



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos Problemas de Capa Límite
en Ecuaciones de Difusión

Tesis

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta

Fabiana Alicia Cesa Costaguta

México, D. F. 1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

1	Ecuación lineal de difusión	1
1.1	Caso unidimensional	1
1.1.1		1
1.1.2		7
1.1.3		16
1.2	Caso bidimensional	19
1.2.1		19
1.2.2		27
2	Difusión de frentes no lineales en dos dimensiones	34
2.1	El problema en una dimensión	35
2.2	Movimiento de frentes	36
3	Ecuación de difusión no lineal	46
3.1	La ecuación transformada	47
3.2	Aproximación de primer orden	48
3.3	Tipos posibles de movimientos	53
3.3.1	Máxima curvatura en los extremos del soporte	53
3.3.2	Máxima curvatura dentro del soporte	56
3.3.3	Análisis de tiempos de espera para intercara generales	59
3.4	Aproximación a orden más alto	60
3.4.1	El choque ocurre lejos de la intercara	60
3.4.2	Cuando el choque ocurre en la intercara	68

INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente trabajo se revisan algunos ejemplos de problemas de difusión. En la primera parte se estudian los efectos de la difusión lineal sobre una condición inicial discontinua. Se observa que para cualquier t positiva, la discontinuidad desaparece transformándose en una región de transición suave entre los valores extremos de la solución —es lo que se denominará capa límite— cuyo ancho depende del valor de ε y aumenta a medida que transcurre el tiempo. Cuando ε tiende a cero el ancho de la región disminuye; en el límite se recupera la solución para $\varepsilon = 0$; es decir, la discontinuidad se conserva para cualquier t positiva.

En el caso bidimensional se puede apreciar que el comportamiento de la capa depende de la curvatura.

En el Capítulo 2 se parte de los resultados conocidos para la ecuación

$$u_t = \varepsilon \Delta u + f(u)$$

en su versión unidimensional, donde f es la correspondiente a la ecuación de Nagumo o la de Fisher, para estudiar el caso bidimensional.

Se ve que para dos dimensiones se pueden encontrar soluciones aproximadas que consisten de ondas viajeras unidimensionales a lo largo de frentes que se mueven normales a sí mismos. Se completa el análisis con un estudio del movimiento del frente generado por la versión bidimensional de la ecuación.

Por último se estudia la ecuación

$$u_t = (u^\varepsilon)_x \quad \text{para } \varepsilon \ll 1$$

Se puede observar que a pesar de ser ε pequeña, para algunas condiciones iniciales particulares se presenta un comportamiento cualitativamente diferente al de la ecuación lineal: la solución espera un tiempo finito antes de comenzar a moverse.

Capítulo 1

Ecuación lineal de difusión

1.1 Caso unidimensional

En esta primera parte se estudiarán los casos más sencillos de difusión lineal:

$$u_t + a(x)u_x = \varepsilon c(x)u_{xx}$$

Partiendo de una condición inicial discontinua en cero, se observará en detalle el comportamiento de la solución en esa región y se verá cómo la discontinuidad se suaviza para cualquier $t > 0$, creciendo el ancho de la región donde u se encuentra entre sus valores extremos —por lo que se le llamará capa límite— a medida que transcurre el tiempo y con una rapidez dependiente del tamaño de ε .

1.1.1

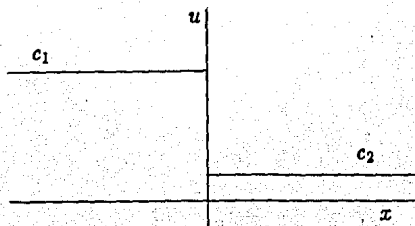
El primer caso a considerar será $a(x)$ constante y $c(x) = 1$.

$$u_t + au_x = \varepsilon u_{xx} \tag{1}$$

Con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{para } x < 0 \\ c_2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

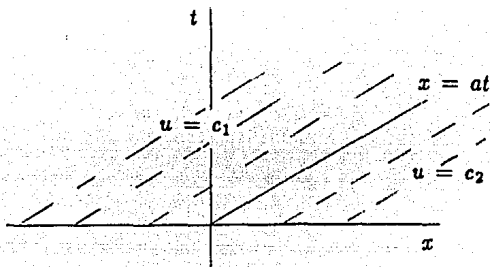
donde $c_1 > c_2$



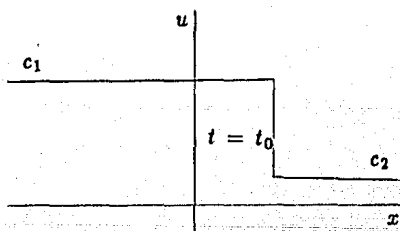
Cuando $\varepsilon = 0$, si se observan los valores de u a lo largo de curvas parametrizadas por t , se tiene que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

entonces la ecuación $u_t + au_x = 0$ es la derivada total de u a lo largo de una curva cuya pendiente es a , ya que ambas expresiones son iguales si $\frac{dx}{dt} = a$. Por esto último



$x(t) = at + \eta$ es la familia de curvas donde u es constante; la discontinuidad se propaga a lo largo de la recta $x(t) = at$ y mantiene allí su valor inicial. Para $t > 0$ se tendrá



Si ε no es cero, se reescalará

$$\xi = \frac{x - at}{\sqrt{\varepsilon}}$$

para observar el comportamiento de la solución cerca de la discontinuidad. La ecuación (1) se transforma en

$$u_t = u_{\xi\xi}$$

que es nada menos que la ecuación de calor y cuya solución se encuentra utilizando la Transformada de Fourier.

Para la condición inicial dada se obtiene:

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ c_1 \int_{-\infty}^0 \exp \left[- \left(\frac{\xi - s}{2\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds + c_2 \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\xi - s}{2\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds \right\}$$

Haciendo

$$v = \frac{\xi - s}{2\sqrt{t}}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -c_1 \int_{\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}} \exp(-v^2) dv - c_2 \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}}^{-\infty} \exp(-v^2) dv \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -c_1 \int_{\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}} \exp(-v^2) dv + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v^2) dv \right. \\ &\quad \left. - c_2 \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}}^{-\infty} \exp(-v^2) dv \right\} \\ &= \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}} \exp(-v^2) dv + c_1 \end{aligned}$$

Cabe destacar que el estudio de la solución cerca de la región de transición no era, en este caso, estrictamente necesario ya que la ecuación $u_t + au_x = \varepsilon u_{xx}$ tiene solución exacta, misma que se encontrará a continuación.

Denominando $\hat{u}(k, t)$ a la Transformada de Fourier de $u(x, t)$, la ecuación (1) queda

$$\hat{u}_t + (aik + \varepsilon k^2) \hat{u} = 0$$

con condición inicial

$$\hat{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy$$

donde

$$f(y) = \begin{cases} c_1 & \text{para } y < 0 \\ c_2 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

entonces

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) \exp[-(aik + \epsilon k^2)t]$$

de donde, aplicando la transformada inversa

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-iky) dy \right\} \exp[-(aik + \epsilon k^2)t + ikx] dk$$

intercambiando integrales y completando el cuadrado

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left\{ \exp \left[- \left(\frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{\epsilon t} k - i \frac{(x - at - y)}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] dk \right\} dy$$

con el siguiente cambio de variable

$$s = \sqrt{\epsilon t} k - i \frac{(x - at - y)}{2\sqrt{\epsilon t}}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[- \left(\frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \right\} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[- \left(\frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] dy \end{aligned}$$

sustituyendo $f(y)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon t}} \left\{ c_1 \int_{-\infty}^0 \exp \left[- \left(\frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] dy \right. \\ &\quad \left. + c_2 \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}} \right)^2 \right] dy \right\} \end{aligned}$$

cambiando variables:

$$\eta = \frac{x - at - y}{2\sqrt{\epsilon t}}$$

y los límites de integración

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-at}{2\sqrt{\epsilon t}}} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

que, si se recuerda el cambio de variable hecho para situarse en la región de la discontinuidad, coincide con la solución hallada anteriormente para dicha región.

Hasta el momento se ha visto que si $\epsilon = 0$ la discontinuidad se mantiene a lo largo de la recta $x = at$ y que si $\epsilon \neq 0$, la discontinuidad se va suavizando —manteniendo la recta $x = at$ como eje ya que $u(x, t) = \frac{c_1 + c_2}{2}$ allí para cualquier $t > 0$ —, comportándose en la región de transición en forma similar a la solución de la ecuación del calor.

La pregunta que surge a continuación es qué sucede con la solución al variar el tamaño de ϵ .

Cuando ϵ tiende a cero

$$\frac{x - at}{2\sqrt{\epsilon t}} \rightarrow \infty \quad \text{cuando } x > at$$

y

$$\frac{x - at}{2\sqrt{\epsilon t}} \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } x < at$$

de donde se sigue que

$$u(x, t) \rightarrow c_1 \quad \text{si } x < at$$

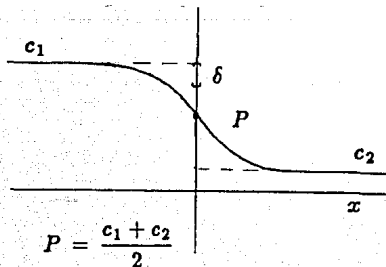
y

$$u(x, t) \rightarrow c_2 \quad \text{si } x > at$$

lo que permite ver que en el límite se recupera la solución para $\epsilon = 0$ y que si el tamaño de ϵ disminuye también lo hace el ancho de la región en que u se encuentra entre c_1 y c_2 .

Para determinar el ancho de esa región, considérese un punto donde

$$u(x, t_0) = c_1 - \delta$$



para alguna t_0 fija y $0 < \delta < \frac{c_1 + c_2}{2}$; entonces

$$u(x, t_0) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - at_0}{2\sqrt{at_0}}} e^{-\eta^2} d\eta = c_1 - \delta$$

como el punto que se está considerando satisface $x < at$ se tiene

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{\frac{x - at}{2\sqrt{at}}} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^{\frac{x - at}{2\sqrt{at}}} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{x - at}{2\sqrt{at}}} e^{-\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

Desarrollando la exponencial en serie de Taylor

$$\begin{aligned} G(x) &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{\frac{x - at}{2\sqrt{at}}}^0 (1 - \eta^2) d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{x - at}{2\sqrt{at}} - \frac{1}{3} \left(\frac{x - at}{2\sqrt{at}} \right)^3 \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{x - at}{2\sqrt{at}} \end{aligned}$$

para puntos cercanos a la recta $x = at$.

Por lo tanto

$$\delta \sim \frac{c_1 - c_2}{2} + \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x - at}{2\sqrt{at}} \right)$$

y, despejando x

$$x \sim \left(\delta + \frac{c_2 - c_1}{2} \right) \frac{2\sqrt{\pi at}}{c_1 - c_2} + at$$

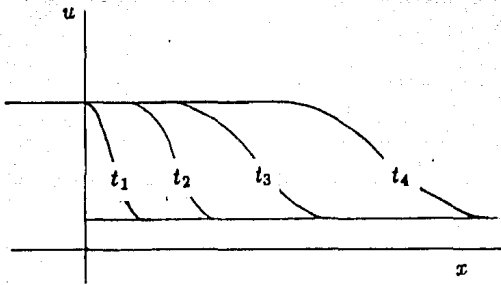
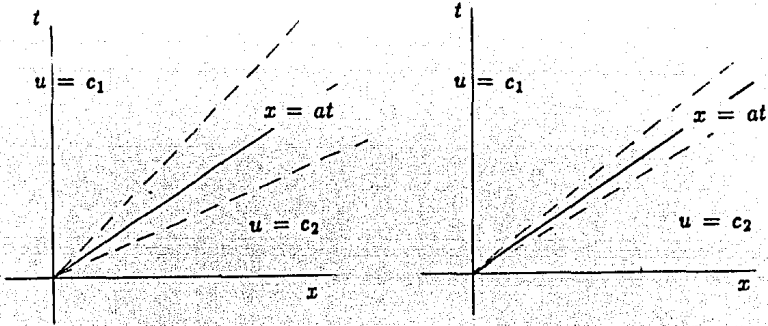
Haciendo tender δ a cero se obtiene el valor límite de x para $u = c_1$:

$$x \sim -\sqrt{\pi at} + at$$

Si ahora se considera un punto donde $u = c_2 + \delta$, siguiendo el mismo razonamiento se llega a que

$$x \sim \sqrt{\pi at} + at$$

De aquí se concluye que para que se cumpla $c_1 < u < c_2$, $x - at$ debe encontrarse entre $-\sqrt{\pi \epsilon t}$ y $\sqrt{\pi \epsilon t}$. La figura derecha muestra una capa límite para alguna ϵ más pequeña que la correspondiente a la figura izquierda.



1.1.2

Se tomará ahora $a(x)$ no constante, continua y con primera derivada continua. Para $\epsilon = 0$ y siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior se concluye que,

considerando a x y u como funciones de t , la discontinuidad se mueve sobre una curva que satisface

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t)) \quad \text{y} \quad x(0) = 0$$

y u es constante sobre dicha curva. Cuando ε no es cero, se estudiará el comportamiento de la solución cerca de la región de transición, reescalando

$$\xi = \frac{x - x(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

donde $x(t)$ es la curva sobre la cual se mueve la discontinuidad. La idea de este cambio de variable fue sugerida por el hecho de que en el caso anterior este método permite encontrar una solución para esa región que coincide con la solución exacta del problema. Por tanto, puede esperarse que cuando a no es constante, la aproximación sea buena.

Después del cambio de variable la ecuación $u_t + a(x)u_x = \varepsilon u_{xx}$ se convierte en

$$u_t - \dot{x}(t) \frac{u_\xi}{\sqrt{\varepsilon}} + a(x(t) + \sqrt{\varepsilon} \xi) \frac{u_\xi}{\sqrt{\varepsilon}} = u_{\xi\xi} \quad (1)$$

Desarrollando $a(x)$ en Serie de Taylor, cerca de $x(t)$,

$$a(x(t) + \sqrt{\varepsilon} \xi) \sim a(x(t)) + \sqrt{\varepsilon} \xi a'(x(t))$$

y sustituyendo en (1) se obtiene

$$u_t - \frac{\dot{x}(t)u_\xi}{\sqrt{\varepsilon}} + a(x(t)) \frac{u_\xi}{\sqrt{\varepsilon}} + a'(x(t)) \xi u_\xi = u_{\xi\xi} \quad (2)$$

A $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, $a(x(t)) - \dot{x}(t) = 0$ —lo cual, coincide con el caso $\varepsilon = 0$ — y (2) se simplifica en

$$u_t + a'(x(t)) \xi u_\xi = u_{\xi\xi} \quad (3)$$

La condición inicial es la misma que para el caso anterior y se mantiene después del cambio de variable:

$$u(\xi, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{para } \xi < 0 \\ c_2 & \text{para } \xi > 0 \end{cases}$$

Otra vez, denominando $\hat{u}(k, t)$ a la Transformada de Fourier de $u(\xi, t)$ se tiene que

$$(u_t)^\wedge(k, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t)$$

$$(u_{\xi\xi})^\wedge(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

$$\begin{aligned}
 (\xi u_\xi)^{\wedge} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} \xi u_\xi d\xi = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dk} e^{-ik\xi} u_\xi d\xi \\
 &= i \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} u_\xi d\xi = i \frac{d}{dk} (ik\hat{u}) \\
 &= -\frac{d}{dk} (k\hat{u}) = -(k\hat{u}_k + \hat{u})
 \end{aligned}$$

lo que permite hacer de (3) una ecuación de primer orden:

$$\hat{u}_t - a'(x(t))k\hat{u}_k = (a'(x(t)) - k^2)\hat{u}$$

con condición inicial

$$\hat{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy$$

donde

$$f(y) = \begin{cases} c_1 & \text{para } y < 0 \\ c_2 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

Resolviendo por el método de las características, utilizando como parámetros λ y η .

Cuando $\eta = 0$, $t_0(\lambda) = 0$, $k_0(\lambda) = \lambda$

$$\hat{u}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\lambda y} dy$$

Las ecuaciones de las características son:

$$\frac{dt}{d\eta} = 1$$

$$\frac{dk}{d\eta} = -a'(x(\eta))k$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\eta} = (a'(x(\eta)) - k^2)\hat{u}$$

lo que implica que:

$$t(\lambda, \eta) = \eta$$

$$k(\lambda, \eta) = \lambda \exp\left(-\int_0^\eta a'(x(s)) ds\right)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\lambda, \eta) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\lambda y) dy \right\} \\
 &\exp \left\{ \int_0^\eta a'(x(s)) - \lambda^2 \exp(-2 \int_0^s a'(x(v)) dv) ds \right\}
 \end{aligned}$$

volviendo a las variables originales y llamando

$$b(t) = \int_0^t a'(x(s)) ds$$

$$\hat{u}(k, t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp[-iyk \exp(b(t))] dy \right\} \\ \exp \left\{ b(t) - k^2 \exp(2b(t)) \int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right\}$$

Al aplicar la transformada inversa se obtiene

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp[-iyk \exp b(t)] dy \right\} \\ \exp \left[b(t) - k^2 \exp(2b(t)) \int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right] dk$$

Intercambiando las integrales y completando el cuadrado se llega a la expresión:

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left\{ b(t) - \frac{[\xi - y \exp(b(t))]^2}{4 \exp(2b(t)) \int_0^t \exp(-2b(s)) ds} \right\} dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[k \exp(b(t)) \left(\int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{\xi - y \exp(b(t))}{2 \exp(b(t)) \left(\int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \right\} dk$$

Haciendo

$$\tau = k \exp(b(t)) \left(\int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right)^{\frac{1}{2}} = k \exp(b(t)) H(t)$$

la solución se reduce a

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} H(t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left\{ - \left[\frac{\xi - y \exp(b(t))}{2 \exp(b(t)) H(t)} \right]^2 \right\} dy \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi} H(t)} \left\{ c_1 \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ - \left[\frac{\xi - y \exp(b(t))}{2 \exp(b(t)) H(t)} \right]^2 \right\} dy \right. \\ \left. + c_2 \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{\xi - y \exp(b(t))}{2 \exp(b(t)) H(t)} \right]^2 \right\} dy \right\}$$

Haciendo

$$\tau = \frac{\xi - y \exp(b(t))}{2 \exp(b(t)) H(t)}$$

e invirtiendo los límites de integración la solución obtenida es

$$u(\xi, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\xi, t)} e^{-\tau^2} d\tau + c_1$$

donde

$$\alpha(\xi, t) = \frac{\xi}{2 \left[\exp(2 b(t)) \int_0^t \exp(-2b(s)) ds \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Esta solución se acopla con la condición inicial ya que

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &\rightarrow c_1 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow -\infty \\ u(\xi, t) &\rightarrow c_2 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \infty \end{aligned}$$

y, además si a es constante se recupera la solución hallada en la sección anterior.

Como en el caso anterior $u(x, t) = \frac{c_1 + c_2}{2}$ sobre la curva $x(t)$, donde se mueve la discontinuidad, ya que $\alpha(\xi, t) = 0$ en dicha curva.

También como en el caso anterior, cuando ε tiende a cero se llega a la solución para $\varepsilon = 0$ debido a que α tiende a $-\infty$ o a ∞ según $x < x(t)$ o $x > x(t)$ respectivamente. Regresando a las variables originales α se puede escribir

$$\alpha(x, t) = \frac{x - x(t)}{2 \left[\varepsilon \exp(2 b(t)) \int_0^t \exp(-2 b(s)) ds \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Utilizando un procedimiento similar al empleado en la sección anterior se puede encontrar que el ancho de la región de transición es

$$2 \left[\pi \varepsilon \exp(-2 b(t)) \int_0^t \exp(2 b(s)) ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

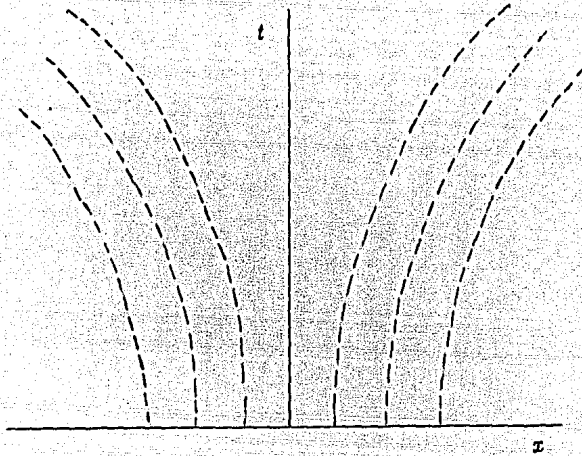
y que dicha región es simétrica con respecto a la curva $x(t)$.

EJEMPLO 1

Se considerará el ejemplo

$$u_t + xu_x = \varepsilon u_{xx} \quad (4)$$

En este caso, cuando $\varepsilon = 0$ se tiene que la discontinuidad se mueve sobre una curva tal que $\frac{dx}{dt} = x(t)$, entonces $x(t) = x_0 e^t$ pero de la condición inicial, $x(t) = 0$. u mantiene su valor inicial a lo largo de las características $x_0 e^t$, por lo tanto la discontinuidad en $t = 0$ se mantiene como tal para cualquier $t > 0$ a lo largo de la recta $x(t) = 0$.



Se encontrará ahora la solución exacta de (4).

Si $\hat{u}(k, t)$ es la Transformada de Fourier de $u(x, t)$, la ecuación de arriba se transforma en:

$$\hat{u}_t - k\hat{u}_k = (1 - k^2\varepsilon)\hat{u}$$

Utilizando una vez más el método de las características, para $\eta = 0$, $t_0(\lambda) = 0$, $k_0(\lambda) = \lambda$ y

$$\hat{u}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\lambda y} dy$$

Las ecuaciones de las características son:

$$\frac{dt}{d\eta} = 1$$

$$\frac{dk}{d\eta} = -k$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\eta} = (1 - \varepsilon k^2)\hat{u}$$

lo que implica que:

$$t(\lambda, \eta) = \eta$$

$$k(\lambda, \eta) = \lambda e^{-\eta}$$

$$\hat{u}(\lambda, \eta) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\lambda y) dy \right\} \exp \int_0^{\eta} (1 - \varepsilon \lambda^2 e^{-2s}) ds$$

o bien

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[-i y k e^t + t + \frac{\varepsilon k^2}{2} (1 - e^{2t}) \right] dy$$

Aplicando la transformada inversa

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{k^2 \varepsilon}{2} (1 - e^{2t}) + ik(-ye^t + x) \right] dk \right\} dy$$

lo que, completando el cuadrado y cambiando de variables puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^t}{\sqrt{2\varepsilon\pi}(e^{2t}-1)} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[- \left(\frac{x - ye^t}{\sqrt{2\varepsilon}(e^{2t}-1)} \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{e^t(c_1 - c_2)}{\sqrt{2\varepsilon\pi}(e^{2t}-1)} \int_{-\infty}^0 \exp \left[- \left(\frac{x - ye^t}{\sqrt{2\varepsilon}(e^{2t}-1)} \right)^2 \right] dy + c_1 \end{aligned}$$

Haciendo

$$\eta = \frac{x - ye^t}{\sqrt{2\varepsilon}(e^{2t}-1)}$$

se obtiene

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(x, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

donde

$$\alpha(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}(e^{2t}-1)}$$

Esta expresión para α coincide con la encontrada para la solución cerca de la curva donde u es constante, sólo hay que considerar que $a(x) = x$ y, por consiguiente, $a'(x) = 1$

Esto no es sorprendente si se toma en cuenta que la aproximación hecha para $a(x)$ en el caso general no es tal cuando $a(x) = x$. Además $u(x, t) = \frac{c_1 + c_2}{2}$ cuando $x = 0$ para cualquier $t \neq 0$.

El ancho de la capa es, en este caso,

$$[2\pi\varepsilon(e^{2t}-1)]^{\frac{1}{2}}$$

expresión que resulta una función creciente de t ; el ancho de la capa aumenta rápidamente a igual que la distancia entre las características.

EJEMPLO 2

El siguiente ejemplo a considerar es $a(x) = x + x^2$. Para $\varepsilon = 0$, u es constante sobre las curvas que satisfacen

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + x^2(t) \quad \text{y} \quad x(0) = x_0$$

es decir sobre las curvas

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{x_0(1 - e^t) + 1}$$

y de la condición inicial se sabe que la discontinuidad comienza en $x(0) = 0$; entonces, otra vez, ésta se mueve sobre el eje x , pero a diferencia del ejemplo anterior en el que las características existen para cualquier valor de t , aquí

$$x(t) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \ln\left(\frac{1}{x_0} + 1\right)$$

de modo que no se puede obtener información sobre la región de transición para t 's mayores.

El éxito de este método depende totalmente de la existencia de las características.

Cuando $\varepsilon \neq 0$, la solución en la región de transición es

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(x, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

donde

$$\alpha(x, t) = x \left[\varepsilon \exp\left(2t + 4 \int_0^t x(s) ds\right) \int_0^t \exp\left(-2s - 4 \int_0^s x(v) dv\right) ds \right]^{-\frac{1}{2}}$$

pero $x(t) = 0$ entonces α se reduce a

$$\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon^{2t} - 1)}}$$

como en el ejemplo anterior; y, el ancho de la capa es el también el mismo.

EJEMPLO 3

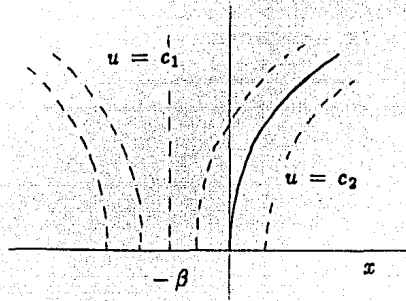
Por último se estudiará

$$u_t + a(x)u_x = \varepsilon u_{xx} \quad \text{con} \quad a(x) = x + \beta$$

Si $\varepsilon = 0$, u es constante a lo largo de las curvas que satisfacen

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + \beta \quad \text{o bien} \quad x(t) = (x_0 + \beta)e^t - \beta$$

y la discontinuidad se mueve sobre la curva $x(t) = \beta(e^t - 1)$.



Cuando $\varepsilon \neq 0$, en la región de transición se tiene como solución:

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(x, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

con

$$\alpha(x, t) = \frac{x - x(t)}{[2\varepsilon(e^{2t} - 1)]^{\frac{1}{2}}}$$

y el ancho de esa región es

$$\sqrt{2\varepsilon(e^{2t} - 1)}$$

Por lo tanto, la capa límite se comporta en forma similar al primer ejemplo a pesar de que la geometría de las características es diferente, esto se debe a que el ancho de la capa límite depende de a' y no de a .

Se obtendrá a continuación la solución exacta de

$$u_t + (x + \beta)u_x = \varepsilon u_{xx}$$

con el fin de compararla con la aproximación.

Utilizando nuevamente la Transformada de Fourier se obtiene la ecuación:

$$\hat{u}_t - k\hat{u}_k = (1 - ik\beta - \varepsilon k^2)\hat{u}$$

con condición inicial $\hat{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky} dy$

donde

$$u(x, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{para } x < 0 \\ c_2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

y $c_1 > c_2$.

La solución debida al método de las características es

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[-iyke^t - ik\beta(e^t - 1) + t + \frac{\epsilon k^2}{2}(e^{2t} - 1) \right] dy$$

lo cual, en términos de x es

$$u(x, t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\epsilon\pi(e^{2t} - 1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x - ye^t + \beta(e^t - 1)}{\sqrt{2\epsilon\pi(e^{2t} - 1)}} \right)^2 \right] dy$$

de donde se obtiene

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(x, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

con

$$\alpha(x, t) = \frac{x - \beta(e^t - 1)}{\sqrt{2\epsilon(e^{2t} - 1)}}$$

Como se ve, la solución exacta coincide la aproximación.

1.1.3

El último caso a considerar es el más general:

$$u_t + a(x)u_x = \epsilon c(x)u_{xx}$$

Para $\epsilon = 0$, como en la sección anterior, la discontinuidad se mueve a lo largo de una curva con pendiente $a(x)$, es decir que $\dot{x}(t) = a(x(t))$ y u es constante sobre esa curva. Por lo dicho $c(x)$ no influye en por dónde se mueve la discontinuidad, es de esperarse que lo haga en su ancho.

Cuando ϵ no es cero, se hará el mismo cambio de variables que en la sección 1.1.2, $\xi = \frac{x - x(t)}{\sqrt{\epsilon}}$, después de lo cual la ecuación se transforma en

$$u_t + a(x(t) + \xi\sqrt{\epsilon}) \frac{u_\xi}{\sqrt{\epsilon}} - \dot{x}(t) \frac{u_\xi}{\sqrt{\epsilon}} = \epsilon c(x(t) + \xi\sqrt{\epsilon}) \frac{u_{\xi\xi}}{\epsilon}$$

Desarrollando es Serie de Taylor cerca de la curva $x(t)$

$$a(x(t) + \xi\sqrt{\epsilon}) = a(x(t)) + a'(x(t))\xi\sqrt{\epsilon} + \dots$$

$$c(x(t) + \xi\sqrt{\epsilon}) = c(x(t)) + c'(x(t))\xi\sqrt{\epsilon} + \dots$$

A $O(\sqrt{\epsilon})$ se puede eliminar $c'(x(t))\xi\sqrt{\epsilon} u_{\xi\xi}$ y a $O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})$,

$$(a(x(t)) - \dot{x}) \frac{u_\xi}{\sqrt{\epsilon}} = 0$$

por lo que la ecuación a resolver es

$$u_t + a'(x(t)) \xi u_\xi = c(x(t)) u_{\xi\xi}$$

Nuevamente se emplea la Transformada de Fourier obteniéndose

$$\hat{u}_t - a'(x(t)) k \hat{u}_k = [a'(x(t)) - c(x(t)) k^2] \hat{u}$$

si se denomina

$$b(t) = \int_0^t a'(x(s)) ds$$

la solución hallada por el método de las características es

$$\hat{u}(k, t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-iky \exp(b(t))) dy \right\} \\ \exp [b(t) - k^2 \exp(2b(t))] \int_0^t c(x(s)) \exp(-2b(s)) ds$$

Tomando la transformada inversa y siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior se llega a la siguiente expresión para la solución cerca de $x(t)$

$$u(\xi, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\xi, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

donde

$$\alpha(\xi, t) = \xi \left[\exp(2b(t)) \int_0^t c(x(s)) \exp(-2b(s)) ds \right]^{-\frac{1}{2}}$$

o, en términos de x ,

$$\alpha(x, t) = (x - x(t)) \left[\varepsilon \exp(2b(t)) \int_0^t c(x(s)) \exp(-2b(s)) ds \right]^{-\frac{1}{2}}$$

También en este caso $u \rightarrow c_1$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $u \rightarrow c_2$ cuando $x \rightarrow \infty$ Para $c(x)$ no constante, el ancho de la región de transición es

$$2 \sqrt{\pi \varepsilon \exp(2b(t)) \int_0^t c(x(s)) \exp(-2b(s)) ds}$$

EJEMPLO

Por ejemplo

$$u_t + (x + \beta) u_x = \varepsilon x u_{xx}$$

De la sección 1.1.2 se sabe que la discontinuidad se mueve sobre la curva $x(t) = \beta(e^t - 1)$ y para la solución cerca de dicha curva se tiene

$$u(x, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(x, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

con

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \frac{x - \beta(e^t - 1)}{\left[\varepsilon e^{2t} \int_0^t \beta(e^s - 1) e^{-2s} ds \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x - \beta(e^t - 1)}{\left[\varepsilon \beta \left(\frac{3}{2} e^{2t} - e^{-t} - \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

y el ancho de la región de transición es

$$\left[\pi \varepsilon \beta \left(\frac{3}{2} e^{2t} - e^{-t} - \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

lo cual es una función creciente de t , si t es positivo. De igual forma que en el ejemplo con $c(x) = 1$, el ancho de la capa aumenta.

1.2 Caso bidimensional

En esta sección se estudiará el problema de difusión lineal en dos dimensiones. Si se toma como condición inicial una función discontinua a lo largo de una recta con valores constantes a uno y otro lado de la misma, el problema a resolver es similar al caso unidimensional, por lo que parece más interesante tomar como condición inicial una función discontinua sobre una curva simple cerrada C , y ver cómo se suaviza, en este caso, la discontinuidad.

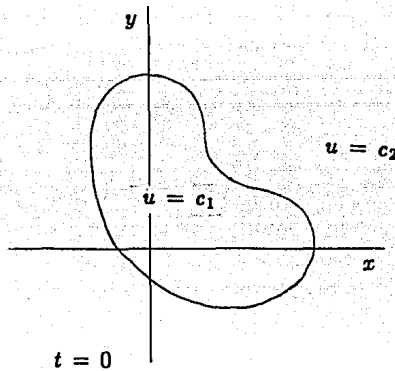
1.2.1

El primer problema por resolver es:

$$u_t + au_x + bu_y = \varepsilon \Delta u \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{dentro de } C \\ c_2 & \text{fuera de } C \end{cases}$$

donde $c_1 > c_2$



Cuando ε es cero, si se parametriza tanto x como y por t , la derivada de u con respecto a t será:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Por analogía con

$$u_t + au_x + bu_y = 0 \quad (2)$$

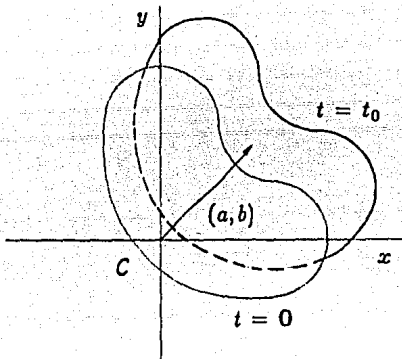
se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = b \quad (3)$$

o bien

$$(x(t), y(t)) = (a, b)t + (x_0, y_0)$$

La curva C se mueve entonces en la dirección (a, b) , y como $\frac{du}{dt} = 0$ cuando se cumple (3), u es constante en esa dirección; es decir que C se mueve paralelamente a (a, b) manteniendo los valores de u dentro y fuera, y manteniendo también su forma.

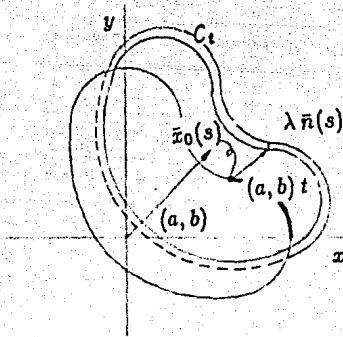


Para observar la solución cerca de la discontinuidad cuando $\epsilon \neq 0$ se emplearán coordenadas curvilíneas; se denominará s a la correspondiente a la dirección tangencial y λ a la correspondiente a la dirección normal a C .

Cada punto parametrizado ahora por s , λ y t es:

$$\bar{x}(s, \lambda, t) = \bar{x}_0(s) + (a, b)t + \lambda \bar{n}(s)$$

donde $\bar{x}_0(s)$ es el punto inicial sobre C ; $(a, b)t$, el traslado en dirección (a, b) y $\lambda \bar{n}(s)$, el estiramiento en dirección normal $-\bar{n}(s)$ es el vector normal unitario a la curva C trasladada, a quien se denominará C_t



Además, como $x_t = a$ y $y_t = b$ se obtiene que

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \Delta u$$

para las nuevas coordenadas.

El Laplaciano es:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x_s^2 + y_s^2)(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{\frac{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}{x_s^2 + y_s^2}} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sqrt{\frac{x_s^2 + y_s^2}{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \tau \quad (\text{tangente unitaria}), \\ \dot{t} &= K n \\ \dot{n} &= K(s)\tau(s), \quad \text{donde } K \text{ es la curvatura de } C; \end{aligned}$$

se tiene que

$$\sqrt{x_s^2 + y_s^2} = |\dot{x}_0 + \lambda \dot{n}| = |\tau + \lambda K \tau| = 1 + \lambda K$$

$$\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2} = |n| = 1$$

y sustituyendo en (4), la expresión para el lado derecho de (1) es

$$\varepsilon \Delta u = \frac{\varepsilon}{1 + \lambda K} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + \lambda K} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((1 + \lambda K) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \right]$$

Hasta el momento se ha transformado la ecuación (1) en una ecuación de calor en dos dimensiones. Al situarse en coordenadas locales, las derivadas de u con respecto a s son las variaciones de u en la dirección tangencial. Debido a que cuando ε es cero estas variaciones también son cero, se supondrá que para $\varepsilon \neq 0$ son pequeñas ya que la dirección en que se suaviza la discontinuidad es esencialmente normal. En pocas palabras, se despreciarán las derivadas en s por ser considerablemente más pequeñas que las derivadas en λ , en la capa límite.

Eliminando la derivada con respecto a s la ecuación que se obtiene es:

$$u_t = \frac{\varepsilon}{1 + \lambda K} [(1 + \lambda K) u_{\lambda\lambda} + K u_\lambda]$$

Como λ es pequeña cerca de C , se puede desarrollar

$$\frac{1}{1 + \lambda K} = 1 - \lambda K + \dots$$

y sustituyendo

$$u_t \sim \varepsilon [u_{\lambda\lambda} + K u_\lambda - \lambda K^2 u_\lambda]$$

Haciendo $\lambda = \xi\sqrt{\varepsilon}$

$$u_t = u_{\xi\xi} + \sqrt{\varepsilon} K u_\xi - \varepsilon \xi K^2 u_\xi$$

A $O(\sqrt{\varepsilon})$ se elimina el último término y la ecuación a resolver es:

$$u_t = u_{\xi\xi} + \sqrt{\varepsilon} K(s) u_\xi$$

con condición inicial

$$u(\xi, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{para } \xi < 0 \\ c_2 & \text{para } \xi > 0 \end{cases}$$

porque $\xi = 0$ sobre C

Una vez más empleando la Transformada de Fourier se obtiene

$$\hat{u}_t = (-k^2 + \sqrt{\varepsilon} K(s) ik) \hat{u}$$

con

$$\hat{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy$$

entonces la solución es

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) \exp[ik\sqrt{\epsilon} K(s)t - k^2 t]$$

con la transformada inversa, intercambiando integrales y completando el cuadrado se llega a

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{\epsilon} K(s)t + \xi - y}{2\sqrt{t}} \right)^2 \right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(k\sqrt{t} - i \left(\frac{\sqrt{\epsilon} K(s)t + \xi - y}{2\sqrt{t}} \right) \right)^2 \right] dk \right\} dy$$

haciendo

$$\tau = k\sqrt{t} - i \left(\frac{\sqrt{\epsilon} K(s)t + \xi - y}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{\epsilon} K(s)t + \xi - y}{2\sqrt{t}} \right)^2 \right] dy$$

Sustituyendo la condición inicial y haciendo

$$\eta = \frac{\sqrt{\epsilon} K(s)t + \xi - y}{2\sqrt{t}}$$

la solución queda

$$u(\xi, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\xi, t)} e^{-2\eta^2} + c_1$$

donde

$$\alpha(\xi, t) = \frac{\xi + \sqrt{\epsilon} K(s)t}{2\sqrt{t}}$$

o, en términos de λ

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\epsilon t}} + \frac{\sqrt{\epsilon t} K(s)}{2}$$

La u hallada describe el comportamiento de la solución de (1) en una vecindad pequeña de la capa límite exclusivamente. Por esta razón, se deberá restringir el valor de la curvatura, ya que cuando K es muy grande deja de tener valor la aproximación hecha anteriormente; se pedirá entonces $|K| < \frac{|\lambda|}{\epsilon t}$. Otra posibilidad es restringir ϵ sin afectar K .

Para ver en detalle el comportamiento local se tomará el límite cuando λ tiende a cero, esto significa observar qué sucede sobre C_t . Es claro que si $K = 0$ y $\lambda \rightarrow 0$ se obtiene nuevamente que u se mantiene constante sobre C_t con valor $\frac{c_1+c_2}{2}$, lo que confirma la idea de que si en lugar de una curva cerrada, se toma una recta como condición inicial, el comportamiento es análogo al caso unidimensional.

Cuando $\lambda \rightarrow 0$ para $K > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{\varepsilon t} K}{2}} e^{-2\eta^2} d\eta + c_1 \\ &= \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-2\eta^2} d\eta + \int_0^{\frac{\sqrt{\varepsilon t} K}{2}} e^{-2\eta^2} d\eta \right] + c_1 \\ &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{\varepsilon t} K}{2}} e^{-2\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

y, de la misma forma, para $K < 0$

$$u(0, t) = \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\varepsilon t} K}{2}}^0 e^{-\eta^2} d\eta \quad (6)$$

Tanto en (5) como en (6) el segundo término en valor absoluto nunca sobrepasa el valor $\frac{c_2 - c_1}{2}$, entonces se tiene que en C_t , $u < \frac{c_1 + c_2}{2}$ para $K > 0$ y $u > \frac{c_1 + c_2}{2}$ para $K < 0$.

El ancho de la región de transición se encuentra fijando u para alguna t_0 . Para $\lambda < 0$; o, lo que es lo mismo $\alpha < 0$ porque $|\lambda| < \frac{|\lambda|}{\varepsilon t}$ se tiene

$$u(\lambda, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\lambda, t_0)} e^{-2\eta^2} d\eta + c_1 = c_1 - \delta$$

Haciendo la misma aproximación que en 1.1.1 y despejando λ

$$\lambda \sim \left[\left(\delta + \frac{c_2 - c_1}{2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{c_1 - c_2} - \sqrt{\frac{\varepsilon t_0 K}{2}} \right] 2\sqrt{\varepsilon t_0}$$

y haciendo tender δ a cero se obtiene

$$\lambda \sim -\sqrt{\pi \varepsilon t_0} - \varepsilon t_0 K$$

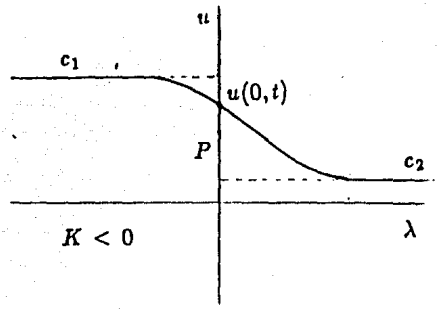
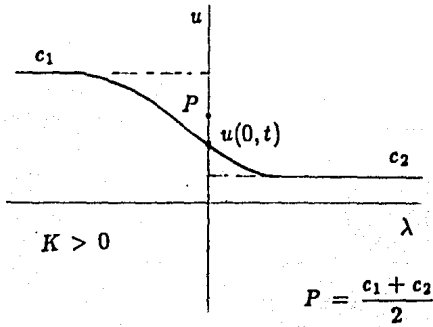
Para $\lambda > 0$, el cálculo es análogo y se obtiene

$$\lambda \sim \sqrt{\pi \varepsilon t_0} - \varepsilon t_0 K$$

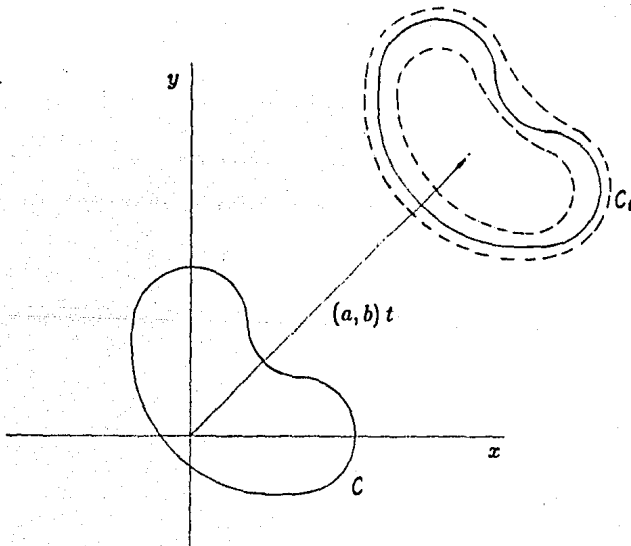
entonces, para que u se encuentre entre c_1 y c_2 , λ debe satisfacer

$$-\sqrt{\pi \varepsilon t} - \varepsilon t K < \lambda < \sqrt{\pi \varepsilon t} - \varepsilon t K$$

De allí se concluye que para $K > 0$ el ancho de la capa es mayor en el interior de C_1 que en el exterior y para $K < 0$ ocurre lo contrario.



La siguiente figura es un esquema del comportamiento descrito.



Las líneas punteadas encierran la región de transición, mientras que la línea continua es la curva C trasladada al tiempo t .

Debe notarse que el ancho de la capa aumenta cuando t crece o cuando se toma un ε mayor, por lo que, si quiere garantizarse la utilidad del método, para cada t fija deberá escogerse ε tan pequeña como lo requiera la geometría de C .

EJEMPLO

A manera de ejemplo se considerará un círculo de radio uno con centro en el origen como C .

Las coordenadas locales son:

$$x(s, \lambda, t) = (\lambda + 1) \cos s + at$$

$$y(s, \lambda, t) = (\lambda + 1) \operatorname{sen} s + bt$$

entonces

$$\varepsilon \Delta u = \varepsilon \left(u_{\lambda\lambda} + \frac{u_{\lambda}}{1 + \lambda} + \frac{u_{ss}}{(1 + \lambda)^2} \right)$$

y según la aproximación hecha anteriormente, el problema se reduce a

$$u_t = u_{\xi\xi} + \sqrt{\varepsilon} u_{\xi} \quad \text{con} \quad \xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$$

cuya solución es

$$u(\lambda, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\lambda, t_0)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

donde

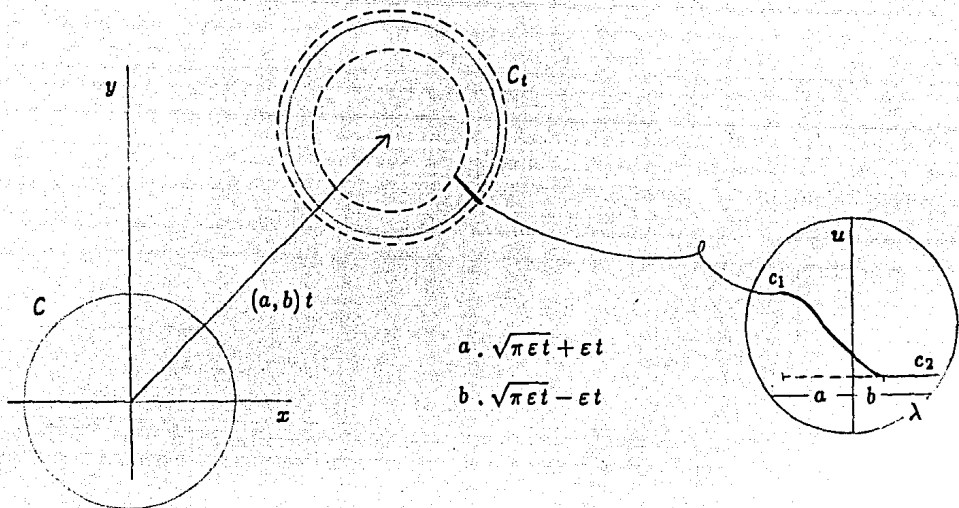
$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon t}} + \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{2}$$

Cuando $\lambda \rightarrow 0$

$$u(0, t) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{\varepsilon t}}{2}} e^{-\eta^2} d\eta$$

donde el segundo término es negativo, entonces para cualquier s se tiene que en el círculo trasladado C_t , $u = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Además el ancho de la capa es: $\sqrt{\pi\varepsilon t} + \varepsilon t$ en el interior de C_t y $\sqrt{\pi\varepsilon t} - \varepsilon t$ fuera de él.



$$a \cdot \sqrt{\pi \epsilon t} + \epsilon t$$

$$b \cdot \sqrt{\pi \epsilon t} - \epsilon t$$

En este caso cuando el ancho de la capa en la parte interior de C_t se acerca a uno, es decir cuando t satisface $\sqrt{\pi \epsilon t} + \epsilon t \sim 1$, el método falla porque no describe qué pasa cuando la capa límite cubre el círculo por completo, ni siquiera determina que esto suceda en algún momento, por ello es conveniente fijar t y elegir ϵ de manera que $\sqrt{\pi \epsilon t} + \epsilon t \ll 1$.

1.2.2

A continuación se considerarán a y b no constantes. El problema que se resolverá es:

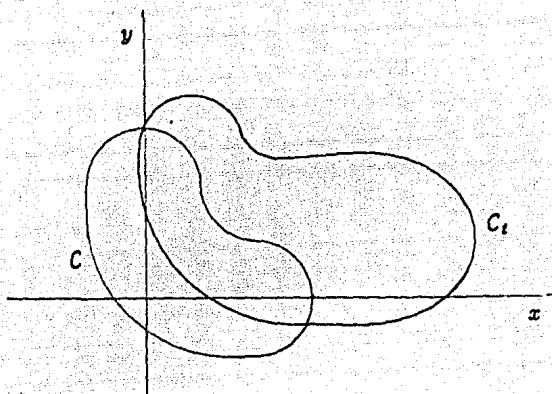
$$u_t + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \epsilon \Delta u \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{dentro de } C \\ c_2 & \text{fuera de } C \end{cases}$$

Para $\epsilon = 0$, parametrizando x y y por t se obtienen las ecuaciones de las características

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t)) \quad (2)$$

La curva C se transforma con velocidad $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ en otra curva a la que se llamará C_t , cuya forma y posición dependen de a y b ; pero, lo que es seguro es que, como $\frac{du}{dt} = 0$ cuando se satisface (2), u mantiene sus valores constantes c_1 y c_2 dentro y fuera de C_t respectivamente.



Quando ε no es cero se estudiará el comportamiento de la solución cerca de la discontinuidad utilizando las mismas coordenadas locales que en la sección anterior. En las nuevas coordenadas cada punto es:

$$\begin{pmatrix} x(s, \lambda, t) \\ y(s, \lambda, t) \end{pmatrix} = \bar{x}_0(s, t) + \lambda \bar{n}(s, t)$$

donde

$$\bar{x}_0(s, t) = P(s) + \int_0^t (a(x(s), y(s)), b(x(s), y(s))) ds$$

es decir, la posición de un punto P sobre C después de transcurrido cierto tiempo (necesariamente se mueve sobre las características). Como antes, $\lambda \bar{n}(s, t)$ es el estiramiento en dirección normal.

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior se llega a la siguiente ecuación

$$u_t = u_{\xi\xi} + \sqrt{\varepsilon} K(s, t) u_{\xi} \quad \text{donde} \quad \xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$$

cuya solución es

$$u(\lambda, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\lambda, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

con

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\epsilon t}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{t}} \int_0^t K(s, v) dv$$

Cabe destacar que K depende ahora del tiempo porque al no ser C_t solamente C trasladada no conserva la misma curvatura. En adelante se denominará

$$I(s, t) = \int_0^t K(s, v) dv$$

Al igual que en 1.2.1 la solución hallada tiene validez estrictamente local por lo que se pedirá que

$$|I| < \frac{|\lambda|}{\epsilon t}$$

En C_t , es decir cuando $\lambda \rightarrow 0$ se obtiene que para $I > 0$

$$u(0, t) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta(s, t)} e^{-\eta^2} d\eta$$

y para $I < 0$

$$u(0, t) = \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta(s, t)}^0 e^{-\eta^2} d\eta$$

en ambos casos

$$\beta(s, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{t}} I(s, t)$$

De allí se tiene que en C_t , $u < \frac{c_1 + c_2}{2}$ cuando $I > 0$ y $u > \frac{c_1 + c_2}{2}$ cuando $I < 0$. También de la misma manera que en 1.2.1 se encuentra el ancho de la región de transición que es

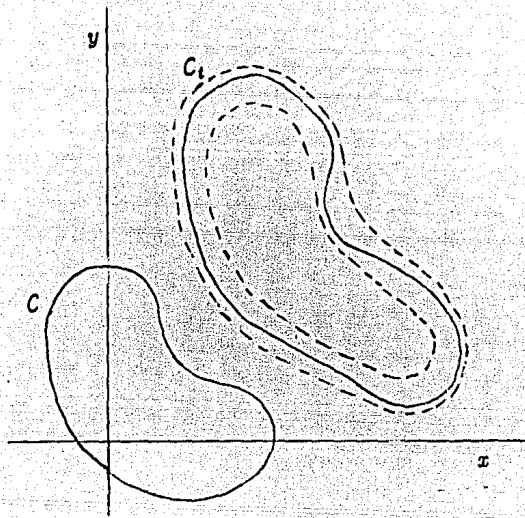
$$-\sqrt{\pi \epsilon t} - \epsilon I(s, t) \text{ hacia el interior de } C_t$$

y

$$\sqrt{\pi \epsilon t} - \epsilon I(s, t) \text{ hacia el exterior de } C_t$$

por lo que el ancho de la capa es mayor en el interior que en el exterior cuando $I > 0$ y viceversa cuando $I < 0$.

En la figura puede verse que el comportamiento de la capa es análogo al caso con a y b constantes, pero hay que hacer notar que para cada t , C_t puede cambiar de forma no sólo de posición.



EJEMPLO

Para aclarar lo dicho se considerará el siguiente ejemplo:

$$u_t + xu_x + yu_y = \varepsilon \Delta u$$

Cuando ε es cero, se tienen las características

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = y(t)$$

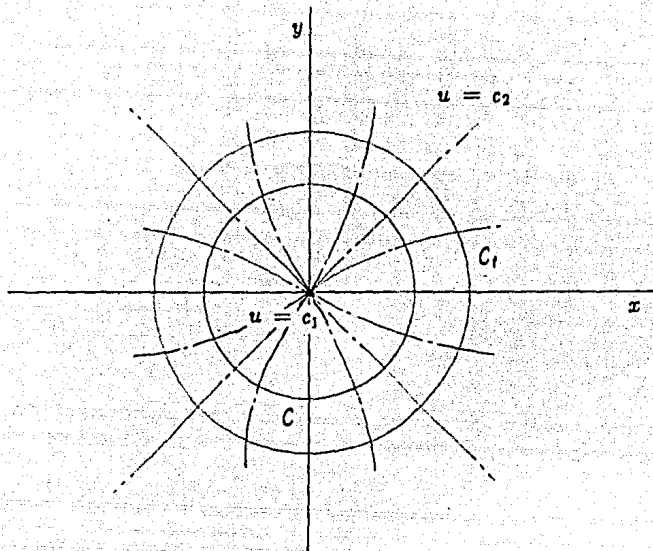
o bien

$$x(t) = x_0 e^t \quad \text{y} \quad y(t) = y_0 e^t$$

Tomando como condición inicial

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} c_1 & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ c_2 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

se puede ver que cada punto del círculo con radio uno y centro en el origen se transforma en un punto sobre un círculo igualmente centrado en el origen pero con radio e^t , curva que será C_t en este caso.



Las coordenadas locales que se tomarán para este ejemplo son

$$x(s, \lambda, t) = (\lambda + 1) \cos s + x_0 e^t$$

$$y(s, \lambda, t) = (\lambda + 1) \sin s + y_0 e^t$$

y la curvatura es $K(s, t) = e^{-t}$.

Después de la aproximación queda por resolver la ecuación

$$u_t = u_{\xi\xi} + \sqrt{\epsilon} e^{-t} u_{\xi} \quad \text{donde} \quad \xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}$$

Mediante la Transformada de Fourier se obtiene

$$u(\lambda, t) = \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\lambda, t)} e^{-\eta^2} d\eta + c_1$$

donde

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\epsilon t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{t}}(1 - e^{-t})$$

Cuando $\lambda \rightarrow 0$, es decir sobre C_t se tiene

$$u(0, t) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta(t)} e^{-\eta^2} d\eta$$

donde

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{t}}(1 - e^{-t})$$

y el ancho de la capa límite es

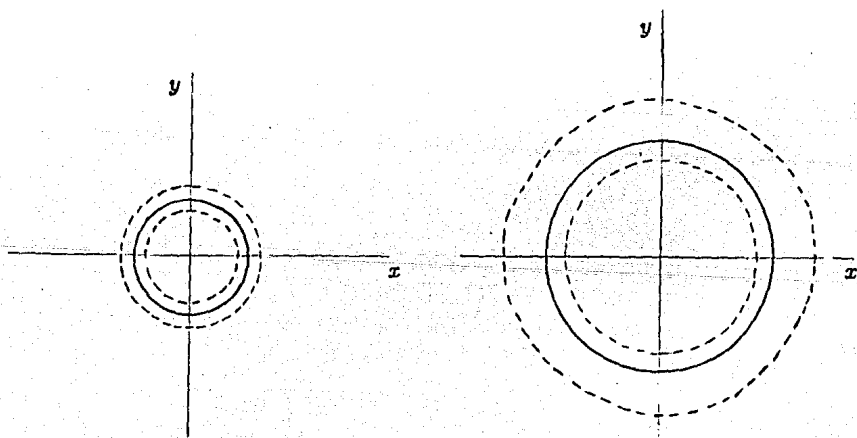
$$-\sqrt{\pi\epsilon t} + \epsilon(e^{-t} - 1)$$

hacia el interior de C_t y

$$\sqrt{\pi\epsilon t} + \epsilon(e^{-t} - 1)$$

hacia afuera.

Se puede concluir que cuando t es pequeña, $u \sim \frac{c_1 + c_2}{2}$ sobre C_t y la capa es casi simétrica con ancho $2\sqrt{\pi\epsilon t}$. Cuando t crece $u < \frac{c_1 + c_2}{2}$ en C_t y el ancho de la capa se hace mayor dentro de esa curva y menor fuera. La figura muestra el comportamiento de la capa límite a medida que t crece.



No hay que dejar de señalar que el éxito del método depende enteramente de la existencia de las características.

Capítulo 2

Difusión de frentes no lineales en dos dimensiones

En esta sección se estudiará el comportamiento de la solución de la ecuación

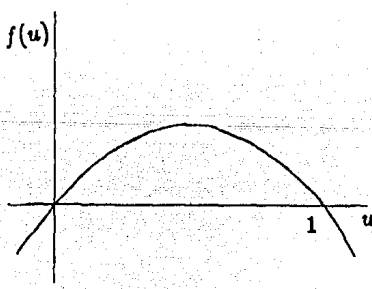
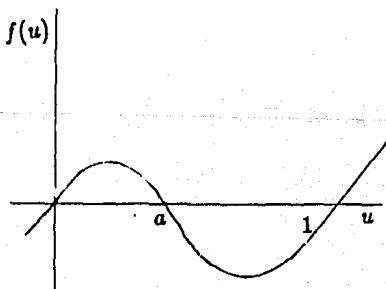
$$u_t = \varepsilon \Delta u + f(u) \quad (1)$$

en dos dimensiones. La versión unidimensional de la ecuación (1) tiene dos aplicaciones clásicas: modelar el impulso nervioso —ecuación de Nagumo (Cohen, 1976; FitzHugh, 1961; Nagumo, 1962)— donde

$$f(u) = u(1-u)(u-a)$$

y una descripción cualitativa de la distribución de genotipos en una población —ecuación de Fisher (Aronson y Weinberger, 1978; Diekmann y Temme, 1976)— donde

$$f(u) = u(1-u)$$



Por esa razón, ya que son los casos más estudiados, aquí se considerará f con una forma como las descritas. Antes de entrar por completo en el estudio de la ecuación (1) en dos dimensiones, se hará una breve revisión del caso en una dimensión, esto es de utilidad ya que el caso bidimensional puede describirse de manera local con la solución del caso unidimensional, como se mostrará más adelante. Para tener una visión global del problema en dos dimensiones se analizará después la difusión de varios tipos de frentes —por frente debe entenderse la frontera que separa las regiones donde la solución es cero y no cero.

2.1 El problema en una dimensión

Se tiene la ecuación

$$u_t = u_{xx} + f(u) \quad (1)$$

Se puede demostrar que si f es como se describió, (1) tiene una solución en forma de onda viajera $u = u(x + ct)$ tal que $u(-\infty) = 1$ y $u(\infty) = 0$. Cuando $f(u) = u(1 - u)$ hay una velocidad mínima $c_* = \sqrt{2}$ y una solución para cada $c \geq c_*$. Cuando $f(u) = u(1 - u)(u - a)$ con $0 < a < 1$, hay una solución, es única y es fácil de encontrar suponiendo que la órbita es parabólica. Como $u^* = 1 - u$ es solución para $a^* = 1 - a$ y $c^* = c$ se puede tomar $0 < a < 1/2$, además $u^* = u(x - ct)$ es solución para $a^* = a$ y $c^* = -c$ por lo que sólo se considerará el caso $c \geq 0$. Haciendo $x + ct = \xi$, la ecuación por resolver es

$$u_t + cu_\xi = u_{\xi\xi} + f(u)$$

y para la onda viajera,

$$u'' - cu' + u(1 - u)(u - a) = 0 \quad (2)$$

Para resolverla se propone

$$v(u) = \alpha u(1 - u) \quad \text{y} \quad \frac{du}{d\xi} = v$$

entonces

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = v \frac{dv}{du} = v\alpha(1 - 2u)$$

La ecuación (2) queda

$$u(1 - u)(\alpha^2(1 - 2u) - c\alpha - a - u) = 0$$

de donde

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - a \right)$$

por lo tanto la trayectoria en el plano fase que une $(0,0)$ con $(1,0)$ es

$$v(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} u(1-u)$$

y la velocidad es

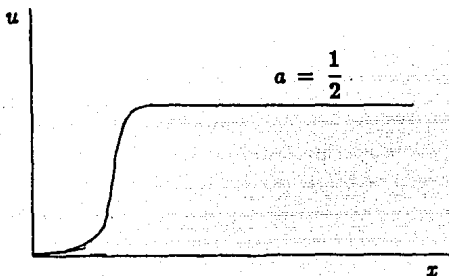
$$c = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - a \right)$$

y, como $v(\xi) = \frac{du}{d\xi}$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} u(1-u)$$

de lo cual, separando variables e integrando se obtiene

$$u(\xi) = [1 + \exp(-\xi/\sqrt{2})]^{-1}$$



2.2 Movimiento de frentes

En esta sección se encontrarán las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del frente determinado por la ecuación

$$u_t = \epsilon \Delta u + f(u) \quad (1)$$

y se analizarán algunos ejemplos. Se supondrá que el frente se mueve normal a sí mismo y se buscará una solución aproximada de (1) que consista en ondas viajeras a lo largo del frente.

La ecuación (1) en coordenadas intrínsecas tiene por lado izquierdo

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_s s_t + u_\lambda \lambda_t$$

donde s y λ son las coordenadas en dirección tangencial y normal respectivamente, descritas en la sección 1.2.1.

Para obtener expresiones de s_t y λ_t se utilizará que la posición de cada punto se puede describir como

$$\bar{x}(s, t) = \bar{x}_0(s, t) + \lambda \bar{n}(s, t)$$

Si se considera un punto fijo y se deriva con respecto a t se tiene

$$\bar{0} = \bar{x}_{0t} + \bar{x}_{0s} s_t + \lambda_t \bar{n} + \lambda \bar{n}_s s_t + \lambda n_t \quad (2)$$

pero

$$\begin{aligned} \bar{x}_{0s} &= \bar{r} \\ \bar{r}_s &= K \bar{n}_s \\ \bar{n}_s &= \bar{r} K = \bar{x}_{0s} K \quad \text{donde } K = K(s, t) \text{ es la curvatura} \end{aligned} \quad (3)$$

y además, como la curva $\bar{x}_0(s, t)$ se mueve en forma normal

$$\bar{x}_{0t}(s, t) = U(s, t) \bar{n}(s, t) \quad (4)$$

de (2), (3) y (4) se obtiene para λ_t la expresión

$$\lambda_t = -U(s, t)$$

Y, derivando (4)

$$\bar{x}_{0ts} = U_s(s, t) \bar{n}(s, t) + U(s, t) \bar{n}_s(s, t) \quad (5)$$

sustituyendo en (2)

$$\bar{0} = \bar{x}_{0s}(s, t) s_t (1 + \lambda K) + \bar{n}(s, t) (U(s, t) + \lambda_t) + \lambda \bar{n}_t(s, t),$$

calculando el producto interno con x_{0s}

$$\bar{0} = \bar{x}_{0s}(s, t) \cdot \bar{x}_{0s}(s, t) (1 + \lambda K) s_t + \bar{x}_{0s}(s, t) \cdot \bar{n}(s, t) (U(s, t) + \lambda_t) + \lambda \bar{x}_{0s}(s, t) \cdot \bar{n}_t(s, t),$$

pero de (3), $\bar{x}_{0s}(s, t) \cdot \bar{n}(s, t) = 0$ y usando (5)

$$\begin{aligned} \bar{x}_{0s}(s, t) \cdot \bar{n}_t(s, t) &= -\bar{x}_{0st} \cdot \bar{n}(s, t) = -(U_s(s, t) \bar{n} + U(s, t) \bar{n}_s(s, t)) \cdot \bar{n}(s, t) \\ &= -U_s(s, t) |\bar{n}(s, t)|^2 - U(s, t) \bar{n}_s(s, t) = -U_s(s, t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s_t = \frac{\lambda U_s(s, t)}{1 + \lambda K}$$

ya que $|\bar{x}_{0s}| = 1$.

La ecuación (1) queda entonces

$$u_t + \frac{\lambda U_s(s, t)}{1 + \lambda K} u_s - U(s, t) u_\lambda = \frac{\varepsilon}{1 + \lambda K} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((1 + \lambda K) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + \lambda K} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] + f(u)$$

Como en el Capítulo 1, se utilizará el hecho de que la difusión del frente es en sentido esencialmente normal para despreciar las derivadas en s .

La ecuación se reduce a

$$u_t - U(s, t)u_\lambda = \varepsilon u_{\lambda\lambda} + \frac{\varepsilon K}{1 + \lambda K} u_\lambda + f(u)$$

Haciendo la misma aproximación que en la sección 1.2 y cambiando variables: $\lambda = \sqrt{\varepsilon} \xi$, se obtiene

$$u_t - \left(\frac{U(s, t)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon} K \right) u_\xi = u_{\xi\xi} + f(u) \quad (6)$$

Si se denomina c a la velocidad de propagación del frente —en el caso de la ecuación de Fisher c es la mínima velocidad de propagación—, se tiene para U la siguiente expresión

$$U(s, t) = \sqrt{\varepsilon} c - \varepsilon K(s, t)$$

Con la ecuación

$$\bar{x}_{0t}(s, t) = (\sqrt{\varepsilon} c - \varepsilon K(s, t)) \bar{n}(s, t) \quad (7)$$

se cierra el sistema; es decir, dada c y la curva inicial $\bar{x}_0(s, 0)$, resolviendo (7), se puede determinar la posición de la curva transcurrido cierto tiempo.

Para encontrar las ecuaciones que describen el movimiento del frente se llamará

$\theta(\beta, t)$ al ángulo de la normal con la dirección horizontal y

$l(\beta, t)$ a la longitud del vector tangente

Donde β es la longitud de arco entre la longitud total, de manera que $0 \leq \beta \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{i\theta(\beta, t)} & \text{ es la normal} \\ ie^{i\theta(\beta, t)} & \text{ es la tangente y} \\ \frac{1}{l(\beta, t)} \frac{d\theta}{d\beta} & \text{ es la curvatura } K(\beta, t) \end{aligned}$$

Se tenía que $\bar{x}_{0t} = U \bar{n}$ entonces sustituyendo y derivando con respecto a β

$$\bar{x}_{0t\beta} = (U e^{i\theta})_\beta = U_\beta e^{i\theta} + i\theta_\beta e^{i\theta} U \quad (8)$$

Por otro lado, $\bar{x}_{0\beta} = \bar{r} l$, sustituyendo y derivando ahora con respecto a t

$$\bar{x}_{0\beta t} = (ie^{i\theta} l)_t = l_t ie^{i\theta} - \theta_t e^{i\theta} l \quad (7)$$

Igualando (6) y (7) se concluye que

$$\theta_t = -\frac{U_\beta}{l}$$

$$l_t = U \theta_\beta$$

pero

$$U_\beta = - \left(\frac{\varepsilon}{l} \theta_\beta \right)_\beta$$

de donde

$$\theta_t = \varepsilon \left(\frac{1}{l^2} \theta_{\beta\beta} - \frac{l_\beta \theta_{\beta t} \varepsilon}{l^3} \right)$$

$$l_t = \sqrt{\varepsilon} c \theta_\beta - \frac{\varepsilon}{l} \theta_\beta^2 \quad (8)$$

Una vez que l y θ se conocen, el movimiento del frente queda determinado por (7) integrando el lado derecho que es dado pues

$$K = \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\beta} \quad \text{y} \quad \bar{n} = e^{i\theta}$$

EJEMPLO 1

Se considerará como primer ejemplo un frente plano; es decir, que satisface las condiciones iniciales

$$\theta(\beta, 0) = 0$$

$$l(\beta, 0) = 1$$

Como las condiciones iniciales satisfacen (8) se concluye que el frente se mantiene plano para toda $t > 0$.

Si ahora se le incluye una perturbación pequeña se tienen como condiciones iniciales

$$\theta(\beta, 0) = \tilde{\theta}(\beta, 0)$$

$$l(\beta, 0) = 1 + \tilde{l}(\beta, 0)$$

Donde $\tilde{\theta} \ll 1$ y $\tilde{l} \ll 1$. Se quiere encontrar un sistema de ecuaciones para $\tilde{\theta}$ y \tilde{l} y observar así su comportamiento.

como l es pequeña se puede aproximar $\frac{1}{(1+l)^2} \sim 1$ entonces, de (8) se tiene

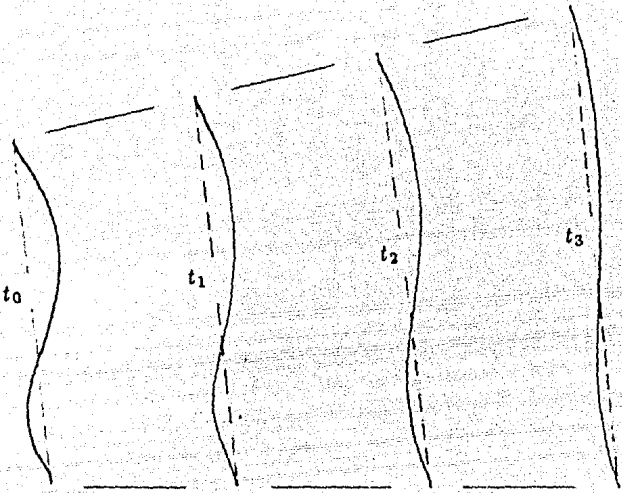
$$\tilde{\theta}_t = \varepsilon \tilde{\theta}_{\beta\beta}$$

$$l(\beta, t) = \sqrt{\varepsilon} c \tilde{\theta}_\beta$$

La primera es la ecuación de calor cuya solución decae a cero cuando t crece lo que indica que el ángulo de la normal se volverá cero en algún momento.

Como $\tilde{\theta}$ es decreciente, de la segunda ecuación se ve que \tilde{l}_t es negativa de donde se concluye que l volverá a su valor inicial para alguna t suficientemente grande.

En resumen el frente, transcurrido el tiempo suficiente, se volverá plano.



EJEMPLO 2

Si lo que se considera es un frente circular, las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}\theta(\beta, 0) &= \beta \\ l(\beta, 0) &= 1\end{aligned}$$

La solución dada por

$$\begin{aligned}\theta(\beta, t) &= \beta \\ l(\beta, t) &= l_0(t)\end{aligned}$$

satisface el sistema (8) siempre que l sea tal que

$$l_{0t} = \sqrt{\varepsilon}c - \frac{\varepsilon}{l_0}$$

Lo que significa que el círculo mantiene su forma y se estira o se encoge de acuerdo con la función l_0 cuando t transcurre.

Si el frente circular tiene además una perturbación las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}\theta(\beta, 0) &= \beta + \tilde{\theta}(\beta, 0) \\ l(0) &= l_0(t) + \tilde{l}(\beta, 0)\end{aligned}$$

Donde $\tilde{\theta} \ll 1$ y $\tilde{l} \ll 1$. Otra vez se desea encontrar un sistema para las perturbaciones y determinar de allí su comportamiento. De (8), aproximando $\frac{1}{l_0 + \tilde{l}}$ con $\frac{1}{l_0}$ se tiene

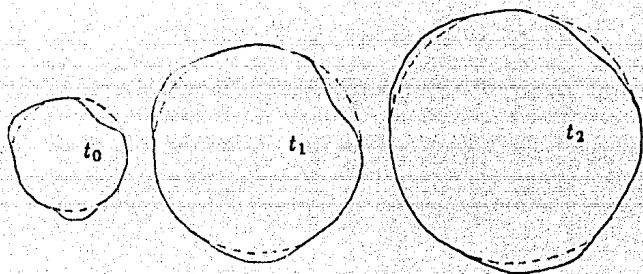
$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_t &= \varepsilon \left(\frac{\tilde{\theta}_{\beta\beta}}{l_0^2} - \frac{\tilde{l}_{\beta}}{l_0^3} \right) \\ \tilde{l}_t &= \sqrt{\varepsilon}c \tilde{\theta}_{\beta} + \varepsilon \frac{\tilde{l}}{l_0^2} - 2\varepsilon \frac{\tilde{\theta}}{l_0}\end{aligned}$$

después de haber sustituido la expresión para l_0 .

Como lo que se busca es una solución periódica se proponen series de Fourier para $\tilde{\theta}$ y \tilde{l} obteniéndose así las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_n &= -\frac{n^2\varepsilon}{l_0^2}\theta_n - \varepsilon i n \frac{l_n}{l_0^3} \\ \dot{l}_n &= \left(\sqrt{\varepsilon}c - 2\frac{\varepsilon}{l_0} \right) n i \theta_n + \frac{\varepsilon}{l_0^2}\end{aligned}$$

Se puede demostrar que la solución de este sistema está acotada y lo que probaría su estabilidad. Después de cierto tiempo el frente se volverá circular.

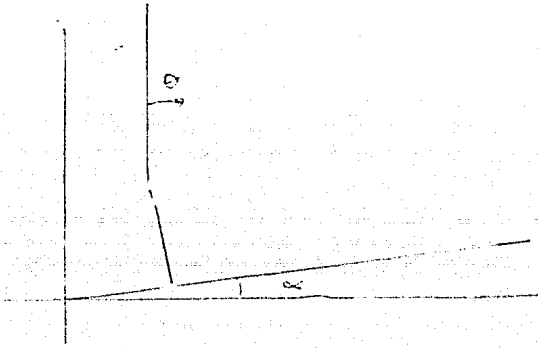


EJEMPLO 3

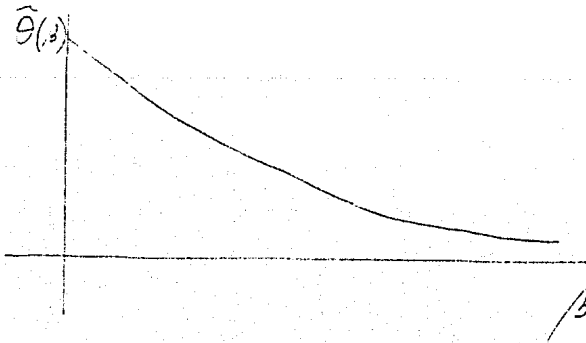
Considérese un frente plano que comienza a moverse sobre un plano con inclinación $\alpha \ll 1$, entonces se le pedirá que

$$\frac{\dot{x}(0, t)}{|\dot{x}(0, t)|} = (1, \alpha)$$

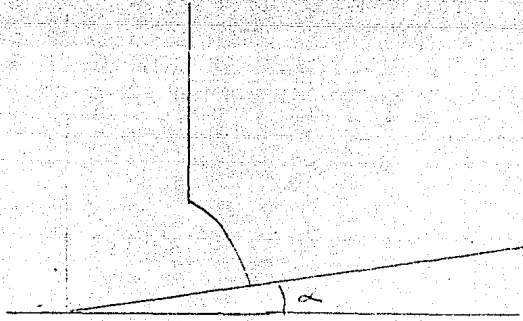
para ubicar al pie del frente sobre la recta inclinada. Esto implica que $U\bar{n} = (1, \alpha)$



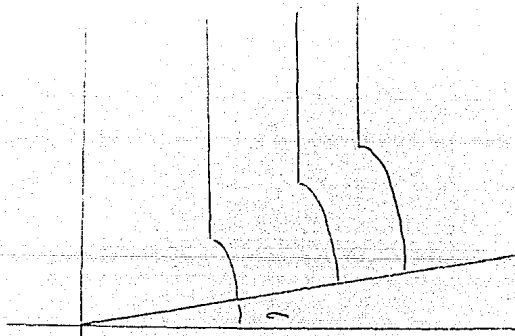
Resolviendo como en el Ejemplo 1, pero sabiendo ahora que $\bar{\theta}(\beta, 0) = \alpha$ se encuentra para $\bar{\theta}$ un comportamiento como el de la figura



Es decir que el frente tiene ángulo α cerca del plano inclinado y cero lejos de su base y como θ tiene curvatura positiva el frente se verá así



A medida que t crece, también lo hace la región en que el ángulo es α ya que la velocidad en la base será menor que en la parte donde el ángulo es 0.



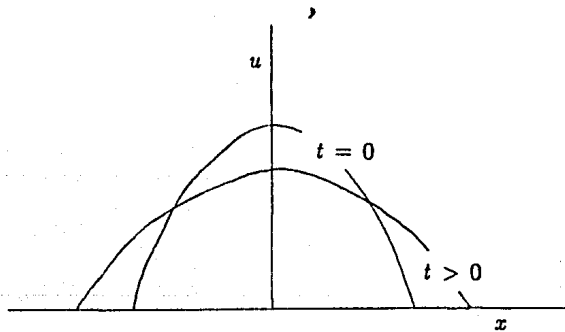
Capítulo 3

Ecuación de difusión no lineal

En este capítulo se estudiará la ecuación de difusión no lineal

$$u_t = (u^n u_x)_x \quad n > 0 \quad (1)$$

Se tomará una condición inicial en la que la concentración sea diferente de cero sólo en un intervalo finito y se espera entonces que la solución se vuelva también cero fuera de un intervalo finito que variará con el tiempo. Esto determina la existencia de una frontera bien definida entre las regiones de concentración cero y no cero a la que se denominará intercara o frente. Como ejemplo, se mencionará que la ecuación (1), cuando $n \geq 1$, representa un gas difundándose en un medio poroso.



Usando teoría de perturbaciones, se construirá una aproximación para la ecuación, válida en el límite cuando $n \rightarrow 0$. También se construirán soluciones para algunos ejemplos con condiciones iniciales particulares donde un análisis más minucioso permitirá observar lo que se llamará "tiempo de espera". Para cierto tipo de condiciones iniciales, la intercara no comienza a moverse inmediatamente sino que permanece

durante algún tiempo reacomodándose en el mismo sitio para luego comenzar su movimiento. Al tiempo que tarda en empezar a moverse se le denomina "tiempo de espera".

Se verá que el comportamiento básico de las soluciones con "tiempo de espera" está determinado por la formación de choques de esquina —por choque debe entenderse una discontinuidad en la primera derivada— en las soluciones de una ecuación aproximada. Dicha ecuación mostrará las dos formas en que la intercara comienza a moverse dependiendo si el choque se forma en la intercara o lejos de ésta. Examinando la aproximación a primer orden de la ecuación transformada se observará que el choque puede ser afectado en dos formas: si ocurre lejos de donde la concentración es cero, será redondeado y se volverá una capa de esquina; en cambio, si ocurre en la intercara permanecerá afilado.

3.1 La ecuación transformada

Si $n = 0$ la ecuación (1) se convierte en la ecuación lineal de difusión $u_t = u_{xx}$; de ahí que suponer $n = \varepsilon$, con $0 < \varepsilon \ll 1$, permitirá conocer las diferencias entre la ecuación lineal de difusión y la no lineal. Se tiene la ecuación

$$u_t = (u^\varepsilon u_x)_x \quad (2)$$

donde el coeficiente de difusión u^ε estará cerca de uno cuando u esté lejos de cero; pero si $u \rightarrow 0$ entonces $u^\varepsilon \rightarrow 0$ rápidamente, lo que hace ver que u^ε no se puede expandir alrededor de cero de manera que la serie sea válida para cualquier u . Como la solución en series de (2) no servirá cerca de $u = 0$, se eliminará la dificultad evitando la aparición de la potencia de ε con el siguiente cambio de variables:

$$v = u^\varepsilon \quad t = \varepsilon \hat{t}$$

entonces

$$u_t = (u^\varepsilon u_x)_x = \varepsilon u^{\varepsilon-1} u_x^2 + u^\varepsilon u_{xx} \quad (3.a)$$

$$u_t = \frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon-1} v_t \quad (3.b)$$

$$u_x = \frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon-1} v_x \quad (3.c)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) v^{1/\varepsilon-2} v_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon-1} v_{xx} \quad (3.d)$$

Sustituyendo (3.b), (3.c) y (3.d) en (3.a), se obtiene

$$\frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon-1} v_t = \frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon-1} v_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) v^{1/\varepsilon-1} v_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} v^{1/\varepsilon} v_{xx}$$

$$v_t = \frac{1}{\varepsilon} v_x^2 + v v_{xx}$$

$$v_t = v_x^2 + \varepsilon v v_{xx} \quad (4)$$

Por simplicidad, en adelante se llamará t a f . Se resolverá (4) usando la expansión cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir

$$v(x, t; \varepsilon) \sim v_0(x, t) + \varepsilon v_1(x, t) + \varepsilon^2 v_2(x, t) + \dots$$

y se encontrará u utilizando

$$u = v^{1/\varepsilon} \sim (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots)^{1/\varepsilon}$$

lo cual para $v_0 = O(1)$ y ε pequeña puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &\sim (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots)^{1/\varepsilon} \\ &= v_0^{1/\varepsilon} \left(1 + \varepsilon \frac{v_1}{v_0} + \varepsilon^2 \frac{v_2}{v_0} + \dots \right)^{1/\varepsilon} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln u &\sim \ln v_0^{1/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \varepsilon \frac{v_1}{v_0} + \varepsilon^2 \frac{v_2}{v_0} + \dots \right) \\ &\sim \ln v_0^{1/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon \frac{v_1}{v_0} + \varepsilon^2 \frac{v_2}{v_0} - \frac{\varepsilon^2 v_1^2}{2 v_0^2} + \dots \right) \\ &\sim \ln v_0^{1/\varepsilon} + \frac{v_1}{v_0} + \varepsilon \frac{v_2}{v_0} - \frac{\varepsilon v_1^2}{2 v_0^2} + \dots \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} u &\sim v_0^{1/\varepsilon} \exp \left(\frac{v_1}{v_0} + \varepsilon \frac{v_2}{v_0} - \frac{\varepsilon v_1^2}{2 v_0^2} + \dots \right) \\ &\sim v_0^{1/\varepsilon} \exp \left(\frac{v_1}{v_0} \right) \exp \left(\varepsilon \left(\frac{v_2}{v_0} - \frac{v_1^2}{2 v_0^2} \right) + \dots \right) \\ &\sim v_0^{1/\varepsilon} \exp \left(\frac{v_1}{v_0} \right) \left(1 + \varepsilon \left(\frac{v_2}{v_0} - \frac{v_1^2}{2 v_0^2} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

Nótese que es necesaria la siguiente corrección de v , ya que si se calcula v a $O(\varepsilon)$, se puede obtener u a $O(1)$.

3.2 Aproximación de primer orden

Asumiendo que $v v_{xx}$ es $O(1)$ dondequiera, a primer orden el comportamiento de las soluciones de (4) está gobernado por

$$v_t = v_x^2 \quad (5)$$

con condición inicial $v(x, 0; \varepsilon) = f(x)$, cuya solución se obtiene reduciendo la ecuación (5) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de las características. Si $w = v_x$, entonces $w_t = 2ww_x$; y las características son

$$\frac{dx}{dt} = -2w$$

y como w es constante

$$\frac{dx}{dt}(\xi, t) = -2w(x(\xi, t), t) = -2w(\xi, t) = -2f'(\xi)$$

Por lo tanto

$$x(\xi, t) = \xi - 2f'(\xi)t \quad (6)$$

Y, como $v_t = v_x^2 = w^2$,

$$\frac{d}{dt}v(x(\xi, t), t) = v_t + v_x \frac{dx}{dt} = w^2 - 2w^2 = -w^2$$

de donde

$$v(x(\xi, t), t) = f(\xi) - f'^2(\xi)t \quad (7)$$

Si $\xi = \xi(x, t)$ puede resolverse entonces se tiene una solución univaluada; pero si $x_\xi = 0$ se obtendrán varias $\xi = \xi(x, t)$, para el correspondiente valor de x . Las características determinadas por (5) se cruzarán dando origen a soluciones multivaluadas; además, esto provocará que vv_{xx} crezca y la aproximación deje de tener validez.

A primer orden se pueden corregir las dificultades con el emplazamiento adecuado de choques de esquina, es decir suplementar la información cuando las características se cruzan de tal forma que

$$v(\xi_1, t) = v(\xi_2, t) \quad (8)$$

si

$$x(\xi_1, t) = x(\xi_2, t) \quad (9)$$

pero

$$v_x(\xi_1, t) \neq v_x(\xi_2, t)$$

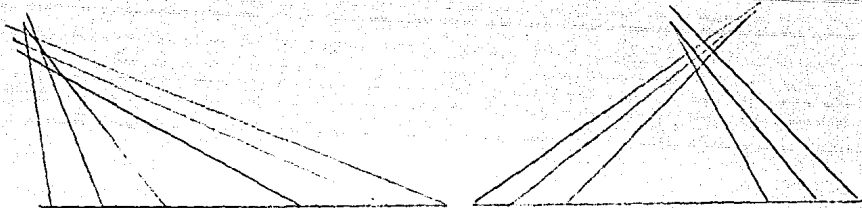
lo cual sucede si

$$f'(\xi_1) \neq f'(\xi_2)$$

El tiempo de formación del choque de esquina; es decir, el tiempo al cual las características determinadas por (6) comienzan a cruzarse, está dado por

$$x_\xi = 1 - 2f''(\xi)t = 0$$

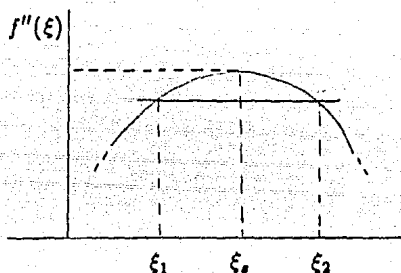
Las características $x(\xi, t) = \xi - 2f'(\xi)t$ tienen pendiente $-1/2f'(\xi)$ donde $f'(\xi)$ es creciente alrededor de un máximo local de f'' . Las características se comportan entonces como lo ilustra la figura.



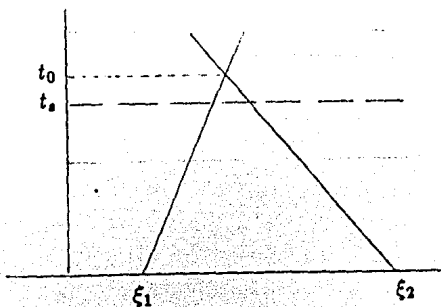
El primer cruce de características ocurre al tiempo t_s tal que

$$t_s = \frac{1}{2f''(\xi_s)}$$

donde ξ_s es la posición de un máximo local de $f''(\xi)$, por lo que cada máximo positivo local de f'' genera un choque de esquina. Como para $t > t_s$, $x_\xi < 0$ en (ξ_1, ξ_2) — donde ξ_1 y ξ_2 son las soluciones de $f''(\xi) = \frac{1}{2t}$ — las características que se originan a



la derecha de ξ_s se cruzarán con las de la izquierda en algún t_0 tal que $t_0 > t_s$. Cuando $t < t_s$, $x_\xi > 0$ de donde se concluye que las características no se cruzan antes de t_s .



Se verá en los ejemplos que las características al irse cruzando determinan la posición del choque. Como se vió, a cada lado de ξ_* , las características con pendiente positiva van inclinándose más y las características con pendiente negativa van enderezándose más a medida que se alejan de ξ_* . Tanto el conjunto izquierdo de características como el derecho determinan una curva a la cual todas son tangentes y el choque se encuentra encerrado entre estas envolventes de las características que vienen de uno y otro lado. La ecuación de las envolventes es

$$(t, \phi(t)) \text{ donde } \phi(t) = x(\xi(t), t)$$

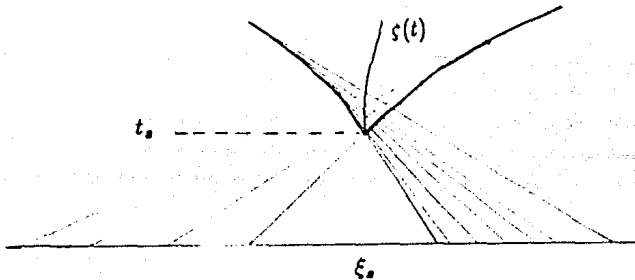
satisface

$$x_\xi(\xi(t), t) = 0$$

por lo que

$$\dot{\phi} = x_t + \dot{\xi}x_\xi = x_t = -2f'(\xi)t$$

así que esta curva es tangente a las características. Los puntos donde $x_\xi = 0$ corresponden a las ξ_1 y ξ_2 del párrafo anterior.



De ahí que no sean iguales los comportamientos de choques formados por características verticales provenientes de una región de cero concentración y los choques formados en el interior de la región de concentración diferente de cero.

Ya que no es posible en general determinar la posición del choque de forma explícita, se desea determinar la velocidad del mismo suponiendo que es permisible ajustar uno. Para esto se denotará por $\zeta(t)$ su posición y se buscará una ecuación diferencial para ella en términos de la solución delante y detrás del choque. Luego, usando las condiciones del choque (8) y (9) y la solución determinada por las características se cierra el sistema para $\zeta(t)$. Se tiene pues

$$\zeta(t) = x(\xi_1(t), t) = x(\xi_2(t), t)$$

donde $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ satisfacen

$$v(\xi_1(t), t) = v(\xi_2(t), t)$$

Si pudieran despejarse $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ explícitamente, se tendría la posición del choque. Como esto no puede hacerse en general, se estudiará su movimiento de forma implícita. La velocidad del choque está dada por

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{\xi}_1 x_{\xi}(\xi_1(t), t) + x_t(\xi_1(t), t)$$

y sustituyendo $x_t = -2f'(\xi_1)$ de las ecuaciones características se tiene

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{\xi}_1 x_{\xi}(\xi_1(t), t) - 2f'(\xi_1)$$

Para calcular el término $x_{\xi} \dot{\xi}_1$ basta derivar implícitamente

$$v(\xi_1(t), t) - v(\xi_2(t), t) = 0$$

$$x(\xi_1(t), t) - x(\xi_2(t), t) = 0$$

obteniendo

$$\begin{aligned} v_{\xi_1} \dot{\xi}_1 - v_{\xi_2} \dot{\xi}_2 &= v_t(\xi_2) - v_t(\xi_1) = f'^2(\xi_1) - f'^2(\xi_2) \\ x_{\xi_1} \dot{\xi}_1 - x_{\xi_2} \dot{\xi}_2 &= x_t(\xi_2) - x_t(\xi_1) = 2f'(\xi_1) - 2f'(\xi_2) \end{aligned} \quad (10)$$

ya que

$$v_t = f'^2(\xi) \quad \text{y} \quad x_t = -2f'(\xi)$$

De (10) se obtiene

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) x_{\xi_1} \dot{\xi}_1 - f'(\xi_2) x_{\xi_2} \dot{\xi}_2 &= f'^2(\xi_1) - f'^2(\xi_2) \\ x_{\xi_1} \dot{\xi}_1 - x_{\xi_2} \dot{\xi}_2 &= 2f'(\xi_1) - 2f'(\xi_2) \end{aligned}$$

despejando

$$\dot{\xi}_1 = \frac{2x_{\xi_2} f'(\xi_2)(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)) + x_{\xi_2}(f'^2(\xi_1) - f'^2(\xi_2))}{x_{\xi_1} x_{\xi_2}(f'(\xi_1) - f'(\xi_2))}$$

o bien

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{x_{\xi_1}}(f'(\xi_1) - f'(\xi_2))$$

Como $\zeta(t)$ es la posición del choque de esquina entonces

$$\zeta(t) = x(\xi_1, t)$$

y

$$\dot{\zeta}(t) = x_{\xi_1} \dot{\xi}_1 + x_t(\xi_1) = -(f'(\xi_1) + f'(\xi_2))$$

Se puede calcular también la evolución de la amplitud

$$\begin{aligned} v_s(t) &= v(\zeta(t), t) = v(\xi_1(t), t) \\ \dot{v}_s(t) &= v_{\xi_1} \dot{\xi}_1 + v_t(\xi_1) \\ &= \frac{v_{\xi_1}}{x_{\xi_1}}(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)) - f'^2(\xi_1) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}v_{\xi} &= f'(\xi) - 2f'(\xi)f''(\xi)t = f'(\xi)(1 - 2f''(\xi)t) \\x_{\xi} &= 1 - 2f''(\xi)t \quad \text{entonces} \quad \frac{v_{\xi}}{x_{\xi}} = f'(\xi)\end{aligned}$$

entonces

$$v_a(t) = f'(\xi_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)) - f'^2(\xi_1) = -f'(\xi_1)f'(\xi_2)$$

Se obtiene pues

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= -(f'(\xi_1) + f'(\xi_2)) \\v_a(t) &= -f'(\xi_1)f'(\xi_2)\end{aligned}\tag{11}$$

Se ve que la velocidad del choque $\dot{\zeta}(t)$ depende únicamente de los valores de v_x en cada lado del mismo ya que $v_x = f'(\xi)$.

Además, (11) muestra también que la propagación de la intercara hacia el interior de una región de cero concentración no se detiene una vez que comienza a moverse porque $v_x(\xi_1, t) \neq v_x(\xi_2, t)$ implica que $\dot{\zeta}(t)$ nunca es cero y que este movimiento no tiene reversa. En particular si se tiene una intercara $f'(\xi_1) = 0$, $\dot{v} = 0$ y $v = 0$, entonces

$$\dot{\zeta}(t) = -f'(\xi_2(t), t) < 0$$

es decir que las intercaras se mueven siempre que haya una pendiente no cero atrás de ellas.

3.3 Tipos posibles de movimientos

En base a esta primera aproximación se concluye que hay esencialmente dos clases de movimientos, dependiendo de la curvatura de la condición inicial para condiciones iniciales con soporte compacto. El primer caso es cuando la máxima curvatura se alcanza en el extremo del soporte. El otro caso es cuando la máxima curvatura se alcanza dentro del soporte. Se examinarán en detalle dos ejemplos, uno de cada situación y al final de la sección se dará una clasificación un poco más detallada.

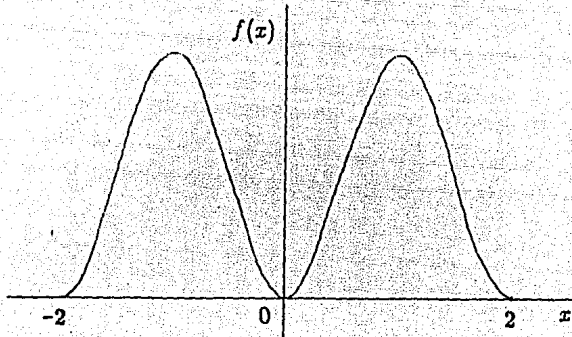
3.3.1 Máxima curvatura en los extremos del soporte

La ecuación es

$$v_t - v_x^2 = 0$$

y la condición inicial

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \pi x}{\pi^2} & \text{para } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$$



La solución viene dada por:

$$\begin{aligned}
 v(\xi, t) &= \frac{1}{\pi^2} (1 - \cos \pi \xi - \operatorname{sen}^2(\pi \xi) t) \\
 x(\xi, t) &= \xi - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \xi) t \quad \text{si } |\xi| \leq 2 \\
 v(\xi, t) &= 0 \\
 x(\xi, t) &= \xi \quad \text{si } |\xi| > 2
 \end{aligned}$$

Se ve pues que mientras las características no se encuentran la solución es cero si $|\xi| > 2$. Esto es lo que se llama "tiempo de espera" y difiere marcadamente del caso lineal donde la u se difunde instantáneamente. Si

$$t \geq t_s = \frac{1}{2 \max f''(\xi)} = \frac{1}{2}$$

las características se cruzan y aparece un choque de esquina que en este caso es una intercara que se mueve. Para ver esto con más claridad se necesitan los detalles de la solución. Considerando la región cercana a $x = 2$ se obtiene la envolvente eliminando ξ de

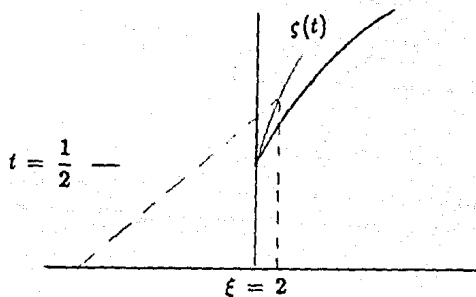
$$\begin{aligned}
 x(\xi, t) &= \xi - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \xi) t \\
 x_\xi(\xi, t) &= 1 - 2 \cos \pi \xi t = 0
 \end{aligned}$$

se tiene

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2t} \right) - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{2t} \right) t \right] \quad \text{si } t \geq t_s$$

La rama de interés en la intercara derecha en $x = 2$ es la que se muestra en la figura.

La trayectoria $\zeta(t)$ es la posición de la intercara. En este caso el choque se forma por



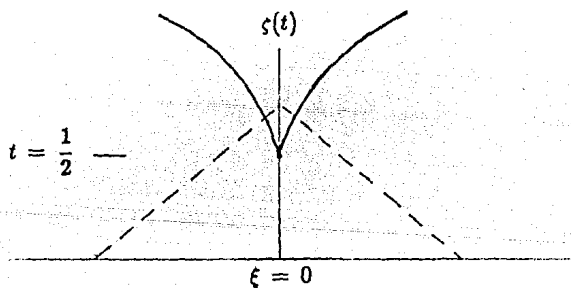
vez primera en la intercara. El movimiento está dado por

$$\dot{\zeta}(t) = -f'(\xi_1(t)) \quad \text{y} \quad \dot{v} = 0$$

Como para $1 \leq x \leq 2$ las características van a la derecha y $f'(\xi) < 0$, el choque siempre viaja hacia la derecha y la amplitud es siempre cero. En la región cercana a $x = 0$, la envolvente tiene dos ramas y las características que vienen de la región $x < 0$ pasan a la región donde $x > 0$ y viceversa. En este caso las características son simétricas y el choque satisface

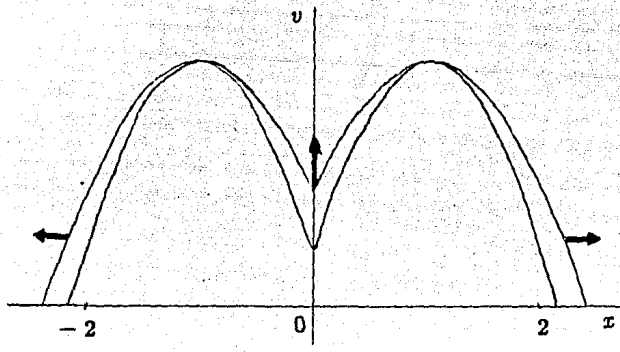
$$\dot{\zeta}(t) = -(f'(\xi_1) + f'(\xi_2)) \quad \text{y} \quad \dot{v} = -f'(\xi_1)f'(\xi_2)$$

Por simetría $\dot{\zeta}(t) = 0$ y $\dot{v} > 0$; es decir, la solución se reacomoda hasta $t = t_*$, cambiando de cero a un valor finito en los puntos de máxima curvatura.



En $t = t_*$ las intercara en $x = 2$ y $x = -2$ se mueven a la derecha e izquierda con velocidad finita. La región en $x = 0$ desarrolla una esquina y crece hasta que $\dot{v} = 0$,

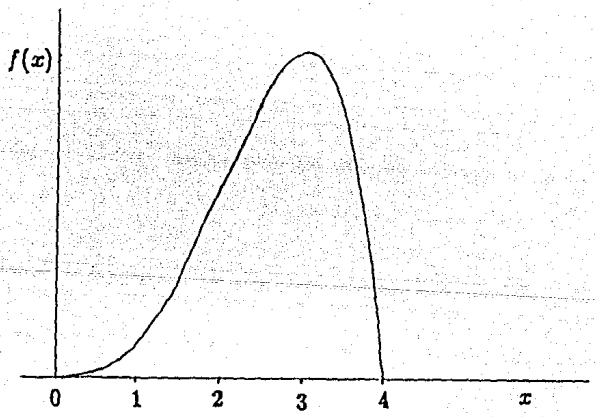
que es la máxima amplitud de la solución. Una gráfica de la situación para $t > t_0$, se ilustra en la figura.



3.3.2 Máxima curvatura dentro del soporte

La condición inicial es ahora

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(4-x)x^3 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



La solución en forma implícita para la aproximación a primer orden es

$$\begin{aligned} v(\xi, t) &= \frac{1}{12} \left[4\xi^3 - \xi^4 - \frac{1}{12} (12\xi^2 - 4\xi^3)^2 t \right] \\ x(\xi, t) &= \xi - (2\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3)t && \text{para } 0 \leq \xi \leq 4 \\ v(\xi, t) &= 0 \\ x(\xi, t) &= \xi && \text{en otro caso} \end{aligned}$$

Se observan aquí comportamientos diferentes para las intercaras derecha e izquierda. $f'''(\xi)$ tiene un máximo en $\xi = 1$, entonces ahí se forma el choque al tiempo

$$t_* = \frac{1}{2f''(1)} = \frac{1}{2}$$

y para $t < \frac{1}{2}$ la solución va acomodándose detrás de la intercara hasta alcanzarla cuando $t = \frac{1}{2}$, para comenzar a moverse.

La expresión implícita para las envolventes es:

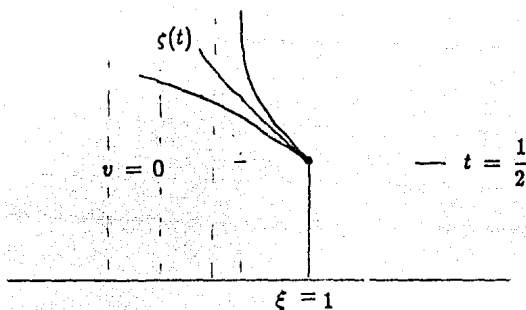
$$x(\xi, t) = \xi - (2\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3)t \quad (1)$$

$$x_\xi(\xi, t) = 1 - (4\xi - 2\xi^2)t = 0 \quad (2)$$

Las envolventes que se obtienen despejando ξ de (2) y sustituyendo en (1) son

$$x(t) = 1 \pm \sqrt{\frac{2t-1}{2t}} - \frac{1}{6} \left[12 \left(1 \pm \sqrt{\frac{2t-1}{2t}} \right)^2 - 4 \left(1 \pm \sqrt{\frac{2t-1}{2t}} \right)^3 \right] t \quad \text{para } t \geq \frac{1}{2}$$

y puede apreciarse en la figura

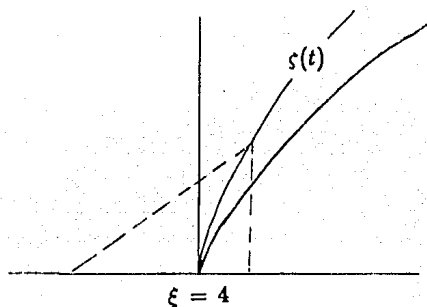


Como $\xi \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ la rama de la envolvente que tiende a infinito verticalmente es la que proviene de las características frente al choque y empalman con las características verticales. La otra rama tiende a $-\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

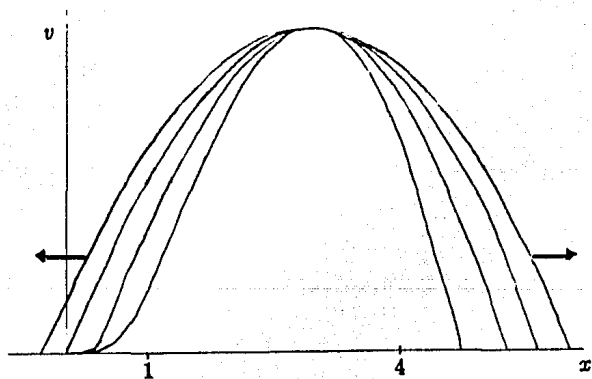
La intercara derecha, cerca de $\xi = 4$, comienza a moverse inmediatamente. La posición de la intercara se puede obtener explícitamente; para ello se debe observar que $x_\xi \neq 0$ si $0 < t < \frac{1}{2}$ entonces $x(\xi, t)$ no tiene puntos críticos para t en ese intervalo, por lo que debe ser de la forma

$$x(\xi, t) = \alpha \xi^3 + \xi \quad (3)$$

de donde la posición de la intercara —no la envolvente puesto que no hay valores de ξ que satisfagan (2) para $t < \frac{1}{2}$ — cerca de $\xi = 4$ es la función inversa de (3) y su forma es como se puede ver en la siguiente figura



A continuación se ilustra la situación para $t \geq 0$.



3.3.3 Análisis de tiempos de espera para intercarras generales

Se vió en la secciones anteriores cómo el comportamiento de la intercara depende de su curvatura y pendiente locales; ahora se analizará un caso un poco más general. Considérese $f(\xi) \sim k(\xi - \zeta_0)^\alpha$ cuando $\xi \rightarrow \zeta_0$ y $\alpha > 0$; donde ζ_0 es la posición inicial de la intercara. La solución de $v_t = v_x^2$

$$v(\xi, t) = f(\xi) - f'^2(\xi)t \quad (1)$$

$$x(\xi, t) = \xi - 2f'(\xi)t \quad (2)$$

da una aproximación al tiempo de espera haciendo $v = 0$ y $x = \zeta_0$; igualando (1) a cero y despejando t se obtiene la siguiente expresión para el tiempo de espera:

$$t_s = \frac{f(\xi)}{f'^2(\xi)}$$

donde ξ debe satisfacer la ecuación que se obtiene de hacer (2) igual a ζ_0 :

$$f'(\xi)(\xi - \zeta_0) = 2f'(\xi)$$

y sustituir el valor para t encontrado arriba. Entonces se tiene

$$t_s \sim \frac{k(\xi - \zeta_0)^\alpha}{\alpha^2 k^2 (\xi - \zeta_0)^{2(\alpha-1)}} = \frac{(\xi - \zeta_0)^{2-\alpha}}{\alpha^2 k}$$

donde ξ debe satisfacer

$$\alpha k(\xi - \zeta_0)^\alpha = 2k(\xi - \zeta_0)^\alpha$$

Cuando $\xi - \zeta_0 \neq 0$ entonces se tienen los siguientes casos:

- $\alpha = 2$ y $t_s = 1/\alpha^2 k$, finito y no cero. Este caso es similar al de la sección 3.4.1; la solución espera un tiempo finito reacomodándose detrás de la intercara antes de comenzar a moverse.
- $0 < \alpha < 2$ y $t_s = 0$. Como en el lado derecho del ejemplo de la sección 3.4.2, la intercara comienza a moverse inmediatamente.
- $\alpha > 2$ y $t_s = \infty$. De forma similar al lado izquierdo del ejemplo anterior, la intercara comienza a moverse cuando es alcanzada por el choque de esquina que se forma antes. En este caso, el tiempo de espera puede encontrarse de otras soluciones de

$$f'(\xi)(\xi - \zeta_0) = 2f(\xi) \quad (3)$$

Si se tiene varias soluciones de (3), todas deben ser examinadas para determinar cuál es la t_s más pequeña, que será el tiempo de espera. También es necesario ver con qué intercara está asociada una solución: como las características siempre se alejan del máximo de $v - v_x = f'(\xi)$ — cuando se cruzan por primera vez se forma el choque de esquina sobre la intercara asociada o bien la alcanza en un tiempo finito.

3.4 Aproximación a orden más alto

Dado que para obtener una solución correcta para u a orden uno hay que calcular v a orden ε , se hace necesario calcular el siguiente orden en v . Además, cuando hay un choque de esquina, la curvatura v_{xx} es grande y el término $\varepsilon v v_{xx}$ se vuelve importante. De hecho hay dos situaciones cualitativamente distintas que son $v \neq 0$ y $\varepsilon v_{xx} = O(1)$; $y, v = 0$ y $\varepsilon v_{xx} = O(1)$. La segunda situación es la de conversión del choque de esquina en una intercara.

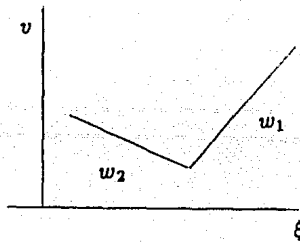
El propósito de esta sección es el de proporcionar los desarrollos uniformes en esas regiones.

Se procederá tomando en cuenta el término $\varepsilon v v_{xx}$ en las regiones cercanas a la posición del choque encontrado con la ecuación de primer orden.

3.4.1 El choque ocurre lejos de la intercara

Capa de esquina

Dado que la solución localmente es una esquina en la posición $\zeta(t)$ tal como se indica en la figura,



lo que se desea es encontrar el desarrollo de la solución $v(x, t)$ alrededor de la posición del choque $\zeta(t)$, mismo que debe ser una función de curvatura grande centrada en $\zeta(t)$, lineal con pendientes w_1 y w_2 , al alejarse del choque. Para esto se tomará la ecuación completa

$$v_t - v_{xx}^2 = \varepsilon v v_{xx} \quad (1)$$

y se asumirá que

$$\xi = \frac{x - \zeta(t)}{\varepsilon}$$

$$v(x, t) = v_0(t) + \varepsilon v_1(\xi, t)$$

Como se supondrá $v_0 \neq 0$, de acuerdo con el hecho de que el choque esté lejos de la intercara, se escalará el ancho del choque como ε .

La función v_0 satisface

$$\dot{v}_0(t) = -w_1 w_2$$

y la posición de la onda de choque

$$\dot{\xi}(t) = -(w_1 + w_2)$$

ya que se pedirá $v_{1x} \rightarrow w_1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $v_{1x} \rightarrow w_2$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
Sustituyendo se obtiene para v_1 la siguiente ecuación:

$$v_0 v_{1\xi\xi} = -(v_{1\xi} - w_1)(v_{1\xi} - w_2), \quad (2)$$

donde w_1 y w_2 son los valores de v_x fuera de la esquina.

Para resolver (2), sea $v_{1\xi} = s$ tal que $w_1 < s < w_2$ ya que es entre w_1 y w_2 donde se quiere determinar el comportamiento. La ecuación (2) queda entonces

$$v_0 s_\xi = -(s - w_1)(s - w_2)$$

o bien

$$-v_0 \left[\frac{s_\xi}{(w_1 - w_2)(s - w_1)} - \frac{s_\xi}{(w_1 - w_2)(s - w_2)} \right] = 1$$

Integrando

$$\frac{-v_0}{w_1 - w_2} [\ln(s - w_1) - \ln(w_2 - s)] = \xi$$

de donde

$$\begin{aligned} s(\xi) &= \frac{w_2 + w_1 \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right]}{1 + \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right]} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(1 + \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right] \right) (w_1 + w_2) + \left(1 - \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right] \right) (w_2 - w_1)}{1 + \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right]} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (w_1 + w_2) + \frac{1}{2} (w_2 - w_1) \frac{1 - \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right]}{1 + \exp \left[\frac{w_1 - w_2}{v_0} \xi \right]} \end{aligned}$$

Multiplicando el segundo término por

$$\frac{\exp \left[-\frac{w_1 - w_2}{2 v_0} \xi \right]}{\exp \left[-\frac{w_1 - w_2}{2 v_0} \xi \right]}$$

se tiene

$$s(\xi) = \frac{1}{2} (w_1 + w_2) + \frac{1}{2} (w_1 - w_2) \frac{\sinh \left[\frac{w_1 - w_2}{2 v_0} \xi \right]}{\cosh \left[\frac{w_1 - w_2}{2 v_0} \xi \right]}$$

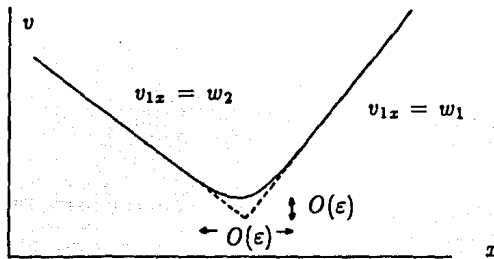
e integrando

$$v_1(\xi, t) = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)\xi + v_0 \ln \cosh \left[\frac{w_1 - w_2}{2v_0} \xi \right]$$

En términos de las variables originales, la expresión para v es

$$v \sim v_0 + \frac{w_1 + w_2}{2}(x - \zeta) + \varepsilon v_0 \ln \cosh \left[\frac{w_1 - w_2}{2v_0}(x - \zeta) \right] \quad (3)$$

la cual describe la solución sólo para ξ pequeña, lo que significa que $|x - \zeta| \leq 1$ a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, si esta proporción no se mantiene; es decir si ξ se aleja de la esquina, la aproximación deja de ser aceptable.



De (3) se puede ver que si el choque no ocurre en la intercara es redondeado, forma un codo suave de ancho $O(\varepsilon)$. Si $\varepsilon \rightarrow 0$ la capa se afila al disminuir su ancho, también se afila en el caso $v_0 \rightarrow 0$ pero este debe ser incluido en el estudio de la solución cuando el choque ocurre en la intercara.

La expansión uniforme

En lugar de completar la solución de (1) a $O(\varepsilon)$ empalmando aproximaciones válidas lejos de la capa de esquina con la solución (3), se construirá una solución aproximada uniformemente válida a primer orden de (1), proponiendo

$$v(x, t; \varepsilon) \sim v_0(x, t) + \varepsilon v_1(\xi, x, t) + \varepsilon^2 v_2(\xi, x, t) + \dots$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y donde

$$\xi = \frac{\zeta(x, t)}{\varepsilon}$$

donde $\zeta(x, t)$ es la corrección a la posición $\zeta(t)$ que se encontró en la sección anterior. Derivando, sustituyendo en la ecuación e igualando potencias de ε , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$v_{0t} + \zeta_t v_{i\xi} = (v_{0x} + \zeta_x v_{1x})^2 + \zeta_x^2 (v_0 + \varepsilon v_1) v_{1\xi\xi} \quad (4)$$

$$v_{1t} + \zeta_t v_{2\xi} = 2(v_{0x} + \zeta_x v_{1\xi})(v_{1x} + \zeta_x v_{2\xi}) \\ + (v_0 + \varepsilon v_1)(v_{0xx} + 2\zeta_x v_{1\xi\xi} + \zeta_{xx} v_{1\xi} + \zeta_x^2 v_{2\xi\xi}) \quad (5)$$

Hay que hacer notar que εv_1 sólo es $O(\varepsilon)$ en el centro de la capa de esquina, pero se vuelve $O(1)$ en los lados de la misma, por eso no se puede despreciar en comparación con v_0 , de ahí que para encontrar (4) y (5), se consideró $\varepsilon v_1 = O(1)$. La aproximación (3) será válida cerca del choque y el papel de v_1 es empalmar (3) con la solución exterior.

Que $v_2 \approx O(1)$ cuando la solución para v_1 se determina correctamente, se mostrará mas adelante. Reescribiendo (4)

$$(v_0 + \varepsilon v_1)v_{1\xi\xi} + v_{1\xi}^2 + \frac{1}{\zeta_x^2}(2v_{0x}\zeta_x - \zeta_t)v_{1\xi} + \frac{1}{\zeta_x^2}(v_{0x}^2 - v_{0t}) = 0$$

haciendo

$$\frac{1}{\zeta_x^2}(2v_{0x}\zeta_x - \zeta_t) = w_1 + w_2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\zeta_x^2}(v_{0t} - v_{0x}^2) = -w_1 w_2 \quad (7)$$

la ecuación queda

$$(v_0 + \varepsilon v_1)v_{1\xi\xi} + (v_{1\xi} - w_1)(v_{1\xi} - w_2) = 0 \quad (8)$$

Aparentemente w_1 y w_2 dependen de x y de t pero según se verá, deben ser constantes. Lo que hay que considerar es que v_x y v_t también deben tener expansiones uniformes, lo cual implica que v_{1x} y v_{1t} tienen que ser acotadas cuando $\xi \rightarrow \infty$ — $\varepsilon \rightarrow 0$ —. Para obtener la corrección del término a primer orden se pedirá que $v_1 \sim w_1 \xi$ cuando $\xi \rightarrow \infty$ entonces w_1 debe ser constante para que v_{1x} y v_{1t} sean acotadas. El mismo argumento es válido para w_2 . Multiplicando (6) por w_1 y sustituyendo (7) en esta expresión

$$w_1 \zeta_t - 2\zeta_x v_{0x} w_1 = \zeta_x^2 w_1^2 + v_{0x}^2 - v_{0t}$$

y reescribiendo

$$(v_0 + w_1 \zeta)_t = (v_0 + w_1 \zeta)_x^2$$

Si se multiplica (6) por w_2 se obtiene

$$(v_0 + w_2 \zeta)_t = (v_0 + w_2 \zeta)_x^2$$

y haciendo $v_0 + w_i \zeta = \hat{v}_i$ se tienen las ecuaciones

$$\hat{v}_{it} = \hat{v}_{ix}^2$$

cuya solución se encontro anteriormente.

Resolviendo el sistema

$$\hat{v}_1 = v_0 + w_1 \zeta$$

$$\hat{v}_2 = v_0 + w_2 \zeta$$

se obtienen los valores de ζ y v_0

$$\zeta = \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{w_1 - w_2} \quad v_0 = \frac{w_1 \hat{v}_2 - w_2 \hat{v}_1}{w_1 - w_2}$$

Como se mencionó anteriormente, se desea encontrar el desarrollo alrededor de la posición del choque $\zeta(t)$ y cuya forma debe ser como en la figura de arriba; entonces w_1 y w_2 se pueden normalizar por simplicidad —basta con que ninguno sea cero— por lo que se resolverá (3) tomando $w_1 = 1$ y $w_2 = -1$.

Cuando $\xi \rightarrow \infty$ — $\varepsilon \rightarrow 0$ —,

$$\zeta = \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2}$$

y

$$\dot{\zeta} = \frac{\hat{v}_{1t} - \hat{v}_{2t}}{2} = \frac{\hat{v}_{1x}^2 - \hat{v}_{2x}^2}{2} = (\hat{v}_{1x} - \hat{v}_{2x}) \frac{(\hat{v}_{1x} + \hat{v}_{2x})}{2}$$

de lo cual, tomando en cuenta que en la 3.5.1.1, $\xi = \frac{x - \zeta(t)}{\varepsilon}$, se obtiene el movimiento del choque a primer orden, y

$$v_0 = \varepsilon v_1 \sim v_0 + \varepsilon w_1 \xi \sim v_0 + w_1 \zeta$$

que es la solución encontrada en la sección anterior.

El trabajo de localizar la posición del choque hay que hacerlo en dos casos. (8) queda como

$$(v_0 + \varepsilon v_1) v_1 \xi \varepsilon + v_1^2 \xi = 1 \quad (9)$$

y como $v_0 \neq 0$ se puede hacer el siguiente cambio de variables

$$v_1 = v_0 F(z) \quad \text{con} \quad z = \frac{\xi}{v_0}$$

y obtener la ecuación

$$(1 + \varepsilon F) F_{zz} + F_z^2 = 1$$

Se obtendrá una expresión más elocuente de esta ecuación haciendo $1 + \varepsilon F = G$ y sustituyendo

$$G_z^2 + \varepsilon G G_{zz} = \varepsilon^2$$

dividiendo entre εG

$$G_{zz} + \frac{G_z^2}{\varepsilon G} = \frac{\varepsilon}{G}$$

multiplicando por $2G^2 G_x$ la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{dz}(G^2 G_x^2) = \frac{d}{dz}(\varepsilon^2 G^2)$$

integrando y despejando G_x

$$G_x = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (k_1 G)^{-2}}$$

Cambiando variables e integrando se obtiene

$$z + \beta = \pm \int_{\frac{1}{k}}^G \frac{d\eta}{\sqrt{\varepsilon^2 - (k_1 \eta)^{-2}}}$$

haciendo $\eta = \varepsilon h$

$$\begin{aligned} z + \beta &= \pm \int_{1+\frac{1}{k}}^{1+\varepsilon F} \frac{\varepsilon dh}{\sqrt{\varepsilon^2 - (k_1 \varepsilon h)^{-2}}} \\ &= \pm \int_{\frac{1}{k}}^{\varepsilon F} \frac{\varepsilon dh}{\varepsilon \sqrt{1 - (k_1 \varepsilon h)^{-2}}} \end{aligned}$$

haciendo $r = \frac{h}{\varepsilon}$ y $\varepsilon^k k_1 = k$

$$z + \beta = \pm \int_{\frac{1}{k}}^F \frac{dr}{\sqrt{1 - (kr)^{-2}}}$$

Donde β y k dependen de x y de t y, el signo de la integral se elige de acuerdo con el de $z + \beta$. Sumando y restando 1 se tiene

$$z + \beta = \pm \int_{\frac{1}{k}}^F \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (kr)^{-2}}} - 1 \right) dr \pm \left(F - \frac{1}{k} \right)$$

o bien

$$F = \pm(z + \beta) + \frac{1}{k} - \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (kr)^{-2}}} - 1 \right) dr + \int_F^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (kr)^{-2}}} - 1 \right) dr$$

En cualquier caso, cuando $z \rightarrow \pm\infty$ la segunda integral tiende a 0; entonces, cuando $z \rightarrow \pm\infty$

$$F \sim \pm(z + \beta) + \frac{1}{k} - \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (kr)^{-2}}} - 1 \right) dr$$

y como $F = \frac{v_1}{v_0}$ y $z = \frac{\xi}{v_0}$ se encuentra que

$$v_1 \sim \xi + \alpha_1(x, t) \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \infty$$

$$v_1 \sim -\xi + \alpha_2(x, t) \quad \text{cuando } \xi \rightarrow -\infty$$

Si se determinan α_1 y α_2 , se conocerán β y k , y v_1 quedará determinada de manera única. Para encontrar α_1 y α_2 se usará la ecuación (5) y el hecho de que v_2 debe ser acotada y su primera y segunda derivada deben tender a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$. Usando que

$$\frac{1}{\zeta^2}(\zeta t - 2\zeta_x v_{0x}) = 0$$

la ecuación (5) se puede escribir

$$-\zeta_x^2 (2v_1 \xi v_2 \xi + (v_0 + \varepsilon v_1) v_2 \xi \xi) = -v_{1t} + 2v_{0x} v_{1x} + 2\zeta_x v_{1x} v_1 \xi + (v_0 + \varepsilon v_1)(2\zeta_x v_1 \xi_x + \zeta_{xx} v_1 \xi + v_{0xx})$$

Por lo expuesto, el lado derecho debe tender a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, por otra parte se tenía

$$\zeta = \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2} \quad \text{y} \quad v_0 = \frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2}{2}$$

además

$$v_1 \sim \xi + \alpha_1 \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty$$

Entonces, en ese caso

$$v_{1t} \rightarrow \alpha_{1t}, \quad v_1 \xi \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad v_{1x} \rightarrow \alpha_{1x}$$

Sustituyendo y considerando que $\varepsilon \alpha_1 \rightarrow 0$ se obtiene la siguiente ecuación para α_1

$$\alpha_{1t} = 2\hat{v}_{1x} \alpha_{1x} + \hat{v}_1 \hat{v}_{1xx} \quad (10)$$

Si $\xi \rightarrow -\infty$, considerando que $v_1 \sim -\xi + \alpha_2$ la ecuación que se encuentra para α_2 es

$$\alpha_{2t} = 2\hat{v}_{2x} \alpha_{2x} + \hat{v}_2 \hat{v}_{2xx} \quad (11)$$

Para \hat{v}_i se tenían las ecuaciones

$$\hat{v}_{it} = \hat{v}_{ix}^2$$

Si se denomina $\hat{v}_i(x, 0) = f_i(x)$ éstas tienen solución

$$\hat{v}_i(\xi, t) = f_i(\xi) - f_i'^2(\xi)t$$

$$x(\xi, t) = \xi - 2f_i'(\xi)t$$

Usando que $\hat{v}_{ix} = f_i'(\xi)$, $\hat{v}_{ixx} = f_i''(\xi) \xi_x$ y lo anterior, (10) y (11) se convierten en

$$\alpha_{it} - 2f_i' \alpha_{ix} = \frac{(f_i - f_i'^2 t) f_i''}{1 - 2f_i' t}$$

con

$$x(\xi, t) = \xi - 2f_i'(\xi)t$$

Integrando se obtiene

$$\alpha_i(\xi, t) = \left[\frac{f_i'^2}{4f_i''} - \frac{f_i}{2} \right] \ln |1 - 2f_i''(\xi)t| + \frac{f_i'^2 t}{2} - \frac{f_i'^2}{4f_i''}$$

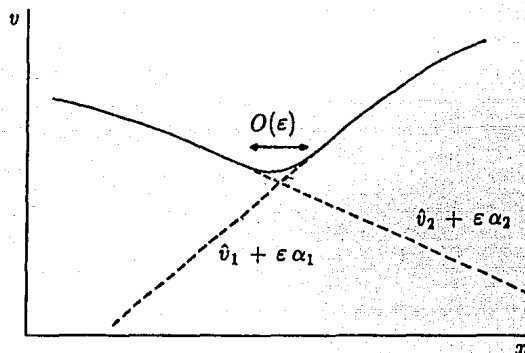
Sustituyendo en la solución encontrada para la ecuación (9) y considerando que v_1 debe satisfacer

$$v_1 \sim \xi + \alpha_1 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \infty$$

$$v_1 \sim -\xi + \alpha_2 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow -\infty$$

la expresión encontrada para v es

$$v \sim \frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2}{2} + \varepsilon \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2} \ln \cosh \left[\frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2 + \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2)}{\varepsilon(\hat{v}_1 + \hat{v}_2)} \right] + \varepsilon \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \dots \quad (12)$$



Resumiendo, se quería encontrar la solución de

$$v_t = v_x^2 + \varepsilon v v_{xx}$$

a primer orden considerándola de la forma

$$v(x, t; \varepsilon) \sim v_0(x, t) + \varepsilon v_1(\xi, x, t) + \varepsilon^2 v_2(\xi, x, t) + \dots$$

donde

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \xi = \frac{\zeta(x, t)}{\varepsilon}$$

Se llegó primero a que

$$v_0 = \frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2}{2} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2}$$

donde \hat{v}_1 y \hat{v}_2 satisfacen la ecuación

$$\hat{v}_{it} = \hat{v}_{iz}^2$$

resolviéndola se conocen v_0 y ζ .

Luego se encontró que

$$v_1 \sim \xi + \alpha_1(x, t) \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$v_1 \sim -\xi + \alpha_2(x, t) \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow -\infty$$

donde α_1 y α_2 satisfacen la ecuación

$$\alpha_{it} = 2\hat{v}_{iz}\alpha_{iz} + \hat{v}_1\hat{v}_{izx}$$

resolviéndola queda determinada v_1 de forma única. A los lados de la capa, la solución a primer orden es

$$v_0 + \varepsilon v_1 = v_0 + \varepsilon(\xi + \alpha_1) = v_0 + \zeta + \varepsilon\alpha_1 = \hat{v}_1 + \varepsilon\alpha_1 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$v_0 + \varepsilon v_1 = v_0 + \varepsilon(-\xi + \alpha_2) = v_0 - \zeta + \varepsilon\alpha_2 = \hat{v}_2 + \varepsilon\alpha_2 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow -\infty$$

y en el centro, (12) une los dos lados de la capa sin discontinuidades y formando un codo suave. El centro es exactamente donde

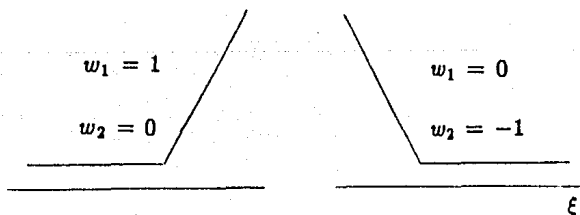
$$\hat{v}_1 + \varepsilon\alpha_2 = \hat{v}_2 + \varepsilon\alpha_1$$

A la izquierda del codo v depende de \hat{v}_1 sólo por términos muy pequeños cuando ε tiende a cero, lo mismo sucede a la derecha con \hat{v}_2 .

3.4.2 Cuando el choque ocurre en la intercara

La expansión uniforme

En este caso se tomará una de las constantes como cero ya que la esquina debe ser como en la figura; así $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$



y para obligar a la capa a estar en la intercara, $\hat{v}_2 = 0$.

Entonces

$$\zeta = \hat{v}_1$$

$$v_0 = 0$$

y la ecuación por resolver es

$$\varepsilon v_1 v_{1\xi\xi} + (v_{1\xi} - 1)v_{1\xi} = 0$$

multiplicando por

$$\frac{1}{\varepsilon} v_1^{\frac{1}{2}-1},$$

se puede escribir

$$\frac{d}{d\xi}(v_1^{\frac{1}{2}} v_{1\xi}) = \frac{d}{d\xi}(v_1^{\frac{1}{2}})$$

de donde

$$v_{1\xi} = 1 - \alpha(x, t) v_1^{-\frac{1}{2}}$$

Haciendo

$$\alpha = (1/\alpha_2)^{-\frac{1}{2}}$$

e integrando

$$\xi = \int_k^{v_1} \frac{dh}{1 - (h/\alpha_2)^{-\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

usando que (1) puede aproximarse por

$$\xi \sim v_1 - k + \alpha_2^{\frac{1}{2}} \int_k^{v_1} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

se sigue que

$$v_1 \sim \xi + \alpha_1(x, t) \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \infty$$

donde α_1 depende de α_2 y de k , y observando que

$$1 - \left(\frac{h}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim 1 - \frac{h}{\alpha_2} \quad \text{si } h \rightarrow \alpha_2$$

se obtiene

$$v_1 \sim \alpha_2(x, t) \quad \text{cuando } \xi \rightarrow -\infty$$

Las ecuaciones que permiten encontrar α_1 y α_2 son las mismas que en el caso anterior ya que aquí se requiere imponer a v_2 las mismas condiciones. Entonces se tiene que

$$\alpha_{it} = 2\hat{v}_{ix}\alpha_{ix} + \hat{v}_i\hat{v}_{ixx}$$

Sin embargo se simplifican gracias a que $\hat{v}_2 = 0$, obteniéndose

$$\alpha_{1t} = 2\hat{v}_{1x}\alpha_{1x} + \hat{v}_1\hat{v}_{1xx}$$

$$\alpha_{2t} = 0$$

de donde se ve que α_2 no depende del tiempo; es decir que v_1 no depende del tiempo cuando $\xi \rightarrow -\infty$ y como se quiere que el choque ocurra en la intercara, α_2 debe ser cero porque $v = 0$ a la izquierda de la misma cuando $-w_1 = -1$ y $w_2 = 0$. Como $\alpha_2 = 0$, para determinar v_1 de (1) se escribirá como

$$\lim v_1(\xi, x, t) = \frac{1}{2} [(\xi + \alpha_1) + |\xi + \alpha_1|]$$

o, lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi + \alpha_1 & \text{si} & \quad \xi + \alpha_1 > 0 \\ v_1 &= 0 & \text{si} & \quad \xi + \alpha_1 < 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\xi = v_1/\varepsilon$ en la expansión $v \sim \varepsilon v_1 + \dots$

$$v \sim \frac{1}{2} [(\hat{v}_1 + \varepsilon \alpha_1) + |\hat{v}_1 + \varepsilon \alpha_1|]$$

A $O(\varepsilon)$ en $v = 0$ se tiene $v \sim \zeta$ y por lo tanto $\zeta \sim 0$; la primera condición dice que x está en la intercara, y la segunda que está cerca del choque.

Cuando el tiempo de espera es cero

Para poder utilizar la expansión hallada $v(x, 0) = f(x)$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & \text{si} & \quad x \leq a \quad \text{o} \quad x \geq b \\ f(x) &> 0 & \text{si} & \quad a < x < b \quad \text{y} \\ f''(x) &\leq 0 & \text{si} & \quad a < x < b \end{aligned}$$

Las dos primeras condiciones son para evitar casos en que se encuentran varias intercara y la tercera asegura que no se formarán choques donde $v > 0$, lo que corresponde al hecho de que el tiempo de espera sea cero. Para encontrar la aproximación uniforme se construye la expansión regular

$$v(x, t; \varepsilon) \sim v_0(x, t) + \varepsilon v_1(x, t) + \dots$$

cuyas soluciones se obtienen de la siguiente forma: para v_0 se tenía que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} (v_{0t} - v_{0x}^2) = -w_1 w_2$$

pero en este caso $w_1 w_2 = 0$, entonces v_0 satisface

$$v_{0t} = v_{0x}^2$$

cuya solución es

$$v_0(\xi, t) = f(\xi) - f'^2(\xi)t$$

$$x(\xi, t) = \xi - 2f'(\xi)t$$

y para obtener v_1 se utilizará la ecuación

$$\alpha_{1t} = 2\hat{v}_{1x}\alpha_{1x} + \hat{v}_1\hat{v}_{1xx}$$

cuya solución se obtuvo en la sección anterior

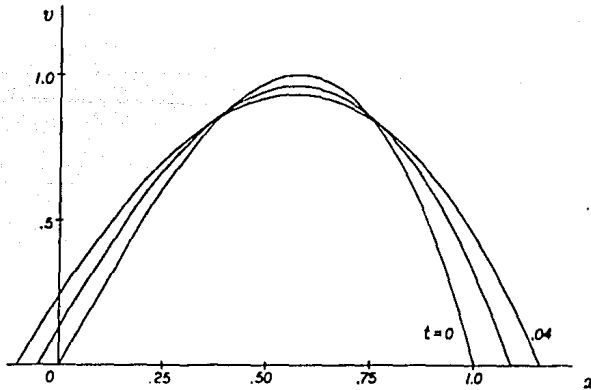
$$v_1(\xi, t) = \left[\frac{f'^2}{4f''} - \frac{f}{2} \right] \ln |1 - 2f''t| + \frac{f'^2 t}{2}$$

Tomando la parte positiva de

$$v(x, t; \varepsilon) \sim v_0(\xi, t) + \varepsilon v_1(\xi, t) + \dots$$

se obtiene la aproximación uniforme. Un ejemplo de esta aproximación es el que se muestra en la siguiente figura, donde

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{3(\xi - \xi^3)} & \text{para } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



La aproximación tiene un máximo en $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, al igual que la condición inicial f ; pero el valor de v allí decrece con el transcurrir del tiempo ya que v_{1x} sí depende de t , lo que no sucedía con la aproximación que se hizo en la sección 3.1 donde $v_x = f'(\xi)$; es decir que el máximo se mantenía constante al crecer t . Como $v(x, t; \varepsilon) = u(x, \varepsilon t; \varepsilon)^t$, al regresar a la variable original el decrecimiento se amplifica.

Cuando el tiempo de espera no es cero

Si el tiempo de espera no es cero se puede utilizar

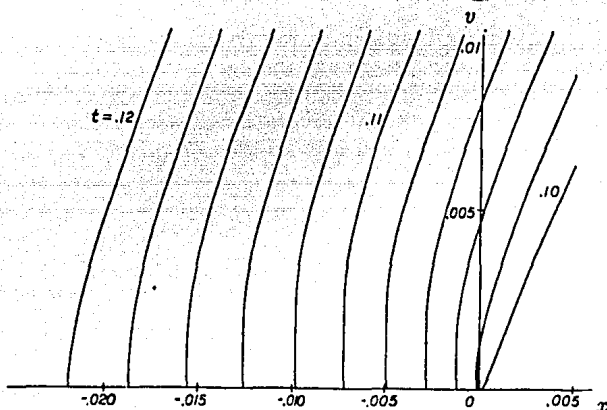
$$v \sim \frac{1}{2} [v_0(\xi, t) + \varepsilon v_1(\xi, t) + |v_0(\xi, t) + \varepsilon v_1(\xi, t)|]$$

solamente si el choque se forma en la intercara; es decir, cuando $f''(x)$ tiene un máximo positivo allí. Con el ejemplo

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \pi \xi}{2} & \text{para } 0 \leq \xi \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

cuyo choque se forma al tiempo

$$t_s = \frac{1}{2f''(0)t} = \frac{1}{\pi^2} \sim 0.1$$



se puede ver en la figura que la posición de la intercara modifica bruscamente la forma de la expansión exactamente después de la formación del choque, regresa una vez que ha comenzado a moverse —se vió en la primera parte de este capítulo que eso no es posible—, esto se debe a que la expansión no incluye corrección alguna para el tiempo al cual la intercara comienza a moverse, por lo que se reescalará el tiempo:

$$\tilde{t} = (1 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots)t$$

y escogiendo $\beta_1, \beta_2 \dots$ apropiadamente, la ecuación para v es

$$v_{\tilde{t}} = v_x^2 + \varepsilon(vv_{xx} - \beta_1 v_{\tilde{t}}) + \dots$$

Asumiendo

$$v(x, \tilde{t}; \varepsilon) \sim v_0(x, \tilde{t}) + \varepsilon v_1(\xi, x, \tilde{t}) + \varepsilon^2 v_2(\xi, x, \tilde{t}) + \dots$$

y utilizando el mismo procedimiento que antes, se encuentra que los dos primeros términos de la expansión son

$$v_0(\xi, \tilde{t}) = f(\xi) - f'^2(\xi)\tilde{t}$$

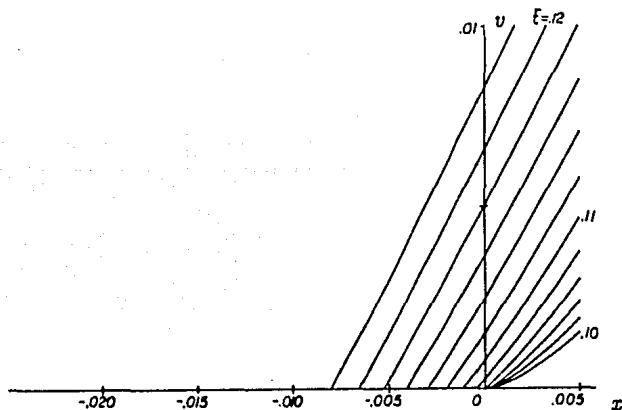
$$x(\xi, \tilde{t}) = \xi - 2f'(\xi)\tilde{t}$$

$$v_1(\xi, \tilde{t}) = \left[\frac{f'^2}{4f''} - \frac{f}{2} \right] \ln |1 - 2f''\tilde{t}| + \left(\frac{1}{2} - \beta_1 \right) \frac{f'^2 \tilde{t}}{2}$$

β_1 se determina examinando la solución aproximada cerca del tiempo y posición de formación del choque. Si $f(\xi) \sim a\xi^2$ cuando $\xi \rightarrow 0$, lo cual parece una buena aproximación local, entonces

$$v_0 + \varepsilon v_1 \sim a\xi^2 [1 - 4a\tilde{t} + \varepsilon(1/2 - \beta_1)4a\tilde{t}] \quad \xi \rightarrow 0$$

El término de $O(\varepsilon)$ dominará cerca de $\tilde{t} = (4a)^{-1}$ si no se escoge $\beta_1 = \frac{1}{2}$. La expansión corregida elimina la dificultad señalada como se ve en la figura.



El reescalamiento del tiempo hecho da una corrección a primer orden para el tiempo de espera cuando el choque se forma en la intercara. De $x(\xi, \tilde{t}) = \xi - 2f'(\xi)\tilde{t}$

$$\frac{dx}{d\xi} = 1 - 2f''(\xi)\tilde{t} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots \right) \tilde{t} = 0$$

entonces el tiempo de espera en la variable original es

$$t_* = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon + \dots} \frac{1}{f''(\xi_*)}$$

donde ξ_* es la posición del máximo de f'' .

BIBLIOGRAFÍA

- D. Aronson y H. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve impulse propagation*, Lectures notes in Math. Vol. 446, Springer Verlag, 1975, Berlin-Heideberg-New York.
- Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall
- H. Cohen, *Mathematical developments in the Hodgkin-Huzley theory and its aproximations*, Lectures on Math. in Life Sci. 8, 1976, pp. 89-124.
- O. Diekmann y N. M. Temme (eds), *Nonlinear diffusion problems*, MC Syllabus, Amsterdam, 1976.
- R. Fitzhugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes*, Biophys. J., 1, 1961, pp.445-446
- W. Kath y D. Cohen *Waiting-time behavior in a nonlinear diffusion equation*, SIAM 67, 1982, pp. 79-105
- J. Nagumo, S. Arimoto y S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating a nerve axon*, Proc. Inst. Radio Eng. 50, 1962, pp. 2061-2070