Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Productos simétricos de la recta real: Encajes y Retracciones.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
FÉLIX YAEL LÓPEZ CAYETANO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	López
Apellido materno	Cayetano
Nombre(s)	Félix Yael
Teléfono	56 67 14 15
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	307189138
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Jorge Marcos
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Montejano
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Héctor
Apellido paterno	Méndez
Apellido materno	Lango
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Rodrigo Jesús
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Gutiérrez
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Illanes
Apellido materno	Mejía
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Yaziel
Apellido paterno	Pacheco
Apellido materno	Juárez
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Productos simétricos de la recta real: Encajes y Retracciones.
Número de páginas	88
Año	2018

Índice general

Dedicado a mis padres:

Gracias por su apoyo incondicional
a lo largo de toda mi vida.

Capítulo 1

Introducción

Dado un *espacio métrico* X, un *Hiperespacio* de X es una colección específica de subconjuntos de X equipados con la *métrica de Hausdorff*. En 1931 Karol Borsuk y Stanislaw Ulam en su escrito llamado *On Symmetric Products of Topological Spaces* [4] construyen un espacio al que llaman el *n-ésimo producto simétrico* del espacio X (denotado actualmente por $F_n(X)$), cuyos elementos son subconjuntos de X no vacíos con *cardinalidad* a lo más n. Este Hiperespacio lo estudian con dos enfoques distintos:

1. ¿Qué propiedades topológicas hereda $F_n(X)$ de X?.

2. ¿Qué propiedades topológicas tiene $F_n(X)$, para algún X específico?

Como ejemplo del segundo enfoque prueban que para $n \leq 3$, $F_n(I)$ admite un *encaje topológico* en $\mathbb{R}^n$, pero para $n \geq 4$, no existe ningún *encaje topológico* en $\mathbb{R}^n$, donde I denota el intervalo cerrado $[0, 1]$ y n es un número natural.

El objetivo de esta tesis es hacer un escrito lo más autocontenido posible explicando el artículo realizado por Leonid V. Kovalev, el cual lleva por titulo *Symmetric Products of the Line: Embeddings And Retractions* [7]. El trabajo realizado por Kovalev es un ejemplo del segundo enfoque que mencionamos con anterioridad, en él se estudia el *n-ésimo producto simétrico* de dos espacios métricos bien conocidos: la recta real $\mathbb{R}$ y el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$.

En esta tesis prometemos demostrar tres teoremas los cuales constituyen los resultados principales de ésta. Los teoremas mencionados son:

1. $F_n(\mathbb{R})$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$ donde $m = 2\lfloor (e-1)\, n! \rfloor$.

2. $F_n(\mathbb{R}^m)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^k$ donde

$$k = 2(n+1)^{m-1} \lfloor (e-1)\, n! \rfloor .$$

3. $F_n(\mathbb{R})$ es un retracto absoluto Lipschitz.

En lo que resta de este capítulo daremos la notación que emplearemos a lo largo de este escrito y demostraremos una igualdad que será de suma importancia para el Teorema 4.2.1.

El capítulo 2 se dedicará a clases especiales de funciones continuas y que son el pilar de este trabajo: las funciones Lipschitz, los encajes bi-Lipschitz y los lipeomorfismos. Veremos cómo podemos obtener nuevas funciones de este tipo a partir de otras. En particular nos dedicaremos a trabajar con estas funciones cuando su dominio es un producto de espacios métricos.

En el capítulo 3 daremos (por fin) la definición formal de el enésimo producto simétrico y métrica de Hausdorff. Veremos que al equipar el enésimo producto simétrico de la recta real con la métrica de Hausdorff; ésta se comporta de una manera muy amigable.

En el capítulo 4, teniendo los ingredientes listos, daremos inicio a demostrar dos de los tres resultados principales de nuestro trabajo. Para ello introduciremos el concepto de cono y cono geométrico de un espacio métrico.

Para finalizar, en el capítulo 5 hablaremos de retractos Lipschitz, retractos absolutos Lipschitz y m-Conexidad Lipschitz. Como último resultado, veremos que el n-ésimo producto simétrico de la recta real es un retracto absoluto Lipschitz.

Para garantizar una mejor comprensión de este trabajo se recomienda que el lector haya cursado lo equivalente a un primer curso de Álgebra Lineal y Análisis Matemático como son impartidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM[1].

[1]Esta tesis fue apoyada por el proyecto "Teoría de continuos e hiperespacios (0221413)" del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), 2013; y, el proyecto "Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II" (IN101216) de PAPPIT, DGAPA, UNAM.

1.1. Notación

Sean $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos no vacíos, $A, B \subseteq X$ y f, g funciones.

- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos.
- $\mathbb{S}$ denota la esfera unitaria en el plano complejo.
- $\mathbb{R}^n$ denota el espacio euclideano n-dimensional.
- I denota el intervalo cerrado $[0,1]$.
- Para $n, m \geq 1$ definimos $\mathbb{R}^{mn} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m-\text{veces}}$
- $|A|$ denota la cardinalidad de A.
- $\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x_i \in X_i\}$.
- $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$.
- $f \circ g$ denota la composición de las funciones f y g.
- $f|_A$ denota la función f restringida al subconjunto A.
- id_X denota la función identidad en el conjunto X.
- $[x]$ denota la clase de equivalencia de x.
- $\max\{p, q\}$ denota el máximo de los números p y q.
- $\min\{p, q\}$ denota el mínimo de los números p y q.
- $\sup(A)$ denota el supremo del conjunto A.
- $\inf(A)$ denota el ínfimo del conjunto A.

- $d(x, A)$ denota la distancia de un punto x al conjunto A (donde A es un subconjunto no vacío del espacio métrico (X, d)).
- $d(A, B)$ denota la distancia entre los conjuntos A, B (donde A, B son subconjuntos no vacíos del espacio métrico (X, d)).
- $B_\varepsilon(x_0)$ denota la bola abierta de radio épsilon y centro en x_0.
- $B_\varepsilon[x_0]$ denota la bola cerrada de radio épsilon y centro en x_0.
- $A \oplus B$ denota la suma directa de A, B (donde A, B son subespacios vectoriales del espacio vectorial X).
- $A^\perp$ denota el conjunto ortogonal de A (donde A es un subconjunto de X y X es un espacio vectorial).

1.2. Una igualdad importante

Definición 1.2.1. Definimos la **función piso**, como la función $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\lfloor x\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Proposición 1.2.2. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $\lfloor x\rfloor = m$,

(b) $m \in \mathbb{Z}$ *y* $m \leq x < m+1$.

Demostración. *(a)* implica *(b)*.
Dado que $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ (por definición). Sólo resta demostrar que

$$m \leq x < m+1.$$

Por definición de $\lfloor\cdot\rfloor$, tenemos que $m = \lfloor x\rfloor \leq x$. Por otro lado, supongamos que $m+1 \leq x$, como $m+1 \in \mathbb{Z}$, por definición de $\lfloor\cdot\rfloor$, tenemos que $m+1 \leq \lfloor x\rfloor = m$, pero esto no puede ser posible, pues $m < m+1$. La contradicción vino de suponer que $m+1 \leq x$, por lo tanto $m \leq x < m+1$, como requeríamos.

(b) implica *(a)*.

Dado que $m \in \mathbb{Z}$ y $m \leq x$, por definición de $\lfloor \cdot \rfloor$, tenemos que $m \leq \lfloor x \rfloor$. Si fuera el caso que $m < \lfloor x \rfloor$, como $\lfloor x \rfloor, m \in \mathbb{Z}$, se sigue que $m + 1 \leq \lfloor x \rfloor$, pero $x < m + 1$, por lo que

$$x < m + 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Lo cual, es imposible. Por lo tanto $\lfloor x \rfloor = m$, como requeríamos. ∎

Proposición 1.2.3. *Para cada $n \geq 1$, se tiene que*

$$n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \lfloor (e-1)\, n! \rfloor.$$

Donde e se define como

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Demostración. Para los casos $n = 1$ y $n = 2$, un sencillo cálculo hace ver que la igualdad es inmediata. Para $n \geq 3$, haremos uso de la Proposición 1.2.2. Demostraremos que

1. $n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Z}$,

2. $n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq n!\,(e-1)$,

3. $n!\,(e-1) < \left(n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \right) + 1$.

En primer lugar, dada $k \leq n$, se tiene que

$$n! = k! \times (k+1) \times \cdots \times (n-1) \times n,$$

por lo que

$$\frac{n!}{k!} = (k+1) \times (k+2) \times \cdots \times (n-1) \times n \in \mathbb{Z}.$$

Así, podemos concluir que $n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Z}$.

Para la segunda parte dado que, para cada $x \geq 0$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x,$$

se tiene que (usando $x = 1$)

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e.$$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq e - 1$, lo cual, implica que $n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq n!\,(e-1)$.

Finalmente, para demostrar la última desigualdad, notemos que las siguientes condiciones son equivalentes

- $n!\,(e-1) < \left(n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1$,
- $e - 1 < \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}$,
- $(e-1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$,
- $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$,
- $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < 1$.

Por lo anterior, sólo basta probar que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < 1$, para ello observemos que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!}.$$

Además, para cada $k \geq 1$,

$$\frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\cdots(n+k)} < \frac{1}{n^k} = \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{k}.$$

Finalmente, como $n \geq 3$, con [9, Teorema 3.26, pág. 61] podemos calcular la serie geométrica para $x = \dfrac{1}{n}$ y obtener

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{k} = \frac{1}{n-1} < 1.$$

Así, para cada $n \geq 3$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{k} < 1.$$

Lo cual es equivalente a decir que $n!\,(e-1) < \left(n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) + 1$.
Por tanto, gracias a la Proposición 1.2.2, podemos concluir que para cada $n \geq 3$, se tiene que $\lfloor (e-1)\, n! \rfloor = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

Por tanto, para cada $n \geq 1$, $\lfloor (e-1)\, n! \rfloor = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. ■

Capítulo 2

Clases especiales de funciones continuas

En el presente capítulo trataremos con clases especiales de funciones continuas: las funciones Lipschitz, los encajes bi-Lipschitz y los lipeomorfismos, veremos cómo podemos construir nuevas funciones de este tipo a partir de otras ya dadas.

2.1. Funciones Lipschitz continuas

Definición 2.1.1. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es **Lipschitz continua**, si existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y).$$

Tal constante se denomina **constante de Lipschitz**. En ocasiones para referirnos a una función Lipschitz continua (con constante K), diremos solamente **función K-Lipschitz**.

Observación 2.1.2. Si f es K-Lipschitz, entonces f es *uniformemente continua*. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, si consideramos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$, $d_X(x, y) < \delta$ implica que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Es decir, f es uniformemente continua (y por tanto continua).

Proposición 2.1.3. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espacios métricos. Si existen $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones K_1-Lipschitz y K_2-Lipschitz, respectivamente, entonces la función $h : X \longrightarrow Z$ dada por $h = g \circ f$ es K_1K_2-Lipschitz*

Demostración. Como f es K_1-Lipschitz, para cualesquiera $x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K_1 d_X(x, y). \tag{2.1.1}$$

De igual forma, como g es K_2-Lipschitz, para cualesquiera $z, w \in Y$

$$d_Z(g(z), g(w)) \leq K_2 d_Y(z, w). \tag{2.1.2}$$

Consideramos $K = K_1K_2 > 0$. Para demostrar que h es K-Lipschitz tomamos $x, y \in X$.

Como $f(x), f(y) \in Y$, por (2.1.2) tenemos que

$$d_Z(h(x), h(y)) = d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq K_2 d_Y(f(x), f(y)).$$

Pero por (2.1.1) tenemos que

$$K_2 d_Y(f(x), f(y)) \leq K_1K_2 d_X(x, y) = K d_X(x, y).$$

Así, $d_Z(h(x), h(y)) \leq K d_X(x, y)$. Es decir, h es K-Lipschitz. ■

En lo que resta del escrito frecuentemente trabajaremos con el producto de espacios métricos, para ello es bueno recordar que si $(X_1, d_1), \ldots, (X, d_n)$ es una colección de espacios métricos, podemos equipar al conjunto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ con una métrica (llamada **métrica producto**) la cual está dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Proposición 2.1.4. *Sean $(X, d), (Y_1, d_1), (Y_2, d_2), \ldots, (Y_n, d_n)$ espacios métricos. Si, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : X \longrightarrow Y_i$ es una función Lipschitz continua, entonces la función*

$$f : X \longrightarrow Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, es Lipschitz continua.

Demostración. Sabemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe una constante $K_i > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$d_i\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right) \leq K_i d\left(x, y\right). \tag{2.1.3}$$

Consideramos $K = máx\left\{K_1, K_2, \ldots, K_n\right\} > 0$. Si $x, y \in X$, entonces por (2.1.3) tenemos que

$$\left(d_i\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right)\right)^2 \leq \left(K_i d\left(x, y\right)\right)^2 \leq \left(K d\left(x, y\right)\right)^2.$$

Como esto es válido para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(K d\left(x, y\right)\right)^2 = n\left(K d\left(x, y\right)\right)^2.$$

Por tanto

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right)\right)^2} \leq \sqrt{n} K d\left(x, y\right).$$

Así, podemos concluir que f es $\sqrt{n}K$-Lipschitz. ■

2.2. Encajes bi-Lipschitz

Definición 2.2.1. Sean $\left(X, d_X\right), \left(Y, d_Y\right)$ espacios métricos. Diremos que una función $h : X \longrightarrow Y$ es un **encaje bi-Lipschitz**, si existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\frac{1}{K} d_X\left(x, y\right) \leq d_Y\left(h\left(x\right), h\left(y\right)\right) \leq K d_X\left(x, y\right).$$

Observación 2.2.2. Cualquier encaje bi-Lipschitz es inyectivo y continuo. Sean h y K como en la definición anterior. Como h es un encaje bi-Lipschitz, en particular es Lipschitz continua, así, por la Observación 2.1.2 tenemos que h es continua. Finalmente, sean $x, y \in X$. Si $h\left(x\right) = h\left(y\right)$, entonces

$$0 \leq \frac{1}{K} d_X\left(x, y\right) \leq d_Y\left(h\left(x\right), h\left(y\right)\right) = 0.$$

Se sigue que $\frac{1}{K} d_X\left(x, y\right) = 0$, pero $\frac{1}{K} \neq 0$, entonces $d_X\left(x, y\right) = 0$, así $x = y$.

Proposición 2.2.3. *Sean* $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ *espacios métricos. Si, existen* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$ *encajes bi-Lipschitz, entonces la función* $h : X \longrightarrow Z$ *dada por* $h = g \circ f$ *es un encaje bi-Lipschitz.*

Demostración. Como f es Lipschitz continua, existe $K_1 > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\frac{1}{K_1} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K_1 d_X(x, y). \tag{2.2.1}$$

De igual forma, como g es un encaje bi-Lipschitz, existe $K_2 > 0$ tal que para cualesquiera $z, w \in Y$,

$$\frac{1}{K_2} d_Y(z, w) \leq d_Z(g(z), g(w)) \leq K_2 d_Y(z, w). \tag{2.2.2}$$

Consideramos $K = K_1 K_2 > 0$, por la Proposición 2.1.3, h es K-Lipschitz. Por tanto resta demostrar que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) \leq d_Z(h(x), h(y)).$$

Sean $x, y \in X$. Por (2.2.1) tenemos que $\frac{1}{K_1} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y))$, como $\frac{1}{K_2} > 0$, se sigue que

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) = \frac{1}{K_1} \frac{1}{K_2} d_X(x, y) \leq \frac{1}{K_2} d_Y(f(x), f(y)). \tag{2.2.3}$$

Además, como $f(x), f(y) \in Y$, por (2.2.2) se cumple que

$$\frac{1}{K_2} d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Z(g(f(x)), g(f(y))) = d_Z(h(x), h(y)). \tag{2.2.4}$$

Así, por (2.2.3) y (2.2.4), tenemos que $\frac{1}{K} d_X(x, y) \leq d_Z(h(x), h(y))$, como requeríamos. Por tanto, h es un encaje bi-Lipschitz. ■

Proposición 2.2.4. *Sean* $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ *y* $(Y_1, \rho_1), \ldots, (Y_n, \rho_n)$ *espacios métricos. Si, para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ *es un encaje bi-Lipschitz, entonces la función*

$$f : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

dada por $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))$, *es un encaje bi-Lipschitz. Donde* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$.

Demostración. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe una constante $K_i > 0$ como en la definición de encaje bi-Lipschitz. Sean $K = máx\,\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$.
Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que

- $K \geq K_i > 0$, y
- $\frac{1}{K_i} d_i(x_i, y_i) \leq \rho_i(f_i(x_i), f_i(y_i)) \leq K_i d_i(x_i, y_i)$

Entonces, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\left(\frac{1}{K} d_i(x_i, y_i)\right)^2 \leq (\rho_i(f_i(x_i), f_i(y_i)))^2 \leq (K d_i(x_i, y_i))^2 .$$

Así

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K} d_i(x_i, y_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\rho_i(f_i(x_i), f_i(y_i)))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (K d_i(x_i, y_i))^2 .$$

Por lo que

$$\frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\rho_i(f_i(x_i), f_i(y_i)))^2 \leq K^2 \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2 .$$

Lo cual es equivalente a decir que

$$\frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\rho_i(f_i(x_i), f_i(y_i)))^2} \leq K \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2}.$$

Por tanto

$$\frac{1}{K} d(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$$

; es decir, f es un encaje bi-Lipschitz. ∎

2.3. Lipeomorfismos

Definición 2.3.1. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es un **lipeomorfismo**, si f es un encaje bi-Lipschitz suprayectivo.

Definición 2.3.2. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Diremos que X y Y son **lipeomorfos** (expresado como $X \overset{lip}{\approx} Y$), si existe $f : X \longrightarrow Y$ lipeomorfismo.

Observación 2.3.3. Si $X \overset{lip}{\approx} Y$, entonces $Y \overset{lip}{\approx} X$, donde el lipeomorfismo es h^{-1}, además si K es la constante de h, h^{-1} tiene la misma constante.

Dado que la composición de funciones suprayectivas es suprayectiva, la Proposición 2.2.3 nos genera la siguiente observación:

Observación 2.3.4. Si $X \overset{lip}{\approx} Y$ y $Y \overset{lip}{\approx} Z$, entonces $X \overset{lip}{\approx} Z$.

Observación 2.3.5. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un encaje bi-Lipschitz, entonces $X \overset{lip}{\approx} f(X)$ considerando a la función $h : X \longrightarrow f(X)$ dada por $h(x) = f(x)$.

Proposición 2.3.6. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ K-Lipschitz. Si, f es biyectiva y su inversa f^{-1} es K-Lipschitz, entonces f es un lipeomorfismo.*

Demostración. Dado que f es K-Lipschitz y suprayectiva, sólo resta probar que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)).$$

Sean $x, y \in X$. Como $f(x), f(y) \in Y$ y f^{-1} es K-Lipschitz, entonces

$$d_X(x, y) = d_X\left(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))\right) \leq K d_Y(f(x), f(y)).$$

Entonces $\frac{1}{K} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y))$, por tanto f es un lipeomorfismo. ■

Proposición 2.3.7. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espacios métricos. Si $X \overset{lip}{\approx} Y$, entonces $Z \times X \overset{lip}{\approx} Z \times Y$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $f : X \longrightarrow Y$ suprayectiva y $K > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y). \tag{2.3.1}$$

Consideremos $g : Z \times X \longrightarrow Z \times Y$ dada por $g((z, x)) = (z, f(x))$. Demostraremos que g es un lipeomorfismo, para ello primero notemos que g es suprayectiva, pues si $(z, y) \in Z \times Y$, como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, por tanto para esta misma $x \in X$, tenemos que $g((z, x)) = (z, f(x)) = (z, y)$.

Para probar que g es encaje bi-Lipschitz, consideramos $L = K + 1 > 0$. Sean $p, q \in Z \times X$ donde $p = (z_1, x_1)$ y $q = (z_2, x_2)$, entonces por (2.3.1) tenemos que

$$\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2).$$

Lo cual, implica que

$$\left(\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2)\right)^2 \leq (d_Y(f(x_1), f(x_2)))^2 \leq (L d_X(x_1, x_2))^2. \tag{2.3.2}$$

Además, como $L > 1$ y $d_Z(z_1, z_2) \geq 0$, tenemos que $d_Z(z_1, z_2) \leq L d_Z(z_1, z_2)$ y $\frac{1}{L} d_Z(z_1, z_2) \leq d_Z(z_1, z_2)$, entonces

$$(d_Z(z_1, z_2))^2 \leq (L d_Z(z_1, z_2))^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{L} d_Z(z_1, z_2)\right)^2 \leq (d_Z(z_1, z_2))^2.$$

Sumando adecuadamente estas desigualdades a (2.3.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{L} d_Z(z_1, z_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2)\right)^2 &\leq (d_Z(z_1, z_2))^2 + (d_Y(f(x_1), f(x_2)))^2 \\ &\leq (L d_Z(z_1, z_2))^2 + (L d_X(x_1, x_2))^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2}\left((d_Z(z_1, z_2))^2 + (d_X(x_1, x_2))^2\right) &\leq (d_Z(z_1, z_2))^2 + \left(d_Y(f(x_1), f(x_2))^2\right) \\ &\leq L^2\left((d_Z(z_1, z_2))^2 + (d_X(x_1, x_2))^2\right). \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada en cada una de las desigualdades anteriores, podemos concluir que

$$\frac{1}{L}d\left(p,q\right) \leq d\left(g\left(p\right),g\left(q\right)\right) \leq Ld\left(p,q\right).$$

Es decir, g es un encaje bi-Lipschitz. Por tanto g es un lipeormorfismo. ■

Observación 2.3.8. Gracias a la proposición anterior, es inmediato que si X admite un encaje bi-Lipschitz en Y, entonces $Z \times X$ admite un encaje bi-Lipschitz en $Z \times Y$.

Definición 2.3.9. Sean $(X,d),(Y,d_Y)$ espacios métricos. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es una **isometría**, si para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que

$$d_X\left(x,y\right) = d_Y\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right).$$

Definición 2.3.10. Sean $(X,d),(Y,d_Y)$ espacios métricos. Diremos que X y Y son **isométricos**, si existe $f : X \longrightarrow Y$ isometría suprayectiva.

Observación 2.3.11. Es inmediato que si $f : X \longrightarrow Y$ es isometría suprayectiva, entonces f es biyectiva y su inversa f^{-1} tambien es isometría. Por tanto, toda isometría es un lipeomorfismo.

Capítulo 3

El n-ésimo producto simétrico y la métrica de Hausdorff

En este capítulo presentaremos los productos simétricos y la métrica de Hausdorff. Las propiedades más importantes de esta métrica se detallan en el Teorema 3.2.2 y las Proposiciones 3.2.3, 3.2.5.

Para un espacio métrico (X,d), un **hiperespacio** de X es una colección específica de subconjuntos de X, equipados con la **métrica de Hausdorff** (que definiremos en 3.1.9). Entre los hiperespacios de mayor interés se encuentran:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y no vacío }\}$.
- $C\left(X\right) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\right\}$.
- Dado $n \in \mathbb{N}$, $F_n\left(X\right) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}$.

Sin embargo, en este escrito sólo trabajaremos con este último hiperespacio. Si el lector está interesado en un estudio más a fondo de estos hiperespacios, puede consultar [6] y [1].

3.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 3.1.1. Sean (X,d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. El **n-ésimo producto simétrico** de X es el conjunto

$$F_n\left(X\right) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}.$$

Observación 3.1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F_n(X) \subseteq 2^X$ (pues un conjunto finito siempre es compacto).

Observación 3.1.3. Para cada $n \geq 2$ se tiene que $F_{n-1}(X) \subseteq F_n(X)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $A \subseteq B$, entonces $F_n(A) \subseteq F_n(B)$.

A partir de una función $f : X \longrightarrow Y$, entre espacios métricos, podemos construir una nueva función entre sus respectivos productos simétricos de la siguiente forma:

Definición 3.1.4. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Definimos la **función inducida** por f, como la función $\hat{f} : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ dada por

$$\hat{f}(A) = \{f(a) : a \in A\} = f(A).$$

Proposición 3.1.5. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Si f es inyectiva, entonces la función inducida $\hat{f}$ es inyectiva.*

Demostración. Sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \neq B$. Supongamos sin perder generalidad que $A \nsubseteq B$, entonces existe $a \in A \setminus B$.

Demostraremos que $f(a) \in f(A) \setminus f(B)$, para ello en primer lugar como $a \in A$, se tiene que $f(a) \in f(A)$.

Por otro lado, si fuera el caso que $f(a) \in f(B)$ entonces $f(a) = f(b)$ para algún $b \in B$. Como f es inyectiva se sigue que $a = b \in B$, lo cual es imposible pues $a \notin B$. Por tanto $f(a) \notin f(B)$.

Como $f(a) \in f(A) \setminus f(B)$, se sigue que $f(A) \nsubseteq f(B)$. Así $\hat{f}(A) \neq \hat{f}(B)$, luego $\hat{f}$ es inyectiva. ∎

Definición 3.1.6. Sean (X, d) un espacio métrico , $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces la **nube** de radio épsilon y centro en A es el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Observación 3.1.7. Es inmediata de la definición que, para cualquier $\varepsilon > 0$, $A \subseteq N(\varepsilon, A)$. Además, si $0 < \delta < \varepsilon$, entonces $N(\delta, A) \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Observación 3.1.8. Para cualquier $\{x\} \in F_1(X)$ se tiene que

$$N(\varepsilon, \{x\}) = B_\varepsilon(x).$$

Definición 3.1.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $A, B \in 2^X$ definimos

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

La función H_d definida anteriormente se conoce como *métrica de Hausdorff*. Si no hay confusión acerca del espacio métrico donde estamos trabajando, solamente escribiremos $H(A, B)$ en lugar de $H_d(A, B)$.

En [6, Teorema 2.2, pág. 11] podemos ver la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.1.10. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces H_d es una métrica en 2^X.*

Dado que $F_n(X) \subseteq 2^X$ (Observación 3.1.2), podemos equipar al n-ésimo producto simétrico de X con la métrica de Hausdorff.

Proposición 3.1.11. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es isométrico a $F_1(X)$.*

Demostración. Consideremos $f : X \longrightarrow F_1(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$. Es inmediato que f es suprayectiva, por tanto sólo resta probar que f es isometría. Para ello tomemos $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} H(f(x), f(y)) &= \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : \{x\} \subseteq N(\varepsilon, \{y\}) \text{ y } \{y\} \subseteq N(\varepsilon, \{x\})\} \\ &= \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : x \in N(\varepsilon, \{y\}) \text{ y } y \in N(\varepsilon, \{x\})\}. \end{aligned}$$

Además, por la Observación 3.1.8, tenemos que $N(\varepsilon, \{x\}) = B_\varepsilon(x)$ y $N(\varepsilon, \{y\}) = B_\varepsilon(y)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} H(f(x), f(y)) &= \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : x \in B_\varepsilon(y) \text{ y } y \in B_\varepsilon(x)\} \\ &= \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : d(x, y) < \varepsilon \text{ y } d(y, x) < \varepsilon\} \\ &= \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : d(x, y) < \varepsilon\}. \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.12. *Sean (X,d) un espacio métrico y A, $B \in 2^X$. Si $a \in A$, entonces, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H(A,B)$.*

Demostración. Por definición de $H(A,B)$, para cada $n \geq 1$ existe $r_n > 0$ tal que

- $A \subseteq N(r_n, B)$
- $B \subseteq N(r_n, A)$
- $r_n < H(A,B) + \dfrac{1}{n}$

Como $a \in A$, para cada $n \geq 1$ existe $b_n \in B$ tal que $d(a,b_n) < r_n$. Consideramos la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ en B. Como B es compacto, existe $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente en B. Sea $b \in B$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = b$.

Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(a,b) &\leq d(a,b_{n_k}) + d(b_{n_k}, b) \\ &< r_{n_k} + d(b_{n_k}, b) \\ &< H(A,B) + \frac{1}{n_k} + d(b_{n_k}, b). \end{aligned}$$

Como $0 \leq d(a,b) < H(A,B) + \dfrac{1}{n_k} + d(b_{n_k}, b)$, tomando el límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $d(a,b) \leq H(A,B)$. ■

En lo que resta de este escrito nos será de mucha utilidad la siguiente equivalencia de la métrica de Hausdorff, pues es más fácil de trabajar a la hora de hacer nuestras cuentas.

Teorema 3.1.13. *Sean (X,d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualesquiera $A, B \in F_n(X)$, se tiene que*

$$H(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\right\}.$$

Demostración. Sean $A, B \in F_n(X)$. En primer lugar demostraremos que

1. $\max\limits_{a\in A} d(a,B) \leq H(A,B)$, y

2. $\max\limits_{b\in B} d(b,A) \leq H(A,B)$

Para demostrar 1, basta ver que, para cada $a \in A$, se tiene que $d(a,B) \leq H(A,B)$. En efecto, tomemos $a \in A$ y supongamos que $H(A,B) < d(a,B)$, para llegar a una contradicción. Por definición de $H(A,B)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

- $A \subseteq N(\varepsilon, B)$
- $B \subseteq N(\varepsilon, A)$
- $\varepsilon < d(a,B)$

Como $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon < d(a,B)$, pero $d(a,B) \leq d(a,b)$. Por tanto $d(a,b) < d(a,b)$, lo cual, es imposible. La contradicción vino de suponer que $H(A,B) < d(a,B)$, por tanto $d(a,B) \leq H(A,B)$.

Como $a \in A$ fue arbitrario y A es un conjunto finito, se tiene que $\max\limits_{a\in A} d(a,B) \leq H(A,B)$. Similarmente podemos obtener que $\max\limits_{b\in B} d(b,A) \leq H(A,B)$ y por tanto concluir que

$$\max\left\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\right\} \leq H(A,B). \tag{3.1.1}$$

Ahora demostremos que

$$H(A,B) \leq \max\left\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\right\}. \tag{3.1.2}$$

Si $H(A,B) = 0$ terminamos, pues para $a_0 \in A$, se tiene que

$$H(A,B) = 0 \leq d(a_0,B) \leq \max_{a\in A} d(a,B) \leq \max\left\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\right\}.$$

Por tanto, supongamos que $H(A,B) \neq 0$. Sea $\delta \in (0, H(A,B))$, entonces $A \nsubseteq N(\delta,B)$ o $B \nsubseteq N(\delta,A)$, pues de otra forma tendríamos que $\delta < H(A,B) \leq \delta$, lo cual, es imposible.

Sin perder generalidad podemos suponer que $A \nsubseteq N(\delta,B)$. Entonces existe $a_0 \in A \setminus N(\delta,B)$. Como $a_0 \notin N(\delta,B)$, se tiene que para cada $b \in B$,

$d(a_0, b) \geq \delta$, es decir, δ es una cota inferior para el conjunto $\{d(a_0, b) : b \in B\}$. Así, por definición de $d(a_0, B)$, tenemos que $\delta \leq d(a_0, B)$. Se sigue que

$$\delta \leq d(a_0, B) \leq \max_{a \in A} d(a, B) \leq \max\left\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\right\}.$$

Como $\delta \in (0, H(A, B))$ fue arbitrario, tenemos que

$$H(A, B) \leq \max\left\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\right\}.$$

Así, por (3.1.1) y (3.1.2), podemos concluir que

$$H(A, B) = \max\left\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\right\}.$$

■

La utilidad de esta equivalencia es mostrada en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 3.1.14. *Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos, $f : X \longrightarrow Y$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es un encaje bi-Lipschitz, entonces su función inducida*

$$\hat{f} : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$$

es un encaje bi-Lipschitz.

Demostración. Como f es un encaje bi-Lipschitz, existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$

$$\frac{1}{K} d(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq K d(x, y). \tag{3.1.3}$$

Sean $A, B \in F_n(X)$. En primer lugar probaremos que

$$H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right) \leq K H_d(A, B). \tag{3.1.4}$$

Para ello, por el Teorema 3.1.13, basta probar que

1. $\max\limits_{p \in \hat{f}(A)} d\left(p, \hat{f}(B)\right) \leq K H_d(A, B)$, y

2. $\max\limits_{q\in\hat{f}(B)} d\left(q,\hat{f}\left(A\right)\right)\leq KH_d\left(A,B\right)$.

Para demostrar 1, sea $p\in\hat{f}\left(A\right)$, entonces $p=f\left(a\right)$ para algún $a\in A$. Como $A,B\in 2^X$ y $a\in A$, entonces por el Lema 3.1.12, existe $b\in B$ tal que $d\left(a,b\right)\leq H_d\left(A,B\right)$. Por otro lado, como $f\left(b\right)\in\hat{f}\left(B\right)$ tenemos que

$$d\left(p,\hat{f}\left(B\right)\right)=d\left(f\left(a\right),\hat{f}\left(B\right)\right)\leq\rho\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right).$$

Así por (3.1.3) y sabiendo que $d\left(a,b\right)\leq H_d\left(A,B\right)$ tenemos que

$$d\left(p,\hat{f}\left(B\right)\right)\leq KH_d\left(A,B\right).$$

Como $p\in\hat{f}\left(A\right)$ fue arbitrario y $\hat{f}\left(A\right)$ es un conjunto finito, podemos concluir que 1 se cumple. De manera similiar podemos obtener 2 y por tanto concluir que (3.1.4) es verdadera.

Por último probaremos que

$$\frac{1}{K}H_d\left(A,B\right)\leq H_\rho\left(\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\right). \tag{3.1.5}$$

Para ello, por el Teorema 3.1.13, basta probar que

1. $\max\limits_{a\in A} d\left(a,B\right)\leq KH_\rho\left(\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\right)$, y
2. $\max\limits_{b\in B} d\left(b,A\right)\leq KH_\rho\left(\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\right)$.

Para demostrar 1 tomemos $a\in A$. Como $\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\in 2^X$ y $f\left(a\right)\in\hat{f}\left(A\right)$, por el Lema 3.1.12 existe $q\in\hat{f}\left(B\right)$ tal que

$$\rho\left(f\left(a\right),q\right)\leq H_\rho\left(\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\right).$$

Como $q=f\left(b\right)$ para algún $b\in B$, tenemos que $d\left(a,B\right)\leq d\left(a,b\right)$. Por tanto, ocupando (3.1.3), tenemos que

$$d\left(a,B\right)\leq d\left(a,b\right)\leq K\rho\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\leq KH_\rho\left(\hat{f}\left(A\right),\hat{f}\left(B\right)\right).$$

Como $a\in A$ fue arbitrario y A es conjunto finito podemos concluir que 1 se cumple. De manera similar podemos obtener 2 y por tanto concluir que (3.1.5) es verdadera. Así por (3.1.4) y (3.1.5) podemos concluir que $\hat{f}$ es un encaje bi-Lipschitz. ■

Observación 3.1.15. De la proposición anterior podemos concluir que si f es K-Lipschitz, entonces su función inducida $\hat{f}$, es K-Lipschitz.

Corolario 3.1.16. *Sean $(X,d),(Y,\rho)$ espacios métricos, $f: X \longrightarrow Y$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es un lipeomorfismo, entonces su función inducida*

$$\hat{f}: F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$$

es un lipeomorfismo.

Demostración. Dado que f es un encaje bi-Lipschitz (pues f es un lipeomorfismo) la Proposición 3.1.14 implica que $\hat{f}$ es un encaje bi-Lipschitz. Por tanto resta probar que $\hat{f}$ es suprayectiva. Tomemos $B \in F_n(Y)$ y supongamos que $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Como f es suprayectiva tenemos que para cada $1 \leq k \leq n$ existe $a_k \in X$ tal que $f(a_k) = b_k$. Consideremos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces es inmediato que $A \in F_n(X)$ y $\hat{f}(A) = B$. Por tanto podemos concluir que $\hat{f}$ es suprayectiva y así un lipeormorfismo. ■

Proposición 3.1.17. *Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos, $f: X \longrightarrow Y$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es una isometría, entonces su función inducida*

$$\hat{f}: F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$$

es una isometría.

Demostración. Sean $A, B \in F_n(X)$. En primer lugar probaremos que

$$H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right) \leq H_d(A,B). \tag{3.1.6}$$

Para ello, por el Teorema 3.1.13, basta probar que

1. $\max\limits_{p \in \hat{f}(A)} d\left(p, \hat{f}(B)\right) \leq H_d(A,B)$, y

2. $\max\limits_{q \in \hat{f}(B)} d\left(q, \hat{f}(A)\right) \leq H_d(A,B)$.

Para probar 1, tomemos $p \in \hat{f}(A)$, entonces $p = f(a)$ para algún $a \in A$. Como $A, B \in 2^X$ y $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$ (Lema 3.1.12), además como f es isometría tenemos que

$$\rho(f(a), f(b)) = d(a,b) \leq H_d(A,B).$$

Como $f(b) \in \hat{f}(B)$ se sigue que

$$d\left(p, \hat{f}(B)\right) = d\left(f(a), \hat{f}(B)\right) \leq \rho\left(f(a), f(b)\right) \leq H_d(A, B).$$

Dado que $p \in \hat{f}(A)$ fue arbitrario y $\hat{f}(A)$ es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{p \in \hat{f}(A)} d\left(p, \hat{f}(B)\right) \leq H_d(A, B).$$

De forma similar podemos demostrar 2 y así concluir que se cumple (3.1.6). Por último probaremos que

$$H_d(A, B) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right). \tag{3.1.7}$$

Para ello, por el teorema 3.1.13, basta probar que

1. $\max_{a \in A} d(a, B) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right)$, y
2. $\max_{b \in B} d(b, A) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right)$.

En primer lugar demostraremos 1, para ello sea $a \in A$. Dado que $\hat{f}(A)$, $\hat{f}(B) \in 2^X$ y $f(a) \in \hat{f}(A)$ tenemos que existe $q \in \hat{f}(B)$ tal que

$$\rho\left(f(a), q\right) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right).$$

Además como $q \in \hat{f}(B)$ se tiene que $q = f(b)$ para algún $b \in B$. Así, como $b \in B$ y f es isometría, tenemos que

$$d(a, B) \leq d(a, b) = \rho\left(f(a), f(b)\right) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right).$$

Como $a \in A$ fue arbitrario y A es conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{a \in A} d(a, B) \leq H_\rho\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right).$$

De forma similar podemos demostrar 2 y por tanto concluir que se cumple (3.1.7). Por (3.1.6) y (3.1.7) se concluye que $\hat{f}$ es una isometría. ■

3.2. El n-ésimo producto simétrico de $\mathbb{R}$

Dadas las nociones de productos simétricos, nubes y métrica de Hausdorff, en esta sección trabajaremos solamente con la métrica de Hausdorff en $F_n(\mathbb{R})$ y un conjunto peculiar: $F_n^*(I)$ que definiremos más adelante. Daremos algunas propiedades de la métrica de Hausdorff que se cumplen en estos conjuntos, para así, entrar de lleno al objetivo de esta tesis.

Primeramente daremos la definición de tres conjuntos nuevos que jugarán un papel importante en el hiperespacio $(F_n(\mathbb{R}), H)$.

Definición 3.2.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $p \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} A+p &= \{x \in \mathbb{R} : x = a+p \text{ para algún } a \in A\}. \\ A-p &= \{x \in \mathbb{R} : x = a-p \text{ para algún } a \in A\}. \\ pA &= \{x \in \mathbb{R} : x = pa \text{ para algún } a \in A\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p, q \in \mathbb{R}$. Entonces, para cualesquiera $A, B \in F_n(\mathbb{R})$ se tiene que*

(a) $H(A+p, A+q) \leq |p-q|$.

(b) $H(A+p, B+p) = H(A, B)$.

(c) $|\text{mín } A - \text{mín } B| \leq H(A, B)$.

(d) $H(A - \text{mín } A, B - \text{mín } B) \leq 2H(A, B)$.

Demostración. Sean $A, B \in F_n(\mathbb{R})$. Para demostrar *(a)* tomemos $x \in A+p$. Por definición de $A+p$, existe $a \in A$ tal que $x = a+p$. Como $y = a+q \in A+q$ se tiene que

$$d(x, A+q) \leq |x-y| = |(a+p)-(a+q)| = |p-q|.$$

Como $x \in A+p$ fue arbitrario y $A+p$ es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{x \in A+p} d(x, A+q) \leq |p-q|.$$

De forma similar podemos probar que

$$\max_{y \in A+q} d(y, A+p) \leq |p-q|.$$

Así, por el Teorema 3.1.13, concluimos que

$$H(A+p, A+q) \leq |p-q|.$$

Para demostrar *(b)*. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + p$. Es inmediato ver que f es una isometría, luego por la Proposición 3.1.17 tenemos que su función inducida $\hat{f} : F_n(\mathbb{R}) \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ es una isometría. Finalmente notemos que para cada $A \in F_n(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(A) = \{f(a) : a \in A\} = \{a + p : a \in A\} = A + p.$$

Concluimos que para cada $A, B \in F_n(\mathbb{R})$

$$H(A+p, B+p) = H(A, B).$$

Para demostrar *(c)* llamemos $a_0 = \text{mín } A$ y $b_0 = \text{mín } B$. Notemos que si $a_0 = b_0$, entonces

$$|\,\text{mín}\, A - \text{mín}\, B| = |a_0 - b_0| = 0 \leq H(A, B).$$

Por otro lado si $a_0 \neq b_0$, podemos suponer sin perder generalidad que $a_0 < b_0$. Como $A, B \in 2^X$ y $a_0 \in A$ entonces (Lema 3.1.12) existe $b \in B$ tal que $|a_0 - b| \leq H(A, B)$.

Dado que $a_0 < b_0 \leq b$, se tiene que $0 < b_0 - a_0 \leq b - a_0$, además $|a_0 - b_0| = b_0 - a_0$ y $|a_0 - b| = b - a_0$. Por lo tanto podemos concluir que

$$|\,\text{mín}\, A - \text{mín}\, B| = |a_0 - b_0| \leq |a_0 - b| \leq H(A, B).$$

Finalmente para demostrar *(d)* notemos que $H(A - \text{mín}\, A, B - \text{mín}\, B)$, por desigualdad triangular es menor o igual a

$$H(A - \text{mín}\, A, A - \text{mín}\, B) + H(A - \text{mín}\, B, B - \text{mín}\, B)$$

Aplicando los incisos *(a)* y *(b)* tenemos que lo anterior es menor igual a

$$|\,(-\,\text{mín}\, A) - (-\,\text{mín}\, B)\,| + H(A, B) = |\,\text{mín}\, A - \text{mín}\, B| + H(A, B).$$

Así, aplicando el inciso *(c)* a esto último, tenemos que

$$H(A - \text{mín}\, A, B - \text{mín}\, B) \leq H(A, B) + H(A, B) = 2H(A, B).$$

■

Proposición 3.2.3. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$. Entonces para cualesquiera $A, B \in F_n(\mathbb{R})$, se tiene que $H(tA, tB) = tH(A, B)$.*

Demostración. Sean $A, B \in F_n(\mathbb{R})$. Si $t = 0$ es inmediata la igualdad pues $0A = \{0\} = 0B$. Por tanto supongamos que $t \neq 0$ y tomemos $x \in tA$. Entonces existe $a \in A$ tal que $x = ta$, como $A, B \in 2^X$ y $a \in A$ entonces, (Lema 3.1.12) existe $b \in B$ de tal forma que

$$|a - b| \leq H(A, B).$$

Consideremos $y = tb \in tB$ entonces

$$d(x, tB) \leq |x - y| = |ta - tb| = t|a - b| \leq tH(A, B).$$

Dado que $x \in tA$ fue arbitrario y tA es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{x \in tA} d(x, tB) \leq tH(A, B).$$

De forma similar podemos demostrar que

$$\max_{y \in tB} d(y, tA) \leq tH(A, B).$$

Así por el Teorema 3.1.13 podemos concluir que

$$H(tA, tB) \leq tH(A, B). \tag{3.2.1}$$

Finalmente como $A = \frac{1}{t}(tA)$ y $B = \frac{1}{t}(tB)$ por la desigualdad (3.2.1) tenemos que

$$H(A, B) = H\left(\frac{1}{t}(tA), \frac{1}{t}(tB)\right) \leq \frac{1}{t} H(tA, tB).$$

Por tanto

$$tH(A, B) \leq H(tA, tB). \tag{3.2.2}$$

Así por (3.2.1) y (3.2.2) podemos concluir que

$$H(tA, tB) = tH(A, B).$$

■

Definición 3.2.4. Sea $n \geq 2$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si $[a, b]$ denota el intervalo cerrado con extremos en a y b, definimos

$$F_n^*([a, b]) = \{A \in F_n([a, b]) : a, b \in A\}.$$

Dado que $F_n^*([a,b])$ es un subconjunto de $F_n([a,b])$, podemos equiparlo con la métrica de Hausdorff, y obtener las siguientes dos propiedades para $F_n^*(I)$.

Proposición 3.2.5. *Para cualesquiera $A, B \in F_n^*(I)$ y cualesquiera $s, t \geq 0$ se tiene que*

(a) $|t-s| \leq H(sA, tB)$.

(b) $H(sA, tA) \leq |s-t|$.

Demostración. Sean $A, B \in F_n^*(I)$ y $s, t \geq 0$. Para demostrar *(a)* supongamos sin perder generalidad que $s \geq t$. Por Teorema 3.1.13 sabemos que

$$H(sA, tB) = \max\left\{\max_{z \in sA} d(z, tB), \max_{w \in tB} d(w, sA)\right\}.$$

En primer lugar probaremos que $s - t = d(s, tB)$, para ello, notemos que $t \in tB$ (pues $B \in F_n^*(I)$), por lo que $d(s, tB) \leq |t-s| = s-t$. Por otro lado, dado $w \in tB$ ($w = tb$ para algún $b \in B$), si fuera el caso que $|s - tb| < s - t$, tendríamos que $-(s-t) < s - tb < s - t$, por tanto $t < tb$. Además, como $b \in B \in F_n^*(I)$, se sigue que $t < tb \leq t$, lo cual, es imposible. Por tanto $|s - tb| < s - t$ es imposible, por lo que $s - t \leq |s - tb| = |s - w|$. Como $w \in tB$ fue arbitrario, podemos concluir que $s - t \leq d(s, tB)$ y por tanto $s - t = d(s, tB)$.

Finalmente, como $s \in sA$ (pues $A \in F_n^*(I)$), podemos concluir que

$$|t-s| = s-t = d(s, tB) \leq \max_{z \in sA} d(z, tB) \leq H(sA, tB).$$

Para probar *(b)* sean $A \in F_n^*(I)$ y $x \in sA$. Dado que $x \in sA$ tenemos que $x = sa$ para algún $a \in A$. Consideramos $y = ta \in tA$, entonces

$$d(x, tA) \leq |x-y| = |sa - ta| = |a(s-t)| = |a|\,|s-t| \leq |s-t|.$$

Esta última desigualdad se debe a que $a \in A \in F_n^*(I)$. Como $x \in sA$ fue arbitrario y sA es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{x \in sA} d(x, tA) \leq |s-t|.$$

De forma similar podemos demostrar que

$$\max_{y \in tA} d\,(y, sA) \leq |s - t|\,.$$

Así, por el Teorema 3.1.13, concluimos que

$$H\,(sA, tA) \leq |s - t|.$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Encajando a $F_n(\mathbb{R})$

Teniendo listos casi todos los ingredientes, iniciaremos con uno de los objetivos de esta tesis: encontrar un espacio euclidiano donde $F_n(\mathbb{R})$ pueda ser encajado de forma bi-Lipschitz. Para ello, dado un espacio métrico X, introduciremos dos últimos conceptos: el *cono* sobre X, denotado por $Cono(X)$ y el *cono geométrico* sobre X, denotado por $Cono_G(X)$. Los resultados principales de este capítulo son:

1. $F_n(\mathbb{R})$ es lipeomorfo a $\mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I))$.

2. $F_n(\mathbb{R})$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$ donde $m = 2\lfloor (e-1)\, n! \rfloor$.

3. $F_n(\mathbb{R}^m)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^k$ donde

$$k = 2(n+1)^{m-1} \lfloor (e-1)\, n! \rfloor.$$

4.1. Conos de un espacio métrico

Definición 4.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos en $X \times [0, \infty)$ la relación $\sim$ de la siguiente manera:

$$(x,t) \sim (y,s) \quad \text{si y sólo si} \quad t = 0 = s \quad \text{o} \quad (x,t) = (y,s).$$

No es muy difícil ver que la relación antes definida es una relación de equivalencia, con ello podemos considerar sus clases de equivalencias y construir el siguiente conjunto:

Definición 4.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. El **cono** sobre X es el conjunto

$$Cono(X) = (X \times [0, \infty)) \diagup \sim = \{[(x, t)] : (x, t) \in X \times [0, \infty)\}.$$

Si (X, d) es un espacio métrico con $diám(X) \leq 2$, entonces podemos definir una métrica en $Cono(X)$, la cual viene dada por

$$d_C([(x, t)], [(y, s)]) = |t - s| + \text{mín}\{t, s\} d(x, y).$$

Si X es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces la estructura del espacio euclidiano, nos da otra construcción del cono, como lo muestra la siguiente definición:

Definición 4.1.3. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y $e_{n+1} = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Para cada $x \in X$ con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definimos $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$. Entonces, el **cono geométrico** sobre X, es el conjunto

$$Cono_G(X) = \{t\overline{x} + (1 - t) e_{n+1} : t \geq 0 \text{ y } x \in X\}.$$

Dado que $Cono_G(X)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, lo podemos equipar con la métrica heredada y tener la siguiente proposición:

Proposición 4.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico con $diám(X) \leq 2$. Si X admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, entonces, $Cono(X)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Por hipótesis existen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $L > 0$ tales que, para cualesquiera $x, y \in X$

$$\frac{1}{L} d(x, y) \leq ||f(x) - f(y)|| \leq Ld(x, y).$$

Dado que $f(X)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ (pues f es un encaje bi-Lipschitz), existe $M > 0$ tal que para cualquier $p \in f(X)$; $||p|| \leq M$. Como primer paso, definamos

$$g : Cono(X) \longrightarrow Cono_G(f(X))$$

dada por $g([(x, t)]) = t\overline{f(x)} + (1 - t) e_{n+1}$.

Sean $K = \text{máx}\{L, M, 1\}$ y $[(x, t)], [(y, s)] \in Cono(X)$.

Como $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar $f(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $f(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Demostraremos que

$$\frac{|t-s| + \min\{t,s\}\, d(x,y)}{\sqrt{2}\,(K^2+1)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |tx_i - sy_i|^2 + |t-s|^2} \tag{4.1.1}$$

y

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |tx_i - sy_i|^2 + |t-s|^2} \leq \sqrt{2}\left(K^2+1\right)\left(|t-s| + \min\{t,s\}\, d(x,y)\right). \tag{4.1.2}$$

En primer lugar, supongamos sin perder generalidad que $t \leq s$. Para la primera desigualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}
td(x,y) \leq tL||f(x) - f(y)|| &\leq K||tf(x) - tf(y)|| \\
&\leq K\left(||tf(x) - sf(y)|| + ||sf(y) - tf(y)||\right) \\
&= K\left(||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|\ ||f(y)||\right) \\
&\leq K\left(||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|M\right) \\
&\leq K\left(||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|K\right) \\
&= K||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|K^2 \\
&\leq (K^2+1)\,||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|K^2.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$|t-s| + td(x,y) \leq \left(K^2+1\right)\left(||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left(|t-s| + td(x,y)\right)^2 &\leq \left(K^2+1\right)^2\left(||tf(x) - sf(y)|| + |t-s|\right)^2 \\
&\leq 2\left(K^2+1\right)^2\left(||tf(x) - sf(y)||^2 + |t-s|^2\right).
\end{aligned}$$

Lo cual, es equivalente a decir que

$$\begin{aligned} \frac{|t-s| + \text{mín}\{t,s\}\, d(x,y)}{\sqrt{2}\,(K^2+1)} &\leq \sqrt{||tf(x) - sf(y)||^2 + |t-s|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |tx_i - sy_i|^2 + |t-s|^2}. \end{aligned}$$

Para demostrar la desigualdad (4.1.2), notemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} |t-s| &\leq t||f(x) - f(y)|| + |t-s| \\ &\leq tLd(x,y) + |t-s| \\ &\leq (K+1)(td(x,y) + |t-s|) \\ &\leq (K^2+1)(td(x,y) + |t-s|). \end{aligned}$$

De aquí que

$$|t-s|^2 \leq \left(K^2+1\right)^2 (td(x,y) + |t-s|)^2.$$

Además

$$\begin{aligned} ||tf(x) - sf(y)|| &\leq ||tf(x) - tf(y)|| + ||tf(y) - sf(y)|| \\ &\leq t||f(x) - f(y)|| + |t-s|M \\ &\leq tLd(x,y) + K|t-s| \\ &\leq K(td(x,y) + |t-s|) \\ &\leq (K^2+1)(td(x,y) + |t-s|). \end{aligned}$$

Así,

$$||tf(x) - sf(y)||^2 \leq \left(K^2+1\right)^2 (td(x,y) + |t-s|)^2.$$

Se sigue que

$$||tf(x) - sf(y)||^2 + |t-s|^2 \leq 2\left(K^2+1\right)^2 (td(x,y) + |t-s|)^2.$$

Por tanto

$$\sqrt{||tf(x) - sf(y)||^2 + |t-s|^2} \leq \sqrt{2}\left(K^2+1\right)(td(x,y) + |t-s|).$$

Es decir

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|tx_i - sy_i|^2 + |t-s|^2} \leq \sqrt{2}\left(K^2+1\right)\left(|t-s| + \text{mín}\left\{t,s\right\} d\left(x,y\right)\right).$$

Por (4.1.1) y (4.1.2), podemos concluir que g es un encaje bi-Lipschitz, como requeríamos.

Finalmente, dado que $Cono_G\left(f\left(X\right)\right) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (pues $f\left(X\right) \subseteq \mathbb{R}^n$), podemos considerar $i : Cono_G\left(f\left(X\right)\right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la función inclusión. Por tanto, basta considerar $h : Cono\left(X\right) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $h = i \circ g$, la cual claramente es un encaje bi-Lipschitz. ■

Proposición 4.1.5. *Sea $n \geq 2$. Entonces $F_n\left(\mathbb{R}\right) \overset{lip}{\approx} \mathbb{R} \times Cono\left(F_n^*\left(I\right)\right)$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $Z = \left\{B \in F_n\left(\mathbb{R}\right) : \text{mín } B = 0\right\}$. Definimos $f : F_n\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{R} \times Z$ dada por $f\left(A\right) = \left(\text{mín } A, A - \text{mín } A\right)$. Veamos que f está bien definida, para ello sea $A \in F_n\left(\mathbb{R}\right)$. Sabemos que A puede ser escrito de la forma $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$, con $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ por tanto $a_1 = \text{mín } A$, entonces

$$A - \text{mín } A = \left\{0 = a_1 - a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1\right\}.$$

Como $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, entonces $0 = a_1 - a_1 \leq a_2 - a_1 \leq \ldots \leq a_n - a_1$ por tanto podemos concluir que $\text{mín}\left(A - \text{mín } A\right) = 0$. Así para cada $A \in F_n\left(\mathbb{R}\right)$, se tiene que $A - \text{mín}\, A \in Z$, lo cual implica que f está bien definida.

Como siguiente paso demostraremos que f es $\sqrt{5}$-Lipschitz, para ellos sean $A, B \in F_n\left(\mathbb{R}\right)$. Por el Teorema 3.2.2 tenemos que

- $|\text{mín } A - \text{mín } B| \leq H\left(A,B\right)$
- $H\left(A - \text{mín } A, B - \text{mín } B\right) \leq 2H\left(A,B\right)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\left(d\left(f\left(A\right), f\left(B\right)\right)\right)^2 &= \left(d\left(\left(\text{mín } A, A - \text{mín } A\right), \left(\text{mín } B, B - \text{mín } B\right)\right)\right)^2 \\
&= |\text{mín } A - \text{mín } B|^2 + \left(H\left(A - \text{mín } A, B - \text{mín } B\right)\right)^2 \\
&\leq \left(H\left(A,B\right)\right)^2 + 4\left(H\left(A,B\right)\right)^2 \\
&= 5\left(H\left(A,B\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Se sigue inmediatamente que $d(f(A), f(B)) \leq \sqrt{5}H(A,B)$.

Ahora veremos que f es biyectiva. Consideramos $g : \mathbb{R} \times Z \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ dada por $g(b,B) = B + b$.

Es inmediato que g está bien definida, pues si $(b,B) \in \mathbb{R} \times Z$, se tiene que $B \in Z \subseteq F_n(\mathbb{R})$. Por tanto como $b \in \mathbb{R}$, concluimos que $B + b \in F_n(\mathbb{R})$. Por otro lado, notemos que g cumple las siguientes propiedades:

- $g \circ f = id_{F_n(\mathbb{R})}$.

  Pues dado $A \in F_n(\mathbb{R})$, se tiene que $(g \circ f)(A) = g((\text{mín } A, A - \text{mín } A)) = (A - \text{mín } A) + \text{mín } A = A$.

- $f \circ g = id_{\mathbb{R}\times Z}$.

  Sea $(b,B) \in \mathbb{R} \times Z$, entonces $(f \circ g)((b,B)) = f(B+b)$. Además

  $f(B+b) = (\text{mín}(B+b), (B+b) - \text{mín}(B+b))$, finalmente dado que $B \in Z$, es fácil ver que $\text{mín}(B+b) = b$, por lo que $f(B+b) = (b,B)$.

Por tanto, podemos concluir que f es biyectiva con inversa g. Finalmente, probemos que g es $\sqrt{2}$-Lipschitz, para ellos tomamos $(a,A), (b,B) \in \mathbb{R} \times Z$. Por la desigualdad triangular y el Teorema 3.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} H(A+a, B+b) &\leq H(A+a, A+b) + H(A+b, B+b) \\ &\leq |a-b| + H(A,B). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (H(A+a, B+b))^2 &\leq (|a-b| + H(A,B))^2 \\ &\leq 2\left(|a-b|^2 + (H(A,B))^2\right). \end{aligned}$$

Así,

$$H(A+a, B+b) \leq \sqrt{2}\sqrt{|a-b|^2 + (H(A,B))^2}.$$

Es decir,

$$H(g(a,A), g(b,B)) \leq \sqrt{2}\, d((a,A),(b,B)).$$

Dado que f es $\sqrt{5}$-Lipschitz, biyectiva y su inversa es $\sqrt{2}$-Lipschitz (y por tanto $\sqrt{5}$-Lipchitz), podemos concluir gracias a la Proposición 2.3.6 que, f es un lipeomorfismo.

Como segundo paso, mostraremos que Z es lipeomorfo a $Cono\,(F_n^*\,(I))$. Para ello consideramos $h : Cono\,(F_n^*\,(I)) \longrightarrow Z$ dada por $h\,([(A,t)]) = tA$. Primero probaremos que h es suprayectiva, para ello tomemos $B \in Z$.

- Caso 1. $B = \{0\}$

  Consideremos $A = \{0,1\} \in F_n^*\,(I)$. Entonces $[(A,0)] \in Cono\,(F_n^*\,(I))$ y por tanto
  $$h\,([(A,0)]) = 0A = \{0\} = B.$$

- Caso 2. $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ con $b_n > 0$.

  Consideramos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde $a_k = \dfrac{b_k}{b_n}$ para cada $1 \leq k \leq n$. Es fácil ver que $A \in F_n^*\,(I)$ (por construcción), por tanto si tomamos $[(A,b_n)]$, es inmediato que $h\,([(A,b_n)]) = B$

De los casos 1 y 2 podemos concluir que h es suprayectiva. Para demostrar que h es un encaje bi-Lipschitz tomemos $[(A,t)]\,,[(B,s)] \in Cono\,(F_n^*\,(I))$ y notemos que

- $(\text{mín}\,\{t,s\})\,H\,(A,B) \leq tH\,(A,B)$ (pues $\text{mín}\,\{t,s\} \leq t$).
- $tH\,(A,B) = H\,(tA,tB)$ (Proposición 3.2.3).
- $H\,(tA,tB) \leq H\,(tA,sB) + H\,(sB,tB)$ (desigualdad triangular).
- $H\,(sB,tB) \leq |t-s|$ (Proposición 3.2.5).
- $2\,|t-s| \leq 2H\,(tA,sB)$ (Proposición 3.2.5).

Se sigue inmediatamente que
$$|t-s| + (\text{mín}\,\{t,s\})\,H\,(A,B) \leq 3H\,(tA,sB)\,.$$

Por tanto,
$$\frac{1}{3}d_C\,([(A,t)]\,,[(B,s)]) \leq H\,(tA,sB) = H\,(h\,([(A,t)])\,,h\,([(B,s)]))\,. \quad (4.1.3)$$

Por otro lado, dado que $t,s \in [0,\infty)$, podemos suponer sin perder generalidad que $0 \leq s \leq t$. Entonces

- $H\,(tA,sB) \leq H\,(tA,sA) + H\,(sA,sB)$ (desigualdad triangular).

- $H(tA, sA) \leq |t-s|$ (Proposición 3.2.5).
- $H(sA, sB) = sH(A, B)$ (Proposición 3.2.3).
- $sH(A, B) = (\text{mín}\{t, s\}) H(A, B)$ (pues $s \leq t$).

De aquí obtenemos que

$$H(tA, sB) \leq |t-s| + (\text{mín}\{t, s\}) H(A, B) \leq 3(|t-s| + \text{mín}\{t, s\} H(A, B)).$$

Por tanto

$$H(h([(A, t)]), h([(B, s)])) \leq 3d_C([(A, t)], [(B, s)]). \tag{4.1.4}$$

Así, como h es suprayectiva, por (4.1.3) y (4.1.4), podemos concluir que h es un lipeomorfismo.

Finalmente, como $Cono(F_n^*(I)) \overset{lip}{\approx} Z$, por la Proposición 2.3.7 tenemos que $\mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I)) \overset{lip}{\approx} \mathbb{R} \times Z$, además como $F_n(\mathbb{R}) \overset{lip}{\approx} \mathbb{R} \times Z$, por las observaciones 2.3.3 y 2.3.4, podemos concluir que $F_n(\mathbb{R}) \overset{lip}{\approx} \mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I))$, como requeríamos. ■

Corolario 4.1.6. *Si $F_n^*(I)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$, entonces $F_n(\mathbb{R})$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^{m+2}$.*

Demostración. Por hipótesis $F_n^*(I)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$. Entonces $Cono(F_n^*(I))$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^{m+1}$ (Proposición 4.1.4). Además, por la Observación 2.3.8 tenemos que $\mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I))$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1}$, el cual es fácil ver que es lipeomorfo a $\mathbb{R}^{m+2}$. Por tanto, concluimos que existe un encaje bi-Lipschitz

$$g_1 : \mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I)) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}.$$

Por otro lado, por la proposición 4.1.5 sabemos que existe un lipeomorfismo (y por tanto un encaje bi-Lipschitz)

$$g_2 : F_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \times Cono(F_n^*(I)).$$

Por tanto, $h : F_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ dada por $h = g_1 \circ g_2$, es un encaje bi-Lipschitz (Proposición 2.2.3). ■

Estamos apunto de construir nuestro encaje bi-Lipschitz de $F_n(\mathbb{R})$ en algún espacio euclidiano, para ello el siguiente paso que daremos es definir un encaje bi-Lipschitz de $F_n^*(I)$ a $F_{n-1}(\mathbb{C})$, para este resultado nos apoyaremos siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en [3, Teorema 3.1, pág. 61].

Lema 4.1.7. *[3, Teorema 3.1, pág 61] Sea $n \geq 2$. Entonces $F_n^*([-1,1])$ admite un encaje bi-Lipschitz en $F_{n-1}(\mathbb{S})$.*

Corolario 4.1.8. *Sea $n \geq 2$. Entonces $F_n^*([-1,1])$ admite un encaje bi-Lipschitz en $F_{n-1}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Por el lema 4.1.7 existe $h : F_n^*([-1,1]) \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{S})$ encaje bi-Lipschitz, además como $F_{n-1}(\mathbb{S}) \subseteq F_{n-1}(\mathbb{C})$, podemos considerar la función inclusión $i : F_{n-1}(\mathbb{S}) \hookrightarrow F_{n-1}(\mathbb{C})$. Por tanto, es inmediato que la función

$$f : F_n^*([-1,1]) \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{C})$$

dada por $f = i \circ h$, es un encaje bi-Lipschitz. ■

Corolario 4.1.9. *Sea $n \geq 2$. Entonces $F_n^*(I)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $F_{n-1}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $h : I \longrightarrow [-1,1]$ dada por $h(t) = -1 + 2t$. Es fácil ver que, su función inducida $\hat{h} : F_n^*(I) \longrightarrow F_n^*([-1,1])$ es un encaje bi-Lipschitz. Por tanto, por el Corolario 4.1.8 y la Proposición 2.2.3, tenemos que $F_n^*(I)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $F_{n-1}(\mathbb{C})$. ■

A continuación, los siguientes dos lemas son simplemente herramientas técnicas que emplearemos para una parte de la demostración del Lema 4.1.12. Estos nos dicen que para cualesquiera dos rectas distintas en $\mathbb{R}^m$ que pasen por el origen, la intersección de sus nubes es un conjunto acotado.

Lema 4.1.10. *Sean ℓ_1, ℓ_2 dos rectas distintas en $\mathbb{R}^m$ que pasen por el origen. Entonces, existe $M > 0$ tal que $N(1,\ell_1) \cap N(1,\ell_2) \subseteq B_M(0)$.*

Demostración. Dado que ℓ_1, ℓ_2 son dos rectas distintas en $\mathbb{R}^m$ que pasan por el origen, sabemos que existen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ tales que

- $||v_1|| = 1 = ||v_2||$,

- v_1, v_2 son linealmente independientes,
- $\ell_1 = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $\ell_2 = \{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Consideramos $M = 1 + \dfrac{2}{\alpha}$, donde $\alpha = ||v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_1||$. Como v_1, v_2 son linealmente independientes tenemos que $v_2 \neq \langle v_1, v_2\rangle v_1$ por lo que $\alpha \neq 0$, es decir M está bien definida.

Probaremos que para esta $M > 0$, $N(1, \ell_1) \cap N(1, \ell_2) \subseteq B_M(0)$. Sea pues $x \in N(1, \ell_1) \cap N(1, \ell_2)$, entonces existen $w_1 \in \ell_1$ y $w_2 \in \ell_2$ tales que

$$||x - w_1|| < 1 \;\text{ y }\; ||x - w_2|| < 1. \tag{4.1.5}$$

Como $w_1 \in \ell_1$ y $w_2 \in \ell_2$ se tiene que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $w_1 = \lambda_1 v_1$ y $w_2 = \lambda_2 v_2$, por tanto

$$||x - \lambda_1 v_1|| < 1 \;\text{ y }\; ||x - \lambda_2 w_2|| < 1. \tag{4.1.6}$$

De (4.1.6) tenemos que si $\lambda_1 = 0$, entonces

$$||x|| = ||x - \lambda_1 v_1|| < 1 < 1 + \frac{2}{\alpha} = M,$$

es decir $x \in B_M(0)$. Por tanto supongamos que $\lambda_1 \neq 0$ y notemos que

$$||x|| = ||x + (\lambda_2 v_2 - \lambda_2 v_2)\,|| \leq ||x - \lambda_2 v_2|| + ||\lambda_2 v_2|| < 1 + |\lambda_2|.$$

Donde la última desigualdad se debe a (4.1.6) y que $||v_2|| = 1$. El siguiente paso es probar que $|\lambda_2| < \dfrac{2}{\alpha}$, para ello notemos que

$$|\lambda_2|\alpha = |\lambda_2|\;||v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_1|| = ||\lambda_2 v_2 - \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle v_1||.$$

Como $\lambda_1 \neq 0$ tenemos que

$$||\lambda_2 v_2 - \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle v_1|| = ||\lambda_2 v_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle v_1, v_2\rangle \lambda_1 v_1|| = ||w_2 - \beta w_1||,$$

donde $\beta = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle v_1, v_2\rangle$.

Así

$$|\lambda_2|\alpha \leq ||w_2 - \beta w_1||. \tag{4.1.7}$$

No es muy difícil observar que $w_2 - \beta w_1$ es ortogonal a $\beta w_1 - w_1$, por tanto

$$(||w_2 - \beta w_1||)^2 + (||\beta w_1 - w_1||)^2 = (||w_2 - w_1||)^2,$$

de donde, ocupando la desigualdad triangular y (4.1.5) obtenemos que

$$||w_2 - \beta w_1|| \leq ||w_2 - w_1|| \leq ||w_2 - x|| + ||x + w_1|| < 2. \tag{4.1.8}$$

Finalmente juntando las desigualdades (4.1.7) y (4.1.8) obtenemos que

$$|\lambda_2|\alpha \leq ||w_2 - \beta w_1|| < 2.$$

Por tanto $|\lambda_2| < \frac{2}{\alpha}$ y así

$$||x|| < 1 + |\lambda_2| < 1 + \frac{2}{\alpha} = M.$$

Así sea cualquiera de los dos casos ($\lambda_1 = 0 \quad \text{o} \quad \lambda_1 \neq 0$) obtenemos que $||x|| < M$ es decir $x \in B_M(0)$. ■

Lema 4.1.11. *Sean ℓ_1, ℓ_2 dos rectas distintas en $\mathbb{R}^m$ que pasen por el origen y $M > 0$. Si, $N(1, \ell_1) \cap N(1, \ell_2) \subseteq B_M(0)$, entonces para toda $r > 0$ se tiene que*

$$N(r, \ell_1) \cap N(r, \ell_2) \subseteq B_{Mr}(0).$$

Demostración. Sea $r > 0$. En primer lugar dado que ℓ_1, ℓ_2 son dos rectas en $\mathbb{R}^m$ que pasan por el origen, sabemos que existen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ tales que

- $\ell_1 = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $\ell_2 = \{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Sea $x \in N(r, \ell_1) \cap N(r, \ell_2)$. Entonces, existen $w_1 \in \ell_1$ y $w_2 \in \ell_2$ tales que $||x - w_1|| < r$ y $||x - w_2|| < r$. Por otro lado, como $w_1 \in \ell_1$ y $w_2 \in \ell_2$, sabemos que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $w_1 = \lambda_1 v_1$ y $w_2 = \lambda_2 v_2$.

Por tanto tenemos que

$$||x - \lambda_1 v_1|| < r \quad \text{y} \quad ||x - \lambda_2 v_2|| < r.$$

Como $r > 0$ se sigue que

$$\frac{1}{r}||x - \lambda_1 v_1|| < 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}||x - \lambda_2 v_2|| < 1,$$

lo cual es equivalente a

$$\left|\left|\frac{1}{r}x - \beta_1 v_1\right|\right| < 1 \quad \text{y} \quad \left|\left|\frac{1}{r}x - \beta_2 v_2\right|\right| < 1 \tag{4.1.9}$$

donde $\beta_1 = \dfrac{\lambda_1}{r}$ y $\beta_2 = \dfrac{\lambda_2}{r}$.

Como $\beta_1 v_1 \in \ell_1$ y $\beta_2 = v_2 \in \ell_2$, por (4.1.9) se sigue que

$$\frac{1}{r}x \in N(1, \ell_1) \cap N(1, \ell_2) \subseteq B_M(0).$$

Por tanto $\left|\left|\dfrac{1}{r}x\right|\right| < M$, concluyendo así que $||x|| < Mr$, es decir $x \in B_{Mr}(0)$.

■

Lema 4.1.12. *Sean $n, m \geq 2$. Entonces $F_{n-1}(\mathbb{R}^m)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\underbrace{F_{n-1}\left(\mathbb{R}^{m-1}\right) \times \cdots \times F_{n-1}\left(\mathbb{R}^{m-1}\right)}_{n-veces}$.*

Demostración. Consideramos n rectas distintas $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ en $\mathbb{R}^m$ que pasen por el origen. Es claro que, para cada $1 \leq k \leq n$, ℓ_k es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ y $dim(\ell_k) = 1$. Entonces por [5, Teorema 6.6, pág. 350] tenemos que $\mathbb{R}^m = \ell_k \oplus \ell_k^{\perp}$. Además, dado que $dim(\mathbb{R}^m) = m$ y $dim(\ell_k) = 1$ se tiene que $dim\left(\ell_k^{\perp}\right) = m - 1$ (para este hecho el lector puede consultar [5, Teorema 6.7, pág. 352]).

Dado que $dim\left(\ell_k^{\perp}\right) = m - 1$, sabemos que existe $\varphi_k : \ell_k^{\perp} \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$, la cual, es lineal e isometría. Por otro lado, como $\ell_k^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$, podemos considerar $\mathrm{P}_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \ell_k^{\perp}$ la proyección ortogonal sobre $\ell_k^{\perp}$ a lo largo de ℓ_k, la cual es fácil ver que es lineal y 1-Lipschitz.

Por tanto, para cada $1 \leq k \leq n$ consideremos $g_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ dada por $g_k = \varphi_k \circ \mathrm{P}_k$, la cual por la Proposición 2.1.3 es 1-Lipschitz, además es fácil ver que es lineal (por ser composición de funciones lineales).

Finalmente, consideremos $\hat{g}_k : F_{n-1}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{R}^{m-1})$ la función inducida de g_k, que, por la Observación 3.1.15 es 1-Lipschitz. Dado que tenemos n funciones 1-Lipschitz, (pues tenemos n rectas que pasan por el origen), podemos considerar

$$g : F_{n-1}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \underbrace{F_{n-1}\left(\mathbb{R}^{m-1}\right) \times \cdots \times F_{n-1}\left(\mathbb{R}^{m-1}\right)}_{n-\text{veces}}.$$

Donde g está dada por $g = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_n)$. Probaremos g es un encaje bi-Lipschitz.

Gracias a la Proposición 2.1.4 sabemos que g es $\sqrt{n}$-Lipschitz. Por tanto, basta demostrar que para cada $A, B \in F_{n-1}(\mathbb{R}^m)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} H(A,B) \leq d(g(A), g(B)) \tag{4.1.10}$$

Aplicando los lemas 4.1.10 y 4.1.11 sucesivamente a cada par de rectas podemos encontrar una $M > 0$ (basta escoger la M máxima que nos brindan estos lemas) talque para toda $r > 0$

$$N(r, \ell_j) \cap N(r, \ell_k) \subseteq B_{Mr}\left(\overline{0}\right). \tag{4.1.11}$$

Procedamos a demostrar (4.1.10). Sean $A, B \in F_{n-1}(\mathbb{R}^m)$. Si $A = B$, por la definición de g y la métrica producto, obtenemos la igualdad a cero en (4.1.10). Por tanto, supongamos $A \neq B$ y llamemos $\rho = H(A,B)$.

Demostraremos que existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que

$$\frac{\rho}{M} \leq H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)).$$

Para ello supongamos que para cada $1 \leq k \leq n$, $H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)) < \dfrac{\rho}{M}$, para llegar así a una contradicción. Por el Teorema 3.1.13, tenemos que

$$H(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

y

$$H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)) = \max\left\{\max_{z\in\hat{g}_k(A)} d(z, \hat{g}_k(B)), \max_{w\in\hat{g}_k(B)} d(w, \hat{g}_k(A))\right\}.$$

Supongamos sin perder generalidad que $H(A,B) = \max\limits_{a\in A} d(a,B)$. Dado que A es un conjunto finito, podemos tomar $a_0 \in A$ de tal forma que

$$H(A,B) = \max_{a\in A} d(a,B) = d(a_0, B).$$

Por tanto, para cada $b \in B$, tenemos que $\rho \leq ||a_0 - b||$. Por otro lado, como $g_k(a_0) \in \hat{g}_k(A)$, se sigue que, para cada $1 \leq k \leq n$

$$d(g_k(a_0), \hat{g}_k(B)) \leq H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)) < \frac{\rho}{M}.$$

Dado que $\hat{g}_k(B)$ es un conjunto finito, podemos tomar $w_k \in \hat{g}_k(B)$ ($w_k = g_k(b_k)$ para algún $b_k \in B$) de tal forma que

$$d(g_k(a_0), \hat{g}_k(B)) = ||g_k(a_0) - g_k(b_k)||.$$

Veamos que $a_0 - b_k \in N\left(\frac{\rho}{M}, \ell_k\right)$. Dado que $a_0 - b_k \in \mathbb{R}^m = \ell_k \oplus \ell_k^{\perp}$ sabemos que existen únicos $c_k \in \ell_k$ y $d_k \in \ell_k^{\perp}$ tales que $a_0 - b_k = c_k + d_k$. Además, como

$$g_k(a_0 - b_k) = \varphi_k(\mathrm{P}_k(c_k + d_k)) = \varphi_k(d_k).$$

Se sigue que

$$||(a_0 - b_k) - c_k|| = ||d_k|| = ||\varphi_k(d_k)|| = ||g_k(a_0 - b_k)||$$

Pero g_k es lineal, por lo que

$$||(a_0 - b_k) - c_k|| = ||g_k(a_0 - b_k)|| = ||g_k(a_0) - g_k(b_k)|| < \frac{\rho}{M}.$$

Notemos que tenemos una sucesión de n términos, a saber

$$a_0 - b_1, a_0 - b_2, \ldots, a_0 - b_n.$$

Como B tiene a lo más $n-1$ elementos, dos términos de esta sucesión deben de ser iguales y ese elemento en común, (al que podemos llamar $a_0 - b$) está es dos nubes de radio $\frac{\rho}{M}$, por tanto

$$||a_0 - b|| < M\left(\frac{\rho}{M}\right) = \rho.$$

Pero esto es imposible, pues $\rho \leq ||a_0 - b||$ para cada $b \in B$. Por tanto, existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de tal forma que

$$\frac{\rho}{M} \leq H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)).$$

Por tanto, tenemos que

$$\left(\frac{\rho}{M}\right)^2 \leq (H(\hat{g}_k(A), \hat{g}_k(B)))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (H(\hat{g}_i(A), \hat{g}_i(B)))^2.$$

Lo cual, es equivalente a decir que

$$\frac{\rho}{M} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(H\left(\hat{g}_i\left(A\right), \hat{g}_i\left(B\right)\right)\right)^2} = d\left(g\left(A\right), g\left(B\right)\right).$$

Por tanto, considerando $L = \max\left\{\sqrt{n}, M\right\}$, concluimos que

$$\frac{1}{L} H\left(A, B\right) \leq d\left(g\left(A\right), g\left(B\right)\right) \leq L H\left(A, B\right)$$

■

Corolario 4.1.13. *Sean $n \geq 1$ y $m \geq 2$. Entonces $F_n\left(\mathbb{R}^m\right)$ admite un encaje bi-Lipschitz en* $\underbrace{F_n\left(\mathbb{R}^{m-1}\right) \times \cdots \times F_n\left(\mathbb{R}^{m-1}\right)}_{(n+1)-veces}$

4.2. Cumpliendo promesas: los encajes

Teniendo todos los ingredientes necesarios, daremos la demostración de dos de los tres resultados principales de este escrito.

Teorema 4.2.1. *Para toda $n \geq 1$, $F_n\left(\mathbb{R}\right)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$, donde $m = 2\lfloor (e-1)\, n! \rfloor$.*

Demostración. La demostración la realizaremos por inducción sobre n.

- Base ($n = 1$).

  Gracias a la Proposición 3.1.11 sabemos que $\mathbb{R}$ es isométrico a $F_1\left(\mathbb{R}\right)$. Sea $f : F_1\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ dicha isometría. Por otro lado, consideremos $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f\left(x\right) = \left(x, 0\right)$. Es inmediato que la función $h : F_1\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h = i \circ f$, es una isometría (y en particular un encaje bi-Lipschitz)

  Finalmente, como $2 = 2\lfloor e - 1 \rfloor = 2\lfloor (e-1)\, 1! \rfloor = m$, concluimos que la afirmación es válida para $n = 1$.

- Paso inductivo. Supongamos que $F_{n-1}\left(\mathbb{R}\right)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$, donde $m = 2\lfloor (e-1)\,(n-1)! \rfloor$.

Consideremos los siguientes encajes bi-Lipschitz:

$$\begin{array}{llcll}
g_1: & F_{n-1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \text{Paso inductivo} \\
g_2: & F_n^*(I) & \longrightarrow & F_{n-1}(\mathbb{C}) & \text{Corolario 4.1.9} \\
g_3: & F_{n-1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & F_{n-1}(\mathbb{R}^2) & \mathbb{C} \overset{lip}{\approx} \mathbb{R}^2 \\
g_4: & F_{n-1}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \underbrace{F_{n-1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times F_{n-1}(\mathbb{R})}_{n-\text{veces}} & \text{Lema 4.1.12}
\end{array}$$

Además, por la Proposición 2.2.4 (ocupando n-veces el encaje bi-Lipschitz g_1), tenemos que existe un encaje bi-Lipschitz

$$g_5: \underbrace{F_{n-1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times F_{n-1}(\mathbb{R})}_{n-\text{veces}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n-\text{veces}} = \mathbb{R}^{nm}.$$

Sea $g: F_n^*(I) \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$ dado por $g = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2$, el cual, gracias a la Proposición 2.2.3 sabemos que es un encaje bi-Lipschitz.

Por tanto, por el Corolario 4.1.6 tenemos que $F_n(\mathbb{R})$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^{nm+2}$.

Por último, demostraremos que $nm + 2 = \lfloor (e-1)\, n! \rfloor$. Por hipótesis inductiva y la Proposición 1.2.3 sabemos que

$$m = 2\lfloor (e-1)(n-1)! \rfloor = 2(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}.$$

Por tanto

$$nm + 2 = \left(2n(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) + 2 = \left(2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) + 2.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\left(2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) + 2 = 2n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Así

$$nm+2=\left(2n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)+2=2n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=2\lfloor(e-1)\,n!\rfloor.$$

Por tanto, podemos concluir que para toda $n\geq 1$, $F_n(\mathbb{R})$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^m$, donde $m=2\lfloor(e-1)\,n!\rfloor$. ■

Teorema 4.2.2. *$F_n(\mathbb{R}^m)$ admite un encaje bi-Lipschitz en $\mathbb{R}^k$, donde $k=2\,(n+1)^{m-1}\lfloor(e-1)\,n!\rfloor$.*

Demostración. Supongamos que $n\geq 1$ y $m\geq 2$ (el caso $n\geq 1$ y $m=1$ está cubierto en el teorema anterior). Aplicando repetidamente el Corolario 4.1.13, veremos que existe un encaje bi-Lipschitz

$$g:F_n(\mathbb{R}^m)\longrightarrow\underbrace{F_n(\mathbb{R})\times\cdots\times F_n(\mathbb{R})}_{(n+1)^{m-1}-\text{veces}}$$

El siguiente diagrama nos da una idea de por qué pasa esto:

$$\begin{array}{cccccl}
F_n(\mathbb{R}^m)\longrightarrow & F_n(\mathbb{R}^{m-1}) & \times\cdots\times & F_n(\mathbb{R}^{m-1}) & & (n+1)-\text{factores}\\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
& F_n(\mathbb{R}^{m-2}) & \times\cdots\times & F_n(\mathbb{R}^{m-2}) & & (n+1)^2-\text{factores}\\
& \vdots & \vdots & \vdots & & \\
& F_n(\mathbb{R}^{2}) & \times\cdots\times & F_n(\mathbb{R}^{2}) & & (n+1)^{m-2}-\text{factores}\\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
& F_n(\mathbb{R}) & \times\cdots\times & F_n(\mathbb{R}) & & (n+1)^{m-1}-\text{factores}
\end{array}$$

Aplicando el Teorema 4.2.1 a cada $F_n(\mathbb{R})$ y haciendo uso de la Proposición 2.2.4, podemos concluir que existe un encaje bi-Lipschitz

$$h:F_n(\mathbb{R}^m)\longrightarrow\underbrace{\mathbb{R}^d\times\cdots\times\mathbb{R}^d}_{(n+1)^{m-1}-\text{veces}}=\mathbb{R}^{(n+1)^{m-1}d}.$$

Donde $d=2\lfloor(e-1)\,n!\rfloor$.
Finalmente, basta notar que $(n+1)^{m-1}d=(n+1)^{m-1}(2\lfloor(e-1)\,n!\rfloor)=k$.
■

Corolario 4.2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $F_n(X)$ admite un encaje bi-Lipschitz en algún $\mathbb{R}^k$ si y sólo si X admite un encaje bi-Lipschitz en algún $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Supongamos que existe $g : F_n(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un encaje bi-Lipschitz. Por la Proposición 3.1.11, sabemos que existe $f : X \longrightarrow F_1(X)$ isometría (la cual es un encaje bi-Lipschitz), además, como $F_1(X) \subseteq F_n(X)$, podemos considerar $i : F_1(X) \hookrightarrow F_n(X)$, la función inclusión. Por tanto, consideramos $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $h = g \circ i \circ f$. Por la Proposición 2.2.3 concluimos que h es un encaje bi-Lipschitz.

Inversamente, supongamos que existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ encaje bi-Lipschitz para algún $m \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 3.1.14 sabemos que, su función inducida

$$\hat{g} : F_n(X) \longrightarrow F_n(\mathbb{R}^m)$$

es un encaje bi-Lipschitz. Además, por el Teorema 4.2.2, sabemos que existe $f : F_n(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ encaje bi-Lipschitz, donde $k = 2(n+1)^{m-1}\lfloor (e-1)\,n! \rfloor$.

Por tanto, consideremos $h : F_n(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $h = f \circ \hat{g}$, el cual, gracias a la Proposición 2.2.3, sabemos que es un encaje bi-Lipschitz. ■

Capítulo 5

Retractos Lipschitz y m-Conexidad Lipschitz

En este último capítulo hablaremos sobre los retractos Lipschitz, retractos absolutos Lipschitz y m-conexidad Lipschitz. En especial veremos que $\mathbb{R}^n$ es un retracto absoluto Lipschitz y en consecuencia Lipschitz m-conexo para todo $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo el resultado principal de este capítulo es el siguiente:

- $F_n(\mathbb{R})$ es un retracto absoluto Lipschitz.

Con ello daremos por cumplidas las promesas hechas al principio de este escrito (los tres resultados principales) y por ende terminado este trabajo.

5.1. Retractos Lipschitz

Definición 5.1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que una función $r : X \longrightarrow A$ es una **retracción Lipschitz**, si r es Lipschitz continua y $r(a) = a$, para cada $a \in A$.

Definición 5.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es un **retracto Lipschitz** de X, si existe $r : X \longrightarrow A$ retracción Lipschitz.

Definición 5.1.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X es un **retracto absoluto Lipschitz**, si para cada espacio métrico Y y cada isometría $f : X \longrightarrow Y$ se tiene $f(X)$ es un retracto Lipschitz de Y.

Definición 5.1.4. Sean X, Y y $A \subseteq X$. Diremos que $F : X \longrightarrow Y$ es una **extensión** de $f : A \longrightarrow Y$ si $F|_A = f$.

Teorema 5.1.5. *[2, Proposición 1.2, pág. 17] Sea (X, d) un espacio métrico. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) X es un retracto absoluto Lipschitz.

(b) Para cada espacio métrico Y y para cada subconjunto $Z \subseteq Y$, cada función Lipschitz continua $f : Z \longrightarrow X$ puede ser extendida a una función Lipschitz continua $F : Y \longrightarrow X$.

Corolario 5.1.6. *Sean X un retracto absoluto Lipschitz y $A \subseteq X$. Si A es un retracto Lipschitz de X, entonces A es un retracto absoluto Lipschitz.*

Demostración. Sean Y un espacio métrico, $Z \subseteq Y$ y $f : Z \longrightarrow A$ Lipschitz continua. Consideremos $g : Z \longrightarrow X$ dada por $g = i \circ f$ donde i denota la función inclusión de A en X. Dado que i es Lipschitz continua, se sigue por la Proposición 2.1.3 que g es Lipschitz continua.

Como X es un retracto absoluto Lipschitz y g es Lipschitz continua, entonces por el Teorema 5.1.5, tenemos que existe $G : Y \longrightarrow X$ extensión Lipschitz continua de g.

Por otro lado, como A es un retracto Lipschitz de X existe $r : X \longrightarrow A$ retracción Lipschitz. Por tanto consideremos $F : Y \longrightarrow A$ dada por $F = r \circ G$. Demostraremos que F es una extensión de f, para ello tomemos $z \in Z$, entonces

$$F(z) = r(G(z)) = r(g(z)) = r((i \circ f)(z)) = r(f(z)).$$

Además, como $r : X \longrightarrow A$ es retracción y $f(z) \in A$, tenemos que $r(f(z)) = f(z)$, por tanto $F(z) = f(z)$. Como $z \in Z$ fue arbitrario, podemos concluir que F es una extensión de f.

Finalmente como r y G son Lipschitz continuas, tenemos que F lo es (Proposición 2.1.3). Por tanto como Y, Z, f fueron arbitrarios, podemos concluir (Teorema 5.1.5) que A es un retracto absoluto Lipshitz. ■

Proposición 5.1.7. *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos tales que $X \overset{lip}{\approx} Y$. Si X es un retracto absoluto Lipschitz, entonces Y es un retracto absoluto Lipschitz.*

Demostración. Sean Z espacio métrico, $A \subseteq Z$ y $f : A \longrightarrow Y$ Lipschitz continua. Como $X \overset{lip}{\approx} Y$ sabemos que existe $h : X \longrightarrow Y$ lipeomorfismo, además $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ es un lipeomorfismo (Observación 2.3.3). Consideramos $g : A \longrightarrow X$ dada por $g = h^{-1} \circ f$. Como f y h^{-1} son Lipschitz continuas, entonces g es Lipschitz continua (Proposición 2.1.3), así que por el Teorema 5.1.5 existe $G : Z \longrightarrow X$ extensión Lipschitz continua de g.

Finalmente consideramos $F : Z \longrightarrow Y$ dada por $F = h \circ G$, que, por la Proposición 2.1.3 es Lipschitz continua. Demostremos que F es una extensión de f, para ello tomamos $a \in A$, entonces

$$F(a) = h(G(a)) = h(g(a)) = h\left(h^{-1}(f(a))\right) = f(a).$$

Como Z, A, f fueron arbitrarios, podemos concluir (Teorema 5.1.5) que Y es un retracto absoluto Lipschitz. ■

Teorema 5.1.8. *(extensión de McShane-Whitney) Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es λ-Lipschitz, entonces f admite una extensión $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-Lipschitz.*

Demostración. Consideramos $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \inf_{a \in A} \{f(a) + \lambda d(a, x)\}.$$

En primer lugar demostraremos que $F|_A = f$, para ello tomemos $a_0 \in A$. Sea $a \in A$, como f es λ-Lipschitz y $a, a_0 \in A$, tenemos que

$$|f(a) - f(a_0)| \leq \lambda d(a, a_0).$$

Lo cual, es equivalente a decir que

$$-\lambda d(a, a_0) \leq f(a_0) - f(a) \leq \lambda d(a, a_0).$$

Entonces $f(a_0) \leq f(a) + \lambda d(a, a_0)$.

Como $a \in A$ fue arbitrario, podemos concluir que $f(a_0)$ es una cota inferior para el conjunto $\{f(a) + \lambda d(a, a_0) : a \in A\}$. Por tanto la definición de $F(a_0)$ implica que $f(a_0) \leq F(a_0)$.

Por otro lado, dado que $a_0 \in A$, la definición de $F(a_0)$ implica que

$$F(a_0) \leq f(a_0) + \lambda d(a_0, a_0) = f(a_0),$$

así podemos concluir que $F(a_0) = f(a_0)$.

Como $a_0 \in A$ fue arbitrario, se concluye que $F|_A = f$.

Por último probaremos que F es λ-Lipschitz, sean pues $x, y \in X$. Si $F(x) = F(y)$, entonces $|F(x) - F(y)| = 0 \leq \lambda d(x,y)$, por tanto podemos suponer sin perder generalidad que $F(x) < F(y)$, notemos que los siguientes enunciados son equivalentes

1. $|F(x) - F(y)| \leq \lambda d(x,y)$,
2. $F(y) - F(x) \leq \lambda d(x,y)$,
3. $F(y) - \lambda d(x,y) \leq F(x)$.

Por tanto para ver que F es λ-Lipschitz demostraremos 3. Para ello tomamos $a \in A$. Por la definición de $F(y)$, tenemos que $F(y) \leq f(a) + \lambda d(a,y)$, entonces

$$\begin{aligned} F(y) - \lambda d(x,y) &\leq f(a) + \lambda d(a,y) - \lambda d(x,y) \\ &= f(a) + \lambda(d(a,y) - d(x,y)) \\ &\leq f(a) + \lambda d(a,x). \end{aligned}$$

Como $a \in A$ fue arbitrario, podemos concluir que $F(y) - \lambda d(x,y)$ es una cota inferior para el conjunto $\{f(a) + \lambda d(a,x) : a \in A\}$. Por la definición de $F(x)$, obtenemos que $F(y) - \lambda d(x,y) \leq F(x)$ para así concluir que F es λ-Lipschitz. ■

Corolario 5.1.9. $\mathbb{R}$ *es un retracto absoluto Lipschitz.*

Corolario 5.1.10. *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A :\longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si f es λ-Lipschitz, entonces f admite una extensión $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es $\lambda\sqrt{n}$-Lipschitz.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, consideramos **la proyección sobre la i-ésima coordenada**, es decir la función $\varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_i(x) = x_i$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, consideramos $g_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_i = \varphi_i \circ f$, dado que φ_i es 1-Lipschitz y f es λ-Lipschitz, tenemos que g_i es λ-Lipschitz (Proposición 2.1.3), así, por el Teorema 5.1.8, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $G_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de g_i λ-Lipschitz.

Consideremos la función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x) = (G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)).$$

Proposición 2.1.4 sabemos que F es $\lambda\sqrt{n}$-Lipschitz. Por tanto resta probar que $F|_A = f$. Para ello tomemos $a \in A$. Dado que $f(a) \in \mathbb{R}^n$, escribimos $f(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, por tanto

$$\begin{aligned}
F(a) &= (G_1(a), G_2(a), \ldots, G_n(a)) \\
&= (g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a)) \\
&= (\varphi_1(f(a)), \varphi_2(f(a)), \ldots, \varphi_n(f(a))) \\
&= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

■

Corolario 5.1.11. $\mathbb{R}^n$ *es un retracto absoluto Lipschitz.*

5.2. Dos herramientas importantes

Para cualquier espacio métrico (X, d) y cualesquiera números enteros positivos $k < n$ sabemos que $F_k(X) \subseteq F_n(X)$. Sin embargo no siempre resulta que $F_k(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$. Sin embargo, para ciertos subconjuntos de la recta real esto es posible.

Antes de demostrar este resultado daremos algunas herramientas técnicas que nos ayudarán para la demostración de la Proposición 5.2.2. El cual nos dice que $F_{n-1}(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$ cuando X es un intervalo de la recta real.

Lema 5.2.1. *Sea* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *con* $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. *Si Definimos*

$$\delta(A) = \text{mín}\{a_j - a_{j-1} : j \in \{2, 3, \ldots, n\}\},$$

y para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\acute{a}_k = \begin{cases} \min\{0, a_k + (n-k)\,\delta(A)\}, & si\ a_k \leq 0. \\ \max\{0, a_k - k\delta(A)\}, & si\ a_k > 0. \end{cases}$$

Entonces

(a) Si $a_k \leq 0$, se tiene que $\acute{a}_k \leq 0$ y $a_k \leq \acute{a}_k$ para cada $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

(b) Si $a_k > 0$, se tiene que $\acute{a}_k \geq 0$ y $\acute{a}_k < a_k$ para cada $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

(c) $\acute{a}_{j-1} \leq \acute{a}_j$ para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

(d) Si $\delta(A) = a_j - a_{j-1}$ para algún $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, se tiene que $\acute{a}_{j-1} = \acute{a}_j$.

Demostración. Demostraremos en primer lugar *(a)*. La primera desigualdad es inmediata, pues por definición

$$\acute{a}_k = \min\{0, a_k + (n-k)\,\delta(A)\} \leq 0.$$

Para la segunda desigualdad, por definición de $\acute{a}_k$ tenemos los siguientes casos: $\acute{a}_k = 0$ o $\acute{a}_k = (n-k)\,\delta(A)$. En el caso $\acute{a}_k = 0$. Como $a_k \leq 0$, tenemos que $a_k \leq 0 = \acute{a}_k$, por lo que $a_k \leq \acute{a}_k$. Por otro lado, si fuera el caso que $\acute{a}_k = (n-k)\,\delta(A)$, dado que $(n-k)\,\delta(A) \geq 0$ (pues $k \leq n$ y $\delta(A) > 0$), se sigue inmediatamente que

$$a_k \leq a_k + (n-k)\,\delta(A) = \acute{a}_k.$$

Por tanto, en cualquiera de los casos se tiene que $a_k \leq \acute{a}_k$.
Para demostrar *(b)* tenemos que la primera desigualdad es inmediata, pues por definición

$$\acute{a}_k = \max\{0, a_k - k\delta(A)\} \geq 0.$$

Para la segunda desigualdad, por definición de $\acute{a}_k$ tenemos los siguientes casos: $\acute{a}_k = 0$ o $\acute{a}_k = a_k - k\delta(A)$. En el caso $\acute{a}_k = 0$. Como $a_k > 0$, tenemos que $\acute{a}_k = 0 < a_k$. Por otro lado, si $\acute{a}_k = a_k - k\delta(A)$, como $k\delta(A) > 0$, se sigue inmediatamente que $\acute{a}_k = a_k - k\delta(A) < a_k$. Por tanto, en cualquiera de los casos, se tiene que $\acute{a}_k < a_k$.
Para demostrar*(c)* tomemos $j \in \{2, \ldots, n\}$. Dado que $a_{j-1} < a_j$, podemos distinguir los siguientes casos: $a_{j-1} < a_j \leq 0$, $a_{j-1} \leq 0 < a_j$ o $0 < a_{j-1} < a_j$.

- $a_{j-1} < a_j \leq 0$.

  Dado que $a_j \leq 0$, podemos distinguir los siguientes subcasos $\acute{a}_j = 0$ o $\acute{a}_j = a_j + (n-j)\,\delta(A)$.

  - $\acute{a}_j = 0$.
    Como $a_{j-1} < 0$, se tiene que $\acute{a}_{j-1} \leq 0$, se sigue que $\acute{a}_{j-1} \leq 0 = \acute{a}_j$.
  - $\acute{a}_j = a_j + (n-j)\,\delta(A)$.
    Notemos que

$$
\begin{aligned}
a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A) &= a_{j-1} + n\delta(A) - j\delta(A) + \delta(A) \\
&\leq a_{j-1} + n\delta(A) - j\delta(A) + (a_j - a_{j-1}) \\
&= a_j + (n-j)\,\delta(A) \\
&= \acute{a}_j.
\end{aligned}
$$

    Se sigue que

$$
\begin{aligned}
\acute{a}_{j-1} &= \text{mín}\{0, a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A)\} \\
&\leq a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A) \\
&\leq \acute{a}_j.
\end{aligned}
$$

  Por tanto, si $a_{j-1} < a_j \leq 0$, entonces $\acute{a}_{j-1} \leq \acute{a}_j$.

- $a_{j-1} \leq 0 < a_j$.

  Como $a_{j-1} \leq 0$, tenemos que $\acute{a}_{j-1} \leq 0$, además como $0 < a_j$, entonces $0 \leq \acute{a}_j$. Se sigue inmediatamente que $\acute{a}_{j-1} \leq 0 \leq \acute{a}_j$.

- $0 < a_{j-1} < a_j$.

  Dado que $0 < a_{j-1}$, podemos distinguir los siguientes subcasos: $\acute{a}_{j-1} = 0$ o $\acute{a}_{j-1} = a_{j-1} - (j-1)\,\delta(A)$.

  - $\acute{a}_{j-1} = 0$
    Como $0 < a_j$, se tiene que $0 \leq \acute{a}_j$, se sigue que $\acute{a}_{j-1} = 0 \leq \acute{a}_j$.

- $\acute{a}_{j-1} = a_{j-1} - (j-1)\,\delta(A)$
  Notemos que

$$\begin{aligned} \acute{a}_{j-1} = a_{j-1} - (j-1)\,\delta(A) &= a_{j-1} - j\delta(A) + \delta(A) \\ &\leq a_{j-1} - j\delta(A) + (a_j - a_{j-1}) \\ &= a_j - j\delta(A) \\ &\leq \text{máx}\{0, a_j - j\delta(A)\} \\ &= \acute{a}_j. \end{aligned}$$

Por tanto, si $0 < a_{j-1} < a_j$, entonces $\acute{a}_{j-1} \leq \acute{a}_j$.

Así, en cualquiera de los casos se tiene que para $j \in \{2, \ldots, n\}$; $\acute{a}_{j-1} \leq \acute{a}_j$. Por último demostremos *(d)*. Dado que $a_{j-1} < a_j$, podemos distinguir los siguientes casos: $a_{j-1} < a_j \leq 0$, $a_{j-1} \leq 0 < a_j$ o $0 < a_{j-1} < a_j$.

- $a_{j-1} < a_j \leq 0$
  Notemos que

$$\begin{aligned} a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A) &= a_{j-1} + n\delta(A) - j\delta(A) + \delta(A) \\ &= a_{j-1} + n\delta(A) - j\delta(A) + (a_j - a_{j-1}) \\ &= a_j + (n-j)\,\delta(A). \end{aligned}$$

  Se sigue que

$$\text{mín}\{0, a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A)\} = \text{mín}\{0, a_j + (n-j)\,\delta(A)\}.$$

  Por tanto $\acute{a}_{j-1} = \acute{a}_j$.

- $a_{j-1} \leq 0 < a_j$
  Sabemos por los incisos *(a) y (b)* que $\acute{a}_{j-1} \leq \acute{a}_j$. Supongamos que $\acute{a}_{j-1} < \acute{a}_j$, para llegar a una contradicción. Para ello consideremos los siguientes casos

  - $\acute{a}_{j-1} = 0 = \acute{a}_j$.
    Es inmediata la contradicción $(0 < 0)$.

- $\acute{a}_{j-1} = 0$ y $\acute{a}_j = a_j - j\delta(A)$.
  Es inmediato que $0 < a_j - j\delta(A)$, lo cual, es equivalente a decir que $j\delta(A) < a_j$. Por otro lado, como $1 < j$, se tiene que $\delta(A) < j\delta(A)$, por lo que $a_j - a_{j-1} = \delta(A) < j\delta(A) < a_j$. Se sigue inmediatamente que $0 < a_{j-1}$, lo cual es imposible, pues $a_{j-1} \leq 0$.
- $\acute{a}_{j-1} = a_{j-1} + (n - (j-1))\,\delta(A)$ y $\acute{a}_j = 0$
  Sabemos por cuentas anteriores que $a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A) = a_j + (n-j)\,\delta(A)$. Por tanto, $a_j + (n-j)\,\delta(A) \leq 0$, así $a_j + n\delta(A) \leq j\delta(A) \leq n\delta(A)$, se sigue inmediatamente que $a_j \leq 0$, pero esto es imposible, pues $0 < a_j$.
- $\acute{a}_{j-1} = a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A)$ y $\acute{a}_j = a_j - j\delta(A)$.
  Sabemos por cuentas anteriores que $a_{j-1} + (n-(j-1))\,\delta(A) = a_j + (n-j)\,\delta(A)$. Por tanto $a_j + (n-j)\,\delta(A) \leq a_j - j\delta(A)$, lo cual, es equivalente a decir que $a_j + n\delta(A) - j\delta(A) \leq a_j - j\delta(A)$, por lo que $n\delta(A) < 0$, lo cual, es imposible.

Estas contradicciones, vinieron de suponer que $\acute{a}_{j-1} < \acute{a}_j$. Por tanto $\acute{a}_{j-1} = \acute{a}_j$.

- $0 < a_{j-1} < a_j$
  Notemos que

$$\begin{aligned} a_{j-1} - (j-1)\,\delta(A) &= a_{j-1} - j\delta(A) + \delta(A) \\ &= a_{j-1} - j\delta(A) + (a_j - a_{-1}) \\ &= a_j - j\delta(A). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\acute{a}_{j-1} = \text{máx}\{0, a_{j-1} - (j-1)\,\delta(A)\} = \text{máx}\{0, a_j - j\delta(A)\} = \acute{a}_j.$$

En cualquiera de los casos, podemos concluir que si $\delta(A) = a_j - a_{j-1}$, entonces $\acute{a}_{j-1} = \acute{a}_j$. ■

Proposición 5.2.2. *Sea X un subconjunto conexo y no vacío de $\mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $n \geq 2$ se tiene que $F_{n-1}(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$.*

Demostración. Supongamos sin perder generalidad que $0 \in X$ (de no ser así, bastará con realizar una traslación). Si A es un subconjunto de X con cardinal $|A| = n$ consideremos las dos definiciones hechas en el Lema 5.2.1. Además, si A es un subconjunto de X con $|A| < n$, definimos $\delta(A) = 0$. Definimos $r : F_n(X) \longrightarrow F_{n-1}(X)$ dada por

$$r(A) = \begin{cases} \{\acute{a}_1, \acute{a}_2, \dots, \acute{a}_n\}, & \text{si } |A| = n. \\ \\ A, & \text{si } |A| < n. \end{cases}$$

Donde el conjunto $\{\acute{a}_1, \acute{a}_2, \dots, \acute{a}_n\}$ es construido como en el Lema 5.2.1.

Por el inciso *(d)* del Lema 5.2.1, tenemos que r está bien definida, además por construcción tenemos que $r(A) = A$ para cada $A \in F_{n-1}(X)$. Por tanto sólo resta probar que r es Lipschitz, para ello probaremos primero que para cualesquiera $A, B \in F_n(X)$

$$|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B). \tag{5.2.1}$$

Sean $A, B \in F_n(X)$.

- **Caso 1**. $|A| < n$ y $|B| < n$.

  Es inmediato que $|\delta(A) - \delta(B)| = 0 \leq 2H(A, B)$.

- **Caso 2**. $|A| = n$ y $|B| < n$.

  En primer lugar, dado que $|A| = n$, podemos considerar

  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

  Supongamos que $2H(A, B) < |\delta(A) - \delta(B)|$, entonces

  $$H(A, B) < \frac{1}{2}|\delta(A) - \delta(B)| = \frac{1}{2}\delta(A).$$

  Por el Lema 3.1.12 tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $b^i \in B$ tal que $|a_i - b^i| \leq H(A, B)$. Así, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $b^i \in B$ tal que

  $$|a_i - b^i| < \frac{1}{2}\delta(A).$$

  Por último notemos que para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $i \neq j$, entonces $b^i \neq b^j$, pues de otra forma tendríamos que

  $$|a_i - a_j| \leq |a_i - b^i| + |b^i - a_j| < \delta(A).$$

Lo cual es imposible por la definición de $\delta(A)$. Es inmediato que $|B| = n$, lo cual también es imposible pues $|B| < n$. Esta contradicción vino de suponer que $2H(A,B) < |\delta(A) - \delta(B)|$. Por tanto

$$|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A,B).$$

- **Caso 3**. $|A| = n = |B|$.

  En primer lugar, dado que $|A| = n = |B|$, podemos considerar $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

  Supongamos que $2H(A,B) < |\delta(A) - \delta(B)|$. Sin perder generalidad supongamos que $\delta(A) < \delta(B)$. Entonces

$$H(A,B) < \frac{1}{2}|\delta(A) - \delta(B)| = \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)) < \frac{1}{2}\delta(B).$$

  Para $\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)) > 0$ demostraremos que

  - $A \cap B_\varepsilon(b_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
  - $B_\varepsilon(b_{k-1}) \cap B_\varepsilon(b_k) = \emptyset$ para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.

  Para la primera parte, tomemos $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $b_k \in B$ y $A, B \in 2^X$, el Lema 3.1.12 implica que existe $a \in A$ tal que $|b_k - a| \leq H(A,B)$. Así

$$|b_k - a| \leq H(A,B) < \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)).$$

  Por tanto $a \in A \cap B_\varepsilon(b_k)$.

  Para la segunda parte, tomemos $k \in \{2, \ldots, n\}$. Supongamos que $B_\varepsilon(b_{k-1}) \cap B_\varepsilon(b_k) \neq \emptyset$. Entonces, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $|p - b_{k-1}| < \varepsilon$ y $|p - b_k| < \varepsilon$, por tanto

$$b_k - b_{k-1} = |b_k - b_{k-1}| \leq |b_k - p| + |p - b_{k-1}| < 2\varepsilon < \delta(B).$$

  Pero esto es imposible, pues por la definición de $\delta(B)$, se tiene que $\delta(B) \leq b_j - b_{j-1}$ para cada $j \in \{2, \ldots n\}$. Esta contradicción vino de suponer que $B_\varepsilon(b_{k-1}) \cap B_\varepsilon(b_k) \neq \emptyset$. Por tanto, para cada $k \in \{2, \ldots, n\}$ se tiene que

$$B_\varepsilon(b_{k-1}) \cap B_\varepsilon(b_k) = \emptyset.$$

Tenemos entonces que

- $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$,

- $A \cap B_\varepsilon(b_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y

- $B_\varepsilon(b_{k-1}) \cap B_\varepsilon(b_k) = \emptyset$ para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Se sigue que $a_k \in B_\varepsilon(b_k)$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Finalmente probaremos que $\delta(A)$ no se alcanza para ningún $k \in \{2, \ldots, n\}$, para ello, tomemos $2 \leq k \leq n$. Dado que $B_\varepsilon(b_{k-1}) = (-\varepsilon + b_{k-1}, \varepsilon + b_{k-1})$ y $B_\varepsilon(b_k) = (-\varepsilon + b_k, \varepsilon + b_k)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(-\varepsilon + b_k) - (\varepsilon + b_{k-1}))| &= (-\varepsilon + b_k) - (\varepsilon + b_{k-1}) \\
&= -2\varepsilon + (b_k - b_{k-1}) \\
&= (\delta(A) - \delta(B)) + (b_k - b_{k-1}) \\
&\geq (\delta(A) - \delta(B)) + \delta(B) \\
&= \delta(A).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $a_{k-1} \in B_\varepsilon(b_{k-1})$ y $a_k \in B_\varepsilon(b_k)$, se tiene que $-\varepsilon + b_k < a_k$ y $a_{k-1} < \varepsilon + b_{k-1}$, por tanto

$$(-\varepsilon + b_k) + (-\varepsilon - b_{k-1}) < a_k - a_{k-1}$$

así

$$\delta(A) \leq -2\varepsilon + (b_k - b_{k-1}) = (-\varepsilon + b_k) + (-\varepsilon - b_{k-1}) < a_k - a_{k-1}.$$

Como $2 \leq k \leq n$ fue cualquiera, concluimos que $\delta(A) < a_k - a_{k-1}$ para toda $k \in \{2, \ldots, n\}$, lo cual es una contradicción. La contradicción vino de suponer que

$$2H(A, B) < |\delta(A) - \delta(B)|.$$

Por tanto si $|A| = n = |B|$, se tiene que $|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$, habiendo cubierto así todos los casos.

Procedamos a demostrar que para cada $A \in F_n(X)$

$$H(A, r(A)) \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|. \tag{5.2.2}$$

Sea $A \in F_n(X)$, entonces tenemos que $|A| < n$ o $|A| = n$.

- **Caso 1**. $|A| < n$.

  Por definición, tenemos que $r(A) = A$. Se sigue que

  $$H(A, r(A)) = H(A, A) = 0 \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|.$$

- **Caso 2**. $|A| = n$.

  Dado que $|A| = n$, podemos considerar $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Por el Teorema 3.1.13, tenemos que

  $$H(A, r(A)) = \max\left\{\max_{a \in A} d(a, r(A)), \max_{\acute{a} \in r(A)} d(\acute{a}, A)\right\}.$$

  Por lo que basta probar que

  - $\max_{a \in A} d(a, r(A)) \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|$.
  - $\max_{\acute{a} \in r(A)} d(\acute{a}, A) \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|$.

  Para la primera desigualdad, tomemos $a_j \in A$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dado que $\acute{a}_j \in r(A)$, se sigue que

  $$d(a_j, r(A)) \leq |a_j - \acute{a}_j| \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|.$$

  Como $a_j \in A$ fue cualquiera y A es un conjunto finito, podemos concluir que

  $$\max_{a \in A} d(a, r(A)) \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|.$$

  Para la segunda desigualdad, tomemos $\acute{a}_j \in r(A)$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dado que $a_j \in A$, se sigue que

  $$d(\acute{a}_j, A) \leq |\acute{a}_j - a_j| \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|.$$

Como $\acute{a}_j \in r(A)$ fue cualquiera y $r(A)$ es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{\acute{a} \in r(A)} d(\acute{a}, A) \leq \max_k |a_k - \acute{a}_k|.$$

Por tanto, si $|A| = n$, entonces $H(A, r(A)) \leq \max\limits_k |a_k - \acute{a}_k|$.

Cubriendo así los dos casos posibles.
Siguiendo con las desigualdades, probaremos que para cada $A \in F_n(X)$

$$\max_k |a_k - \acute{a}_k| \leq n\delta(A). \tag{5.2.3}$$

Sea $A \in F_n(X)$, entonces $|A| < n$ o $|A| = n$.

- **Caso 1**. $|A| < n$.

  Por definición, tenemos que $\delta(A) = 0$ y por tanto $a_k = \acute{a}_k$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se sigue que

  $$\max_k |a_k - \acute{a}_k| = 0 = n\delta(A).$$

- **Caso 2**. $|A| = n$.

  Dado que $|A| = n$, podemos considerar $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

  Sea $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de tal forma que $\max\limits_k |a_k - \acute{a}_k| = |a_j - \acute{a}_j|$. Entonces tenemos dos casos $a_j \leq 0$ o $a_j > 0$.

  - $a_j \leq 0$

    Por el Lema 5.2.1 inciso *(a)*, tenemos que $a_j \leq \acute{a}_j$.

    Entonces $|a_j - \acute{a}_j| = \acute{a}_j - a_j$. Por otro lado, por definición, tenemos que $\acute{a}_j \leq a_j + (n-j)\delta(A)$. Por tanto

    $$\max_k |a_k - \acute{a}_k| = |a_j - \acute{a}_j| = \acute{a}_j - a_j \leq (n-j)\delta(A) < n\delta(A).$$

  - $a_j > 0$

    Por el Lema 5.2.1 inciso *(b)*, tenemos que $\acute{a}_j < a_j$.

    Entonces $|a_j - \acute{a}_j| = a_j - \acute{a}_j$. Por otro lado, por definición, tenemos que $a_j - j\delta(A) \leq \acute{a}_j$. Por tanto

    $$\max_k |a_k - \acute{a}_k| = |a_j - \acute{a}_j| = a_j - \acute{a}_j \leq j\delta(A) \leq n\delta(A).$$

Por tanto, si $|A| = n$, entonces $\max\limits_{k} |a_k - \acute{a}_k| < n\delta(A)$.

Cubriendo así los dos casos.
Teniendo las desigualdades requeridas, procedamos a demostrar que r es Lipchitz continua. Sean $K = 6n + 1$ y $A, B \in F_n(X)$. Si $A = B$ entonces es inmediato que

$$H(r(A), r(B)) = 0 = (6n+1) H(A, B).$$

Por tanto, supongamos que $A \neq B$.

- **Caso 1**. $\delta(A) \leq 2H(A, B)$.

  En primer lugar, es inmediato que $\delta(B) \leq 4H(A, B)$, pues

$$\begin{aligned} \delta(B) = |\delta(B)| &= |\delta(B) + (\delta(A) - \delta(A))| \\ &\leq |\delta(B) - \delta(A)| + |\delta(A)| \\ &= |\delta(B) - \delta(A)| + \delta(A) \\ &\leq 2H(A, B) + 2H(A, B) \quad \text{(Por (5.2.1) y este caso)} \\ &= 4H(A, B). \end{aligned}$$

  Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &\leq H(r(A), A) + H(A, B) + H(B, r(B)) \\ &\leq n\delta(A) + H(A, B) + n\delta(B) \quad \text{(Por (5.2.2) y (5.2.3))} \\ &\leq 2nH(A, B) + H(A, B) + 4nH(A, B) \\ &= (6n+1) H(A, B). \end{aligned}$$

- **Caso 2**. $\delta(A) > 2H(A, B)$.

  Como primer paso demostraremos que $\delta(B) > 0$. Por definición sabemos que $\delta(B) \geq 0$, si fuera el caso que $\delta(B) = 0$, por (5.2.1) tendríamos que

$$\delta(A) = |\delta(A)| = |\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B).$$

Lo cual es imposible, pues $2H(A,B) < \delta(A)$.

Dado que $\delta(A) > 0$ y $\delta(B) > 0$, se sigue que $|A| = n = |B|$. Por tanto, podemos considerar $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Por otro lado, consideremos $\varepsilon = H(A,B) > 0$ (pues $A \neq B$). Afirmamos que

- $B \cap B_\varepsilon[a_k] \neq \emptyset$, para cada $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

- $B_\varepsilon[a_k] \cap B_\varepsilon[a_j] = \emptyset$, para cualesquiera $k, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ tales que $k \neq j$.

Para la primera parte, tomemos $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Dado que $A, B \in 2^X$ y $a_k \in A$, por el Lema 3.1.12 sabemos que existe $b \in B$ tal que $|a_k - b| \leq H(A,B)$. Por tanto $b \in B \cap B_\varepsilon[a_k]$.

Para la segunda parte, tomemos $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $k \neq j$. Supongamos que $B_\varepsilon[a_k] \cap B_\varepsilon[a_j] \neq \emptyset$, entonces, existe $p \in X$ tal que $|p - a_k| \leq H(A,B)$ y $|p - a_j| \leq H(A,B)$.

Dado que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, se tiene que $\delta(A) \leq |a_k - a_j|$, por lo que

$$2H(A,B) < \delta(A) \leq |a_k - a_j| \leq |a_k - p| + |p - a_j| \leq 2H(A,B).$$

Lo cual, es imposible. Por tanto, para cualesquiera $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $k \neq j$, se tiene que $B_\varepsilon[a_k] \cap B_\varepsilon[a_j] = \emptyset$.

Dado que

- $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,

- $B \cap B_\varepsilon[a_k] \neq \emptyset$. Para cada $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, y

- $B_\varepsilon[a_k] \cap B_\varepsilon[a_j] = \emptyset$. Para cualesquiera $k, j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ con $k \neq j$.

Se sigue inmediatamente que $b_k \in B_\varepsilon[a_k]$ y entonces $|a_k - b_k| \leq H(A,B)$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Probaremos que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$|\acute{a}_k - \acute{b}_k| \leq (2n+1)\, H(A,B) \tag{5.2.4}$$

Para hacer esto, sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- $a_k < 0 < b_k$.
  En este caso $|a_k - b_k| = b_k - a_k$, además por el Lema 5.2.1, incisos *(a)* y *(b)*, se tiene que $|\acute{a}_k - \acute{b}_k| = \acute{b}_k - \acute{a}_k$, $a_k \leq \acute{a}_k$ y $\acute{b}_k < b_k$. Por tanto
  $$|\acute{a}_k - \acute{b}_k| = \acute{b}_k - \acute{a}_k < b_k - a_k = |a_k - b_k|.$$
  Además, dado que $b_k \in B_\varepsilon[a_k]$, podemos concluir que
  $$|\acute{a}_k - \acute{b}_k| < |a_k - b_k| \leq H(A, B) < (2n+1) H(A, B).$$

- $b_k < 0 < a_k$.
  La demostración es análoga al caso anterior y por tanto, omitiremos su demostración.

- $a_k \leq 0$ y $b_k \leq 0$.
  Sabemos que
  $$\begin{aligned} \acute{a}_k &= \text{mín}\{0, a_k + (n-k)\,\delta(A)\} \\ &= \frac{a_k + (n-k)\,\delta(A) - |a_k + (n-k)\,\delta(A)|}{2} \end{aligned}$$
  y
  $$\begin{aligned} \acute{b}_k &= \text{mín}\{0, b_k + (n-k)\,\delta(B)\} \\ &= \frac{b_k + (n-k)\,\delta(B) - |b_k + (n-k)\,\delta(B)|}{2} \end{aligned}$$
  Para no hacer más pesada la notación, llamemos por un momento,
  $$p = a_k + (n-k)\,\delta(A) \text{ y } q = b_k + (n-k)\,\delta(B).$$
  Entonces
  $$|\acute{a}_k - \acute{b}_k| = \left|\frac{(p - |p|) - (q - |q|)}{2}\right| = \left|\frac{(p-q) - (|p| - |q|)}{2}\right|.$$
  Así
  $$2|\acute{a}_k - \acute{b}_k| = |\,(p-q) + (|q| - |p|)\,| \leq |p-q| + \big||q| - |p|\big|.$$

Dado que $\big||q|-|p|\big| \leq |q-p| = |p-q|$ se tiene que

$$2|\acute{a}_k - \acute{b}_k| \leq 2|p-q|.$$

Así concluimos que $|\acute{a}_k - \acute{b}_k| \leq |p-q|$. Por último recordando que $p = a_k + (n-k)\,\delta(A)$ y $q = b_k + (n-k)\,\delta(B)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\acute{a}_k - \acute{b}_k| &\leq |\,(a_k + (n-k)\,\delta(A)) - (b_k + (n-k)\,\delta(B))\,| \\
&\leq |a_k - b_k| + (n-k)\,|\delta(A) - \delta(B)\,| \\
&\leq |a_k - b_k| + n|\delta(A) - \delta(B)\,| \\
&\leq H(A,B) + 2nH(A,B) \quad \text{por } (5.2.1) \\
&= (2n+1)\,H(A,B)\,.
\end{aligned}$$

- $a_k \geq 0$ y $b_k \geq 0$
  La demostración es análoga al caso anterior y por tanto la omitiremos.

Por tanto, sea cual sea el caso, podemos concluir que

$$|\acute{a}_k - \acute{b}_k| \leq (2n+1)\,H(A,B)\,,$$

para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, lo cual implica que

$$\max_k |\acute{a}_k - \acute{b}_k| \leq (2n+1)\,H(A,B)\,. \tag{5.2.5}$$

Finalmente, por el Teorema 3.1.13, sabemos que

$$H(r(A), r(B)) = \max\left\{\max_{\acute{a}\in r(A)} d(\acute{a}, r(B))\,,\, \max_{\acute{b}\in r(B)} d\left(\acute{b}, r(A)\right)\right\}.$$

Supongamos sin perder generalidad que

$$H(r(A), r(B)) = \max_{\acute{a}\in r(A)} d(\acute{a}, r(B))\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &= \max_{\acute{a}\in r(A)} d(\acute{a}, r(B)) \\ &= d(\acute{a}_j, r(B)) \text{ (para algún } j) \\ &\leq |\acute{a}_j - \acute{b}_j| \leq \max_k |\acute{a}_k - \acute{b}_k| \\ &\leq (2n+1) H(A,B) \\ &< (6n+1) H(A,B). \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquiera de los casos obtuvimos la desigualdad deseada, por lo que podemos concluir que r es $(6n+1)$-Lipschitz. Concluyendo así que $F_{n-1}(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$ para todo $n \geq 2$. ■

Corolario 5.2.3. *Sea X un subconjunto conexo y no vacío de $\mathbb{R}$. Entonces, para cualesquiera $1 \leq k \leq n$, se tiene que $F_k(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$.*

Demostración. Si $k = n$ es inmediato que se cumple la conclusión del corolario, pues basta considerar la función identidad. Por tanto supongamos que $1 \leq k < n$. Por la Proposición 5.2.2 existen $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_{k+1}$ retracciones Lipschitz

$$F_n(X) \xrightarrow{r_n} F_{n-1}(X) \xrightarrow{r_{n-1}} \cdots \xrightarrow{r_{k+2}} F_{k+1}(X) \xrightarrow{r_{k+1}} F_k(X).$$

Sea $r : F_n(X) \longrightarrow F_k(X)$ dada por

$$r = r_{k+1} \circ r_{k+2} \circ \cdots \circ r_{n-1} \circ r_n.$$

Por la Proposición 2.1.3, sabemos que r es Lipschitz continua, además para cada $A \in F_k(X)$, dado que

$$F_k(X) \subseteq F_{k+1}(X) \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}(X) \subseteq F_n(X),$$

se tiene que $r(A) = A$. Por tanto, $F_k(X)$ es un retracto Lipschitz de $F_n(X)$. ■

El siguiente lema también es técnico como lo fue el Lema 5.2.1, pues lo ocuparemos como una herramienta para poder probar que $F_n(\mathbb{R})$ es Lipschitz m-conexo para todo $m \in \mathbb{N}$

Lema 5.2.4. *Sean $(X, \rho), (Y, d)$ espacios métricos tales que*

- *$diám(X) = D < \infty$.*
- *$B_\varepsilon[y]$ es un conjunto compacto para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $y \in Y$.*

Si existe $f : X \longrightarrow F_n(Y)$ L-Lipschitz tal que

$$diám(f(x_0)) > 3LD(n-1) \quad \text{para algún } x_0 \in X,$$

entonces, existen $g, h : X \longrightarrow F_{n-1}(Y)$ L-Lipschitz, tales que $f = g \cup h$.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ fijo tal que

$$diám(f(x_0)) > 3LD(n-1).$$

Consideramos

$$\mathcal{S} = \{E \subseteq f(x_0) : E \neq \emptyset, diám(E) \leq 3LD(|E|-1)\}.$$

Como primera observación mostraremos que $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío. Dado que $f(x_0) \in F_n(Y)$, se tiene que $1 \leq |f(x_0)| \leq n$, por lo que $f(x_0) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in f(x_0)$, entonces $\{y\} \subseteq f(x_0)$, además es inmediato que

$$diám(\{y\}) = 0 = 3LD(|\{y\}|-1).$$

Por tanto , podemos concluir que $\{y\} \in \mathcal{S}$.

Dado que $(\mathcal{S}, \subseteq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado** y finito (pues $f(x_0)$ es finito), tenemos que $(\mathcal{S}, \subseteq)$ posee un elemento maximal. Sea E_0 dicho elemento.

Para este elemento demostraremos que $E_0 \subsetneq f(x_0)$. Dado que $E_0 \in \mathcal{S}$ se tiene que $E_0 \subseteq f(x_0)$. Supongamos que $E_0 = f(x_0)$. Como $E_0 \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$diám(f(x_0)) \leq 3LD(|f(x_0)|-1).$$

Por otro lado, como $f(x_0) \in F_n(Y)$, tiene que $1 \leq |f(x_0)| \leq n$, por lo que $|f(x_0)| - 1 \leq n-1$. Además como $3LD > 0$, se sigue que

$$3LD(|f(x_0)|-1) \leq 3LD(n-1),$$

por tanto

$$di\acute{a}m\,(f(x_0)) \leq 3LD\,(|f(x_0)| - 1) \leq 3LD\,(n-1)\,.$$

Pero esto es imposible, pues por hipótesis $di\acute{a}m\,(f(x_0)) > 3LD\,(n-1)$. La contradicción vino de suponer que $E_0 = f(x_0)$. Por tanto $E_0 \subsetneq f(x_0)$.

Ahora demostraremos que

$$d\,(y, E_0) > 3LD \quad \text{para cada} \quad y \in f(x_0) \setminus E_0. \tag{5.2.6}$$

En efecto, sea $y \in f(x_0) \setminus E_0$ y supongamos que $d\,(y, E_0) \leq 3LD$. Consideramos $E = E_0 \cup \{y\}$, veamos que $E \in \mathcal{S}$.

- Primero demostraremos que $E \subseteq f(x_0)$ y $E \neq \emptyset$.

  $E \neq \emptyset$, pues $y \in E$. Por otro lado, como $E_0 \subsetneq f(x_0)$ y $y \in f(x_0)$, es inmediato que $E = E_0 \cup \{y\} \subseteq f(x_0)$.

- Ahora demostraremos que $di\acute{a}m\,(E) \leq 3LD\,(|E| - 1)$.

  Como $y \notin E_0$, tenemos que

  $$|E| = |E_0 \cup \{y\}| = |E_0| + |\{y\}| = |E_0| + 1.$$

  Por lo que $3LD\,(|E| - 1) = 3LD|E_0|$. Veamos que

  $$di\acute{a}m\,(E) \leq di\acute{a}m\,(E_0) + d\,(y, E_0)\,.$$

  Sean $p, q \in E$.

  - Caso 1. $p \in E_0$ y $q \in E_0$.
    Como $d\,(p,q) \leq di\acute{a}m\,(E_0)$, se sigue inmediatamente que

    $$d\,(p,q) \leq di\acute{a}m\,(E_0) + d\,(y, E_0)\,.$$

  - Caso 2. $p \in E_0$ y $q = y$.
    Como E_0 es un conjunto finito, podemos tomar $\acute{p} \in E_0$ tal que $d\,(y, E_0) = d\,(y, \acute{p})$. Entonces

    $$d\,(p,q) = d\,(p,y) \leq d\,(p,\acute{p}) + d\,(\acute{p}, y) \leq di\acute{a}m\,(E_0) + d\,(y, E_0)\,.$$

  - Caso 3 $p = y = q$.
    $\rho\,(p,q) = 0 \leq di\acute{a}m\,(E_0) + d\,(y, E_0)$.

Así en cualquiera de los casos tenemos que

$$d(p,q) \leq di\acute{a}m(E_0) + d(y,E_0).$$

Como $p,q \in E$ son cualesquiera, podemos concluir que $di\acute{a}m(E) \leq di\acute{a}m(E_0) + d(y,E_0)$, como requeríamos.

Se sigue que

$$\begin{aligned} di\acute{a}m(E) &\leq di\acute{a}m(E_0) + d(y,E_0) \\ &\leq 3LD(|E_0|-1) + 3LD \\ &= 3LD|E_0| \\ &= 3LD(|E|-1). \end{aligned}$$

Por tanto encontramos un conjunto E tal que $E \in \mathcal{S}$, $E_0 \subseteq E$ y $E \neq E_0$, pero esto es imposible, pues $E_0 \in \mathcal{S}$ es maximal. Esta contradicción vino de suponer que $d(y,E_0) \leq 3LD$. Por tanto

$$d(y,E_0) > 3LD \quad \text{para cada} \quad y \in f(x_0) \setminus E_0.$$

Para poder construir las funciones buscadas, nos auxiliaremos de los siguientes dos conjuntos

$$\begin{aligned} G &= \{y \in Y : d(y,E_0) \leq LD\}. \\ H &= \{y \in Y : d(y, f(x_0) \setminus E_0) \leq LD\}. \end{aligned}$$

y probaremos que

(a) $G \cap H = \emptyset$.

(b) $f(x) \cap G \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.

(c) $f(x) \cap H \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.

Para demostrar *(a)* supongamos que $G \cap H \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $d(y,E_0) \leq LD$ y $d(y, f(x_0) \setminus E_0) \leq LD$. Como E_0 y $f(x_0) \setminus E_0$ son conjuntos finitos, podemos tomar $q \in E_0$ y $p \in f(x_0) \setminus E_0$ tales que

- $d(y, E_0) = d(y, q)$.
- $d(y, f(x_0) \setminus E_0) = d(y, p)$.

Por otro lado, como $p \in f(x_0) \setminus E_0$, la desigualdad (5.2.6) implica que $d(p, E_0) > 3LD$, además como $q \in E_0$, tenemos que $d(p, E_0) \leq d(p, q)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(p, E_0) \leq d(p, q) &\leq d(p, y) + d(y, q) \\ &= d(y, f(x_0) \setminus E_0) + d(y, E_0) \\ &\leq LD + LD < 3LD \\ &< d(p, E_0). \end{aligned}$$

Lo cual, es imposible. Esta contradicción vino de suponer que $G \cap H \neq \emptyset$, por tanto $G \cap H = \emptyset$, como requeríamos.

Para demostrar *(b)*, fijemos $x \in X$. Como $E_0 \neq \emptyset$ podemos fijar $p \in E_0$. Demostraremos que existe $q \in f(x)$ tal que $d(p, q) \leq LD$.

Supongamos lo contrario, es decir: para cada $q \in f(x)$, $LD < d(p, q)$. Como $f(x)$ es un conjunto finito, tenemos que $LD < d(p, f(x))$, además, como $p \in f(x_0)$ (pues $p \in E_0 \subsetneq f(x_0)$), se tiene que

$$LD < d(p, f(x)) \leq \max_{z \in f(x_0)} d(z, f(x)).$$

Por el Teorema 3.1.13, el hecho de que f es L-Lipschitz y que *diám* $(X) = D$ se sigue que

$$\max_{z \in f(x_0)} d(z, f(x)) \leq H(f(x), f(x_0)) \leq L\,\rho(x, x_0) \leq LD.$$

Por tanto $LD < \max_{z \in f(x_0)} d(z, f(x)) \leq LD$, lo cual, es imposible. Esta contradicción vino de suponer que $LD < d(p, q)$ para cada $q \in f(x)$. Por tanto, existe $q \in f(x)$ tal que $d(p, q) \leq LD$, como requeríamos.

Además como $p \in E_0$, tenemos que $d(q, E_0) \leq d(q, p) \leq LD$, es decir $q \in G$. Por tanto concluimos que $q \in f(x) \cap G$.

Finalmente, para demostrar *(c)* fijemos $x \in X$. Como $E_0 \subsetneq f(x_0)$ podemos fijar $p \in f(x_0) \setminus E_0$. Demostraremos que existe $q \in f(x)$ tal que $d(p,q) \leq LD$.

Supongamos lo contrario, es decir supongamos que para cada $q \in f(x)$, $LD < d(p,q)$. Como $f(x)$ es un conjunto finito, tenemos que $LD < d(p, f(x))$.

Considerando que $p \in f(x_0)$, el Teorema 3.1.13, el hecho de que f es L-Lipschitz y $diám(X) = D$, se sigue que

$$d(p, f(x)) \leq \max_{z \in f(x_0)} d(z, f(x)) \leq H(f(x), f(x_0)) \leq L\, \rho(x, x_0) \leq LD.$$

Por lo que $LD < d(p, f(x)) \leq LD$, lo cual es imposible. Esta contradicción vino de suponer que $LD < d(p,q)$ para cada $q \in f(x)$. Por tanto, existe $q \in f(x)$ tal que $d(p,q) \leq LD$.

Finalmente, como $p \in f(x_0) \setminus E_0$, tenemos que

$$d(q, f(x_0) \setminus E_0) \leq d(q,p) \leq LD,$$

es decir, $q \in H$. Por tanto, concluimos que $q \in f(x) \cap H$.

Para cada $x \in X$ definimos $g(x) = f(x) \cap G$ y $h(x) = f(x) \cap H$. Demostraremos que para cada $x \in X$

$$f(x) = g(x) \cup h(x). \tag{5.2.7}$$

Sea $x \in X$. Dado que $g(x) = f(x) \cap G \subseteq f(x)$ y $h(x) = f(x) \cap H \subseteq f(x)$, se sigue inmediatamente que $g(x) \cup h(x) \subseteq f(x)$. Por tanto, resta probar que $f(x) \subseteq g(x) \cup h(x)$. Para ello demostraremos que $f(x) \subseteq G \cup H$.

Supongamos que $f(x) \nsubseteq G \cup H$, entonces, existe $y \in f(x)$ tal que $y \notin G$ y $y \notin H$. Por tanto

- $d(y, E_0) > LD$.
- $d(y, f(x_0) \setminus E_0) > LD$.

Como f es L-Lipschitz y $diám(X) = D$ se sigue que

- $H(f(x), f(x_0)) \leq LD < d(y, E_0)$, y
- $H(f(x), f(x_0)) \leq LD < d(y, f(x_0) \setminus E_0)$.

Así, por la definición de la métrica de Hausdorff tenemos que

- $f(x) \subseteq N(d(y, E_0), f(x_0))$.
- $f(x) \subseteq N(d(y, f(x_0) \setminus E_0), f(x_0))$.

Como $y \in f(x)$, tenemos que existen $p, q \in f(x_0)$ tales que

- $d(y, p) < d(y, E_0)$.
- $d(y, q) < d(y, f(x_0) \setminus E_0)$.

Esto implica que $p \notin E_0$ y $q \notin f(x_0) \setminus E_0$, así $p \in f(x_0) \setminus E_0$ y $q \in E_0$. Por tanto

$$d(y, p) < d(y, E_0) \leq d(y, q) < d(y, f(x_0) \setminus E_0) \leq d(y, p).$$

Lo cual, es imposible. Esta contradicción vino de suponer que $f(x) \nsubseteq G \cup H$. Por tanto $f(x) \subseteq G \cup H$, como requeríamos.

Finalmente, como $f(x) \subseteq G \cup H$, intersectando en ambos lados $f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) \cap f(x) &\subseteq (G \cup H) \cap f(x) \\ &= (f(x) \cap G) \cup (f(x) \cap H) \\ &= g(x) \cup h(x). \end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que $f(x) = g(x) \cup h(x)$, para cada $x \in X$.

Veamos que para cada $x \in X$, $g(x), h(x) \in F_{n-1}(Y)$. Sea $x \in X$. Por construcción, se tiene que $g(x) \subseteq Y$. Por otro lado, como $f(x) \cap G \neq \emptyset$, tenemos que $1 \leq |f(x) \cap G| = |g(x)|$. Por tanto resta probar que $|g(x)| \leq n-1$.

En primer lugar, veamos que $g(x) \cap h(x) = \emptyset$, en efecto:

$$\begin{aligned} g(x) \cap h(x) &= (f(x) \cap G) \cap (f(x) \cap H) \\ &= f(x) \cap (G \cap H) \\ &= \emptyset \quad (\text{ pues } G \cap H = \emptyset). \end{aligned}$$

Por tanto $|g(x) \cup h(x)| = |g(x)| + |h(x)|$.

Además, como

- $|f(x)| \leq n$ (pues $f(x) \in F_n(Y)$), y

- $1 \leq |h(x)|$ (pues $f(x) \cap H \neq \emptyset$),

tenemos que

$$|g(x)| + 1 \leq |g(x)| + |h(x)| = |g(x) \cup h(x)| = |f(x)| \leq n.$$

Por lo que $|g(x)| + 1 \leq n$, lo cual implica que $|g(x)| \leq n-1$. Así podemos concluir que $1 \leq |g(x)| \leq n-1$ y $g(x) \subseteq Y$, es decir $g(x) \in F_{n-1}(Y)$.

La demostración de que $h(x) \in F_{n-1}(Y)$ es similar a la anterior y por tanto la omitiremos.

Por último, resta probar que g y h son L-Lipschitz. Para ello probaremos primero que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$

$$H(f(x_1), f(x_2)) \leq LD < d(G, H). \tag{5.2.8}$$

Donde $d(G, H)$ denota la distancia entre los conjuntos G y H, es decir

$$d(G, H) = \text{ínf}\,\{d(p, q) : p \in G \text{ y } q \in H\}.$$

La primera desigualdad es inmediata pues

$$H(f(x_1), f(x_2)) \leq L\ \rho(x_1, x_2) \leq L\ \textit{diám}\,(X) = LD.$$

Para la segunda desigualdad consideremos $\varepsilon = LD$. Es fácil ver que

- $G = \bigcup\{B_\varepsilon[x] : x \in E_0\}$.
- $H = \bigcup\{B_\varepsilon[z] : z \in f(x_0) \setminus E_0\}$.

Como las bolas cerradas son compactas (por hipótesis) y $E_0, f(x_0) \setminus E_0$ son conjuntos finitos, tenemos que G, H son compactos. Por tanto existen $p \in G$ y $q \in H$ tales que $d(G, H) = d(p, q)$. Además el hecho de que $p \in G$ y $q \in H$ implican que

- $d(p, E_0) \leq LD$.

- $d(q, f(x_0) \setminus E_0) \leq LD$.

Por otro lado, como E_0 y $f(x_0)$ son finitos, sabemos que existen $\acute{p} \in E_0$ y $\acute{q} \in f(x_0) \setminus E_0$ tales que

- $d(p, E_0) = d(p, \acute{p})$.
- $d(q, f(x_0) \setminus E_0) = d(q, \acute{q})$.

Finalmente, como $\acute{q} \in f(x_0) \setminus E_0$ y $\acute{p} \in E_0$; la desigualdad (5.2.6) y la desigualdad triangular implican que

$$3LD < d(\acute{q}, E_0) \leq d(\acute{q}, \acute{p}) \leq d(\acute{q}, q) + d(q, p) + d(p, \acute{p}).$$

Por tanto

$$3LD < d(\acute{q}, q) + d(q, p) + d(p, \acute{p}) \leq LD + d(p, q) + LD.$$

Y así $LD < d(p, q) = d(G, H)$, como requeríamos.
Teniendo listas las desigualdades de (5.2.8), empezaremos a demostrar que g es L-Lipschitz, para ello tomemos $x_1, x_2 \in X$. Primero demostraremos que

$$d(p, f(x_2) \cap G) \leq H(f(x_1), f(x_2)) \quad \text{para cada } p \in f(x_1) \cap G. \tag{5.2.9}$$

$$d(q, f(x_1) \cap G) \leq H(f(x_1), f(x_2)) \quad \text{para cada } q \in f(x_2) \cap G. \tag{5.2.10}$$

Para demostrar (5.2.9), tomemos $p \in f(x_1) \cap G$ y supongamos que

$$H(f(x_1), f(x_2)) < d(p, f(x_2) \cap G).$$

Como (Teorema 3.1.13)

$$H(f(x_1), f(x_2)) = \text{máx}\left\{\underset{z \in f(x_1)}{\text{máx}} d(z, f(x_2)), \underset{w \in f(x_2)}{\text{máx}} d(w, f(x_1))\right\},$$

el hecho de que $p \in f(x_1)$ implica que

$$d(p, f(x_2)) \leq H(f(x_1), f(x_2)) < d(p, f(x_2) \cap G). \tag{5.2.11}$$

Por otro lado, como $f(x_2)$ es un conjunto finito, podemos tomar $q \in f(x_2)$ de tal forma que $d(p, f(x_2)) = d(p, q)$. Veamos que $q \in G$, pues si $q \notin G$, como

$$q \in f(x_2) = g(x_2) \cup h(x_2) = (f(x_2) \cap G) \cup (f(x_2) \cap H),$$

se tendría que $q \in f(x_2) \cap H$ y por tanto $q \in H$. Como $p \in G$ y $q \in H$ la definición de $d(G, H)$ implicaría que

$$d(G, H) \leq d(p, q)$$

Por la desigualdad (5.2.8) se tendría que

$$H(f(x_1), f(x_2)) < d(G, H) \leq d(p, q).$$

Y por la desigualdad (5.2.11) tendríamos que

$$d(p, q) = d(p, f(x_2)) \leq H(f(x_1), f(x_2)) < d(p, q).$$

Lo cual, es imposible. Por tanto $q \in G$. Entonces $q \in f(x_2) \cap G$ que con la desigualdad (5.2.11) implican que

$$d(p, q) = d(p, f(x_2)) < d(p, f(x_2) \cap G) \leq d(p, q).$$

Lo cual también es imposible. Esta contradicción vino de suponer que

$$H(f(x_1), f(x_2)) < d(p, f(x_2) \cap G).$$

Por tanto (5.2.9) es válida. La demostración de (5.2.10) es similar y por tanto la omitiremos.
Dado que $f(x_1) \cap G$ y $f(x_2) \cap G$ son conjuntos finitos las desigualdades (5.2.9) y (5.2.10) implican que

- $\max\limits_{p \in f(x_1) \cap G} d(p, f(x_2) \cap G) \leq H(f(x_1), f(x_2))$.
- $\max\limits_{q \in f(x_2) \cap G} d(q, f(x_1) \cap G) \leq H(f(x_1), f(x_2))$.

Así, por el Teorema 3.1.13, concluimos que

$$H(g(x_1), g(x_2)) \leq H(f(x_1), f(x_2)).$$

Por tanto, añadiendo que f es L- Lipschitz, concluimos que

$$H(g(x_1), g(x_2)) \leq H(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2).$$

La demostracion de que h es L-Lipschitz es idéntica a la de g y por tanto la omitiremos. ■

5.3. m-Conexidad Lipschitz

Definición 5.3.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $m \geq 0$. Diremos que X es **Lipschitz m-conexo**, si existe una constante γ tal que para cada $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$, cada función λ-Lipschitz $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ (donde $\lambda > 0$) admite una extensión $F : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow X$ que es $\gamma\lambda$-Lipschitz, donde $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{B}^{n+1}$ denotan la esfera unitaria y la bola cerrada en $\mathbb{R}^{n+1}$, equipada con la métrica inducida.

Proposición 5.3.2. *Sean $(X, d_1), (Y, d_2)$ espacios métricos tales que $X \overset{lip}{\approx} Y$. Si X es Lipschitz m-conexo, entonces Y es Lipschitz m-conexo.*

Demostración. Sean $n \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ y $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ λ-Lipschitz. Como $X \overset{lip}{\approx} Y$, sabemos que existe $h : X \longrightarrow Y$ encaje bi-Lipshitz suprayectivo con constante K. Además por la Observación 2.3.3 sabemos que $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ es lipeomorfismo con constante K.

Sea pues $g : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ dada por $g = h^{-1} \circ f$. Por la Proposición 2.1.3 sabemos que g es λK-Lipschitz. Como X es Lipschitz m-conexo, existen γ_1 y $G : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow X$ extensión de g $\gamma_1\lambda K$-Lipschitz. Finalmente consideremos $F : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow Y$ dada por $F = h \circ G$, la cual, por la Proposición 2.1.3 sabemos que es $\gamma_1 K^2 \lambda$-Lipschitz.

Para concluir, probaremos que F es una extensión de f, para ello tomamos $x \in \mathbb{S}^n$, entonces

$$F(x) = h(G(x)) = h(g(x)) = h\left(h^{-1}(f(x))\right) = f(x).$$

Como f fue cualquiera podemos concluir que Y es Lipschitz m-conexo, donde la constante que requerimos para Y es $\gamma = \gamma_1 K^2$. ■

Lema 5.3.3. *Para cada $n \geq 1$ y $m \geq 0$, $F_n(\mathbb{R})$ es Lipschitz m-conexo.*

Demostración. La demostración la realizaremos por inducción sobre n.

Base de inducción $\mathbf{n = 1}$.

Sean $\ell \in \{0, 1, \ldots, m\}$ y $f : \mathbb{S}^\ell \longrightarrow F_1(\mathbb{R})$ una función λ-Lipschitz.
Por la Proposición 3.1.11, existe $\varphi : F_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ isometría, consideremos $g : \mathbb{S}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g = \varphi \circ f$, como φ es isometría, se tiene que g es λ-Lipschitz.

Como $\mathbb{S}^\ell \subseteq \mathbb{B}^{\ell+1}$ y g es una función λ-Lipschitz, el Teorema 5.1.8 asegura que existe $G : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de g que es λ-Lipschitz.

Por otro lado, como $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow F_1(\mathbb{R})$ es isometría suprayectiva basta considerar $F : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow F_1(\mathbb{R})$ dada por $F = \varphi^{-1} \circ G$, la cual, es inmediato que es λ-Lipschitz.

Por último, sea $p \in \mathbb{S}^\ell$. Entonces

$$F(p) = \varphi^{-1}(G(p)) = \varphi^{-1}(g(p)) = \varphi^{-1}((\varphi \circ f)(p)) = f(p).$$

Como $p \in \mathbb{S}^\ell$ fue arbitrario, podemos concluir que $F|_{\mathbb{S}^\ell} = f$. Por tanto, F es una extensión $\gamma\lambda$-Lipschitz de f, donde $\gamma = 1$.

Hipótesis de inducción.

Sea $n \geq 2$. Supongamos que $F_{n-1}(\mathbb{R})$ es Lipschitz m-conexo, con ello probaremos que $F_n(\mathbb{R})$ es Lipschitz m-Conexo. Para ello tomemos $\ell \in \{0, 1, \ldots, m\}$ y $f : \mathbb{S}^\ell \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ una función λ-Lipschitz.

- **Caso 1**. Existe $x_0 \in \mathbb{S}^\ell$ tal que $\textit{diám}(f(x_0)) > 6\lambda(n-1)$.

  Por el Lema 5.2.4, existen $g, h : \mathbb{S}^\ell \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{R})$ funciones λ-Lipchitz tales que $f = g \cup h$, así por hipótesis de inducción existen

  $$G : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ y } H : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow F_{n-1}(\mathbb{R})$$

  extensiones $\gamma_1\lambda$-Lipschitz de g y h, respectivamente.

  Consideramos $\psi : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow F_{2n-2}(\mathbb{R})$ dada por $\psi = G \cup H$. Demostraremos que ψ es $\gamma_1\lambda$-Lipschitz, para ello tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{B}^{\ell+1}$. Por el Teorema 3.1.13 tenemos que

  $$H(\psi(x_1), \psi(x_2)) = \text{máx}\left\{ \max_{p \in \psi(x_1)} d(p, \psi(x_2)), \max_{q \in \psi(x_2)} d(q, \psi(x_1)) \right\}.$$

  Por tanto, basta demostrar que:

  - $\max\limits_{p \in \psi(x_1)} d(p, \psi(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$

  - $\max\limits_{q \in \psi(x_2)} d(q, \psi(x_1)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$

  Para la primera desigualdad, tomemos $p \in \psi(x_1)$. Dado que $\psi(x_1) = G(x_1) \cup H(x_1)$, tenemos dos subcasos: $p \in G(x_1)$ o $p \in H(x_1)$.

- $p \in G(x_1)$.
  Por el Teorema 3.1.13 tenemos que
  $$H(G(x_1), G(x_2)) = \text{máx}\left\{\max_{z \in G(x_1)} d(z, G(x_2)), \max_{w \in G(x_2)} d(q, G(x_1))\right\}.$$
  Por tanto, como G es $\gamma_1\lambda$-Lipschitz y $p \in G(x_1)$, se sigue que
  $$\begin{aligned} d(p, G(x_2)) &\leq \max_{z \in G(x_1)} d(z, G(x_2)) \\ &\leq H(G(x_1), G(x_2)) \\ &\leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||. \end{aligned}$$
  Por otro lado, como $G(x_2) \subseteq \psi(x_2)$, podemos concluir que
  $$d(p, \psi(x_2)) \leq d(p, G(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$$
- $p \in H(x_1)$.
  De manera similar (ocupando que H es $\gamma_1\lambda$-Lipschitz y $H(x_2) \subseteq \psi(x_2)$), podemos obtener que
  $$d(p, \psi(x_2)) \leq d(p, H(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$$

Por tanto, en cualquiera de los dos subcasos, obtenemos que
$$d(p, \psi(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$$
Como $p \in \psi(x_1)$ fue cualquiera y $\psi(x_1)$ es un conjunto finito, podemos concluir que
$$\max_{p \in \psi(x_1)} d(p, \psi(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$$
Una demostración análoga, hace ver que
$$\max_{q \in \psi(x_2)} d(q, \psi(x_1)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||.$$
Por tanto, podemos concluir que
$$H(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq \gamma_1\lambda||x_1 - x_2||,$$

como requeríamos.

Finalmente como $2n-2 \geq n$, por el Corolario 5.2.3 sabemos que existe $r : F_{2n-2}(\mathbb{R}) \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ retracción Lipschitz. Sea γ_2 su constante de Lipschitz y consideremos $F : \mathbb{B}^{\ell+1} \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ dada por $F = r \circ \psi$.

Por la Proposición 2.1.3 sabemos que F es $\gamma_1\gamma_2\lambda$-Lipschitz, por tanto resta probar que F extiende a f, para ello tomemos $p \in \mathbb{S}^\ell$, entonces

$$\begin{aligned} F(p) = r(\psi(p)) &= r(G(p) \cup H(p)) \\ &= r(g(p) \cup h(p)) \ \ (G \text{ y } H \text{ son extensiones}) \\ &= r(f(p)) \ \ (f = g \cup h) \\ &= f(p) \ \ (\text{ pues } r \text{ es retracción y} f(p) \in F_n(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Por tanto, si $\textit{diám}(f(x_0)) > 6K(n-1)$, podemos concluir que f admite una extensión $\gamma\lambda$-Lipschitz, donde γ es el producto de γ_1 con γ_2.

- **Caso 2**. $\textit{diám}(f(x_0)) \leq 6\lambda(n-1)$.

  Supongamos sin perder generalidad que $0 \in f(x_0)$ (de no ser así, bastará con realizar una traslación). Iniciaremos demostrando que

  $$f(x) \subseteq B_{6\lambda n}(0) \ \text{ para cada } \ x \in \mathbb{S}^\ell. \tag{5.3.1}$$

  Tomemos $x \in \mathbb{S}^\ell$, como f es λ-Lipschitz, tenemos que

  $$H(f(x), f(x_0)) \leq \lambda||x - x_0|| \leq 2\lambda.$$

  Además por el Teorema 3.1.13, tenemos que

  $$H(f(x), f(x_0)) = \text{máx}\left\{ \underset{z\in f(x)}{\text{máx}}\, d(z, f(x_0)),\ \underset{w\in f(x_0)}{\text{máx}}\, d(w, f(x)) \right\}.$$

  Sea pues $z \in f(x)$, entonces

  $$d(z, f(x_0)) \leq H(f(x), f(x_0)) \leq 2\lambda.$$

  Como $f(x_0)$ es un conjunto finito, podemos tomar $w \in f(x_0)$ tal que

  $$|z - w| = d(z, f(x_0)) \leq 2\lambda.$$

Por tanto $|z-0|=|z|\leq|z-w|+|w|\leq 2\lambda+6\lambda(n-1)$, esta última desigualdad se debe a que $0,w\in f(x_0)$ y $diám(f(x_0))\leq 6\lambda(n-1)$. Por tanto

$$|z-0|\leq 2\lambda+6\lambda(n-1)<6\lambda+6\lambda(n-1)=6\lambda n.$$

Por tanto, $z\in B_{6\lambda n}(0)$, así como $z\in f(x)$ fue cualquiera, podemos concluir que $f(x)\subseteq B_{6\lambda n}(0)$.

Para demostrar que f admite una extensión, consideramos la función $F:\mathbb{B}^{\ell+1}\longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ dada por

$$F(x)=\begin{cases} ||x||f\left(\dfrac{x}{||x||}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ \{0\} & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Es inmediato que $f=F|_{\mathbb{S}^\ell}$, pues dado $p\in\mathbb{S}^\ell$, como $||p||=1$, se tiene que

$$F(p)=||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right)=f(p).$$

Para demostrar que F es Lipschitz continua tomemos $p,q\in\mathbb{B}^{\ell+1}$ y consideremos los siguientes subcasos: $p\neq 0$ y $q=0$ o $p\neq 0$ y $q\neq 0$.

- $p\neq 0$ y $q=0$.
  En primer lugar, como $||p||\{0\}=\{0\}$, la Proposición 3.2.3 implica que

$$\begin{aligned} H(F(p),F(q)) &= H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right),\{0\}\right)\\ &= ||p||H\left(f\left(\frac{p}{||p||}\right),\{0\}\right). \end{aligned}$$

  Por otro lado, como f es λ-Lipschitz y $\dfrac{p}{||p||},x_0\in\mathbb{S}^\ell$, se sigue que

$$\begin{aligned} H\left(f\left(\frac{p}{||p||}\right),\{0\}\right) &\leq H\left(f\left(\frac{p}{||p||}\right),f(x_0)\right)+H(f(x_0),\{0\})\\ &\leq \lambda\left|\left|\frac{p}{||p||}-x_0\right|\right|+H(f(x_0),\{0\})\\ &\leq 2\lambda+H(f(x_0),\{0\}). \end{aligned}$$

Ahora procedamos a probar que $H(f(x_0), \{0\}) \leq 6\lambda(n-1)$. Por el Teorema 3.1.13 tenemos que

$$H(f(x_0), \{0\}) = \max\left\{\max_{z\in f(x_0)} d(z, \{0\}), \max_{w\in\{0\}} d(w, f(x_0))\right\}.$$

Por tanto, basta demostrar que

- $\max\limits_{z\in f(x_0)} d(z, \{0\}) \leq 6\lambda(n-1)$.
- $\max\limits_{w\in\{0\}} d(w, f(x_0)) \leq 6\lambda(n-1)$.

Para la primera desigualdad, tomemos $z \in f(x_0)$. Como $0 \in f(x_0)$ y $diám(f(x_0)) \leq 6\lambda(n-1)$, se sigue que

$$d(z, \{0\}) = |z| = |z-0| \leq diám(f(x_0)) \leq 6\lambda(n-1).$$

Dado que $z \in f(x_0)$ fue cualquiera y $f(x_0)$ es un conjunto finito, podemos concluir que

$$\max_{z\in f(x_0)} d(z, \{0\}) \leq 6\lambda(n-1).$$

Para la segunda desigualdad, tomemos $q \in \{0\}$, entonces $q = 0$, como $q \in f(x_0)$, se sigue que $d(q, f(x_0)) = 0 < 6\lambda(n-1)$.
Así

$$\max_{w\in\{0\}} d(w, f(x_0)) < 6\lambda(n-1).$$

Por tanto $H(f(x_0), \{0\}) \leq 6\lambda(n-1)$, como requeríamos.
Se sigue que

$$\begin{aligned}
H(F(p), F(q)) &\leq ||p||(2\lambda + H(f(x_0), \{0\})) \\
&\leq ||p||(2\lambda + 6\lambda(n-1)) \\
&< ||p||(6\lambda + 6\lambda(n-1)) \\
&= ||p||6\lambda n \\
&< ||p||6\lambda(n+1) \\
&= 6\lambda(n+1)||p-q||.
\end{aligned}$$

Es decir F es $6\lambda\,(n+1)$-Lipschitz.

- $p \neq 0$ y $q \neq 0$.
  En primer lugar, tenemos que

$$H\left(F\left(p\right),F\left(q\right)\right)=H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right),||q||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right)$$

Lo cual, es menor o igual a:

$$H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right),||p||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right)+H\left(||p||f\left(\frac{q}{||q||}\right),||q||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right).$$

Por otro lado, el hecho que f es λ-Lipschitz y la Proposición 3.2.3 implican que

$$\begin{aligned}
H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right),||p||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right) &= ||p||H\left(f\left(\frac{p}{||p||}\right),f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right)\\
&\leq ||p||\lambda\left|\left|\frac{p}{||p||}-\frac{q}{||q||}\right|\right|\\
&= ||p||\lambda\left|\left|\frac{p||q||-q||p||}{||p||\ ||q||}\right|\right|\\
&= \frac{\lambda}{||q||}\Big|\Big|\ p||q||-q||p||\ \Big|\Big|.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\Big|\Big|\ p||q||-q||p||\ \Big|\Big| \leq 2||q||\ ||p-q||$. Llamemos $r_1=||p||$ y $r_2=||q||$. Entonces

$$\begin{aligned}
||pr_2-qr_1|| &\leq ||pr_2-qr_2||+||qr_2-qr_1||\\
&= |r_2|\ ||p-q||+|r_1-r_2|\ ||q||\\
&= r_2\ ||p-q||+r_2\ |r_1-r_2|\\
&\leq r_2\ ||p-q||+r_2\ ||p-q||\\
&= 2r_2\ ||p-q||=2||q||\ ||p-q||.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que:

$$H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right), ||p||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right) \leq 2\lambda||p-q||. \qquad (5.3.2)$$

Finalmente probaremos que

$$H\left(||p||f\left(\frac{q}{||q||}\right), ||q||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||. \qquad (5.3.3)$$

Llamemos $r_1 = ||p||$, $r_2 = ||q||$ y $x = \dfrac{q}{||q||}$. Por el Teorema 3.1.13 tenemos que

$$H\left(r_1 f\left(x\right), r_2 f\left(x\right)\right) = \max\left\{\max_{z\in r_1 f(x)} d\left(z, r_2 f\left(x\right)\right), \max_{w\in r_2 f(x)} d\left(w, r_1 f\left(x\right)\right)\right\}.$$

Por tanto, basta probar que

- ∘ $\max_{z\in r_1 f(x)} d\left(z, r_2 f\left(x\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||$.
- ∘ $\max_{w\in r_2 f(x)} d\left(w, r_1 f\left(x\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||$.

Para la primera desigualdad, tomemos $z \in r_1 f\left(x\right)$. Entonces $z = r_1\acute{p}$ para algún $\acute{p} \in f\left(x\right)$. Consideramos $w = r_2\acute{p} \in r_2 f\left(x\right)$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(z, r_2 f\left(x\right)\right) \leq |z-w| &= |r_1\acute{p} - r_2\acute{p}| \\ &= |\acute{p}|\ |r_1 - r_2| \\ &\leq 6\lambda n|r_1 - r_2|\ (5.3.1) \\ &\leq 6\lambda n||p-q||. \end{aligned}$$

Como $z \in r_1 f\left(x\right)$ fue cualquiera y $r_1 f\left(x\right)$ es un conjunto finito, se tiene que

$$\max_{z\in r_1 f(x)} d\left(z, r_2 f\left(x\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||.$$

Una demostración similar hace ver que

$$\max_{w\in r_2 f(x)} d\left(w, r_1 f\left(x\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||.$$

Por tanto, podemos concluir que

$$H\left(r_1 f\left(x\right), r_2 f\left(x\right)\right) \leq 6\lambda n||p-q||.$$

Así, por las desigualdades (5.3.2) y (5.3.3), tenemos que

$$\begin{aligned} H\left(F\left(p\right), F\left(q\right)\right) &= H\left(||p||f\left(\frac{p}{||p||}\right), ||q||f\left(\frac{q}{||q||}\right)\right) \\ &\leq 2\lambda||p-q|| + 6\lambda n||p-q|| \\ &< 6\lambda||p-q|| + 6\lambda n||p-q|| \\ &= 6\lambda\left(n+1\right)||p-q||. \end{aligned}$$

Es decir, F es $6\lambda\left(n+1\right)$-Lipchitz.

Por tanto, si $diám\left(f\left(x_0\right)\right) \leq 6\lambda\left(n-1\right)$, podemos concluir que f admite una extensión $\gamma\lambda$-Lipchitz, donde $\gamma = 6\left(n+1\right)$.

Así, sea cual sea el caso: $diám\left(f\left(x_0\right)\right) > 6\lambda\left(n-1\right)$ o $diám\left(f\left(x_0\right)\right) \leq 6\lambda\left(n-1\right)$, tenemos que $F_n\left(\mathbb{R}\right)$ es Lipschitz m-conexo. ■

5.4. Una última promesa por cumplir

En esta última sección hablaremos un poco (casi nada) sobre los espacios métricos completos, enunciaremos unos pocos resultados que necesitamos para demostrar nuestra última promesa, sin embargo no se demostrarán pues salen de los intereses de este escrito.

Definición 5.4.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X es **completo** si toda *sucesión de Cauchy* en X converge a un elemento de X.

Observación 5.4.2. Si X, Y son espacios métricos con $X \overset{lip}{\approx} Y$ y X es completo, entonces Y es completo.

El siguiente teorema nos habla sobre completitud y la relación que ésta guarda entre un espacio métrico y su enésimo producto simétrico. Sin embargo no se demostrará pues sale de los propósitos de este escrito. Para una demostración de este teorema el lector puede consultar [1, Teorema 4.19, pág. 75]

Teorema 5.4.3. *Sean (X,d) espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) X es completo

(b) $F_n(X)$ es completo.

Por último enunciaremos un resultado que ocuparemos para finalizar este escrito. De igual manera se dejará la referencia para consultar la prueba de éste.

Teorema 5.4.4. *[8, Corolario 1.7] Sea (X,d) un espacio métrico completo. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) Existe una constante γ tal que para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$, cada función λ-Lipschitz $f : A \longrightarrow X$ puede ser extendida a una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ $\gamma\lambda$-Lipschitz.

(b) X es Lipschitz $(n-1)$-conexo.

Teorema 5.4.5. *$F_n(\mathbb{R})$ es un retracto absoluto Lipschitz.*

Demostración. Sea $h : F_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ el encaje construido en el Teorema 4.2.1, llamemos $A = h(F_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Dado que $\mathbb{R}$ es completo por el Teorema 5.4.3 tenemos que $F_n(\mathbb{R})$ es completo. Además como h es encaje bi-Lipschitz por la Observación 2.3.5 tenemos que

$$F_n(\mathbb{R}) \overset{lip}{\approx} h(F_n(\mathbb{R})). \tag{5.4.1}$$

Por tanto, por la Observación 5.4.2, se tiene que $h(F_n(\mathbb{R}))$ es completo.
Por otro lado sabemos que $F_n(\mathbb{R})$ es Lipschitz m-Conexo (Lema 5.3.3). Así por (5.4.1) y la Proposición 5.3.2, tenemos que $h(F_n(\mathbb{R}))$ es Lipschitz m-conexo .

Consideremos $id_A : A \longrightarrow A$ (la cual es 1-Lipschitz). Como A es completo y m-conexo, existe una constante γ y $r : \mathbb{R}^m \longrightarrow A$ extensión γ-Lipschitz de id_A (Teorema 5.4.4), por tanto se tiene que A es un retracto Lipschitz de $\mathbb{R}^m$ (la retracción Lipschitz es r).

Por último, como A es un retracto Lipschitz de $\mathbb{R}^m$ y éste es un retracto absoluto Lipschitz (Corolario 5.1.11), se sigue que A es un retracto absoluto Lipschitz (Corolario 5.1.6). Por tanto, por (5.4.1) y la Proposición 5.1.7, concluimos que $F_n(\mathbb{R})$ es un retracto absoluto Lipschitz. ■

Bibliografía

[1] F. Barragán, A. Romero, S.S. Perales, V.V.Grijalva, *Capítulo 3 Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, J.Angoa, R.Escobedo, M.Ibarra (editores), *Topología y sus aplicaciones*, Vol. 3, Dirección de Fomento editorial, BUAP, 2014.

[2] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric NonLinear Functional Analysis*. Vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 48, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[3] M. Borovikova, Z. Ibragimov, H. Yousefi, *Symmetric Products of the Real Line*, J. Anal. **18** (2010), 53-67.

[4] K. Borsuk, S. Ulam, *On Symmetric Products Of Topological* Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), no. 12, 875-882.

[5] S.H. Friedberg, A.J. Insel, L.E. Spence, *Linear Algebra*, Fourth Edition, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, 2003.

[6] A. Illanes, S.B. Nadler Jr.,*Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[7] L.V. Kovalev, *Symmetric Products of the Line: Embeddings and Retractions*, Proc. Am. Math. Soc, **143** (2015), no. 2, 801-809.

[8] U. Lang y Th. Schlichenmaier, *Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions*, Int. Math. Res. Not. 2005, no. 58, 3625-3655.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.