2 = r^2 - a^2 n^2 \sin^2 n\lambda > 0 . \quad (4.71)$$

Esta restricción se satisface para toda $\lambda \in [0, 2\pi)$ siempre que

$$|a| < \frac{r}{|n|} . \quad (4.72)$$

Un ejemplo particular que satisface (4.72) se muestra en la Fig. 4.7.

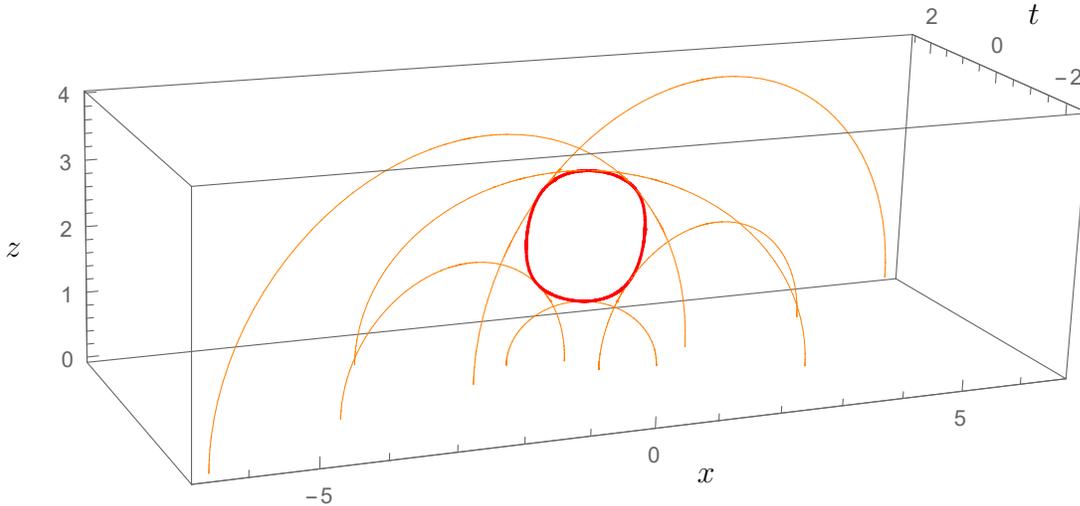


Figura 4.7: La curva roja es un círculo ondulante, (4.70), con $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = (0, 0, 2)$, $r = 1$, $a = 1/9$ y $n = 3$. Algunas de sus geodésicas tangentes se muestran en naranja, para los valores $\lambda/2\pi = 2/16, 4/16, 6/16, 10/16, 12/16, 14/16$.

Volviendo al análisis general, la entropía de entrelazamiento de cada intervalo en la CFT puede ser calculado en el marco empujado, donde está dado por (4.12), y después ser traducido a las coordenadas originales,

$$S(x_-^\mu, x_+^\mu) = 2L \ln \left(\frac{|x_+^\mu - x_-^\mu|}{\epsilon} \right) = L \ln \left(\frac{(x_+ - x_-)^2 - (t_+ - t_-)^2}{\epsilon^2} \right) = L \ln \left(\frac{4\ell^2}{\epsilon^2} \right). \quad (4.73)$$

La entropía diferencial (3.46) toma entonces la forma

$$\begin{aligned} E &= L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \frac{\ell \cdot x'_+}{\ell^2} \\ &= L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \frac{1}{\ell^2} (\ell \cdot \ell' + \ell \cdot x'_c) \\ &= \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_f} + L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \frac{\ell \cdot x'_c}{\ell^2}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

la cual reproduce correctamente (4.14) en el caso a tiempo constante.

El término que permanece dentro de la integral en (4.74) puede ser procesado por medio de las expresiones (4.65)-(4.66), para obtener

$$\begin{aligned} E &= \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_f} + L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{1}{z(\lambda)} \sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z''(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} + \frac{z'(\lambda)}{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2} \frac{t'(\lambda)t''(\lambda) - x'(\lambda)x''(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Al final de la primer línea reconocemos el término que da la longitud A de la curva. Los términos en la segunda línea son la derivada con respecto a λ de

$$L \sinh^{-1} \left(\frac{z'(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} \right). \quad (4.76)$$

Para curvas cerradas en el bulto, la derivada total se anula, y encontramos $A = E$, como se esperaba. Para curvas abiertas, llegamos a la generalización de (4.16)-(4.17), $A = E - f(\lambda_f) + f(\lambda_i)$, donde ahora

$$f(\lambda) = \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} + L \sinh^{-1} \left(\frac{z'(\lambda)}{\sqrt{x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2}} \right). \quad (4.77)$$

La función de frontera (4.77) tiene el mismo significado geométrico que en el caso a tiempo constante. En particular, el segundo término coincide con la longitud de arco entre x_c^μ y x^μ a lo largo de la geodésica tangente a la curva en el punto λ , permitiéndonos reescribir

$$f(\lambda) = \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} + \frac{L}{2} \ln \left(\frac{x_+ - x}{x - x_-} \right). \quad (4.78)$$

Esta puede expresarse como una contribución al integrando con respecto a λ . Nuestra expresión final para la entropía diferencial “renormalizada” es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv E - f(\lambda_f) + f(\lambda_i) \\ &= E - L \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda \ell^2}{\ell^2} + \frac{\ell_x(x' - x'_c) + (x_c - x)\ell'_x}{\ell_x^2 - (x - x_c)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Usando (4.65)-(4.66), podemos verificar que de hecho $A = \mathcal{E}$. La expresión (4.79) puede ser rescrita puramente en términos de los datos de la CFT por medio de (4.69).

4.3.2. Un reto a la hoyo-grafía en Poincaré AdS

El hecho de que las coordenadas de Poincaré (t, x, z) definidas en (3.25) cubren únicamente una cuña dentro del espacio AdS₃ (3.36) implica que, cuando consideremos curvas tipo espacio con dependencia genérica en el tiempo t (4.61), algunas de sus geodésicas tangentes *no* estarán completamente contenidas dentro de la cuña de Poincaré. Ver Fig. 4.1. Esto presenta un reto a la reconstrucción hoyo-gráfica, porque cuando esto ocurre, no somos capaces de codificar la longitud de la curva con datos de la CFT utilizando entropía diferencial.

Para ver exactamente donde reside el problema, recordemos que, dados dos puntos x_-^μ y x_+^μ en la frontera de AdS que están separados por un intervalo tipo espacio, existe una geodésica en el bulto que los conecta, y tiene la forma de un semicírculo empujado, Eq. (4.67). La proyección de esta geodésica sobre la frontera de AdS es simplemente una línea recta conectando los dos puntos. Si ocurre que la geodésica es tangente a alguna curva en el bulto, entonces claramente la proyección en la frontera del vector tangente a la curva se encontrará sobre la misma línea recta, y será por tanto tipo espacio. Se sigue de esto que *en un punto dado λ , una curva en el bulto en Poincaré AdS tiene una geodésica tangente que llega a la frontera si y solo si la proyección a la frontera de su vector tangente en ese punto es tipo espacio*,

$$-t'(\lambda)^2 + x'(\lambda)^2 > 0. \quad (4.80)$$

De hecho, podemos ver explícitamente en (4.66) que las posiciones de los puntos finales x_\pm^μ son reales solo cuando esta condición se satisface. Este, entonces, es nuestro criterio para la reconstructibilidad de la curva. Importantemente, difiere de la condición de que la curva en el bulto sea tipo espacio, $-t'^2 + x'^2 + z'^2 > 0$, y puede por tanto ser violada.

Consideremos como ejemplo concreto la curva cerrada que se obtiene de mapear a Poincaré AdS el mismo círculo a tiempo global fijo que discutimos en la Subsec. 4.2.1, $\varrho(\theta) = \text{constante}$, pero ahora desplazado a $\tau \neq 0$. Usando (3.37) y tomando

$\lambda = \theta$, tenemos la parmetrización

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \frac{L \sin \tau}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \lambda} , \\ x(\lambda) &= \frac{L \sin \lambda \sin \varrho}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \lambda} , \\ z(\lambda) &= \frac{L \cos \varrho}{\cos \tau + \sin \varrho \cos \lambda} . \end{aligned} \tag{4.81}$$

Las dos constantes τ, ϱ son parámetros que especifican nuestra elección de curva. Para que la curva esté contenida dentro de la cuña de Poincaré, debe ocurrir que $|\tau| + \varrho < \pi/2$. Notemos de (4.81) que $t \propto z$. Como se muestra en la Fig. 4.8, esta curva es un óvalo inclinado en la dirección t .

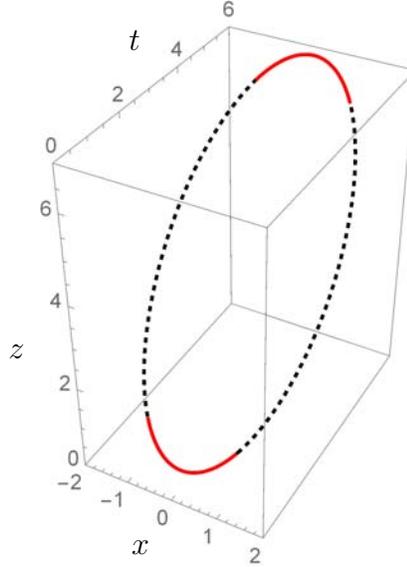


Figura 4.8: Un ejemplo de una curva cerrada tipo espacio a tiempo de Poincaré variable, dada por (4.81) con $\tau = \pi/5, \varrho = \pi/4$. Las regiones superior e inferior, en color rojo, tienen geodésicas tangentes que se encuentran dentro de la cuña de Poincaré. Esto no ocurre para los costados, en negro punteado, los cuales violan la condición (4.80) y son por tanto no reconstructibles. Como describimos en el texto principal, el óvalo inclinado que vemos aquí es la contraparte, en coordenadas de Poincaré, del círculo global en la imagen derecha de la Fig. 4.1.

En la descripción global es evidente que toda la curva (4.81) es tipo espacio. En la descripción de Poincaré, hay una región que viola la condición de reconstructibilidad (4.80). El borde de esta región se localiza en los puntos donde $x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2 = 0$.

Resolviendo esta ecuación, encontramos cuatro puntos

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \arctan [\sin(\tau - \varrho), \cos(\tau - \varrho)] , \\
\lambda_2 &= \arctan [-\sin(\tau + \varrho), \cos(\tau + \varrho)] , \\
\lambda_3 &= \arctan [-\sin(\tau + \varrho), -\cos(\tau + \varrho)] , \\
\lambda_4 &= \arctan [\sin(\tau - \varrho), -\cos(\tau - \varrho)] .
\end{aligned} \tag{4.82}$$

La notación aquí escoge un cuadrante para la función tangente inversa: $\arctan[s, c]$ significa un ángulo cuyo seno y coseno son respectivamente s y c . Encontramos entonces dos segmentos no reconstruibles, (λ_1, λ_2) y (λ_3, λ_4) , los cuales están localizados en los costados del círculo. Dado que la parte superior de la curva está más cerca del horizonte, puede parecer sorprendente que sea reconstruible, pero las geodésicas tangentes a puntos en esta región sí caen dentro de la cuña de Poincaré. Esto también puede verificarse directamente para el círculo en las coordenadas globales originales, mostradas en la Fig. 4.1.

4.3.3. Resolución vía “alineamiento nulo”

En la subsección previa hemos visto que hay curvas en el bulto tipo espacio en Poincaré AdS con segmentos que no son reconstruibles, pues violan la condición (4.80), y son por tanto tangentes a geodésicas que no están completamente contenidas dentro de la cuña de Poincaré. Dichas geodésicas no están asociadas con entrelazamiento en la CFT dual definida sobre Minkowski, así que nos preguntamos si existe una manera de codificar tales curvas en el bulto en el lenguaje de la teoría de campo. Para esto debemos encontrar una manera de seleccionar una familia de intervalos en la CFT cuyas entropías logren capturar la información acerca de los segmentos no reconstruibles a pesar de no estar asociados a geodésicas que sean tangentes a ellos.

Afortunadamente, una prescripción que nos da suficiente margen de maniobra en esta dirección fue descubierta en [8]. Los autores de ese trabajo mostraron que la fórmula estándar para entropía diferencial, Ec. (4.11), reproduce correctamente la longitud de una curva incluso si elegimos una familia de intervalos/geodésicas no estándar, obtenida al reorientar el vector tangente a la curva $u^m := (t', x', z')$, de acuerdo a $u \rightarrow U := u + n$, donde n es un vector nulo ortogonal a u , i.e.,

$$n \cdot n = 0 , \quad n \cdot u = 0 . \tag{4.83}$$

Siempre y cuando estas dos condiciones se satisfagan, n puede ser cualquier función diferenciable de λ .

Si de cada punto $x^m(\lambda)$ sobre la curva disparamos una geodésica a lo largo de $U^m(\lambda)$ en lugar de $u^m(\lambda)$, seleccionamos una familia de intervalos en la CFT cuyos puntos finales están dados por (4.66) con el reemplazo $u \rightarrow U$. Siguiendo los pasos

que llevan a (4.75), es fácil llegar a

$$\begin{aligned}
E = & \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_f} + L \int d\lambda \left(\frac{1}{z(\lambda)} \sqrt{U_x^2(\lambda) + U_z^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)} \right. \\
& + \frac{z''(\lambda) + n'_z(\lambda)}{\sqrt{U_x^2(\lambda) + U_z^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)}} \\
& \left. + \frac{z'(\lambda) + n_z(\lambda)}{U_x^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)} \frac{t'(\lambda)t''(\lambda) - x'(\lambda)x''(\lambda) + n_z(\lambda)z''(\lambda) + z'(\lambda)n'_z(\lambda) + n_z(\lambda)n'_z(\lambda)}{\sqrt{U_x^2(\lambda) + U_z^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)}} \right), \tag{4.84}
\end{aligned}$$

donde $\ell^2 := \ell_x^2 - \ell_t^2$, pero ahora las componentes de ℓ^μ dependen de nuestra elección de $n(\lambda)$. Los términos en la segunda y tercer línea son la derivada con respecto a λ de

$$\sinh^{-1} \left(\frac{U_z(\lambda)}{\sqrt{U_x^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)}} \right), \tag{4.85}$$

y junto al logaritmo pueden ser ignorados para el tipo de curvas consideradas en [8], las cuales están extendidas infinitamente y tienen condiciones de periodicidad en $x \rightarrow \pm\infty$. En ese caso, todo lo que queda es el término final en la línea superior de (4.84). Como las condiciones (4.83) garantizan que $U \cdot U = u \cdot u$, reconocemos este término como la longitud de la curva en el bulto, por tanto verificamos explícitamente que $A = E$, como se afirma en [8].

Los autores de [8] se refieren al reemplazo $u \rightarrow U$ como “alineamiento vectorial nulo”, opuesto al “alineamiento vectorial tangente” estándar. Ellos utilizaron la libertad proporcionada por la elección de $n(\lambda)$ para mostrar que una familia arbitraria y diferenciable de intervalos tipo espacio ($x_-^\mu(\lambda), x_+^\mu(\lambda)$) en la CFT pueden ser utilizados siempre para construir al menos una (y usualmente dos) curva(s) en el bulto, cuya entropía diferencial coincide con su longitud. Esta construcción frontera-bulto va en dirección opuesta al procedimiento bulto-frontera que hemos discutido hasta ahora, donde uno comienza con una curva en el bulto y usa sus geodésicas tangentes para obtener una familia de intervalos en la CFT. Para curvas a tiempo constante, no hay diferencia entre estas dos direcciones, pero en el caso covariante es en general necesario utilizar alineamiento nulo cuando procedemos en la dirección frontera-bulto.

El resultado $E = A$ para $n(\lambda)$ arbitraria se extiende inmediatamente de [8] al caso de curvas arbitrarias cerradas consideradas en esta tesis. En el caso de curvas abiertas, se generaliza a $A = E - f(\lambda_f) + f(\lambda_i) \equiv \mathcal{E}$, donde la función de frontera dependiente de n está dada por

$$f(\lambda) = \frac{L}{2} \ln \frac{4\ell^2}{\epsilon^2} + L \sinh^{-1} \left(\frac{U_z(\lambda)}{\sqrt{U_x^2(\lambda) - U_t^2(\lambda)}} \right). \tag{4.86}$$

El resultado importante es que, desde la perspectiva global, hay de hecho infinitas elecciones para la familia de intervalos en la CFT que reconstruyen una curva dada en el bulto. De manera más específica, hay una elección por cada función $n(\lambda)$, y dado

que este vector nulo está sujeto a dos constricciones (4.83), en AdS_3 esto se reduce a la libertad de elegir una de sus componentes ($d - 1$ componentes en AdS_{d+1}). En coordenadas de Poincaré, dada cualquier elección de la componente n^z podemos resolver (4.83) para encontrar las otras componentes de n .

$$\begin{aligned} n^t &= \frac{n^z u^t u^z \pm |n^z u^x| \sqrt{-u_t^2 + u_x^2 + u_z^2}}{u_t^2 - u_x^2}, \\ n^x &= -\frac{n^z u^z}{u^x} + \frac{n^z u_t^2 u^z \pm u^t |n^z u^x| \sqrt{-u_t^2 + u_x^2 + u_z^2}}{u^x (u_t^2 - u_x^2)}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

donde las dos elecciones de signo están correlacionadas. Equivalentemente, podemos tomar a n^t de forma arbitraria y determinar

$$\begin{aligned} n^x &= \frac{n^t u^t u^x \pm |n^t u^z| \sqrt{-u_t^2 + u_x^2 + u_z^2}}{u_x^2 + u_z^2}, \\ n^z &= -\frac{n^t u^t}{u^z} - \frac{n^t u_x^2 u^t \pm u^x |n^t u^z| \sqrt{-u_t^2 + u_x^2 + u_z^2}}{u^z (u_x^2 + u_z^2)}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Nos gustaría establecer si esta libertad nos permite abordar el problema planteado en la subsección previa. Consideremos una curva tipo espacio ($u \cdot u > 0$) en el bulto, la cual tiene una región donde (4.80) se viola, i.e. $-u_t^2 + u_x^2 = u \cdot u - u_z^2 \leq 0$. En esta región, el alineamiento tangente da origen a geodésicas que no están contenidas completamente dentro de la cuña de Poincaré. Invocando alineamiento nulo en su lugar, podemos utilizar geodésicas a lo largo de $U(\lambda) = u(\lambda) + n(\lambda)$. Para lograr la reconstructibilidad con estas nuevas geodésicas, debemos exigir que se cumpla

$$-U_t^2 + U_x^2 > 0 \quad \leftrightarrow \quad (u^z + n^z)^2 < (z^2/L^2) u \cdot u \quad . \quad (4.89)$$

La desigualdad de la derecha se sigue del hecho de que $U \cdot U = u \cdot u$. Para cada λ , (4.89) es una sola desigualdad impuesta sobre la componente libre n^z , así que hay un número infinito de soluciones. Dos ejemplos concretos son:

- $U^z = 0$: Sustituyendo $n^z = -u^z$ en (4.87), encontramos una elección específica de $n^m(\lambda)$ la cual evidentemente satisface la desigualdad derecha en (4.89). En este caso, todas las geodésicas en la familia tocan la curva del bulto en su punto más alejado de la frontera.
- $U^t = 0$: Tomando $n^t = -u^t$ y utilizando (4.88), encontramos otra elección de $n^m(\lambda)$ que evidentemente satisface la desigualdad izquierda en (4.89). En este caso, únicamente utilizamos geodésicas a tiempo constante, a pesar de que el valor de t es en general diferente para cada geodésica

Para entender como funciona esto en la práctica, volvamos al ejemplo del óvalo inclinado que teníamos en (4.81). En coordenadas globales, esto es simplemente un círculo de radio $R = L \tan \varrho$ a τ fijo, tal que su longitud total es $A = 2\pi R$. Los

puntos donde $-u_t^2 + u_x^2$ cambia de signo son λ_i definidos en (4.82), y separan el óvalo en cuatro segmentos, como se muestra en la Fig. 4.8. Los dos segmentos (λ_1, λ_2) y (λ_3, λ_4) , de color negro en la figura, son segmentos no reconstruibles con alineamiento vectorial tangente. Sabemos que, en su lugar, también pueden ser descritos por medio de alineamiento vectorial nulo. En la Fig. 4.9 vemos como es esto posible: para un punto en la región no reconstruible, la adición de un vector nulo permite reorientar la geodésica que toca la curva de tal manera que ambos puntos finales lleguen a la frontera de la cuña de Poincaré. Notemos que, si utilizamos alguna elección de $n(\lambda) \neq 0$ únicamente para los dos segmentos no reconstruibles, entonces a pesar de que toda nuestra curva es cerrada, la contribución de la función de frontera (4.86), en general, no se cancelará entre los segmentos adyacentes porque depende de n . Entonces en general $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \neq A$, pero lo que hemos mostrado para curvas arbitrarias implica que $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = A$. Alternativamente, podemos utilizar alineamiento nulo para el óvalo completo, con alguna elección de $n(\lambda)$ que sea suave al pasar por los puntos λ_i (e.g. $U^z = 0$ ó $U^t = 0$). En este caso la función de frontera se anula, y tenemos $E = A$, independientemente del valor de $n(\lambda)$.

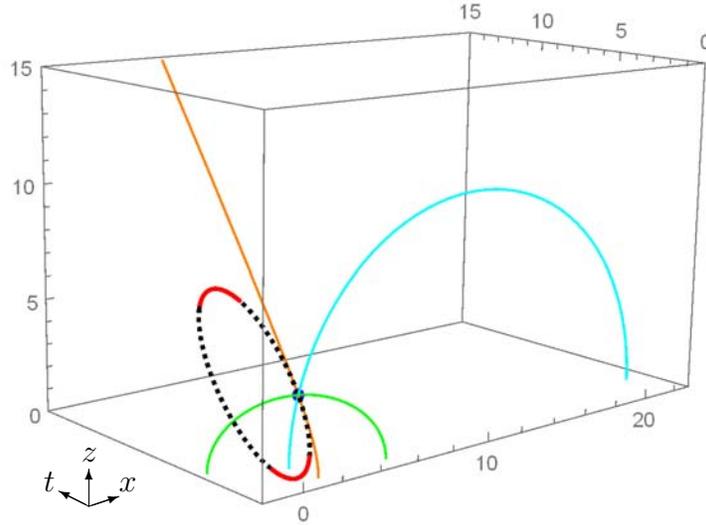


Figura 4.9: Vemos aquí el mismo óvalo inclinado (4.81) que en la Fig. 4.8, desde una distancia más grande y distinto punto de vista. El punto, $\lambda = 4\pi/5$, en la región no reconstruible es señalado, y la geodésica tangente al óvalo en ese punto se muestra en color naranja. Uno de sus puntos finales sale de la cuña de Poincaré a través del horizonte, en $z \rightarrow \infty$, así que no puede ser asociado con entropía de entrelazamiento en la CFT. Sin embargo, el alineamiento nulo $u \rightarrow U = u + n$ nos permite reorientar esta geodésica de tal manera que ambos puntos finales terminen en la frontera, en $z = 0$. Entre el número infinito de posibilidades en las cuales se puede lograr esto, ilustramos los dos ejemplos descritos en el texto principal: la geodésica verde tiene $U^z = 0$, y la geodésica color cian tiene $U^t = 0$. Con cualquiera de estas opciones, somos capaces de traducir el punto dado en el bulto en el lenguaje de la CFT.

Es natural preguntarse qué pasa en el caso de una curva que es cerrada en coor-

denadas globales pero no está completamente contenida en la cuña de Poincaré. En coordenadas de Poincaré esto se traduce a una curva abierta cuyos puntos finales se encuentran en el horizonte de Poincaré (en $t \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty$). Una pregunta es si podemos ser capaces de reconstruir la porción de la curva más allá del horizonte usando alineamiento nulo para disparar geodésicas dentro de la cuña de Poincaré. Rápidamente se puede ver que esto es imposible, porque en AdS hay una única geodésica asociada con cada par de puntos en la frontera, y se sabe que todas las geodésicas con ambos puntos finales sobre la frontera del parche de Poincaré se encuentran completamente contenidas dentro del parche. No hay otra opción sino tratar este caso como una curva abierta. Sabemos que cualquier segmento no reconstruible de esta curva se puede reconstruir por medio de alineamiento nulo. Dos ejemplos de este tipo de curva se muestran en la Fig. 4.10.

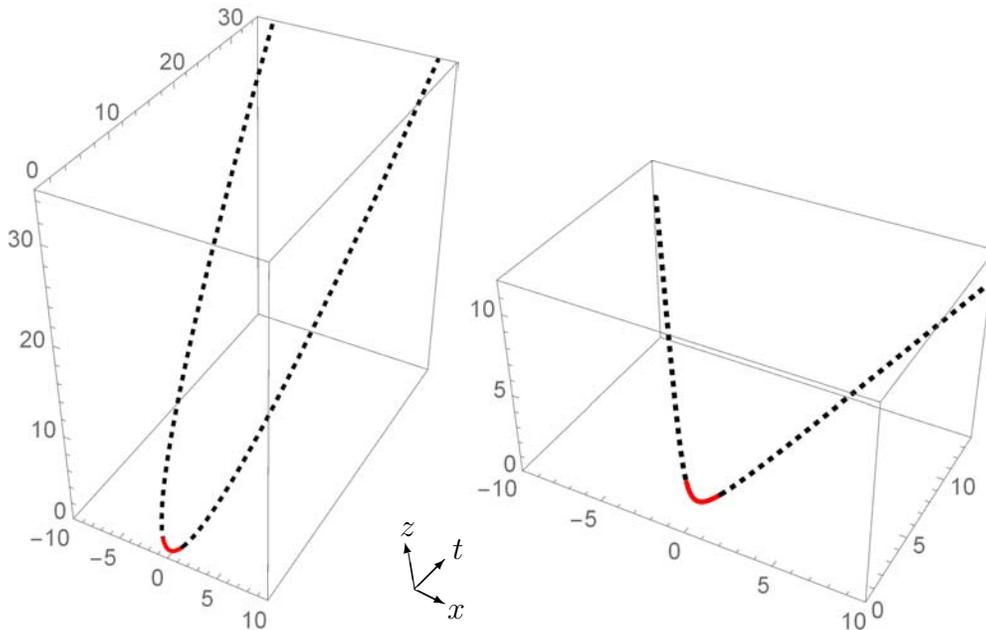


Figura 4.10: Curvas abiertas tipo espacio a tiempo de Poincaré variable, con ambos puntos finales alcanzando el horizonte de Poincaré. La curva a la izquierda está dada por (4.81) con $\tau = \pi/4, \varrho = \pi/4$. En coordenadas globales corresponde a un círculo que apenas cabe dentro de la cuña de Poincaré, y toca al horizonte en un solo punto. La curva a la derecha tiene $\tau = \pi/2, \varrho = \pi/4$, y es un círculo global que en parte se encuentra detrás del horizonte. Para ambas curvas el segmento en el fondo, color rojo, es reconstruible con alineamiento vectorial tangente, pero los lados, mostrados en color negro punteado, violan la condición (4.80) y requieren alineamiento nulo para ser reconstruidos.

4.3.4. Puntos

Ahora que sabemos como codificar una curva arbitraria en el bulto (cerrada o abierta), podemos razonar como en [20] y encoger estas curvas a puntos arbitrarios. Cada

“curva-punto” resultante estará asociada con una familia de intervalos/geodésicas con puntos finales $x_{\pm}^{\mu}(\lambda)$, o equivalentemente, con vectores centro y radio, $x_c^{\mu}(\lambda)$ y $\ell^{\mu}(\lambda)$. Si la curva es abierta, entonces como en la Subsec 4.2.4 debemos exigir que sea vertical al inicio y final, para que la familia de intervalos no desaparezca al encoger la curva. Si la curva es cerrada, como en la Subsec. 4.2.1 obtendremos una familia que cruce de $x \rightarrow \infty$ a $x \rightarrow -\infty$ un número $N \geq 2$ de veces antes de volver de forma suave a sí misma.

Importantemente, hay un número infinito de familias distintas que describen el mismo punto en el bulto porque hay infinitas elecciones para la forma de la curva que encogemos a cualquier punto dado. Para cualquiera de esas elecciones, y para cualquier elección de $n^{\mu}(\lambda)$, si decidimos utilizar alineamiento nulo como en la subsección previa, después de reducir a tamaño cero obtendremos una familia de geodésicas que pasen a través del punto deseado. La familia descrita en la Subsec. 4.2.4, donde todos los intervalos/geodésicas están sobre la misma rebanada de tiempo que el punto, es solo un ejemplo particular. Evidentemente, podríamos utilizar geodésicas sobre cualquier rebanada en un marco empujado. Con mayor generalidad, obtenemos una familia de intervalos/geodésicas para cada elección de curva sobre la frontera de AdS que está separada del punto por un intervalo tipo espacio, al tomar a los vectores centro $x^{\mu}(\lambda)$ (o el extremo derecho o izquierdo) de los intervalos sobre la curva seleccionada en la frontera.

Como en el caso a tiempo constante, cuando nuestra curva se encoge a un punto, las ecuaciones genéricas (4.66) se degeneran y no son útiles en este caso, pues todas las derivadas se anulan. Sin embargo, es fácil calcular la descripción requerida. Consideremos un punto en el bulto P , cuyas coordenadas están denotadas por $x_P^m := (t_P, x_P, z_P)$. De acuerdo a (4.67), el centro y el radio de cada geodésica que pasa a través de P satisface

$$-(t_P - t_c)^2 + (x_P - x_c)^2 + z_P^2 = -\ell_t^2 + \ell_x^2 . \quad (4.90)$$

Dado que esta geodésica es solo un semicírculo empujado, existe un marco, denotado por $*$, donde la geodésica completa se encuentra a tiempo constante, implicando además que el mismo empujón hace $t_P^* - t_c^* = 0$ y $\ell_t^* = 0$. Esto requiere que se cumpla

$$\frac{\ell_t}{\ell_x} = \frac{t_P - t_c}{x_P - x_c} . \quad (4.91)$$

De las ecuaciones (4.90) y (4.91) podemos deducir una expresión explícita que determina nuestra familia de intervalos para cada elección de curva centro $x_c^{\mu}(\lambda)$,

$$\ell^{\mu}(\lambda) = \pm (x_P^{\mu} - x_c^{\mu}(\lambda)) \sqrt{\frac{-(t_P - t_c(\lambda))^2 + (x_P - x_c(\lambda))^2 + z_P^2}{-(t_P - t_c(\lambda))^2 + (x_P - x_c(\lambda))^2}} . \quad (4.92)$$

La elección de signo determina la orientación del intervalo/geodésica, y como en las Subsecciones 4.2.1 y 4.2.4, si describimos el punto como una curva cerrada contraída

el signo cambia cuando pasa de la parte positiva de la curva a la negativa. Conociendo (4.92), el conjunto completo de geodésicas está dado por

$$X^m(s, \lambda) = (x_c^\mu(\lambda) - \ell^\mu(\lambda) \cos s, \ell(\lambda) \sin s) , \quad (4.93)$$

en analogía con (4.64).

Si tomamos $t_c = t_P$ en (4.92), recuperamos correctamente la Ec. (4.32), que describe un semicírculo a tiempo constante. En la Fig. 4.11 graficamos cuatro opciones distintas de curvas centro $x_c^\mu(\lambda)$ para el mismo punto en el bulto, y una pequeña muestra de intervalos/geodésicas a las que dan origen.

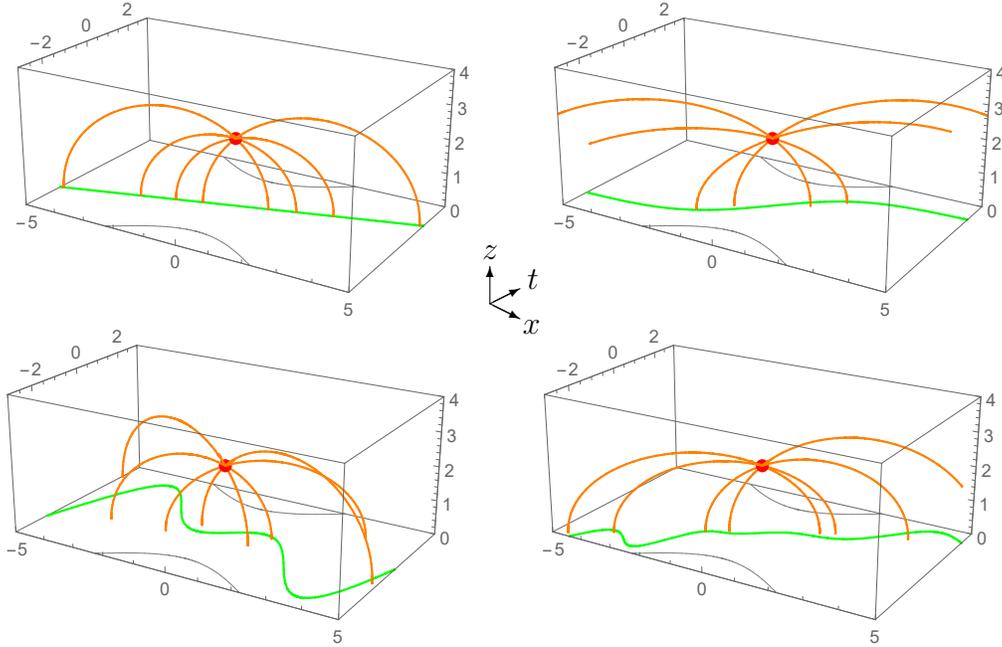


Figura 4.11: Cuatro formas distintas de describir el mismo punto $x_P^m = (0, 0, 2)$, señalado en color rojo, y una pequeña muestra de las geodésicas correspondientes, en naranja. En color verde se puede apreciar la curva trazada por los centros de los intervalos en la CFT, $x_c^\mu(\lambda)$, a partir del cual el conjunto completo de geodésicas se sigue vía (4.92)-(4.93). Las curvas grises delimitan la región sobre la frontera cuya separación es tipo espacio desde x_P^m , a partir de la cual cualquier curva verde no puede existir. Empezando desde la parte superior izquierda, nuestra elección de curva centro es $x_c^\mu(\lambda) = (0, 3\lambda, \lambda)$, $(2 \tanh(\lambda/2), \lambda)$, $(0, 7\lambda \cos(\lambda - 0, 2), \lambda)$ y $(0, 8 \cos(\sin \lambda), \lambda + \sin^2(\lambda/3))$, respectivamente.

La propiedad que distingue a la familia de intervalos en la CFT, descrita en (4.92), es que cuando la sustituimos en la fórmula de entropía diferencial (4.79), el integrando se anula, como era de esperarse de su asociación con una curva-punto con longitud cero. Al igual que en la Subsec. 4.2.4, nos gustaría encontrar un principio variacional que seleccione familias de este tipo. La idea natura es generalizar el argumento basado en la curvatura extrínseca al caso con tiempo variable.

Como en la Subsec. 4.3.1, consideremos una curva arbitraria tipo espacio $x^m(\lambda)$ en AdS_3 , con vector tangente $u^m(\lambda) = (t'(\lambda), x'(\lambda), z'(\lambda))$. Podemos definir el vector “aceleración” $a(\lambda)$ como la derivada covariante de $u(\lambda)$, normalizada con respecto a su magnitud:

$$a^m(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{u(\lambda) \cdot u(\lambda)}} \left(\frac{du^m(\lambda)}{d\lambda} + \Gamma_{nl}^m u^n(\lambda) u^l(\lambda) \right), \quad (4.94)$$

donde Γ_{nl}^m son los símbolos de Christoffel. La curvatura de $x^m(\lambda)$ se define como la norma de a ,

$$\kappa = \sqrt{a(\lambda) \cdot a(\lambda)}. \quad (4.95)$$

Evidentemente, para una geodésica espacio-temporal la curvatura (4.95) es exactamente cero. En el caso general, κ sirve como medida de cuánto una curva dada difiere de una geodésica. Podemos descomponer (4.94) como la suma de dos contribuciones ortogonales,

$$a^m(\lambda) = a_{\parallel}^m(\lambda) + a_{\perp}^m(\lambda), \quad (4.96)$$

donde

$$a_{\parallel}^m(\lambda) \equiv \frac{u(\lambda) \cdot a(\lambda)}{u(\lambda) \cdot u(\lambda)} u^m(\lambda), \quad a_{\perp}^m(\lambda) \equiv a^m(\lambda) - \frac{u(\lambda) \cdot a(\lambda)}{u(\lambda) \cdot u(\lambda)} u^m(\lambda) \quad (4.97)$$

son las componentes de a paralela y perpendicular a u . Las normas de estas componentes llevan el nombre de curvatura geodésica y curvatura normal, respectivamente,

$$\kappa_{\parallel} \equiv \sqrt{a_{\parallel}(\lambda) \cdot a_{\parallel}(\lambda)}, \quad \kappa_{\perp} = \sqrt{a_{\perp}(\lambda) \cdot a_{\perp}(\lambda)}, \quad (4.98)$$

y satisfacen $\kappa^2 = \kappa_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp}^2$.

Cuando una curva cerrada se encoge a un punto, su curvatura normal diverge, así que esperamos que al expresar $\kappa_{\perp}(\lambda)$ como función de x_{\pm}^{μ} y extremizando podamos recuperar la definición de un punto en términos de los datos de la frontera. En el caso independiente del tiempo $t'(\lambda) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} \kappa_{\parallel}^2 &= \frac{(x'(\lambda)^2 z'(\lambda) + z'(\lambda)^3 - z(\lambda) x'(\lambda) x''(\lambda) - z(\lambda) z'(\lambda) z''(\lambda))^2}{z(\lambda)^2 (x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2)^2}, \quad (4.99) \\ \kappa_{\perp}^2 &= \frac{(x'(\lambda)^3 - z(\lambda) z'(\lambda) x''(\lambda) + x'(\lambda) (z'(\lambda)^2 + z(\lambda) z''(\lambda)))^2}{z(\lambda)^2 (x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2)^2}. \end{aligned}$$

La expresión de $\kappa_{\perp}(\lambda)$ coincide con el Lagrangiano \mathcal{L} definido en términos de la curvatura extrínseca (4.37). Entonces, en configuraciones estáticas extremizar la curvatura normal, como proponemos aquí, es de hecho lo mismo que extremizar la curvatura extrínseca como en [20].

La generalización al caso dependiente del tiempo es sencilla. En este caso encontramos

$$\begin{aligned} \kappa_{\perp}^2 = & \frac{1}{z(\lambda)^2 (x'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2)^2} \left[2 (x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2)^2 (z'(\lambda)^2 + z(\lambda)z''(\lambda)) \right. \\ & + x'(\lambda)^6 - t'(\lambda)^6 + (x''(\lambda)^2 - t''(\lambda)^2) z(\lambda)^2 z'(\lambda)^2 \\ & - (x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2) \left(3x'(\lambda)^2 t'(\lambda)^2 - (z'(\lambda)^2 + z(\lambda)z''(\lambda))^2 \right) \\ & - 2 (x'(\lambda)^2 - t'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2 + z(\lambda)z''(\lambda)) (x'(\lambda)x''(\lambda) - t'(\lambda)t''(\lambda)) z(\lambda)z'(\lambda) \\ & \left. - (x'(\lambda)t''(\lambda) - t'(\lambda)x''(\lambda))^2 z(\lambda)^2 \right] \quad (4.100) \end{aligned}$$

Nuevamente, esta funcional depende de segundas derivadas así que en general da origen a ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Como chequeo de consistencia, sin embargo, hemos verificado que el ansatz $x^\mu(\lambda) = (t_P, x_P, z_P)$ es de hecho solución a estas ecuaciones.

Con algo de trabajo podemos reescribir la curvatura normal (4.100) de nuestra curva en el bulto como una función de los puntos finales $x_{\pm}^{\mu}(\lambda)$ de los intervalos correspondientes en la CFT dados por (4.66). Tomando este resultado como nuestro Lagrangiano, llegamos a

$$\begin{aligned} I & \equiv \int d\lambda \mathcal{L} = 2 \int d\lambda \sqrt{\frac{x'_+(\lambda)x'_-(\lambda) + t'_+(\lambda)t'_-(\lambda)}{(x_+(\lambda) - x_-(\lambda))^2 + (t_+(\lambda) - t_-(\lambda))^2}} \quad (4.101) \\ & = \int d\lambda \sqrt{\frac{x'_c(\lambda)^2 - \ell'_x(\lambda)^2 + t'_c(\lambda)^2 - \ell'_t(\lambda)^2}{\ell_x(\lambda)^2 + \ell_t(\lambda)^2}}. \end{aligned}$$

Para el caso a tiempo constante, recuperamos correctamente nuestra acción previa (4.39). Similarmente a lo que teníamos en ese caso, vemos en la última línea de (4.101) que la acción es independiente de $x_c^{\mu}(\lambda)$, así que los momentos conjugados $\Pi_{\mu} \equiv \partial\mathcal{L}/\partial x_c^{\mu}$ son constantes de movimiento. Estas condiciones determinan una elección particular de curva centro $t_c = (\Pi_t/\Pi_x)x_c + \text{constant}$ (correspondiente a tiempo fijo en un marco empujado), con una parametrización específica de centros $x_c(\lambda)$.

4.3.5. Distancias

En la subsección previa hemos aprendido que cualquier punto en el bulto P es descrito no por una única familia de intervalos en la CFT, sino por una clase de equivalencia entera de dichas familias, la cual denotaremos por $\mathcal{F}_P := [\{x_c^{\mu}(\lambda), \ell^{\mu}(\lambda)\}_P]$. Cada familia de esta clase puede ser seleccionada especificando una curva de centros $x_c^{\mu}(\lambda)$ dentro de la región de la frontera de AdS que está separada por una distancia tipo espacio de P , y después, utilizando (4.92) para obtener los radios vectores correspondientes, $\ell^{\mu}(\lambda)$. En la Fig. 4.11 se muestran algunos ejemplos que ilustran el rango de posibilidades.

Dados dos puntos en el bulto P y Q , realizando un empujón con parámetro $\beta = (t_P - t_Q)/(x_P - x_Q)$ al marco de referencia donde son simultáneos, y después empujando de vuelta al marco original, podemos deducir que la geodésica \overline{PQ} que los conecta está centrada en

$$\begin{aligned} t_M &= \frac{2t_P(x_P - x_Q)^2 - (t_P - t_Q)(t_P^2 - t_Q^2 + (x_P - x_Q)^2 - z_P^2 + z_Q^2)}{2(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2)}, \\ x_M &= \frac{(x_P - x_Q)(x_P^2 - x_Q^2 + z_P^2 - z_Q^2) - (t_P - t_Q)^2(x_P + x_Q)}{2(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2)}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

y tiene radio vector

$$\begin{aligned} \ell_M^t &= \frac{(t_P - t_Q)\text{sgn}(x_P - x_Q)\sqrt{(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2 + z_P^2 + z_Q^2)^2 - 4z_P^2z_Q^2}}{2(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2)}, \\ \ell_M^x &= \frac{\sqrt{(x_P - x_Q)^2}\sqrt{(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2 + z_P^2 + z_Q^2)^2 - 4z_P^2z_Q^2}}{2(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2)}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

La distancia entre los dos puntos está dada por la longitud de arco a lo largo de esta geodésica

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= L \ln \left(\frac{-(t_P - t_Q)^2 - z_P^2 + z_Q^2 + (x_P - x_Q)(x_P - x_Q - \Delta)}{(t_P - t_Q)^2 - z_P^2 + z_Q^2 - (x_P - x_Q)(x_P - x_Q + \Delta)} \right), \\ \Delta &\equiv \sqrt{\frac{(-(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2 + z_P^2 + z_Q^2)^2 - 4z_P^2z_Q^2}{(x_P - x_Q)^2}}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Esta es la versión empujada de (4.47) o (4.49).

Para reproducir (4.104) en términos de entropía diferencial imitando el procedimiento de la Subsec. 4.2.5, empezamos con la clase de equivalencia de familias de intervalos para ambos puntos, \mathcal{F}_P y \mathcal{F}_Q , y seleccionamos un elemento representativo de cada clase que incluya a la geodésica \overline{PQ} . Si además exigimos que estos dos representativos tengan la misma curva de centros $x_c^\mu(\lambda)$, la situación se vuelve directamente análoga a la que teníamos antes. Podemos definir entonces las familias truncadas $\hat{\ell}_P^\mu(\lambda)$ y $\check{\ell}_P^\mu(\lambda)$ (y similarmente para Q) incluyendo intervalos hasta o desde el punto $x_M^\mu(\lambda)$. Además, podemos formar nuevamente la combinación $\ell_{PQ}^\mu(\lambda) := \hat{\ell}_P^\mu(\lambda) + \hat{\ell}_Q^\mu(\lambda)$, y calcular su entropía diferencial. Evidentemente, la elección más sencilla es tomar $x_c^\mu(\lambda)$ a lo largo de la rebanada a tiempo empujado que contenga P , Q y \overline{PQ} . En este caso nuestro cálculo de la Subsec. 4.2.5 aplica directamente. E.g., para curvas-punto cerradas encontramos nuevamente que

$$d(P, Q) = \frac{1}{2}E[\ell_{PQ}^\mu(\lambda)]. \quad (4.105)$$

Esperamos que esta relación funcione para otras elecciones de curvas centro $x_c^\mu(\lambda)$, pero no intentaremos demostrar este enunciado en el presente trabajo. La conclusión importante es que existe un procedimiento para calcular distancias en el bulto a partir de datos en la CFT.

Capítulo 5

Conclusiones

- En esta tesis hemos abordado el problema de reconstrucción de curvas arbitrarias en el bulto por medio de entropía diferencial u hoyo-grafía en la CFT_2 directamente en la cuña de Poincaré. Trabajando primero a tiempo constante, encontramos que una curva cerrada en Poincaré está descrita en la CFT por una familia de intervalos que cubren el eje espacial al menos dos veces. También demostramos como reconstruir curvas abiertas, puntos y distancias, y obtuvimos una acción en la CFT cuya extremización conduce a puntos en el bulto. Después, generalizamos todos estos resultados al caso de curvas que varían en el tiempo, y descubrimos que curvas genéricas tienen segmentos que no pueden ser reconstruidos usando hoyo-grafía estándar. Esto ocurre porque, para los segmentos no reconstruibles, las geodésicas tangentes no están completamente contenidas dentro de la cuña de Poincaré. Mostramos que una variante de hoyo-grafía descubierta previamente nos permite superar este reto, al reorientar las geodésicas que tocan la curva para asegurarnos de que permanezcan dentro de la cuña. Con ello, la principal conclusión de nuestro trabajo es que *todas las curvas tipo espacio en Poincaré AdS pueden ser completamente reconstruidas con datos de la CFT, y cada curva tiene de hecho un número infinito de representaciones dentro de la CFT.*
- Hay varias direcciones para trabajo futuro. En la línea de los trabajos [7, 8, 25], esperamos que nuestros resultados se extiendan a Poincaré AdS en un mayor número de dimensiones, bajo las mismas suposiciones de simetría para las superficies en consideración. En un frente distinto, Poincaré AdS es un ejemplo particular de una cuña de entrelazamiento [41–43], con la propiedad especial de que incluye una rebanada completa a tiempo global, y por tanto un conjunto completo de datos iniciales para evolución temporal. Una cuña de entrelazamiento más pequeña deja información fuera, y contiene un número menor de geodésicas completas, así que es interesante preguntar si es o no posible reorientar otra vez aquellas geodésicas que se salen para lograr la reconstrucción de cualquier curva contenida en la cuña por medio de hoyo-grafía [44].

- Para ir más allá de AdS puro, se sabe que el procedimiento de hoyo-grafía está restringido por la aparición de sombras de entrelazamiento [23, 27] y pantallas holográficas [30]. Tal vez es posible evitar el primer obstáculo usando *enebramiento*, un tipo de entrelazamiento entre grados de libertad en la CFT que no están organizados espacialmente [20, 45–47]. Al menos en el caso donde la descripción gravitacional es tres dimensional, el enebramiento es asociado con geodésicas no mínimas, y sería interesante investigar si la posibilidad de reorientarlas por medio de vectores nulos [8] otorga a la hoyo-grafía cobertura adicional. Finalmente, el programa de reconstrucción se ha enfocado recientemente en la descripción de operadores locales en el bulto que son integrados sobre superficies extremales, los cuales son duales a bloques en la expansión del producto de operadores de la CFT [48–56]. En los trabajos [57–62] se siguió un enfoque algo diferente para los operadores locales. Naturalmente, sería interesante entender en detalle como la hoyo-grafía se relaciona con estos dos procedimientos.

Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
- [2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
- [3] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
- [4] R. Espíndola, A. Güijosa, A. Landetta and J. F. Pedraza, “What’s the Point? Hole-ography in Poincaré AdS,” arXiv:1708.02958 [hep-th].
- [5] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [hep-th/0603001].
- [6] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech, J. de Boer and M. P. Heller, “Bulk curves from boundary data in holography,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.8, 086004 [arXiv:1310.4204 [hep-th]].
- [7] R. C. Myers, J. Rao and S. Sugishita, “Holographic Holes in Higher Dimensions,” *JHEP* **1406** (2014) 044 [arXiv:1403.3416 [hep-th]].
- [8] M. Headrick, R. C. Myers and J. Wien, “Holographic Holes and Differential Entropy,” *JHEP* **1410** (2014) 149 [arXiv:1408.4770 [hep-th]].
- [9] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal,” *JHEP* **0707** (2007) 062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [10] A. Güijosa, “QCD, with strings attached,” *Int. J. Mod. Phys. E* **25** (2016) no.10, 1630006 doi:10.1142/S021830131630006X [arXiv:1611.07472 [hep-th]].
- [11] D. Z. Freedman, S. S. Gubser, K. Pilch and N. P. Warner, “Renormalization group flows from holography supersymmetry and a c theorem,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 363 [hep-th/9904017].

- [12] J. R. David, G. Mandal and S. R. Wadia, “Microscopic formulation of black holes in string theory,” *Phys. Rept.* **369** (2002) 549 doi:10.1016/S0370-1573(02)00271-5 [hep-th/0203048].
- [13] J. M. Maldacena, “Black holes in string theory,” hep-th/9607235.
- [14] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [hep-th/9905111].
- [15] H. Casini and M. Huerta, *J. Phys. A* **42**, 504007 (2009) doi:10.1088/1751-8113/42/50/504007 [arXiv:0905.2562 [hep-th]].
- [16] M. Rangamani and T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy,” *Lect. Notes Phys.* **931** (2017) pp.1 doi:10.1007/978-3-319-52573-0 [arXiv:1609.01287 [hep-th]].
- [17] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and conformal field theory,” *J. Phys. A* **42** (2009) 504005 [arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]].
- [18] H. Casini and M. Huerta, “A Finite entanglement entropy and the c-theorem,” *Phys. Lett. B* **600** (2004) 142 doi:10.1016/j.physletb.2004.08.072 [hep-th/0405111].
- [19] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [20] B. Czech and L. Lamprou, “Holographic definition of points and distances,” *Phys. Rev. D* **90** (2014) 106005 [arXiv:1409.4473 [hep-th]].
- [21] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” *JHEP* **0608** (2006) 045 doi:10.1088/1126-6708/2006/08/045 [hep-th/0605073].
- [22] M. Van Raamsdonk, “Lectures on Gravity and Entanglement,” doi:10.1142/9789813149441-0005 arXiv:1609.00026 [hep-th].
- [23] N. Engelhardt and A. C. Wall, “Extremal Surface Barriers,” *JHEP* **1403** (2014) 068 doi:10.1007/JHEP03(2014)068 [arXiv:1312.3699 [hep-th]].
- [24] V. E. Hubeny, “Covariant Residual Entropy,” *JHEP* **1409** (2014) 156 [arXiv:1406.4611 [hep-th]].
- [25] B. Czech, X. Dong and J. Sully, “Holographic Reconstruction of General Bulk Surfaces,” *JHEP* **1411** (2014) 015 [arXiv:1406.4889 [hep-th]].
- [26] B. Czech, P. Hayden, N. Lashkari and B. Swingle, “The Information Theoretic Interpretation of the Length of a Curve,” *JHEP* **1506** (2015) 157 [arXiv:1410.1540 [hep-th]].

- [27] B. Freivogel, R. A. Jefferson, L. Kabir, B. Mosk and I. S. Yang, “Casting Shadows on Holographic Reconstruction,” *Phys. Rev. D* **91** (2015) no.8, 086013 [arXiv:1412.5175 [hep-th]].
- [28] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish and J. Sully, “Integral Geometry and Holography,” *JHEP* **1510** (2015) 175 [arXiv:1505.05515 [hep-th]].
- [29] P. A. R. Jones and M. Taylor, “Entanglement entropy and differential entropy for massive flavors,” *JHEP* **1508** (2015) 014 doi:10.1007/JHEP08(2015)014 [arXiv:1505.07697 [hep-th]].
- [30] N. Engelhardt and S. Fischetti, “Covariant Constraints on Holography,” *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) no.19, 195021 [arXiv:1507.00354 [hep-th]].
- [31] S. A. Gentle and C. Keeler, “On the reconstruction of Lifshitz spacetimes,” *JHEP* **1603** (2016) 195 [arXiv:1512.04538 [hep-th]].
- [32] A. Schwimmer and S. Theisen, “Entanglement Entropy, Trace Anomalies and Holography,” *Nucl. Phys. B* **801** (2008) 1 [arXiv:0802.1017 [hep-th]].
- [33] R. X. Miao, “A Note on Holographic Weyl Anomaly and Entanglement Entropy,” *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) 065009 [arXiv:1309.0211 [hep-th]].
- [34] V. Rosenhaus and M. Smolkin, “Entanglement Entropy Flow and the Ward Identity,” *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) no.26, 261602 [arXiv:1406.2716 [hep-th]].
- [35] S. Sachan and D. V. Singh, “Entanglement Entropy of BTZ Black Hole and Conformal Anomaly,” arXiv:1412.7170 [hep-th].
- [36] A. Allais and M. Mezei, “Some results on the shape dependence of entanglement and Rényi entropies,” *Phys. Rev. D* **91** (2015) no.4, 046002 [arXiv:1407.7249 [hep-th]].
- [37] D. Carmi, “On the Shape Dependence of Entanglement Entropy,” *JHEP* **1512** (2015) 043 [arXiv:1506.07528 [hep-th]].
- [38] P. Fonda, D. Seminara and E. Tonni, “On shape dependence of holographic entanglement entropy in AdS_4/CFT_3 ,” *JHEP* **1512** (2015) 037 [arXiv:1510.03664 [hep-th]].
- [39] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy for the n -sphere,” *Phys. Lett. B* **694**, 167 (2011) [arXiv:1007.1813 [hep-th]].
- [40] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [hep-th/9204099].
- [41] B. Czech, J. L. Karczmarek, F. Nogueira and M. Van Raamsdonk, “The Gravity Dual of a Density Matrix,” *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 155009 [arXiv:1204.1330 [hep-th]].

- [42] A. C. Wall, “Maximin Surfaces, and the Strong Subadditivity of the Covariant Holographic Entanglement Entropy,” *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) no.22, 225007 [arXiv:1211.3494 [hep-th]].
- [43] M. Headrick, V. E. Hubeny, A. Lawrence and M. Rangamani, “Causality & holographic entanglement entropy,” *JHEP* **1412** (2014) 162 [arXiv:1408.6300 [hep-th]].
- [44] R. Espíndola, A. Güijosa and J. F. Pedraza, “Living on the Wedge: Hole-ography and Reconstruction of the Entanglement Wedge”, in preparation.
- [45] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech and J. de Boer, “Entwinement and the emergence of spacetime,” *JHEP* **1501** (2015) 048 [arXiv:1406.5859 [hep-th]].
- [46] J. Lin, “A Toy Model of Entwinement,” arXiv:1608.02040 [hep-th].
- [47] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, B. Craps, T. De Jonckheere and F. Galli, “Entwinement in discretely gauged theories,” *JHEP* **1612** (2016) 094 [arXiv:1609.03991 [hep-th]].
- [48] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish, B. Mosk and J. Sully, “A Stereoscopic Look into the Bulk,” *JHEP* **1607** (2016) 129 [arXiv:1604.03110 [hep-th]].
- [49] B. Carneiro da Cunha and M. Guica, “Exploring the BTZ bulk with boundary conformal blocks,” arXiv:1604.07383 [hep-th].
- [50] J. de Boer, F. M. Haehl, M. P. Heller and R. C. Myers, “Entanglement, holography and causal diamonds,” *JHEP* **1608** (2016) 162 [arXiv:1606.03307 [hep-th]].
- [51] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish, B. Mosk and J. Sully, “Equivalent Equations of Motion for Gravity and Entropy,” *JHEP* **1702** (2017) 004 [arXiv:1608.06282 [hep-th]].
- [52] M. Guica, “Bulk fields from the boundary OPE,” arXiv:1610.08952 [hep-th].
- [53] A. Karch, J. Sully, C. F. Uhlemann and D. G. E. Walker, “Boundary Kinematic Space,” arXiv:1703.02990 [hep-th].
- [54] D. Kabat and G. Lifschytz, “Local bulk physics from intersecting modular Hamiltonians,” *JHEP* **1706** (2017) 120 [arXiv:1703.06523 [hep-th]].
- [55] T. Faulkner and A. Lewkowycz, “Bulk locality from modular flow,” arXiv:1704.05464 [hep-th].
- [56] A. Almheiri, T. Anous and A. Lewkowycz, “Inside Out: Meet The Operators Inside The Horizon,” arXiv:1707.06622 [hep-th].

- [57] H. Verlinde, “Poking Holes in AdS/CFT: Bulk Fields from Boundary States,”
- [58] M. Miyaji, T. Numasawa, N. Shiba, T. Takayanagi and K. Watanabe, “Continuous Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz as Holographic Surface-State Correspondence,” *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) no.17, 171602 [arXiv:1506.01353 [hep-th]].
- [59] Y. Nakayama and H. Ooguri, “Bulk Locality and Boundary Creating Operators,” *JHEP* **1510** (2015) 114 [arXiv:1507.04130 [hep-th]].
- [60] Y. Nakayama and H. Ooguri, “Bulk Local States and Crosscaps in Holographic CFT,” *JHEP* **1610** (2016) 085 [arXiv:1605.00334 [hep-th]].
- [61] A. Lewkowycz, G. J. Turiaci and H. Verlinde, “A CFT Perspective on Gravitational Dressing and Bulk Locality,” *JHEP* **1701** (2017) 004 [arXiv:1608.08977 [hep-th]].
- [62] K. Goto and T. Takayanagi, “CFT descriptions of bulk local states in the AdS black holes,” arXiv:1704.00053 [hep-th].