Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ESTUDIO SOBRE EL ENREDAMIENTO POSTSELECCIONADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

GUSTAVO ARMENDÁRIZ PEÑA

TUTOR PRINCIPAL:
DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR, FACULTAD DE CIENCIAS
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD, INSTITUTO DE FÍSICA
DR. JORGE ALEJANDRO REYES ESQUEDA, INSTITUTO DE FÍSICA

2018

1. Datos del alumno
Fís. Gustavo Armendáriz Peña
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física

---

2. Datos del tutor
Dr. Víctor Velázquez Aguilar
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

---

3. Datos del sinodal 1
Dr. Naser Quershi
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología

---

4. Datos del sinodal 2
Dra. Sara Guadalupe Cruz y Cruz
Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

---

5. Datos del sinodal 3
Dr. Mathieu Christian Anne Hautefeuille
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

---

6. Datos del sinodal 4
Dr. Jesús Garduño Mejía
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología

---

7. Datos del trabajo escrito
Estudio sobre el enredamiento postseleccionado
57 p
2018

Índice general

Dedicado a Indira, la luz que me acompaña.

Agradecimientos

Estudiar y concluir una maestría siempre es el resultado de un proceso en el que intervienen muchos elementos. En mi caso, estos elementos van desde la unviersidad con sus instalaciones y sus profesores, hasta mis compañeros, amigos y familia que siempre ha estado ahí. Por todo esto, creo que es verdaderamente difícil agradecer a cada uno de los que me aportaron algo para concluir este trabajo de tesis. Aún así, intentaré nombrar a la mayoría esperando no ofender a alguien si lo omito.

En primer lugar agradezco a la UNAM y al Posgrado en Ciencias por brindarme la oportunidad de estudiar en el seno de la "zona de institutos y la Facultad de Ciencias" con toda su infraestructura siempre disponible. Junto con ellos, agradezco a mis profesores que se empeñaron en buscar la excelencia académica en mí y en mis compañeros, así como a los sinodales que se tomaron el tiempo para leer este trabajo y darme sus comentarios. Agradezco a mis amigos del posgrado que no sólo me acompañaron, sino que me enseñaron mucho en tantas de esas discusiones que parecían no tener fin. A todos los integrantes del Grupo QO le agradezco por brindarme un sin fin de posibilidades: un lugar donde puedo discutir de los temas que más me apasionan, donde puedo emprender nuevas ideas, donde aprendo continuamente, donde comparto mis conocimientos y donde me lleno de aventuras... y todo junto con personas que han llegado a ser grandes amigos. A Erick Barrios Barocio agradezco que me haya brindado su amistad, porque en él siempre he encontrado a alguien del que aprendo mucho y que admiro por su interés incansable en que el mundo sea un lugar mejor. A José Roberto Romero Arias le agradezco también por su amistad incondicional en muchos de los momentos más importantes de mi vida, le agradezco por cada palabra de aliento y cada detalle de confianza. También, a pesar de que no están dentro de mi círculo académico, agradezco mucho a toda mi familia, principalmente a mis padres, por haberme brindado siempre la oportunidad de aprender algo más, y por aguatarme cuando mi personalidad crítica se torna en necedad.

Finalmente quiero agradecer a dos personas que han influido especialmente en mi vida y a quienes les debo mucho. La primera es *Víctor Manuel Velázquez Aguilar*: Víctor, te diré que un recuerdo que tengo muy presente es cuando te busqué para que fueras mi tutor de la licenciatura desde la mitad de la carrera. De verdad creo que desde ese día hasta hoy no ha habido momento en que hayas dejado de apoyarme, alentarme y creer en mí. Has sido sin duda el más grande ejemplo de vida que he conocido por tu humildad y humanidad. Y te agradezco no sólo que seas mi tutor, sino que seas un gran amigo. La segunda persona es *Indira Blanco Jarvio*: Indira, a pesar de estos años de casados de verdad aún no puedo creer la fortuna de despertar cada mañana junto a ti. Te miro y veo a una mujer hermosa y admirable académicamente, laboralmente y humanamente. No sólo te agradezco por ayudarme en la parte académica, sino en toda mi vida. Gracias por caminar junto a mí y te dedico este logro para que lo celebremos juntos... porque en realidad te has convertido en esa luz que me acompaña en todo momento.

Índice de figuras

Resumen

El trabajo presente surgió con la intención de preparar estados enredados sin la necesidad de usar un cristal no-lineal tipo II, sino sólo con el de tipo I (es decir, con estados en la base de número pero no enredados). Para ello se propuso un arreglo similar al interferómetro de Hong-Ou-Mandel (HOM) en el que se controlan las polarizaciones a la entrada del divisor de haz (BS). Luego, se postseleccionaron los estados enredados y se midió el parámetro de Bell: $S = 9{,}75 \pm 2{,}24$.

Es importante mencionar que para el objetivo principal también se hizo un estudio profundo del interferómetro HOM (suponiendo un haz de bombeo con un ancho espectral al rededor de una frecuencia ω_0) en el que se encontró una función teórica que se acopla claramente no sólo el deep clásico del interferómetro, sino también los batimientos de amortigüamiento a los costados del deep.

Abstract

The present work came up with the intention of preparing entangled states without the need of using type II non-linear crystals, but only with a type I crystal instead (that is, with states in the number base but not entangled). To this end, we proposed an arrangement similar to the Hong-Ou-Mandel interferometer (HOM) in which we can control the polarization at the input of the beam splitter (BS). After this, the entangled states were post-selected obtaining a Bell parameter measurement of: $S = 9{,}75 \pm 2{,}24$.

It is important to mention that for our main objective we made an in-depth study of the HOM interferometer (assuming a pump beam with an spectral width around a frequency ω_0) in which a theoretical function was found that not only predicts clearly classic deep of the interferometer, but also the dampening of the beatings on the sides of the deep.

Objetivos Generales

- Preparar y caracterizar estados enredados con fotones en la base de polarización.
- Estudiar un interferómetro de HOM teórico suponiendo un haz de bombeo con un ancho espectral al rededor de una frecuencia central ω_0.
- Construir un interferómetro de HOM.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Importancia de la óptica cuántica

La relevancia que se le da a la investigación en un área específica y nueva en la ciencia siempre es de acuerdo al nivel de impacto y aplicaciones que promete. Este es el caso de la óptica cuántica, un área relativamente joven (poco más de 50 años), que en los últimos 30 años ha tomado un gran auge a nivel mundial. Por ejemplo, dos de las áreas más importantes donde la óptica cuántica promete mucho, son la información y la computación cuántica. De hecho, ya existen diversos protocolos y arreglos para encriptar información o construir compuertas lógicas cuánticas usando estados de luz [4, 6] que se siguen estudiando por su versatilidad, reproducibilidad y eficiencia.

Una de las razones por las que se busca generar estas tecnologías nuevas (como los dispositivos de encriptación cuántica) usando óptica cuántica es porque tal vez se podrían usar tecnologías ya existentes como la fibra óptica (es decir, canales clásicos) y mucho de su infraestructura. En cuanto a computación cuántica, desde hace ya más de 20 años, promete resolver muchos problemas disminuyendo los tiempos de procesamiento (de procesos no-polinomiales a polinomiales) mediante algorítmos cuánticos. Esto se traduce como una nueva puerta para computación tan nueva como lo sería una computadora personal actual para una persona de los 50's.

Otro ejemplo de las ventajas que ofrece la óptica cuántica experimental, es la aplicación de los procesos de medición en otras áreas. Tal es el caso del observatorio LIGO, que está diseñado para la detección de ondas gravitacionales. Sin embargo, este es laboratorio básicamente un interferómetro de Michelson con brazos de 4km de largo. Además, los métodos de medición y adquisición de datos fueron principalmente desarrollados para hacer óptica cuántica.

Todo esto conlleva, naturalmente, a la necesidad de prestar cada vez más atención a la enseñanza de la óptica cuántica, y otras areas afines, ya no sólo a nivel posgrado (como investigación), sino también desde el nivel licenciatura. Más aún, es inminente llevar estos conceptos hasta la divulgación científica pues se pretende que pronto (un par de décadas), las nuevas tecnologías no sólo se manejen en el ámbito científico, sino por casi todas las personas.

El trabajo presentado en esta tesis pretende brindar un granito de arena en cada uno de estos puntos: sembrando una semilla que sirva como otro cimiento hacia nuevas investigaciones, apoyando en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de física c ántica (pues, en el laboratorio, uno puede manipular los conceptos aprendidos en la teoría), y mostrando al público en general para qué sirve hacer ciencia y, en particular, óptica cuántica.

1.2. Importancia de los interferómetros cuánticos

Los interferómetros ópticos son dispositivos que obligan a superponer al menos dos campos generando máximos de intensidad (cuando se superponen máximos de intensidad) y mínimos de intensidad (cuando se superponen un máximo y un mínimo de intensidad local). Los dispositivos que se usan para lograr esto son muy variados. Se pueden clasificar en interfeómetros de división de frente de onda (como el interferómetro de Young) y en interferómetros de división de amplitud [1] (como el interferómetro de Michelson o el interferómetro de Mach-Zehnder [2]), aunque existen otras clasificaciones.

Es muy común que en experimentos de óptica se use algún interferómetro, ya sea al inicio del experimento o, bien, como elemento esencial del experimento. La razón de ello es que los interferómetros son capaces de brindar mucha información sobre la fuente de luz (longitud y tiempo de coherencia, amplitud espectral y distribución espacial de amplitud y longitud de onda), medios de propagación (índice de refracción, tomografía espacial del medio de propagación [Holografía electrónica] y perturbaciones temporales en el medio como fonones o gradientes de temperatura) y hasta fenómenos del medio (como efecto Doppler). Además, los interferómetros son altamente sensibles a pequeños cambios debido a que las interacciones son a las escalas de la longitud de onda (comúnmente, décimas de micrómetro). Todas estas características convierten a los interferómetros en herramientas muy poderosas que se pueden aplicar a muchas áreas diferentes como metrología (espacial y temporal), holografía, espectroscopía, radioastronomía y muchas más.

En el siglo XIX, los interferómetros ópticos ya habían sido estudiados formalmente mostrando la clara naturaleza ondulatoria de la luz. Sin embargo, en los inicios del siglo XX, las cosas ya no parecían tan claras debido al bombardeo de nuevas ideas como la cuantización de la energía y la dualidad onda-partícula propuesta hasta los 20's. Para estos años se pensó que, si estas nuevas ideas eran ciertas, las partículas como los electrones, deberían mostrar las mismas propiedades que la luz en las condiciones apropiadas, consecuencia que parecía imposible para el pensamiento físico clásico. Sin embargo, la búsqueda de estos fenómenos puramente cuánticos se tornó muy importante cuando las investigaciones sobre nuevas tecnologías divisaban la posibilidad de experimentos a escalas inalcanzables hasta entonces. Desgraciadamente, tomó muchos años mostrar que esto de verdad ocurre.

Casi todos los interferómetros cuánticos, a pesar de ser tan parecidos a los clásicos, principalmente se diferencian en que, en lugar de enviar dos frentes de onda (creados ya sea por división de frente de onda o por división de amplitud), se envían estados en la base de número (uno, dos o un número entero de *cuantos* de luz) y que son independientes entre sí, por lo que se dice que se comportan como partículas. Es decir, conceptualmente, los interferómetros cuánticos son trascendentes porque muestran patrones de interferencia con partículas en lugar de ondas. Además, existen efectos que aparecen sólo en el régimen cuántico y no en el clásico; por ejemplo, en el interferómetro de HOM (Capítulo 4), aparece un efecto de interferencia destructiva que sólo se puede deducir suponiendo estados cuánticos. Más aún, cuando se usan estados enredados como entradas para un interferómetro, aumenta el grado de complejidad de las interacciones y sus opciones de aplicaciones [6].

Otra de los aspectos importantes de los interferómetros cuánticos es que la arquitectura de los dispositivos se pueden usar en un área que actualmente se está explorando y promete mucho: la computación cuántica. Muchos de los dispositivos que se proponen en compuertas lógicas cuánticas, involucran configuraciones similares a los interferómetros (como el Mach-Zehnder) o usan elementos que se estudian en los interferómetros. De hecho, esta última área es también una de las líneas de interés del grupo de trabajo al que pertenece esta tesis.

1.3. Hacia la comprensión del enredamiento cuántico

Una de las consecuencias de la teoría cuántica que más ha causado polémica es la existencia de ciertos entes físicos que, para algunos, parecen violar las bases de lo que llamamos "realidad física". Esta realidad física se define formalmente de la siguiente manera:

Si, sin perturbar en modo alguno un sistema, podemos predecir con certeza (con probabilidad igual a 1) el valor de una magnitud física, entonces existe un elemento de realidad física que corresponde a esa cantidad física.

Sin embargo, en 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen (EPR) publicaron un artículo [3] en el que cuestionaban si la mecánica cuántica es una teoría que a través de la función de onda describe la realidad física de manera completa, llegando a la conclusión de que esta no lo es. Para esto se plantean un experimento mental que constaba, muy burdamente, en un par de partículas que interactuaron en el pasado y quedaron en un estado *enredado*. Cada una de las partículas era enviada a un observador diferente. Ahora bien, si el primero de los observadores medía la posición de su partícula, podía saber instantáneamente la posición del otro. El segundo observador podía, por ejemplo, medir el momento de su partícula y saber instantáneamente el momento de la otra partícula. Así, el momento y la posición de cada partícula podría ser determinada por completo, lo que viola el principio de incertidumbre. Más aún, un estado enredado mantenía esta propiedad independientemente de la base usada. Es decir, si un par de partículas se encontraban en un estado enredado y cada una mantenía una propiedad complementaria respecto a la otra (espín abajo y espín arriba, por ejemplo), sería igual en cualquier base. Sin embargo, hasta antes de ser medida tal propiedad física en cualquiera de las dos partículas, las dos podrían manifestar cualquiera de las dos propiedades posibles de cada partícula individual (para el caso de los espines, podrían manifestar propiedades de espín arriba y abajo al mismo tiempo). Esta característica causó mucha confusión durante las muchas discusiones respecto la naturaleza de estos entes físicos llamados "estados enredados". Una de las consecuencias más famosas, aunque estrictamente errónea, es la de El Gato de Schrödinger: un sistema en el que un gato podía estar vivo y/o muerto hasta antes de observarlo.

Los argumentos a favor y en contra de la teoría cuántica, su completez y otras cosas, fueron aumentando hasta que un gran seguidor de Einstein, John Bell, propuso una solución al problema: la medición de un parámetro que se conoce como "Parámetro de Bell". Este parámetro se obtiene como resultado de mediciones estadísticas sobre el estado enredado y algunas proyecciones particulares (es decir, las "probabilidades de medir un estado"). Además, tal parámetro debe cumplir con una desigualdad (es decir, debe estar dentro de un máximo y mínimo); en caso contrario, cuando el parámetro viola esa desigualdad, se puede decir que el estado que se midió estaba enredado.

Pasaron muchos años, para que la tecnología permitiera realizar el experimento, incluso la muerte de Einstein. Fue hasta 1981 que Alain Aspect *et al* reportaron que, usando el parámetro de Bell, podían asegurar que tenían un estado enredado [15], y con esto, que efectivamente existen estados físicos con propiedades no locales.

A pesar de la comprobación experimental, la discusión alrededor del tema no ha cesado. Una de las razones es porque los métodos de detección y análisis de datos pueden llegar a modificar la interpretación física que se supone. De hecho, actualmente se siguen desarrollando muchos experimentos diferentes para corroborar la no-localidad de la naturaleza, a pesar de que el entendimiento de la naturaleza de un estado enredado sigue siendo muy complejo. Es decir, las preguntas ¿qué es un estado enredado?, ¿cómo y cuándo se enredaron?, ¿bajo qué condiciones o límites se puede considerar enredado?, por ejemplo, se siguen investigando.

El trabajo presente intenta también acercarse un poco más a las respuestas de las preguntas anteriores. Para ello en el Capítulo 2 se deduce con cuidado la matemática necesaria para expresar estados cuánticos en la base de número. Con esto, en el Capítulo 3 se muestra cómo es el estado cuántico de los fotones que se usarán teórica y experimentalmente. Luego, dado que la configuración propuesta para producir estados enredados es muy similar a la del Interferómetro de Hong-Ou-Mandel, en el Capítulo 4 se revisa minusiosamente la teoría de este interferómetro, mientras que en el Capítulo 5 se muestra el trabajo experimental del interferómetro y su comparación con la teoría. Después, en el Capítulo 6 se describe un experimento que, además de buscar entender mejor la naturaleza de un estado enredado, aborda el problema desde una perspectiva mucho más intuitiva y didáctica. La herramienta teórica que se usó en este capítulo se detalla en el Apéndice C. Finalmente, en el Capítulo 7 se discuten más a fondo los resultados obtenidos, las ventajas que ofrece este trabajo (desde la reproducibilidad y el enfoque didáctico, hasta la publicación de una corrección de uno de los artículos base de esta tesis [8]) y las incógnitas que continuan sin respuesta (como los referentes a los procesos y aparatos de medición y análisis de datos en experimentos de óptica cuántica), temas que se convierten en los siguientes pasos para investigación en nuestro grupo de trabajo.

Capítulo 2

Cuantización del campo

Después de que Planck y Einstein introdujeran la idea de energía electromagnética discreta (emisión y absorción), inició una revolución del concepto de la luz, entre otros. Más aún, se abrió un horizonte hacia nuevos fenómenos que nadie habría imaginado en la luz. Para estudiar este nuevo horizonte también se necesitó crear el álgebra que representara a la luz bajo este marco. En este capítulo se deducirá el concepto matemático básico de *fotón* para el caso unimodal. Más adelante, en los Capítulos 3 y 4, se estudiarán no sólo los casos analíticos unimodales, sino también los multimodales.

2.1. Cuantización del campo electromagnético unimodal

En esta sección se estudiará la radiación de un campo electromagnético como se puede encontrar en el libro de Gerry y Knight [4] pero mostrando el desarrollo completo. Partiremos del caso dentro de una caja unidimensional a lo largo del eje z donde las paredes son perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$.

Dadas las condiciones del problema, sabemos que el campo eléctrico debe desvanecerse en las fronteras, tomando la forma de una onda estacionaria. Aquí asumimos, también, que no hay fuentes de radiación; es decir, no hay corrientes o cargas ni cualquier medio dieléctrico en la cavidad. Por otro lado, supongamos que el campo está polarizado en la dirección del eje x, es decir:

$$\mathbf{E}(r,t) = \vec{e}_x E_x(z,t) \tag{2.1}$$

Donde $\vec{e}_x$ es un vector unitario de polarización. Ahora bien, las ecuaciones de Maxwell sin fuente y en unidades del SI, son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.5}$$

Un campo unidimensional que satisface las ecuaciones anteriores y las condiciones a la frontera está dado por:

$$E_x(z,t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2} q(t) sin(kz) \tag{2.6}$$

donde ω es la frecuencia del modo y k es el número de onda relacionado con la frecuencia de acuerdo a: $k = \omega/c$. Las condiciones de frontera en $z = L$ permiten que la frecuencia en la ecuación 2.6 puedan ser varias, bajo la restricción de que $\omega_m = c(m\pi/L)$, con $m = 1, 2, ...$; nosotros asumimos que tal ω es cualquier ω_m y simplemente ignoramos el resto por ahora. V se refiere al volumen efectivo de la cavidad, mientras que $q(t)$ es un factor de dependencia temporal, con dimensiones de longitud. (Más adelante, se notará que $q(t)$ se manifestará como una posición canónica).

Sustituyendo la ecuación 2.6 en 2.3, encontramos que el campo magnético en la cavidad está dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \vec{e}_y B_y(z, t) \tag{2.7}$$

donde:

$$B_y(z,t) = \frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\sqrt{\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}}\dot{q}(t)\cos(kz) \tag{2.8}$$

Ahora bien, si $q(t)$ actúa como una posición canónica, entonces $\dot{q}(t)$ funciona como un momento canónico para una partícula de masa unitaria, i.e. $p(t) = \dot{q}(t)$.

La energía clásica o hamiltoniano H del campo unimodal está dado por:

$$H = \frac{1}{2}\int dV[\epsilon_0\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)] = \frac{1}{2}\int dV[\epsilon_0 E_x^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0}B_y^2(\mathbf{r},t)] \tag{2.9}$$

Y a partir de las ecuaciones (2.6) y (2.8), sustituyéndolas en la ecuación (2.9), se puede deducir que:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \tag{2.10}$$

Aquí resulta más natural intuir la comparación con oscilador armónico, pues, formalmente, el campo unimodal es equivalente; es decir, además de unos factores de escala, los campos eléctricos y magnéticos juegan el papel de la posición y momento canónicos.

Ahora identifiquemos a estas variables p y q como los operadores $\hat{p}$ y $\hat{q}$. Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \tag{2.11}$$

Luego entonces, los campos eléctrico y magnético unimodales se convierten en los operadores:

$$\hat{E}_x(z,t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}}\hat{q}(t) sen(kz) \tag{2.12}$$

y

$$\hat{B}_y(z,t) = \frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\sqrt{\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}}\hat{p}(t)\cos(kz) \tag{2.13}$$

Por lo tanto, el hamiltoniano se convierte en:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) \tag{2.14}$$

Los operadores $\hat{q}$ y $\hat{p}$ son hermitianos y, por tanto, corresponden a cantidades observables. Por otro lado, sin embargo, introducimos los operadores no hermitianos (y, por lo tanto, no observables) de aniquilación y de creación a través de las siguientes dos relaciones:

$$\hat{a} = \frac{(\omega\hat{q} + i\hat{p})}{\sqrt{2\hbar\omega}} \tag{2.15}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{(\omega\hat{q} - i\hat{p})}{\sqrt{2\hbar\omega}} \tag{2.16}$$

Ahora, si expresamos a $\hat{p}$ y $\hat{q}$ en términos de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, podemos encontrar que los campos eléctrico y magnético se pueden expresar como:

$$\hat{E}_x(z,t) = \epsilon_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)sin(kz) \tag{2.17}$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \beta_0\frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\cos(kz) \tag{2.18}$$

donde:

$$\epsilon_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \tag{2.19}$$

$$\beta_0 = \frac{\mu_0}{k}\sqrt{\frac{\epsilon_0\hbar\omega^3}{V}} \tag{2.20}$$

representan el campo eléctrico y magnético "por fotón[1] ", respectivamente. Y, recordando que el conmutador entre $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ es 1, de las ecuaciones 2.17 y 2.18 podemos deducir que:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.21}$$

donde $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ es el operador de número.

La dependencia temporal de los operadores de creación y aniquilación puede deducirse a partir de la ecuación de Heisenberg. En general, para un operador arbitrario O que no tenga dependencia explícita en el tiempo, la ecuación de Heisenberg dice que:

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}] \tag{2.22}$$

Para el caso del operador de aniquilación, tenemos que:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = -i\omega\hat{a} \tag{2.23}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \tag{2.24}$$

Análogamente para el operador de creación, tenemos que:

[1] En realidad, esto no es del todo correcto pues, en estos campos, el promedio es cero para un número definido de fotones. Aún así, son medidas muy útiles de las fluctuaciones del campo cuantizado.

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} \tag{2.25}$$

Ahora bien, sea $|n\rangle$ un eigenestado de la energía de un campo unimodal, con el eigenvalor de energía E_n tal que:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{2.26}$$

Si multiplicamos por $\hat{a}^\dagger$ por la izquierda, entonces podemos generar una nueva ecuación de eigenvalores:

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = E_n\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{2.27}$$

Recordando las relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación, podemos reescribir la ecuación (2.25) como:

$$\hbar\omega[(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2}\hat{a}]|n\rangle = E_n\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{2.28}$$

o

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|n\rangle) \tag{2.29}$$

el cual es un problema de eigenvalores para el eigenestado $(\hat{a}^\dagger|n\rangle)$, con el eigenvalor de energía $E_n + \hbar\omega$. Ahora es claro que $\hat{a}^\dagger$ es llamado el operador de creación, pues "crea" un cuanto de energía $\hbar\omega$. Análogamente a este resultado, si multiplicamos la ecuación (2.26) por el operador $\hat{a}$, obtenemos que:

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle) \tag{2.30}$$

donde es evidente que el operador $\hat{a}$ destruye o aniquila un cuanto de energía (o un fotón). Es decir, los eigenvalores de la energía van disminuyendo en múltiplos de $\hbar\omega$ porque el eigenestado $\hat{a}|n\rangle$ tiene eigenvalores $E_n - \hbar\omega$. Sin embargo, la energía del oscilador armónico debe ser siempre positiva, lo que nos dice que debe haber un eigenvalor de energía "mínimo", $E_0 > 0$, con el correspondiente eigenestado $|0\rangle$ tal que:

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) = 0 \tag{2.31}$$

pues

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{2.32}$$

Por lo tanto, el problema de eigenvalores para el estado base es:

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle \tag{2.33}$$

Este eigenvalor de energía mínimo es llamado energía de punto cero: $\hbar\omega/2$.

Ahora bien, a partir de que: $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ los eigenvalores de energía son:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})n = 0, 1, 2, ... \tag{2.34}$$

Por otro lado, para el operador de número tenemos que:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \tag{2.35}$$

Pero los estados de número deben estar normalizados de acuerdo con $\langle n|n\rangle = 1$. Entonces, para el estado $\hat{a}|n\rangle$ tenemos que:

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle \tag{2.36}$$

donde c_n es una constante a determinar. Ahora, el producto entre $\hat{a}|n\rangle$ consigo mismo es:

$$(\langle n|\hat{a}^\dagger)(\hat{a}|n\rangle) = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n \tag{2.37}$$

de donde vemos que $c_n = \sqrt{n}$, por lo que podemos reescribir la ecuación 2.34 como:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{2.38}$$

Procediendo de manera análoga, podemos mostrar que:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2.39}$$

De estos últimos resultados, es claro que los estados de número $|n\rangle$ se deben generar a partir del estado base $|0\rangle$ simplemente repitiendo la acción del operador de creación; es decir:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{2.40}$$

Luego entonces, por obvias razones, se dice que los fotones que se representan de esta forma se encuentran en la base de número.

Las fuentes de luz que se pueden representar en esta base son llamadas *fuentes cuánticas* porque presentan una estadística cuántica [4]. Una de las maneras más claras de diferenciar esta fuente de otras es a través de la funciónd de correlación de segundo orgen $G^{(2)}$, donde ocurre que cuando el tiempo (τ) en el que se mide la correlación entre dos campos es cero, el valor de la función también es cero. Luego, cuando el tiempo τ aumenta, la función se acerca asintóticamente a 1. Por el contrario, cuando se hacen las mismas mediciones pero para una fuente térmica (donde los fotones siempre aparecen en *bunching* o amontonados), la función comienza en 2 (para $\tau = 0$) y después se acerca asintóticamente a 1. Finalmente, lo que ocurre con una fuente coherente (como un láser), es que el valor de la función $G^{(2)}$ siempre es 1, independientemente de τ.

Ahora bien, los fotones expresados como en la ecuación 2.40 pueden formar una base (infinita) que sirve para expresar otros estados como, por ejemplo, el de un estado coherente (es decir, un estado de luz que presente una estadística coherente). Específicamente, esto se escribe de la siguiente manera:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle \tag{2.41}$$

donde $C_n = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0$, por lo que también podemos expresar:

$$|\alpha\rangle = C_0\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2.42}$$

De la ecuación 2.42 podemos incluso concluir que la distribución de los estados de número en el estado coherente es poissoniana, pues los coeficientes de $|n\rangle$ van como $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$. Esto también implica que podemos pensar al estado coherente como un conjunto infinito de estados de número pero con uno de ellos predominante.

Estas últimas dos descripciones, las de los estados de número y los coherentes usando la base de , se usarán más adelante (Capítulos 4 y 5) para la descripción de los estados que se usaron en el interferómetro y en la producción de estados enredados.

2.2. Entrelazamiento cuántico

Pensemos en un sistema cuántico bipartita. No necesariamente debe ser un sistema de dos fotones, aunque éste podría ser un ejemplo. Definamos pues a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ como dos espacios de Hilbert asociados a los componentes del sistema S_A y S_B respectivamente.

Ahora bien, decimos que el estado del sistema compuesto $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ es separable si puede ser escrito como el producto tensorial de los estados puros $|\psi_1\rangle$ y $\psi_2\rangle$

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \tag{2.43}$$

donde $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$.

En el caso de los estados mixtos, decimos que un estado es separable si y sólo si el operador de densidad $\hat{\rho}$ puede escribirse como una combinación lineal convexa:

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j^{(A)} \otimes \hat{\rho}_j^{(B)} \tag{2.44}$$

donde $\hat{\rho}_j^{(A)}$ y $\hat{\rho}_j^{(B)}$ son operadores de densidad asociados a cada uno de los subsistemas, y p_j son números positivos tales que:

$$\sum_j p_j = 1$$

Así pues, **podemos definir un *estado entrelazado* como aquel que no es separable** o que no puede ser expresado de la forma 2.43.

El entrelazamiento o grado de entrelazamiento puede ser cuantificado por diferentes medidas como la entropía de von Newmann, la entropía relativa de entrelazamiento, el número de Schmidt, la concurrencia, la fidelidad maximal de teleportación y el parámetro de Bell. Una explicación más amplia de todo esto, se puede encontrar en 14. En este trabajo, se usará una de las versiones del parámetro de Bell (Capítulo 6), y se muestra su deducción teórica en el Apéndice C.

Capítulo 3

Generación de pares de fotones correlacionados

Los estados óptico-cuánticos con los que trabajamos en los experimentos mostrados en esta tesis, son provenientes de una conversión paramétrica descendente espontanea (SPDC, por sus siglas en inglés) al bombear un cristal no-lineal con un láser violeta. Los fotones producidos (infrarrojos) se distribuyen en un cono y guardan correlaciones importantes que se convierten en ventajas para este tipo de trabajos. Además, y punto muy importante, estos fotones tienen una estadística cuántica [5] y aparecen con un fotón gemelo diametralmente opuesto en el cono. A este fotón se le conoce como *heraldo* [2], pues funciona como mensajero avisando (o comprobando) la presencia del otro.

3.1. Cristrales BBO

Los cristales β-BaB_2O_4 (casi siempre abreviados como BBO) son materiales ópticos no lineales y con una alta birrefringencia uniaxial negativa. Estos cristales se caracterizan por ser casi totalmente transparentes sobre un amplio ancho de banda: desde el ultravioleta hasta el infrarrojo cercano, cuentan con una amplia capacidad de acoplamiento de fase y baja susceptibilidad higroscópica. Otra característica importante de los BBO es que son capaces de producir fotones por generación de segundo armónico (GSA), por diferencia de frecuencias (GDF) y por generación de suma de frecuencias (GSF).

Durante la fabricación de los cristales BBO se tiene el suficiente control para determinar el ángulo entre el eje óptico del cristal y la trayectoria que debe llevar el rayo de bombeo. Éste ángulo θ, llamado ángulo de corte, está relacionado con los índices de refracción ordinario y extraordinario del cristal de la siguiente forma:

$$\frac{sen^2(\theta)}{n_e^2(\omega_b)} + \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2(\omega_b)} = \frac{1}{n_e^2(\omega_b, \theta)} = \frac{sec^2(\alpha)}{n_o^2(\frac{1}{2}\omega_b)} \tag{3.1}$$

Donde ω_b es la frecuencia del rayo de bombeo y α es el ángulo entre la dirección del haz de bombeo y los fotones producto de la conversión paramétrica descendente espontánea producida en el cristal (ver Figura 3.1).

Por otro lado, para precisar los coeficientes ordinario y extraordinario usamos las Ecuaciones de Sellmeier. Estas ecuaciones, determinadas experimentalmente, son:

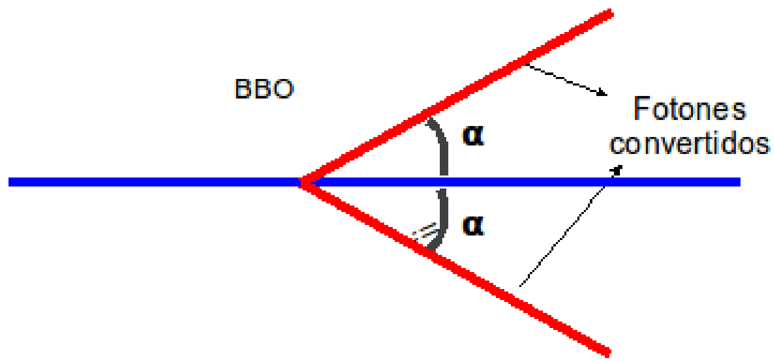

Figura 3.1: Cristal BBO y ángulos de bombeo y salida

$$\begin{aligned} n_o(\lambda)^2 &= 2{,}7359 + \tfrac{0{,}01878}{\lambda^2 - 0{,}01822} - 0{,}01354\lambda^2 \\ n_e(\lambda)^2 &= 2{,}3753 + \tfrac{0{,}01224}{\lambda^2 - 0{,}01667} - 0{,}01515\lambda^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Donde λ es la longitud de onda y debe estar dada en μm. Los parámetros que se usaron para este experimento son: longitud de onda del rayo de bombeo $\lambda = 405nm = 0{,}405\mu m$; y ángulo de corte del cristal $\theta = 30°$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.2), la ecuación (3.1) nos queda:

$$\frac{sen^2(30°)}{(1{,}5671)^2} + \frac{cos^2(30°)}{(1{,}6919)^2} = \frac{1}{{n_e}^2(\omega_b, \theta)} = \frac{sec^2(\alpha)}{(1{,}6603)^2} \tag{3.3}$$

Despejando α de la ecuación anterior, obtenemos que $\alpha = 3{,}065°$. Este es el ángulo, respecto del eje óptico del cristal, al que salen los fotones de la conversión pero dentro del cristal. Para conocer el ángulo al que los fotones salen del cristal con respecto del haz de bombeo, recurrimos a la Ley de Snell.

$$n_o sen(\alpha) = n sen(\alpha') \tag{3.4}$$

Donde n_o es el índice de refracción que le corresponde a los fotones una vez convertidos dentro del cristal ($n_o = 1{,}6603$); n es el índice de refracción del aire ($n = 1{,}000293$) y α' es el ángulo al que los fotones salen del cristal con respecto del rayo de bombeo. Sustituyendo los valores correspondientes, obtenemos que:

$$\alpha' = 5{,}091° \tag{3.5}$$

3.2. Estado cuántico de los fotones de salida del BBO

La base teórica de esta sección se tomó del libro de Ou [9] y se adaptó a nuestro caso particular. Además, se intentó que todos los desarrollos fueran lo más explícitos posibles.

Supongamos pues, que nuestro medio no-lineal (NL), o el cristal BBO, tiene una longitud L en la dirección del láser de bombeo. Éste último que bombea al NL, tiene una sección transversal de diámetro a que atraviesa el NL a lo largo del eje z. Coloquemos también el origen del eje z en el final del NL, como se muestra en la Figura 3.2 y comencemos todo el tratamiento en la aproximación paraxial.

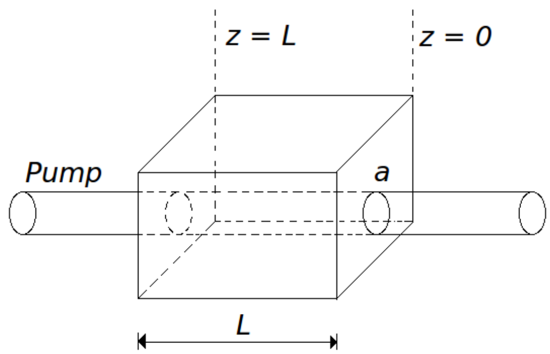

Figura 3.2: Geometría del proceso de la conversión paramétrica descendente

Ahora bien, el hamiltoniano electromagnético, en el caso de que la respuesta magnética sea despreciable, en general se escribe como:

$$H = \frac{1}{8\pi}\int_v d^3r \left(\bar{D}\cdot\bar{E} + \bar{B}\cdot\bar{B}\right) \tag{3.6}$$

donde

$$\bar{D} = \bar{E} + 4\pi\bar{P} \tag{3.7}$$

Ahora bien, recordemos que cada componente del vector de polarización $\bar{P}$ se escribe como:

$$P_i^{(NL)} = \frac{1}{8\pi}\int_v dt_1 dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}(t-t_1, t-t_2)E_j(\bar{r}, t_1)E_k(\bar{r}, t_2) \tag{3.8}$$

Sustituyendo las ecs. 3.7 y 3.8 en la ec. 3.6, tenemos el hamiltoniano completo; pero fijémonos solamente en su parte no lineal. Ésta queda como:

$$H_{NL} = \frac{1}{2}\int_v d^3r \bar{P}^{(NL)}\cdot\bar{E} = \frac{1}{2}\int_v d^3r E_i \int dt_1 dt_2 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \tag{3.9}$$

Recordemos que en el esquema de interacción resulta útil cuando tenemos un hamiltoniano que se puede representar como una suma de un hamiltoniano más una perturbación. Además, en este esquema la evolución temporal también afecta directamente a los operadores. Es decir, podemos representar la ec. 3.9 como:

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2}\int_v d^3r \hat{E}_i(\bar{r}, t)\int dt_1 dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}\hat{E}_j(\bar{r}, t)\hat{E}_k(\bar{r}, t) \tag{3.10}$$

Ahora bien, el vector eléctrico se puede tomar como una combinación lineal de una parte positiva y una negativa; es decir:

$$\hat{E}(\bar{r}, t) = \hat{E}^{(-)}(\bar{r}, t) + \hat{E}^{(+)}(\bar{r}, t) \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(\bar{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d^3k \sum_{\nu=1,2} \epsilon_{k,\nu} l(\omega)\hat{a}_{k,\nu} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} \\ \hat{E}^{(-)}(\bar{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d^3k \sum_{\nu=1,2} \epsilon_{k,\nu}^{*} l^{*}(\omega)\hat{a}_{k,\nu}^{\dagger} e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $l(\omega) = i(\frac{\hbar\omega}{2c})^{1/2}$ y $\epsilon_{k,\nu}$ son los vectores unitarios para dos polarizaciones independientes perpendiculares a k, y $\hat{a}_{k,\nu}$ es el operador de aniquilación para el modo dado por k y ν y que satisfacen la relación de conmutación:

$$[\hat{a}_{k,\nu}, \hat{a}^{\dagger}_{k',\nu'}] = \delta_{\nu\nu'}\delta(k-k')$$

Luego entonces, usando la ec. 3.12, tenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{E}_j(\bar{r},t)\hat{E}_k(\bar{r},t) &= (\hat{E}_j^{(+)} + \hat{E}_j^{(-)})(\hat{E}_k^{(+)} + \hat{E}_k^{(-)}) \\ &= \hat{E}_j^{(+)}\hat{E}_k^{(+)} + \hat{E}_j^{(+)}\hat{E}_k^{(-)} + \hat{E}_j^{(-)}\hat{E}_k^{(+)} + \hat{E}_j^{(-)}\hat{E}_k^{(-)}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Cada uno de los sumandos anteriores, de acuerdo con la ec. 3.12, está dado por:

$$\hat{E}_j^{(+)}\hat{E}_k^{(+)} = \frac{1}{2\pi}\int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\nu_1,\nu_2=1,2} \epsilon_{k_1\nu_1}\epsilon_{k_2\nu_2} l(\omega_1)l(\omega_2)\hat{a}_{k_1\nu_1}\hat{a}_{k_2\nu_2} e^{i(\bar{k}_1\cdot\hat{j}-\omega_1 t)} e^{i(\bar{k}_2\cdot\hat{k}-\omega_2 t)} \tag{3.14}$$

$$\hat{E}_j^{(+)}\hat{E}_k^{(-)} = \frac{1}{2\pi}\int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\nu_1,\nu_2=1,2} \epsilon_{k_1\nu_1}\epsilon^*_{k_2\nu_2} l(\omega_1)l^*(\omega_2)\hat{a}_{k_1\nu_1}\hat{a}^{\dagger}_{k_2\nu_2} e^{i(\bar{k}_1\cdot\hat{j}-\omega_1 t)} e^{-i(\bar{k}_2\cdot\hat{k}-\omega_2 t)} \tag{3.15}$$

$$\hat{E}_j^{(-)}\hat{E}_k^{(+)} = \frac{1}{2\pi}\int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\nu_1,\nu_2=1,2} \epsilon^*_{k_1\nu_1}\epsilon_{k_2\nu_2} l^*(\omega_1)l(\omega_2)\hat{a}^{\dagger}_{k_1\nu_1}\hat{a}_{k_2\nu_2} e^{-i(\bar{k}_1\cdot\hat{j}-\omega_1 t)} e^{i(\bar{k}_2\cdot\hat{k}-\omega_2 t)} \tag{3.16}$$

$$\hat{E}_j^{(-)}\hat{E}_k^{(-)} = \frac{1}{2\pi}\int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\nu_1,\nu_2=1,2} \epsilon^*_{k_1\nu_1}\epsilon^*_{k_2\nu_2} l^*(\omega_1)l^*(\omega_2)\hat{a}^{\dagger}_{k_1\nu_1}\hat{a}^{\dagger}_{k_2\nu_2} e^{-i(\bar{k}_1\cdot\hat{j}-\omega_1 t)} e^{-i(\bar{k}_2\cdot\hat{k}-\omega_2 t)} \tag{3.17}$$

Claramente, la sustitución de las ecs. 3.15 a la 3.18 en la ec. 3.14 y luego en la ec. 3.11, resulta muy engorrosa y de poca utilidad. En su lugar, fijemos más atención en la posición y combinación de los operadores de creación y aniquilación en las ecs. 3.14 a la 3.17. Es decir, ya con las respectivas sustituciones, al hacer la multiplicación completa en el hamiltoniano de interacción, los únicos términos o sumandos con los que nos quedaremos serán sólo los casos:

I) $(\hat{a}_3\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2^{\dagger})$: Un fotón es destruido en el NL mientras que otros dos son creados a la salida.

II) $(\hat{a}_3^{\dagger}\hat{a}_1\hat{a}_2)$: Un fotón es creado a partir de la destrucción de otros dos en el NL.

El resto de los términos simplemente son casos distintos a los que se usarán en este trabajo, por lo que no aportan importancia en el producto final dentro del hamiltoniano de la ec. 3.11.

Luego entonces, el primer término del hamiltoniano de interacción es:

$$\begin{aligned}H_I^{(1)} &= \frac{1}{2}\int_v d^3r \hat{E}_i(\bar{r},t)\int dt_1 dt_2 \chi^{(2)}_{ijk}\hat{E}_j(\bar{r},t)\hat{E}_k(\bar{r},t) \\ &= \frac{1}{2}\int_v d^3r \left\{\frac{1}{2\pi}\int d^3k_3 \sum_{\nu_3=1,2}\left[(\epsilon_{k_3,\nu_3})_i l(\omega_3)\hat{a}_{k_3,\nu_3}e^{i(\bar{k}_3\cdot\hat{i}-\omega_3 t)} + (\epsilon^*_{k_3,\nu_3})_i l^*(\omega_3)\hat{a}^{\dagger}_{k_3,\nu_3}e^{-i(\bar{k}_3\cdot\hat{i}-\omega_3 t)}\right]\right\} \\ &\int dt_1 dt_2 \chi^{(2)}_{ijk}\left[\frac{1}{2\pi}\int d^3k_1 d^3k_2 \sum_{\nu_1,\nu_2 1,2}(\epsilon^*_{k_1\nu_1})_j(\epsilon^*_{k_2\nu_2})_k l^*(\omega_1)l^*(\omega_2)\hat{a}^{\dagger}_{k_1\nu_1}\hat{a}^{\dagger}_{k_2\nu_2}e^{-i(\bar{k}_1\cdot\hat{j}-\omega_1 t_1)}e^{-i(\bar{k}_2\cdot\hat{k}-\omega_2 t_2)}\right]\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por otro lado, recordemos que la transformada de Fourier $g(\omega)$ de una función $f(t)$ está dada por:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3.19}$$

Ahora, y con ayuda de la ec. 3.19, podemos analizar la ec. 3.18 identificando los términos y observando que:

1. Hay una integral sobre $\bar{k}_3$, por lo que se barrerán valores alrededor de ω_p.
2. Las integrales sobre $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$ barrerán valores sobre ω_0 .
3. Las integrales sobre t_1 y t_2, junto con los términos $\chi^{(2)}_{ijk}$, $e^{\pm i\omega_i t}$ y la constante $1/2\pi$ se pueden relacionar con una transformada de Fourier. A esta función, con la inclusión de los términos $l(\omega_3)$, $l^*(\omega_2)$, $l^*(\omega_1)$, la denotaremos como $\chi^{(2)}_{ijk}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$.

Luego entonces, la ec. 3.19 queda:

$$\begin{aligned} H_I^{(1)} =& \frac{1}{4\pi}\int_{[\omega_p]} d^3\bar{k}_3 \int_{\omega_0} d^3\bar{k}_1 d^3\bar{k}_2 \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(\epsilon_{k_3,\nu_3})_i \left(\epsilon^*_{k_1,\nu_1}\right)_j \left(\epsilon^*_{k_2,\nu_2}\right)_k \\ & \hat{a}_{k_3\nu_3}\hat{a}^\dagger_{k_1,\nu_1}\hat{a}^\dagger_{k_2,\nu_2} \times e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t}\int_v d^3r e^{i(\Delta\bar{k}\cdot\bar{r})} \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $\Delta\bar{k} = k_3 - k_2 - k_1$,pues estamos tomando todos los casos de espectros continuos, por lo que $\Delta\bar{k}$ no necesariamente es cero. Luego entonces, dado que $\Delta\bar{k}$ corresponde al faltante de (k_1+k_2) comparado con k_3, se le conoce como "phase mismatch". Además, para llegar al resultado de la ec.(3.20) se usó que $e^{i(\bar{k}\cdot\hat{\imath})}e^{i(\bar{k}\cdot\hat{\jmath})}e^{i(\bar{k}\cdot\hat{k})} = e^{i(\bar{k}\cdot\hat{\imath}+\bar{k}\cdot\hat{\jmath}+\bar{k}\cdot\hat{k})} = e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r})}$.

Finalmente, para obtener el hamiltoniano de interacción completo, a la ec. 3.21 le sumamos su complejo conjugado; es decir:

$$H_I = H_I^{(1)} + (H_I^{(1)})^* \tag{3.21}$$

Con el hamiltoniano de interacción determinado, recordemos ahora que el operador de evolución en el esquema de interacción está dado por:

$$\hat{U}(t,t') = e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_1}^{t} H_I(\tau)d\tau} \tag{3.22}$$

Y la función de estado al tiempo t está dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t')|\psi(t)\rangle \tag{3.23}$$

Detengamos un momento las matemáticas y hagamos un par de observaciones físicas:

1. Una vez terminada la interacción, si el tiempo de observación es suficientemente largo comparado con el tiempo de interacción, entonces podemos llevar a $t \to \infty$ y $t' \to -\infty$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\tau} = 2\pi\delta(\omega_3-\omega_1-\omega_2) \tag{3.24}$$

donde $\delta(\omega_3-\omega_1-\omega_2)$ muestra la conservación de la energía, puesto que $\omega_3 = \omega_1+\omega_2$.

2. Si la región de interacción es mucho más grande que λ, entonces la interacción espacial puede aproximarse como:

$$\int_v d^3\bar{r}e^{i(\Delta\bar{k}\cdot\bar{r})} = (2\pi)^3\delta(\Delta\bar{k}) \tag{3.25}$$

donde $\delta(\Delta\bar{k})$ muestra la conservación de momento, puesto que $\bar{k}_3 = \bar{k}_1 + \bar{k}_2$.

El NL es un cristal birrefringente y los fotones que obtenemos de la SPDC están igual y linealmente polarizados. Esto significa que podemos tomar sólo un ν por cada k. Luego, el término exponente de la ec. 3.22 nos queda como:

$$\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I(\tau)d\tau = \int_{[\omega_p]} d^3\bar{k}_3 \int_{[\omega_0]} d^3\bar{k}_1 d^3\bar{k}_2 \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\hat{a}_{k_3p}\hat{a}^\dagger_{k_1s}\hat{a}^\dagger_{k_2i}\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\int_v d^3re^{i(\Delta\bar{k}\cdot\bar{r})} + C.C. \tag{3.26}$$

donde $\chi^{(2)}_{ijk}$ es la χ efectiva en la que los efectos no-lineales son mayores, y absorbe los términos ϵ_i [13]. Los subíndices agregados p, s y i, corresponden al campo de bombeo (p), la señal (s) y el testigo (i), por sus iniciales en inglés respectivamente.
Ahora bien, continuando con la aproximación paraxial, haremos un tratamiento unidimensional.

$$\Rightarrow \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I(\tau)d\tau = \chi\int_{[\omega_p]} d\omega_3 \int_{[\omega_0]} d\omega_1 d\omega_1 \delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\hat{a}_p(\omega_3)\hat{a}^\dagger_s(\omega_1)\hat{a}^\dagger_i(\omega_2)\int_v d^3\bar{r}e^{i(\Delta\bar{k}\cdot\bar{r})} + C.C. \tag{3.27}$$

donde χ sale de la integral debido a que varía muy poco con respecto al término de la integral espacial. Además, sustituimos $\hat{a}_{k_3p}$ por $\hat{a}_p$, $\hat{a}^\dagger_{k_1s}$ por $\hat{a}_s$ y $\hat{a}^\dagger_{k_2i}$ por $\hat{a}^\dagger_i$. Las constantes debidas al traslado de 3 dimensiones a una también se las incluimos a χ.

Para el caso colineal (i.e. campo de fotones convertidos colineal al campo de bombeo) y de acuerdo a la geometría de interacción, la integral espacial se convierte en:

$$\int_v d^3re^{i(\Delta\bar{k}\cdot\bar{r})} = Vh(L\Delta k) \tag{3.28}$$

donde V es el volumen del NL (ver Figura 3.2), pues L es la longitud del NL, y

$$h(x) = \int_{-1}^{0} dze^{ixz} = \frac{1-e^{-ix}}{ix} = e^{-i\frac{x}{2}}sinc(\frac{x}{2}) \tag{3.29}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I(\tau)d\tau = \xi\int_{[\omega_0]} d\omega_1 d\omega_2\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\hat{a}_p(\omega_3)\hat{a}^\dagger_s(\omega_1)\hat{a}^\dagger_i(\omega_2)h(L\Delta k) + C.C. \tag{3.30}$$

donde $\xi = \chi V$ y

$$\Delta k = \frac{1}{c}\left[n(\omega_p)\omega_p - n(\omega_s)\omega_s + n(\omega_i)\omega_i\right] \tag{3.31}$$

Nota: Para el caso no colineal, lo que cambia es que:

$$\Delta k = \frac{1}{c}\left[n(\omega_p)\omega_p - n(\omega_s)\omega_s\cos\theta_s + n(\omega_i)\omega_i\cos\theta_i\right]$$

Haciendo una expansión de la función e^x a primero orden para $\hat{U}$, tenemos que:

$$\hat{U}(\infty,-\infty) \approx 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I(\tau)d\tau \tag{3.32}$$

Y aplicamos este operador al estado:

$$|\psi_0\rangle = |\alpha_p(\omega)\rangle \rightarrow |0_s, 0_i\rangle \tag{3.33}$$

donde $|\alpha_p(\omega)\rangle$ es un estado coherente multimodo de frecuencias al rededor de ω_p . Además,

$$\begin{aligned} \hat{a}_p(\omega)|\psi_0\rangle &= \alpha_p(\omega)|\psi_0\rangle \\ \hat{a}_{s,i}(\omega)|\psi_0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $\alpha_p(\omega)$ es el espectro del campo de bombeo.
Ahora bien, aplicando todo este desarrollo en la ec. 3.24, tenemos que:

$$|\psi\rangle = \hat{U}(\infty,-\infty)|\psi_0\rangle = \left\{1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}_I(\tau)d\tau\right\}|\alpha_p(\omega)\rangle \otimes |0_s, 0_i\rangle \tag{3.35}$$

y sustituyendo el resultado de la ec. 3.31 encontramos que:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = &\left\{1 + \xi\int_{[\omega_p]}d\omega_3\int_{[\omega_0]}d\omega_1 d\omega_2\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\hat{a}_p(\omega_3)\hat{a}_s^\dagger(\omega_1)\hat{a}_i^\dagger(\omega_2)h(L\Delta k) + C.C.\right\} \\ &|\alpha_p(\omega)\rangle \otimes |0_s, 0_i\rangle \end{aligned} \tag{3.36}$$

Desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle =& |\alpha_p(\omega)\rangle \otimes |0_s, 0_i\rangle + \\ &\xi\int_{[\omega_p]}d\omega_3\int_{[\omega_0]}d\omega_1 d\omega_2\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\alpha(\omega_p)|\alpha_p(\omega)\rangle \otimes |\omega_{1s}, \omega_2 i\rangle h(L\Delta k) + CERO \end{aligned} \tag{3.37}$$

El último término es CERO debido a que en el término del hamiltoniano conjugado se destruirían dos fotones de salida para crear uno de entrada y este fenómeno es físicamente imposible debido a nuestro estado de entrada $|\psi_0\rangle$. Factorizando la ec. 3.41 llegamos a:

$$|\psi\rangle = |\alpha_p(\omega)\rangle \otimes \left[|0_s, 0_i\rangle + \xi\int_{[\omega_p]}d\omega_3\int_{[\omega_0]}d\omega_1 d\omega_2\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\alpha(\omega_p)|\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle h(L\Delta k)\right] \tag{3.38}$$

Hagamos ahora el siguiente cambio de variable. Sea:

$$\Phi(\omega_{1,}\omega_2) = \alpha(\omega_p)h(L\Delta k) = \alpha_p(\omega_1+\omega_2)h(\omega_1,\omega_2) \tag{3.39}$$

donde $h(\omega_1,\omega_2) = h(L\Delta k)|_{\omega_3=\omega 1+\omega_2}$.

$$\Rightarrow |\psi\rangle = |\alpha_p(\omega)\rangle \rightarrow \left[|0_s, 0_i\rangle + \xi\int_{[\omega_p]}d\omega_3\int_{[\omega_0]}d\omega_1 d\omega_2\Phi(\omega_1,\omega_2)|\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle\right] \tag{3.40}$$

Finalmente, denotando $\xi\int_{[\omega_p]}d\omega_3 = \xi$ obtenemos que:

$$|\psi\rangle = |\alpha_p(\omega)\rangle \rightarrow |\psi\rangle_{SPDC} \tag{3.41}$$

donde:

$$|\psi\rangle_{SPDC} = |0_s, 0_i\rangle + \xi \int_{[\omega_0]} d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2)|\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle \tag{3.42}$$

Es decir, las ec. 3.41 y 3.42 denotan los estados provenientes de la SPDC, estados que no son monocromáticos y monomodales, sino que contienen un ancho de frecuencias y momentos centrados al rededor de uno central; es decir, multimodal.

Este estado es el que se usará como input (estado de entrada) en el interferómetro para el caso multimodal. De hecho, al término ξ ahora se le puede asociar físicamente con la eficiencia de producción de pares de fotones mientras que en $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ se guarda la información referente a la longitud del medio no lineal y el ancho de frecuencias del rayo de bombeo.

Capítulo 4

Interferómetro de Hong-Ou-Mandel teórico

El interferómetro de Hong-Ou-Mandel (HOM) no es un interferómetro como la mayoría en los que se muestran “franjas” alternadas de máximos y mínimos de intensidad, sino que muestra un efecto de interferencia puramente cuántico. Esta cualidad, sumada a su relativa simpleza esquemática y su versatilidad (como la que se plantea en el Capítulo 6), determinan la importancia del estudio de este interferómetro.

Ahora bien, para abordar la física de este dispositivo, primero se tratará el caso monomodal debido a su gran simpleza pero gran contenido conceptual. Después, con un poco más de cuidado, se desarrollará el caso multimodal, un caso mucho más interesante y cercano a la realidad. La base teórica principal se tomó del libro de Ou y Zhe-Yu [9], pero se adaptó a este caso particular. Además, de nuevo se intentó que todos los desarrollos fueran explícitos hasta donde fue posible.

4.1. Interferómetro de Hong-Ou-Mandel monomodal

Tomemos un par de fotones de la misma frecuencia y con la misma polarización y enviémoslos simultáneamente a un divisor de haz 50:50 y no polarizante (BS). Denotemos a cada modo individual entrante en el BS como $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_2$, mientras que a los modos individuales de salida como $\hat{b}_1$ y $\hat{b}_2$, como se muestra en la Figura 4.1.

Debido a la geometría del esquema, es natural pensar que tenemos cuatro posibilidades: Los

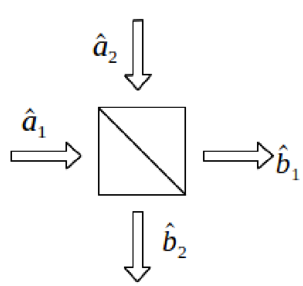

Figura 4.1: Canales de entrada y salida de un BS.

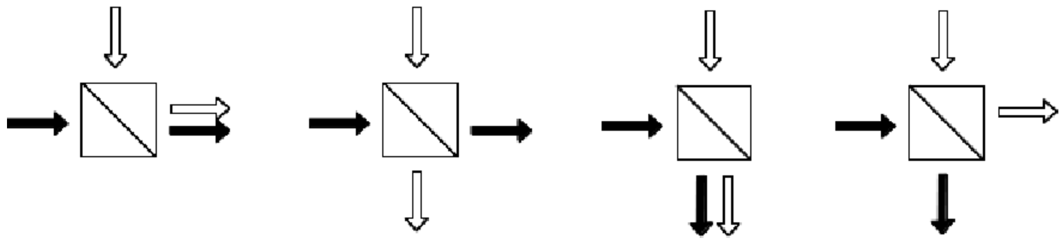

Figura 4.2: Todas las posibilidades a la salida del BS

dos fotones se transmiten, los dos fotones se reflejan, un fotón se refleja y el otro se transmite y su inverso.

Matemáticamente, los estados de salida $\hat{b}_1$ y $\hat{b}_2$ están dados por una combinación lineal de $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_2$ que, en general, se escriben como:

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 =& \sqrt{T}\hat{a}_1 + \sqrt{R}\hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 =& \sqrt{T}\hat{a}_2 - \sqrt{R}\hat{a}_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde T y R son los coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente. Ahora bien, si suponemos un BS 50:50, la ec. (4.1) queda como:

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 =& \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}} \\ \hat{b}_2 =& \frac{\hat{a}_2 - \hat{a}_1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

o, escribiendo $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_2$ en función de $\hat{b}_1$ y $\hat{b}_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 =& \frac{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}{\sqrt{2}} \\ \hat{a}_2 =& \frac{\hat{b}_1 + \hat{b}_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora bien, sean $\hat{a}_1^\dagger$ y $\hat{a}_2^\dagger$ operadores de creación que actúan sobre el estado inicial de vacío $|0,0\rangle$ para representar al estado en la base de número de un fotón en cada entrada del BS; es decir, $|1,1\rangle$. Así pues, la acción del BS sobre ese estado $|1,1\rangle$ está dada por:

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0,0\rangle \rightarrow \left(\frac{\hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)|0,0\rangle \tag{4.4}$$

Desarrollando la ec. 4.4 tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0,0\rangle \rightarrow& \frac{1}{2}(\hat{b}_1^{\dagger 2} + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^{\dagger 2})|0,0\rangle \\ \rightarrow& \frac{1}{2}(|2,0\rangle + |1,1\rangle - |1,1\rangle - |0,2\rangle) \\ L \rightarrow& \frac{1}{2}(|2,0\rangle - |0,2\rangle) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Este resultado muestra claramente que el estado $|1,1\rangle$ no es detectable debido a que interfiere destructivamente con otro estado no distinguible excepto por una fase de π.

4.2. Interferómetro de Hong-Ou-Mandel multimodal

En la realidad, los estados de entrada (inputs) que se usan no son como el supuesto en la ec. 4.4. Generalmente son una mezcla continua de frecuencias (dentro de un intervalo bien definido) alrededor de una frecuencia central bajo una estadística casi gaussiana. Además, estos estados no son creados puntualmente, a pesar de tener fuertes correlaciones espaciales. En nuestro caso usamos fotones provenientes de la conversión paramétrica descendente (SPDC) en un cristal BBO tipo 1, bombeado por un láser violeta. La física de estos estados está expresada por (la deducción de los estados se detalló en el Capítulo 3):

$$|\psi\rangle = |\alpha_p(\omega)\rangle \rightarrow |\psi\rangle_{SPDC} \tag{4.6}$$

donde:

$$|\psi\rangle_{SPDC} = |0_s, 0_i\rangle + \xi \int_{[\omega_0]} d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2)|\omega_{1s}, \omega_{2i}\rangle \tag{4.7}$$

y el término ξ puede ser interpretado como la eficiencia de producción de estos pares de fotones en función de la potencia del láser de bombeo y la eficiencia del cristal no-lineal.

La ec. 4.7 presenta el caso general en el que las frecuencias de salida de los fotones señal y testigo no necesariamente son la misma. Sin embargo, nosotros analizaremos el caso en el que esos dos fotones sí tienen la misma frecuencia. Además, para simplificar los cálculos y el análisis teórico del fenómeno cuántico, supondremos también que el haz de bombeo tiene una sola frecuencia; es decir, $\omega_b = 2\omega_0$. Así pues, podemos ver que:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \Phi(\omega_1, 2\omega_0 - \omega_1) = V_b \psi(\omega_1) \tag{4.8}$$

donde se entiende a V_b como la amplitud del campo de bombeo. Además, se sigue tomando que: $\psi(\omega) \propto (L\Delta k)$ y la condición de normalización $\int d\omega |\psi(\omega)|^2 = 1$.

La función h, mejor detallada por la ec. (3.29), está dada por:

$$h(L\Delta k) = e^{-i\frac{L\Delta k}{2}} sinc\left(\frac{L\Delta k}{2}\right) \tag{4.9}$$

Por otro lado, si expresamos los estados provenientes de la SPDC como campos eléctricos propagándose unidimensionalmente, obtenemos:

$$\hat{E}_1^{(in)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} -i\omega_1(t - \frac{z_1}{c}) \int d\omega_1 \hat{a}_1(\omega_1) e^{-i\omega_1(t-\frac{z_1}{c})} \tag{4.10}$$

donde z_1 es la longitud de camino óptico tomada desde su producción en el medio no-lineal. También, por simplicidad, usaremos que $\hat{E}^{(+)} = \hat{E}$, $\hat{E}^{(-)} = \hat{E}^{\dagger}$.

Ahora bien, supondremos que los estados de fotones entran simétricamente al divisor de haz (BS) y en el mismo punto espacial. Con ello, es natural que los campos de salida del BS son:

$$\hat{E}_1^{(out)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_1^{(in)}(t) + i\hat{E}_2^{(in)}(t)\right) \tag{4.11}$$

$$\hat{E}_2^{(out)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_2^{(in)}(t) + i\hat{E}_1^{(in)}(t)\right) \tag{4.12}$$

donde los superíndices (out) e (in) se refieren a los campos de salida y entrada respectivamente.

Por otra parte, la tasa de detección de un fotón al mismo tiempo en los dos detectores a la salida del BS, dentro del tiempo de resolución de los detectores T_c (es decir, la tasa de coincidencias R_c) es de la forma:

$$R_c = \beta_s \beta_i \int_{T_r} d\tau G^{(2)}(\tau) \tag{4.13}$$

donde las β se refieren a las eficiencias cuánticas de los detectores respectivos y la función $G^{(2)}$ representa el grado de correlación entre los campos s e i durante el período τ. Esta última la podemos calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(t_1,t_2) =& \langle \hat{E}_1^{(out)\dagger}(t_1)\hat{E}_2^{(out)\dagger}(t_2)\hat{E}_2^{(out)}(t_2)\hat{E}_1^{(out)}(t_1)\rangle \\ =& \left|\left|\langle \psi_{SPDC}|\hat{E}_2^{(out)}(t_2)\hat{E}_1^{(out)}(t_1)|\psi_{SPDC}\rangle\right|\right|^2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para calcular el producto de los campos, usamos las ecs. 4.10, 4.11 y 4.12 podemos obtener que:

$$\begin{aligned} 2\hat{E}_2^{(out)}(t_2)\hat{E}_1^{(out)}(t_1) =& \frac{1}{2\pi}\int d\omega_1 d\omega_2 \hat{a}_2(\omega_2)\hat{a}_1(\omega_1)e^{-i\omega_2(t_2-\frac{z_2}{c})-i\omega_1(t_1-\frac{z_1}{c})} \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int d\omega_2 \hat{a}_2^2(\omega_2)e^{-i\omega_2(t_1+t_2-2\frac{z_2}{c})} + \frac{i}{2\pi}\int d\omega_1 \hat{a}_2^1(\omega_1)e^{-i\omega_1(t_1+t_2-2\frac{z_1}{c})} \\ &- \frac{1}{2\pi}\int d\omega_1 d\omega_2 \hat{a}_2(\omega_2)\hat{a}_1(\omega_1)e^{-i\omega_2(t_1-\frac{z_2}{c})-i\omega_1(t_2-\frac{z_1}{c})} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ahora bien, usando el resultado anterior sobre la ec. 4.14 sólo obtendremos dos sumandos distintos de cero: el primero y el último. Así pues, obtenemos que:

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(t_1,t_2) = \\ &\left|\left|\frac{|\xi|^2}{4}\frac{1}{2\pi}\int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1,\omega_2)e^{-i\omega_2(t_2-\frac{z_2}{c})-i\omega_1(t_1-\frac{z_1}{c})} - \frac{1}{2\pi}\int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_{1,}\omega_2)e^{-i\omega_2(t_1-\frac{z_2}{c})-i\omega_1(t_2-\frac{z_1}{c})}\right|\right|^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Para simplificar la expresión, podemos definir la función g como:

$$g(t_{1,}t_2) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_{1,}\omega_2)e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega - 2t_2} \tag{4.17}$$

con lo que podemos reducir la ec. (4.16) a:

$$G^{(2)}(t_{1,}t_2) = \frac{|\xi|^2}{4}\left|g\left(t_1-\frac{z_1}{c},t_2-\frac{z_2}{c}\right) - g\left(t_2-\frac{z_1}{c},t_1-\frac{z_2}{c}\right)\right|^2 \tag{4.18}$$

De las ecuaciones anteriores, podemos observar la simetría que hay en la función g; es decir, que $g(t_{1,}t_2) = g(t_{2,}t_1)$. Esta simetría se deriva de la simetría de la función $\Phi(\omega_1)$. Por ello es que podemos reescribir la ec. (4.18 sutilmente diferente:

$$G^{(2)}(t_{1,}t_2) = \frac{|\xi|^2}{4}\left|g\left(t_1-\frac{z_1}{c},t_2-\frac{z_2}{c}\right) - g\left(t_1-\frac{z_2}{c},t_2-\frac{z_1}{c}\right)\right|^2 \tag{4.19}$$

De este modo, podremos obtener R_c en función de la diferencia de camino óptico y no en función de la diferencia temporal de los inputs del BS, pues es más cercano a la intuición en el laboratorio.

Por ejemplo, en la ec. (4.19) es claro que si, $z_1 = z_2$, entonces la función de correlación es igual a cero.

Para analizar la tasa de coincidencais R_c (de la ec. (4.13)), hagamos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = \omega_0 + \Omega & \omega_2 = \omega_0 - \Omega \\ \tau = t_1 - t_2 & \Delta z = z_1 - z_2 \end{array} \tag{4.20}$$

Por lo que la función g definida en la ec. (4.17) queda:

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi} \int d(\omega_0 + \Omega) d(\omega_0 \Omega) V_b \psi(\omega_0 + \Omega) e^{-i(\omega_0+\Omega)t_1 - i(\omega_0 - \Omega)t_2} \\ &= V_b e^{-i\omega_0(t_1+t_2)} f(\tau) \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega \psi(\omega_0 + \Omega) e^{-i\Omega\tau} \tag{4.22}$$

Y retomando la ec. (4.13) pero con las expresiones de las ecs. (4.19), (4.21) y (4.22), la tasa de coincidencias puede expresarse como:

$$R_c(\Delta z) \propto \int_{T_r} d\tau \left| f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) - f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) \right|^2 \tag{4.23}$$

Ahora bien, en realidad el tiempo de resolución de los detectores es mucho más grande que τ, por lo que podemos extender la integral de $-\infty$ a ∞. Es decir:

$$R_c \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[2|f(\tau)|^2 - f^*\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) - f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) f^*\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) \right] \tag{4.24}$$

De donde podemos hacer que:

$$\begin{aligned} R_c \propto & 1 - \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[f^*\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) - f\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) f^*\left(\tau - \frac{\Delta z}{c}\right) \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau |f(\tau)|^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega |\omega_0 + \Omega|^2 \left[e^{i\Omega(\tau - \tau - 2\frac{\Delta z}{c})} + e^{-i\Omega(\tau - \tau - 2\frac{\Delta z}{c})} \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega |\omega_0 + \Omega|^2} \\ &= 1 - \frac{\int d\Omega |\psi(\omega_0 + \Omega|^2 \left(e^{-2i\Omega\frac{\Delta z}{c}} + e^{2i\Omega\frac{\Delta z}{c}} \right)}{\int d\Omega |\omega_0 + \Omega|^2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

La interpretación física de la ecuación anterior tiene sentido cuando ponemos atención al caso en el que $\Delta z = 0$, pues de ser así, $R_c = 0$. Es decir, si la diferencia de caminos ópticos se hace cero, las coincidencias se anulan. El valor de la función en el resto de los puntos ($\Delta z \neq 0$,) será 1 y no habrá cambio

Ahora bien, para hacer el análisis gráfico de la ec. (4.25), primero sustituyamos $\psi(\omega_0 + \Omega)$. Es decir, introducir las ecs. 4.9, 4.10 y 4.11 en la ec. 4.28. De esta manera obtenemos que:

$$\begin{aligned} R_c(\Delta z) \propto & 1 - \int d\Omega |\eta|^2 e^{i\frac{L\Delta k}{c}} e^{-i\frac{L\Delta k}{c}} sinc^2\left(\frac{L\Delta k}{2}\right) \left(\frac{e^{-2i\Omega\frac{\Delta z}{c}} + e^{2i\Omega\frac{\Delta z}{c}}}{2} \right) \\ &= 1 - |\eta|^2 \int d\Omega \frac{\sin^2\left(\frac{Lk_0''\Omega^2}{2}\right)}{\left(\frac{Lk_0''\Omega^2}{2}\right)^2} \left(\frac{e^{-2i\Omega\frac{\Delta z}{c}} + e^{2i\Omega\frac{\Delta z}{c}}}{2} \right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

De nuevo, para reducir la expresión, hagamos los siguientes cambios de variable:

$$y = \sqrt{\tfrac{Lk_0''}{2}}\Omega \qquad\qquad z = \tfrac{2}{c}\sqrt{\tfrac{2}{Lk_0''}}\Delta z \tag{4.27}$$

Con lo que la ec. (4.26) queda:

$$R_c(\Delta z) \propto 1 - |\eta|^2 \sqrt{\frac{2}{Lk_0''}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2(y^2)}{y^4} \left(\frac{e^{iyz} + e^{-iyz}}{2}\right) \tag{4.28}$$

Para determinar la constante fuera de la integral, podemos recurrir al caso en el que $z = 0$, pues $R_c = 0$. En ese caso, quedaría una integral más sencilla cuyo resultado es conocido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2(y^2)}{y^4} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \tag{4.29}$$

Esto obliga a que:

$$|\eta|^2 \sqrt{\frac{2}{Lk_0''}} = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \tag{4.30}$$

Así, sustituyendo la ec. 4.30 en la ec. 4.28, finalmente obtenemos la tasa de coincidencias R_c en función de la diferencia de caminos ópticos. Abajo se muestra la Gráfica 4.3 que representa a la ecuación 4.31

$$\begin{aligned} R_c(z) \propto & 1 - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin^2(y^2)}{y^4} \left(\frac{e^{iyz} + e^{-iyz}}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{sinc}^2(y^2)\cos(yz) \end{aligned} \tag{4.31}$$

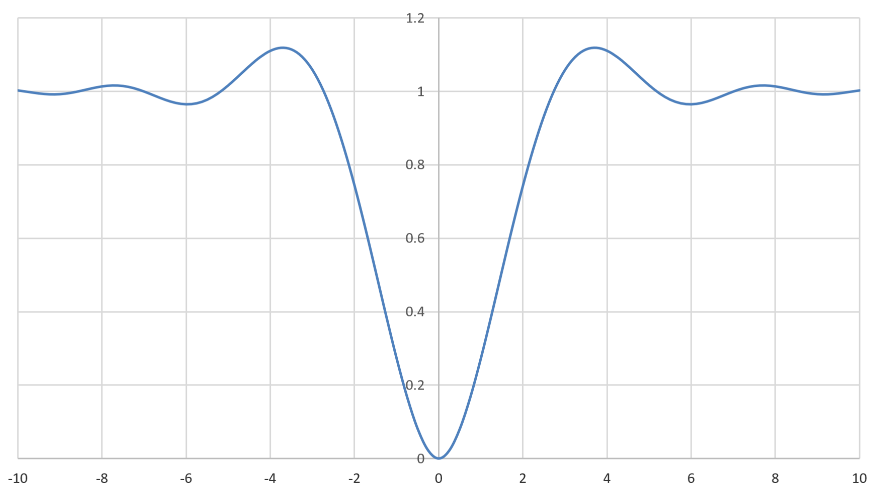

Figura 4.3: Caso multimodal ideal. Coincidencias a la salida del BS en función de la diferencia de caminos ópticos.

Capítulo 5

Interferómetro de Hong-Ou-Mandel experimental

El fenómeno de interferencia cuántica en este arreglo, como se detalla en el Capítulo 4, sucede cuando el campo electromagnético de dos fotones se superpone en las salidas de un divisor de haz. Esta característica se convierte en un problema adicional para su realización experimental. La razón de ello es que la escala en la que se manifiesta este fenómeno es del orden de, a lo más, tres decenas de micras, por lo que el error debe ser mucho menor y no sólo en una dirección, sino en los 3 grados de libertad espaciales. En este capítulo se describirá a detalle el montaje de este experimento, el método de alineación y se enfatizará la importancia del gran cuidado que se necesita para lograr un resultado exitoso. Finalmente, se compararán los resultados experimentales con la ecuación 4.31 y la gráfica de la Figura 4.2

5.1. Alineación del láser y montaje del BBO

Los fotones convertidos forman un cono con vértice en el cristal BBO. Sin embargo, sólo tomaremos los fotones que viajan en el plano que pasa por el centro del cristal y es paralelo a la mesa (que suponemos horizontal). Esto se convertirá en la principal referencia espacial durante el resto del montaje. Así pues, el primer paso es asegurarse que el láser de bombeo sea paralelo a la mesa óptica, que esté justo por encima de una linea de hoyuelos para tornillo y, finalmente, que incida perpendicularmente en el centro de una de las caras del cristal BBO. Para ello, usamos el siguiente equipo (más detalles en el Apéndice A):

- Láser de diodo de potencia variable, polarización vertical y longitud de onda central de 407nm.
- Mesa elevadora rígida.
- Cristal BBO (5x2x2mm).
- 2 desplazadores lineales.
- 1 base rotatoria con poste de altura variable.
- Poste con montura de altura variable.
- 2 iris modificados.

Primero se fijó la mesa elevadora a la mesa óptica. El láser de bombeo se montó en la mesa elevadora con ayuda de 4 piezas de latón. Ahora bien, para asegurar que el láser viajara paralelo a la mesa óptica y sobre una linea de hoyuelos para tornillo, usamos un par de iris modificados: uno muy cerca del láser y otro al final de la mesa óptica (aprox. 3m).

La modificación de estos consistía en una aguja colgada con un hilo funcionando como plomada (ver Figura 5.1). Esto asegura la posición del iris sobre una referencia en la mesa óptica, además de la altura.

El siguiente paso es fijar el BBO de forma que el láser de bombeo incida en el centro del cristal y, más importante, perpendicularmente a la cara de este. Además, recordando la birrefringencia del cristal, sólo hay una posición en la que la SPDC sucede. El cristal se fijó al final de la montura giratoria, la cual se encontraba sobre los dos desplazadores lineales y, a su vez, al poste.

Para asegurar que el láser incidiera perpendicularmente sobre el cristal no-lineal, se cuidó que el reflejo del láser sobre la cara del cristal regresara perfectamente al obturador del láser de bombeo.

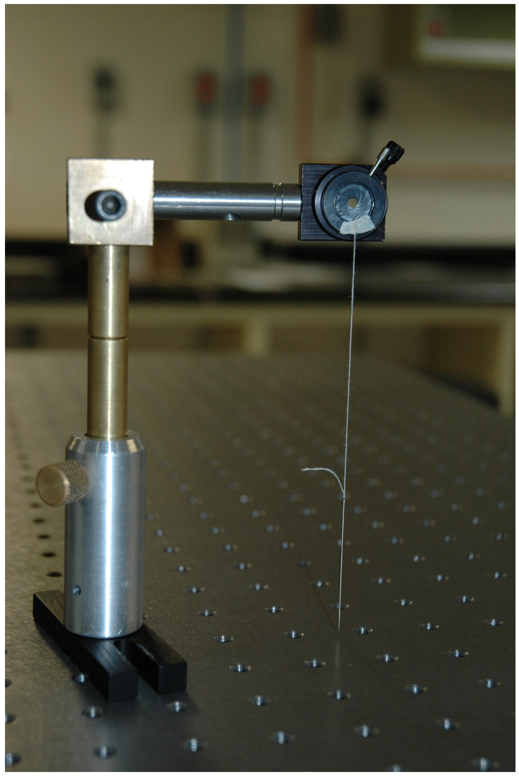

Figura 5.1: Iris modificado

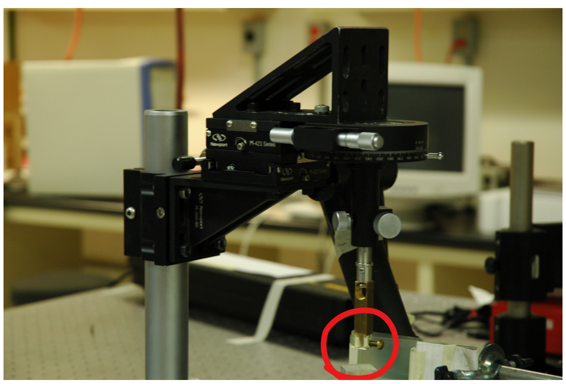

Figura 5.2: BBO (dentro del círculo rojo) en montura con cuatro grados de libertad: dos paralelos a la mesa óptica, uno vertical y otro azimutal

Este detalle tiene consecuencias importantes que también se convirtieron en parámetros de referencia durante la realización del experimento. Por ejemplo, si el láser incide perpendicularmente al cristal, el eje principal del cono de fotones convertidos es colineal al láser de bombeo, punto importante que se explica en las secciones 5.4 y 5.6.

Aquí es importante hacer notar que el montaje del BBO es tal que le permite elevarse (poco más de 3cm) y regresar fácilmente a la posición inicial con una gran precisión. Así pues, el BBO puede recolocarse en la mejor posición para que el láser incida normal y en el centro. Esta ventaja será detallada y puntualizada en la sección 5.6, donde se explica su importancia. La Figura 5.2 muestra una fotografía de tal montaje del cristal.

5.2. Montaje de los colectores de luz y detectores

Material utilizado (especificaciones en Apéndice A).

- 2 filtros pasabanda para infrarrojo cercano.
- 2 lentes acopladoras para infrarrojo cercano.
- 2 fibras ópticas multimodales.
- 2 anillos metálicos.
- 2 monturas Newport con libertad de peraltajes.
- 2 fotodiodos de avalancha.
- 2 postes Newport.
- 2 porta postes Newport.
- 2 rieles metálicos.
- 2 carritos para riel.

Los colectores de luz constan de un filtro pasa-banda (centrado en 810nm), una lente acopladora para infrarrojo cercano y una fibra óptica multimodal. Estos 3 elementos se unen mediante un anillo metálico fabricado especialmente para la lente y el filtro, además de la montura Newport con dos grados de libertad en inclinación. Esta montura se coloca sobre un poste y, a su vez, a un porta-poste que se fija en los rieles con ayuda de los carritos para riel.

Para alinear los colectores ya en los rieles, primero quitamos el filtro infrarrojo. Luego colocamos el colector de forma que el láser de bombeo incida sobre la lente acopladora. Para asegurar que el láser incide justo en el centro y perpendicularmente a la lente, se buscaron los anillos de Newton en la luz que proyecta el láser al reflejarse en la lente acopladora, pues estos sólo aparecen concéntricos en el láser cuando se cumplen las condiciones que se buscaban. Después se coloca de nuevo el filtro y se cuida que el reflejo del láser regrese a la salida del láser (al obturador); así aseguramos que el filtro también es perpendicular al haz incidente, pues esta es la condición para que el filtro actúe eficientemente. Este último paso debe realizarse en poco tiempo para evitar que el láser de bombeo "queme" el filtro. Una vez hecho esto, un extremo de la fibra óptica se conecta en el anillo metálico mientras que el otro extremo se conecta al detector (un fotodiodo de avalancha).

Este arreglo para montar los colectores, a pesar de parecer complicado, facilita el trabajo pues tiene las siguientes ventajas:

1. Colocar y quitar el filtro infrarrojo es muy simple, además de estable. Esto es importante porque la alineación de los colectores (paso que se repite muchas veces) se hace en dos etapas: sin filtro y con filtro.

2. La lente acopladora sólo concentra los fotones infrarrojos en la fibra óptica cuando la luz incide perpendicularmente con un error menor a $3°$. La montura Newport cuenta con esa precisión y estabilidad que se transmite a la lente acopladora mediante el anillo ajustado.

3. El poste y porta poste son suficientemente estables para ajustar la altura del colector con la seguridad de que se quedará ahí por varias semanas.

4. Los rieles aseguran que, si podemos hacer incidir la luz violeta en la fibra óptica, sólo queda un grado de libertad cuando se determine el cono infrarrojo (sección 5.4).

Finalmente, las salidas de los fotodiodos de avalancha son conectadas a una tarjeta contadora de alta eficiencia temporal para tiempos cortos. Esta tarjeta, junto con la computadora, presenta los resultados en un software desarrollado también por los creadores de la tarjeta (basado en LabView). El software ofrece la opción de modificar, entre otras cosas, la ventana temporal en la que cuenta coincidencias de eventos. La ventana más eficiente con la que se cuenta es de 30 ns, tiempo suficiente para obtener resultados totalmente confiables [2].

5.3. Caracterización de las cuentas negras

El tipo de detector que usamos es un fotodiodo de avalancha. Se eligieron estos detectores por su eficiencia cuántica para la longitud de onda con la que trabajamos: 60 % para 800nm (actualmente, esta eficiencia es la mejor en el mercado) y por su baja emisión de fotones termoiónicos y ruido. Por ejemplo, a pesar de que hay tubos fotomultiplicadores con mejor eficiencia para esta longitud de onda, el ruido intrínseco es mucho mayor que el número de eventos a registrar en este tipo de experimentos y las cuentas negras también son muy altas.

Las cuentas falas registradas por el software durante los experimentos en realidad es originado por diversas causas. Las que tomamos en cuenta como principales son:

1. El hecho de tener todo el sistema -particularmente, los detectores- a una temperatura finita y distinta de cero (a temperatura ambiente), provoca que el sistema de avalancha de los fotodiodos emita fotones termoiónicos que llegan a contarse por el software.

2. A pesar de contar con un filtro pasabanda y una lente acopladora, muchos fotones provenientes de las fugas de luz del laboratorio llegan hasta la fibra óptica y, por ende, a los detectores.

3. Las fibras ópticas cuentan con un recubrimiento que bloquea muchos de los fotones ambientales, pero no de todos. Algunos de estos fotones entran a la fibra, sin haber pasado por el colector, y son contados.

Por estas razones es importante hacer una caracterización de las cuentas negras de los detectores. Para ello se expuso a los detectores a las condiciones de medición sólo omitiendo la producción de fotones convertidos. Es decir, se cerraron las puertas, se apagó la iluminación del laboratorio y se encendió el láser de bombeo. También se cuidó que el monitor de la computadora estuviera lo más opaco posible, pues el calor de su cinescopio y el brillo de su pantalla afectan las mediciones. Las mediciones se tomaron por 50 segundos y se promediaron. Las unidades son *cuentas por segundo*, y la incertidumbre se tomó a partir de la diferencia máxima con respecto del promedio final.

Cuentas negras detector A: $470 \pm 48c/s$
Cuentas negras detector B: $590 \pm 55c/s$

Sin embargo, a pesar de que las cuentas negras parecieran considerables, las coincidencias (señales en el detector A y B con diferencias menores a 30ns), que son las principales con las que se trabajó, no lo son. De hecho, las coincidencias debidas a estas señales son de casi 0.01 por segundo, lo que no significa ningún problema para las mediciones de este trabajo.

5.4. Determinación del cono infrarrojo

En la teoría, se esperaría que si el láser incide perpendicularmente al BBO, el ángulo al que se deben colocar los rieles de cada colector respecto del láser de bombeo, debe ser exactamente el mismo: el calculado en la sección 3.1. Sin embargo, en la realidad esto no sucede con la precisión que se quisiera (menor a la que el se puede medir con una regla simple). El error, cuando se tiene cuidado en la alineación, puede llegar a ser hasta de 1 ° (aproximadamente 8mm de desplazamiento el colector perpendicularmente al haz de bombeo).

5.4.1. Primer experimento

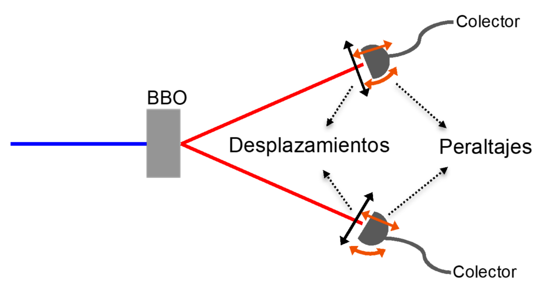

Figura 5.3: Esquema de alineación de colectores

Una vez tomadas las medidas mínimas de seguridad para el equipo, se encendieron los detectores y, usando el software, se buscó la posición de los rieles en la que los colectores captaran la mayor cantidad de fotones (cuentas individuales). Después se afinó la posición de los colectores con ayuda de los tornillos de la montura Newport. Estos tornillos permiten dos peraltajes de la inclinación del colector. Luego, es necesario reposicionar los rieles.

El proceso anterior se repite varias veces (al menos 2 veces) para asegurarse que el centro del riel está debajo del centro del haz de fotones convertidos, lo que se traduce en tener el máximo de cuentas en los detectores. Cuando esto se logra, los rieles fueron fijados a la mesa óptica usando piezas de latón y tornillos. Fue importante verificar que se mantuvieran las cuentas una vez que se fijaban los rieles, pues el hecho de "apretar" los rieles contra la mesa óptica genera un ligero, pero significativo, desplazamiento de los colectores.

5.4.2. Segundo experimento

El área eficaz de visión del colector es un círculo de 5mm de diámetro. Por otro lado, el ancho del haz infrarrojo es del orden de 2 mm. Sin embargo, este spot infrarrojo no tiene una distribución espacial de intensidades gaussiana (es decir, el punto más intenso del haz no necesariamente está en el centro). Más aún, hay una correlación muy fuerte e importante entre el ángulo al que salen los fotones y su longitud de onda (punto que se discute con gran interés en el Capítulo 7). Así pues, para seleccionar más finamente sólo ciertas longitudes de onda o vectores de onda, colocamos un filtro espacial: un iris o pinhole.

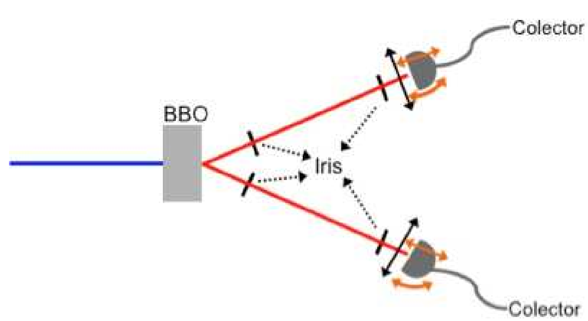

Figura 5.4: Esquema de alineación de colectores con iris

Los iris que se colocaron tienen una ventana de aproximadamente 0.8mm y se colocaron

después de haber determinado el cono infrarro-
jo (Sección 5.4.1). En cada brazo del cono (i.e. sobre cada riel) se colocaron 2 iris: uno lo más cerca posible del cristal BBO y otro lo más cercano posible a los colectores (al final, la separación fue de aproximadamente 30cm). De esta forma, se tenía definido con buena precisión el camino de fotones convertidos para después alinear con un láser visible (sección 5.6). En el proceso de alineación, muchas veces fue necesario regresar a algún punto seguro para no repetir todos los pasos. Estos iris se convirtieron precisamente en un punto de referencia para poder asegurar que varios elementos seguían alineados de acuerdo con las necesidades de cada paso en el proceso.

5.5. Montaje del interferómetro

Después de tener el cono infrarrojo determinado, sustituimos elcristal BBO por un divisor de haz (BS2). El objetivo de esto es simular el camino de fotones infrarrojos pero con un láser visible, como se muestra en la figura siguiente.

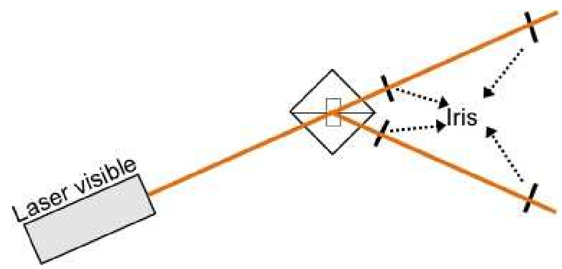

Figura 5.5: Esquema de simulación del cono mediante el láser y el divisor de haz

Una vez que se aseguró que el láser simula el cono de fotones convertidos, se colocan referencias para recuperar la alineación fácilmente en caso de que el láser o el periscopio que dirige el láser al BS2, accidentalmente se muevan. Estas referencias pueden ser otro par de iris que, de tener el espacio suficiente, se deben colocar lo más lejano posible para mantener la mayor precisión posible.

IMPORTANTE: *El cuidado en la precisión que se maneje desde el posicionamiento de las referencias, será determinante en el éxito del experimento.*

El primer par de espejos se coloca sobre el porta-poste de los colectores. Estos espejos, planos y con dos grados de libertad de inclinación, se fijan en posiciones tales que el reflejo del láser pase por encima de una línea de hoyuelos para tornillo y a la misma altura del láser de bombeo. Para asegurar esto, se usan un par de iris como se muestra en la Figura 5.6.

A continuación, usando el mismo método con base en el par de iris, sobre uno de los brazos se montan los dos espejos siguientes como se muestra en la Figura 5.7. Es importante, antes de afinar el último espejo de ese brazo, montar el divisor de haz principal (BS) aunque no se ajuste finamente. Ello se hace con el fin de no lidiar con el problema de las desviaciones paralelas debidas a la refracción en el BS, a pesar de que el BS no esté alineado finamente.

Los espejos siguientes del segundo brazo se montarán sobre una plataforma ajustada para ser desplazada mediante un motor de pasos (el control de éste se realiza desde el software de una computadora). Además, en nuestro método de alineación, estos espejos son los que determinan la altura mínima sobre la que se montarán el resto de los elementos ópticos.

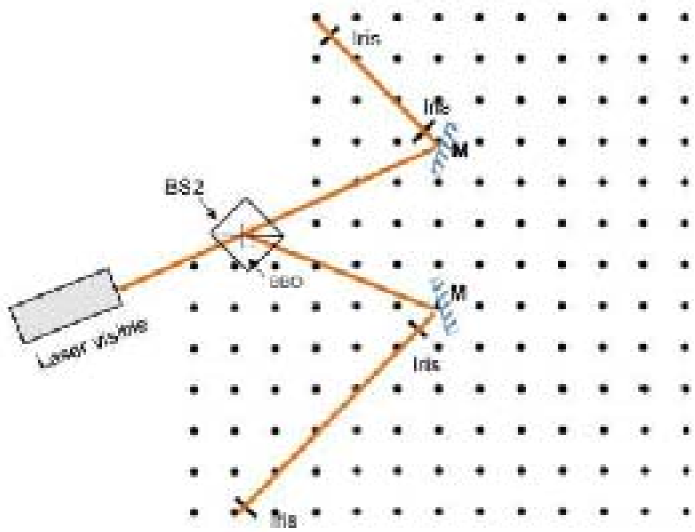

Figura 5.6: Esquema de montaje del primer par de espejos

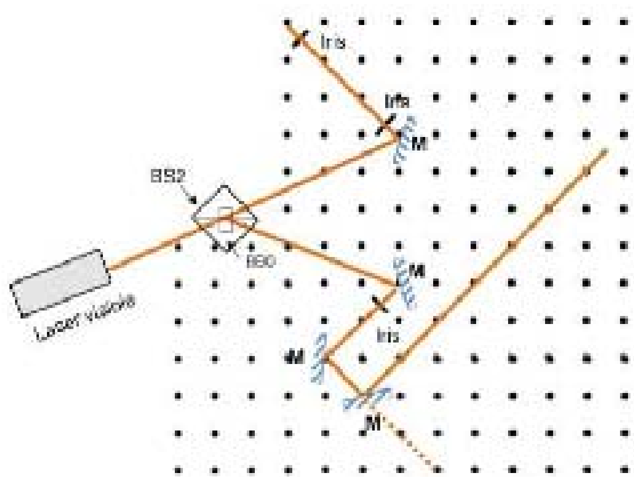

Figura 5.7: Montaje de los espejos del primer brazo junto con el BS

Para poder alinear este par de espejos de manera análoga a la que se hizo con el brazo anterior, es bastante útil bloquear la luz del brazo ya alineado para que no se traslape o se confunda con el spot del segundo brazo.

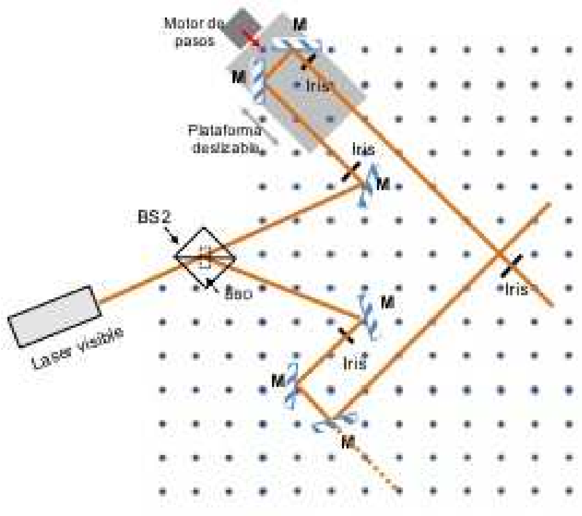

Figura 5.8: Esquema de montaje de los espejos sobre el motor de pasos

Este conjunto de espejos, en forma de trombón, deben desplazarse paralelamente al haz que va del último espejo al BS. Si este desplazamiento está ligeramente inclinado, al momento de la igualación de caminos ópticos burda y fina se desplazarán también los haces incidentes al BS, haciendo imposible la igualación de caminos ópticos.

5.6. Igualación de caminos ópticos

Si el punto 5.5 se hizo correctamente, debe aparecer inmediatamente la interferencia usando un láser. Para visualizar mejor esto, es muy útil colocar una lente (con distancia focal pequeña) y proyectar el spot en una pantalla. Una forma de estimar que el primer alineamiento fue exitoso, se deben observar muy pocas franjas de interferencia: dos o tres. Si se observan más franjas, se puede usar la proyección en la pantalla para mejorar esto.

Por último, se hace la igualación fina de caminos ópticos. Como referencia, se usa una fuente de luz muy incoherente y se busca una muestra de interferencia visible. Las fuentes que se usaron fueron una lámpara de tubo fluorescente, un led, un foco de filamento de tungsteno y el fuego de un encendedor (todas ellas, a través de un vidrio esmerilado para esparcir la luz y observarla con mayor claridad en el interferómetro). Estas fuentes (a excepción de la lámpara fluorescente) tienen una longitud de coherencia menor a 30 micras, lo que dice que, si observamos interferencia con estas fuentes, se puede asegurar que la diferencia de caminos ópticos en nuestro dispositivo es menor a 20 micras. Esta búsqueda se realiza escaneando posiciones con el motor de pasos (a pasos de 1 micra) y observando por una de las salidas del BS. El rango por el que se necesita buscar es de alrededor de 4000micras (2000 micras en cada dirección). Una vez que se observa la interferencia con luz blanca, aparecen franjas de colores (a veces un poco pastel) que deben ser bastante claras.

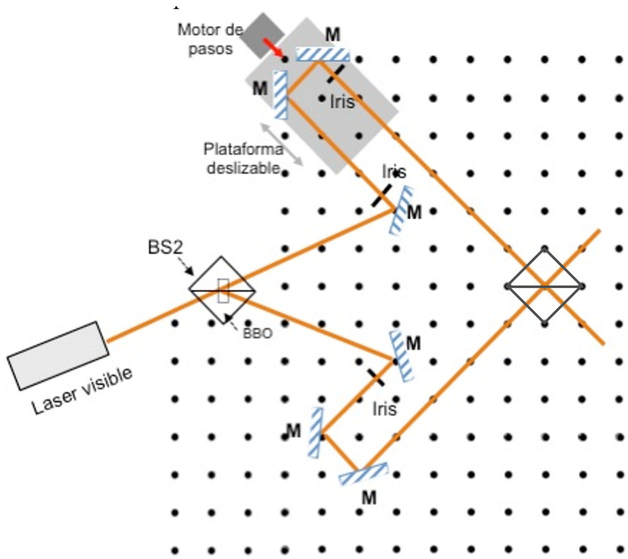

Figura 5.9: Esquema de montaje con todos los espejos y BS final

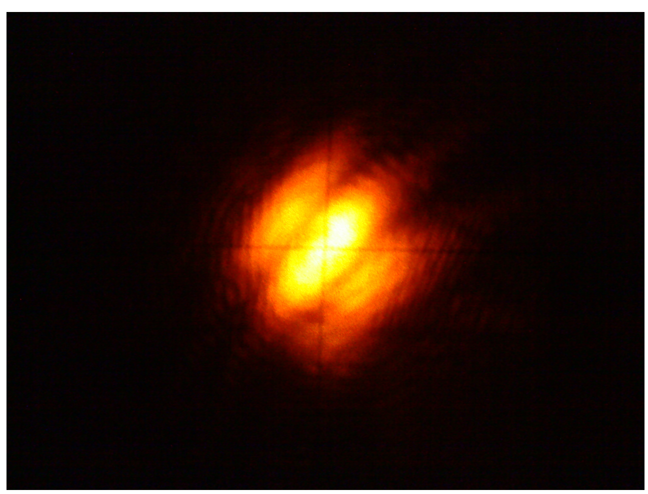

Figura 5.10: Fotografía de la interferencia con láser bicolor a la salida del HOM

En posiciones en las que no hay interferencia, simplemente se observa una mancha difuminada de luz blanca.

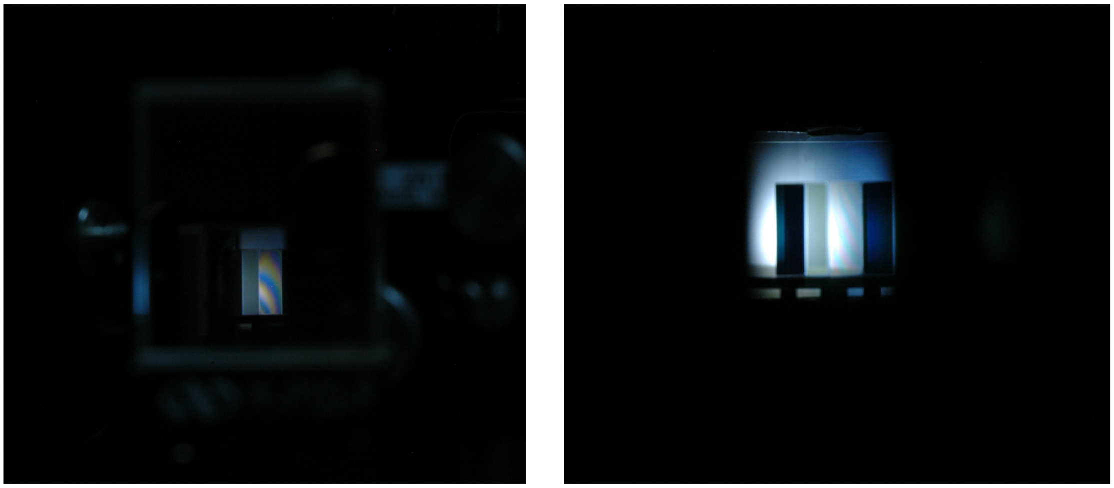

Figura 5.11: [Izquierda] Fotografía de las franjas de interferencia con luz blanca (franjas de colores pastel). [Derecha] Fotografía que muestra una mancha blanca sin interferencia.

5.7. Montaje de los colectores de luz con fibra óptica

Una vez que se observa interferencia con luz blanca en el interferómetro, con ayuda del láser guía se colocan los colectores de luz a las salidas del BS. El método de alineación de los colectores en esta etapa es muy similar al explicado en la sección 5.2. Después de todo, lo único que se busca es que, ya que el láser guía es colineal a los pares de fotones infrarrojos, se encuentre un máximo de luz del láser guía en las salidas de las fibras ópticas.

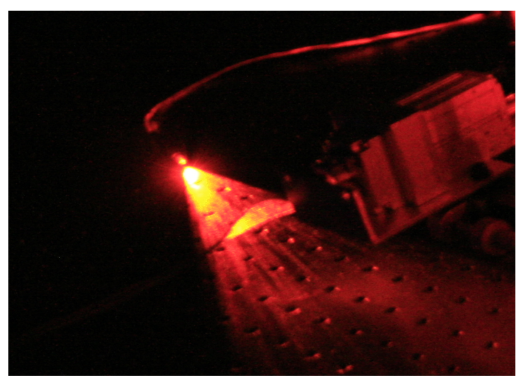

Figura 5.12: Fotografía de la luz del láser naranja saliendo por la fibra óptica

Cada fibra óptica se conecta a un detector: un fotodiodo de avalancha (ver Apéndice A para mayor detalle del detector). Luego, el circuito que se activa con la avalancha emite un pulso TTL de 5V que se envía a una tarjeta contadora conectada a la tarjeta madre de una computadora. Mediante el software (basado en LabView), se monitorearon las señales de los detectores y se almacena la información para su análisis.

5.8. Primer experimento

El primer experimento se realizó sin ayuda de los filtros espaciales. El efecto de interferencia buscado sí se observó aunque la visibilidad fue muy mala como se observa en la Gráfica 5.14.

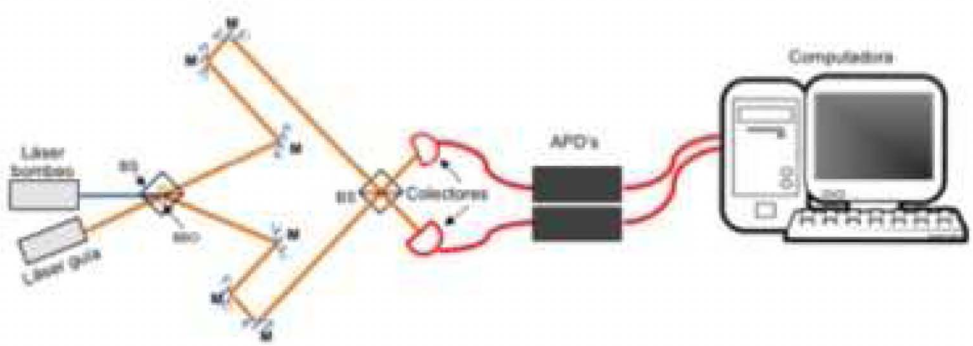

Figura 5.13: Esquema completo del método de detección

A continuación se muestra la gráfica de las coincidencias en función del número de pasos (o posición) del motor de pasos.

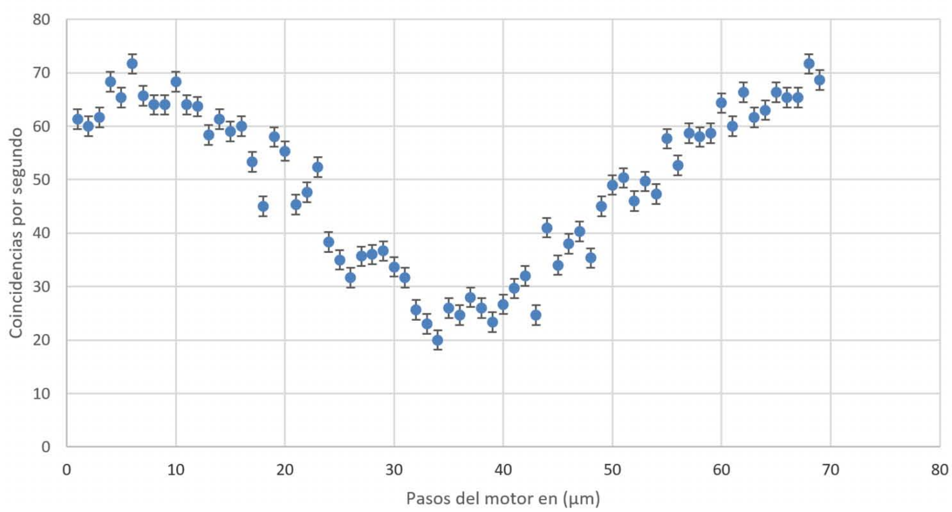

Figura 5.14: Coincidencias en función de pasos del motor. SIN FILTRO ESPACIAL

5.9. Segundo experimento: Uso del filtro espacial

Como se mencionó en la sección 5.4.2, a la repetición del experimento se le agregaron filtros espaciales (o iris). La Gráfica 5.15 muestra los datos obtenidos. El análisis de ésta y las demás gráficas se detallará en el Capítulo 7.

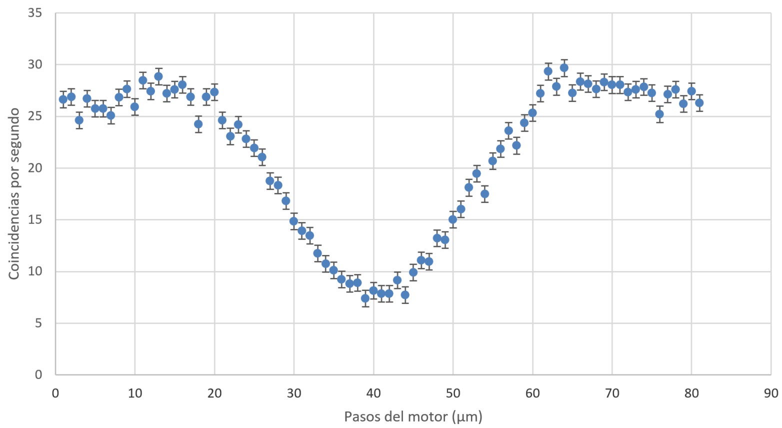

Figura 5.15: Coincidencias en función de pasos del motor. CON FILTRO ESPACIAL

Si aplicamos los resultados de la ecuación 4.31 y la gráfica 4.3, obtenemos un acoplamiento muy claro en la forma del dip e, incluso, en los amortiguamientos en los extremos del dip. En la Gráfica 5.16 se puede observar la predicción teórica y el resultado experimental sobrepuestos.

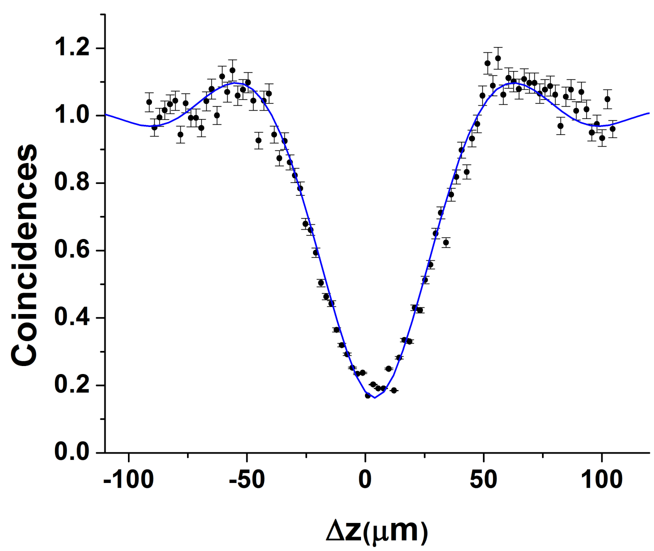

Figura 5.16: Predicción teórica (línea continua) y resultado experimental (puntos) del interferómetro de HOM

Capítulo 6

Preparación de estados enredados

Actualmente, los estados cuánticos enredados son comúnmente requeridos tanto en la investigación de ciencia básica como aplicaciones tecnológicas [6]. Comúnmente, estos estados son producidos al bombear cristales no-lineales tipo 2, donde los pares de fotones "nacen" (o desde su producción) están enredados, o mediante un par de cristales no-lineales tipo 1. En este capítulo, se detalla un método experimental para producir estados enredados ópticos a partir de pares de fotones que no nacieron enredados [7] y con una eficiencia de producción mucho mayor a otros métodos [8] basándose en una configuración muy similar a la del interferómetro de HOM.

6.1. Estados cuánticos enredados con arreglo HOM

El interferómetro de HOM consiste, básicamente, en dos fotones igualmente polarizados que entran a un divisor de haz -cada uno por entradas diferentes- e interfieren en la salida. Ahora bien, si se usa el mismo arreglo básico (detalles en Capítulo 5) pero se cambia la polarización de uno de los fotones de entrada, el efecto de interferencia desaparece. Sin embargo, aquí se abre la posibilidad de estudiar la naturaleza de otro efecto cuántico también de mucho interés científico: el enredamiento.

Los estados de salida de la SPDC tipo 1 son como los que se describieron en el Capítulo 3, con la ecuación 3.42. Sin embargo, a pesar de que estos estados cuentan con diversos entrelazamientos, nosotros continuaremos con el caso de la aproximación paraxial y fijándonos sólo en la polarización; es decir:

$$|\psi\rangle = |H, H\rangle \tag{6.1}$$

donde H se refiere a un fotón individual polarizado horizontalmente.

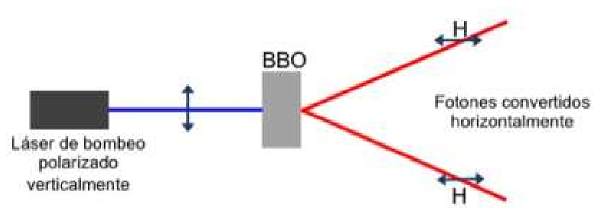

Figura 6.1: Láser violeta bombeando el BBO y produciendo pares de fotones horizontales.

Recordemos ahora que estos fotones son producidos al bombear un cristal no-lineal tipo 1 (BBO) con un láser violeta y se localizan diagonalmente opuestos en un cono cuyo vértice es el BBO [2] (ver Figura 6.1).

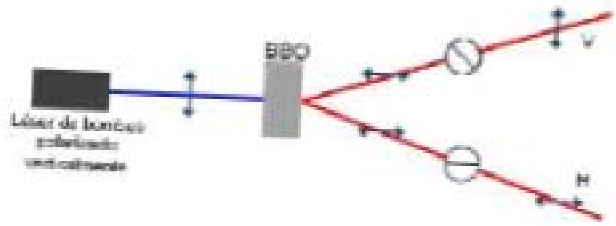

Figura 6.2: Preparación de estados con polarización vertical y otro horizontal

Una vez obtenidos los pares igualmente polarizados, se aplica una transformación de rotación sobre uno de los fotones; por ejemplo, la segunda entrada. Esta transformación de rotación se realiza mediante una lámina retardadora de fase de media onda colocada a 45° respecto de la base horizontal-vertical (ver Figura 6.2). A pesar de que este problema físico parezca trivial, su entendimiento de base es determinante para el análisis y conclusión de este trabajo. Es por ello que durante esta explicación y detalles similares, se pondrá especial cuidado. Así pues, el estado que tenemos después de la transformación de rotación es:

$$|\psi\rangle = |H, e^{i\theta}V\rangle \tag{6.2}$$

Los fotones gemelos (generados mediante la SPDC) son producidos con la misma fase. Al hacer uso de la lámina retardadora de fase, aparece una diferencia de fase arbitraria entre los fotones. Esta diferencia de fase temporal se compensa -burdamente- con otra lámina retardadora de fase de media onda colocada en el camino del fotón horizontal. Es decir, el brazo que no sufrirá la transformación de rotación tendrá un retraso temporal mediante una lámina de media onda que actúe pasivamente: con su eje rápido a 0° con respecto a la base Horizontal.

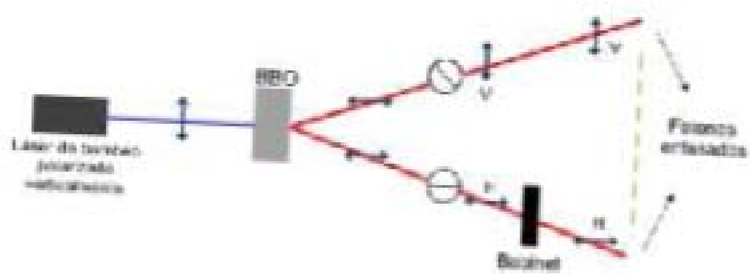

Figura 6.3: Babinet para obtener fotones enfasados.

El acoplamiento fino de la fase temporal entre los dos fotones que después llegarán a un divisor de haz, es uno de los dos factores que determinan si el estado de salida está o no enredado [9]. Para controlar esta diferencia fina de fase se colocó un compensador de fase variable: un babinet soleil (más detalles de este compensador en la sección 6.2), como se muestra en la Figura . Esta vez, tal como se desea, tenemos un estado con fotones en fase, es decir:

$$[H]|\psi\rangle = |H, V\rangle \tag{6.3}$$

Para redirigir los fotones hacia un divisor de haz (BS), simplemente se usa un par de espejos planos. Finalmente, los detectores, que constan de un selector de polarización, un colector de luz y un detector, se colocan tal como lo muestra la Figura 6.4. Si pensamos en una base para escribir este estado que incluya la polarización H y V, el estado también se podría escribir como:

$$|\psi\rangle = |1_{1H}, 0_{1V}, 0_{2H}, 1_{2V}\rangle \tag{6.4}$$

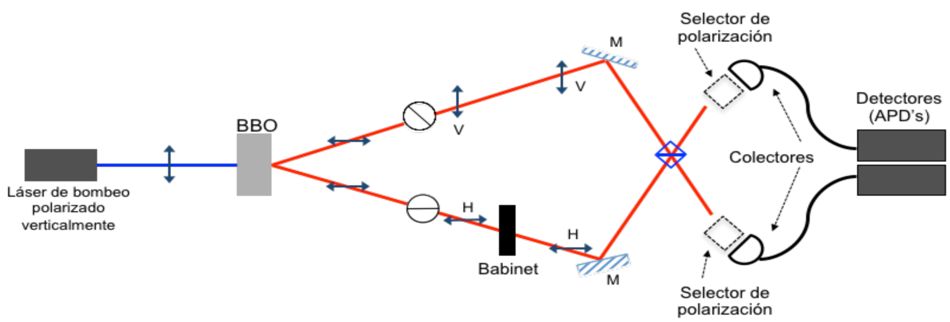

Figura 6.4: Montaje final con selectores de polarización y colectores

Como se vió en la sección 4.1, los estados de salida de un BS son cuatro: los dos fotones salen por un lado, los dos fotones salen por el otro lado, los dos fotones se reflejan y los dos fotones se transmiten (Figura 6.5)

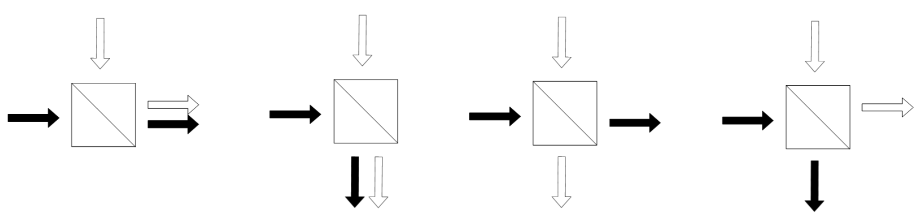

Figura 6.5: Todas las opciones a la salida del BS

En esa sección, la ecuación 4.5 describe el estado de salida cuando los fotones incidentes tienen la misma polarización, lo que concluye con una interferencia destructiva entre dos de las opciones de salida. Para este caso, si los fotones incidentes tienen polarización ortogonal (que denotaremos como H y V), el estado a la salida del BS queda como:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \frac{1}{2}((T_H T_V)^{1/2}|1_{1H}, 0_{1V}, 0_{2H}, 1_{2V}\rangle (R_H R_Y)^{1/2}|0_{1H}, 1_{1V}, 1_{2H}, 0_{2V}\rangle \\ (T_H R_Y)^{1/2}|1_{1H}, 1_{1V}, 0_{2H}, 0_{2V}\rangle (R_H T_Y)^{1/2}|0_{1H}, 0_{1V}, 1_{2H}, 1_{2V}\rangle) \end{aligned} \tag{6.5}$$

A pesar de que el sistema de detección sólo podría detectar los estados que generan coincidencias (los primeros dos estados de la ecuación 6.5), para el cálculo teórico se toma el estado $|\psi\rangle$ completo.

6.2. Detección teórica y desigualdad de Bell

Comencemos definiendo los campos $\hat{E}_1^{(+)}$ y $\hat{E}_2^{(+)}$ como combinación lineal de los operadores de aniquilación en bases ortogonales

$$\begin{aligned} \hat{E}_1^{(+)} &= \cos\theta_1 \hat{a}_{1x} + \sin\theta_1 \hat{a}_{1y} \\ \hat{E}_2^{(+)} &= \cos\theta_2 \hat{a}_{2x} + \sin\theta_2 \hat{a}_{2y} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ahora bien, de acuerdo con Glauber [10], la probabilidad teórica de detección de dos fotones simultáneos está dada por:

$$P(\theta_1, \theta_2) = K\langle\psi|\hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}|\psi\rangle \tag{6.7}$$

donde K representa todos los factores relacionados con la eficiencia del detector[1].

Luego, usando las ecuaciones [6.5], [6.6] y [6.7], podemos obtener el resultado general siguiente:

$$P(\theta_1, \theta_2) = K\left[\sqrt{T_H T_V}\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sqrt{R_H R_V}\sin\theta_1 \cos\theta_2\right]^2 \tag{6.8}$$

donde T_H, T_V, R_H y R_V se refieren a los coeficientes de transmitancia y reflectancia en cada eje, respectivamente. Para nuestro caso, un BS 50:50 (es decir, 50 % de la luz incidente se transmite y 50 % se refleja), todos los coeficientes de transmisión y reflexión son 1/2, por lo que la ecuación 6.8 queda:

$$P(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{4}K\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \tag{6.9}$$

Así pues, la ecuación anterior nos permite calcular la probabilidad de detectar dos fotones, con ángulos de polarización θ_1 y θ_2 simultáneamente.

Por otra parte, recordemos que uno de los parámetros que puede determinar el enredamiento de un estado, es el *parámetro de Bell*. Éste tiene distintas expresiones y cada debe cumplir con una desigualdad. En este trabajo se usará una expresión que se detalla en el artículo de Clauser y Horne [11]:

$$S = P(\theta_1, \theta_2) - P(\theta_1, \theta_2') + P(\theta_1', \theta_2') + P(\theta_1', \theta_2) - P(\theta_1', -) - P(-, \theta_2) \leqslant 0 \tag{6.10}$$

donde $P(\theta_1'$,-) y P(-,θ_2) se refieren a probabilidades sin uno u otro selector de polarización. Es decir, literalmente se retira el selector de polarización (ver Figura 6.4). Además, los ángulos que maximizan la desigualdad son:

θ_1	θ_2	θ_1'	θ_2'
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	0

Tabla 6.1: Ángulos que maximizan el parámetro de Bell.

[1] La eficiencia del detector depende de muchas cosas: eficiencia cuántica de los fotodiodos de avalancha, la absorción del BS, de las lentes colectoras de luz y de la misma fibra óptica, además de otros factores electrónicos y ruido de fotones termoiónicos. La importancia de estos factores respecto al tema estudiado se discutirá en el siguiente y último capítulo de este trabajo.

Aplicando los ángulos de la Tabla 6.1 en la ecuación 6.10, podemos encontrar que:

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}140165 > 0 \tag{6.11}$$

En el experimento, este valor analítico no sólo dependerá de K, sino también del intervalo de tiempo de cada medición, por ejemplo.

6.3. Montaje experimental

El dispositivo experimental que se usó es muy similar al detallado en el Capítulo 5, en la sección 5.5 *Montaje del interferómetro*. Sin embargo, esta vez no fue necesario colocar los iris para seleccionar el vector de onda (i.e. los filtros espaciales). Luego entonces, se explicará el montaje del dispositivo a partir de ese punto.

Una vez asegurado que el primer par de espejos refleja el láser sobre una línea de hoyuelos de la mesa óptica, se coloca el BS en el cruce de estos rayos. La montura sobre la que se colocó el BS permite girarlo sobre su propio eje, inclinarlo con dos grados de libertad y desplazarlo en el eje perpendicular a la cara reflejante del BS. Los 4 grados de libertad del BS (ver Figura 6.6) son para asegurar que, con la mayor precisión que el ojo humano alcanza, los haces reflejados y transmitidos en cada salida del BS sean colineales. El método más simple y confiable para lograrlo es el siguiente:

1. Obstruir uno de los espejos.
2. Colocar un par de iris (uno cercano y otro lejano dentro de lo posible) sobre el haz transmitido.
3. Obstruir el otro espejo y ajustar la posición del BS para que el rayo reflejado atraviese perfectamente por el camino definido con el par de iris.
4. Repetir los pasos anteriores invirtiendo el orden en el que se obstruyeron los espejos para mostrar que de los dos lados los haces son colineales.

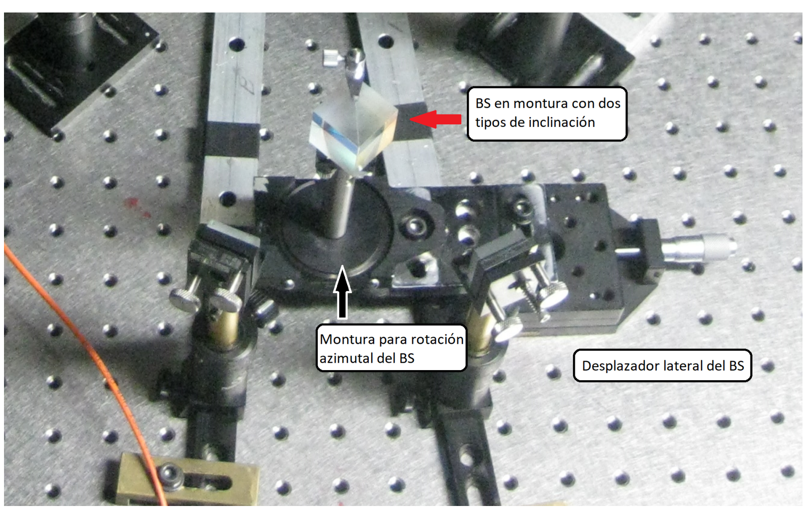

Figura 6.6: BS con cuatro grados de libertad.

A continuación se montan los colectores de la misma forma que la explicada en el punto 5.2 *Montaje de los colectores de luz y detectores*. Es decir, se busca que, sin el filtro pasa-banda, se obtenga la mayor intensidad de luz naranja a la salida de la fibra óptica. Después se fija el filtro pasa-banda y se conectan las fibras a los fotodiodos de avalancha (detectores).

Una vez que los colectores de luz están fijos, se regresa el BBO a su posición original (en lugar del divisor de haz que se usó para alinear) con lo que el dispositivo está listo para enviar los pares de fotones igualmente polarizados del BBO al BS y hasta los colectores.

Finalmente, se colocan un par de láminas retardadoras de fase de media onda para infrarrojo sobre el camino de los fotones infrarrojos y antes de los primeros espejos. La siguiente figura muestra la posición de estas láminas.

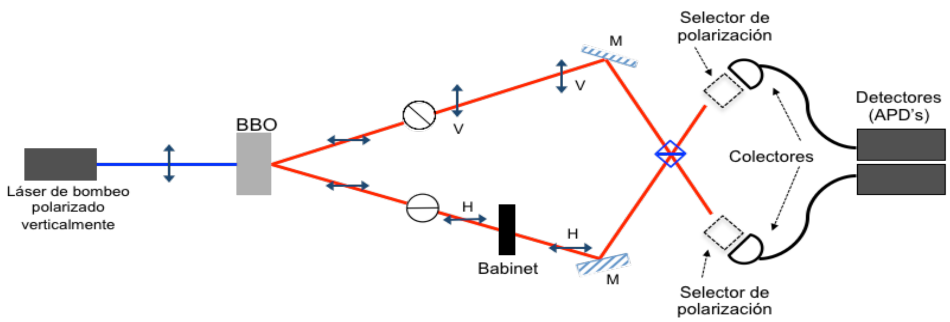

Figura 6.7: Diagrama del experimento de preparación de estados enredados.

Una de las láminas se coloca a 45° con respecto de la base de los fotones convertidos (cuya polarización es horizontal), mientras que la otra se fija a 0° con respecto a la misma base. Con esto se logra que uno de los fotones sea horizontal (H) y el otro vertical (V). A pesar de que pareciera que la lámina a 0° se puede omitir, su presencia es necesaria bajo la idea de que el camino óptico de los fotones desde el BBO hasta el BS sea prácticamente el mismo. La consecuencia de esto es que la compensación de fase será más sencilla e intuitiva durante el experimento. Esto también se discutirá en el siguiente capítulo de este escrito.

6.4. Desarrollo del experimento

Lo primero es asegurarse que el estado de entrada en el BS es $|\psi\rangle = |H\rangle|V\rangle$. Para ello, se hizo una gráfica en la que una de las láminas de media onda estaba fija en 0° mientras que la otra variaba de 0° a 180°. Además, ya que los colectores no son sensibles a la polarización de los fotones de entrada, se colocaron divisores de haz polarizante (PBS) frente a cada colector (la polarización horizontal se transmite en nuestro PBS, mientras que la vertical se refleja). Así, en el máximo de coincidencias de eventos (clicks en el detector) teníamos un estado de entrada de la forma $|H, H\rangle$, mientras que en el mínimo de coincidencias, el estado de entrada al BS es de la forma que esperamos, es decir $|H, V\rangle$. La gráfica de dicha calibración se presenta en la Figura 6.8.

Tal como se esperaba, el mínimo de las cuentas está en 45° y 135°, que es cuando no podemos tener coincidencias debido a que uno de los fotones es vertical y no llega hasta el detector, sino que es reflejado por el PBS frente al colector.

Una vez que aseguramos el input de nuestro sistema, se buscó que cada par de fotones incidiera enfasado en el BS. Esto se logró colocando un compensador de fase variable entre el cristal no-lineal

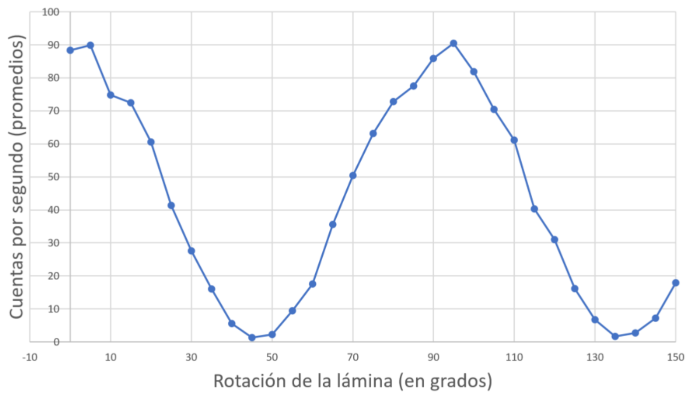

Figura 6.8: Calibración de las láminas de media onda para obtener el input $|\psi\rangle = |H, V\rangle$

y el primer espejo. El compensador elegido fue un Babinet Soleil debido a que, en su área efectiva, compensa homogeneamente un haz que incide normal (ver Figura 6.7). Este elemento consiste en un par de cuñas de un cristal birrefringente que, al desplazarse una sobre la otra, aumenta o disminuye el espesor del área óptica efectiva. Aquí es muy importante aclarar algo:

No estamos asegurando que la diferencia de caminos ópticos entre uno y otro fotón es cero cuando llegan al BS, sino que la diferencia de fase entre esos dos fotones es $2n\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

El último elemento que se coloca antes de medir es un par de láminas de media onda que, junto con el PBS frente a cada colector, forman un selector de polarización. La función de estos dos elementos (cuyo algoritmo de medición se explica en el Apéndice C) es sólo medir una de las polarizaciones que llegan al colector. Estos selectores de polarización son quienes permiten calibrar el compensador Babinet. Ello se logra colocando los selectores de polarización en la posición determinada para medir 45° y -45°, mientras que, usando el Babinet, se varía la diferencia de fase del par de fotones input. Estos datos se grafican para determinar más fácilmente la posición en la que se queda el Babinet durante el resto del experimento; es decir, de acuerdo con los resultados y análisis de experimentos anteriores [12], el sistema está máximamente enredado cuando las cuentas de coincidencias de las polarizaciones 45° y -45° son máximas y comparables con 0, 90°.

Hasta este punto del experimento se puede decir que se producen estados enredados en polarización, lo que parece fenomenológicamente correcto y, más aún, intuitivo. Es decir, paso a paso se construyen estados de la forma de la ecuación 6.5. Sin embargo, es importante hacer la medición que determine el grado de enredamiento para cuantificarlo.

6.5. Resultados

El parámetro de Bell se obtiene con las probabilidades de medir combinaciones de ángulos de acuerdo con la ecuación (6.10). Por practicidad, estas probabilidades en el laboratorio corresponden al conteo de coincidencias en un tiempo de 10s y cada medición se repitió ocho veces. El valor que se usó para S fue el promedio de esas repeticiones para cada combinación. En el Apéndice B se presentan las mediciones explícitas y el programa en Fortran para calcular S y su error.
El resultado experimental obtenido fue un parámetro de Bell $S = 9{,}75 \pm 2{,}24$, lo que asegura la no-localidad (post-seleccionada) de estados enredados preparados en la base de polarización, con una precisión de cuatro desviaciones estándar. Este resultado es comparable con el de nuestra referencia (11,5±) [8], por lo que también es referencia de confiabilidad.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Resumen de los resultados

Se discutió con cuidado la producción de los estados a la salida del BBO, el estado $|\psi_S PDC$ y éste se usó para modelar el comportamiento del interferómetro de HOM bajo un tratamiento multimodal. Después, al hacer el experimento (donde se detalla cómo reproducir su construcción exitosamente), se encontró un acoplamiento muy claro entre los resultados experimentales y teóricos no sólo en el dip clásico de este interferómetro, sino también en los batimientos a los lados del dip.

Después, usando prácticamente la misma configuración que la del interferómetro, se prepararon estados enredados en la base de polarización y que fueron postseleccionados durante la adquisición de datos. Para determinar si estaban enredados, se midió el parámetro de Bell y se encontró que $S = 9{,}75\pm$ viola la desigualdad de Bell por más de 4 desviaciones estándar. En el apéndice C se detalla la deducción de la versión del parámetro de Bell que usamos.

7.2. Discusión general

La conclusión de un trabajo en ciencia, y aún más un trabajo experimental, depende fuertemente del "ruido" o, en general, margen de error del resultado. Esto fue algo que se cuidó mucho durante el todo el trabajo desarrollado. Por ejemplo, se revalorizaron los sistemas de detección junto con los sistemas de adquisición de datos, además de otros aspectos como el deterioro de los elementos ópticos. Sin embargo, las mediciones que obtenemos en los resultados finales son altamente confiables debido a que trabajamos con coincidencias de eventos y no eventos aislados. Es decir, las coincidencias falsas que aparecen cada vez que ocurren dos eventos no controlados (debidos a fotones termoiónicos, fotones infrarrojos no provenientes de la SPDC o fotones de otras frecuencias que el filtro no pudo absorber) con una diferencia temporal menor a 30 ns, son poco menos de 0.01 por segundo. En las condiciones en que se realizaron todas las mediciones, este ruido representó algo totalmente despreciable respecto del total de cuentas para prácticamente todas las mediciones. Esta es la razón por la que no fue necesario contabilizar y analizar a detalle todas las fuentes de error externas al experimento básico, como los procesos estocásticos de producción de fotones termoiónicos dentro y fuera de los detectores debida a la temperatura ambiente, control de voltaje y corriente de las fuentes de alimentación de los detectores y otras similares.

Otro aspecto importante que ha sido determinante en muchos experimentos desarrollados en este laboratorio, es el cuidado en la alineación de los objetos ópticos. Después de montar casi una decena de veces el interferómetro de HOM, es claro que entre mayor sea el cuidado en el posicionamiento fino de cada uno de los elementos ópticos, parece que es mayor el éxito del montaje completo. Las monturas finas y especializadas con que cuenta el laboratorio fueron de gran ayuda no sólo para colocar cada elemento, sino para fijarlo en una posición con la capacidad de desplazarlo finamente, por pasos o hasta con graduación. Obviamente, no siempre se contó con “la montura ideal” para cada problema técnico, pero también, con un poco de creatividad, siempre se encontró la forma de resolverlo. Sin embargo, a pesar de contar con todas estas ventajas, hay detalles que no se pueden arreglar sólo con “el cuidado y finura al alinear”. Fue aquí donde, afortunadamente y gracias a la deducción teórica detallada del interferómetro, entendimos la importancia del papel que juega el ángulo de dispersión al que salen los fotones y la relación con su longitud de onda. Algunas de estas consecuencias parecen obvias a partir de los resultados de la producción de fotones por SPDC (Capítulo 3) o las ecuaciones de Sellmeier, pero sus implicaciones son determinantes en cuanto a la información obtenida en el interferómetro. Luego entonces, profundicemos en esta discusión.

Para hablar sobre la “calidad ” del interferómetro presentado en este trabajo, retomemos algunos puntos. Por ejemplo, en cuando a las condiciones del láser de bombeo usado, sabemos que los fotones que ofrecen no son exactamente colineales y monocromáticos. Estos se encuentran en una distribución de intensidad que, para un corte transversal. se ve casi gaussiano. Además, estos fotones también aparecen con una distribución gaussiana de frecuencias centrada en una que es la que se toma para hacer los cálculos de la ecuación de Sellmeier, por ejemplo. Dicho resumidamente, tenemos dos factores de entrada en el cristal: el efecto de SPDC ocurre en diferentes puntos del cristal (dentro de un área ciruclar de 2mm) y el ángulo al que salen los fotones convertidos es en realidad un intervalo de minutos de grado. Llevando todo este detalle al punto donde ocurre la interferencia y recordando que los fotones sólo interfieren cuando llegan al mismo tiempo al mismo lugar, es de esperarse que la alineación del interferómetro no funcione perfectamente. Es decir, si se alinea el interferómetro para que la frecuencia central interfiera completamente, habrá frecuencias de fotones para los que esto no ocurra. De este resultado surge de forma natural la necesidad de filtrar los fotones para trabajar con una gama de vectores k mucho más definida (es decir, con los que viajan a un ángulo específico) y, en consecuencia y muy importante, de frecuencias aún más similares (de hecho, para las mediciones, casi iguales). Esto es precisamente lo que hizo el par de filtros espaciales (iris) que se colocaron en el segundo experimento: seleccionaron un segmento del intervalo de ángulos al que salían los fotones convertidos seleccionando también y al mismo tiempo sólo las frecuencias más cercanas a una central (la de los fotones provenientes de la SPDC). Traducido al punto de vista óptico, el filtro obliga a que los fotones que llegan al BS para interferir, son sólo los que son más coherentes entre sí. Las gráficas de los resultados de estos dos experimentos muestran muy bien que, sin el filtro, el efecto de interferencia es poco visible en comparación con el segundo experimento, con el filtro espacial. Concretamente nuestro resultado muestra que el efecto de interferencia es mucho más visible cuando se trabaja con un intervalo de frecuencias mucho menor. Como consecuencia directa, la gráfica del segundo experimento 5.15 es más parecida a la teórica pues comparte más detalladamente las suposiciones teóricas.

Por otro lado, podemos ver que el esquema del interferómetro de HOM se presta no sólo para mostrar la interferencia de un par de fotones entrando en un BS, sino que este arreglo es potencialmente útil para otros experimentos aún cuando los caminos ópticos no se igualan perfectamente. Uno de ellos, consiste en una compuerta lógica semi-clásica del tipo C-Not destructivo. Esta compuerta se obtiene al introducir una lámina de media onda para controlar la polarización de uno de los fotones antes de que entre en el divisor, el cual debe ser polarizante. Es decir, usando la base de polarización, el fotón al que se le controla la polarización se convierte en el qubit de control y el otro fotón en el qubit señal. De estos dos qubits, se obtiene sólo uno a la salida (por lo que la compuerta es destructiva) en la base de coincidencias. Dicho de otra forma, se obtiene una tabla de verdad como sigue:

Esta tabla corresponde con la tabla de verdad de una compuerta C-Not, donde el quibit señal

Qubit control		Qubit señal		Qubit salida	
Base de polarización	Base binaria	Base de polarización	Base binaria	Base de polarización	Base binaria
$\|H\rangle$	$\|0\rangle$	$\|H\rangle$	$\|0\rangle$	Coinc.	$\|0\rangle$
$\|H\rangle$	$\|0\rangle$	$\|V\rangle$	$\|1\rangle$	No coinc.	$\|1\rangle$
$\|V\rangle$	$\|1\rangle$	$\|H\rangle$	$\|0\rangle$	Coinc.	$\|1\rangle$
$\|V\rangle$	$\|1\rangle$	$\|V\rangle$	$\|1\rangle$	No coinc.	$\|0\rangle$

Tabla 7.1: Tabla de verdad de una compuerta C-Not destructiva con arreglo HOM

se mantiene igual cuando el quibit de control es CERO (o está apagado), y cambia cuando el quibit de control es UNO (o está encendido).

Otro experimento que usa el mismo esquema básico del interferómetro de HOM, es el enredamiento de fotones en la base de polarización (Capítulo 6) . La construcción teórica y experimental de este experimento se detalló en el Capítulo 6, pero aquí basta con decir que el esquema es básicamente el del interferómetro de HOM con la diferencia de que uno de los fotones de entrada rota su polarización 90° mediante una lámina de media onda. En la explicación del montaje del experimento, se mostró la relativa facilidad de alineamiento del experimento, pues no necesita que la diferencia de caminos ópticos sea cero, lo que reduce el trabajo enormemente. A pesar de ello, sí hay una correlación muy importante con la fase temporal (y, por ende, espacial) de los fotones. Para tener un parámetro de control sobre esta fase, lo que se hizo fue colocar un compensador de fase variable del tipo Babinet Soleil (ver Figura 6.7). Este compensador brinda la capacidad de cambiar la diferencia de fase de los inputs de manera continua (a pesar de que las mediciones son discretas), y se colocó en una posición en la que las mediciones de coincidencias de 45° -45° fuera comparativa (y casi igual) a las mediciones de 0°-90° o 90°-0°. Si esto ocurre, con base en trabajos anteriores del laboratorio [12], sabemos que tenemos un estado enredado. Es decir:

- A pesar de que este experimento no había sido realizado en el laboratorio por el grupo de trabajo, sabíamos que no era necesario hacer todas las mediciones del parámetro de Bell, sino que bastaba con unas cuantas para asegurar el enredamiento de manera cualitativa. Ya para hacerlo cuantitativamente, era necesario tomar todas las mediciones. Esto redujo el tiempo de pruebas considerablemente.

- El entendimiento de la fase en el experimento es vital. También basados en investigaciones y discusiones pasadas [12], podíamos intuir la importancia de la diferencia de fase entre los estados que íbamos a enredar.

De hecho, desde el desarrollo teórico se puede intuir el papel de la fase en los inputs para enredarlos: Los estados no presentan una diferencia de fase explícita y, más aún, no necesariamente la diferencia de fase es cero en la deducción teórica, sino que puede ser $2n\pi$ con $n = 0, 1, 2, ...$ Esto es precisamente lo que hizo nuestro compensador Babinet: enfasó los inputs sin importar si la diferencia de fase era necesariamente cero; de lo contrario habría sido necesario anular la diferencia de caminos ópticos (es decir, igualar los caminos ópticos como en el interferómetro). Por otro lado, para hacer el montaje experimental más intuitivo, se montó la segunda lámina de media onda. Es decir, el método de alineación muestra que, de haber diferencia de caminos ópticos, es muy poca; pero cuando se coloca la primera lámina para rotar la polarización de uno de los fotones, el otro fotón también pasa por una lámina de media onda (cuyo eje rápido es paralelo a la polarización del fotón dejando sin alterar su polarización) para compensar “intuitivamente” las fases entre ellos y, así, el babinet compensa o controla sólo la parte fina.

En cuanto al resultado de la preparación de estados enredados, como se explica en el Capítulo 6, se construyeron estados que claramente violan la desigualdad de Bell en la base de polarización ($S_{\text{teórico}} = 0{,}140156; S_{\text{experimental}} = 9{,}75 \pm 2{,}24$). Por ejemplo, no sólo es una configuración más para fabricar estados enredados, sino que es consecuencia directa de pensar el experimento teórica y fenomenológicamente de forma simultánea (detalles en el Apéndice C). Esto, además de los beneficios ya famosos, se convierte en un paso más en el entendimiento del fenómeno del enredamiento, que ya incluso por tradición es tan complejo como interesante y curioso. Es por ello que este trabajo tiene una repercusión directa e importante en la enseñanza, pues comúnmente el enredamiento cuántico sólo se trabaja teóricamente en las licenciaturas y algunos posgrados, y ahora hay una oportunidad más para entenderlo intuitivamente o fenomenológicamente.

Otro aspecto importante qué enfatizar es que a lo largo de este escrito se mostró que se usaron muchos de los resultados obtenidos en trabajos anteriores de nuestro grupo de trabajo, lo que muestra una explícita construcción del conocimiento teórico, experimental, fenomenológico y técnico dentro del grupo (por ejemplo, para "intuir" si ya teníamos estados o qué es lo que teníamos que atender más para lograr un enredamiento entre los estados, métodos de alineación, etc.) Y siguiendo la misma línea, se pretende que este trabajo se convierta en una de las piezas fuertes en el entendimiento y en aspectos técnicos de futuros proyectos dentro del área de computación cuántica y criptografía cuántica.

Apéndice A

Especificaciones de materiales y equipo utilizado

Material principal: Láser de bombeo, cristal no-lineal BBO, colectores de luz, fibra óptica y APD's.

- *Láser de bombeo*: Láser de estado sólido clase IIIb con longitud de onda central $\lambda_0 = 407$nm, polarización horizontal, potencia variable de hasta 110 mW, ancho de banda: 1.2nm. Marca CrystaLaser LC, modelo BCL-100-405
- *Cristal no-lineal BBO*: Cristal no-lineal borato de beta Bario ($\beta - BaB_2O_4$) tipo 1. Dimensiones: 5x5mm de area activa, 2mm de profundidad. Ángulo de corte 5°. Altamente higroscópico, por lo que requiere cuidados de humedad en su entorno cercano.
- *Colectores de luz*:
  - Filtros infrarrojos: Thin Film Imaging Thechnologies, para $\lambda = 810$nm, modelo 810-10 7213. Diámetro de área activa: 7mm.
  - Anillo metálico para lente acopladora: Sin marca, diseñado especialmente para estas lentes y construido en un torno particualr.
  - Lente acopladora: ThorLabs mod F220FC-B, distancia focal f=11mm, rango de longitudes de onda: 600-1050nm. Diámetro de sección transversal: 5mm.
- *Fibra óptica*: Fibra Multimodo con conectores FC-FC, 62.5/125 μm.
- *APD (Avalanche Photo-Detector)*: Photon Counting Module marca PerkinElmer, modelo SPCM-AQRH-13-FC. Eficiencia cuántica en 810nm = 60 %.

Material secundario en orden de aparición en el Capítulo 5 y 6

- *Mesa elevadora rígida*: Marca NRS, modelo 280. Tornillo elevador conectado a cadena de acero.
- *Desplazadores lineales*: Newport, M-423 series. Tornillo micrométrico desplazador, con seguro de posición.
- *Base rotatoria*: Melles Griot, con precisión de rotación máxima de 5' °. Desplazamiento vertical máximo de 5cm.

- *Poste y porta poste*: Newport y genéricos, con cuerda milimétrica y estándar.
- *Monturas para colectores*: Melles Griot, con libertad de peraltaje en dos ejes, y con adaptación para postes milimétricos.
- *Rieles metálicos*: Rieles de latón, diseñados especialmente para el Taller de Óptica Avanzada, con hoyuelos para tornillo.
- *Carritos para riel*: Newport, con tornillos para fijar posición sobre el riel.
- *Láser visible para alineación*: Melles Griot, Láser estabilizado de HeNe, polarización lineal.
- *Divisor de haz (BBO)*: Edmund Optics, diseñados para infrarrojo cercano (780 a 1080nm). Transmitancia =45 % ±5 %, Reflectancia =45 % ±5 %. Absorción <10 %, Polarización <6 %.
- *Espejo plano*: Parker - Daedal, espejo para infrarrojo cercano. Área activa 2cm x 2cm.
- *Motor de pasos*: Desplazador por motor de pasos controlado por computadora. Paso mínimo de $1\mu m$.
- *Cables coaxiales*: Caracterizados para obtener retrasos definidos en las mediciones electrónicas.
- *Tarjeta contadora*: Tarjeta construida con base en un controlador FPGA, con 4 canales para medir pulsos TTL y 4 canales en modo discriminador. Ventana mínima de coincidencia de 30ns, máximo de conteo de fotones 65000.
- *Divisor de haz polarizante (PBS)*: Edmund Optics, diseñados para infrarrojo cercano (780 a 1080nm). Transmitancia =95 % ±5 % de polarización Horizontal, Reflectancia =95 % ±5 % de polarización Vertical. Absorción <10 %

Apéndice B

Datos y Programa para calcular el parámetro S y su error

```
      real a(10), b(10),c(10),d(10),e(10),f(10)
a(1)=54
a(2)=55
a(3)=56
a(4)=55
a(5)=57
a(6)=56
a(7)=56
a(8)=57
a(9)=56
a(10)=57

b(1)=12
b(2)=11
b(3)=10
b(4)=11
b(5)=11
b(6)=10
b(7)=11
b(8)=10
b(9)=12
b(10)=11

c(1)=55
c(2)=52
c(3)=53
c(4)=55
c(5)=54
c(6)=55
c(7)=53
c(8)=55
c(9)=53
```

```
c(10)=52

d(1)=56
d(2)=56
d(3)=55
d(4)=57
d(5)=56
d(6)=54
d(7)=56
d(8)=57
d(9)=55
d(10)=54

e(1)=70
e(2)=70
e(3)=71
e(4)=69
e(5)=70
e(6)=69
e(7)=71
e(8)=72
e(9)=70
e(10)=70

f(1)=75
f(2)=74
f(3)=74
f(4)=75
f(5)=76
f(6)=75
f(7)=74
f(8)=76
f(9)=74
f(10)=75

ap=0.0
bp=0.0
cp=0.0
dp=0.0
ep=0.0
fp=0.0
do j=1,8
ap=ap+a(j)/8
bp=bp+b(j)/8
cp=cp+c(j)/8
dp=dp+d(j)/8
ep=ep+e(j)/8
fp=fp+f(j)/8
end do
```

```
aa=0.0
bb=0.0
cc=0.0
dd=0.0
ee=0.0
ff=0.0
do i=1,8
aa=aa+((a(i)-ap)**2.)/8
bb=bb+((b(i)-bp)**2.)/8
cc=cc+((c(i)-cp)**2.)/8
dd=dd+((d(i)-dp)**2.)/8
ee=ee+((e(i)-ep)**2.)/8
ff=ff+((f(i)-fp)**2.)/8
end do
sa=aa**0.5
sb=bb**0.5
sc=cc**0.5
sd=dd**0.5
se=ee**0.5
sf=ff**0.5

error=(sa**2.+sb**2.+sc**2.+sd**2.+se**2.+sf**2.)**0.5

s=ap-bp+cp+dp-ep-fp

write(*,*) ap,sa
write(*,*) bp,sb
write(*,*) cp,sc
write(*,*) dp,sd
write(*,*) ep,se
write(*,*) fp,sf

write(*,*) 'bell',s,error,s/error

end
```

Apéndice C

Deducción teórica del Parámetro de Bell

En este apéndice se presenta la deducción detallada del parámetro de Bell que aparece en 8, artículo basado en 11.
Supongamos que dos fotones inciden en un divisor de haz (BS), uno de ellos es horizontal ($|H\rangle$) y el otro vertical ($|V\rangle$), como se muestra en la Figura C.1.

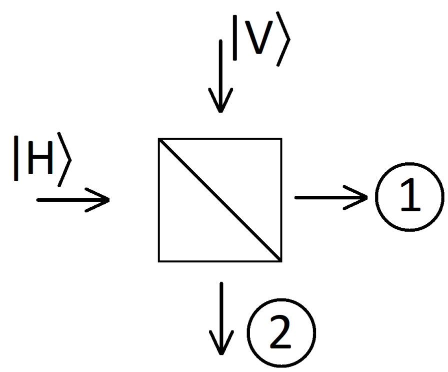

Figura C.1: Esquema de inputs y outputs del BS.

Dada esta configuración, el estado de salida se puede expresar como:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 - |H\rangle_2)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_2 - |V\rangle_1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |H\rangle_1|V\rangle_1 - |H\rangle_2|V\rangle_2 + |H\rangle_2|V\rangle_1\right) \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ahora bien, si en la salida 1 hay un selector de polarización a un ángulo θ_1 y en la 2 otro con ángulo θ_2, el estado de salida después de los polarizadores estaría dado por el producto de los siguientes estados:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \cos\theta_1|H\rangle_1 + \sin\theta_1|V\rangle_1 \\ |\phi_2\rangle &= \cos\theta_2|H\rangle_2 + \sin\theta_2|V\rangle_2 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Luego entonces, la probabilidad de medir un fotón con polarización θ_1 en el detector 1 y θ_2 en el 2 está dada por:

$$|_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle|^2 = P(\theta_1, \theta_2) \tag{C.3}$$

Empecemos calculando el argumento de la norma.

$$\begin{aligned}
{}_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle =&(\cos\theta_{2 2}\langle H| + \sin\theta_{2 2}\langle V|)(\cos\theta_{1 1}\langle H| + \sin\theta_{1 1}\langle V|)|\psi\rangle \\
=&(\cos\theta_2\cos\theta_{1 2}\langle H|_1\langle H| + \cos\theta_2\sin\theta_{1 2}\langle H|_1\langle V| \\
&+ \sin\theta_2\cos\theta_{1 2}\langle V|_1\langle H| + \sin\theta_2\sin\theta_{1 2}\langle V|_1\langle V|)|\psi\rangle \\
=&\frac{1}{2}(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\
=&\frac{1}{2}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
=&\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}{2} + \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_2)}{2}\right] \\
=&\frac{1}{4}\left[2\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \\
=&\frac{1}{2}\sin(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

El resultado de la ecuación C.4 junto con la ecuación C.3 nos dice que la probabilidad de medir un fotón con polarización θ_1 en el detector 1 y otro con polarización θ_2 en el detector 2, es:

$$P(\theta_1, \theta_2) = |_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\sin^2(\theta_1+\theta_2) \tag{C.5}$$

Ahora supongamos que de nuevo en la salida 1 tenemos un selector de polarización a un ángulo θ_1, por lo que se sigue cumpliendo que:

$$|\phi_1\rangle = \cos\theta_1|H\rangle_1 + \sin\theta_1|V\rangle_1 \tag{C.6}$$

Sin embargo, en esta ocación en la salida 2 quitamos el selector de polarización, por lo que el detector 2 mediría cualquier polariación. Esto lo podemos expresar como una combinación lineal de las dos polarizaciones posibles; es decir:

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2 + |V\rangle_2) \tag{C.7}$$

Así pues, análogamente a la ecuación C.3, la probabilidad de medir un fotón con polarización θ_1 y otro fotón sin selector de polarización (–), está dada por:

$$|_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle|^2 = P(\theta_1, -) \tag{C.8}$$

Similarmente al proceso anterior (C.4), el argumento de la norma se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
{}_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle =& \left[\frac{1}{\sqrt{2}}({}_2\langle H|_2\langle V|)\right]\left[\cos(\theta_1)_1\langle H + \sin(\theta_1)_1\langle V|\right]|\psi\rangle \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(\theta_1)_1\langle H|_2\langle H| + \sin(\theta_1)_1\langle V|_2\langle H| + \cos(\theta_1)_1\langle H|_2\langle V| + \sin(\theta_1)_1\langle V|_2\langle V|\right]|\psi\rangle \\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)]
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Por lo tanto, la probabilidad de medir un fotón con polarización θ_1 y otro con cualquier polarización está dado por:

$$P(\theta_1, -) = |_2\langle\phi|_1\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{8}[\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)] = \frac{1}{8}[1 + 2\sin^2(\theta_1)\cos^2(\theta_1)] \tag{C.10}$$

Con estas probabilidades definidas (C.5 y C.10) podemos calcular el parámetro de Bell [10] [11]:

$$S = P(\theta_1, \theta_2) - P(\theta_1, \theta_2') + P(\theta_1', \theta_2') + P(\theta_1', \theta_2) - P(\theta_1', -) - P(-, \theta_2) \tag{C.11}$$

Donde los ángulos que maximizan este parámetro son:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1' = \frac{3\pi}{8}, \quad \theta_2' = 0 \tag{C.12}$$

Evaluemos primero cada uno de los sumandos por separado usando C.12.

$$\begin{aligned}
P(\theta_1, \theta_2) &= P\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\right] = \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) \\
P(\theta_1, \theta_2') &= P\left(\frac{\pi}{8}, 0\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\right] = \frac{1}{16}(2-\sqrt{2}) \\
P(\theta_1', \theta_2') &= P\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\right] = \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) \\
P(\theta_1', \theta_2) &= P\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\right] = \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) \\
P(\theta_1', -) &= P\left(\frac{3\pi}{8}, -\right) = \frac{1}{8}\left[1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right] = \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) \\
P(-, \theta_2) &= P\left(-, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}\left[1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Finalmente, usando todos los resultados de C.13 en C.11 podemos encontrar el valor de S:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{16}(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{16}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{16}(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{16}(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{4} \\
&= \frac{4}{16} + \frac{2\sqrt{2}}{16} - \frac{2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{4}{16} \\
&= \frac{2}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{16} - \frac{4}{16} \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{16} - \frac{2}{16} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}140165
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Bibliografía

[1] Hecht, E., *Optics*, Addison Wesley, Cuarta edición, Capítulo 9, pp 385.

[2] G. Armendáriz Peña, *Interferencia con Fotones Heraldos*, tesis de Licenciatura, UNAM, 2008

[3] Einstein A., Podolsky B., Rosen N., *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review 47: 777-780

[4] Gerry, G.C., Knight, P.L. *Introductory quantum optics*, Cambriedge University Press, 2005

[5] D. P. San Román Alerigi, *La naturaleza cuántica de la luz, anticorrelación experimental*, tesis de Licenciatura, UNAM, 2009

[6] McMahon, D., *Quantum computing explained*, John Wiley and Sons Inc. Publication, 2008

[7] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, A. Migdall, M. H. Rubin, A. V Sergienko, and Y. H. Shih, *Can two-photon interference be considered the interference of two photons?*, Physical Review Letters, 77 10, Septiembre 1996.

[8] Z. Y. Ou, L. Mandel, *Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*, Physical Review Letters, 61 1, Julio 1988

[9] Ou, Zhe-Yu Jeff, *Multi-Photon quantum interference*, Springer, 2007

[10] Glauber, Roy J., *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Physical review, 131 6, septiembre 1963

[11] Clauser J. F., Horne M. A., *Experimental consequences of objective local theories*, Physical Review D, 10: 526-535

[12] E. Barrios Barocio, *Prueba experimental de la Desigualdad de Bell*, UNAM, 2008

[13] Dmitriev, V.G, Gurzadyan G. G., Nikogosyan D. N., *Handbook of nonlinear optical crystals*, Springer, 1999.

[14] Rivera Rodríguez, Homar, *Correlaciones entre campos electromagnéticos cuánticos*, Protocolo de investigación para Maestría en Ciencias (Física), Instituto de Física, UNAM, 2017.

[15] Aspect A., Grangier P, Roger G., *Experimental test of realistic local theories via Bell's theorem*, Physical Review Letters, 47 7, agosto 1981.