

(1-600)

U N I V E R S I D A D N A C I O N A L A U T O N O M A
D E M E X I C O

FACULTAD DE CIENCIAS

PENETRACION DE ELECTRONES DE 1 y 2.5 MeV EN
DISTINTOS MATERIALES UTILIZANDO EL METODO DE
MONTECARLO Y DETERMINACION DE DOSIS

T E S I S
que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
p r e s e n t a
MONICA D. MIRANDA DE LA PEÑA

México, D.F., 1984



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer las facilidades, la cooperación y el apoyo brindados por los amigos y personal del Instituto de Física de la U.N.A.M., principalmente a las personas que forman el grupo de Aplicaciones de la Radiación del Departamento de Física General y a las que integran el grupo de Computo.

A los integrantes de la Comisión Dictaminadora de éste trabajo:

Dr. Fernando Alba Andrade

Dr. Jorge Rickards Campbell

Dr. Angel Dacal Alonso

Dr. Eugenio Ley Koo

M. en C. Roberto Uribe Rendon

M. en C. Anibal de la Piedad B.

M. en C. María de los Angeles Ortiz F.

De manera muy especial al M. en C. Roberto Uribe R. por haber dirigido ésta tesis, así como por los consejos y apoyo recibidos.

INDICE

INTRODUCCION

I. INTERACCION DE ELECTRONES CON LA MATERIA

1.- Definición de Conceptos

- i) Longitud de trayectoria
- ii) Alcance
- iii) Alcance medio
- iv) Alcance extrapolado
- v) Dosis

2.- Colisiones Inelásticas de Partículas Cargadas

- i) Sección Diferencial
- ii) Poder de Frenamiento

3.- Dispersión de Partículas Cargadas

- i) Dispersión de Rutherford
- ii) Dispersión múltiple

II. METODO DE MONTECARLO

1.- Variables Aleatorias

- i) Variable aleatoria discreta
- ii) Variable aleatoria continua

2.- Obtención de Números Aleatorios

3.- Determinación de los Valores de una Variable Aleatoria

- i) Sorteo de una variable aleatoria discreta
- ii) Sorteo de una variable aleatoria continua

III. SIMULACION DE LAS TRAYECTORIAS DE LOS ELECTRONES DE UN HAZ,
POR EL METODO DE MONTECARLO

- i) Longitud de trayectoria
- ii) Longitud de paso
- iii) Deflexión angular
- iv) Dispersión angular
- v) Posición longitudinal
- vi) Alcance
- vii) Dosis
- viii) Transmisión de electrones
- ix) Espectro de energía

IV. RESULTADOS

- 1.- Energía Perdida en un Espesor Determinado
- 2.- Factores que Afectan a la Distribución de Goudsmit-Saunderson
- 3.- Cálculo de la Transmisión, Dosis, Alcance, Alcance Medio, Extrapolado y Promedio y Espectros de Energía de un Haz de Electrones Monoenergético al Incidir en un Material

V. CONCLUSIONES

VI. ANEXO

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

En la actualidad es muy común el empleo de aceleradores de electrones, como fuente de radiación ionizante, para irradiar materiales con el objeto de modificar alguna o varias de sus características. Estas modificaciones se deben a la dosis impartida por la radiación al material, la cual a su vez depende fundamentalmente de la energía cedida por los electrones, la posición y el material en que esto sucede.

En la práctica existen diversas clases de dosímetros, que se utilizan para cuantificar ésta cantidad.

El propósito de este trabajo es el de calcular teóricamente la dosis impartida en diversos materiales por el haz de un acelerador de electrones, a través de simular por métodos de Montecarlo las trayectorias de éstos últimos.

Para llevar a cabo ésta simulación, hay que tomar en cuenta la forma en que interactúan los electrones con el material y que son: colisiones elásticas y colisiones inelásticas, con los electrones y núcleos atómicos.

En las colisiones inelásticas con los electrones atómicos, estos últimos adquieren energía para realizar una transición a un estado excitado o a un estado no ligado (ionización), debido a lo cual la energía del electrón incidente se vé reducida en la cantidad necesaria para que el electrón atómico efectue dicha transición. Para electrones con energías hasta de 5 MeV y elementos ligeros, éste es el mecanismo predominante a través del cual los electrones pierden energía.

En las colisiones elásticas con núcleos y electrones, el electrón incidente experimenta un cambio en la dirección de movimiento, debido al impulso dado por la fuerza coulombiana entre ellos.

Debido a esto, en el capítulo I se presentan las definiciones de las cantidades involucradas y los mecanismos de interacción de electrones, relevantes en las energías de interés (hasta 2.5 MeV). En el capítulo II se presentan las bases del método de Montecarlo. En el capítulo III se describe la manera de simular las trayectorias de los electrones, aplicando las teorías expuestas en el primer capítulo y la forma de aplicar el método de Montecarlo. En el capítulo IV se presentan los resultados obtenidos y en el capítulo V las conclusiones y recomendaciones para la utilización de los programas de cómputo desarrollados, así como para la continuación del trabajo. Finalmente se anexan los listados de los programas desarrollados.

I. INTERACCION DE ELECTRONES CON LA MATERIA

I.1.- Definición de Conceptos

i) Longitud de trayectoria.-

Los electrones experimentan numerosas deflexiones al moverse a través de un material, debido a lo cual sus trayectorias son líneas muy quebradas, como se muestra en la figura 1.

La longitud de trayectoria promedio de un electrón con energía cinética inicial E_0 , está dada por (E1):

$$S_t = \int_{E_0}^0 \left| \frac{dE}{ds} \right|^{-1} dE \quad (I.1.1)$$

en donde dE/ds es el poder de frenamiento, en cual se definirá en la siguiente sección.

En la ecuación (I.1.1) se desprecian las fluctuaciones en la pérdida de energía, por lo que la energía de los electrones es función únicamente de la longitud recorrida, o sea:

$$E(s) = E_0 - \int_0^s \left| \frac{dE}{ds}(s') \right| ds' \quad (I.1.2)$$

además se desprecian las colisiones catastróficas, por lo cual se le llama "Aproximación de Moderación Continua".

ii) Alcance.-

Se le llama alcance a la máxima penetración del electrón en la dirección de incidencia en el material, como se muestra en la figura 1. Suponiendo que la dirección de incidencia del electrón normal a la superficie es la dirección z , el alcance es la coordenada z máxima del electrón.

iii) Alcance medio.-

Se le llama alcance medio, \bar{R} , al grosor de material necesario para reducir el número N , de electrones de un haz a la mitad del valor inicial N_0 .

Para un haz de electrones monoenergéticos el alcance medio es aproximadamente la mitad de la longitud de trayectoria promedio (B3).

iv) Alcance extrapolado.-

El alcance extrapolado se obtiene trazando una tangente en el punto de inflexión de la curva de transmisión de electrones en el material y su valor está dado por el punto en el que la tangente interseca a la abscisa, como se ve en la figura 2.

Katz y Penfold (E1) propusieron las siguientes relaciones empíricas para el alcance extrapolado:

para energías de 0.01 a ~ 3 MeV:

$$R_{\text{ex}}(\text{g/cm}^2) = 0.412 E^n \quad (\text{I.1.3})$$

$$n = 1.265 - 0.0954 \ln E$$

y para energías de ~ 1 a ~ 20 MeV:

$$R_{\text{ex}}(\text{g/cm}^2) = 0.530 E - 0.106 \quad (\text{I.1.4})$$

en donde E está dado en MeV.

v) Dosis.-

La dosis absorbida D , se define como la energía media \overline{dE} , impartida por la radiación ionizante a un elemento de volumen, entre la masa de ese elemento, dm :

$$D = \frac{\overline{dE}}{dm} \quad (\text{I.1.5})$$

La dosis es por tanto una cantidad macroscópica.

La unidad de dosis es el gray, Gy, definido como:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Gy} &= 1 \text{ J/Kg} \\ &= 6.24 \times 10^{15} \text{ eV/g} \end{aligned}$$

La energía impartida E , es una cantidad estocástica, igual a la suma de las energías cinéticas de todas las partículas directa e indirectamente ionizantes (ΣE_e), que entran al volumen, menos la suma de las energías cinéticas de las partículas que salen de él (ΣE_l), menos la energía equivalente de cualquier aumento en la masa en reposo (ΣE_r):

$$E = \Sigma E_e - \Sigma E_l - \Sigma E_r.$$

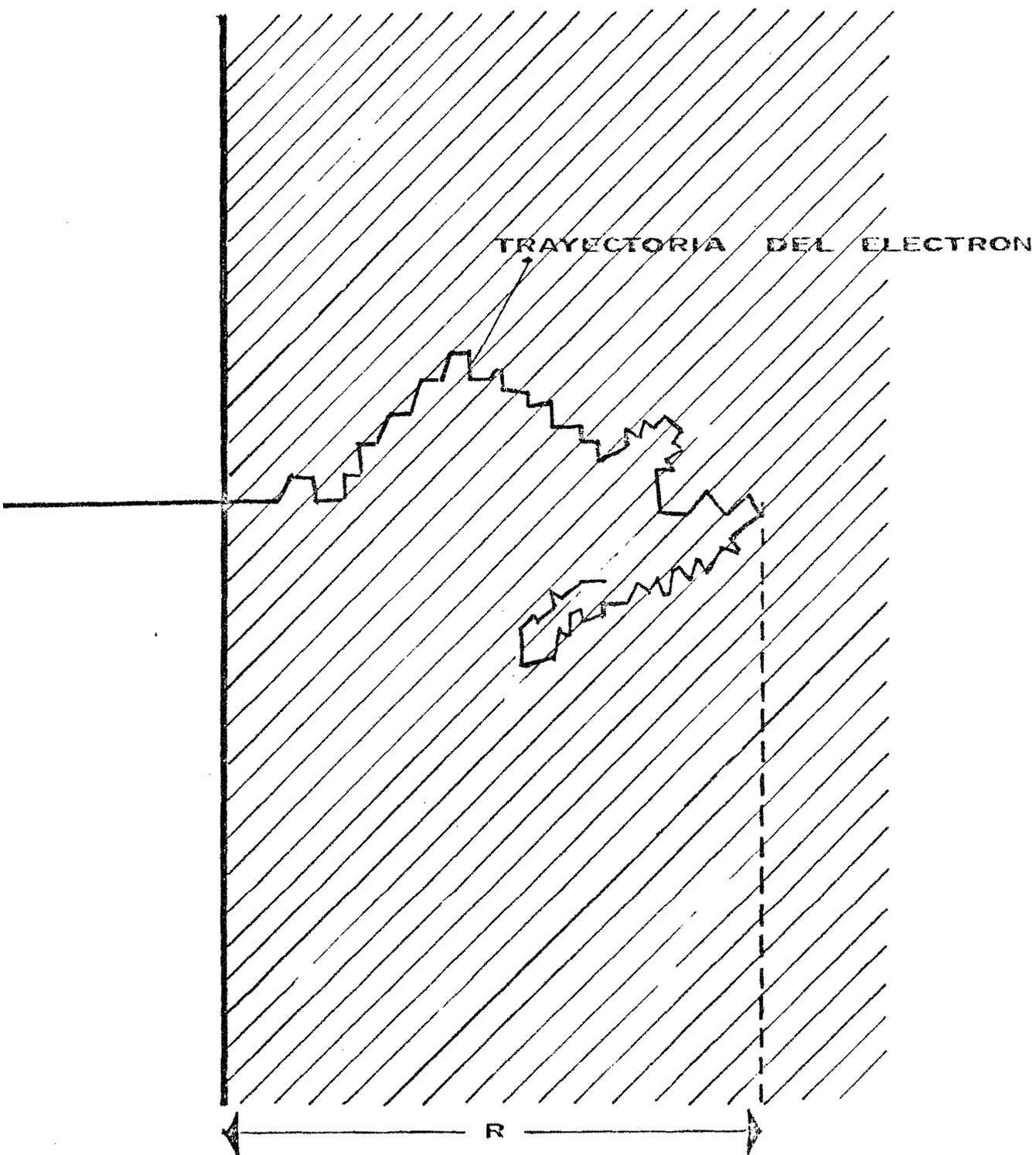


Figura 1.- Diagrama esquemático de la trayectoria de un electrón, dentro de un material. R representa el alcance del electrón.

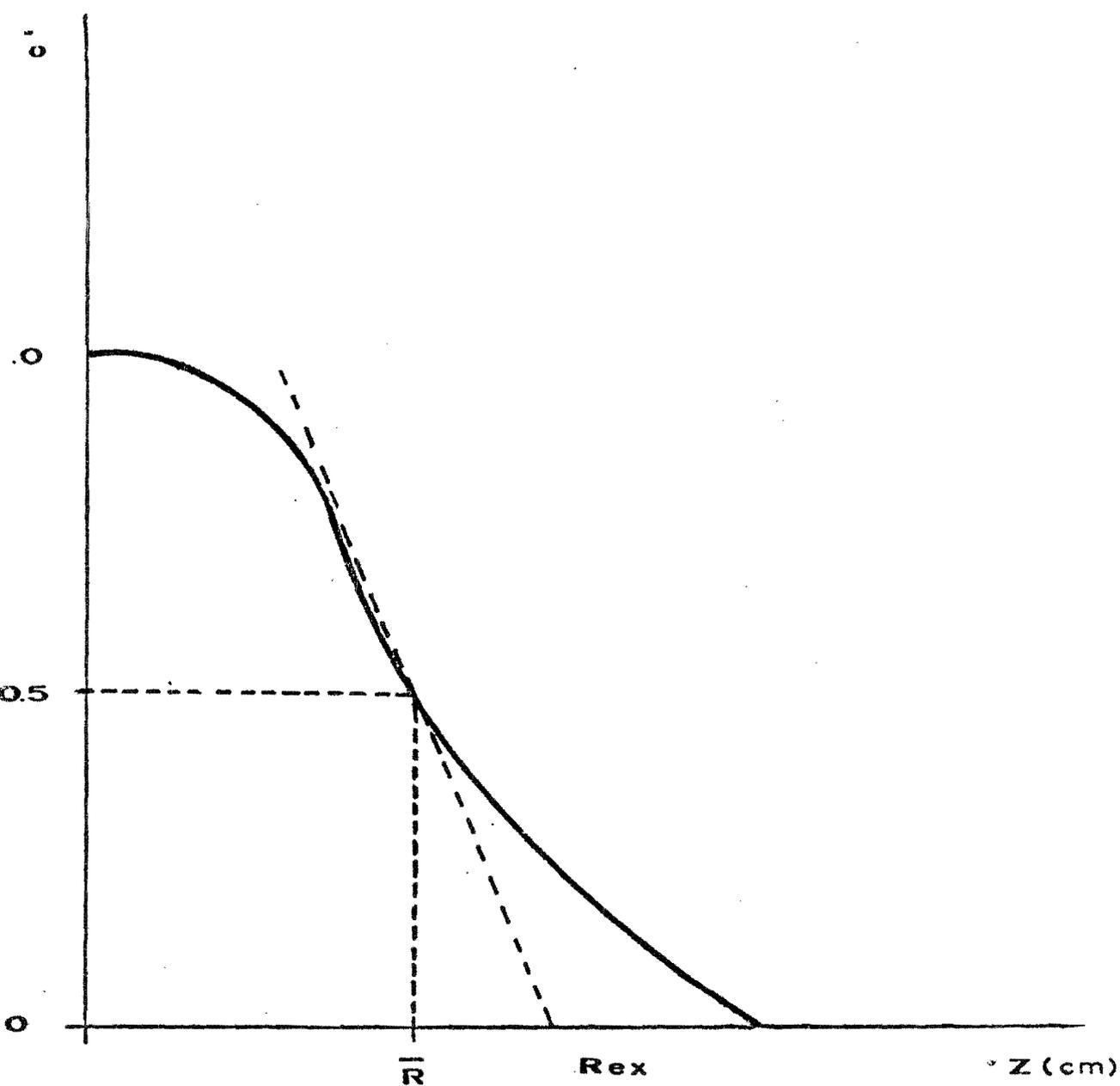


Figura 2.- Curva de transmisión de electrones dentro de un material, mostrando el alcance medio \bar{R} y el alcance extrapolado R_{ex} .

I.2.- Colisiones Inelásticas de Partículas Cargadas

Las colisiones inelásticas se dividen en general en fuertes y débiles, dependiendo de la cantidad de energía transferida al átomo por la partícula incidente durante la colisión.

En las colisiones fuertes la transferencia de energía es muy grande, de tal manera que los electrones atómicos pueden considerarse libres inicialmente y para calcular la sección eficaz diferencial de la colisión es necesario considerar la naturaleza de la partícula incidente, así como su espín.

En las colisiones débiles la energía transferida se extiende desde una transferencia mínima, que en general es del orden de la energía de excitación o ionización del electrón atómico, hasta una transferencia de energía arbitraria. Debido a que con las colisiones débiles la energía de la partícula incidente decrece gradual y continuamente, cuando se toman en cuenta éste tipo de colisiones únicamente, se dice que se usa un modelo de moderación continua.

Las colisiones inelásticas débiles se clasifican en rápidas y lentas, dependiendo de la relación entre la velocidad de la partícula y la velocidad orbital de los electrones en la capa con la que se produzca la colisión.

Para colisiones suficientemente rápidas, la influencia ejercida por la partícula sobre un átomo o molécula se puede considerar como una pequeña perturbación externa y así estudiar este problema usando la primera aproximación de Born.

Bohr (E1) fué el primero que desarrolló una teoría

para calcular la sección eficaz diferencial para colisiones inelásticas de partículas rápidas la cual utiliza métodos clásicos y no relativistas, en la que supone que al ser desplazado el electrón atómico debido a la interacción coulombiana con la partícula aparecerá dentro del átomo una fuerza restauradora que hará vibrar al electrón con una frecuencia natural de oscilación. Esta teoría es válida sólo para colisiones en que la velocidad de la partícula sea mucho mayor que la velocidad de los electrones atómicos en sus capas ($\beta \gg Z/137$, para la capa k) y cuando el parámetro de impacto sea mucho mayor que el radio de la órbita de Bohr. En 1930 Bethe (I1, I2, BA1) desarrolló una teoría mecánico-cuántica basada en la primera aproximación de Born ($Ze^2/hv \ll 1$) para encontrar la sección eficaz diferencial de colisiones débiles y en la que supone que los electrones son osciladores que se ponen en movimiento debido al campo eléctrico de la partícula incidente.

En 1938 Swann (S1) sugirió que la polarización que sufría el material debido al campo eléctrico de la partícula incidente provocaba una reducción en la energía perdida por ella, llamando a ésta reducción efecto de densidad.

Fermi (F1) estudió esta reducción partiendo de que los electrones orbitales estaban amarrados elásticamente a sus posiciones de equilibrio y sujetos a una fuerza de fricción, estableciendo así una relación de tipo oscilador entre la intensidad de campo eléctrico y la polarización, tomando en cuenta la frecuencia de oscilación de los electrones en ausencia de campo eléctrico, pero suponiendo que la ley

de dispersión que relaciona \vec{E} y \vec{P} puede ser descrita en términos de un solo tipo de oscilador.

Halpern y Hall (HH1) reportaron que la pérdida de energía por colisiones inelásticas dependía en gran medida de la constante dieléctrica como función de la frecuencia y generalizaron éste trabajo a un número arbitrario de osciladores.

Sternheimer (SP1, SSB1) calcula el valor de éste efecto para varios materiales e intervalos de energía y obtiene expresiones analíticas generales que no requieren ajustes detallados para cada material.

A continuación se presenta el desarrollo cuántico de la sección eficaz diferencial para colisiones débiles, después se presenta la relación que existe entre la sección eficaz y el poder de frenamiento para partículas pesadas no relativistas y las ecuaciones propuestas por Sternheimer y los valores de los parámetros necesarios.

i) Sección eficaz diferencial.-

Para calcular la sección eficaz diferencial de una colisión inelástica entre una partícula de masa M_1 , velocidad v y carga ze con un átomo estacionario de masa M_2 en un estado determinado (generalmente el estado base), Bethe supone a los electrones del átomo como osciladores clásicos que se ponen en movimiento debido a la interacción coulombiana entre el átomo y el campo eléctrico de la partícula incidente.

Considerando que debido a la colisión la partícula es deflectada dentro de un elemento de ángulo sólido con dirección θ y ϕ medidas respecto al sistema centro de masa y que el átomo experimenta una transición al n -ésimo estado

(discreto o continuo) que se encuentra a una energía E_n arriba del estado original, se obtiene que para partículas con velocidades no relativistas la sección eficaz diferencial, en la primera aproximación de Born, es (I.1):

$$d\sigma = \frac{M^2}{(2\pi)^2} \frac{p'}{p} \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} u_n^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_Z) V u_o(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_Z) \right. \\ \left. \times d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_Z d\vec{r} \right|^2 d\omega \quad (\text{I.2.1})$$

en donde $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$ es la masa reducida del sistema, \vec{r} es la posición de la partícula respecto al centro del átomo \vec{p} y \vec{p}' son los momentos lineales de la partícula antes y después de la colisión, respectivamente, $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ es la transferencia de momento y u_o y u_n son las eigenfunciones no relativistas de los electrones atómicos, antes y después de la colisión.

Cuando la interacción es coulombiana:

$$V = \sum \frac{ze^2}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \frac{zZe^2}{r} \quad (\text{I.2.2})$$

donde Ze es la carga del núcleo atómico y \vec{r}_j son las coordenadas de cada uno de los Z electrones atómicos.

Realizando primero la integración sobre \vec{r} y utilizando la relación:

$$\int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} d\vec{r} = \frac{4\pi}{q^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_j} \quad (\text{I.2.3})$$

se obtiene en la ecuación (I.2.1) que:

$$d\sigma_n = 4z^2 \frac{e^4 M^2}{q^4} \frac{p'}{p} |\epsilon_n(k)|^2 d\omega \quad (\text{I.2.4})$$

en donde la interacción nuclear dada por el segundo término de la ecuación (I.2.2) no contribuye debido a la ortogonalidad de los estados n y o y ϵ_n que está dado por:

$$\epsilon_n(\vec{q}) = \int u_n^* \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} u_0 d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_Z \quad (\text{I.2.5})$$

y recibe el nombre de factor de forma no relativista de colisiones inelásticas.

La cantidad $|\epsilon_n(\vec{q})|^2$ dá la probabilidad de que el átomo efectue una transición al estado excitado n , al recibir un momento \vec{q} y está relacionada con la fuerza de oscilador dipolar óptico, f_n , por (F2):

$$|\epsilon_n(\vec{q})|^2 = \frac{Q}{E_n} f_n \quad (\text{I.2.6})$$

donde Q representa la energía cinética de un electrón libre no relativista, con momento \vec{q} :

$$Q = \frac{q^2}{2m} \quad (\text{I.2.7})$$

y

$$\sum_n f_n = Z \quad (\text{I.2.8})$$

dado que $q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta$, entonces

$d\omega = 2\pi \sin\theta = \pi dq^2/pp'$, se obtiene:

$$d\sigma_n = \frac{4\pi Z^2 e^4}{q^4} \frac{M^2}{p^2} |\epsilon_n(\vec{q})|^2 dq \quad (\text{I.2.9})$$

y utilizando la variable dada por la ecuación (I.2.7) se obtiene:

$$dq^2 = 2mdQ \quad (\text{I.2.10})$$

quedando la ecuación (I.2.9) como sigue:

$$d\sigma_n = \frac{2\pi Z^2 e^4}{mv^2} |\epsilon_n(\vec{q})|^2 \frac{dQ}{Q^2} \quad (\text{I.2.11})$$

y aplicando la ecuación (I.2.6) queda que la sección eficaz

diferencial está dada por:

$$d\sigma_n = \frac{2\pi z^2 e^4}{mv^2} \frac{f_n}{E_n} \frac{dQ}{Q} \quad (I.2.12)$$

ii) Poder de frenamiento.-

La energía perdida promedio por unidad de trayectoria $-dE/ds$, que experimenta una partícula al pasar por un material, recibe el nombre de poder de frenamiento y cuando el material está formado por un solo tipo de átomos, está dado por (F2):

$$-\frac{dE}{ds} = N \sum E_n \sigma_n \quad (I.2.13)$$

donde σ_n es la sección eficaz para colisiones inelásticas que provocan que el átomo quede con una energía E_n por encima de su estado inicial, dado por la ecuación (I.2.12) y N es la densidad atómica.

De las ecuaciones (I.2.12) y (I.2.13) para partículas no relativistas

$$-\frac{dE}{ds} = \frac{2\pi z^2 e^4}{mv^2} N \sum f_n \int_{Q_m}^{Q_M} \frac{dQ}{Q} \quad (I.2.14)$$

en donde Q_m y Q_M representan los valores mínimo y máximo de la energía cinética del electrón y cuyos valores se obtienen a continuación.

Como se vé en la figura 3, la componente de \vec{q} paralela a \vec{p} , está dada por:

$$\vec{q} \cdot \hat{p} = (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \frac{\vec{p}}{p} = \frac{p^2 - pp' \cos \theta}{p}$$

y si $M \gg m$, $\theta \approx 0$

$$\begin{aligned}\vec{q} \cdot \hat{p} &= p - p' \\ &= \frac{dp}{dE} dE = \frac{dp}{dE} E_n\end{aligned}$$

dado que $p = \sqrt{2mE}$ y $E = mv^2/2$, se obtiene:

$$\vec{q} \cdot \hat{p} = \frac{E_n}{v}$$

por lo que de la ecuación (I.2.7) se obtiene:

$$Q \gg \frac{E_n^2}{2mv^2}$$

por lo que su valor mínimo es

$$Q_m = \frac{E_n^2}{2mv^2} \quad (\text{I.2.15})$$

y como la máxima energía que podrá adquirir el electrón será

$q = E_n$ se tiene que para el máximo

$$Q_M = \frac{Q_M^2}{2mv^2}$$

de donde

$$Q_M = 2mv^2 \quad (\text{I.2.16})$$

y sustituyendo (I.2.15) y (I.2.16) en (I.2.14)

$$\begin{aligned}- \frac{dE}{ds} &= \frac{2\pi z^2 e^4}{mv^2} N \sum f_n \left(\ln 2mv^2 - \ln \frac{E_n^2}{2mv^2} \right) \\ &= \frac{2\pi z^2 e^4}{mv^2} N \sum f_n \left(2 \ln(2mv) - 2 \ln E_n \right)\end{aligned}$$

en donde la suma sobre el segundo término de la derecha recibe el nombre de potencial de ionización o energía media de excitación y está definido por:

$$\ln I = \sum f_n \ln E_n \quad (\text{I.2.17})$$

que junto con (I.2.8) conduce a:

$$-\frac{dE}{ds} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} NZ \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (\text{I.2.18})$$

Cuando la partícula incidente tenga una velocidad relativista $v=\beta c$, el poder de frenamiento está dado por (SP1):

$$-\frac{dE}{ds} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} NZ \left\{ \ln \frac{2mv^2 H}{I^2(1-\beta^2)} - \beta^2 - \delta \right\} \quad (\text{I.2.18})$$

que es válida para cualquier partícula de carga ze , siempre y cuando $\beta \gg Z/137$ y en la cual H es la máxima transferencia de energía y δ el efecto de densidad.

Cuando la partícula incidente sea un electrón, $H=E/2$, ya que debido a la indistinguibilidad entre partículas iguales se define arbitrariamente al electrón más rápido después de la colisión como el electrón incidente y $z = 1$.

Cuando la partícula tenga masa M , la máxima transferencia de energía será (SP1):

$$H = \frac{p^2}{M \left(\frac{M}{2m} + \frac{m}{2M} + \frac{E}{mc^2} \right)}$$

en donde E y p son la energía total y el momento de la partícula incidente. Para el caso de partículas pesadas ésta ecuación se reduce a:

$$H = \frac{2mv^2}{1-\beta^2}, \quad \text{para } E \ll \left[\frac{M}{2m} \right] c^2$$

El efecto de densidad se puede obtener fácilmente de las ecuaciones analíticas propuestas por Sternheimer (SP1) y que son:

$$\delta = 4.606 X + C + a(X_1 - X)^m, \quad X_0 \leq X \leq X_1 \quad (I.2.20)$$

$$\delta = 4.606 X + C \quad X > X_1 \quad (I.2.21)$$

donde X_0 y X_1 son valores particulares de $X = \log(p/mc)$, tales que $\delta = 0$ para $X < X_0$ y δ se vuelve lineal para $X > X_1$.

$$C = -2 \ln \frac{I}{h\nu_p} - 1 \quad (I.2.22)$$

siendo $\nu_p = (Ne^2/m\pi)^{1/2}$ la frecuencia de plasma del medio.

Las constantes a y m , junto con X_0 y X_1 son parámetros ajustables cuyos valores dependen del espectro de las frecuencias de dispersión ν_n y de la fuerza de oscilador dipolar f_n de los átomos del material considerado.

Poniendo la condición $\delta(X_0) = 0$ se obtiene:

$$a = 4.606 \frac{X_a - X_0}{(X_1 - X_0)^m} \quad (I.2.23)$$

donde

$$X_a = - \frac{C}{4.606}$$

En general los valores de los parámetros para sólidos y líquidos están dadas por (SP1):

para $I < 100 \text{ eV}$:	$X_1 = 2.0,$	$m = 3.0$	(I.2.24)
	$X_0 = 0.2,$	$ C < 3.681$	
	$X_0 = 0.326 C ^{-1},$	$ C \geq 3.681$	

para $I > 100 \text{ eV}$:	$X_1 = 3.0,$	$m = 3.0$	(I.2.25)
	$X_0 = 0.2,$	$ C < 5.215$	
	$X_0 = 0.326 C ^{-1.15},$	$ C \geq 5.215$	

como $\rho = m/V$:

$$\frac{\rho_n}{\rho_o} = \frac{P_n T_o}{P_o T_n}$$

por tanto

$$\rho_n = n \rho$$

donde

$$n = \frac{P_n T_o}{P_o T_n} \quad (\text{I.2.29})$$

Para calcular el potencial de ionización se utilizan las expresiones (E1, SSB1):

$$\left. \begin{aligned} I &= 18.7 \text{ eV,} && \text{para hidrogeno} \\ I &= 13 Z, && 6 \lesssim Z \lesssim 9 \\ I &= (9.76 + 58.8 Z^{-1.19}) Z, && Z \geq 13 \end{aligned} \right\} (\text{I.2.30})$$

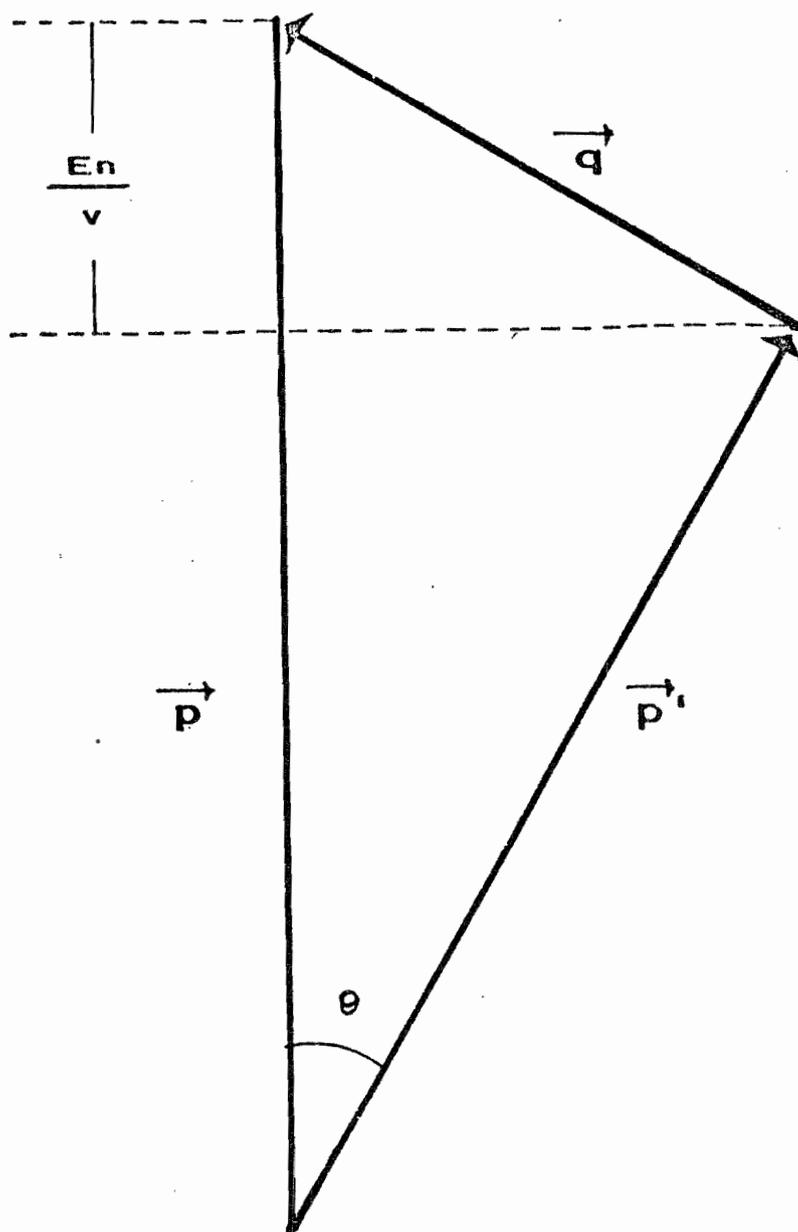


Figura 3.- Diagrama de transferencia de momento en una colisión inelástica, en donde p y p' son los momentos lineales de la partícula, antes y después de la colisión y q es la transferencia de momento.

I.3.- Dispersión de Partículas Cargadas

A continuación se presenta la teoría de dispersión simple de Rutherford, que es una teoría clásica en la que se considera que la deflexión de la partícula se debe a una sola colisión entre ésta y un núcleo. En seguida se presentan las bases de algunas de las teorías de dispersión múltiple, en las cuales se considera que la dispersión que sufre la partícula se debe a numerosas colisiones de la partícula. Finalmente se dan los lineamientos bajo los cuales se desarrolla la teoría de dispersión múltiple de Goudsmit-Saundersón en la que se obtiene la probabilidad de que un electrón sea dispersado un ángulo θ después de haber experimentado n colisiones.

i) Dispersión de Rutherford.-

Rutherford estudió clásicamente la dispersión que experimenta una partícula con masa M_1 , con velocidad v y carga ze al interactuar electrostáticamente con otra partícula de masa M_2 y carga nuclear Ze que se encuentra en reposo, bajo la condición:

$$\frac{M_1}{M_2} \ll 1 \quad (\text{I.3.1})$$

considera que la deflexión mayor ocurre cuando el proyectil está muy cerca del núcleo del blanco, por lo que desprecia el efecto de apantallamiento de la carga nuclear por los electrones atómicos e introduce el concepto de parámetro de impacto de la colisión, b , como la distancia mínima a que pasaría el proyectil del blanco, si no fuera dispersado, (ver figura 4) y el ángulo de dispersión θ es el formado por las direcciones asintóticas del proyectil antes y después de la interacción.

Para encontrar una relación entre b y θ se considera que la diferencia entre el momento lineal inicial y el momento lineal final del proyectil, será igual al impulso dado por el blanco, o sea:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int \vec{F} dt \quad (I.3.2)$$

en donde \vec{F} es la fuerza electrostática que ejerce el núcleo del blanco sobre el proyectil, que está dada por:

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{z Z e^2}{r^2} \quad (I.3.3)$$

aplicando la ley de los senos al lado izquierdo de la igualdad en la ecuación (I.3.2), se obtiene

$$2 M_1 v \sin \frac{\theta}{2} = \int_0^\infty F \cos \phi dt$$

haciendo un cambio de variable

$$2 M_1 v \sin \frac{\theta}{2} = \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} F \cos \phi \frac{dt}{d\phi} d\phi \quad (I.3.4)$$

pero $d\phi/dt$ es la velocidad angular del proyectil respecto al núcleo y por la conservación del momento angular

$$\begin{aligned} M_1 v b &= M_1 r^2 \omega \\ &= M_1 r^2 \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{r^2}{v b}$$

sustituyendo (I.3.3) y (I.3.5) en la ecuación (I.3.4), queda

$$2 M_1 v^2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 b} \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \cos \phi \, d\phi$$

$$\frac{4 \pi \epsilon_0 M_1 v^2 b}{z Z e^2} \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

por lo que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 M_1 v^2 b} \quad (1.3.6)$$

en donde se ve que no hay restricción para el ángulo de dispersión y por lo tanto es posible obtener cualquier ángulo para una sola colisión.

La sección eficaz diferencial dá la probabilidad de que una partícula con parámetro de impacto entre b y $b + db$ experimente deflexiones entre θ y $\theta + d\theta$, figura 5, y está dada por

$$d\sigma = |2\pi b \, db|$$

pero

$$b = \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 M_1 v^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

y entonces

$$db = - \frac{z Z e^2}{8 \pi \epsilon_0 M_1 v^2} \csc^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta$$

de donde

$$d\sigma = \frac{2\pi}{8} \left(\frac{z Z e^2}{2 \pi \epsilon_0 M_1 v^2} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \csc^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta$$

y expresandolo en términos de la diferencial de ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta$, queda:

$$d\sigma = \left(\frac{z Z e^2}{2\pi \epsilon_0 M_1 v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{16 \cdot \text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (I.3.7)$$

Para obtener el número de partículas dispersadas por el blanco, dentro de un ángulo sólido, hay que multiplicar la ecuación (I.3.6) por el número de partículas incidentes, N_0 , y por el número de núcleos por unidad de área del blanco (siempre y cuando ninguna partícula sea dispersada mas de una vez), por lo que:

$$dN(\theta) = \frac{N_0 N t}{16} \left(\frac{z Z e^2}{2\pi \epsilon_0 M_1 v^2} \right) \frac{d\Omega}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (I.3.8)$$

en donde t es el espesor y N el número de átomos por cm^3 de la lámina que se usa como blanco.

A la ecuación (I.3.8) se le llama Ley de dispersión simple de Rutherford (MG1).

En la deducción de la ley de dispersión de Rutherford, se supone una sola colisión, debida a la interacción coulombiana entre dos partículas puntuales, en la que el blanco tiene una masa mucho mayor que el proyectil; debido a lo cual ésta ley de dispersión sólo es válida para colisiones en las que el blanco es el núcleo (colisiones nucleares) de un material pesado y además, este material debe estar en forma de láminas delgadas (monoatómicas), al ser bombardeado por el proyectil.

En la realidad cuando una partícula atraviesa un material pasa cerca de muchos átomos, e interacciona con todos ellos y puede experimentar numerosas deflexiones de ángulos pequeños, (correspondientes a parámetros de impacto grandes) o puede ser deflectado ángulos grandes (parámetros de impacto pequeños).

Las partículas interaccionan entonces con los núcleos cuyo potencial se ve disminuido por la carga de los electrones orbitales (efecto de apantallamiento) y con los mismos electrones atómicos.

Las deflexiones de ángulos grandes son poco frecuentes, mientras que las deflexiones de ángulos pequeños son muy frecuentes, por lo que después de atravesar un material la partícula se mueve en una dirección que forma un ángulo θ con respecto a la dirección original y que está dado por la superposición acumulada de las deflexiones sufridas; obteniéndose entonces que la probabilidad de que la partícula sea dispersada ángulos pequeños está dada por una distribución gaussiana, mientras que para ángulos grandes, se tiene una única dispersión cuya probabilidad disminuye al aumentar el ángulo (figura 6)

La distribución angular total de dispersión tiene que tener entonces tres regiones: una para dispersión simple (ángulos grandes), otra para dispersión múltiple (ángulos pequeños) y una tercera llamada dispersión plural, que proporciona una transición suave entre las dos anteriores.

ii) Dispersión múltiple.-

Williams (W1) establece que el tipo de dispersión que se lleve a cabo depende de la naturaleza y velocidad de la partícula incidente, el material atravesado y el ángulo de dispersión.

Williams (W1,W2) desarrolla una teoría de dispersión múltiple para rayos cósmicos, electrones rápidos y partículas alfa, en la que utiliza estadística y teoría de colisiones. Para los rayos cósmicos y electrones rápidos utiliza la teoría de

colisiones de la mecánica cuántica relativista, mientras que para las partículas alfa usa la teoría de colisiones de la mecánica clásica.

Los valores teóricos que obtiene para la dispersión de rayos cósmicos y partículas alfa concuerdan con los resultados experimentales, mientras que para la dispersión de electrones rápidos discrepa de los observados.

Las teorías para dispersión de electrones por átomos de Moliere (B2), Snyder y Scott (SS1, GS2) y Goudsmit y Saunderson (GS1, GS2) y Lewis (L1) están relacionadas matemáticamente entre sí. Los dos primeros autores parten de la aproximación de ángulos pequeños y luego hacen una expansión de funciones de Bessel. Lewis hace primero una expansión en polinomios de Legendre y después aplica la aproximación de ángulos pequeños. Goudsmit y Saunderson desarrollan una teoría válida para cualquier ángulo de dispersión a través de una expansión de polinomios de Legendre.

Las teorías de Moliere y de Goudsmit-Saunderson, presentan además la ventaja de no suponer forma especial para la sección eficaz de dispersión.

Teoría de dispersión múltiple de Goudsmit-Saunderson:

En la teoría se supone que la partícula es dispersada n veces, después de las cuales tiene una dirección θ con respecto a la dirección original y utiliza la propiedad de que el promedio de cualquier polinomio de Legendre después de n impactos es igual a la n -ésima potencia del promedio de los polinomios después del primer impacto, suponiendo que la ley de distribución es cilíndricamente simétrica (GS1):

$$\langle P_1(\cos \theta) \rangle_{pr} = \langle P_1(\cos \theta_1) \rangle_{pr}^n \quad (I.3.9)$$

El promedio total final G_1 , de los polinomios debe tomar en cuenta todas las posibles colisiones de la partícula, por lo que:

$$G_1 = \sum W(n) \langle P_1(\cos \theta_1) \rangle_{pr}^n \quad (I.3.10)$$

donde $W(n)$ representa la probabilidad de que la partícula sufra n colisiones y se expresa por la distribución de Poisson:

$$W(n) = \frac{e^{-v} v^n}{n!} \quad (I.3.11)$$

donde v es el número promedio de colisiones que realiza la partícula al atravesar un espesor s de material y que está dada por:

$$v = \sigma N s \quad (I.3.12)$$

N es el número de átomos por cm^3 y σ es la sección eficaz total de colisión para un átomo, $\sigma = 2\pi \int_0^\pi d\sigma/d\Omega \sin \theta d\theta$.

Para que la ecuación (I.3.11) sea estrictamente válida s debe ser igual a la longitud de la trayectoria del electrón al atravesar ese espesor de material y además debe ser igual para todos los electrones.

Sustituyendo la ecuación (I.3.11) en la (I.3.10) y tomando el promedio de los polinomios después del primer impacto se obtiene:

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum \frac{e^{-v} v^n}{n!} \langle P_1(\cos \theta_1) \rangle_{pr}^n \\ &= e^{-v} (1 - \langle P_1(\cos \theta_1) \rangle_{pr}) \end{aligned}$$

y sustituyendo la ecuación (I.3.12) se obtiene

$$G_1 = \exp \left(- 2\pi N \int_0^s \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - P_1(\cos \theta)) \sin \theta d\theta ds \right)$$

y llamando

$$S_1(s) = 2\pi N \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - P_1(\cos\theta)) \sin\theta \, d\theta \quad (\text{I.3.13})$$

queda

$$G_1 = e^{-\int^S} S_1(s') ds' \quad (\text{I.3.14})$$

Para obtener los valores $S_1(s)$ dados por la ecuación (I.3.13) se toma la sección eficaz de dispersión considerando el apantallamiento nuclear por los electrones atómicos, las colisiones inelásticas entre electrones y los efectos relativistas, dada por Rutherford (S1):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z(Z+1)}{p^2 v^2} \frac{e^4}{(1+2\eta - \cos\theta)^2} \quad (\text{I.3.15})$$

o Mott(M1):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z(Z+1)e^4}{p^2 v^2} \left(\frac{1}{(1+2\eta - \cos\theta)^2} - \frac{\beta^2}{2(1+2\eta - \cos\theta)} \right) \quad (\text{I.3.16})$$

o bien McKinley-Feshbach (M1):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z(Z+1)e^4}{p^2 v^2} \left(\frac{1}{(1+2\eta - \cos\theta)^2} \right) \quad (\text{I.3.17})$$

$$+ \frac{Z \pi \beta}{\sqrt{2} 137 (1+2\eta - \cos\theta)^{3/2}} \frac{(\beta^2 + Z \pi \beta / 137)}{2(1+2\eta - \cos\theta)}$$

en donde η es la constante de apantallamiento determinada por Moliere y que está dada por:

$$\eta = \frac{1}{4} (6.802 \times 10^{-5}) Z^{2/3} \frac{1}{\tau(\tau+2)} (1.13 + 3.76 \left(\frac{Z}{137\beta}\right)^2)$$

siendo τ la energía cinética de la partícula en unidades de $m_0 c^2$.

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{S_t - s}{S_t} \quad (\text{I.3.19})$$

y utilizando las ecuaciones propuestas por Spencer(S1):

$$S_1(t) = \frac{d_1}{t(t+\alpha)} \quad (\text{I.3.20})$$

$$S_1(1) = \frac{d_1}{(1+\alpha)} \quad (\text{I.3.21})$$

$$S_1(1) = \frac{d_1}{1+\alpha} \quad (\text{I.3.22})$$

se obtiene que:

$$S_1(t) = S_1(t) \frac{S_1(1)}{S_1(1)} \quad (\text{I.3.23})$$

en donde $S_1(1)$ está dada por la ecuación (I.3.13), tomado el primer polinomio de Legendre y $\tau = E_1/m_0 c^2$, siendo E_1 la energía del electrón al inicio; $S_1(t)$ se obtiene tomando el primer polinomio de Legendre y t para una energía determinada y $S_1(1)$ se obtiene tomando $t = 1$ y el 1-ésimo polinomio de Legendre.

De lo anterior se tiene, que

$$\begin{aligned} \int_0^S S_1(s') ds &= S_t \int_t^1 S_1(t') dt' \\ &= S_t \frac{(1+\alpha)}{\alpha} S_1(1) \ln\left(\frac{t+\alpha}{t(1+\alpha)}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.3.24})$$

donde el valor de α se determina de las ecuaciones (I.3.20)

y (I.3.21), quedando:

$$\alpha = \frac{S_1(1) - t^2 S_1(t)}{t S_1(t) - S_1(1)} \quad (\text{I.3.25})$$

La probabilidad de dispersión por unidad de ángulo sólido en la dirección θ está dada por (GS1):

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum (2l+1) G_l P_l(\cos\theta) \quad (\text{I.3.26})$$

y da la probabilidad de que un electrón sea dispersado un ángulo θ después de haber experimentado n colisiones; y para que éste normalizado:

$$2\pi \int_0^\pi f(\theta) \sin\theta \, d\theta = 1 \quad (\text{I.3.27})$$

por lo que la distribución de Goudsmit-Saunderson, está dada por:

$$A_{\text{GS}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum \left(1 + \frac{1}{2}\right) e^{-\int S_1(s) ds} P_l(\cos\theta) \quad (\text{I.3.28})$$

$A_{\text{GS}}(\theta)$ tiene su valor máximo a cero grados y disminuye de la misma forma que la distribución dada por el modelo de Rutherford.

La ventaja de utilizar la distribución de Goudsmit-Saunderson para obtener el ángulo de dispersión de una partícula después de haber atravesado un espesor s de material, está en que se consideran n colisiones y no se hacen suposiciones acerca de los ángulos de dispersión ni sobre la sección eficaz de dispersión.

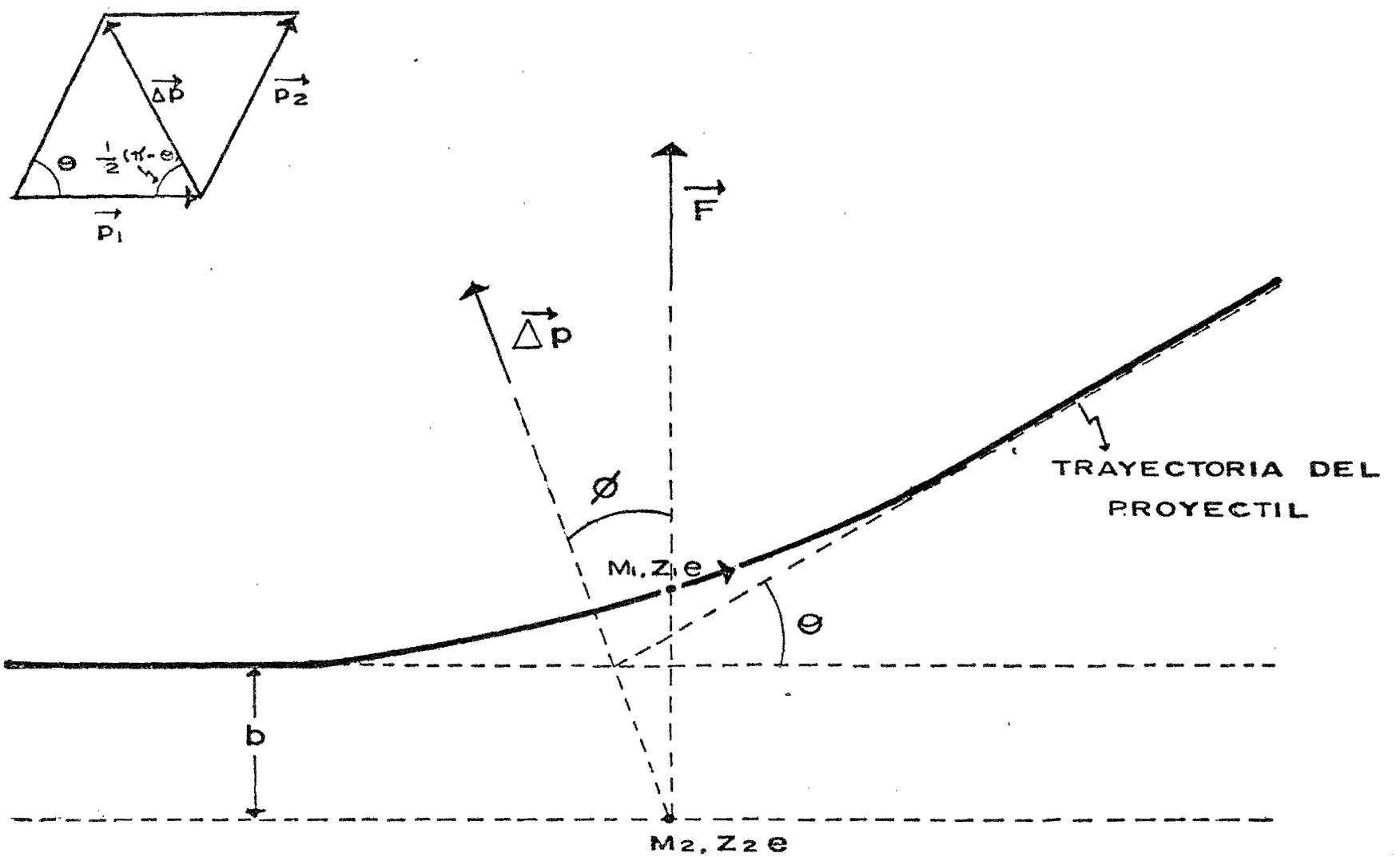


Figura 4.- Dispersión de Rutherford, en donde la línea punteada representa la trayectoria del proyectil para un potencial repulsivo provocado por la partícula de carga $Z_2 e$.

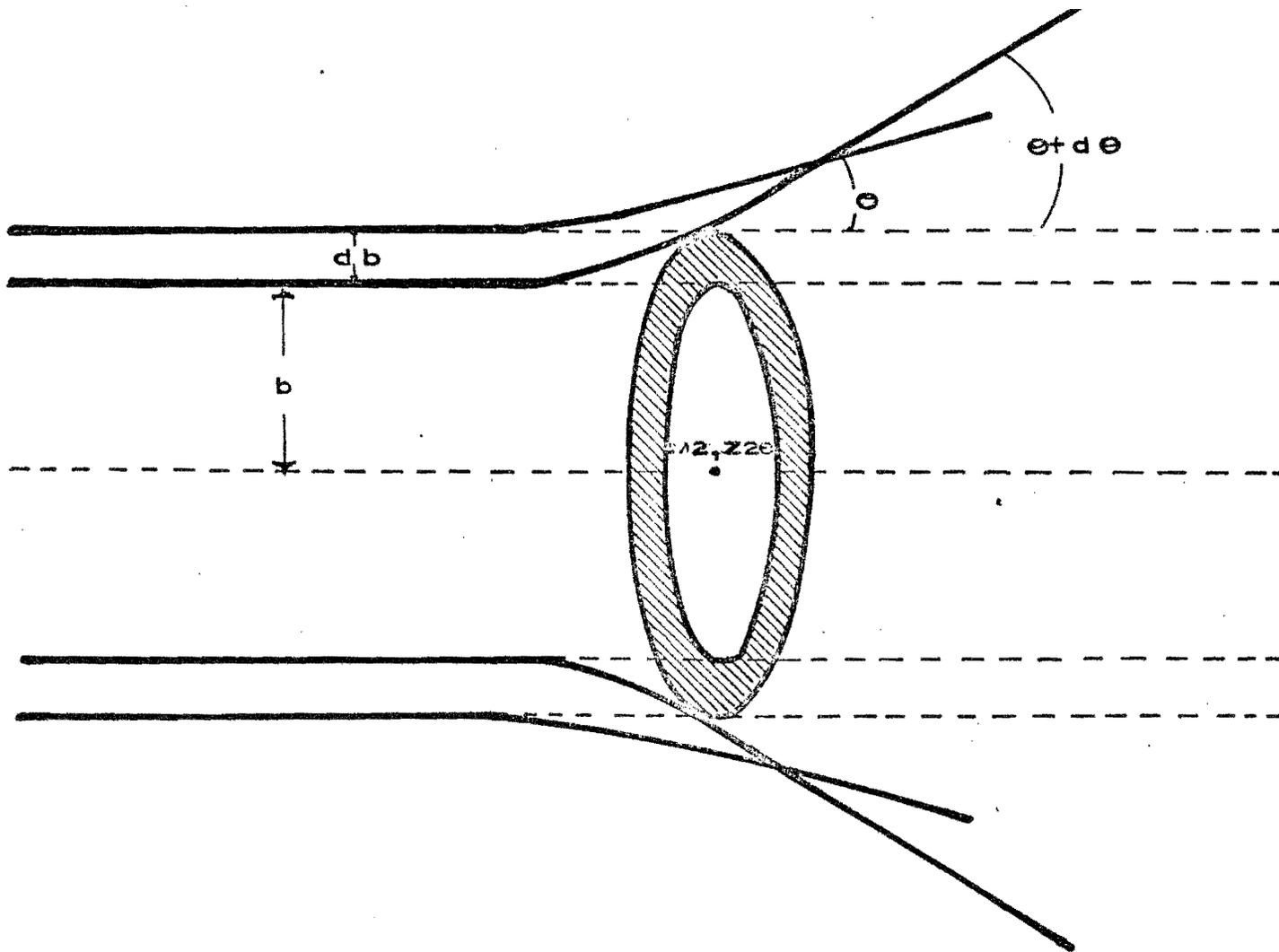


Figura 5.- Partículas dirigidas sobre un círculo de radio b y área $2\pi b db$, centrado en el núcleo, que son dispersadas un ángulo sólido $d\Omega$ comprendido entre los dos conos de ángulo θ y $\theta + d\theta$

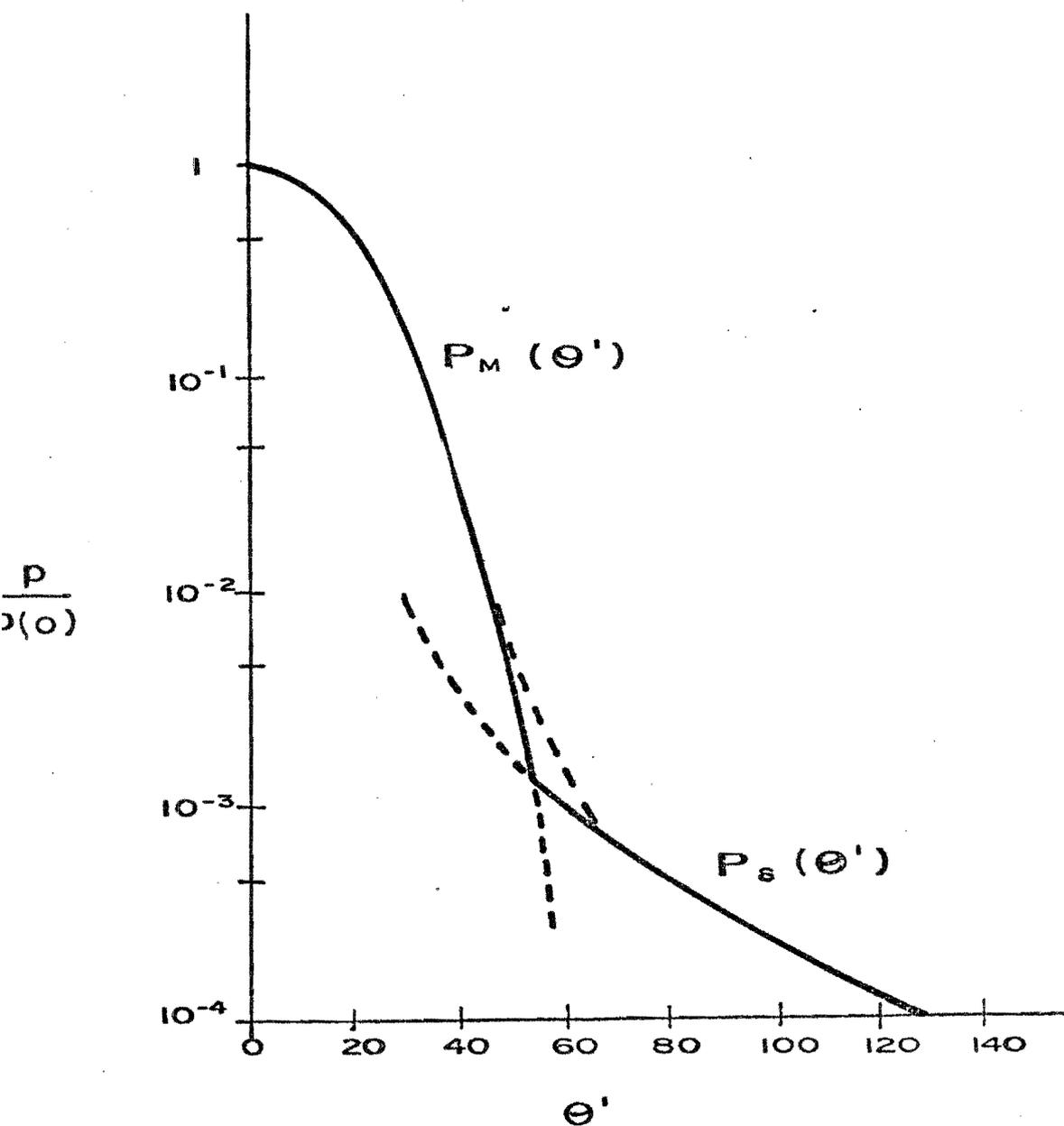


Figura 6.- Distribución angular dada por el modelo de Rutherford en la dispersión múltiple. En la región de dispersión plural, la línea punteada da una transición suave de la dispersión múltiple de ángulos pequeños (gaussiana), hacia la dispersión única de ángulos grandes

II. METODO DE MONTECARLO

El método debe su nombre al casino de Mónaco, ya que es un método numérico que se basa en la simulación de variables aleatorias y la ruleta es el aparato mecánico más simple para obtener variables aleatorias. Este método permite simular cualquier proceso cuyo desarrollo dependa de factores al azar o problemas sin relación con factores aleatorios a base de inventar modelos probabilísticos artificiales.

El método consiste en general, en la elaboración de un programa para realizar una prueba aleatoria, la cual se vá a repetir N veces, de modo que cada prueba sea independiente de las demás. El error del método es como regla proporcional a $N^{-1/2}$.

A continuación se presentan las definiciones de variables aleatorias discretas y continuas, la forma de obtenerlas y algunas de las reglas para obtener prácticamente sus valores.

II.1.- Variables Aleatorias

i) Variable aleatoria discreta.-

Se le llama así a la variable que puede tomar un conjunto discreto de valores x_1, x_2, \dots, x_n con sus correspondientes probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n .

Los valores x_i pueden ser cualquier número, mientras que las probabilidades p_i deben cumplir las siguientes condiciones:

a) Todos los números p_i deben ser positivos

$$p_i > 0 \quad (\text{II.1})$$

b) La suma de las p_i debe ser igual a uno:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{II.2})$$

La esperanza matemática $M\xi$ de la variable aleatoria discreta ξ es el valor medio de la variable, con la particularidad de que los valores x_i con mayor probabilidad aparezcan en la suma con pesos mayores:

$$M\xi = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} \quad (\text{II.3})$$

ii) Variable aleatoria continua.-

Se le llama así a la variable que puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo (a,b) .

La variable queda definida cuando se conoce el intervalo (a,b) y la densidad de probabilidad $p(x)$.

La probabilidad de que la variable ξ tome un valor perteneciente al intervalo (a',b') , contenido en (a,b) es:

$$P(a' < \xi < b') = \int_{b'}^{a'} p(x) dx \quad (\text{II.4})$$

La densidad de probabilidad $p(x)$ debe cumplir las siguien-

tes condiciones:

a) debe ser positiva:

$$p(x) > 0 \quad (\text{II.5})$$

b) la integral de la densidad en todo el intervalo(a,b) debe ser igual a uno:

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad (\text{II.6})$$

La esperanza matemática $M\xi$ de la variable aleatoria ξ es el valor medio de la variable y está dado por:

$$M\xi = \frac{\int_a^b x p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \quad (\text{II.7})$$

· Cuando la variable esté definida en el intervalo (0,1) y su densidad $p(x) = 1$, se dice que tiene una distribución uniforme en (0,1) y entonces la probabilidad de que la variable tome un valor perteneciente al intervalo(a',b') es

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a' \quad (\text{II.8})$$

II.2.- Obtención de Números Aleatorios

Las variables aleatorias se pueden obtener a través de:

a) Tabla de números aleatorios

Esta es una tabla de números en la que aparecen cada uno de los dígitos distribuidos al azar y en la que la probabilidad de que en un lugar determinado se encuentre un dígito dado es $0.1/n$.

b) Generador de números aleatorios

De esta manera se van generando al azar uno a uno los números aleatorios (como en la ruleta).

c) Generador de números pseudoaleatorios

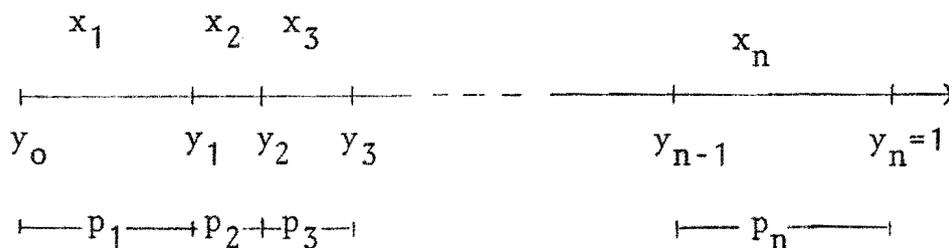
Números pseudoaleatorios son los que se obtienen a partir de una fórmula y que imitan los valores de una variable aleatoria con distribución uniforme.

III.3.- Determinación de los Valores de una Variable Aleatoria

Los valores de una variable aleatoria se determinan pesando con las probabilidades correspondientes los valores que se obtienen al azar de una distribución uniforme entre 0 y 1; a éste proceso se le llama sorteo de la variable.

i) Sorteo de una variable aleatoria discreta.-

Una manera para determinar los valores de una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores x_1, x_2, \dots, x_n , con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n , es construir un intervalo $0 < y < 1$ que se divide en n subintervalos de longitudes p_1, p_2, \dots, p_n , como se muestra en la siguiente figura:



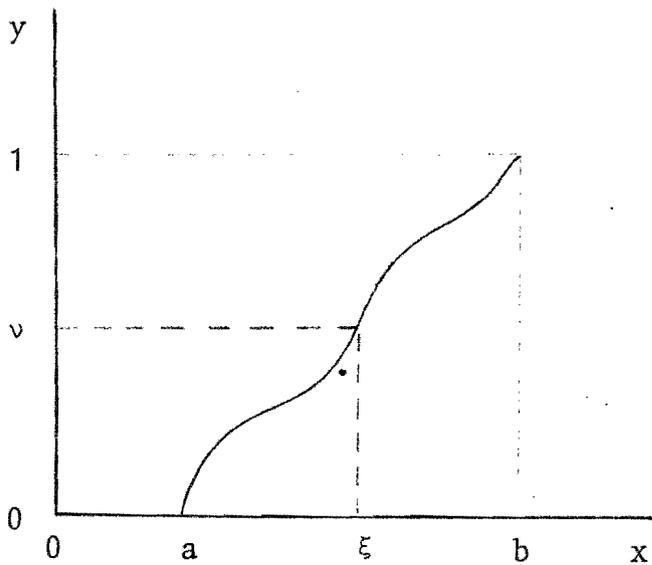
y en donde las coordenadas y están dadas por:

$$y_1 = p_1, y_2 = p_1 + p_2, \dots, y_{n-1} = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, y_n = 1$$

Cada vez que se desea obtener un valor de la variable se toma un valor de v al azar y se asigna a y , tal que $y = v$, el cual estará en un intervalo $y_{i-1} < y < y_i$, obteniendo que el valor de la variable ξ es x_i ; o sea que el valor al azar de v se pesa con la probabilidad de cada valor x .

ii) Sorteo de una variable aleatoria continua.-

Un método para determinar los valores de una variable aleatoria continua distribuida con una densidad $p(x)$ en el intervalo (a, b) , consiste en considerar una función $y(x)$ definida en ese intervalo, como se muestra en la siguiente figura:



y que cumpla con las condiciones (II.5) y (II.6), por lo que:

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 1$$

$$y'(x) = p(x) > 0$$

se toma entonces un intervalo (a', b') contenido en (a, b) , tal que

$$a' < x < b'$$

$$y(a') < y < y(b')$$

por lo que

$$P(a' < \xi < b') = P(y(a') < v < y(b'))$$

y como v está distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$ de las ecuaciones (II.4) y (II.8) se tiene:

$$\begin{aligned} P(a' < \xi < b') &= \int_{a'}^{b'} p(x) dx \\ &= y(b') - y(a') \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\int_a^{\xi} p(x) dx = v \quad (\text{II.9})$$

por lo que para obtener un valor de ξ habrá que escoger un valor de v y resolver la ecuación (II.9).

III. SIMULACION DE LAS TRAYECTORIAS DE LOS ELECTRONES DE UN HAZ, POR EL METODO DE MONTECARLO

Las trayectorias de los electrones dentro de un material semi-infinito, se simulan utilizando el método propuesto por Berger (B4), el cual consiste en generar aleatoriamente la trayectoria de cada uno de los electrones de una muestra, desde el momento en que entran al material, hasta que son absorbidos (energía cinética igual a cero) o hasta que salen del material retrodispersados; y aunque no utiliza directamente la ecuación de transporte, si deben tomarse en cuenta las suposiciones que se hacen para obtenerla, al hacer los cálculos aleatorios y que son:

- 1.- La radiación no interactúa con ella misma,
- 2.- La radiación no está polarizada,
- 3.- El medio es isotrópico,
- 4.- Las interacciones de la radiación con el medio son eventos bien localizados, entre los cuales la radiación se mueve en línea recta, o sea que se ignora la difracción y debe ponerse atención especial a la polarización dieléctrica en la moderación de partículas cargadas (los efectos mecánico-cuánticos y eventos en los que puedan ocurrir interacciones con más de un átomo al mismo tiempo se desprecian).

Las trayectorias no se generan de tal manera que se pueda hacer una descripción completa de ellas (por la dificultad que esto representa), si no que se simulan las características de los electrones en una sucesión de puntos a lo largo de la trayectoria.

Para encontrar la posición de estos puntos se divide la

longitud de trayectoria en un número determinado de pasos, cuya longitud está determinada por la energía del electrón al principio y al final de cada paso.

La dirección de movimiento del electrón en cada uno de estos puntos se obtiene simulando aleatoriamente la deflexión que sufre respecto a la dirección de movimiento en el paso anterior utilizando la teoría de dispersión múltiple de Goudsmit-Saunderson.

Con las trayectorias de los electrones, ya simuladas, se puede obtener: las curvas de transmisión y dosis contra profundidad, así como el espectro de energía de los electrones a diferentes profundidades, el alcance promedio, la energía total absorbida y la energía no absorbida (debida a los electrones retrodispersados). De la curva de transmisión a su vez, es posible obtener el alcance medio y el extrapolado. De la curva de dosis se obtiene la dosis máxima y el espesor de material para el cual es posible garantizar una dosis mínima.

i) Longitud de trayectoria.-

De la ecuación (I.1.1) se tiene que la longitud de trayectoria promedio, de un electrón que incide en un material con una energía E_0 , está dada por:

$$S_t = \int_{E_0}^{E_m} \left| \frac{dE}{ds} \right|^{-1} ds \quad (\text{III.1})$$

en donde el límite superior de la integral se toma tan aproximado a cero como sea posible, sin que diverja el resultado (ya que para una energía cinética, $E=0$, el término con logaritmo natural del poder de frenamiento se hace infinito).

Como se supone que todos los electrones pierden toda su

energía dentro del material (si no salen retrodispersados), entonces todos los electrones de la muestra tienen la misma longitud de trayectoria.

ii) Longitud de paso.-

Dado que la longitud de cada paso en los que se divide la trayectoria está determinado por las energías E_i y E_{i+1} , al inicio y al final del él, se puede considerar cualquiera de los siguientes casos:

a) que en cada paso el electrón pierde una cantidad constante de energía ΔE , tal que:

$$E_{i+1} = E_i - \Delta E \quad (\text{III.2})$$

b) que al final del paso la energía se ha reducido en un factor k , tal que:

$$E_{i+1} = k E_i \quad (\text{III.3})$$

por lo que la energía perdida en el i -ésimo paso es

$$\begin{aligned} \Delta E_i &= E_i - E_{i+1} \\ &= E_i (1 - k) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

c) una combinación de las dos anteriores, de tal manera que se escoge una cantidad inicial para la pérdida de energía, la cual se vá reduciendo conforme aumenta la longitud recorrida de la trayectoria.

iii) Deflexión angular.-

La deflexión angular del electrón en cada paso, respecto a un sistema de coordenadas cuyo eje z coincida con la dirección

de movimiento del electrón al inicio del paso, está dada por los ángulos polar ω y azimutal $\Delta\phi$, como se ve en la figura 7.

Como el medio se supone isotrópico, el ángulo $\Delta\phi$ se obtiene aleatoriamente de una distribución uniforme entre 0 y 2π .

El ángulo polar ω se obtiene de la distribución de Goudsmit-Saunderson, como sigue:

1° Se construye la distribución para ángulos ω entre 0 y π y para todas las energías E_i , del electrón, al inicio de cada paso; de la ecuación (I.3.28), se tiene (empezando con $l=1$):

$$A_{GS} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \frac{1}{2}) e^{-\int S_1(s) ds} P_1(\cos \omega) \quad (\text{III.5})$$

en donde $P_1(\cos \omega)$ representan los polinomios de Legendre:

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = \cos \omega$$

$$P_{l+2} = \frac{(2l+1) \cos \omega P_{l+1} - l P_l}{l+1}$$

y para la integral, de la ecuación (I.3.24) se tiene:

$$S_1(s) ds = S'_t \frac{(1+\alpha)}{\alpha} S_1(1) \ln \frac{t+\alpha}{t(1+\alpha)} \quad (\text{III.6})$$

siendo

$$t = \frac{S'_t - \Delta s_i}{S'_t} \quad (\text{III.7})$$

$$\alpha = \frac{S_2(1) - t^2 S_2(t)}{t S_2(t) - S_2(1)} \quad (\text{III.8})$$

y S'_t representa la longitud de trayectoria residual al inicio del paso.

De la ecuación (I.3.13) y tomando la sección eficaz de McKinley-Feshback dada por la ecuación (I.3.17), se tiene:

$$S_1(t) = \frac{2\pi NZ(Z+1)e^4}{p^2 v^2} \int_0^\pi \left[\frac{1}{(1+2\eta - \cos\theta)^2} + \frac{z \pi \beta}{2 \cdot 137 (1+2\eta - \cos\theta)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{(\beta^2 + z\pi\beta/137)}{2(1+2\eta - \cos\theta)} \right] \{1 - P_1(\cos\theta)\} \sin\theta \, d\theta \quad (\text{III.9})$$

donde

$$\frac{1}{p^2 v^2} = \frac{(1 - \beta^2)}{m_0^2 c^4 \beta^4}$$

y poniendo $l=2$ y $t=1$ ($\tau = E_i/m_0 c^2$); $l=2$ y t ($\tau = E_{i+1}/m_0 c^2$); l y $t=1$ ($\tau = E_i/m_0 c^2$) se obtienen $S_2(1)$, $S_2(t)$ y $S_1(1)$, respectivamente.

De lo anterior se ve que la distribución de Goudsmit-Saunders depende de la energía E_i , al inicio y de la longitud de paso, Δs_i , las cuales son iguales para todos los electrones de la muestra y entonces la distribución angular es igual para todos ellos en cada paso.

El número de términos en la serie de la ecuación (III.5) debe ser suficientemente grande para tener una buena convergencia en el resultado y suficientemente pequeño para que el tiempo en que se genere la distribución, para ángulos entre 0 y π , sea corto.

- 2° Dado que la integral de la distribución, multiplicada por $2\pi \sin\theta$ entre 0 y π está normalizada, se divide éste espacio en pequeños intervalos (ω_j, ω_{j+1}) , de igual tamaño y se calcula el área bajo la curva, AR_j , en cada uno de ellos.
- 3° Se calcula el área normalizada bajo la curva, para intervalos $(0, \omega_j)$, en donde $0 < \omega_j < \pi$ de tal manera que para el intervalo

$(0, \pi)$ el área es uno. Por lo que se tendrá que para cada paso y para cada ángulo ω_j , hay asociada un área normalizada ARN_j .

4° Para cada paso, de cada uno de los electrones de la muestra se genera un número pseudoaleatorio entre 0 y 1, que se pesa con las áreas normalizadas obtenidas anteriormente, haciendo que el ángulo polar aleatorio, Ω_i , sea igual al promedio de los ángulos ω_j y ω_{j+1} , con áreas $ARN_{i,j}$ y $ARN_{i,j+1}$, entre cuyos valores esté comprendido el número aleatorio.

iv) Dispersión angular.-

Llamando θ_i , ϕ_i y θ_{i+1} , ϕ_{i+1} a los ángulos que definen la dirección de movimiento del electrón al inicio y al final del i -ésimo paso, en un sistema de coordenadas cuyo eje z corresponda a la dirección de movimiento de un electrón que incida normalmente en el material, de las ecuaciones de cinemática se tiene (B4):

$$\cos \theta_{i+1} = \cos \theta_i \cos \Omega + \sin \theta_i \sin \Omega \cos \Delta\phi_{i+1} \quad (\text{III.11})$$

en donde Ω es la deflexión polar en ese paso, como se ve en la figura 7.

v) Posición longitudinal.-

Se calculan las coordenadas z (dirección de incidencia normal) al final de cada paso, para todos los electrones suponiendo que lo que ocurre es una sola deflexión a la mitad de cada paso y despreciando los desplazamientos transversales a la dirección z , como se muestra en la figura 8 y así se obtiene:

$$Z_{i+1} = Z_i + \frac{\Delta S_i}{2} (\cos \theta_{i+1} + \cos \theta_i) \quad (\text{III.12})$$

vi) Alcance.-

Ya con todas las coordenadas z se obtiene el alcance (máxima penetración), suponiendo que si un electrón sale retrodispersado del material, no vuelve a entrar a él.

vii) Dosis.-

De la ecuación (I.1.5) se tiene que la dosis absorbida es función de la energía impartida por la radiación a un elemento de volumen dado que para calcular la longitud de paso y por lo tanto la posición longitudinal de los electrones al final de cada paso, se toma en cuenta la energía perdida en las colisiones inelásticas únicamente, entonces la energía impartida media $\bar{\Delta E}$ es igual a la suma de todas las energías perdidas ΔE_j en todos los pasos que estén comprendidos dentro del elemento de volumen.

La masa del elemento de volumen por unidad de área está dada por:

$$dm = h \rho$$

en donde ρ es la densidad del material y h es el espesor del elemento de volumen.

De lo anterior se tiene que la dosis en el i -ésimo elemento de volumen (de longitud h), por unidad de área, está dada por:

$$D\left(\frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}\right)_i = \frac{1}{\rho h} \sum \Delta E_j \quad (\text{III.13})$$

en donde la suma se debe extender para todas las ΔE_j que estén comprendidas entre ΔZ_i y ΔZ_{i+1} , siendo:

$$h = \frac{S_t}{u}$$

$$\Delta Z_{i+1} = i h$$

y u el número de elementos de volumen que hay en un espesor de material igual a la longitud de trayectoria promedio de los electrones.

La dosis se expresa por electrón incidente, o sea que se divide entre el número de electrones de la muestra, para que los resultados no dependan del número de trayectorias simuladas, que en general es muy grande.

viii) Transmisión de electrones.-

Para calcular cuantos electrones se transmiten después de haber penetrado una cierta longitud en el material en la dirección de incidencia normal de los electrones en el material, lo que se hace es contar cuantos electrones de la muestra tienen un alcance mayor que cada una de las coordenadas ΔZ_i .

El resultado se expresa normalizado, dividiendo el número de electrones transmitidos entre el número total de electrones de la muestra y las coordenadas también se han dividido entre la longitud de trayectoria de los electrones, para esa energía.

ix) Espectro de energía.-

Para determinar la energía de los electrones dentro de un espesor determinado, a una profundidad dada, lo que se hace es dividir un espesor de material igual a la longitud de trayectoria en un número l de coordenadas y_i y contar los electrones que tienen energías comprendidas entre e_n y e_{n+1} en donde la variable e está comprendida entre 0 y la energía inicial de los electrones.

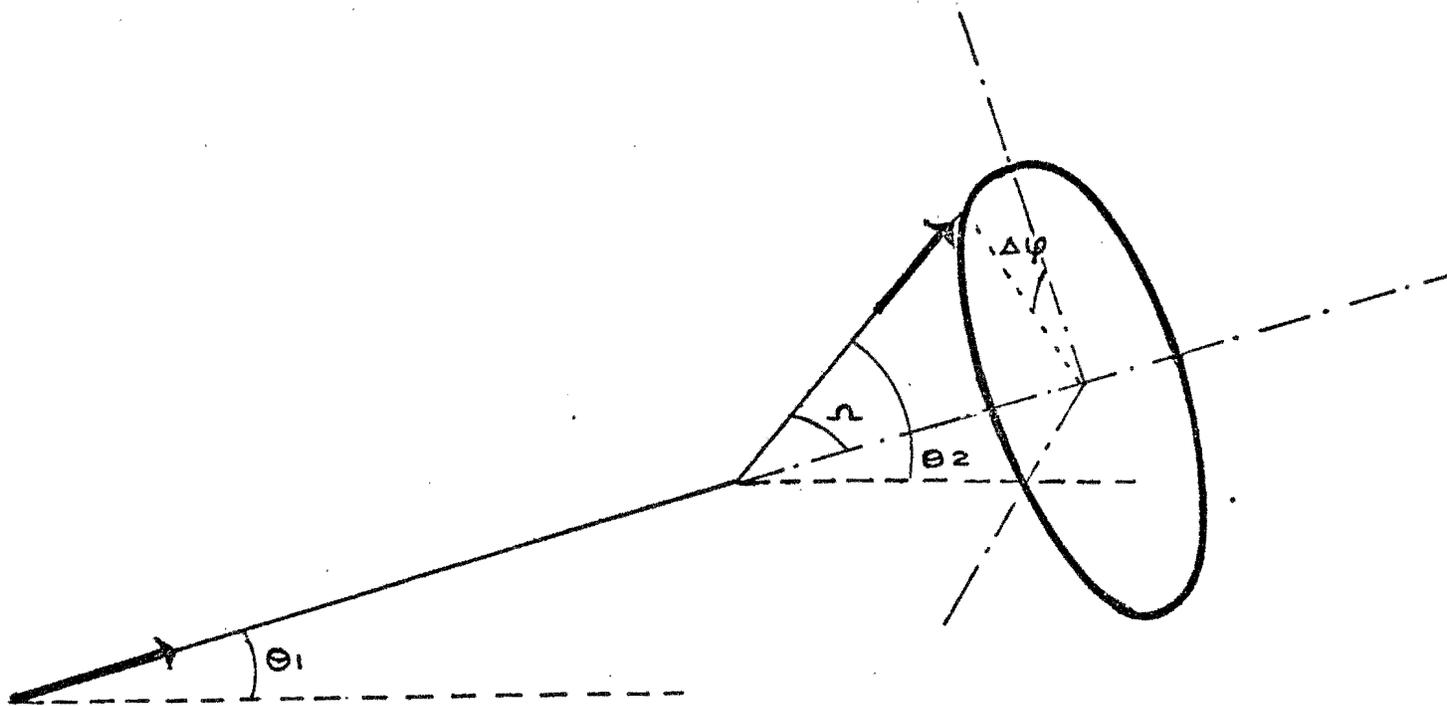
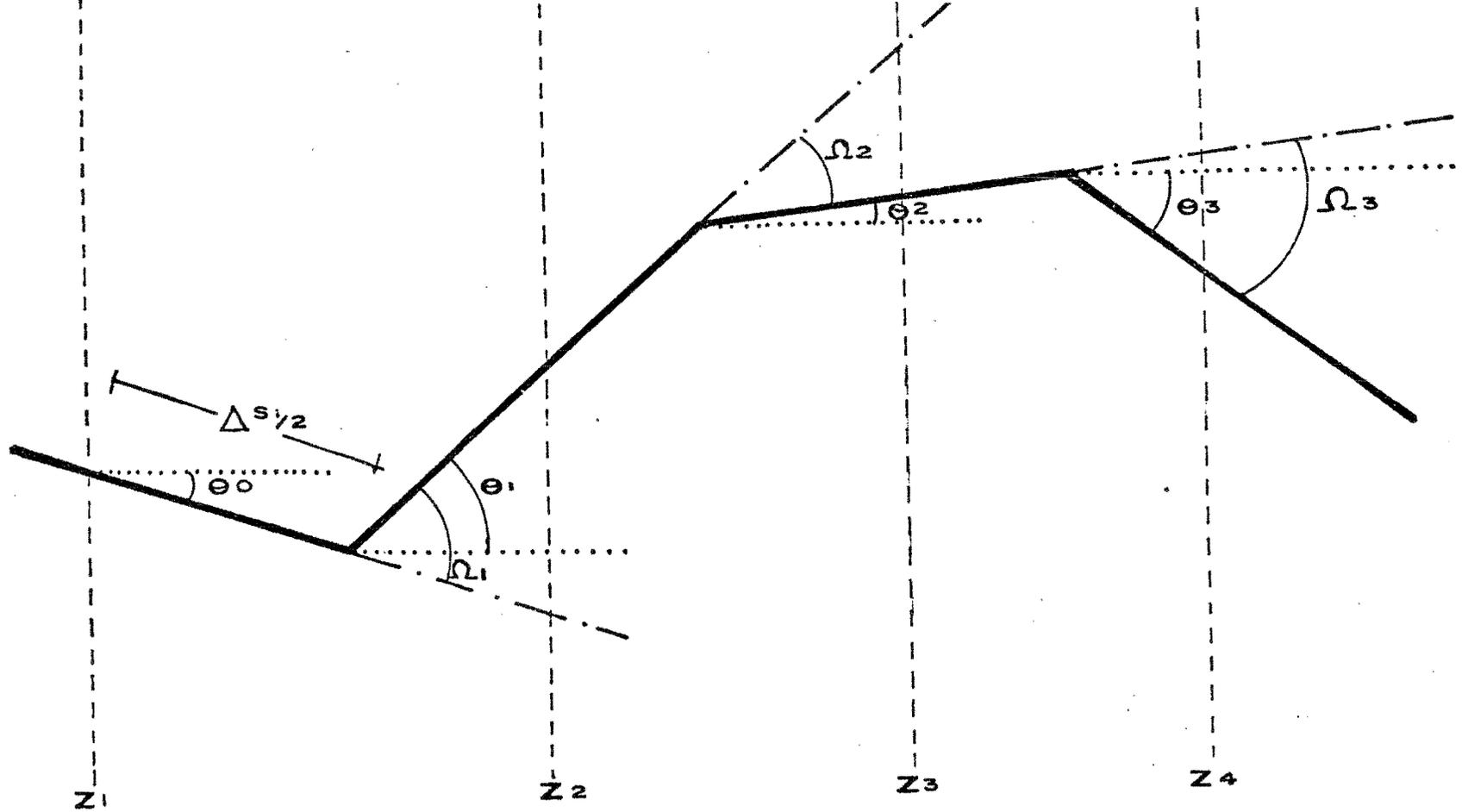


Figura 7.- Diagrama en que se muestran las direcciones de movimiento del electrón al inicio y al final de un paso, con trazo grueso. Los ángulos Ω y $\Delta\phi$ de deflexión se miden con respecto a la dirección de movimiento al inicio del paso.



$$Z_{i+1} = Z_i + \frac{\Delta S_i}{2} (\cos \theta_{i-1} + \cos \theta_i)$$

Figura 8.- Diagrama esquemático de la proyección sobre el plano de incidencia, de los tres primeros pasos de la trayectoria de un electrón, en donde se han marcado los ángulos Ω y θ para cada uno de ellos, así como el ángulo de incidencia θ_0 , en el material.

IV. RESULTADOS

Como ya se vió las partículas cargadas pierden energía al chocar con átomos o moléculas.

Como el interior del tubo del haz de un acelerador se encuentra al vacío, el primer material que encuentran los electrones es la ventana del acelerador, que sirve precisamente para mantener ese vacío.

Después de atravesar la ventana, los electrones salen al aire y antes de penetrar en el material que se desea irradiar atraviesan un cierto espesor de aire y por lo tanto éste es el segundo medio en el que los electrones pierden energía.

Con el objeto de averiguar la energía real con que inciden los electrones al material que se desea irradiar, se presenta inicialmente la manera de obtener la energía perdida por los electrones en un espesor dado de material y a continuación se calculan la energía perdida en una ventana de titanio de 60 micras de espesor, y la energía perdida en diferentes espesores de aire.

En seguida se presentan la dependencia en la energía y en la longitud recorrida, de la distribución de Goudsmit-Saunderson, así como un análisis del número de términos necesarios para que la serie converja y finalmente se calcula la dosis y espectro de energía para varias energías del haz y varios materiales.

IV.1. - Energía Perdida en un Espesor Determinado

La energía perdida por los electrones después de atravesar un espesor S de material, puede expresarse como:

$$E = \sum \Delta s_i \left(\frac{dE}{ds} \right)_i \quad (\text{IV.1.1})$$

en donde $S = \sum \Delta s_i$ y dE/ds es la energía perdida promedio, por unidad de trayectoria en el intervalo de interés. De la ecuación (I.2.19) se vé que para un haz compuesto de electrones el poder de frenamiento está dado por:

$$-\frac{dE}{ds} = \frac{2\pi e^4}{m_0 c^2 \beta^4} N Z \left\{ \ln \frac{mv^2 E}{I^2 (1-\beta^2)} - \beta^2 - \delta \right\} \quad (\text{IV.1.2})$$

donde dE/ds es un promedio, el valor que se obtiene de la ecuación (IV.1.1) depende del número de intervalos ya que cuanto mas pequeña es la longitud de éstos, mas exacto es el resultado; debido a lo cual se presenta la conveniencia de utilizar una computadora para resolver la ecuación (IV.1.1), variando el número de intervalos hasta obtener una buena convergencia en el resultado.

En el anexo se presenta el listado del programa utilizado.

a) Energía perdida en la ventana del acelerador

Dado que los aceleradores del Instituto de Física tienen ventanas de titanio, se considera: $Z=22$, $A=47.9$, $\rho=4.5 \text{ g/cm}^3$, a partir de las ecuaciones (I.2.32) $I=2.47402 \times 10^{-4} \text{ MeV}$ y de la ecuaciones (I.2.25) $X_0=0.2$, $X_1=3$ ya que $|c|=4.5728$.

b) Energía perdida en el aire

El espesor de aire que debe haber entre la ventana del acelerador y el material a irradiar depende de las características de este último y de la manera en que vá a pasar por la zona

de irradiación, ya que si el material golpea la ventana puede romperla.

Para calcular la energía perdida en el aire, se consideró que la presión atmosférica en la ciudad de México es de 586 mm-Hg que hay una temperatura ambiente de 20° C y dado que (E1):
 $NZ = 3.88 \times 10^{20}$ electrones/cm³ a 0°C y 760 mm-Hg e $I = 8.6 \times 10^{-5}$ MeV; se obtiene de la ecuación (I.2.30) $n = 0.71842$, de la ecuación (I.2.29) $\rho = 9.28917 \times 10^{-4}$ g/cm³, $(NZ)_\eta = nNZ = 2.7874 \times 10^{20}$ electrones/cm³, $h\nu_p = 7.3195 \times 10^{-7}$, $c_\eta = 7.22968$ y de las ecuaciones (I.2.27) se tiene $m=3$, $X_1=4.0$ y $X_0=1.6$.

En la figura 9 se muestran los resultados obtenidos para la energía perdida en una ventana de titanio de 60 micras y en diferentes espesores de aire y donde se puede observar que estas pérdidas son del orden del 1 % de la energía inicial de los electrones y que además la energía perdida es mínima, para energías del haz de aproximadamente 1.3 MeV.

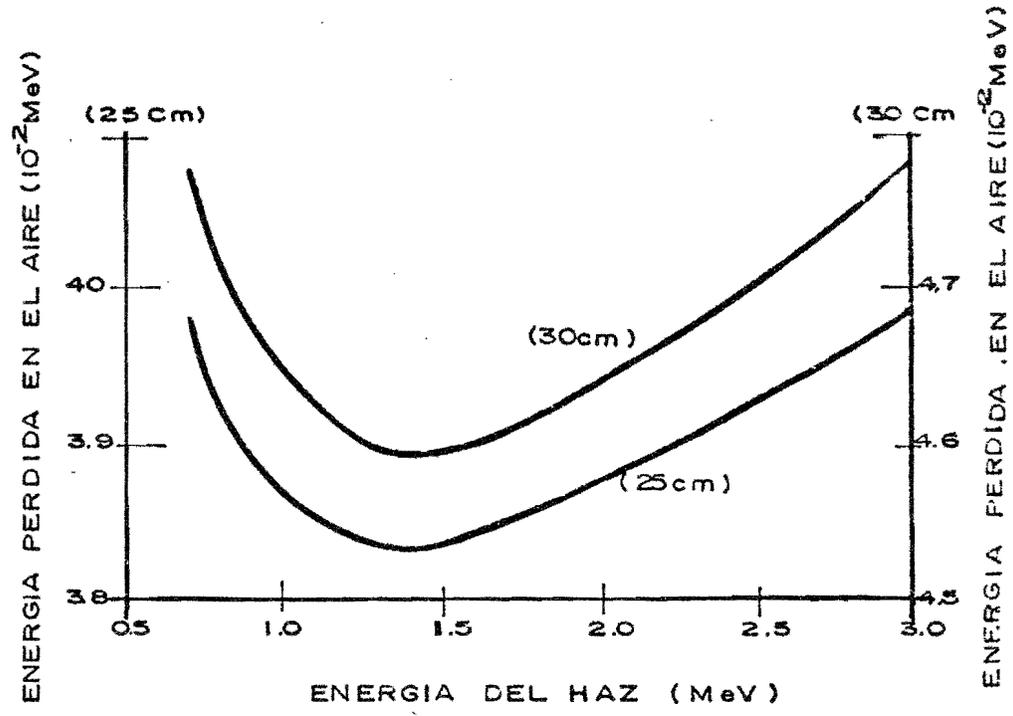
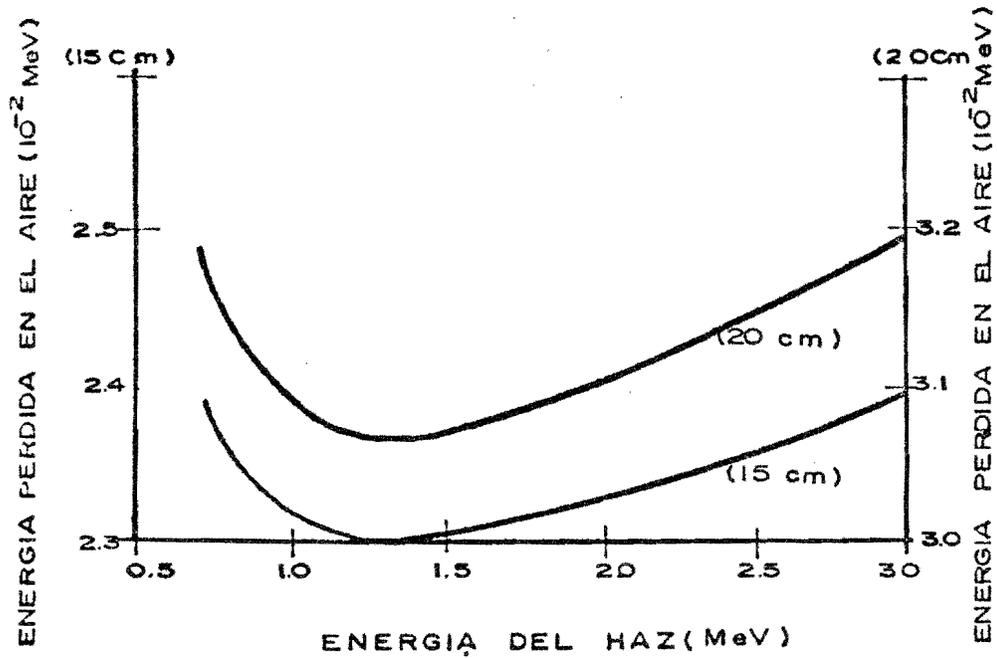
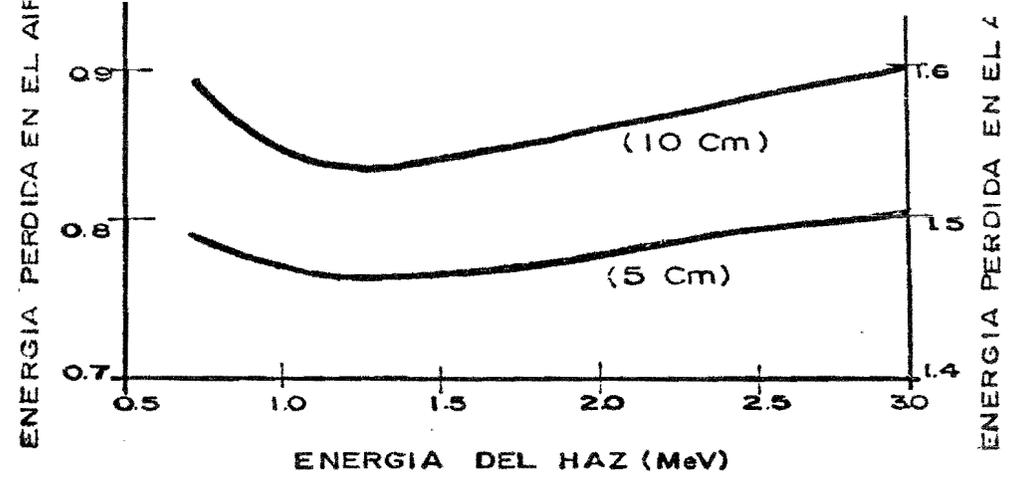
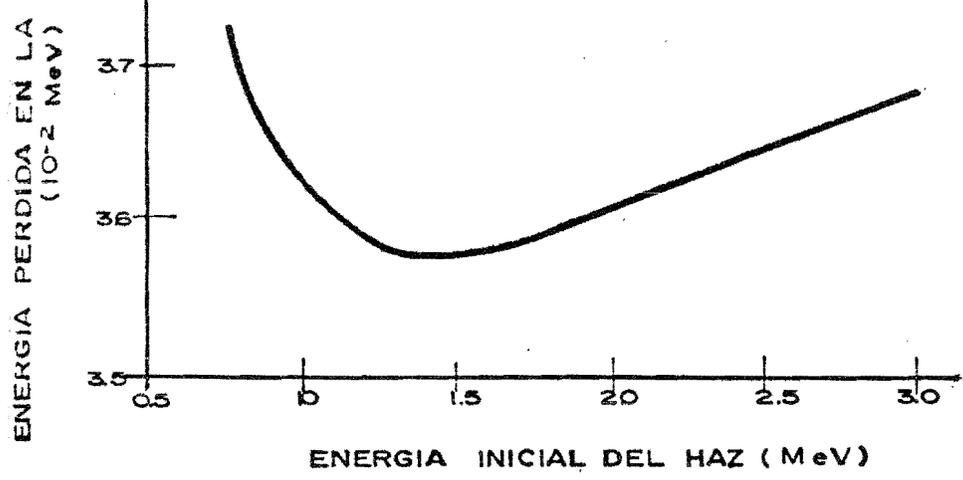


Figura 9.- Gráfica de la energía perdida en función de la energía inicial de los electrones

IV.2.- Factores que Afectan a la distribución de Goudsmit-Saunderson

En base a lo presentado en el capítulo III, se realizó un segundo programa de cómputo, cuyo listado se anexa al final, para encontrar:

- a) El número de términos que se deben considerar en la serie de la distribución de Goudsmit-Saunderson.- Se encontró que existe un valor mínimo para la energía perdida por paso, para el cual la serie converge con aproximadamente 60 términos, que para valores por abajo de este mínimo no hay convergencia aunque se aumente el número de términos hasta 100 y que para energías mayores el número de términos necesarios es menor. Con este programa se vió que el valor mínimo para la energía perdida por paso depende de la energía cinética del electrón, así como del material sobre el cual inciden, como se muestra en la figura 10 y de donde se observa que la energía perdida por paso mínima sigue un comportamiento dado por:

$$\Delta E_m = \Delta E_m(1) E^m \quad (\text{IV.2.1})$$

en donde $\Delta E_m(1)$ es la energía perdida mínima para 1 MeV y que aumenta con el número atómico del material, E es la energía de los electrones y m la pendiente de la curva, que también varía con el material.

- b) El valor adecuado para la energía perdida por paso.- Se encontró que el valor de la distribución para ángulos pequeños disminuye y para ángulos grandes aumenta, con la distancia recorrida por el electrón y la energía perdida por paso, como se muestra en la figura 11. El hecho de que el valor de la distribución disminuya para ángulos pequeños y aumente pa-

ra ángulos grandes provoca un aumento en la probabilidad de deflexión a ángulos pequeños. Es conveniente por lo tanto tomar la energía perdida por paso tan pequeña como sea posible, en cada uno de ellos.

- c) La variación de la longitud de paso, en función de la longitud de trayectoria recorrida.- Se encontró que cuando la energía del electrón se reduce de manera constante en todos los pasos la longitud de paso permanece aproximadamente constante durante dos tercios del recorrido y que después decrece rápidamente; cuando la energía del electrón se reduce en un factor k , en cada paso, y cuando la energía perdida por el electrón se reduce exponencialmente de acuerdo a la ecuación (IV.2.1), la longitud de paso decrece continuamente durante toda la trayectoria, siendo la longitud de paso mas pequeña la que se obtiene al reducir la energía perdida por paso exponencialmente, como se vé en la figura 12.

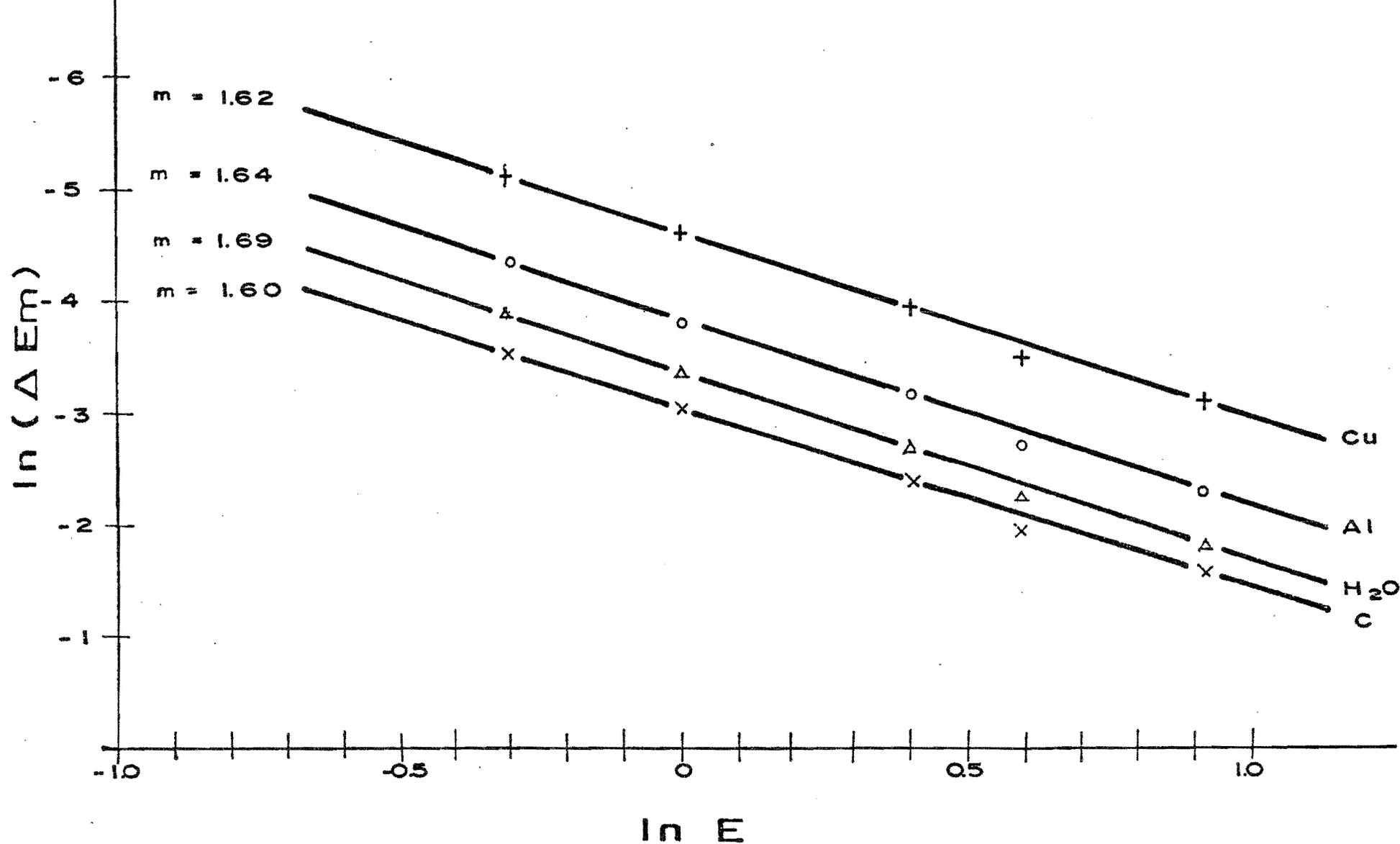


Figura 10.- Gráfica de la energía perdida mínima por paso, ΔE_m , en función de la energía de los electrones, para la cual converge la serie de la distribución de Goudsmit-Saunderson.

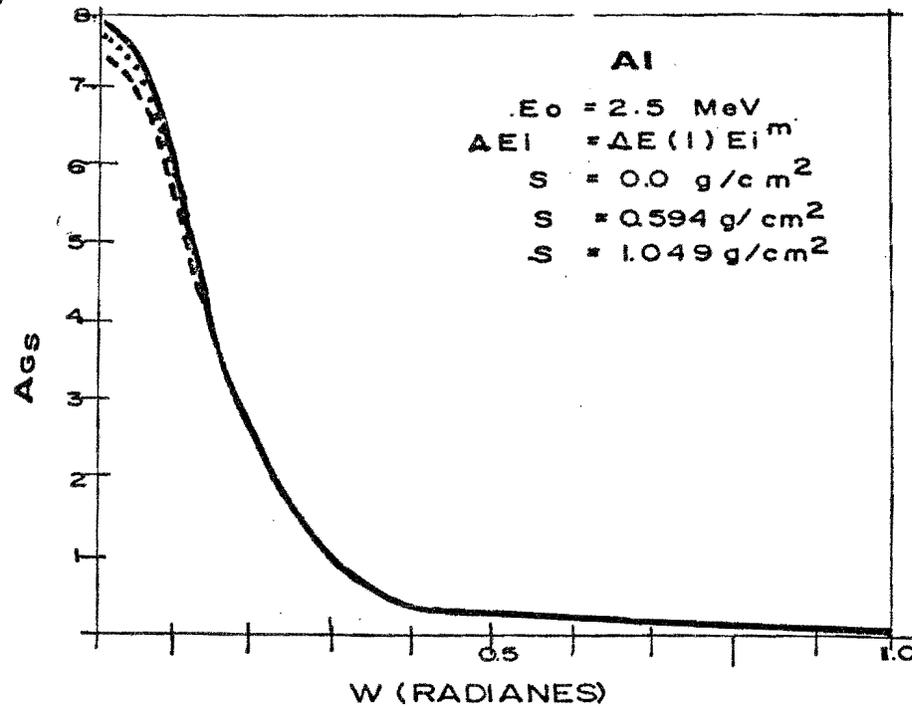
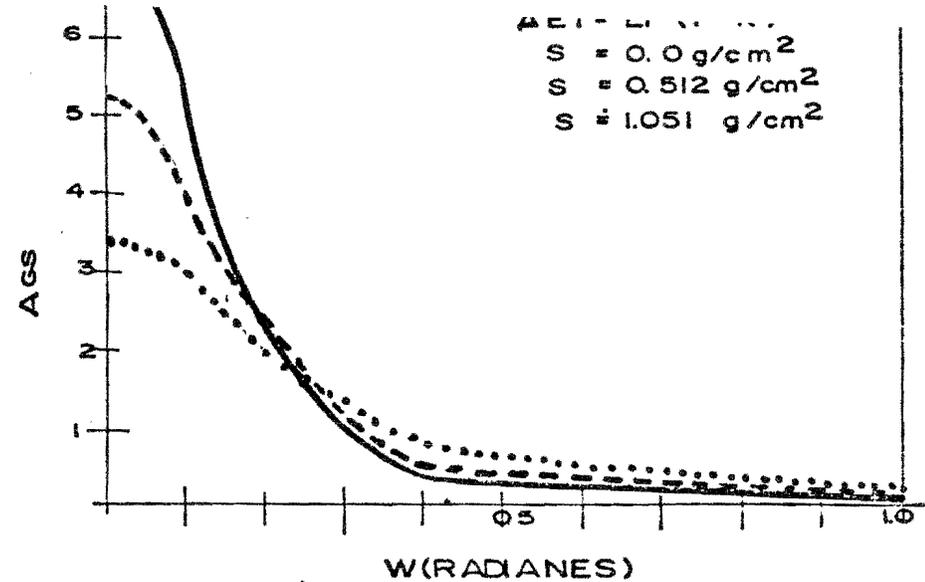
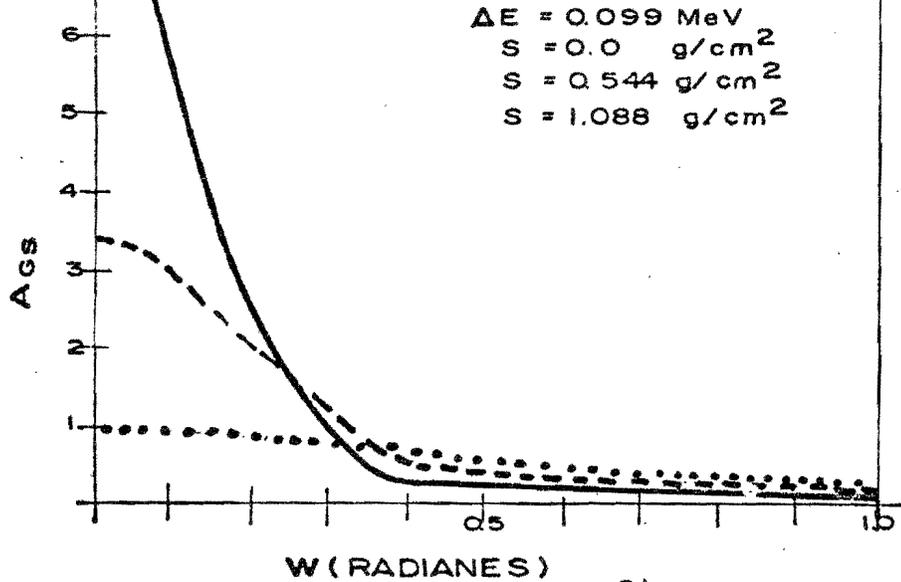


Figura 11.- Variación de la distribución de Goudsmit-Saunderson para electrones con energía inicial de 2.5 MeV, que inciden en Aluminio.

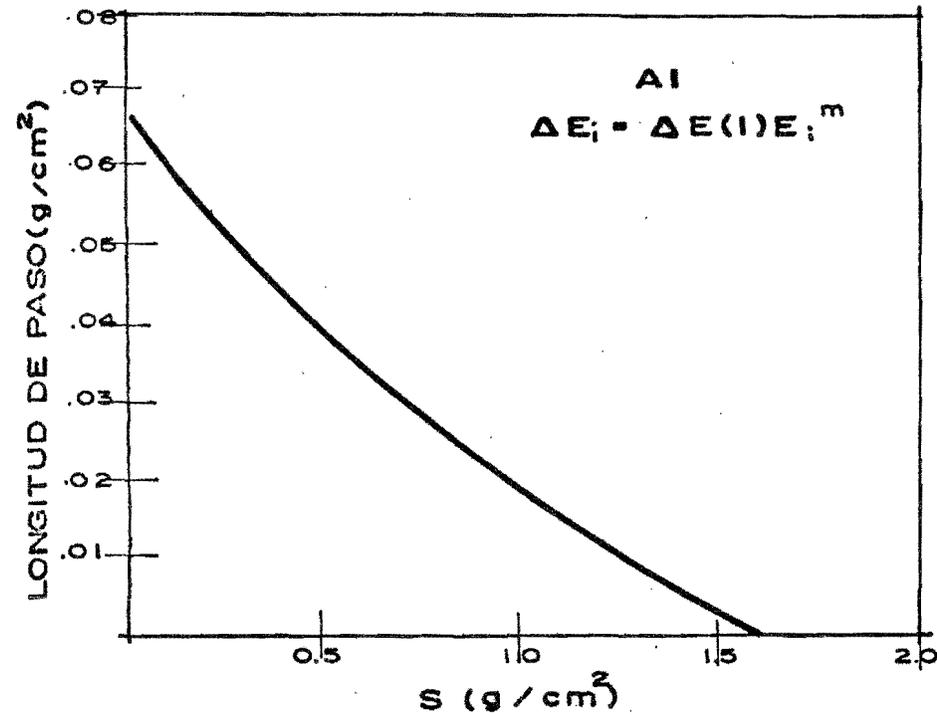
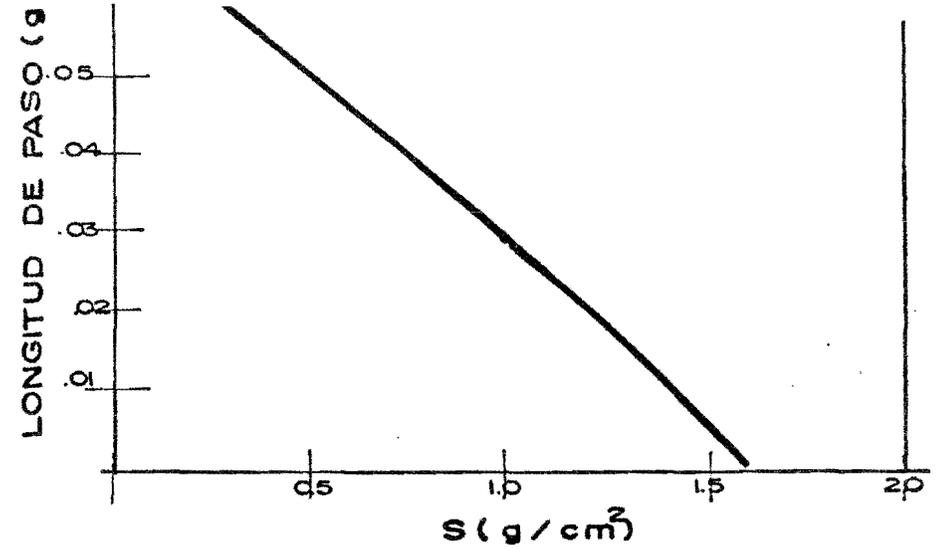
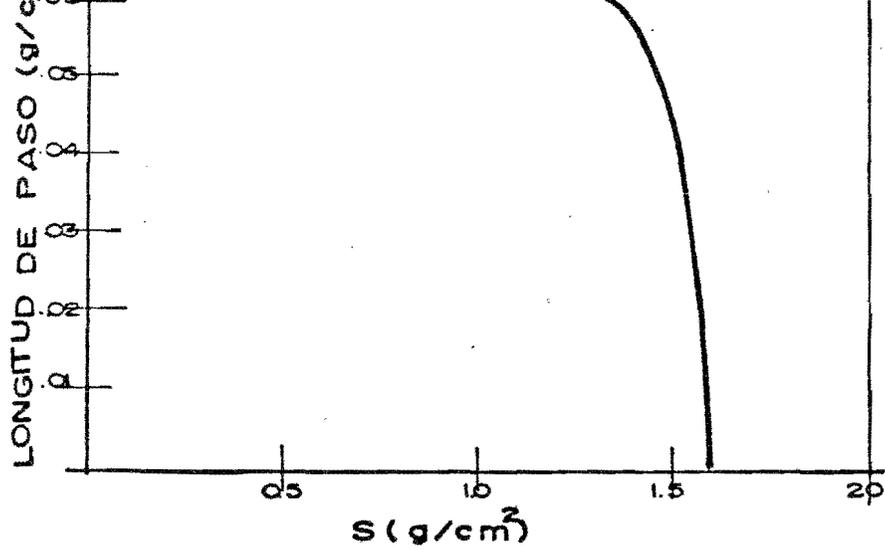


Figura 12.- Variación de la longitud de paso, con respecto a la longitud de trayectoria recorrida, hasta ese paso, para electrones de 2.5 MeV incidiendo en Aluminio.

IV.3.- Cálculo de la transmisión, Dosis, Alcance, Alcance Medio, Extrapolado y Promedio y Espectros de Energía de un Haz de Electrones Monoenergético al Incidir en un Material

Con los resultados del punto anterior se realizó un programa cuyo listado se anexa al final, con el objeto de simular por métodos de Montecarlo la incidencia de un haz monoenergético de electrones sobre un material y así obtener:

- el alcance, R_0
- alcance promedio, R_p
- curva de transmisión de electrones dentro de varios materiales y de ella obtener el alcance medio, \bar{R} , y el alcance extrapolado, R_{ex}
- espectros de energía a diversas profundidades para el haz de electrones y
- la dosis impartida al material.

Los datos con que es necesario alimentar al programa son:

- a) Características del haz: Energía cinética inicial, E_0 , y energía cinética final, E_m , de los electrones; así como el ángulo de incidencia θ_0 , en el material.
- b) Características del material: Número atómico, Z ; número másico, A ; densidad, ρ ; potencial de ionización, I (ecuaciones (I.2.30)); y los parámetros X_0 , X_1 y m para obtener el efecto de densidad, δ (ecuaciones (I.2.24-27)).
- c) Características del método: Número de electrones de la muestra, n_h , número de términos en la serie de la distribución de Goudsmit-Saunderson, n_l ; número máximo de pasos en que se di-

vide la trayectoria del electrón, np ; la energía perdida por paso, epp ; o el factor de reducción de la energía, k ; o bien el valor para la pérdida de energía mínima para 1 MeV, $\Delta E_m(1)$ y la pendiente m de la recta, para reducir esta pérdida exponencialmente que se obtiene de la gráfica de la figura 10 y el número de intervalos en que se dividen las funciones para integrarlas por el método de Simpson, m .

Este programa se aplicó para electrones con diferentes energías iniciales ($E_0 = 1.0, 2.0$ y 2.5 MeV) que inciden con diferentes ángulos ($\theta_0 = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$) en piezas semi-infinitas de: Aluminio ($Z=13, A=26.9815, \rho=2.702$ g/cm³, $I=1.63 \times 10^{-4}$ MeV, $X_0=0.2, X_1=3$ y $m=3$), Grafito ($Z=6, A=12.01115, \rho=2.25$ g/cm³, $I=7.8 \times 10^{-5}$ MeV, $X_0=0.2, X_1=2$ y $m=3$), Agua ($Z=7.2167, A=14.2655, \rho=1.0$ g/cm³, $I=7.379 \times 10^{-5}$ MeV, $X_0=0.2, X_1=2$ y $m=3$) y Cobre ($Z=29, A=63.546, \rho=8.92$ g/cm³, $I=3.1405 \times 10^{-4}, X_0=0.2, X_1=3$ y $m=3$).

En la figura 13 se muestra la curva de transmisión contra penetración para los electrones con energía inicial de 2.0 MeV, que inciden en una muestra semi-infinita de aluminio, con un ángulo de 0° y de donde se ve que el valor del alcance medio, R , es aproximadamente la mitad de la longitud de trayectoria, S , de los electrones y que está comprendida dentro del alcance promedio R_p . Para el alcance extrapolado R_{ex} , se obtiene un valor que difiere en un 4 % del que se obtiene con las ecuaciones de Katz y Penfold.

En la figura 14 se ve que el alcance medio y el alcance extrapolado disminuyen al reducir la energía inicial de los electrones al aumentar el ángulo de incidencia de los electrones en

el material y al aumentar la densidad del material.

Para determinar la dosis absorbida en el material, se necesita que el espesor másico en que ésta se calcula sea suficientemente grande para que la deposición de energía sea causada por muchos electrones y muchas interacciones y lo suficientemente pequeño para no causar una atenuación apreciable en la radiación.

Para determinar el espesor másico, de área unitaria, conveniente para calcular la dosis, se dividió una profundidad igual a la longitud de trayectoria de los electrones, en intervalos de igual tamaño y así ver el comportamiento de la dosis inicial y de la dosis máxima, al variar la longitud de estos intervalos, lo cual se muestra en la figura 15 y de donde se vé que los histogramas no varían mucho entre sí, y que al hacer mas chico el espesor másico, se aumenta la resolución, aunque los valores difieren cada vez mas de los experimentales. Por ejemplo para un espesor másico de 0.20 g/cm^2 la posición de la dosis máxima difiere en 16 % de los valores experimentales, mientras que el valor de la dosis máxima difiere en 6 % y el primer valor que se obtiene para la dosis difiere en 7 % del valor de la dosis superficial obtenidos experimentalmente; y para un espesor de 0.15 g/cm^2 , estas diferencias son de 16 %, 10 % y 28 % respectivamente. El comportamiento errático de la dosis superficial por abajo de un cierto espesor másico (0.1 g/cm^2 para agua), son atribuibles a que la deposición de energía es causada por muy pocas interacciones, ya que debido al modelo matemático al hacer muy pequeño el espesor másico puede suceder que no haya transcurrido ningun paso (en los que se divide la trayectoria del electrón), para la primera barra del histograma.

Mientras que la dosis inicial y máxima aumentan para espesores mayores, debido a que crece la atenuación de la radiación.

El espesor a utilizar se determinó viendo que éstos valores (para electrones de 2.5 MeV en agua), fueran lo mas aproximados a los datos experimentales y como la masa debe ser aproximadamente igual para cualquier material, hay que calcular la dosis para elementos de espesor:

$$h = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho} h_{H_2O}$$

$$= \frac{h_{H_2O}}{\rho}$$

donde h_{H_2O} es el espesor másico del agua y ρ la densidad del material para el que se desea calcular la dosis.

En la figura 16 se muestran las curvas de dosis para electrones de 2.5 MeV que inciden en diversos materiales, en donde se puede ver que la dosis máxima aumenta con la densidad del material, al mismo tiempo que su posición se corre hacia la superficie del material.

En la figura 17 se muestran las curvas de dosis para electrones con energía inicial de 1 y 2 MeV incidiendo en varios materiales y en donde se han marcado algunos valores experimentales.

Al realizar las figuras 16 y 17 se observó que para energías de 2.5 MeV no hay diferencias significativas al considerar las tres formas mencionadas para tomar la energía perdida por paso y que los resultados son bastante aproximados a los que se obtienen experimentalmente; para energías menores los resultados en los tres casos se diferencian mientras mas ligero es el mate-

rial, siendo las mas aproximadas a los valores experimentales cuando se considera que la energía perdida por paso se reduce de acuerdo a la ecuación (II.2.1). Estas diferencias se pueden atribuir a que la distribución (figura 11) depende de la longitud de paso y la energía al inicio de cada uno de ellos (figura 12).

Cuando se aumenta el ángulo de incidencia de los electrones en el material, los valores inicial y máximo de la dosis aumentan, mientras que la posición de éste último se corre hacia la superficie, como se muestra en la figura 18. Para ángulos de incidencia grandes (60°) el valor de la dosis inicial corresponde al máximo.

En general la dosis aumenta con el poder de frenamiento y la posición de la dosis máxima aumenta con el alcance medio de los electrones.

En la figura 19 se muestra la forma en que se vá degradando el haz de electrones, conforme aumenta la profundidad en el material.

En la figura 20 se compara la forma en que se degrada el haz de electrones cuando incide con diferentes ángulos en el material, para profundidades iguales. De ahí se ve que la energía se degrada más rapidamente al aumentar el ángulo de incidencia en el material.

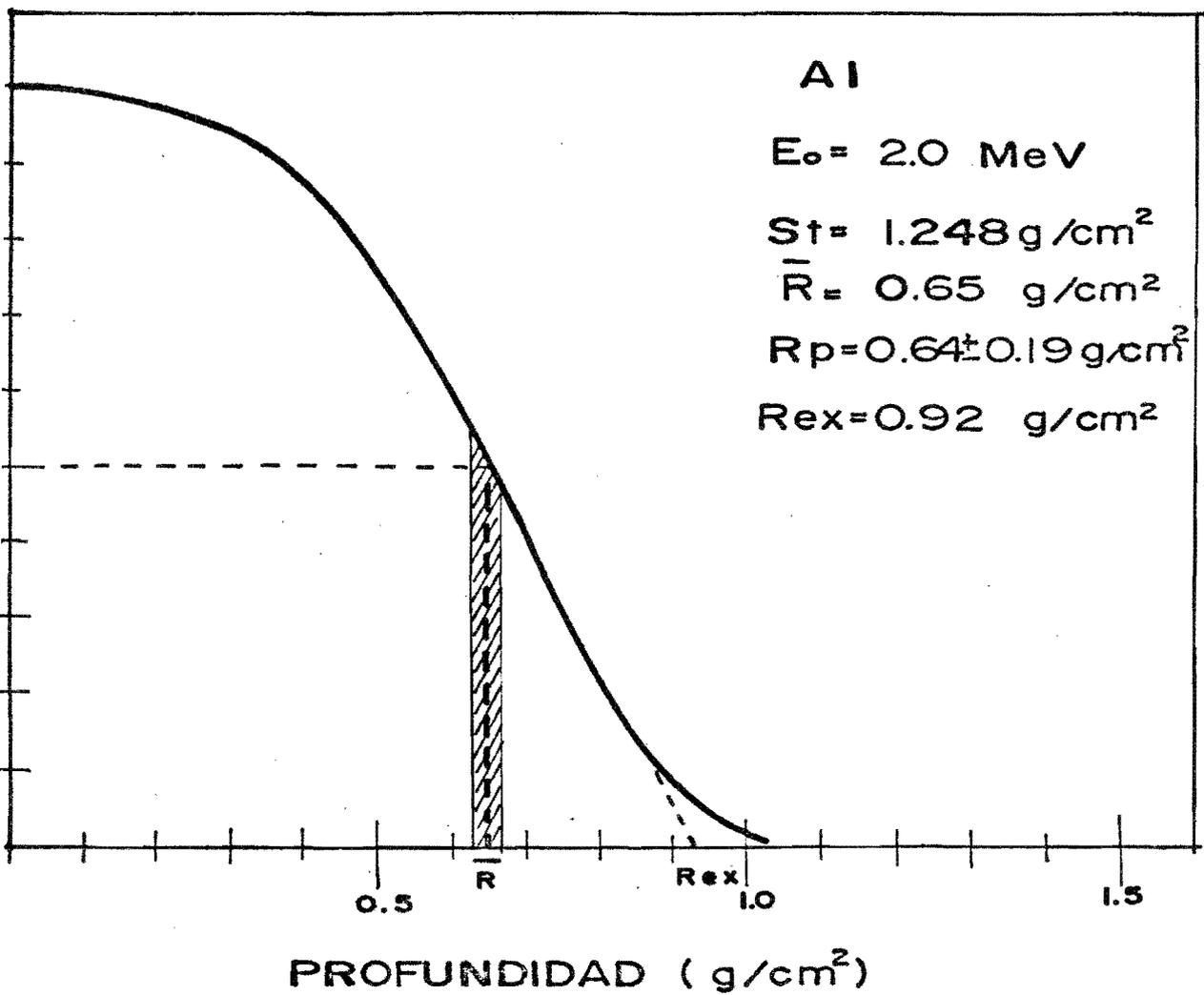


Figura 13.- Gráfica de transmisión contra profundidad para electrones de 2 MeV, incidiendo en Aluminio.

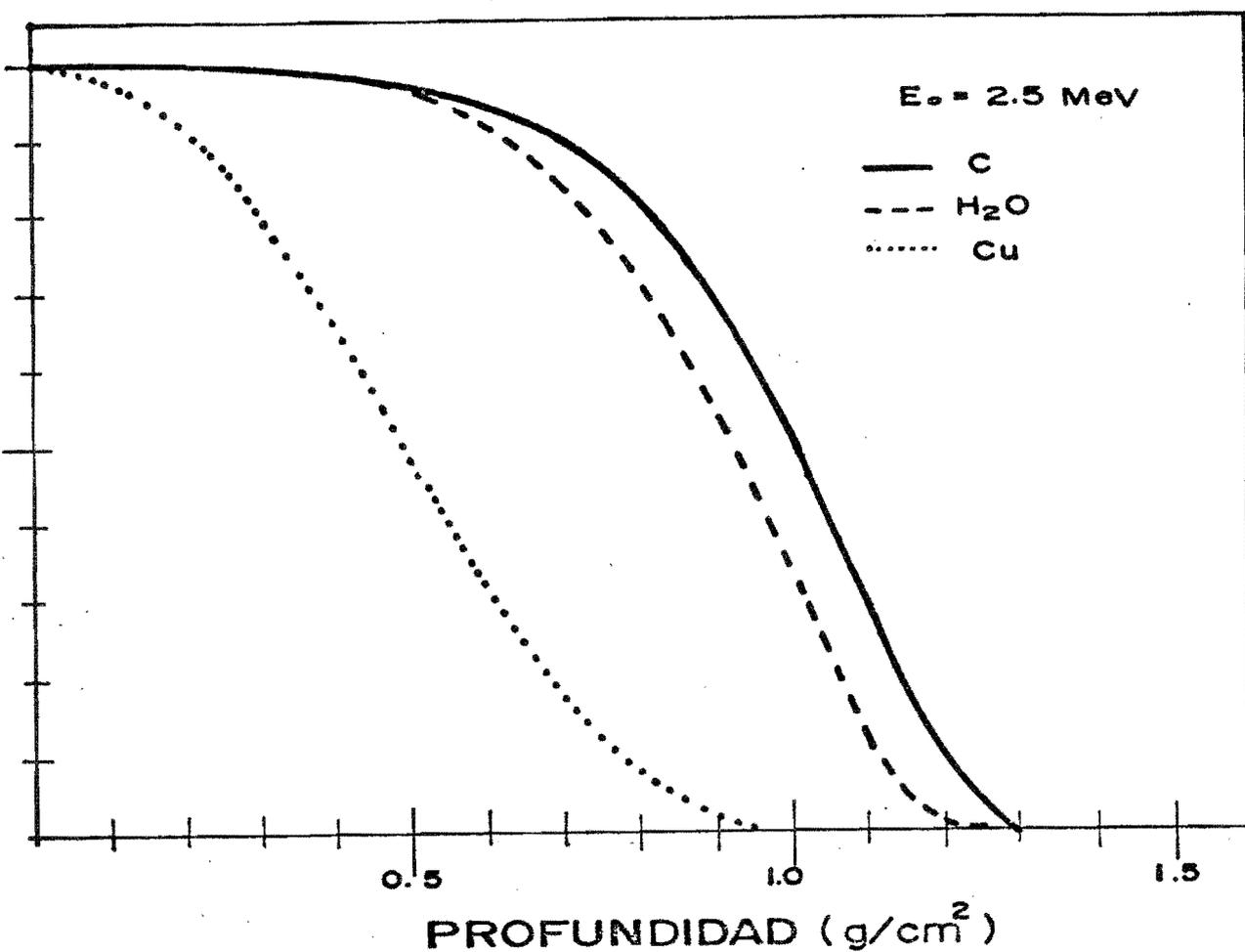


Figura 14.- Gráfica de transmisión contra profundidad para electrones incidiendo: a) en aluminio, con diferentes energías, b) en aluminio, con diferentes ángulos y 2.5 MeV de energía y c) en diversos materiales, con 2.5 MeV de energía.

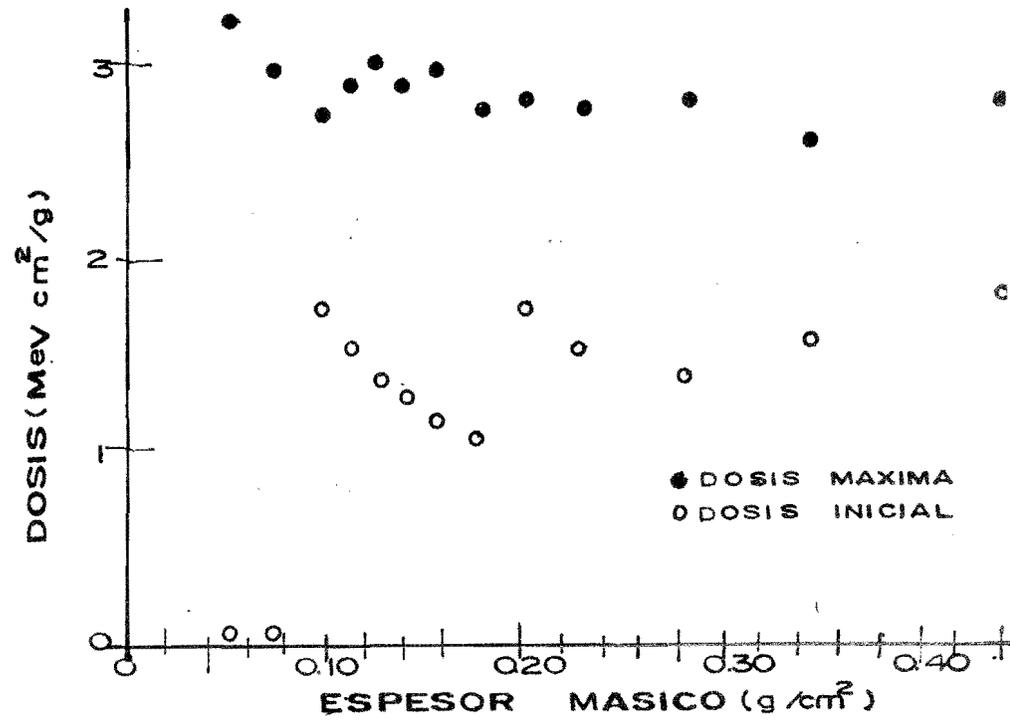
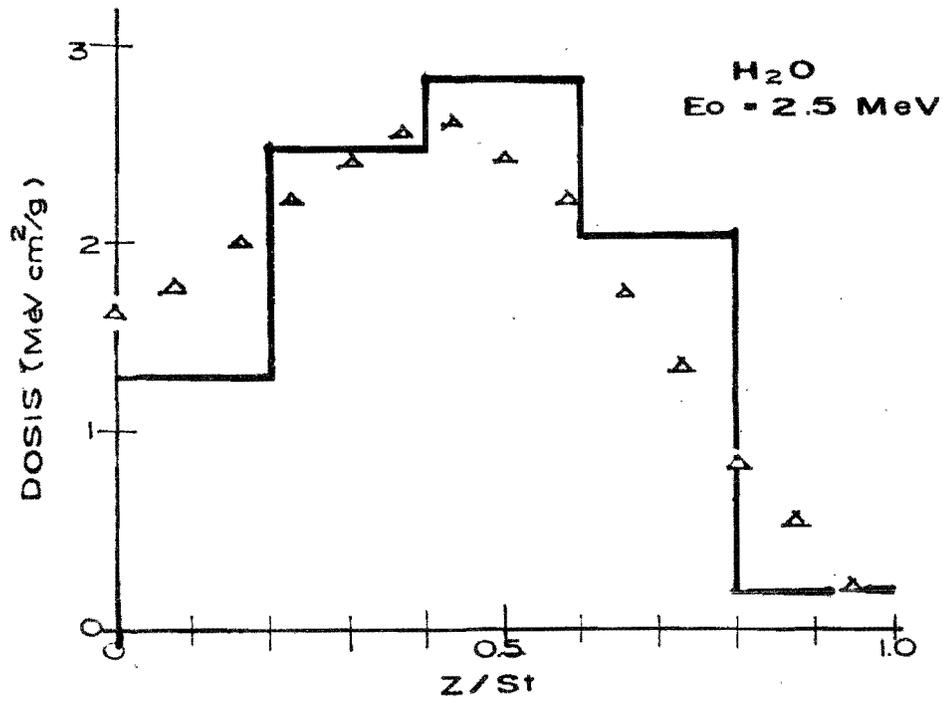
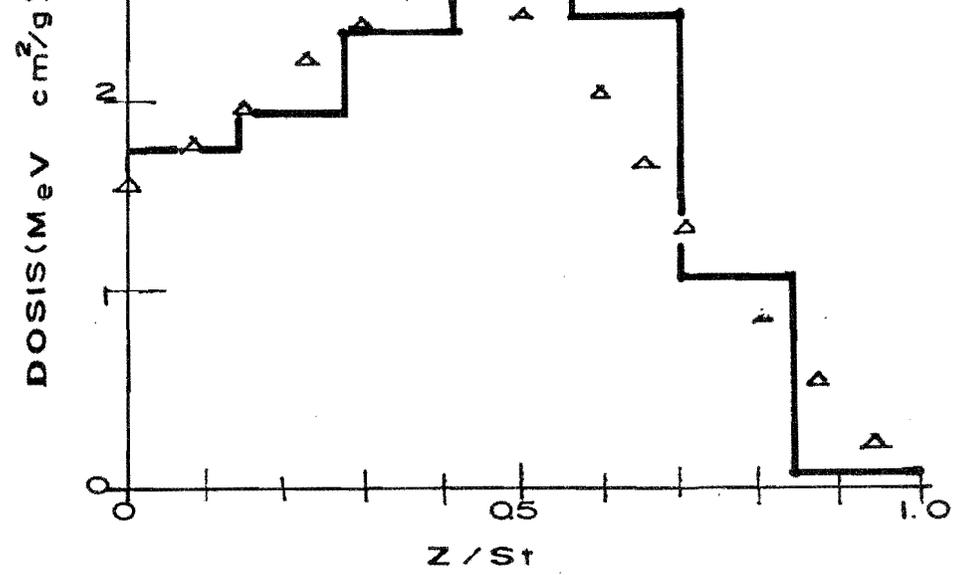
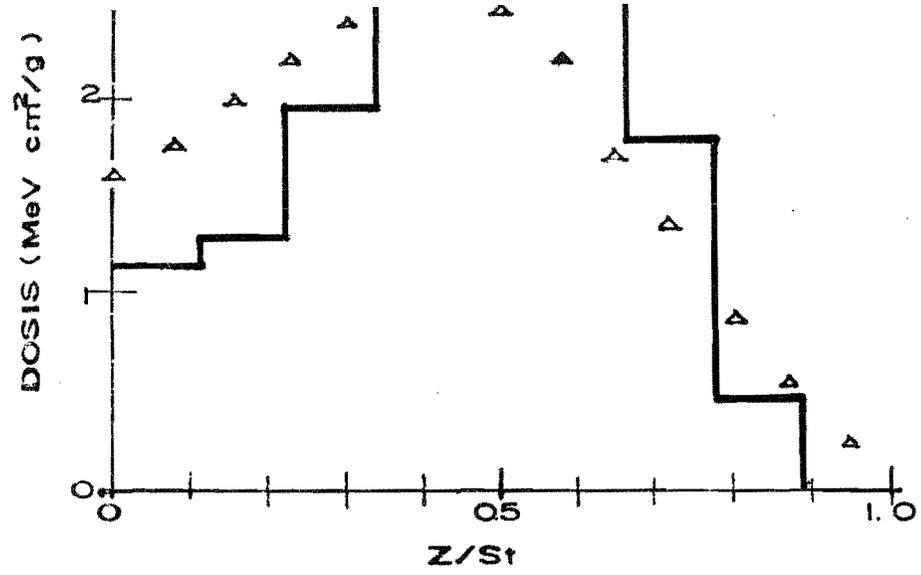
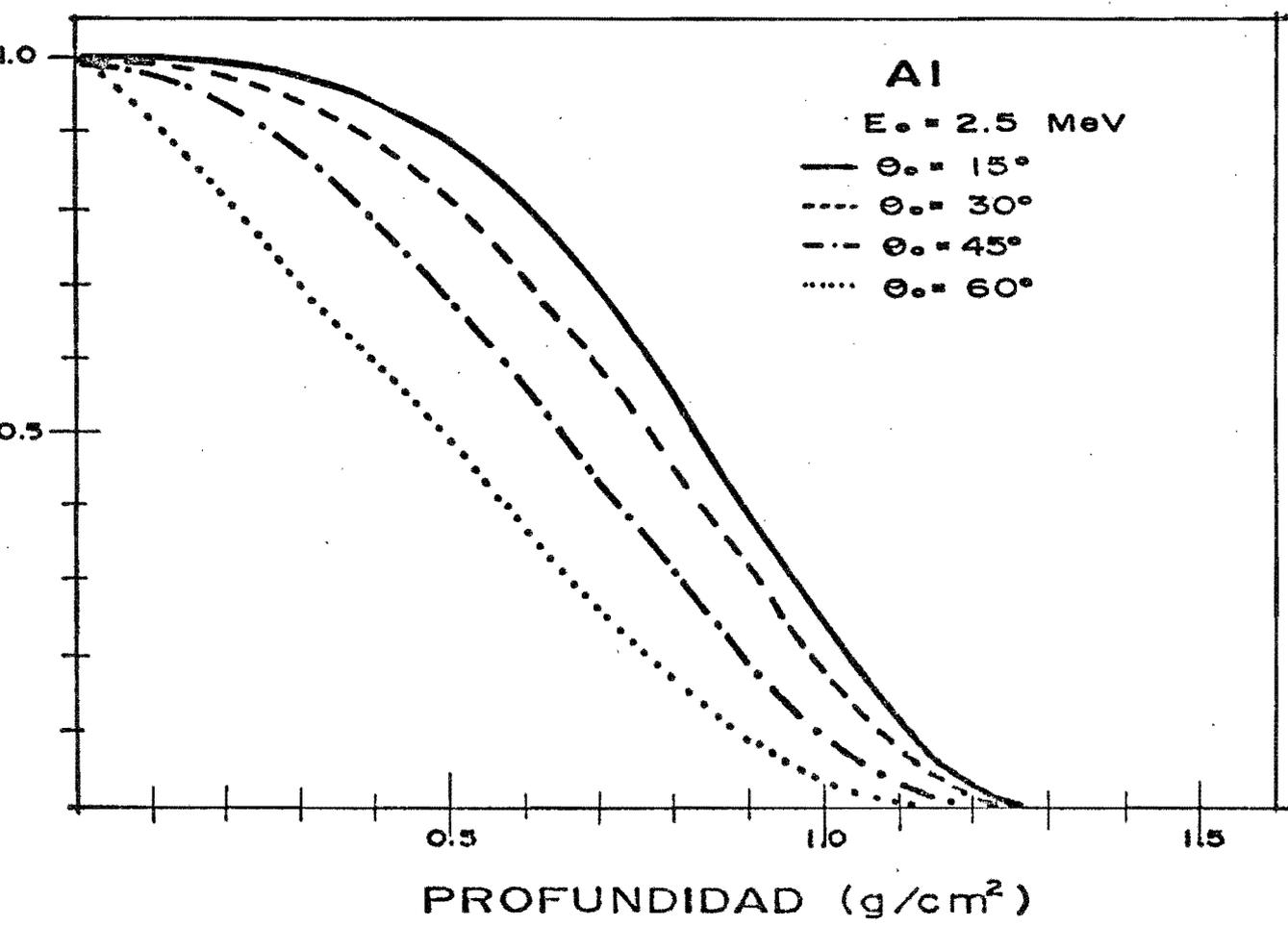
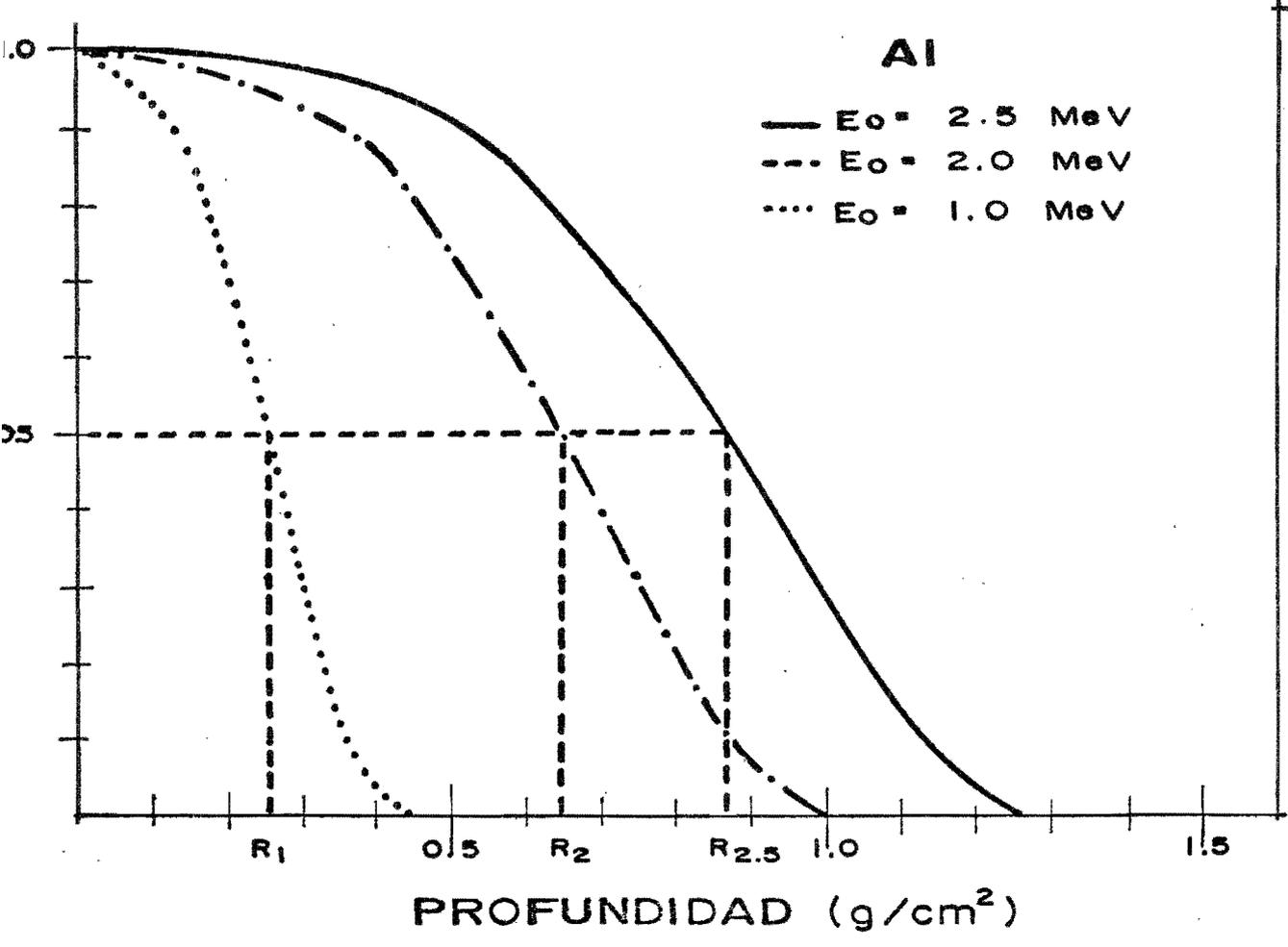


Figura 15.- Gráficas de dosis y de dosis contra espesor másico, para electrones de 2.5 MeV. que inciden en agua.



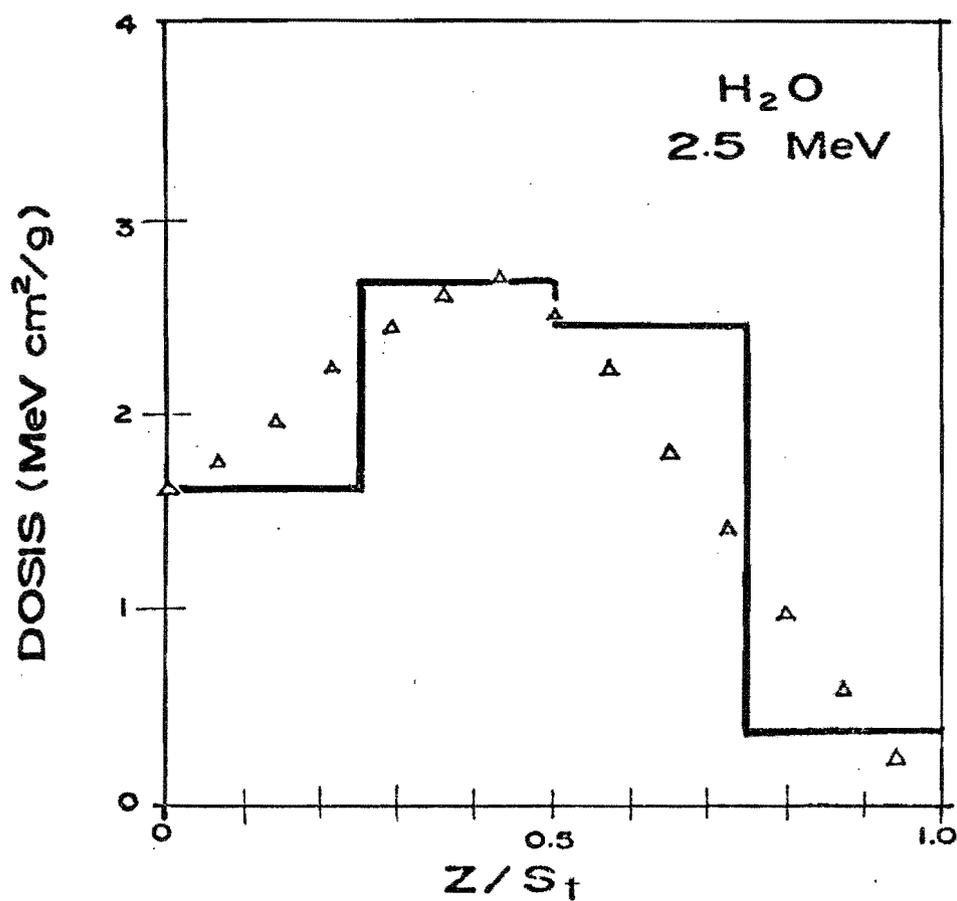
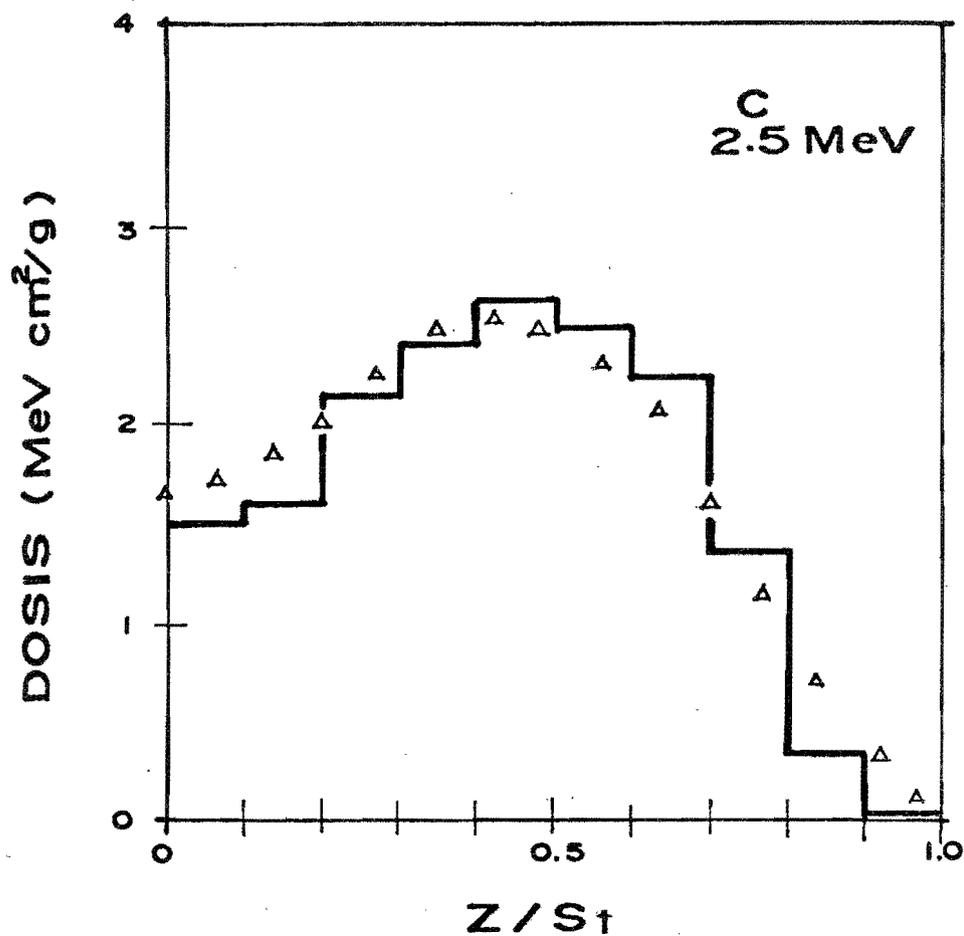
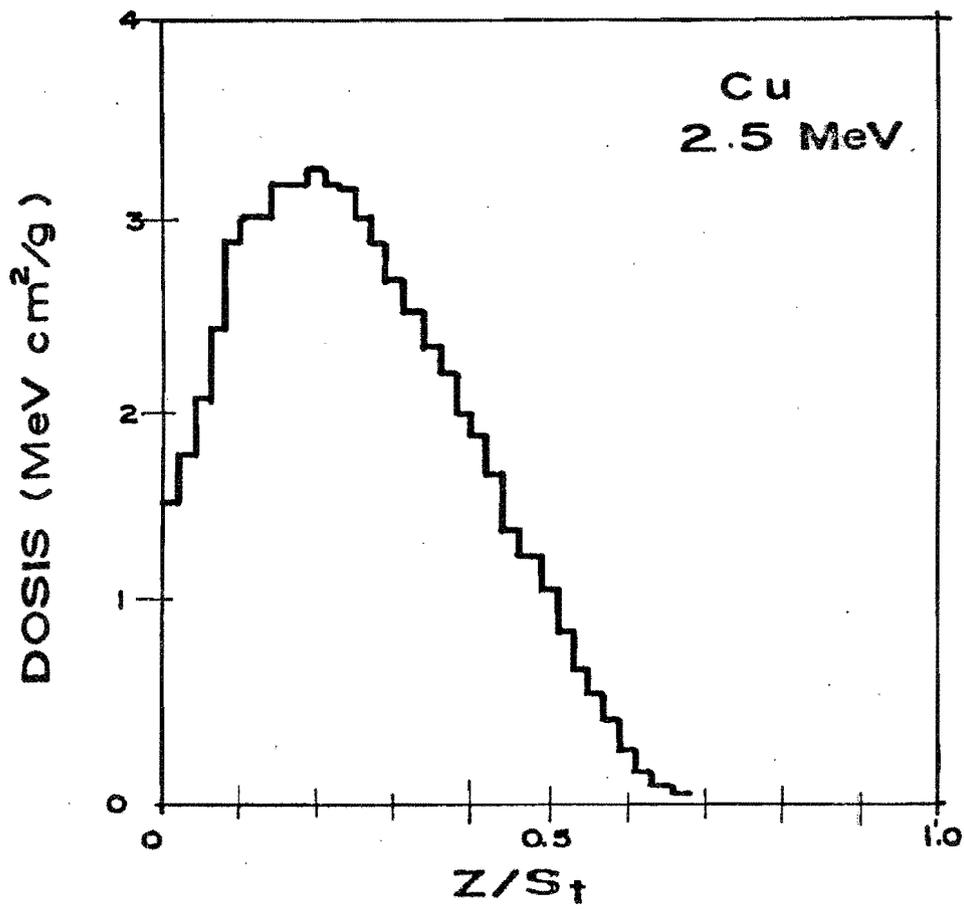
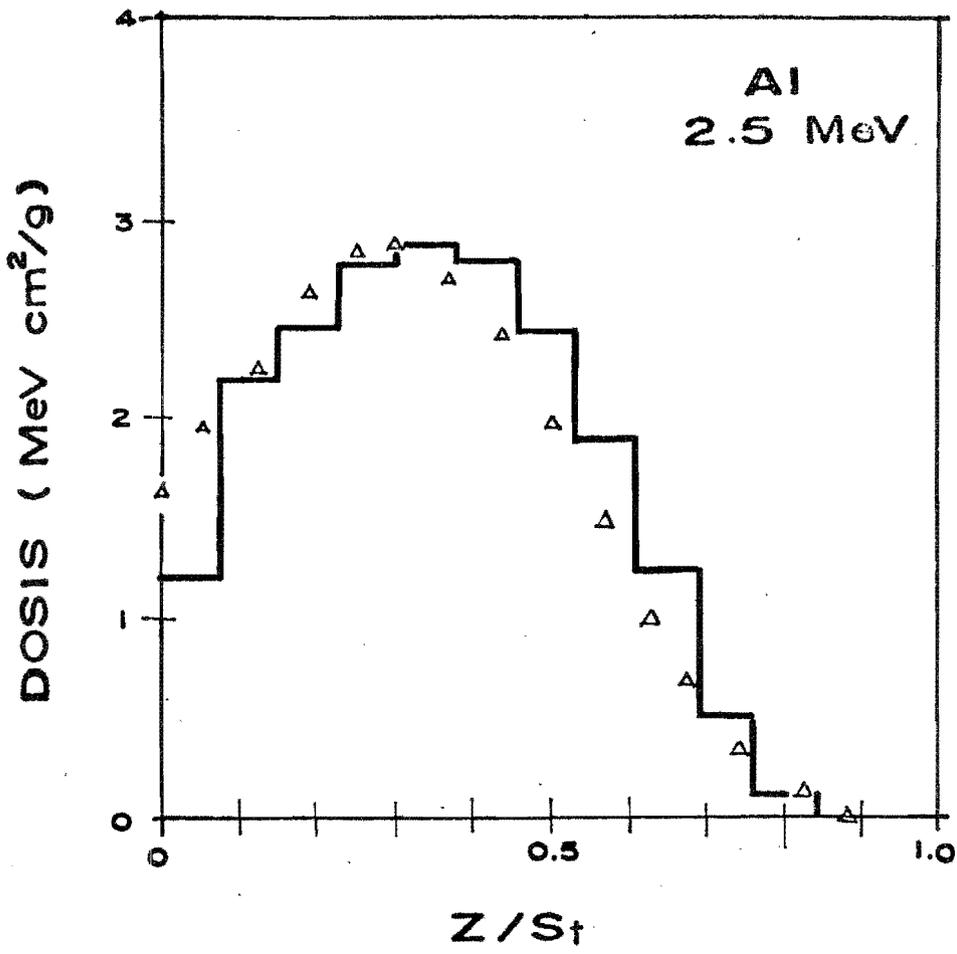


Figura 16.- Gráficas de dosis, para electrones de 2.5 MeV, en diversos materiales. Puntos Δ ecuación empírica de Tabata



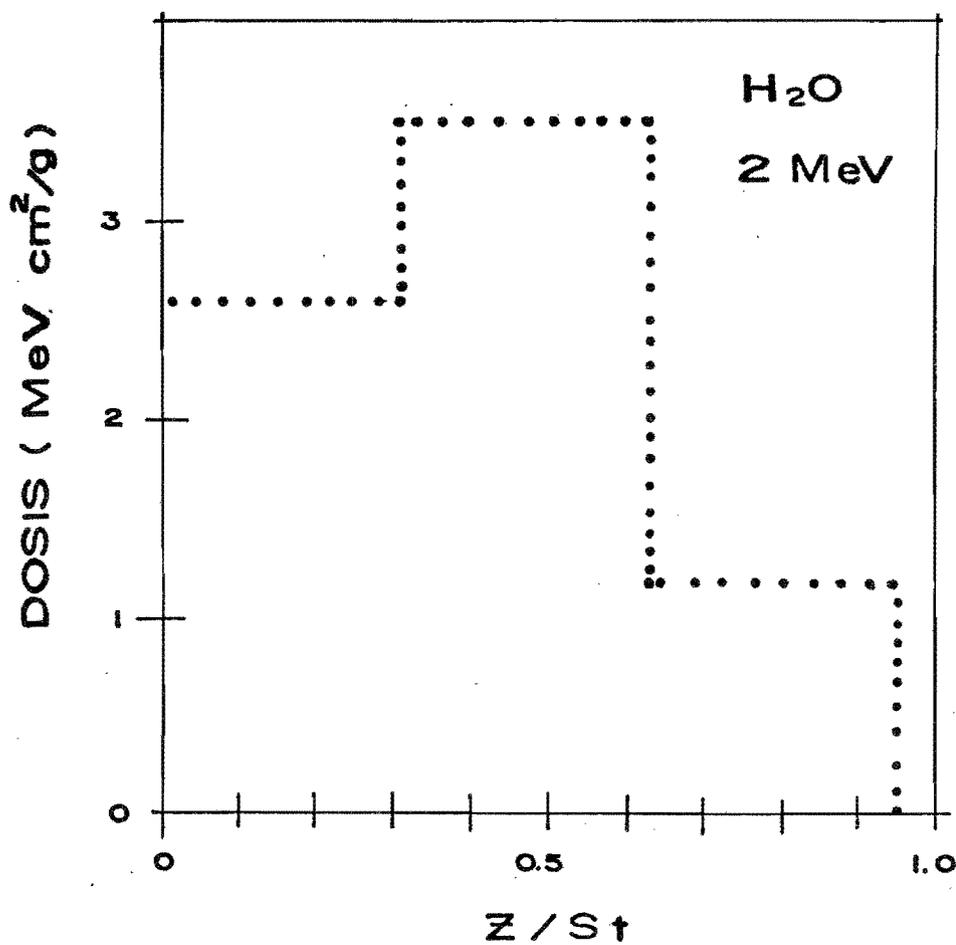
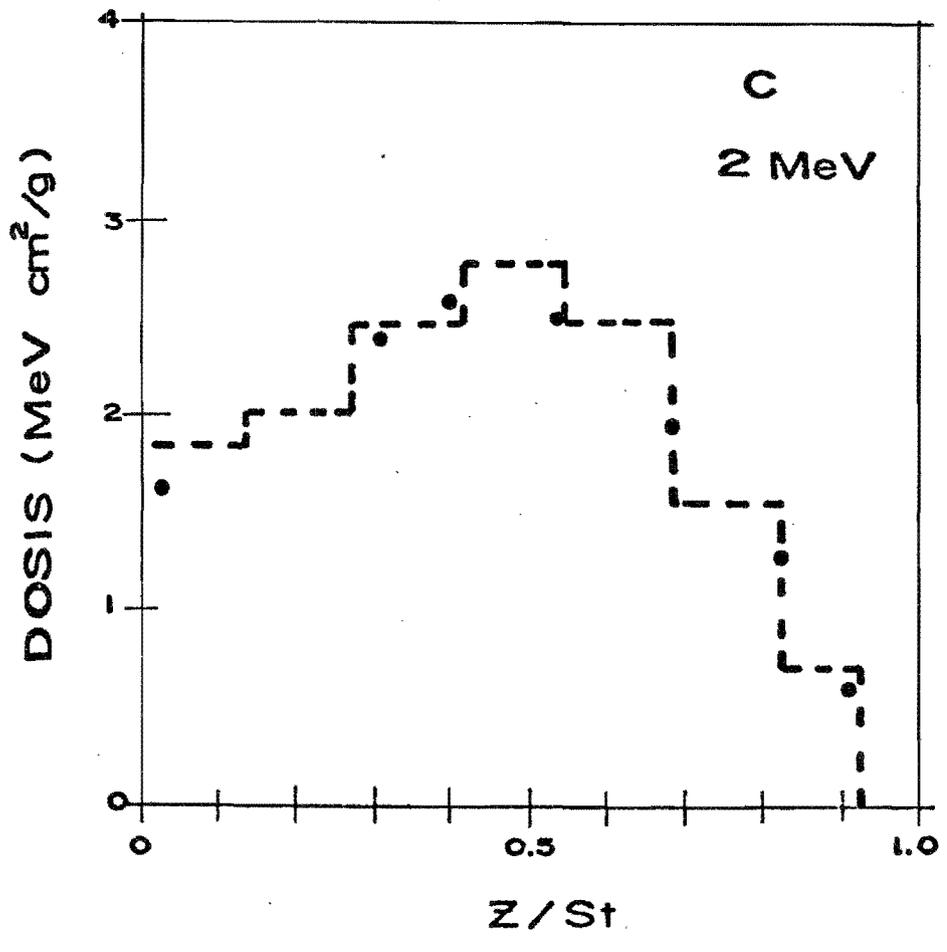
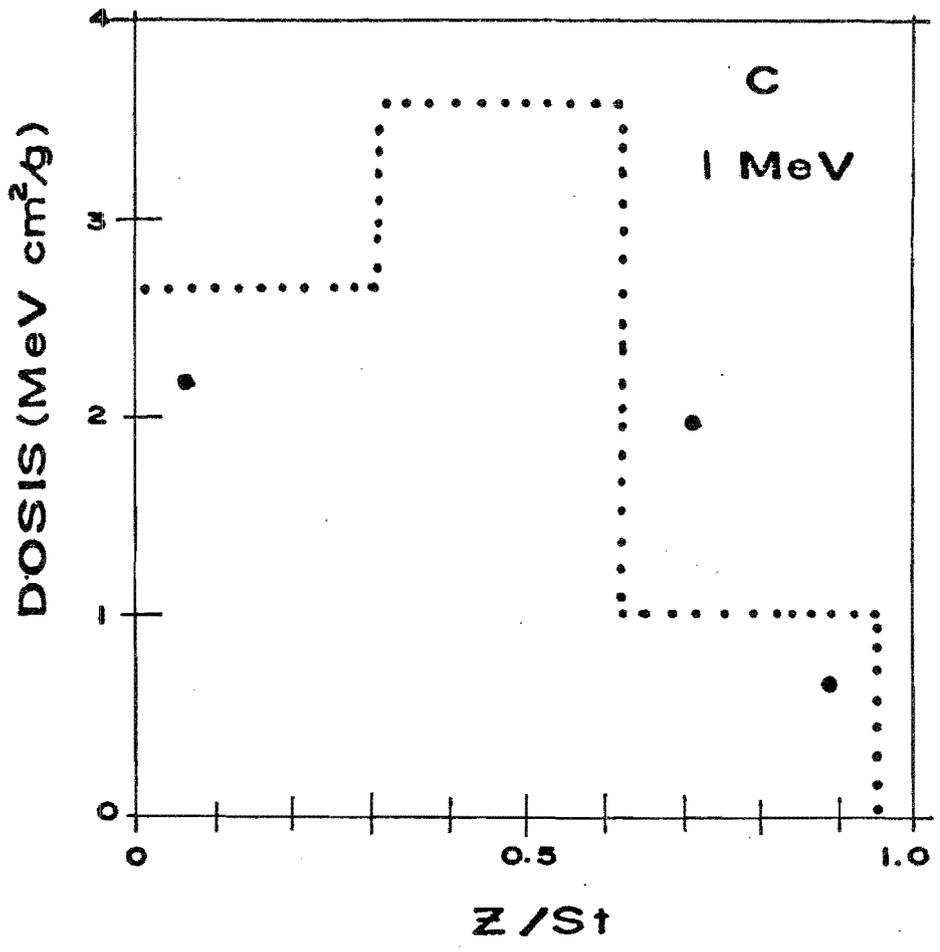
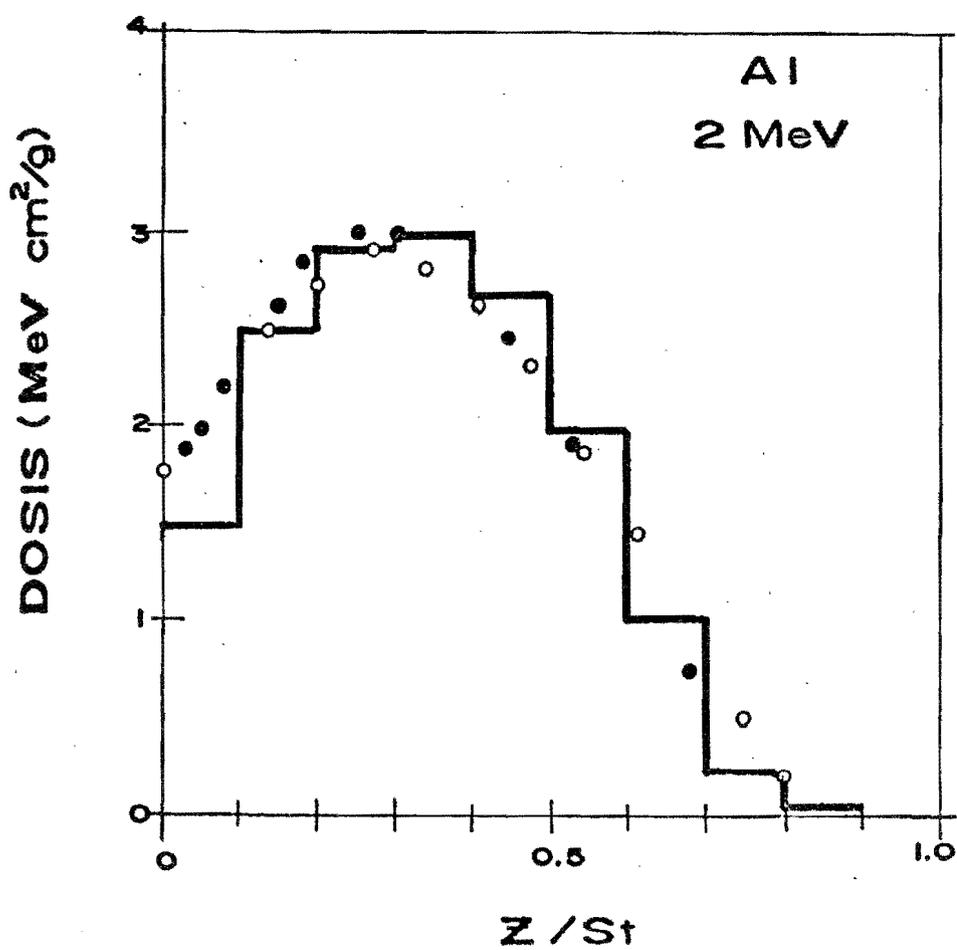
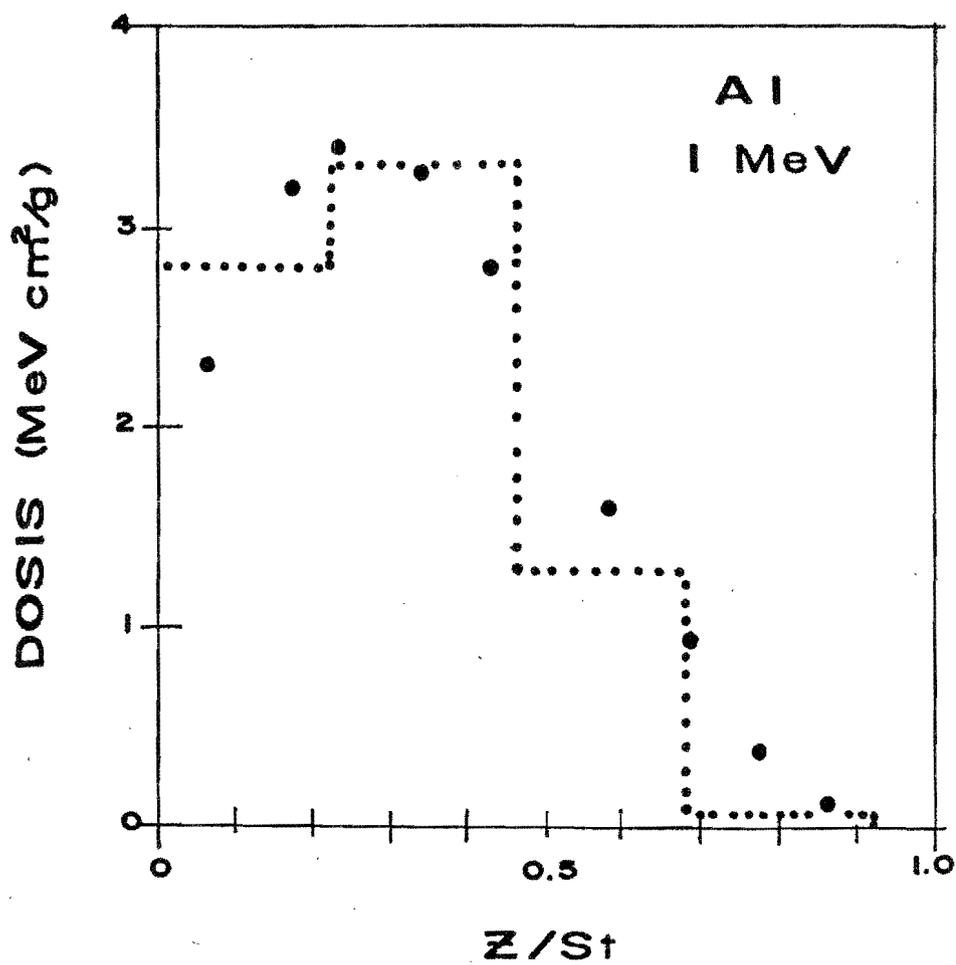
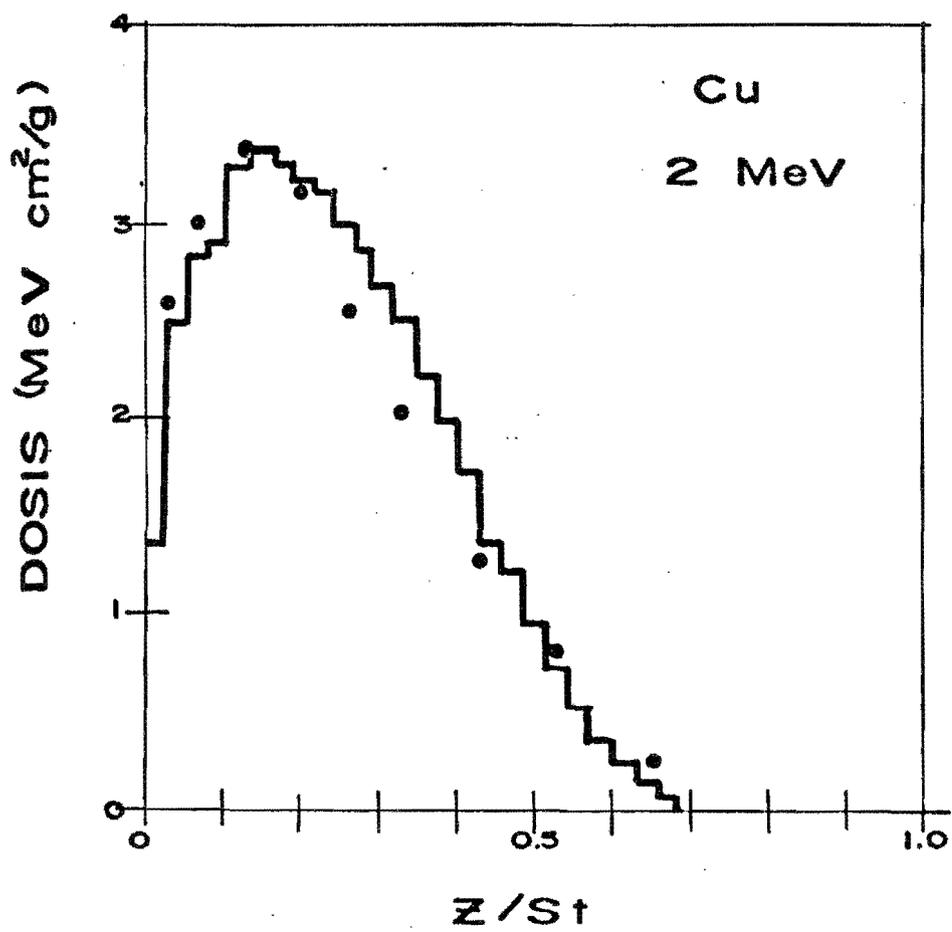
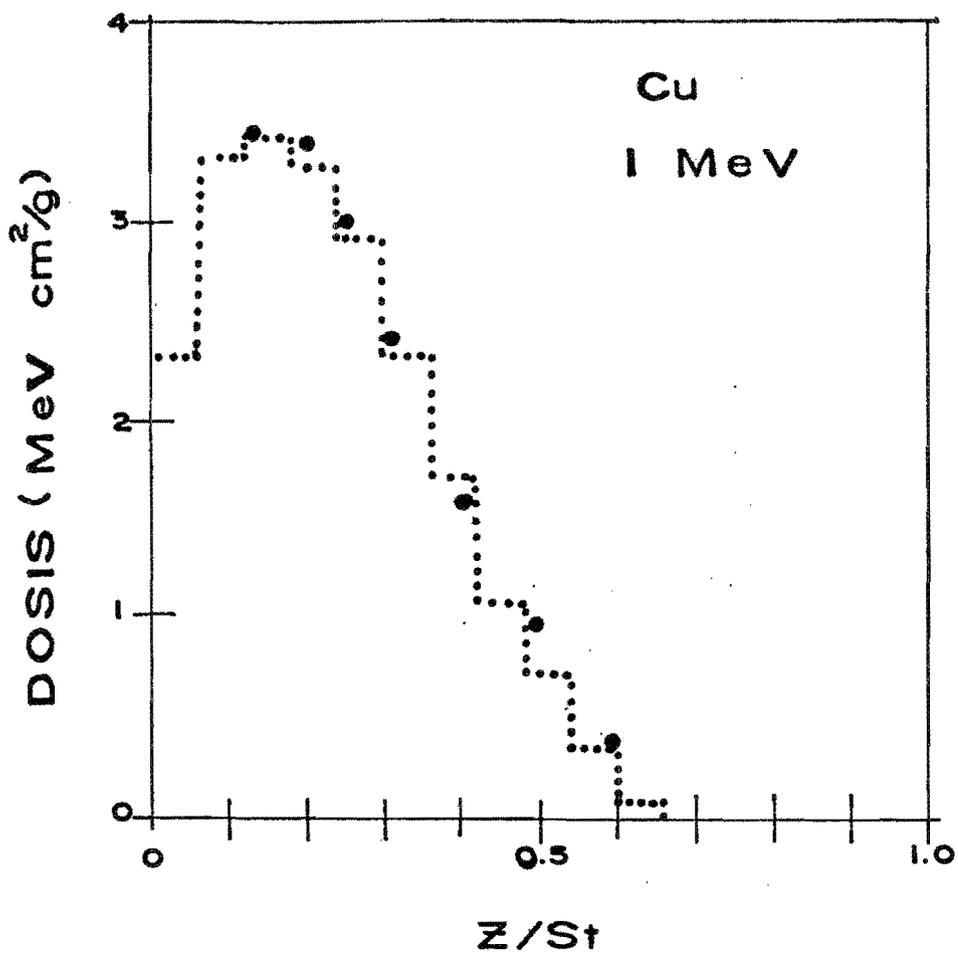


Figura 17.- Gráficas de dosis para electrones incidiendo en diversos materiales y energías de 1 y 2 MeV. La energía perdida por paso se calcula: reduciendo la energía perdida por paso exponencialmente; --- reduciendo la energía del electrón en un factor k , en cada paso; — energía perdida por paso constante. Puntos experimentales: • Nakai y ◦ Aiginger.







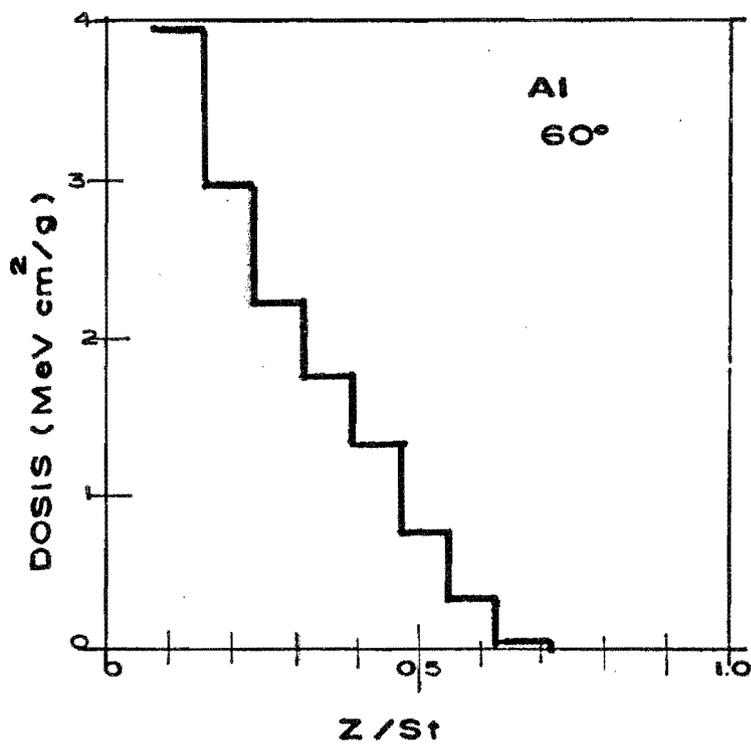
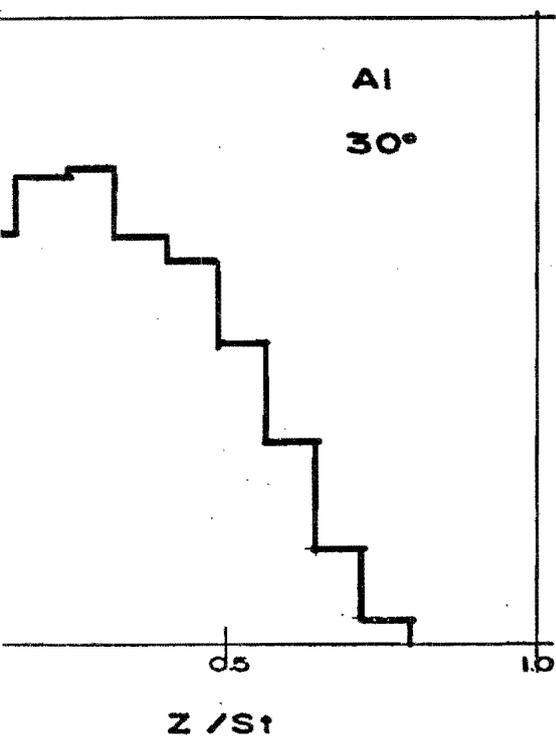
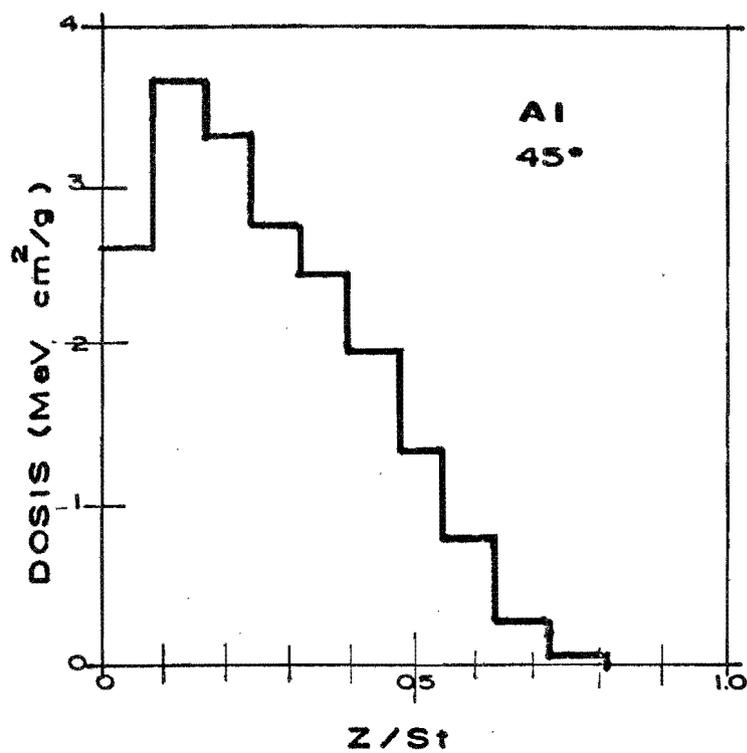
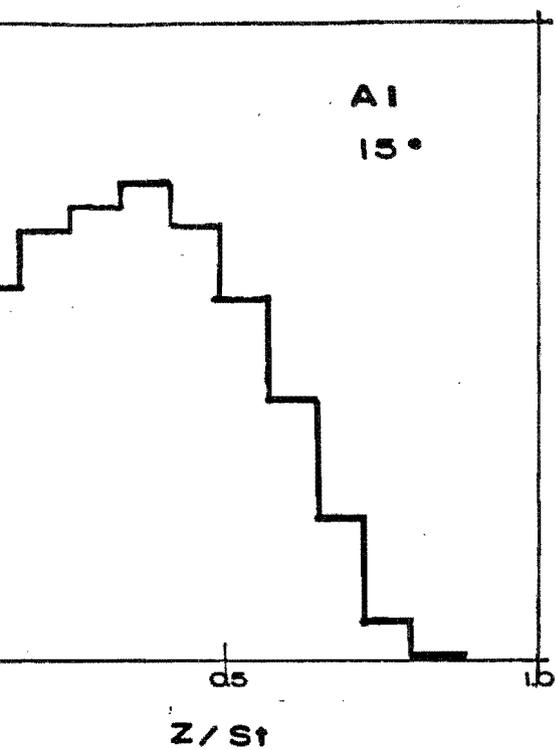


Figura 18.- Gráficas de dosis para electrones de 2.5 MeV incidiendo en aluminio, con diferentes ángulos.

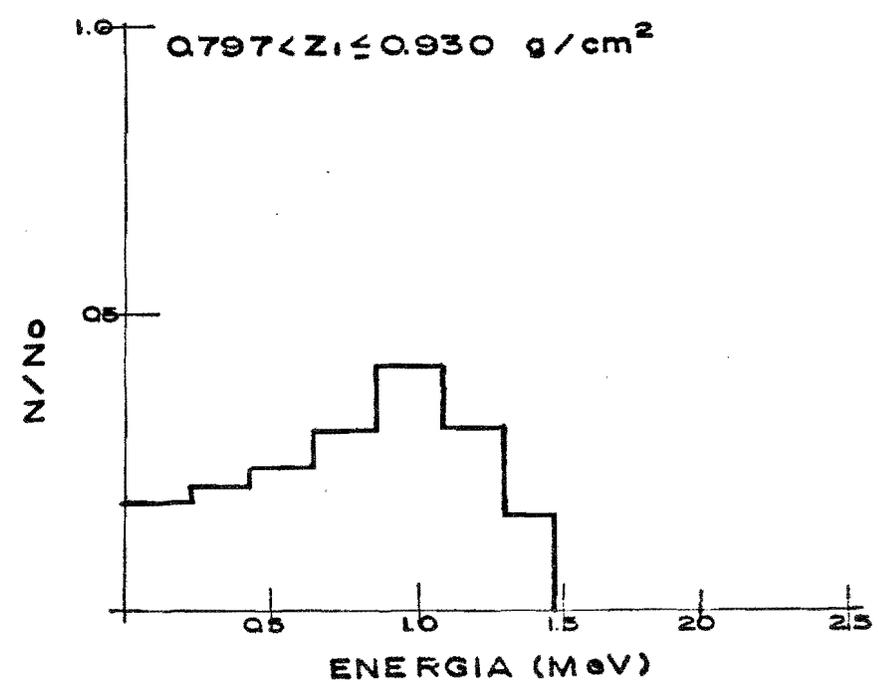
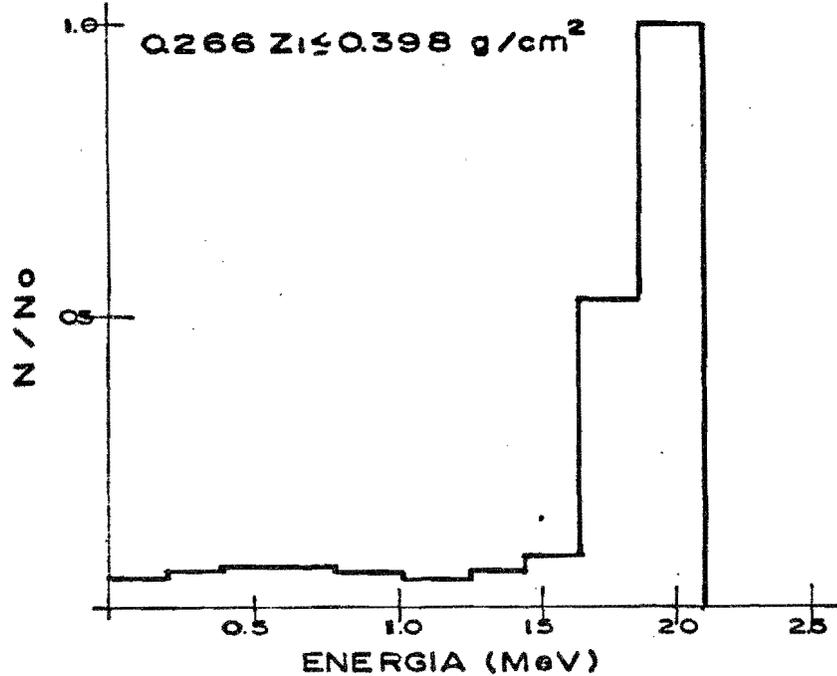
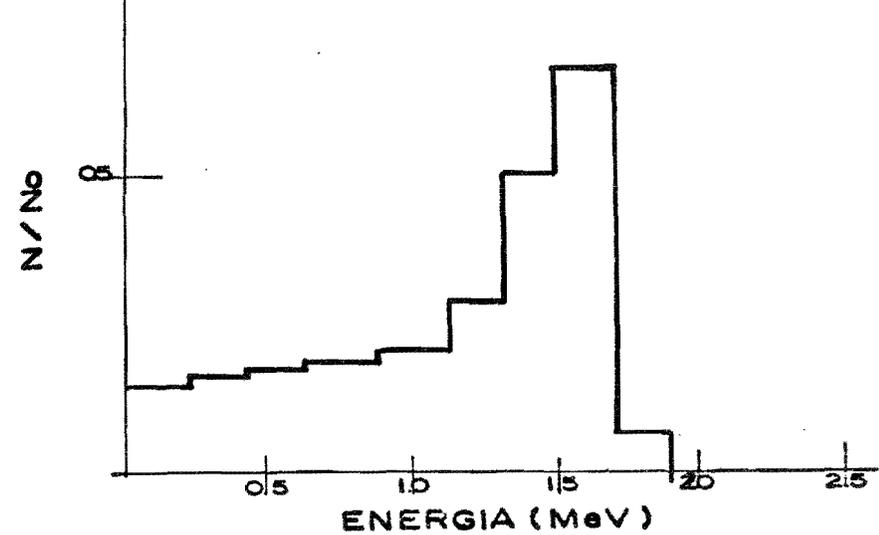
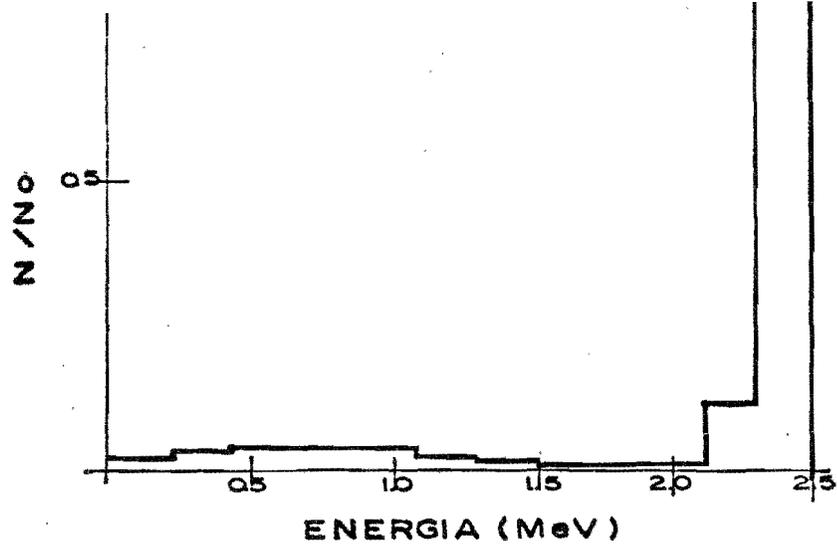


Figura 19.- Gráficas del espectro de energía, para electrones incidiendo en aluminio, con un ángulo de 0° , a diferentes profundidades.

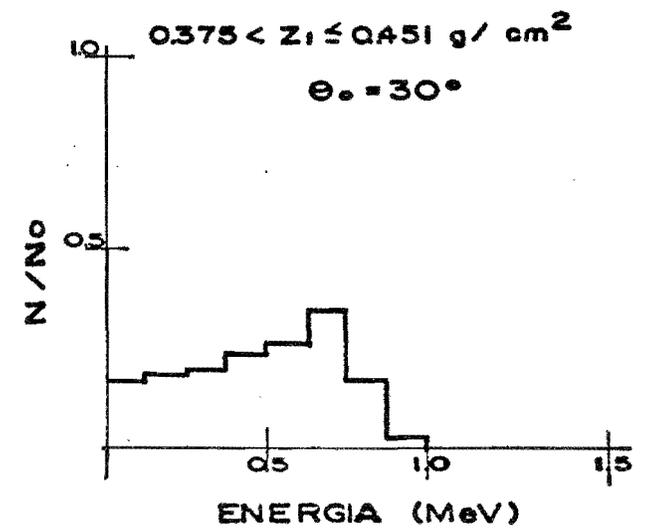
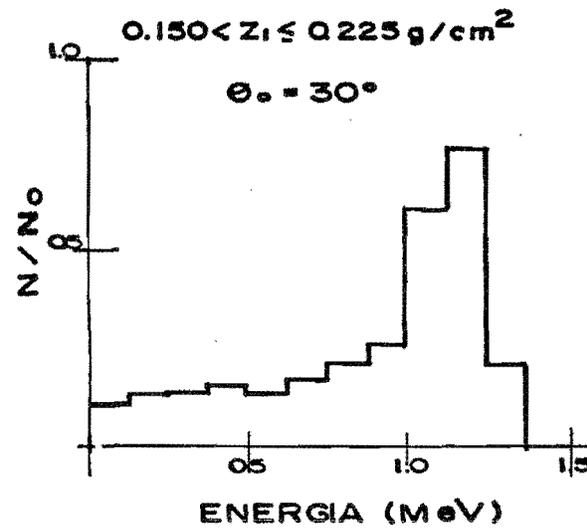
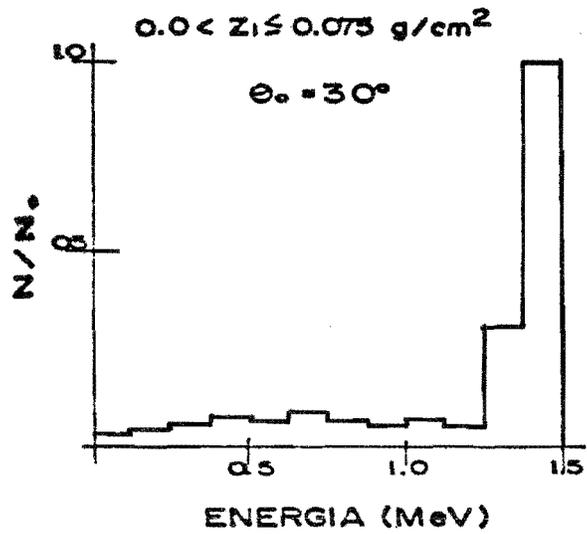
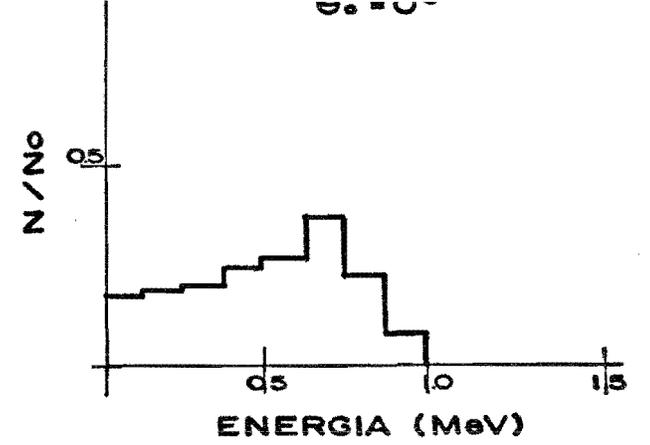
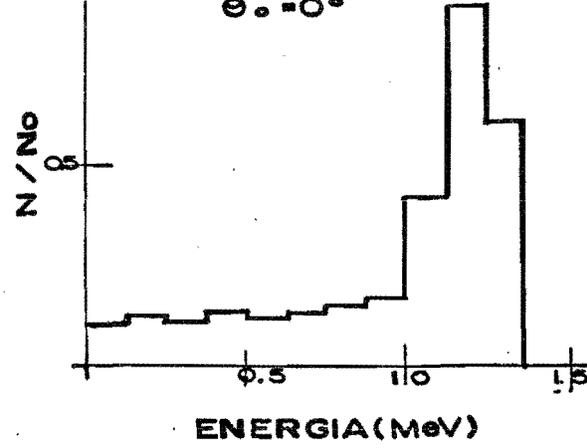
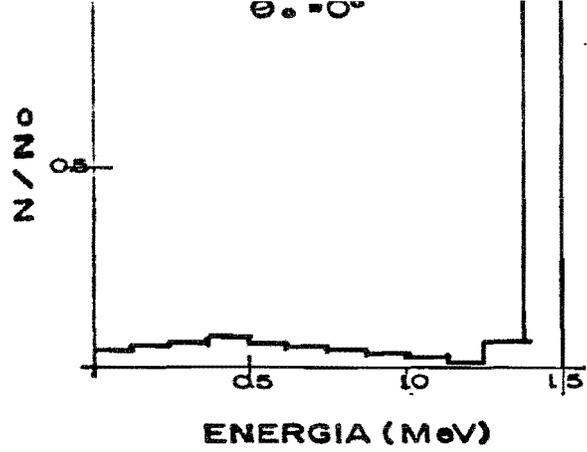


Figura 20.- Gráficas del espectro de energía, para electrones incidiendo en aluminio, a diferentes profundidades.

V. CONCLUSIONES

De todo lo anterior, es posible hacer las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- 1.- De los resultados obtenidos mediante el primer programa de computo se tiene que la energía que se pierde en la ventana del acelerador y en el aire, es muy pequeña comparada con la energía de los electrones (aproximadamente 1 %) y por lo tanto se puede despreciar.
- 2.- Debe uno asegurarse que la distribución de Goudsmit-Saunders converja, para la energía perdida por paso que se desea utilizar.
- 3.- Es conveniente buscar que la probabilidad de deflexión a ángulos pequeños siempre sea grande, lo que se logra disminuyendo la energía perdida por paso de una manera exponencial (ecuación (IV.2.1)).
- 4.- El tiempo de computadora que utiliza el programa crece de manera considerable al aumentar el número de pasos en que se divide la trayectoria del electrón; por lo que al considerar una energía perdida por paso constante el tiempo es pequeño, siendo mayor cuando la energía del electrón se disminuye en k y mucho mayor al disminuir la energía perdida por paso de una manera exponencial.
Por lo tanto es muy importante tomar en cuenta este hecho, ya que puede no redituar el incremento en exactitud de los resultados, con el correspondiente incremento en el tiempo de procesamiento.
- 5.- Los resultados que se obtienen son bastantes aproximados a los experimentales, cuando:

- a) Para energías de 2.5 MeV se toma una energía perdida por paso constante igual al valor de la energía perdida mínima (para que la distribución de Goudsmit-Saunderson converja), para la energía inicial E_0 , de los electrones.
- b) Para energías de 2 MeV y materiales pesados ($Z \geq 13$) se considera que una energía perdida por paso constante, mientras que para materiales ligeros hay que considerar que la energía de los electrones se reduce en un factor k , en cada paso.
- c) Para energías de 1 MeV se considera que la energía perdida por paso se reduce de manera exponencial.

6.- En general se considera que los resultados obtenidos en este trabajo son satisfactorios, al haber utilizado el modelo de moderación continua y que éstos mejorarán considerablemente al tomar en cuenta la energía depositada en el material por la radiación Bremsstrahlung y por los electrones secundarios, ya que estos efectos provocarán que los valores de dosis aumenten cerca de la superficie y disminuyan a profundidades mayores (iguales a la posición de dosis máxima que se está obteniendo), lo que se hace de la siguiente forma:

-Considerar además el poder de frenamiento por colisiones inelásticas con los núcleos del material, para calcular la emisión de Bremsstrahlung y así calcular la ionización producida por ésta.

-Con la teoría de Landau (L1), calcular aleatoriamente la energía perdida por paso y así evitar suponer que los electrones pierden su energía de manera continua (cosa incorrecta).

-Considerar la producción de electrones secundarios.

7.- Sería deseable poder comparar los espectros de energía obtenidos a diferentes profundidades con algunos resultados experimentales.

rama para encontrar la distribucion de Goudsmit-Saunderson

```
implicit real*8(b,f,h,x,z)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
real*8 as,ss
parameter(pi=3.14159265,an=6.022045e23,zmoc2=0.511,e2=1.44e-13,
hf=4.135696e-21,c2=9.0e20)
dimension ener(201), delen(200), p(64,100), w(65),
ass(64), asen(64), ar(64),arn(64,200), c(201), x(1000),
dels(200), st1(100),csw(64),cnw(64),rt(100)
```

```
common/fun/en,poi,cc,acc,x0,x1,dens,as
common/hf/j,l,eta,r,csw,snw,beta2,beta,z,raiz2
```

```
zh=0.05
tercio=1./3.
raiz2=sqrt(2.0e0)
```

```
(1)=energia inicial de los electrones
emi= energia final de los electrones(mayor que cero)
e energia perdida por paso(delen=epf)
factor de reduccion de energia(delen(i) diferente para cada paso)
xi,ms= parametros del efecto de densidad
a= numeros atomico y masico del material
y dens= potencial de ionizacion y densidad del material
numero de polinomios de Legendre (maximo 100)
numero de pasos en que se divide la trayectoria del electron
```

```
read(11,*)ener(1),enermi,epf,k,epf1,rend,x0,x1,ms,z,r,poi,dens,
m,nl,np
write(6,*)ener(1),enermi,epf,k,epf1,rend,x0,x1,ms,z,r,poi,dens,
m,nl,np
```

hnuf,cc y acc son parametros del efecto de densidad

```
en=dens*an*z/a
hnuf=hf*sqrt(en*e2*c2/(pi*zmoc2))
cc=-2.*dlog(poi/hnuf)-1.
acc=(-cc-4.606*x0)/(x1-x0)**ms
```

```
-----
dospi=2.*pi
cte= dospi*en*(z+1.)*e2*e2
-----
```

culo de la longitud de trayectoria de los electrones, integracion por el metodo de simpson:

```
s=(ener(1)-enermi)/(m-1)
x(1)=enermi
do 5 j=2,m
x(j)= x(j-1) + s
b1= f(x(1)) + f(x(m))
b2= 0.0
do 10 j=2,m-1,2
b2= b2+ f(x(j))
b3= 0.0
do 15 j=3,m-2,2
b3= b3+ f(x(j))
st=( b1+4.*b2+2.*b3)* tercio*s
longitud de trayectoria promedio de los electrones
stp=st
```

 ulo de senos, cosenos y polinomios de Legendre para angulos entre 0 y 2π

```

do 20 J=1,64,1
  w(J+1)=0.05*J
=angulos entre 0 y 2pi radianes
  csw(J)= cos(w(J))
  snw(J)= sin(w(J))
  P(J,1)=1.0
1)= Primer polinomio de Legendre para el angulo w(J)
  P(J,2)=csw(J)
2)= segundo polinomio de Legendre para el angulo w(J)

do 25 l=1,n1
  P(J,l+2)=((2,*l+1)*csw(J)*P(J,l+1)-1*P(J,l))/(l+1)
l+2)= polinomio (l+2) para el angulo w(J)
  continue
  
```

1 do 50 se calculan: la energia perdida, la longitud y la distancia recorrida
 cada paso y se genera la distribucion de G-S para cada uno

```

ll=1

do 50 i=1,nP
  dels(i)=0.0

  if(ener1.ea.0) go to 51
  ener=ener1*ener(i)**pend
  ener(i+1)=ener(i)-ener
  delen(i)=ener
  go to 54

  if(ener.ea.0) go to 52
  ener(i+1)=ener(i)-ener
  if(ener(i+1).lt.0) go to 175
  delen(i)=ener
  go to 54

  ener(i+1)=k*ener(i)
  delen(i)=ener(i)-ener(i+1)
  
```

n(i)= energia perdida en el iesimo paso

```

s= delen(i)/(m-1)
x(1)= ener(i+1)
do 55 J=2,m
  x(J)= x(J-1)+ s
b1=f(x(1))+ f(x(m))
b2= 0.0
do 60 J=2,m-1,2
  b2=b2 + f(x(J))
b3= 0.0
do 65 J=3, m-2,2
  b3= b3+ f(x(J))
delese=(b1+4.*b2+2.*b3)*tercio*s

dels(i)=delese
(i)= longitud del iesimo paso
  
```

```

s(i+1)= sacum + delese
= longitud recorrida hasta el iesimo paso
  
```

```
sacum=s(i+1)
```

```
t=(sta-delese)/sta
```

```
delese=lonsitud de trayectoria residual en el iesimo paso
```

```
tao=ener(i)/zmoc2
```

```
beta2=1.-1./((1.+tao)**2.)
```

```
beta=dsort(beta2)
```

```
= relacion v2/c2 para ener(i)
```

```
pvi2=(1.-beta2)/(zmoc2*zmoc2*beta2*beta2)
```

```
= inverso de (pv)2 para ener(i)
```

```
eta=(6.802e-05*(z**0.66)/(4.*tao*(tao+2.)))*(1.13+
3.76*((z/(137*beta))**2.))
```

```
constante de apantallamiento de Moliere para ener(i)
```

```
do 41 l=2,nl,1
```

```
s=3.15/62
```

```
J=63
```

```
b1=h1(w(J))
```

```
b2=0.0
```

```
do 42 j=2,62,2
```

```
b2=b2+h1(w(j))
```

```
b3=0.0
```

```
do 43 j=3,61,2
```

```
b3=b3+h1(w(j))
```

```
enopi=(b1+4.*b2+2.*b3)*s*tercio
```

```
pi= integral de 0 a pi de la distribucion de G-S
```

```
sti(1)=cte*pvi2*enopi
```

```
l)= s(l,t) para t=1 y todas las l
```

```
tao= ener(i+1)/zmoc2
```

```
energía en unidades de energía en reposo para ener(i+1)
```

```
ener(i+1)= energía del electron al final del paso
```

```
beta2=1.-1./((1.+tao)**2.)
```

```
beta=dsort(beta2)
```

```
= relacion v2/c2 para ener(i+1)
```

```
pvi2=(1.-beta2)/(zmoc2*zmoc2*beta2*beta2)
```

```
= inverso de (pv)2 para ener(i)
```

```
eta=(6.802e-05*(z**0.66)/(4.*tao*(tao+2.)))*(1.13
```

```
+3.76*((z/(137.*beta))**2.))
```

```
constante de apantallamiento de Moliere para la energía ener(i+1)
```

```
l=2
```

```
s=3.15/62
```

```
J=63
```

```
b1=h1(w(J))
```

```
b2=0.0
```

```
do 35 j=2,62,2
```

```
b2=b2+h1(w(j))
```

```
b3=0.0
```

```
do 40 j=3,61,2
```

```
b3=b3+h1(w(j))
```

```
enopi=(b1+4.*b2+2.*b3)*s*tercio
```

i= integral de 0 a π de la distribución de G-S

```
st12= cte* $\rho$ vi2* $\rho$ no $\rho$ i
= s(l,t) para l=2 y todas las t
```

```
alfa=(st1(2)-t*t*st12)/(t*st12-st1(2))
```

ulo de la distribución de s-s para ángulos entre 0 y 3.15 radianes:
do 80 J=1,64,1

```
do 83 l=1,n1
  pt(l)= $\rho$ (J,l)
```

```
as=0d0
```

```
do 85 l=1,n1,1
```

```
unos=st $\rho$ *(1+alfa)*st1(l)*alos((t+alfa)/(t*(1+alfa)))/
(alfa*dens)
```

= integral de 0 a s de la distribución de G-S

```
if (dabs(unos).st.100) do to 85
  as=(1-1./2.)*dexp(-unos)*pt(l)
```

```
as=as+as
```

```
ass(J)= as/dos $\rho$ i
assen(J)= as*snw(J)
```

J)= valor de la distribución de G-S para el ángulo w(J)

```
continue
```

```
atdis=0
```

```
do 90 J=1,63,1
  ar(J)=0.5*zh*(assen(J) + assen(J+1))
```

area bajo la distribución para ángulos entre w(J) y w(J+1)

```
atdis = atdis + ar(J)
```

as= area bajo la distribución para ángulos entre 0 y 3.15 radianes

```
arn(1,i)=ar(1)/atdis
```

```
do 95 J=2,63,1
  arn(J,i)=ar(J)/atdis+arn(J-1,i)
```

J,i)= area normalizada bajo la distribución para ángulos entre 0 y w(J+1)
e el iesimo paso

```
if(i.ea.11) do to 100
do to 99
```

```
write(6,230)delen(i),ener(i),ener(i+1),dels(i),s(i),st,ct $\rho$ 
format(' distribución de Goudsmit -Saunderson para una pérdida
de energía de ',f10.7,ix,' mev',/, ' en el intervalo ',f10.7,'-',
f10.7,' mev, de longitud=',f10.7,' s/cm2',/, ' longitud recorrida=
',f10.7,' s/cm2, longitud de trayectoria=',f10.7,' s/cm2',/,
' longitud de trayectoria residual=',f10.7,' s/cm2')
```

```
write(6,240)
```

```
format(' w(radianes) ass',6x,' assen',4x,' arn',9x,' w(radian'
'es) ass',6x,' assen',4x,' arn')
```

```

write(6,250)(w(j),ase(j),assen(j),arn(j,i),w(j+32),asa(j+32),
assen(j+32),arn(j+32,i), j=1,32,1)
format(2(1x,f4.2,6x,f9.5,3x,f9.5,1x,f7.5,6x))

ll=ll+4
stf=stf-delese
continue

```

```

-----
write(6,200)st
format(/,' longitud de trayectoria=',f10.7, ' s/cm2')

```

```

call exit
end

```

```

-----
= inverso del poder de frenamiento

```

```

function f(x)
implicit real*8 (b,f,h,x,y)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
parameter(pi=3.141592653,an=6.022045e23,zmoc2=0.511,e2=1.44e-13,
hf=4.135696e-21,c2=9.0e20)
common/fun/en,poi,cc,acc,x0,x1,dens,ms
beta2 = 1. - 1. / ( ( 1. + x / zmoc2 ) * ( 1. + x / zmoc2 ) )
y = dlog10 ( dsqrt ( beta2 / ( 1. - beta2 ) ) )
if(y.le.x0) go to 95
if(y.lt.x1) go to 90
delta= 4.606*y+cc
  go to 95
delta = 4.606 * y + cc + acc * ( x1 - y ) * * ms
f=1./(2.*pi*k*en*e2* e2 / (dens* zmoc2 * beta2 ) * ( dlog (zmoc2
* beta2 * x / ( poi * poi * ( 1. - beta2 ) ) ) - beta2 - delta ) )
return
end

```

```

-----
)= funcion que hay que integrar de 0 a pi en la distribucion de G.L.s

```

```

function hl(x)
implicit real*8(b,f,h,x,y)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
parameter(pi=3.14159265,an=6.022045e23,zmoc2=0.511,e2=1.44e-13,
hf=4.135696e-21,c2=9.0e20)
dimension p(64,100),csw(64),snw(64)
common/hf/J,l,eta,p,csw,snw,beta2,beta,z,raiz2
xdvd=1.+2.*eta-csw(j)
hl=(1.-p(j,l))*(1./(xdvd*xdvd)+pi*z*beta/(raiz2*137.*
xdvd**1.5)-(beta2+z*pi*beta/137.)/(2.*xdvd))*snw(j)
return
end

```

do de montecarlo, para simular las trayectorias de los electrones de az dentro de un material,todas los calculos se hacen fundamentalmente SUBROUTINAS

```
implicit real*8(b,f,h,x,w)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
real*8 aa,ss
parameter(pi=3.14159265,an=6.022045e23,zmoc2=0.511,e2=1.44e-13,
hp=4.135696e-21,c2=9.0e20)
dimension ener(201), delen(201), p(64,60), w(65), aac(64),
aasen(64), ar(64), arn(64,200), s(201), x(100), dels(200),
stl(60), csw(64), snw(64), pt(60),
coorz(202), ranso(10000), trans(50), zentst(51),
delz(51), dosis(51), ek(26), nelen(26,51)
```

```
common/fun/en,poi,cc,acc,x0,x1,dens,ms
common/hf/j,l,eta,beta2,beta,z,raiz2
common/ans/w
common/senos/snw
common/cosen/csw
common/pol/p
common/dis/stl
```

```
zh=0.05
tercio=1./3.
raiz2=sqrt(2.0e0)
has=0.34499
```

(1)=energía inicial de los electrones
mi=energía final de los electrones (mayor que cero)
0= ángulo de incidencia de los electrones en el material
= energía perdida por paso para 1 MeV (depende de cada material)
= pendiente de la recta de la energía perdida por paso mínima
energía perdida por paso constante
factor de reducción de energía (delen(i)=diferente para cada paso)
l,ms= parámetros del efecto de densidad
a= números atómico y masico del material
y dens= potencial de ionización y densidad del material
numero de terminos en la distribución de G-S (maximo 60)
numero de pasos en que se divide la trayectoria del electron (maximo 200)
numero de electrones de la muestra (maximo 10000)

```
read(2,*)ener(1),enermi,teta0,eps1,rend,epsk,x0,x1,ms,z,a,poi
,dens,m,nl,ne,nh
write(6,100)ener(1),enermi,teta0,eps1,rend,epsk,x0,x1,ms,ra,poi
,dens,nl,ne,nh
format(' energía inicial de los electrones=',f5.2,/, ' energía
final de los electrones=',f10.8,/, ' ángulo de incidencia (rads)='
,f7.4,/, ' energía perdida mínima para 1 MeV=',f7.5,3x, ' pendiente='
,f4.2,/, ' energía perdida por paso (constante)='f7.5,/, ' factor de
reducción de la enesia k =',f6.4,/, ' parámetros del efecto de
densidad: x0=',f3.1, ' x1=',f3.1, ' m=',i3,/, ' número atómico='
,f7.3, ' número masico=',f8.4,/, ' potencial de ionización (MeV)='
,f10.8, ' densidad=',f5.2,/, ' terminos en la distribución de G-S='
,i2,/, ' número máximo de pasos=',i5,/, ' número de electrones=',
i5)
```

nup,cc y acc son parámetros del efecto de densidad

```
dentnh=1./nh
```

```

en=dens*an*z/a
hnup=hp*sqrt(en*e2*c2/(pi*zmodc2))
cc=-2.*dlog(poi/hnup)-1.
acc=(-cc-4.606*x0)/(x1-x0)**ms
-----
dospi=2.*pi
cte= dospi*en*(z+1.)*e2*e2
cteta0=cos(teta0)
-----
ulo de la longitud de trayectoria de los electrones, integracion por el
metodo de simpson:

s=(ener(1)-enermi)/(m-1)
x(1)=enermi

CALL YINSIMF(s,m,tercio,x,yintf)

longitud de trayectoria promedio de los electrones
st=yintf
stf=st
-----

CALL POLIN(w,snw,csw,p,n1)
-----

1 de 5 se calcula la energia perdida, la longitud y la distancia recorrida
cada paso y se genera la distribucion de G-S para cada uno

ll=1

do 5 i=1,np
  dels(i)=0.0

  if(eps1.eq.0) go to 7
  eps=eps1*ener(i)**pend
  ener(i+1)=ener(i)-eps
  delen(i)=eps
  go to 15

  if(eps.eq.0) go to 10
  ener(i+1)=ener(i)-eps
  if(ener(i+1).lt.0) go to 11
  delen(i)=eps
  go to 15

  ener(i+1)=k*ener(i)
  delen(i)=ener(i)-ener(i+1)
n(i)= energia perdida en el iesimo paso

  if(abs(ener(i+1)-enermi).lt.delen(i)) go to 20
  go to 30
  delen(i)=ener(i)
  s= delen(i)/(m-1)
  x(1)=ener(i+1)

CALL YINSIMF(s,m,tercio,x,yintf)

delese=yintf

dels(i)=delese
(i)=longitud del iesimo paso

```

```
s(i+1)= sacum + delese  
)= longitud recorrida hasta el final del iesimo paso  
sacum=s(i+1)
```

```
t=(stp-delese)/stp  
els(i)=longitud de trayectoria residual en el iesimo paso  
tao=ener(i)/zmoc2  
energia en unidades de energia en reposo  
i)= energia del electron al inicio del paso
```

```
CALL BETAETA(tao,svi2,zmoc2,z,beta,beta2,eta)
```

```
do 35 l=2,ni,1
```

```
CALL YINOPI(tercio,ynopi)
```

```
st1(1)=cte*svi2*ynopi
```

```
continue
```

```
)= s(1,t) para t=1 y todas las l
```

```
tao= ener(i+1)/zmoc2  
energia en unidades de energia en reposo para ener(i+1)  
i+1)= energia del electron al final del paso
```

```
CALL BETAETA(tao,svi2,zmoc2,z,beta,beta2,eta)
```

```
l=2
```

```
CALL YINOPI(tercio,ynopi)
```

```
st12= cte*svi2*ynopi
```

```
= s(1,t) para l=2 y todas las t
```

```
alfa=(st1(2)-t*t*st12)/(t*st12-st1(2))
```

```
CALL DISTRI(i,ess,essen,arn,dens,dospi,zh,ste,alfa,  
t,st12,pi,nl)
```

```
stp=stp-delese
```

```
continue
```

```
write(6,40)i-1  
format(' ultimo paso=',i5)  
iu=i-1  
delz(1)=0d0  
ek(1)=0d0
```

```
dlz=hag/dens  
do 45 i=1,50  
delz(i+1)=i*dlz  
zentst(i+1)=delz(i+1)/st  
if(delz(i+1).se,st)do to 46  
continue
```

```
uu=i  
stenuu=st/uu
```



```

' corte=',f10.7)
write(6,520) entoab,encion
format(' energia total absorbida=',f15.8,' mev',/, ' energia no
absorbida=',f15.8,' mev')
write(6,530) rangor,dsrang
format(' rango promedio=',f10.7,' +/-',f10.7,' g/cm2')
write(6,540)
format(1x,' z/st(i)',9x,' trans',18x,' z/st(i+1)',13x,' dosis'
'(i..i+1)')
write(6,550)(zentst(i),trans(i),zentst(i+1),dosis(i), i=1,uu)
format(1x,f8.5,3x,f12.6,10x,f13.5,6x,f20.5)

```

```

do 70 l=1,uu
write(6,560) delz(1),delz(l+1)
format(' espectro de energia entre:',f10.8,' e < ',f13.7,
' g/cm2 de profundidad')
write(6,565)(ek(n),nelen(n,l),ek(n+5),nelen(n+5,l),ek(n+10),
nelen(n+10,l),ek(n+15),nelen(n+15,l),ek(n+20),nelen(n+20,l),
n=1,5)
format(5(1x,f4.2,2x,i5,7x))
write(6,570) ek(uv+1),nelen(26,l)
format(77x,f4.2,2x,i5)
continue

```

```

call exit
end

```

```

-----
SUBROUTINE YINSIMF(s,m,tercio,x,wintf)
implicit real*8(b,f,x,s)
dimension x(100)
common/fun/en,poi,cc,acc,x0,x1,dens,ms

do 5 j=2,m
x(j)= x(j-1) + s
b1= f(x(1)) + f(x(m))
b2= 0.0
do 10 j=2,m-1,2
b2= b2+ f(x(j))
b3= 0.0
do 15 j=3,m-2,2
b3= b3+ f(x(j))
wintf=( b1+ 4.*b2+ 2.*b3)* tercio*s

return
end

```

```

-----
ulo de senos, cosenos y polinomios de Legendre para angulos entre 0 y pi
SUBROUTINE POLIN(w,snw,csw,p,nl)
dimension w(64),csw(64),snw(64),p(64,60)

do 5 j=1,64,1
w(j+1)=0.05*j
=angulos entre 0 y 2 pi radianes
csw(j)=cos(w(j))
snw(j)= sin(w(j))
p(j,1)=1.0
1)= primer polinomio de Legendre para el angulo w(j)
p(j,2)=csw(j)

```

)= segundo polinomio de Legendre para el angulo w(j)

```
do 10 l=1,nl-2
  p(j,l+2)=((2.*l+1)*csw(j)*p(j,l+1)-1*p(j,l))/(l+1)
l+2)= polinomio (l+2) para el angulo w(j)
  continue

return
end
```

```
SUBROUTINE BETAETA(tao,pvi2,zmoc2,z,beta,beta2,eta)
implicit real*8(b)
```

```
  beta2=1.-1./((1.+tao)**2.)
  beta= dsqrt(beta2)
= relacion v2/c2 para ener(i)

  pvi2=(1.-beta2)/(zmoc2*zmoc2*beta2*beta2)
= inverso de (pv)2 para ener(i)

  eta= (6.802e-05*(z**0.66)/(4.*tao*(tao+2.)))*(1.13+
  3.76*((z/(137*beta))**2.))
constante de apantallamiento de Moliere para ener(i)

return
end
```

```
SUBROUTINE YINOP1(tercio,ynopi)
implicit real*8 (b,f,h,x,y)
dimension w(65),csw(64),snw(64),p(64,60)
common/ang/w
common/senos/snw
common/cosen/csw
common/pol/p
common/hf/j,l,eta,beta2,beta,z,raiz2
```

```
  s=3.15/62
  j=63
  b1=h1(w(j))
  b2=0d0
  do 5 j=2,62,2
    b2=b2+h1(w(j))
  b3=0d0
  do 10 j=3,61,2
    b3= b3+h1(w(j))
  ynopi=(b1+4.*b2+2.*b3)*s*tercio
i= integral de 0 a pi de la distribucion de B-S

return
end
```

ulo de la distribucion de g-s para angulos entre 0 y 3.15 radianes:

```
SUBROUTINE DISTR1(i,ass,ascen,arn,dens,dosepi,zhystl,alfa,
t,stl2,xi,nl)
implicit real*8(g)
real*8 ass,ss
dimension p(64,60),st1(60),snw(64),ass(64),ascen(64),ar(64),
```

```

arn(64,200),pt(60)
common/senos/snw
common/pol/p
common/dis/st1

do 5 j=1,64,1

do 10 l=1,nl
  pt(1)=p(j,l)

aa=0d0

do 15 l=1,nl,1
  ynos=stp*(1+alfa)*st1(l)*alog((t+alfa)/(t*(1+alfa)))/
  (alfa*dens)

= integral de 0 a s de la distribucion de G-S
  if (dabs(ynos),st,50) go to 15
  aa=(1-1./2.)*dexp(-ynos)*st(1)
  aa=aa+aa

  ass(j)= aa/dospi
  assen(j)= aa*snw(j)
j)= valor de la distribucion de G-S para el angulo w(j)

  continue

atdis=0

do 20 j=1,63,1
  ar(j)=0.5*zh*(assen(j) + assen(j+1))
area bajo la distribucion para angulos entre w(j) y w(j+1)

  atdis = atdis + ar(j)
= area bajo la distribucion para angulos entre 0 y 3.15 radianes

  arn(1,i)=ar(1)/atdis
do 25 j=2,63,1
  arn(j,i)=ar(j)/atdis+arn(j-1,i)
j,i)= area normalizada bajo la distribucion para angulos entre 0 y w(j+1),
el iesimo paso

return
end

```

```

SUBROUTINE ZRANG(u,dels,coorz,w,arn,pi,mi,cteta0,iu)
dimension w(65),coorz(202),arn(64,200),dels(200)

cteta1=cteta0
coorz(1)=0.0

do 5 i=1,iu

  wazar=ran(mi)

do 10 j=1,63
  if(wazar.lt.arn(j,i)) go to 15
  continue
  wp=(w(j)+u(j+1))/2.
angulo solar de deflexion aleatorio

```

```

delfi=2.*pi*ran(mi)
= angulo azimutal de deflexion aleatorio

cw=cos(um)
cteta2=cteta1*cw+sqrt((1.-cteta1**2)*(1.-cw*cw))*cos(delfi)

coorz(i+1)=dela(i)*(cteta1+cteta2)*0.5+coorz(i)
= coordenada z al inicio de cada paso(z direccion de incidencia normal de
cteta1=cteta2
continue

return
end

```

```

-----
SUBROUTINE RPTRAN(ranso,trans,dolz,uu,nh,dentnh,ransor,dsrans)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
dimension ranso(10000),dolz(51),trans(50)

do 5 u=1,nh
  rans=ranso(u)
  ransor=ransor+dentnh*rans
= ranso promedio de la muestra

  crans=crans+trans*rans
  continue

dsrans=sort((crans-nh*ransor*ransor)/(nh-1))
= desviacion estandar del ranso promedio

do 10 i=1,uu
  mne=0
  do 15 u=1,nh
    if(ranso(u).st.dolz(i)) go to 20
    go to 15
    mne=mne+1
    continue
  trans(i)=mne*dentnh
  continue

return
end

```

```

-----
SUBROUTINE DOSESP(u,iu,uu,uv,stenuu,dentnh,dosis,delen,
coorz,dolz,encion,ener,ek,nelen)
implicit integer(i,j,l,m,n,u)
dimension coorz(202),delen(201),dolz(51),dosis(50),nelen(26,51)
,ek(26),ener(201)

ii=2
l=1
lm=1
n=uu+1
m=25

if(l.st.uu) go to 10

do 15 j=ii,iu+1
  if(coorz(j).lt.0.or.coorz(j).ge.dolz(n)) go to 20
  if(coorz(j).lt.dolz(l+1)) go to 25
  ii=j

```

```

l=l+1
go to 5

if(coorz(j).ge.delz(1)) go to 30
l=l-1
go to 25

:= dosis por unidad de area(mev cm2/s)

dosis(l)=dosis(l)+delen(j-1)/stenuu*dentnh

if(j.ge.(iu+1)) dosis(l)=dosis(l)+delen(j)/stenuu*dentnh

```

```

if(j.ge.2) go to 35
go to 40
if(lm.lt.1)go to 45
go to 40
nelen(m+1,lm)=nelen(m+1,lm)+1
lm=lm+1
go to 35

```

```

if(ener(j).ge.ek(m)) go to 50

m=m-1
go to 40
if(ener(j).lt.ek(m+1)) go to 53
m=m+1
go to 40
if(ener(j+1).ge.ek(m)) go to 60
go to 65
if(coorz(j+1).lt.delz(1+1)) go to 70
go to 65
if(coorz(j+1).ge.delz(1)) go to 15
nelen(m,1)=nelen(m,1)+1

```

```

continue

```

```

if(j.st.(iu+1)) go to 10
enoion=enoion+delen(j-1)*dentnh
:= energia total de los electrones retrodispersados

```

```

j=j+1
go to 20

```

```

return
end

```

```

:= inverso del poder de frenamiento

```

```

function f(x)
implicit real*8 (b,f,h,x,y)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
real*8 delta
parameter(pi=3.141592653,zmoc2=0.511,e2=1.44e-13,c2=9.0e20)
common/fun/cn,foi,cc,acc,x0,x1,dens,ms

beta2 = 1. - 1. / ( ( 1. + x / zmoc2 ) * ( 1. + x / zmoc2 ) )
w = dlog10 ( dsart ( beta2 / ( 1. - beta2 ) ) )
if(w.le.x0) go to 5

```

```

if(y.lt.x1) go to 10
delta= 4.606*y+cc
  go to 5
delta = 4.606 * y + cc + ecc * ( x1 - y ) * * ms
f=1./(2.*pi*en*e2* e2 / (denc* zmoc2 * beta2 ) * ( dlog (zmoc2
* beta2 * x / ( poi * poi * ( 1. - beta2 ) ) ) - beta2 - delta ))

return
end

```

= funcion que hay que integrar de 0 a pi en la distribucion de G.s

```

function hl(x)
implicit real*8(b,f,h,x,u)
implicit real(a,c-e,s,k,o-t,v-w,z)
parameter(pi=3.14159265)
dimension p(64,60),csw(64),snw(64)
common/hf/j,l,eta,beta2,beta,z,raiz2
common/senos/snw
common/cosen/csw
common/pol/p

xdvd=1.-csw(j)+2.*eta
hl=(1.-p(j,1))*(1./(xdvd*xdvd)+pi*z*beta/(raiz2*137.*xdvd**1.5)
-(beta2+z*pi*beta/137.)/(2.*xdvd))*snw(j)

return
end

```

BIBLIOGRAFIA

- A1 Roesch, W.C., "Mathematical Theory of Radiation Fields", en "Radiation Dosimetry", F.H. Attix, W.C. Roesch y E. Tochilin eds., Academic Press. N.Y. (1968)
- AG Aiginger, H. y Gonausser, E., Atomicern Energie, 13-8, 33(1968)
- B1 Beiser, A., "Conceptos de Física Moderna", 98, McGraw Hill, México (1974).
- B2 Bethe, H.A., "Moliere's Theory of Multiple Scattering", Phys. Rev. 89, 1256 (1953).
- B3 Brandan, M.E., Conceptos de Dosimetría y Microdosimetría, en "Notas de Física", 4,5,14-66, IFUNAM (1981)
- B4 Berger, M.J., Montecarlo Calculation of the Penetration and Diffusion of Fast Charged Particles, en "Methods in Computational Physics", 1,135-215, Academic Press. Inc., New York (1963)
- BA1 Bethe, A.H. y Ashkin, J., Passage of Radiation through Matter, en "Experimental Nuclear Physics", 1, 166-357, J. Wiley & Sons, Inc. New York (1963)
- E1 Evans, R.D., "The Atomic Nucleus", 567-5b9, McGraw Hill, New York (1972)
- F1 Fermi, E., "The Ionization Loss of Energy in Gases and in Condensed Materials", 57,485 (1940)

Fano, V., "Penetration of Protons, Alpha Particles, and Mesones", Ann. Rev. Nucl. Sci. 13,1, (1963)

1 Goudsmit, S.A. y Saunderson, J.L., "Multiple Scattering of Electrons", Phys. Rev. 57,24 (1940)

2 Goudsmit, S.A. y Saunderson, J.L., "Multiple Scattering of Electrons II", Phys. Rev. 58,36 (1940)

1 Halpern, O. y Hall, H., "The Ionization Loss of Energy of Fast Charged Particles in Gases and Condensed Bodies", Phys. Rev. 57,485 (1940)

Mitio Inokuti, "Inelastic Collisions of Fast Charged Particles with Atoms and Molecules - The Bethe Theory Revisted", Revs. Mod. Phys., 43,279 (1971)

Mitio Inokuti, "Addenda: Inelastic Collisions of Fast Charged Particles with Atoms and Molecules- The Bethe Theory Revisted", Revs. Mod. Phys., 50,23 (1978)

Lewis. H.W. Phys. Rev. 78,526 (1950)

Landau, L., "On the Energy Loss of Fast Particles by Ionization", J. of Phys., 8,4 201-205 (1944)

1 Mott, N.F. y Massey, H.S.W., "Theory of Atomic Collisions", 78-82, Oxford University Press, London (1949)

McGervey, J., "Introduccion a la Física Moderna", 470-475, Trillas, México (1975)

Nakai, Y., Jap. J. Applied Phys., 2, 743 (1963)

Spencer, L.V., "Theory of Electron Penetration", Phys. Rev. 98, 1597 (1955)

Swann, W.F.G., J. Fran. Inst., 226, 598 (1938)

Sóbol, I.M., "Método de Montecarlo", 1-41, Mir, Moscú, (1976)

Sternheimer, R.M. y Peierls, P.F., "General Expression for the Density Effect for the Ionization Loss of Charged Particles", Phys. Rev. B, 3, 3681 (1971)

Sternheimer, R.M. Seltzer, S.M. y Berger, M.J., "Density Effect for the Ionization Loss of Charged Particles in Various Substances", Phys. Rev. B, 26, 6067 (1982)

Tabata, T. e Ito, R., "An Algorithm for the Energy Deposition by Fast Electrons", Nucl. Scie. and Eng. 53, 226-229 (1974)

Uribe, R.M., "Análisis de los Métodos Dosimétricos para Plantas de Irradiación que Utilizan un Acelerador de Electrones", 8-36, Tesis, México (1979)

Williams, E.J., "Concerning the Scattering of Fast Electrons and Cosmic-Ray Particles", Proc. Roy. Soc., 169, 531 (1939)

Williams, E.J., "Multiple Scattering of Fast Electrons and Alpha-Particles and Curvature of Cloud Traks due to Scattering", Phys. Rev., 58, 292 (1940).