



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MODELO DE ISING PATEADO TODOS CONTRA TODOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

DAVID AMARO ALCALÁ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA



CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Modelo de Ising pateado todos contra todos

por

David Amaro Alcalá

Tesis presentada para obtener el grado de

Físico

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Febrero, 2018

## Datos

### Datos del alumno

Amaro

Alcalá

David

55 30 12 55 52

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

310019734

### Datos del tutor

Dr.

Carlos Francisco

Pineda

Zorrilla

### Datos del sinodal 1

Dr.

Thomas Henry

Seligman

Schurch

### Datos del sinodal 2

Dr.

Jorge Gustavo

Hirsch

Ganievich

### Datos del sinodal 3

Dr.

Pablo

Barberis

Blostein

### Datos del sinodal 4

Dr.

Roberto de Jesús

León

Montiel

### Datos del trabajo

Modelo de Ising todos-contra-todos pateado

42 p.

2018

## Agradecimientos

A mi tutor el Dr. Carlos Pineda por su tremenda paciencia y apoyo durante la elaboración de este trabajo además de brindarme la posibilidad de trabajar con él.

Al Dr. François Leyvras por su apoyo económico dado a través de la beca de ayudante de investigador SNI III.

Al Dr. Alonso Botero de la Universidad de Los Andes por su valiosa recomendación bibliográfica que fue clave en el avance de este proyecto.

A mi hermano Emmanuelle por ayudarme a mejorar la redacción de este trabajo.

Al proyecto PAPIIT IN111015 Sistemas cuánticos de muchos cuerpos, nuevos métodos y nuevas perspectivas por el estímulo monetario brindado.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Conceptos fundamentales</b>	<b>8</b>
2.1. Nociones de teoría de representaciones . . . . .	8
2.2. Simetrizadores de Young y Representaciones de $GL(\mathbb{C}^2)$ . . . . .	9
2.3. Descomposición del espacio de Hilbert . . . . .	12
<b>3. Teoría de acoplamiento binario</b>	<b>14</b>
3.1. Teoría de acoplamiento binario de momento angular . . . . .	14
3.2. Coeficiente de Clebsh-Gordan generalizado y tercia . . . . .	16
<b>4. Modelos</b>	<b>22</b>
4.1. Modelo de Ising unidimensional . . . . .	22
4.2. Modelo de Ising todos contra todos pateado . . . . .	24
4.2.1. Motivación . . . . .	24
4.2.2. Hamiltoniano . . . . .	24
4.2.3. Simetrías en el espacio de parámetros . . . . .	25
4.3. Modelo del Kicked Top . . . . .	25
4.3.1. Hamiltoniano . . . . .	26
4.3.2. Top clásico . . . . .	26
4.3.3. Simetrías del Top cuántico . . . . .	26
4.3.4. Análisis del top cuántico . . . . .	28
4.4. Equivalencia entre el modelo de Ising pateado y el Kicked Top . . . . .	28
4.4.1. Cambio de base . . . . .	29
4.5. Resultados . . . . .	29
<b>5. Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>A. Demostración de la conmutación</b>	<b>39</b>
<b>B. Breve comentario sobre la teoría de Floquet</b>	<b>40</b>
<b>C. Aplicación estroboscópica</b>	<b>41</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se estudió la dinámica del modelo de Ising todos-contra-todos desde el punto de vista de la teoría de representaciones [Ser12]. El modelo de Ising todos-contra-todos pateado, es decir, periódicamente interacciona con un campo magnético, es un sistema de espines  $1/2$  en el que cada espín interactúa débilmente con los demás espines del sistema. El análisis basado en la teoría de representaciones se justifica ante la invarianza que cuenta el sistema bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas. Dicha invarianza sugería la descomposición del sistema en bloques que tuvieran algún tipo de simetría bajo el intercambio de partículas.

Este estudio tiene como antecedente el ensayo sobre la cadena de Ising pateada [PPV14], cuya invarianza bajo rotaciones y reflexiones permitió descomponer el sistema en subespacios que consintió el análisis del sistema computacionalmente, haciendo posible la observación de fenómenos interesantes desde el punto de vista del caos cuántico.

Para dividir el espacio de Hilbert en subespacios con simetría bajo el intercambio de partículas, fue necesario utilizar la teoría de acoplamiento binario [Lou08] además de la teoría de representaciones, dado que esta última no nos proveía de un método sencillo para llevar a cabo la descomposición. La descomposición del sistema en subespacios con una base que fuera invariante bajo algún tipo de permutación de sus elementos, nos facultó con la posibilidad de observar un hecho remarcable: cada bloque del operador de evolución es equivalente al operador de evolución del *top* pateado [HKS87].

Este paralelismo nos permitió el estudio del sistema con un alto número de elementos,  $\sim 10^4$  qubits, algo que no siempre se puede lograr. De este análisis se obtuvo una característica muy interesante del sistema de Ising pateado todos contra todos: puede presentar características tanto caóticas como integrables simultáneamente. Esta afirmación tiene como base los resultados de la *distribución de separamiento de niveles entre vecinos cercanos*,  $P(s)$ , que se obtuvo del operador de Floquet en el rango de parámetros en los que el Top clásico presenta una dinámica caótica. Con este resultado se termina la discusión.

### 1.1. Estructura de la tesis

En el capítulo 2, se presentan las herramientas matemáticas que no aparecen en el tronco común de un físico a este nivel necesarias para la comprensión de este trabajo. Está de más subrayar que este capítulo es fundamental para el resto del trabajo. Posteriormente en el capítulo 3, se expone de manera autocontenida y didáctica el algoritmo computacional encontrado en la literatura que provee los méto-

dos para separar el sistema en bloques con simetría bien definida. En este mismo capítulo, se presenta el código que utilizamos para explorar los subespacios del modelo todos contra todos. Esta exploración fue la que nos ayudó a encontrar la equivalencia entre el modelo de Ising todos contra todos pateado y el top pateado. El capítulo con el que se concluye la discusión es el 4, en el que se habla de la equivalencia entre el modelo de este trabajo y el top pateado que será utilizado para el estudio de la dinámica del todos contra todos Ising pateado, no sin antes explicar lo que nosotros esperábamos de este sistema. Aquí se hace un breve repaso de la cadena de Ising pateada, que sirvió como principal motivación para este trabajo además se estudia la distribución de espaciamiento de cuasienergías del sistema lo que nos sirvió para observar el resultado más importante de este trabajo: este sistema presenta un comportamiento a la vez caótico e integrable.

## Capítulo 2

# Conceptos fundamentales

### Introducción

En este capítulo se busca mostrar la relación existente entre espín y simetría de intercambio entre partículas.

En la primer sección, se estudiará la teoría de representaciones [Ser12] para lograr entender los conceptos de representación y representación irreducible, que serán fundamentales para la descomposición que se hará del espacio de Hilbert. A continuación, se darán unas definiciones del cálculo de tablonos de Young [Ful97] necesarias dada su relación con las representaciones irreducibles del grupo  $GL(\mathbb{C}^2)$ . A su vez, conoceremos la descomposición del espacio de Hilbert de un sistema de  $n$  partículas en representaciones irreducibles del grupo  $GL(\mathbb{C}^2)$ . Ulteriormente, se mencionará la manera de obtener la base para una representación irreducible. Se hablará de los problemas que se presentan utilizando este formalismo para obtener una base de esta manera. Finalmente, se hablará de la teoría de acoplamiento binario [Lou08] que nos permitirá desarrollar una base ortogonal para el espacio de Hilbert de  $n$  qubits que realiza la misma descomposición en representaciones irreducibles del grupo  $GL(\mathbb{C}^2)$ .

### 2.1. Nociones de teoría de representaciones

Para comenzar el estudio de la teoría de representaciones definimos la representación de un grupo finito  $G$  sobre un espacio vectorial complejo  $V$  como un *homomorfismo*  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  de  $G$  al grupo de automorfismos de  $V$ . Al igual que en la mayoría de los textos escritos por matemáticos, en esta tesis se usará el término representación para  $V$  y se dará por hecho la  $\rho$ .

**Ejemplo** Como ejemplo, consideremos el grupo  $G = S_3 \equiv \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ , el grupo de permutaciones de tres objetos, y  $\rho: S_3 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , con  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de matrices 3 por 3 con entradas en  $\mathbb{R}$ , la función que lleva a los elementos de  $G$ :  $(23)$ ,  $(12)$ ,  $(123)$ ,  $(132)$  y  $(13)$  a las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-1)$$

respectivamente. La identidad  $e \in G$  va a la matriz identidad de tres por tres.

Una *subrepresentación* de una representación  $V$  es el subespacio  $W \leq V$  que es invariante bajo la acción de  $G$ . Una representación de  $V$  es llamada *irreducible* si no hay un subespacio invariante  $W$  distinto de  $V$  o  $\mathbf{0}$ .

**Ejemplo** La representación (2-1) no es irreducible ya que el subespacio generado por  $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  es invariante bajo dicha representación. La siguiente representación, dada por Moshinsky [Mos69], es irreducible

$$\begin{aligned} \rho(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \rho(13) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \rho(23) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \rho(123) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \rho(132) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \rho(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Lema de Schur.** Si  $V$  y  $W$  son representaciones irreducibles de  $G$  y  $\varphi: V \rightarrow W$  es un homomorfismo entre espacios vectoriales, entonces

1.  $\varphi$  es un isomorfismo o  $\varphi = 0$ .
2. Si  $W = V$ , entonces  $\varphi = l \cdot 1$ , para  $l \in \mathbb{C}$  y  $1$  la identidad.

Cuando  $\varphi \neq 0$ , escribiremos  $V \cong W$ .

**Ejemplo** Con la representación (2-1) y una base en la que uno de sus miembros es el vector  $(1, 1, 1)$ , que es invariante bajo cualquier permutación:  $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, 1, 0)\}$ . Se puede ver, que si  $M$  es la matriz de cambio de base:

$$M \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) \equiv M^{-1}xM$ . La representación (2-1) es isomorfa a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Notamos ahora que las matrices son diagonales por bloques. Ésta es la signatura usual de que la representación es reducible.

## 2.2. Simetrizadores de Young y Representaciones de $GL(\mathbb{C}^2)$

En la presente sección, se introducirán los conceptos necesarios para entender los simetrizadores de Young que serán útiles para calcular la base de las representaciones de  $GL(\mathbb{C}^2)$ .

Una partición  $\lambda$  de un número natural  $n$ , denotado por  $\lambda \vdash n$ , es una tupla de números positivos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ , tales que,  $\sum_k \lambda_k = n$ .

Un diagrama de Young es un conjunto  $n$  de cajas, alineadas a la izquierda, con un número no decreciente de cajas en cada fila. El número de cajas en la fila  $k$  es igual al número  $\lambda_k$ , la entrada  $k$ -ésima de

una partición de  $n$ ,  $\lambda$ . Por ejemplo, las tres particiones de 3 son (3), (2, 1) y (1, 1, 1). A continuación, se presentan sus respectivos diagramas de Young

$$(3) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (2, 1) \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad (1, 1, 1) \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}. \quad (2-2)$$

Una numeración  $T$  de un diagrama de Young con  $n$  cajas, es cualquier manera de llenar con enteros de 1 a  $n$ , sin repetir, cada caja del diagrama. Por ejemplo, para la partición (2, 1) de 3, estas son todas sus numeraciones

$$\begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}, \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|}, \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}. \end{array} \end{array} \end{array} \quad (2-3)$$

A cada numeración  $T$  de una partición de  $n$  podemos asociarle dos subgrupos del grupo de permutaciones  $S_n$ . El primero es el grupo renglón,  $R(T)$  que consiste de todas aquellas permutaciones que dejan invariantes los elementos de cada fila. De manera similar, se puede definir el grupo columna,  $C(T)$ , como aquellas permutaciones que dejan invariantes los miembros de cada fila.

Para la numeración

$$T_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 8 & 6 & 7 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}, \quad (2-4)$$

el grupo  $R(T_0) = S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{8,6,7\}}$  y  $C(T_0) = S_{\{1,8,5\}} \times S_{\{2,6\}} \times S_{\{3,7\}}$ , en donde  $\times$  denota el producto directo de grupos y  $S_A$  representa el grupo de permutaciones de  $|A|$  elementos, permutando los elementos de  $A$ . Como ejemplo, podemos tomar a  $(12)$  y  $(87) \in R(T_0)$  pero,  $(16) \notin R(T_0)$ ;  $(185) \in C(T_0)$  pero,  $(12) \notin C(T_0)$ .

Utilizando las permutaciones  $q \in R(T)$  y  $p \in C(T)$  se pueden definir las siguientes combinaciones lineales de permutaciones que llamaremos simetrizadores de Young:

$$a_T = \sum_{q \in R(T)} q, \quad b_T = \sum_{p \in C(T)} \text{sgn}(p)p,$$

junto con el producto  $c_T = a_T \cdot b_T$ .

Consideremos un sistema cuántico de dos niveles. El espacio de Hilbert de este sistema está generado por los vectores  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ , que denotan los dos posibles niveles del sistema. Con esta notación, el espacio de Hilbert para dos sistemas de dos estados es  $|+\rangle \otimes |+\rangle$ ,  $|+\rangle \otimes |-\rangle$ ,  $|-\rangle \otimes |+\rangle$  y  $|-\rangle \otimes |-\rangle$ , que tradicionalmente se abrevia como  $|++\rangle$ ,  $|+-\rangle$ ,  $| - + \rangle$  y  $|--\rangle$ . Al conjunto de  $2^n$  estados que generan el espacio de Hilbert de  $n$  sistemas de dos niveles,  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ , se le conoce como *base computacional* [NCO2]. La siguiente discusión puede aplicarse a cualquier sistema de dos niveles. Sin embargo, el trabajo se centra en sistemas formados por partículas de espín 1/2 distinguibles, por lo que a partir de este momento, el estado  $|+\rangle$  representa una partícula con espín 1/2 con proyección 1/2 mientras que el estado  $|-\rangle$  representa una partícula con espín 1/2 y proyección  $-1/2$ .

Si  $b$  es la base computacional del espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$$

entonces, la imagen de  $b$  bajo la acción del simetrizador de Young  $c_T$  para una numeración  $T$  de la partición  $\lambda$  de  $n$ , es la base para una representación irreducible de  $GL(\mathbb{C}^2)$  etiquetada por la partición  $\lambda$ ,  $(\mathbb{C}^2)^\lambda$ .

**Ejemplo** Para construir el simetrizador de Young  $c_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}$  observamos que<sup>1</sup>:  $R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \{(12), e\}$  y  $C\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \{(13), e\}$ . De esta manera,  $a_T = e + (12)$  y  $b_T = e - (13)$ . Con el fin de aclarar el significado de acción del simetrizador de Young y mostrar un ejemplo completo, se muestra la acción de  $c_T = a_T \cdot b_T$  sobre la base computacional

$$\begin{aligned}
a_T \cdot b_T \cdot |+++ \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |+++ \rangle - (13) \cdot |+++ \rangle) \\
&= a_T \cdot (|+++ \rangle - |+++ \rangle) = 0. \\
a_T \cdot b_T \cdot |++- \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |++- \rangle - (13) \cdot |++- \rangle) \\
&= a_T \cdot (|++- \rangle - |-++ \rangle) \\
&= (e \cdot |++- \rangle + (12) \cdot |++- \rangle) - (e \cdot |-++ \rangle + (12) \cdot |-++ \rangle) \\
&= 2|++- \rangle - |-++ \rangle - |+-+ \rangle. \\
a_T \cdot b_T \cdot |+ -+ \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |+ -+ \rangle - (13) \cdot |+ -+ \rangle) \\
&= a_T \cdot (|+ -+ \rangle - |+ -+ \rangle) = 0. \\
a_T \cdot b_T \cdot |-++ \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |-++ \rangle - (13) \cdot |-++ \rangle) \\
&= a_T \cdot (|-++ \rangle - |+-+ \rangle) = a_T \cdot |-++ \rangle - a_T \cdot |+-+ \rangle \\
&= (e \cdot |-++ \rangle + (12) \cdot |-++ \rangle) - (e \cdot |+-+ \rangle + (12) \cdot |+-+ \rangle) \\
&= -2|+-+ \rangle + |-++ \rangle + |+-+ \rangle. \\
\\
a_T \cdot b_T \cdot |--- \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |--- \rangle - (13) \cdot |--- \rangle) \\
&= a_T \cdot (|--- \rangle - |--- \rangle) = 0. \\
a_T \cdot b_T \cdot |--+ \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |--+ \rangle - (13) \cdot |--+ \rangle) \\
&= a_T \cdot (|--+ \rangle - |+-- \rangle) \\
&= (e \cdot |--+ \rangle + (12) \cdot |--+ \rangle) - (e \cdot |+-- \rangle + (12) \cdot |+-- \rangle) \\
&= 2|--+ \rangle - |+-- \rangle - |-+- \rangle. \\
a_T \cdot b_T \cdot |-+- \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |-+- \rangle - (13) \cdot |-+- \rangle) \\
&= a_T \cdot (|-+- \rangle - |-+- \rangle) = 0. \\
a_T \cdot b_T \cdot |+-- \rangle &= a_T \cdot (e \cdot |+-- \rangle - (13) \cdot |+-- \rangle) \\
&= a_T \cdot (|+-- \rangle - |--+ \rangle) = a_T \cdot |+-- \rangle - a_T \cdot |--+ \rangle \\
&= (e \cdot |+-- \rangle + (12) \cdot |+-- \rangle) - (e \cdot |--+ \rangle + (12) \cdot |--+ \rangle) \\
&= -2|--+ \rangle + |+-- \rangle + |-+- \rangle.
\end{aligned}$$

De esta manera, la acción del simetrizador de Young devuelve los siguientes cuatro estados no nulos  $2|++- \rangle - |-++ \rangle - |+-+ \rangle$ ,  $-2|+-+ \rangle + |-++ \rangle + |+-+ \rangle$ ,  $2|--+ \rangle - |+-- \rangle - |-+- \rangle$  y  $-2|--+ \rangle + |+-- \rangle + |-+- \rangle$ . Este conjunto no es linealmente independiente. Es necesario elegir

---

<sup>1</sup> $e$  es el elemento identidad

dos vectores para formar un conjunto linealmente independiente, en este caso se eligió

$$2|++\rangle - |+ - \rangle - |- ++\rangle \text{ y } 2| - - \rangle - |- + \rangle - |+ - - \rangle. \quad (2-5)$$

El resto de la base para el espacio de tres estados de dos niveles se puede obtener simetrizando, es decir, aplicando el mismo procedimiento por el que se obtuvo 2-5, utilizando cualquier relleno para el tablon horizontal:

$$|+++ \rangle, |--- \rangle, |++-\rangle + |+ - \rangle + |- ++\rangle \text{ y } |--+\rangle + |- + \rangle + |+ - - \rangle. \quad (2-6)$$

De esta manera es posible separar el espacio de Hilbert en subespacios con distintos tipos de comportamiento bajo el intercambio de partículas:

- Simétrica: invariante bajo cualquier permutación de partículas, por ejemplo, los estados 2-5 son simétricos.
- Antisimétricas: cambia de signo bajo cualquier permutación impar.
- Mixta: con esta nos referimos a que el estado es simétrico a antisimétrico bajo la permutación de un subconjunto de las partículas que lo conforman. Un ejemplo de esto último es el estado  $2|++\rangle - |- ++\rangle - |+ - \rangle$  es simétrico bajo el intercambio de las dos primeras partículas.

Para finalizar esta sección, es útil la siguiente aclaración. Tomando en cuenta que el sistema que se está estudiando es un conjunto de espines distinguibles, en este trabajo los estados de una partícula  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  denotan los posibles estados de un sistema de dos niveles, qubit, siendo  $|-\rangle$  representando el estado con espín  $-1/2$  y  $|+\rangle$  el estado que tiene espín  $1/2$  en unidades de  $\hbar$ .

### 2.3. Descomposición del espacio de Hilbert

Un resultado de la teoría de representaciones lineales de espacios vectoriales complejos, es que el producto tensorial en un espacio vectorial complejo es equivalente a la suma directa de representaciones irreducibles del grupo de transformaciones lineales sobre dicho espacio vectorial, con la suma recorriendo las particiones del entero correspondiente a la potencia a la que se elevó el espacio vectorial y cada representación irreducible con multiplicidad el número de tablon estándar de la partición correspondiente. [Ful97] El espacio vectorial para un sistema de un qubit es  $\mathbb{C}^2$ , por lo que para un sistema de  $n$  qubits es  $\otimes^n \mathbb{C}^2$ . De esta manera, la descomposición en representaciones irreducibles del grupo  $GL(\mathbb{C}^2)$  etiquetadas por la partición  $\lambda$  de  $n$ ,  $(\mathbb{C}^2)^\lambda$ , es la siguiente

$$\otimes^n \mathbb{C}^2 \cong \bigoplus_{\lambda \text{ part. } n} ((\mathbb{C}^2)^\lambda)^{\oplus f^\lambda} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \underbrace{(\mathbb{C}^2)^\lambda \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}^2)^\lambda}_{f^\lambda \text{ veces}}, \quad (2-7)$$

con  $f^\lambda$  el número de tablon estándar sobre  $\lambda$  partición de  $n$ .

Ésta descomposición es crucial desde el punto de vista de este trabajo, ya que las representaciones irreducibles de  $GL(\mathbb{C}^2)$ ,  $(\mathbb{C}^2)^\lambda$ , son equivalentes a la imagen de un simetrizador de Young,  $c_T$ , con  $T$  una numeración de la partición  $\lambda$ . De esta manera es que se logra obtener una base que muestre explícitamente los distintos tipos de simetría que se puede tener.

Para un sistema de dos qubits es posible generar una base en la que tres estados sean simétricos y uno antisimétrico:  $\{|++\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), |--\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)\}$ . Este resultado se puede reproducir al aplicarle los simetrizadores de Young  $c_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}$  y  $c_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$  a la base computacional de dos qubits.

En general, para un sistema de  $n$  qubits, la representación  $(\mathbb{C}^2)^{(n)}$  nos dará el subespacio simétrico y  $(\mathbb{C}^2)^{(1^n)}$  el antisimétrico. Este último, sabemos que sólo es distinto del espacio vectorial trivial  $\mathbf{0}$  para un sistema de dos qubits, como consecuencia del principio de exclusión de Pauli. Las demás particiones nos darán un nuevo tipo de simetría, llamadas simetrías mixtas. Por ejemplo, una base para  $(\mathbb{C})^{(2,1)}$  está dada por los estados (2-5) que son invariantes bajo el intercambio de las primeras dos partículas.

Dado que  $f^\lambda$  sólo es 1 para  $\lambda = (n)$  uno podría esperar que los simetrizadores de Young nos provean con una base que sea ortogonal entre cada subespacio. Esto no es así, ya que cómo se puede comprobar en (2-5) y (2-6), la base que se construye utilizando los simetrizadores de Young no lo es del todo. Para resolver este problema se hará uso de la teoría de acoplamiento binario, ver 3.1, que produce una base ortonormal; se podría utilizar Gram-Schmidt para hacer que para cualesquiera dos elementos de la base distintos, su producto punto sea cero, pero dado que este método es numéricamente inestable, se buscó una alternativa más sofisticada.

## Capítulo 3

# Teoría de acoplamiento binario

Dado que la base obtenida al realizar el proceso explicado en el capítulo 2 no es ortogonal, es preciso encontrar una manera de construir una base ortogonal que lleve a cabo la misma descomposición referida en la sección 2.3<sup>1</sup>. Para ello se introduce la teoría de acoplamiento binario que mostrará la manera de generar un conjunto completo de observables que conmuten cuya base de eigenvectores simultáneos es ortogonal y realiza la descomposición deseada. En este mismo capítulo se mostrará el algoritmo que llevará a cabo la construcción explícita de los estados de la base y un ejemplo de su utilización para producir algunos de los estados para un sistema de tres qubits. En este capítulo se especializará el formalismo generado en la sección 2 para partículas *distinguibles* con espín 1/2.

### 3.1. Teoría de acoplamiento binario de momento angular

En esta sección se mostrará el conjunto completo de observables que conmutan cuyos eigenvectores simultáneos producen la descomposición del espacio de Hilbert de la misma manera que la dada en la sección [2.3] del capítulo 2. Esta exposición está inspirada en [Lou08].

Consideremos un conjunto de  $n$  partículas, en donde la partícula  $i$  tiene espín  $\mathbf{J}_i = \{J_{ix}, J_{iy}, J_{iz}\}$ , con número cuántico angular  $j_i$ . Un primer conjunto de observables que conmutan que se puede construir está dado por

$$\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}, \dots, J_n^2, J_{nz}\}, \quad (3-1)$$

con  $J_i^2$  es el operador de momento angular de la partícula  $i$  elevado al cuadrado y  $J_{iz}$  la proyección del momento angular  $\mathbf{J}_i$ . Este conjunto de observables sólo toma en cuenta los momentos angulares de cada partícula mientras que las necesidades de este trabajo requieren de un conjunto en donde aparezca el operador de momento angular total y su proyección. Un conjunto de observables que conmutan y que tiene el momento angular total y su proyección es

$$\{J^2, J_1^2, J_2^2, \dots, J_n^2, J_z\}, \quad (3-2)$$

Con  $\mathbf{J}$  el momento angular total,  $J_z$  la proyección de momento angular total, y el resto, los cuadrados de los momentos angulares de cada partícula. Sin embargo, este conjunto *no es completo*, en el sentido

---

<sup>1</sup>El autor del trabajo está consciente que es posible trabajar en bases no ortogonales o también se podría utilizar Gram-Schmidt para obtener una base, sin embargo, el formalismo presentado aquí permite una obtención elegante y numéricamente estable de cada bloque, por lo que se optó por su uso.

de que los eigenvectores simultáneos no producen una base completa para el espacio de Hilbert.

Para completar este conjunto es necesario introducir nuevos operadores que conmuten con el resto y, a su vez, entre ellos. Este conjunto lo formamos con los llamados *operadores de momento angular intermedio* que serán denotados con la letra  $\mathbf{K}$ . Los operadores de momento angular intermedio, son el resultado de la suma de operadores de momento angular de partículas con índice adyacente, es decir,  $\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_{i\pm 1}$  o de la suma de otro operador de momento angular intermedio, *verbigracia*,  $\mathbf{J}_i + \mathbf{K}_1$ , en donde  $\mathbf{K}_1$  contiene como sumando a uno de los operadores  $\mathbf{J}_{i\pm 1}$ .

**Ejemplo 3.1.1** Para un sistema de tres espines  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$  y  $\mathbf{J}_3$ , se tienen dos posibles momentos angulares intermedios: en el primer caso se tiene  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  y como segunda alternativa  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$ . En el caso de cuatro espines un posible conjunto de momentos angulares intermedios es  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ ,  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_3$ .

Con los operadores de momento angular intermedios se puede formar un conjunto completo de observables con  $2n$  elementos, debido a que los operadores  $K_i^2$  conmutan con  $J_i^2$ ,  $J^2$  y  $J_z$ . De esta forma, los estados de este acoplamiento tendrán como números cuánticos  $j$ ,  $m$ ,  $\mathbf{j}$  y el conjunto  $\mathbf{k} = \{k_i\}$ —los números cuánticos angulares asociados con el momento angular  $\mathbf{K}_i$ . Estos estados serán denotados por

$$|\mathbf{j}; \mathbf{k}_{j,m}\rangle. \quad (3-3)$$

Considérese un sistema formado por  $n$  partículas con momentos angulares  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots$ , y  $\mathbf{J}_n$  y  $U \in \text{SU}(2)$ , el grupo de matrices unitarias  $2 \times 2$  con determinante 1. A la partícula  $i$ -ésima del sistema se le asocia la representación irreducible  $D^{j_i}(U)$  de tamaño  $2j_i + 1$  de  $U$ . Si se calcula el producto tensorial de estas representaciones irreducibles  $D(U) \equiv \bigotimes_i D^{j_i}(U)$ , la base formada por los eigenestados ec. (3-3), descompondrá este producto en una suma de representaciones irreducibles de  $U$  de tamaño  $2j + 1$ , con  $j$  uno de los posibles resultados de la suma de momento angular  $J_1 + J_2 + \dots + J_n$ ,

$$D(U) = \bigoplus_j (D^j(U))^{\oplus f^\lambda}, \quad (3-4)$$

con  $f^\lambda$  el mismo valor que aparece en la sección 2.3. Los subespacios generados por los estados 3-3 asociados al mismo valor de  $j$  pero que tiene un valor distinto de  $k$  son equivalentes y el número de subespacios asociados al mismo valor de  $j$  pero con  $\mathbf{k}$  distinto es  $f^\lambda$ . Esta descomposición es idéntica a la que se hace del espacio de Hilbert de  $n$  partículas mostrado en la sección 2.3.

**Ejemplo 3.1.2** Continuando el primer ejemplo de este capítulo ej. 3.1.1, considere que  $K$  está dado por  $K = J_1 + J_2$ . Si el momento angular de cada espín es  $1/2$ , los posibles valores de  $k$  son 0 y 1. Para  $k = 0$  el único valor de momento angular  $j$  es  $3/2$ . La otra posibilidad,  $k = 1$ , la suma de momento angular permite dos valores  $j$ :  $j = 1/2$  y  $j = 3/2$ . De esta forma, el conjunto de eigenvectores 3-4 que descompondrá el espacio de Hilbert de tres espines corresponde a los estados:

$$\begin{aligned} &|1/2, 1/2, 1/2; 1_{3/2, 3/2}\rangle, |1/2, 1/2, 1/2; 1_{3/2, 1/2}\rangle, \\ &|1/2, 1/2, 1/2; 1_{3/2, -1/2}\rangle, |1/2, 1/2, 1/2; 1_{3/2, -3/2}\rangle, \\ &|1/2, 1/2, 1/2; 1_{1/2, 1/2}\rangle, |1/2, 1/2, 1/2; 1_{1/2, -1/2}\rangle, \\ &|1/2, 1/2, 1/2; 0_{1/2, 1/2}\rangle, |1/2, 1/2, 1/2; 0_{1/2, -1/2}\rangle. \end{aligned}$$

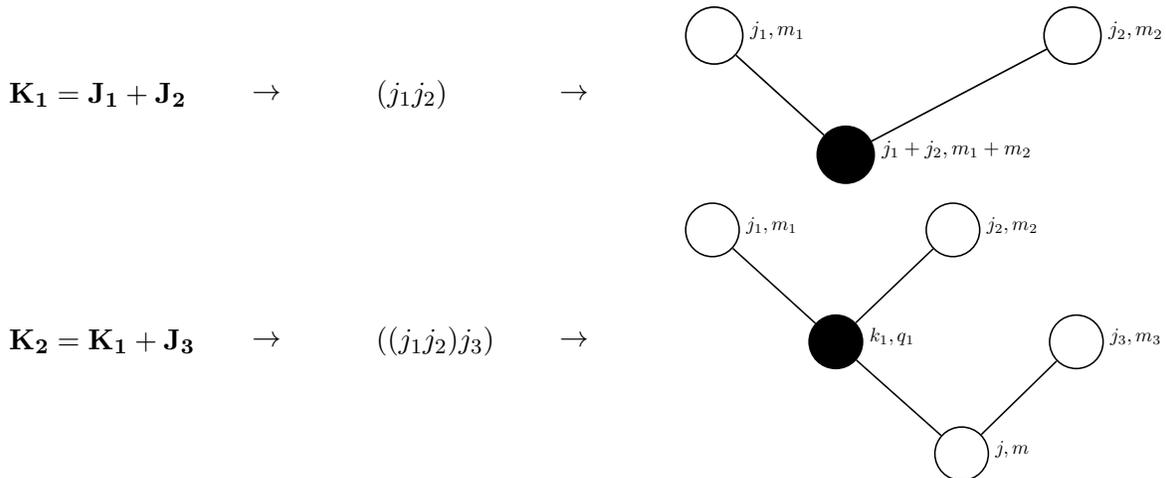
Como se puede apreciar, se tienen dos pares de estados con  $j = 1/2$ , uno con  $k = 0$  y el otro con  $k = 1$ . Los subespacios generados por cada par de estados serán equivalentes. Esto está expresado en ec. (3-4), observando que  $f^{\lambda=(2,1)} = 2$ .

Antes de mostrar la forma de expresar los estados  $|j; \mathbf{k}_{j,m}\rangle$  en términos de la base computacional, es necesario introducir los conceptos de **tercia** y **coeficiente de Clebsh-Gordan generalizado**, lo cual se hace en la siguiente sección 3.2.

### 3.2. Coeficiente de Clebsh-Gordan generalizado y terciá

Una forma de representar la suma de momento angular es utilizar paréntesis sobre cada pareja de sumandos. Por ejemplo, para la suma de momento angular  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{J}_r + \mathbf{J}_s$ , se puede escribir como  $(j_r, j_s)$ , y para representar la suma de este con otro momento angular  $\mathbf{J}_l$ , es decir,  $\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_l$ , es posible escribirlo como  $(k_l, j_l) = ((j_r, j_s), j_l)$ . Con esta manera de denotar la suma de momento angular, se tiene que  $(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) + \mathbf{J}_3$  pasa a  $((j_1, j_2), j_3)$  y  $\mathbf{J}_1 + (\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3)$  a  $(j_1, (j_2, j_3))$ .

A su vez, esta abstracción se puede representar gráficamente utilizando las siguientes reglas



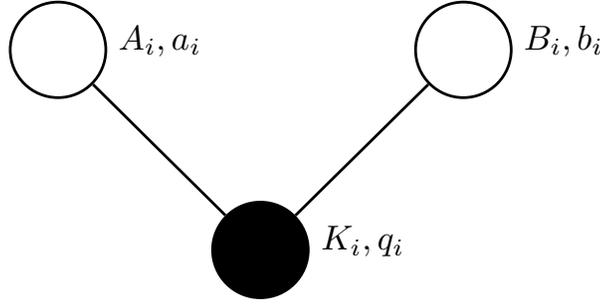
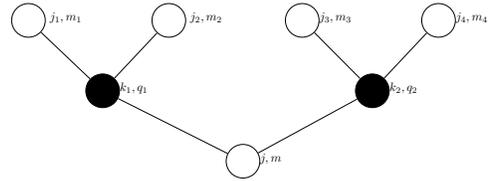


Figura 3-1: Diagrama de una tercia que muestra su forma en general.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4, \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2. \end{aligned}$$

$$\rightarrow ((j_1 j_2)(j_3 j_4)) \rightarrow$$



Nótese el hecho de que los vértices *internos* se dibujan en **negro**. En lugar de poner  $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  se colocará  $\mathbf{K}_1$  y  $m_1 + m_2 = q_1$ , con el fin de disminuir la notación en los vértices. Para este trabajo, el orden de la suma de momento angular estará dado por

$$(\dots((j_1, j_2), j_3), \dots, j_{n-1}), j_n),$$

dicho de otra manera, para  $n$  partículas se suma el momento angular de la primera con el de la segunda, al resultado lo denotamos por  $(j_1, j_2)$ ; a este valor le sumamos el momento angular de la tercera partícula:  $((j_1, j_2), j_3)$ , se continúa la suma de momento angular del resto de partículas hasta llegar a la última,  $n$ , ver fig. 3-2. Esta manera de realizar la suma de momento angular desde el par de paréntesis más anidado produce los siguientes valores de momento angular intermedio  $k_i$ ,

$$\begin{aligned} (j_1, j_2) &= \mathbf{K}_1 \rightarrow k_1, \\ (k_1, j_3) &= \mathbf{K}_2 \rightarrow k_2, \\ (k_2, j_4) &= \mathbf{K}_3 \rightarrow k_3, \\ &\vdots \\ (k_{n-3}, j_{n-1}) &= \mathbf{K}_{n-2} \rightarrow k_{n-2}, \\ (k_{n-2}, j_n) &= \mathbf{J} \rightarrow j. \end{aligned}$$

Así, se crea una gráfica con  $n + (n - 2) + 1$  vértices, ver fig. 3-2; esta cantidad es debida a que se tienen  $n$  vértices *externos* que estarán etiquetados por un valor de espín (en este trabajo siempre  $1/2$ ) junto a su proyección ( $\pm 1/2$ ),  $n - 2$  vértices *internos* que estarán etiquetados por un momento angular intermedio acompañados por su proyección, más un *vértice raíz* que estará etiquetado por el valor de momento angular total y su proyección.

Se define una **configuración de momento angular intermedio**, al conjunto de  $n - 2$  momentos angulares intermedios  $k_i$  que contiene los resultados parciales de la suma de momento angular, es decir, los resultados de las sumas de los elementos entre paréntesis. A partir de aquí, sólo se utilizará la convención de suma de momento angular mencionada en el primer párrafo de esta sección.

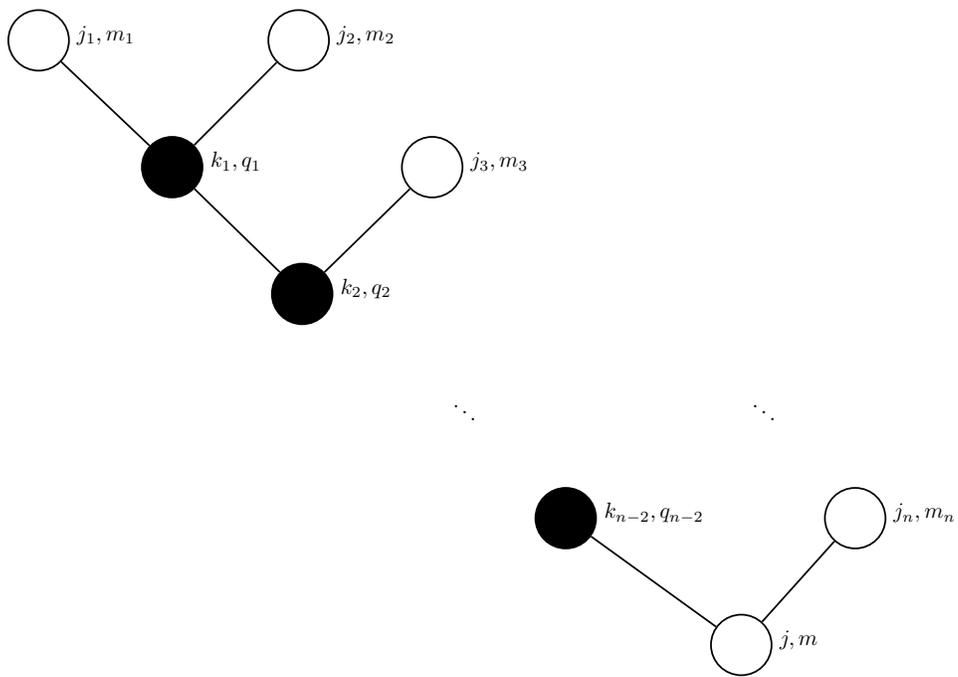


Figura 3-2: Esta figura muestra un árbol para una configuración totalmente general formado por un estado constituido por un conjunto de  $n$  partículas en donde la  $i$ -ésima partícula tiene momento angular  $\mathbf{J}_i$  con proyección  $m_i$ . El momento angular total  $j$  con proyección  $m$  y una configuración de momento angular intermedio  $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_{n-2}\}$ .

El primer paso para obtener un estado ec. (3-3) para un conjunto de espines  $\mathbf{J}_i$ , es fijar un valor de momento angular total  $j$ , la proyección de este momento angular  $m$ , y una configuración de valores de momento angular intermedio  $\mathbf{k}$ . Utilizamos estos valores para rellenar *parcialmente* la gráfica fig. 3-2, parcialmente, debido a que aún es necesario llenar las proyecciones de los vértices externos e internos,  $q_i$  y  $m_i$ .

Los valores de  $m_i$  vendrán dados por el estado de la base computacional  $|m_i\rangle$  sobre el que se proyecte el estado ec. (3-3). Al fijar los valores de  $m_i$  también se fijan los valores de  $q_i$  ya que, como se verá a continuación, para que el coeficiente de Clebsh-Gordan sea distinto de cero, se tiene que cumplir la condición  $m_i + m_{i+1} = q_i$ . A la gráfica *parcialmente llena* cuando se sustituyen los valores de  $m_i$  se le llama *gráfica llena*.

Definidos los conceptos de gráfica parcialmente llena y gráfica llena, es momento de definir una *tercia*, el coeficiente de CG asociado a una *tercia* y el coeficiente de CG generalizado asociado a una gráfica. Una **tercia** es el siguiente conjunto de tres vértices y dos aristas pertenecientes a un árbol, ver fig. 3-1. Por cada *tercia* asociamos un coeficiente de Clebsh-Gordan<sup>2</sup> utilizando las etiquetas de cada vértice:  $C(\text{tercia}) = C_{a_i, b_i, q_i}^{A_i, B_i, K_i}$ . Tomando todas las *tercias* en una gráfica, las multiplicamos para obtener un coeficiente de **Clebsh-Gordan generalizado**

$$C_{(\mathbf{j}\mathbf{m}; \mathbf{k})_{jm}} = \prod_{i=1}^{n-1} C_{a_i, b_i, q_i}^{A_i, B_i, K_i}. \quad (3-5)$$

Definidas las *tercias* y los coeficientes de Clebsh-Gordan generalizados, se calcula la forma de los estados ec. (3-4) en términos de la base computacional. Consideremos la transformación unitaria para conocer la representación de este estado. Para ellos, se le aplica la identidad en forma de

$$\mathbf{1} = \sum_{b \in \text{base computacional}} |b\rangle\langle b|,$$

$$|\mathbf{j}; \mathbf{k}_{j,m}\rangle = \sum_{b \in \text{base computacional}} |b\rangle\langle b|\mathbf{j}; \mathbf{k}_{j,m}\rangle,$$

en donde,  $\langle b|\mathbf{j}; \mathbf{k}_{j,m}\rangle$  está dado por el coeficiente de Clebsch-Gordan generalizado ec. (3-5).

---

<sup>2</sup>Se utiliza la convención para los coeficientes de Clebsch-Gordan de [Lou08].

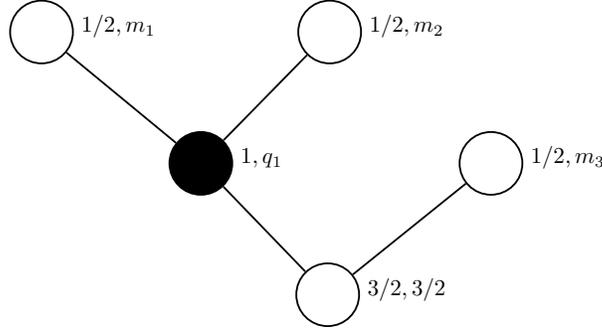


Figura 3-3: Este árbol corresponde al coeficiente de Clebsch-Gordan generalizado  $\langle m_1 m_2 m_3 | \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2} \rangle = C_{m_1, m_2, q_1}^{1/2, 1/2, 1} C_{q_1, m_3, 3/2}^{1, 1/2, 3/2}$ .

**Ejemplo 3.2.1** Para calcular la representación en la base computacional del estado  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2}\rangle$ , se fijan los valores  $k \rightarrow 1, j \rightarrow 3/2$  y  $m \rightarrow 3/2$  en el árbol fig. 3-3. El coeficiente de Clebsch-Gordan asociado al estado  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2}\rangle$  es

$$\langle m_1 m_2 m_3 | \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2} \rangle = C_{m_1, m_2, q_1}^{1/2, 1/2, 1} C_{q_1, m_3, 3/2}^{1, 1/2, 3/2}.$$

A través de sustitución directa se obtiene que el único estado de la base computacional que produce un coeficiente generalizado de Clebsch-Gordan no nulo es  $|+++ \rangle$ :

$$\langle +++ | \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2} \rangle = C_{1/2, 1/2, 1}^{1/2, 1/2, 1} C_{1, 1/2, 3/2}^{1, 1/2, 3/2} = 1,$$

por lo que la representación del estado  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2}\rangle$  en términos de la base computacional es

$$|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{3/2, 3/2}\rangle = |+++ \rangle.$$

**Ejemplo 3.2.2** Para corroborar el resultado de simetría mixta del que se habló en la sección 2.3, se calculan las representaciones de los estados  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{1/2, 1/2}\rangle$  y  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{0}_{1/2, 1/2}\rangle$ . Las representaciones son calculadas con el procedimiento mostrado en ej. 3.2.1:

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{1/2, 1/2}\rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}} |+- \rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |-++ \rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |+- \rangle, \\ |\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{0}_{1/2, 1/2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |+- \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-++ \rangle. \end{aligned}$$

Con este resultado se puede ver que el estado  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{1}_{1/2, 1/2}\rangle$  es simétrico bajo el intercambio de los primeros dos espines mientras que el estado  $|\mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2, \mathbf{1}/2; \mathbf{0}_{1/2, 1/2}\rangle$  es antisimétrico bajo el intercambio de las primeras dos partículas, idéntico a lo indicado por los simetrizadores de Young.

De esta manera, al calcular la representación de los estados ec. (3-3) en términos de la base compu-

tacional es posible descomponer el operador de evolución como se muestra en la ec. (3-4), lo que nos permitirá estudiar el operador de evolución en bloques y así analizar la evolución del sistema por bloques etiquetados por momento angular. Esto se hará en el capítulo 4. Con los procedimientos mostrados en este capítulo se genera la base 3-3 que es ortogonal y que cumple las relaciones de simetría buscadas dictadas por los resultados de la sección 2.3. Además de esto, la base nos permitirá etiquetar los estados por un valor de momento angular,  $J$ , y una configuración de momento angular intermedio,  $k$ , dando familiaridad a dicha descomposición y no quedándose en una curiosidad matemática.

# Capítulo 4

## Modelos

### 4.1. Modelo de Ising unidimensional

En esta sección se hablará del modelo de Ising unidimensional [PP07] como una motivación para la elaboración de este trabajo.

El sistema está compuesto por un anillo de  $n$  partículas con espín  $1/2$  que interactúan con sus vecinos más cercanos vía una interacción homogénea de Ising adimensional con intensidad  $J$ , llamado interacción inter-espín, que es periódicamente pateada por un campo magnético adimensional  $\mathbf{b}$ . El hamiltoniano es

$$J \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \delta(t) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b} \cdot \sigma_j,$$

con  $\mathbf{b}$  representando un campo magnético homogéneo,  $J$  la intensidad de la interacción interespín y  $\delta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n)$ , un tren de impulsos delta.

Durante la evolución sin la patada del campo magnético, el sistema evoluciona con el propagador unitario *periodo-a-periodo*

$$U_{\text{Ising}}(J) = \exp\left(-iJ \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right),$$

y durante la acción de la patada por el operador unitario

$$U_{\text{patada}}(\mathbf{b}) = \exp\left(-i \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b} \cdot \sigma_j\right),$$

con  $\sigma_j = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  un vector con las matrices de Pauli. De esta manera, el operador de Floquet<sup>1</sup> para un periodo es

$$U_{\text{KI}} = U_{\text{Ising}} U_{\text{patada}}.$$

Se impone la condición de periodicidad para cerrar la cadena:  $\sigma_n = \sigma_0$ .

El sistema cuenta con varias simetrías, la que es particularmente relevante a los ojos de este trabajo

---

<sup>1</sup> El nombre operador de Floquet viene dado por el teorema de Floquet que enuncia la forma del operador de evolución para un sistema pateado periódicamente. Para un breve comentario sobre este tema revisar Apéndice B. Para una revisión más completa se puede revisar [DR14] y las referencias ahí mencionadas.

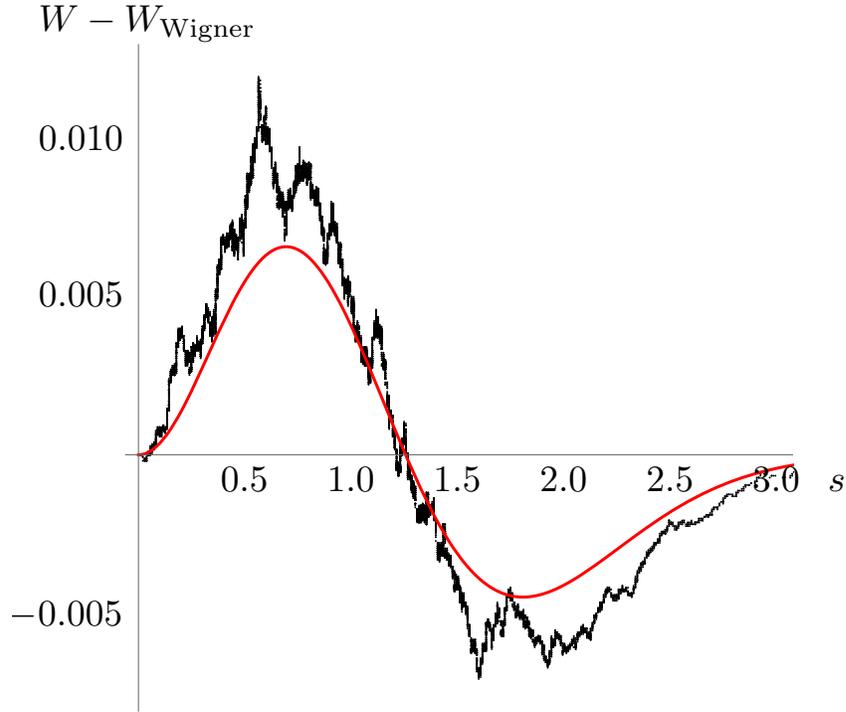


Figura 4-1: La gráfica ruidosa muestra la diferencia entre la distribución de espaciamiento integrada entre la cadena con los parámetros  $J = 0.7$ ,  $\mathbf{b} = (0.9, 0.0, 0.9)$  y  $k = 2$  y la aproximación de Wigner para el ensemble ortogonal gaussiano,  $\int_0^s \bar{s}^2 32/\pi^2 e^{-\bar{s}^2 4/\pi}$ . La curva roja muestra la diferencia entre la interpolación de la serie de Taylor del resultado exacto para el separamiento entre vecinos cercanos, y el resultado asintótico de Dyson  $((d/ds)2^{-9/8}e^B|2\pi s - 1|^{-1/8}e^{-\pi^2 s^2/4 + \pi s/2})$  y la aproximación de Wigner, escrita anteriormente, para la distribución de acumulativa del separamiento entre vecinos cercanos [DH90].

es la invarianza bajo la rotación de partículas de la cadena un sitio a la vez. La acción del operador  $T$ , el que lleva a cabo la rotación definida, sobre la base computacional es

$$T|m_0 m_1 \cdots m_{L-1}\rangle = |m_{L-1} m_0 \cdots m_{L-2}\rangle. \quad (4-1)$$

Los eigenvalores de este operador son

$$\exp(2\pi i k/L), \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (4-2)$$

De esta manera el espacio de Hilbert se puede descomponer en  $L$  subespacios invariantes bajo  $T$ , cada uno de estos subespacios etiquetado por un valor de  $k$ , el valor que aparece en el eigenvalor de  $T$  ec. (4-2) y fig. 4-1.

En la figura fig. 4-1 se puede apreciar el comportamiento caótico de la cadena con 19 elementos,  $\mathbf{b} = (0.9, 0.0, 0.9)$ ,  $J = 0.7$  y eigenespacio caracterizado por  $k = 5$ . En ella se puede observar que la distribución de espaciamiento de niveles acumulativa (integrada) de la cadena pateada y la de Wigner [Kot14] son muy parecidas.

La cadena pateada, hasta el momento, no tiene solución analítica y se cree que no es integrable. Se sabe que el sistema, en un rango corto del espectro, coincide con la teoría de matrices aleatorias, lo

que fundamenta el pensar que dicho modelo no es integrable. Sin embargo, para un largo alcance se producen discrepancias con la teoría de matrices aleatorias [PP07].

## 4.2. Modelo de Ising todos contra todos pateado

### 4.2.1. Motivación

En la sección anterior, se mostró el caso de un sistema de espines invariante bajo una rotación, lo que permitió separar el espacio de Hilbert en subespacios etiquetados por un número asociado a la rotación. Dicha descomposición permitió el análisis computacional de la dinámica del sistema. La propuesta de este trabajo es analizar un sistema que sea invariante bajo cualquier intercambio de partículas, a través de la separación de su espacio de Hilbert en subespacios generados por partículas con un determinado tipo de simetría. Con este sistema, al que en la literatura se nombra por modelo de Ising todos-contra-todos, y las herramientas desarrolladas en el capítulo 2, se procede a separar el espacio de Hilbert y estudiar cada una de sus componentes.

### 4.2.2. Hamiltoniano

Para el modelo de Ising, la partícula en el sitio  $i$  estará descrita por operadores de Pauli  $\sigma_i^\alpha$ , con  $\alpha \in \{x, y, z\}$ . De este modo, el hamiltoniano del modelo de Ising todos-contra-todos es:

$$H_1 = JH_I, \quad H_I \equiv \sum_{i < j} \sigma_i^z \sigma_j^z.$$

A continuación, se define el hamiltoniano de Zeeman para un campo magnético homogéneo  $\mathbf{b}$ . Siempre es posible seleccionar un sistema coordinado en el que  $\mathbf{b} = (b_x, 0, b_z)$  de esta manera el hamiltoniano de Zeeman tiene únicamente componentes reales:

$$H_0 = \sum \mathbf{b} \cdot \sigma_i.$$

Los parámetros  $J$  (interacción interespin),  $b_x$  y  $b_z$  son parámetros independientes y adimensionales del modelo. Se considera un hamiltoniano dependiente del tiempo, con el campo magnético modulado por pulsos  $\delta$ -periódicos, con periodo  $\tau$ :

$$H(t) = H_1 + H_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k\tau).$$

El operador de Floquet  $B$  permite realizar la evolución de un paso, en tiempo discreto, para el modelo, sobre un periodo del modelo y para este sistema, está definido como:

$$U_{KI} = U_{\text{Ising}}(J)U_{\text{patada}}(\mathbf{b}),$$

con

$$U_{\text{Ising}}(J) = \exp(-iH_1) = \exp(-iJH_I), \quad U_{\text{patada}}(\mathbf{b}) = \exp(-iH_0).$$

### 4.2.3. Simetrías en el espacio de parámetros

El operador de Floquet  $U_{\text{Ising}}(J)$  cuenta con la siguiente propiedad en la simetría del parámetro de interacción interespin

$$U_{\text{Ising}}(J + \pi/2) = \exp(-i(\pi/2)n)U_{\text{Ising}}(J).$$

Esta simetría se puede obtener del desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned} \exp\left(-i \sum_{i<j} \frac{\pi}{2} \sigma_i^z \sigma_j^z\right) &= \exp \sum_{i<j} \left(-i \frac{\pi}{2} \sigma_i^z \sigma_j^z\right) \\ &= \prod_{i<j} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \sigma_i^z \sigma_j^z\right) = \prod_{i<j} \mathbf{1} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_i^z \sigma_j^z \right] \\ &= \prod_{i<j} -i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_i^z \sigma_j^z = \prod_{i<j} -i \sigma_i^z \sigma_j^z \\ &= (-i)^{n(n-1)/2} \prod_{i<j} \sigma_i^z \sigma_j^z = \exp(-in(n-1)\pi/4) \prod_{i<j} \sigma_i^z \sigma_j^z. \end{aligned}$$

Existe una simetría similar para el campo magnético

$$U_{\text{patada}}(\mathbf{b} + \pi\mathbf{b}) = (-1)^n U_{\text{patada}}(\mathbf{b}).$$

Esto se puede ver del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} U_{\text{patada}}(\mathbf{b} + \pi\mathbf{b}) &= \exp\left(-i \sum_j \mathbf{b}(1 + \pi) \cdot \sigma_j\right) = U_{\text{patada}}(\mathbf{b}) \exp\left(-i\pi \sum_j \mathbf{b} \cdot \sigma_j\right), \\ &= U_{\text{patada}}(\mathbf{b}) \prod_j \exp(-i\pi \mathbf{b} \cdot \sigma_j) = U_{\text{patada}}(\mathbf{b}) \prod_j \mathbf{1} \left[ \cos \pi - i \mathbf{b} \cdot \sigma_j \sin \pi \right], \\ &= U_{\text{patada}}(\mathbf{b})(-1)^n. \end{aligned}$$

## 4.3. Modelo del Kicked Top

### Introducción

El *top*, castellanizado a trompo, es un sistema en el que el grado de libertad está dado por el momento angular  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ , en el que el cuadrado del vector de momento angular  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  es conservado. Se puede considerar el hamiltoniano que modela la precesión del vector  $\mathbf{J}$  alrededor de un campo magnético constante junto con un tren periódico de impulsos delta. Este hamiltoniano cumple con la conservación de momento angular  $\mathbf{J}^2$  [HKS87].<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Se puede observar la demostración de esta afirmación en Apéndice A.

### 4.3.1. Hamiltoniano

El momento angular total del sistema se representa como  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ , con las respectivas relaciones de conmutación. Un hamiltoniano con las características antes mencionadas es

$$H = \alpha J_x T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) + \frac{\tau}{2j + 1} J_z^2, \quad (4-3)$$

con  $j$  el valor de momento angular del sistema.  $\alpha$  y  $\tau$  son parámetros independientes del sistema. El primer término describe una precesión alrededor del eje  $y$  con frecuencia angular  $\alpha$  y el segundo una sucesión de patadas separadas un intervalo de tiempo  $T$ . Cada patada puede ser interpretada como una rotación alrededor del eje  $z$  por un ángulo proporcional a  $J_z$ , el factor de proporcionalidad tomando en cuenta la cantidad constante adimensional de acople  $\tau/(2j + 1)$ .

Para  $H_0 = \alpha J_x$  y  $H_1 = \tau J_z^2$ , el operador de Floquet es, haciendo  $T = 1$ , es decir, hacer que cada patada se de en un número entero de unidad de tiempo,

$$U = \exp\left(-\frac{i\tau J_z^2}{2j + 1}\right) \exp(-i\alpha J_x). \quad (4-4)$$

### 4.3.2. Top clásico

El Hamiltoniano antes escrito tiene como contraparte clásica el siguiente modelo

$$H(t) = H_0(\mathbf{J}) + H_1(\mathbf{J}) \sum \delta(t - n),$$

con  $H_0 = \alpha J_x$  y  $H_1 = \frac{\tau}{2} J_z^2$ .  $H_0$  genera una rotación sobre el eje  $x$  con velocidad  $\alpha$  y  $H_1$  es una rotación por un ángulo proporcional a  $J_z$ .

La evolución estroboscópica del sistema está dada por la aplicación  $F$  que manda  $\mathbf{J}(t_n) = (J_x, J_y, J_z)$  a  $\mathbf{J}(t_{n+1}) = (J'_x, J'_y, J'_z)$ , es decir, representa la evolución del sistema en pasos de tiempo discretos de la siguiente manera<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x0} \cos \tau (J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha) - (J_{y0} \cos \alpha - J_{z0} \sin \alpha) \sin \tau (J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha), \\ J_y &= J_{x0} \sin \tau (J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha) + (J_{y0} \cos \alpha - J_{z0} \sin \alpha) \cos \tau (J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha), \\ J_z &= J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Utilizando  $F$  con  $\mathbf{J}$  unitario y  $J_y < 0$  se obtienen las siguientes rebanadas del espacio fase del Kicked Top clásico utilizando los parámetros que se mencionan en cada imagen, ver fig. 4-2. En estas imágenes se puede observar la desaparición de las islas de movimiento regular y el aumento gradual del mar caótico, todo esto al aumentar el parámetro  $\tau$ .

### 4.3.3. Simetrías del Top cuántico

Este sistema es invariante bajo la rotación por un ángulo  $\pi$  en el eje  $\hat{i}$ , que deja tanto a  $J_x$  como a  $J_z^2$  invariantes. La rotación está dada por  $R = e^{i\pi J_x}$ . Sus eigenvalores son  $\pm 1$ , lo que nos da una simetría de paridad para este modelo que muy importante para el estudio de sus propiedades caóticas.

<sup>3</sup>La obtención de la aplicación estroboscópica así como su análisis clásico, puede ser visto en Apéndice C.

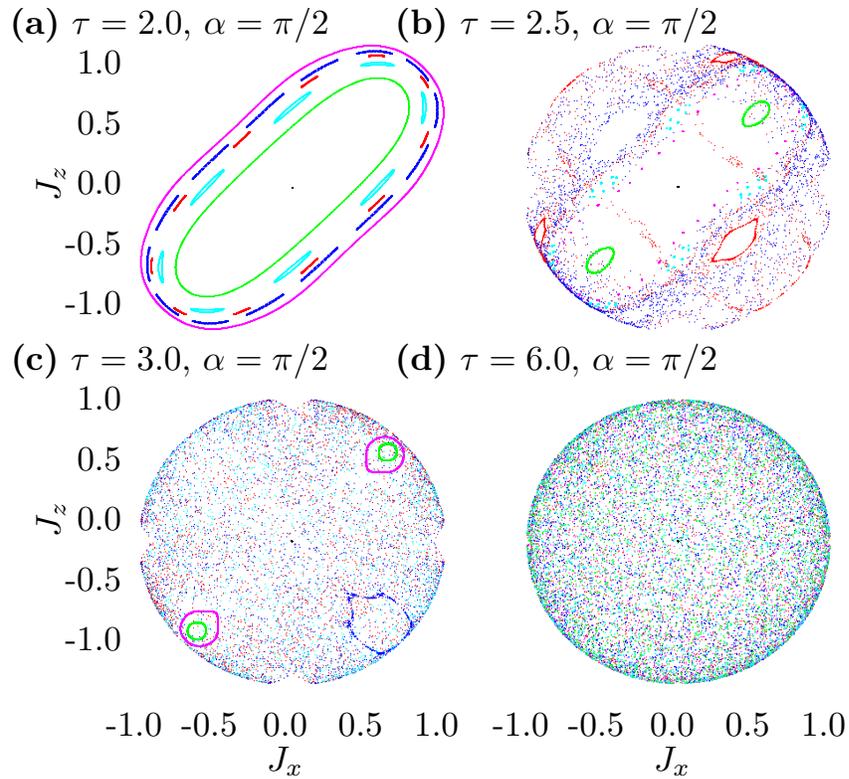


Figura 4-2: En esta gráfica se muestran secciones de Poincarè del espacio fase del Kicked Top para distintos valores del parámetro  $\tau$ . Los puntos de determinado color corresponden a distintas condiciones iniciales (salvo normalización): rojo  $\mathbf{J} = (-1, -3, -3)$ , azul  $(-1, -13/10, -2)$ , magenta  $(-1, -.3, -1)$ , verde  $(1, -1, 1)$ , cían  $(0, -2, 1)$  y negro  $(0, -2, 0)$ .

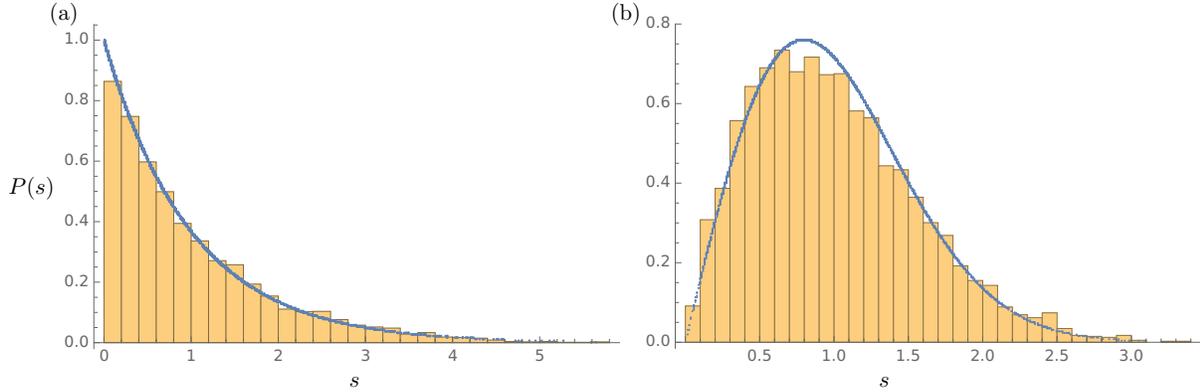


Figura 4-3: **(a)** Se tiene el Kicked Top con  $j = 100$ ,  $\alpha = 2$  y  $\tau \in [0.1, 0.3]$ ; la línea azul corresponde a la distribución de Poisson  $\exp(-s)$ . **(b)**  $P(s)$  del Kicked Top en el espacio con paridad positiva con  $j = 100$ ,  $\alpha = 1.7$  y  $\tau \in [10, 10.5]$ ; la línea azul representa el resultado analítico de la distribución de Wigner  $\frac{1}{2}\pi s \exp(-\pi s^2/4)$ .

#### 4.3.4. Análisis del top cuántico

Para estudiar la dinámica de los sistemas calculamos la distribución  $P(s)$ , es decir, la distribución de espaciamento de niveles de cuasienergía, que corresponde a la energía del sistema campo electromagnético-espines promediada en un intervalo patada-no patada del sistema. Particularmente, el Kicked Top presenta la simetría de paridad por lo que es posible estudiar por separado los subespacios con paridad positiva y con paridad negativa. En el caso de la figura fig. 4-3 se analiza el subespacio con paridad positiva.

En la figura **(a)** se trata de un Kicked Top con momento angular  $j = 100$ , el parámetro  $\alpha = 2$  y  $\tau$  tomando valores de 0.1 a 0.3 en intervalos de tamaño 0.01. Esto último significa que calculamos el conjunto de diferencias de las cuasienergías,  $\{s\}$ , para el caso con  $j = 100$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\tau = 0.1$ , posteriormente se utilizan los parámetros  $j = 100$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\tau = 0.11$ , a continuación para  $j = 100$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\tau = 0.12$  y así continúa hasta que  $\tau = 0.3$ . La figura **(a)** es el histograma de dicho conjunto  $\{s\}$ . Este mismo procedimiento es realizado con los parámetros  $j = 100$ ,  $\alpha = 1.7$  y  $\tau \in [10, 10.5]$  en intervalos de tamaño 0.01. Así es cómo se obtiene la figura **(b)**. No es necesario llevar a cabo el proceso conocido como *unfolding* debido a que la densidad de estados para este sistema resulta plana.

En el caso de la figura **(a)** al coincidir la  $P(s)$  con la que se obtiene de un proceso Poissoniano [Ber85] aunado al hecho que los parámetros con los que se logró son idénticos a los que producen una dinámica ordenada en el top clásico, es posible decir que el sistema se encuentra en un régimen integrable. Mientras que para la figura **(b)**, al coincidir la  $P(s)$  con la distribución de Wigner para el ensamble gaussiano ortogonal [BCS84], GOE, además de que los parámetros con los que se obtuvo son idénticos para los que se obtiene una dinámica desordenada para el top clásico, está justificado decir que el sistema se encuentra en un régimen caótico.

### 4.4. Equivalencia entre el modelo de Ising pateado y el Kicked Top

Recordamos la forma del operador de Floquet del Kicked Top es

$$\exp\left(-i\frac{\tau}{2j+1}J_z^2\right) \exp(-i\alpha J_x).$$

Para el modelo de Ising se tiene que  $J_z = \sum_i \sigma_i^z$  y  $J_x = \sum_i \sigma_i^x$ . Podemos hacer la siguiente observación. Si  $H_I = \sum_{i<j} \sigma_i^z \sigma_j^z$ , la interacción de Ising todos contra todos, entonces,

$$J_z^2 = (\sigma_1^z + \cdots + \sigma_n^z)(\sigma_1^z + \cdots + \sigma_n^z) = 2H_I + n\mathbb{1}.$$

Con lo anotado en el párrafo anterior, al hacer  $\tau/(2j+1) = 1$ ,  $J = 2$ ,  $b_z = 0$  y multiplicando por el operador  $\exp -in\mathbb{1}$ , el operador de Floquet del modelo de Ising todos contra todos se transforma en

$$\exp(-iJ_z^2) \exp(-ib_x J_x). \quad (4-6)$$

Al conservarse el momento angular al cuadrado,  $\mathbf{J}^2$ , en el Kicked Top, su espacio de Hilbert está generado por estados de la forma  $|j, m\rangle$ , con  $j$  el eigenvalor de  $\mathbf{J}$  y  $m$  uno de los posibles valores de la proyección,  $j \in [-j, j]$ . Por otro lado, el subespacio simétrico del modelo de Ising todos-contra-todos se obtiene de tomar el estado de la base computacional con el valor más alto de momento angular,  $n/2$ , y la proyección más alta ( $n/2$ ) y tomar los pasos intermedios de aplicarle el operador de aniquilación de momento angular,  $J_x - iJ_y$ , se obtiene una base simétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas.

De esta manera observamos que el Kicked Top y el modelo de Ising todos-contra-todos tiene la misma base y además su hamiltoniano tiene los mismos operadores. Por lo tanto, el subespacio simétrico del modelo de Ising todos-contra-todos es un Kicked Top. Sin embargo, el resto de subespacios no conocíamos a qué se lo podíamos asociar. Después de encontrar que el resto de espacios correspondía a estados con simetría mixta, empezamos a creer que se obtendría un nuevo tipo de sistema. Afortunadamente, se encontró con la teoría de acoplamiento binario la existencia del operador de momento angular intermedio, por lo que el sistema de nuevo conserva un tipo de momento angular por lo que obtenemos que cada subespacio también corresponde al Kicked Top [HKS87].

#### 4.4.1. Cambio de base

Al utilizar el algoritmo para crear una matriz de cambio de base para desarrollar la matriz que transforme al operador de Floquet en una forma diagonal por bloques. Con lo explicado en la subsección 4.4, se obtiene que cada bloque es el operador de Floquet del Kicked Top con espín  $j$  y los parámetros  $\alpha = 2b_x$  y  $\tau = (2j' + 1) \times 4$  con  $j'$  el valor de espín que le corresponde al bloque.

### 4.5. Resultados

Usando como guía los parámetros en los que el sistema clásico muestra caos [HKS87] se estudia en esta sección la dinámica de los bloques del operador de Floquet para sistemas de  $\gtrsim 100$  espines a través de la distribución de separación de niveles entre vecinos cercanos,  $P(s)$ .

En las figuras es posible observar que no se tiene una estructura bien definida para un único valor de momento angular. La estructura bien definida para la distribución de espaciamiento se obtiene al hacer un promedio sobre un conjunto de elementos con un valor de  $j$  parecido. Para poder estudiar el sistema de todos contra todos, se fijan dos parámetros:  $J$  y  $b_x$ . El valor de  $J$  es elegido de tal manera que el valor de  $\tau$  obtenido de la expresión coincida para un valor en el que se conoce el comportamiento del Kicked Top. Con el procedimiento anterior se cuenta con un valor de  $J$  y uno de  $j$ , por lo que para cada valor de  $j$  obtenemos un valor de  $\tau$ . En las gráficas 4-7, 4-8, 4-9 y 4-10 se hizo un promedio para 10 valores

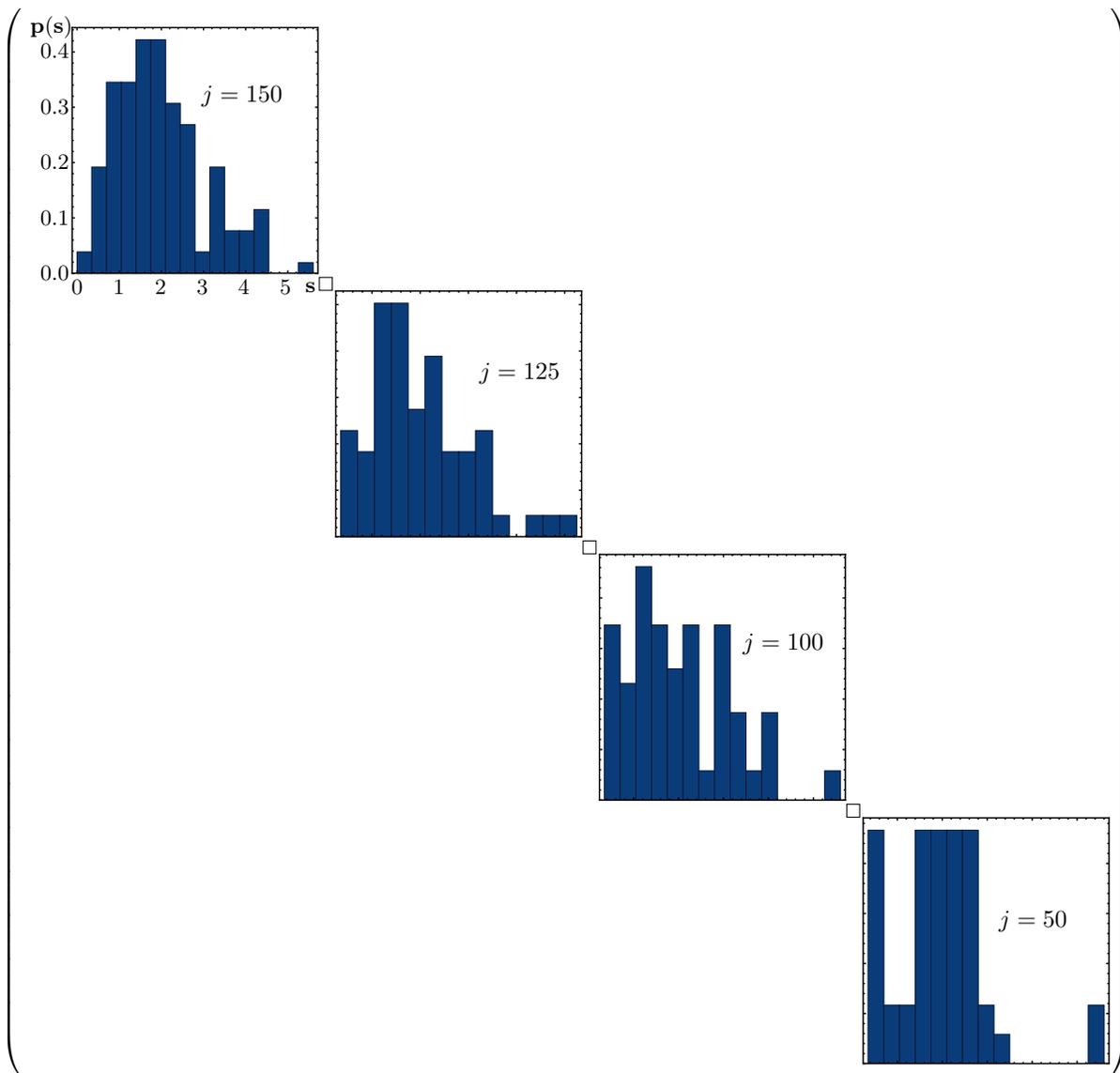


Figura 4-4: En esta gráfica se muestran las  $p(s)$  para los distintos bloques en que se descompone el operador de Floquet del modelo todos contra todos con parámetros  $b_z = 0$ ,  $b_x = \pi/2$  y  $J = 20/301$ . Cada bloque es etiquetado por un valor de momento angular.  $j = 125$  le corresponde  $\tau = 8.33887$ ,  $j = 100$  le corresponde  $\tau = 6.67774$  y para  $j = 50$  corresponde  $\tau = 3.35548$ .

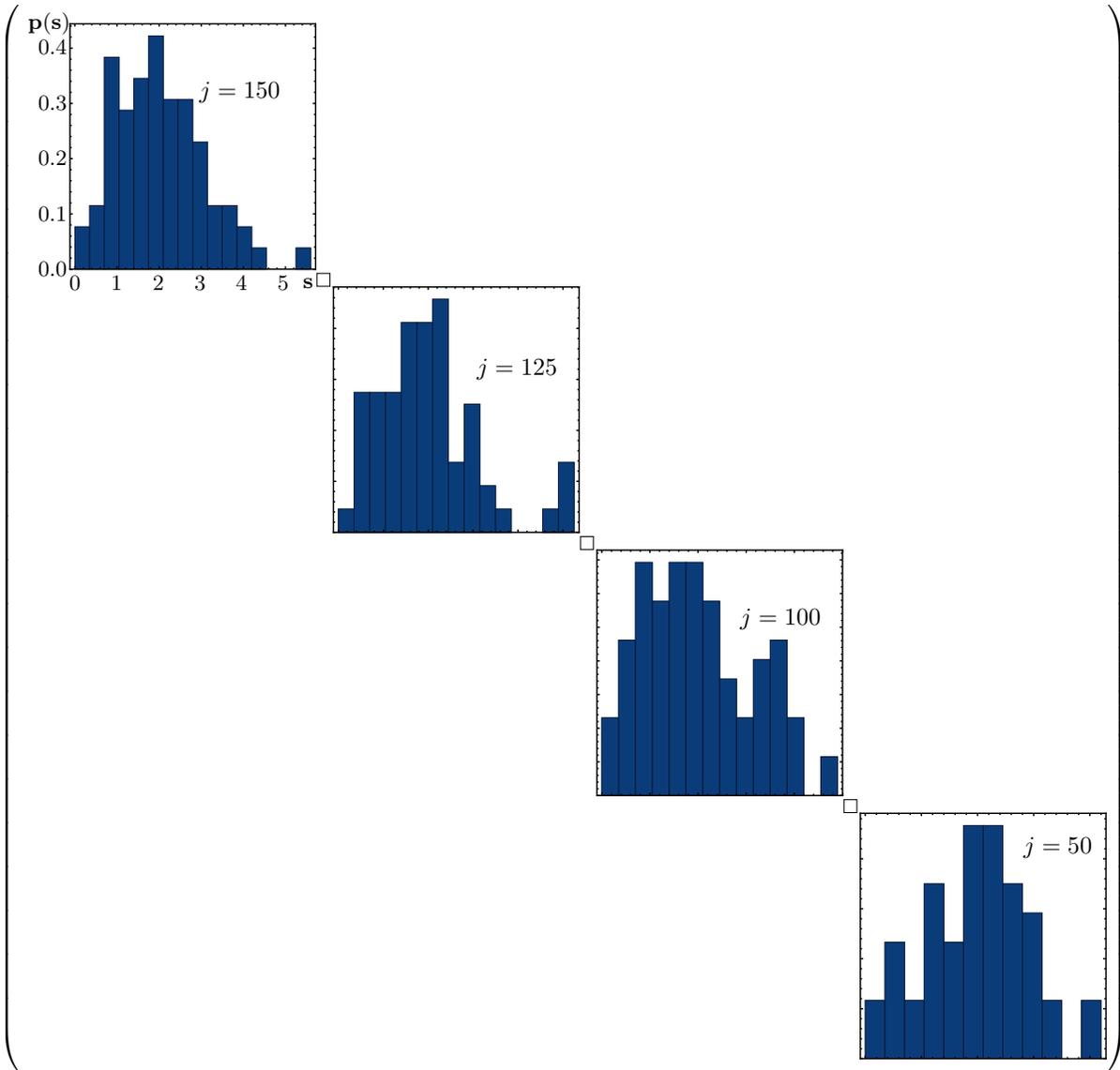


Figura 4-5: En esta gráfica se muestran las  $p(s)$  para los distintos bloques en que se descompone el operador de Floquet del modelo todos contra todos con parámetros  $b_z = 0$ ,  $b_x = \pi/2$  y  $J = 16/301$ . Cada bloque es etiquetado por un valor de momento angular.  $j = 125$  le corresponde  $\tau = 6.6711$ ,  $j = 100$  le corresponde  $\tau = 5.34219$  y para  $j = 50$  corresponde  $\tau = 2.68439$ .

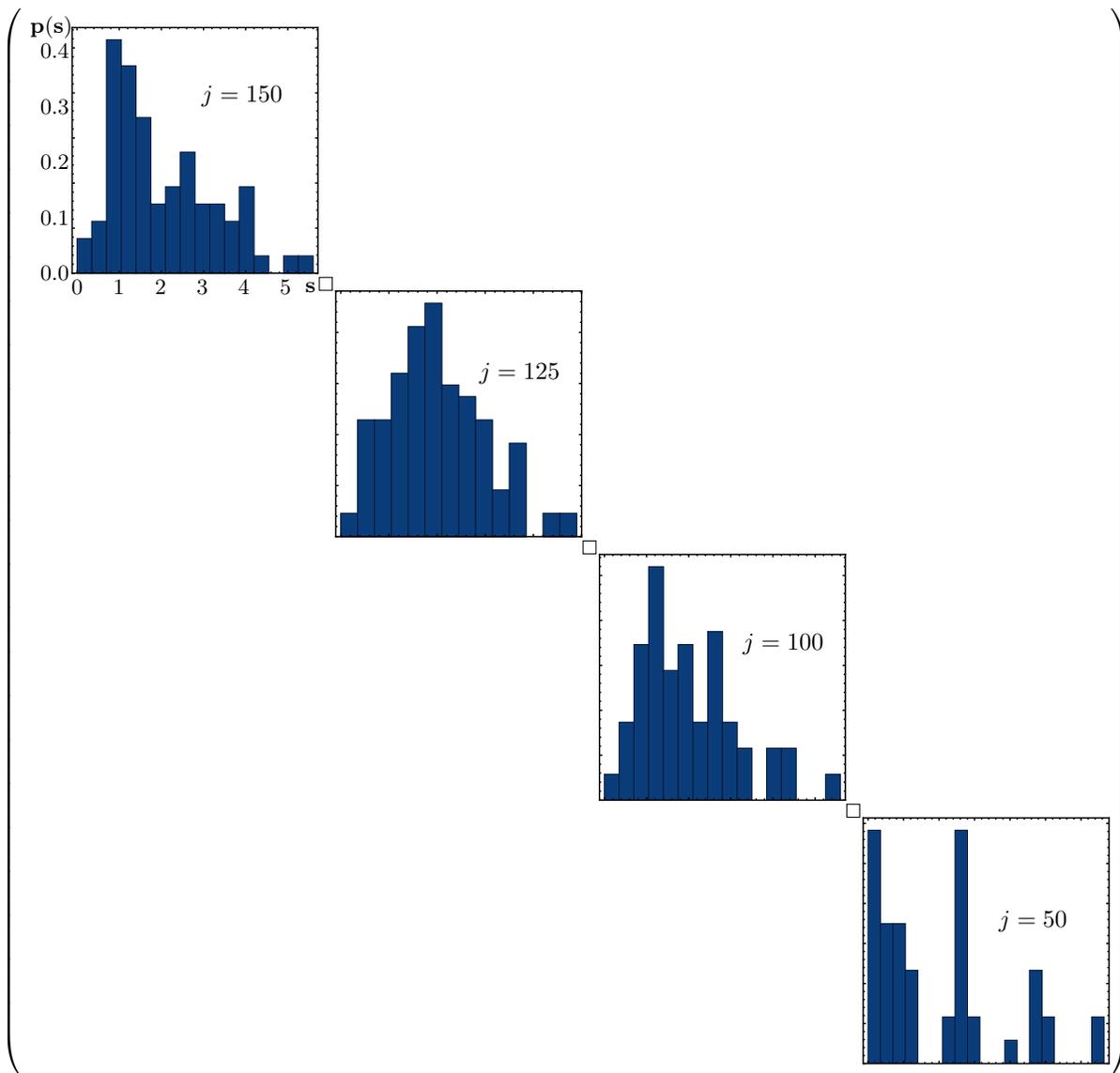


Figura 4-6: En esta gráfica se muestran las  $p(s)$  para los distintos bloques en que se descompone el operador de Floquet del modelo todos contra todos con parámetros  $b_z = 0$ ,  $b_x = \pi/2$  y  $J = 12/301$ . Cada bloque es etiquetado por un valor de momento angular.  $j = 125$  le corresponde  $\tau = 5.00332$ ,  $j = 100$  le corresponde  $\tau = 4.00664$  y para  $j = 50$  corresponde  $\tau = 2.01329$ .

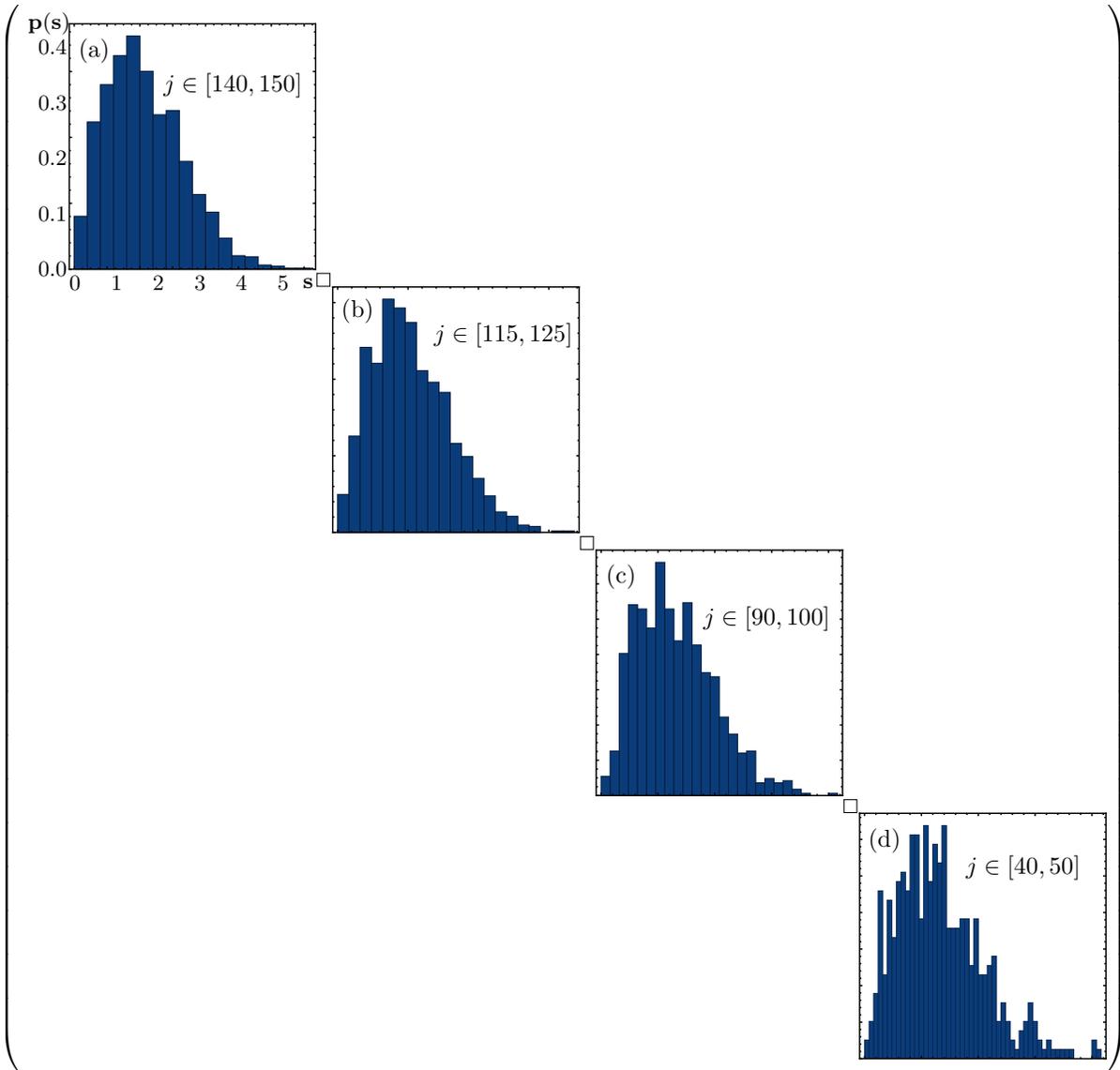


Figura 4-7: En esta figura se muestra la  $p(s)$  promediada para distintos valores de momento angular para un **mismo** sistema de Ising pateado todos contra todos. En todos los casos, el promedio se hizo sobre el subespacio de paridad *positiva* con  $\alpha = 20$ . (a) El rango de valores de  $\tau$  es  $\tau \in [125.841, 134.776]$ . (b)  $\tau \in [103.443, 112.388]$ , (c)  $\tau \in [81.0448, 90]$  y (d)  $\tau \in [36.2687, 45.2239]$

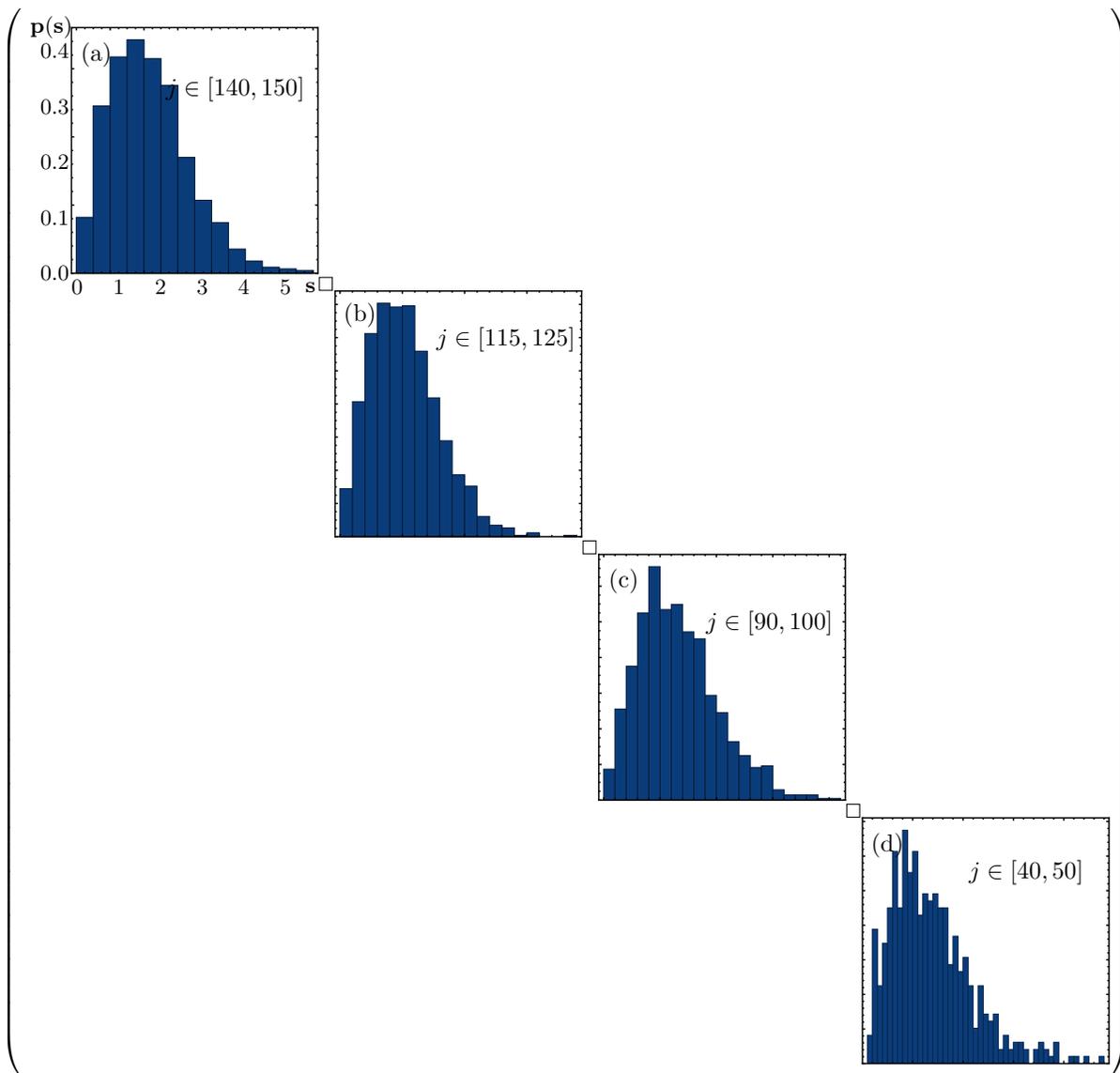


Figura 4-8: En esta figura se muestra la  $p(s)$  promediada para distintos valores de momento angular para un **mismo** sistema de Ising pateado todos contra todos. En todos los casos, el promedio se hizo sobre el subespacio de paridad *positiva* con  $\alpha = 20$ . (a) El rango de valores de  $\tau$  es  $\tau \in [125.841, 134.776]$ . (b)  $\tau \in [103.443, 112.388]$ , (c)  $\tau \in [81.0448, 90]$  y (d)  $\tau \in [36.2687, 45.2239]$

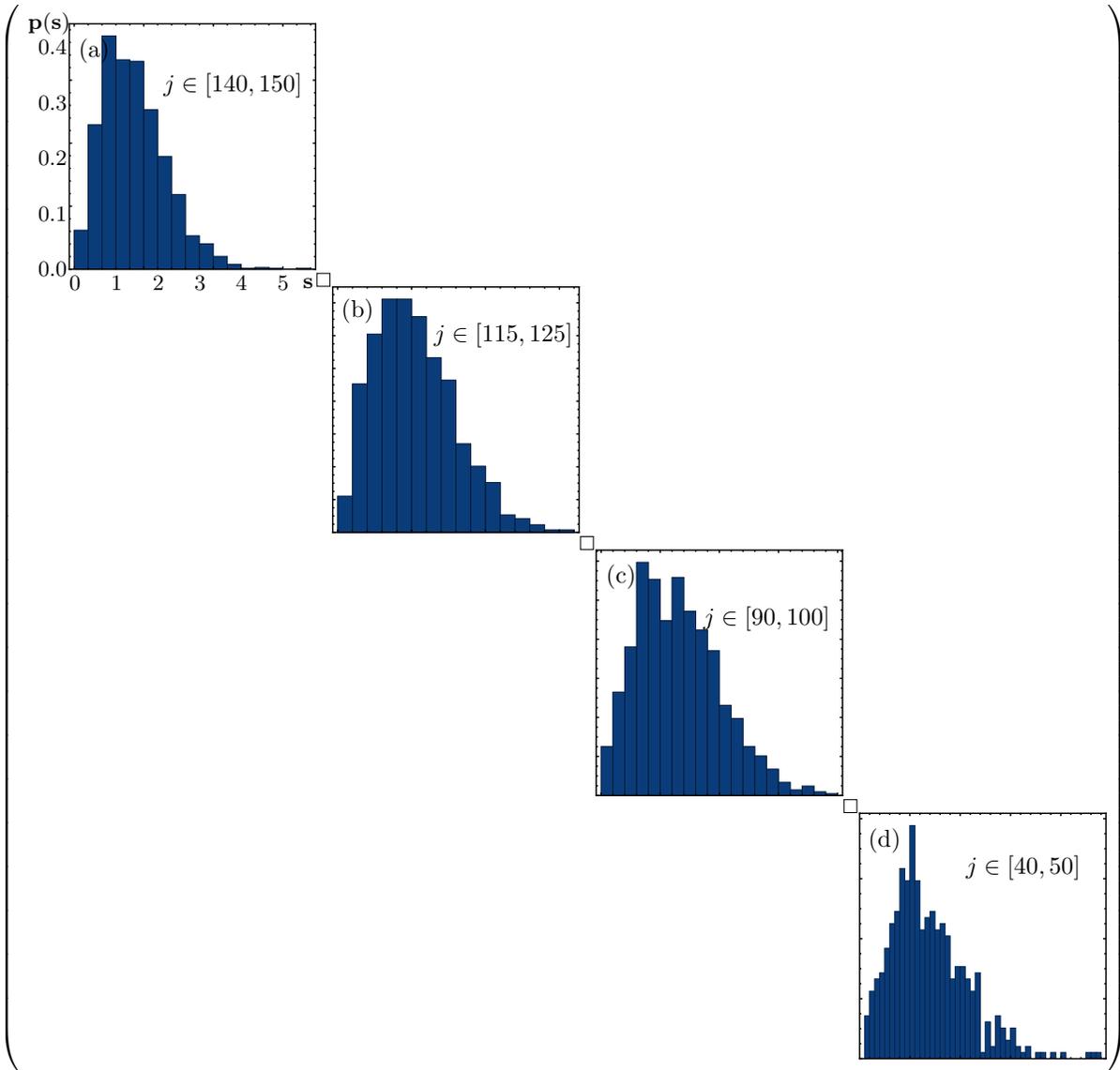


Figura 4-9: En esta figura se muestra la  $p(s)$  promediada para distintos valores de momento angular para un **mismo** sistema de Ising pateado todos contra todos. En todos los casos, el promedio se hizo sobre el subespacio de paridad *positiva* con  $\alpha = 20$ . (a) El rango de valores de  $\tau$  es  $\tau \in [125.841, 134.776]$ . (b)  $\tau \in [103.443, 112.388]$ , (c)  $\tau \in [81.0448, 90]$  y (d)  $\tau \in [36.2687, 45.2239]$

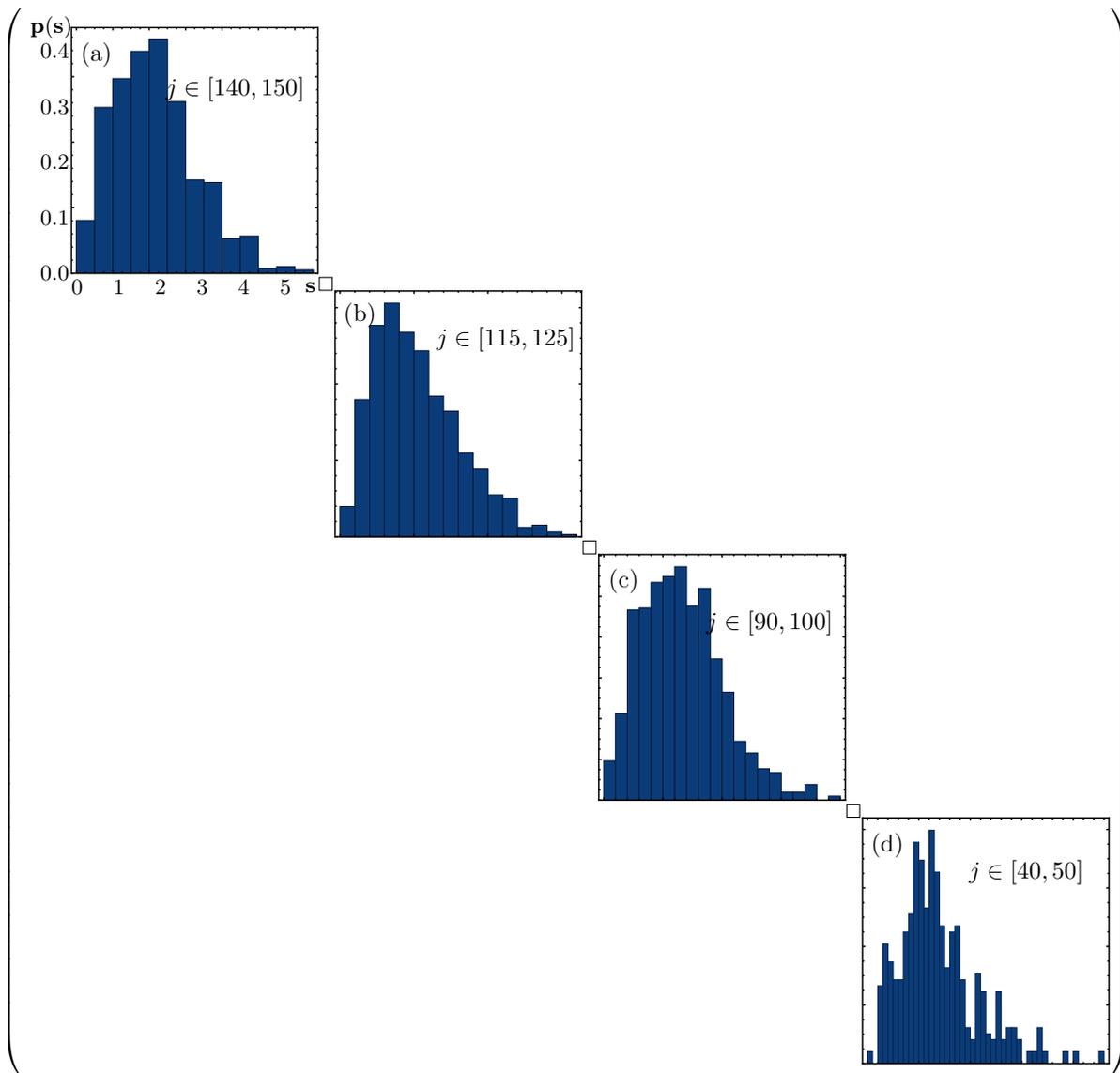


Figura 4-10: En esta figura se muestra la  $p(s)$  promediada para distintos valores de momento angular para un mismo sistema de Ising pateado todos contra todos. En todos los casos, el promedio se hizo sobre el subespacio de paridad positiva con  $\alpha = 20$ . (a) El rango de valores de  $\tau$  es  $\tau \in [125.841, 134.776]$ . (b)  $\tau \in [103.443, 112.388]$ , (c)  $\tau \in [81.0448, 90]$  y (d)  $\tau \in [36.2687, 45.2239]$

de  $j: j - 10, j - 9, \dots, j$ . Así, se tiene promedios para  $j \in [140, 150]$ ,  $j \in [115, 125]$ ,  $j \in [90, 100]$  y  $j \in [40, 50]$ . En estas gráficas 4-7-4-10, se observa una estructura que recuerda a la distribución de espaciamiento dada por Wigner; en ellas se utilizó un valor alto de  $\tau$ . La comparativa entre 4-7 y 4-8 se da entre el subespacio de paridad positiva y el de paridad negativa, respectivamente. Las otras dos, es decir, 4-9 y 4-10 muestran gráficas para los mismos valores de  $\tau(J)$  pero con un valor cada vez menos de  $\alpha$ .

En las figuras fig. 4-4 a la figura fig. 4-10 se observa un patrón común: al ir disminuyendo el valor de espín del subespacio estudiado, se logra observar una transición Wigner a Poisson en la distribución de espaciamiento de cuasienergías.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo se estudió el modelo de Ising todos contra todos pateado, es decir, un conjunto de espines interactuando con el resto de la misma manera. Tomando en cuenta la invarianza bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas del sistema, se encontró natural hacer el estudio desde el punto de vista teoría de representaciones ya que es sabido que esta teoría provee de un marco teórico para dividir un espacio de Hilbert en subespacios con distintos tipos de simetría.

Partiendo de la teoría de representaciones de grupos finitos, pasando por la teoría de acoplamiento binario, se consiguió el desarrollo de un código de computadora que nos permitió encontrar, explorar y, posteriormente, explotar la equivalencia entre el *top* pateado y el modelo de Ising todos-contra-todos pateado.

La equivalencia nos permitió estudiar un modelo con un número muy grande de elementos lo que mejoró considerablemente nuestra estadística, y por otro lado, nos permitió observar que el sistema presenta, con los mismos parámetros en distintos subespacios, una distribución de espaciamiento de Poisson y otra de un ensamble *GOE*. Esto, aunado al hecho de que los parámetros bajo los que se presentan los distintos comportamientos de la distribución de espaciamiento son idénticos a los del *top* clásico, nos permite concluir que este sistema cuenta al mismo tiempo con una dinámica caótica e integrable. Este año se obtuvo un nuevo resultado que relaciona la teoría de matrices aleatorias con la dinámica de sistemas caóticos, ver [KLP17].

## Apéndice A

# Demostración de la conmutación

Para demostrar la conmutación del Hamiltoniano de Ising pateado todos-contra-todos, se mostrará que este Hamiltoniano es una función de  $J_z = \sum_i^n \sigma_z^i$ , explícitamente,  $H_I = J_z^2 - n\mathbb{1}$ :

$$\begin{aligned} J_z J_z &= (\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \cdots + \sigma_z^n)(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \cdots + \sigma_z^n) \\ &= \sigma_z^1(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \cdots + \sigma_z^n) + \sigma_z^2(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \cdots + \sigma_z^n) + \\ &\quad + \cdots + \sigma_z^n(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \cdots + \sigma_z^n) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{j>1} \sigma_z^1 \sigma_z^j + \mathbb{1} + \sum_{j>2} \sigma_z^2 \sigma_z^j + \\ &\quad + \cdots + \mathbb{1} + \sum_{j>n-1} \sigma_z^{n-1} \sigma_z^j = n\mathbb{1} + \sum_{i>j} \sigma_z^i \sigma_z^j = n\mathbb{1} + H_I. \end{aligned}$$

De esta forma,  $[\mathbf{J}^2, H_I] = [\mathbf{J}^2, n\mathbb{1} + J_z^2] = [\mathbf{J}^2, J_z^2] = 0$ , debido a que  $\mathbf{J}^2$  conmuta con  $J_z$ . De igual manera, al  $\mathbf{J}^2$  conmutar con  $J_x$  y  $J_y$ , se comprueba que el Hamiltoniano de Ising pateado todos-contra-todos conserva el momento angular.

## Apéndice B

# Breve comentario sobre la teoría de Floquet

Para iniciar este breve comentario, considérese un sistema que es sometido a una interacción con un campo electromagnético en forma de pulsos periódicos  $\delta$ , cada cierto tiempo  $T$ . El un posible Hamiltoniano con estos requisitos es de la forma

$$H = H_0 + \delta(t)H_1,$$

siendo  $H_0$  la parte que modela el sistema sin interaccionar,  $H_1$  la parte que modela la interacción del sistema y  $\delta(t) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$  el tren de pulsos delta. El **teorema de Floquet** [DR14] establece la forma del operador de evolución de los sistemas periódicamente pateados:

$$U(t) = P(t) \exp(-iHt),$$

$P(t)$  una función con periodo  $T$  ( $P(t) = P(t + T) = p(t + nT)$ ) y  $H$  un Hamiltoniano independiente del tiempo. Como  $U(0) = \mathbb{1} = P(0) = P(nT)$ ,  $P(t)$  se convierte en el operador identidad en tiempos estroboscópicos, por lo que la forma del operador  $U$  para evolucionar estados periodo-a-periodo es,

$$U = \left| \exp\left(-i \int_{0^+}^{T^+} H(\bar{t}) d\bar{t}\right) \right|_+,$$

en donde  $|\cdot|_+$  denota el ordenamiento temporal de los operadores. Para un Hamiltoniano de la forma  $H_0 + \delta(t)H_1$ , con  $H_0$  y  $H_1$  sin dependencia explícita del tiempo, la integración y el ordenamiento temporal da como resultado

$$\exp(-iH_0) \exp(-iH_1).$$

Siendo  $U$  unitario, sus eigenvalores se encuentra en el círculo unitario:  $e^{-i\vartheta_n} = e^{-i\varepsilon_n T}$ . Las cantidades  $\varepsilon_n$  son llamadas *cuasienergías* y denotan la energía del sistema promediada temporalmente durante la evolución  $t \rightarrow t + T$ , es decir, periodo-a-periodo.

## Apéndice C

# Aplicación estroboscópica

Para obtener la aplicación estroboscópica utilizada en el texto, se comienza observando que al ser  $J^2$  conservado,  $J^2$  es una constante, por lo que las variables dinámicas  $J_x$ ,  $J_y$  y  $J_z$  evolucionan en una esfera. De esta observación se expresan las variables  $J_i$  de la siguiente forma

$$J_x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad J_y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad J_z = \cos \vartheta,$$

y se utilizarán como variables canónicas del sistema a  $x = \varphi$  y  $p = \cos \vartheta$ . La siguiente observación necesaria es la forma del Hamiltoniano,

$$H = H_0 + \delta(t)H_1,$$

en donde,  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac,  $H_0 = \frac{\tau}{2}J_z^2$  y  $H_1 = \alpha J_x$ . Debido a la presencia de la  $\delta$ , la evolución se puede separar en dos partes, sin patada ( $H_0$ ) y con patada ( $H_1$ ). Durante la evolución bajo  $H_0$ , las ecuaciones de Hamilton dan como resultado

$$J_x = J_{x0} \cos t\tau J_{z0} - J_{y0} \sin t\tau J_{z0}, \quad J_y = J_{x0} \sin t\tau J_{z0} + J_{y0} \cos t\tau J_{z0}, \quad J_z = J_{z0}.$$

En el caso de evolución bajo  $H_1$ , las ecuaciones de Hamilton y su sustitución en los valores de  $\dot{J}_x$  y  $\dot{J}_y$  resultan en

$$\dot{J}_x = 0, \quad \dot{J}_y = -\alpha J_z, \quad \dot{J}_z = \alpha J_y.$$

De esta forma, la evolución con patada de las variables  $J_i$  es

$$J_x = J_{x0}, \quad J_y = J_{y0} \cos \alpha t - J_{z0} \sin \alpha t, \quad J_z = J_{z0} \cos \alpha t + J_{y0} \sin \alpha t.$$

Finalmente, haciendo  $t = 1$  (la longitud del periodo en unidades de  $\tau$ ) y utilizando como condiciones iniciales de la evolución sin patada el resultado de la evolución con patada se obtiene

$$J_x = J_{x0} \cos \tau(J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha) - (J_{y0} \cos \alpha - J_{z0} \sin \alpha) \sin \tau(J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha), \quad (\text{C-1})$$

$$J_y = J_{x0} \sin \tau(J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha) + (J_{y0} \cos \alpha - J_{z0} \sin \alpha) \cos \tau(J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha), \quad (\text{C-2})$$

$$J_z = J_{y0} \sin \alpha + J_{z0} \cos \alpha. \quad (\text{C-3})$$

# Bibliografía

- [Ber85] Michael V Berry. Semiclassical theory of spectral rigidity. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 400, pages 229–251. The Royal Society, 1985.
- [BCS84] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni, and Charles Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1, 1984.
- [DH90] Barbara Dietz and Fritz Haake. Taylor and padé analysis of the level spacing distributions of random-matrix ensembles. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 80(1):153–158, 1990.
- [DR14] Luca D’Alessio and Marcos Rigol. Long-time behavior of isolated periodically driven interacting lattice systems. *Physical Review X*, 4(4):041048, 2014.
- [Ful97] William Fulton. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, volume 35. Cambridge University Press, 1997.
- [HKS87] F. Haake, M. Ku, and R. Scharf. Classical and quantum chaos for a kicked top. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 65(3):381–395, 1987.
- [KLP17] P. Kos, M. Ljubotina, and T. Prosen. Many-body quantum chaos: The first analytic connection to random matrix theory. *ArXiv e-prints*, December 2017.
- [Kot14] Venkata Krishna Brahmam Kota. *Embedded random matrix ensembles in quantum physics*, volume 884. Springer, 2014.
- [Lou08] James D Louck. *Unitary symmetry and combinatorics*. World Scientific, 2008.
- [Mos69] Marcos Moshinsky. The harmonic oscillator in modern physics: from atoms to quarks. 1969.
- [NC02] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum computation and quantum information*, 2002.
- [PP07] Carlos Pineda and Tomaž Prosen. Universal and nonuniversal level statistics in a chaotic quantum spin chain. *Phys. Rev. E*, 76:061127, Dec 2007.
- [PPV14] C Pineda, T Prosen, and E Villaseñor. Two dimensional kicked quantum ising model: dynamical phase transitions. *New Journal of Physics*, 16(12):123044, 2014.
- [Ser12] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.