



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Transporte de Jets: Aplicación al sistema restringido de
tres cuerpos**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

BLAS KOLIC



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- **Datos del alumno**

Kolic
Blas
5531 4858
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
30964018-9

- **Datos del tutor**

Dr.
Luis
Benet
Fernández

- **Datos del sinodal 1**

Dr.
Ricardo
Méndez
Fragoso

- **Datos del sinodal 2**

Dr.
Ángel
Sánchez
Cecilio

- **Datos del sinodal 3**

Dr.
Ricardo Atahualpa
Solórzano
Kraemer

- **Datos del sinodal 4**

Dr.
José Alberto
Flandes
Mendoza

- **Datos del trabajo escrito**

Transporte de Jets: Aplicación al sistema restringido de tres cuerpos
105 p
2018

Agradecimientos

A mi vieja por hacerme crecer feliz, amado, con valores y las herramientas necesarias para llevar a cabo mis inquietudes.

A mi viejo por ser mi fuente de inspiración infinita. Te extraño y te quiero mucho.

A Karen que ha estado muy cerca en todo este proceso y me ha apoyado de manera incondicional.

A mis amigos que son mi familia extendida. Una especial mención a Daniboy cumpliendo nuestro pacto entre caballeros.

A Sergio de Régules por inspirarme a estudiar Física.

A mis profesores, ayudantes y gente de la Facultad de Ciencias. Ustedes han regado la semilla de mi curiosidad por la naturaleza. Gracias a la UNAM en general, que es el mejor lugar donde pude haber estudiado.

A mis sinodales Ricardo, Ángel, Atahualpa y Alberto por apoyarme con sus atinados comentarios y gran velocidad de acción dadas las circunstancias. De igual manera quiero agradecer a Mirna, Rafa y Anita por ayudarme y salvarme de hundirme en los trámites varias veces.

A Luis, mi asesor. Gracias por darme un repertorio tan amplio e interesante de temas a desarrollar, gracias por ser paciente conmigo y de dar siempre buenos consejos, gracias por dejar la bolita de mi lado cuando correspondía y actuar cuando era necesario. Gracias por empujarme a hacer una tesis de la que me siento orgulloso.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	VI
Índices de figuras, tablas, algoritmos y código	VII
Figuras	VII
Tablas	XII
Resumen / Abstract	XIV
Resumen	XV
1. Introducción	1
2. Transporte de Jets	3
2.1. Álgebra Polinomial	9
2.1.1. Construcción del Álgebra	9
2.1.2. Definición explícita de operaciones con polinomios	13
2.1.3. Polinomios en varias variables	15
2.2. Método de Taylor	16
2.2.1. Método de Taylor para el Transporte de Jets	17
2.2.2. Probando el método de Taylor	18
3. Indicadores Dinámicos del TJ	29
3.1. Un poco de motivación vía Exponentes de Lyapunov a Tiempo Finito	29
3.2. Tamaño máximo de las vecindades	31
3.2.1. Tasa de expansión y contracción	34
3.3. Formas Simplécticas	37
3.4. Variación de parámetros	42

4. Problema Restringido de Tres Cuerpos	47
4.1. Problema de dos cuerpos	48
4.2. Problema circular de tres cuerpos	50
4.2.1. Puntos lagrangianos	52
4.2.2. Curvas de velocidad cero	57
5. Resultados	59
5.1. Parametrización de μ	59
5.1.1. Caso Tierra-Luna	63
5.2. Colisión de asteroides	65
5.3. Simplecticidad del problema circular	68
5.4. Campos de ξ_{max} y ς_{\pm} para el problema circular	72
6. Conclusiones	77
Apéndices	79
A. Precisión y tiempos de cómputo para el TJ	79
B. Marcos de referncia en rotación	85
Bibliografía	87

Índices de figuras y tablas

§0.0 Figuras

2.1. Diagrama esquemático de la idea del Transporte de Jets.	5
2.2. TJ para la ecuación (2.4) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ usando el método de Euler para $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ parametrizada en un círculo $\xi(\alpha) = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ para un intervalo temporal $[0, 2\pi]$ en pasos de $h = 10^{-4}$. Se evaluó la solución para los distintos r 's marcados en la gráfica, en intervalos de $1000h$	7
2.3. Diferencias numéricas entre el método de Euler y la solución analítica para la ecuación (2.4). <i>Izquierda:</i> norma de la diferencia entre la solución real y evaluaciones de la solución numérica para distintos valores de ξ marcados en la gráfica. Se puede observar un crecimiento lineal del error numérico, lo cual es una de las consecuencias de usar el método de Euler. <i>Derecha:</i> sección del espacio fase donde se observan la solución analítica y la solución numérica para pasos de $h = 10^{-4}$ con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (2, 0)$ después de un periodo.	8
2.4. Espacio fase para el oscilador armónico representado por la ecuación (2.23). En negro aparece la solución calculada con el método de Taylor para jets con $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y orden del jet $M = 4$. Los jets fueron evaluados para la vecindad parametrizada por $\xi(\alpha) = 0.1 \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$, $\alpha \in [0, 1]$, mientras que la solución en gris representa la variación $\xi = (-0.1, 0)^T$	19

2.5. Variaciones de energía y trayectoria para el oscilador armónico en cada uno de los pasos temporales de la solución en unidades de $\epsilon_{machine}$ con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$ y vecindad parametrizada por $\xi(\tau) = 0.1 \cdot (\cos(\tau), \sin(\tau))^T$, $\tau \in [0, 1]$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y orden del jet $M = 4$. <i>Izquierda</i> : variación $\delta E(t_n) = \frac{E(t_n) - E_0}{\epsilon_{machine}}$ de la energía respecto a la energía inicial $E_0 = 1$ Joule. <i>Derecha</i> : variación $\delta \mathbf{x}(t) = \frac{\ \mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}_n\ _2}{\epsilon_{machine}}$ respecto a la solución analítica (2.24) para distintos desplazamientos ξ respecto de la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$. Notemos que aunque el error crece de manera lineal, éste está en erminos del error de redondeo de la máquina, por lo que las soluciones calculadas son muy buenas.	20
2.6. Diagrama esquemático del sistema del péndulo.	21
2.7. Espacio fase para el péndulo simple representado por la ecuación (2.26). En negro salen puntos de la trayectoria calculada con el método de Taylor para Jets con $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y sus vecindades (jets) evaluadas para $\xi(\alpha) = 0.1 \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$, $\alpha \in [0, 1]$	22
2.8. Jets de distinto orden para $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ parametrizada en un círculo de radio 0.1 $\xi(\alpha) = 0.1 (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T$ en el péndulo simple después de dos periodos. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 24$. <i>Izquierda</i> : Jet de orden 1, el cual no pasa por las curva de nivel de (2.26). <i>Derecha</i> : Jet de orden 4	23
2.9. Diferencia $\delta E(t_n) := \frac{E(t_n) - E_0}{\epsilon_{machine}}$ de la energía del péndulo simple con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $M = 28$	24
2.10. Espacio fase del campo vectorial dado por las ecuaciones de (2.29).	25
2.11. Solución para (2.29), con condición inicial sobre la separatriz, donde $q_0 = 0.7$. Aquí, los jets son de orden $M = 16$, en 8 pasos de integración desde $t_0 = 0$ hasta $t_{max} = 1.7$, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 28$. En gris están las soluciones a $\mathbf{x}_0 + \xi$ sin utilizar TJ.	25
2.12. Diferencia gráfica entre un jet de orden $M = 2$ contra uno de orden $M = 16$ para las mismas condiciones.	26
2.13. Diferencia en energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema 2.29 sin TJ, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de expansión $N = 24$ y 8000 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$	27
2.14. Diferencia en energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema (2.29) con jets de orden $M = 16$ evaluados en ξ . Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de expansión $N = 24$ y 40 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$. <i>Izquierda</i> : δE respecto a la energía inicial en la primera mitad de la integración. <i>Derecha</i> : $\log_1 0(\delta E + 1)$ respecto a la energía inicial en toda la integración.	27

3.1.	Campo escalar de los ELTF calculada con (3.4) para el péndulo de (2.27) en una retícula de 100 puntos por lado, después de un periodo, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$ y orden máximo de la expansión $M = 25$	31
3.2.	Evaluación del TJ para $\xi = (\pm 0.1, 0)^T$ en un periodo del péndulo simple en tres distintas secciones para una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$, jets de orden $M = 4$ y expansión de orden $N = 24$ Las integraciones nominales de $\mathbf{x}_0 \pm \xi$ se representan con las curvas negras no sólidas, mientras que la integración para \mathbf{x}_0 son las curvas negras sólidas. <i>En verde:</i> $\mathbf{x}_0 = (\pi/6, 0)^T$, <i>En azul:</i> $\mathbf{x}_0 = (2\pi/3, 0)^T$ y <i>En rosa:</i> $\mathbf{x}_0 = (15\pi/16, 0)^T$	32
3.3.	Diferencia de energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema (2.29) con jets de orden $M = 16$ evaluados en $\xi_{max} = 0.0235$, el cual se calculó con $\epsilon_{jet} = 10^{-14}$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$, orden de expansión $N = 25$ y 40 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$	33
3.4.	Solución para (2.29), con condición inicial sobre la separatriz, donde $q_0 = 0.7$. Aquí, los jets son de orden $M = 16$, en 8 pasos de integración desde $t_0 = 0$ hasta $t_{max} = 1.7$, evaluados para $\xi_{max} = 0.025$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 25$. En gris están las soluciones a $\mathbf{x}_0 \pm \xi_{max}$ sin utilizar TJ. La tolerancia para ξ_{max} es de $\epsilon_{jet} = 10^{-5}$	34
3.5.	Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} para el péndulo de (2.27) en una retícula de 60 puntos por lado, después de un periodo, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$ y orden máximo de la expansión $N = 25$	35
3.6.	Campos vectoriales dados por $(\cos(\theta_{\pm}(\mathbf{x}_0)), \sin(\theta_{\pm}(\mathbf{x}_0)))^T$ sobre los campos escalares $\zeta_{\pm}(\mathbf{x}_0)$ para el péndulo simple, en rejillas de 15×15 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 3$ y orden de la expansión $N = 25$. <i>Izquierda:</i> Campos dados por $\theta_+(\mathbf{x}_0)$ y $\zeta_+(\mathbf{x}_0)$. <i>Derecha:</i> Campos dados por $\theta_-(\mathbf{x}_0)$ y $\zeta_-(\mathbf{x}_0)$	36
3.7.	Campos escalares $(\zeta_{\pm}(\mathbf{x}_0))^{1/3}$ para el péndulo simple, en rejillas de 90×90 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 3$ y orden de la expansión $N = 25$. Se toma la raíz cúbica para hacer más clara la imagen. <i>Izquierda:</i> Campo escalar $\zeta_+(\mathbf{x}_0)$. <i>Derecha:</i> Campo escalar $\zeta_-(\mathbf{x}_0)$	37
3.8.	Representación escalar de la simplecticidad del péndulo simple con condición inicial $(\pi/2, 0)^T$ para 200 periodos (1600 pasos de integración) con orden del jet $M = 2$, orden de la expansión $N = 24$ y tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$	42
3.9.	Curvas de nivel dadas por (3.19) para diferentes valores de ω^2	43
3.10.	Solución para condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ y variación del parámetro para $\delta\omega^2 = 0.5$ en la izquierda y -0.5 en la derecha. $\delta\omega$ es un polinomio de orden 30, y el desarrollo de Taylor para la solución es de orden 24, con tolerancia de 10^{-20} . Son 25 pasos de integración de 0 a 2π	44
3.11.	Variación $\Delta E = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (E(t) - E_0)$ de la energía respecto a la condición inicial para ambas evaluaciones del transporte $\delta\omega < 0$ y $\delta\omega > 0$	45
4.1.	Curvas de nivel para el pseudo-potencial $V(x, y)$ con $\mu = \frac{1}{26}$, $R = 1$ y $G = 1$ unidades adimensionales.	53

4.2. Proyección del pseudo-potencial en el eje x para ver sus puntos de inflexión. Aparecen L_1, L_2 y L_3 calculados con (4.31) (verde) y numéricamente (naranja).	54
4.3. Diagrama que muestra la posición de L_4 y L_5 en unidades normalizadas donde $R = 1, M_1 + M_2 = 1$	55
4.4. <i>Arriba</i> : CV0 sobre los puntos L_1, L_2 y L_3 , respectivamente. <i>Abajo</i> : CV0 sobre variaciones en energía sobre las de arriba, donde se tomó una variación respecto a la energía de Jacobi $\delta E = 0.05$. Se graficaron las energías mayores o iguales a la constante de Jacobi para ver la “sección prohibida” de las trayectorias.	58
5.1. Espacio de configuraciones para ϕ_μ con variaciones $\delta\mu = 0$ (azul), $\delta\mu = \delta\mu_{max}$ (naranja), y $\delta\mu = -\delta\mu_{max}$ (verde), donde $\delta\mu_{max} = \xi_{max}(\phi_\mu) \approx 0.00329$. Para el transporte se usó un jet de orden $M = 18$ con condiciones iniciales $(L_{4x}, L_{4y} + \Delta y, 0, 0, \mu)$	60
5.2. Diferencia $\Delta\phi_\mu(t) = \ \phi_\mu(t) - \mathbf{x}_0\ $ del espacio de configuraciones para $\delta\mu \in \{-\delta\mu_{max}, -2\delta\mu_{max}/3, -\delta\mu_{max}/3, 0, \delta\mu_{max}/3, 2\delta\mu_{max}/3, \delta\mu_{max}\}$	61
5.3. Separación en tendencia (izquierda) y ciclo(derecha) de los valores de la Figura 5.2 usando un filtro de Hodrick-Prescott con $\lambda = 8000$	62
5.4. Espacio de configuraciones para ϕ_μ con variaciones $\delta\mu = 0$ (azul), $\delta\mu = \delta\mu_{max}$ (naranja), y $\delta\mu = -\delta\mu_{max}$ (verde), donde $\delta\mu_{max} = \xi_{max}(\phi_\mu) \approx 0.0063$. Para el transporte se usó un jet de orden $n = 18$ con condiciones iniciales $(L_{4x}, L_{4y} + \Delta y, 0, 0, \mu)$	63
5.5. Diferencia $\Delta\phi_\mu(t) = \ \phi_\mu(t) - \mathbf{x}_0\ $ del espacio de configuraciones para $\delta\mu \in \{-\delta\mu_{max}, -2\delta\mu_{max}/3, -\delta\mu_{max}/3, 0, \delta\mu_{max}/3, 2\delta\mu_{max}/3, \delta\mu_{max}\}$ integrado a 40 unidades temporales.	64
5.6. Separación en tendencia (izquierda) y ciclo(derecha) de los valores de la Figura 5.5 usando un filtro de Hodrick-Prescott con $\lambda = 8000$	64
5.7. Integración nominal a $T = 10 \approx$ unidades temporales, donde $\mathbf{q}_{a_1}(t_0) = (-0.373098, -0.0804321, 1.21995, \dot{y}_{a_1}(x_{a_1}(t_0), y_{a_1}(t_0), \dot{x}_{a_1}(t_0), C_J))$ y $\mathbf{q}_{a_2}(t_0) = (-0.27324, -0.307896, -0.307576, \dot{y}_{a_2}(x_{a_2}(t_0), y_{a_2}(t_0), \dot{x}_{a_2}(t_0), C_J))$. El círculo naranja representa a M_1 , y los círculos verde y gris a $\mathbf{q}_{a_1}(t_0)$ y $\mathbf{q}_{a_2}(t_0)$, respectivamente. La zona de mayor acercamiento se marca con cruces, donde en ésta, la distancia entre los asteroides es de $0.00348 \approx 1341$ km.	66
5.8. Transporte de jets de orden 4 alrededor de $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$ (cruces en la figura) donde los cúmulos son la distribución de radio $\delta\mathbf{x}_{a_i} \leq 350$ km evaluados en el polinomio resultante del transporte. Para el método sólo se toman los cúmulos donde se encuentran $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$, pero la figura busca ilustrar una sección de la trayectoria de los asteroides.	66
5.9. Distribución normalizada de distancias entre a_1 y a_2 cerca del punto de posible colisión dadas 7000 variaciones iniciales alrededor de $\mathbf{q}_{a_1}^{col}$ y $\mathbf{q}_{a_2}^{col}$. Las líneas verticales muestran los valores usados en la Tabla 5.1.	67

5.10. Promedio de la distancia entre la integración nominal y el TJ para 500 condiciones iniciales con variación $\ \delta\mathbf{x}_{a_1}\ = \ \delta\mathbf{x}_{a_2}\ = \Delta_{max}$	68
5.11. Diagrama del cambio de marco de referencia (X, Y) a (x, y) a velocidad angular Ω	69
5.12. $\zeta(t)$ para $\phi(t)$ sin modificar el flujo en unidades adimensionales del PC3C. Las condiciones iniciales son $\mathbf{x}_0 = \left((L_{1_x}, 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (izquierda) y $\mathbf{x}_0 = \left((L_{4_x}, L_{4_y} + 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (derecha) para $\delta\xi$ un polinomio de orden 3.	71
5.13. $\zeta(t)$ para $\phi(t)$ con las transformaciones (5.13). Las condiciones iniciales son $\mathbf{x}_0 = \left((L_{1_x}, 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (izquierda) y $\mathbf{x}_0 = \left((L_{4_x}, L_{4_y} + 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (derecha) para $\delta\xi$ un polinomio de orden 3.	72
5.14. Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} en una retícula de 70×70 después de 0.3 unidades adimensionales de tiempo en el espacio de configuraciones del PC3C con $\mu = 0.1$. Éste se calculó con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-7}$, orden de jets $M = 2$ y orden máximo de la expansión $N = 20$. Las condiciones del PC3C son para $\mathbf{x}_0 = (x_{0_i}, y_{0_j}, 0, 0)^T$, con $x_{0_i} \in (-1, 1.5)$, $y_{0_j} \in (-1, 1.5)$	73
5.15. Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} con condiciones idénticas que para la Figura 5.14 pero integrado a 3 unidades temporales.	73
5.16. Campos vectoriales dados por $(\cos(\theta_+(\mathbf{x}_0)), \sin(\theta_+(\mathbf{x}_0)))^T$ sobre los campos escalares $\zeta_+(\mathbf{x}_0)$ en una cuadrícula de 20×20 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 2$ y orden del desarrollo de Taylor $N = 25$ integrado a $T = 3$ unidades adimensionales. Las condiciones del PC3C son para $\mathbf{x}_0 = (x_{0_i}, y_{0_j}, 0, 0)^T$ con $\mu = 0.1$. A la izquierda se observan los puntos cerca de L_4 , marcada con \times , mientras que a la izquierda se presentan las localidades de L_3	74
5.17. Campo escalar dado por los ELTF. Las condiciones y la retícula para esta figura son idénticas a las de 5.15.	75
A.1. Diferencia entre la integración nominal y el Transporte de Jets para dos condiciones iniciales del PC3C con $\mu = 0.012$. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, orden del jet $M = 4$ y 6 unidades temporales a 10 pasos de integración. <i>Izquierda:</i> $\mathbf{x}_0 = (L_{4_x}, L_{4_y} + 0.01, 0, 0)^T$. <i>Derecha:</i> $\mathbf{x}_0 = (L_{1_x}, 0.01, 0, 0)^T$	79

A.2. *Izquierda*: Diferencia entre la integración nominal y el Transporte de Jets en términos del ξ_{max} correspondiente para diferentes órdenes M del jet con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, $\epsilon_{jet} = 10^{-5}$ y 6 unidades temporales a 10 pasos de integración. *Derecha*: Tamaño máximo de vecindad ξ_{max} para diferentes órdenes de jet con las condiciones mencionadas. 80

A.3. Tiempo en segundos de cómputo en función del número de condiciones iniciales propagadas utilizando órdenes $M = \{1, 2, 3, 4\}$ en dorado, violeta, verde y naranja, respectivamente. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$ y 10 pasos de integración que, en el caso del péndulo, corresponden a un periodo. *Izquierda*: péndulo simple con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (\pi/2, 0)^T$. *Derecha*: PC3C con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$ y $\mu = 0.012$, el parámetro Tierra-Luna. 81

A.4. Tiempo en segundos de cómputo en función del número de integraciones utilizando diferentes condiciones iniciales. Ambos casos fueron realizados con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, orden del jet $M = 3$ y 10 pasos de integración que, en el caso del péndulo, corresponden a un periodo. *Izquierda*: péndulo simple con condiciones inicial $\mathbf{x}_0 = (\pi/2, 0)^T$ (azul) y $\mathbf{x}_0 = (15\pi/16, 0)^T$ (magenta). *Derecha*: PC3C con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$ (azul) $\mathbf{x}_0 = (L_1, 0 + 0.01, 0, 0)^T$ (magenta), con $\mu = 0.012$ 82

§0.0 Tablas

2.1. Diferencia logarítmica de $\delta\mathbf{x} = \|\phi(t_i, t_0, \mathbf{x}_0 + (0, -0.1)^T) - P_{i, \mathbf{x}_0}((0, -0.1)^T)\|$ para polinomios $P_{i, \mathbf{x}_0}(\xi)$ de distinto orden M en ξ . Se ve que al duplicar M , el error mejora en un factor 2, aproximadamente. 26

5.1. Número de colisiones y riesgo de choque para asteroides de distintas dimensiones. 67

A.1. Logaritmo base 10 del tiempo que demora hacer ciertas funciones elementales para polinomios $P(\mathbf{x}) \in {}^M P_{\mathbb{R}^2}$, es decir, polinomios en dos variables de orden M . $M = 0$ representa la operación aritmética con un número flotante arbitrario. 82

A.2. Logaritmo base 10 del tiempo que demora hacer cada operación elemental para polinomios $P(\mathbf{x}) \in {}^3P_{\mathbb{R}^d}$, es decir, polinomios en d variables de orden $M = 3$. $\#_{vars} = 0$ representa la operación aritmética con un número flotante arbitrario. 83

Resumen

En esta tesis se desarrolla el concepto del Transporte de Jets motivado por los estudios de Daniel Pérez-Palau en [1, 2] y se aplica en casos particulares del problema circular restringido de tres cuerpos. El Transporte de Jets integra (o transporta) el flujo de una ecuación diferencial alrededor de una vecindad (o jet) \mathcal{U} en lugar de una única condición inicial \mathbf{x}_0 . Para hacerlo, se parametriza a \mathcal{U} con un polinomio de d variables, donde d es la dimensión del espacio fase. Este polinomio se opera con cualquier método de integración numérica para lograr el transporte, que en el caso de esta tesis se aplicará el método de Taylor por cuestiones de precisión. Como el método de Taylor depende de \mathbf{x}_n para obtener a \mathbf{x}_{n+1} , el Transporte de Jets dependerá de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_n}$ para obtener $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_{n+1}}$ y como $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_n}$ es un polinomio, operar con éste requiere de la implementación de un álgebra polinomial, que estará guiada por la construcción de Haro en [3]. Para obtener la vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_n}$ de \mathbf{x}_n basta con evaluar al polinomio en cuestión. Tener parametrizadas las variaciones de la vecindad permite su manipulación antes de evaluarla. Por ello, se proponen en la tesis varios indicadores y algoritmos que aprovechan dicha parametrización para obtener información acerca del sistema de ecuaciones diferenciales. Algunos de estos indicadores ya fueron estudiados por Daniel Pérez en sus artículos como los campos escalares dados por el tamaño máximo de las vecindades o los campos de máxima expansión y contracción de puntos del espacio fase. Por otro lado, ha estudiado la probabilidad de colisión entre satélites y la Tierra usando el Transporte de Jets. Esta tesis explora dichos resultados y extiende un poco el análisis. Adicionalmente, nuevos indicadores son propuestos y puestos a prueba: uno involucra la variación de parámetros de un sistema de ecuaciones diferenciales y otro prueba numéricamente la conservación simpléctica de ecuaciones hamiltonianas vía el Transporte de Jets.

Se desarrolla el problema circular restringido de tres cuerpos donde se aplican dichos indicadores y algoritmos. Específicamente, se busca encontrar la probabilidad de colisión entre asteroides de diferente radio en el sistema Tierra-Luna, probar en un sentido numérico que el integrador preserva la simplecticidad del sistema, estudiar la sensibilidad de condiciones iniciales y se analiza la variación del parámetro de masa alrededor de puntos de equilibrio del espacio de configuraciones.

Adicionalmente, se evalúa la eficiencia, la precisión y los tiempos de cómputo involucrados

para los indicadores desarrollados, los cuales están disponibles en <https://github.com/blas-ko/tesis> y se programaron en el lenguaje Julia, haciendo uso de los paquetes TaylorSeries [4] y TaylorIntegration [5].

Capítulo 1

Introducción

Las leyes que gobiernan a la Física pueden ser casi siempre presentadas como un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen un sistema. Pensemos en la ecuación de Shrödinger de la Mecánica Cuántica, las ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo, las ecuaciones de Newton y las de Hamilton de la Mecánica Clásica, o las leyes de la Termodinámica en su forma diferencial, por mencionar algunas. Casi siempre se han hecho modelos simplificados y aproximaciones de la teoría para resolver preguntas específicas sobre ésta. Un ejemplo es suponer que la moléculas de un gas diluido no interactúan entre sí, lo cual permite resolver analíticamente la ecuación de estado del gas ideal, que recibe el nombre de ideal ya que no existe gas alguno que cumpla tal suposición. Considero dos principales razones por las cuales se hace este tipo de aproximaciones. La primera es para entender; si las suposiciones son simples y la cadena lógica que nos lleva a los resultados es clara, es mucho más fácil generar intuición sobre un tema y nos permite extrapolar a casos más complicados una vez que se entiende el modelo base. En el ejemplo del gas ideal uno genera intuición sobre cómo la física estadística explica las propiedades macroscópicas como la presión, el volumen o la temperatura y, una vez que se adquiere cierta experiencia al respecto, se suelen hacer suposiciones más complejas y/o realistas como el modelo de Van der Wals, que sí toma en consideración la interacción entre las moléculas de un fluido y predice una transición de fase en éste. La segunda razón, y que va de la mano con el objetivo principal de esta tesis, es que resolver ecuaciones diferenciales de manera analítica resulta difícil en general. Nadie ha podido resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones diferenciales que describen al problema restringido de tres cuerpos, cuyo estudio lleva más de 300 años. La dificultad en encontrar la solución explícita de diferentes ecuaciones diferenciales ha impulsado a analizarlas sin tener que resolverlas explícitamente. Nacen herramientas como el estudio de órbitas periódicas, puntos singulares, puntos de equilibrio, análisis de estabilidad, entre otras. Éstas no solucionan al problema, pero ayudan a entender cómo funcionan ciertos aspectos dinámicos. Sin embargo, hoy tenemos métodos para encontrar dichas soluciones sin resolverlas de forma analítica con el precio de que no son exactas del todo; éstos se conocen como métodos numéricos y métodos cualitativos.

Los métodos numéricos, a los cuales les prestaremos principal atención en este trabajo, encuentran la solución aproximada¹ de una condición inicial que represente el estado de un sistema en un momento dado. En esta tesis se propone extender el concepto de condición inicial al de vecindad inicial, lo cual se conoce como “Transporte de Jets”. Es decir, el transporte encuentra el flujo de un conjunto de condiciones vecinas a una condición \mathbf{x}_0 dada bajo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ideas ya se han abordado antes en los trabajos de Daniel Pérez-Palau [1,2,6] y en los trabajos de Makino y Berz [7,8], donde han explorado aplicaciones como la probabilidad de colisión entre satélites orbitando la Tierra, la navegación de naves espaciales via filtros de Kalman o encontrar estructuras lagrangianas en el espacio fase. El nombre Transporte de Jets viene inspirado de la evolución de los jets en la física de partículas, que siempre vienen en paquete, tal como el jet de gluones descrito por Peskins en [9].

La tesis está organizada de la siguiente manera: el capítulo 2 presenta el concepto de Transporte de Jets como una herramienta de los métodos numéricos, específicamente montándolo sobre el método de Taylor, donde se construye un álgebra polinomial necesaria para las operaciones polinomiales, y finalmente se pone a prueba al Transporte de Jets en una serie de ejemplos hamiltonianos sencillos. El capítulo 3 desarrolla una serie de indicadores dinámicos para el Transporte de Jets, donde se aprovecha el carácter paramétrico de las vecindades. El capítulo 4 estudia al problema circular restringido de tres cuerpos, donde se analizan sus ecuaciones, sus puntos de equilibrio, sus constantes de movimiento y la estructura del espacio de configuraciones. Finalmente, el capítulo 5 presenta los resultados principales utilizando los conceptos del capítulo 2 y los indicadores de 3 en el problema circular de tres cuerpos desarrollado en el capítulo 4.

¹Que las soluciones sean aproximadas no quiere decir que sean malas. Existen métodos hoy en día, como el método de Taylor, que pueden ser de precisión arbitraria si así se requiere. Actualmente la limitante es la capacidad de cómputo para hacer operaciones y el tamaño finito de la partición que representa a los números en una computadora.

Transporte de Jets

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t) \tag{2.1}$$

con f una función que define al campo vectorial del sistema y t su parámetro de evolución. Sea $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ la trayectoria o **flujo** de la solución que en t_0 se encuentra en \mathbf{x}_0 . En la mayoría de los sistemas físicos, el parámetro t describe al tiempo, i.e., $t \in \mathbb{R}$, y al sistema de EDO se le conoce como sistema dinámico.

Pocos son los casos en donde la solución a $\dot{\mathbf{x}}(t)$ se puede obtener de manera analítica y, por tanto, estudiar las familias de soluciones para diferentes condiciones iniciales termina siendo casi siempre un estudio indirecto o aproximado. Se han considerado varias formas para darle la vuelta a este problema y, en los esfuerzos de lo aproximado, una de las soluciones más prácticas ha sido discretizar al parámetro temporal t de (2.1) y encontrar, en saltos discretos de t , el “estado actual” del sistema dado un “estado anterior”.

Gracias a que hoy en día existe poder de cómputo para hacer muchas operaciones simples en poco tiempo, se ha explotado el estudio y uso de métodos iterativos para obtener $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, siendo de gran utilidad en los últimos años, como se resume en [10]. Éstos se conocen como métodos numéricos de integración de ecuaciones diferenciales. Con estos métodos se puede obtener una solución aproximada dada una condición inicial $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$. Sin embargo, no siempre es suficiente obtener la solución de una única condición inicial dada y muchas veces interesa toda una familia de soluciones alrededor de un punto \mathbf{x}_0 inicial. Esto puede pasar, por ejemplo, en aceleradores de partículas que disparan paquetes de onda como si fuesen “gotas” sujetas a algún campo externo [9]. En sistemas de muchos cuerpos se ha pensado en familias de soluciones cercanas [11], ya que difícilmente se conocen las condiciones iniciales de todo el sistema con una precisión profunda. De hecho, en todos los sistemas donde las condiciones iniciales pueden no saberse con exactitud, un método exhaustivo sería el conseguir todas las soluciones

de las posibles condiciones iniciales para estos sistemas. Una rama muy relacionada a lo anterior son los métodos de Monte Carlo, donde, en el caso de las EDO, parte de una distribución de condiciones iniciales discretizada y se obtiene cada una de las soluciones para ésta [12, 13]. En un plano más general, el mundo de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha estudiado exhaustivamente los campos vectoriales que generan las ecuaciones de la forma (2.1). Ha habido gran interés en entender el comportamiento de órbitas periódicas y puntos de equilibrio o, más generalmente, la topología del campo vectorial que representa las soluciones de las ecuaciones como lo desarrolla Arnold en su libro [14]. Se han desarrollado métodos para encontrar estructuras hiperbólicas en el espacio fase y métricas para catalogar el comportamiento de las soluciones, como lo hace Haller con el concepto de estructuras coherentes lagrangianas en [15]. Algunos de los resultados teóricos para esto son el número de Euler, que categoriza la topología del espacio, las secciones de Poincaré, que son representaciones de la solución en un espacio de menor dimensionalidad que el espacio fase, donde normalmente se busca que no sea tangente a las soluciones para entender cómo éstas cruzan dichas secciones, los exponentes de Lyapunov, que cuantifica la separación de soluciones cercanas a una condición inicial dada, la derivada de Lie, que compara al campo vectorial de (2.1) contra otro campo vectorial, la linealización de Grobman-Hartman, que toma la parte lineal de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ en localidades suficientemente pequeñas y analiza qué quiere decir “suficientemente”, entre otras.

Muchas de estas preguntas podrían responderse si en vez de encontrar $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ para una condición \mathbf{x}_0 dada se tuviera una vecindad inicial $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ alrededor de \mathbf{x}_0 y se encuentra el flujo para toda esta vecindad; ésto es, en esencia, un “jet” que es “transportado” por el flujo. La motivación principal para este desarrollo viene de los trabajos de Daniel-Perez sobre aplicaciones del Transporte de Jets en [1, 2]. Parecería una idea idéntica a las simulaciones de Monte Carlo, pero la gran diferencia es que en Monte Carlo se integra cada solución de manera independiente dada una distribución y aquí se integra toda la vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ a la vez. Ésta es la principal motivación detrás del Transporte de Jets (TJ); dada la vecindad inicial $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ alrededor de \mathbf{x}_0 parametrizada por el vector ξ , se busca obtener $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$ y evaluar ξ en $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ para obtener $\phi(t; t_0, \mathcal{U}_{\mathbf{x}_0})$, la deformación de la vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ al tiempo t . La idea operativa computacional del TJ es muy similar a la de cualquier método numérico de integración de EDO: discretiza los pasos del parámetro de evolución (tiempo) en intervalos h_n y encuentra un método iterativo para conseguir el siguiente punto del flujo $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. En la Figura 2.1 se observa un esquema cualitativo de la idea del Transporte de Jets. Vale la pena ilustrar dicha discretización con un método muy sencillo e intuitivo como es el método de Euler. A fin de entender la idea básica; más adelante, usaremos métodos más precisos en esta tesis.

Sabemos, por definición, que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}.$$

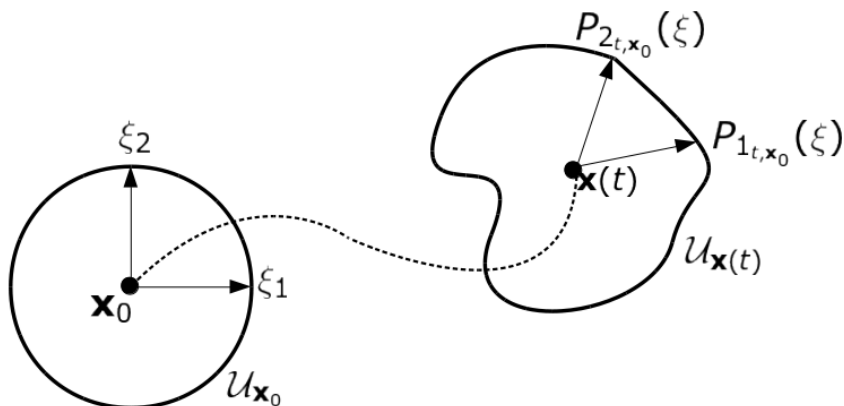


Figura 2.1: Diagrama esquemático de la idea del Transporte de Jets.

Si tomamos h *suficientemente pequeña*, aunque finita, podemos aproximar

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + h\dot{\mathbf{x}}(t)$$

que, si tomamos en cuenta que $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$ y que h es un paso de integración, se obtiene

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + hf(\mathbf{x}_n, t_n), \quad (2.2)$$

que se conoce como el **Método de Euler**. Así, dada \mathbf{x}_0 se puede obtener $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ iterando (2.2) hasta llegar a t en pasos de h .

Ahora, para la evolución del TJ se parametriza a la vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ usando un polinomio $P_{t_0, \mathbf{x}_0}(\xi)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$P_{t_0, \mathbf{x}_0}(\xi) = \mathbf{x}_0 + \xi = \mathbf{x}_0 + (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T,$$

y se evalúa con el método de Euler (o cualquier otro) para obtener el flujo de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ en algún tiempo t posterior $\phi(t; t_0, \mathcal{U}_{\mathbf{x}_0})$

$$P_{1, \mathbf{x}_0}(\xi) := P_{t_0+h, \mathbf{x}_0}(\xi) = P_{t_0, \mathbf{x}_0}(\xi) + hf(P_{t_0, \mathbf{x}_0}, t_0) = \mathbf{x}_0 + \xi + hf(\mathbf{x}_0 + \xi).$$

Así, se puede extender el método de Euler al TJ

$$P_{t_n, \mathbf{x}_0}(\xi) = P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi) = P_{n-1, \mathbf{x}_0}(\xi) + hf(P_{n-1, \mathbf{x}_0}(\xi), t_{n-1}) \quad (2.3)$$

donde $P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi) := P_{t_n, \mathbf{x}_0}(\xi)$ representa al flujo $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$. Basta evaluar este polinomio en $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ para obtener $\phi(t; t_0, \mathcal{U}_{\mathbf{x}_0})$ ¹.

¹ $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$ no necesariamente debe ser evaluado en toda una vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$; puede, también, ser en un único punto $\xi = \delta\mathbf{x}$ y obtener el flujo para $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x})$. Esta es una de las principales ventajas de tener la vecindad de forma paramétrica.

Es importante notar que la solución $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ o el conjunto de soluciones $\phi(t; t_0, \mathcal{U}_{\mathbf{x}_0})$ son sensibles al método de integración utilizado para encontrarlas dado que la solución construida es una aproximación. Se recomienda al lector leer el desarrollo explícito en [2] para ver estas diferencias.

Para ilustrar un poco lo anterior, merece la pena desarrollar un ejemplo que motive el uso del Transporte de Jets.

Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (x_1, x_2)^T \quad (2.4)$$

un campo vectorial que describe centros alrededor de $x_0 = (0, 0)$.

Si se toma $P_{0, \mathbf{x}_0} = (x_{1_0}, x_{2_0}) + (\xi_1, \xi_2)$ como la condición inicial parametrizada, podemos desarrollar “a mano” el Transporte de Jets donde, usando el método de Euler, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= P_{1, \mathbf{x}_0}(\xi) = P_{0, \mathbf{x}_0}(\xi) + hf(P_{0, \mathbf{x}_0}(\xi), t_0) \\ &= (x_{1_0} - hx_{2_0}, hx_{1_0} + x_{2_0})^T + \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} (\xi_1, \xi_2)^T. \end{aligned}$$

El primer término de \mathbf{x}_1 corresponde al primer paso de integración de \mathbf{x}_0 sin el TJ. El segundo término es la solución de las ecuaciones variacionales de primer orden para el primer paso con el método de Euler, o dicho de otra manera, una aproximación lineal de soluciones cercanas a \mathbf{x}_0 parametrizadas por las ξ 's. Se puede notar que el hecho de que el resultado sea lineal en ξ_1 y ξ_2 se debe a la linealidad del campo vectorial; campos vectoriales no lineales tendrían términos no lineales en ξ , si el orden de los polinomios lo permite. Gracias a esta parametrización, es natural pensar en obtener soluciones cercanas simplemente evaluando ξ en $P_{1, \mathbf{x}_0}(\xi)$ o, más generalmente, en $P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi)$. De este modo, el TJ plantea ser una alternativa interesante al método de Monte Carlo, ya que habría que hacer una sola integración de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ y después simplemente evaluar los polinomios. Existen dos principales desventajas para esto; una es que la integración de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$, al operar con polinomios y no con números, suele ser más lenta que la de una única trayectoria en que pasa por \mathbf{x}_0 en t_0 . La otra es que en general el jet es sólo una aproximación de la función original, por lo que puede perder precisión en algunos casos, sobre todo si se toman valores demasiado lejanos a \mathbf{x}_0 o si la función es, a priori, poco diferenciable. Naturalmente, el tiempo en donde uno u otro método es mejor es discutible y dependerá fuertemente de la complejidad y la dimensionalidad de las ecuaciones presentes en el sistema².

²Para una discusión más a fondo sobre este tema, revisar el apéndice A, donde se hacen varias evaluaciones en relación al tiempo de cómputo y precisión del TJ.

Se podría seguir haciendo el desarrollo del TJ iterativamente con el método de Euler. Por ejemplo, para el segundo paso para el oscilador armónico se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_2 &= P_{2,\mathbf{x}_0}(\xi) = P_{1,\mathbf{x}_0}(\xi) + hf(P_{1,\mathbf{x}_0}(\xi), t_n) \\
 &= (x_{10} - hx_{20}, hx_{10} + x_{20})^T + \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} (\xi_1, \xi_2)^T \\
 &\quad + h \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left((x_{10} - hx_{20}, hx_{10} + x_{20})^T + \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} (\xi_1, \xi_2)^T \right) \right) \\
 &= \begin{bmatrix} x_{10} - h^2x_{10} - 2hx_{20} \\ 2hx_{10} + x_{20} - h^2x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - h^2 & -2h \\ 2h & 1 - h^2 \end{bmatrix} (\xi_1, \xi_2)^T,
 \end{aligned}$$

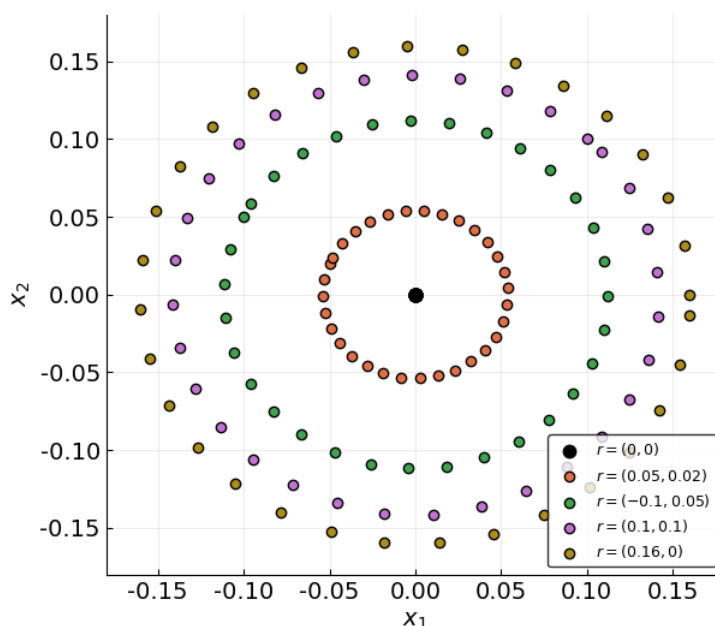


Figura 2.2: TJ para la ecuación (2.4) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ usando el método de Euler para $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ parametrizada en un círculo $\xi(\alpha) = r(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ para un intervalo temporal $[0, 2\pi]$ en pasos de $h = 10^{-4}$. Se evaluó la solución para los distintos r 's marcados en la gráfica, en intervalos de $1000h$.

y así sucesivamente. Una vez que se obtiene $P_{n,\mathbf{x}_0}(\xi)$ basta con evaluarlo para valores ξ suficientemente pequeños para encontrar las soluciones en la vecindad de \mathbf{x}_0 . Esto es conveniente porque se puede evaluar a priori cualquier valor cerca de \mathbf{x}_0 gracias a la parametrización de su vecindad. En la Figura 2.2 se evalúa $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$ para para distintos valores de t y de ξ alrededor del punto singular $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Notemos que (2.4) corresponde a un sistema hamiltoniano cuyas soluciones en el espacio fase viven en las curvas de nivel dadas por

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2),$$

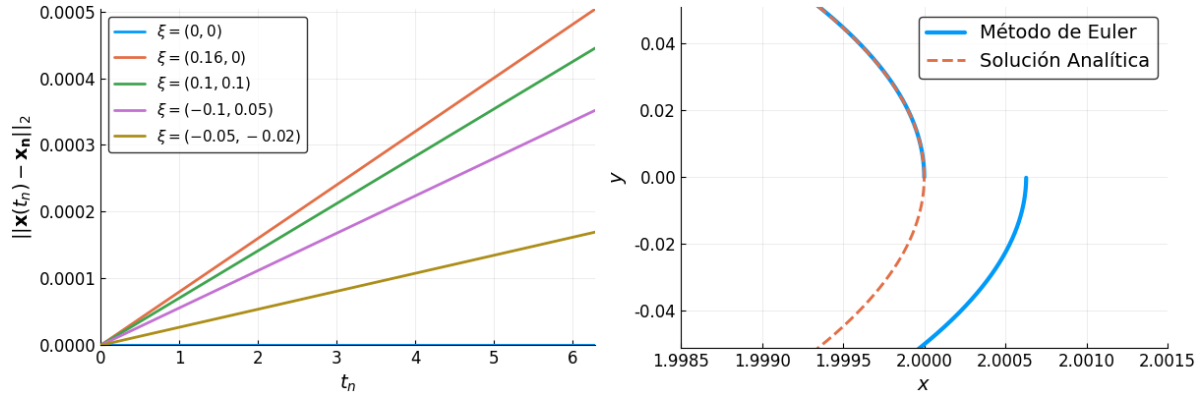


Figura 2.3: Diferencias numéricas entre el método de Euler y la solución analítica para la ecuación (2.4). *Izquierda:* norma de la diferencia entre la solución real y evaluaciones de la solución numérica para distintos valores de ξ marcados en la gráfica. Se puede observar un crecimiento lineal del error numérico, lo cual es una de las consecuencias de usar el método de Euler. *Derecha:* sección del espacio fase donde se observan la solución analítica y la solución numérica para pasos de $h = 10^{-4}$ con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (2, 0)$ después de un periodo.

con solución analítica

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01} \cos(t) - x_{02} \sin(t) \\ x_2(t) &= x_{01} \sin(t) + x_{02} \cos(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

En la Figura 2.3 se muestran distintas comparaciones de la integración numérica contra las soluciones analíticas de (2.5), donde se observa un error creciente en las trayectoria calculada, dado por la naturaleza del método de Euler.

Queda claro que el desarrollo de TJ necesita de un álgebra polinomial para poder evaluar los distintos $P_{j, \mathbf{x}_0}(\xi)$ que definen al campo vectorial en cada uno de sus pasos. El problema de transportar una vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ dado un sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t))$ se reduce al problema de saber cómo se evalúan distintos polinomios en cada paso de integración, así como la definición computacional de sus operaciones. Hay muchos detalles a considerar en este problema: ¿Qué paso de integración se deberá usar para conseguir la evolución temporal de las soluciones? ¿Cómo medimos el error respecto a la solución real? ¿Existe alguna forma de controlar el error que arrojan el método de integración y la propagación de jets del TJ? ¿Cuál es la complejidad de las operaciones para la aritmética de polinomios? En la siguiente sección 2.1 se desarrolla el álgebra polinomial y sus operaciones tal como son implementadas en el TJ y se ahonda en esta discusión. En la sección 2.2 se hace el desarrollo del método de Taylor como integrador computacional adaptativo de sistemas de EDO. En el siguiente capítulo se desarrollarán herramientas a partir del Transporte

de Jets y sus características, así como sencillos ejemplos ilustrativos para cada una de ellas.

§2.1 Álgebra Polinomial

La necesidad del álgebra polinomial se vuelve imperativa para el TJ como hemos visto en la sección anterior. Haremos la construcción de manera formal donde denotaremos dicha álgebra como $\mathcal{A}({}^n P_{\mathbb{K}}, +, \cdot)$, donde ${}^n P_{\mathbb{K}}$ es el conjunto de **polinomios de orden n con coeficientes en el campo \mathbb{K}** tal que, si $P(x) \in {}^n P_{\mathbb{K}}$, éste se define como

$$P = P(x) := \sum_{k=0}^n p_k x^k$$

con $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{K}$ una función analítica y $p_k \in \mathbb{K} \forall k \in [0, n]$.

Esta sección se divide en tres: la primera trata sobre construcción formal del álgebra en una variable y la demostración de sus propiedades de campo, la segunda trata sobre el desarrollo de las operaciones para las funciones estándar dentro de este álgebra. La tercera sección es la extensión de dicha álgebra a más variables, para poder trabajar a cualquier dimensionalidad.

§2.1.1 Construcción del Álgebra

Inspirado en la aritmética usual en \mathbb{C} o \mathbb{R} , podemos definir $(+, \cdot)$ para $\mathcal{A}({}^n P_{\mathbb{K}}, +, \cdot)$ de la siguiente manera:

Sean $A, B \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ con $A = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $B = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ $a_k, b_k \in \mathbb{K} \forall k \in [0, n]$, entonces, para la suma, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n b_k x^k &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k \end{aligned}$$

así, se define $+$ en ${}^n P_{\mathbb{K}}$ como

$$A + B = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k. \tag{2.6}$$

Para el producto, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^n b_k x^k &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\ &= (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots + \\ &+ \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right) x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

así, se define \cdot en ${}^n P_{\mathbb{K}}$ como

$$A \cdot B = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j x^k, \quad (2.7)$$

donde $A \cdot B \in {}^n P_{\mathbb{K}}$, o sea, un **polinomio truncado** a orden n que es parte del álgebra planteada y está en el campo. Aún cuando las operaciones definidas están inspiradas en la aritmética de los números, \mathbb{K} puede ser cualquier campo arbitrario, por ejemplo, \mathbb{K} puede ser el campo de los polinomios, como veremos más adelante.

Proposición 2.1.1 Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , $\mathcal{A}({}^n P_{\mathbb{K}}, +, \cdot)$ forma un campo.

Dem Basta probar las nueve propiedades de campo con las operaciones de (2.6) y (2.7). Sean A, B y $C \in {}^n P_{\mathbb{K}}$

1. $A + B = B + A$

Dem

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (b_k + a_k) x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k + \sum_{k=0}^n a_k x^k = B + A \end{aligned}$$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

Dem

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n (b_k + c_k) x^k = \sum_{k=0}^n (a_k + (b_k + c_k)) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n ((a_k + b_k) + c_k) x^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=0}^n c_k x^k \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

3. $\exists \mathbf{0} \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathbf{0} + A = A$

Dem Sea $\mathbf{0}(x) = \sum_{k=0}^n \sigma_k x^k$ donde $\sigma_k = 0 \forall k \in [0, n]$, así

$$\mathbf{0} + A = \sum_{k=0}^n (\sigma_k + a_k) x^k = \sum_{k=0}^n (0 + a_k) x^k = \sum_{k=0}^n a_k x^k = A$$

4. $\exists -A \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ tal que $A + (-A) = \mathbf{0}$

Dem Sea $-A = -A(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ donde $a_k = -a_k \forall k \in [0, n]$, así

$$A + (-A) = \sum_{k=0}^n (a_k + a_k) x^k = \sum_{k=0}^n (a_k + (-a_k)) x^k = \sum_{k=0}^n 0 x^k = \mathbf{0}$$

5. $A \cdot B = B \cdot A$

Dem Hay que probar, básicamente, que $\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^k b_{k-j} a_j$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j &= \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \text{ con } i = k - j \\ &= \sum_{i=0}^k b_{k-i} a_i = \sum_{j=0}^k b_{k-j} a_j \end{aligned}$$

$\therefore A \cdot B = B \cdot A$.

6. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Dem Por un lado

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k b_{k-j} c_j \right) x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} \sum_{i=0}^j b_{j-i} c_i \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{r+j=k} a_r \sum_{p+i=j} b_p c_i \right) x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{r+j=k} \sum_{p+i=j} a_r b_p c_i \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{r+p+i=k} a_r b_p c_i \right) x^k \end{aligned}$$

por otro

$$\begin{aligned}
 (A \cdot B) \cdot C &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right) x^k \sum_{k=0}^n c_k x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^j a_{j-i} b_i \sum_{j=0}^k c_{k-j} \right) x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{r+j=k} \left(\sum_{p+i=r} a_p b_i \right) c_j \right) x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{r+j=k} \sum_{p+i=r} a_p b_i c_j \right) x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p+i+j=k} a_p b_i c_j \right) x^k
 \end{aligned}$$

Basta ver que, por un cambio de nombre de índices $p \rightarrow r$, $i \rightarrow p$, $j \rightarrow i$,

$$\sum_{p+i+j=k} a_p b_i c_j = \sum_{r+p+i=k} a_r b_p c_i$$

$$\therefore (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

7. $\exists \mathbf{1} \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathbf{1} \cdot A = A$

Dem Sea $\mathbf{1} = \mathbf{1}(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k x^k$ donde $\omega_k = 0 \forall k > 0$ y $\omega_0 = 1$, así:

$$\mathbf{1} \cdot A = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} \omega_j \right) x^k = \sum_{k=0}^n a_{k-0} \cdot 1 x^k = \sum_{k=0}^n a_k x^k = A$$

8. $\exists A^{-1} \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ tal que $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1} \forall A$ con $a_0 \neq 0$

Dem Sea $A^{-1} = A^{-1}(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$; con

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} \alpha_j \right) x^k \text{ así, buscando} \\
 \sum_{j=0}^k a_{k-j} \alpha_j &= 0 \forall k > 0 \text{ y } \alpha_0 = \frac{1}{a_0}
 \end{aligned}$$

podemos llegar a una fórmula recursiva para α_k

$$\alpha_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j} \alpha_j.$$

Así, por construcción, se obtiene que $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$.

$$9. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Dem

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \left(\sum_{k=0}^n (b_k + c_k) x^k \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} (b_j + c_j) \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right) \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} c_j \right) \right) x^k = A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

Así, quedan demostradas todas las propiedades de campo. ■

§2.1.2 Definición explícita de operaciones con polinomios

Aún con la proposición 2.1.1 demostrada y con las operaciones básicas $(\cdot, +)$ definidas, es práctico prestar atención a otras operaciones que serán de ayuda al trabajar con elementos de ${}^n P_{\mathbb{K}}$. Serán la potencia, la composición y la derivada nuestros “caballos de batalla” para el desarrollo de casi cualquier función existente en la aritmética usual.

Sea $A = A(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in {}^n P_{\mathbb{K}}$. Si $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^m &= \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^m = \sum_{k=0}^n a_k x^k \sum_{k=0}^n a_k x^k \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^{m-2} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} a_j \right) x^k \sum_{k=0}^n a_k x^k \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^{m-3} = \sum_{k=0}^n {}^1 \alpha_k x^k \sum_{k=0}^n a_k x^k \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^{m-3} \\ &= \dots = \sum_{k=0}^n {}^m \alpha_k x^k \\ &\text{con } {}^1 \alpha_k = \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} a_j \right) \text{ y } {}^m \alpha_k = \left(\sum_{j=0}^k {}^{m-1} \alpha_k a_j \right) \end{aligned}$$

y, aunque no queda clara la forma explícita de ${}^m \alpha_k$, se muestra que la **potencia** está bien definida y que $A^m \in {}^n P_{\mathbb{K}}$.

Con esto último, y sea $B = \sum_{k=0}^n b_k x^k \in {}^n P_{\mathbb{K}}$, se puede desarrollar

$$B(A(x)) = B(A) = \sum_{k=0}^n b_k \left(\sum_{j=0}^n a_j x^j \right)^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \sum_{j=0}^n {}^k \alpha_j x^j = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k b_{k-j} {}^k \alpha_j \right) x^k$$

que corresponde a la **composición** de A en B , la cual está bien definida y pertenece a ${}^n P_{\mathbb{K}}$.

Inspirados en la derivada usual de polinomios de orden n $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tenemos que

$$\frac{dP(x)}{dx} := P'(x) = P' = \sum_{k=0}^n k p_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^n (k+1) p_{k+1} x^k$$

así, se define la **derivada** de A como

$$A' = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} x^k, \quad (2.8)$$

con $a_{n+1} := 0 \in \mathbb{K}$ tal que $A' \in {}^n P_{\mathbb{K}}$. De la definición usual de derivada podemos ver cómo la **regla de la cadena** también tiene sentido en este campo, ya que

$$\begin{aligned} A(B(x))' &:= \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(B(x)) - A(B(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(B(x)) - A(B(a))}{B(x) - B(a)} \frac{B(x) - B(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(B(x)) - A(B(a))}{B(x) - B(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{B(x) - B(a)}{x - a} = A(B(x))' B(x)', \end{aligned}$$

lo cual se puede traducir a

$$\lim_{x \rightarrow a} (A(B(x)) + -A(B(a))) \cdot ((B(x) + -B(a))^{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} ((B(x) + -B(a)) \cdot (\mathbf{1}(\mathbf{x}) + -\mathbf{1}(\mathbf{a}))),$$

con las operaciones definidas hasta ahora.

Aún cuando ya tenemos las operaciones básicas del álgebra definidas, va a ser de gran practicidad extender otras operaciones útiles para el transporte de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ para el campo vectorial que estemos estudiando.

Se define la **resta** $-$ como

$$A - B := A + (-B). \quad (2.9)$$

Para la división, sea $D(x) \in {}^n P_{\mathbb{K}}$, tal que $B \cdot D = A$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k b_{k-j} d_j \right) x^k &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \implies \sum_{k=0}^n a_k - \left(\sum_{j=0}^k b_{k-j} d_j \right) x^k = 0 \\ \implies a_k - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j} d_j + b_0 d_k \right) &= 0 \\ \therefore d_k &= \frac{1}{b_0} \left(a_k - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} d_j \right) \end{aligned}$$

Se define la **división** como

$$D = A/B \text{ con } d_k = \frac{1}{b_0} \left(a_k - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} d_j \right). \quad (2.10)$$

Con el mismo espíritu, Haro desarrolla en su artículo [3] una serie de relaciones de recurrencia para las operaciones elementales como sin, cos, exp, log, etc. Se recomienda al lector consultar dichas relaciones de recurrencia si busca implementar un álgebra polinomial como aquí.

§2.1.3 Polinomios en varias variables

${}^n P_{\mathbb{C}}$ y ${}^n P_{\mathbb{R}}$ son campos y tenemos ya varias operaciones definidas sobre ${}^n P_{\mathbb{K}}$, pero la motivación del desarrollo de este álgebra es hacer polinomios de una variable (que representen al tiempo) cuyos coeficientes sean polinomios de otras variables (que representen al espacio fase de $\dot{x} = f(x(t))$), cuyos coeficientes sean elementos de \mathbb{C} o \mathbb{R} . Es decir, nos gustaría trabajar con polinomios cuyos coeficientes sean polinomios, cuyos coeficientes sean, finalmente, números. Sea ${}^n P_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} = {}^m P_{\mathbb{C}}$, entonces, con $P(x) \in {}^n P_{\mathbb{K}}$ y $P_k(y) = \sum_{j=0}^m a_{j,k} y^j \in \mathbb{K} \forall k \in [0, m]$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P_k(y) x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_{j,k} y^j \right) x^k := \sum_{k+j=0}^n a_{j,k} y^j x^k = P(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Con la definición planteada en el lado derecho de (2.11) se observa cómo el polinomio $P(x)$ cuyos coeficientes son los polinomios $P_k(y)$ es equivalente a un polinomio de dos variables que vive en un espacio que denominaremos, por construcción, ${}^n P_{\mathbb{C}^2}$. Notemos que el último conjunto de términos tiene orden $j + k = n$ para que $P(x)$ pertenezca, en efecto, a un espacio de polinomios de orden n . De hecho, para cada elemento de la suma se tiene que $k + j = \text{constante}$, los cuales se conocen como polinomios homogéneos de orden $k + j$.

Inductivamente, se puede construir el espacio ${}^n P_{\mathbb{C}^K}$ tomando

$$P(x_1) = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \cdots \sum_{k_K=0}^n a_{k_1, k_2, \dots, k_K} x_N^{k_K} x_{K-1}^{k_{K-1}} \cdots x_1^{k_1} := \sum_{\|\mathbf{k}\|_1=0}^n a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \quad (2.12)$$

con $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$, $\|\mathbf{k}\|_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_N$ la 1-norma de \mathbf{k} y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$. Así, quedan bien definidos los polinómios de orden n en N variables con coeficientes en \mathbb{C} (y en \mathbb{R} , naturalmente) en el espacio ${}^n P_{\mathbb{C}^N}$ como la suma de polinomios homogéneos desde orden 0 hasta N .

En el caso del Transporte de Jets se trabajará en el espacio ${}^N P_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} = {}^M P_{\mathbb{C}^d}$, con N el orden de la expansión temporal del método de Taylor, M el orden de la expansión polinomial de f en (2.1) evaluada en $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ y d la dimensión del sistema.

§2.2 Método de Taylor

Como se observa en (2.2), el método de Euler es la aproximación lineal de $\mathbf{x}(t)$ con h dado. El método de Taylor es la generalización del método de Euler en el sentido de que si $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), t)$ es una función analítica, entonces $\mathbf{x}(t)$ también lo es y, por tanto, se puede expresar como una serie de potencias convergente

$$\mathbf{x}(t+h) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i h^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(i)}(t)}{i!} h^i = \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{x}^{(i)}(t)}{i!} h^i + \mathcal{O}(h^{N+1}), \quad (2.13)$$

donde x_i es la i -ésima derivada normalizada, i.e. $x_i := \mathbf{x}^{(i)}(t)/i!$, con $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ la i -ésima derivada de $\mathbf{x}(t)$ evaluada en t . En el caso que $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, entonces i es un índice múltiple tal que $x_i := x_{i_1, \dots, i_d} \in \mathbb{R}^d$ e $i := \|\mathbf{i}\|_1 = i_1 + \dots + i_d$, compactando así la notación para dimensiones $d > 1$. El término $\mathcal{O}(h^{N+1})$ corresponde al residuo de la expansión hasta $N < \infty$ y, en caso de funciones analíticas, son términos cada vez más pequeños mientras estén dentro del radio de convergencia de ésta. Por esto, el residuo no será tomado en cuenta explícitamente y será considerado como el error del método³.

Comparando ambas expansiones en series de potencias de (2.1) y notando que $\frac{d}{dt} (\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i x_i t^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x_{i+1} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i.$$

Así, se define la relación de recurrencia

$$x_{i+1} = \frac{f_i}{i+1}, \quad (2.14)$$

obteniendo así

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \sum_{i=0}^N \frac{f_i}{i+1} (\mathbf{x}(t_{n+1}), t_n) h^i + \mathcal{O}(h^{N+1}), \quad (2.15)$$

el **método de Taylor** para obtener $\mathbf{x}(t) = \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ dado \mathbf{x}_0 .

³Los métodos que incluyen el cálculo del residuo como un intervalo de error se conocen como Taylor Models.

Una enorme ventaja de (2.15) sobre el método de Euler, o cualquier método de integración numérica con paso fijo como varios de los Runge-Kutta, es que se puede acotar el residuo $\mathcal{O}(h^{N+1})$ en términos de h si cambiamos el orden N de la expansión, controlando así el error de integración del sistema de EDO para cada paso. Como f y \mathbf{x} son analíticas al menos en un intervalo, entonces su desarrollo en series de potencias es convergente. De este modo, buscamos que la contribución del último término de la serie sea menor a cierta tolerancia ϵ_{Taylor} , es decir

$$\|x_N\|_\infty h^N \leq \epsilon_{Taylor} \implies h = \left(\frac{\epsilon_{Taylor}}{\|x_N\|_\infty} \right)^{1/N}.$$

Para el caso de funciones pares o impares, es probable que el último coeficiente de la serie sea idénticamente cero y, para evitar indeterminaciones al encontrar h , se busca la mínima h entre los dos últimos coeficientes de la expansión de $\mathbf{x}(t+h)$

$$h = \min_{n \in [N-1, N]} \left(\frac{\epsilon_{Taylor}}{\|x_n\|_\infty} \right)^{1/n}. \quad (2.16)$$

Esta última ecuación hace que el método de Taylor sea de precisión arbitraria. El paso es adaptativo para cada iteración y, dependiendo si uno busca precisión o rapidez, uno selecciona a ϵ_{Taylor} grande o chica, respectivamente. Típicamente, para obtener la mejor precisión posible, $\epsilon_{Taylor} \leq \epsilon_{machine}$, donde $\epsilon_{machine}$ se define como el mínimo valor que sumado a 1 da como resultado algo diferente de 1 en la computadora. En este caso $\epsilon_{machine} = 2.22 \times 10^{-16}$.

§2.2.1 Método de Taylor para el Transporte de Jets

Para el método que se acaba de desarrollar, cada término satisface que $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$. Sin embargo, en el TJ se parametriza la vecindad de la condición inicial con un polinomio $P_{0, \mathbf{x}_0}(\xi) \in {}^M P_{\mathbb{R}^d}$. Dado que $P_{0, \mathbf{x}_0}(\xi) = \mathbf{x}_0 + \xi$, la relación de recurrencia (2.15) puede reescribirse como

$$P_{n+1, \mathbf{x}_0}(\xi) = P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi) + \sum_{i=0}^N \frac{f_i}{i+1} (P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi), t_n) h^i \quad (2.17)$$

donde $P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi) \in {}^N P_{\mathbb{R}^d} \forall n$. Así, puede encontrarse la solución $\phi(t_n; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi) = P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi)$, que representa las vecindades del flujo $\phi(t_n; t_0, \mathbf{x}_0)$ parametrizadas por ξ .

Notemos que para este punto ya no hay problema en evaluar $P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi)$ ya que quedaron definidas las operaciones necesarias en la sección 2.1. Sin embargo, hay que prestar atención a cómo obtener el paso de integración h ya que, siguiendo (2.16), debemos tomar $\|x_m\|_\infty$ y para $x_m \in {}^N P_{\mathbb{R}^d}$, definimos la p -norma de la siguiente manera:

Definición 2.2.1 Sea $\|\cdot\| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $P(\xi) = \sum_k a_k \xi^k \in \mathbb{K} = {}^N P_{\mathbb{R}^d}$. Se define la **p-norma** de $P(\xi)$ como

$$\|P(\xi)\|_p := \left(\sum_k \|a_k\|_p^p \right)^{1/p} \quad (2.18)$$

donde, si $a_k \in \mathbb{R}$, entonces $\|a_k\|_p = |a_k|$.

Así, la elección del paso de integración tiene sentido ahora también para polinomios. Es importante mencionar que la definición de la norma para polinomios en ${}^N P_{\mathbb{R}^d}$ coincide con la definición estándar de norma. Además, de este modo, el paso de integración h coincide por el utilizado por D. Pérez en [6].

§2.2.2 Probando el método de Taylor

Hasta ahora se han desarrollado ejemplos usando únicamente el método de Euler con la intención de mostrar la esencia del TJ. Sin embargo, es momento de poner a prueba el método de Taylor desarrollado en párrafos anteriores y ver si las ecuaciones (2.15) y (2.17) son suficientemente precisas con el TJ. Además, se analizará la ecuación (2.17) para explorar e implementar cómo se puede enriquecer el método a través del desarrollo de diferentes indicadores.

Para probar el método se tomarán algunos hamiltonianos de la forma

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tomar este tipo de sistemas es cómodo ya que las soluciones viven en curvas de nivel con H constante que, de paso, representan la conservación de la energía mecánica. Ésto nos permite hacer una revisión de dicha conservación, la cual debería ser constante para toda la trayectoria. Se tomará, a menos que se indique lo contrario, $\epsilon_{Taylor} \leq \epsilon_{machine}$ para que el análisis de precisión sea robusto. Recordemos que en este caso $\epsilon_{machine} = 2.22 \times 10^{-16}$.

Oscilador armónico

Sea un sistema dado por una masa m que, al desplazarlo de su estado de equilibrio por una cantidad \mathbf{x} , siente una fuerza restitutiva proporcional a dicho desplazamiento

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x} \quad (2.21)$$

con $[k] = \text{Kg s}^{-2}$ y $k > 0$.

Tomando $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ se obtienen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{m}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{k}{m}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.22}$$

las EDO's para el **oscilador armónico**, las cuales son equivalentes, para $\omega^2 := \frac{k}{m} = 1$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$, a (2.4).

Usando la primera integral de (2.22) y la ecuación (2.20) se obtiene

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2,\tag{2.23}$$

con $p = mv$. Ésta cumple con las ecuaciones de (2.20) y es una constante de movimiento que representa la energía.

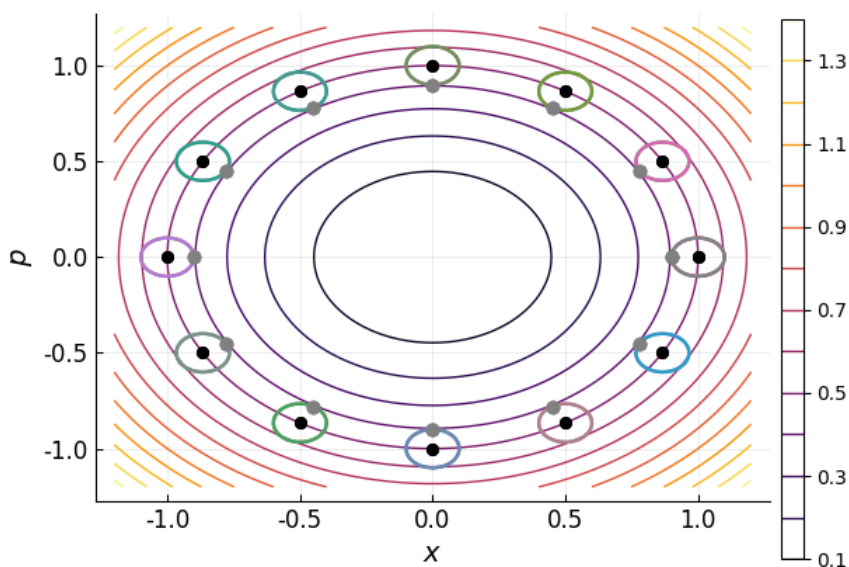


Figura 2.4: Espacio fase para el oscilador armónico representado por la ecuación (2.23). En negro aparece la solución calculada con el método de Taylor para jets con $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y orden del jet $M = 4$. Los jets fueron evaluados para la vecindad parametrizada por $\xi(\alpha) = 0.1 \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$, $\alpha \in [0, 1]$, mientras que la solución en gris representa la variación $\xi = (-0.1, 0)^T$.

Así, tenemos que las soluciones analíticas son de la forma

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \\ v(t) &= v_0 \omega \cos(\omega t) - x_0 \omega \sin(\omega t).\end{aligned}\tag{2.24}$$

La Figura 2.4 presenta al espacio fase del oscilador armónico junto con la solución de una vecindad \mathcal{U} calculada con el Transporte de Jets. En ésta se observa cómo las soluciones evaluadas en una vecindad inicial parametrizada por un círculo están siempre en las líneas de las curvas de nivel del hamiltoniano. Se observa además en la figura la estructura de centros alrededor del único punto de equilibrio $(0, 0)^T$, donde la vecindad calculada por el TJ oscila siempre a la misma frecuencia ω , lo cual es característico de este sistema. Notemos que en esta figura \mathcal{U} recorre diferentes curvas de nivel, por lo que el transporte fue transparente a conservar la energía del problema.

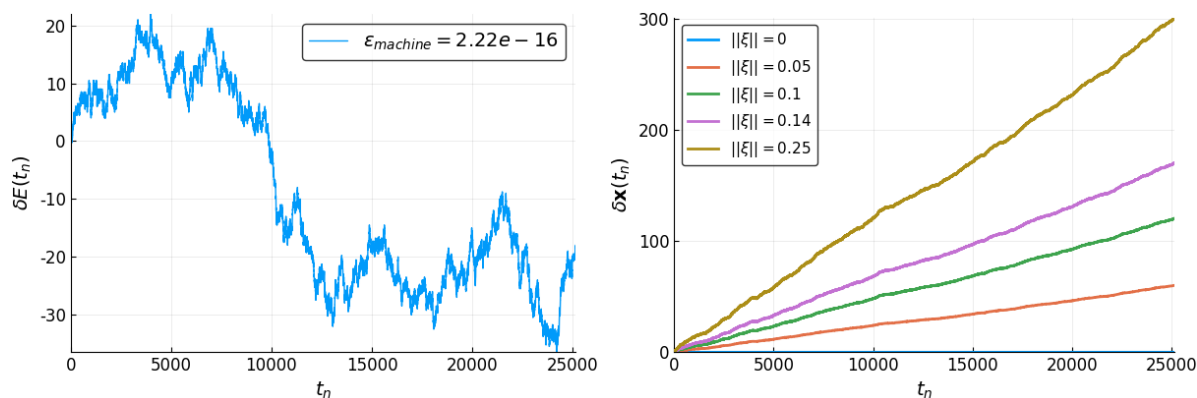


Figura 2.5: Variaciones de energía y trayectoria para el oscilador armónico en cada uno de los pasos temporales de la solución en unidades de $\epsilon_{machine}$ con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$ y vecindad parametrizada por $\xi(\tau) = 0.1 \cdot (\cos(\tau), \sin(\tau))^T$, $\tau \in [0, 1]$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y orden del jet $M = 4$. *Izquierda:* variación $\delta E(t_n) = \frac{E(t_n) - E_0}{\epsilon_{machine}}$ de la energía respecto a la energía inicial $E_0 = 1$ Joule. *Derecha:* variación $\delta \mathbf{x}(t) = \frac{\|\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}_0\|_2}{\epsilon_{machine}}$ respecto a la solución analítica (2.24) para distintos desplazamientos ξ respecto de la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$. Notemos que aunque el error crece de manera lineal, éste está en erminos del error de redondeo de la máquina, por lo que las soluciones calculadas son muy buenas.

Dada la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^T$ y tomando $m = 1$ Kg, $k = 1$ Kg s $^{-2}$, el oscilador tendrá una energía de $E_0 = H(\mathbf{x}_0) = 1$ Joules. En la Figura 2.5 se pueden ver las variaciones $\delta E(t_n)$ de la energía en cada paso de integración así como la diferencia $\delta \mathbf{x}(t_n)$ de las soluciones de jet calculadas por el método de Taylor evaluadas en diferentes ξ 's y las soluciones analíticas del oscilador armónico correspondientes al desplazamiento dado por dichas ξ s.

Es interesante notar que (2.22) es un sistema lineal de ecuaciones y, por tanto, basta con un jet de orden 1 para obtener la mejor aproximación de las vecindades de \mathbf{x}_0 . De hecho, evaluar $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ en $f(\mathbf{x})$ de (2.1) siempre regresa una cantidad lineal y por tanto, nunca aparecen términos de orden mayor en las variables del sistema de EDO.

Péndulo simple

Consideremos un sistema donde una masa m está anclada al extremo de una varilla de longitud l cuya masa es despreciable. Esta varilla está anclada, a su vez, a un punto inmovil. Así, m se mueve bajo la acción de la gravedad \mathbf{g} como se muestra en la Figura 2.6, ignorando la resistencia del aire.

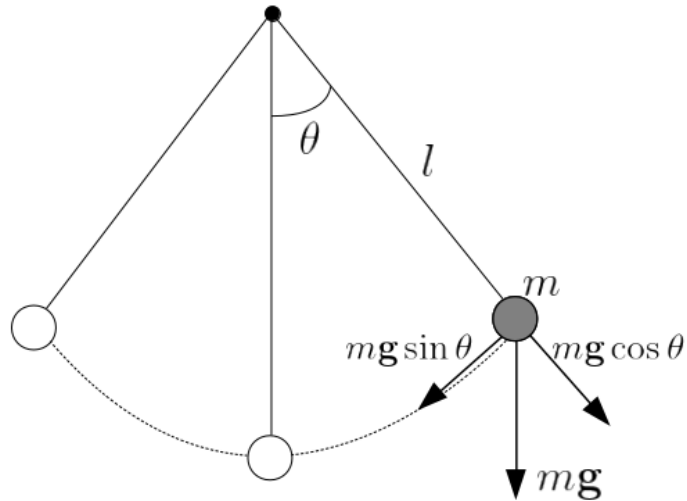


Figura 2.6: Diagrama esquemático del sistema del péndulo.

La forma más natural de trabajar este problema es en coordenadas polares, en donde la masa m se mueve con una velocidad $v = l\dot{\theta}$ con l constante, es decir $r(t) = l \implies \dot{r} = p_r = 0$. Esta restricción reduce en uno los grados de libertad del sistema, haciendo que éste dependa únicamente de θ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\ U &= mgh(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned} \tag{2.25}$$

son la energía cinética y potencial, respectivamente.

Así, construimos el lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = K - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

Sabemos que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = ml^2\dot{\theta},$$

lo cual nos permite plantear el hamiltoniano

$$H(p, \theta) = K + U = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta). \quad (2.26)$$

Las EDO quedan entonces, por (2.20), como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{ml^2} \\ \dot{p}_\theta &= -mgl \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.27)$$

en cuyo dominio $(\theta, p_\theta) \in [-\pi, \pi] \times [p_{min}, p_{max}] \subset \mathbb{R}^2$ existen dos puntos de equilibrio: $(\pi, 0)$, $(0, 0)$; el primero de libración y el otro de rotación. En la Figura 2.7 se puede ver una representación del espacio fase donde se exhibe el comportamiento de dichos puntos. Notemos que, por la periodicidad del espacio en θ , $(\pi, 0) = (-\pi, 0)$.

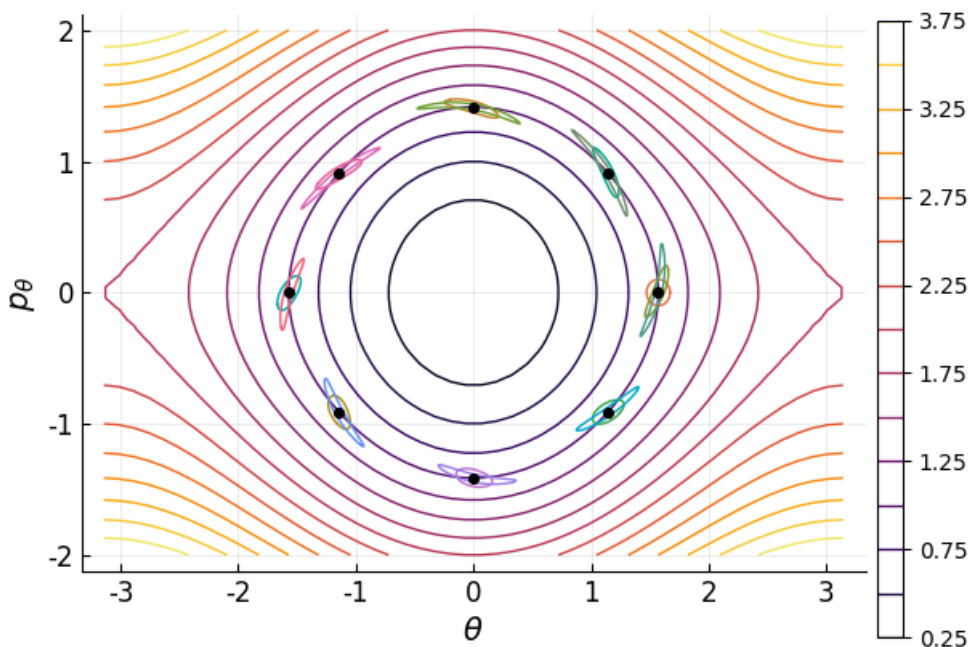


Figura 2.7: Espacio fase para el péndulo simple representado por la ecuación (2.26). En negro salen puntos de la trayectoria calculada con el método de Taylor para Jets con $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de la expansión $N = 24$ y sus vecindades (jets) evaluadas para $\xi(\alpha) = 0.1 \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$, $\alpha \in [0, 1]$.

Tomando unidades donde $g = 1$, $l = 1$ y $m = 1$, entonces, para las condiciones iniciales $p_\theta(0) = 0$ y $\theta(0) = \pi/2$, la energía total es

$$E_0 = H(p_\theta(0), \theta(0)) = 1.$$

Para ésta, se puede integrar el Transporte de Jets y además, evaluarlo para condiciones cercanas y ver cómo se comportan éstas soluciones en el espacio fase, que deben, en teoría, moverse por las curvas de (2.26). Se puede observar de la Figura 2.8 cómo para jets de orden 4, las soluciones se quedan sobre las curvas de nivel que corresponden a su energía mecánica.

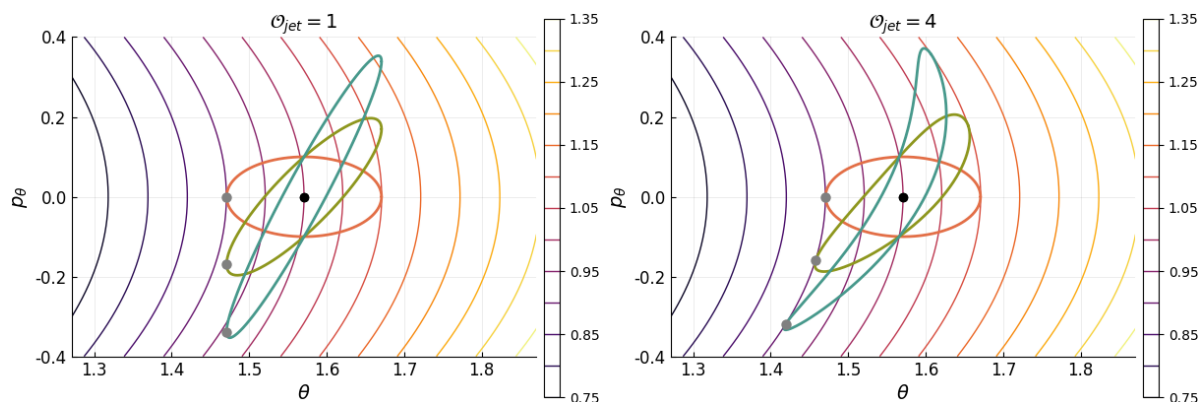


Figura 2.8: Jets de distinto orden para $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ parametrizada en un círculo de radio 0.1 $\xi(\alpha) = 0.1(\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T$ en el péndulo simple después de dos periodos. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 24$. *Izquierda:* Jet de orden 1, el cual no pasa por las curva de nivel de (2.26). *Derecha:* Jet de orden 4

Respecto a las variaciones de energía en el sistema, se ve en la Figura 2.9 cómo $\delta E(t)$ varía alrededor de cero como un movimiento browniano. Éste último se relaciona con los errores de redondeo de los números de punto flotante de la máquina y no con el método de Taylor en sí gracias a que ϵ_{Taylor} es suficientemente chica y N suficientemente grande, a diferencia del método de Euler, como se observa en la Figura 2.3, donde el error crece de manera lineal. La máxima variación respecto a la energía inicial es de 2.28×10^{-14} , lo cual corresponde exactamente a $103\epsilon_{machine}$.

Hamiltoniano Artificial

Inventemos un hamiltoniano que no necesariamente represente un sistema físico. Éste último ejemplo servirá como motivación de la siguiente sección, ya que estaremos analizando las soluciones cerca de una separatriz y se podrá extender un poco la discusión sobre los jets y la necesidad de contruir algunos indicadores dinámicos relevantes.

Sea

$$H(q, p) = qp^2 - \frac{1}{2}q^2 \quad (2.28)$$

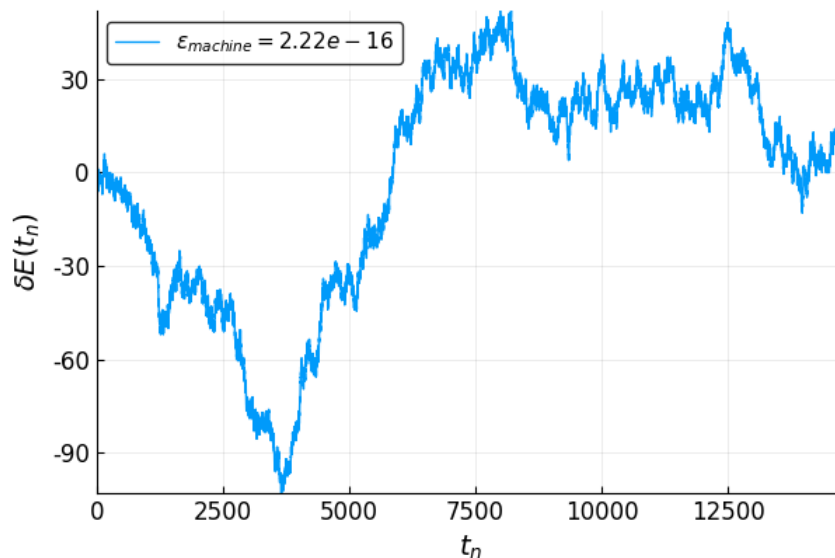


Figura 2.9: Diferencia $\delta E(t_n) := \frac{E(t_n) - E_0}{\epsilon_{machine}}$ de la energía del péndulo simple con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $M = 28$.

el hamiltoniano del sistema cuyas curvas de nivel representan las soluciones para la EDO

$$\begin{aligned} \dot{q} &= 2qp \\ \dot{p} &= -p^2 + q. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Notemos que este sistema tiene un único punto de equilibrio $(0, 0)^T$ que corresponde a la energía de $H(0, 0) = 0$. Con esto, podemos obtener la condición para que las soluciones estén sobre dicha curva límite o separatriz que divide diferentes regiones del espacio. Vemos que si

$$H(q, p) = qp^2 - \frac{1}{2}q^2 = 0 \implies p = \pm \sqrt{\frac{q}{2}}$$

entonces las condiciones iniciales tipo $\mathbf{x}_0 = (q, -\sqrt{\frac{q}{2}})$ vivirán sobre la separatriz.

Se muestra en la Figura 2.10 el espacio fase dado por el hamiltoniano del sistema. Notemos que dicha separatriz se puede observar como una parábola horizontal positiva que pasa por el punto de equilibrio.

Si tomamos $q_0 = 0.7$ con la condición anterior, y hacemos un TJ alrededor de dicha condición inicial podríamos ver, en teoría, las trayectorias que toman las soluciones cercanas a la curva límite en cada lado de la frontera que ésta impone. En la Figura 2.11 se observa la deformación de estos jets conforme pasa el tiempo y es evidente la tendencia que tienen las soluciones cercanas a diverger.

En este problema se vuelve importante muy rápidamente la precisión con la que los jets nos dan soluciones cercanas ya que la deformación de la vecindad inicial $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ es

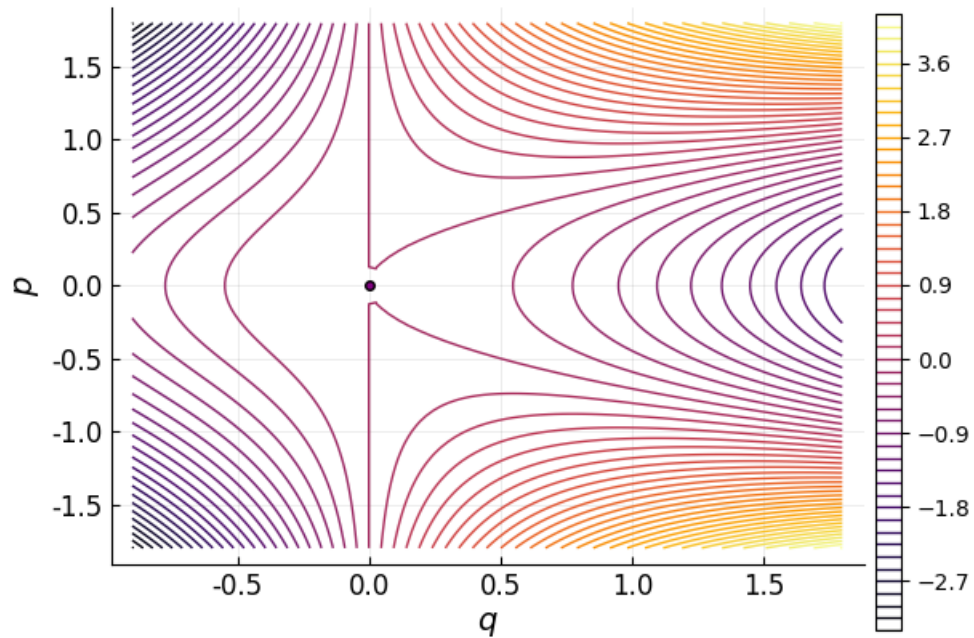


Figura 2.10: Espacio fase del campo vectorial dado por las ecuaciones de (2.29).

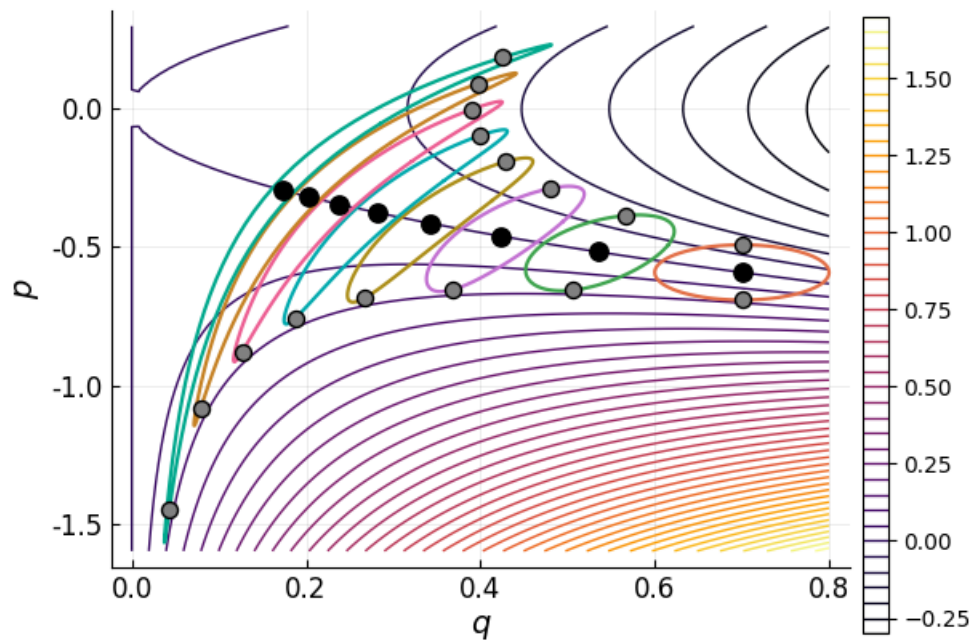


Figura 2.11: Solución para (2.29), con condición inicial sobre la separatriz, donde $q_0 = 0.7$. Aquí, los jets son de orden $M = 16$, en 8 pasos de integración desde $t_0 = 0$ hasta $t_{max} = 1.7$, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 28$. En gris están las soluciones a $\mathbf{x}_0 + \xi$ sin utilizar TJ.

muy grande. Por esto, se muestra en la Tabla 2.1 la diferencia entre evaluar el jet en $\xi = (0, -0.1)^T$ y hacer el método de Taylor convencional partiendo de ese punto. De hecho, se observan en la Figura 2.12 la evaluación de jets de distinto orden para la misma vecindad inicial alrededor de \mathbf{x}_0 .

	$M = 1$	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$	$M = 16$
t_1	-2.42	-3.97	-7.07	-13.28	-15.95
t_2	-1.92	-3.1	-5.47	-10.22	-15.95
t_3	-1.54	-2.48	-4.37	-8.15	-15.91
t_4	-1.21	-1.96	-3.47	-6.49	-12.53
t_5	-0.91	-1.49	-2.68	-5.05	-9.79
t_6	-0.61	-1.05	-1.95	-3.74	-7.34
t_7	-0.29	-0.6	-1.24	-2.52	-5.08

Tabla 2.1: Diferencia logarítmica de $\delta \mathbf{x} = \|\phi(t_i, t_0, \mathbf{x}_0 + (0, -0.1)^T) - P_{i, \mathbf{x}_0}((0, -0.1)^T)\|$ para polinomios $P_{i, \mathbf{x}_0}(\xi)$ de distinto orden M en ξ . Se ve que al duplicar M , el error mejora en un factor 2, aproximadamente.

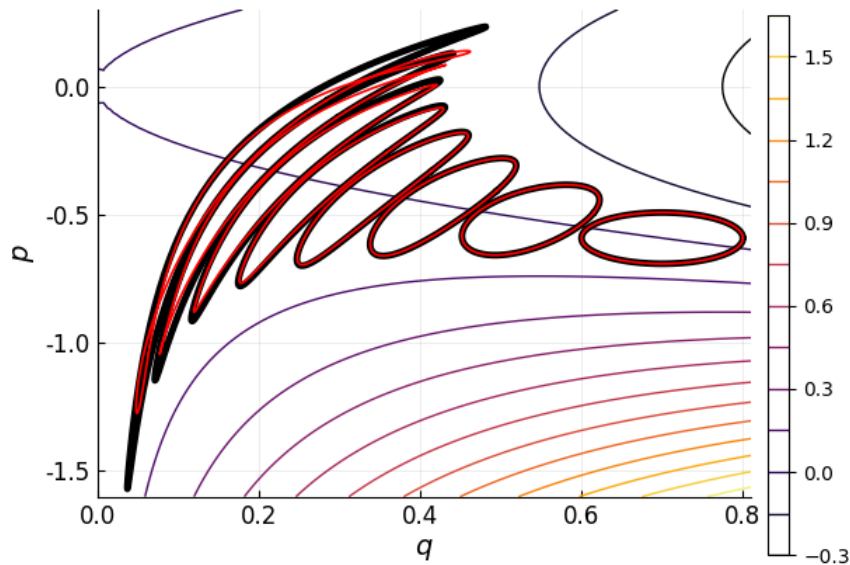


Figura 2.12: Diferencia gráfica entre un jet de orden $M = 2$ contra uno de orden $M = 16$ para las mismas condiciones.

Recordemos que como (2.29) es un sistema de EDO hamiltoniano entonces deberá conservar la energía. En la Figura 2.13 se observa la variación de la energía para cada paso temporal con el jet evaluado en $\xi = (0, \pm 0.1)^T$, así como en \mathbf{x}_0 , i.e., para el método de Taylor sin jets. Notemos cómo al principio, en la Figura 2.14 la energía sí se conserva, i.e, las evaluaciones del TJ se mantienen sobre las superficies de nivel del hamiltoniano,

sin embargo, cuando la vecindad se empieza a deformar más, la energía empieza a variar más respecto a la de su condición inicial. Notemos que aunque esta variación es de unas $10^8 \epsilon_{machine}$, el error en la energía es apenas en la octava cifra significativa, dado que $\epsilon_{machine} = 2.22 \times 10^{-16}$.

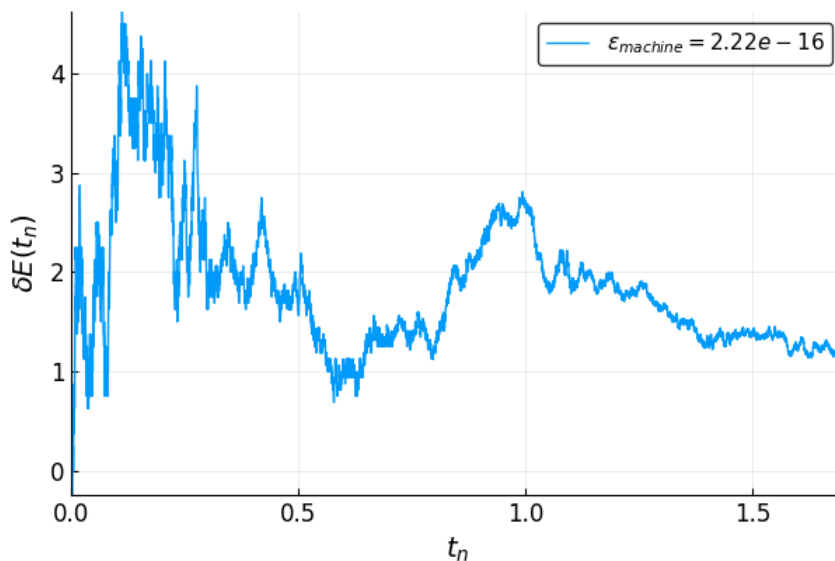


Figura 2.13: Diferencia en energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema 2.29 sin TJ, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de expansión $N = 24$ y 8000 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$.

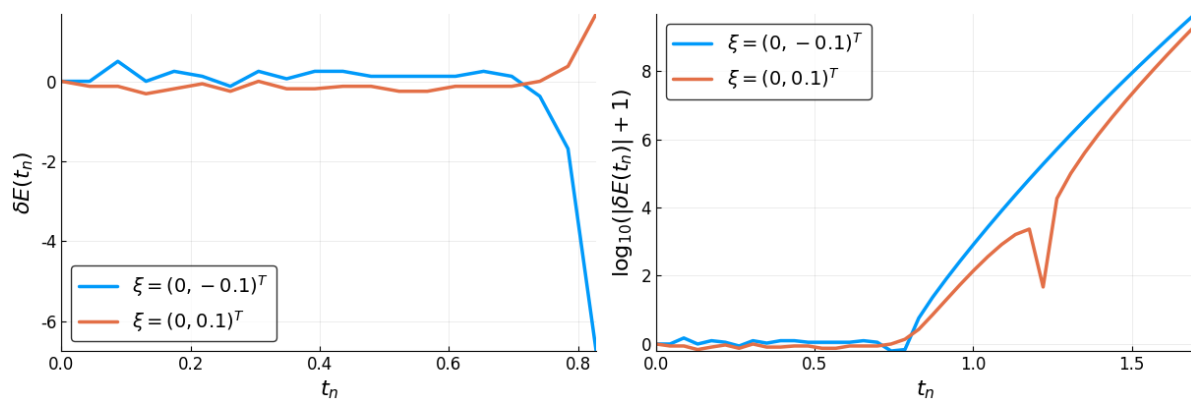


Figura 2.14: Diferencia en energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema (2.29) con jets de orden $M = 16$ evaluados en ξ . Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de expansión $N = 24$ y 40 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$. *Izquierda:* δE respecto a la energía inicial en la primera mitad de la integración. *Derecha:* $\log_{10}(|\delta E| + 1)$ respecto a la energía inicial en toda la integración.

Todos los ejemplos construidos en la última sección han sido evaluados en una vecindad con un radio de $r = 0.1$ alrededor de \mathbf{x}_0 . Sin embargo, nada asegura que ésta sea una buena elección para dicha vecindad. Estudiar cuál es el tamaño máximo que una vecindad puede tomar para que los jets arrojen soluciones precisas se vuelve una pregunta natural al ver las gráficas y tablas de estos ejemplos. Por otro lado, hemos visto en este último ejemplo cómo una vecindad inicial puede deformarse bastante rápido cerca de una curva límite cuando en el oscilador armónico, en cambio, no se deforma nada. Establecer una métrica de deformación se vuelve, también, una forma de análisis del estudio de vecindades de alguna condición \mathbf{x}_0 dada para algún sistema de ecuaciones diferenciales a trabajar. En el caso del péndulo simple, se observa cómo después de cada periodo de oscilación, el jet se deforma de manera tal que las soluciones cercanas no cruzan la condición inicial al mismo tiempo que \mathbf{x}_0 ; esto se puede estudiar si pintamos una sección transversal a las soluciones del péndulo que pase por \mathbf{x}_0 y observamos en qué tiempo cruzan las vecindades ésta sección. El TJ ha funcionado muy bien en ver cómo varían las vecindades de las ecuaciones estudiadas en esta sección, y esto nos motiva a desarrollar indicadores sobre la dinámica de los sistemas de ecuaciones en general, aún cuando no se pueda obtener su solución explícita. Es importante notar que no siempre se tendrá la posibilidad de comparar con aspectos cuantitativos como en los ejemplos son las curvas de nivel. Ésto motiva a que dichos indicadores nos ayuden a conocer el espacio fase aún cuando no sepamos todas las cantidades conservadas.

Indicadores Dinámicos del TJ

En los ejemplos del capítulo anterior se ha evaluado la precisión del método de Taylor con y sin el Transporte de Jets (TJ). Hemos estudiado casos hamiltonianos en donde las soluciones a las ecuaciones diferenciales viven en curvas de energía constante sobre el espacio fase. Es importante tener en cuenta que éste es sólo un subconjunto de casos en la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Nuevos elementos aparecen en los campos vectoriales impuestos por la forma más general de (2.1) como órbitas periódicas, atractores, repulsores o atractores extraños [2]. La idea de los indicadores dinámicos radica en encontrar estructuras que nos permitan catalogar a los campos vectoriales, sean hamiltonianos o no, y sacar información relevante acerca de las soluciones al sistema de ecuaciones dado.

Hay que destacar que el TJ no sirve únicamente para dar indicadores dinámicos del espacio fase. Hay realmente muchas cosas que se pueden aprovechar al tener la solución parametrizada por polinomios. Entre éstas están hacer simulaciones de Monte Carlo o hacer variación de los parámetros de las ecuaciones.

§3.1 Un poco de motivación vía Exponentes de Lyapunov a Tiempo Finito

El Transporte de Jets nos permite saber qué pasa con el flujo entre condiciones iniciales vecinas. En este sentido, si se hace un transporte alrededor de \mathbf{x}_0 , sabemos como es el flujo de $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$. Por esto, los Exponentes de Liapunov a Tiempo Finito (ELTF) emergen como una motivación natural a los indicadores que serán propuestos en este capítulo. Un ELTF es, sin entrar en muchos detalles, el promedio en un lapso finito de tiempo de la tasa de máxima expansión entre dos condiciones iniciales cercanas. La construcción que aquí se plantea sigue a Shadden, Lekien y Marsden en [16].

Consideremos dos condiciones iniciales vecinas \mathbf{x}_0 y $\chi_0 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ con flujos $\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)$ y $\phi(T; t_0, \chi_0)$ respectivamente, después de un intervalo T de tiempo, con $\delta\mathbf{x}_0 \ll 1$ y en alguna dirección arbitraria. La diferencia entre los flujos después de T es

$$\delta\mathbf{x}(T) = \phi(T; t_0, \chi_0) - \phi(T; t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{d\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_0 + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}_0\|_2^2). \quad (3.1)$$

Ignorando el término de orden cuadrático en $\delta\mathbf{x}_0$, se puede encontrar la magnitud de la perturbación al tiempo T via la norma estándar

$$\|\delta\mathbf{x}(T)\|_2 = \sqrt{\left\langle \frac{d\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_0, \frac{d\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_0 \right\rangle}. \quad (3.2)$$

La máxima expansión de (3.2), se encuentra en la dirección donde $\delta\mathbf{x}_0$ esté alineada con el eigenvector asociado al máximo eigenvalor de la matriz¹

$$\Lambda(\mathbf{x}_0, T) := \frac{d\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0}^* \frac{d\phi(T; t_0, \mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0}. \quad (3.3)$$

Es decir,

$$\max_{\delta\mathbf{x}_0} \|\delta\mathbf{x}(T)\| = \sqrt{\lambda_{max}(\Lambda) \|\delta\tilde{\mathbf{x}}_0\|^2} = e^{\sigma(\mathbf{x}_0, T)|T|} \|\delta\tilde{\mathbf{x}}_0\|,$$

con $\delta\tilde{\mathbf{x}}_0$ en la dirección del eigenvector asociado a $\lambda_{max}(\Lambda)$ y

$$\sigma(\mathbf{x}_0, T) := \frac{1}{2|T|} \ln \lambda_{max}(\Lambda(\mathbf{x}_0, T)) \quad (3.4)$$

el máximo ELTF integrado a tiempo T asociado al punto que en t_0 pasa por \mathbf{x}_0 . Como se mencionaba al principio de la sección, $\sigma(\mathbf{x}_0, T)$ nos da la tasa de máxima expansión de \mathbf{x}_0 promediada en el intervalo T . Calcular el ELTF es fácil con el TJ ya que, por la parametrización polinomial de $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$, $\lambda(\mathbf{x}_0, T)$ se puede calcular directamente usando jets de orden $M = 1$. Con esto, se puede estudiar el espacio fase de una campo vectorial dado ya que diferentes valores de σ representan diferentes tasas de expansión para la misma escala temporal.

La Figura 3.1 presenta al campo escalar de los ELTF calculados a partir de (3.4) para el péndulo simple descrito por (2.27). Es interesante ver cómo la separatrices del péndulo coinciden con los valores más grandes de σ en el espacio fase. En [15], se hace un análisis profundo para detectar diferentes regiones en el espacio fase, que ahí nombra como Estructuras Lagrangianas Coherentes, motivado en la parcelas lagrangianas de la mecánica de fluidos. Como se muestra en la referencia anterior, no necesariamente el campo escalar

¹Esta matriz se suele conocer como el tensor (derecho) de Cauchy-Green.

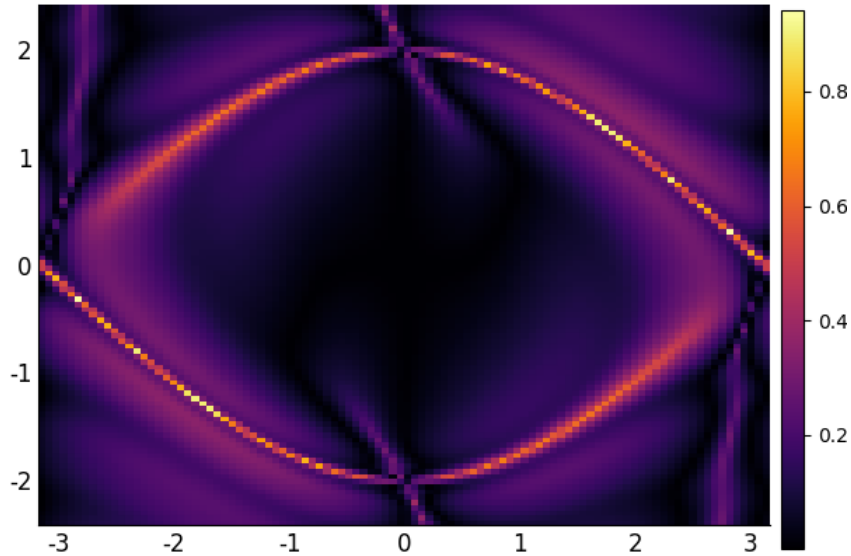


Figura 3.1: Campo escalar de los ELTF calculada con (3.4) para el péndulo de (2.27) en una retícula de 100 puntos por lado, después de un periodo, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$ y orden máximo de la expansión $M = 25$.

de ELTF va a encontrar separatrices, sino puntos cuyas soluciones vecinas se alejan rápidamente en el tiempo; esto puede indicar, sí, separatrices, pero también caos, o grandes gradientes de velocidad en el espacio fase.

§3.2 Tamaño máximo de las vecindades

Los ELTF son una buena herramienta para ver la tasa de expansión de la variación entre dos condiciones vecinas. Esto es una buena motivante para el Transporte de Jets, ya que no se tiene, a priori, la restricción de la linealidad que se tiene en el caso anterior. Lo único que se hizo para adaptar el TJ al campo de ELTF fue tomar un desarrollo a primer orden de las soluciones de un campo vectorial dado. Sin embargo, si las expansiones de los polinomios son de orden $N > 1$, entonces las deformaciones en las vecindades de \mathbf{x}_0 exhibirán términos no lineales para cada término del flujo y, así, se puede obtener información más precisa con los indicadores pertinentes². Intuitivamente, entre mayor sea el orden de expansión de los jets, mejor será la aproximación a la solución real en las vecindades de \mathbf{x}_0 y más grandes pueden ser las variaciones respecto a \mathbf{x}_0 ; sin embargo, no se ha analizado qué tan grandes deben ser dichas variaciones para estar bajo una tolerancia impuesta.

²La Figura 2.8 es un buen ejemplo de cómo no siempre las deformaciones lineales son suficientes si la variación es suficientemente grande.

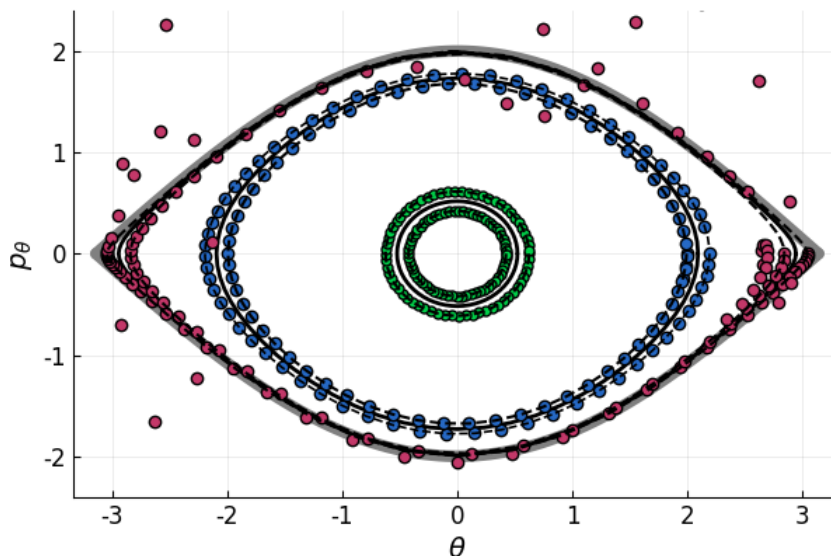


Figura 3.2: Evaluación del TJ para $\xi = (\pm 0.1, 0)^T$ en un periodo del péndulo simple en tres distintas secciones para una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$, jets de orden $M = 4$ y expansión de orden $N = 24$. Las integraciones nominales de $\mathbf{x}_0 \pm \xi$ se representan con las curvas negras no sólidas, mientras que la integración para \mathbf{x}_0 son las curvas negras sólidas. En verde: $\mathbf{x}_0 = (\pi/6, 0)^T$, En azul: $\mathbf{x}_0 = (2\pi/3, 0)^T$ y En rosa: $\mathbf{x}_0 = (15\pi/16, 0)^T$.

Los coeficientes de la expansión de $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$ dependen de qué tan grandes son las variaciones de las vecindades de la condición tomada para el flujo. La Figura 3.2 muestra cómo para la misma variación $\xi = (\pm 0.1, 0)^T$ el transporte no siempre se comporta de la manera. Más cerca de la separatriz, las evaluaciones se parecen muy poco a flujo real. Así, una forma de controlar qué tan grandes pueden ser las variaciones alrededor de \mathbf{x}_0 es acotar la contribución del último término a una tolerancia dada; es decir,

$$a_M^{(n)} \xi_{max}^M \leq \epsilon_{jet}$$

donde $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi) = P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi) = \sum_{|m|=1}^M a_m^{(n)} \xi^m$, con $a_m^{(n)}$ el máximo coeficiente $m = \|\mathbf{m}\|_1$ del jet al tiempo t_n .

Se busca controlar el máximo de estos coeficientes, de modo que

$$\xi_{max} = \min_{|m|=M} \left(\frac{\epsilon_{jet}}{a_m^{(n)}} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (3.5)$$

es el radio máximo que la vecindad $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ puede tomar para estar debajo de la tolerancia impuesta.

Con esto se establece qué tan grandes pueden ser las variaciones de \mathbf{x}_0 sin que las deformaciones del jet repercutan de manera drástica en las soluciones evaluadas. Esta es una

manera de establecer una frontera a las vecindades que se puedan tomar alrededor de \mathbf{x}_0 al aplicar el TJ.

La sección 2.2.2 muestra cómo la dinámica del campo vectorial exige que las deformaciones de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ sean muy grandes y, como se observó en la Figura 2.14, después de cierto tiempo la energía deja de conservarse, lo cual implica que la solución ya no obtenida con el TJ ya no es una buena aproximación de la solución real. Visto de otro ángulo, la vecindad en la que se evaluó era demasiado grande para ser correctamente representada por la parametrización de las soluciones.

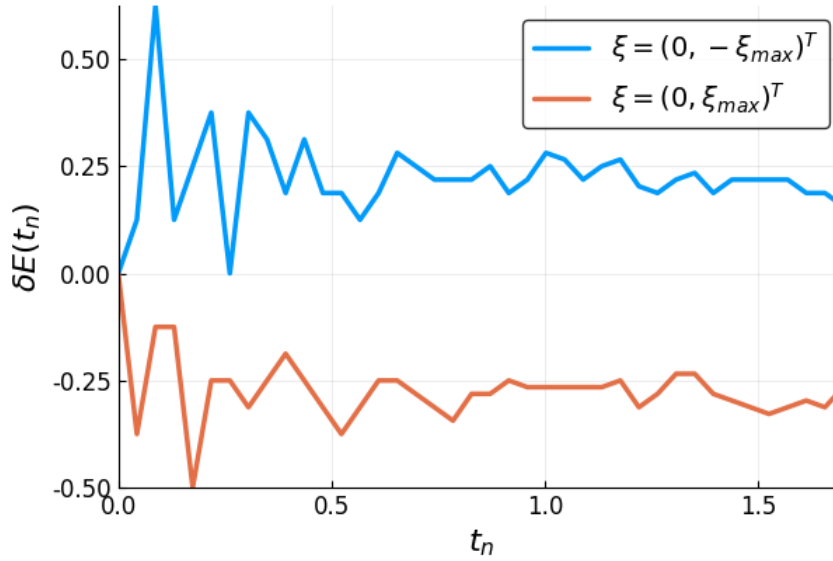


Figura 3.3: Diferencia de energía $\delta E(t_n) = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (H(\mathbf{x}(t_n)) - H(\mathbf{x}_0))$ para el sistema (2.29) con jets de orden $M = 16$ evaluados en $\xi_{max} = 0.0235$, el cual se calculó con $\epsilon_{jet} = 10^{-14}$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$, orden de expansión $N = 25$ y 40 pasos temporales de $t_0 = 0$ a $t_{max} = 1.7$.

En la Figura 3.3 retomamos al sistema (2.29) que, en su momento, vimos cómo la energía divirgió. Ahora podemos ver que, al establecer una tolerancia $\epsilon_{jet} = 10^{-14}$, las variaciones de energía para ambos casos $\pm \xi_{max}$ son más pequeñas que $\epsilon_{machine} = 2.22 \times 10^{-16}$. Esto implica que establecer un tamaño máximo de las vecindades reduce drásticamente el error de las soluciones calculadas. Esto, sin embargo, tiene un costo relativamente alto, ya que $\xi_{max} = 0.0235 \ll 0.1$, donde 0.1 fue la variación respecto a \mathbf{x}_0 que se había escogido arbitrariamente en la sección 2.2.2.

ξ_{max} depende fuertemente de la tolerancia ϵ_{jet} escogida y de la condición inicial en donde se busque saber la variación máxima posible. En general, entre más se deforme el jet con la evolución del flujo, menores serán las vecindades en las que las evaluaciones de $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0 + \xi)$ queden debajo de ϵ_{jet} . Con esto en mente, el tamaño máximo de la vecindad puede servir como un indicador similar a los ELTF, ya que es sensible a la separación entre

condiciones iniciales cercanas. El tamaño de vecindad va a detectar grandes gradientes de velocidades, presencia de separatrices en el espacio fase y regiones de caos en órdenes no lineales de la vecindad de las soluciones. Se muestra en la Figura 3.4 cómo $\phi(t; t_0, \mathcal{U}_{\mathbf{x}_0})$ consta de una $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ considerablemente más pequeña que en la Figura 2.11.

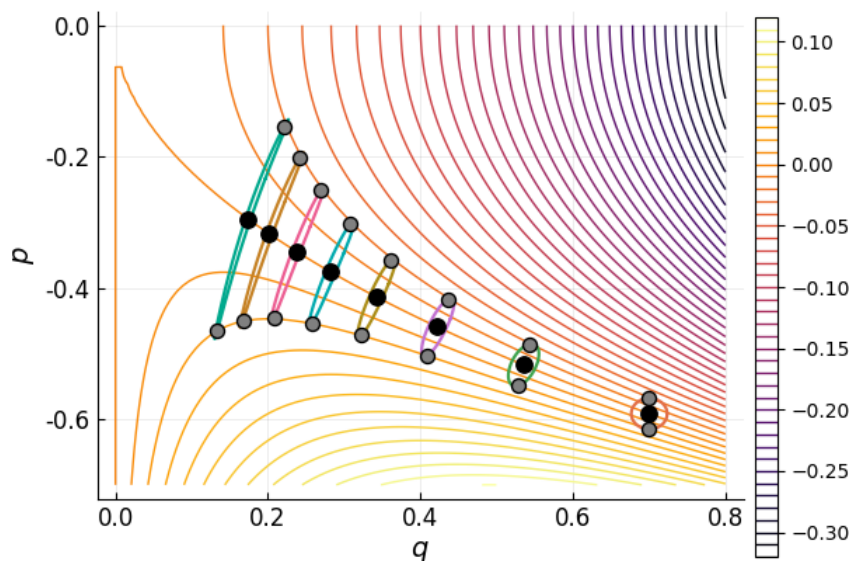


Figura 3.4: Solución para (2.29), con condición inicial sobre la separatriz, donde $q_0 = 0.7$. Aquí, los jets son de orden $M = 16$, en 8 pasos de integración desde $t_0 = 0$ hasta $t_{max} = 1.7$, evaluados para $\xi_{max} = 0.025$. Se utilizó tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$ y orden de la expansión $N = 25$. En gris están las soluciones a $\mathbf{x}_0 \pm \xi_{max}$ sin utilizar TJ. La tolerancia para ξ_{max} es de $\epsilon_{jet} = 10^{-5}$.

Dicho lo anterior, y a modo de comparar con los ELTF desarrollados previamente, tomemos el caso del péndulo simple, que tiene una separatriz que divide la zona en donde el péndulo oscila respecto a un punto de equilibrio (“rotación”) y la zona donde el péndulo completará periodos completos de oscilación (“libramiento”). A diferencia de la Figura 3.1, la Figura 3.5 alcanza sus mayores valores en el centro, que es donde las velocidades del campo vectorial son menores y, en cambio, en los valores de la separatriz, se alcanzan los mínimos valores para ξ_{max} , ya que es donde los jets sufren mayores deformaciones. Sin embargo, esta figura nos da información equivalente a los ELTF, ya que, cualitativamente, presenta la misma información y nos indica sobre la presencia de la separatriz. De hecho, si las no linealidades de ξ_{max} no contribuyen de manera importante al cálculo de ésta, entonces $\xi_{max}(\mathbf{x}_0, T) \propto \frac{1}{\sigma(\mathbf{x}_0, T)}$.

§3.2.1 Tasa de expansión y contracción

Otra forma de obtener información sobre los flujos es viendo la tasa de deformación de los jets propagados en el espacio fase. La ventaja de esto sobre el campo escalar de ELTF o del

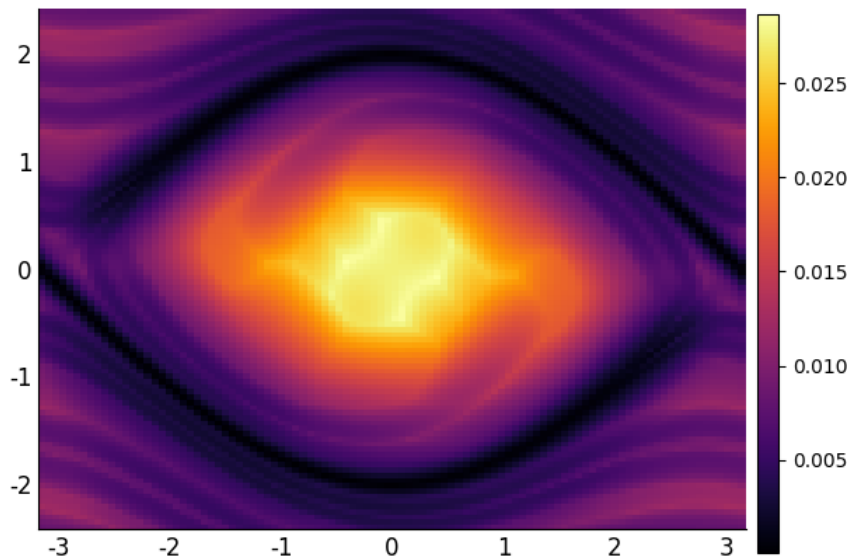


Figura 3.5: Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} para el péndulo de (2.27) en una retícula de 60 puntos por lado, después de un periodo, con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$ y orden máximo de la expansión $N = 25$.

tamaño máximo de vecindades es que aquí es posible saber **en qué dirección** se tienen la mayor y menor deformación respecto a un punto en el espacio fase. Este indicador se relaciona con el espectro de Lyapunov, que no es más que el conjunto de eigenvalores λ_i obtenidos por las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1})$. El espectro de Lyapunov nos dice cómo crece o se contrae la aproximación lineal de las soluciones bajo un cambio invertible de coordenadas. Las **tasas de expansión y contracción** de vecindades del flujo $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ (ζ_+ y ζ_- , respectivamente) nos dicen cuáles son la máxima y mínima separación de \mathbf{x}_0 con una variación ξ de radio $|\xi(\theta)| = \xi_{max}$.

Para obtener dicho indicador se hace el TJ del orden M deseado integrando hasta $t = t_n$, se obtiene el radio máximo de la vecindad con el método de la sección anterior y se evalúa la frontera de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ en $P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi(\theta))$. Una vez evaluada, se encuentra el ángulo de máxima (mínima) separación

$$\theta_+(\mathbf{x}_0) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi(\theta)) - P_{n, \mathbf{x}_0}(0)\| \quad (3.6)$$

y se calcula

$$\zeta_{\pm}(\mathbf{x}_0) = \frac{\|P_{n, \mathbf{x}_0}(\xi(\theta_{\pm})) - P_{n, \mathbf{x}_0}(0)\|}{\xi_{max}}. \quad (3.7)$$

En el caso de un grado de libertad, como los ejemplos hasta ahora planteados, se ha parametrizado dicha frontera con $\xi(\theta) = \xi_{max} (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Evidentemente no se puede evaluar la frontera de $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ en un continuo de puntos en la computadora, así que se plantean dos maneras de mejorar la precisión sobre dichos máximos y mínimos:

- Aumentar el número de puntos con los cuales se evalúa $\delta\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$
- Encontrar θ_{\pm} de los puntos disponibles y luego aplicar el método de Newton-Rapson con P_{n,\mathbf{x}_0} .

Se pueden encontrar θ_{\pm} y ζ_{\pm} para toda una rejilla de puntos y obtener dos campos vectoriales y dos escalares, respectivamente. Los campos vectoriales indican, para cada punto, la dirección de mayor y menor separación de la condición \mathbf{x}_0 dada; los campos escalares indican la magnitud de esto último. En la Figura 3.6 se pueden ver ambos campos encimados para el péndulo simple donde, para cada punto de la rejilla, hay un vector en la dirección de máxima (mínima) separación y en color se indica la magnitud de dicha separación.

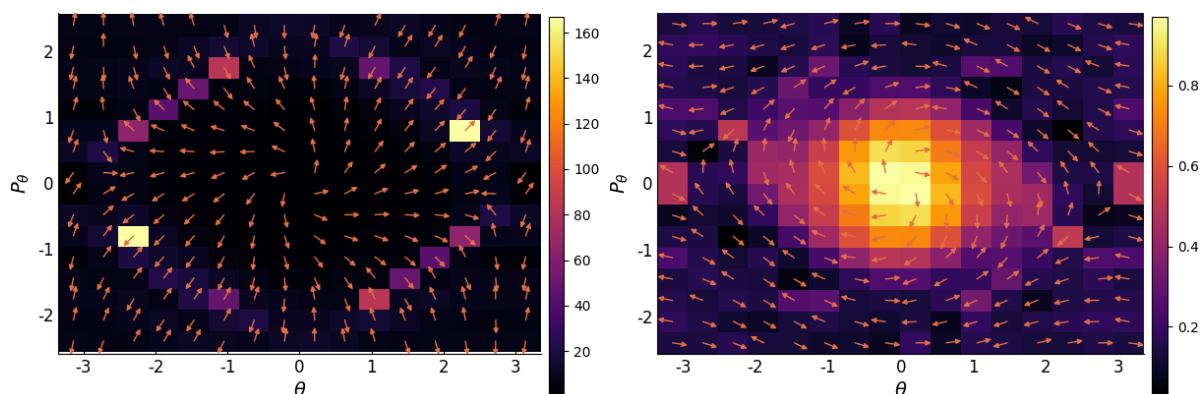


Figura 3.6: Campos vectoriales dados por $(\cos(\theta_{\pm}(\mathbf{x}_0)), \sin(\theta_{\pm}(\mathbf{x}_0)))^T$ sobre los campos escalares $\zeta_{\pm}(\mathbf{x}_0)$ para el péndulo simple, en rejillas de 15×15 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 3$ y orden de la expansión $N = 25$. *Izquierda:* Campos dados por $\theta_+(\mathbf{x}_0)$ y $\zeta_+(\mathbf{x}_0)$. *Derecha:* Campos dados por $\theta_-(\mathbf{x}_0)$ y $\zeta_-(\mathbf{x}_0)$.

Es curioso ver que, para los campos escalares de ζ_{\pm} , se detecta la presencia de la separatriz en un modo similar que en las dos subsecciones anteriores. De hecho, ζ_{\pm} puede utilizarse también como un indicador de separatrices, caos y grandes gradientes de velocidad. La Figura 3.7 nos muestra una versión más refinada de los campos escalares correspondientes.³

Los indicadores desarrollados hasta ahora en este capítulo han sido tomados del análisis que hace Daniel Pérez-Palau en sus artículos. Éstos fueron replicados en esta tesis con el propósito de hacer una exploración un poco más profunda de dichas cantidades. Además, éstos se utilizarán en el capítulo de resultados. De aquí hasta el final del capítulo, los indicadores propuestos ya no son incluidos en el estudio de Pérez-Palau y son contribución propia a las aplicaciones del Transporte de Jets.

³Se toma la raíz cúbica de ζ_{\pm} para achicar la diferencia entre los valores máximos y mínimos y que la imagen sea más legible.

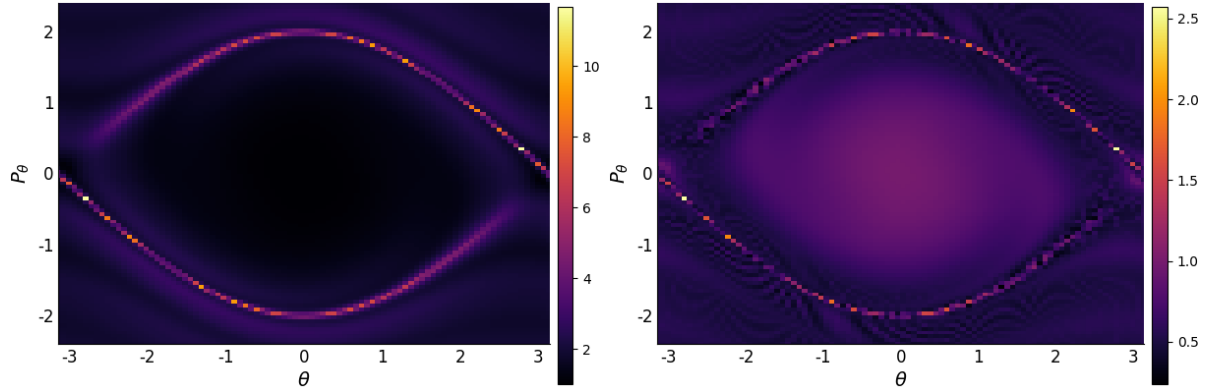


Figura 3.7: Campos escalares $(\zeta_{\pm}(\mathbf{x}_0))^{1/3}$ para el péndulo simple, en rejillas de 90×90 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 3$ y orden de la expansión $N = 25$. Se toma la raíz cúbica para hacer más clara la imagen. *Izquierda:* Campo escalar $\zeta_+(\mathbf{x}_0)$. *Derecha:* Campo escalar $\zeta_-(\mathbf{x}_0)$.

§3.3 Formas Simplécticas

Consideremos la siguiente función

$$H : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

que define al hamiltoniano, cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Si definimos $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (x_1, \dots, x_{2d})^T$, entonces

$$\dot{x}_i = \omega_{i,j} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad (3.8)$$

donde

$$\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

es una matriz de $2d \times 2d$, $\mathbf{0}$ es una matriz de ceros de $d \times d$ e \mathbf{I} es la matriz identidad de $d \times d$. Notemos que (3.9) cumple

$$\begin{aligned}\omega^2 &= -\mathbf{I} \\ \omega^T &= -\omega\end{aligned}\tag{3.10}$$

para cualquier d .

Definición 3.3.1 Sea ω una matriz que cumple las propiedades (3.10). Se dice que una matriz g es **simpléctica** si

$$g^T \omega g = \omega.\tag{3.11}$$

Las matrices que cumplen la definición anterior forman un **grupo simpléctico** denotado $Sd(d)$, que son un caso particular de los grupos de Lie.

Los **grupos de Lie** son grupos cuyos elementos dependen de un número finito de parámetros, i.e., $g = g(\eta) = g(\eta_1, \dots, \eta_N)$. Dicho esto, y como se menciona en [17], para los cálculos se suele escoger una base para operar dichas matrices y, para transformaciones infinitesimales del espacio fase, éstas toman la forma

$$g(\delta\eta) := \mathbf{1} + \delta\eta\mathbf{T},\tag{3.12}$$

con $\{T_1, \dots, T_N\}$ un conjunto de rotaciones⁴ sobre el espacio fase.

Notemos que si al grupo de rotaciones (3.12) le imponemos la condición (3.11) de simplecticidad

$$(\mathbf{1} + \delta\eta\mathbf{T})^T \omega (\mathbf{1} + \delta\eta\mathbf{T}) = \omega \implies \omega + (\delta\eta\mathbf{T})^T \omega + \omega \delta\eta\mathbf{T} + \cancel{(\delta\eta\mathbf{T})^T \omega \delta\eta\mathbf{T}}^{\mathcal{O}(\|\delta\eta\mathbf{T}\|^2)} = \omega,$$

obtenemos una forma explícita para que éste sea simpléctico

$$(\delta\eta\mathbf{T})^T \omega + \omega \delta\eta\mathbf{T} = \mathbf{0}.\tag{3.13}$$

En caso de tener un hamiltoniano $H(\mathbf{x})$, basta darse cuenta que

- $H(\mathbf{x})$ es, al menos, $\mathcal{C}^2(\mathcal{M})$; esto es, $\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_i}$.
- Los generadores de las transformaciones infinitesimales del sistema de EDO (2.1) están dadas por $A_{i,j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$. $A_{i,j}(\mathbf{x})$ son los elementos de matriz de $A(\mathbf{x})$, la cual se conoce como **matriz de estabilidad** del sistema.

⁴Dichas rotaciones representan las deformaciones infinitesimales de las transformaciones de g .

- La matriz de estabilidad puede representarse en términos de ω como $A(\mathbf{x}) = \omega \Xi(\mathbf{x})$, donde $\Xi(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ es la **matriz hessiana** o matriz de segundas derivadas de H .
- Como H es $\mathcal{C}^2(\mathcal{M})$ entonces Ξ es simétrica y, por tanto, $\Xi = \Xi^T$.

Con las observaciones anteriores podemos ver que

$$A(\mathbf{x})^T \omega + \omega A(\mathbf{x}) = \Xi(\mathbf{x})^T \omega \overset{\mathbf{I}}{\omega} + \omega \overset{-\mathbf{I}}{\omega} \Xi(\mathbf{x}) = \Xi(\mathbf{x})^T - \Xi(\mathbf{x}) = 0.$$

Así, cualquier sistema hamiltoniano es un sistema simpléctico y cumple

$$A^T \omega + \omega A = 0 \tag{3.14}$$

Regresemos, como siempre, al caso del péndulo simple. Sabemos, por (2.26), que es un sistema hamiltoniano y, por tanto, debe de cumplir (3.14). La matriz de estabilidad de éste⁵ está dada por

$$A_{pend}(\theta, p_\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} A_{pend}^T \omega + \omega A_{pend} &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

probando “a mano”, que es un sistema simpléctico. Sin embargo, la matriz de estabilidad también se calculó a mano, y ese es un proceso que la construcción polinomial del Transporte de Jets nos puede ahorrar. Dado que parametrizamos las vecindades de la condición inicial vía $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0 + \xi = P_{0,\mathbf{x}_0}(\xi)$, si evaluamos $P_{0,\mathbf{x}_0}(\xi)$ en el campo vectorial f obtendremos la parametrización de éste alrededor de \mathbf{x}_0 y, como la evaluación es un vector de polinomios en ξ , se puede obtener la matriz de estabilidad cuyos elementos son $A_{i,j}(\xi) = \frac{\partial f_i(P_{0,\mathbf{x}_0=(0,0)}(\xi))}{\partial \xi_j}$.

Ahora, el problema de probar la simplecticidad de esta manera es que la expansión $P_{0,(0,0)}(\xi)$ es una expansión finita y no representa necesariamente a $f(\xi)$. Sin embargo, resulta ser que si un sistema es hamiltoniano, el correspondiente sistema dado por la expansión de sus funciones en series de Taylor hasta orden $M < \infty$ también lo es.

⁵Se toma por simplicidad y sin pérdida de generalidad $g = m = l = 1$.

Teorema 3.3.2 Sea

$$\begin{aligned} H : \mathcal{M} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\rightarrow H(q, p) \end{aligned}$$

una función escalar que define al sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = f_1(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = f_2(q, p). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si f_i es $\mathcal{C}^\omega(\mathcal{M}) \forall i$, entonces $\exists! \mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que define a

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = P_{f_1}^M(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = P_{f_2}^M(q, p) \end{aligned}$$

con $P_{f_i}^M(q, p)$ el desarrollo de Taylor de orden M de f_i .⁶

Dem Como f_i es $\mathcal{C}^\omega(\mathcal{M}) \forall i$, pueden expresarse como

$$\begin{aligned} f_1(q, p) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} q^i p^j \\ f_2(q, p) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{i,j} q^i p^j. \end{aligned}$$

Así, por (3.15), resolvemos $H(q, p)$ integrando

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \int f_1(q, p) dp = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{a_{i,j}}{j+1} q^i p^{j+1} + \ell_1(q) \\ H(q, p) &= - \int f_2(q, p) dq = - \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{b_{i,j}}{i+1} q^{i+1} p^j + \ell_2(p) \end{aligned}$$

encontrando la relación

$$\frac{a_{i+1,j}}{j+1} = -\frac{b_{i,j+1}}{i+1}$$

⁶El teorema es generalizable para $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. La demostración queda como ejercicio para el lector.

y la forma explícita de ℓ_i

$$\ell_1(q) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{i,0}}{i+1} q^i$$

$$\ell_2(p) = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{0,i}}{i+1} p^i.$$

Como todo lo anterior es cierto término a término, podemos truncar a cualquier orden $M < \infty$ y construir \mathcal{H} con las expansiones truncadas de $P_{f_1}^M(q, p)$ y $P_{f_2}^M(q, p)$. ■

Corolario 3.3.3 *Si H define un sistema hamiltoniano, entonces \mathcal{H} es simpléctico.*

Así, como sabemos que los ejemplos construidos hasta ahora vienen de un hamiltoniano $H(q, p)$, entonces la expansión polinomial $f(P_{0,(0,0)}(\xi))$ define una matriz de estabilidad simpléctica.

Otra forma de ver la simplecticidad de un sistema es usando directamente (3.11) e interpretando la matriz g . Hay una visión geométrica que plantea Arnold [14] en su capítulo de variedades simplécticas, donde una estructura simpléctica representa la conservación de flujo dadas las variaciones respecto éste en el espacio fase. De este modo, la matriz g se puede representar con el jacobiano de $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ que representa dichas variaciones y, para cualquier tiempo t de la trayectoria, un sistema es simpléctico cumple

$$J(\phi(t))^T \omega J(\phi(t)) = \omega \quad \forall t. \quad (3.16)$$

tal como se propone en la sección 42 de dicho capítulo del Arnold.

Esta forma de ver la simplecticidad es una mejor opción para ver qué tan buena es la integración de un sistema Hamiltoniano dado. Como el TJ parametriza las vecindades de una trayectoria en el espacio fase, se puede obtener fácilmente el jacobiano para cada punto de ésta, y comprobar la simplecticidad de los sistemas se vuelve un proceso bastante directo una vez obtenida la solución. En este sentido, además de cualquier constante de movimiento que pueda tener un sistema, éste es un indicador de qué tan buena es la integración siempre que se tenga un sistema simpléctico.

La Figura 3.8 muestra la variación de la cantidad $\varsigma(t)$ para el péndulo simple en términos de $\epsilon_{machine}$. Ésta se define como

$$\varsigma(t) = \|J(\phi(t))^T \omega J(\phi(t)) - \omega\|_{\infty}, \quad (3.17)$$

y no es más que el máximo valor absoluto de los elemento de matriz de (3.16). ς es una forma escalar de representar la simplecticidad del sistema para poder visualizarlo gráficamente para cada paso temporal.

Podemos observar en dicha figura un comportamiento browniano, similar a como pasa con la energía en los ejemplos de sistemas hamiltonianos planteados hasta ahora.

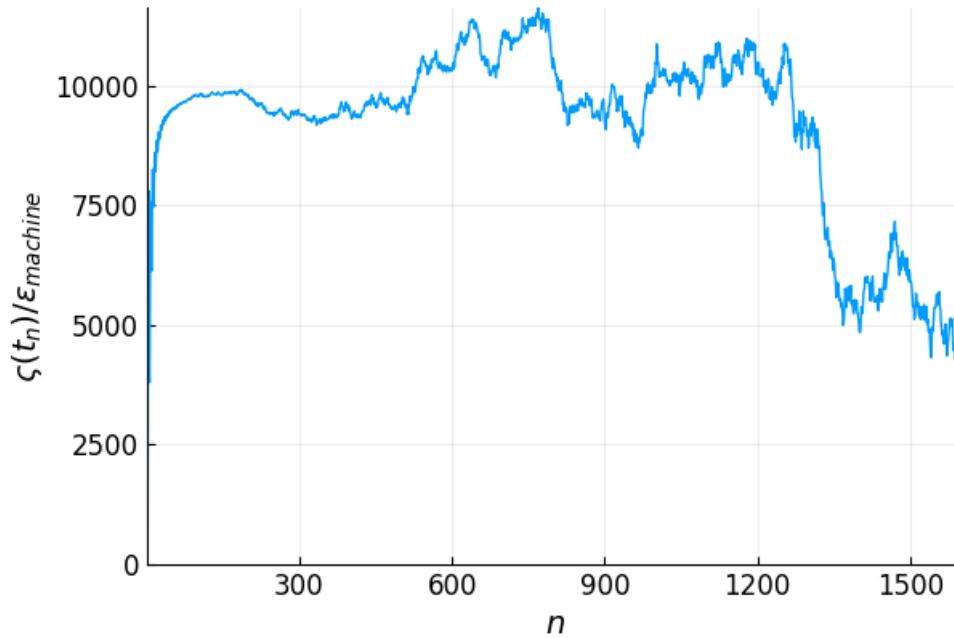


Figura 3.8: Representación escalar de la simplecticidad del péndulo simple con condición inicial $(\pi/2, 0)^T$ para 200 periodos (1600 pasos de integración) con orden del jet $M = 2$, orden de la expansión $N = 24$ y tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-10}$.

§3.4 Variación de parámetros

El TJ nos permite no sólo parametrizar las vecindades de \mathbf{x}_0 en un campo vectorial dado sino también los parámetros que definen al sistema.

Tomemos, por ejemplo, al oscilador armónico dado por

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (3.18)$$

con hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{1}{2} (y^2 + \omega^2 x^2), \quad (3.19)$$

con $y = \dot{x}$ y $\omega \in \mathbb{C}$.

Complejificando el dominio, sabemos la solución

$$x_{\mathbb{C}}(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t},$$

donde, si $\omega^2 > 0$, entonces la proyección a los reales es

$$x(t) = a \cos(t) + b \sin(t) \quad (3.20)$$

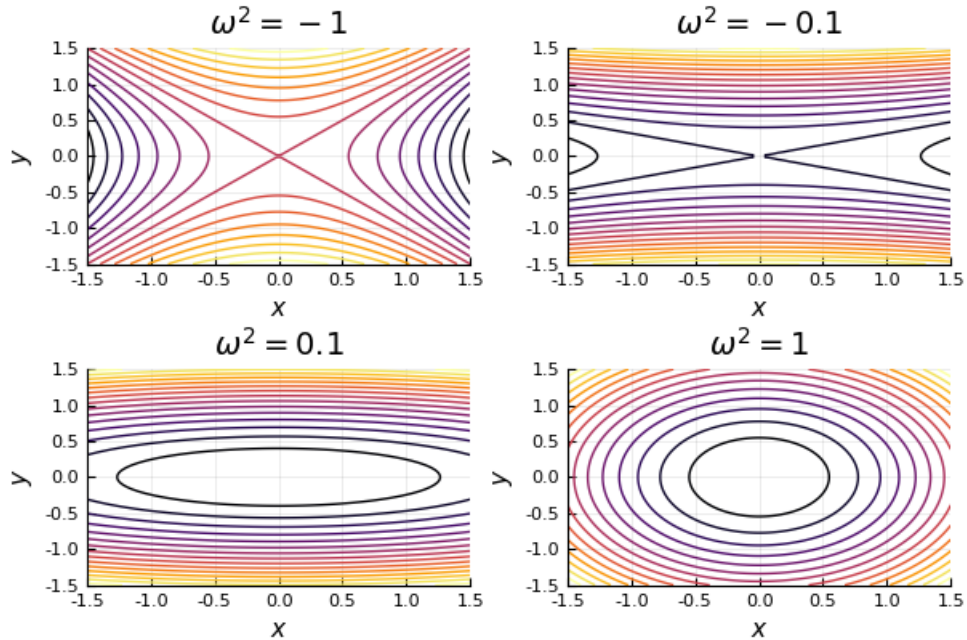


Figura 3.9: Curvas de nivel dadas por (3.19) para diferentes valores de ω^2 .

y, si $\omega^2 < 0$, la proyección es

$$x(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}. \quad (3.21)$$

Observamos en la Figura 3.9 cómo las curvas de nivel cambian para distintas ω^2 . En particular, observamos que las soluciones cambian de topología cuando ω^2 cambia de signo. Con esto, pensar en una *parametrización del parámetro* resulta una herramienta poderosa en el estudio de este tipo de sistemas ya que, por un lado, puede funcionar como un indicador para cambios de topología o bifurcaciones de las soluciones y, por otro, ayudar a encontrar conjuntos de soluciones cuando los parámetros no se conocen con exactitud.

Para hacer esto con el Transporte de Jets, basta con incluir al parámetro o los parámetros que se quieran variar en el sistema de ecuaciones como $\dot{\lambda} = 0$, donde λ es el conjunto de parámetros que se quieren variar. En este ejemplo el sistema queda como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \\ \dot{\omega}^2 &= 0. \end{aligned}$$

La Figura 3.10 muestra el Transporte de Jets para ω^2 para la condición inicial $\omega^2 = \omega_0^2 + \delta\xi$. En este caso $\omega_0^2 = 0$ y $\delta\xi = \pm 0.5$. Resulta que el TJ sí muestra el cambio de topología dado por el signo de ω^2 . Sin embargo, hay que ver qué tan precisa es la

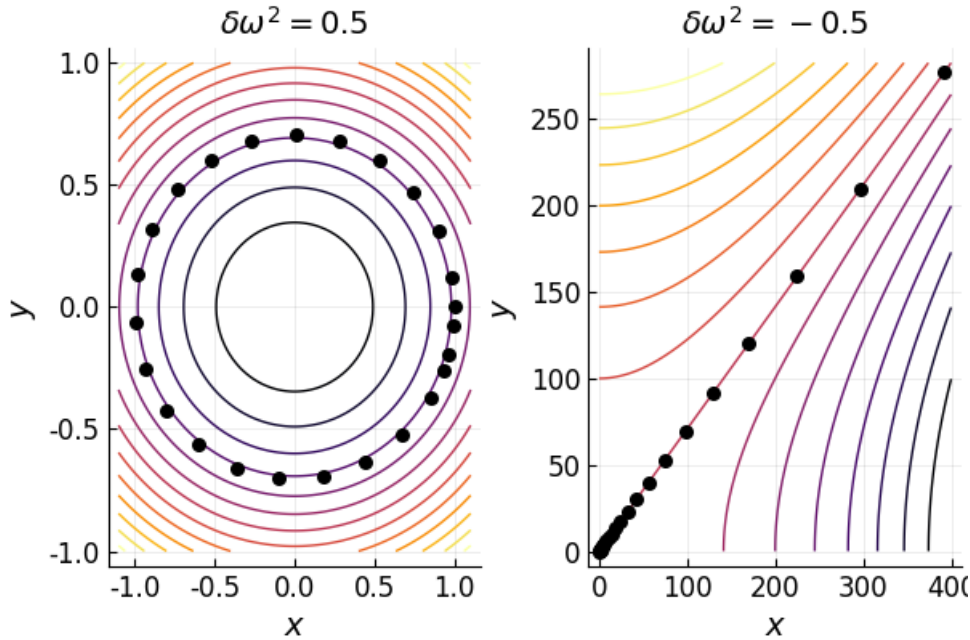


Figura 3.10: Solución para condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ y variación del parámetro para $\delta\omega^2 = 0.5$ en la izquierda y -0.5 en la derecha. $\delta\omega$ es un polinomio de orden 30, y el desarrollo de Taylor para la solución es de orden 24, con tolerancia de 10^{-20} . Son 25 pasos de integración de 0 a 2π .

solución, donde se puede revisar la conservación de la energía al evaluar el hamiltoniano para ambas variaciones.

El flujo conserva la energía cada vez menos conforme pasa el tiempo como se observa en la Figura 3.11; de hecho, la solución que diverge más pierde hasta 15000 epsilons casi al final de la integración. Sin embargo, el error máximo en términos absolutos es de 3.63×10^{-12} , lo cual es bastante aceptable. Notemos que el caso que más diverge en energía coincide con el que más diverge en el espacio fase. Para $\omega^2 > 0$ las variaciones son de apenas $40\epsilon_{mahcine}$, donde este sistema es uno que consta de puros centros.

Los indicadores desarrollados hasta ahora refuerzan el estudio del espacio fase como en los campos escalares y vectoriales de ξ_{max} y θ_{\pm} , permiten tener alternativas al método de Monte Carlo como en la parametrización de parámetros, nos dan formas de evaluar las vecindades en un radio donde el error sea menor a una tolerancia dada y permiten corroborar la simplecticidad de un flujo hamiltoniano. Éstas se utilizarán en un problema específico, el **problema circular de tres cuerpos**, el cual se desarrollará en el siguiente capítulo.

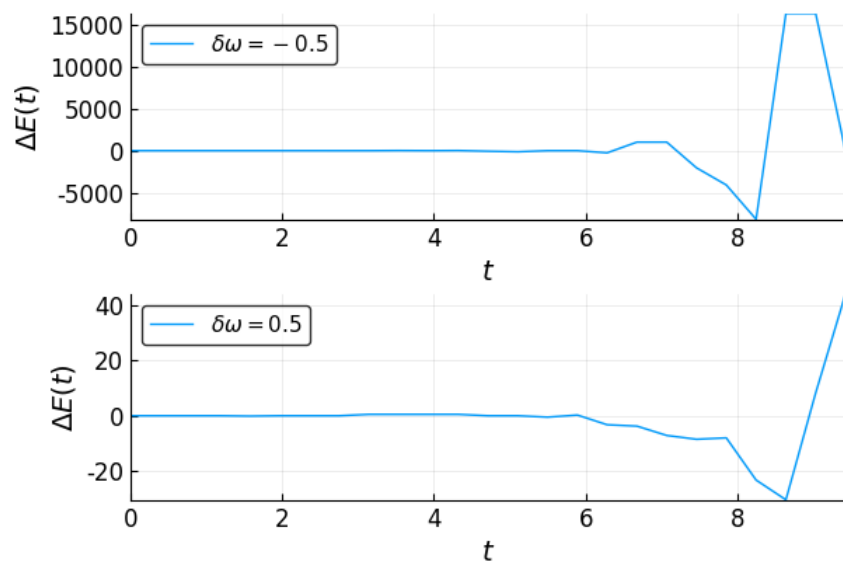


Figura 3.11: Variación $\Delta E = \frac{1}{\epsilon_{machine}} (E(t) - E_0)$ de la energía respecto a la condición inicial para ambas evaluaciones del transporte $\delta\omega < 0$ y $\delta\omega > 0$.

Problema Restringido de Tres Cuerpos

El problema de tres cuerpos interactuando en campos gravitacionales ha sido uno de gran análisis desde hace más de 300 años ya que la dinámica de éste tiene comportamientos que distan de ser obvios. Aún en el caso más simplificado, o sea, el problema circular de tres cuerpos (PC3C), presenta alta sensibilidad a las condiciones iniciales, varios puntos de equilibrio, órbitas periódicas y semiperiódicas y, en general, una rica dinámica. Además, el PC3C tiene únicamente dos grados de libertad, lo cuál permite un estudio y una representación gráfica mucho más clara respecto al caso general. Ésto motiva el uso de las herramientas desarrolladas en el capítulo 3. Para ésto es necesario explorar un poco la estructura del problema; encontrar sus puntos de equilibrio, sus singularidades y las “zonas interesantes” del espacio fase.

El caso general se plantea de manera estándar bajo el potencial gravitacional de Newton entre pares de cuerpos

$$U_{M_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -G \frac{M_1 M_2}{r_{1,2}} - G \frac{M_1 m_3}{r_{1,3}}, \quad (4.1)$$

$$U_{M_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -G \frac{M_2 M_1}{r_{2,1}} - G \frac{M_2 m_3}{r_{2,3}}, \quad (4.2)$$

$$U_{M_3}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -G \frac{m_3 M_1}{r_{3,1}} - G \frac{m_3 M_2}{r_{3,2}}, \quad (4.3)$$

con G la constante de gravitación universal, $\mathbf{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ la posición de la i -ésima partícula, M_i su masa y $r_{i,j} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ la distancia entre las partículas M_i y M_j ¹.

La energía cinética del problema se define de manera usual

$$T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3) = \sum_{i=1}^3 M_i \dot{r}_i^2, \quad (4.4)$$

¹Notemos la simetría $r_{i,j} = r_{j,i}$, aunque $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{j,i}$.

y define un sistema de 6 ecuaciones acopladas dadas por la segunda ley de Newton

$$M_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -GM_i \sum_{j \neq i} \frac{M_j}{r_{i,j}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i,j}, \quad (4.5)$$

con $\hat{\mathbf{r}}_{i,j} = \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}}$ un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}_{i,j}$.

Hasta aquí, ninguna restricción ha sido impuesta, y encontrar simetrías para reducir los grados de libertad no es fácil. Sin embargo, para el problema restringido de tres cuerpos uno supone que una de las partículas es mucho menos masiva que las otras dos y, por tanto, las dos más grandes se mueven como si la tercera no existiera. Vale la pena estudiar primero el caso de dos cuerpos, ver la dinámica entre ellos y luego regresar a la tercer partícula bajo la influencia de estos dos.

§4.1 Problema de dos cuerpos

Dadas que M_1 y M_2 son los cuerpos primarios y m_3 es despreciable, la dinámica de éstos queda definida por

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{M_1 M_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}. \quad (4.6)$$

Como $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = -\hat{\mathbf{r}}_{2,1}$ entonces $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, lo cual es equivalente a la tercera ley de Newton. Se tomará como referencia el capítulo 3 del libro de mecánica analítica de Goldstein [18] para obtener las soluciones de este problema. Por comodidad llamaremos a $\mathbf{r}_{1,2}$ simplemente \mathbf{R} y, en términos de ésta, se puede plantear el problema de Kepler, que describe la aceleración relativa

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{M_1 + M_2}{R^2} \hat{\mathbf{R}} = -\frac{\beta}{R^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad (4.7)$$

con $\beta = G(M_1 + M_2)$. Multiplicando (4.7) por la masa reducida $\gamma := \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ obtenemos las ecuaciones de movimiento de la fuerza relativa de M_1 respecto a M_2 .

El problema de Kepler conserva el momento angular $\mathbf{L} := \mathbf{R} \times \mathbf{p}$, ya que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times \gamma \dot{\mathbf{R}}) = \gamma \dot{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \gamma \ddot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R} \times \frac{\beta}{r^2} \hat{\mathbf{R}} = 0 \quad (4.8)$$

y, por tanto, $\mathbf{L} = \text{constante}$. Así, \mathbf{R} y $\dot{\mathbf{R}}$ son perpendiculares a \mathbf{L} y por tanto, viven en un plano que por comodidad se escoge en xy .

Una mejor descripción del movimiento se puede obtener en coordenadas polares, donde

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

con $z = 0$ en el plano de movimiento.

Haciendo la regla de la cadena obtenemos las expresiones para $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$ y $\ddot{\mathbf{R}}$

$$\mathbf{R} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} = R \hat{R}, \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{R} \cos \theta - R \sin \theta \dot{\theta} \right) \hat{i} + \left(\dot{R} \sin \theta + R \cos \theta \dot{\theta} \right) \hat{j} = \dot{R} \hat{R} + R \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad (4.11)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \left(\ddot{R} - R \dot{\theta}^2 \right) \hat{R} + \left(R \ddot{\theta} + 2 \dot{R} \dot{\theta} \right) \hat{\theta}. \quad (4.12)$$

En este sistema de coordenadas es fácil ver que

$$L = \|\mathbf{L}\| = \left\| \mathbf{R} \times \gamma \dot{\mathbf{R}} \right\| = \left\| \left(R \hat{R} + 0 \hat{\theta} + 0 \hat{k} \right) \times \left(\dot{R} \hat{R} + R \dot{\theta} \hat{\theta} + 0 \hat{k} \right) \right\| = \gamma R^2 \dot{\theta}, \quad (4.13)$$

obteniendo así

$$\dot{\theta}(R) = \frac{L}{\gamma R^2}. \quad (4.14)$$

Con (4.12) podemos replantear (4.7) y obtener las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas

$$R \ddot{\theta} + 2 \dot{R} \dot{\theta} = 0, \quad (4.15)$$

$$\ddot{R} - R \dot{\theta}^2 = -\frac{\beta}{R^2}. \quad (4.16)$$

Notemos que la primera queda resuelta por (4.14) mientras que la segunda, usando que $\dot{R} = \frac{dR}{d\theta} \dot{\theta}$, se convierte en

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dR}{d\theta} \ddot{\theta} - R \dot{\theta}^2 = -\frac{\beta}{R^2},$$

donde

$$\ddot{\theta} = -\frac{2L}{\gamma R^3} \dot{R} = -\frac{2L}{\gamma R^3} \frac{dR}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{2L^2}{\gamma^2 R^5} \frac{dR}{d\theta}.$$

Ésto y (4.14) se sustituyen en (4.16) para obtener

$$\frac{L^2}{\gamma^2 R^4} \left(\frac{d^2 R}{d\theta^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 - R \right) = -\frac{\beta}{R^2}.$$

Finalmente, si hacemos $u(R) := \frac{1}{R}$, se simplifica la ecuación diferencial a

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\beta \gamma^2}{L^2}, \quad (4.17)$$

que no es más que un oscilador armónico con forzamiento constante $\frac{\beta\gamma^2}{L^2}$. Obtenemos explícitamente la solución para u :

$$u(\theta) = \frac{\beta\gamma^2}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

$$\therefore R(\theta) = \frac{L^2}{\beta\gamma^2 (1 + e \cos(\theta - \theta_0))}. \quad (4.18)$$

Ésta es la distancia relativa que tienen M_1 y M_2 en función del ángulo θ . Notemos que (4.18) representa diferentes secciones cónicas en coordenadas polares y depende de la eccentricidad e únicamente.

§4.2 Problema circular de tres cuerpos

Ahora se tomará a la tercer partícula considerando que sea mucho más pequeña que las otras dos, i.e., $m_3 \ll M_2 \leq M_1$. Así, m_3 es ignorada en la dinámica de M_2 y M_1 y, por tanto, la solución para los cuerpos primarios es la desarrollada en la sección anterior. Sólo queda estudiar la dinámica de m_3 en relación a M_1 y M_2 para describir completamente al problema.

Para el caso circular, se toma $e = 0$ y, así, la distancia entre las masas primarias

$$R = \frac{L^2}{\gamma^2\beta} \quad (4.19)$$

es constante.

Con ésto, la velocidad angular también es constante y, con (4.19) en (4.14), se plantea

$$\Omega := \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\beta R}{R^4}} = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{R^3}}. \quad (4.20)$$

Para la dinámica de m_3 conviene establecer un marco de referencia en rotación donde M_1 y M_2 estén en reposo. Dicha rotación tendrá velocidad angular Ω y estará basada en el centro de gravedad entre las dos. En el apéndice B se muestra la transformación para dicho sistema. Específicamente aparecen la aceleración de Coriolis, la aceleración centrífuga, y la aceleración inercial que es cero en este caso, dado que el origen es el centro de gravedad entre M_1 y M_2 . Dichas fuerzas, aunque se llamen ficticias, no aparecen de la nada. Éstas son el resultado de la rotación de las masas primarias alrededor del centro de masa y, por tanto, deberán hacer que el sistema siga siendo conservativo.

Las ecuaciones de movimiento para m_3 en el sistema en rotación son

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (4.21)$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ la distancia de m_3 al centro de gravedad, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (r_1 + r_2, 0, 0)$ la distancia entre M_1 y M_2 y

$$V(r) = \left(-G \frac{M_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} - G \frac{M_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right), \quad (4.22)$$

que se conoce como **pseudo-potencial**, ya que si la velocidad es distinta de cero, la fuerza de Coriolis debe ser considerada para la dinámica de la partícula.

Con el afán de reducir el número de parámetros que definen al problema, trabajaremos en unidades especiales tales que

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= 1 \text{ um}, \\ R = r_2 - (-r_1) &= 1 \text{ ud}, \\ \Omega &= 1 \frac{\text{rad}}{\text{ut}}, \\ \implies G &= 1 \frac{\text{ud}^3}{\text{ut}^2 \cdot \text{um}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Éstas nos permiten además adimensionalizar las ecuaciones de movimiento. Para ésto, es cómodo poner el origen en el centro de masa entre M_1 y M_2 , y a éstas alineadas sobre el eje x , así $CM = (0, 0) = (-M_1 r_1 + M_2 r_2, 0)$ obteniendo $-r_1 = -M_2$ y $r_2 = M_1$, ya dividiendo entre las unidades establecidas en (4.23). Definimos el parámetro de masa

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

con el que podemos replantear todo en términos adimensionales

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 - \mu, \\ M_2 &= \mu, \\ -r_1 &= -\mu, \\ r_2 &= 1 - \mu, \\ G &= 1, \\ \Omega &= 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Así, (4.22) se expresa como

$$V(r) = V(x, y) = -\frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad (4.25)$$

y las ecuaciones de movimiento asociadas a (4.21) son

$$\dot{x} = v_x, \quad (4.26)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad (4.27)$$

$$\dot{v}_x - 2v_y = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}}, \quad (4.28)$$

$$\dot{v}_y + 2v_x = y \left(1 - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}} \right), \quad (4.29)$$

donde todo queda en términos del único parámetro μ y el sistema es únicamente de dos grados de libertad, como se mencionó al principio del capítulo.

Existe una primera integral del sistema si hacemos el producto interno de (4.21) por $\dot{\mathbf{r}}$, que resulta en

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} \\ \implies -\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \int \frac{dV}{dt} = V - C_J \\ \therefore C_J &= V + \frac{1}{2}v^2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con C_J la constante de integración que se conoce como constante de Jacobi o energía de Jacobi el cual será útil para el TJ como parámetro para verificar la precisión en las integraciones.

§4.2.1 Puntos lagrangianos

Aún sin que el problema sea conservativo si no tomamos en cuenta las fuerzas de Coriolis ya sin ésta la energía mecánica no es una constante de movimiento, vale la pena estudiar las curvas de nivel del pseudo-potencial, o curvas de velocidad cero, ya que éste nos dará una buena intuición sobre cómo será la trayectoria de nuestra partícula. De hecho, los puntos de equilibrio seguirán siéndolo cuando se tome el sistema completo, ya que en éstos la velocidad es cero². La Figura 4.1 presenta dichas curvas de nivel, donde se observan tres puntos singulares en el eje alineados a M_1 y M_2 que se suelen llamar L_2, L_1 y L_3 , respectivamente. Otros dos existen para $y \neq 0$ los cuales se conocen como L_4 y L_5 . Éstos cinco reciben el nombre de puntos lagrangianos en honor a los estudios de Lagrange y Euler sobre el tema [19, 20].

²Estos puntos de equilibrio se vuelven órbitas periódicas de velocidad angular constante en el sistema inercial.

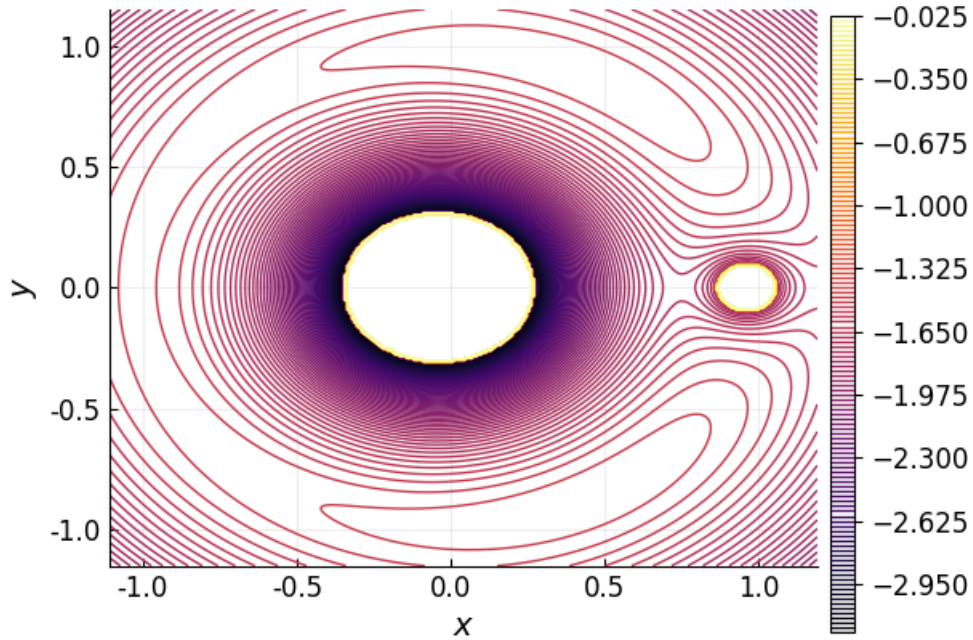


Figura 4.1: Curvas de nivel para el pseudo-potencial $V(x, y)$ con $\mu = \frac{1}{26}$, $R = 1$ y $G = 1$ unidades adimensionales.

Siguiendo el desarrollo de [21, 22], encontraremos dónde están dichos puntos singulares y se hará un análisis de estabilidad de éstos.

Los tres primeros se dan cuando $y = 0$, quedando por resolver únicamente cuándo $\dot{v}_x = 0$. Esto plantea una ecuación de quinto grado en x complicada de resolver analíticamente. Sin embargo, cuando M_1 es considerablemente más grande que M_2 , se puede tomar la aproximación a primer orden de μ y conseguir

$$\begin{aligned}
 L_1 &\approx \left(\left[1 - \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \right] R, 0 \right), \\
 L_2 &\approx \left(R \left[1 + \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \right] R, 0 \right), \\
 L_3 &\approx \left(-R \left[15 \frac{5\mu}{12} \right] R, 0 \right).
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

También se pueden obtener estos valores numéricamente para cualquier μ , pero hace un poco más complicado el análisis de estabilidad ya que no se consiguen en función de μ . Sin embargo, como se observa en la Figura 4.2, para $\mu = \frac{1}{26}$ sí se llega a notar la diferencia.

Para obtener L_4 y L_5 es importante destacar que la fuerza centrífuga es, por definición, radial hacia afuera. En este sentido, en la dirección radial se deben balancear la fuerza centrífuga con la gravitacional. Ésto hace que el balance en la dirección tangencial sea

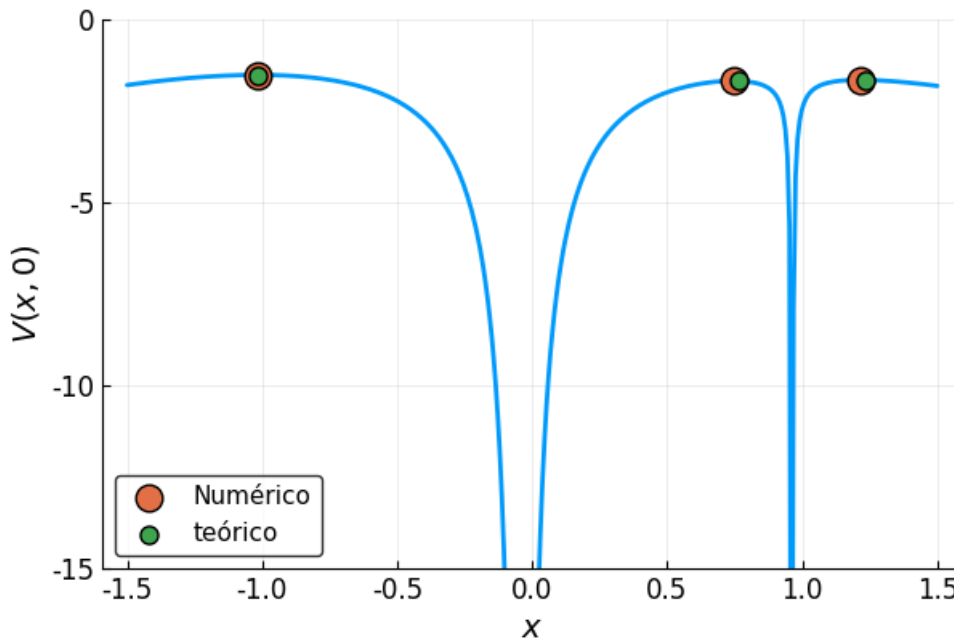


Figura 4.2: Proyección del pseudo-potencial en el eje x para ver sus puntos de inflexión. Aparecen L_1, L_2 y L_3 calculados con (4.31) (verde) y numéricamente (naranja).

debido únicamente a los dos cuerpos primarios interactuando bajo sus campos gravitacionales. Para ésto, se proyecta la fuerza hacia sus direcciones radiales y tangenciales con los vectores $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, y)$ y $\mathbf{r}_{\perp} = (-y, x)$. Así

$$F_{\perp} = \frac{1}{r_{\perp}} \mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{F} = \frac{y}{r_{\perp}} \left(-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_{1,3}^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_{2,3}^3} + \frac{(1-\mu)x}{r_{1,3}^3} + \frac{\mu x}{r_{2,3}^3} \right)$$

$$\therefore F_{\perp} = \frac{\mu(1-\mu)y}{r_{\perp}} \left(\frac{1}{r_{1,3}^3} - \frac{1}{r_{2,3}^3} \right),$$

es decir, la condición para que la componente tangencial de la fuerza se anule es que ambos cuerpos estén a la misma distancia de la partícula m_3 , lo cual tiene sentido ya que el sistema tiene el origen en el centro de masa entre M_1 y M_2 .

Para la componente radial, tenemos que

$$F_{\parallel} = \frac{1}{r_{\parallel}} \mathbf{r}_{\parallel} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r_{\parallel}} \left((x^2 + y^2) - (1-\mu) \left(\frac{(x+\mu)x}{r_{1,3}^3} + \frac{y^2}{r_{1,3}^3} \right) - \mu \left(\frac{(x-1+\mu)x}{r_{2,3}^3} + \frac{y^2}{r_{2,3}^3} \right) \right),$$

pero $r_{1,3} = r_{2,3}$, por lo que lo anterior se simplifica a

$$F_{\parallel} = \frac{x^2 + y^2}{r_{\parallel}} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_{1,3}^3} \right).$$

Encontramos así que $r_{1,3} = r_{2,3} = R$. L_4 y L_5 forman un triángulo equilátero de lado R , cuya base es la distancia entre M_1 y M_2 . Así,

$$L_4 = \left(\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (4.32)$$

$$L_5 = \left(\frac{1-2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (4.33)$$

tal como se ve en la Figura 4.3.

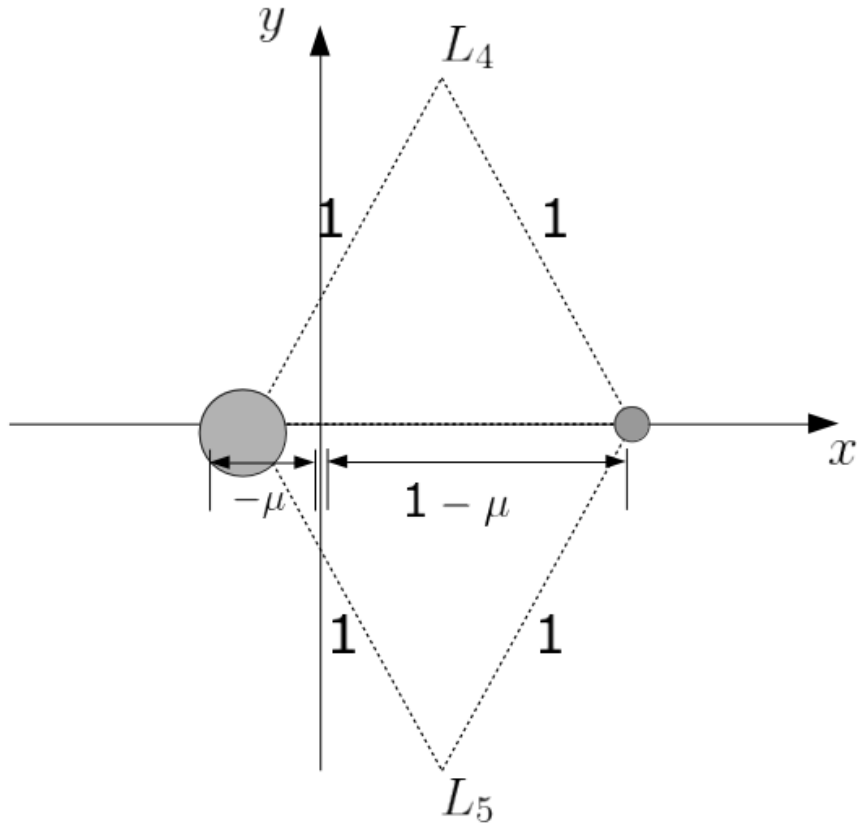


Figura 4.3: Diagrama que muestra la posición de L_4 y L_5 en unidades normalizadas donde $R = 1$, $M_1 + M_2 = 1$.

La estabilidad de éstos puede estudiarse viendo cómo se comportan las ecuaciones de primera variación alrededor de los puntos de equilibrio, tal como se hace en [21]. Para esto basta construir la matriz de estabilidad

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

donde $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y encontrar los eigenvalores de ésta para determinar qué tipo de punto singular se trata. Para este caso

$$A(\mathbf{x}_{L_i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}_{L_i})}{\partial x} & \frac{\partial v_x(\mathbf{x}_{L_i})}{\partial y} & 0 & 2\Omega \\ \frac{\partial v_y(\mathbf{x}_{L_i})}{\partial x} & \frac{\partial v_y(\mathbf{x}_{L_i})}{\partial y} & -2\Omega & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

la cual será evaluada en los puntos lagrangianos \mathbf{x}_{L_i} , donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_{1,3}^3} + 3\frac{(1-\mu)(x+\mu)^2}{r_{1,3}^5} - \frac{\mu}{r_{2,3}^3} + 3\frac{\mu(x-1+\mu)^2}{r_{2,3}^5}, \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_{1,3}^3} + 3\frac{(1-\mu)y^2}{r_{1,3}^5} - \frac{\mu}{r_{2,3}^3} + 3\frac{\mu y^2}{r_{2,3}^5}, \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} = 3y \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_{1,3}^5} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_{2,3}^5} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

con $r_{i,3}$ la distancia a M_i .

Para L_1 , L_2 y L_3 se puede mostrar que son equilibrios inestables sin importar el valor de los cuerpos masivos [23]. De hecho, sustituyendo para L_1 y L_2 se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \\ \sigma_{\pm} &= \pm i\sqrt{2\sqrt{7} - 1}, \end{aligned}$$

mientras que en L_3 obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{3(1-\mu)}{8\mu}}, \\ \sigma_{\pm} &= \pm i\sqrt{7}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$ en ambos casos, lo cual representa sillas en el espacio de configuraciones.

Sustituyendo L_4 y L_5 en (4.35), se obtiene que $\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} = \pm \frac{3}{4}$, $\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} = \pm \frac{9}{4}$ y $\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-2\mu)$, cuyos eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \pm \frac{i}{2} \sqrt{2 - \sqrt{27(1-2\mu)^2 - 23}}, \\ \sigma_{\pm} &= \pm \frac{i}{2} \sqrt{2 + \sqrt{27(1-2\mu)^2 - 23}}. \end{aligned}$$

Estos puntos serán estables si sus eigenvalores son puramente imaginarios, cuya condición se cumple si

$$\begin{aligned} 2 &\geq \sqrt{27(1 - 2\mu)^2 - 23}, \\ 23 &< 27(1 - 2\mu)^2. \end{aligned}$$

Lo primero es equivalente a que

$$\mu \leq \mu_c := \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \approx 0.0385, \quad (4.36)$$

y lo segundo se da siempre que lo primero se cumple³.

Así, vemos explícitamente la condición para la estabilidad de los puntos L_4 y L_5 .

§4.2.2 Curvas de velocidad cero

Un último análisis que vale la pena hacer son las curvas de velocidad cero (CV0). Éstas son el punto máximo de retorno para una energía dada en el espacio de configuraciones. Este estudio se guía de las notas de Mireles en [23]. Podemos pensar, como analogía, que para una energía potencial dada, una partícula en caída libre no podrá rebotar más alto que cierta altura h de la cual empezó. De hecho, justo cuando la partícula alcance dicha altura, su velocidad será idénticamente cero y volverá a caer.

Para encontrar estas curvas en el PC3C, se impone cierta energía de Jacobi C_J y se traza la curva tal que la velocidad sea cero, i.e.,

$$(x, y, 0, 0) = \left\{ V \mid V = \frac{1}{2} C_J \right\}.$$

Como en el ejemplo de caída libre, todas las trayectorias estarán atrapadas “debajo” de esta curva y restringe las secciones en las que m_3 se puede mover.

La Figura 4.4 muestra algunas de estas curvas con constantes de Jacobi alrededor de L_1 , L_2 y L_3 y algunas variaciones respecto a éstos. Al ser puntos tipo silla, dividen al espacio en regiones. El caso más interesantes está entre las energías de L_1 y L_2 , ya que entre éstas se pueden diseñar condiciones iniciales que se queden siempre orbitando entre los dos planetas, o que se quede sólo en uno de ellos.

La exploración del problema circular de tres cuerpos nos llevó a la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento, resultando que éstas dependan únicamente del parámetro

³Esto es equivalente a que la masa principal sea aproximadamente 25 veces más masiva que la otra ($1/26 = 0.0384 \approx \mu_c$).

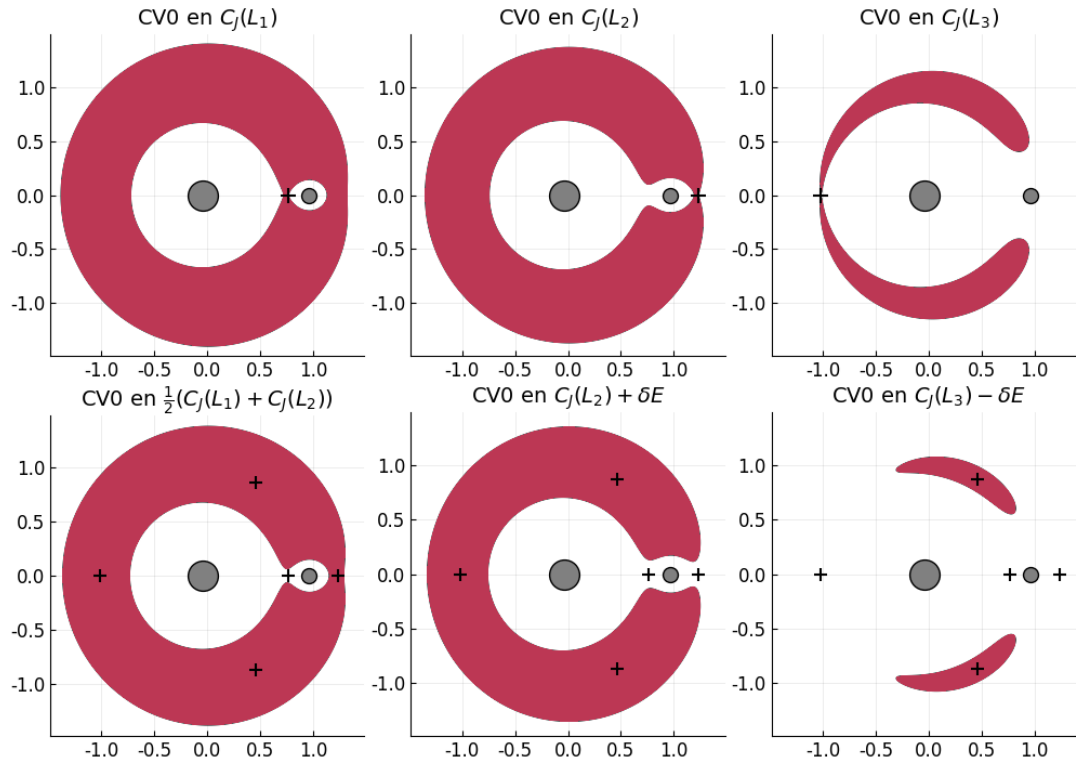


Figura 4.4: Arriba: CV0 sobre los puntos L_1, L_2 y L_3 , respectivamente. Abajo: CV0 sobre variaciones en energía sobre las de arriba, donde se tomó una variación respecto a la energía de Jacobi $\delta E = 0.05$. Se graficaron las energías mayores o iguales a la constante de Jacobi para ver la “sección prohibida” de las trayectorias.

μ , el estudio de los puntos lagrangianos y el tipo de equilibrio que tienen, y las CV0, que ayudan a determinar las secciones por las que m_3 se puede mover. Con esto, las herramientas del TJ pueden encaminarse de una manera más eficiente, lo cual se hará a fondo en el próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados

En el capítulo 4 se estudió el Problema Circular de Tres Cuerpos (PC3C). Dos partículas primarias orbitando en un plano a velocidad constante respecto a su centro de masa y una tercera influenciada por las otras dos con una dinámica muy rica. Es rica por elementos como la sensibilidad al parámetro de masa, dada por la ecuación (4.36), la sensibilidad a condiciones iniciales cercanas, las regiones discriminadas por su constante de Jacobi, o sus cinco puntos lagrangianos. Esta sección busca explotar el Transporte de Jets (JT) como se describe en el capítulo 2 así como los indicadores y herramientas desarrolladas en 3.

Este capítulo se divide como sigue: La sección 5.1 parametriza a μ y hace un TJ de dicha parametrización. La sección 5.2 estudia la probabilidad de colisión entre dos asteroides orbitando cerca de la Tierra. Luego, en 5.3 se estudia la simplecticidad del PC3C. Finalmente, en la sección 5.4 se presentan los campos escalares y vectoriales de ξ_{max} y θ_{\pm} y se compara con los resultados para el campo de ELTF.

§5.1 Parametrización de μ

Como se analizó en la sección 4.2.1, $L_i = L_i(\mu)$, es decir, los puntos de equilibrio del PC3C dependen todos del parámetro de masa del sistema. Los puntos $L_4(\mu)$ y $L_5(\mu)$ son de particular interés ya que, a diferencia de los otros tres, serán estables si $\mu \leq \mu_c$, donde μ_c es el parámetro crítico de la masa dado por (4.36).

El análisis de eigenvalores alrededor de los puntos singulares nos da cómo es la estabilidad de dichos puntos. Sin embargo, es interesante ver las soluciones cerca de μ_c ya que nos permitirá ver directamente en el flujo el comportamiento de estabilidad de la partícula que visita a L_4 o L_5 .

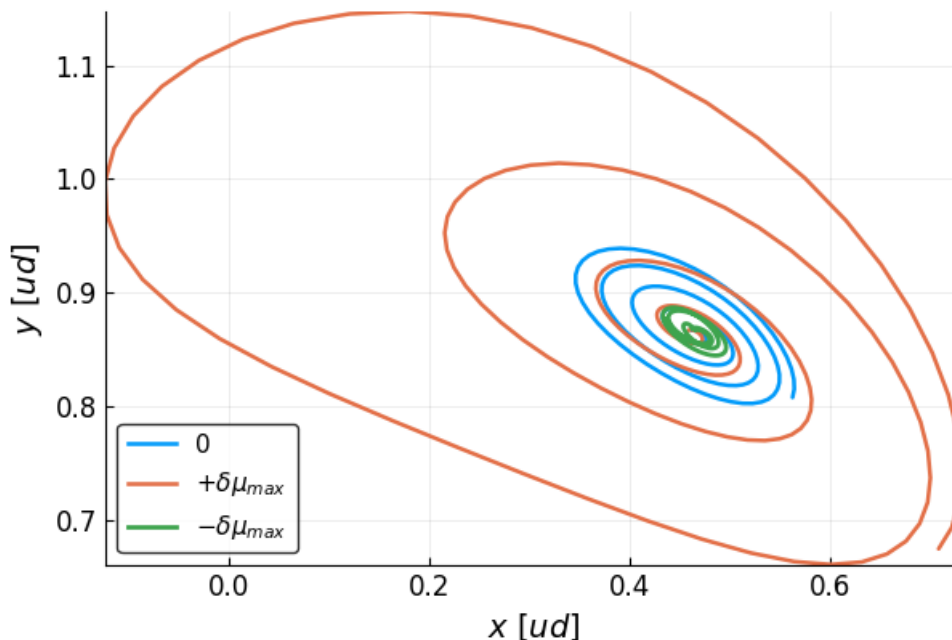


Figura 5.1: Espacio de configuraciones para ϕ_μ con variaciones $\delta\mu = 0$ (azul), $\delta\mu = \delta\mu_{max}$ (naranja), y $\delta\mu = -\delta\mu_{max}$ (verde), donde $\delta\mu_{max} = \xi_{max}(\phi_\mu) \approx 0.00329$. Para el transporte se usó un jet de orden $M = 18$ con condiciones iniciales $(L_{4x}, L_{4y} + \Delta y, 0, 0, \mu)$.

Para esto, se seguirá la filosofía de la sección 3.4, donde se agregará a las ecuaciones de movimiento la ecuación

$$\dot{\mu} = 0$$

y se hará un TJ en μ , es decir, ésta se parametrizará como

$$\mu = \mu_0 + \delta\mu,$$

donde $\delta\mu \in {}^M P_{\mathbb{R}}$ y, por tanto, $\mu \in {}^M P_{\mathbb{R}}$ también. Se introduce la notación $\phi_\mu(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ para referirse a este tipo de transporte. Tomando $\mu_0 = \mu_c \approx 0.0385$, se está en el límite entre la estabilidad y la divergencia alrededor de los puntos L_4 y L_5 .

Para el transporte, tomaremos como condición inicial a $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + \Delta y, 0, 0, \mu)$ con $\Delta y = 7 \times 10^{-4}$ para no estar exáctamente en L_4 . Las variaciones de $\delta\mu$ estarán acotadas por el tamaño máximo de vecindad de la expresión (3.5), es decir, $|\delta\mu| \leq |\delta\mu_{max}| = \xi_{max}(\phi_\mu) \approx 0.033$ en este caso. Se puede ver en la Figura 5.1 una integración a 40 unidades temporales. Se observa cómo para $\delta\mu > 0$, las soluciones se alejan cada vez más de L_4 , mientras que para $\delta\mu < 0$ se queda en cierta localidad. Una forma de observar este comportamiento de manera más clara es si medimos la separación de $\phi_\mu(t)$ respecto de \mathbf{x}_0 para distintos valores de $\delta\mu$. La Figura 5.2 muestra esta separación en función del tiempo. Se puede observar que mientras mayor sea la variación de μ , mayor es la tendencia y mayor la amplitud de oscilación.

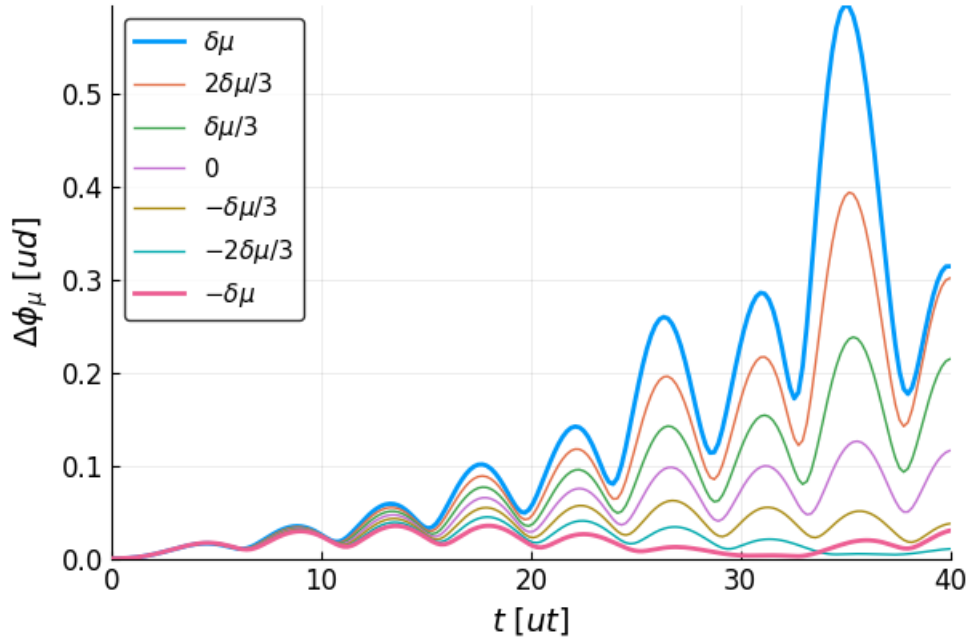


Figura 5.2: Diferencia $\Delta\phi_\mu(t) = \|\phi_\mu(t) - \mathbf{x}_0\|$ del espacio de configuraciones para $\delta\mu \in \{-\delta\mu_{max}, -2\delta\mu_{max}/3, -\delta\mu_{max}/3, 0, \delta\mu_{max}/3, 2\delta\mu_{max}/3, \delta\mu_{max}\}$.

Una forma de ver realmente cuándo el flujo no diverge de la localidad de L_4 es si podemos aislar la tendencia de la amplitud de los ciclos. Para esto, se puede usar un filtro de Hodrick-Prescott, que separa una serie de tiempo en tendencia y ciclo. Sea y_t la variable de una serie de tiempo al tiempo t . Se asume que dicha serie está compuesta de una componente de tendencia τ_t más una componente cíclica c_t , es decir, $y_t = \tau_t + c_t$ ¹. Así, uno puede encontrar la tendencia, como se plantea en [24], bajo el problema de minimización

$$\min_{\tau} \left(\sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right), \quad (5.1)$$

con λ un parámetro positivo que regula la variabilidad en la componente de tendencia de la serie.

Tomaremos la solución matricial lineal de [25]

$$\mathbf{y}_t = (\lambda \mathbf{F} + \mathbf{I}_t) \tau_t \quad (5.2)$$

¹Normalmente se incluye una componente de error η_t que, en este caso, será absorbida por c_t .

al derivar (5.1) respecto a τ_t , donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & & & & & & \ddots \\ & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

ya que ésta es fácilmente programable. De (5.2), obtenemos que $\tau_t = (\lambda \mathbf{F} + \mathbf{I}_t)^{-1} y_t$ y $c_t = y_t - \tau_t$. Aplicando este filtro en la Figura 5.2, se obtiene el ciclo y la tendencia tal como se presenta en la Figura 5.3. En ésta, se observa cómo desde la primera variación negativa ($\delta\mu = -\delta\mu_{max}/3$) hacia valores más negativos, la tendencia decrece después de llegar a un máximo. Esto quiere decir que la distancia respecto al punto inicial no diverge, como se había predicho en el análisis de estabilidad lineal de (4.34). Por otro lado, es interesante ver cómo la amplitud de las oscilaciones en la parte cíclico de $\Delta\phi_\mu$ son mayores entre mayor sea $\delta\mu$, ya que muestra cómo aunque la partícula tiende a acercarse a L_4 , ésta se aleja más cada vez.

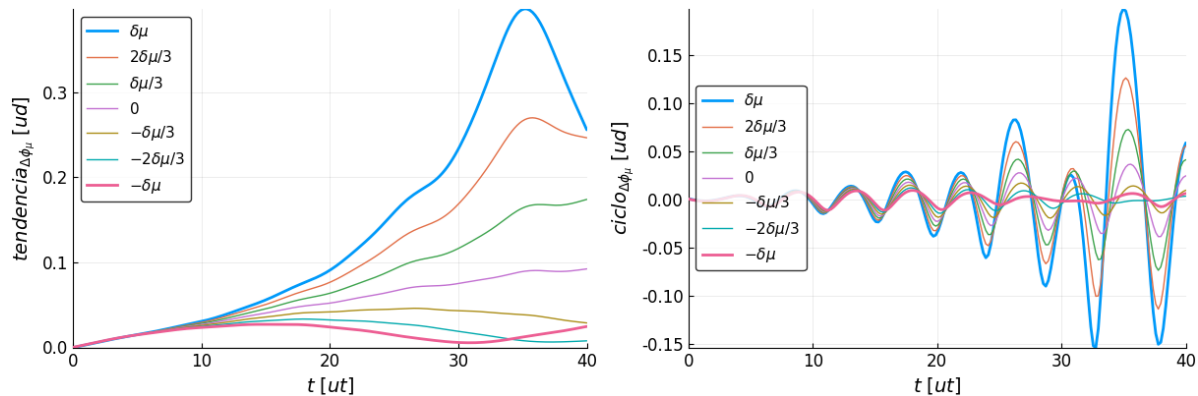


Figura 5.3: Separación en tendencia (izquierda) y ciclo(derecha) de los valores de la Figura 5.2 usando un filtro de Hodrick-Prescott con $\lambda = 8000$.

Hacer esta separación ayuda fuertemente al análisis de estabilidad de μ alrededor de L_4 y L_5 cuando $\mu = \mu_c \pm \delta\mu$, pero ¿seguirán siendo las órbitas en el caso donde $\mu \ll \mu_c$ como en el caso Tierra-Luna?

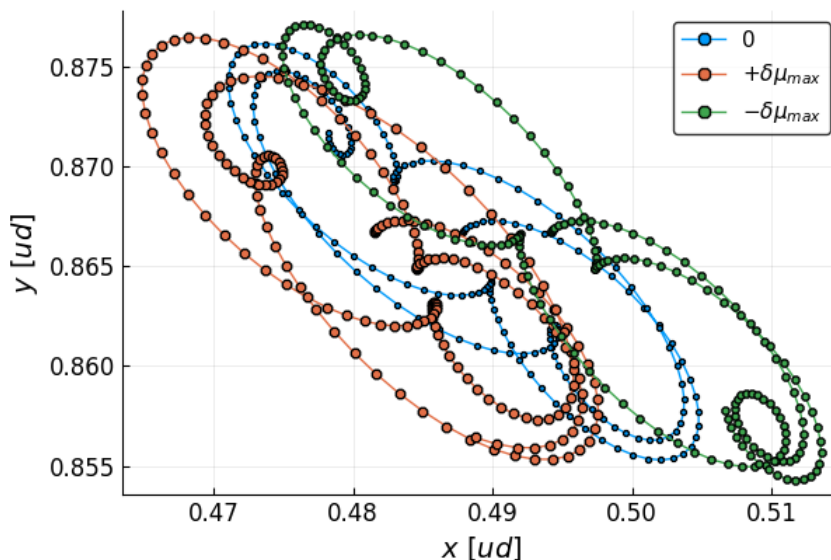


Figura 5.4: Espacio de configuraciones para ϕ_μ con variaciones $\delta\mu = 0$ (azul), $\delta\mu = \delta\mu_{max}$ (naranja), y $\delta\mu = -\delta\mu_{max}$ (verde), donde $\delta\mu_{max} = \xi_{max}(\phi_\mu) \approx 0.0063$. Para el transporte se usó un jet de orden $n = 18$ con condiciones iniciales $(L_{4x}, L_{4y} + \Delta y, 0, 0, \mu)$.

§5.1.1 Caso Tierra-Luna

Dado que en la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento el problema queda planteado únicamente en términos de μ , basta ver que en el caso Tierra-Luna $M_T = 5.972 \times 10^{24} \text{kg}$, $M_L = 7.348 \times 10^{22} \text{kg}$ y, por tanto, $\mu_{TL} = 0.01215$. Notamos que $\mu_{TL} \ll \mu_c$ por lo que alrededor de L_4 y L_5 debería haber órbitas estables, aún cuando $\delta\mu_{max}$ sea grande.

Primero, al hacer el Transporte de Jets a 40 unidades temporales y ver el espacio de configuraciones como se muestra en la Figura 5.4, se observa cómo las tres trayectorias $\delta\mu = \{-\delta\mu_{max}, 0, \delta\mu_{max}\}$ quedan siempre orbitando alrededor de L_4 , es decir, no divergen. Resulta que $\delta\mu_{max} = 0.0063$, lo cual equivale a una variación del 52.14% respecto a μ_{TL} . Para ponerlo en perspectiva, μ_{TL} equivale a que la masa primaria (la Tierra) es unas 81 veces más grande que la secundaria (luna). Así, $\mu_{TL} \pm \delta\mu_{max}$ equivale a que la masa primaria sea 53 y 171 veces más grande que la otra, respectivamente. Análogo a la Figura 5.2, la Figura 5.5 presenta la separación respecto a \mathbf{x}_0 de la solución. Aquí se puede observar que, aunque al principio (en las primeras 8 unidades, aproximadamente) las tendencias y oscilaciones siguen el mismo comportamiento que en el caso anterior, éstas se vuelven rápidamente arbitrarias, sin tener tendencia aparente ni amplitudes crecientes en los ciclos.

De hecho, en la Figura 5.6 se muestran los gráficos al aplicar el filtro de Hodrick-Prescott. Al aplicar dicho filtro, ¡no se puede observar absolutamente nada! Ni la gráfica de ciclo ni la de tendencia tienen ninguna coherencia en relación a las variaciones del parámetro de

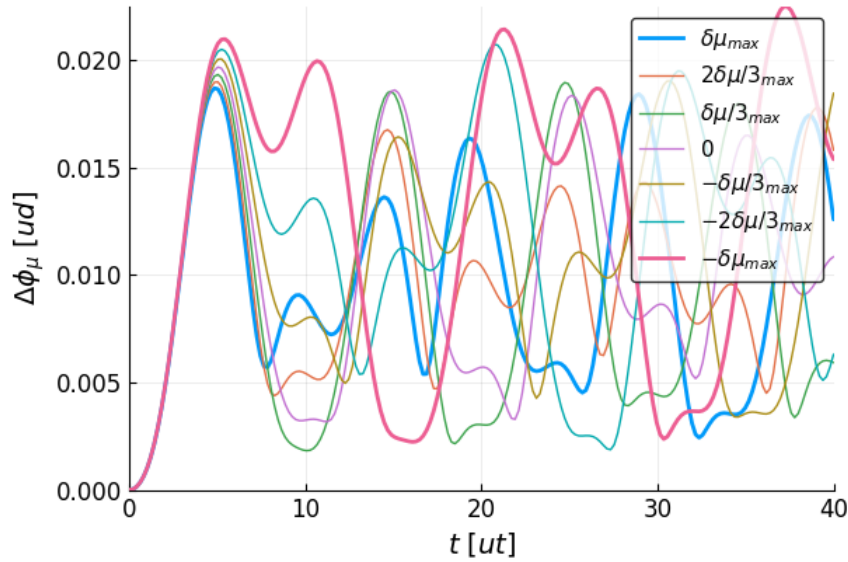


Figura 5.5: Diferencia $\Delta\phi_\mu(t) = \|\phi_\mu(t) - \mathbf{x}_0\|$ del espacio de configuraciones para $\delta\mu \in \{-\delta\mu_{max}, -2\delta\mu_{max}/3, -\delta\mu_{max}/3, 0, \delta\mu_{max}/3, 2\delta\mu_{max}/3, \delta\mu_{max}\}$ integrado a 40 unidades temporales.

masa. Esto significa que $\mu_{TL} + \delta\mu$ es, en efecto, estable para todo el conjunto de valores $\delta\mu$ evaluados alrededor de L_4 y L_5 . Este es un caso donde el TJ es una herramienta natural para evaluar la estabilidad de estos puntos lagrangianos y para ver cómo varían las trayectorias en función de los parámetros del problema-. Muchas otras exploraciones se pueden hacer con variación de parámetros en el problema de tres cuerpos. Sin embargo, este análisis basta para ver las capacidades del TJ cuando no son específicamente “jets” los que transporta.

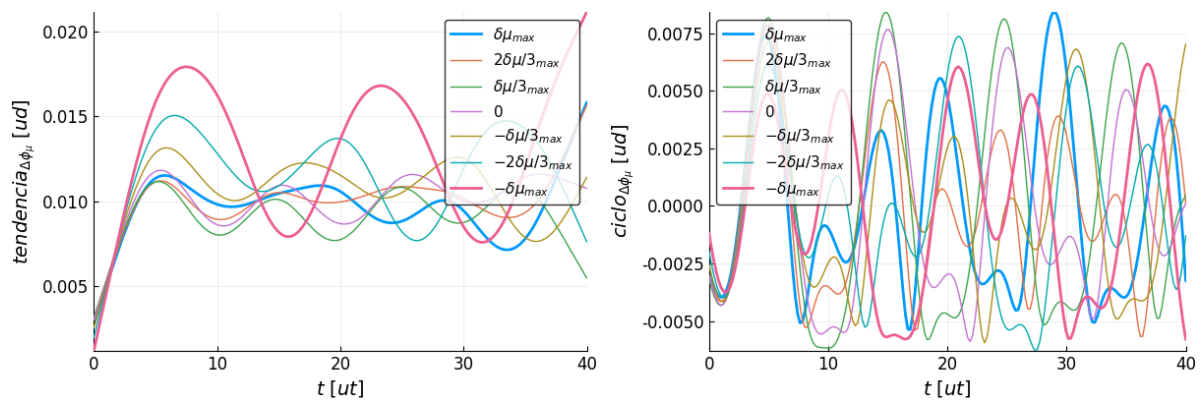


Figura 5.6: Separación en tendencia (izquierda) y ciclo(derecha) de los valores de la Figura 5.5 usando un filtro de Hodrick-Prescott con $\lambda = 8000$.

§5.2 Colisión de asteroides

Sean a_1 y a_2 dos asteroides con la misma energía de Jacobi alrededor de la Tierra. Estos se verán afectados únicamente por la atracción gravitacional de la Tierra y la Luna. Esta sección plantea un modelo ilustrativo que permite encontrar la probabilidad de colisión entre a_1 y a_2 , donde los pasos a seguir son similares a los planteados en [1]. Cabe mencionar que éste es un sistema poco realista ya que, en general, habría que considerar la presencia gravitacional del Sol, la radiación solar, la geometría de los asteroides y demás efectos que influyen en la dinámica de a_1 y a_2 .

Inicialmente, los asteroides se encuentran a $\mathbf{x}_{a_1}(t_0) + \delta\mathbf{x}_{a_1}(t_0)$ y $\mathbf{x}_{a_2}(t_0) + \delta\mathbf{x}_{a_2}(t_0)$, respectivamente, donde $\delta\mathbf{x}_{a_i} \in {}^n P_{\mathbb{R}^2}$. La variación en cada condición representa el error de medición de éstos. Por tomar una referencia, se tomará la incertidumbre del orden de los datos del asteroide Apophis en los años 2012 – 2028 [26], donde definimos $\Delta_{max} := 350$ km como la incertidumbre máxima para los asteroides.

La Figura 5.7 muestra la trayectoria nominal de a_1 y a_2 para condiciones iniciales con energía $C_J = -1.81252 < C_J(L_1)$. En esta integración, la mínima distancia entre ambos cuerpos es de 0.00348 que representa unos 1341 kilómetros. Sin embargo, aunque para esta condición particular los asteroides no chocan, es posible que sí lo hagan dentro de una integración con variación hasta de radio Δ_{max} . Esto se puede hacer con el Transporte de Jets de la siguiente manera:

- Hacer una integración nominal de dos asteroides con energías similares o que se sepa que pueden tener riesgo de colisión.
- Obtener las coordenadas $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$ donde la distancia entre a_1 y a_2 es mínima.
- Hacer TJ alrededor de las condiciones encontrada en el punto anterior para encontrar la parametrización de la vecindad que pasa por la zona de posible colisión.
- Encontrar la trayectoria de una distribución de N puntos al evaluar los polinomios en la bola $\delta\mathbf{x}_i \leq \Delta_{max}$ alrededor de $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$ para ambos asteroides y determinar la distancia entre cada par de puntos.
- Definir una distancia D_{col} para la cual los asteroides chocarían y determinar qué puntos de la distribución son menores que ésta.
- Determinar la probabilidad de impacto \mathcal{P} como la cantidad de veces puntos que quedan debajo de D_{col} respecto al número de trayectorias totales N^2 ; así

$$\mathcal{P} = \frac{\#(\|\mathbf{x}_{a_1} - \mathbf{x}_{a_2}\| \leq D_{col})}{N^2}. \quad (5.4)$$

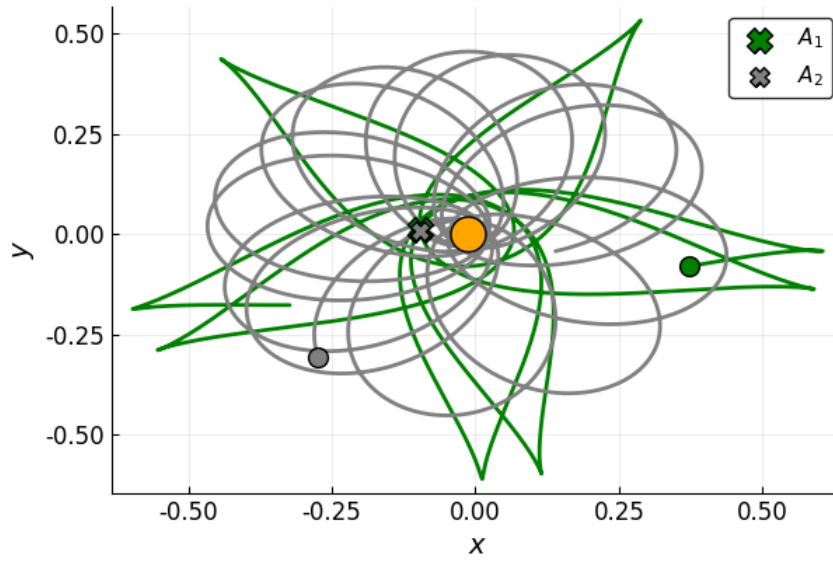


Figura 5.7: Integración nominal a $T = 10 \approx$ unidades temporales, donde $\mathbf{q}_{a_1}(t_0) = (-0.373098, -0.0804321, 1.21995, \dot{y}_{a_1}(x_{a_1}(t_0), y_{a_1}(t_0), \dot{x}_{a_1}(t_0), C_J))$ y $\mathbf{q}_{a_2}(t_0) = (-0.27324, -0.307896, -0.307576, \dot{y}_{a_2}(x_{a_2}(t_0), y_{a_2}(t_0), \dot{x}_{a_2}(t_0), C_J))$. El círculo naranja representa a M_1 , y los círculos verde y gris a $\mathbf{q}_{a_1}(t_0)$ y $\mathbf{q}_{a_2}(t_0)$, respectivamente. La zona de mayor acercamiento se marca con cruces, donde en ésta, la distancia entre los asteroides es de $0.00348 \approx 1341$ km.

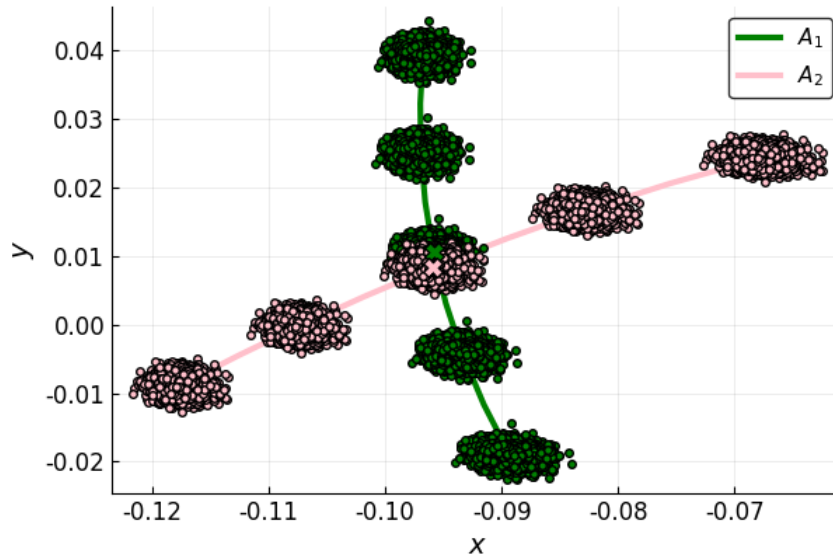


Figura 5.8: Transporte de jets de orden 4 alrededor de $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$ (cruces en la figura) donde los cúmulos son la distribución de radio $\delta \mathbf{x}_{a_i} \leq 350$ km evaluados en el polinomio resultante del transporte. Para el método sólo se toman los cúmulos donde se encuentran $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$, pero la figura busca ilustrar una sección de la trayectoria de los asteroides.

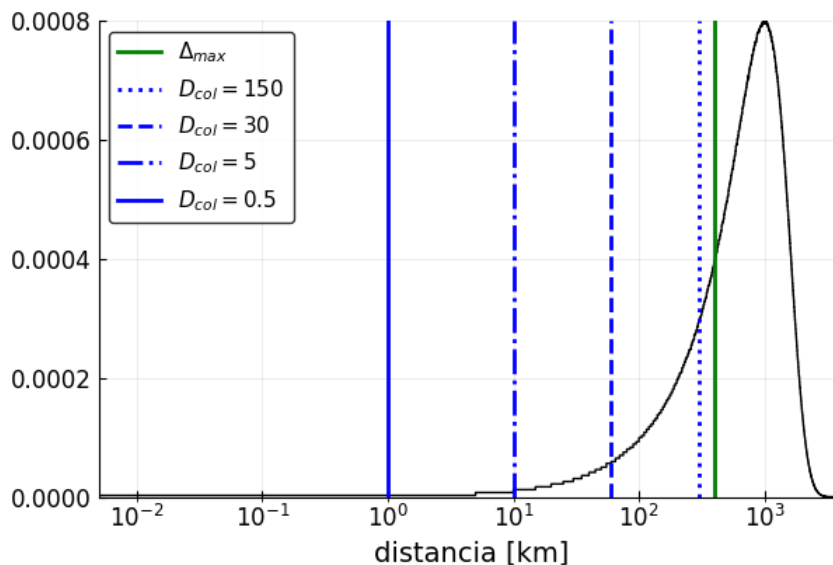


Figura 5.9: Distribución normalizada de distancias entre a_1 y a_2 cerca del punto de posible colisión dadas 7000 variaciones iniciales alrededor de $\mathbf{q}_{a_1}^{col}$ y $\mathbf{q}_{a_2}^{col}$. Las líneas verticales muestran los valores usados en la Tabla 5.1.

La Figura 5.8 muestra una distribución normal de 7000 puntos² evaluados en el transporte alrededor de $\mathbf{q}_{a_i}^{(col)}$ para $i = \{1, 2\}$. La probabilidad de impacto dependerá del tamaño que tengan los asteroides, la cual se presenta en la Tabla 5.1. Se presenta en la Figura 5.9 la distribución de distancias entre ambos asteroides en la zona de riesgo de colisión. Aún cuando D_{col} e incluso Δ_{max} quedan debajo del escenario más posible en la distribución, la probabilidad de impacto es suficientemente grande para no ser ignorada en los asteroides de mayor dimensión.

D_{col} [km]	\mathcal{P} [%]	Colisiones [#]
0.5	3.7×10^{-5}	18
5	0.0048	2356
30	0.172	84,609
150	4.357	2,135,173

Tabla 5.1: Número de colisiones y riesgo de choque para asteroides de distintas dimensiones.

Algo relevante al hacer Transporte de Jets es la precisión de éste. Se encuentra que $\xi_{max}(\phi_{a_1}) = 0.0022 \approx 865 \text{ km} \gg \Delta_{max}$ ³, por lo que se tiene bastante confianza en la precisión de las evaluaciones de la distribución. De hecho, al tomar una serie de variaciones

² $N = 7000$ ya converge a una probabilidad cuyas cifras significativas no afectan el redondeo de la Tabla 5.1.

³ $\xi_{max}(\phi_{a_2})$ es prácticamente igual a $\xi_{max}(\phi_{a_1})$, por lo que sólo se usa ϕ_{a_1} .

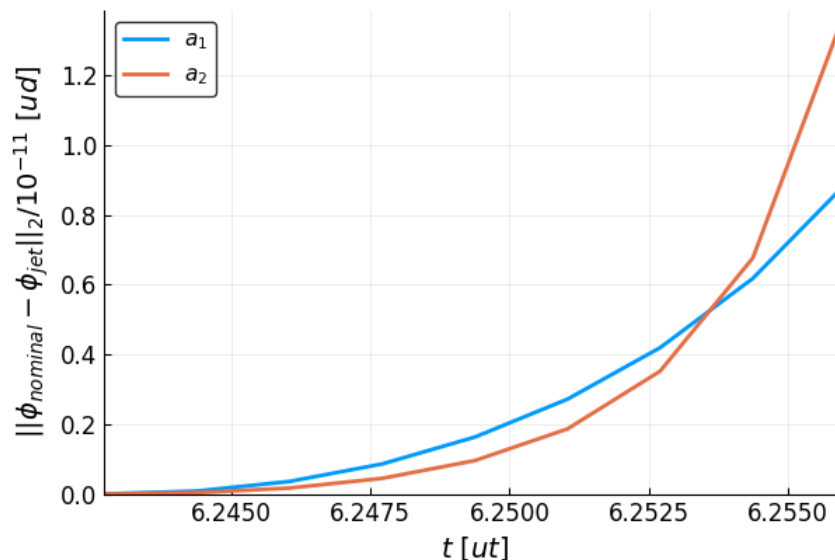


Figura 5.10: Promedio de la distancia entre la integración nominal y el TJ para 500 condiciones iniciales con variación $\|\delta\mathbf{x}_{a_1}\| = \|\delta\mathbf{x}_{a_1}\| = \Delta_{max}$.

$\|\delta\mathbf{x}_{a_i}\| = \Delta_{max}$ y hacer la integración nominal de éstas, se encuentra que el error promedio respecto a éstas es del orden de $10^{-11} \approx 4mm$, o sea, nada. Esto se muestra en la Figura 5.10.

Así, ilustramos el método de posible colisión entre asteroides, donde se establece la probabilidad de impacto para diferentes zonas de colisión. El TJ permitió encontrar dichas probabilidades ya que en éste, simplemente hubo que evaluar la distribución de variaciones iniciales en un radio dado. Éste método es generalizable a cualquier sistema donde exista alguna incertidumbre en las condiciones iniciales. Sin embargo, hay que tener claro que el TJ no es muy preciso para integraciones muy largas ni para vecindades muy grandes. En este ejemplo, el radio de las variaciones eran 0.46 veces más pequeñas que ξ_{max} . Además, se hizo la integración de jets cerca del punto de posible colisión para tener tiempo de integración cortos.

§5.3 Simplecticidad del problema circular

Se construyeron en el capítulo 4 los potenciales (4.3) y sus respectivas energías cinéticas (4.4) del problema general de tres cuerpos. Éstas nos permiten definir al hamiltoniano

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \sum_{i=1}^3 h_i(r_{i,j}, r_{i,k}, \mathbf{p}_i), \quad (5.5)$$

donde $\mathbf{p}_i = M_i \dot{\mathbf{r}}_i$ es el momento conjugado y

$$h_i(r_{i,j}, r_{i,k}, \mathbf{p}_i) = \frac{1}{2M_i} p_i^2 + U_{M_i}(r_{i,j}, r_{i,k}), \quad (5.6)$$

los hamiltonianos para cada una de los cuerpos. Notemos que (5.5) no depende del tiempo y, por lo tanto, es un sistema conservativo.

Cuando en la sección 4.2 se supuso que la masa menor no influye en la dinámica de las masas primarias, bastó con hacer una rotación con velocidad angular Ω para encontrar las ecuaciones de movimiento de m_3 . Esto fija las masas primarias, cancela sus hamiltonianos ($U_{M_2} = -U_{M_1}$) y define al hamiltoniano para la masa menor. Dicha rotación se puede realizar bajo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= X \cos(\Omega t) - Y \sin(\Omega t), \\ y &= X \sin(\Omega t) - Y \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

con (x, y) y (X, Y) las nuevas y viejas coordenadas para m_3 , respectivamente, tal como se muestra en la Figura 5.11.

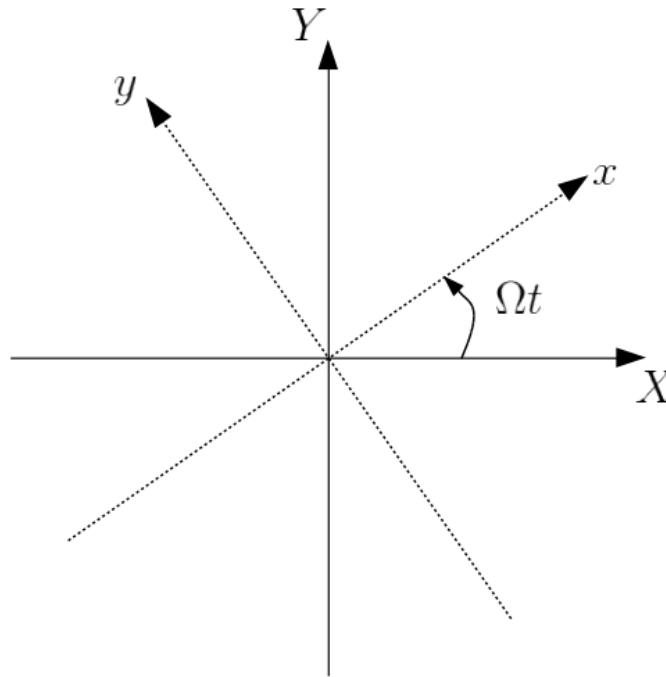


Figura 5.11: Diagrama del cambio de marco de referencia (X, Y) a (x, y) a velocidad angular Ω .

Para obtener el hamiltoniano modificado, que a veces en la literatura se llama kamiltoniano [18, 27], es necesario ver cómo se modifica el momento conjugado en el nuevo sistema donde, para esto, se debe conservar el principio de mínima acción

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^t \left(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} - H(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \tau) \right) d\tau &= 0 \\ \implies \delta \int_{t_0}^t \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \right) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

en ambos ejes, lo cual sucede si

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} - H(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{dG(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{dt}. \quad (5.8)$$

Aquí $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$, $\mathbf{R} = (X, Y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$, $\mathbf{r} = (x, y)$, K es el kamiltoniano y $G = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + G_2(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ es una función que genera una transformación canónica entre ambos sistemas, también conocida como función generatriz de tipo 2 [28]. Notemos que como

$$\frac{dG}{dt} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial G_2}{\partial t},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{R}}, \\ \mathbf{r} &= \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{p}}, \\ \therefore K(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \frac{\partial G_2}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Definimos G_2 simplemente como

$$G_2(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = p_x \underbrace{(X \cos(\Omega t) - Y \sin(\Omega t))}_x + p_y \underbrace{((X \sin(\Omega t) + Y \cos(\Omega t)))}_y \quad (5.10)$$

y, con (5.9), permite formular explícitamente al kamiltoniano como

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \underbrace{\frac{1}{2M_3} (p_x^2 + p_y^2) - G \frac{M_1}{r_{1,3}} - G \frac{M_2}{r_{2,3}}}_{H(\mathbf{r}, \mathbf{p})} + \underbrace{\Omega (p_y x - p_x y)}_{\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2M_3} ((p_x - \Omega y)^2 + (p_y + \Omega x)^2) - \left(G \frac{M_1}{r_{1,3}} + G \frac{M_2}{r_{2,3}} + \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right). \quad (5.11)$$

Notemos que $K = k_3$, así que la partícula menor define al hamiltoniano del sistema en el nuevo sistema de referencia. Esta nos permite probar numéricamente la propiedad

simpléctica del PC3C que, contruido de otro modo, no hubiese sido evidente. Basta con hacer las transformaciones

$$p_x \rightarrow p_x - \Omega y, \quad (5.12)$$

$$p_y \rightarrow p_y + \Omega x, \quad (5.13)$$

y aplicar la relación (3.16).

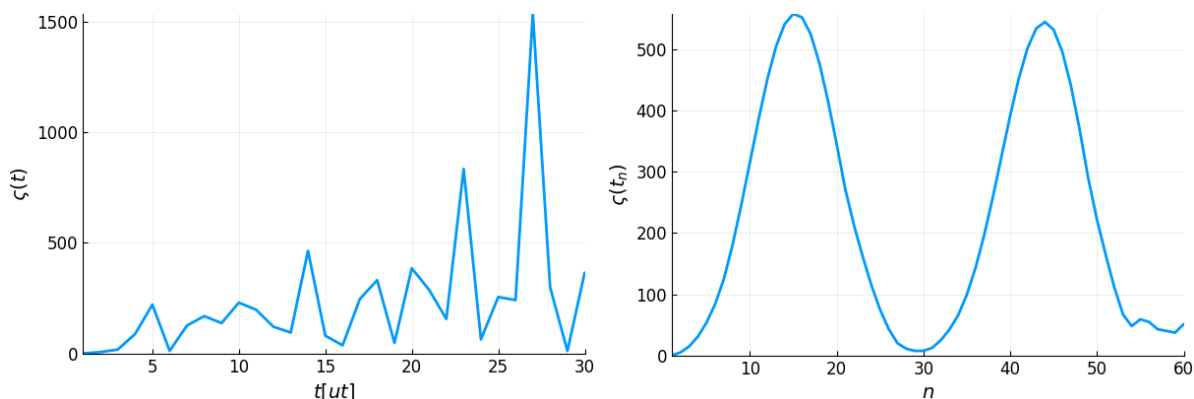


Figura 5.12: $\zeta(t)$ para $\phi(t)$ sin modificar el flujo en unidades adimensionales del PC3C. Las condiciones iniciales son $\mathbf{x}_0 = \left((L_{1x}, 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (izquierda) y $\mathbf{x}_0 = \left((L_{4x}, L_{4y} + 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (derecha) para $\delta\xi$ un polinomio de orden 3.

Si uno no hace dichas transformaciones, parecerá que el problema no conserva la forma simpléctica, tal como en el ingenuo intento que se muestra en la Figura 5.12 para diferentes condiciones iniciales. Para obtener ζ se utiliza la ecuación (3.17) que, como se discute en la sección 3.3, opera de manera muy natural con el TJ, ya que la parametrización de vecindades del espacio fase permite computar al jacobiano en cada punto de manera directa.

La Figura 5.13, en cambio, muestra la conservación simpléctica del PC3C bajo la transformación (5.13), donde se observa cómo $\zeta(t)$ se mantiene constante durante toda la integración. En ésta, se tomaron las mismas dos condiciones iniciales que en la Figura 5.12; una cerca de L_4 , que es una trayectoria estable, y otra cerca de L_1 , que orbita alrededor de la masa primaria menor. Se puede observar cómo en la condición más estable la conservación de la simplecticidad varía en unos dos órdenes de magnitud menos que cerca de L_1 . Sin embargo, ambas tienen variaciones menor a 10^{-10} en cada punto de la trayectoria, por lo que podemos decir que, en efecto, el sistema es simpléctico. Esta es una aplicación muy directa para el TJ que aprovecha su estructura paramétrica, de la cual se pueden obtener el jacobiano o incluso variaciones de órdenes mayores.

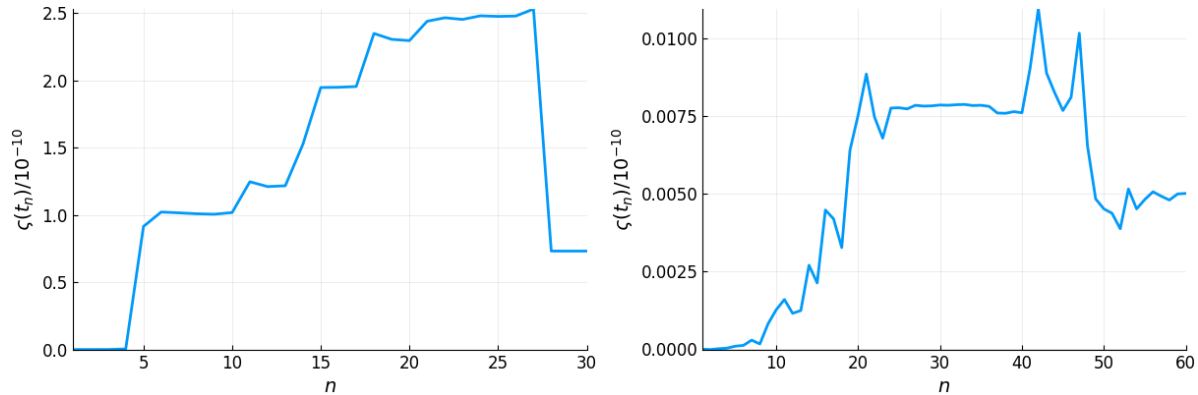


Figura 5.13: $\zeta(t)$ para $\phi(t)$ con las transformaciones (5.13). Las condiciones iniciales son $\mathbf{x}_0 = \left((L_{1_x}, 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (izquierda) y $\mathbf{x}_0 = \left((L_{4_x}, L_{4_y} + 0.001, 0, 0)^T + \delta\xi \right)$ (derecha) para $\delta\xi$ un polinomio de orden 3.

§5.4 Campos de ξ_{max} y ζ_{\pm} para el problema circular

El estudio y exploración del TJ ha utilizado la ecuación (3.5) en varias ocasiones hasta ahora. Ésta ha sido el parámetro que nos ha permitido saber qué tan grandes pueden ser las vecindades dado cierto error ϵ_{jet} , tal como se discute en la sección 3.2. Éste se utilizó en la sección 5.2 para comprobar que la incertidumbre de medición diera resultados precisos al evaluar la distribución de puntos, y en 5.1 para las variaciones del parámetro de masa y analizar la estabilidad de L_4 . ξ_{max} percibe, en esencia, qué tan compleja es la deformación de la vecindad y qué tanto se alejan las condiciones vecinas de la condición nominal a tiempo fijo, por lo que $\xi_{max} \ll 1$ implica una alta sensibilidad en las condiciones iniciales cercanas o un gran gradiente de velocidades para la vecindad.

Para esta sección se hará un análisis del PC3C de los campos escalares de ξ_{max} así como las tasas de expansión y contracción discutidas en 3.2.1 con la misma intención que se hace en [2]. Dichos campos son comparables con el campo de ELTF desarrollado al principio del capítulo 3, por lo que se hará una comparación con estos al final de la sección. En el problema restringido el gradiente apunta siempre hacia las masas primarias del sistema, lo cual se puede observar en la Figura 5.14, donde se calcula el campo escalar para ξ_{max} a $T = 0.3$ unidades adimensionales. Ésta es similar a la representación de curvas de nivel de la Figura 4.1 de la sección 4.2.1 y, al tener un tiempo de integración muy corto, no da tiempo a una gran deformación de las vecindades, planteando únicamente los lugares de mayor gradiente de velocidad. En todas las figuras que se presentan se ignoraron los puntos muy cercanos a las masas primarias, ya que el tiempo de cómputo es muy grande cerca de éstos.

La Figura 5.15, en cambio, presenta el mismo campo escalar pero integrada a $T = 3$ unidades adimensionales. Como se menciona al inicio de esta sección, las dos principales

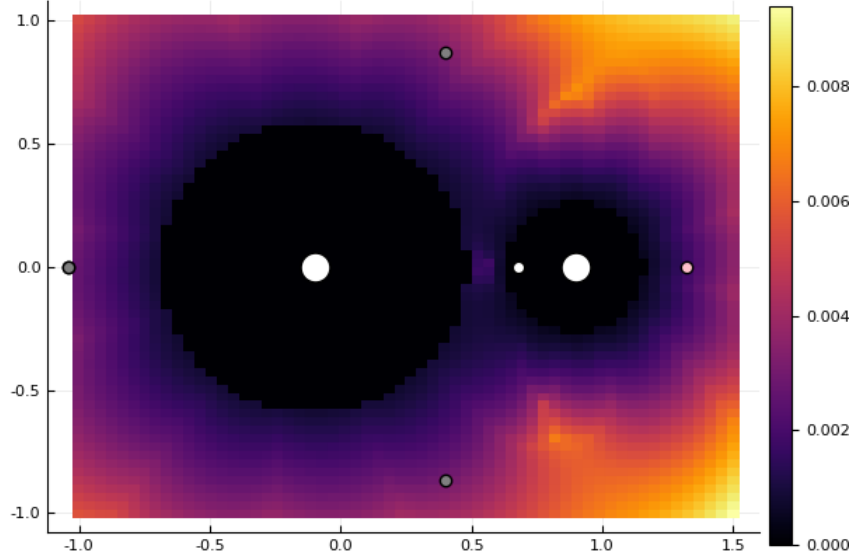


Figura 5.14: Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} en una retícula de 70×70 después de 0.3 unidades adimensionales de tiempo en el espacio de configuraciones del PC3C con $\mu = 0.1$. Éste se calculó con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-7}$, orden de jets $M = 2$ y orden máximo de la expansión $N = 20$. Las condiciones del PC3C son para $\mathbf{x}_0 = (x_{0_i}, y_{0_j}, 0, 0)^T$, con $x_{0_i} \in (-1, 1.5)$, $y_{0_j} \in (-1, 1.5)$.

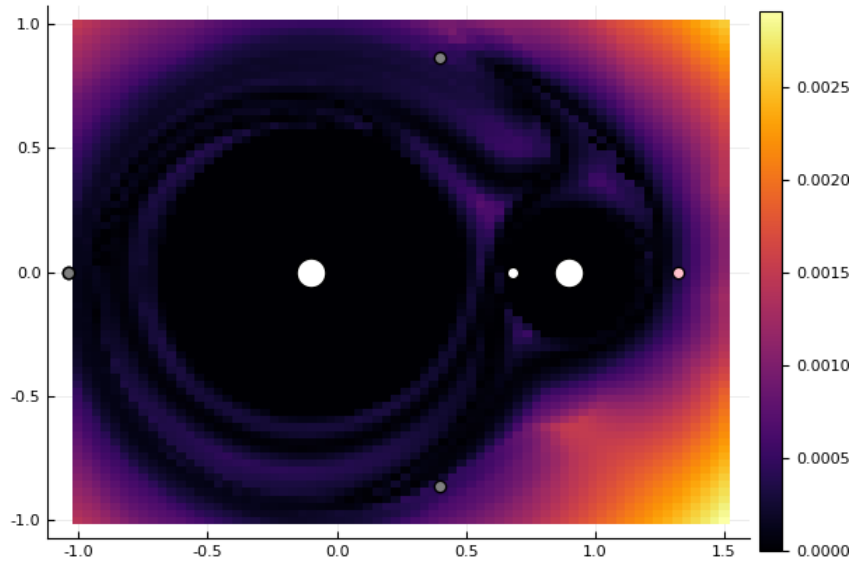


Figura 5.15: Campo escalar de los tamaños máximos de vecindad ξ_{max} con condiciones idénticas que para la Figura 5.14 pero integrado a 3 unidades temporales.

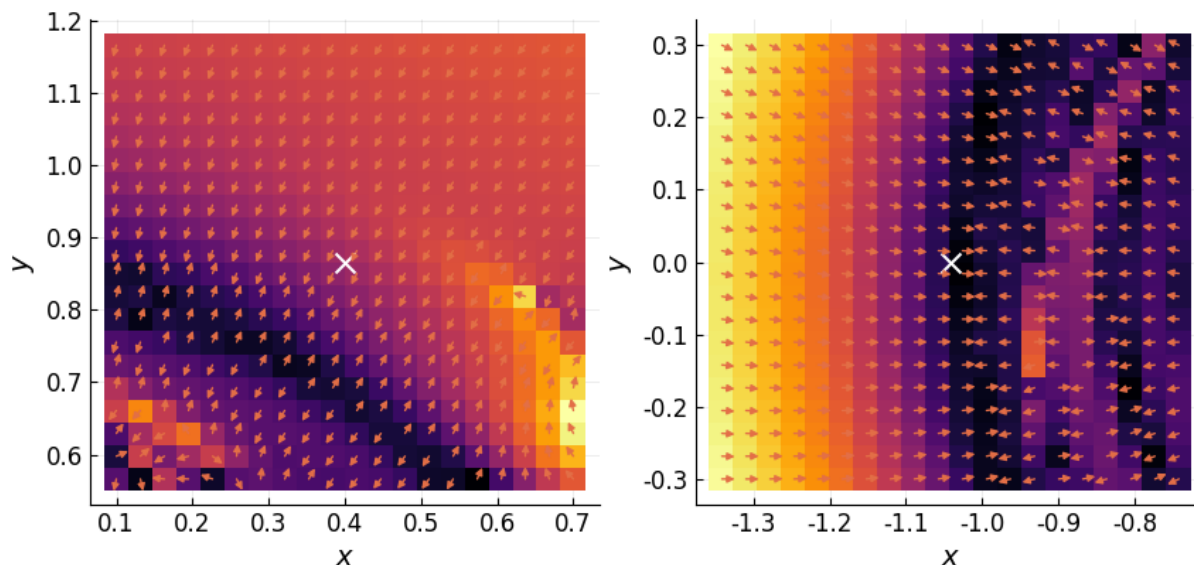


Figura 5.16: Campos vectoriales dados por $(\cos(\theta_+(\mathbf{x}_0)), \sin(\theta_+(\mathbf{x}_0)))^T$ sobre los campos escalares $\varsigma_+(\mathbf{x}_0)$ en una cuadrícula de 20×20 , con tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-20}$, orden de los jets $M = 2$ y orden del desarrollo de Taylor $N = 25$ integrado a $T = 3$ unidades adimensionales. Las condiciones del PC3C son para $\mathbf{x}_0 = (x_{0_i}, y_{0_j}, 0, 0)^T$ con $\mu = 0.1$. A la izquierda se observan los puntos cerca de L_4 , marcada con \times , mientras que a la izquierda se presentan las localidades de L_3 .

formas en las que ξ_{max} sea chica es si el gradiente de velocidades en una vecindad es muy grande o si la deformación de la vecindad inicial es muy pronunciada. Ambas figuras muestran cómo ξ_{max} decrece gradualmente al aumentar el gradiente de velocidad hacia las singularidades. Esto muestra la tendencia de la tercer partícula atrayéndose hacia las masas primarias. Sin embargo, en la Figura 5.15 se observan curvas donde ξ_{max} es pequeña respecto a los valores vecinos. Los puntos en estas curvas, a las cuales llamaremos \mathcal{C}_s , no reflejan un gran gradiente de velocidad pero sí una deformación muy pronunciada del jet. Aquí seguramente divergieron las condiciones por debajo y por arriba de la condición inicial. Notemos que el campo planteado en estas figuras tiene una variación $|\xi| \leq \xi_{max}$ en cualquier dirección arbitraria, la cual no corresponde necesariamente a variaciones con la misma energía de Jacobi, por lo que no se puede concluir que las curvas \mathcal{C}_s correspondan a curvas con cantidades conservadas.

Para reforzar este análisis, se calcularon las direcciones de mayor expansión para la vecindad de los puntos lagrangianos. La Figura 5.16 presenta dichas direcciones en distintas secciones del espacio de configuraciones, donde se observa cómo en las zonas de menor expansión, equivalentes a las zonas donde ξ_{max} es pequeña, θ_+ cambia drásticamente. Esto nos hace pensar que dichas curvas pueden ser variedades invariantes en el espacio extendido de las fases, ya que parecen depender del tiempo. Esta figura presenta un acercamiento alrededor de L_4 y L_3 , donde se observa cómo la dirección de θ_+ cambia cuando se cru-

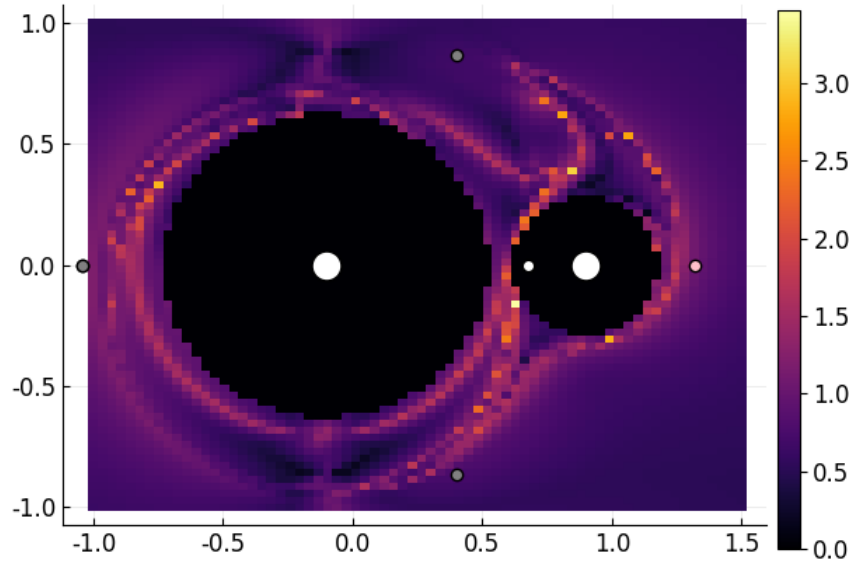


Figura 5.17: Campo escalar dado por los ELTF. Las condiciones y la retícula para esta figura son idénticas a las de 5.15.

za por una curva \mathcal{C}_s . Lejos de las singularidades el gradiente tiende hacia ellas pero al cruzar por estas curvas especiales, la dirección de expansión máxima cambia de sentido. Se puede inferir que éstas determinan las regiones donde las trayectorias escapan de sus órbitas después de un tiempo dado.

Notemos de la Figura 5.17, que el campo escalar para ξ_{max} es bastante similar al campo de los ELTF. Se presentan las mismas líneas invariantes que en 5.15. Sin embargo, la diferencia conceptual es que en el caso de ELTF éstas representan las zonas de mayor tasa de expansión, mientras que en ξ_{max} representan el tamaño donde las variaciones son más pequeñas.

Capítulo 6

Conclusiones

El Transporte de Jets es una herramienta que permite la propagación de la vecindad de una condición inicial bajo la parametrización polinomial de orden M de las funciones que describen un sistema de EDO de la forma (2.1). Con esto y los indicadores que se plantearon en el capítulo 3 se llegaron a varias conclusiones acerca del PC3C al someterlos al TJ y sus herramientas.

El capítulo de resultados ofrece información relevante acerca del TJ y el problema circular de tres cuerpos. En la sección 5.2, se utilizó como una alternativa del método de Monte Carlo que, dados los análisis del apéndice A, resultó ser más rápida sin perder precisión. Hay que tomar en cuenta que el transporte resulta una buena alternativa cuando los tiempos de integración no son muy largos y cuando la distribución de valores a propagar quedan por debajo de ξ_{max} . Con esto, se pudo analizar la probabilidad de colisión entre dos asteroides orbitando la Tierra, cuya incertidumbre de posición alcanza hasta 350 kilómetros, para la cual se tomó la del asteroide Apophis.

En 5.1 se hizo un análisis acerca de la estabilidad de L_4 gracias a la parametrización de μ alrededor de μ_c . Esta sección demuestra cómo utilizar al TJ como una herramienta de estabilidad de las ecuaciones; de hecho, se mostró cómo para $\mu < \mu_c$ el flujo alrededor de L_4 era estable mientras que diverge si $\mu > \mu_c$.

Se obtuvo satisfactoriamente una prueba de que la integración numérica del PC3C es simpléctica bajo la transformación (5.13) en 5.3, con una precisión del orden de 10^{-10} . Esto muestra cómo la parametrización de las vecindades y la diferenciación automática del álgebra polinomial ayudan al análisis de sistemas en una forma computacionalmente directa y precisa. Cabe resaltar cómo esta precisión podría mejorarse si se disminuyera la tolerancia del método de Taylor ϵ_{Taylor} o se aumentara el orden N de integración.

Finalmente, se estudió al espacio de configuraciones del PC3C con el campo escalar de ξ_{max} y el campo vectorial de máxima y mínima expansión de θ_{\pm} . Estos se compararon con

los campos escalares de los ELTF y resulta que encuentran separatrices en zonas parecidas. Se observa cómo crece la complejidad de las soluciones cuando el tiempo transcurrido de integración aumenta.

El Transporte de Jets es una herramienta poderosa, pero no se puede utilizar de manera arbitraria ya que en general es un método tardado en comparación de las integraciones nominales. Por esto, se debe tener en cuenta cómo crece el tiempo de cómputo y hasta que punto es preciso. Se pudo sacar una buena cantidad de información acerca del PC3C y, analizando los resultados, se observa cómo esto puede ser generalizable a otros sistemas. A fin de cuentas, el PC3C es un “problema de juguete”, en el sentido que generalmente se necesitan más variables para describir un objeto celeste con precisión. Sin embargo, la metodología del TJ no es específica del problema y se puede explotar en sistemas más realistas y de diversas disciplinas.

Hay muchas áreas donde el Transporte de Jets puede ser más profundamente explorado y mejor utilizado:

- En matemáticas, se puede explorar más a fondo el estudio del tamaño máximo de vecindad ξ_{max} . En la tesis se propone una fórmula que intuitivamente acota el error debido a la contribución del último término de un polinomio. Sin embargo, no se demuestra que éste sea una cota apropiada, por lo cual ξ_{max} es posiblemente optimizable. Simó hace un análisis sobre los pasos de integración óptimos [29, Capítulo 15], los cuales pueden ser una buena guía. Otra rama de potencial aplicación es la probabilidad, ya que plantear un paquete de probabilidad es directo con el TJ, sobre todo si éste tiene una distribución compacta.
- En computación, un primer paso es paralelizar el código para los campos escalares de ξ_{max} y los campos vectoriales de θ_{\pm} , ya que en esta tesis todo fue hecho de manera secuencial y los cálculos se volvieron bastante lentos (tarda del orden de horas, y paralelizarlo lo llevaría al orden de minutos).
- En física veo aplicación directa a la mecánica cuántica. Con el mismo espíritu que en Probabilidad, el TJ puede plantear un paquete de ondas inicial que describa al ensemble del sistema de una forma muy directa. También hay diversas aplicaciones a la física de partículas, ya que en muchos casos éstas no se pueden aislar y necesitan ser integradas como un jet.

Se le recuerda al lector que la tesis, las figuras, los scripts y los algoritmos son de código abierto y se pueden encontrar en mi repositorio de github en <https://github.com/blas-ko/tesis>, esto hace que la tesis sea potencialmente dinámica, por lo cual se recomienda siempre revisar las fechas en los cambios del repositorio en caso de ser consultada. Cualquier duda, sugerencia o propuesta será gratamente aceptada y escuchada.

Precisión y tiempos de cómputo para el TJ

El Transporte de Jets es una herramienta conveniente por dos principales razones: la primera es que al integrar la parametrización de la vecindad de \mathbf{x}_0 con polinomios de orden M , se pueden obtener términos variacionales hasta de este orden de manera automática. En este sentido, es importante que el transporte sea suficientemente preciso para dichas variaciones. Se propuso en la sección 3.2 una forma de controlar el error del método via ξ_{max} . En éste apéndice se mostrará, tomando al PC3C, la precisión respecto a la integración nominal a distintos órdenes de jet y distintas condiciones iniciales, con todos los demás parámetros fijos.

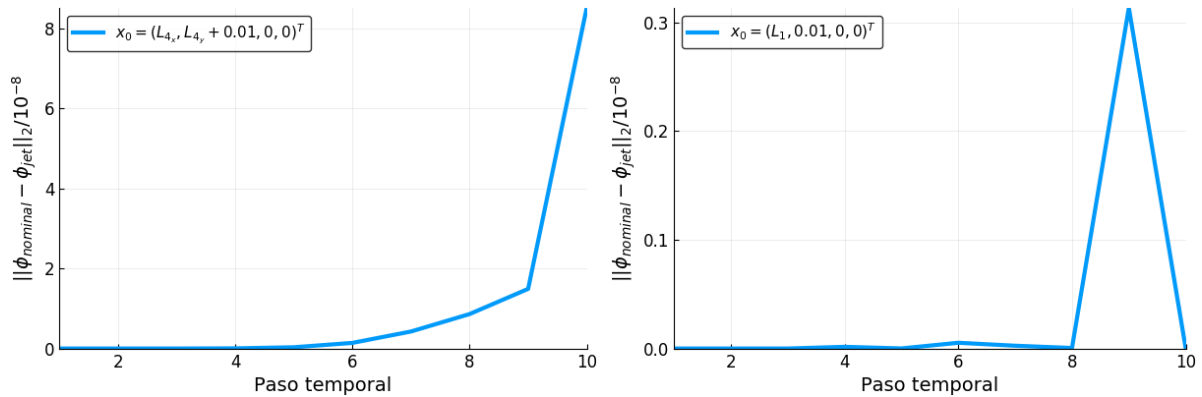


Figura A.1: Diferencia entre la integración nominal y el Transporte de Jets para dos condiciones iniciales del PC3C con $\mu = 0.012$. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, orden del jet $M = 4$ y 6 unidades temporales a 10 pasos de integración. *Izquierda:* $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$. *Derecha:* $\mathbf{x}_0 = (L_{1x}, 0.01, 0, 0)^T$.

En la figura A.1 se muestra cómo la precisión de las evaluaciones del jet para variaciones tamaño $\|\delta\mathbf{x}_0\| = \xi_{max}$ queda siempre del orden de 10^{-8} , que es bastante inferior a la cota máxima dada $\epsilon_{jet} = 10^{-5}$. El error de la condición $x_0 = (L_1, 0.01, 0, 0)^T$ es menor, sin embargo, el tamaño de la vecindad tuvo que ser mucho más pequeña $\xi_{max} = 2.03 \times 10^{-5}$ comparado con la otra condición inicial, donde $\xi_{max} = 2.33 \times 10^{-3}$.

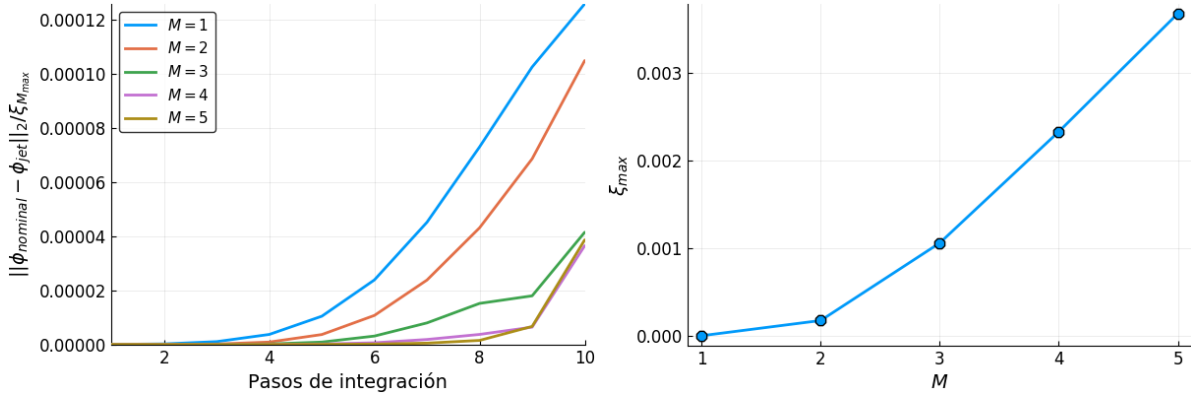


Figura A.2: *Izquierda:* Diferencia entre la integración nominal y el Transporte de Jets en términos del ξ_{max} correspondiente para diferentes órdenes M del jet con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, $\epsilon_{jet} = 10^{-5}$ y 6 unidades temporales a 10 pasos de integración. *Derecha:* Tamaño máximo de vecindad ξ_{max} para diferentes órdenes de jet con las condiciones mencionadas.

La figura izquierda de A.2 muestra la misma diferencia que A.1 en unidades de $\xi_{M_{max}}$, donde varía el orden del jet. Se toma como condición inicial a $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$. Se observa como el orden de magnitud del error disminuye entre mayor M , aún cuando para cada caso la cantidad esté dividida entre una ξ_{max} mayor. A la derecha de la figura se observa cómo ξ_{max} es notablemente más pequeña mientras menor es el orden utilizado. Esto quiere decir que siempre se puede obtener la misma precisión, con el precio de reducir el diámetro potencial de la vecindad inicial.

La segunda razón que vuelve atractivo al TJ es que propone una alternativa a los métodos de Monte Carlo. Una vez que el cálculo está hecho, basta con evaluar los polinomios resultantes para obtener la solución en las variaciones $\delta\mathbf{x}_0$ dadas. El problema radica en que las operaciones del álgebra polinomial son, por construcción, mucho más lentas que las operaciones numéricas estándar. Por esto, se hace un comparativo entre el TJ y el método de Monte Carlo para distinto número de evaluaciones a distintos órdenes M de los jets y, como en las gráficas anteriores, se mostrará para el péndulo simple y el PC3C, con todos los demás parámetros fijos.

Se muestra en la figura A.3 la integración de hasta 5000 condiciones iniciales cercanas para el péndulo y el PC3C. En ambos casos se tiene un comportamiento parecido donde, para pocas integraciones, el método de Monte Carlo es más rápido que el TJ. Esto se

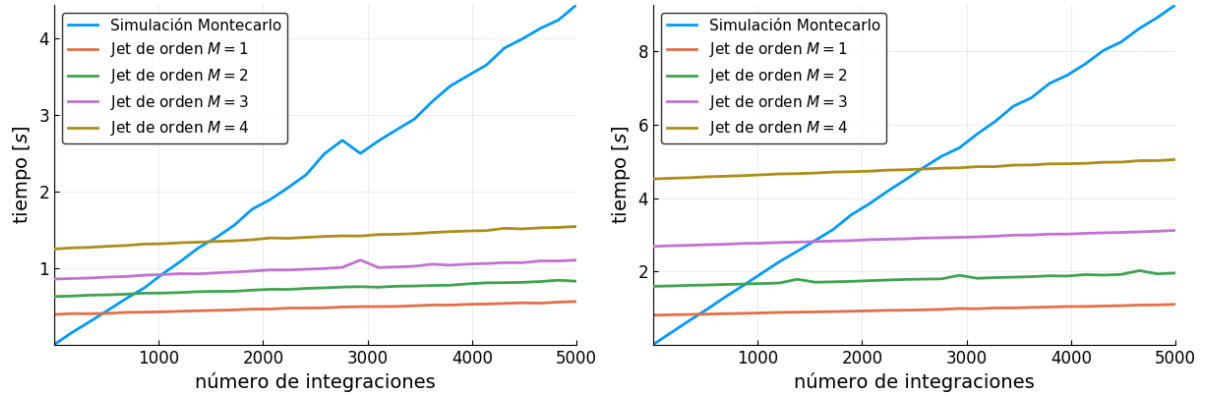


Figura A.3: Tiempo en segundos de cómputo en función del número de condiciones iniciales propagadas utilizando órdenes $M = \{1, 2, 3, 4\}$ en dorado, violeta, verde y naranja, respectivamente. Las integraciones para ambos casos fueron realizadas con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$ y 10 pasos de integración que, en el caso del péndulo, corresponden a un periodo. *Izquierda:* péndulo simple con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (\pi/2, 0)^T$. *Derecha:* PC3C con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$ y $\mu = 0.012$, el parámetro Tierra-Luna.

debe a la lentitud algebraica de los polinomios operados. Sin embargo, el tiempo que demora el TJ durante toda la gráfica es casi constante para todos los órdenes; cada orden con su tiempo característico. Dicho tiempo no es exactamente constante dado que la evaluación de los polinomios sí requiere tiempo, aunque es mucho menor al de hacer una integración más. En el caso de Monte Carlo, se tiene aproximadamente una recta de pendiente positiva, lo cual es de esperarse ya que en la vecindad cada integración demora aproximadamente lo mismo.

No todas las condiciones iniciales en el espacio fase tardan el mismo tiempo en integrarse para el mismo intervalo temporal. Por esto, se presenta la figura A.4, donde se observa la dependencia de cómputo en función de la condición inicial seleccionada. El comportamiento del TJ sigue siendo casi constante aunque escala de manera considerable para las dos condiciones evaluadas. En el PC3C se hace mucho más evidente donde, para $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4x} + 0.01, 0, 0)^T$, el tiempo promedio del transporte ya evaluado es de 89.1 segundos, mientras que para $\mathbf{x}_0 = (L_1, 0.01, 0, 0)^T$ es de tan solo 3.05 segundos.

Finalmente, para concluir el apéndice se presentan resultados de tiempo de cómputo para algunas operaciones elementales usando el álgebra polinomial. La tabla A.1 presenta la velocidad de cómputo en escala logarítmica para polinomios de dos variables pero con orden de jet variable desde 1 hasta 32. Como referencia, la primera fila representa el tiempo que tarda hacer la misma operación elemental con un número de punto flotante arbitrario.

La tabla A.2, en cambio, mantiene constante el orden del jet a $M = 3$ pero cambia el número de variables para cada operación. En todos los casos se evaluó la función

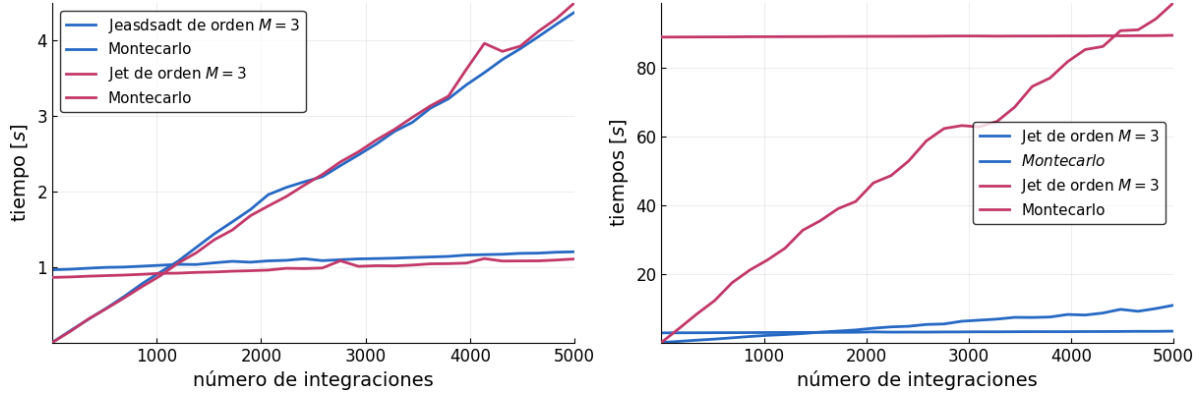


Figura A.4: Tiempo en segundos de cómputo en función del número de integraciones utilizando diferentes condiciones iniciales. Ambos casos fueron realizados con una tolerancia $\epsilon_{Taylor} = 10^{-18}$, orden de la expansión $N = 20$, orden del jet $M = 3$ y 10 pasos de integración que, en el caso del péndulo, corresponden a un periodo. *Izquierda:* péndulo simple con condiciones inicial $\mathbf{x}_0 = (\pi/2, 0)^T$ (azul) y $\mathbf{x}_0 = (15\pi/16, 0)^T$ (magenta). *Derecha:* PC3C con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = (L_{4x}, L_{4y} + 0.01, 0, 0)^T$ (azul) $\mathbf{x}_0 = (L_1, 0 + 0.01, 0, 0)^T$ (magenta), con $\mu = 0.012$.

	sin	cos	exp	log
$M = 0$	-8.02	-8.02	-8.12	-8.0
$M = 1$	-6.06	-6.06	-6.38	-6.34
$M = 2$	-5.87	-5.88	-6.18	-6.13
$M = 4$	-5.59	-5.59	-5.91	-5.85
$M = 8$	-5.2	-5.2	-5.5	-5.48
$M = 16$	-4.73	-4.73	-5.05	-5.02
$M = 32$	-4.14	-4.14	-4.45	-4.44

Tabla A.1: Logaritmo base 10 del tiempo que demora hacer ciertas funciones elementales para polinomios $P(\mathbf{x}) \in {}^M P_{\mathbb{R}^2}$, es decir, polinomios en dos variables de orden M . $M = 0$ representa la operación aritmética con un número flotante arbitrario.

elemental en la primera variable independiente del polinomio, pero tomando en cuenta que $P(\mathbf{x}) \in {}^3 P_{\mathbb{R}^d}$, con $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Todos los cálculos aquí presentados fueron realizados en serie, con un CPU Intel®Core™i7-7700HQ @ 2.80GHz \times 8. El lenguaje utilizado para el cálculo es [Julia](#), versión 0.6.0. El álgebra polinomial es operado con el paquete [TaylorSeries](#) [5] versión 0.7.2 y la integración del Transporte de Jets es realizada con el paquete [TaylorIntegration](#) [5] versión 0.2.1.

	sin	cos	exp	log
$\#vars = 0$	-8.02	-8.02	-8.12	-8.00
$\#vars = 1$	-5.68	-5.68	-5.98	-5.92
$\#vars = 2$	-5.60	-5.59	-5.90	-5.84
$\#vars = 3$	-5.56	-5.56	-5.87	-5.82
$\#vars = 4$	-5.53	-5.53	-5.84	-5.80
$\#vars = 5$	-5.47	-5.47	-5.78	-5.74

Tabla A.2: Logaritmo base 10 del tiempo que demora hacer cada operación elemental para polinomios $P(\mathbf{x}) \in {}^3P_{\mathbb{R}^d}$, es decir, polinomios en d variables de orden $M = 3$. $\#vars = 0$ representa la operación aritmética con un número flotante arbitrario.

Marcos de referencia en rotación

Sea un marco de referencia que rota respecto algún eje de simetría con velocidad angular $\theta(t)$. Si basamos un marco de referencia inercial tal que el eje de rotación coincida con el eje z , la relación entre ambos se puede expresar en coordenadas cilíndricas como

$$\begin{aligned}\hat{i}_r(t) &= \cos \theta(t) \hat{i}_i + \sin \theta(t) \hat{j}_i, \\ \hat{j}_r(t) &= -\sin \theta(t) \hat{i}_i + \cos \theta(t) \hat{j}_i, \\ \hat{k}_r(t) &= \hat{k}_i,\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde los subíndices “ r ” y “ i ” se refieren a los marcos de referencia rotado e inercial, respectivamente. Así, el cambio de los unitarios respecto al tiempo son

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{i}_r(t) &= \dot{\theta}(t) (-\sin \theta(t) \hat{i}_i + \cos \theta(t) \hat{j}_i), \\ \frac{d}{dt} \hat{j}_r(t) &= \dot{\theta}(t) (-\cos \theta(t) \hat{i}_i - \sin \theta(t) \hat{j}_i), \\ \frac{d}{dt} \hat{k}_r &= 0.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Siguiendo la construcción del capítulo 27 de [14], definimos al vector de rotación $\boldsymbol{\Omega} := (0, 0, \dot{\theta})$ y, con éste, cualquier término de (B.2) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \hat{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{u}.\tag{B.3}$$

Sea entonces $\mathbf{f}(t) = f_x(t) \hat{i} + f_y(t) \hat{j} + f_z(t) \hat{k}$ una cantidad definida en el marco que rota, la descripción de su derivada desde el marco de referencia inercial es, por la regla del producto,

$$\left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right)_i = \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{f}$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_i := \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \quad (\text{B.4})$$

es un operador que expresa la derivada de \mathbf{f} en el marco de referencia inercial.

Con (B.4) se pueden expresar la velocidad

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r, \quad (\text{B.5})$$

y la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \right] [\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r] \\ &, \\ \therefore \ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{\mathbf{r}}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

en relación al marco de referencia inercial del sistema.

Con esto, podemos ver que si una partícula de masa m tiene una aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$ en el marco en rotación, ésta sentirá una serie de fuerzas ficticias si es vista desde un marco inercial. Al término “ $2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ ” se le conoce como *fuerza centrípeta*, a “ $m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ ” como la *fuerza de Coriolis* y a “ $m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$ ” como *fuerza de Euler*.

Notemos que si la rotación es uniforme entonces $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$. Además, si el sistema es cerrado en el marco en rotación, entonces, por la segunda ley de Newton, (B.6) se reduce a

$$\ddot{\mathbf{r}}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_r = \ddot{\mathbf{r}}_i - \nabla \left(\frac{1}{m}U(\mathbf{r}_r) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_r^2 \right). \quad (\text{B.7})$$

Bibliografía

- [1] D. Pérez-Palau, J. J. Masdemont, and G. Gómez, “Jet Transport Propagation of Uncertainties for Orbits around the Earth,” *64th International Astronautical Congress 2013*, pp. 1–8, 2013.
- [2] D. Pérez-Palau, J. J. Masdemont, and G. Gómez, “Tools to detect structures in dynamical systems using Jet Transport,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 123, no. 3, pp. 239–262, 2015.
- [3] A. Haro, “Automatic differentiation methods in computational dynamical systems: Invariant manifolds and normal forms of vector fields at fixed points,” 2009.
- [4] L. Benet and D. Sanders. <https://github.com/JuliaDiff/TaylorSeries.jl>.
- [5] J. Pérez and L. Benet. <https://github.com/PerezHz/TaylorIntegration.jl>.
- [6] D. Pérez-Palau, “Dynamical transport mechanisms in celestial mechanics and astrodynamics problems,” 2015.
- [7] M. Berz, “High order computation and normal form analysis of repetitive systems, Chapter of “Physics of Particle Accelerators”,” pp. 1–34, 1991.
- [8] M. Berz, “Differential Algebraic Techniques, Entry in ‘Handbook of Accelerator Physics and Engineering’,” vol. 9, pp. 4–10.
- [9] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, and E. Martinec, “An Introduction to Quantum Field Theory,” 1996.
- [10] J. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2008.
- [11] S. J. Aarseth, M. Henon, and R. Wielen, “A comparison of numerical methods for the study of star cluster dynamics,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 37, pp. 183–187, 1974.

- [12] D. P. Kroese, “Monte Carlo Methods,” p. 176, 2011.
- [13] R. Spigler, “Monte Carlo-type Simulation Differential Equations,” vol. 29, pp. 243–251, 1987.
- [14] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*. University of Chicago Press, 1989.
- [15] G. Haller, “A variational theory of hyperbolic Lagrangian Coherent Structures,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 240, no. 7, pp. 574–598, 2011.
- [16] S. C. Shadden, F. Lekien, and J. E. Marsden, “Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 212, no. 3-4, pp. 271–304, 2005.
- [17] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, and G. Vattay, “Hamiltonian dynamics,” in *Chaos: Classical and Quantum*, ch. 8, Copenhagen: Niels Bohr Inst., 2016.
- [18] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, “Classical Mechanics,” 2007.
- [19] J. L. Lagrange, *Oeuvres de Lagrange Tome 1*. 1867.
- [20] L. Euler, “De Motu Rectilineo: Trivm Corporvm se Mvtvo Attrahentivm,” in *Mechanica, sive motus scientia analytica exposita*, pp. 144–151, 1736.
- [21] N. J. Cornish and J. Goodman, “The Lagrange points,” *WMAP Education and Outreach*, pp. 1–8, 1998.
- [22] S. Widnall, “Exploring the Neighborhood: the Restricted Three-Body Problem,” ch. Lecture L18, pp. 1–11, 2008.
- [23] J. Mireles James, “Celestial Mechanics Notes Set 4: The Circular Restricted Three Body Problem,” *Published December*, pp. 1–65, 2006.
- [24] R. J. Hodrick and E. C. Prescott, “Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation,” *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 29, 1997.
- [25] H. Kim, “Hodrick-prescott filter,” 2004.
- [26] J. Desmars, D. Bancelin, D. Hestro, and W. Thuillot, “Statistical and Numerical Study of Asteroid Orbital Uncertainty,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 554, p. 7, 2013.
- [27] O. Johns, *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*. Oxford Graduate Texts, Oxford University Press, 2 ed., 2011.

- [28] O. Johns, *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*, ch. 17 Canonical Transformations. In *Oxford Graduate Texts* [27], 2 ed., 2011.
- [29] H. Broer, B. Krauskopf, G. Vegter, and C. Simó, “Global Analysis of Dynamical Systems,” 2001.